

ECOLE NATIONALE DES SCIENCES  
APPLIQUEES D'AGADIR



---

# Pricing des options par simulation de Monte Carlo

---

FINANCE ET INGÉNIERIE DÉCISIONNELLE

DJANAME PAG-YENDU

Pr EL ASRI

## Contents

<b>I</b>	<b>Modèle de Black-Scholes</b>	<b>2</b>
I.1	Présentation du modèle . . . . .	2
I.2	Notion de volatilité . . . . .	3
I.2.1	Volatilité Implicite . . . . .	4
I.2.2	Volatilité locale . . . . .	4
I.2.3	Volatilité stochastique . . . . .	4
<b>II</b>	<b>La méthode de Monte Carlo</b>	<b>5</b>
II.1	Définition . . . . .	5
II.2	Validité de la méthode . . . . .	6
II.2.1	Loi forte des grands nombres . . . . .	6
II.2.2	Théorème central limite . . . . .	6
II.3	Méthode de Simulation . . . . .	6
II.3.1	Méthode de Choleski . . . . .	6
II.3.2	Méthode de fonction de répartition . . . . .	6
II.3.3	Méthode de Rejet . . . . .	7
<b>III</b>	<b>Simulation</b>	<b>7</b>
III.1	La loi uniforme . . . . .	7
III.1.1	Générateurs congruentiels linéaires . . . . .	7
III.2	La loi normale . . . . .	7
III.2.1	Théorème: Algorithme de Box-Müller . . . . .	7
III.2.2	Simulation . . . . .	8
III.3	Le mouvement Brownien . . . . .	8
III.3.1	Définition . . . . .	8
III.3.2	Simulation . . . . .	9
III.3.3	Implémentation . . . . .	9
III.4	Simulation du prix du sous-jacent $S_t$ . . . . .	10
<b>IV</b>	<b>Valeur de l'option</b>	<b>12</b>
IV.1	Comparaison . . . . .	13
IV.1.1	Solution exacte: Formule de Black-Scholes . . . . .	13
IV.2	Réduction de la variance . . . . .	13
IV.2.1	Variable de Contrôle . . . . .	14
IV.2.2	Échantillonnage préférentiel . . . . .	14
IV.2.3	Les variables antithétiques . . . . .	14

<b>V</b>	<b>Modèle de pricing</b>	<b>15</b>
V.1	Les grecques . . . . .	16
V.1.1	Différence finie . . . . .	16
V.1.2	Le Delta . . . . .	17
V.1.3	le Gamma . . . . .	17
V.1.4	Le Vega . . . . .	17
V.1.5	Le Thêta . . . . .	17
V.1.6	Rho . . . . .	18
V.1.7	Couverture . . . . .	18
V.2	La value At Risque . . . . .	18
V.2.1	Détermination de la VaR d'option: Méthode Delta gamma . . . . .	19
V.3	Option Asiatique . . . . .	20
V.3.1	Pricing . . . . .	20
V.3.2	les grecques . . . . .	21
V.3.3	VaR . . . . .	21
V.3.4	Implémentation . . . . .	21
V.4	Option LookBack . . . . .	21
V.4.1	Pricing . . . . .	22
V.4.2	les grecques . . . . .	22
V.4.3	VaR . . . . .	22
V.4.4	Implémentation . . . . .	23
V.5	Option barrière . . . . .	23
V.5.1	Pricing . . . . .	23
V.5.2	VaR . . . . .	24
V.5.3	Implémentation . . . . .	24
V.6	Portefeuille d'option . . . . .	24
V.6.1	La valeur du portefeuille . . . . .	24
V.6.2	la VaR: Delta-gamma . . . . .	25
V.6.3	Application . . . . .	25

## List of Figures

1	Simulation de la loi normale . . . . .	8
2	loi normale plot . . . . .	8
3	Simulation du mouvement brownien . . . . .	9
4	Graphe de mouvement brownien . . . . .	10
5	Prix du sous-jacent . . . . .	11
6	Évolution du cours du sous-jacent . . . . .	12
7	Valeur de l'option . . . . .	13

---

8	Comparaison avec le modèle de Black-Scholes . . . . .	13
9	. . . . .	15
10	Simulation de variables iid suivant la loi normal avec la suite de Sobol . . . . .	16
11	Résultat de pricing: Variable antithétique, variable de contrôle et quasi-monte-carlo . . . . .	16
12	Interface de Calcul des grecques avec Pyqt5 . . . . .	18
13	paramètre de pricing . . . . .	19
14	Pricing d'option européenne . . . . .	20
15	Pricing d'option asiatique . . . . .	21
16	Pricing d'option lookback . . . . .	23
17	Pricing d'option barrière . . . . .	24
18	Application:Portefeuille . . . . .	25

# I Modèle de Black-Scholes

## I.1 Présentation du modèle

Le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique d'évaluation des options dans lequel le prix du sous-jacent est un processus stochastique en temps continu.

