Programme de colle - Semaine n°9

Chapitre 7 - Nombres complexes

- cf. semaines 6, 7 et 8.

Chapitre 8 - Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauß

- cf. semaine 8.

Chapitre 9 - Décomposition en éléments simples

- cf. semaine 8.

Chapitre 10 - Calcul intégral

- cf. semaine 8.
- Calcul de $\displaystyle\int_0^\pi t^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t$ et généralisation à des puissances supérieures. Intégrales de Wallis (relation de récurrence et valeur). Primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$.
- Changement de variable (fait à la physicienne). Calcul de $\displaystyle\int_{1/2}^2 \left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$, de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$, intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n.
- Méthode pour donner une primitive de fonctions du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$, $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx^2+dx+e}$ avec $\Delta = d^2 - 4ce < 0$.
- Règles de Bioche (HP).

Chapitre 11 - Équations différentielles

- Équations différentielles linéaires du premier ordre de la forme $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$ avec α, β, γ continues. Notion de domaine d'intégration. Sur chaque domaine d'intégration, on peut se ramener à une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ avec a et b continues.
- Équation homogène, équation homogène associée. Ensemble des solutions d'une équation homogène. Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, principe de superposition.
- Méthode de variation de la constante.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy. Interprétation géométrique. Activité : une solution non nulle d'une ED du type $y' + p(x)y = 0$ est de signe constant.
- Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : EDH associée, solutions de l'EDH associée (cas réel et cas complexe), structure de l'ensemble des solutions, principe de superposition. Note aux colleurs : la méthode de variation des constantes est HP.
- Existence et unicité au problème de Cauchy, interprétation géométrique. Activité : si une fonction f est solution d'une EDL homogène du second ordre et si f s'annule en un réel x_0, alors $f'(x_0) \neq 0$.
- Solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $x \mapsto P(x)e^{mx}$, dans le cas d'un second membre polynomial, exponentiel. Cas où le second membre est de la forme $x \mapsto P(x)\sin(mx), P(x)\cos(mx)$ (avec P réel).

Chapitres au programme

Chapitre 7 (cours, exercices sur tout le chapitre), chapitres 8 et 9 (cours et exercices), chapitres 10 et 11 (cours uniquement).

Questions de cours

1. L'examinateur donne une similitude directe explicite et en demande les éléments caractéristiques (centre, angle de la rotation et rapport de l'homothétie, sauf si le colleur est très gentil et décide de donner une simple translation...).
2. L'examinateur donne un système linéaire $3 * 3$ explicite au candidat et lui demande de déterminer ses solutions éventuelles.
3. L'examinateur demande d'effectuer la division euclidienne de deux fonctions polynomiales dans un cas explicite.
4. L'examinateur demande de décomposer en éléments simples une fonction explicite (pas trop moche, disons avec deux ou trois pôles simples).
5. Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;0;1\}$, décomposer en éléments simples la fonction :
$$f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+x^2t^2)\times(1+t^2)}$$
6. Théorème fondamental de l'analyse (sans démonstration puisqu'il est admis).
7. L'examinateur demande de calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ dans un cas explicite.
8. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.
9. Intégrales de Wallis : donner la relation de récurrence (évidemment avec démonstration).
10. Intégrales de Wallis : l'examinateur rappelle la formule de récurrence et demande de retrouver la valeur des intégrales d'indice pair et d'indice impair.
11. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$.
12. Calcul de $\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$.
13. L'examinateur demande de calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ dans un cas explicite.
14. L'examinateur demande de calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (oui, un numérateur égal à 1) dans un cas explicite (avec $\Delta = b^2-4ac<0$).
15. Ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène de la forme $y'+a(x)y=0$ où a est une fonction continue (démonstration).
16. L'examinateur demande de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dans un cas explicite (simple).
17. L'examinateur demande de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dans un cas explicite (simple) en précisant s'il demande les solutions réelles ou complexes.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Début des suites.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 28, 30, 31, 35 du chapitre 10 et exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 14 du chapitre 11.

Cahier de calcul

Chapitres 10 à 14 et chapitre 28.