Chapitre 2.4

Rappels et compléments sur la dérivation.

Dans ce chapitre, sauf indication contraire, les fonctions sont définies sur un **intervalle** I non vide, non réduit à un point. Comme dans le chapitre précédent, le but est de se donner les outils nécessaires à l'étude de fonctions. Nous admettrons donc certains résultats que nous reverrons dans des chapitres ultérieurs (par exemple le chapitre 14).

I Rappels sur les équations de droites.

Une droite verticale a une équation du type $x = a$. Une droite non verticale a une équation du type

$$y = ax + b$$

avec a son coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine, mais il peut être parfois plus simple de donner une équation du type

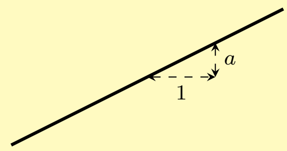
$$y = a(x - x_0) + y_0$$

où (x_0, y_0) sont les coordonnées d'un point **quelconque** appartenant à la droite. Tout dépend des informations dont on dispose : par exemple, si on sait que la droite a un coefficient directeur égal à 2 et passe par le point $(2022, 2023)$, alors la deuxième méthode est la plus simple, on peut dire directement qu'une équation de cette droite est : $y = 2(x - 2022) + 2023$. On peut également donner l'ordonnée à l'origine, mais cela donne des calculs plus compliqués.

Rappelons que si $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$ sont deux points de la droite, alors son coefficient directeur est

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Géométriquement, on le trouve en se décalant de 1 sur la droite : la hauteur (algébrique : si $a < 0$, la droite va vers le bas) dont la droite aura augmenté est égale à a.



Nous verrons ci-dessous l'exemple important de la tangente en un point pour une fonction dérivable. Donnons l'autre exemple que nous verrons souvent cette année : si nous disposons d'une fonction f, alors la droite joignant les points du graphe de f d'abscisses a et b est la droite d'équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a) + f(a)$$

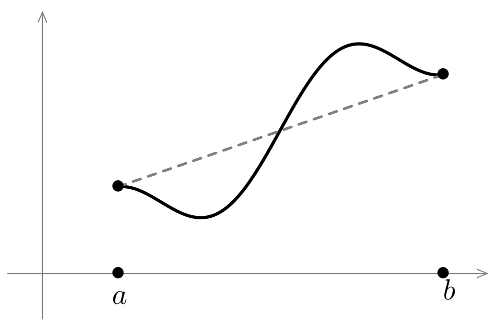
En effet, elle passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$: on trouve son coefficient directeur comme dit ci-contre, et puisqu'elle passe par le point $(a, f(a))$, on peut conclure comme dans l'exemple précédent. Puisqu'on peut prendre un point quelconque, on aurait aussi pu donner l'équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - b) + f(b)$$

En développant, on peut constater qu'on obtient la même équation de droite.

Cette droite est appelée **corde** joignant les points d'abscisses a et b, cf. partie VII. Enfin, puisqu'une fonction est affine si et seulement si son graphe est une droite (non verticale), on peut reformuler ce qui précède de la façon suivante : la fonction affine qui coïncide avec f en a et en b est la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a) + f(a)$$



II Définition et interprétation géométrique.

Définition. Soit $a \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en a la fonction $\tau_a(f)$ (ou τ_a quand aucune confusion n'est possible) définie par :

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite **finie** en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

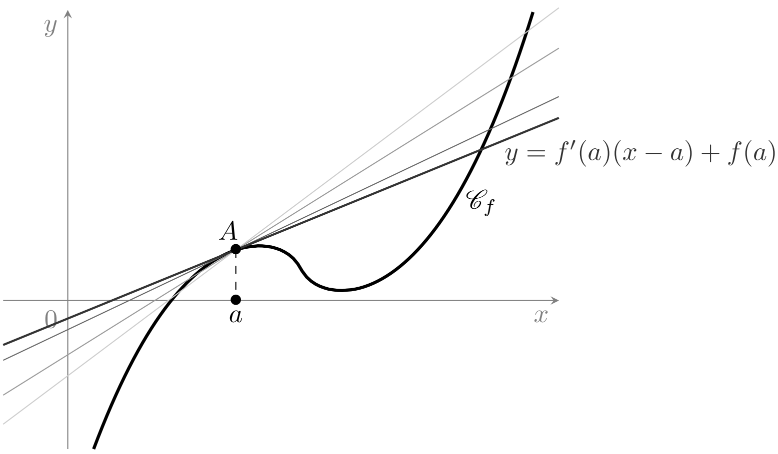
En d'autres termes, le nombre dérivé est, quand elle existe, la limite du taux d'accroissement.

