Correction du DM n°4

Exercice 1 :

1.(a) La fonction f_1 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions strictement croissantes.

$$\boxed{f_1 \text{ est donc injective.}}$$

De plus, elle est continue car composée de fonctions continues. Enfin, $y = \text{th}\,(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\text{sh}\,(y) \xrightarrow[y\to 1]{} \text{sh}\,(1)$ car la fonction sh est continue. Par composition de limites $f_1(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \text{sh}\,(1)$. Par imparité ($f_1$ est impaire car composée de fonctions impaires), $f_1(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \text{sh}\,(-1)$. Dès lors, d'après le théorème de la bijection, f_1 est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\,\text{sh}\,(-1)\,;\text{sh}\,(1)\,[$ (faites un tableau de variations).

$$\boxed{f_1(\mathbb{R}) = \,]\,\text{sh}\,(-1)\,;\text{sh}\,(1)\,[}$$

En particulier, tout élément qui n'appartient pas à cet intervalle n'est pas atteint, par exemple $\text{sh}\,(1) + 1$:

$$\boxed{f_1 \text{ n'est pas surjective.}}$$

1.(b) f_2 est 2π-périodique : en effet, soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_2(x+2\pi) &= \cos(\sin(x+2\pi)) \\ &= \cos(\sin(x)) \\ &= f_2(x) \end{aligned}$$

Il en découle que f_2 n'est pas injective puisque, par exemple, $f(0) = f(2\pi)$.

$$\boxed{f_2 \text{ n'est pas injective.}}$$

Montrons que $f_2(\mathbb{R}) = [\,\cos(1)\,;1\,]$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\sin(x) \in [\,-1\,;1\,]$. Si $\sin(x) \geqslant 0$ alors $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et le cos étant décroissant sur $[\,0\,;1\,]$ (car $1 \leqslant \pi/2$), alors $\cos(0) = 1 \geqslant \cos(\sin(x)) \geqslant \cos(1)$ si bien que $f_2(x) \in [\,\cos(1)\,;1\,]$. Le raisonnement est analogue si $\sin(x) \leqslant 0$ puisque $\cos(-1) = \cos(1)$ par parité de la fonction cos. D'où l'inclusion $f_2(\mathbb{R}) \subset [\,\cos(1)\,;1\,]$.

Réciproquement, soit $y \in [\,\cos(1)\,;1\,]$. Alors $\cos(1) \leqslant y \leqslant \cos(0)$. La fonction cos étant continue, il existe $t \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\cos(t) = y$. De plus, $0 = \sin(0) \leqslant t \leqslant 1 = \sin(\pi/2)$: la fonction sin étant continue, il existe $x \in [\,0\,;\pi/2\,]$ tel que $\sin(x) = t$ donc tel que $y = \cos(\sin(t)) = f_2(t)$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

$$\boxed{f_2(\mathbb{R}) = [\,\cos(1)\,;1\,]}$$

Or, $1 \in [\,0\,;\pi/2\,]$ donc $\cos(1) \geqslant 0$. On en déduit que -1 n'est pas atteint par f_2 :

$$\boxed{f_2 \text{ n'est pas surjective.}}$$

2.(a) Soient (a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) deux éléments de $\mathbb{R}^3$ tels que $h_1(a_1, b_1, c_1) = h_1(a_2, b_2, c_2)$. En d'autres termes, on a l'égalité : $(b_1, a_1, -c_1) = (b_2, a_2, -c_2)$ donc $b_1 = b_2$, $a_1 = a_2$ et $c_1 = c_2$ donc $(a_1, b_1, c_1) = (a_2, b_2, c_2)$:

$$\boxed{h_1 \text{ est injective.}}$$

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Alors $h_1(y, x, -z) = (x, y, z)$ donc $(y, x, -z)$ est un antécédent de (x, y, z). En particulier, (x, y, z) admet un antécédent :

$$\boxed{h_1 \text{ est surjective donc bijective.}}$$

> On pouvait montrer en une seule étape que h_1 est bijective : on fixe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on prouve que (x, y, z) admet un unique antécédent donc h_1 est bijective : exo.

