# Devoir Surveillé n°6 - Sujet groupes B et C

# Préliminaires

1. (Question de cours) Définition d'une probabilité sur un univers fini, définition d'une probabilité conditionnelle.
2. (Question de cours) Inégalité de Markov (démonstration).
3. Donner le DL de $f : x \mapsto \sin(x) \times e^{x^2}$ à l'ordre 5 en 0, et le DL de $g : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 en 0.

# Problème - Polynômes « exponentiels » et méthode de Laplace

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ par :

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$$

### Partie I - Premières propriétés des polynômes $P_n$ et définition de la suite $(a_n)$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Calculer $P_n(0)$.
   (b) Exprimer ${P_{n+1}}'$ en fonction de $P_n$.
2. Le but de cette question est de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n}$ n'admet aucune racine réelle, et que $P_{2n+1}$ a une unique racine réelle appelée $a_n$.
   (a) Montrer l'initialisation. On se donne donc dans la suite de cette question un entier $n$, et on suppose le résultat vrai au rang $n$.
   (b) Justifier que $P_{2n+1}$ est de signe constant sur $]\, a_n\, ; +\infty\, [$. Donner un équivalent de $P_{2n+1}(x)$ quand $x \to +\infty$ et en déduire le tableau de signes de $P_{2n+1}$.
   (c) À l'aide de la question 1, donner le tableau de variations de $P_{2n+2}$. Exprimer $P_{2n+2}(a_n)$ en fonction de ${a_n}^{2n+2}$ et prouver que $P_{2n+2}(a_n) > 0$.
   (d) Conclure.

**Par conséquent, pour tout $n$, $P_{2n+1}$ s'annule en un unique réel noté $a_n$, et le but de ce problème est de donner un développement asymptotique de la suite $(a_n)$.**

### Partie II - Monotonie et limite de $(a_n)$

On se donne dans cette partie un entier $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner le tableau de variation de $P_{2n+1}$ et de $P_{2n+3}$, ainsi que leurs tableaux de signes.
2. Montrer que $a_n < 0$.
3. Soit $n \geq 0$.
   (a) Soit $p \leq n$. Donner le signe de :
   $$\frac{(2n+3)^{2p}}{(2p)!} - \frac{(2n+3)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$
   (b) Donner le signe de $P_{2n+1}(-2n-3)$. Comparer $a_n$ et $-2n-3$.
   (c) En calculant le signe de $P_{2n+3}(a_n)$, montrer que la suite $(a_n)$ est décroissante.
4. Montrer que $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$. On pourra montrer que, si $(a_n)$ converge vers une limite $L$, alors, pour tout $n$, $P_{2n+1}(L) \leq 0$ et conclure à une absurdité.

## Partie III - Une première application de la (variante de la) méthode de Laplace

On admet provisoirement le résultat suivant (nous le démontrerons dans les parties V, VI et VII) :

**Théorème (méthode de Laplace) :** Soient deux fonctions $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- $g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- il existe $c > 0$ tel que $g$ soit strictement décroissante sur $]\,0\,;c\,]$ et tel que $g'(c) < 0$ et $f(c) \neq 0$.

Alors, pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ :

$$\int_0^{c+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x \sim \frac{-f(c)e^{-\beta g'(c)}}{g'(c)} \times \frac{e^{-ng(c)}}{n^{1+\alpha g'(c)}}$$

On ne soulèvera pas de difficulté sur l'intégrale ci-dessus (même si $f$ et $g$ ne sont a priori pas définies en 0) car nous allons dans la suite appliquer ce résultat pour donner des équivalents d'intégrales dont la définition ne posera aucun problème (voir ci-dessous).

1. Justifier l'existence et l'unicité d'un réel $y$ tel que $ye^{1+y} = 1$ et justifier que $y > 0$. Dans la suite de cette partie, on se donne ce réel $y$ ainsi qu'un entier $n \geq 1$ et deux réels $\alpha$ et $\beta$ et on note

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^{yn+\alpha\ln(n)+\beta} e^x x^n\,\mathrm{d}x$$

2. Justifier que :

$$I_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{y+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} 1 \times e^{-n(-u-\ln(u))}\,\mathrm{d}u$$

Comme indiqué ci-dessus, on ne soulèvera pas de difficulté sur l'écriture ci-dessus, même si le ln n'est pas défini en 0, car la définition de $I_n$ ne pose pas de problème (vous pourrez le faire proprement en deuxième année).