En effet, on suppose que les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants sous probabilité  $\mathbb{P}$  :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1)$$

En appliquant la formule d'Ito à  $f(x) = \ln(x)$ ,  $x \rightarrow \ln(x)$  est deux fois continument différentiables

$$\begin{aligned} \ln S_t &= \ln S_0 + \int_0^t \frac{dS_t}{S_t} + \int_0^t \frac{S_t^2 \sigma^2 dt}{2S_t^2} \\ \ln S_t &= \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \\ S_t &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right) \end{aligned}$$

Sous la probabilité risque neutre  $\mathbb{Q}$  équivalent à  $\mathbb{P}$  définit par:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} dW_s + \int_0^t \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} dt\right)$$

Alors par le théorème de Girsanov  $W_t^{\mathbb{Q}} = W_t + \frac{\mu - r}{\sigma}t$  est un mouvement Brownien sous  $\mathbb{Q}$  et  $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$

Le processus  $(S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$  définie par :

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

Sous hypothèse de :

- le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique
- Absence d'opportunité d'arbitrage
- possibilité d'effectuer des ventes à découvert

- possibilité d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais
- il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant
- l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance

le modèle de Black-Scholes peut être utilisé afin d'estimer en théorie la valeur d'une option financière

La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

- $S_0$  la valeur actuelle de l'action sous-jacent
- $T$  le temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années)
- $K$  le prix d'exercice fixé par l'option
- $r$  le taux d'intérêt sans risque
- $\sigma$  la volatilité du prix de l'action

Parité Call-Put  $C = P + S_0 - K \exp(-rt)$

Formule Call  $C = S_0 \phi(d_1) - K \exp(-rt) \phi(d_2)$

Formule Put  $P = K \exp(-rt) \phi(-d_2) - S_0 \phi(-d_1)$

Avec  $\phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1 = \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \ln\left(\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$$
$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{t}$$

Les quatre premières données sont évidentes, seule la volatilité  $\sigma$  de l'actif est difficile à évaluer. Deux analystes pourront avoir une opinion différente sur la valeur de  $\sigma$  à choisir.

## I.2 Notion de volatilité

La formule de Black-Scholes est souvent utilisée dans le marché même pour les actifs dont la volatilité n'est pas constante ni voir déterministe. Cette pratique est partiellement justifiée par la propriété connue sous le nom de "robustesse de la formule de Black-Scholes": même si la vraie volatilité du sous-jacent est stochastique, la formule de Black-Scholes peut être utilisé pour calculer les bornes supérieures / inférieures du prix, pourvu que la volatilité constante utilisée majore / minore la vraie volatilité.

### I.2.1 Volatilité Implicite

Dans le modèle de Black et Scholes l'unique paramètre inobservable est la volatilité. Elle est assimilée à une constante. Le modèle de Black-Scholes implique que la volatilité implicite de toutes les options sur le même sous-jacent doit être la même, et égale à la volatilité historique du sous-jacent. Cependant, lorsqu'on calcule la volatilité implicite à partir de prix de différentes options observés sur le marché, on constate que, La volatilité implicite est toujours supérieure à la volatilité du sous-jacent; les volatilités implicites de différentes options sur le même sous-jacent dépendent de leur strikes et maturités.

La volatilité implicite est très utilisée pour le calcul des ratios de couverture des options européennes et le pricing d'autre option dite exotique.

### I.2.2 Volatilité locale

Volatilité locale est une extension naturelle du modèle de Black-Scholes, la volatilité n'est plus constante elle dépend du sous-jacent et du temps car pour prendre en compte le smile de volatilité du marché tout un restant dans le cadre markovien et complet (un seul facteur de risque) une solution naturelle est de modéliser la volatilité comme une fonction déterministe du temps et de la valeur du sous-jacent:

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma(S_t, t) dW_t \\ \frac{dB_t}{B_t} &= r dt\end{aligned}$$

Par analogie exacte au modèle de Black-Scholes, le modèle de volatilité locale correspond à un marché complet et l'unique probabilité risque-neutre est donnée par:

$$\frac{dQ}{dP}|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \frac{\mu - r}{\sigma} dW_s + \int_0^t \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2} dt\right)$$

Sous la probabilité risque neutre:

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(S_t, t) dW_t^Q$$

### I.2.3 Volatilité stochastique

Pour les classes de modèles vu précédemment, une couverture parfaite est possible, ce qui est faux en pratique.

Nous introduisons ici un nouveau modèle : **Modèle à volatilité stochastique**. Ces modèles consistent à modéliser la volatilité comme un processus stochastique à part entière, sans se limiter à des fonctions déterministes de sous-jacent. Ils ont comme avantage de non seulement expliquer le phénomène de smile mais aussi conduire à une dynamique réaliste pour le prix et la surface de volatilité implicite.

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \mu_t dt + \sigma(t) dW_t \\ d\sigma_t &= a_t dt + b_t dW'_t \\ d < W', W >_t &= \rho dt\end{aligned}$$

Les coefficients  $a_t$  et  $b_t$  sont choisis pour que la volatilité  $d\sigma_t$  soit un processus stochastique positif

$\rho$  est la corrélation instantanée entre le sous-jacent et la volatilité

### Exemple

- Modèle de Heston
- Modèle de Ornstein-Uhlenbeck
- Modèle de Vasicek

## II La méthode de Monte Carlo

### II.1 Définition

La simulation de Monte-Carlo est une méthode d'estimation d'une quantité numérique en utilisant des procédés aléatoires. Elle consiste à simuler plusieurs une variable aléatoire de manière indépendante et à prendre la moyenne. Soit une variable aléatoire  $X = (X_1 \dots X_d)$  de loi  $\nu$  sur  $\mathbf{R}^d$  une fonction  $h$  définie de  $\mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ . la méthode de monte carlo consiste à l'estimation de la quantité  $\gamma$  en présentant sous forme de:

$$\gamma = E[h(X)] = \int_{\mathbf{R}} h(X) \nu(dX)$$

la solution que nous propose la méthode de monte carlo est de simuler  $(X_n)_{n>0}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées(i.i.d), à valeurs dans  $\mathbf{R}$  suivant la loi  $\nu$  puis estimer l'espérance par la moyenne empirique



