Devoir Surveillé n°4 - Sujet groupe A

1. (Question de cours) Démonstration de l'associativité du produit matriciel.
2. (Question de cours) Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
sont-elles inversibles ? Le cas échéant, les inverser.
3. Montrer que la relation R définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ définie par
$$xRy \iff \frac{x}{1+x^2} \geq \frac{y}{1+y^2}$$
est une relation d'ordre total.
4. Montrer que la relation R définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff \exists a > 0, \exists b > 0, x_2 = ax_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = by_1$$
est une relation d'équivalence.
5. Montrer que la relation R définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$$
est une relation d'équivalence, et donner les classes d'équivalence. Plus précisément, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, représenter graphiquement sa classe d'équivalence.
6. Le nom du groupe Imagine Dragons provient d'une anagramme de « Imagine Dragons », uniquement connue des membres du groupe [1]. Donner le nombre de possibilités (sans tenir compte des espaces ou des majuscules).
7. Montrer que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, muni de la loi $\oplus$ définie par $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + y_1)$ est un groupe. Est-il abélien ?
8. Montrer que l'ensemble des rationnels qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers impairs est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.
9. Justifier que $f : z \mapsto z/|z|$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{C}^*$ dans lui-même. Quel est son noyau ?
10. On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la somme et du produit, est un anneau. Montrer que l'ensemble des fonctions admettant une limite finie en $+\infty$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Est-il intègre ?
11. On munit $\mathbb{R}$ des deux lois de composition internes suivantes :
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a\$b = a + b - 1 \qquad \text{et} \qquad a\top b = ab - (a + b) + 2$$
Étudier la structure de $(\mathbb{R}, \$, \top)$.
12. Donner le degré et le coefficient dominant de $P = (X + 2)^{2024} - (X - 2)^{2024}$.
13. Effectuer la division euclidienne de $5X^4 - 2X^3 + 16X^2 - X - 1$ par $2X^2 + 3$.
14. Donner $(X^4 - 3X^3 + X^2 + 4) \wedge (X^3 - 3X^2 + 3X - 2)$.
15. Donner le reste dans la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par $(X - 2)^2$.
16. Donner la multiplicité de 1 en tant que racine de $P = X^6 - 5X^5 + 8X^4 - 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$.
17. Soient $n, m, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{3m+2} + X^{3n+1} + X^{3p}$.
18. Factoriser sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$ le polynôme $P = X^4 + 3X^3 + 5X^2 + 3X$.
19. Donner un polynôme P vérifiant $P(1) = 5, P(2) = 7$ et $P(10) = -4$.
20. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

1. True story !