2.(b) $(0, 0, 0)$ n'a aucun antécédent car toutes les images ont une première coordonnée égale à 1.

$$\boxed{h_2 \text{ n'est pas surjective.}}$$

Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$ tels que $h_2(a_1, b_1) = h_2(a_2, b_2)$. Alors $(1, a_1 + b_1, a_1) = (1, a_2 + b_2, a_2)$ donc $a_1 = a_2$ et $a_1 + b_1 = a_2 + b_2$ donc $b_1 = b_2$:

$$\boxed{h_2 \text{ est injective.}}$$

2.(c) $h_3(1, 1, 1) = h_3(-1, 1, 1)$ donc

$$\boxed{h_3 \text{ n'est pas injective.}}$$

De plus, $(-1, 0, 0)$ n'est pas atteint par h_3 car toutes les images ont une première coordonnée positive.

$$\boxed{h_3 \text{ n'est pas surjective.}}$$

2.(d) Rappelons que la fonction cube est injective (c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection). Soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et supposons que $f(a_1, b_1) = f(a_2, b_2)$. Dès lors, $({a_1}^3, {b_1}^3, {a_1}^3) = ({a_2}^3, {b_2}^3, {a_2}^3)$ donc ${a_1}^3 = {a_2}^3$ donc $a_1 = a_2$ car la fonction cube est injective. De même, $b_1 = b_2$ donc

$$\boxed{h_4 \text{ est injective.}}$$

Cependant, toutes les images par h_3 ont une première et une troisième coordonnée égales. En particulier, $(1, 0, 0)$ n'est pas atteint.

$$\boxed{h_4 \text{ n'est pas surjective.}}$$

3.(a) Si $\mathrm{A} = \mathrm{E}$ alors $i = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathrm{E})}$ donc est bijective. Supposons donc que $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$. Si $\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ alors $i(\mathrm{X}) \subset \mathrm{A}$ donc E n'est pas atteint par i :

$$\boxed{i \text{ n'est pas surjective.}}$$

Soit $x \in \mathrm{E} \backslash \mathrm{A}$ (un tel x existe car $\mathrm{A} \neq \mathrm{E}$). Alors $i(\varnothing) = i(\{x\}) = \varnothing$ donc

$$\boxed{i \text{ n'est pas injective.}}$$

3.(b) Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Alors $\mathrm{A} = j(\mathrm{A}, \varnothing)$ donc $(\mathrm{A}, \varnothing)$ est un antécédent de A par j :

$$\boxed{j \text{ est surjective.}}$$

Cependant, $j(\mathrm{E}, \mathrm{E}) = j(\varnothing, \varnothing) = \varnothing$ donc

$$\boxed{j \text{ n'est pas injective.}}$$

Problème

Partie I. Tribus

1 $\mathscr{P}(\Omega)$ contient toutes les parties donc contient Ω, est stable par complémentaire (car il contient toutes les parties) et par union dénombrable (car contient toutes les parties).

$$\boxed{\mathscr{P}(\Omega) \text{ est une tribu.}}$$

De plus, $\Omega \in \{\varnothing ; \Omega\}$ et cet ensemble est stable par passage au complémentaire. Enfin, soit $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de parties de $\{\varnothing ; \Omega\}$: si tous les A_n sont vides, alors l'union est vide, sinon, l'un des A_n est égal à Ω donc l'union est aussi égale à Ω : dans tous les cas, l'union appartient à $\{\varnothing ; \Omega\}$:

$$\boxed{\{\varnothing ; \Omega\} \text{ est une tribu.}}$$

Dès lors, toujours avec cette tribu, si Ω n'est pas réduit à un singleton, on peut avoir B non vide inclus dans Ω, auquel cas $\Omega \in \mathrm{T}$, $\mathrm{B} \subset \Omega$ mais $\mathrm{B} \notin \mathrm{T}$: cela n'a rien à voir, ne pas confondre appartenance et inclusion !

$$\boxed{\text{On peut avoir } \mathrm{A} \in \mathrm{T}, \mathrm{B} \subset \mathrm{A} \text{ mais } \mathrm{B} \notin \mathrm{T}\,!}$$

1.(b) L'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ n'est pas une tribu car n'est pas stable par complémentaire : le complémentaire de $[\,0\,;1\,]$ est $]\,{-\infty}\,;0\,[\cup]\,1\,;{+\infty}\,[$ qui n'est pas un intervalle.

$\boxed{\text{L'ensemble des intervalles de } \mathbb{R} \text{ n'est pas une tribu.}}$

> On pouvait aussi dire que cet ensemble n'est pas stable par union dénombrable : par exemple,
> $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left] n \,; n+1 \right[$$
> n'est pas un intervalle.