## II.2 Validité de la méthode

### II.2.1 Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n)_{n>0}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ). On suppose que  $E(|X|) < +\infty$ . Alors:

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ps} E[X]$$

### II.2.2 Théorème central limite

Soit  $(X_n)_{n>0}$  une suite de variables aléatoires i.i.d., à valeurs dans  $\mathbf{R}^d$  ( $d \in \mathbb{N}$ ). On suppose que  $E(X^2) < +\infty$ , sont  $\sigma^2 = \mathbf{V}(\mathbf{X})$  Alors:

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left( \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E[X] \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{ps} \mathcal{N}(0, 1)$$

L'erreur de d'estimation est donc  $\epsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \left| \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - E[X] \right|$

Vu ce qui précède il faut savoir simuler la loi  $\nu$  du vecteur aléatoire  $X$ , analysons la formule de black and Scholes pour déterminer la nature de la loi à simuler

## II.3 Méthode de Simulation

### II.3.1 Méthode de Choleski

La méthode de Choleski permet de simuler une variable aléatoire gaussienne centrée vectorielle à partir de la donnée de sa matrice de covariance.

Soit  $C$  une matrice (réelle) symétrique positive  $n \times n$ . Alors, si  $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times p}$  telle que  $\Sigma \Sigma^T = C$  si  $\vec{X} \in \mathbb{R}^p$  un vecteur gaussien standard, et soit  $m \in \mathbb{R}^p$ , le vecteur  $\Sigma \vec{X}$  suit la loi  $\mathcal{N}(m, C)$ .

### II.3.2 Méthode de fonction de répartition

La méthode de fonction de répartition est la méthode la plus populaire et la plus utilisé.

**(Réciproque de la fonction de répartition)** . On appelle fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi  $\mathbb{P}$ , la fonction de  $[0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F^{-1}(p) := \inf x \in \mathbb{R}, F(x) \geq p$

**(Réciproque de la fonction de répartition)** Si  $U$  suit une loi uniforme sur  $[0; 1]$ , alors  $F_P^{-1}(U)$  suit la loi  $P$ .

### II.3.3 Méthode de Rejet

Soit  $P$  une loi sur  $X$  et soit  $Q$  une loi sur  $x$  telle que  $Q$  soit à densité par rapport à  $P$  et que la densité  $dQ/dP$  soit uniformément bornée par une constante explicite  $M$  ; et supposons en outre que cette densité soit calculable explicitement. Alors, si  $(x_i; u_i)_{i \in N}$  est une suite de couples i.i.d. de variables aléatoires, telles que  $x_i$  suivent la loi  $P$  et que  $u_i$  soit indépendante de  $x_i$  et suive la loi  $\text{Uniforme}(0; 1)$ , notant :

$$i_* = \min\{i \in N : (dQ/dP)(x_i) \geq Ku_i\}$$

Pour appliquer la méthode de rejet, il faut en pratique que la densité  $dQ/dP$  soit explicitement calculable, et qu'on sache en déterminer un majorant explicite.

## III Simulation

### III.1 La loi uniforme

Les ordinateurs sont des automates, ils sont incapables de générer des variables aléatoires, les ordinateurs n'engendrent qu'une suite de variables connues dites déterministes, mais il est possible de construire des suites de nombres qui se comportent (statistiquement) comme des suites aléatoires : pseudo-aléatoire.

#### III.1.1 Générateurs congruentiels linéaires

Ce type de générateur produit des suites de nombres pseudo-aléatoires sur  $[0, 1]$  à partir de l'algorithme suivant :

Étant donnés deux paramètres entiers  $A$  et  $M$

1. Choisir une racine  $X_0$
2. à l'étape  $n > 0$ , construire  $X_n = AX_{n-1} \pmod{M}$  et retourner  $U_n = \frac{X_n}{M}$

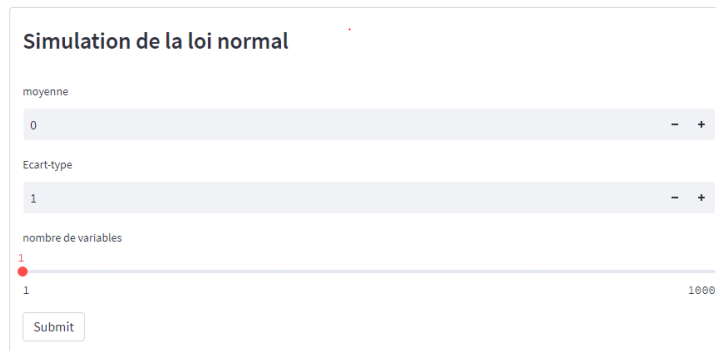
### III.2 La loi normale

#### III.2.1 Théorème: Algorithme de Box-Müller

Soit  $U, V$  deux variables aléatoires de loi  $\mathcal{U}([0; 1])$  et indépendantes alors :

$(\sqrt{-2 \ln U} \cos(2\pi V), \sqrt{-2 \ln U} \sin(2\pi V))$  est un vecteur gaussien centré de matrice de covariance  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (donc les deux composantes sont indépendantes et de loi  $\mathcal{N}(0; 1)$ ).

