Chapitre 33

Déterminants

Le programme se restreint au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais la plupart des résultats restent vrais sur un corps quelconque (sauf la partie II.3). Par conséquent, dans la suite, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais la plupart des résultats restent vrais sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque. On se donne également un entier $n \geqslant 1$.

Et même sur un anneau, cf. paragraphe VI.

I Formes n-linéaires alternées

I.1 Formes n-linéaires « tout court »

Dans cette partie, on note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (pas forcément de dimension finie). On rappelle que E^n est l'ensemble des n-uplets d'éléments de E. En d'autres termes, un élément de E^n est un élément de la forme $(x_1, \dots, x_n)$ où, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $x_i \in E$.

Définition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$. On dit que f est une forme n-linéaire si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables, les autres étant fixées quelconques, c'est-à-dire si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, les applications

- $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$
- $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x_1, x, x_3 \dots, x_n) \end{array} \right.$

$\vdots$

- $f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x_1, \dots, x_{n-1}, x) \end{array} \right.$

sont toutes linéaires.

Comme dans le chapitre 30, une forme est une application à valeurs dans $\mathbb{K}$. Attention, dans ce chapitre, nous ne parlerons presque jamais de formes linéaires, mais plutôt de formes n-linéaires alternées.

Remarque : Si $n = 2$, on parle de forme bilinéaire au lieu de forme 2-linéaire. Nous étudierons certaines formes bilinéaires dans le chapitre 34. On parle également de forme trilinéaire si $n = 3$, mais ce cas de figure se présente moins souvent.

Exemples :

- L'application produit

$$p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^2 & \to & \mathbb{K} \\ (x, y) & \mapsto & xy \end{array} \right.$$

est bilinéaire car est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

- Plus généralement, l'application qui à n éléments de $\mathbb{K}$ associe leur produit est n-linéaire.
- L'application

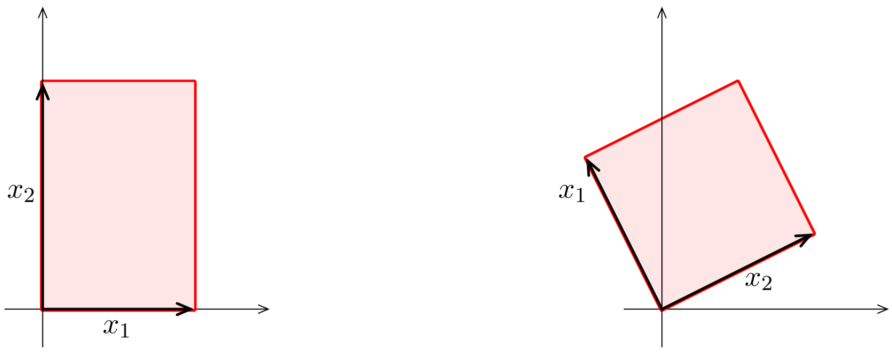
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^4 & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) & \mapsto & 5x_1x_2x_3x_4 \end{array} \right.$$

est 4-linéaire.

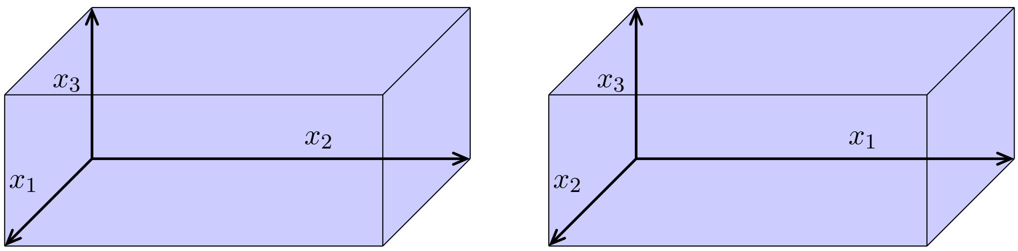
- L'application

$$f : \begin{cases} \mathscr{C}([0\,;1\,],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (f_1,\dots,f_n) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\times\cdots\times f_n(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

  est n-linéaire.
- L'aire d'un rectangle ou, plus généralement, d'un parallélogramme formé par deux vecteurs, est une forme bilinéaire car (par exemple) l'aire est doublée quand on double une des deux longueurs. Attention, quand on parle d'aire (ou de volume dans l'exemple suivant), on parle d'aire **signée** ou **algébrique**, c'est-à-dire qu'une aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement si on va de x_1 à x_2 dans le sens direct, et négativement sinon. Ci-dessous, l'aire du parallélogramme formé par x_1 et x_2 est comptée positivement (à gauche) et négativement (à droite).



- Le volume d'un parallélépipède ou pavé (pas forcément droit) formé par trois vecteurs, est une forme 3-linéaire. Idem, on parle du volume signé ou algébrique selon que les vecteurs sont dans le sens direct ou non (règle de la main droite, du tire-bouchon, de Spiderman etc.). À gauche, un volume positif, et à droite, un volume négatif.



  Nous reparlerons d'orientation d'espaces dans le paragraphe II.3.

Proposition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire, soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$. S'il existe i tel que $x_i = 0$ alors $f(x_1,\dots,x_n) = 0$.

Démonstration. Découle de la linéarité par rapport à la i-ième variable.

Remarque : Comme pour une application linéaire, la réciproque est évidemment fausse.

Proposition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire. Pour toute famille de scalaires $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et pour toute famille $(x_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ d'éléments de E :

$$f\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1}x_{i,1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2}x_{i,2}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n}x_{i,n}\right)$$

$$= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} f(x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$$

En d'autres termes, on peut sortir les sommes et les constantes pour chaque coordonnée.

Attention, cela fait plusieurs sommes ! Ne pas oublier de changer les indices, même si les indices sont les mêmes dans les sommes originelles. De plus, les sommes ne sont pas obligées d'avoir chacune le même nombre de termes, mais cela simplifie les choses pour les hypothèses de la proposition, et nous l'appliquerons à des sommes de ce type en pratique.

Démonstration. Immédiat : la première somme sort par linéarité par rapport à la première variable, la deuxième somme sort par linéarité par rapport à la deuxième variable etc.

Exemple : Soit $f : E^2 \to \mathbb{K}$ bilinéaire. Soient $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ des vecteurs et $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des scalaires. Alors :

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i f\left(x_i, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j f(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Linéarité par rapport à la première variable.

Linéarité par rapport à la deuxième variable.

Remarque : Comme dit plus haut, il est impératif de changer d'indice de sommation ! En effet, si on écrit :

$$\sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k f(x_k, y_k)$$

alors il y a confusion sur les indices. De plus, cela pourrait laisser croire qu'on ne trouve que les termes $\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n$ alors qu'en fait on trouve tous les $\alpha_i\beta_j$! Cela ne posait pas de problème au début car les deux sommes étaient disjointes, mais si on a une somme double, il faut impérativement deux indices différents.

Proposition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n)$$

Attention, f n'est pas linéaire, donc ce n'est pas λ qui sort mais λ^n, un λ par coordonnée !

Démonstration. Comme précédemment, découle de la linéarité par rapport à chaque coordonnée.

I.2 Formes n-linéaires alternées

Définition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. On dit que f est une forme alternée si $f(x_1, \dots, x_n) = 0$ dès qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. En d'autres termes, une forme n-linéaire est alternée si elle est nulle dès qu'un n-uplet contient deux éléments égaux.

On ne parle de forme alternée que pour une forme qui est déjà n-linéaire.

Exemple : L'aire (respectivement le volume) d'un parallélogramme (respectivement d'un pavé) formé par deux (respectivement trois) vecteurs est une forme alternée car vaut 0 si deux vecteurs sont égaux.

Proposition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire alternée. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$.

- Soient $i < j \in [\![1\,;\, n]\!]$. Alors :

$$f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

En d'autres termes, quand on échange deux vecteurs, on multiplie par -1.

- Plus généralement, si $\sigma \in S_n$:

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

En d'autres termes, quand on permute les vecteurs, on multiplie par la signature de la permutation correspondante.

On dit que f est antisymétrique.

Démonstration.
- f étant alternée :

$$f(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) = 0$$

Par n linéarité de f (plus précisément la linéarité par rapport aux i-ièmes et j-ièmes variables) :

$$\begin{aligned}
0 = f(x_1, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) &= \quad f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i + x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&= \quad f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_i}_{j}, \dots, x_n) \\
&\quad + f(x_1, \dots, \underbrace{x_j}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

□

Les premier et dernier termes sont nuls puisque f est alternée, si bien que le deuxième et le troisième terme sont opposés, ce qui est le résultat voulu.

- Notons $\sigma = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_k$ une décomposition de σ en produit de transpositions. On passe de $f(x_1, \dots, x_n)$ à $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ en appliquant τ_k puis τ_{k-1} etc. et à chaque fois on multiplie par -1 d'après le point précédent. Finalement, on multiplie par -1 à la puissance le nombre de transpositions dans la décomposition de σ, ce qui donne bien $\varepsilon(\sigma)$.

Rappelons qu'il n'y a pas unicité.

Exemple : Soit $f : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{K}$ 4-linéaire alternée. Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E^4$. A-t-on $f(x_2, x_4, x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ou l'opposé ?

On cherche donc la signature de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

qui est en fait le 4-cycle $(1\,2\,4\,3)$ donc qui a une signature égale à -1 : on a $f(x_2, x_4, x_1, x_3) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. On pouvait aussi le faire à la main à coup d'échanges (de permutations) successifs :

On a utilisé ci-dessus l'écriture de σ comme produit de transpositions, mais si on ne cherche que la signature, l'écriture de σ comme produit de cycles à supports disjoints fonctionne tout aussi bien.

$$\begin{aligned} f(x_2,x_4,x_1,x_3) &= -f(x_2,x_3,x_1,x_4) \quad (x_3 \leftrightarrow x_4)\\ &= f(x_2,x_1,x_3,x_4) \quad (x_3 \leftrightarrow x_1)\\ &= -f(x_1,x_2,x_3,x_4) \quad (x_1 \leftrightarrow x_2)\end{aligned}$$

Proposition. Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ n-linéaire alternée.

- Soient $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $i \in [\![1 ; n]\!]$ et $(\lambda_j)_{j\neq i} \in \mathbb{K}^{n-1}$. Alors :

$$f\left(x_1,\dots,x_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right) = f(x_1,\dots,x_n)$$

  En d'autres termes, on ne change pas la valeur d'une forme linéaire alternée en ajoutant à un terme une combinaison linéaire des autres termes.
- Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille liée. Alors $f(x_1,\dots,x_n) = 0$.

