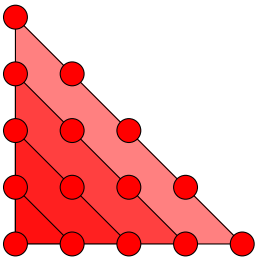
Correction du DM n°3

Exercice 1 :

Partie II. Nombres triangulaires :

1 Représentons T_5 :



Dès lors $$\boxed{\mathrm{T}_1 = 1, \mathrm{T}_2 = 3, \mathrm{T}_3 = 6 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_5 = 15}$$

2 En regardant les nombres triangulaires, on voit que

$$\boxed{\mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} k}$$

3 D'après le cours

$$\boxed{\mathrm{T}_n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T}_{100} = 5050}$$

Partie III. Nombres pentagonaux & Cie :

1 Comme écrit dans l'énoncé, la quatrième couronne est la somme d'une boule (le point de départ) et de trois côtés de trois boules chacun. Si on regarde l'énoncé, la troisième couronne est la somme d'une boule (le point de départ) et de trois côtés de deux boules chacun. La deuxième couronne est la somme d'une boule et de trois côtés d'une boule chacun, tandis que si on dessine la cinquième couronne, celle-ci est la somme d'une boule et de trois côtés de quatre boules chacun. Ainsi,

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad \mathrm{P}_n = \sum_{k=1}^{n} (1 + 3(k-1))}$$

Par conséquent, par linéarité de la somme, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \sum_{k=1}^{n} 1 + 3\sum_{k=1}^{n} k - 3\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= n + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - 3n \\
\mathrm{P}_n &= \frac{2n + 3n^2 + 3n - 6n}{2}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $$\boxed{\mathrm{P}_n = \frac{3n^2 - n}{2}}$$

> On remarque que pour $n = 1, 2, 3$ ou 4, on retrouve les valeurs de l'énoncé. Encore une fois, vérifier la cohérence de ses résultats permet d'éviter des erreurs bêtes !

2 Soit $n \geqslant 1$. Avec le même raisonnement, on trouve

$$\boxed{\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} (1 + 4(k-1)) = 2n^2 - n \qquad \text{et} \qquad \mathrm{O}_n = \sum_{k=1}^{n} (1 + 6(k-1)) = 3n^2 - 2n}$$

> Encore une fois, il ne coûte pas très cher de vérifier qu'on retrouve bien $\mathrm{H}_4 = 28$ et $\mathrm{O}_3 = 21$.

3 Soit $n \geqslant 1$. Avec exactement le même raisonnement,

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_n &= \sum_{k=1}^{n} (1 + (\mathrm{C}-2)(k-1)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{C}-2)k - (\mathrm{C}-3)) \\
&= (\mathrm{C}-2)\sum_{k=1}^{n} k - (\mathrm{C}-3)\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= (\mathrm{C}-2) \times \frac{n(n+1)}{2} - (\mathrm{C}-3)n \\
\mathrm{X}_n &= \frac{(\mathrm{C}-2)n^2 + (\mathrm{C}-2)n - 2(\mathrm{C}-3)n}{2}
\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad \mathrm{X}_n = \frac{(\mathrm{C}-2)n^2 - (\mathrm{C}-4)n}{2}}$$

> Là non plus, cela ne coûte rien de vérifier que pour $\mathrm{C} = 4, 5, 6$ ou 8, on retrouve bien les valeurs obtenues aux questions précédentes.

En particulier,

$$\boxed{\text{Le } 10^e \text{ nombre triskaidécagonal est } \frac{(13-2) \times 10^2 - (13-4) \times 10}{2} = 505}$$

> 17 est somme de deux carrés. En effet, $17 = 4^2 + 1^2$. Cependant, 19 ne peut pas s'écrire comme somme de deux carrés. Par contre, il peut s'écrire comme somme de trois carrés :
>
> $$19 = 3^2 + 3^2 + 1^2$$
>
> Là encore, ce n'est pas le cas de tous les nombres : 15 ne peut pas s'écrire comme somme de trois carrés. Par contre, il peut s'écrire comme somme de quatre carrés :
>
> $$15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$
>
> Et, cette fois, cela marche pour tous les entiers : Lagrange a montré en 1770 que tout nombre entier pouvait s'écrire comme somme d'au plus quatre carrés (ou, ce qui est la même chose, comme somme de quatre nombres carrés). Par exemple,
>
> $$100 = 9^2 + 3^2 + 3^2 + 1^2$$
>
> Gauß a pour sa part montré en 1796 que tout nombre entier pouvait s'écrire comme somme d'au plus trois nombres triangulaires. Par exemple,
>
> $$17 = 10 + 6 + 1 = \mathrm{T}_4 + \mathrm{T}_3 + \mathrm{T}_1$$
>
> Ce sont en fait des cas particuliers d'un théorème plus général, appelé *théorème de Fermat-Cauchy* :
>
> **Théorème de Fermat-Cauchy :** Tout nombre entier peut s'écrire comme somme d'au plus C nombres C-gonaux.

