Corrigé du DM n°21

Exercice 1 :

1 On prend $\Omega = \{\mathrm{P}, \mathrm{F}\}^n$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité (car la pièce est équilibrée) et donc

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(\Omega) = 2^n}$$

2 Dans le pire des cas, tous les résultats sont les mêmes, et alors $\mathrm{X}_n = 0$, et dans le meilleur des cas, on change à chaque fois, donc il y a $n-1$ changements (à partir du deuxième lancer) donc $\mathrm{X}_{n-1} = n-1$. Tous les cas intermédiaires étant possibles,

$$\boxed{\mathrm{X}_n(\Omega) = [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!]}$$

3.(a) Puisque $[\mathrm{X}_2 = 1]$ signifie qu'il y a un seul changement,

$$\boxed{[\mathrm{X}_2 = 1] = (\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2) \cup (\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2)}$$

3.(b) Tout d'abord, $\mathrm{X}_2(\Omega) = \{0; 1\}$ donc X_2 suit une loi de Bernoulli. Donnons son paramètre, qui est égal à $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1)$. Les événements, $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2$ et $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2$ étant incompatibles,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2)$$

Par indépendance des lancers, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{P}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) + \mathrm{P}(\mathrm{F}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{P}_2)$. La pièce étant équilibrée, on obtient après calculs $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) = 1/2$. Finalement,

$$\boxed{\mathrm{X}_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } 1/2.}$$

3.(c) D'après le cours,

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}_2) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}_2) = \frac{1}{4}}$$

4.(a) Il n'y a aucun changements si on ne tire que des Pile ou que des Face, c'est-à-dire

$$\boxed{[\mathrm{X}_3 = 0] = (\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3) \cup (\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{P}_3)}$$

De même, il y a deux changements en trois lancers si on change à chaque lancer, tout dépend du premier lancer. Finalement,

$$\boxed{[\mathrm{X}_3 = 2] = (\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3) \cup (\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3)}$$

4.(b) Les deux événements $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{F}_3$ et $\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{P}_3$ sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 0) &= \mathrm{P}(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 \cap \mathrm{F}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2 \cap \mathrm{P}_3) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{F}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{F}_2) \times \mathrm{P}(\mathrm{F}_3) + \mathrm{P}(\mathrm{P}_1) \times \mathrm{P}(\mathrm{P}_2) \times \mathrm{P}(\mathrm{P}_3) \qquad \text{(indépendance des lancers)} \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\
\mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 0) &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

De même, $\mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 2) = 1/4$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 0) - \mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 2) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{X}_3(\Omega) = [\![\, 0\,;\, 2 \,]\!], \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 2) = \frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_3 = 1) = \frac{1}{2}}$$

4.(c) Tout d'abord,

$$E(X_3) = 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2)$$

Dès lors $\boxed{E(X_3) = 1}$

De plus, d'après le théorème de transfert,

$$E({X_3}^2) = 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2)$$
$$= \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4}$$

si bien que $E({X_3}^2) = \dfrac{3}{2}$. D'après la formule de König-Huygens,

$$\boxed{V(X_3) = E({X_3}^2) - E(X_3)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}}$$

5.(a) Raisonnons comme dans les questions 3 et 4. Tout d'abord, s'il n'y a aucun changement, alors soit on n'a que des Pile, soit que des Face. En d'autres termes,

$$[X_n = 0] = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

De même que précédemment, par incompatibilité puis indépendance des lancers (mais vous, vous rédigez mieux que ça) :

$$\boxed{P(X_n = 0) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

5.(b) De même,

$$[X_n = n-1] = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots)$$

On ne met pas le dernier car cela dépend de la parité de n. On conclut de la même façon.

$$\boxed{P(X_n = n-1) = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

5.(c) S'il n'y a qu'un changement, alors avant le changement, il y a toujours la même chose (disons toujours Pile), et après le changement, tout reste encore identique (disons toujours Face). Tout dépend de l'endroit où le changement a lieu, et si on commence par Pile pour finir par Face, ou le contraire. En d'autres termes,

$$[X_n = 1] = (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n)$$
$$\cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n) \cup \cdots \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Encore une fois, les événements entre parenthèses étant deux à deux incompatibles :

$$P(X_n = 1) = P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) + P(P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) + \cdots + P(P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n)$$
$$+ P(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) + P(F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n) + \cdots + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Par indépendance des lancers, toutes les grosses probas ci-dessus sont égales à $1/2^n$ et il y a $n-1$ termes dans la première somme, et $n-1$ dans la deuxième, donc on trouve le résultat voulu.

$$\boxed{P(X_n = 1) = 2(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

6.(a) X_{k+1} est le nombre de changements lors des $k+1$ premiers lancers, et X_k lors des k premiers. Soit il y en a eu autant, et alors $X_{k+1} = X_k$ donc $Y_k = 0$, soit il y en a eu un de plus, et alors $X_{k+1} = X_k + 1$ donc $Y_k = 1$.

$$\boxed{Y_k(\Omega) = \{0; 1\}}$$

6.(b) Soit $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$. Supposons $[X_k = j]$ réalisé. Dans ce cas, $Y_k = 0$ si $X_{k+1} = X_k$ donc si le dernier lancer n'apporte pas un changement supplémentaire, donc si le $k+1$-ième lancer est le même que le k-ième, et cela se produit avec proba $1/2$.

$$\boxed{\forall j \in [\![0\,;\, k-1]\!], \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{Y}_k = 0) = \frac{1}{2}}$$

6.(c) Faisons comme précédemment et appliquons la formule des probas totales avec le système complet d'événements $[\mathrm{X}_k = 0], \dots, [\mathrm{X}_k = k-1]$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 0) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{P}_{[\mathrm{X}_k = j]}(\mathrm{Y}_k = 0) \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j)$$

et puisque la somme des probas vaut 1, on trouve $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 0) = 1/2$ donc $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 1) = 1 - 1/2 = 1/2$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\mathrm{Y}_k \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$$