Démonstration.
- Par linéarité par rapport à la i-ième variable :

$$f\left(x_1,\dots,x_i + \sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right) = f(x_1,\dots,x_n) + \sum_{j\neq i}\lambda_j f(x_1,\dots,\underbrace{x_j}_{i},\dots,x_n)$$

  Or, tous les termes de la somme sont nuls car contiennent deux fois la variable x_j : à la i-ième place, mais aussi à la j-ième, ce qui donne le résultat voulu.
- Par hypothèse, il existe i tel que x_i soit combinaison linéaire des $(x_j)_{j\neq i}$. Par conséquent, il existe $(\lambda_j)_{j\neq i} \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que

$$\begin{aligned} f(x_1,\dots,x_n) &= f\left(x_1,\dots,\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right)\\ &= f\left(x_1,\dots,0+\sum_{j\neq i}\lambda_j x_j,\dots,x_n\right)\\ &= f(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\\ &= 0 \end{aligned}$$

  par n-linéarité de f. □

I.3 Bilan

Nous n'étudierons dans ce chapitre que des formes n-linéaires alternées. Pour de telles formes :

- Pour sortir une constante, il suffit qu'elle soit en facteur **d'une** coordonnée. Si elle est en facteur de plusieurs coordonnées, on peut la sortir plusieurs fois, mais attention à la puissance ! Si on la sort deux fois, on aura du λ^2 par exemple : il est plus simple de la sortir « en plusieurs fois », une fois pour chaque coordonnée, pour être sûr de ne pas se tromper.
- Cas particulier important : $f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) = \lambda^n f(x_1,\dots,x_n)$ (avec les mêmes notations que ci-dessus). À connaître sur le bout des doigts !

- On peut de la même façon sortir les sommes pour chaque coordonnée. Si on sort plusieurs sommes, attention à prendre des indices distincts !
- Quand on échange deux coordonnées, on multiplie par -1.
- Plus généralement, quand on permute les n coordonnées, on multiplie par la signature de la permutation correspondante.
- On peut rajouter une CL des autres coordonnées à l'une des coordonnées sans changer la valeur de la fonction.
- L'image d'une famille liée est nulle. En particulier, si une famille contient le vecteur nul, alors son image est nulle.

On voit se dessiner les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, et donc la méthode du pivot de Gauß... cf. paragraphe V.3.

II Déterminant en dimension n

Dans toute la suite du cours, E est supposé de dimension finie n.

II.1 Déterminant relativement à une base

On a vu dans la partie précédente la définition d'une forme n-linéaire alternée, et on en a déduit des propriétés. Mais il reste tout de même une question d'importance cruciale : existe-t-il forcément des formes n-linéaires alternées ? Puisque la fonction nulle de E^n dans $\mathbb{K}$ est évidemment une forme n-linéaire, existe-t-il forcément des formes n-linéaires alternées non nulles ?

On rappelle que, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, tout élément x de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des e_i. Par conséquent, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, il existe une unique famille de scalaire (les coordonnées des x_j dans la base B) $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ telle que :

On voit évidemment se profiler la définition de déterminant d'une matrice, que nous verrons dans le paragraphe IV. Cela nous permettra d'illustrer et de mieux comprendre la définition de $\det_B$.

$$\forall j \in [\![1\,;\, n]\!], x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

Remarquons que le premier indice de la coordonnée, i, est celui du vecteur de la base correspondant, et que le deuxième indice, j, est celui du vecteur « global », c'est-à-dire x_j. Nous reprenons ces notations dans la proposition ci-dessous.

Proposition/Définition. Soit $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E, et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

- L'application

$$\det_B : \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \end{array} \right.$$

  est l'unique forme n-linéaire alternée f sur E^n qui vérifie $f(B) = 1$ et on l'appelle déterminant relativement à la base B.
- $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. En d'autres termes, $\det_B$ est une base de $\Lambda_n(E)$, c'est-à-dire que toute forme n-linéaire alternée sur E^n est un multiple de $\det_B$.

Les $a_{i,j}$ sont les coordonnées des vecteurs $(x_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ dans la base $B = (e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Il est bien évident que si on change les vecteurs, alors les coordonnées changent aussi. Il est tout aussi évident qu'en changeant la base, les coordonnées changent aussi. Voir plus bas pour le lien entre $\det_B$ et $\det_{B'}$, lorsque B' est une autre base de E.

Remarque : ⚠ On ne peut calculer que le déterminant de n vecteurs en dimension n. Si on est en dimension 2, on ne peut calculer que le déterminant de deux vecteurs, si on est en dimension 3, on ne peut calculer que le déterminant de trois vecteurs etc. Ce sera la même chose avec le déterminant d'une matrice dans le paragraphe IV : on ne pourra calculer que le déterminant d'une matrice carrée.

DÉMONSTRATION. • Il est immédiat que $\Lambda_n(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{E^n}$ puisqu'il est non vide (il contient l'application nulle de E^n dans $\mathbb{K}$), stable par somme et par multiplication par un scalaire, donc en particulier c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Prouvons que $\det_B$ est linéaire par rapport à la première variable. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ qu'on note comme ci-dessus (avec les $a_{i,j}$ comme coordonnées). Soit $y_1 = b_{1,1}e_1 + b_{2,1}e_2 + \dots + b_{n,1}e_n \in E$. Alors

$$x_1 + y_1 = (a_{1,1} + b_{1,1})e_1 + (a_{2,1} + b_{2,1})e_2 + \dots + (a_{n,1} + b_{n,1})e_n$$

si bien que

$$\begin{aligned} \det_B(x_1 + y_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(a_{\sigma(1),1} + b_{\sigma(1),1})a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} + \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)b_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) + \det_B(y_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

De même, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on montre facilement que $\det_B(\lambda x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda \det_B(x_1, \dots, x_n)$ donc $\det_B$ est linéaire par rapport à la première variable, et on montre de même qu'elle est linéaire par rapport à chaque variable, donc $\det_B$ est bien n-linéaire.

- Montrons que $\det_B$ est alternée. Soit donc $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ et on suppose qu'il existe $k < j$ tels que $x_k = x_j$. Notons τ la transposition $(k\,j)$. On montre facilement que $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection de S_n dans lui-même. On en déduit l'égalité suivante à l'aide du « changement d'indice » $\varphi = \tau \circ \sigma$:

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi \circ \tau) a_{\varphi\circ\tau(1),1} a_{\varphi\circ\tau(2),2} \cdots a_{\varphi\circ\tau(n),n}$$

> On pose $\varphi = \sigma \circ \tau$, $\sigma = \varphi \circ \tau$ (puisque τ est son propre inverse). Lorsque σ décrit S_n, φ décrit également S_n, d'où l'égalité ci-contre.

D'une part, ε étant un morphisme de groupe :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\varphi \circ \tau) &= \varepsilon(\varphi) \times \varepsilon(\tau) \\ &= -\varepsilon(\varphi) \end{aligned}$$

D'autre part, rappelons que τ échange k et j mais laisse les autres éléments de $[\![1\,;\, n]\!]$ invariants, ce qui donne :

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),k} \cdots a_{\varphi(k),j} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

Or, $x_k = x_j$ donc ces deux éléments de E ont les mêmes coordonnées dans la base B. En d'autres termes, pour tout i, $a_{i,j} = a_{i,k}$ donc, en particulier, $a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}$ et $a_{\varphi(j),k} = a_{\varphi(j),j}$ si bien que

> On reprend les notations ci-dessus :
> $$x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$$
> et
> $$x_k = \sum_{i=1}^n a_{i,k} e_i$$

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(k),k} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

Le corps étant commutatif, on a enfin :

$$\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\sum_{\varphi \in S_n} \varepsilon(\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \cdots a_{\varphi(k),k} \cdots a_{\varphi(j),j} \cdots a_{\varphi(n),n}$$

L'indice de la somme étant muet, $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = -\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donc $\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$: la forme est alternée.

- Prouvons que $\det_B(e_1, \dots, e_n) = 1$ (ce qui prouvera en particulier que $\det_B$ n'est pas la fonction nulle). Il suffit de voir que, pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$,

$$x_j = 0.e_1 + 0.e_2 + \cdots + 1.e_j + \cdots + 0.e_n$$

En d'autres termes, $a_{i,j} = \delta_{i,j}$ (i.e. vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon). Par conséquent, si $\sigma \in S_n$ et si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors il existe i tel que $\sigma(i) \neq i$ donc $a_{\sigma(i),i} = 0$ si bien que le produit $a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\cdots a_{\sigma(n),n}$ est nul. En particulier, dans la somme définissant le déterminant, seul le terme pour $\sigma = \mathrm{Id}$ est non nul, si bien que

$$\begin{aligned} \det_B(e_1, \dots, e_n) &= \varepsilon(\mathrm{Id}) a_{\mathrm{Id}(1),1} a_{\mathrm{Id}(2),2} \cdots a_{\mathrm{Id}(n),n} \\ &= 1 \times a_{1,1}a_{2,2}\cdots a_{n,n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Pour conclure, il reste donc à prouver que toute forme n-linéaire alternée $f \in \Lambda_n(E)$ est proportionnelle à $\det_B$. Soit donc $f \in \Lambda_n(E)$ et soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On reprend les notations ci-dessus (i.e. les $a_{i,j}$). Par n-linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n a_{i,1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i,2}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{i,n}e_n \right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \sum_{i_2=1}^n a_{i_2,2} \dots \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Si les indices $i_1, \dots, i_n$ ne sont pas distincts, f étant alternée, $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. Par conséquent, dans la somme, il ne reste que les n-uplets d'indices deux à deux distincts :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_n \text{ deux à deux distincts}} a_{i_1,1}a_{i_2,2}\dots a_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$$

Cette somme est une fausse somme multiple : un tel n-uplet est entièrement déterminé par l'application $\sigma : k \mapsto i_k$. Or, puisque les i_k sont deux à deux distincts, c'est une injection de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans lui-même donc une bijection donc $\sigma \in S_n$. Dès lors :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

f étant alternée,

$$f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(e_1, \dots, e_n)$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} f(e_1, \dots, e_n) \\ &= f(e_1, \dots, e_n) \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}a_{\sigma(2),2}\dots a_{\sigma(n),n} \\ &= f(e_1, \dots, e_n) \times \det_B(x_1, \dots, x_n) \qquad \square \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Ne pas oublier de changer les indices, cf. paragraphe I.1.

Rappelons qu'une injection d'un ensemble fini dans un autre de même cardinal, et en particulier dans lui-même, est une bijection.

II.2 Et si on prend une autre base ?

Lexpression de $\det_B$ dépend de la base B : elle fait intervenir les coordonnées des vecteurs dans cette base. Question : si B' est une autre base, quel lien y a-t-il entre $\det_B$ et $\det_{B'}$? Et que peut-on affirmer à propos de $\det_B(B')$?