Remarque : En posant $h = x - a \xrightarrow[x \to a]{} 0$, on a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a lorsque la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, et on a alors :$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

La dérivabilité de f en a est équivalente à la dérivabilité de $x \mapsto f(x+a)$ en 0.

Interprétation géométrique : On note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ (c'est-à-dire le point d'abscisse a sur la courbe de f) et M le point d'abscisse x. Ainsi $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a, « M tend vers A » et la droite (AM) « tend vers une droite limite » (passant toujours par A) de coefficient directeur $f'(a)$.

Interprétation physique/cinématique : Si $f(t)$ est la position à l'instant t, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la vitesse moyenne (éventuellement négative si on recule) entre x et a (le très célèbre « $v = d/t$ »). Au fur et à mesure que x se rapproche de a, on calcule la vitesse moyenne sur un laps de temps toujours plus court contenant a et donc on peut interpréter $f'(a)$ comme la vitesse instantanée à l'instant a (et c'est même comme cela qu'on la définit en physique).



Cette droite est appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ou au point d'abscisse a (ou en a par abus de langage). En d'autres termes :

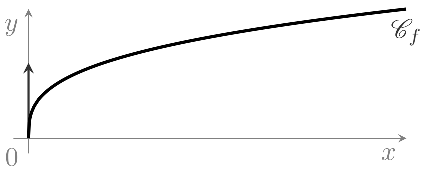
Définition. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe de f en a la droite passant par $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Proposition. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite d'équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition. □

Remarque : Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors la droite (AM) « tend » aussi vers une une position limite, qu'on appelle aussi tangente à $\mathscr{C}_f$ en a, mais cette fois la droite est alors verticale.

Définition. Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente verticale à $\mathscr{C}_f$ en $A(a, f(a))$.



En conclusion : Géométriquement, f est dérivable en a si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet en a une tangente **non verticale**.

Proposition. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse : nous verrons que la valeur absolue et la racine carrée sont continues non dérivables en 0. Il existe même des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dérivables en aucun point !

Définition. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors dérivée de f la fonction notée f' définie par :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

Remarque : Attention, on ne peut mettre un $'$ (prime) que sur une fonction ! Écrire $(f(x))'$ n'a aucun sens car $f(x)$ n'est pas une fonction. Si on manipule une quantité qui n'a pas de nom (par exemple $\sqrt{x^2+1}$) :

- Soit on définit une fonction f et on écrit $f'(x)$. On écrit par exemple : soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. Alors $f'(x) = \cdots$
- Soit on utilise la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. On écrit par exemple : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \cdots$

Définissons enfin une propriété plus forte que la dérivabilité.

Définition. On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Définition. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $D(I, \mathbb{R})$ et l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I est noté $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

En résumé, « f est dérivable sur I » = « f' est définie sur I » et « f est $\mathscr{C}^1$ sur I » = « f' est continue sur I ». Une fonction $\mathscr{C}^1$ est évidemment dérivable par définition. Nous verrons dans le chapitre 14 que la réciproque est fausse. En termes ensemblistes (nous reverrons l'inclusion dans le chapitre 4) :

$$\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset D(I, \mathbb{R}).$$

III Opérations sur les fonctions dérivables en un point

III.1 Sommes et produits

Théorème. Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont dérivables en a et :

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- $(\lambda f)'(a) = \lambda \times f'(a)$.
- $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

III.2 Composition

Théorème. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

J est un autre intervalle non vide, non réduit à un point.

III.3 Quotient

On revient dans ce paragraphe à des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, de fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Corollaire. Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$ alors :

- $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

III.4 Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle

Le réel a dans les paragraphes précédents étant quelconque, on en déduit les deux théorèmes suivants.

Théorème. Si f et g sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda \times f', \qquad (f \times g)' = f'g + fg'.$$

De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $1/g$ et f/g sont dérivables et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En particulier, si f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont $\mathscr{C}^1$ sur I. Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, $1/g$ et f/g sont $\mathscr{C}^1$ sur I.

En d'autres termes, une somme, un produit de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) et un quotient de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) là où son dénominateur ne s'annule pas.

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables (par récurrence) :

- Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont dérivables alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ l'est aussi et :
$$(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)' = \lambda_1 {f_1}' + \cdots + \lambda_n {f_n}'$$
On dit que la dérivation est **linéaire**.
- Si f, g, h sont trois fonctions dérivables alors fgh l'est et :
$$(f \times g \times h)' = f'gh + fg'h + fgh'$$
et on généralise sans peine à $f_1 \times \cdots \times f_n$. Inutile d'apprendre une formule compliquée : on dérive les fonctions une à une et on somme.

En d'autres termes, une combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.

Nous verrons un moyen d'écrire cela avec les symboles $\sum$ et $\prod$ dans le chapitre 3.

