Corrigé du DM n°18

Exercice 1 :

Première partie :

1 cf TD

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \forall x > -1 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}}$$

2 Soit $x \geqslant 1$. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x (la somme commence en 1 puisque le terme d'ordre 0 est égal à $\ln(1+0)$ et est donc nul) :

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leqslant \max_{c \in [\,0\,;x\,]} |f^{(n+1)}(c)| \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

La fonction $|f^{(n+1)}|$ est évidemment décroissante d'après la question précédente donc, puisque x est positif, le maximum ci-dessus est atteint en 0 et vaut $n!$ (on n'oublie pas de prendre la valeur absolue). Ainsi,

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

Or, $|x| \leqslant 1$, le membre de droite tend par conséquent vers 0, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} = \ln(1+x)}$$

3.(a) Si $x \in \,]-1\,;0\,]$, le maximum de $|f^{(n+1)}|$ sur $[\,0\,;x\,]$ est atteint en x et vaut $n!/|1+x|^{n+1}$. Ainsi, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne la majoration suivante

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leqslant \frac{1}{n+1} \times \left| \frac{x}{1+x} \right|^{n+1}$$

Or, si $x \leqslant 0$, on peut avoir $|x/(1+x)| > 1$ et par conséquent, on majore la différence par un terme qui ne tend pas forcément vers 0, et donc on ne peut pas conclure.

$$\boxed{\text{L'inégalité de Taylor-Lagrange ne permet pas de conclure.}}$$

3.(b) φ est dérivable sur $[\,x\,;0\,]$ de dérivée $\varphi'(t) = (-1-x)/(1+t)^2 < 0$ (car $x > -1$), donc φ est décroissante sur $[\,x\,;0\,]$, nulle en x et vaut x en 0 (c'est cohérent car x est négatif). Ainsi,

$$\boxed{\text{Le maximum de } |\varphi| \text{ sur } [\,x\,;0\,] \text{ est } |x|.}$$

> Attention, on ne peut a priori pas dériver $|\varphi|$ à cause de la valeur absolue.

3.(c) D'après la formule de Taylor reste intégral (qu'on peut appliquer car la fonction étudiée est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$) et en prenant la valeur absolue, il vient

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| = \left| \int_0^x \frac{(-1)^n n!(x-t)^n}{(1+t)^{n+1} n!} \,\mathrm{d}t \right|$$

Or, la valeur absolue de l'intégrale est inférieure ou égale à l'intégrale de la valeur absolue. Cependant, ceci n'est vrai que si les bornes sont dans le bon sens, et ici ce n'est pas le cas car x est négatif, il faut donc les inverser. En d'autres termes,

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leqslant \int_x^0 \left| \frac{x-t}{1+t} \right|^n \times \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t$$

D'après la question précédente,

$$\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\leqslant |x|^n\int_x^0\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t=|x|^n\times(-\ln(1+x))$$

D'où
$$\boxed{\left|f(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\leqslant \mathrm{K}|x|^n \text{ avec } \mathrm{K}=-\ln(1+x)}$$

> Encore une fois, il ne coûte pas cher de vérifier que K est un réel positif, sinon l'inégalité ci-dessus est trivialement fausse.

3.(d) Puisque $|x|<1$ on a $|x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et le réel K est indépendant de n, ce qui permet de conclure en utilisant le théorème d'encadrement.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=\ln(1+x)}$$

Deuxième partie :

1 Soit $x\in[\,0\,;\pi/2\,[$. Montrons donc le résultat par récurrence.

- Si $n\geqslant 0$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « $a_n=\dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}\geqslant 0$ ».
- Si $n=0$, $a_n=\tan(x)\geqslant 0$ donc H_0 est vraie. De plus, $a_1=1+\tan^2(x)\geqslant 0$. H_1 est également vraie.

> Il faut montrer également que H_1 est vraie car l'égalité montrée en TD n'est vraie que pour $n\geqslant 1$.