Corollaire. Soient B et B' deux bases de E. Alors :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration. Découle de la démonstration précédente, puisque $\det_{B'}$ est une forme n-linéaire alternée.

Remarque : Cette formule est à rapprocher de la formule de changement de base $X_{B'} = P_{B',B} X_B$ vue dans le chapitre 31, mais attention : telle quelle, cette formule n'est qu'un moyen mnémotechnique. En effet, d'une part, on ne sait pas encore calculer le déterminant d'une matrice, et d'autre part, nous ne pourrons calculer que le déterminant d'une matrice carrée (cf. paragraphe IV) alors que X_B et $X_{B'}$ sont des matrices colonnes.

Proposition. Soit B une base de E, soit $B' = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. B' est une base de E si et seulement si $\det_B(B') \neq 0$, et alors :

$$\det_B(B') = \frac{1}{\det_{B'}(B)}$$

En d'autres termes, une famille à n éléments est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul.

Démonstration. Puisque c'est une famille à n éléments en dimension n, c'est une base si et seulement si c'est une famille libre.

Si cette famille est liée, elle annule toute forme n-linéaire alternée (cf. paragraphe I.2) donc $\det_B(B') = 0$.

Réciproquement, si cette famille est libre, c'est une base donc, d'après le corollaire précédent :

$$1 = \det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(e_1, \dots, e_n) \times \det_B(x_1, \dots, x_n) \qquad \square$$

et, en particulier, $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et $\det_B(B') = \dfrac{1}{\det_{B'}(B)}$.

II.3 Orientation d'un espace : Vae Victis

Dans cette partie, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Comme dit précédemment, on peut vouloir chercher à munir le plan, l'espace, ou plus généralement n'importe quel espace vectoriel (de dimension finie) d'une orientation pour compter les aires, les volumes (cette notion pouvant se généraliser à une dimension plus grande, cf. paragraphe V.1.b) de façon positive ou négative. Bienvenue au royaume de l'arbitraire.

Proposition. On définit sur l'ensemble des bases de E la relation $\sim$ par :

$$B \sim B' \iff \det_B(B') > 0$$

Alors $\sim$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.

- Soit B une base de E. Alors $\det_B(B) = 1 > 0$ donc $B \sim B$: B est réflexive.
- Soient B et B' deux bases de E telles que $B \sim B'$. Alors $\det_B(B') > 0$. Or, d'après la proposition ci-dessus, $\det_{B'}(B) = \dfrac{1}{\det_B(B')} > 0$ c'est-à-dire que $B' \sim B$: $\sim$ est symétrique.

- Soient B, B' et B'' trois bases de E telles que $B \sim B'$ et $B' \sim B''$. D'après le corollaire ci-dessus, en prenant $(x_1, \dots, x_n) = B''$:

$$\det_{B'}(B'') = \det_{B'}(B) \times \det_B(B'')$$

et tous ces déterminants sont non nuls donc

$$\begin{aligned} \det_B(B'') &= \frac{\det_{B'}(B'')}{\det_{B'}(B)} \\ &= \det_{B'}(B'') \times \det_B(B') \\ &> 0 \end{aligned} \qquad \square$$

si bien que $B \sim B''$: $\sim$ est transitive, c'est une relation d'équivalence.

Proposition/Définition. Il y a deux classes d'équivalence. On choisit arbitrairement l'une des deux classes d'équivalence et on dit que toutes les bases de cette classe d'équivalence sont directes, et toutes les autres sont indirectes.

Démonstration. Soient B, B' deux bases non équivalentes. Puisque les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble des bases de E, il suffit de prouver que $\text{cl}(B)$ et $\text{cl}(B')$ forment une partition de l'ensemble des bases de E, c'est-à-dire que toute base de E est équivalente à B ou à B'. Soit B'' une base de E et supposons qu'elle ne soit pas équivalente à B'. Alors $\det_{B'}(B'') < 0$: en effet, B'' étant une base, cette quantité est non nulle, et elle est négative puisque B et B'' ne sont pas équivalentes. Pour la même raison, $\det_B(B') < 0$. D'après la démonstration précédente :

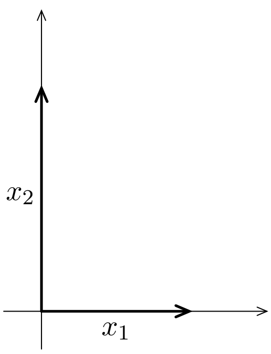
$$\det_B(B'') = \det_{B'}(B'') \times \det_B(B') > 0 \qquad \square$$

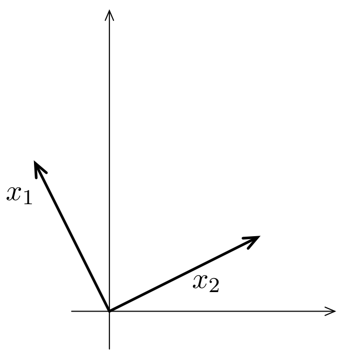
En d'autres termes, $B \sim B''$ ce qui permet de conclure.

Remarques :

- Par conséquent, orienter un espace, c'est choisir arbitrairement « la moitié » des bases de E et décréter tout aussi arbitrairement que ces bases sont directes et que les autres sont indirectes. En général, quand on se place sur $\mathbb{R}^n$, on décrète que la base canonique est directe et cela suffit à orienter l'espace (on parle parfois d'orientation canonique). Par exemple, quand on munit $\mathbb{R}^2$ de son orientation canonique, ci-dessous une base directe (à gauche) et une base indirecte (à droite) :

Je mets des guillemets car il y en a évidemment une infinité.





- Cet arbitraire n'est pas vraiment surprenant : par exemple, selon qu'on est au-dessus ou en dessous d'un plan, une orientation directe deviendra indirecte et réciproquement. Cela ne change pas la notion d'orientation car l'essentiel est que deux bases qui ont la même orientation gardent la même, peu importe d'où on regarde.

- En conclusion, quand on parle d'aire, de volume orienté, il est sous-entendu : par rapport à une bases arbitrairement choisie (en général la base canonique dans $\mathbb{R}^n$).
- Remarquons enfin que, puisque le déterminant est alterné, quand on permute des éléments d'une base, on multiplie le déterminant par la signature de la permutation. Par conséquent, quand on permute des éléments d'une base, elle garde la même orientation (directe ou indirecte) quand cette signature vaut 1. En particulier, puisqu'une transposition a une signature égale à -1, quand on échange deux vecteurs, on change l'orientation de la base.

III Déterminant d'un endomorphisme

On rappelle que dans toute la suite du cours, E est supposé de dimension n. De plus, on note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

III.1 Définition

Lemme. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E, soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application

$$f_u : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{cases}$$

est n-linéaire alternée.

Démonstration. Le caractère alterné est immédiat puisque f est alternée, le caractère n-linéaire découle de la linéarité de u et de la n-linéarité de f.

Proposition/Définition. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall f \in \Lambda_n(E), \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha \times f(x_1, \dots, x_n)$$

Ce scalaire est appelé déterminant de l'endomorphisme u et est est noté $\det(u)$.

Remarque : En d'autres termes, $\det(u)$ est la « constante de proportionnalité » qu'on applique à $f(x_1, \dots, x_n)$ lorsqu'on applique f à $u(x_1), \dots, u(x_n)$. Notons que la définition de $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie : certes, on a par ailleurs $\det(u) = \det_B(u(e_1), \dots, u(e_n))$ (voir la proposition suivante), mais cela est vrai pour toute base, la définition du déterminant d'un endomorphisme est indépendante du choix de la base.

Nous verrons dans le paragraphe V.1.b que $\det(u)$ est la constante par laquelle l'aire est multipliée lorsqu'on applique u.

Démonstration. $\Lambda_n(E)$ étant de dimension 1, il existe $\varphi \in \Lambda_n(E) \backslash \{0\}$, et φ est donc une base de $\Lambda_n(E)$. D'une part, d'après le lemme précédent (dont on reprend les notations), $\varphi_u \in \Lambda_n(E)$ donc il existe α tel que $\varphi_u = \alpha\varphi$, c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \varphi(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha \times \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Toujours car φ est une base de $\Lambda_n(E)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda\varphi$. Dès lors, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

$$\begin{aligned} f(u(x_1), \dots, u(x_n)) &= \lambda\varphi(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ &= \alpha\lambda\varphi(x_1, \dots, x_n) \\ &= \alpha f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$ □

Par construction, α est la coordonnée de φ_u dans la base (φ) et est donc unique.

Corollaire. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Alors :

$$\det_B(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier :

$$\det(u) = \det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n))$$

En d'autres termes, le déterminant d'un endomorphisme u est le déterminant de l'image d'une base par u.

En particulier, la quantité $\det_B(u(B))$ est indépendante de la base choisie : on aurait pu définir le déterminant de u de cette manière (et c'est d'ailleurs comme ça qu'on le définit dans certains livres).

Démonstration. La première égalité vient de la proposition précédente avec $f = \det_B$ qui est bien une forme n-linéaire alternée, et la deuxième vient du fait que $\det_B(e_1, \ldots, e_n) = 1$ (cf. définition du déterminant d'une famille de vecteurs : $\det_B$ est l'unique forme n-linéaire alternée qui vaut 1 en $e_1, \ldots, e_n$).

III.2 Propriétés

Proposition. Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.

Démonstration. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après la proposition précédente,

$$\det(\lambda u) = \det_B(\lambda u(e_1), \ldots, \lambda u(e_n))$$

Par n-linéarité de $\det_B$:

$$\begin{aligned} \det(\lambda u) &= \lambda^n \det_B(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \\ &= \lambda^n \det(u) \end{aligned}$$

□

Remarques :

- Attention, le déterminant d'un endomorphisme n'est pas linéaire, on n'a pas $\det(\lambda u) = \lambda \det(u)$!
- Pour autant, il est impropre de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire puisque le déterminant d'un endomorphisme n'est pas défini sur un n-uplet. Le déterminant d'une famille de vecteurs (et, plus tard, d'une matrice) est n-linéaire, mais c'est un (léger) abus de langage de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire. Néanmoins, on peut garder à l'esprit qu'il vérifie les mêmes conditions qu'une application n-linéaire.

Proposition (Déterminant de l'identité). $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.

Démonstration. C'est immédiat : si on note $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E,

$$\begin{aligned} \det(\mathrm{Id}_E) &= \det_B(\mathrm{Id}(e_1), \ldots, \mathrm{Id}(e_n)) \\ &= \det_B(e_1, \ldots, e_n) \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Proposition (Déterminant d'une composée). Soit $(u,v)\in\mathscr{L}(E)^2$. Alors :

$$\det(u\circ v)=\det(u)\times\det(v)$$

En d'autres termes, le déterminant d'une composée est le produit des déterminants. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\det\left(u^n\right)=\det(u)^n$.