6.(d) Soient $\varepsilon \in \{0;1\}$ et $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$. Par définition d'une proba conditionnelle (ou d'après la formule des probabilités composées) :

$$\mathrm{P}([\mathrm{Y}_k = \varepsilon] \cap [\mathrm{X}_k = j]) = \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k = \varepsilon]}(\mathrm{X}_k = j) \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j)$$

D'après la question précédente,

$$\mathrm{P}([\mathrm{Y}_k = \varepsilon] \cap [\mathrm{X}_k = j]) = \frac{1}{2} \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = \varepsilon) \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j)$$

C'est la définition de deux événements indépendants.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

7.(a) Supposons $[\mathrm{Y}_k = 0]$ réalisé. Alors $\mathrm{X}_k = \mathrm{X}_{k+1}$, donc $\mathrm{X}_k = j$ si et seulement si $\mathrm{X}_{k+1} = j$, ce qui prouve la première égalité. La deuxième vient du fait que les événements $[\mathrm{Y}_k = 0]$ et $[\mathrm{X}_k = j]$ sont indépendants d'après la question précédente.

$$\boxed{\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=0]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=0]}(\mathrm{X}_k = j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j)}$$

7.(b) Supposons $[\mathrm{Y}_k = 1]$ réalisé. Alors $\mathrm{X}_k = \mathrm{X}_{k+1} - 1$. Par conséquent, $\mathrm{X}_{k+1} = j$ si et seulement si $\mathrm{X}_k = j - 1$, donc $\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=1]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=1]}(\mathrm{X}_k = j-1)$, et on obtient l'égalité voulue par indépendance.

$$\boxed{\mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=1]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j-1)}$$

7.(c) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $[\mathrm{Y}_k = 0]$ et $[\mathrm{Y}_k = 1]$:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=1]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 1) + \mathrm{P}_{[\mathrm{Y}_k=0]}(\mathrm{X}_{k+1} = j) \times \mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 0)$$

On conclut à l'aide des questions précédentes, et en utilisant le fait que $\mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 0) = \mathrm{P}(\mathrm{Y}_k = 1) = 1/2$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1} = j) = \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j-1)}$$

8 Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par récurrence.

- Si $k \in [\![2\,;\, n]\!]$, notons H_k : « $\forall j \in [\![0\,;\, k-1]\!], \mathrm{P}(\mathrm{X}_k = j) = \binom{k-1}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ »
- Pour $k = 2$, on a d'une part $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 0) = 1/2$ et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_2 = 1) = 1/2$, et d'autre part,

$$\binom{2-1}{0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \binom{2-1}{1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

donc H_2 est vraie.

- Soit $k \in [\![2\,;\, n-1]\!]$ (pas $k \in [\![2\,;\, n]\!]$ car si $k=n$ alors H_{k+1} n'est pas définie). Supposons H_k vraie et montrons que H_{k+1} vraie, c'est-à-dire

$$\forall j \in [\![0\,;\, k]\!], \qquad \mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1}=j) = \binom{k}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

On veut utiliser la question précédente : or, celle-ci n'est valable que si $j \in [\![1\,;\, k-1]\!]$. Il faut donc traiter les cas $j=0$ et $j=k$ séparément.

  - Si $j=0$, d'une part $\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1}=j) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1}=0) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ d'après la question 5.(a), et d'autre part on a $\binom{k}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, d'où l'égalité.
  - On a également égalité pour $j=k$ d'après la question 5.(b) (avec $n=k+1$).
  - Supposons donc à présent $j \in [\![1\,;\, k-1]\!]$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1}=j) &= \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_k=j) + \frac{1}{2}\mathrm{P}(\mathrm{X}_k=j-1) \\
&= \frac{1}{2} \times \binom{k-1}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\binom{k-1}{j-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} && \text{(H.R.)} \\
&= \left(\binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
\mathrm{P}(\mathrm{X}_{k+1}=j) &= \binom{k}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k && \text{(Formule de Pascal)}
\end{aligned}$$

Finalement, H_{k+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in [\![2\,;\, n]\!]$.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

9 D'après la question précédente, pour tout $j \in [\![0\,;\, k-1]\!]$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}_k=j) = \binom{k-1}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^j \times \left(1-\frac{1}{2}\right)^{k-1-j}$$

En d'autres termes $\boxed{\mathrm{X}_k \text{ suit une loi binomiale de paramètres } k-1 \text{ et } \frac{1}{2}.}$

En conclusion $\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \frac{k-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \frac{k-1}{4}}$

Exercice 2 :

1 Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_k) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + \cdots + \mathrm{E}(\mathrm{X}_k) = 0$ puisque les X_i sont centrées, et puisque les X_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{S}_k) &= \sum_{i=1}^{k} \mathrm{V}(\mathrm{X}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} {\sigma_i}^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2 \\
&\leqslant \sigma^2
\end{aligned}$$

Dès lors, $P(|S_k| \geqslant x) = P(|S_k - E(S_k)| \geqslant x)$ et on conclut à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

$$\boxed{P(|S_k| \geqslant x) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}}$$

2 Cet événement est l'union des $[|S_k| \geqslant x]$: le problème est que ces événements ne sont pas deux à deux incompatibles, et c'est pour cela qu'on introduit les événements A_k. L'événement A_k est l'événement : « le premier indice i tel que $|S_i| \geqslant x$ est égal à k ». Par conséquent (et là on a bien des événements deux à deux incompatibles) :

$$\boxed{\{\max(|S_1|, \dots, |S_n|) \geqslant x\} = \bigcup_{k=1}^n A_k}$$

3 Par linéarité de l'espérance :

$$\sum_{k=1}^n E\left(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2\right)$$

Or, les A_k sont deux à deux incompatibles : il en découle que deux indicatrices ne peuvent pas toutes les deux valoir 1, donc cette somme d'indicatrices vaut 1 ou 0 (on montre facilement que, puisque les A_k sont deux à deux incompatibles, la somme des indicatrices est l'indicatrice de l'union). Il en découle que

$$\sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2 \leqslant {S_n}^2$$

Par croissance de l'espérance, et en utilisant le fait que S_n est d'espérance nulle :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n E\left(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2\right) \leqslant E\left({S_n}^2\right) = V(S_n) + E(S_n)^2 = \sigma^2}$$