Théorème. Si $f : I \to J$ est dérivable et $g : J \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. En particulier, si f et g sont $\mathscr{C}^1$, alors $g \circ f$ l'est aussi. En d'autres termes, une composée de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$).

Exemple : Appliquons le théorème de dérivation d'une composée. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\exp(f)$, $\sin(f)$, f^{1789} sont dérivables sur I et $(\exp(f))' = f' \times \exp(f)$, $(\sin(f))' = f' \times \cos(f)$, $(f^{1789})' = 1789 \times f' \times f^{1788}$.

De manière générale, « on dérive ce qu'il y a à l'intérieur, puis on dérive la fonction à l'extérieur appliquée à la fonction à l'intérieur ».

Exemples :

- Soit $\varphi : x \longmapsto (2x+3)^4$. Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 4 \times 2 \times (2x+3)^3$.

- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'ést une composée de fonctions dérivables. En effet :
  - ⋆ $x \longmapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
  - ⋆ La racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - ⋆ L'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $1+e^y \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

  Calculons la dérivée de f.
  - ⋆ Posons $g : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$. On a (on a déjà dit que tout était dérivable)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

  - ⋆ Posons $h : x \longmapsto \cos(\sqrt{x^2+1}) = \cos(g(x))$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = g'(x) \times -\sin(g(x)) = \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

  - ⋆ Posons $u : x \longmapsto e^{\cos(\sqrt{x^2+1})} = e^{h(x)}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u'(x) = h'(x) \times e^{h(x)} = \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}.$$

  - ⋆ Finalement, puisque $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+u(x)}$, il vient :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{-u'(x)}{(1+u(x))^2} \\ &= \frac{x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\cos(\sqrt{x^2+1})} \times \frac{1}{\left(1+e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}\right)^2}.\end{aligned}$$

Nous reverrons tout cela dans le chapitre 2.5.

⚠ Tous les résultats de ce paragraphe donnent des conditions **suffisantes** pour qu'une fonction soit dérivable. **Aucun** ne donne de condition pour qu'une fonction ne soit pas dérivable. En d'autres termes, si f et g sont dérivables, on peut dire que $f+g$ et $f \times g$ sont dérivables, mais on ne peut rien affirmer si f et g ne sont pas dérivables. En effet, une somme ou un produit de fonctions non dérivables peut être dérivable : par exemple, si f est la valeur absolue (cf. chapitre 2.5), alors f n'est pas dérivable en 0 mais $f-f$ est la fonction nulle et $f \times f$ est la fonction carré, toutes deux dérivables en 0. Si aucun des théorèmes ne s'applique, on ne peut pas conclure que la fonction étudiée n'est pas dérivable. Une seule solution : le taux d'accroissement, c'est-à dire revenir à la définition d'une fonction dérivable, cf. TD.

Proposition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ dérivable.
- Si f est paire alors f' est impaire.
- Si f est impaire alors f' est paire.
- Soit $T \in \mathbb{R}$. Si f est T-périodique alors f' est T-périodique.

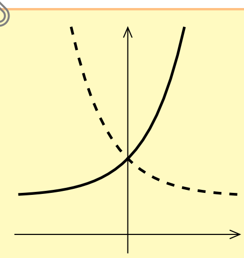
⚠ Attention, la réciproque est fausse ! Par exemple, si on pose $f : x \mapsto x^3+1$, alors f' est paire mais f n'est pas impaire. Nous en reparlerons dans le chapitre 10.

DÉMONSTRATION.
- Supposons f paire. Notons $g : x \mapsto f(-x)$. Puisque $f = g$ alors $f' = g'$. Or, pour tout $x \in E$, $g'(x) = -f'(-x)$ donc $f'(x) = -f'(-x)$: f' est impaire.
- Démonstration analogue : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

- Supposons f T-périodique. Notons $g : x \mapsto f(x+T)$. Puisque $f = g$ alors $f' = g'$. Or, pour tout $x \in E$, $g'(x) = f'(x+T)$ donc $f'(x) = f'(x+T)$: f' est T-périodique.

