Correction du DM n°6

Exercice

$\boxed{1}$ Soit $d = \mathrm{X} \wedge \mathrm{Y}$ et posons $x = \mathrm{X}/d$ et $y = \mathrm{Y}/d$, si bien que x et y sont premiers entre eux. Puisque $\mathrm{Z}^4 = d^4x^4 + d^4y^4$, alors d^4 divise Z^4 donc d divise Z. Or, d'après l'exercice 15 du poly (qu'on généralise aux puissances quatrièmes), il en découle que d divise Z donc il existe k tel que $\mathrm{Z} = dk$ si bien que $d^4x^4 + d^4y^4 = d^4k^4$ donc $x^4 + y^4 = k^4$: il suffit de poser $z = k^2$ pour conclure.

$$\boxed{\text{Il existe } x, y, z \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ avec } x \wedge y = 1 \text{ tels que } x^4 + y^4 = z^2}$$

$\boxed{2}$ D'après l'exercice 49 du poly, il existe a et b premiers entre eux impairs tels que

$$x = ab, y = \frac{a^2 - b^2}{2}, z = \frac{a^2 + b^2}{2} \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{a^2 - b^2}{2}, y = ab, z = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Supposons qu'on soit dans le premier cas. Soit $(u, v) \in \mathbb{N}^*$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} u^2 - v^2 & = & x^2 \\ 2uv & = & y^2 \\ u^2 + v^2 & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} u^2 - v^2 & = & ab \\ 2uv & = & \dfrac{a^2 - b^2}{2} \\ u^2 + v^2 & = & \dfrac{a^2 + b^2}{2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} u^2 - v^2 & = & ab & \\ 2uv & = & \dfrac{a^2 - b^2}{2} & \\ (u+v)^2 & = & a^2 & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + \mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} u^2 - v^2 & = & ab & \\ 2uv & = & \dfrac{a^2 - b^2}{2} & \\ u + v & = & a & (a, u, v \geqslant 0) \end{array}\right.$$

et en réinjectant l'expression $u = a - v$ dans la première ligne, et en simplifiant par $a > 0$, on trouve $v = (a - b)/2$ et donc $u = (a + b)/2$. Enfin, soit d un diviseur positif de u et v. Alors d divise $u + v = a$ et $u - v = b$ qui sont premiers entre eux donc $d = 1$: u et v sont premiers entre eux. L'autre cas de figure est analogue. Mon

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

$\boxed{3}$ Rappelons que x est supposé impair ($x = ab$ et a et b sont impairs) donc u et v ne peuvent pas être de même parité : en effet, si u et v sont de même parité, alors u^2 et v^2 également (u et u^2 sont de même parité, ainsi que v et v^2) donc x^2 est pair donc x est pair ce qui est exclu. Il en découle que u et v sont de parité différente. Supposons donc que u soit pair et v impair : alors $u \equiv 0[4]$ ou $u \equiv 2[4]$, et $v \equiv 1[4]$ ou $v \equiv 3[4]$. Dans tous les cas, $x^2 = u^2 - v^2 \equiv 3[4]$ ce qui est impossible car, comme on vient de le voir, un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4.

$$\boxed{u \text{ est impair et } v \text{ est pair.}}$$

$\boxed{4}$ D'après ce qui précède,$y^2 = 2uv$ et $v = 2w$ donc $y^2 = 4uw$ si bien que $uw = y^2/4 = (y/2)^2$: uw est donc un carré, et u et w sont premiers entre eux (car w est un diviseur de v et u et v sont premiers entre eux) donc sont eux-mêmes des carrés d'après l'exercice 15.

$$\boxed{u \text{ et } w \text{ sont des carrés.}}$$

$\boxed{5}$ Soit d un diviseur (positif) commun à x et v. Alors d divise x^2 et v^2 donc $u^2 = x^2 + v^2$, mais $u \wedge v = 1$ donc $u^2 \wedge v^2 = 1$ donc $d = 1$.

$$\boxed{x \text{ et } v \text{ sont premiers entre eux.}}$$

On a $x^2 + v^2 = u^2$: on peut dès lors appliquer encore une fois l'exercice 49 puis raisonner comme dans la question 2 : il existe b et c premiers entre eux tels que $v = 2bc$ (c'est forcément ce cas qui se produit puisque x est impair et v pair) et $u = b^2 + c^2$.

$$\boxed{\text{Il existe } b \text{ et } c \text{ premiers entre eux tels que } v = 2bc \text{ et } u = b^2 + c^2.}$$

6 $v = 2bc = 2w$ donc $bc = w$. Or, d'après la question 4, w est un carré, et on sait que b et c sont premiers entre eux donc (d'après l'exercice 15), b et c sont des carrés.