4 On a :

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2) &= E\left(\mathbb{1}_{A_k}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2\right) \\
&= E\left(\mathbb{1}_{A_k}\sum_{i=1}^n {X_i}^2 + 2\times \mathbb{1}_{A_k}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} X_iX_j\right) && \text{(Identité remarquable)} \\
&= \sum_{i=1}^n E\left(\mathbb{1}_{A_k}{X_i}^2\right) + 2\times \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} E\left(\mathbb{1}_{A_k}X_iX_j\right) && \text{(Linéarité)}
\end{aligned}$$

Or, $\mathbb{1}_{A_k}$ ne fait intervenir que des X_i avec $i \leqslant k$. D'après le lemme des coalitions, si $j > k$, alors $\mathbb{1}_{A_k}X_i$ est indépendante de X_j si bien que :

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2) &= \sum_{i=1}^n E\left(\mathbb{1}_{A_k}{X_i}^2\right) + 2\times \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} E\left(\mathbb{1}_{A_k}X_iX_j\right) + 2\times\sum_{1\leqslant i<j, j>k} E\left(\mathbb{1}_{A_k}X_i\right)E(X_j) \\
&= \sum_{i=1}^k E\left(\mathbb{1}_{A_k}{X_i}^2\right) + \sum_{i=k+1}^n E\left(\mathbb{1}_{A_k}{X_i}^2\right) + 2\times \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} E\left(\mathbb{1}_{A_k}X_iX_j\right) + 0
\end{aligned}$$

puisque $E(X_j) = 0$. Or, la deuxième somme ci-dessus est positive par positivité de l'espérance (l'espérance d'une v.a. positive est positive) donc

$$\begin{aligned}
E(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2) &\geqslant \sum_{i=1}^k E\left(\mathbb{1}_{A_k}{X_i}^2\right) + 2\times \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} E\left(\mathbb{1}_{A_k}X_iX_j\right) \\
&\geqslant E\left(\mathbb{1}_{A_k}\sum_{i=1}^k {X_i}^2 + 2\times \mathbb{1}_{A_k}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} X_iX_j\right)
\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}{\mathrm{S}_k}^2) \leqslant \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}{\mathrm{S}_n}^2)}$$

5 D'après la question 2 :

$$\mathrm{P}(\max(|\mathrm{S}_1|,\dots,|\mathrm{S}_n|) \geqslant x) = \textstyle\sum_{k=1}^n \mathrm{P}(\mathrm{A}_k)$$

Rappelons que la probabilité est l'espérance de l'indicatrice donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\max(|\mathrm{S}_1|,\dots,|\mathrm{S}_n|) \geqslant x) &= \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k})\\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^2}\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}x^2)\end{aligned}$$

Or (comme dans l'inégalité de Markov, sur l'événement A_k, $|\mathrm{S}_k| \geqslant x$ donc ${\mathrm{S}_k}^2 \geqslant x^2$ (fonction carré croissante sur $\mathbb{R}_+$) si bien que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}x^2 \leqslant \mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}{\mathrm{S}_k}^2$. Par croissance de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\max(|\mathrm{S}_1|,\dots,|\mathrm{S}_n|) \geqslant x) &= \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k})\\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{x^2}\mathrm{E}(\mathbb{1}_{\mathrm{A}_k}{\mathrm{S}_k}^2)\end{aligned}$$

et on conclut à l'aide des deux questions précédentes.

$$\boxed{\mathrm{P}(\max(|\mathrm{S}_1|,\dots,|\mathrm{S}_n|) \geqslant x) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}}$$

Problème :

Partie I. Valeur moyenne du nombre de passages en 0

1 Comme d'habitude : si on a des éléments égaux à 0 ou 1, leur somme est le nombre de ces éléments qui valent 1. Par conséquent, $\mathrm{O}_1,\dots,\mathrm{O}_{2n}$ est le nombre de O_k valant 1, donc le nombre de k tels que la particule soit à l'origine à l'instant k, donc le nombre de passages à l'origine entre les instants 1 et $2n$, c'est-à-dire U_n. En d'autres termes,

$$\boxed{\mathrm{U}_n = \sum_{k=1}^{2n}\mathrm{O}_k}$$

2 La particule est à l'origine si et seulement s'il y a eu autant de montées que de descentes, et cela implique en particulier (réciproque fausse) que la somme du nombre de montées et du nombre de descentes est paire, et puisque cette somme est égale à l'instant où la particule se trouve à l'origine, cela prouve que la particule ne peut pas se trouver à l'origine aux instants impairs, d'où la première égalité.

Pour la deuxième inégalité, cela sent le dénombrement à plein nez... Introduisons pour une fois un univers Ω : on prend Ω_k l'ensemble des chemins à $2k$ pas partant de $(0,0)$ (qu'on peut assimiler à $\{\pm 1\}^{2k}$ donc de cardinal 2^{2k}) si bien que l'événement $[\mathrm{O}_{2k}=1]$ est l'ensemble des chemins à $2k$ pas qui relient $(0,0)$ à $(2k,0)$. Les montées et descentes s'effectuent avec la même probabilité donc les chemins sont tous équiprobables, si bien que $\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k}=1)$ est le nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(2k,0)$, dont on a vu qu'il était égal à $\binom{2k}{k}$ (encore une fois, un tel chemin est entièrement déterminé par l'emplacement de ses montées) divisé par $\mathrm{Card}\,(\Omega) = 2^{2k} = 4^k$ ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\forall k \geqslant 1, \mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k+1}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k}=1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}}$$

Donnons une preuve non combinatoire (qui a l'avantage de se généraliser au cas où la marche n'est pas symétrique, c'est-à-dire au cas où la probabilité d'une montée et d'une descente ne sont pas égales).