Remarques :

- Nous avons parlé de la dérivabilité d'une fonction définie sur E, partie de $\mathbb{R}$, qui n'est pas forcément un intervalle. Ce n'est pas très grave, on peut généraliser la notion de fonction dérivable sur un ensemble qui n'est pas un intervalle dans le paragraphe V.
- Attention, quand on dérive $f(-x)$, il ne faut pas juste écrire $f'(-x)$, il ne faut pas oublier de dériver ce qu'il y a dedans i.e. d'appliquer le théorème de dérivation d'une composée.
- Attention, si deux fonctions dérivables sont égales, alors leurs taux d'accroissements sont égaux, donc elles ont la même dérivée, mais la réciproque est fausse ! Par exemple, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2+1$ ont la même dérivée mais ne sont pas égales. Nous prouverons plus tard (cf. chapitre 10) que, sur un intervalle, deux fonctions ont la même dérivée si et seulement si elles diffèrent d'une constante : on dit que les primitives d'une fonctions sont définies à une constante près.
- Attention, on ne peut dériver une égalité que lorsque celle-ci est valable sur tout un intervalle, pas uniquement en un point ! N'oublions pas que la notion de dérivée fait intervenir une limite, donc la fonction sur tout un voisinage. Ce n'est pas parce que deux fonctions coïncident en un point que les dérivées sont égales, les tangentes ne sont pas forcément les mêmes (voir dessin ci-contre : les fonctions coïncident en 0 mais les dérivées ne sont pas les mêmes). Par exemple, si $x = 0$, alors $e^x = 1$, mais qui irait dériver cette égalité en disant que $\exp'(0) = \exp(0) = 0$?



IV Lien entre dérivée et monotonie.

Notation : On note $\overset{o}{I}$ l'intervalle ouvert ayant les mêmes bornes que I. On dit que $\overset{o}{I}$ est l'intérieur de l'intervalle I.

Bien sûr, si I est ouvert, alors $I = \overset{o}{I}$. Un intervalle est non vide non réduit à un point si et seulement s'il est d'intérieur non vide. On dit aussi qu'il est non trivial.

Exemples :

- Si $I = \mathbb{R}_+$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}_+^*$.
- Si $I = [\,0\,;1\,]$, alors $\overset{o}{I} = \,]\,0\,;1\,[$.
- Si $I = \,]\,0\,;1\,[$, alors $\overset{o}{I} = \,]\,0\,;1\,[$
- Si $I = \mathbb{R}$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}$.

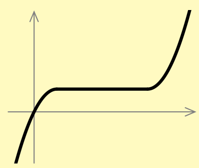
Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I dérivable sur $\overset{o}{I}$.

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur $\overset{o}{I}$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur $\overset{o}{I}$.
3. f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $\overset{o}{I}$.

Quand on dit « positive » ou « négative », il faut bien sûr comprendre : au sens large.

Théorème. Soit f continue et monotone sur I, dérivable sur $\overset{o}{I}$. La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement s'il n'existe pas d'intervalle $]\,c\,;d\,[$ inclus dans I tel que f' soit nulle sur $]\,c\,;d\,[$.

Ci-dessous le graphe d'une fonction croissante non strictement croissante.



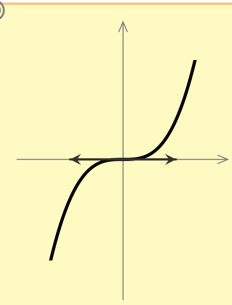
Remarque : En d'autres termes, f est strictement monotone si et seulement si f « ne fait pas de palier ».

Corollaire. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I dérivable sur $\overset{o}{I}$

1. Si f' est strictement positive sur $\overset{o}{I}$ alors f est strictement croissante sur I.
2. Si f' est strictement négative sur $\overset{o}{I}$ alors f est strictement décroissante sur I.

Exemple : La racine carrée (cf. chapitre 2.5) est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée strictement positive donc est strictement croissante <u>sur $\mathbb{R}_+$</u>.

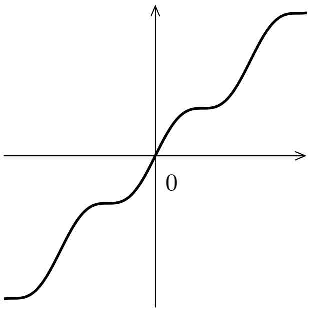
Remarque : La réciproque est fausse ! Par exemple, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée s'annule en 0. Voir dessin ci-contre.



Remarque : On peut généraliser le résultat ci-dessus :

Corollaire. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et monotone sur I, dérivable sur $\overset{o}{I}$. Si f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

Remarque : Là aussi, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule une infinité de fois. En effet, sa dérivée s'annule en tous les $2k\pi$, pour $k \in \mathbb{Z}$: elle s'annule donc une infinité de fois, ce qui n'empêche pas f d'être strictement croissante d'après le théorème précédent, car sa dérivée n'est identiquement nulle sur aucun intervalle d'intérieur non vide mais en une infinité de points isolés. Cependant, ce cas de figure est rare en pratique, le corollaire précédent suffit.



Remarque : En pratique, on représente le signe de f' et les variations de f dans un tableau de variations, c'est très parlant et plus clair qu'un long discours. Les flèches signifient que la monotonie est stricte. Nous verrons des exemples dans la suite du cours.

