Chapitre 6 : Espaces probabilisés

0 – Ensembles dénombrables

Définition :

Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

→ un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Propositions :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable.
- Une union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème de Cantor-Bernstein (HP) :

Soient A, B deux ensembles.

S'il existe $\varphi_1 : A \to B$ et $\varphi_2 : B \to A$ injectives, alors il existe $\psi : A \to B$ bijective.

I – Notion d'espaces probabilisés

Prérequis :

- Univers $\Omega =$ Résultats possibles de l'expérience
- Evènement $=$ partie de Ω, groupement de résultats

<u>Définitions :</u> Soit Ω un ensemble.

$T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si :

- $\emptyset \in T$
- $\forall A \in T, \bar{A} \in T$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$

$(\Omega\,, T)$ est un espace probabilisable.

Les éléments de T s'appellent les évènements.

$P : T \to [0\,;1]$ est une probabilité sur un espace probabilisable (Ω, T) si :

- $\forall A \in T, P(A) \in [0\,;1]$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ *deux à deux disjoints*, $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

(Ω, T, P) est un espace probabilisé.

<u>Propositions :</u> Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $A, B \in T$.

- $A \cap B \in T$
- $\forall (A_n) \in T^{\mathbb{N}}, (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in T$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

II – Propriétés élémentaires des probabilités

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

- Soit $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$ croissant pour l'inclusion. $(\forall n, A_n \subset A_{n+1})$

$$P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$