Un nombre C-gonal est un nombre construit sur le même principe que dans ce problème, où C est le nombre de côtés du polygone utilisé pour la construction. Par exemple, un nombre pentagonal est aussi appelé nombre 5-gonal. Ainsi, en particulier, tout entier peut s'écrire comme somme d'au plus cinq nombres pentagonaux. Les théorèmes de Lagrange et Gauß sont donc respectivement des cas particuliers du théorème de Fermat-Cauchy pour $C = 4$ et $C = 3$.

Ce théorème a été énoncé par Fermat en 1638 (qui avait annoncé qu'il publierait une preuve dans une oeuvre ultérieure, ce qu'il n'a jamais fait, décidément !) et a finalement été démontré dans le cas général (c'est-à-dire pas seulement pour $C = 3$ et 4) par Cauchy en 1813.

4 C'est très classique : on met au numérateur et au dénominateur le terme dominant, on simplifie, et c'est bon ! Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\frac{X_n}{n^2} &= \frac{(C-2)n^2 - (C-4)n}{2n^2} \\ &= \frac{n^2 \times \left(C - 2 - \dfrac{C-4}{n}\right)}{n^2 \times 2} \\ \frac{X_n}{n^2} &= \frac{C - 2 - \dfrac{C-4}{n}}{2}\end{aligned}$$

En conclusion

$$\boxed{\frac{X_n}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{C-2}{2}}$$

Puisque c'est une forme indéterminée très simple, on peut donner le résultat directement sans justification.

IV. Points du tétraède à coordonnées entières

1 C'est immédiat en regardant le dessin (chaque étage comporte un nombre de boules égal au nombre triangulaire associé) :

$$\boxed{\theta_n = \sum_{k=1}^{n} T_k}$$

2 D'après la question 3 de la partie II,

$$\begin{aligned}\theta_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \\ \theta_n &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{12}\end{aligned}$$

Soit, finalement, après développement

$$\boxed{\theta_n = \frac{2n^3 + 6n^2 + 4n}{12} = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6}}$$

De plus, de même que dans la partie précédente en mettant le terme dominant n^3 en facteur, il vient

$$\boxed{\frac{\theta_n}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{6}}$$

Les nombres θ_n sont appelés *nombres tétraédriques* (on se demande bien pourquoi...). Il y a un résultat analogue au théorème de Fermat-Cauchy pour les nombres tétraédriques, mais il n'a pas encore été démontré. Il s'agit de la *conjecture de Pollock*, énoncée par Frederick Pollock en 1850 :

> **Conjecture de Pollock :** Tout nombre entier peut s'écrire comme somme d'au plus 5 nombres tétraédriques.

Exercice 2 :

1.(a) Soient a et b deux réels et $j \geqslant 1$. Alors :

$$\frac{a}{j} + \frac{b}{j+1} = \frac{(a+b)j + a}{j(j+1)}$$

Par conséquent, a et b conviennent si et seulement si $a + b = 0$ et $a = 1$ si et seulement si :

$$\boxed{a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = -1}$$

Attention, a et b ne doivent pas dépendre de j !

1.(b) Soit $n \geqslant 1$. On note comme d'habitude S_n la somme du membre de gauche. Remplaçons w_j par sa valeur et intervertissons les deux sommes ainsi obtenues :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} \times \sum_{k=1}^{j} k u_k \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{k u_k}{j(j+1)} \\
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{k u_k}{j(j+1)}
\end{aligned}$$

À présent, sortons $k u_k$ de la deuxième somme (puisque l'indice de sommation de cette somme est j) et appliquons la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} k u_k \sum_{j=k}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k u_k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right) && \text{par télescopage} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(u_k - \frac{k u_k}{n+1} \right) \\
\mathrm{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k u_k
\end{aligned}$$

par linéarité de la somme. C'est le résultat voulu, puisque la deuxième somme du membre de droite est par définition égale à w_n.

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{j(j+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right) - \frac{w_n}{n+1}}$$

1.(c) Les u_k étant positifs par définition, $w_n \geqslant 0$ et il suffit d'appliquer la question précédente (l'indice étant muet, qu'il soit noté j ou k ne change rien).

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{j(j+1)} \leqslant \sum_{j=1}^{n} u_j}$$

2.(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave donc en dessous de ses tangentes et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

2.(b) Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente,

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$$

En multipliant par n (positif), $$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant 1$$

Le résultat en découle, en composant cette inégalité par la fonction exponentielle (qui est croissante, et donc conserve les inégalités).

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e}$$

2.(c) Montrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, soit l'hypothèse

$$\mathrm{H}_n : « \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!} »$$

- Si $n = 1$, le terme de gauche et le terme de droite sont égaux à 2, en particulier ils sont égaux. En d'autres termes, H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \\
&= \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \times \frac{(n+1)^n}{n!} \\
&= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1) \times n!} \\
\prod_{k=1}^{n+1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k &= \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}$$

> On pouvait se passer de récurrence. En effet, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k}$$
$$= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)\times k^k}$$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}$$

Le premier produit est égal à $1/(n+1)! = 1/(n!\times(n+1))$ et le second à $(n+1)^{n+1}/1^1$ (c'est un produit télescopique) ce qui permet de conclure.