### III.2.2 Simulation



**Simulation de la loi normal**

moyenne  
0 - +

Ecart-type  
1 - +

nombre de variables  
1 1000

Submit

Figure 1: Simulation de la loi normale

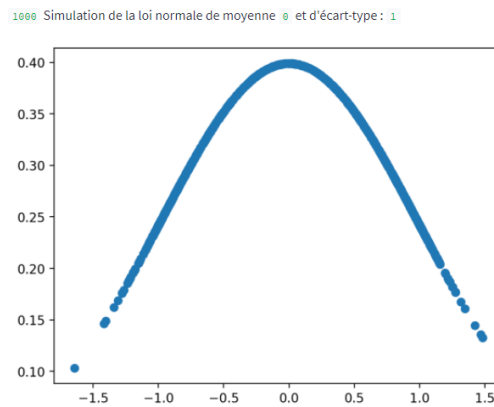


Figure 2: loi normale plot

## III.3 Le mouvement Brownien

### III.3.1 Définition

Un processus stochastique  $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  est un mouvement brownien standard si, et seulement si,

1.  $W$  est adapté,

2.  $W$  est issu de 0, i.e.,  $W_0 = 0$  p.s.,
3.  $W$  est à trajectoires continues,
4.  $W$  est à accroissements indépendants, i.e., pour toutes séquences  $\theta = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , les variables  $(W_{t_0} - W_{t_1}, W_{t_1} - W_{t_2}, \dots, W_{t_{n-1}} - W_{t_n})$  sont indépendantes,
5.  $W$  est à accroissements stationnaires, i.e., pour tous  $s < t$  la valeur de  $W_t - W_s$  ne dépend que de la valeur de  $t-s$  et  $W_t - W_s \sim \mathbf{N}(0, t-s)$

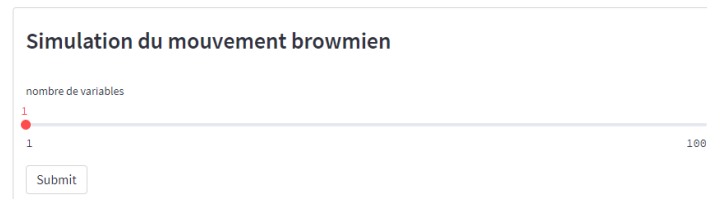
### III.3.2 Simulation

Soit  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de  $\mathbf{R}_+$  et  $(Z_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de variables i.i.d. de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ . On définit le processus  $W = (W_n)_{n \in \mathbf{R}_+}$  par

1.  $W_0 = 0$
2.  $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \sqrt{t_{n+1} - t_n} Z_n$

Alors  $W$  est une réalisation de trajectoires du mouvement brownien aux instants  $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ .

### III.3.3 Implémentation



The image shows a web-based simulation interface. At the top, it says 'Simulation du mouvement brownien'. Below this, there is a label 'nombre de variables'. A horizontal slider bar is shown with a red dot at the left end, which is labeled '1'. The right end of the slider is labeled '100'. Below the slider, there is a 'Submit' button.

Figure 3: Simulation du mouvement brownien

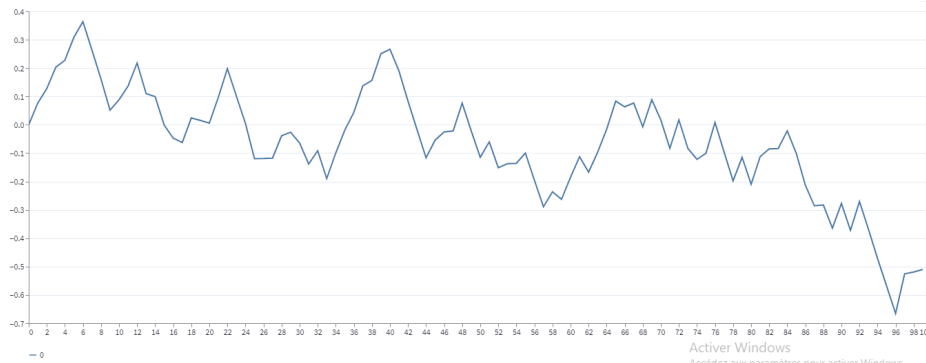


Figure 4: Graphe de mouvement brownien

### III.4 Simulation du prix du sous-jacent $S_t$

Modèle de Black-Scholes est un modèle mathématique de détermination du prix d'une option dans lequel le prix du sous-jacent est un processus stochastique en temps continu. Le processus  $(S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$  défini par:

$S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$  solution de l'équation différentielle  $dS_t = S_t(rdt + \sigma dW_t)$ , avec :

- $r$  : taux sans risque
- $\sigma$  : Volatilité du prix de l'option
- $W_t$  : le mouvement brownien standard

Simuler  $(S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$  revient à simuler tout d'abord le mouvement brownien  $W_t$ , simulation qui dépend de la simulation de la loi normale qui dépend elle aussi de la simulation de la loi uniforme. Nous allons, dans un premier temps, simuler la loi uniforme puis simuler en suite la loi normale, pour aboutir à la simulation du mouvement brownien et enfin avec le résultat précédent simuler les divers prix prient par le sous-jacent durant une période  $T$ .