2.(a) $\Omega \in \mathrm{T}$ et T est stable par passage au complémentaire.

$$\boxed{\varnothing \in \mathrm{T}}$$

2.(b) Soient $n \geqslant 1$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des éléments de T. Posons $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n$ et, si $i \geqslant n+1$, $\mathrm{B}_i = \varnothing$. Alors

$$\bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i = \bigcup_{i\geqslant 1} \mathrm{B}_i$$

Or, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n$ appartiennent à T et, d'après la question précédente, $\mathrm{B}_i = \varnothing \in \mathrm{T}$. T étant stable par union dénombrable, l'union ci-dessus appartient à T donc $\mathrm{A}_1 \cup \dots \cup \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

$\boxed{\text{T est stable par union finie.}}$

2.(c) Soient $n \geqslant 1$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ des éléments de T. Alors, d'après les lois de Morgan :

$$\mathrm{A}_1 \cap \cdots \mathrm{A}_n = \overline{\overline{\mathrm{A}_1} \cup \cdots \cup \overline{\mathrm{A}_n}}$$

Or, les A_i sont dans T donc, d'après la question 2.(a), les $\overline{\mathrm{A}_i}$ également. Dès lors, d'après la question 2.(b), $\overline{\mathrm{A}_1} \cup \cdots \cup \overline{\mathrm{A}_n} \in \mathrm{T}$ donc, à nouveau d'après la question 2.(a), on a le résultat voulu.

$\boxed{\text{Une tribu est stable par intersection finie.}}$

2.(d) Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de T. Alors, d'après les lois de Morgan :

$$\bigcap_{n\geqslant 1} = \overline{\bigcup_{n\geqslant 1} \overline{\mathrm{A}_n}}$$

On conclut de même que dans la question précédente : complémentaire, puis union dénombrable, puis complémentaire.

$\boxed{\text{Une tribu est stable par intersection dénombrable.}}$

> En clair, une tribu, c'est fait pour qu'on ne puisse pas en sortir à l'aide de toutes les opérations qu'on a l'habitude de faire en probabilités (dénombrables) : cf. programme de deuxième année.

3.(a)

- Si $i \in \mathrm{I}$, T_i est une tribu donc $\Omega \in \mathrm{T}_i$: i étant quelconque, $\Omega \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i$.
- Soit $\mathrm{A} \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i$. Alors, pour tout i, $\mathrm{A} \in \mathrm{T}_i$ qui est une tribu donc $\overline{\mathrm{A}} \in \mathrm{T}_i$ donc $\overline{\mathrm{A}} \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i$.
- Enfin, soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$. Alors, pour tout i, la famille $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ appartient à T_i qui est une tribu donc $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}_i$ donc $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{A}_n \in \bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i$.

En conclusion $\boxed{\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{T}_i \text{ est une tribu.}}$

3.(b) $\mathscr{P}(\Omega)$ contient F et est une tribu (cf. question 1) donc appartient à A_F donc

$\boxed{\mathrm{A}_\mathrm{F} \text{ est non vide.}}$

D'après la question précédente, I est une tribu, et comme I est une intersections d'ensembles qui contiennent F (car les éléments de A_F contiennent F) alors I contient F. Enfin, si T est une tribu contenant F, alors I est une intersection de tribus donc l'une est égale à T (car $\mathrm{T} \in \mathrm{A}_\mathrm{F}$ puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{T}$) donc est incluse dans T (cf. cours : $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \subset \mathrm{A}$).

$\boxed{\text{I est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant T.}}$

3.(c) Soit $\mathrm{T} = \{\varnothing; \mathrm{A}; \overline{\mathrm{A}}; \Omega\}$. Alors :

- $\Omega \in \mathrm{T}$.
- T est stable par passage au complémentaire.
- Soit $(\mathrm{A}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de T. Si l'un des A_n vaut Ω, alors l'union vaut Ω. Sinon, ils valent tous $\varnothing, \mathrm{A}$ ou $\overline{\mathrm{A}}$. Si on trouve au moins un A et un $\overline{\mathrm{A}}$, alors l'union vaut encore Ω. Sinon, on ne trouve que le vide et A, ou le vide et $\overline{\mathrm{A}}$, ou le vide uniquement : l'union vaut alors $\mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}$ ou $\varnothing$. Dans tous les cas, $\bigcup_{n\geqslant 1} \mathrm{A}_n \in \mathrm{T}$.

On en déduit que T est une tribu. Si C est une tribu contenant A, alors $\varnothing \in \mathrm{C}$ (question 2.(a)), Ω et A appartiennent à C et C est stable par passage au complémentaire donc $\overline{\mathrm{A}} \in \mathrm{C}$ si bien que $\mathrm{T} \subset \mathrm{C}$: T est une tribu et est incluse dans toute tribu contenant A donc T est la tribu engendrée par A.

$$\boxed{\sigma(\{\mathrm{A}\}) = \{varnothing; \mathrm{A}; \overline{\mathrm{A}}; \Omega\}}$$

4.(a) Soit $b \in \mathbb{R}$. $]\, b\,; +\infty\,[\,= \overline{]\, -\infty\,; b\,]}$, $]\, -\infty\,; b\,] \in \mathrm{B}$ et B est une tribu donc est stable par passage au complémentaire.

$$\boxed{]\, b\,; +\infty\,[\,\in \mathrm{B}}$$

4.(b) Soient $a < b$ deux réels. Alors $]\, a\,; b\,] = \,]\, -\infty\,; b\,] \cap \,]\, -\infty\,; a\,]$, les deux ensembles $]\, -\infty\,; b\,]$ et $]\, -\infty\,; a\,]$ appartiennent à B qui est une tribu donc est stable par intersection finie (question 2.(c)) donc

$$\boxed{]\, a\,; b\,] \in \mathrm{B}}$$

4.(c) Montrons cette égalité par double inclusion (elle se voit bien sur un dessin analogue à ceux du cours et l'intervalle de gauche est ouvert car a ne sera jamais atteint). Notons U l'union de droite.