$$\boxed{\text{Il existe } x_1 \text{ et } y_1 \text{ premiers entre eux (car } b \text{ et } c \text{ le sont) tels que } b = {x_1}^2 \text{ et } c = {y_1}^2.}$$

7 On a ${x_1}^4 + {y_1}^4 = b^2 + c^2 = u$ mais u est un carré d'après la question 4 : il existe $z_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u = {z_1}^2$ si bien que ${x_1}^4 + {y_1}^4 = {z_1}^2$. Il suffit de prouver que $z_1 < z$, ce qui est immédiat puisque ${z_1}^2 = u \leqslant u^2 < u^2 + v^2 = z$.

$$\boxed{\text{Il existe une solution non triviale } (x_1, y_1, z_1) \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ avec } z_1 < z.}$$

On peut itérer le processus : à chaque fois donner une solution (x_n, y_n, z_n) avec $z_{n+1} < z_n$ ce qui donne en particulier une suite (z_n) d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible (une famille d'entiers naturels strictement décroissante finit par atteindre 0 et même les entiers négatifs) : on arrive donc à une absurdité.

$$\boxed{\text{L'équation de Fermat n'admet pas de solutions non triviales dans } \mathbb{N}.}$$

8 Si $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ est une solution non triviale dans $\mathbb{Z}$ alors $(|\mathrm{X}|, |\mathrm{Y}|, |\mathrm{Z}|)$ est une solution non triviale dans $\mathbb{N}$ (les puissances sont paires donc le signe n'a aucune importance), ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{L'équation de Fermat n'a aucune solution dans } \mathbb{Z}.}$$

> La méthode employée ci-dessus est la méthode employée par Fermat : elle s'appelle le principe de la descente infinie (de Fermat). Elle repose sur le fait qu'une suite d'entiers naturels ne peut pas être strictement décroissante (une descente infinie, justement, n'existe pas !). Le principe de la preuve est donc le suivant : si on a une solution avec $z > 0$, il y a une autre solution avec $0 < z_1 < z$ ce qui donne, en itérant le processus, une descente infinie, ce qui est absurde.
>
> Fermat avait prouvé de cette façon le cas $n = 4$, mais il a fallu attendre 1994 et Andrew Wiles pour que le théorème de Fermat soit prouvé pour tout entier $n \geqslant 3$.

Problème

Partie I. Minoration de la fonction π

1.(a) On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(1, a) &= \int_0^1 (1-x)^{a-1} \,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{(1-x)^a}{a} \right]_0^1
\end{aligned}$$

Finalement, $$\boxed{\mathrm{I}(1, a) = \frac{1}{a}}$$

1.(b) D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (1 - x + xy)^{a-1} \,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{j=0}^{a-1} \binom{a-1}{j} (xy)^j (1-x)^{a-1-j} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=0}^{a-1} \binom{a-1}{j} y^j \int_0^1 x^j (1-x)^{a-1-j} \,\mathrm{d}x \qquad \text{(linéarité de l'intégrale)}
\end{aligned}$$

Il suffit d'effectuer le changement d'indice $k = j+1$, $j = k-1$ pour conclure.

$$\boxed{\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{a-1}\binom{a-1}{k-1}y^{k-1}\mathrm{I}(k,a)}$$

1.(c) On a également :

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1+(y-1)x)^{a-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{(1+(y-1)x)^a}{a\times(y-1)}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{a}\times\left(\frac{y^a-1}{y-1}\right)\end{aligned}$$

On reconnaît la somme d'une suite géométrique (puisque $y \neq 1$) :

$$\frac{y^a-1}{y-1} = \sum_{j=0}^{a-1} y^j$$

Il suffit de poser $k = j+1$, $j = k-1$ pour conclure.

$$\boxed{\int_0^1 (1-x+xy)^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1}}$$

1.(d) On a donc prouvé que pour tout $y \in [\,0\,;1\,[$,

$$\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a} y^{k-1} = \sum_{j=1}^{a-1}\binom{a-1}{k-1}y^{k-1}\mathrm{I}(k,a)$$

On a donc deux fonctions polynomiales qui coïncident sur $[\,0\,;1\,[$ donc en une infinité de points : leurs coefficients sont égaux. Ainsi, si $k \in [\![\, 1\,;\, a-1\,]\!]$,

$$\frac{1}{a} = \binom{a-1}{k-1}\times \mathrm{I}(k,a)$$

L'indice étant muet, pour tout $b \in [\![\, 1\,;\, a-1\,]\!]$,

$$\frac{1}{a} = \binom{a-1}{b-1}\times \mathrm{I}(b,a)$$

ce qui donne la première égalité. La seconde découle d'un calcul simple en remplaçant les coefficients binomiaux par leur écriture factorielle.