Introduisons comme d'habitude des événements « simples » : pour tout $i \in [\![0\,;\,2k-1]\!]$, notons M_i : « montée à l'instant i » et D_i : « descente à l'instant i » (définir D_i n'est pas indispensable puisqu'il est égal à $\overline{\mathrm{M}_i}$). On a donc :

$$[\mathrm{O}_{2k}=1] = \textstyle\bigcup_{\mathrm{A}\subset[\![0\,;\,2k-1]\!],\mathrm{Card}\,(\mathrm{A})=k}\left(\bigcap_{i\in\mathrm{A}}\mathrm{M}_i \cap \bigcap_{i\notin\mathrm{A}}\mathrm{D}_i\right)$$

c'est-à-dire qu'on prend toutes les façons possibles d'avoir exactement k montées et k descentes. Les unions sont deux à deux disjointes (car, si on prend deux parties A, il y a au moins une montée qu'elles n'ont pas en commun donc les événements ne peuvent pas se produire en même temps) donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k} = 1) = \sum_{\mathrm{A} \subset [\![0\,;\,2k-1]\!], \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = k} \mathrm{P}\left(\bigcap_{i\in \mathrm{A}} \mathrm{M}_i \cap \bigcap_{i \notin \mathrm{A}} \mathrm{D}_i\right)$$

Par indépendance des montées et descentes :

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k} = 1) = \sum_{\mathrm{A} \subset [\![0\,;\,2k-1]\!], \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = k} \prod_{i\in \mathrm{A}} \mathrm{P}(\mathrm{M}_i) \times \prod_{i \notin \mathrm{A}} \mathrm{P}(\mathrm{D}_i)$$

Or, comme on l'a vu, $\mathrm{P}(\mathrm{M}_i) = 1/2 = \mathrm{P}(\mathrm{D}_i)$ pour tout i donc le premier produit (produit d'un terme constant : valeur du terme constant à la puissance le nombre de termes) vaut $1/2^k$, et idem pour le deuxième, donc

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k} = 1) = \sum_{\mathrm{A} \subset [\![0\,;\,2k-1]\!], \mathrm{Card}\,(\mathrm{A}) = k} \frac{1}{4^k}$$

On a encore la somme d'un terme constant (on somme sur A, c'est-à-dire que A peut être considéré comme l'indice de sommation) et la somme contient $\binom{2k}{k}$ termes (nombre de parties à k éléments dans un ensemble à $2k$ éléments) ce qui donne évidemment le même résultat. Si la marche n'est pas symétrique, c'est-à-dire si p est la probabilité de montée, alors le même raisonnement donne

$$\mathrm{P}(\mathrm{O}_{2k} = 1) = \tbinom{2k}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On peut évidemment noter une forte ressemblance avec une loi binomiale... Attention, O_{2k} ne suit pas une loi binomiale (bon, en fait si puisqu'une loi de Bernoulli est une loi binomiale, mais en tout cas pas une loi binomiale de paramètres $2k$ et p) : nous en reparlerons dans la partie suivante.

3 Attention, les O_k ne sont pas indépendantes ! En effet, si la particule se trouve à l'origine à un instant donné, elle n'y est pas l'instant suivant. Cependant, pas besoin d'indépendance pour appliquer la linéarité de l'espérance, si bien que, d'après la question 1,

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = \sum_{k=1}^{2n} \mathrm{E}(\mathrm{O}_k)$$

Or, si k est impair, O_{2k+1} vaut 0 avec probabilité 1 (car elle ne peut prendre que les valeurs 0 et 1 et prend la valeur 1 avec probabilité nulle) donc cette somme ne contient que les termes pairs, ce qui donne avec un rapide changement d'indice :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(\mathrm{O}_{2j})$$

Or, pour tout j, O_{2j} suit une loi de Bernoulli (car ne peut prendre que les valeurs 0 et 1) donc son espérance est égale à la probabilité d'être égale à 1 (raisonnement classique permettant de s'éviter un calcul, pas très difficile certes, mais un calcul évitable est toujours bon à prendre) donc :

$$\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4^j} \tbinom{2j}{j}$$

Raisonnons ensuite par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4^j}\tbinom{2j}{j} = \frac{2n+1}{4^n} \times \tbinom{2n}{n} - 1$ »
- Si $n = 1$, alors la somme vaut $\dfrac{1}{4} \times \tbinom{2}{1} = \dfrac{1}{2}$ et

$$\frac{2n+1}{4^n} \times \tbinom{2n}{n} - 1 = \frac{3}{4} \times 2 - 1 = \frac{1}{2}$$

  donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{4^j}\binom{2j}{j} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4^j}\binom{2j}{j} + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{4^n} \times \binom{2n}{n} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} && \text{H.R.} \\
&= \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \times \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{2n+1}{4^n} \times \binom{2n+2}{n+1} \times \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} - 1 + \frac{1}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{1}{4^{n+1}} \times \binom{2n+2}{n+1} \times \left[4 \times (2n+1) \times \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} + 1\right] - 1 \\
&= \frac{1}{4^{n+1}} \times \binom{2n+2}{n+1} \times \left[4 \times \frac{(n+1)^2}{2(n+1)} + 1\right] - 1 \\
&= \frac{1}{4^{n+1}} \times \binom{2n+2}{n+1} \times [2 \times (n+1) + 1] - 1
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence, et ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) = \frac{2n+1}{4^n} \times \binom{2n}{n} - 1}$$

4 Utilisons à présent la formule de Stirling (attention, l'équivalent ne passe pas à la somme : on s'intéresse donc d'abord uniquement au terme devant le -1, on verra comment incorporer celui-ci par la suite).