- Soit $x \in \,]\,-\infty\,; a\,[$. Alors $x < a$. Puisque $a - \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, il existe un entier n_0 tel que $x \leqslant a - \dfrac{1}{n_0}$ donc $x \in \left]\,-\infty\,; a - \dfrac{1}{n_0}\right]$ et donc $x \in \mathrm{U}$. Ainsi, $]\,-\infty\,; a\,[\,\subset \mathrm{U}$.
- Réciproquement, soit $x \in \mathrm{U}$. Il existe donc n_0 tel que $x \in \left]\,-\infty\,; a - \dfrac{1}{n_0}\right]$ si bien que $x \leqslant a - \dfrac{1}{n_0} < a$ donc $x \in \,]\,-\infty\,; a\,[$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

$$\boxed{]\, -\infty\,; a\,[\,= \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]\, -\infty\,; a - \frac{1}{n}\right]}$$

Finalement, $]\,-\infty\,; a\,[\,= \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]\,-\infty\,; a - \frac{1}{n}\right] \in \mathrm{B}$ car union dénombrable d'éléments de B.

$$\boxed{]\,--\infty\,; a\,[\,\in \mathrm{B}}$$

4.(d) Soient $a \leqslant b$ deux réels.

- $[\, b\,; +\infty\,[\,= \overline{]\,-\infty\,; b\,[} \in \mathrm{T}$ car T est stable par passage au complémentaire.
- $[\, a\,; b\,[\,= \,]\,-\infty\,; b\,[\,\cap [\, a\,; +\infty\,[\,\in \mathrm{T}$ car T est stable par intersection finie.
- $]\, a\,; b\,[\,= \,]\, a\,; +\infty\,[\,\cap \,]\,-\infty\,; b\,[\,\in \mathrm{T}$.
- $[\, a\,; b\,] = \,]\,-\infty\,; b\,] \cap [\, a\,; +\infty\,[\,\in \mathrm{T}$.

$$\boxed{\text{B contient tous les intervalles.}}$$

> B contient également d'autres ensembles. Elle contient par exemple tous les ensembles avec lesquels on a l'habitude de travailler :
>
> - les singletons : $\{x\} = [\, x\,; x\,] \in \mathrm{B}$ car on vient de montrer que B contient tous les intervalles.
> - Les ensembles finis : $\{x_1, \dots, x_n\} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \{x_k\} \in \mathrm{B}$ car on vient de montrer que B contient les singletons, et B

est stable par union finie.

- Les unions finies ou dénombrables d'intervalles (par exemple, $D_{\tan}$).
- $\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\} \in B$ car union dénombrable d'éléments de B.
- $\mathbb{Z} = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} (\{n\} \cup \{-n\}) \in B$.
- Si $n \geqslant 1$ on note

$$A_n = \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} = \bigcup\nolimits_{k\in\mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{k}{n} \right\} \cup \left\{ -\frac{k}{n} \right\} \right) \in B$$

(par exemple $A_3 = \left\{ \cdots ; -\frac{4}{3} ; -1 ; -\frac{2}{3} ; -\frac{1}{3} ; 0 ; \frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; 1 ; \frac{4}{3} ; \cdots \right\}$). Finalement, $\mathbb{Q} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in B$.

- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \in B$.

Et ce n'est pas tout ! B contient (entre autres) toutes les unions et intersections dénombrables d'intervalles, toutes les unions et intersections dénombrables qu'on peut faire à partir de tels ensembles etc.