Démonstration. Soit $B=(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. D'après le corollaire de la partie précédente avec $x_1=v(e_1),\dots,x_n=v(e_n)$:

$$\begin{aligned}\det(u\circ v) &= \det_B(u\circ v(e_1),\dots,u\circ v(e_n))\\ &= \det(u)\times\det_B(v(e_1),\dots,v(e_n))\\ &= \det(u)\times\det(v)\end{aligned}$$

□

puisque $\det(v)=\det_B(v(e_1),\dots,v(e_n))$ (toujours d'après le corollaire précédent). Le résultat liant $\det(u^n)$ et $\det(u)$ se démontre par récurrence : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition (Caractérisation des automorphismes). Soit $u\in\mathscr{L}(E)$. u est bijectif si et seulement si $\det(u)\neq 0$, et alors :

$$\det\left(u^{-1}\right)=\frac{1}{\det(u)}$$

Remarque : Puisqu'on manie des endomorphismes en dimension finie, on manie en particulier des applications linéaires entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Par conséquent, une fois cette proposition prouvée, si $u\in\mathscr{L}(E)$, nous aurons les quatre équivalences suivantes :

$$u \text{ bijectif} \iff u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff \det(u)\neq 0$$

Démonstration. Supposons u bijectif. D'après les deux propositions précédentes :

$$\begin{aligned}1 &= \det(\mathrm{Id}_E)\\ &= \det\left(u\circ u^{-1}\right)\\ &= \det(u)\times\det\left(u^{-1}\right)\end{aligned}$$

□

si bien que $\det(u)\neq 0$ et $\det\left(u^{-1}\right)=1/\det(u)$. Réciproquement, si u n'est pas bijectif, alors (cf. remarque ci-dessus) u n'est pas injectif, donc u envoie une base sur une famille liée. En particulier, $u(e_1),\dots,u(e_n)$ est une famille liée donc $\det_B(u(e_1),\dots,u(e_n))=0$, et cette quantité est égale à $\det(u)$ ce qui permet de conclure.

Corollaire. Le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la restriction de det à $\mathrm{GL}(E)$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$.

Démonstration. Le fait que le déterminant aille de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$ découle de la proposition ci-dessus, le fait que ce soit un morphisme découle de la proposition précédente.

Remarque : Ce morphisme de groupe est surjectif et (si $n\geqslant 2$) non injectif. Nous en reparlerons dans le paragraphe V.2.

IV Déterminant d'une matrice carrée

IV.1 Définitions et propriétés immédiates

Définition. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

On le note

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]} \qquad \text{ou} \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

si aucune ambiguïté sur la taille de la matrice n'est possible.

Remarques :

- On ne peut définir le déterminant que pour une matrice carrée. Cela n'a aucun sens de parler de déterminant pour une matrice qui n'est pas carrée.
- Nous verrons au paragraphe V des moyens pratiques pour calculer le déterminant d'une matrice sans passer par le groupe symétrique. Cependant, cette définition doit être connue sur le bout des doigts car elle permet de montrer des résultats qu'on aurait du mal à prouver sans elle : cf. exercices 14 et 50.
- Par définition, $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont les $a_{i,j}$. En d'autres termes, $\det(A) = \det_B(C_1, \dots, C_n)$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et B la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Plus généralement, si u est un endomorphisme représenté par A dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$, on sait (cf. chapitre 31) que les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées dans la base B de $u(e_1), \dots, u(e_n)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_B(u(e_1), \dots, u(e_n)) \\ &= \det(u) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

Proposition. Le déterminant de A est le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.

Matrices/AL : même combat !

Conclusion : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

- $\det(A)$ est le scalaire :

$$\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

- $\det(A)$ est le déterminant de ses vecteurs colonnes (dans la base canonique).
- $\det(A)$ est le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.

Ces trois définitions sont équivalentes : on aurait pu définir le déterminant avec n'importe laquelle d'entre elles !

D'où le « s » à « Définitions » dans le titre de ce paragraphe. Dans certains livres, on trouve d'ailleurs l'une des deux autres définitions.

Le fait que le déterminant d'une matrice soit le déterminant de tout endomorphisme représenté par cette matrice donne de façon immédiate les résultats suivants, à l'aide du paragraphe III.2 :

Proposition. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Proposition. $\det(I_n) = 1$.

Proposition (Déterminant d'un produit). Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors :

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det\left(A^n\right) = \det(A)^n$.

Proposition (Caractérisation des matrices inversibles). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulemetn si $\det(A) \neq 0$, et alors :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

Corollaire. Le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la restriction de det à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$.

Là aussi, le déterminant est alors surjectif et (si $n \geqslant 2$) non injectif : cf. paragraphe V.2.

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire (Invariance du déterminant par similitude). Deux matrices semblables ont même déterminant.

Démonstration. Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ semblables : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\left(P^{-1}\right) \times \det(B) \times \det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)} \times \det(B) \times \det(P) \\
&= \det(B)
\end{aligned}$$

□

Remarques :

- Réciproque fausse ! Par exemple, toute matrice non inversible a un déterminant nul alors que la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même (donc une matrice inversible non nulle et la matrice nulle ont même déterminant mais ne sont pas semblables). Ce résultat est surtout utile par contraposée : si deux matrices n'ont pas le même déterminant, on peut affirmer directement qu'elles ne sont pas semblables.
- Deux matrices équivalentes n'ont pas le même déterminant ! On sait que deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang. Par conséquent, I_n et $2I_n$ sont équivalentes mais $\det(I_n) = 1$ et $\det(2I_n) = 2^n$.

Puisqu'on vous dit qu'il n'y a pas de caractérisation simple de la similitude !

On peut alors ajouter deux propriétés équivalentes à la liste donnée au chapitre 31 :

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ représenté par A. Alors :

$$\begin{aligned}
\det(A) \neq 0 &\iff \det(u) \neq 0 \\
&\iff u \text{ est bijective} \\
&\iff u \text{ est injective} \\
&\iff u \text{ est surjective} \\
&\iff \operatorname{rg}(A) = n \\
&\iff A \text{ est inversible} \\
&\iff \text{Les vecteurs colonnes de } A \text{ sont libres} \\
&\iff \text{Les vecteurs lignes de } A \text{ sont libres} \\
&\iff \text{Les vecteurs lignes de } A \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n \\
&\iff \text{Les vecteurs colonnes de } A \text{ forment une base de } \mathbb{K}^n.
\end{aligned}$$

On a enfin le résultat suivant :

Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det\left(A^\top\right) = \det(A)$.

Démonstration. Par définition :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Soit $\sigma \in S_n$. Rappelons que σ est une bijection de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$ dans lui-même. Par conséquent, les réels $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ sont exactement les nombres $1, \dots, n$ dans un certain ordre. On peut donc réorganiser les termes du produit $a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$ pour obtenir

Réorganiser, c'est-à-dire : mettre d'abord le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 1$, et alors $i = \sigma^{-1}(1)$, puis le terme $a_{\sigma(i),i}$ tel que $\sigma(i) = 2$, et alors $i = \sigma^{-1}(2)$ etc.

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

Or, $\varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) = \varepsilon(\sigma)^{-1} = \varepsilon(\sigma)$ car les éléments de ± 1 sont leur propre inverse. Par conséquent :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon\left(\sigma^{-1}\right) a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

Or, quand σ parcourt S_n, σ^{-1} parcourt S_n : on peut faire le « changement d'indice » « $\sigma = \sigma^{-1}$ »

On n'affirme pas que $\sigma = \sigma^{-1}$, on fait un changement d'indice : on pose $\tau = \sigma^{-1}$ et ensuite on remplace τ par σ puisque l'indice est muet.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \left(A^\top\right)_{\sigma(1),1} \left(A^\top\right)_{\sigma(2),2} \cdots \left(A^\top\right)_{\sigma(n),n} \\
&= \det\left(A^\top\right)
\end{aligned}$$

□

IV.2 Caractère n-linéaire alterné du déterminant

La première proposition de ce paragraphe précédent découle du résultat analogue pour les endomorphismes vu au paragraphe III.2, mais on peut également la voir comme une conséquence du fait que le déterminant soit une forme n-linéaire alternée. Plus précisément :

Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A)$ est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A.

Démonstration. Découle du fait que $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de A.

De plus :

Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A)$ est une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de A.

DÉMONSTRATION. Découle du fait que $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$ et que les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$.

On en déduit le résultat suivant (cf. paragraphe I.3) :

Corollaire (Règles de calcul du déterminant).

- Pour sortir une constante, il suffit qu'elle soit en facteur **d'une** ligne ou **d'une** colonne. Si elle est en facteur de plusieurs lignes ou de plusieurs colonnes, on la sort plusieurs fois.
- Cas particulier important : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Échanger deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1.
- Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire.
- Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.
- Plus généralement, on peut ajouter une CL des autres lignes à l'une des lignes, ou une CL des autres colonnes à une autre colonne, sans changer la valeur du déterminant.
- Si les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes forment une famille liée, alors le déterminant est nul.

Plus généralement (mais ça sert assez peu en pratique) permuter des lignes ou des colonnes multiplie le déterminant par la signature de la permutation correspondante.

La réciproque est vraie, voir paragraphe précédent.

Remarque : ⚠ ⚠ ⚠ Le déterminant n'est pas linéaire ! Par exemple, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, on n'a pas $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$! De plus, si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on ne peut **RIEN** affirmer à propos de $\det(A+B)$ (alors qu'on sait que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$) ! Déterminant et somme font très mauvais ménage ! Tout ce qu'on peut faire c'est casser une somme dans **une** ligne ou **une** colonne.

Plus fort (cf. exercice 20) : si une matrice A vérifie $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$ pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est la matrice nulle !

V Et en pratique ?

V.1 En dimension 2 et en dimension 3

V.1.a Déterminant d'une matrice 2×2, d'une matrice 3×3

Proposition. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors $\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

DÉMONSTRATION. S_2 est réduit à deux éléments : $S_2 = \{\mathrm{Id}; (1\,2)\}$. Par conséquent, si on note $\tau = (1\,2)$:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \varepsilon(\mathrm{Id}) a_{\mathrm{Id}(1),1} a_{\mathrm{Id}(2),2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \\ &= a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2} \end{aligned}$$

□

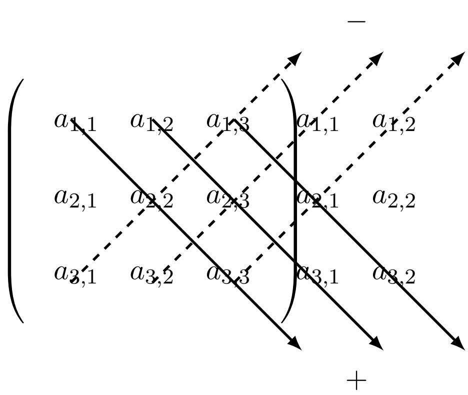
Rappelons que la signature d'une transposition est égale à -1.

