ECOLE NATIONALE DES SCIENCES
APPLIQUEE D'AGADIR

Modèle Binomiale de Pricing des options Européennes et Américaines

Finance et Ingénierie Décisionnelle

DJANAME PAG-YENDU

Part I

Théorie

I Les options

Définition

Une option est un contrat qui donne, au contractant du droit, le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre un bien à un prix d'exercice fixé à l'avance. L'option est un contrat par lequel le porteur (ou souscripteur) a le droit, et non l'obligation, d'acheter (option d'achat, call) ou de vendre (option de vente, put) une quantité donnée de l'actif sous-jacent (underlier value) ou titre de base ou titre support au prix d'exercice (strike price) à une date future moyennant le paiement immédiat d'une prime (premium).

I.1 Types d'options

Les options Vanilles

Les options vanilles sont des options standards qu'on retrouve le plus sur les marchés financiers. on distingue

Les options Européennes les options européennes sont des options qui ne peuvent être exercer qu'à la maturité c'est à dire si une option européenne a pour maturité six mois ce n'est que au terme de ces six mois que l'achéteur de l'option peut exercer son droit pas avant ni après.

Les options Américaines Les options Américaines sont des options ayant la particularité de pouvoir être exercer à n'importe quel moment au cours de la période couvrant la maturité.L'acheteur d'une option Américaine de maturité T peut exercer sont droit au cour de la période depuis son achat jusqu'à la maturité T

Les options exotiques

Les options exotiques sont des options spéciales ou peu conventionnelles, on distingue:

Les Options Asiatiques Ce sont des options qui comparent le prix d'exercice au prix moyen de l'actif sous-jacent enregistré sur la période. Du fait qu'elles font intervenir un prix moyen au lieu d'un prix journalier ponctuel, les options Asiatiques présentent une moindre volatilité implicite et sont, de ce fait, généralement moins coûteuses que les options Américaines ou Européennes.

Les options barrière sont des options qui s'active ou se désactive quand la valeur du sous-jacent dépasse un niveau prédéterminé.

Les options de panier sont basées sur plusieurs actifs sous-jacents. Le gain d'une option panier est essentiellement la moyenne pondérée de tous les actifs sous-jacents.

Les options binaires sont également appelées options numériques. Les options garantissent le gain en fonction de la survenance d'un certain événement. Si l'événement s'est produit, le gain est un montant fixe ou un actif prédéterminé. Inversement, si l'événement ne s'est pas produit, le gain n'est rien. En d'autres termes, les options binaires n'offrent que des bénéfices tout ou rien.

Option Look-back Le prix d'exercice n'est pas fixé à l'avance, mais il n'est connu qu'à la date de maturité. Il correspond au prix du marché le plus favorable enregistré durant la période. Ainsi, le prix du marché à la maturité est comparé au prix du marché le plus favorable de la période.

Option Arc en ciel Option Call (ou Put) sur le résultat le plus (ou le moins) favorable d'un panier.

Option Européenne avec dividende Option Européenne d'un actif qui génère un dividende. Une partie de la valeur de l'actif comprend la valeur actuelle des dividendes.

Option de démarrage futur Une option de démarrage futur commence à une date future spécifiée avec une date d'expiration définie plus loin. Cependant, la prime est payée à l'avance et l'heure d'expiration est établie au moment de l'achat de l'option.

Option sur Future Le titre sous-jacent est un Forward ou un Future.

Option Spread L'option Spread consiste à acheter et à vendre plusieurs options sur un même sous-jacent mais à des prix d'exercice et des échéances différentes. Le Call Spread en est un exemple, c'est une combinaison d'achat d'un Call, et d'une vente d'un autre Call à un prix d'exercice différent

Option de changement de temps Option dont la valeur augmente avec la durée où le prix du marché est supérieur au prix d'exercice pour l'option Call, et vis versa

Option Bermuda Option exercée à des dates précises avant la maturité.

Les Options combinées

Les options Call et Put sont les instruments optionnels de base, options combinées sont crées à partir de ces deux instruments. ces instruments offrent une riche gamme de produits dérivés comme le Call Spread, le tunnel à prime nulle, le tunnel capé, etc. Par ailleurs, chaque entreprise peut développer sa propre « alchimie » en créant une combinaison d'options adaptée à sa propre stratégie commerciale.