$$\begin{aligned}
\frac{2n+1}{4^n} \times \binom{2n}{n} &= \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\
&\sim \frac{2n}{4^n} \times \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2} \\
&\sim \frac{2n}{4^n} \times \frac{\sqrt{2\pi} \times 2^{2n+\frac{1}{2}} \times n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2\pi \times n^{2n+1}e^{-2n}} \\
&\sim \frac{2^{1+\frac{1}{2}+2n+\frac{1}{2}} \times \sqrt{\pi} \times n^{1+2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1} \times \pi \times n^{2n+1}} \\
&\sim \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Or, ce terme tend vers $+\infty$ donc le -1 est négligeable devant ce terme, si bien que $\mathrm{E}(\mathrm{U}_n)$ est équivalent à ce terme. En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{U}_n) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}}$$

Partie II. Loi du premier retour en 0

1.(a) Y_n compte le nombre de succès ($\mathrm{X}_k = 1$, de proba p) obtenus lors de n répétitions indépendantes (car les X_k sont indépendantes) d'une expérience aléatoire donc :

$$\boxed{\mathrm{Y}_n \sim \mathrm{B}(n,p) \text{ si bien que } \mathrm{E}(\mathrm{Y}_n) = np \text{ et } \mathrm{V}(\mathrm{Y}_n) = np(1-p).}$$

> Citons le rapport du sujet : « Les arguments justifiant la loi binomiale pour Y_n (car on attend justification, comme dans toute réponse, sauf mention explicite du contraire) sont très rarement tous énoncés : les X_k sont indépendants, de même loi » (bon, il suffit de dire que la proba de succès est toujours la même, là c'est moi qui parle) « et Y_n décompte le nombre de X_k égaux à 1. »

1.(b) Y_n est le nombre de X_k valant 1 donc le nombre de X_k valant -1 vaut $n - Y_k$. Puisque S_n est égale à la somme des X_k, S_n vaut 1 multiplié par le nombre de termes égaux à 1 plus (-1) fois le nombre de termes égaux à -1, c'est-à-dire que

$$\boxed{S_n = Y_n + (-1) \times (n - Y_n) = 2Y_n - n}$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(S_n) &= 2E(Y_n) - n \\ &= 2np - n \\ &= n(2p-1) \end{aligned}$$

Attention, la variance n'est pas linéaire ! Mais en utilisant la formule donnant $V(AX+b)$ vue en classe, il vient $V(S_n) = 4V(Y_n)$. En conclusion :

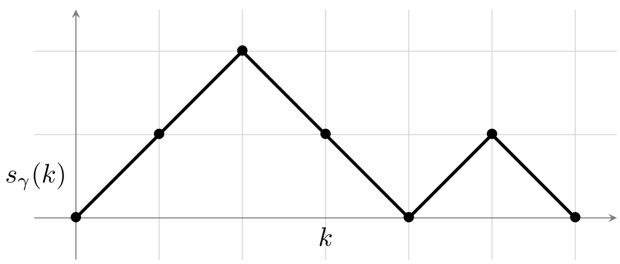
$$\boxed{E(S_n) = n(2p-1) \qquad \text{et} \qquad V(S_n) = 4np(1-p)}$$

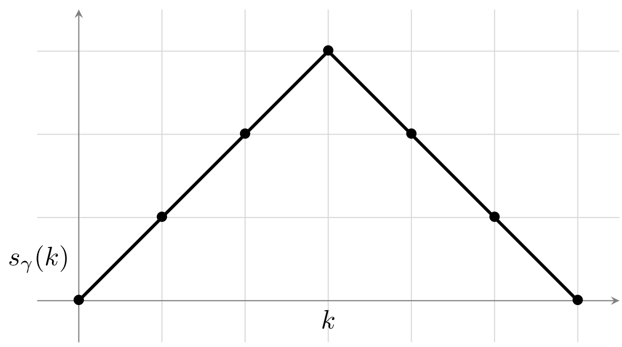
> Un calcul immédiat donne, pour tout k, $E(X_k) = 2p - 1$ et (à l'aide de la formule de König-Huygens, exo) $V(X) = 4p(1-p)$ donc, par linéarité de l'espérance, on retrouve bien $E(S_n) = n(2p-1)$ et, par somme de variables aléatoires indépendantes (attention, la variance n'est pas linéaire, mais quand les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes et même deux à deux non corrélées, on peut sommer les variances), on trouve $V(S_n) = 4np(1-p)$, mais la question était formulée de telle sorte qu'il fallait passer par la variables Y_n.
>
> Citons encore le rapport : « Le jury aura beaucoup rencontré la notation $\overline{Y_n}$, censée implicitement désigner le nombre de X_k égaux à -1, ou l'écriture
>
> $$S_n = \sum_{k=0}^{n} [X_k = 1] - \sum_{k=0}^{n} [X_k = 1]$$
>
> Ni le complémentaire d'une variable aléatoire, ni la somme d'événements ne possèdent un sens mathématique. »

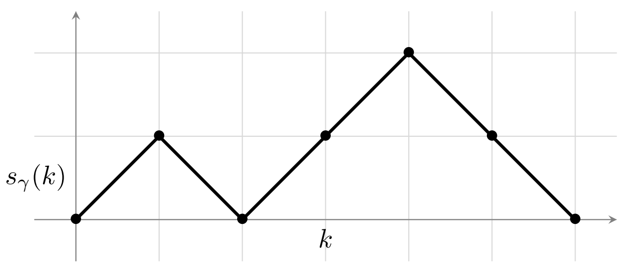
Enfin, $S_n + n = 2Y_n$ donc est un nombre pair, si bien que

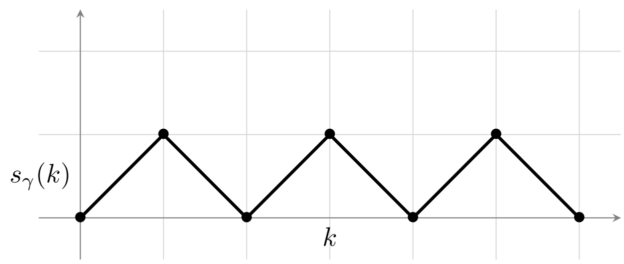
$$\boxed{n \text{ et } S_n \text{ ont la même parité.}}$$