Proposition (Règle de Sarrus). Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}$$

Démonstration. Comme précédemment, on donne tous les éléments de S_3 et on applique la formule du déterminant. On a $S_3 = \{\mathrm{Id}; (1\,2); (1\,3); (2\,3); (1\,2\,3); (1\,3\,2)\}$. Les trois transpositions ont une signature égale à -1 et donnent les trois termes avec le $-$ de la proposition (par exemple, la transposition $(1\,3)$ donne le terme $-a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}$), et l'identité et les 3-cycles ont une signature égale à 1 et donnent les trois autres termes. Les détails sont laissés en exo.

Remarque : Il existe un moyen simple de visualiser la règle de Sarrus :



⚠ Attention, on ne peut pas généraliser à une matrice de taille 4 ! À partir de la dimension 4, il faut utiliser les méthodes des paragraphes suivants.

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 8 - 6 + 0 - 4 + 4$$

$$= -14$$

En particulier, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, ses vecteurs colonnes sont libres, ils forment une base de $\mathbb{K}^3$, idem pour les vecteurs lignes, etc.

Voir toutes les équivalences du paragraphe IV.1.

Remarque : ⚠ Il ne faut pas forcément foncer tête baissée dans les calculs et appliquer la règle de Sarrus dès qu'on a un déterminant 3×3 ! Parfois, on peut simplifier la situation avec des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes avant de l'appliquer (ou de le calculer directement).

Exemple : Pour quelle valeur de x la matrice

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

On va simplifier la situation avant d'appliquer la règle de Sarrus (si on l'applique directement, les calculs seront horribles !). Effectuons les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (ce qui ne change pas la valeur du déterminant) ce qui donne :

$$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

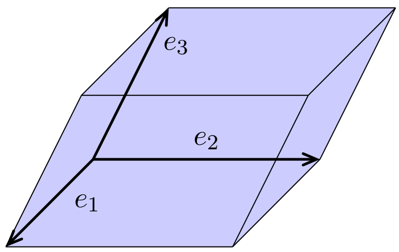
On a deux lignes proportionnelles donc le déterminant est nul : la matrice $A(x)$ n'est jamais inversible, peu importe la valeur de x !

V.1.b Aires, volumes, et au-delà

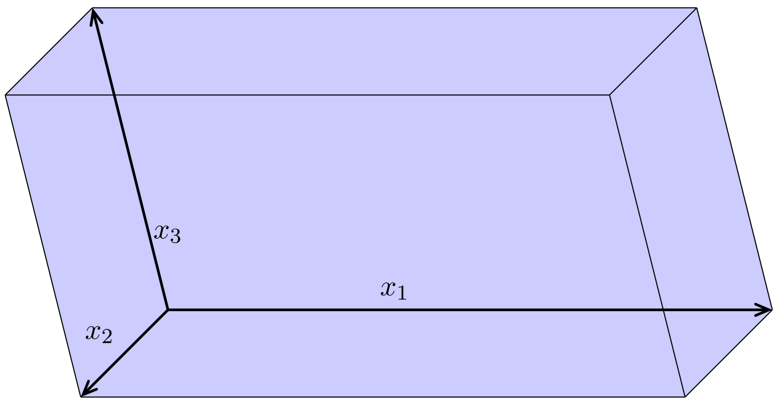
On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le déterminant (d'une matrice ou d'une famille de vecteurs) possède une interprétation géométrique : on a vu que l'aire d'un parallélogramme ou le volume d'un parallélépipède (pas forcément rectangle, pavé pour les intimes) formé par, respectivement, deux ou trois vecteurs, était une forme n-linéaire alternée (avec $n = 2$ et $n = 3$ respectivement). Or, on a prouvé que toutes les formes n-linéaires alternées sont proportionnelles au déterminant. Par conséquent, si on se donne deux vecteurs x_1 et x_2 (dans le plan), le déterminant de ces deux vecteurs (dans une base quelconque) est proportionnel à leur déterminant, et c'est la même chose en dimension 3 (avec le volume du pavé formé par trois vecteurs).

Cherchons la constante de proportionnalité. Si on fixe une base B de référence, alors le déterminant de cette base vaut 1 : on peut voir ça comme une unité de volume (ou d'aire en dimension 2). Plus précisément, si on dit que le volume du pavé formé par ces trois vecteurs (ou deux en dimension 2) est l'unité de volume, et alors le déterminant et le volume coïncident pour ces vecteurs donc la constante de proportionnalité vaut 1, c'est-à-dire que le volume est égal au déterminant ! Encore une fois : si on fixe une base B, alors le déterminant de vecteurs dans cette base est égal au volume formé par ces vecteurs (en considérant le volume du pavé formé par les vecteurs de la base comme l'unité de volume c'est-à-dire valant 1). C'est pareil en dimension 2, et cela nous permet de généraliser la notion de volume en dimension supérieure : en dimension n, on définit le volume (on parle parfois d'hypervolume) du « pavé » formé par n vecteurs comme le déterminant, encore une fois en partant d'une base qui donne un volume de référence, une unité de volume.

Précisons que le pavé n'a aucune raison d'être droit : sur les dessins ci-dessous, ce n'est d'ailleurs pas le cas.



Volume de référence $= \det_B(e_1, e_2, e_3) = 1$



Volume du pavé $= \det_B(x_1, x_2, x_3)$

En conclusion, on définit le volume de la façon suivante, et dans le cadre de la dimension 2 ou 3, on a prouvé le résultat suivant :

Proposition/Définition. Soit B une base de E.

- Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle volume du pavé formé par $(x_1, \dots, x_n)$ relativement à la base B la quantité $\det_B(x_1, \dots, x_n)$.
- Soient $x_1 = (a_1, b_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$. L'aire du pavé formé par x_1 et x_2 est égale à :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

- Soient $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $x_2 = (a_2, b_2, c_2)$ et $x_3 = (a_3, b_3, c_3)$ trois éléments de $\mathbb{R}^3$. Le volume du pavé formé par x_1, x_2, x_3 est égal à :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - c_1 b_2 a_3 - c_2 b_3 a_1 - c_3 b_1 a_2$$

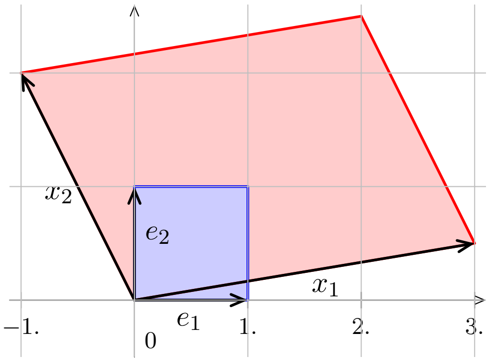
Si rien n'est précisé, on prend comme base la base canonique et donc comme aire de référence le carré formé par les vecteurs de la base canonique (idem pour le volume).

Remarque : Pour une aire ou un volume, on aurait pu montrer ce résultat à la main en se souvenant de l'aire d'un parallélogramme (Base $\times$ hauteur) ou le volume d'un pavé (Aire de la base $\times$ hauteur) mais, d'une part, il aurait fallu un peu de travail géométrique, et d'autre part, cela ne nous aurait pas permis de généraliser la notion de volume en dimension supérieure.

Enfin, quand on dit Base $\times$ hauteur, il ne faut pas oublier que l'aire est algébrique i.e. peut être négative si les vecteurs sont dans le sens indirect !

Exemple : L'aire du parallélogramme formé par les vecteurs $x_1 = (3, 1/2)$ et $x_2 = (-1, 2)$ est :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1/2 & 2 \end{vmatrix} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$$



Parlons à présent de l'interprétation géométrique du déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$. Puisque, pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_n$ (et toute base B) :

$$\det_B(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_B(x_1, \dots, x_n)$$

alors on en déduit le résultat suivant :

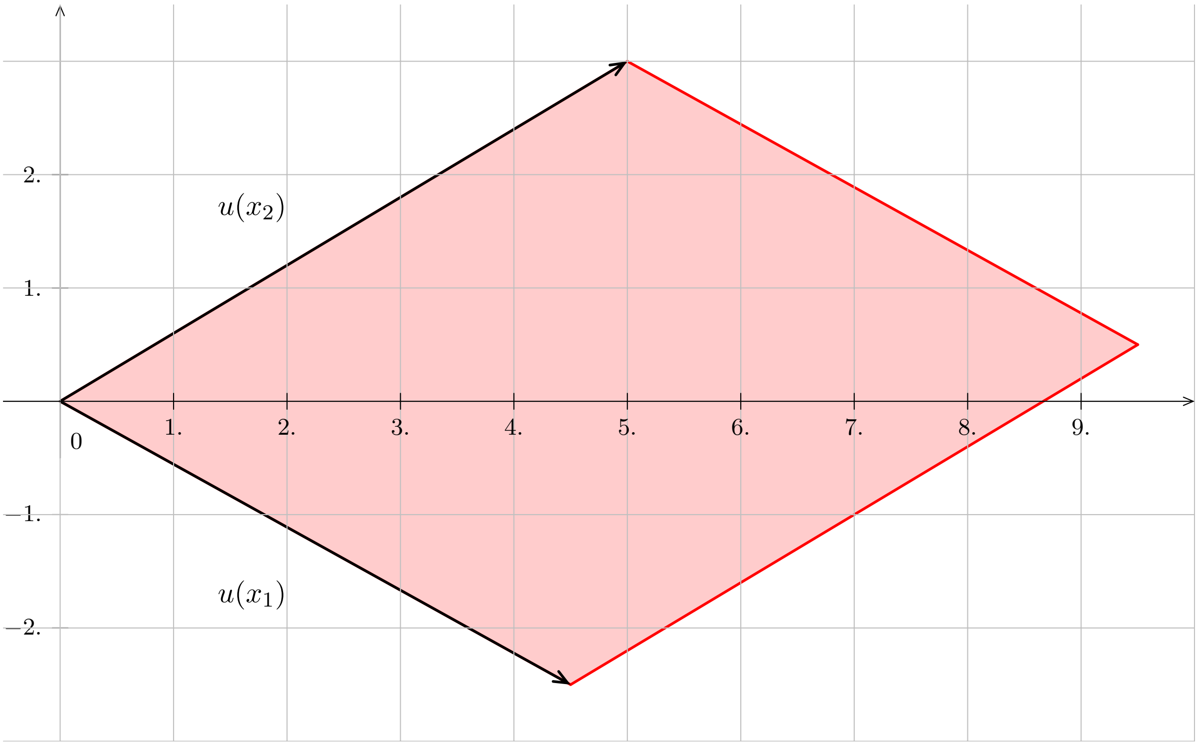
Proposition. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, soient B une base et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Le volume du pavé formé par $u(x_1), \dots, u(x_n)$ est égal au volume du pavé formé par $x_1, \dots, x_n$, multiplié par $\det(u)$. En d'autres termes, quand on applique un endomorphisme u, on multiplie les volumes par $\det(u)$.