Partie II. Autour des λ-systèmes

1 Soit T une tribu. T est stable par union dénombrable quelconque donc, en particulier, par union croissante dénombrable. De plus, soient $A \subset B$ deux éléments de T. Alors $B\backslash A = B \cap \overline{A}$. Or, A et B appartiennent à T et T est une tribu donc est stable par passage au complémentaire, donc $\overline{A} \in T$, et T est aussi stable par intersection finie donc $B \cap \overline{A} = B\backslash A \in T$: T est un λ-système.

$$\boxed{\text{Une tribu est un } \lambda\text{-système.}}$$

2.(a) En prenant $A = B = \Omega$, A et B sont dans S et $A \subset B$ donc $B\backslash A = \varnothing$. S étant un λ-système, $B\backslash A \in S$.

$$\boxed{\varnothing \in S}$$

2.(b) Soit $A \in S$. Alors $A \subset \Omega$ et $\Omega \in S$ donc $\Omega\backslash A = \overline{A} \in S$ car S est stable par différence.

$$\boxed{\text{S est stable par complémentaire.}}$$

2.(c) Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors, d'après le cours, $\overline{A_n} \subset \overline{A_{n+1}}$ pour tout n : la suite $(\overline{A_n})$ est croissante pour l'inclusion. De plus, d'après la question précédente, S est stable par passage au complémentaire donc tous les $\overline{A_n}$ appartiennent à S. Dès lors, S étant stable par union croissante, $\bigcup_{n\geqslant 1} \overline{A_n} \in S$. Encore une fois, S étant stable par passage au complémentaire,

$$\boxed{\overline{\bigcup\nolimits_{n\geqslant 1} \overline{A_n}} = \bigcap\nolimits_{n\geqslant 1} A_n \in S : \text{S est stable par intersection décroissante.}}$$

3 Preuve analogue à la question 3.(a) de la partie I.

$$\boxed{\text{Une intersection de } \lambda\text{-systèmes est un } \lambda\text{-système.}}$$

4 Posons B_F l'ensemble des λ-systèmes qui contiennent F et posons

$$I = \bigcap\nolimits_{S\in B_F} S$$

On montre de même que dans la partie I que I est le plus petit λ-système contenant F : c'est un λ-système d'après la question précédente, il contient F et il est contenu dans tout λ-système contenant F, ce qu'on montre comme dans la partie I. Enfin, $\sigma(F)$ est une tribu donc un λ-système et contient F donc contient $m(F)$ car $m(F)$ est contenu dans tous les λ-systèmes contenant F.

$$\boxed{m(F) \subset \sigma(F)}$$

> La notation $\sigma(\mathrm{F})$ vient du fait qu'une tribu est aussi appelée une σ-algèbre, et la notation $m(\mathrm{F})$ vient du fait qu'un λ-système est aussi appelé une classe monotone.

Partie III. Lemme $\lambda - \pi$ de Dynkin

1 Pour montrer qu'un élément B est dans m_{A}, il faut prouver qu'il est dans $m(\mathrm{F})$ et que $\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$.

- Soit $(\mathrm{B}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante d'éléments de m_{A}. Alors, pour tout n, $\mathrm{B}_n\in m(\mathrm{F})$ et $m(\mathrm{F})$ est un λ-système donc stable par union croissante, si bien que $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{B}_n\in m(\mathrm{F})$. De plus, par distributivité de l'intersection sur l'union,

$$\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{B}_n\right)\cap\mathrm{A}=\bigcup_{n\geqslant 1}(\mathrm{B}_n\cap\mathrm{A})$$

  Or, pour tout n, $\mathrm{B}_n\cap\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$ puisque $\mathrm{B}_n\in m_{\mathrm{A}}$, et $(\mathrm{B}_n\cap\mathrm{A})\subset(\mathrm{B}_{n+1}\cap\mathrm{A})$ puisque $\mathrm{B}_n\subset\mathrm{B}_{n+1}$ (la suite est croissante). On en déduit que $(\mathrm{B}_n\cap\mathrm{A})_{n\geqslant 1}$ est une suite croissante d'éléments de $m(\mathrm{F})$ qui est un λ-système donc

$$\left(\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{B}_n\right)\cap\mathrm{A}=\bigcup_{n\geqslant 1}(\mathrm{B}_n\cap\mathrm{A})\in m(\mathrm{F})$$

  En d'autres termes, $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathrm{B}_n\in m_{\mathrm{A}}$.

- Soient à présent B et C (la lettre A est déjà prise) deux éléments de m_{A} avec $\mathrm{C}\subset\mathrm{B}$. Alors B et C sont dans $m(\mathrm{F})$ qui est un λ-système donc $\mathrm{B}\backslash\mathrm{C}\in m(\mathrm{F})$. Prouvons que $(\mathrm{B}\backslash\mathrm{C})\cap\mathrm{A}=(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})\backslash(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})\backslash(\mathrm{C}\cap\mathrm{A}) &= (\mathrm{B}\cap\mathrm{A})\cap\overline{(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})}\\
&= (\mathrm{B}\cap\mathrm{A})\cap(\overline{\mathrm{C}}\cup\overline{\mathrm{A}})\\
&= (\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{A}}) && \text{(distributivité de $\cap$ sur $\cup$)}\\
&= (\mathrm{B}\cap\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{C}})\cup\varnothing\\
&= (\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{C}})\cap\mathrm{A} && \text{(associativité de $\cap$)}\\
&= (\mathrm{B}\backslash\mathrm{C})\cap\mathrm{A}
\end{aligned}$$