V Intervalle or not intervalle ?

On peut sans problème étendre la définition d'une fonction dérivable au cas d'une fonction définie sur un ensemble D, union d'intervalles non vides, non réduits à un point, par exemple sur $\mathbb{R}^*$ ou sur

$$D_{\tan} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2} \,;\, k\pi + \frac{\pi}{2} \right[.$$

Une fonction est dérivable sur un tel ensemble si elle est dérivable en chacun de ses points : la dérivabilité est une notion locale.

D'ailleurs, nous ne nous sommes pas privés de le faire en disant que la fonction inverse était $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, quand nous avons dit qu'un quotient de fonctions dérivables était dérivable là où son dénominateur ne s'annulait pas, quand nous avons parlé de la dérivée d'une fonction paire, impaire ou périodique, ou quand nous dirons qu'une fonction rationnelle est $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

Cependant, on a largement utilisé le fait que I est un intervalle dans les démonstrations des résultats du paragraphe précédent. Ainsi, si f n'est pas définie sur un intervalle, les résultats précédents ne sont pas forcément vérifiés, ils le sont **sur chaque intervalle composant D_f**.

Exemple : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc est strictement décroissante sur chaque intervalle composant $\mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$) mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! En effet, si on la note f, alors $f(-1) < f(1)$.

Exemple : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, donc est constante sur chaque intervalle composant $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

Enfin, attention : si $a \in E$, le fait que $f'(a) > 0$ n'implique pas croissante sur un voisinage de a ! En effet, la tangente peut être « dirigée vers le haut alors que f oscille beaucoup » ! Le lien entre monotonie n'est valable que sur un intervalle, pas en un point ! Nous verrons dans le chapitre 14 un exemple de fonction vérifiant $f'(0) > 0$ mais qui n'est croissante sur aucun voisinage de 0.

VI Dérivées d'ordre supérieur.

On se donne dans cette partie et les suivantes deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{R}$.

VI.1 Définitions et notations

Définition.

- Si f est dérivable, on note f' sa dérivée. Si f' est elle-même dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ sa dérivée : on dit que f est dérivable deux fois.
- De même, si f'' est dérivable, on note sa dérivée f''' ou $f^{(3)}$: on dit que f est dérivable trois fois et que $f^{(3)}$ est sa dérivée troisième.

La notation f''' est assez lourde et ne sera plus utilisée dans la suite : on commence à voir l'intérêt de la future notation $f^{(n)}$. Comme pour la dérivée, on n'appliquera pas l'exposant (n) à autre chose qu'une fonction : on n'écrira pas $x^{(n)}$ par exemple. Si on veut dériver n fois quelque-chose qui n'a pas de nom, comme pour dériver une seule fois, on introduit une fonction f ou on utilise la notation $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cdots)$.

Plus généralement :

Définition. Sous réserve d'existence, si $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois f. Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est dérivable n fois et que $f^{(n)}$ est sa dérivée n-ième.

Remarque : Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, fondée sur la formule suivante, en tout point x où c'est possible : $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

Remarques :

- On note généralement f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. Cependant, comme on l'a vu plus haut, à partir de la dérivée troisième, on utilise exclusivement l'écriture $f^{(n)}$, surtout pour des raisons pratiques.
- Par convention (surtout quand on calculera des sommes, voir par exemple la démonstration de la formule de Leibniz), on pose $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable n fois alors f' est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
- Si f' est dérivable n fois alors f est dérivable $n+1$ fois et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$.

Ces deux dernières propriétés peuvent être utiles quand on raisonne par récurrence.

Définition. Soit $n \geqslant 1$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque : Par analogie, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue.

Proposition. Soit $n \geqslant 1$.

- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors, pour tout $p \leqslant n$, f est de classe $\mathscr{C}^p$.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, f'' est de classe $\mathscr{C}^{n-2}$ etc.
- Si f' est de classe $\mathscr{C}^n$ alors f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

De même que ci-dessus, « f est dérivable n fois sur I » = « $f^{(n)}$ est définie sur I » et « f est $\mathscr{C}^n$ sur I » = « $f^{(n)}$ est continue sur I ». Une fonction $\mathscr{C}^n$ est évidemment dérivable n fois par définition, là aussi la réciproque est fausse : on en reparle.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Définition. Soit $n \geqslant 1$. On note $D^n(I, \mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I à valeurs réelles.

Définition. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Par conséquent, un moyen simple de prouver qu'une fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ est de prouver par récurrence que, pour tout n, f est $\mathscr{C}^n$.

Proposition. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si f est dérivable une infinité de fois.

Si, pour tout n, f est dérivable n fois, on dit que f est dérivable une infinité de fois.