Exemple : Soit $u \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+3y, y-x) \end{array} \right.$. Alors $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ et sa matrice canoniquement associée est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\det(u) = \det(A) = 4$: quand on applique u, on multiplie les aires par 4. Si on reprend l'exemple ci-dessus, alors $u(x_1) = (9/2, -5/2)$ et $u(x_2) = (5, 3)$ si bien que l'aire du parallélogramme formé par $u(x_1)$ et $u(x_2)$ vaut

$$\begin{vmatrix} 9/2 & 5 \\ -5/2 & 3 \end{vmatrix} = 26 = 4\det(x_1, x_2)$$



V.2 Matrices triangulaires et diagonales

Proposition. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & \dots & * \\ 0 & a_{2,2} & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure. Alors :

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}$$

Démonstration. Par définition :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

□

Soit $\sigma \in S_n$. On suppose que, pour tout i, $\sigma(i) \leqslant i$. Montrons par récurrence (finie) que, pour tout i, $\sigma(i) = i$. Le résultat est évident si $i = 1$ puisque σ est à valeurs dans $[\![1\,;\, n]\!]$. Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ et supposons que $\sigma(1) = 1, \dots, \sigma(k) = k$. Si $\sigma(k+1) \neq k+1$ alors $\sigma(k+1) \leqslant k$ (puisque $\sigma(k+1) \leqslant k+1$) donc $\sigma(k+1)$ est égal à l'un des entiers $1, 2, \dots, k$ ce qui est absurde par injectivité de σ, donc $\sigma(k+1) = k+1$, ce qui clôt la récurrence.

Il en découle que σ est l'identité. Par contraposée, si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors il existe i tel que $\sigma(i) > i$ donc $a_{\sigma(i),i} = 0$ donc le produit correspondant à σ dans la définition de $\det(A)$ est nul. En d'autres termes, dans cette somme, il ne reste que le terme correspondant à Id qui vaut $a_{1,1} \dots a_{n,n}$ puisque la signature de Id vaut 1.

Corollaire.

- Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire inférieure. Alors :

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}$$

- Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & a_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors :

$$\det(A) = a_{1,1} \times \cdots \times a_{n,n}$$

⚠ ⚠ ⚠ **En conclusion, le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.**

On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire ou diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Démonstration. Le premier résultat vient du fait qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant, et le deuxième résultat vient du fait qu'une matrice diagonale est triangulaire.

Exemple : Si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n$$

même si on le savait déjà puisque $\det(I_n) = 1$ et puisque le déterminant est n-linéaire donc $\det(\lambda I_n) = \lambda^n \det(I_n) = \lambda^n$.

Remarques :

- ⚠ Évidemment, ce résultat est faux pour une matrice quelconque (ni triangulaire, ni diagonale).
- En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

  ce qui prouve que l'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes surjectif. En prenant un endomorphisme représenté par cette matrice, il en découle que le morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ est aussi surjectif.
- Ce morphisme n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$ puisqu'alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

  et donc $\ker(\det) \neq \{I_n\}$ donc ce morphisme n'est pas injectif. De même, $\det : \mathrm{GL}(E) \to \mathbb{K}^*$ n'est pas injectif dès que $n \geqslant 2$.
- Le noyau du déterminant (restreint à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) est noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé groupe spécial linéaire d'ordre n. C'est l'ensemble des matrices ayant un déterminant égal à 1 (et c'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$).
- Par analogie, on note $\mathrm{SL}(E)$ le noyau de la restriction du déterminant à $\mathrm{GL}(E)$: c'est l'ensemble des endomorphismes ayant un déterminant égal à 1. C'est toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Plus précisément, en revenant aux aires, volumes etc. du paragraphe V.1.b, $\mathrm{SL}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes qui laissent le volume invariant.

V.3 Calcul du déterminant par la méthode du pivot de Gauß

Proposition (Rappel - Effet des opérations élémentaires sur le déterminant).

- Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.
- Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire.
- Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.
- Plus généralement, on peut ajouter une CL des autres lignes à l'une des lignes, ou une CL des autres colonnes à une autre colonne, sans changer la valeur du déterminant.

Remarque : Attardons-nous sur la deuxième opération élémentaire, à savoir $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (avec $\lambda \neq 0$). Le déterminant est alors multiplié par λ, c'est-à-dire que si prend $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si on note $\tilde{A}$ la matrice obtenue en effectuant l'une de ces deux opérations élémentaires, alors $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$, c'est-à-dire que le déterminant de la nouvelle matrice est égal au déterminant de l'ancienne multiplié par λ.

Cependant, nous, dans ce paragraphe, c'est $\det(A)$ qui nous intéresse : on a alors $\det(A) = \dfrac{1}{\lambda}\det(\tilde{A})$, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice originelle est le déterminant de la matrice après modification, **divisé** par λ.

On en déduit un moyen simple de calculer $\det(A)$. On fait comme pour inverser une matrice : on part de A pour arriver à une matrice triangulaire à l'aide d'opérations élémentaires (on peut mélanger les lignes et les colonnes ici) :

- Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.
- Quand on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire λ, on **divise** le nouveau déterminant par ce scalaire.
- Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$) ne modifie pas le déterminant.

On divise et non pas on multiplie ! Ce n'est pas si surprenant : le nouveau est multiplié par λ, donc l'ancien est égal au nouveau divisé par λ, on peut voir ça comme une espèce de compensation. Voir l'exemple ci-dessous.

Exemple : Calculons le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauß.

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -16 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & -10 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \\ 0 & -16 & 2 & 4 \end{vmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_4 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -16 & 4 \end{vmatrix} && C_2 \leftrightarrow C_3 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 34 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} && \begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -10 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 34 & -9 \end{vmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_4 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 34 \end{vmatrix} && C_3 \leftrightarrow C_4 \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & 34 \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow -L_3/2 \\
&= -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 + 9L_3
\end{aligned}
$$

On divise une ligne par -2 : on multiplie le nouveau déterminant par -2. On peut voir ça comme une compensation.

et donc on trouve $\det(A) = -32$.

V.4 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

V.4.a Résultat théorique

Lemme. Soit $B \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et soit :

$$
A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & * \\ \cline{2-4} 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)
$$

En d'autres termes, A est une matrice de taille n avec un 1 en haut à gauche, le reste de la première colonne étant nul, la matrice extraite de taille $n-1$ en bas à droite étant égale à B, et les étoiles représentant des coefficients quelconques, nuls ou non.

Alors $\det(A) = \det(B)$.

Démonstration. En appliquant la méthode du pivot de Gauß du paragraphe précédent en partant de B, on arrive à une matrice triangulaire supérieure à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\det(B) = \alpha \times \begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

Les points représentent des coefficients quelconques (nuls ou non) et le scalaire α vient des opérations faites sur les déterminants (voir paragraphe ci-dessus). En particulier, $\det(B) = \alpha \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}$. Si on applique les mêmes opérations sur A sans toucher à la première ligne ni à la première colonne, on transforme B en la matrice triangulaire ci-dessus, et les constantes « qui sortent de la matrice à chaque opération élémentaire » sont les mêmes, si bien qu'on arrive à l'égalité suivante :

Quand on parle des mêmes opérations, il est sous-entendu qu'il y a un décalage : si la première opération sur B consiste à faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on commencera, sur A, par effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On ne s'intéresse qu'à B, on ne touche pas à la première ligne ni la première colonne.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \alpha \times \begin{vmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \alpha \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1} \\ &= \det(B) \end{aligned}$$

□

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. On appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.
- Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. On appelle cofacteur de position (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j} \times \Delta_{i,j}(A)$.

Remarque : $\Delta_{i,j}$ est donc le déterminant ci-dessous :

En particulier, un mineur d'une matrice de taille n est un déterminant de taille $n-1$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & & \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Proposition (Développement par rapport à une colonne). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A)$$

Démonstration. Puisque

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}$$

alors, par linéarité du déterminant par rapport à la j-ième colonne :

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,i} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & 1 & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

On veut amener ce 1 en haut à gauche : on effectue les $i-1$ échanges $L_i \leftrightarrow L_{i-1}$ puis $L_{i-1} \leftrightarrow L_{i-2}$ jusqu'à $L_1 \leftrightarrow L_2$, ce qui multiplie à chaque fois le déterminant par -1, ce qui donne :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \dots & 1 & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite les $j-1$ échanges de colonnes $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$ puis $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $C_1 \leftrightarrow C_2$, ce qui multiplie cette fois le déterminant par $(-1)^{j-1}$, d'où :

On peut aussi appliquer directement le i-cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots i \end{pmatrix}$ aux lignes donc on multiplie le déterminant par $(-1)^{i-1}$, la signature de ce cycle. Idem ensuite pour les colonnes, on peut aussi appliquer directement le j-cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots j \end{pmatrix}$ aux colonnes donc on multiplie le déterminant par $(-1)^{j-1}$.

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(-1)^{j-1}a_{i,j}\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

□

On se trouve dans la situation du lemme précédent, avec, à la place de B, la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la ligne j donc, d'après le lemme précédent, le déterminant ci-dessus est égal à $\Delta_{i,j}(A)$ ce qui est le résultat voulu.

Corollaire (Développement par rapport à une ligne). Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}(A)$$

Démonstration. Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$. En appliquant le résultat précédent à $A^\top$:

$$\det\left(A^\top\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(A^\top\right)_{j,i}\Delta_{j,i}\left(A^\top\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(A\right)_{i,j}\Delta_{i,j}\left(A\right)$$

□

ce qui permet de conclure puisque A et $A^\top$ ont même déterminant.

V.4.b Bon... ça veut dire quoi ?