  Or, $\mathrm{C}\subset\mathrm{B}$ donc $(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\subset(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})$ et $m(\mathrm{F})$ est un λ-système donc $(\mathrm{B}\cap\mathrm{A})\backslash(\mathrm{C}\cap\mathrm{A})\in m(\mathrm{F})$ c'est-à-dire que $(\mathrm{B}\backslash\mathrm{C})\cap\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$: $\mathrm{B}\backslash\mathrm{C}\in m_{\mathrm{A}}$.

$$\boxed{m_{\mathrm{A}}\text{ est un }\lambda\text{-système.}}$$

2 Soit $\mathrm{B}\in\mathrm{F}$. Alors $\mathrm{B}\in m(\mathrm{F})$ puisque $\mathrm{F}\subset m(\mathrm{F})$, et F est un π-système donc est stable par intersection finie si bien que $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\in\mathrm{F}$ (car $\mathrm{C}\in\mathrm{F}$), si bien que $\mathrm{B}\in m_{\mathrm{C}}$:

$$\boxed{\mathrm{F}\subset m_{\mathrm{C}}}$$

Par définition, $m_{\mathrm{C}}\subset m(\mathrm{F})$ (car $\mathrm{B}\in m_{\mathrm{C}}$ si et seulement si $\mathrm{B}\in m(\mathrm{F})$ et $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\in m(\mathrm{F})$ donc en particulier tous les éléments de m_{C} sont dans $m(\mathrm{F})$). De plus, m_{C} est un λ-système qui contient F d'après ce qui précède donc contient $m(\mathrm{F})$ car $m(\mathrm{F})$ est le plus petit λ-système (au sens de l'inclusion) inclus dans F. D'où le résultat par double inclusion.

$$\boxed{m_{\mathrm{C}}=m(\mathrm{F})}$$

3 Soit $\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$. Rappelons qu'on peut toujours intervertir deux quantificateurs IDENTIQUES. Dès lors, d'après la question précédente,

$$\forall\mathrm{B}\in m(\mathrm{F}),\forall\mathrm{C}\in\mathrm{F},\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\in m(\mathrm{F})$$

C'est en particulier vrai pour $\mathrm{B}=\mathrm{A}$ puisque $\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$, c'est-à-dire que, pour tout $\mathrm{C}\in\mathrm{F},\mathrm{C}\cap\mathrm{A}\in m(\mathrm{F})$. En d'autres termes, F est inclus dans m_{A} donc m_{A} est un λ-système contenant C, donc $m(\mathrm{F})\subset m_{\mathrm{A}}$, et l'inclusion réciproque est vraie par définition.

$$\boxed{\forall\mathrm{A}\in m(\mathrm{F}),m_{\mathrm{A}}=m(\mathrm{F})}$$

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$ Montrons que $m(\mathrm{F})$ est un π-système, c'est-à-dire que $m(\mathrm{F})$ est stable par intersection finie. D'après la question précédente, pour tout $\mathrm{A} \in m(\mathrm{F})$, $m_{\mathrm{A}} = m(\mathrm{F})$ c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{B} \in m(\mathrm{F}), \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \in m(\mathrm{F})$. En d'autres termes : $\forall \mathrm{A} \in m(\mathrm{F}), \forall \mathrm{B} \in m(\mathrm{F}), \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \in m(\mathrm{F})$. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{L'intersection de deux éléments de } m(\mathrm{F}) \text{ est encore dans } m(\mathrm{F}).}$$

Prouvons à présent que $m(\mathrm{F})$ est un π-système par récurrence (portant sur le nombre de termes de l'intersection).

- Si $n \geqslant 2$, notons H_n : « $\forall (\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n) \in m(\mathrm{F})^n, \mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n \in m(\mathrm{F})$ ».
- On vient de prouver que l'intersection de deux éléments de $m(\mathrm{F})$ est encore dans $m(\mathrm{F})$: en d'autres termes, H_2 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soient donc $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{n+1}$ des éléments de $m(\mathrm{F})$. Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n \in m(\mathrm{F})$. Or, l'intersection de deux éléments de $m(\mathrm{F})$ est encore dans $m(\mathrm{F})$ donc

$$(\mathrm{A}_1 \cap \dots \cap \mathrm{A}_n) \cap \mathrm{A}_{n+1} \in m(\mathrm{F})$$

  ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{m(\mathrm{F}) \text{ est un } \pi\text{-système.}}$$