Call Spread Le Call Spread est un Call dont la protection devient partielle à partir d'un certain prix. Cet instrument est la combinaison de l'achat d'un Call, financé par la vente d'un autre Call. Cette option permet de se couvrir à moindre coût par rapport à un Call classique.
Objectif : Plafonnement du prix à un certain niveau (niveau Cap), et protection partielle au delà, à travers une indemnisation forfaitaire.

Collar Le Tunnel (ou Collar) est une combinaison de deux options qui permet de fixer un intervalle dans lequel varie le prix. Il s'agit à l'origine d'une Option d'achat Call qui permet de fixer un plafond, combinée à une Option de vente Put qui fixe un prix d'achat minimal, afin de financer le prix du Call. Ainsi, et contrairement à un Call individuel, aucune prime n'est requise.
Objectif : Plafonner le cours du sous-jacent en contrepartie de la fixation d'un prix plancher.

Tunnel cappé Le Tunnel cappé est un tunnel limité par un niveau au-delà duquel la protection devient partielle. Il s'agit d'un Tunnel combiné à la vente d'un Call. Cette limitation de la protection à la hausse permet de réajuster les barrières du tunnel en baissant la limite inférieure pour profiter davantage des baisses du cours du sous-jacent.
Objectif: Protection totale jusqu'à un prix plafond, et protection partielle au-delà, en contrepartie de la fixation d'un prix plancher favorable.

I.2 Les déterminants de la valeur d'une option

L'évaluation du prix d'une option (la prime) n'est pas toujours une tâche aisée. déterminer la prime d'une option est la principale difficulté dans l'elaboration d'une option. Les paramètres dont dépend le prix d'une option sont le style d'option : européenne, américaine, asiatiques... ; Prix du marché a l'instant à laquelle d'option est acheté ou vendu, Le prix d'exercice: le Strike, La maturité de l'option, Le taux d'intérêt sans risque et La volatilité du sous-jacent.

I.3 Méthodes d'évaluation des options financières

Les options européennes peuvent être évaluées moyennant 3 méthodes à savoir la simulation de **Monte Carlo**, la formule **Black-Scholes** et le modèle **binomial Cox-Ross-Rubinstein** (CRR) pour le cas des processus browniens géométriques, et par équations différentiels pour les processus en retour vers la moyenne et en saut de diffusion. Pour les options américaines, étant donné qu'elles peuvent être exercées à n'importe quel moment avant la maturité, celles-ci se prêtent difficilement à l'évaluation par les modèles de forme close. Elle se fait uniquement par le modèle binomial CRR car sa discontinuité permet d'inclure l'exercice d'option à tout moment, ou en utilisant les formules approximatives de **Barone-Adesi-Whaley** , ou celle de **Bjerksund-Stensland** .

Puisque toutes ces méthodes sont paramétriques et se basent sur un processus de Wiener (ou mouvement brownien), nous présentons tout d'abord le mouvement brownien géométrique qui est la base de ces modèles

Processus Stochastique Un processus stochastique est un modèle probabiliste permettant d'étudier un phénomène aléatoire au cours du temps. Formellement, un processus stochastique est la donnée :

1. d'un espace probabilisé (X,A,P)
2. d'un espace mesurable (E,B)
3. d'une famille $(Y_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur (X,A,P) à valeurs dans (E,B)

Exemple: On considère une suite de parties de piles ou faces indépendants, et on note S_n le nombre de piles obtenus après la n-ième partie. La suite (S_n) est un processus, appelé processus ou schéma de Bernoulli.

Le processus de Wiener ou le mouvement Brownien

La détermination du prix d'une option à la date t0 dépend de la prévision que l'on se fait du prix du sous-jacent dans le futur. Pour cela, il est nécessaire de modéliser l'évolution temporelle des prix de manière à refléter aussi bien la tendance centrale que les ramifications stochastiques. La science économique s'est inspirée d'un modèle mathématique qui a permis de décrire le mouvement aléatoire des fluides. Le mouvement brownien, dit aussi processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement irrégulier et imprévisible observé chez une particule immergée dans un fluide. ce mouvement est très utilisé dans les mathématiques financières, où les prix des actifs, tout aussi aléatoires, sont assimilés à cette particule qui subit d'infinis petits chocs non recensables.