- Soit n quelconque supérieur ou égal à 1 tel que $\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n$ soient vraies (c'est donc une récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. D'après le TD,

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, pour tout $k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $a_ka_{n-k}\geqslant 0$ ce qui implique par somme que $a_{n+1}\geqslant 0$. Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\geqslant 0$:

$$\boxed{\forall n\geqslant 0\qquad a_n\geqslant 0 \text{ et donc } \tan^{(n)}(x)\geqslant 0}$$

> On pouvait démontrer cela d'une autre façon, en remarquant que $\tan'(x)=1+\tan^2(x)$ et en généralisant le résultat : les dérivées successives de la tangente sont des polynômes à coefficients positifs évalués en la tangente (cf les polynômes de Tchebychev, c'est un argument du même genre). Montrons cela de façon plus précise.
>
> - Si $n\geqslant 0$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « Il existe $\mathrm{P}_n\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ à coefficients positifs tels que $\tan^{(n)}=\mathrm{P}_n(\tan)$ ».
> - Si $n=0$, $\tan^{(0)}=\tan$: $\mathrm{P}_0=\mathrm{X}$ convient donc H_0 est vraie. De plus, $\tan^{(1)}=1+\tan^2$: $\mathrm{P}_1=1+\mathrm{X}^2$ convient, H_1 est également vraie.
> - Soit n quelconque supérieur ou égal à 1 tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $d\geqslant 0$ (le degré de P_n) et $a_0,\dots,a_d$ positifs (ses coefficients) tels que
>
> $$\tan^{(n)}=\sum_{k=0}^{d}a_k\tan^k$$
>
>   En dérivant cette égalité, il vient (le terme pour $k=0$ est nul, la somme commence donc en $k=1$)

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{d} k a_k \tan^{k-1}(1+\tan^2)\\ &= \sum_{k=1}^{d} k a_k \tan^{k-1} + \sum_{k=1}^{d} k a_k \tan^{k+1}\end{aligned}$$

Il suffit de poser $P_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k+1}$ qui est bien à coefficients positifs (car somme de deux polynômes à coefficients positifs) pour conclure : H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 0, \tan^{(n)}(x)$ est un polynôme à coefficients positifs évalué en $\tan(x)$, qui est un nombre positif. Or, un polynôme à coefficients positifs évalué en un nombre positif est lui-même positif : $\tan^{(n)}(x) \geqslant 0$.

2 Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{n+1} - S_n = \frac{\tan^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} \geqslant 0$$

d'après la question précédente, et car $x \geqslant 0$. En conclusion

$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est croissante.}}$$

De plus, d'après la formule de Taylor reste intégral

$$\tan(x) = S_n + \int_0^x \frac{\tan^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \,dt$$

Or, d'après la question précédente, la fonction intégrée est positive sur $[\,0\,;x\,]$. Par positivité de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens car $x \geqslant 0$), le reste intégral est positif, c'est-à-dire que $\tan(x) \geqslant S_n$:

$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ est croissante majorée : elle converge.}}$$

3 Il est bien entendu hors de question d'essayer de dériver φ, car on ne peut pas dériver R_n. Il va falloir montrer que φ est croissante « à la main ». Soient donc $u \leqslant v$ deux éléments de $]\,0\,;\pi/2\,[$.

$$R_n(v) - R_n(u) = \frac{1}{v^{n+1}} \int_0^v \frac{\tan^{(n+1)}(t)}{n!}(v-t)^n \,dt - \frac{1}{u^{n+1}} \int_0^u \frac{\tan^{(n+1)}(t)}{n!}(u-t)^n \,dt$$

On aimerait tout rentrer dans une même intégrale, problème : les bornes ne sont pas les mêmes. On va essayer de se ramener sur $[\,0\,;1\,]$. Dans la première intégrale, on pose $y = t/v, t = yv, dt = v dy$ et dans la deuxième on pose $z = t/u, t = uz, dt = u dz$ (tout est bien $\mathscr{C}^1$). Il en découle

$$\begin{aligned}\varphi(v) - \varphi(u) &= \frac{1}{v^{n+1}} \int_0^v \frac{\tan^{(n+1)}(t)}{n!}(v-t)^n \,dt - \frac{1}{u^{n+1}} \int_0^u \frac{\tan^{(n+1)}(t)}{n!}(u-t)^n \,dt\\ &= \frac{1}{v^{n+1}} \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(yv)}{n!}(v-vy)^n v \,dy - \frac{1}{u^{n+1}} \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(zu)}{n!}(u-uz)^n u \,dz\\ &= \frac{1}{v^{n+1}} \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(yv)}{n!} v^n (1-y)^n v \,dy - \frac{1}{u^{n+1}} \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(zu)}{n!} u^n (1-z)^n u \,dz\\ &= \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(yv)}{n!}(1-y)^n \,dy - \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(uz)}{n!}(1-z)^n \,dz\end{aligned}$$

$$\varphi(v) - \varphi(u) = \int_0^1 \frac{\tan^{(n+1)}(vy) - \tan^{(n+1)}(uy)}{n!}(1-y)^n \,dy$$