Soit $k\in[\![1\,;\,n]\!]$. D'après la question précédente,

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e$$

Par produit (rappelons que l'on peut multiplier les inégalités **positives**) on a le résultat voulu :

$$\boxed{\frac{(n+1)^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant \prod_{k=1}^{n} e = e^n}$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité précédente par $n!/e^n$,

$$\frac{(n+1)^n}{e^n} \leqslant n!$$

La fonction $x\mapsto x^{1/n}$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient la minoration suivante

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\qquad \frac{n+1}{e}\leqslant (n!)^{1/n}}$$

3.(a) Par définition des a_k,

Or,
$$a_1\times\cdots\times a_j = (1u_1)\times(2u_2)\times\cdots\times(ju_j)$$
$$= (1\times 2\times\cdots\times j)\times(u_1\times\cdots\times u_j)$$

c'est-à-dire
$$\boxed{a_1\times\cdots\times a_j = j!\times(u_1\times\cdots\times u_j)}$$

3.(b) Par définition de w_j,

$$\boxed{\frac{a_1+\cdots+a_j}{j} = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} k u_k = \frac{w_j}{j}}$$

3.(c) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique aux a_k, on a

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_j}{j}\right)^j \geqslant a_1\times\cdots\times a_j$$

Par conséquent, d'après les questions 3.(a) et 3.(b)

$$j!\times(u_1\times\cdots\times u_j)\leqslant\left(\frac{w_j}{j}\right)^j$$

Il suffit ensuite de diviser par $j!$ (positif) et de composer par $x\mapsto x^{1/j}$ (fonction croissante) pour obtenir le résultat voulu.

$$\boxed{(u_1\cdots u_j)^{1/j}\leqslant\frac{w_j}{j\times(j!)^{1/j}}}$$

4 En sommant l'inégalité obtenue à la question précédente pour j allant de 1 à n, il vient

$$\sum_{j=1}^{n}(u_1\cdots u_j)^{1/j} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j\times (j!)^{1/j}}$$

Soit $j \in [\![1\,;\, n]\!]$. D'après la question 2.(c), $(j!)^{1/j} \geqslant (j+1)/e$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{(j!)^{1/j}} \leqslant \frac{e}{j+1}$$

En multipliant cette inégalité par w_j/j qui est positif, et en sommant, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j\times (j!)^{1/j}} \leqslant e\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j(j+1)}$$

Enfin, à l'aide de la question 1.(c), il vient

$$e\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j(j+1)} \leqslant e\sum_{j=1}^{n}u_j$$

On a donc les trois inégalités suivantes

$$\sum_{j=1}^{n}(u_1\cdots u_j)^{1/j} \leqslant \sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j\times (j!)^{1/j}} \leqslant e\sum_{j=1}^{n}\frac{w_j}{j(j+1)} \leqslant e\sum_{j=1}^{n}u_j$$

En conclusion $$\boxed{\sum_{j=1}^{n}(u_1\cdots u_j)^{1/j} \leqslant e\sum_{j=1}^{n}u_j}$$

> On peut montrer que e est la plus petite constante qui convient, c'est-à-dire que si
> $$\sum_{j=1}^{n}(u_1\cdots u_j)^{1/j} \leqslant \mathrm{C}\sum_{j=1}^{n}u_j$$
> pour toute suite positive (u_n) et pour tout entier n, alors $\mathrm{C} \geqslant e$.

Problème :

Partie A. Le tri par sélection.

Il suffit de dérouler les calculs de sommes. Soit $n \geqslant 2$,

$$\mathrm{C}_n = a + \sum_{i=0}^{n-2}(b + c(n-i-1))$$

$$= a + \sum_{i=0}^{n-2}b + \sum_{i=0}^{n-2}c(n-1) - c\sum_{i=0}^{n-2}i \qquad \text{(par linéarité de la somme)}$$

$$\mathrm{C}_n = a + (n-1)b + c(n-1)^2 - c\times\frac{(n-2)(n-1)}{2}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{C}_n = a + (n-1)b + c\times\frac{n(n-1)}{2}}$$

Partie B. L'exponentiation rapide à coûts bilinéaires.

1 C'est immédiat.

$$\boxed{\mathrm{C}_2 = 1, \mathrm{C}_3 = 3, \mathrm{C}_4 = 5, \mathrm{C}_5 = 9}$$

2 Faisons un raisonnement par récurrence.

- Si $n > 0$, soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{C}_n < \mathrm{C}_{n+1} \text{ »}$$

- D'après la question précédente, $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3$ et H_4 sont vraies.
- Soit n quelconque $\geqslant 4$. Supposons $\mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n$ vraies (on fait une récurrence forte, on explique pourquoi un peu plus loin) et montrons que H_{n+1} est vraie. Examinons deux cas, suivant la parité de $n+1$.

  – Premier cas : $n+1$ est pair. Il existe alors $p > 0$ tel que $n+1 = 2p$. En particulier, $n+2 = 2p+1$. Par définition de la suite (C_n),

$$\mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_{2p} = \mathrm{C}_p + p^2 < \mathrm{C}_p + p^2 + 2p = \mathrm{C}_{2p+1} = \mathrm{C}_{n+2}$$

> Remarquons qu'on n'a pas eu besoin de l'hypothèse de récurrence dans ce cas.