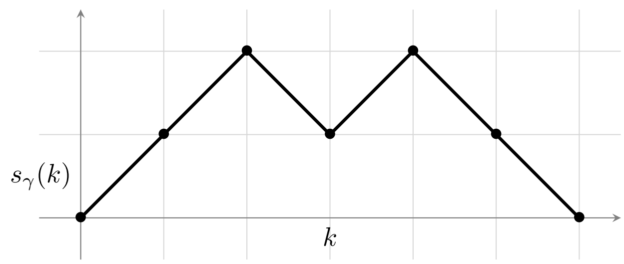
3 Ci-dessous tous les chemins de Dyck de longueur 6 :









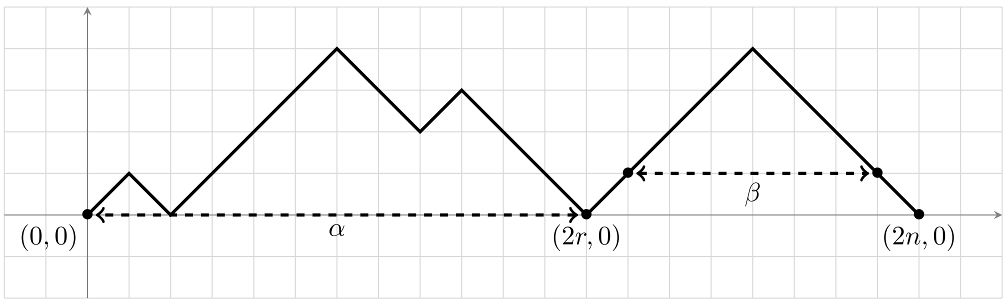


En particulier $\boxed{\mathrm{C}_3 = 5}$

3.(a) Avant de faire un dessin, justifions chacun des points :

- γ_{2r} est donc le dernier instant où le chemin touche l'axe des abscisses (car il ne peut le toucher qu'aux instants pairs). Puisqu'un chemin de Dyck ne peut pas descendre sous l'axe, on a obligatoirement une montée ensuite, donc $\gamma_{2r+1} = 1$.
- Un chemin de Dyck finit sur l'axe des abscisses, et on ne peut pas finir par une montée car cela signifierait qu'à l'avant-dernier instant, on se trouverait à une ordonnée égale à -1, ce qui est impossible pour un chemin de Dyck. On en déduit donc que $\gamma_{2n+2} = 1$.
- Il est évident que α est un chemin de Dyck car va de $(0,0)$ à $(2r,0)$ (l'ordonnée est nulle en $2r$ par définition) sans jamais passer sous l'axe des abscisses car « α est extrait d'un chemin de Dyck ».
- Le résultat est un peu moins évident pour β. Avec les mains (puisque, de toute façon, on demandait juste un dessin...) : on a déjà vu qu'à l'instant $2r+1$, l'ordonnée valait 1 et que $\gamma_{2n+2} = -1$ donc l'ordonnée, à l'instant $2n+1$, est égale à 1. On en déduit que β est un chemin reliant un point d'ordonnée 1 à un autre point d'ordonnée 1 et ne descend jamais sous cette barre car cela signifierait que l'ordonnée s'annule entre les deux, ce qui contredit la maximalité de r ($2r$ est le dernier point d'annulation). On a un chemin de Dyck (car relier des points d'ordonnée nulle ou d'ordonnée égale à 1 ne change rien).

  Faisons tout de même une démo propre : la somme de toutes les coordonnées de β (qu'on peut note $s_\beta(2(n-r))$ vaut 0 car est la différence entre l'ordonnée en $2n+1$ et celle en $2r+2$ qui valent toutes les deux 1. Si, de plus, il existe k tel que $s_\beta(k) < 0$ alors il existe k dont l'ordonnée soit strictement inférieure à celle en $2r+1$ donc qui soit négative ou nulle, ce qui est absurde comme on l'a déjà vu, par maximalité de r. Les deux conditions se trouvant dans la définition d'un chemin de Dyck sont vérifiées, ce qui permet de conclure. Ci-dessous un dessin.



> Encore le rapport : « La maximalité de r est rarement comprise et bien utilisée par les candidats pour prouver que β est un chemin de Dyck » (bon, je trouve ça assez gonflé puisqu'on demandait juste un dessin, mais peut-être y a-t-il eu des dessins folkloriques...).

3.(b) Soit $r \in [\![0\,;n]\!]$ et prenons un chemin de Dyck ayant cette valeur de r (i.e. le dernier instant où il s'annule avant l'instant $2n+2$ est $2r$).

- si $r = 0$ alors le chemin commence par une montée et finit par une descente (voir plus haut) et α est vide. Le chemin est donc entièrement déterminé par β, un chemin de Dyck de longueur $2n$, donc il y a C_n choix possibles, et puisque $\mathrm{C}_0 = 1$ par convention, on a $\mathrm{C}_0 \times \mathrm{C}_n$ choix possibles.
- Si $r \in [\![1\,;n-1]\!]$, de même, le chemin est entièrement déterminé par α (C_r choix possibles) puis par β (C_{n-r} choix possibles). En effet, les instants n'apparaissant pas (instants $2r+1$ et $2n+2$) sont déjà entièrement déterminés donc ils n'influent pas sur le choix du chemin, ou alors on peut dire qu'il n'y a qu'un choix possible. Par principe multiplicatif, on a $\mathrm{C}_r \times \mathrm{C}_{n-r}$ choix possibles.