D'après la question 1, la fonction $\tan^{(n+2)}$ est positive sur $[\,0\,;\pi/2\,[$, ce qui implique que $\tan^{(n+1)}$ est croissante. Or, $v \geqslant u$ donc pour tout $y \in [\,0\,;1\,], yv \geqslant yu$, dès lors $\tan^{(n+1)}(yv) - \tan^{(n+1)}(yu) \geqslant 0$. Puisque $(1-y)^n \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale :

$$\boxed{\varphi(v)-\varphi(u)\geqslant 0 : \varphi \text{ est croissante.}}$$

4 On a déjà montré à la question 2 l'inégalité $\mathrm{R}_n(y)\geqslant 0$. D'après la question 1

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}y^n\geqslant 0$$

donc

$$\boxed{\tan(y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}y^n+\mathrm{R}_n(y)\geqslant \mathrm{R}_n(y)\geqslant 0}$$

D'après la question précédente :

$$0\leqslant \mathrm{R}_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}\mathrm{R}_n(y)\leqslant\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}\tan(y)$$

Etant donné que $x<y, x/y<1$ et donc $(x/y)^{n+1}\tan(y)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (suite géométrique de raison strictement inférieure à 1). D'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\mathrm{R}_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad \tan(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\tan^{(n)}(0)}{n!}x^n}$$

Exercice 2 :

1 f' est continue car est dérivable (f est $\mathscr{C}^2$ donc dérivable deux fois et sa dérivée seconde est continue). Puisqu'elle ne s'annule pas, elle est de signe constant : en effet, si ce n'est pas le cas, il existe un réel x_1 tel que $f'(x_1)>0$ et un réel x_2 tel que $f'(x_2)<0$ et d'après le TVI, f' s'annule ce qui est absurde.

$$\boxed{f' \text{ est de signe constant.}}$$

f' est donc strictement positive ou strictement négative, donc f est strictement monotone et continue et $f(a)<0<f(b)$ donc, d'après le corollaire du TVI :

$$\boxed{f \text{ s'annule une unique fois.}}$$

| f est strictement croissante car $f(a)<f(b)$.

2 Puisque $f(x_0)=0$ alors $\varphi(x_0)=x_0$.

$$\boxed{x_0 \text{ est un point fixe de } \varphi.}$$

f est de classe $\mathscr{C}^2$ donc en particulier f et f' sont dérivables : φ est par conséquent dérivable en tant que somme et quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. De plus, si $x\in[\,a\,;b\,]$, il vient (en dérivant f/f' comme un produit)

$$\varphi'(x)=1-f'(x)\times\frac{1}{f'(x)}+\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}=\frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

Enfin, puisque $f(x_0)=0$ par définition,

$$\boxed{\varphi \text{ est dérivable sur } [\,a\,;b\,] \text{ et } \varphi'(x_0)=0.}$$

3 La fonction f étant $\mathscr{C}^2$, f est dérivable deux fois et sa dérivée seconde est continue. En particulier, f' et f'' sont continues donc φ' est continue. Puisque $\varphi'(x_0)=0$ alors $|\varphi'|\leqslant 1/2$ au voisinage de x_0, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Il existe } \eta>0 \text{ tel que } |\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{2} \text{ pour tout } x\in[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]}$$

4 Soit $x\in\mathrm{J}$. D'après la question 2, $\varphi(x_0)=x_0$ et d'après la question précédente, $|\varphi'|\leqslant 1/2$ sur J. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|\varphi(x)-x_0|=|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}|x-x_0|$$

Or, $x \in \mathrm{J}$ donc $|x-x_0| \leqslant \eta$ donc $|\varphi(x)-x_0| \leqslant \eta/2 \leqslant \eta$ c'est-à-dire que $\varphi(x) \in \mathrm{J}$.