Le moins que l'on puisse dire est que les deux formules ci-dessus sont assez obscures... Pourtant, nous allons nous en servir constamment, et elles nous permettront de calculer plutôt efficacement la plupart des déterminants. Expliquons un peu ce que veut dire la première :

$$\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}(A)$$

Rappelons que $\Delta_{i,j}(A)$ est le déterminant de la matrice extraite de A en barrant la ligne i et la colonne j (voir ci-dessus). Par conséquent, si $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, ce qu'on appelle développer par rapport à la colonne j consiste à faire les opérations suivantes :

- On prend le premier terme de la colonne, $a_{1,j}$, on le multiplie par le déterminant obtenu en barrant la ligne 1 et la colonne j, c'est-à-dire la ligne et la colonne du terme en question :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

  et enfin on le multiplie par $(-1)^{j+1}$.
- On prend le deuxième terme de la colonne, $a_{2,j}$, on le multiplie par le déterminant obtenu en barrant la ligne 2 et la colonne j, c'est-à-dire la ligne et la colonne du terme en question :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

  et enfin on le multiplie par $(-1)^{j+2}$.
- Et ainsi de suite : on parcourt la colonne de haut en bas, on multiplie chaque terme de la colonne par $(-1)^{i+j}$ c'est-à-dire $(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$, et on multiplie encore par le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme en question.
- Et on somme.

Remarques :

- On peut faire la même chose sur une ligne : on parcourt la ligne de gauche à droite, on multiplie chaque terme de la ligne par $(-1)^{i+j}$ c'est-à-dire :

$$(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$$

  et on multiplie encore par le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme en question.
- Ce résultat étant valable pour tout j et pour tout j, on peut le faire pour n'importe quelle colonne et n'importe quelle ligne, le but du jeu est de le faire pour la colonne ou la ligne qui va minimiser les calculs.

- Calculer un déterminant de taille n se fait en calculant $n-1$ déterminants de taille $n-1$, et un déterminant de taille $n-1$ se calcule à son tour en calculant $n-1$ déterminants de taille $n-2$ etc. c'est-à-dire qu'on a une complexité en $n!$, ce qui est énorme ! On s'en tire en fait en développant par rapport à une ligne qui a beaucoup de 0, et c'est comme ça qu'on applique cette méthode en pratique : on choisit la ligne ayant le plus de zéros ou (ce qui revient au même) le moins de termes non nuls, un, deux, trois grand maximum. Si aucune ligne n'a beaucoup de zéros, on commence par en créer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, c'est-à-dire qu'on applique la méthode du pivot de Gauß jusqu'à pouvoir développer efficacement : cf. paragraphe suivant.
- ⚠ Ne pas oublier le $(-1)^{i+j}$! À chaque terme est associé une puissance de -1, plus précisément $(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$, et on a souvent tendance à l'oublier car, la plupart du temps, seul le terme en haut à gauche sera non nul, et alors on multipliera par $(-1)^{1+1}=1$ mais ce ne sera pas toujours le cas. Voici une matrice permettant de mieux visualiser la situation : en haut à gauche, il y a un $+$, et quand on se déplace verticalement ou horizontalement (pas en diagonale !), le signe change. En particulier, tous les coefficients diagonaux seront affectés du signe $+$.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \dots & \vdots \\ + & - & + & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & \dots & \dots & \dots & + \end{pmatrix}$$

Exemple : Calculons

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On essaye de minimiser les calculs : on développe par rapport à la troisième colonne car il y a un zéro.

On pourrait aussi développer par rapport à la troisième ligne ou la quatrième colonne pour la même raison.

$$\begin{aligned} D &= 3\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\times(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3+20-15 \\ &= 8 \end{aligned}$$

On pouvait aussi trouver les signes directement en s'aidant de la matrice de signes ci-dessus : en partant du $+$ en haut à gauche, on trouve que le signe du 3 est $+$ et que le signe des deux 1 est $-$.

V.4.c Exemples

Exemple : Supposons $n\geqslant 2$. Calculons le déterminant de taille n suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Si on développe par rapport à la première ligne, on trouve :

$$\Delta_n = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} + (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Les deux déterminants ci-dessus sont diagonaux donc on trouve $\Delta_n = 1 + (-1)^{n+1}$.

En particulier, les vecteurs colonnes de la matrice dont on calcule le déterminant forment une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si n est impair (cf. exercice 15 du chapitre 28).

Exemple : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant (de taille $n+1$) suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Ici, il ne semble pas très simple de développer par rapport à une ligne ou une colonne. On remarque que la somme des lignes est constante et vaut $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i$. Méthode à retenir : sommer toutes les colonnes sur la première. On aura alors une première colonne constante, on pourra ensuite sortir un terme par n-linéarité, puis soustraire la première ligne à toutes les autres, ce qui fera apparaître des zéros et ensuite on pourra développer par rapport à la première ligne. Méthode à retenir !

Si la somme des colonnes est constante, on somme toutes les lignes sur la première i.e. on fait $L_1 \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n L_i$.

La somme des lignes étant constante, on fait donc l'opération $C_1 \leftarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} C_i$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \times \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

par n-linéarité. On fait à présent l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i \geqslant 2$ (ce qui ne change pas la valeur du déterminant, cf. paragraphe IV.2) :

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n a_i \times \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 - a_1 & -a_2 & \dots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}$$

Développons à présent par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n = \sum_{i=1}^n a_i \times \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 - a_1 & -a_2 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 - a_1 & \dots & a_n - a_{n-1} & -a_n \end{vmatrix}_{[n]}$$

Le dernier déterminant étant le déterminant d'une matrice diagonale, cela permet de conclure :

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \sum_{i=1}^n a_i \times \prod_{i=1}^n (-a_i) \\ &= (-1)^n \times \sum_{i=1}^n a_i \times \prod_{i=1}^n a_i\end{aligned}$$

Remarque : Quand on développe par rapport à une ligne ou une colonne, on réduit de 1 la taille de la matrice. Cela peut parfois être utile pour obtenir une relation de récurrence entre déterminants. Il suffit ensuite de calculer le déterminant lorsque la matrice est de taille $1, 2$ ou 3 ce qui ne présente aucune difficulté.

Exemple : Donner le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & & \\ 2 & 3 & 1 & & (0) & \\ & 2 & 3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 2 & 3 & 1 \\ & & & & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Développons par rapport à la première colonne :

$$D_n = 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n-1]} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Le premier déterminant est égal à D_{n-1}. Développons le deuxième par rapport à la première ligne :

$$D_n = 3D_{n-1} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 2 & 3 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n-2]}$$

et finalement on trouve que $D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$ (on suppose donc sans le dire que $n \geqslant 3$). On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : son équation caractéristique est $x^2 - 3x + 2 = 0$ dont les solutions sont 1 et 2. Il existe donc λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \geqslant 1, D_n = \lambda \times 1^n + \mu \times 2^n$$

$D_1 = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix} = 3$ donc $\lambda + 2\mu = 3$. De plus,

$$\begin{aligned} D_2 &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 7 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda + 4\mu = 7$. On trouve donc $\mu = 2$ et $\lambda = -1$ c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant 1$, $D_n = 2^{n+1} - 1$.

Remarque : On peut enfin mélanger la méthode du pivot de Gauß et la méthode qui consiste à développer par rapport à une ligne ou une colonne : on essaye de rendre la matrice triangulaire, mais pour avoir des quantités plus simples à manipuler, dès qu'on isole un terme en haut à gauche, on développe par rapport à la première colonne, ce qui donne des déterminants de plus en plus petits et donc de plus en plus simples.

Exemple : Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. Calculer

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

Faisons les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2, 3, 4$ ce qui donne :

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a-b & b-c & c-d \\ 0 & a-b & a-c & b-d \\ 0 & a-b & a-c & a-d \end{vmatrix}$$

Si on développe par rapport à la première colonne :

$$D = a \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ a-b & a-c & b-d \\ a-b & a-c & a-d \end{vmatrix}$$

Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$:

$$D = a \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-d \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & a-b & a-c \end{vmatrix}$$

Si on développe par rapport à la première colonne :

$$D = a(a-b) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ a-b & a-c \end{vmatrix}$$

Si on fait $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$:

$$D = a(a-b) \begin{vmatrix} a-b & b-c \\ 0 & a-b \end{vmatrix}$$

et on trouve donc que $D = a(a-b)^3$.

V.5 Comatrice et expression de l'inverse

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice notée $\mathrm{Com}(A)$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i, j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$. En d'autres termes, le terme général de $\mathrm{Com}(A)$ est le mineur de position (i, j) multiplié par $(-1)^{i+j}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Théorème. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top \times A = \det(A).I_n$.

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}
\left(A \times \mathrm{Com}(A)^\top\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \left(\mathrm{Com}(A)^\top\right)_{k,j} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \mathrm{Com}(A)_{j,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}(A)
\end{aligned}$$

Si $i = j$, alors :

$$\begin{aligned}
\left(A \times \mathrm{Com}(A)^\top\right)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}(A) \\
&= \det(A)
\end{aligned}$$

On reconnaît l'expression obtenue en développant par rapport à une colonne, cf. paragraphe V.4.a.

Si $i \neq j$, on aimerait encore utiliser la même formule, mais le problème est que les indices ne sont pas les bons. On aimerait avoir une expression de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} b_{j,k} (-1)^{i+k} \Delta_{i,k}(B)$$

c'est-à-dire qu'on aimerait avoir une matrice B vérifiant : $\forall k, a_{i,k} = b_{j,k}$, c'est-à-dire une matrice dont la j-ième ligne est la i-ième ligne de A. On définit donc B de cette façon, c'est-à-dire qu'on définit B comme étant la matrice égale à A mais avec la j-ième ligne (de B) égale à la i-ième ligne de A. De façon explicite, si on note $L_1, \dots, L_n$ les vecteurs lignes de A, alors on a :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ n \end{matrix}$$

Puisque la j-ième ligne de B est la i-ième ligne de A, on a bien $a_{i,k} = b_{j,k}$ pour tout k, si bien que :

$$\left(A \times \mathrm{Com}(A)^\top\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}(A)$$

Or, les $\Delta_{j,k}(A)$ sont obtenus en barrant la j-ième ligne de A : puisque B et A coïncident sauf en leur j-ième ligne, en barrant la j-ième ligne (et la k-ième colonne), on a la même chose pour A et pour B ! En d'autres termes, $\Delta_{j,k}(A) = \Delta_{j,k}(B)$ pour tout k si bien que

$$\left(A \times \mathrm{Com}(A)^\top\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k} (-1)^{j+k} \Delta_{j,k}(B)$$

Par conséquent, toujours à l'aide de la formule du déterminant obtenue en V.4.a,

$$\left(A \times \mathrm{Com}(A)^\top\right)_{i,j} = \det(B) = 0 \qquad \square$$

puisque B a deux lignes égales (ses lignes i et j sont égales à L_i, la i-ième ligne de A).

Corollaire. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \mathrm{Com}(A)^\top$$

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors

$$\mathrm{Com}(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On l'a prouvé d'une autre façon dans l'exercice 10 du chapitre 21.

Remarque : Comme les formules de Cramer, dans la partie VII, cette expression de A^{-1} a surtout une importance théorique.