  – Deuxième cas : $n+1$ est impair. Il existe alors $p > 0$ tel que $n+1 = 2p+1$, et donc tel que $n+2 = 2p+2 = 2(p+1)$. Par conséquent :

$$\begin{cases} \mathrm{C}_{n+1} = \mathrm{C}_{2p+1} = \mathrm{C}_p + p^2 + 2p \\ \mathrm{C}_{n+2} = \mathrm{C}_{2(p+1)} = \mathrm{C}_{p+1} + (p+1)^2 = \mathrm{C}_{p+1} + p^2 + 2p + 1 \end{cases}$$

  Or, par hypothèse de récurrence, H_p est vraie (et c'est là qu'on a besoin d'une récurrence forte, si vous n'y avez pas pensé lors du début de la récurrence, vous y pensez ici et revenez sur vos pas dans votre copie), ce qui implique que $\mathrm{C}_p < \mathrm{C}_{p+1}$ et donc que $\mathrm{C}_{n+1} < \mathrm{C}_{n+2}$.

  En d'autres termes, dans tous les cas, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n > 0$.

$$\boxed{\forall n > 0, \qquad \mathrm{C}_n < \mathrm{C}_{n+1}}$$

3 Faisons là aussi une récurrence forte sur n.

- Si $n \in \mathbb{N}$, soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{C}_n \leqslant \frac{n^2+2n}{3} \text{ »}$$

- D'après la question 1, $\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \mathrm{H}_4$ et H_5 sont vraies.
- Soit n quelconque $\geqslant 5$. Supposons $\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_n$ soient vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. Comme dans la question précédente, examinons deux cas, suivant la parité de $n+1$.

  – Premier cas : $n+1$ est pair. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2p$. Par définition de la suite (C_n)

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{n+1} &= \mathrm{C}_{2p} \\ &= \mathrm{C}_p + p^2 \\ &\leqslant \frac{p^2+2p}{3} + p^2 && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &\leqslant \frac{4p^2+2p}{3} \\ &\leqslant \frac{(2p)^2+4p}{3} && \text{(car } 4p \geqslant 2p\text{)} \\ \mathrm{C}_{n+1} &\leqslant \frac{(n+1)^2+2(n+1)}{3} \end{aligned}$$

– Deuxième cas : $n+1$ est impair. Il existe alors $p \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2p+1$. Par définition de la suite (C_n)

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{n+1} &= \mathrm{C}_{2p+1} \\
&= \mathrm{C}_p + p^2 + 2p \\
&\leqslant \frac{p^2+2p}{3} + p^2 + 2p && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \frac{4p^2+8p}{3} \\
&\leqslant \frac{4p^2+4p+1+2\times(2p+1)}{3} && \text{(car } 3>0\text{...)} \\
\mathrm{C}_{n+1} &\leqslant \frac{(2p+1)^2+2\times(2p+1)}{3}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, dans tous les cas, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n > 0$.

$$\boxed{\forall n > 0, \qquad \mathrm{C}_n \leqslant \frac{n^2+2n}{3}}$$

Partie C. Le tri rapide.

1 On veut changer un $n-k$ en k : il suffit donc de casser la somme en deux en utilisant la linéarité et de faire le changement d'indice $i = n-k$. Pour tout $n \geqslant 2$, par linéarité de la somme

$$\lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{C}_k + \mathrm{C}_{n-k}) = \lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_{n-k}$$

Faisons le changement d'indice $i = n-k$ dans la seconde somme :

$$\lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{C}_k + \mathrm{C}_{n-k}) = \lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_k + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{C}_i$$

La variable étant muette, on peut écrire

$$\lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{C}_k + \mathrm{C}_{n-k}) = \lambda \times n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{C}_k$$

ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

> Si vous êtes à l'aise avec les changements d'indices, vous pouvez faire le changement $k = n-k$, mais attention aux confusions !

2 Ce résultat se montre par une récurrence forte (on le voit directement car, en regardant la définition de α_n, on a besoin du fait que $\alpha_k \geqslant \mathrm{C}_k$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$).

$$\boxed{\text{Je vous la laisse.}}$$

3 Ici, pas besoin de récurrence. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
n\alpha_n &= \lambda \times n^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_k \\
&= \lambda \times n^2 + 2\alpha_{n-1} + 2\sum_{k=1}^{n-2}\alpha_k \\
&= \lambda \times n^2 + 2\alpha_{n-1} + (n-1)\times\frac{2}{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\alpha_k \\
n\alpha_n &= \lambda \times n^2 + 2\alpha_{n-1} + (n-1)\times(\alpha_{n-1} - \lambda\times(n-1))
\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{n\alpha_n = (n+1)\alpha_{n-1} + (2n-1)\lambda}$$

4 D'après la question précédente, en divisant par $n(n+1)$:

$$\boxed{\beta_n = \beta_{n-1} + \frac{(2n-1)\lambda}{n(n+1)}}$$

5 C'est immédiat en utilisant la question précédente et en itérant :

$$\boxed{\beta_2 = \beta_1 + \frac{(2\times 2-1)\lambda}{2(2+1)} \qquad \text{et} \qquad \beta_3 = \beta_1 + \frac{(2\times 3-1)\lambda}{3(3+1)} + \frac{(2\times 2-1)\lambda}{2(2+1)}}$$