$$\boxed{\text{J est stable par } \varphi.}$$

5 Découle d'une récurrence simple en utilisant le fait (démontré à la question 3) que pour tout n, $|\varphi(u_n)-x_0| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-x_0|$.

$$\boxed{\forall n, |u_n-x_0| \leqslant \frac{1}{2^n} \times |u_0-x_0| \text{ donc, par encadrement, } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0}$$

6.(a) C'est du cours :

$$\boxed{\text{Cette droite a pour équation } y = f'(u_n)(x-u_n)+f(u_n)}$$

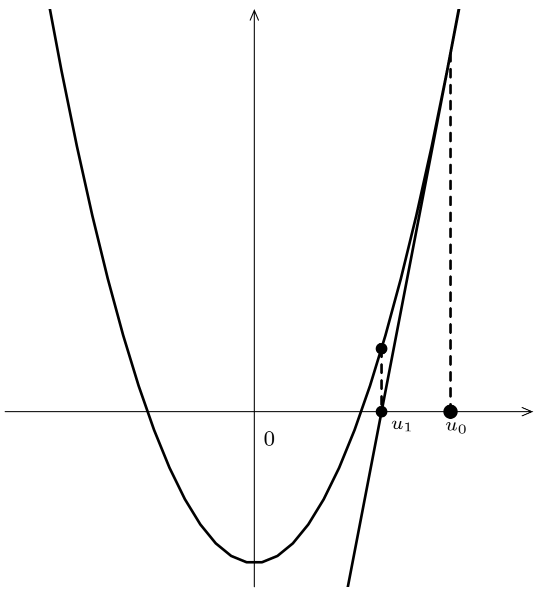
6.(b) Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Puisque $f'(u_n) \neq 0$ (f' ne s'annule pas),

$$f'(u_n)(x-u_n)+f(u_n)=0 \iff x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \iff x = u_{n+1}$$

En d'autres termes, le point de la tangente qui a une ordonnée y nulle, c'est-à-dire le point en lequel la tangente coupe l'axe des abscisses, est le point d'abscisse u_{n+1}.

$$\boxed{\text{Cette tangente coupe l'axe des abscisses en } u_{n+1}.}$$

Ainsi, on part de u_0, on trace la tangente qui coupe l'axe des abscisses en u_1, et on recommence, comme sur le dessin ci-dessous :



7.(a) L'existence de m et M découle directement du fait que $|f'|$ et $|f''|$ sont continues sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc sont continues et atteignent leurs bornes. De plus, $|f'|$ ne s'annule pas donc son minimum (qui est atteint par définition d'un minimum) n'est pas nul, donc strictement positif.

$$\boxed{m \text{ et M sont bien définis et } m>0.}$$

7.(b) Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f avec $a = x_n, b = x_0$ (ne pas les confondre avec les a et b de l'énoncé) à l'ordre 1 (f est bien $\mathscr{C}^2$) ce qui donne

$$|f(x_0)-f(u_n)-f'(u_n)\times(x_0-u_n)| \leqslant \max_{c\in[\,u_n\,;x_0\,]}|f''(c)| \times \frac{|x_0-u_n|^2}{2} \leqslant \mathrm{M} \times \frac{|x_0-u_n|^2}{2}$$

Or, $f(x_0)=0$. De plus, en divisant par $|f'(x_n)| \neq 0$, il vient

$$\left|-\frac{f(u_n)}{f'(u_n)} - x_0 + u_n\right| = |\varphi(u_n)-x_0| = |u_{n+1}-x_0| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{|f'(u_n)|} \times \frac{|x_0-u_n|^2}{2}$$

ce qui permet de conclure (rappelons que pour majorer une fraction positive, il faut majorer le numérateur et minorer le dénominateur) :

$$\boxed{|u_{n+1} - x_0| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2m} \times |x_0 - u_n|^2}$$

D'après la question précédente, $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \lambda |u_n - x_0|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Regardons les premiers termes pour trouver une idée :

- $|u_1 - x_0| \leqslant \lambda |u_0 - x_0|^2$.
- $|u_2 - x_0| \leqslant \lambda |u_1 - x_0|^2 \leqslant \lambda \left(\lambda |u_0 - x_0|^2\right)^2 = \lambda^3 |u_0 - x_0|^4$.
- $|u_3 - x_0| \leqslant \lambda |u_2 - x_0|^2 \leqslant \lambda \left(\lambda^3 |u_0 - x_0|^4\right)^2 = \lambda^7 |u_0 - x_0|^8$.
- Un dernier pour la route : $|u_4 - x_0| \leqslant \lambda |u_3 - x_0|^2 \leqslant \lambda \left(\lambda^7 |u_0 - x_0|^8\right)^2 = \lambda^{15} |u_0 - x_0|^{16}$.