Les différents r donnent des ensembles de chemins deux à deux disjoints : on conclut à l'aide du principe additif.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{C}_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} \mathrm{C}_r \mathrm{C}_{n-r}}$$

4 Soit donc $t \in \mathbb{N}$. Les variables aléatoires $\mathrm{X}_{t+1}, \ldots, \mathrm{X}_{t+m}$ sont mutuellement indépendantes si bien que

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,\gamma}) = \prod_{k=1}^{m} \mathrm{P}(\mathrm{X}_{t+k} = \gamma_k)$$

Or, les X_i valent 1 avec proba p et -1 avec proba $1-p$: on en déduit que le produit ci-dessus est égal à p à la puissance le nombre de termes égaux à 1 multiplié par $(1-p)$ à la puissance le nombre de -1. Or, un chemin de Dyck de longueur $2n$ contient exactement n montées et n descentes si bien que

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,\gamma}) = p^n(1-p)^n}$$

> Le rapport : « On note des confusions entre "indépendance mutuelle" et "indépendance deux à deux" et des erreurs plus lourdes écrivant la probabilité d'une intersection d'événements mutuellement indépendants comme la somme des probabilités de ces événements. Le jury rappelle que l'indépendance mutuelle des événements est un argument capital dans les questions de ce type. ». Bon, le message est clair : ne pas dire « indépendants deux à deux » mais « mutuellement indépendants », même si je pense que simplement « indépendants » suffit.

5 On a déjà vu que S_n et n avaient la même parité (question 1.(b)). Par conséquent, puisque, lorsque la particule revient à l'origine, $\mathrm{S}_n = 0$ qui est un nombre pair, cela peut se produire uniquement à des instants pairs.

$$\boxed{\text{T prend uniquement des valeurs paires.}}$$

Attention, il n'est pas dit que la particule ne doive prendre que des valeurs positives ! A priori, il n'y a aucun chemin de Dyck dans l'histoire ! Il va falloir s'y ramener par un argument de symétrie. Soit donc $n \geqslant 0$ et calculons $\mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2)$.

$[\mathrm{T} = 2n+2]$ est réalisé si et seulement si $2n+2$ est le premier instant où la marche revient en 0, c'est-à-dire si et seulement si la particule s'annule en $2n+2$ et ne s'annule pas avant, c'est-à-dire ne change pas de signe entre les instants 0 et $2n+2$. Deux cas peuvent alors se produire : soit la particule ne prend que des valeurs positives entre les instants 0 et $2n+2$ (exclus), soit des valeurs strictement négatives.

Dès lors, si on note B^+ : « la particule s'annule pour la première fois en $2n+2$ et prend des valeurs strictement positives », et B^- l'événement analogue mais pour les altitudes strictement négatives, alors on a $\mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}^+ \cup \mathrm{B}^-)$ et les deux événements sont incompatibles donc $\mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2) = \mathrm{P}(\mathrm{B}^+) + \mathrm{P}(\mathrm{B}^-)$.

Si on reprend les notations de la question 3, B^+ est réalisé lorsqu'on commence par $\mathrm{X}_1 = 1$ puis $(\gamma_2, \ldots, \gamma_{2n+1})$ est un chemin de Dyck β de taille $2n$, c'est-à-dire lorsqu'il existe β un chemin de Dyck de taille $2n$ tel que $\mathrm{A}_{1,\beta}$ soit réalisé (pour avoir $\mathrm{X}_2 = \beta_1, \mathrm{X}_3 = \beta_2$ etc.), puis lorsque X_{2n+2} est réalisé. En termes ensemblistes :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}^+) = \mathrm{P}\left([\mathrm{X}_1 = 1] \cap \left(\bigcup\nolimits_{\beta \text{ chemin de Dyck de taille } 2n} \mathrm{A}_{1,\beta}\right) \cap [\mathrm{X}_{2n+2} = -1]\right)$$

Par indépendance des événements (lemme des coalitions : l'union ne fait intervenir que les variables aléatoires $\mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_{n+2}$) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}^+) = \mathrm{P}(\mathrm{X}_1 = 1) \times \mathrm{P}\left(\bigcup\nolimits_{\beta \text{ chemin de Dyck de taille } 2n} \mathrm{A}_{1,\beta}\right) \times \mathrm{P}(\mathrm{X}_{2n+2} = -1])$$

Or, l'union est une union d'événements deux à deux incompatibles (on ne peut pas avoir deux chemins de Dyck qui se produisent en même temps) :

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}^+) = p \times \left(\sum_{\beta \text{ chemin de Dyck de taille } 2n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_{1,\beta})\right) \times (1-p)$$

D'après la question précédente, chaque terme de la somme vaut $p^n(1-p)^n$, et il y a autant de termes dans la somme que de chemins de Dyck de taille $2n$, c'est-à-dire C_n. On trouve que $\mathrm{P}(\mathrm{B}^+) = \mathrm{C}_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$. Le calcul de B^- est analogue : en effet, on commence par une descente (proba $1-p$) puis un chemin qui relie les points $(1,-1)$ et $(2n+1,-1)$ en restant strictement négatif peut facilement, par symétrie, être envoyé de façon bijective sur un chemin β reliant $(1,1)$ et $(2n+1,1)$ qui reste strictement positif, donc sur un chemine de Dyck, donc il y en a autant, c'est-à-dire C_n, et un tel chemin est encore constitué de n montées et n descentes indépendantes, donc proba $p^n(1-p)^n$, et on finir par une montée (proba p). On en déduit que $\mathrm{P}(\mathrm{B}^-) = \mathrm{C}_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}$, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2) = 2\mathrm{C}_n p^{n+1}(1-p)^{n+1}}$$

6 Comme dans le chapitre 25, on cherche à donner un équivalent de $u_n = (2n+2)\mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2)$. Un calcul classique utilisant la formule de Stirling (voir l'exercice 43 du chapitre 25) donne