Le processus  $(S_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$  est défini par:  $(S_t = S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t)$   
Pour :

- le prix du sous-jacent à  $t=0$   $S_0=100$
- le Strike  $K=110$
- maturité  $T=1$  année

- le taux de rendement sans risque  $r=0.05$
- la volatilité constante  $\sigma=0.25$

Après implémentation:

The screenshot shows a web form titled "Simulation du prix du sous-jacent". It contains several input fields and a slider, all with light blue backgrounds and rounded corners. The fields are: "Style de l'option" (dropdown menu set to "call"), "Le prix initial de votre Sous-jacent" (input field with "100"), "Le Strike" (input field with "110"), "Temps en année" (input field with "1,00"), "La volatilité" (input field with "0,25"), and "Taux sans risque" (input field with "0,05"). Below these is a section "Parametre de Simulation" with a "Nombre de simulation" slider ranging from 0 to 10000, currently set at 10000. At the bottom is a "Niveau de risque" input field with "0,05" and a "Submit" button. A Windows watermark "Activer Windows" is visible in the bottom right corner of the form area.

Figure 5: Prix du sous-jacent

on a :

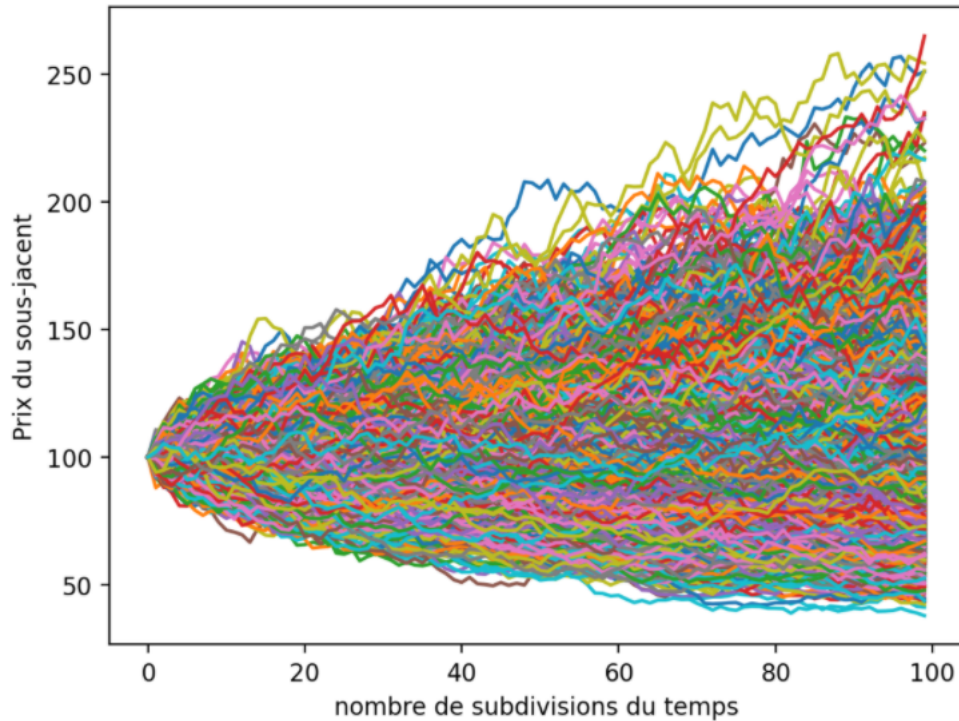


Figure 6: Évolution du cours du sous-jacent

## IV Valeur de l'option

La valeur de l'option est l'espérance des Pay-off, qu'elle peut générer dans le futur, actualisée au taux d'intérêt sans risque. L'évaluation des options Call et Put européennes par la simulation de Monte Carlo est donnée par les formules suivantes :

Formule du Call:  $E[\max(0, S_t - K) \exp(-rt)]$

Formule du Put:  $E[\max(0, K - S_t) \exp(-rt)]$

### Application:

Déterminons le prix d'une option d'achat tel que:

- le prix du sous-jacent à  $t=0$   $S_0=100$
- le Strike  $K=110$
- le taux de rendement sans risque  $r=0.05$
- la volatilité constante  $\sigma=0.25$

- la periode  $T=1$

La valeur de l'option

Valeur de l'option pour 10000 Simulations est: 8.01925517751349 +/- 0.04882860736158398

Figure 7: Valeur de l'option

le prix du Call est  $C=8.019$

**Intervalle de confiance**  $\epsilon=0.0488$

## IV.1 Comparaison

### IV.1.1 Solution exacte: Formule de Black-Scholes

Formule Call  $C = S_0\phi(d_1) - K \exp(-rt)\phi(d_2)$

Formule Put  $P = K \exp(-rt)\phi(-d_2) - S_0\phi(-d_1)$

Avec  $\phi$  la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}} \ln\left(\frac{S_0}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right); d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

$\phi$  est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$

le prix du Call est  $C=8,026$

La valeur de l'option

Valeur de l'option pour 10000 Simulations est: 8.01925517751349 +/- 0.04882860736158398

La valeur de l'option par le modèle de black and Scholes: 8.026384693853352

Figure 8: Comparaison avec le modèle de Black-Scholes

A comparer avec la méthode de simulation de Monte carlo, les valeurs sont assez proche, on peut donc valider la méthode de pricing par simulation de Monte Carlo

## IV.2 Réduction de la variance

Pour améliorer la précision de notre estimation nous avons le choix entre augmenter la taille de l'échantillon, augmenter le seuil de risque  $\alpha$  ou réduire la variance, dans la partie suivante nous verrons différentes méthodes de réduction de variance.