Une récurrence immédiate (valable aussi pour $n = 0$) montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - x_0| \leqslant \lambda^{2^n - 1} \times |u_0 - x_0|^{2^n}}$$

7.(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord : $2^n \times \alpha^{2^n} = e^{n\ln(2) + 2^n \ln(\alpha)}$. Or, $\ln(\alpha) \neq 0$ donc $n\ln(2) = \mathrm{o}\left(2^n \ln(\alpha)\right)$ (les suites géométriques l'emportent sur les suites polynomiales par croissances comparées) c'est-à-dire que $n\ln(2) + 2^n \ln(\alpha) \sim 2^n \ln(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ (car $\ln(\alpha) < 0$ étant donné que $\alpha < 1$). Par composition de limites, $2^n \times \alpha^{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\alpha^{2^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^n}\right)}$$

7.(e) D'après la question 7.(c), $|u_{n+1} - x_0| \leqslant \dfrac{\alpha^{2^n}}{\lambda}$ avec $\alpha = \lambda \times |u_0 - x_0|$. Ainsi, dès que $|u_0 - x_0| < \dfrac{1}{\lambda}$, on a $\alpha < 1$ et donc, d'après la question précédente, la majoration de la question 7.(c) est négligeable devant la majoration de la question 5, donc est bien meilleure (plus une majoration est petite, meilleure elle est).

$$\boxed{\text{Si } |u_0 - x_0| < \frac{1}{\lambda} \text{ alors la majoration de la question 7.(c) est meilleure que celle de la question 5.}}$$

8.(a) Par définition de φ :

$$\boxed{\forall x \in, \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x^2 + 2}{2x}}$$

8.(b) On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} &= \frac{\varphi(u_{n-1}) - \sqrt{2}}{\varphi(u_{n-1}) + \sqrt{2}} \\
&= \frac{\dfrac{{u_{n-1}}^2 + 2}{2u_{n-1}} - \sqrt{2}}{\dfrac{{u_{n-1}}^2 + 2}{2u_{n-1}} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{{u_{n-1}}^2 + 2 - 2u_{n-1}\sqrt{2}}{{u_{n-1}}^2 + 2 + 2u_{n-1}\sqrt{2}} \\
&= \frac{(u_{n-1} - \sqrt{2})^2}{(u_{n-1} + \sqrt{2})^2} \\
\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} &= \left(\frac{u_{n-1} - \sqrt{2}}{u_{n-1} + \sqrt{2}}\right)^2
\end{aligned}$$

Et par récurrence
$$\boxed{\frac{u_n-\sqrt{2}}{u_n+\sqrt{2}}=\left(\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}}\right)^{2^n}}$$

8.(c) Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}$, $u_n+\sqrt{2}\sim 2\sqrt{2}$ et finalement
$$\boxed{u_n-\sqrt{2}\sim 2\sqrt{2}\left(\frac{u_0-\sqrt{2}}{u_0+\sqrt{2}}\right)^{2^n}}$$

> La méthode de Newton est une méthode d'approximation très efficace, en ce sens qu'elle converge très rapidement. En effet, en gros, le nombre de décimales exactes double à chaque itération, même en partant de très loin ! Par exemple, pour donner une valeur approchée de $\sqrt{2}$, si on prend... $u_0=19$, les premiers termes de la suite seraient :
> $$\begin{cases} u_1\approx 9.552631578947368\\ u_2\approx 4.880998985065971\\ u_3\approx 2.64537558512379\\ u_4\approx 1.700705948329068\\ u_5\approx 1.438344096899474\\ u_6\approx 1.414415976627717\\ u_7\approx 1.414213576856646\\ u_8\approx 1.414213562373095\end{cases}$$
> que l'on peut comparer avec la valeur de $\sqrt{2}\approx 1.414213562373095$.