Remarque : La plupart des fonctions usuelles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition (cf. chapitre 2.5), sauf la racine carrée qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qui n'est pas dérivable en 0 (et évidemment la valeur absolue qui n'est pas dérivable non plus en 0, sans compter la partie entière qui n'est même pas continue sur $\mathbb{R}$).

VI.2 Opérations sur les fonctions dérivables n fois et les fonctions $\mathscr{C}^n$

Théorème. Soit $n \geqslant 1$. Si f et g sont dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I. De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $1/g$ et f/g sont dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

En d'autres termes, une somme, un produit de fonctions dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) et un quotient de fonctions dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) là où son dénominateur ne s'annule pas.

Exemple : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' = 1 + f^2$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Montrons par récurrence que f est $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « f est $\mathscr{C}^n$ ».
- La fonction f est dérivable par hypothèse. Dès lors, f est continue donc $f' = 1 + f^2$ est continue. Ainsi, f est $\mathscr{C}^1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est $\mathscr{C}^n$ donc $f^2 = f \times f$ est $\mathscr{C}^n$, et la fonction constante égale à 1 est $\mathscr{C}^n$ donc f' est $\mathscr{C}^n$ donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Puisque f est $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$, elle est $\mathscr{C}^\infty$. C'est un raisonnement qui revient souvent quand on fait des équations différentielles, cf. chapitre 11.

Théorème. Soit $n \geqslant 1$. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) alors $g \circ f$ est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$).

En d'autres termes, quand tout est bien défini, une composée de fonctions dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$) est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, respectivement $\mathscr{C}^\infty$).

VII Rappels de convexité.

Nous nous contenterons dans cette partie d'une définition « intuitive et géométrique » de la convexité qui est celle au programme de terminale, et nous admettrons tous les résultats. Nous reverrons tout cela plus rigoureusement et en détails dans le chapitre 15.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in I^2$. Le segment joignant les points du graphe de f d'abscisses a et b est appelée corde.

Remarque : D'après la partie I, la corde joignant les points d'abscisses a et b est le segment (car on se restreint aux points d'abscisse comprise entre a et b) d'équation :

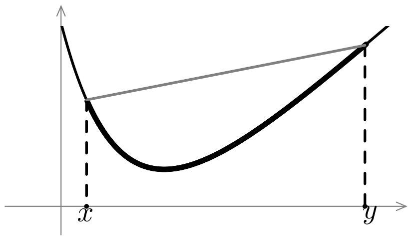
$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times (x - a) + f(a)$$

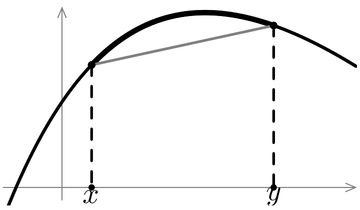
Par exemple, la corde du sinus entre 0 et $\pi/2$ est le segment d'équation

$$y = \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - \sin(0)}{\dfrac{\pi}{2} - 0} \times (x - 0) + \sin(0) = \frac{2x}{\pi}$$

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est

- convexe si le graphe de f est au-dessus de ses cordes.
- concave si $-f$ est convexe i.e. si le graphe de f est en-dessous de ses cordes.

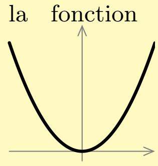




Une fonction convexe est une fonction « qui sourit ». Une fonction concave est une fonction « qui fait la tête ».

Nous n'allons nous intéresser dans ce chapitre qu'aux fonctions convexes dérivables et dérivables deux fois, mais attention : une fonction convexe n'est pas forcément dérivable et donc n'est pas forcément dérivable deux fois (par exemple, la valeur absolue est convexe). Nous en reparlerons dans le chapitre 15, l'objet de ce chapitre, encore une fois, est de se donner les outils pour étudier les fonctions et tracer leur graphe.

Ci-dessous le graphe de la fonction carré :



Proposition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois.

- f est convexe si et seulement si f'' est positive.
- f est concave si et seulement si f'' est négative.

Ne pas confondre f'' et f', en d'autres termes, ne pas confondre une fonction convexe (qui vérifie $f'' \geqslant 0$) et une fonction croissante (qui vérifie $f' \geqslant 0$). Il n'y a aucun lien entre la convexité et la monotonie d'une fonction !

Exemples : Donnons des exemples de fonctions convexes ou concaves : on peut l'affirmer directement, mais on le montre très facilement en donnant le signe de la dérivée seconde. Remarquons que, pour certaines fonctions, cela dépend de l'intervalle sur lequel on se place (quand rien n'est précisé, il est sous-entendu que l'on se place sur le domaine de définition de la fonction). On donnera les graphes de ces fonctions au fil du chapitre, dans la marge. Nous reverrons ces fonctions et nous en verrons d'autres dans des chapitres ultérieurs.

