
Programme de colle - Semaine n°7

Chapitre 5 - Fonctions circulaires/trigonométrie

- cf. semaines n° 4 et 5.

Chapitre 6 - Arithmétique

- cf. semaines 5 et 6.

Chapitre 7 - Nombres complexes

- cf. semaine 6.
- Conjugaison : définition, la conjugaison est une involution donc est bijective, CNS pour qu'un complexe soit réel, imaginaire pur, interprétation géométrique. Conjugué d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance, expression de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un complexe z en fonction de z et de \bar{z} . Méthode de l'expression conjuguée pour un quotient.
- Module : définition, interprétation géométrique. Définition d'un cercle, d'un disque fermé, d'un disque ouvert. Exemple : donner l'ensemble des complexes z tels que $\frac{z+2}{1+iz}$ soit réel. Propriétés : CNS pour que $|z| = 0$, $|\Re(z)| \leq |z|$ et $|\Im(z)| \leq |z|$ (cas d'égalité), $z \times \bar{z} = |z|^2$, module d'un produit, module du conjugué, module de l'inverse, inégalité triangulaire.
- Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire. Généralisation à n complexes, inégalité triangulaire « inversée ».
- Ensemble \mathbb{U} , interprétation géométrique, stabilité par produit, quotient, conjugaison (pas par somme!).
- Exponentielle d'un imaginaire pur, propriétés.
- Formule d'Euler, de Moivre. Applications : linéarisation d'une quantité de la forme $\sin^p \cos^q$, expression de $\cos(nx)$ comme une fonction polynomiale en $\cos(x)$.
- Méthode de l'angle moitié. Application au calcul des sommes $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
- Arguments d'un complexe non nul : définition, propriétés (produit, quotient, conjugué, CNS pour qu'un complexe soit réel, imaginaire pur), interprétation géométrique. Écriture exponentielle d'un complexe, cas d'égalité. Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (note aux colleurs : seul le cas d'égalité pour deux complexes est au programme, le cas d'égalité dans le cas général a été vu uniquement en guise d'exercice).
- Racines n -ièmes d'un complexe. Racines n -ièmes de l'unité. Interprétation géométrique. Cas particulier du complexe j . Ensemble \mathbb{U}_n : définition, interprétation géométrique, stabilité par produit, quotient, conjugaison. CNS pour que \mathbb{U}_d soit inclus dans \mathbb{U}_n .
- Résolution des équations du second degré à coefficients complexes.

Chapitres au programme

Chapitre 5 (exercices uniquement), chapitre 6 (cours et exercices), chapitre 7 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Théorème de Gauß (énoncé précis, démonstration).
2. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors \sqrt{n} est soit un entier, soit un irrationnel (démonstration).
3. L'examineur demande si une équation du type $ax + by = c$ admet des solutions, et de les trouver le cas échéant, dans un cas explicite.
4. L'ensemble des nombres premiers est infini (démonstration, méthode au choix de l'élève).
5. Petit théorème de Fermat (énoncé précis, démonstration en admettant la proposition précédente : si p est premier, alors pour tous a et b , $(a+b)^p \equiv a^p + b^p [p]$).
6. Inégalité triangulaire (démonstration, il n'est pas demandé d'énoncé ni de démontrer le cas d'égalité).
7. L'examineur demande de linéariser une quantité de la forme $\sin^p \cos^q$ dans un cas explicite (pas trop moche).

8. Exprimer $\cos(nx)$ sous la forme d'une fonction polynomiale en $\cos(x)$.
9. Calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.
10. L'examineur demande de donner la forme exponentielle d'un complexe explicite. On se restreindra au cas où les arguments « tombent juste » (i.e. on évite les Arccos et Arcsin dans la question de cours).
11. Liste des racines n -ièmes d'un complexe non nul, liste des racines n -ièmes de l'unité (sans démonstration).
12. Résoudre l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$.
13. L'examineur demande de résoudre une équation du second degré à coefficients complexes dans un cas explicite.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des complexes.
- Systèmes linéaires.
- Décomposition en éléments simples.
- Début du calcul intégral ?

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 66, 68, 69, 71, 72, 73, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90 du chapitre 7.

Cahier de calcul

Chapitre 23.