V.6 Déterminant d'une famille de vecteurs ou d'un endomorphisme

Si on veut calculer le déterminant d'une famille de vecteurs, on « les met sous forme de matrice » (en effet, le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes). Par exemple, si on veut donner le déterminant des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on écrit :

Par défaut, si la base n'est pas précisée, on prend la base canonique.

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

et on se ramène au calcul du déterminant d'une matrice comme précédemment. Si on veut donner le déterminant d'un endomorphisme, on le représente sous forme de matrice dans une base quelconque et on se ramène encore au calcul du déterminant d'une matrice. Par exemple, si on veut donner le déterminant de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = P - P'$ de $\mathbb{K}_n[X]$, il suffit de voir que sa matrice canoniquement associée est

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \cdots & \cdots & u(X^n) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

donc $\det(u) = \det(A) = 1$ (le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égale au produit de ses coefficients diagonaux).

VI Le déterminant est polynomial en les coefficients

Tout est dans le titre :

Proposition. Le déterminant d'une matrice est polynomial en ses coefficients, c'est-à-dire que $\det(A)$ est obtenu à l'aide de sommes, de produits et de différences de ses coefficients.

Démonstration. Découle de la définition du déterminant d'une matrice.

Cela permet par exemple de montrer les résultats suivants (liste non exhaustive !) :

- Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est encore à coefficients entiers.
- Si $(\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{n,n})$ sont n^2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction

$$x \mapsto \begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(x) & \varphi_{1,2}(x) & \dots & \varphi_{1,n}(x) \\ \varphi_{2,1}(x) & \varphi_{2,2}(x) & \dots & \varphi_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n,1}(x) & \varphi_{n,2}(x) & \dots & \varphi_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

  est une fonction continue car somme, produit et différence de fonctions continues.
- Et bien d'autres encore !

Quand on dit entiers, on parle évidemment d'entiers relatifs ! Il y a des $-$ dans la formule du déterminant, le déterminant d'une matrice à coefficients positifs n'est pas forcément positif !

Les opérations intervenant dans le calcul du déterminant sont uniquement la somme, le produit, et la différence, opérations purement mécaniques qu'on peut réaliser sur n'importe quel anneau. On peut donc généraliser la définition de déterminant d'une matrice au cas d'une matrice à coefficients dans un anneau commutatif quelconque, c'est-à-dire que si A est un anneau intègre commutatif et si $M \in \mathscr{M}_n(A)$, alors on définit son déterminant par :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Nous n'appliquerons des résultats de ce paragraphe qu'avec $A = \mathbb{Z}$ ou $A = \mathbb{K}[X]$.

qui est donc un élément de A (par exemple, le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est encore un élément de $\mathbb{Z}$). On perd toute notion d'endomorphisme, le déterminant devient uniquement un nombre que l'on calcule mécaniquement, mais la plupart des résultats (ceux découlant de la définition) sont encore valables :

- Le déterminant est encore n-linéaire et alterné. Par conséquent, toutes les règles de calcul du paragraphe IV.2 sont encore valables.
- On a encore $\det(I_n) = 1$.
- Une matrice de déterminant non nul n'est pas forcément inversible ! Par exemple, $2I_n$ a un déterminant non nul mais n'est pas inversible (dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$). On prouvera dans l'exercice 35 qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si son déterminant vaut ± 1.
- Les règles de calcul en dimension 2 et dimension 3 sont encore valables.
- Comme on ne peut pas diviser dans un anneau, la méthode du pivot n'est plus valide.
- Cependant, on peut toujours développer par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne.
- Le déterminant est encore multiplicatif (si A est intègre), mais c'est assez difficile à prouver, il faut « plonger » l'anneau A dans un corps. Nous utiliserons ce résultat uniquement sur $\mathbb{Z}$, et alors il suffit de considérer une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ comme une matrice à coefficients réels et alors le résultat découle de ce qui a été fait précédemment.

Plus précisément, il faut plonger A dans son corps des fractions, cf. chapitre 18.

Un exemple important de déterminant d'une matrice à coefficients dans un anneau est le polynôme caractéristique, que vous verrez l'an prochain : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A, qu'on note χ_A, le déterminant de $XI_n - A$, c'est-à-dire que si

Et aussi dans l'exercice 45.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

alors

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{pmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & X - a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ car est le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Le polynôme caractéristique est un outil puissant que vous verrez en deuxième année.

Donnons une dernière application puissante de ce principe :

Proposition (Déterminant de Vandermonde). Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Posons :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Alors :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \geqslant 2$.

- Si $n \geqslant 2$, notons H_n : « $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, V(x_1, \dots, x_n) = \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$ ».
- Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2$.

$$V(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

  donc H_2 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Notons :

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & X \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 & X^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} & X^{n-1} \\ {x_1}^n & {x_2}^n & \cdots & {x_n}^n & X^n \end{vmatrix} \in \mathbb{K}[X]$$

  P est bien un élément de $\mathbb{K}[X]$ car déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$.

  Supposons dans un premier temps $x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts. En développant par rapport à la dernière colonne, on trouve que P est un polynôme de degré n de coefficient dominant $V(x_1, \dots, x_n)$ qui, par hypothèse de récurrence, vaut

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

  et donc est non nul. De plus, $x_1, \dots, x_n$ sont des racines de P : en effet, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $P(a_i)$ est le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales dont est nul. Finalement, P est de degré n et admet n racines distinctes donc elles sont simples, et puisque son coefficient dominant est $V(x_1, \dots, x_n)$, il vient :

$$P = V(x_1, \dots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$$

si bien que

$$\begin{aligned} V(x_1, \dots, x_{n+1}) &= P(x_{n+1}) \\ &= V(x_1, \dots, x_n) \times \prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i) \times \prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

□

Si les x_i ne sont pas deux à deux distincts, le déterminant est nul et le produit est nul donc on a encore égalité. Dans tous les cas, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Remarques :

- Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde. Il est bien sûr à rapprocher de la matrice de Vandermonde vue dans le chapitre 31. On retrouve le résultat démontré au chapitre 31, à savoir que la matrice de Vandermonde

$$VDM = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

- Le déterminant d'une matrice étant égal à sa transposée, on a également le résultat suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Ce dernier déterminant est aussi appelé déterminant de Vandermonde et est noté aussi $V(x_1, \dots, x_n)$ (ce qui n'a rien d'étonnant puisqu'il est égal à l'autre).

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = (3-2) \times (5-2) \times (5-3) = 6$

On aurait pu évidemment utiliser la règle de Sarrus, mais les calculs auraient été plus compliqués.

Exemple : Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$$

Remarque : La méthode consistant à ajouter une ligne pour « transformer un déterminant en polynôme », polynôme qu'on cherche ensuite à factoriser, est classique et doit être retenue. On la retrouve par exemple dans l'exercice 26 où l'on cherche le déterminant suivant, qu'on peut appeler un déterminant de Vandermonde lacunaire :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n} \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$$

L'astuce est d'ajouter la colonne manquante... mais il faut aussi ajouter une ligne sinon la matrice n'est pas carrée ! On s'en tire avec des X, comme ci-dessus : on introduit donc le polynôme

$$P = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^{n} \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n-1} & {x_1}^{n} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n-1} & {x_2}^{n} \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n-1} & {x_3}^{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n-1} & {x_n}^{n} \end{vmatrix}$$

On cherche ensuite à factoriser P puis à relier le déterminant recherché à P : cf. TD.

VII Application aux systèmes linéaires

On se donne dans cette partie un système linéaire de n équations à n inconnues. On rappelle qu'on peut le représenter par une équation matricielle $AX = B$ où A est la matrice (carrée) des coefficients, X le vecteur colonne des inconnues et B le vecteur colonne des seconds membres.

Rappel : Un système linéaire de n équations à n inconnues $AX = B$ est un système de Cramer si sa matrice associée A est inversible, et alors il admet une unique solution : $X = A^{-1}B$ (cf. chapitre 21).

Proposition. Un système linéaire de n équations à n inconnues $AX = B$ est un système de Cramer si et seulement si $\det(A) = 0$, et alors les solutions $x_1, \dots, x_n$ sont données par :

$$\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], x_i = \frac{\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & i & & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,i-1} & b_{n-1} & a_{n-1,i+1} & \cdots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{array}}{\det(A)}$$

En d'autres termes, pour tout i, x_i est obtenu en remplaçant la i-ième colonne de A par le vecteur colonne B des seconds membres, en prenant le déterminant, et en divisant par $\det(A)$. En particulier, si le système est homogène i.e. si $B = 0$, alors le vecteur colonne nul est la seule solution.

Démonstration. Un système est de Cramer si sa matrice associée est inversible, ce qui est équivalent au fait d'avoir un déterminant non nul. Supposons donc que c'est le cas. Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Notons D_i le numérateur de la proposition (le gros déterminant). Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs colonnes de A si bien que $D_i = \det(C_1, \dots, C_{i-1}, B, C_{i+1}, \dots, C_n)$

(la base est la base canonique de $\mathbb{K}^n$). Or, $AX = B$ donc $B = x_1C_1 + x_2C_2 + \cdots x_nC_n$ (cf. paragraphe III.3.c du chapitre 21, mais cela très bien en faisant le produit avec les mains). Par n-linéarité du déterminant :

$$D_i = \sum_{k=1}^{n} x_k \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_k, C_{i+1}, \dots, C_n)$$

Si $k \neq i$, le terme ci-dessus contient deux fois la colonne C_k donc le déterminant est nul en utilisant le caractère alterné du déterminant. Il ne reste donc que le terme d'indice i si bien que

$$D_i \quad = \quad x_i \det(C_1, \dots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \dots, C_n) = x_i \det(A) \qquad \square$$

si bien que $x_i = D_i/\det(A)$ ce qui est le résultat voulu.

Exemple : On veut résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2 & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & + & 3y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & - & y & + & 3z & = & 3 \end{array}\right.$$

On pourrait bien sûr appliquer la méthode du pivot de Gauß, mais nous allons appliquer la proposition précédente. La matrice associée au système est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Avec la règle de Sarrus, on trouve $\det(A) = 44$. On a donc un système de Cramer et les solutions sont :

- $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{44} = 1.$
- $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix}}{44} = 1.$
- $z = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{44} = 0.$

Remarque : On peut se demander la pertinence du résultat précédent sachant qu'un déterminant est assez long à calculer. D'une part, cela n'est pas forcément vrai pour des matrices de petite taille (voir l'exemple ci-dessus où les calculs sont assez raisonnables), et d'autre part, comme dans le chapitre 21, ce résultat a surtout une importance théorique : on sait qu'il y a une solution unique, donc si on a une solution c'est la seule. Comme avant, raisonnement classique : si la solution nulle est solution (si le système est homogène) et si le système est de Cramer, c'est la seule !