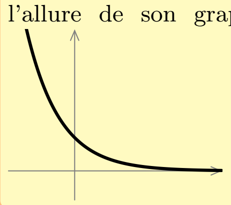
Fonctions convexes :

- exp.
- Fonction carré.
- Fonction cube sur $\mathbb{R}_+$. .
- Fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $x \longmapsto e^{-x}$.

Fonctions concaves :

- ln.
- sin sur $[\,0\,;\pi\,]$.
- La racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.
- cos sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.
- Fonction cube sur $\mathbb{R}_-$.
- Fonction inverse sur $\mathbb{R}_-^*$.

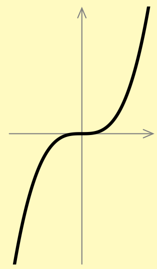
La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est un exemple de fonction convexe strictement décroissante : il n'y a aucun lien entre convexité et monotonie ! Ci-dessous l'allure de son graphe :



Remarque : La racine carrée est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas dérivable en 0. Pourtant, nous avons écrit qu'elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$: cela vient du fait qu'elle est continue. Nous le démontrerons dans le chapitre 15.

Remarque : La fonction cube est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$. Elle change de convexité en 0. De même pour tan en 0 (cf. chapitre 5) et $x \longmapsto e^{-x^2}$ en $1/\sqrt{2}$ et en $-1/\sqrt{2}$ (voir l'exercice 17). Cela justifie la définition suivante.

Ci-dessous le graphe de la fonction cube, convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$:



Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, soit $x_0 \in \overset{o}{I}$. On dit que f admet un point d'inflexion en x_0 si f change de convexité en x_0, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit convexe sur $[\,x_0 - \varepsilon\,;x_0\,]$ et concave sur $[\,x_0\,;x_0 + \varepsilon\,]$, ou concave sur $[\,x_0 - \varepsilon\,;x_0\,]$ et convexe sur $[\,x_0\,;x_0 + \varepsilon\,]$.

Dans le cas particulier des fonctions dérivables deux fois, il y a un résultat permettant de trouver rapidement les points d'inflexion :

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois, soit $x_0 \in \overset{o}{I}$. f admet un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

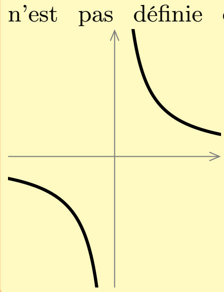
Il ne faut pas oublier de montrer que f'' change de signe : le fait que f'' s'annule ne suffit pas !

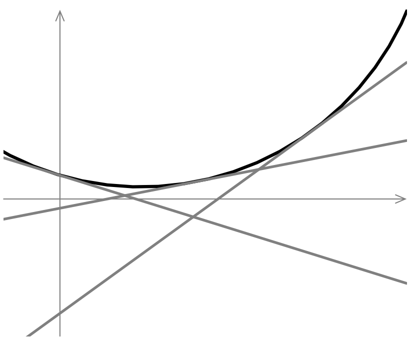
Remarque : Attention, il existe des fonctions convexes qui ne sont pas dérivables deux fois. Dans ce cas, il faut revenir à la définition d'un point d'inflexion : cf. chapitre 15.

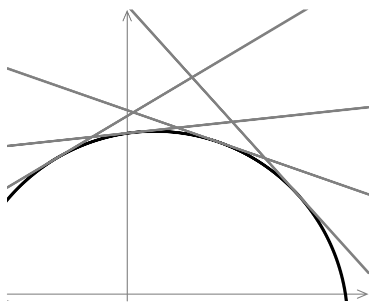
Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- f est convexe si et seulement si son graphe est au-dessus de ses tangentes.
- f est concave si et seulement si son graphe est en dessous de ses tangentes.

Ci-dessous le graphe de la fonction inverse : elle est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$. Attention, elle n'admet pas de point d'inflexion en 0 car n'est pas définie en 0 !

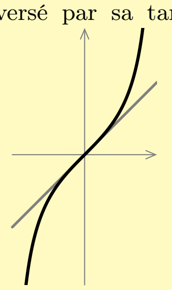






Remarque : Par conséquent, si f est dérivable et si f admet un point d'inflexion en x_0, le graphe de f « traverse sa tangente » en x_0. Voir le graphe de la fonction cube au paragraphe IV.

Un exemple de fonction admettant un point d'inflexion : son graphe est traversé par sa tangente.