6 On montre par une récurrence immédiate (l'idée vient de la question précédente, et on voit l'intérêt de ne pas simplifier les produits et de ne pas mettre λ en facteur) :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2, \qquad \beta_n = \beta_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{(2k-1)\lambda}{k(k+1)}}$$

7 f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition (on le reverra lors du chapitre sur la dérivation, sinon vous pouvez juste dire que c'est un quotient de fonctions dérivables), c'est-à-dire $\mathbb{R}\backslash\{0,-2\}$. Soit $x \in \mathrm{D}_f$.

$$f'(x) = \frac{2x(x+1)-(2x+1)(2x-1)}{x^2(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-4x^2+1}{x^2(x+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+1}{x^2(x+1)^2}$$

Les racines du numérateur sont $x_{1,2} = (1\pm\sqrt{3})/2$ et on sait qu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant sauf entre ses racines. On en déduit le tableau de signes de f' et le tableau de variations de f.

	$-\infty$		-1		x_1		0		x_2		$+\infty$
$-2x^2+2x+1$		$-$			0		$+$		0	$-$	
$x^2(x+1)^2$		$+$	0			$+$	0	$+$			
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

8 Soient a et b deux réels, et soit $x \neq 0, 1$.

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$$

a et b conviennent si et seulement si $a=-1$ et $a+b=2$ si et seulement si :

$$\boxed{a=-1, b=3}$$

9 D'après la question 6, la majoration intégrale (qu'on prouve comme en TD), et comme $f(2)=1/2$:

$$\boxed{\beta_n = \beta_1 + \lambda\sum_{k=2}^{n} f(k) = \beta_1 + \lambda f(2) + \lambda\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \beta_1 + \frac{\lambda}{2} + \lambda\int_2^n f(t)\,\mathrm{d}t}$$

10 Calculons l'intégrale de la majoration ci-dessus. Notons-la I_n pour plus de facilité.

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_2^n \left(\frac{-1}{t} + \frac{3}{t+1}\right)\mathrm{d}t && \text{D'après la question 8}\\
&= -\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + 3\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t+1} && \text{Par linéarité de l'intégrale}\\
&= -\left[\ln(t)\right]_2^n + 3\left[\ln(t+1)\right]_2^n\\
\mathrm{I}_n &= -\ln(n) + \ln(2) + 3\ln(n+1) - 3\ln(3)
\end{aligned}$$

Il en découle que $\mathrm{I}_n \leqslant 3\ln(n+1)+\ln(2)-3\ln(3)$ et donc que

$$\boxed{\beta_n \leqslant 3\lambda\ln(n+1)+\mathrm{A} \text{ avec } \mathrm{A}=\beta_1+\lambda\left(\frac{1}{2}+\ln(2)-3\ln(3)\right)}$$

11 Par définition de β_n et d'après la question précédente

$$\alpha_n \leqslant (n+1)\times(3\lambda\ln(n+1)+\mathrm{A})$$

Or, $(n+1)\leqslant 2n$, ce qui implique que $\alpha_n \leqslant 2n\,(3\lambda\ln(n)+3\lambda\ln(2)+\mathrm{A})$. De plus, $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En particulier, $3\lambda\ln(2)+\mathrm{A}\leqslant\ln(n)$ pour n assez grand. Par conséquent, pour n assez grand,

$$\alpha_n \leqslant 2n\times(3\lambda\ln(n)+\ln(n)) = (6\lambda+2)n\ln(n)$$

Il suffit d'utiliser la question 2 pour conclure.

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \mathrm{C}_n \leqslant (6\lambda+2)n\ln(n)}$$

> La majoration de la somme par l'intégrale est assez fine, c'est une méthode que nous reverrons, mais ensuite nous n'avons pas été du tout subtils, on peut faire beaucoup mieux. En effet, nous majoré $-\ln(n-1)$ par 0, ce qui est une perte d'information importante quand n est grand.

Partie D. L'algorithme de Karatsuba.

1.(a) Par définition de la suite (C_n) :

$$\begin{cases} \mathrm{C}_2 \leqslant 3\mathrm{C}_1+\mathrm{A}+\mathrm{B} \\ \mathrm{C}_4 \leqslant 3\mathrm{C}_2+2\mathrm{A}+\mathrm{B} \leqslant 9\mathrm{C}_1+\mathrm{A}(3+2)+\mathrm{B}(3+1) \\ \mathrm{C}_8 \leqslant 3\mathrm{C}_4+4\mathrm{A}+\mathrm{B} \leqslant 27\mathrm{C}_1+\mathrm{A}(9+6+4)+\mathrm{B}(9+3+1) \end{cases}$$

ce qui donne le résultat voulu en factorisant par 4 dans la parenthèse en facteur de A.

$$\boxed{\mathrm{C}_8 \leqslant 27\mathrm{C}_1+4\mathrm{A}\left(1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)+\mathrm{B}(1+3+9)}$$