### IV.2.1 Variable de Contrôle

Supposons qu'on désire estimer une quantité numérique  $\nu$ , la méthode traditionnelle de monte carlo consiste à l'écrire sous forme de l'espérance du fonction  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ , cette méthode de réduction de la variance consiste à créer une nouvelle fonction  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  tel que

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{h}(\mathbf{x}) - c(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mu)$  ou  $\mathbf{f}$  est une fonction (pas forcément une densité) hautement corrélée avec  $\mathbf{h}$  et  $\mu = E[\mathbf{f}(\mathbf{x})]$  et  $c \in \mathbb{R}$

On remarque facilement que  $E[\mathbf{h}(\mathbf{x})] = E[\mathbf{g}(\mathbf{x})]$  pour la variance  $Var(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = Var(\mathbf{h}(\mathbf{x})) + c^2 Var(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - 2c Cov(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$

la valeur  $c^*$  qui minimise la variance est  $c^* = -\frac{Cov(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))}{Var(\mathbf{f}(\mathbf{x}))}$

### IV.2.2 Échantillonnage préférentiel

Cette méthode consiste à substituer la loi uniforme utilisé dans les méthodes de monte carlo Standard par une autre fonction de densité  $\mathbf{f}$ , la valeur estimée devient:  $E[\frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}]$

$$E[\frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}] = \int \frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[\mathbf{h}(\mathbf{x})]$$

Cette méthode est utilisée, lorsque la quantité  $\frac{\mathbf{h}(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}$  est facilement calculable et qu'on peut aisément simuler la densité  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .

### IV.2.3 Les variables antithétiques

La méthode de la variable antithétique consiste, sans augmenter la taille de l'échantillon, réduire la variance de notre estimation en tirant partie de la symétrie des distributions et des corrélations négatives.

#### Exemple

Si  $U \sim \mathcal{U}([a, b])$ , alors  $b + a - U \sim \mathcal{U}([a, b])$ .

Si  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ , alors  $2\mu - X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

## V Modèle de pricing

Dans cette section nous allons appliquer les méthode de réduction de variance à notre modèle

**Variables Antithétiques** Puisque nous savons simuler la loi normale nous allons simuler la loi normal pour deux échantillons  $X, Y$  tel que  $X$  suit  $\mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = -X$  suit aussi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

**Variable de contrôle** Réduction la variance par la méthode de variable de contrôle. Parmi les variables de contrôle communément utiliser pour les options européennes , on pourra retenir

- $Z_1 = S_T$ , la valeur terminale de la trajectoire du sous-jacent
- $Z_2 = \exp(-rT)(S_T - K)_+$  le payoff d'un call européen (actualisé)

**Méthode de quasi monte-Carlo** Ici nous allons nous a tarder sur le caractère aléatoire et uniformément distribuées de nos valeurs générées. observons les variables générées aléatoirement suivant la loi normale par le générateur *Rand*:

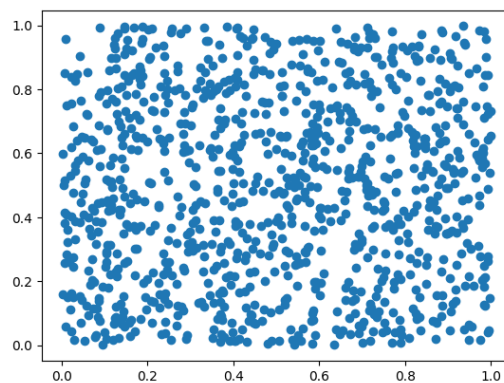


Figure 9:

l'objectif des méthode de quasi Monte-carlo est d'améliorée la génération des valeurs, afin d'amélioré la vitesse de convergence sans augmenté le nombre de valeurs générées. parmi les méthodes de quasi monte-carlo on a :

- une suite de Halton
- une suite de Sobol

- une méthode échantillonnage uniforme par variables antithétiques UWAN

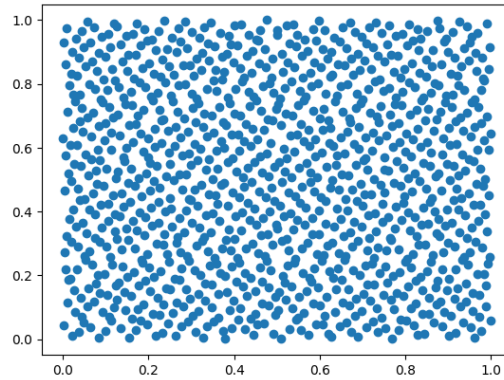


Figure 10: Simulation de variables iid suivant la loi normal avec la suite de Sobol

Appliquons les trois méthodes de réduction a notre modèle pricing nous remarque une nette amélioration, pour un nombre simulation moindre  $n=4096$  nous avons une précision de près de  $10^4$

prix de l'option :8.026112971862904 un interval de confince de 0.006246230417732345 pour 4096 Simulations

Figure 11: Résultat de pricing: Variable antithétique, variable de contrôle et quasi-monte-carlo

Cette précision nous est important pour la suite de notre analyse travail. Nous allons déterminer les grecques de cette option et essayer d'établir une stratégie de couverture

## V.1 Les grecques

Les grecques sont des indicateurs de risques pris par celui qui a acheté ou vendu des options. Elles détaillent ces risques par origine : le prix du sous-jacent, la volatilité implicite, le temps et le taux d'intérêt. Elles découlent des principaux modèles d'évaluation d'option. Ces indicateurs calculent l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment

### V.1.1 Différence finie

la méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à ré-

soudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres. (*Wikipédia*) La discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes, etc., partielles ou non) peut être obtenue par les formules de Taylor on obtient:

$$\frac{u(x-2h) - u(x-h)}{2h} \approx u'(x) + h^2 \epsilon_2(h) \quad (2)$$

$$\frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} \approx u'(x) + \epsilon_4(h) \quad (3)$$

