Devoir Surveillé n°1

Préliminaires

1. (Question de cours) Définition de $\mathrm{sh}, \mathrm{ch}, \mathrm{th}$. Donner (en les démontrant) la dérivée de th ainsi que les limites en $\pm\infty$.
2. (Question de cours) Produit des nombres impairs entre 1 et $2n+1$ (démonstration).
3. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il existe deux fonctions g et h uniques telles que g soit constante, h soit nulle en 0, et telles que $f = g + h$.
4. Compléter : « Que d'hommes se sont craint..., déplu..., détesté..., nui..., haï..., succédé... ».

Exercice 1 - Logique

1. On note P l'ensemble des professeurs du lycée Faidherbe, S l'ensemble des professeurs de sciences physiques, E l'ensemble des élèves (toujours du lycée Faidherbe). Attention, on ne parle pas uniquement des élèves (ou professeurs) de prépa scientifique ! Si $x \in E$ et $y \in P$, $A(x,y)$ signifie : y est le professeur de x. Dire (en justifiant rapidement) si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

   (a) $\forall x \in E, \exists y \in P, A(x,y)$.
   (b) $\forall x \in E, \exists y \in S, A(x,y)$.
   (c) $\forall (x,y,z) \in E \times S^2, (A(x,y) \,\text{et}\, A(x,z)) \Rightarrow y = z$.
   (d) $\forall (x,y,z) \in E \times P^2, (A(x,y) \,\text{et}\, A(x,z)) \Rightarrow y = z$.
   (e) $\forall (x,y,z) \in E \times P^2, (A(x,z) \,\text{et}\, A(y,z)) \Rightarrow x = y$.
   (f) $\exists x \in E, \forall y \in P, A(x,y)$.

2. Lesquelles de ces affirmations sont vraies, lesquelles sont fausses ?

   (a) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x \leq y$.
   (b) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, x > y$.
   (c) $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{Z}, x > y$.
   (d) $\exists y \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{N}, x > y$.
   (e) $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, x \leq y$.
   (f) $\exists a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}, a \neq b$.
   (g) $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}, b = a^2$.
   (h) $\forall u \in \mathbb{N}, \forall v \in \mathbb{N}, (u \leq v) \,\text{ou}\, (v < u)$.
   (i) $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.
   (j) $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$.

3. Donner la négation de la dernière assertion de la question précédente.

Exercice 2 - 2023 est une année exceptionnelle

Le nombre 2023 possède une propriété remarquable : il est égal à la somme de ses chiffres multipliée par le carré de la somme des carrés de ces mêmes chiffres, c'est-à-dire que :

$$2023 = (2+0+2+3) \times \left(2^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2\right)^2$$

1. Vérifier que 2400 vérifie cette même condition.

   Dans la suite, on se donne n un entier (strictement positif) vérifiant cette condition et on note $k \geq 1$ son nombre de chiffres.

2. Montrer que $10^{k-1} \leq k^3 \times 9^5$.
3. Justifier rapidement que les nombres suivants sont tous strictement positifs :
   - $10^8 - 9^8$.
   - $\ln(10) \times 10^8 - 3 \times 9^7$.
   - $\ln(10)^2 \times 10^8 - 6 \times 9^6$.
   - $\ln(10)^3 \times 10^8 - 6 \times 9^5$.
4. Prouver que $k < 9$.

Exercice 3 - Récurrons :

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \leq 4^n$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, et soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\binom{n-k}{k} = 0$ dès que k assez grand.

   (b) On rappelle que la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k}$$

   On ne prêtera pas attention à la somme infinie : d'après la question précédente, les termes de la somme sont nuls pour k assez grand, donc la somme est en fait finie (et donc on pourra la manipuler comme telle sans se poser de questions).

Problème - Plusieurs équivalents.