1.(b) D'après la question précédente, on pense à montrer le résultat suivant par récurrence :

$$\forall k\geqslant 1,\qquad \mathrm{C}_{2^k} \leqslant 3^k\mathrm{C}_1+2^{k-1}\times\mathrm{A}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i+\mathrm{B}\sum_{i=0}^{k-1}3^i$$

- Si $k\geqslant 1$, soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{H}_k : \text{« } \mathrm{C}_{2^k} \leqslant 3^k\mathrm{C}_1+2^{k-1}\times\mathrm{A}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i+\mathrm{B}\sum_{i=0}^{k-1}3^i \text{ »}$$

- D'après la question précédente, $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ et H_3 sont vraies.
- Soit k quelconque $\geqslant 3$ tel que H_k soit vraie, montrons que H_{k+1} est vraie. Par hypothèse sur la suite (C_n) :

$$\mathrm{C}_{2^{k+1}} \leqslant 3\times\mathrm{C}_{2^k}+2^k\mathrm{A}+\mathrm{B}$$

  Par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{2^{k+1}} &\leqslant 3\left(3^k\mathrm{C}_1 + 2^{k-1}\times \mathrm{A}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i + \mathrm{B}\sum_{i=0}^{k-1}3^i\right) + 2^k\mathrm{A} + \mathrm{B} \\
&\leqslant 3^{k+1}\mathrm{C}_1 + \mathrm{A}\left(3\times 2^{k-1}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i + 2^k\right) + \mathrm{B}\left(3\sum_{i=0}^{k-1}3^i + 1\right) \\
&\leqslant 3^{k+1}\mathrm{C}_1 + 2^k\mathrm{A}\left(\frac{3}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i + 1\right) + \mathrm{B}\left(\sum_{i=0}^{k-1}3^{i+1} + 1\right) \\
&\leqslant 3^{k+1}\mathrm{C}_1 + 2^k\mathrm{A}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{i+1} + 1\right) + \mathrm{B}\left(\sum_{i=0}^{k-1}3^{i+1} + 1\right) \\
&\leqslant 3^{k+1}\mathrm{C}_1 + 2^k\mathrm{A}\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^{i} + 1\right) + \mathrm{B}\left(\sum_{i=1}^{k}3^{i} + 1\right) \\
\mathrm{C}_{2^{k+1}} &\leqslant 3^{k+1}\mathrm{C}_1 + 2^k\mathrm{A}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{3}{2}\right)^i + \mathrm{B}\sum_{i=0}^{k}3^i
\end{aligned}$$

Donc H_{k+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \geqslant 1$:

$$\forall k \geqslant 1 \qquad \mathrm{C}_{2^k} \leqslant 3^k\mathrm{C}_1 + 2^{k-1}\times \mathrm{A}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{3}{2}\right)^i + \mathrm{B}\sum_{i=0}^{k-1}3^i$$

Il ne reste à présent qu'à nous débarrasser du signe $\sum$. Il suffit pour cela de voir que les deux sommes sont des sommes de suites géométriques de raisons différentes de 1.

$$\mathrm{C}_{2^k} \leqslant 3^k\mathrm{C}_1 + 2^{k-1}\times \mathrm{A}\times \frac{1-\left(\dfrac{3}{2}\right)^k}{1-\dfrac{3}{2}} + \mathrm{B}\times\frac{1-3^k}{1-3}$$

En développant le 2^{k-1} au numérateur de A et en simplifiant les deux dénominateurs (diviser par $-1/2$ revient à multiplier par -2), il vient finalement

$$\boxed{\mathrm{C}_{2^k} \leqslant 3^k\mathrm{C}_1 + \mathrm{A}\times(3^k-2^k) + \mathrm{B}\times\frac{3^k-1}{2}}$$

1.(c) Soit $k \geqslant 1$. On a

$$\boxed{\frac{\alpha_k}{3^k} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{A} - \mathrm{A}\times\left(\frac{2}{3}\right)^k + \frac{\mathrm{B}}{2} - \frac{\mathrm{B}}{2}\times\frac{1}{3^k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathrm{C}_1 + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2}}$$

1.(d) On pose L la limite de la question précédente. $\alpha_k/3^k \leqslant \mathrm{L}+1$ pour k assez grand, et puisque $\mathrm{C}_{2^k} \leqslant \alpha_k$ on a le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \mathrm{C}_{2^k} \leqslant \mathrm{M}\times 3^k \text{ avec } \mathrm{M} = \mathrm{C}_1 + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{B}}{2} + 1}$$

1.(e) En passant à l'exponentielle, on a $n = e^{k\ln(2)}$ ce qui implique que

$$\boxed{k = \ln(n)/\ln(2)}$$

Dès lors, $3^k = e^{k\ln(3)} = e^{\ln(n)\times\frac{\ln(3)}{\ln(2)}} = n^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$. En d'autres termes,

$$\boxed{3^k = n^\alpha \text{ avec } \alpha = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}}$$

1.(f) La fonction ln étant strictement croissante, $\ln(3) < \ln(4)$. D'où

$$\boxed{\alpha < \frac{\ln(4)}{\ln(2)} : \alpha - 2 < 0}$$

2.(a) Soit $k \in \mathbb{Z}$. La fonction ln étant strictement croissante et $\ln(2)$ strictement positif, k convient si et seulement si $k \leqslant \dfrac{\ln(n)}{\ln(2)} < k+1$. En d'autres termes :

$$\boxed{k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(2} \right\rfloor \text{ convient.}}$$