### V.1.2 Le Delta

le Delta( $\Delta$ ) traduit la variation du prix de l'option par rapport au petite variation du prix du sous-jacent

on définit donc  $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$

### V.1.3 le Gamma

Le Gamma exprime la sensibilité du Delta à une petite variation du prix du sous-jacent

On définit ainsi:  $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$

### V.1.4 Le Vega

Le Vega illustre le comportement du prix de l'option face au petite variation de la volatilité implicite. Il représente la sensibilité du prix par rapport à la volatilité implicite.  $\nu = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$

la divergence entre le delta d'une option et son delta Black-Scholes est souvent traitée comme un nouveau source de risque, risque de vega. Il est souvent géré en rendant le portefeuille vega-neutre

### V.1.5 Le Thêta

Le thêta communément appelé l'effet temps d'une option représente la sensibilité de l'option par rapport au temps C'est la sensibilité au petite variation de la maturité.

Ainsi  $\Theta = -\frac{\partial C}{\partial T}$

### V.1.6 Rho

Le Rho est un indicateur représente la sensibilité du prix de l'option par rapport aux petites variation du taux sans risque

en effet:  $\mathcal{R} = \frac{\partial C}{\partial r}$

Figure 12: Interface de Calcul des grecques avec Pyqt5

### V.1.7 Couverture

## V.2 La value At Risque

la Value at Risque (VaR) est la perte maximale potentielle qui ne devrait être atteinte qu'avec une probabilité donnée sur un horizon temporel donnée. Afin de donner un bon estimé de la VaR d'un point de vue méthodologique, on fait appel à des notions avancées de probabilité, statistique et stochastique.

Soit  $X$ , une variable aléatoire dont la fonction de répartition est:

$$F(x) = P(X < x)$$

La Valeur-à-Risque de  $X$  au niveau de risque  $\alpha$  est définie comme suit:

$$VAR_{\alpha(X)} = F^{-1}(\alpha)$$

Cette définition signifie qu'avec une certitude de  $(100\alpha)\%$ , le montant du risque ne devrait pas dépasser la  $VAR_{\alpha(X)}$ .

**V.2.1 Détermination de la VaR d'option: Méthode Delta gamma**

En faisant un développement de Taylor d'un call on obtient:

$$C_{t+1} = C_t + \frac{\partial C}{\partial S}(S_{t+1} - S_t) + \frac{\partial C}{\partial T}(t + 1 - t) + \frac{\partial^2 C}{2\partial S^2}(S_{t+1} - S_t)^2$$
$$\Delta C = \delta \Delta S + \frac{1}{2} \gamma \Delta S^2 + \theta \Delta t$$

Par méthode de Monte carlo, il suffit de simuler le prix du sous-jacent plusieurs fois a échéance à  $t + 1$ , a en faire la différence avec  $S_0$

Parametres:

Style de l'option

call

Le prix initial de votre Sous-jacent

100

Le Strike

105

Temps en année

1,00

La volatilité

0,25

Taux sans risque

0,05

Niveau de risque

0,05

Submit

Figure 13: paramètre de pricing

**La valeur de l'option**

Prix de l'option par Monte-Carlo 10.002402734834611

La valeur de l'option par black and Scholes: 10.00220211715488

**Les grecques**

Delta: 0.5492347841830892

gamma: 0.008056315679997289

vega: 38.32671511080121

theta: 7.12674701783788

rho 35.78866518751117

**La Value At Risque**

Value At Risque simulé: -2.361551694808524 La VaR conditionnelle simulée: -3.3253972499546562

Value At Risque Delta-Gamma: -1.9632622844643148 La VaR conditionnelle Delta-Gamma: -2.2267522298773597

Figure 14: Pricing d'option européenne

## V.3 Option Asiatique

Une option asiatique est un produit dérivé dont le gain dépend du prix moyen de l'actif sous-jacent sur une période donnée, par opposition aux options américaines ou européennes standard dont le gain dépend du prix de l'actif sous-jacent à un moment précis. Une option asiatique permet au détenteur d'acheter ou de vendre l'actif sous-jacent à son prix moyen, et non à un prix spécifique. Les options asiatiques sont également appelées "options moyennes".

### V.3.1 Pricing

#### Discrétisation

par méthode de discrétisation, on calcule la marche aléatoire du prix du sous-jacent tout les instant de  $t_i \in [0, T]$  d'un pas  $dt = \frac{T}{n}$

$$S_{mean_t} = \frac{1}{n} \sum_{t_i=0}^T S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t_i + \sigma W_{t_i}\right)$$

on répète la simulation le procédé n fois.

Le Call:  $C = E[\max(0, S_{mean_t} - K) \exp(-rt)]$

Le Put:  $P = E[\max(0, K - S_{mean_t}) \exp(-rt)]$

### V.3.2 les grecques

La discrétisation des opérateurs différentiels peut être obtenue par les formules de Taylor on obtient:

$$\frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h} \approx u'(x) + \epsilon_4(h)$$

Avec  $u(x) = C_{asiatique}(S_0, K, T, \sigma, r)$ ,  $x = S_0, K, T, \sigma, r$  et  $C_{asiatique}$  la fonction de call asiatique

### V.3.3 VaR

la VaR pour un call d'une option asiatique par méthode de Delta-gamma

$$\Delta C = \delta_{asiatique} \Delta S_{mean} + \frac{1}{2} \gamma_{asiatique} \Delta S_{mean}^2 + \theta_{asiatique} \Delta t$$

### V.3.4 Implémentation



Figure 15: Pricing d'option asiatique

## V.4 Option LookBack

Une option lookback est une option européenne dont le prix d'exercice (strike) est le minimum ou le maximum du cours du sous-jacent sur toute la durée de vie du contrat. Un call lookback permet d'acheter le sous-jacent au prix



minimum et un put lookback de vendre le sous-jacent au prix maximum. L'option lookback donne donc la possibilité à son détenteur de bénéficier du cours le plus avantageux sur la durée de vie de l'option.