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$ F contient Ω donc, d'après la partie II, $m(\mathrm{F})$ est stable par passage au complémentaire. On prouve ensuite de façon analogue à la partie I que $m(\mathrm{F})$ est stable par intersection finie et par passage au complémentaire donc par union finie.

$$\boxed{m(\mathrm{F}) \text{ est stable par union finie.}}$$

$\boxed{5}$ D'après la question 4 de la partie II, on a l'inclusion $m(\mathrm{F}) \subset \sigma(\mathrm{F})$. Montrons l'inclusion réciproque. Il suffit pour cela de prouver que $m(\mathrm{F})$ est une tribu : en effet, $\sigma(\mathrm{F})$ est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant F, et donc si on prouve que $m(\mathrm{F})$ est une tribu, alors $m(\mathrm{F})$ est une tribu contenant F donc contient $\sigma(\mathrm{F})$, ce qui permet de conclure.

- Par hypothèse, $\Omega \in \mathrm{F}$ donc $\Omega \in m(\mathrm{F})$.
- D'après la question 2.(a) de la partie II, $\Omega \in \mathrm{F}$ donc $m(\mathrm{F})$ est stable par passage au complémentaire.
- Montrons que $m(\mathrm{F})$ est stable par union dénombrable. Soit $(\mathrm{A}_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $m(\mathrm{F})$. Posons, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{B}_n = \bigcup_{i=1}^n \mathrm{A}_i$. Alors, d'après l'exercice 10 du chapitre sur les ensembles, la suite $(\mathrm{B}_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante pour l'inclusion et $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{B}_n = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{A}_n$. De plus, d'après la question précédente, $m(\mathrm{F})$ est stable par union finie donc, pour tout n, $\mathrm{B}_n \in m(\mathrm{F})$: $m(\mathrm{F})$ étant un λ-système, l'union d'une suite croissante d'éléments de $m(\mathrm{F})$ est encore dans $m(\mathrm{F})$ si bien que $\bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{A}_n = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathrm{B}_n \in m(\mathrm{F})$. Finalement, $m(\mathrm{F})$ est une tribu, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{m(\mathrm{F}) = \sigma(\mathrm{F})}$$

Partie IV. Unicité des mesures bornées

$\boxed{1}$ On sait que $\mu(\varnothing) \geqslant 0$ car μ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Supposons par l'absurde que $\mu(\varnothing) > 0$. Alors, en posant $\mathrm{A}_n = \varnothing$ pour tout $n \geqslant 1$, les A_n sont deux à deux disjoints donc

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathrm{A}_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$$

c'est-à-dire que

$$\mu(\varnothing) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\varnothing) = +\infty$$

d'après le résultat (intuitif) de l'énoncé, ce qui est absurde puisque $\mu(\varnothing) \in \mathbb{R}_+$ et donc est un réel.

$$\boxed{\mu(\varnothing) = 0}$$

> Une mesure est un moyen de donner la taille d'un ensemble. On vient donc de prouver que la mesure de l'ensemble vide est nulle, ce qui est intuitif.

2 Posons $A_1 = A, A_2 = B \backslash A$, et $A_n = \varnothing$ pour tout $n \geqslant 3$. Alors les A_n sont deux à deux disjoints, et leur union vaut B, si bien que

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \mu(A_1) + \mu(A_2) + \sum_{n=3}^{+\infty} \mu(A_n) \\ &= \mu(A) + \mu(B\backslash A) + \sum_{n=3}^{+\infty} 0 \\ &= \mu(A) + \mu(B\backslash A)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. $\boxed{\text{Si } A \subset B, \text{ alors } \mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A).}$

3.(a) Soient n et p deux entiers distincts, si bien que l'un des deux est strictement inférieur à l'autre. Sans perte de généralité, on peut supposer que $n < p$, si bien que $n \leqslant p-1$. Or, la suite (A_n) étant croissante, $A_n \subset A_{p-1}$ si bien que $B_n \subset A_n \subset A_{p-1}$. Or, $B_p = A_p \backslash A_{p-1}$ et donc $B_n \cap B_{p-1} = \varnothing$:

$$\boxed{\text{Les } B_n \text{ sont deux à deux disjoints.}}$$

3.(b) Soit x appartenant à la première union. Alors il existe $n \geqslant 1$ tel que $x \in B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, si bien que $x \in A_n$ donc x appartient à la première union.

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}$$

3.(c) Puisque x appartient à l'union des A_n, l'ensemble $\{n \,|\, x \in A_n\}$ est non vide : c'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus petit élément.

$$\boxed{n_0 \text{ existe bien.}}$$

Si $n_0 \neq 1$, alors $x \notin A_{n_0-1}$ car $n_0 - 1 < n_0$ et n_0 est le minimum de $\{n \,|\, x \in A_n\}$. Dès lors, $x \in A_{n_0} \backslash A_{n_0-1} = B_{n_0}$ donc x appartient à l'union des B_n. Si $n_0 = 1$, alors $x \in A_1 = B_1$ et x appartient toujours à l'union des B_n.

$$\boxed{\text{D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.}}$$

3.(d) Prouvons que $S = \{A \in T \,|\, \mu(A) = \nu(A)\}$ est un λ-système.