Le mouvement brownien est donné en général par la forme mathématique suivante. Il admet une partie déterministe, qui est en quelque sorte la tendance du prix, et une partie stochastique qui est représentée par une distribution normal:

$$H_t = \mu t + \sigma \sqrt{t} W_t \tag{1}$$

H_t : Mouvement brownien, décrivant une distribution normale des mouvements possibles.
μ : Drift (ou tendance générale de la variable : stable, hausse ou baisse) qui évolue avec t.
t : Temps continu.
σ : Volatilité espérée.
W_t : Mouvement brownien « standard », décrivant une distribution normale centrée réduite.
Le mouvement brownien standard a un drift nul ($\mu = 0$) distribution centrée.
Le mouvement brownien standard a une volatilité standard ($\sigma = 1$) distribution réduite

Simulation de Monte Carlo

La méthode consiste à simuler plusieurs fois le prix futur de l'actif à travers le mouvement brownien géométrique, et de capter le Pay off de l'option à chaque scénario simulé. La valeur de l'option est l'espérance des Pay off qu'elle peut

générer dans le futur, actualisée au taux d'intérêt sans risque l'évaluation des options Call et Put européennes par la simulation de Monte Carlo est donnée par les formules suivantes :
Formule du Call: $E[\max(0, S_t - K)\exp(-rt)]$
Formule du Put: $E[\max(0, K - S_t)\exp(-rt)]$

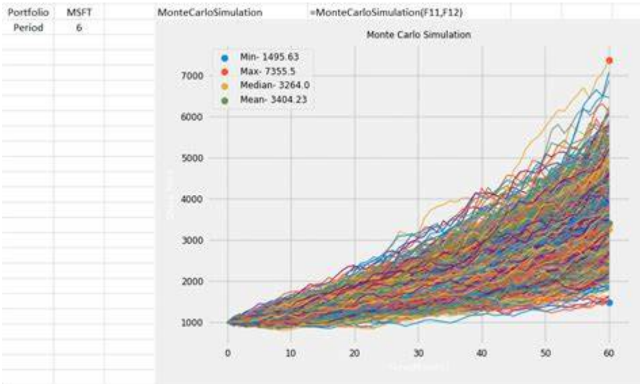


Figure 1:

Le modèle Black-Scholes

Le modèle Black-Scholes est un modèle mathématique dans lequel le prix de l'action est un processus stochastique en temps continu. Sous hypothèse de :

- le prix du sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique
- Absence d'opportunité d'arbritage
- possibilité d'effectuer des ventes à découvert
- possibilité d'acheter et de vendre le sous-jacent à tout moment et sans frais
- il existe un taux d'intérêt sans risque, connu à l'avance et constant
- l'exercice de l'option ne peut se faire qu'à la date d'échéance

le modèle de Black-Scholes peut être utilsé afin d'estimer en théorie la valeur d'une option financière
La formule de Black-Scholes permet de calculer la valeur théorique d'une option à partir des cinq données suivantes :

- S_0 la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- Tle temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années)
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque
- σ la volatilité du prix de l'action

Parité Call-Put C = P + $S_0 - K\exp(-rt)$
Formule Call $C = S_0\phi(d_1) - K\exp(-rt)\phi(d_2)$
Formule Put $P = K\exp(-rt)\phi(-d_2) - S_0\phi(-d_1)$
Avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite
$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\ln(\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t); d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$

Les quatre premières données sont évidentes, seule la volatilité σ de l'actif est difficile à évaluer. Deux analystes pourront avoir une opinion différente sur la valeur de σ à choisir.

Le modèle binomial CRR

Le modèle binomial CRR se présente comme une simulation discrète du prix, ou encore une propagation discrète de l'incertitude à travers le temps. L'incertitude se caractérise par une attitude croissante avec le temps quoique le risque puisse rester inchangé. En effet, à risque constant, il est plus aisé de prédire le prix d'un actif dans un mois que dans une dizaine d'années, ce qui nous renvoie à la notion dite de « cône de l'incertitude ».

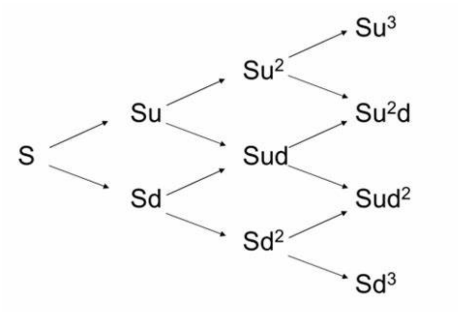


Figure 2:

La méthode binomiale, pour valoriser les options, est très largement utilisée car elle est capable de prendre en compte un nombre important de conditions pour lesquelles l'application d'autres modèles n'est pas aisée.
les parametres de ce modèle:

- S_0 la valeur actuelle de l'action sous-jacente
- Tle temps qui reste à l'option avant son échéance (exprimé en années)
- K le prix d'exercice fixé par l'option
- r le taux d'intérêt sans risque
- σ la volatilité du prix de l'action

Les noeuds terminaux de l'arbre des prix représentent les scénarii de prix auxquels on sera confronté à la maturité. Dans chacune de ces situations, selon que le prix du marché est favorable ou pas au prix d'exercice, il choisira, selon le cas, d'activer son option ou pas. Nous obtenons ainsi les Payoff possibles à la maturité, qui sont positifs lorsque l'option est activée, et nuls lorsque l'option

n'est pas activée. A partir de cette étape, on construit l'arbre des Payoff par induction rétrospective. Cela consiste à dire que le Payoff de chaque noeud intermédiaire est l'espérance actualisée des Payoff des deux noeuds suivants :
$E = [p \times Payoff_1 + (1 - p) \times Payoff_2] \exp(-r\delta(t))$.
Cela suppose au préalable de calculer les probabilités de hausse et de baisse (p) et (1-p),moyennant l'une des deux approches suivantes:
$p = \dfrac{\exp(r\delta(t) - d)}{u - d}$
Up: $u = \exp(r\delta(t))$
Down: $d = \exp(-r\delta(t))$

Part II

Pratique

II Implémentation par VBA Excel

II.1 Description

Arbre binomial

A partir des paramètres (S_0, K, T, r, σ) et du nombre de période n, on détermine les facteurs up $u = \exp(r\delta(t))$, down $d = \exp(-r\delta(t))$, et la probabilité de hausse $p = \dfrac{\exp(r\delta(t) - d)}{u - d}$. Pour la construction de notre arbre,à t_0 le sous-jacent vaut S_0 , à $t_1 = dt$ on a deux scenarii, la hausse S_0u ou la baisse S_0d, à $t_2 = t_1 + dt$ chaque noeud a deux possibilités d'évolution: une baisse (en mutipliant par d) ou une hausse (en mutipliant par u). On construit ainsi notre arbre jusqu'à le nombre de période souhaité $t_n = T$

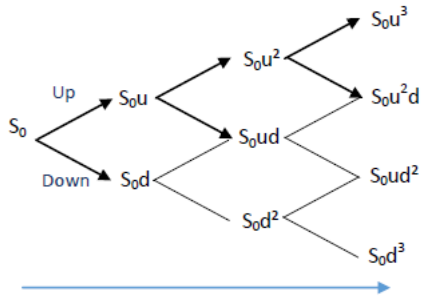


Figure 3:

Arbre à Payoff

Les noeuds finaux representent les différents évolution du prix au terme de la période T, A partir de ces nœuds finaux on détermine les payoffs en fonction qu'on exerce l'option ou non, on construit l'arbre a partir des racines (les nœuds finaux) vers la cime en calculant l'esperance et en l'actualisant $E = [p \times Payoff_1 + (1 - p) \times Payoff_2] \exp(-r\delta(t))$., la cime de notre arbre constitue le prix de notre option

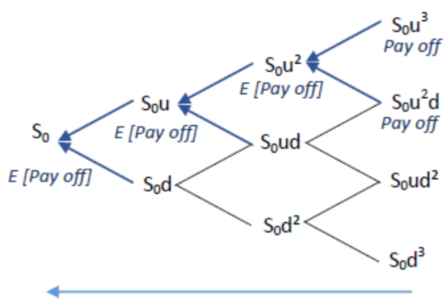


Figure 4:

II.2 Interface et saisies des données

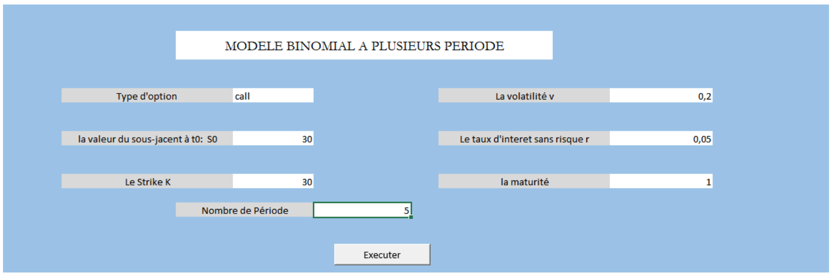


Figure 5:

II.3 Code Visual Basic for Application

```
Sub binomialmodel()
Dim callput As String, so As Double, k As Double, T As Double, v As Double, r As Double, p As Double, u As Double:
Dim d As Double, va(21) As Double, dt As Double, pay(10, 10) As Double, cp As String

Range("A20:P80").ClearContents

so = Range("F10").Value
Cells(20, 1) = "So=" & so
k = Range("F13").Value
Cells(20, 2) = "K=" & k
v = Range("L7").Value
Cells(20, 3) = "V=" & v
r = Range("L10").Value
Cells(20, 4) = "r=" & r
T = Range("L13").Value
Cells(20, 5) = "T=" & T
p = Range("G15").Value
Cells(20, 6) = "période=" & p
cp = Range("F7").Value
Cells(20, 7) = cp


dt = T / p
u = dt ^ 0.5
u = Exp(v * u)
d = 1 / u

 For i = 0 To 2 * p + 1
 va(i) = so * (u ^ p) * (d ^ i)
 Next i

po = (Exp(r * dt) - d) / (u - d)
'call
If cp = "call" Then
For i = 0 To p
If (p / 2) = 0 Then
pay(0, i) = WorksheetFunction.Max(va(2 * i) - k, 0)
```

Figure 6:

```
pay(0, i) = WorksheetFunction.Max(va(2 * i) - k, 0)
Else
  If ((p - 1) / 2) = 0 Then
  i = i + 1
  Else
  pay(0, i) = WorksheetFunction.Max(va(2 * i) - k, 0)
  End If
End If
Next i
End If
'put
If (cp = "put") Then
For i = 0 To p
If (p / 2) = 0 Then
pay(0, i) = WorksheetFunction.Max(k - va(2 * i), 0)
Else
  If ((p - 1) / 2) = 0 Then
  i = i + 1
  Else
  pay(0, i) = WorksheetFunction.Max(k - va(2 * i), 0)
  End If
End If
Next i
End If


For i = 1 To p
For j = 0 To p - i
pay(i, j) = (pay(i - 1, j) * po + pay(i - 1, j + 1) * (1 - po)) * Exp(-r * dt)
Cells(30 + i, 5 + j) = pay(i, j)

Next j
Cells(30, 5 + i - 1) = pay(0, i - 1)
Next i
Cells(30, 5 + p) = pay(0, p)
```

Figure 7:

```
For i = 0 To (2 * p)
If (i < p) Then
Cells(24, 2 + i) = "Su^" & p - i
Else
  If (i > p) Then
  Cells(24, 2 + i) = "Sd^" & i - p
  Else
  Cells(24, 2 + i) = "S"
  End If
End If
Cells(25, 2 + i) = va(i)
Next i


End Sub
```

Figure 8:

II.4 Résultats

So=30	K=30	V=0,2	r=0,05	T=1	période=5	call						
	Su^5	Su^4	Su^3	Su^2	Su^1	S		Sd^1	Sd^2	Sd^3	Sd^4	Sd^5
	46,9184495	42,9041371	39,2332868	35,876512	32,80694073		30	27,4	25,0860507	22,9397044	20,976998	19,18221957
				16,9184495	9,233286778		2,806940734	0	0	0		
				13,2026421	6,175016999		1,48332924	0	0			
				9,82732658	3,947894619		0,783866081	0				
				7,01560118	2,448098952		0,414234424					
				4,83743881	1,484909453							
				3,24178018								

Figure 9:

Prix de l'option pour le call est $S_T = 3.242$

III Implémentation par Python

III.1 Code Python

Détermination de toutes les valeurs possibles prises par le sous-jacent au cours des différentes évolutions dans l'arbre

```
import numpy as np
import math as ma


def multiplperiods(so,k,T,r,v,p):
    t=T/p
    u= ma.exp(v*ma.sqrt(t))
    d= 1/u
    period= np.ones((2*p+1))
    for i in range(2*p+1):
         period[i]=so*ma.pow(u, p)*ma.pow(d, i)
    return period
```

Figure 10:

Calcul du payoff quelque soit le style de l'option européennes ou américaines

```
def payoff(bool, so, k):
     if (bool==True):
         if (so-k)>0:
             return so-k
         return 0
     else:
         if(k-so)>0:
             return k-so
         return 0
```

Figure 11:

Détermination de l'arbre des payoffs

```python
def payoffmultipl(so,k,T,r,v,p, cp):
    pay_off= np.ones((p+1,p+1))
    t=T/p
    u= ma.exp(v* ma.sqrt(t))
    d= 1/u
    po=(ma.exp(r*t)-d)/(u-d)

    period= np.ones((2*p+1))
    for i in range(2*p+1):
         period[i]=so*ma.pow(u, p)*ma.pow(d, i)

    for i in range(p+1):
         pay_off[0][i]=payoff(bool(cp),period[2*i],k)

    for j in range (1,p+1):
        for i in range (p+1-j):
            pay_off[j][i]=(po*pay_off[j-1][i]+(1-po)*pay_off[j-1][i+1])*ma.exp(-r*t)
    return pay_off
```

Figure 12:

III.2 Résultat

Pour des valeurs de : (So, K, T, r, σ, nombre de période)=(30,30,1,0.05,0.2,5) pour un put et pour un Call
Les différent valeurs prise par le sous-jacent au cours des différentes évolutions possibles

```python
print(multiplperiods(30,30,1,0.05,0.2,5))
```

Figure 13:

Résultats

```
In [5]: runfile('C:/Users/hp/Documents/Python Scripts/mutiplperiods.py', wdir='C:/Users/hp/Documents/Python
Scripts')
[46.91844948 42.90413714 39.23328678 35.87651201 32.80694073 30.
 27.43321931 25.08605072 22.93970437 20.97699802 19.18221957]
```

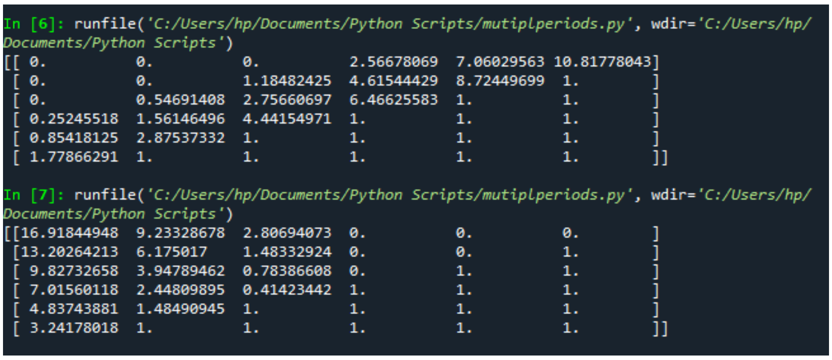
Figure 14:

L'arbre à Payoff pour un call et un Put
Pour le Put Bool=0 et Pour le call Bool=1

```python
print(payoffmultipl(30,30,1,0.05,0.2,5,0))
print(payoffmultipl(30,30,1,0.05,0.2,5,1))
```

Figure 15:

Résultat:



```
In [6]: runfile('C:/Users/hp/Documents/Python Scripts/mutiplperiods.py', wdir='C:/Users/hp/
Documents/Python Scripts')
[[ 0.          0.          0.          2.56678069  7.06029563 10.81778043]
 [ 0.          0.          1.18482425  4.61544429  8.72449699  1.        ]
 [ 0.          0.54691408  2.75660697  6.46625583  1.          1.        ]
 [ 0.25245518  1.56146496  4.44154971  1.          1.          1.        ]
 [ 0.85418125  2.87537332  1.          1.          1.          1.        ]
 [ 1.77866291  1.          1.          1.          1.          1.        ]]

In [7]: runfile('C:/Users/hp/Documents/Python Scripts/mutiplperiods.py', wdir='C:/Users/hp/
Documents/Python Scripts')
[[16.91844948  9.23328678  2.80694073  0.          0.          0.        ]
 [13.20264213  6.175017    1.48332924  0.          0.          1.        ]
 [ 9.82732658  3.94789462  0.78386608  0.          1.          1.        ]
 [ 7.01560118  2.44809895  0.41423442  1.          1.          1.        ]
 [ 4.83743881  1.48490945  1.          1.          1.          1.        ]
 [ 3.24178018  1.          1.          1.          1.          1.        ]]
```

Figure 16:

PRICING

Prix de l'option pour le Call est $S_T = 3.242$
Prix de l'option pour le Put est $S_T = 1.779$

IV Interprétation

Les modèle implémentés qu'ils soient sur VBA Excel ou Python est un modèle binomial de pricing des options Européennes et Américaine en effet une option européenne est un cas particulier de notre modèle, c'est le cas particulier où le nombre de période est égale à 1. donc ce modèle ci-dessus peut déterminer le prix aussi bien d'un option américaines que d'une option européenne. le modèle affiche l'arbre des pay off permettant d'avoir une vue sur l'evolution au cours des période afin de détecter une anomalie ou des erreurs. La racine de notre arbre est le prix de notre option, le prix à laquelle on doit vendre l'option