Programme de colle - Semaine n°13

Chapitre 13 - Limites et continuité

- cf. semaines 11 et 12.

Chapitre 14 - Dérivation

- cf. semaine 13.

Chapitre 15 - Fonctions convexes

- Définition d'une fonction convexe, concave (avec x, y et λ). Interprétation géométrique. Exemple de la valeur absolue.
- Une CL de fonctions convexes à coefficients positifs est convexe. En particulier, une somme de fonctions convexes est convexe.
- Inégalité de Jensen : si f est convexe, si $(x_1, \dots, x_n)$ sont des éléments de I et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont positifs de somme 1, alors $f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$. Cas particulier où les λ_i sont tous égaux à $1/n$. Application : si $x_1, \dots, x_n$ sont strictement positifs, alors :

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$$

- Théorème des trois pentes. Caractérisation des fonctions convexes par la croissance des pentes.
- Régularité des fonctions convexes : une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur et donc est continue en tout point intérieur. Cas particulier d'un intervalle ouvert.
- Caractérisation des fonctions convexes dérivables, dérivables deux fois. Exemples.
- Point d'inflexion. Caractérisation pour les fonctions dérivables deux fois.

Chapitre 16 - Relations binaires sur un ensemble

- Définition d'une relation binaire (rapidement).
- Définition d'une relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
- Relations d'ordre. Exemples : ordre usuel sur $\mathbb{R}$, divisibilité sur $\mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ (pas sur $\mathbb{Z}$!), inclusion. Ordre produit, ordre lexicographique sur un ensemble produit, interprétation graphique sur $\mathbb{R}^2$.
- Ordre total, ordre partiel. Application aux exemples précédents.
- Suites (strictement) monotones sur un ensemble ordonné.
- Minorant, majorant, ensemble majoré, minoré, borné (pas de valeur absolue !), plus petit élément (ou minimum), plus grand élément (ou maximum), unicité du max (respectivement du min) lorsqu'il y a existence. Attention, un ensemble fini n'admet pas forcément de maximum !
- Borne supérieure, borne inférieure, unicité lorsqu'il y a existence. Un maximum est une borne supérieure, idem pour minimum. Exemples dans le cas de l'inclusion, de la divisibilité, de l'ordre produit et de l'ordre lexicographique sur $\mathbb{R}^2$.
- Élément maximal, élément minimal (HP). Exemple dans le cas de la divisibilité sur $[\![1\,; 10]\!]$, sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$.
- Relation d'équivalence. Exemples : congruence modulo m, équipotence, et plus encore.
- Classe d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble. En particulier : une classe d'équivalence n'est jamais vide et deux classes d'équivalence sont soit disjointes, soit confondues. Exemple lorsque R est la relation : $xRy \iff \cos(x) = \cos(y)$. Autres exemples.
- Ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (HP, fait rapidement). L'égalité dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est équivalente à la congruence modulo n. Tables de l'addition et du produit dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Représentation graphique sous forme cyclique.

Chapitres au programme

Chapitre 13 (exercices uniquement), chapitre 14 (cours et exercices), chapitres 15 et 16 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Si f est dérivable en a alors f est continue en a (démonstration).
2. L'examinateur donne une fonction explicite (qui peut être très moche) et demande de calculer sa dérivée à l'aide du théorème de dérivation d'une composée (on peut avoir besoin de l'appliquer plusieurs fois, comme dans l'exemple vu en classe).
3. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur (démonstration). Contre-exemple si ce n'est pas un point intérieur, et un exemple qui prouve que ce n'est pas une condition suffisante.
4. Théorème de Rolle (démonstration, avec un joli dessin).
5. Si f est dérivable deux fois et s'annule n fois, alors f'' s'annule au moins $n-2$ fois (démonstration).
6. Égalité des accroissements finis (démonstration, avec un joli dessin).
7. Les deux inégalités des accroissements finis (sans démonstration).
8. Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et si f' admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ alors $L = 0$ (démonstration).
9. Théorème de la limite de la dérivée, uniquement la version $\mathscr{C}^1$ (sans démonstration). Application à $x \mapsto e^{-1/x^2}$ (démonstration).
10. Formule de Leibniz (démonstration).
11. Définition d'une fonction convexe, concave, avec un joli dessin.
12. Inégalité de Jensen (sans démonstration).
13. Caractérisation des fonctions convexes par la croissance des pentes (sans démonstration).
14. Une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur (démonstration, avec un joli dessin). En classe, nous avons « demêmisé » sans état d'âme, mais l'examinateur peut s'il le souhaite demander à l'élève de faire l'autre côté : question à préparer, donc.
15. $\forall x \in [\,0\,;\pi/2\,]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ (démonstration, avec un joli dessin).
16. Si $x_1, \dots, x_n$ sont strictement [1] positifs, alors :
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$$
17. Définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'équivalence. Le candidat écrira la signification des conditions avec des quantificateurs (par exemple, réflexive : $\forall x \in E, xRx$).
18. Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné et si (u_n) est une suite strictement décroissante alors, pour tous $n < p$, $u_p \preccurlyeq u_n$ et $u_p \neq u_n$ (démonstration, il n'est pas demandé de traiter la réciproque).
19. L'examinateur donne une relation simple et demande de prouver que c'est une relation d'ordre ou d'équivalence.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Dénombrement.
- Début des structures algébriques usuelles.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 20, 21, 26 du chapitre 15.

Cahier de calcul

Rien cette semaine.

1. Le cas où les réels sont simplement supposés positifs sera vu en TD.