- Soient deux éléments A et B dans S tels que $A \subset B$. Alors, d'après la question 2, $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, et $\nu(B\backslash A) = \nu(B) - \nu(A)$. Or, A et B appartiennent à S donc $\mu(A) = \nu(A)$, et $\mu(B) = \nu(B)$, si bien que $\mu(B\backslash A) = \nu(B\backslash A)$, c'est-à-dire que $B\backslash A \in S$: S est stable par différence.
- Soit $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite croissante d'éléments de S. Prenons la suite $(B_n)_{n\geqslant 1}$ associée comme précédemment. Alors on a une famille d'éléments de S (car les B_n appartiennent à S puisque S est stable par différence d'après ce qui précède) deux à deux disjoints, si bien que, par définition d'une mesure,

  $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(B_n)$$

  Les B_n étant dans S, il vient :

  $$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(B_n) \\ &= \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right)\end{aligned}$$

  Or, d'après la question précédente, l'union des B_n est égale à l'union des A_n, donc en particulier :

  $$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

  c'est-à-dire que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in S$: S est stable par union croissante.

$$\boxed{\text{S est un } \lambda\text{-système.}}$$

4 On cherche à prouver que $\sigma(\mathrm{C}) \subset \mathrm{S} = \{\mathrm{A} \in \mathrm{T} \,|\, \mu(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A})\}$. D'après la partie précédente, C étant un π-système contenant Ω, $m(\mathrm{C}) = \sigma(\mathrm{C})$. Or, S étant un λ-système d'après la question précédente, et puisqu'il contient C par hypothèse (les deux mesures coïncident sur C), alors $m(\mathrm{C}) = \sigma(\mathrm{C}) \subset \mathrm{S}$. En d'autres termes,

$$\boxed{\mu \text{ et } \nu \text{ coïncident sur } \sigma(\mathrm{C}).}$$

5.(a) Soit $n \geqslant 1$. $]\,n\,;n+1\,] =]\,-\infty\,;n+1\,] \setminus]\,-\infty\,;n]$ donc, d'après la question 2 :

$$\mu(]\,n\,;n+1\,]) = \mu(]\,-\infty\,;n+1\,]) - \mu(]\,-\infty\,;n\,])$$

Puisque μ et ν coïncident en tous les $]\,-\infty\,;x\,]$, on montre comme précédemment que $\mu(]\,n\,;n+1\,]) = \nu(]\,n\,;n+1\,])$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \mu(]\,n\,;n+1\,]) = \nu(]\,n\,;n+1\,])}$$

2.(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \leqslant 1$, alors $x \in]\,-\infty\,;1\,]$, et sinon, alors $n = \lfloor x \rfloor \geqslant 1$ et $x \in]\,n\,;n+1\,]$, d'où l'inclusion $\mathrm{R} \subset \cdots$, et l'inclusion réciproque est immédiate.

$$\boxed{\mathbb{R} =]\,-\infty\,;1\,] \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}]\,n\,;n+1\,]\right)}$$

5.(c) Par définition d'une mesure,

$$\begin{aligned} \mu(\mathbb{R}) &= \mu(]\,-\infty\,;1\,]) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mu\left(]\,n\,;n+1\,]\right) \\ &= \nu(]\,-\infty\,;1\,]) + \sum_{n=1}^{+\infty} \nu\left(]\,n\,;n+1\,]\right) \qquad \text{(par hypothèse et question 5.(a))} \end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R})}$

5.(d) Notons C l'ensemble contenant tous les $]\,-\infty\,;x\,]$, ainsi que $\mathbb{R}$. Par hypothèse et d'après la question précédente, μ et ν coïncident sur C, et par définition de B, $\sigma(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$. Pour appliquer la question 4, il suffit de prouver que C est un π-système, ce qui est immédiat : soit $n \geqslant 1$ et soient $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ des éléments de C. Quitte à supprimer les termes égaux à $\mathbb{R}$ (intersecter avec $\mathbb{R}$ ne change rien), on suppose que tous les A_i sont de la forme $]\,-\infty\,;x_i\,]$, et donc leur intersection vaut $]\,-\infty\,;m\,]$ avec m le minimum des x_i (qui est bien défini car les x_i sont en nombre fini) donc cette intersection appartient à C : C est stable par intersection finie, donc est un π-système, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\mu = \nu}$$