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

si bien que

$$u_n \sim 2n \times 2 \times \frac{1}{n} \times \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \times p^{n+1}(1-p)^{n+1}$$

$$\sim \frac{(4p(1-p))^{n+1}}{\sqrt{n\pi}}$$

Une rapide étude de fonction montre que $f : x \mapsto x(1-x)$ est strictement croissante sur $[\,0\,;1/2\,]$ puis strictement décroissante sur $[\,1/2\,;1\,]$ donc admet un maximum qui vaut $1/4$ en $1/2$ (on pouvait aussi développer ce qui donne $f(x) = x - x^2$ donc on a une parabole qui admet un maximum en $-b/2a = 1/2$). En particulier, si $p = 1/2$ alors $u_n \sim 1/\sqrt{n\pi}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature, et $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1/2 \leqslant 1$) donc $\sum u_n$ diverge. Si $p \neq 1/2$ alors $u_n = \mathrm{o}\left((4p(1-p))^{n+1}\right)$ et $\sum(4p(1-p))^{n+1}$ est une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 (car $p(1-p) < 1/4$) donc converge, et par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\text{La série } \textstyle\sum(2n+2)\mathrm{P}(\mathrm{T} = 2n+2) \text{ converge si et seulement si } p \neq 1/2.}$$

Partie IV. Calcul de P(T = 0) dans le cas symétrique

1.(a) De même qu'à la question 4 de la partie précédente, par mutuelle indépendance, on a :

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{A}_{t,\gamma}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{4^n}}$$

1.(b) Notons E_k l'événement dont on cherche à calculer la probabilité. Il signifie que la particule reste toujours strictement au-dessus de l'axe des abscisses et finit au point de coordonnées $(2n, 2k)$, donc contient $n+k$ montées et $n-k$ descentes. En d'autres termes, avec le vocabulaire de la partie II, E_k est l'événement : « obtenir un scrutin donnant $a = n+k$ bulletins à A et $n-k$ bulletins à B et A est toujours strictement en tête ». Le raisonnement est le même qu'à la question 5 de la partie précédente :

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = \mathrm{P}\left(\bigcup\nolimits_{\beta \text{ scrutin vérifiant les conditions ci-dessus}} \mathrm{A}_{t,\beta}\right)$$

Là aussi, les événements sont deux à deux incompatibles donc la proba de l'union est la somme des probas (qui valent toutes $1/4^n$) et donc la proba recherchée est $1/4^n$ multiplié par le nombre de tels chemins, ce qui donne le résultat voulu d'après la question 3 de la partie II du DM 13.

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\left(\bigcap\nolimits_{j=1}^{2n-1}[\mathrm{S}_j > 0]\right) \cap [\mathrm{S}_{2n} = 2k]\right) = \frac{1}{4^n} \times \left(\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k}\right)}$$

> Attention à ne pas en conclure que
>
> $$\mathrm{P}(\mathrm{E}_k) = \frac{a-b}{a+b} = \frac{k}{n}$$
>
> ce qui donnerait une proba strictement plus grande que 1 dans les deux questions suivantes. En effet, dans la partie II du DM 13, on avait calculé la probabilité en ne prenant en compte que les chemins comportant a voix pour A et b pour B, tandis que là on prend en compte tous les chemins avec $2n$ pas ! Ainsi, on aurait donc pu prouver le résultat de cette question de la façon suivante : si on se place sur un univers Ω_n qui est l'ensemble des chemins de taille $2n$, i.e. $\{\pm 1\}^{2n}$, donc de cardinal $2^{2n} = 4^n$, alors il suffit de diviser le nombre de chemins trouvé dans la partie II du DM 13, avec $a = n+k$, $b = n-k$, et de diviser par 4^n.

2.(a) On a $[\mathrm{S}_2 n > 0] = \bigcup_{k=1}^{n}[\mathrm{S}_{2n} = 2k]$ donc

$$\begin{aligned}\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0] &= \left(\bigcap_{j=1}^{2n-1}[\mathrm{S}_j>0]\right)\cap\left(\bigcup_{k=1}^{n}[\mathrm{S}_{2n}=2k]\right)\\ &= \bigcup_{k=1}^{n}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{2n-1}[\mathrm{S}_j>0]\right)\cap[\mathrm{S}_{2n}=2k]\right)\end{aligned}$$

par distributivité de l'intersection sur l'union. On a une union d'événements deux à deux incompatibles (car deux événements $[\mathrm{S}_{2n}=2k]$ pour deux valeurs différentes de k ne peuvent pas se produire en même temps) ce qui permet de conclure (proba d'une union = somme des probas).

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{2n-1}[\mathrm{S}_j>0]\right)\cap[\mathrm{S}_{2n}=2k]\right)}$$

2.(b) D'après les deux questions précédentes,

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)=\frac{1}{4^n}\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{2n-1}{n+k-1}-\binom{2n-1}{n+k}\right)$$

On a une somme télescopique donc :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)=\frac{1}{4^n}\times\left(\binom{2n-1}{n}-\binom{2n-1}{2n}\right)$$

Le deuxième coefficient binomial est nul car $2n>2n-1$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)=\frac{1}{4^n}\times\binom{2n-1}{n}}$$

2.(c) La particule ne s'annule pas si et seulement si elle ne prend que des valeurs positives, ou que des valeurs négatives, c'est-à-dire que

$$\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j\neq 0]=\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)\cup\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j<0]\right)$$

et cette union est disjointe donc :

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j\neq 0]\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)+\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j<0]\right)$$

Or, le problème du scrutin est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire qu'il y a autant de chemins reliant $(0,0)$ à $(2n,2k)$ qui restent strictement au-dessus de l'axe des abscisses, que de chemins reliant $(0,0)$ à $(2n,-2k)$ qui restent strictement en-dessous (on pourrait utiliser un principe de réflexion, mais c'est tout de même assez évident), et les calculs ensuite sont encore valables si bien que

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j<0]\right)$$

Dès lors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j\neq 0]\right) &= 2\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j>0]\right)\\ &= \frac{2}{4^n}\times\binom{2n-1}{n}\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} && \text{Formule de Stirling}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[\mathrm{S}_j\neq 0]\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}$$

3 La probabilité de droite (avec l'intersection infinie) est la probabilité de ne jamais retourner en 0 (pour tout j, la particule n'est pas en 0) donc vaut $\mathrm{P}(\mathrm{T}=0)$. La quantité de gauche tend donc vers $\mathrm{P}(\mathrm{T}=0)$ et vers 0 donc, par unicité de la limite

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{T}=0)=0}$$