2.(b) D'après le cours :

$$\boxed{\frac{\ln(n)}{\ln(2)} - 1 < k \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(2)}}$$

2.(c) La suite (C_n) étant croissante, $\mathrm{C}_{2^k} \leqslant \mathrm{C}_n \leqslant \mathrm{C}_{2^{k+1}}$. Pour k et donc n assez grands, d'après la question 1.(d)

$$\mathrm{C}_{2^{k+1}} \leqslant \mathrm{M} \times \left(2^{k+1}\right)^\alpha = \mathrm{M} \times \left(2 \times 2^k\right)^\alpha$$

Or, $2^k \leqslant n$ ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \mathrm{C}_n \leqslant \mathrm{M} \times (2n)^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}}$$

Faisons une remarque (pas du tout obligatoire, cela va sans dire) sur les calculs de complexité. Comme dit dans l'énoncé, on cherche à évaluer le coût d'un algorithme en fonction de la taille de l'entrée. Par exemple, si on a un tableau à n éléments, on cherche le nombre d'échanges et de comparaisons à effectuer pour le trier, ou si on a deux polynômes de degré n, on cherche le nombre de multiplications et d'additions à effectuer pour donner le produit de ces deux polynômes. Donnons quelques exemples.

- Le plus simple : donner la valeur d'un polynôme en un point. Imaginons qu'on dispose d'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré n qu'on note $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + a_2\mathrm{X}^2 + \cdots + a_n\mathrm{X}^n$ et qu'on cherche à calculer $\mathrm{P}(2)$. La méthode naïve consiste à calculer $2^2, \dots, 2^n$ (on effectue $n-1$ multiplications puisqu'on commence par faire 2×2 et qu'à chaque fois on multiplie la puissance précédente par 2), puis à calculer $a_1 \times 2, a_2 \times 2^2, \dots, a_n \times 2^n$ (on effectue n multiplications), et enfin à sommer $a_0, a_1 \times 2, \dots, a_n \times 2^n$, c'est-à-dire qu'en tout on effectue $2n-1$ multiplications et n additions, donc en tout $3n-1$ opérations (en pratique, les multiplications coûtent plus cher que les additions et les multiplications n'ont pas un coût fixe, puisque plus les entiers sont « gros », plus les multiplier coûte cher, cf ci-dessous). Il y a une façon plus rapide de le faire, qui s'appelle l'algorithme de Hörner. Il suffit de voir que

$$\mathrm{P} = a_0 + \mathrm{X} \times (a_1 + \mathrm{X} \times (a_2 + \mathrm{X} \times (a_3 + \cdots + \mathrm{X} \times (a_n) \cdots)))$$

  Sur un exemple, cela donne :

$$3 + 4\mathrm{X} + 5\mathrm{X}^2 - \mathrm{X}^3 + 10\mathrm{X}^4 = 3 + \mathrm{X}(4 + \mathrm{X}(5 + \mathrm{X}(-1 + \mathrm{X} \times 10)))$$

  Cette fois, si on veut calculer $\mathrm{P}(2)$, il faut faire la multiplication $2 \times a_n$, puis ajouter a_{n-1}, puis multiplier par 2 et ajouter a_{n-2}, et ainsi de suite, ce qui donne n multiplications et n additions, soit $2n$ opérations élémentaires, dont seulement n multiplications (rappelons qu'elles coûtent plus cher que les additions), ce qui est quand même mieux !

- La multiplication « à l'école primaire » : supposons qu'on dispose de deux entiers A et B à n chiffres, notés $\mathrm{A} = a_1a_2\dots a_n$ et $\mathrm{B} = b_1b_2\dots b_n$ où les a_i et b_i sont des entiers compris entre 0 et 9. Imaginons qu'on veuille faire la multiplication $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ (à l'aide de tables de multiplications difficilement apprises...) comme à l'école primaire : on multiplie $a_1, \dots, a_n$ par b_1, puis on multiplie $a_1, \dots, a_n$ par b_2, et ainsi de suite jusque b_n (pour simplifier, on ne s'intéresse pas aux retenues). Cela fait n^2 multiplications, et ensuite on somme les n entiers obtenus et cela fait n^2+n opérations. Puisque n est très petit devant n^2 quand n est grand, on dit que le coût de l'algorithme est de l'ordre de n^2. C'est la même chose si l'on veut faire le produit de deux polynômes de degré $n-1$, disons

$$\mathrm{P}=\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}=\sum_{k=0}^{n-1} b_k \mathrm{X}^k$$

On multiplie d'abord Q par a_0 (ce qui fait n multiplications) puis par $a_1\mathrm{X}$ et ainsi de suite. Le nombre d'opérations est de l'ordre de n^2, ce qui n'est pas terrible (voir plus bas). En comparaison, sommer deux nombres à n chiffres revient essentiellement à lire les n chiffres, et donc la complexité a un ordre de grandeur de n.