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième nombre harmonique H_n et la fonction P_n par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad P_n : \begin{cases}]\,0\,;1\,[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \times \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k-x) \end{cases}$$

Dans sa grande mansuétude, le concepteur du sujet précise qu'aucune récurrence n'est attendue dans ce problème. Ainsi, le candidat n'aura pas à se creuser la tête pour trouver un nom pour ses hypothèses (H_n étant déjà pris...). On se donne dans tout le problème un entier $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque (ce n'est donc pas la peine de commencer vos réponses par « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ » puisque n est déjà défini).

Partie I - Équivalent de H_n et constante d'Euler.

Soient (u_n) et (v_n) les suites de terme général

$$u_n = H_n - \ln(n) \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

1. Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. On pourra remarquer qu'on a les égalités subtiles

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

2. En remarquant que $u_n \geq v_n$, montrer que la suite (u_n) est à valeurs positives.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente. **Sa limite sera notée γ dans la suite. En d'autres termes,**

$$u_n = H_n - \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

Partie II - Trois calculs (et demi) de limites.

1. En remarquant que $H_n = u_n + \ln(n)$, donner la limite de (H_n) puis montrer que $H_n/\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

2. On suppose dans cette question uniquement que $n \geq 2$ et on note

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} \qquad \text{et} \qquad B_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{H_j}{j(j+1)}$$

   (a) Donner deux réels a et b tels que pour tout $x \neq 0, 1$,

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x}$$

   (b) Montrer que pour tout $j \in [\![2\,; n]\!]$,

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{j(j-1)}$$

   (c) En déduire que $A_n \leq 2$ puis que la suite (A_n) converge. **On admet que sa limite est égale à** $\pi^2/6$.

   (d) À l'aide de la question 2.(a), montrer que $B_n = A_n - \dfrac{H_n}{n+1}$.

   (e) Donner finalement la limite de la suite (B_n). On pourra utiliser la question 1.

3. On note

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

   (a) Montrer que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \frac{H_n}{2}$.

   (b) Montrer de plus que $H_{2n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} + \frac{H_n}{2}$ et en déduire une expression de S_{2n} en fonction de H_{2n} et de H_n.

   (c) On admet que la suite (u_{2n}) converge également vers γ. En déduire que la suite (S_{2n}) converge vers une limite finie que l'on explicitera.

Partie III - Définition et équivalent de a_n.

1. À l'aide de la fonction $\ln(P_n)$, montrer que pour tout $x \in]\,0\,; 1\,[$,

$$\frac{P_n{}'(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x-k}$$

2. Donner le tableau de variations de $P_n{}'/P_n$ sur $]\,0\,; 1\,[$. On détaillera le calcul des limites aux bornes.
3. En déduire qu'il existe un unique $a_n \in]\,0\,; 1\,[$ tel que $P_n{}'(a_n) = 0$.
4. Montrer que

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - 1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k - a_n}$$

5. Montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - 1} \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j}$$

6. En utilisant la monotonie et le signe de la suite (u_n) définie dans la partie I, montrer que

$$\ln(n) - 1 \leq \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n - 1} \leq \ln(n-1) + 1 \leq \ln(n) + 1$$

7. Montrer que $\dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{a_n - 1} \leq \dfrac{1}{a_n}$ et en déduire que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
8. Donner la limite de $\left(\dfrac{1}{a_n - 1}\right)$. En déduire que $a_n \times \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Partie IV - Un dernier équivalent.

On reprend les notations de la partie précédente (en particulier a_n). On note

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{a_n}{k}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $x \in [-1/2\,;0]$, $-2x^2 \leq \ln(1-x) + x \leq 0$
2. De plus, d'après la question 7 de la partie III, $-a_n \in [-1/2\,;0]$ pour n assez grand (il n'est pas demandé de le prouver). Montrer que pour n assez grand,

$$-2a_n \times A_n \leq T_n + a_n \times H_n \leq 0$$

   où A_n est la somme définie dans la partie II. En déduire la limite de la suite $(T_n + a_n \times H_n)$ puis la limite de (T_n).
3. On rappelle que $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ et que si une suite (x_n) converge vers une limite finie L et si f est une fonction continue en L, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{\ln(n) \times P_n(a_n)}{n!}\right)$ admet une limite finie que l'on explicitera.

Fin !