#### V.4.1 Pricing

On procède par discrétisation, on calcule la marche aléatoire du prix du sous-jacent tout les instant de  $t_i \in [0, T]$  d'un pas  $dt = \frac{T}{n}$

$$S_{max} = \max(S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}))$$

on répète la simulation le procédé n fois.

Le Call:  $C = E[\max(0, S_{max} - K) \exp(-rt)]$

Le Put:  $P = E[\max(0, K - S_{max}) \exp(-rt)]$

#### V.4.2 les grecques

La discrétisation des opérateurs différentiels peut être obtenue par les formules de Taylor on obtient:

$$\frac{u(x - 2h) - 8u(x - h) + 8u(x + h) - u(x + 2h)}{12h} \approx u'(x) + \epsilon_4(h)$$

Avec  $u(x) = C_{lookback}(S_0, K, T, \sigma, r)$ ,  $x = S_0, K, T, \sigma, r$  et  $C_{lookback}$  la fonction de call lookback

#### V.4.3 VaR

la VaR pour un call d'une option lookback par méthode de Delta-gamma

$$\Delta C = \delta_{lookback} \Delta S_{max} + \frac{1}{2} \gamma_{lookback} \Delta S_{max}^2 + \theta_{lookback} \Delta t$$

### V.4.4 Implémentation



Figure 16: Pricing d'option lookback

## V.5 Option barrière

Une option à barrière est une option particulière qui va correspondre à une option d'achat ou à une option de vente habituelle mais avec un certain nombre de restrictions. Une option à barrière sera assortie d'un seuil de déclenchement à partir duquel l'option est activée (knock in) ou désactivée (knock out). L'option à barrière s'annule si le cours de l'actif sous-jacent n'arrive pas à atteindre, dépasser ou s'inscrire en dessous d'une certaine limite fixée à l'avance pendant la durée de validité de l'option.

### V.5.1 Pricing

On procède par discrétisation, on calcule la marche aléatoire du prix du sous-jacent tout les instant de  $t_i \in [0, T]$  d'un pas  $dt = \frac{T}{n}$

$S_i = (S_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2})t_i + \sigma W_{t_i}))$  on répète la simulation le procédé n fois.

si le cours  $S_i$  dépasse le seuil H l'option se désactive et n'est plus exercable, dans le cas contraire c'est à dire  $S_i < H$  alors l'option barrière se comporte comme une option européenne vu plus haut Le Call:  $C = E[\max(0, S - K) \exp(-rt)]$

Le Put:  $P = E[\max(0, K - S) \exp(-rt)]$

### V.5.2 VaR

lorsque les valeurs du sous-jacent ne dépasse pas les valeur seuil de désactivation ou dépasse les valeur seuil d'activation, la VaR est le même que celle d'une option européenne vu plus haut.

Au cas contraire la VaR est nulle

### V.5.3 Implémentation



Figure 17: Pricing d'option barrière

## V.6 Portefeuille d'option

constituons un portefeuille d'option constitué de Calls d' options ci dessus: une option européenne, une option asiatique, une option lookback, et une option barrière.

### V.6.1 La valeur du portefeuille

la valeur de portefeuille pour une pondération  $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ :

$$P = w_1 C_{lookback}(S_0, K, T, \sigma, r) + w_2 C_{asiatique}(S_0, K, T, \sigma, r) + w_3 C_{barriere}(S_0, K, T, \sigma, r) + w_4 C(S_0, K, T, \sigma, r)$$

dans notre cas  $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (2, 1, 3, 2)$

### V.6.2 la VaR: Delta-gamma

Rappelons que  $\Delta P = P(S_{\Delta t}, \Delta t) - P(S_0, 0)$ :

$$\Delta P = \frac{\partial P}{\partial \Delta T} \Delta T + \delta^T \Delta P + \frac{1}{2} \Delta P^T \Gamma \Delta P$$

Ou  $\delta = (\frac{\partial P}{\partial S_1}, \frac{\partial P}{\partial S_2}, \dots, \frac{\partial P}{\partial S_n})$  et  $\Gamma_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i \partial S_j}$

-Si les options sont indépendants ou ayant une corrélation non significative entre elles alors:

$\delta = (\delta, \delta_{asiatique}, \delta_{lookback}, \delta_{barriere})$  et  $\Gamma_{ii} = \frac{\partial^2 P}{\partial S_i^2} = \gamma, \Gamma_{ij} = 0$

on va supposer l'indépendance des sous-jacents

### V.6.3 Application

Construisons un portefeuille constitué de :

- Deux options européennes
- Une option asiatique
- Deux options lookbacks
- Trois options barrières

pour les mêmes paramètres que les paramètres ci dessus.

valeur du portefeuille: 216.77936217691402

La VaR du portefeuille: -1.9632199626986235

La CVaR du portefeuille: -2.2269118384293387

-

Figure 18:

**Lien de l'application web Streamlit:**

<https://cklmens-cklemenssimulationmontecar-simulation-montecarlo-qjahs6.streamlit.app/>