- Le tri par sélection : c'est un tri très facile à comprendre et à programmer. Disons que l'on dispose d'un tableau que l'on souhaite trier dans l'ordre croissant (par exemple, la liste des notes du devoir). Alors on regarde toutes les notes du tableau, (n comparaisons) et on place la plus petite au début du tableau (1 échange), puis on regarde les autres notes ($n-1$ comparaisons à présent) et on place la plus petite restante en 2^e position (1 autre échange) et ainsi de suite. Si c est le coût d'une comparaison, b celui d'un échange, et a une constante dépendant de l'ordinateur, on a donné le coût de ce tri dans la première partie.
- Le tri rapide : c'est sans doute le tri le plus efficace en pratique. Expliquons son fonctionnement sans rentrer dans les détails, puisque cela devient un peu compliqué. On prend le premier élément du tableau, on met avant tous les éléments plus petits du tableau et on met après tous les éléments plus grands du tableau. On trie ensuite le tableau des éléments plus petits, celui des éléments plus grands en faisant de la même façon, et ensuite on recommence, jusqu'à ce que tous les tableaux soient triés, ce qui fait que le tableau initial l'est également.

  Illustrons sur un exemple en triant le tableau $\mathrm{T}=[4,3,8,7,6,9,5,1,2]$. Après la première étape, on récupère le tableau $[3,1,2,4,8,7,6,9,5]$. On veut ensuite trier les deux tableaux $\mathrm{D}=[3,1,2]$ et $\mathrm{U}=[8,7,6,9,5]$. Quand ils seront triés, le tableau T sera lui-aussi trié, et on aura terminé. Commençons par D. La même opération renvoie le tableau $[1,2,3]$, c'est-à-dire le tableau trié. Pour U, cette opération renvoie le tableau $[7,6,5,8,9]$. On doit à présent trier les tableaux $\mathrm{V}=[7,6,5]$ et $\mathrm{W}=[9]$ (celui-ci est déjà trié). Ensuite, pour V, on obtient $[6,5,7]$ ce qui fait qu'on doit trier $[6,5]$, et on obtient $[5,6]$. Passons à la fin : le tableau trié V est $[5,6,7]$, ce qui fait que le tableau trié U est $[5,6,7,8,9]$ et qu'enfin le tableau trié $\mathrm{T}=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]$.

  Il serait trop long et trop compliqué de compter les opérations, mais disons juste une chose : dans le pire des cas, ce tri a une complexité de l'ordre de n^2 (cela arrive quand le tableau est déjà trié, ce qui est le comble pour un tri !), ce qui fait qu'on n'a aucune amélioration par rapport au tri par sélection, mais on a montré dans ce devoir que, « la plupart du temps », on avait une complexité de l'ordre de $n\ln(n)$, ce qui est beaucoup mieux ! En fait, l'algorithme est d'autant plus rapide que le tableau initial est mélangé, ce qui fait qu'on commence par le mélanger avant de le trier !
- Enfin, sans trop non plus rentrer dans les détails, l'algorithme de Karatsuba est une méthode pour multiplier deux polynômes basée sur l'extraordinaire égalité :

  $$(\mathrm{P}_0+\mathrm{X}^m\mathrm{P}_1)\times(\mathrm{Q}_0+\mathrm{X}^m\mathrm{Q}_1)=\mathrm{T}_0+\mathrm{X}^m(\mathrm{T}_2-\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_0)+\mathrm{X}^{2m}\mathrm{T}_1$$

  où $\mathrm{T}_0=\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0, \mathrm{T}_1=\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ et $\mathrm{T}_2=(\mathrm{P}_0+\mathrm{P}_1)(\mathrm{Q}_0+\mathrm{Q}_1)$. L'intérêt est qu'on ne doit faire que trois multiplications au lieu de quatre, et donc on gagne du temps. Multiplier deux polynômes de degré $2n$ (complexité C_{2n}) est donc à peu près équivalent à faire trois produits de polynômes de degré n (complexité C_n). Les termes $\mathrm{A}n+\mathrm{B}$ du devoir viennent des sommes. On a montré que la complexité est de l'ordre de grandeur de $n^{\frac{\ln(3)}{\ln(2)}}\approx n^{1.58}$, ce qui est bien mieux que l'ordre de grandeur n^2 vu « à l'école primaire ».

Et la question qui tue, c'est : « à quoi ça sert ? » De façon générale, la multiplication est l'opération reine par excellence : des entiers, des polynômes, des matrices, elle intervient absolument partout dans les processeurs. Mais pourquoi inventer des algorithmes de tri ou de multiplication compliqués alors qu'on sait le faire de façon très simple ? Effectivement, pour effectuer à la main un produit de deux polynômes de degré 5 ou trier un tableau à 9 éléments, c'est inutile. Par contre, si on veut faire le produit de deux polynômes de degré 10000, ou trier un tableau à 1 million d'éléments, on peut se dire que (pour le premier) c'est plutôt une bonne chose d'effectuer environ $10^{4\times 1.58}\approx 10^6$ opérations plutôt que 10^8, ou (pour le deuxième) qu'il vaut mieux effectuer environ $10^6\times\ln(10^6)\approx 10^7$ plutôt que 10^{12} opérations.