3. Justifier que :

$$\frac{n^{n+1}}{n!} \sim e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}$$

4. Montrer, à l'aide du théorème admis ci-dessus, que $I_n \sim n^A \times B$ où :

$$A = \alpha \times \frac{1+y}{y} - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{y}{y+1} \times \exp\left(\beta \times \frac{1+y}{y}\right)$$

## Partie IV - Développement asymptotique de la suite $(a_n)$

On reprend les notations de la partie I ($P_n$, $a_n$, etc.). Plus précisément, pour tout $n$, $a_n$ désigne l'unique racine du polynôme $P_{2n+1}$. On se donne donc un entier $n \geq 1$ et, pour simplifier les notations, on note dans la suite $m = 2n+1$ (et donc $P_m(a_n) = 0$).

1. (a) À l'aide de la formule de Taylor reste intégral appliquée à l'exponentielle à l'ordre $m$, prouver que :

$$e^{a_n} = \frac{{a_n}^{m+1}}{m!}\int_0^1 e^{a_n t} \times (1-t)^m\,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 \frac{u^m}{m!}e^{-a_n u}{a_n}^{m+1}\,\mathrm{d}u = 1$$

(c) En utilisant le fait que $m$ est impair, montrer enfin que :

$$\frac{1}{m!}\int_0^{-a_n} x^m e^x\,\mathrm{d}x = 1$$

2. On reprend dans cette question le réel $y$ (dont on a montré l'existence et l'unicité dans la partie précédente) vérifiant $ye^{1+y} = 1$ et on note :

$$z = \frac{y}{2(1+y)} \qquad \text{et} \qquad t = \frac{y}{1+y}\ln\left(\sqrt{2\pi} \times \frac{1+y}{y}\right)$$

Le but de cette question est de prouver que la suite de terme général $x_n = a_n + (2n+1)y + z\ln(2n+1) + t$ tend vers 0. On effectue pour cela un raisonnement par l'absurde, et on suppose donc qu'elle ne tend pas vers 0.

(a) Écrire avec des quantificateurs : « $(x_n)$ ne tend pas vers 0 ».

(b) Montrer que qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $(x_n)$ admette une sous-suite minorée par $\varepsilon$, ou une sous-suite majorée par $-\varepsilon$. Sans perte de généralité, on suppose qu'on est dans le premier cas, c'est-à-dire que $(x_n)$ admet une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall p \in \mathbb{N}, x_{n_p} \geq \varepsilon$$

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Si on note encore $m = 2n_p + 1$, justifier que $-a_{n_p} \leq ym + z\ln(m) + (t-\varepsilon)$ et en déduire que :

$$\frac{1}{m!}\int_0^{-a_{n_p}} x^m e^x \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{m!}\int_0^{ym+z\ln(m)+(t-\varepsilon)} e^x x^m \,\mathrm{d}x$$

(d) En utilisant la partie précédente, justifier que :

$$\frac{1}{m!}\int_0^{ym+z\ln(m)+(t-\varepsilon)} e^x x^m \,\mathrm{d}x \sim B$$

avec $B$ une constante strictement inférieure à 1.

(e) Conclure à une contradiction. On a donc prouvé que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire :

$$a_n = -(2n+1)y - z\ln(2n+1) - t + \mathrm{o}\,(1)$$

En conclusion, on a le développement asymptotique suivant :

$$a_n = -2ny - \frac{y}{2(1+y)} \times \ln(n) - y - \frac{y}{2(1+y)} \times \ln(2) - \frac{y}{1+y}\ln\left(\sqrt{2\pi} \times \frac{1+y}{y}\right) + \mathrm{o}\,(1)$$

où $y$ est l'unique réel tel que $te^{1+t} = 1$.

**Le but de la suite du problème est de prouver le résultat de la méthode de Laplace énoncé ci-dessus. On fait donc les mêmes hypothèses et on reprend les notations de l'énoncé ci-dessus ($f$ continue, $g$ de classe $\mathscr{C}^2$, $c > 0$ tel que etc.) De plus, on se donne un entier $n \geq 1$ et on pose :**

$$c_n = c - \frac{1}{n^{3/4}} \qquad \text{et} \qquad {c_n}' = c + \frac{\alpha\ln(n)}{n} + \frac{\beta}{n}$$

**ainsi que**

$$J_n = \int_0^{c+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x$$

## Partie V - Où l'on prend $n$ assez grand et où l'on découpe $J_n$ en trois intégrales

1. (a) Justifier que, pour $n$ assez grand :

$$-1 \leq \frac{\alpha\ln(n)}{n^{1/4}} + \frac{\beta}{n^{1/4}}$$

   (b) En déduire que $c_n \leq {c_n}'$ pour $n$ assez grand.