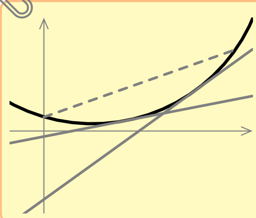
Remarque : En pratique, on se contente de la tangente en 0 dont l'équation est $y = f(0) + f'(0) \times x$ (c'est la partie principale du DL à l'ordre 1, cf. chapitre 24). Les tangentes à connaître pour l'instant (nous en verrons d'autres au fil de l'année) sont :

- La tangente en 0 du sinus, de la tangente, de $x \longmapsto \ln(1 + x)$ est la droite d'équation $y = x$.
- La tangente en 0 de l'exponentielle est la droite d'équation $y = 1 + x$.

Bilan :

Une fonction f est convexe si et seulement si :

- Le graphe de f est en-dessous de ses cordes.
- Le graphe de f est au-dessus de ses tangentes (si f est dérivable).
- f'' est positive (si f est dérivable deux fois).



Il suffit de tout inverser pour les fonctions concaves. Ci-contre, le graphe d'une fonction convexe (en noir) avec une corde (en pointillés) et deux tangentes (en gris).

Questions types

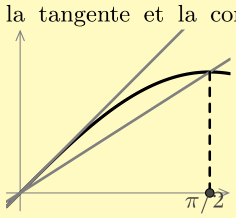
Montrer les inégalités suivantes :

- $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x$.

  Réponse : La fonction sin est concave sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc est au-dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes. Il suffit ensuite de voir que la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0 et la corde reliant les points d'abscisses 0 et $\pi/2$ est la droite d'équation

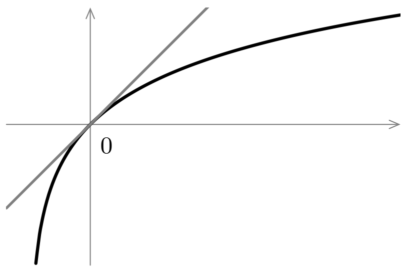
$$y = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)}{\frac{\pi}{2} - 0} \times (x - 0) + \sin(0) = \frac{2x}{\pi}.$$

On peut affirmer directement que le sinus est concave sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, mais si on veut le montrer, il suffit de dire que sin est dérivable deux fois et $\sin'' = -\sin \leqslant 0$ sur cet intervalle. Ci-dessous le graphe, la tangente et la corde :



- $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

  Réponse : La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est concave donc est en dessous de ses tangentes, et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0. Idem, on peut affirmer directement que $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave, mais si on veut le montrer, il suffit de dire qu'elle est dérivable deux fois, de dérivée seconde $x \mapsto \dfrac{-1}{(1+x)^2} < 0$. Ci-dessous le graphe et la tangente en 0 :

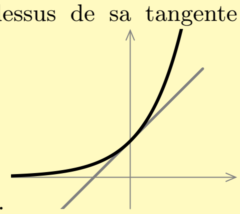


Remarque : Le seul problème de cette méthode est qu'elle ne permet pas de donner les cas d'égalité car les fonctions strictement convexes ne sont pas au programme. Si on demande le cas d'égalité, pas le choix, on se débrouille autrement ! Mais la bonne nouvelle est que cela n'arrive pas souvent.

Autres exemples : Soit $n \geqslant 1$. Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geqslant 1 + x$.
2. $\forall x \in [\,0\,;n\,]$, $\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \leqslant e^{-x}$.

Ci-dessous le graphe de la fonction exponentielle, convexe sur $\mathbb{R}$: il est bien au-dessus de sa tangente en 0.



Réponse :

1. La fonction exponentielle est convexe donc est au-dessus de ses tangentes et la droite d'équation $y = 1 + x$ est la tangente en 0.
2. D'après la question précédente, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u \geqslant 1 + u$. Soit $x \in [\,0\,;n\,]$. En appliquant ce résultat à $u = -\dfrac{x}{n}$, il vient $e^{-x/n} \geqslant 1 - \dfrac{x}{n}$. Or, la fonction $u \longmapsto u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ (attention, elle n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ si n est pair, cf. chapitre 2.5) et $x \leqslant n$ donc $\dfrac{x}{n} \leqslant 1$ donc $1 - \dfrac{x}{n} \geqslant 0$. Par conséquent, on ne change pas le sens des inégalités en mettant à la puissance n donc $e^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Remarque : ⚠ Attention à ne pas sortir l'arme de la convexité quand cela n'a rien à voir avec la question. Par exemple, si on demande de montrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$ pour tout $x \geqslant 0$, alors on peut faire une étude de fonction (cf. exercice 40), ou appliquer une formule de Taylor (cf. chapitre 23), mais il est hors de question d'utiliser la convexité et de parler de corde ou de tangente ici : en effet, $y = x - \dfrac{x^2}{2}$ n'est pas une équation de droite !