Programme de colle - Semaine n°15

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Nathan BISKUPSKI, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 14 - Dérivation

- cf. semaine 13.

Chapitre 15 - Fonctions convexes

- cf. semaine 14.

Chapitre 16 - Relations binaires sur un ensemble

- cf. semaine 14.

Chapitre 17 - Dénombrement

Note aux colleurs : conformément au programme, on se contente d'une définition intuitive d'ensemble fini et de cardinal, et la plupart des propriétés sont données sans démonstration.

- cf. semaine 15.
- Lemme des bergers, principe multiplicatif.
- Utilisation d'une relation de récurrence dans les exercices de dénombrement : exemple des tours de Hanoï (un poly avec les nombres de Catalan a été distribué mais n'a pas été lu en classe). Exemple : nombre de façons de paver un échiquier $2 \times n$ avec des dominos 1×2.
- Listes, nombre de p-listes dans un ensemble à n éléments, nombre de p-listes (avec $p \leq n$) d'éléments distincts dans un ensemble à n éléments (on parle aussi d'arrangements). Nombre d'applications d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments, nombre d'injections d'un ensemble à n éléments dans un ensemble à p éléments (avec $p \geq n$), nombre de bijections entre deux ensembles à n éléments, nombre de permutations d'un ensemble à n éléments (note aux colleurs : le nombre de surjections sera vu en TD la semaine prochaine).
- Nombre de parties/combinaisons (donnée de k éléments sans ordre et sans répétitions) à k éléments dans un ensemble à n éléments (la notation C_n^k a été évoquée mais on garde évidemment la notation $\binom{n}{k}$). Nombre de parties d'un ensemble à n éléments.
- Interprétation combinatoire des coefficients binomiaux (nombre de chemins à k succès lors de n réalisations d'une expérience). Démonstration combinatoire des propriétés des coefficients binomiaux, démonstration combinatoire du binôme de Newton, démonstration combinatoire de la formule du chef, formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Chapitre 18 - Structures algébriques usuelles

- Loi de composition interne, notation opérationnelle plutôt que fonctionnelle, exemples : somme d'entiers, de réels, de complexes, de fonctions, de suites, somme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (HP, fait rapidement), union, intersection, différence symétrique d'ensembles, composition de fonctions, différence, division, puissance ($(a, b) \mapsto a^b$), loi interne nulle ($(a, b) \mapsto 0$), loi PGCD ($(a, b) \mapsto a \wedge b$). La plupart des lois sont notées multiplicativement ou additivement.

- Propriétés : commutativité, associativité (la commutativité permet d'intervertir les éléments, l'associativité permet de se passer de parenthèses), notation x^n (pour une loi multiplicative) ou nx (pour une loi additive) des itérés de x lorsque la loi est associative. Loi distributive par rapport à une autre. Exemples.
- Éléments particuliers : élément neutre (à gauche, à droite). Un neutre à gauche et un neutre à droite sont égaux, unicité de l'élément neutre (si existence). Symétrique, ou inverse, ou opposé (à gauche, à droite). Un symétrique à gauche et à droite sont égaux (si la loi est associative, ce qui sera le cas en pratique). Unicité du symétrique si existence. Symétrique du symétrique, produit d'éléments symétrisables (attention à l'ordre), extensions de la notation x^n ou nx aux entiers négatifs lorsque x est symétrisable.
- Partie stable par une LCI. Certaines propriétés de la loi sont préservées sur un ensemble plus petit (par exemple l'associativité), d'autres ne le sont pas (par exemple l'inverse).
- Groupe, groupe commutatif ou abélien. Groupe additif (toujours abélien), groupe multiplicatif (ça dépend). Exemples.

Chapitres au programme

Chapitre 14 (exercices uniquement), chapitres 15 et 16 (cours et exercices), chapitres 17 et 18 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Définition d'une fonction convexe, concave, avec un joli dessin.
2. Inégalité de Jensen (sans démonstration).
3. Caractérisation des fonctions convexes par la croissance des pentes (sans démonstration).
4. Une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur (démonstration, avec un joli dessin). En classe, nous avons « demêmisé » sans état d'âme, mais l'examinateur peut s'il le souhaite demander à l'élève de faire l'autre côté : question à préparer, donc.
5. $\forall x \in [\,0\,;\pi/2\,]$, $\dfrac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$ (démonstration, avec un joli dessin).
6. Si $x_1, \dots, x_n$ sont strictement [1] positifs, alors :
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}$$
7. Définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'équivalence. Le candidat écrira la signification des conditions avec des quantificateurs (par exemple, réflexive : $\forall x \in E, xRx$).
8. Si $(E, \preccurlyeq)$ est un ensemble ordonné et si (u_n) est une suite strictement décroissante alors, pour tous $n < p$, $u_p \preccurlyeq u_n$ et $u_p \neq u_n$ (démonstration, il n'est pas demandé de traiter la réciproque).
9. L'examinateur donne une relation simple et demande de prouver que c'est une relation d'ordre ou d'équivalence.
10. Pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ (démonstration).
11. Définition d'une loi commutative, associative. Donner un exemple de loi associative et un exemple de loi non associative (sans démonstration).
12. Définition d'un groupe, d'un groupe abélien.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des structures algébriques usuelles.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 17, 21, 22, 23, 24, 27, 28, 30, 32, 35, 36, 37, 38, 40, 41, 42, 43, 46, 48, 49 du chapitre 17 et 1, 3, 4, 5, 7, 8 du chapitre 18.

Cahier de calcul

Rien cette semaine.

1. Le cas où les réels sont simplement supposés positifs sera vu en TD.