   (c) Montrer également que, pour $n$ assez grand, $|c - c_n| \geq |c - {c_n}'|$.

2. (a) Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que $g'(x) \leq g'(c)/2$ sur $[\,c-\eta\,;c\,]$ et tel que $[\,c-\eta\,;c+\eta\,] \subset \mathbb{R}_+^*$.

   (b) Justifier que, pour $n$ assez grand, $c - \eta \leq c_n$ et ${c_n}' \leq c + \eta$.

On supposera donc dans la suite que $n$ est assez grand pour que les conditions de cette partie soient vérifiées, et on écrit alors :

$$J_n = \underbrace{\int_0^{c-\eta} f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x}_{A_n} + \underbrace{\int_{c-\eta}^{c_n} f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x}_{B_n} + \underbrace{\int_{c_n}^{{c_n}'} f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x}_{C_n}$$

## Partie VI - Où l'on montre que $A_n$ et $B_n$ sont négligeables

On reprend les notations de la partie précédente ($n$, $\eta$, $A_n$ etc. et on suppose en particulier que $g'(x) < g'(c)/2$ sur $[\,c-\eta\,;c\,]$).

1. (a) Justifier l'existence d'un réel $r > 0$ tel que $g(x) \geq g(c) + r$ sur $]\,0\,;c-\eta\,]$.

(b) En déduire l'existence d'un réel $A$ tel que :

$$|A_n| \leq A e^{-nr} e^{-ng(c)}$$

puis que $A_n = \mathrm{o}\left(n^t e^{-ng(c)}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. (a) Soit $x \in [\, c-\eta\,;c_n\,]$. À l'aide de l'égalité des accroissements finis sur $[\, x\,;c\,]$, prouver que :

$$g(x) \geq g(c) + \frac{g'(c)}{2}(x-c) \geq g(c) - \frac{g'(c)}{2n^{3/4}}$$

On rappelle que $g'(c) < 0$.

(b) Montrer également que $B_n = \mathrm{o}\left(n^t e^{-ng(c)}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

## Partie VII - Où l'on donne un équivalent de $C_n$ et donc de $J_n$

Dans cette partie, on note $I_\delta = [\, c-\eta\,;c+\eta\,]$. On rappelle que, par choix de $n$ (cf. partie V), $[\, c_n\,;{c_n}'\,] \subset I_\delta \subset \mathbb{R}_+^*$.

1. Justifier l'existence d'un réel $K$ tel que :

$$\forall x \in I_\delta, \qquad |g(x) - g(c) - g'(c) \times (x-c)| \leq \frac{K(x-c)^2}{2}$$

2. Montrer que, si $x \in [\, c_n\,;{c_n}'\,]$ : $|-ng(x) + ng(c) + ng'(c)(x-c)| \leq \dfrac{K}{2\sqrt{n}}$. On pourra utiliser la question 1.(c) de la partie V.
3. Notons :

$$h\colon \begin{cases} [\, c_n\,;{c_n}'\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{f(c)} \end{cases}$$

(a) Justifier que $h$ admet un maximum et un minimum sur $[\, c_n\,;{c_n}'\,]$, notés respectivement $M_n$ et $m_n$.

(b) Justifier que $(M_n)$ et $(m_n)$ tendent vers 1 quand $n$ tend vers l'infini.

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer $f(c) > 0$. Montrer que :

$$m_n f(c) F_n(x) e^{-K/2\sqrt{n}} \leq f(x) e^{-ng(x)} \leq M_n f(c) F_n(x) e^{K/2\sqrt{n}}$$

où $F_n(x) = e^{-ng(c) - ng'(c)(x-c)}$. On pourra utiliser la question 2.

(d) Montrer que :

$$C_n \sim f(c) \int_{c_n}^{{c_n}'} F_n(x)\,\mathrm{d}x$$

4. (a) À l'aide du changement de variable $u = -ng'(c)(x-c)$, prouver que :

$$C_n \sim \frac{f(c)e^{-ng(c)}}{-ng'(c)} \times \left(e^{{d_n}'} - e^{d_n}\right)$$

où $d_n$ et ${d_n}'$ sont des réels que l'on explicitera.

(b) Justifier que $d_n - {d_n}' \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et en déduire que :

$$C_n \sim \frac{-f(c)e^{-\beta g'(c)}}{g'(c)} \times \frac{e^{-ng(c)}}{n^{1+\alpha g'(c)}}$$

5. Conclure.

Fin