$$\boxed{\mathrm{I}(b,a) = \frac{1}{a\binom{a-1}{b-1}} = \frac{1}{b\binom{a}{b}}}$$

2.(a) D'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(b,a) &= \int_0^1 x^{b-1}\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-x)^k\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\int_0^1 x^{b+k-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\left[\frac{x^{b+k}}{b+k}\right]\end{aligned}$$

Finalement, $$\boxed{\mathrm{I}(b,a)=\sum_{k=0}^{a-b}\binom{a-b}{k}(-1)^k\times\frac{1}{b+k}}$$

2.(b) D'après la question précédente,

$$\mathrm{I}(b,a)\times\Delta_a=\sum_{k=0}^{a-b}(-1)^k\binom{a-b}{k}\frac{\Delta_a}{k+b}$$

Or, pour tout $k\in[\![\,0\,;\,b-a\,]\!]$, $k+b\in[\![\,b\,;\,a\,]\!]$ et donc Δ_a est un multiple de $k+b$ (Δ_a est un multiple de tous les entiers de 1 à a). Il en découle que $\Delta_a/(k+b)\in\mathbb{N}$ donc $\mathrm{I}(b,a)\in\mathbb{Z}$ car somme et produit d'éléments de $\mathbb{Z}$. Or, $\mathrm{I}(b,a)\geqslant 0$ par positivité de l'intégrale (intégrale d'une fonction positive) si bien que

$$\boxed{\mathrm{I}(b,a)\times\Delta_a\in\mathbb{N}}$$

2.(c) D'après ce qui précède et la question 1.(d),

$$\boxed{\frac{\Delta_a}{b\binom{a}{b}}\in\mathbb{N}\text{ donc }b\binom{a}{b}\text{ divise }\Delta_a.}$$

3.(a) Δ_{2n+1} est un multiple commun à $1,2\dots,2n+1$ et en particulier à $1,2,\dots,2n$ donc est divisible par leur PPCM.

$$\boxed{\Delta_{2n}\text{ divise }\Delta_{2n+1}.}$$

En appliquant la question 2.(c) avec $b=n$ et $a=2n$, on en déduit que $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n} et puisque Δ_{2n} divise Δ_{2n+1}, $n\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}. De même qu'à la question précédente, on prouve que $a\binom{a-1}{b-1}$ divise Δ_a, et en prenant $b=n+1$ et $a=2n+1$, il vient que $(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1}.

$$\boxed{\text{Les entiers }n\binom{2n}{n}\text{ et }(2n+1)\binom{2n}{n}\text{ divisent }\Delta_{2n+1}.}$$

3.(b) Soit d un diviseur positif commun à n et $2n+1$. Alors d divise $2n+1-2\times n=1$ donc $d=1$.

$$\boxed{n\text{ et }2n+1\text{ sont premiers entre eux.}}$$

Attention n est premier avec $2n+1$ mais pas forcément avec $\binom{2n}{n}$ donc on ne peut pas conclure directement. D'après la question précédente, il existe $(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^2$ tel que

$$\Delta_{2n+1}=n\binom{2n}{n}\times k_1=(2n+1)\binom{2n}{n}\times k_2$$

Par conséquent, $nk_1=(2n+1)k_2$ si bien que n divise $(2n+1)k_2$. Or, n et $2n+1$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauß, n divise k_2 c'est-à-dire qu'il existe k_3 tel que $k_2=nk_3$. En conclusion,

$$\boxed{\Delta_{2n+1}=(2n+1)\times\binom{2n}{n}\times n\times k_3 : n(2n+1)\binom{2n}{n}\text{ divise }\Delta_{2n+1}.}$$

4.(a) D'après la formule du binôme de Newton,

$$\boxed{4^n=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\leqslant\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{n}=(2n+1)\binom{2n}{n}}$$

4.(b) D'après la question précédente,

$$n4^n \leqslant n(2n+1)\binom{2n}{n}$$

Or, d'après la question 3.(b), $n(2n+1)\binom{2n}{n}$ divise Δ_{2n+1} et Δ_{2n+1} n'est pas nul. D'après le cours (inutile de prendre des valeurs absolues, tout est positif),

$$\boxed{n4^n \leqslant n(2n+1)\binom{2n}{n} \leqslant \Delta_{2n+1}}$$

4.(c) Séparons les cas selon la parité de n.

- Premier cas : n est pair. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Dès lors, $\Delta_n = \Delta_{2k} \geqslant \Delta_{2k-1}$. En effet, Δ_{2k-1} divise Δ_{2k} donc lui est inférieur (on travaille avec des entiers strictement positifs). D'après la question précédente, $\Delta_{2k-1} = \Delta_{2(k-1)+1} \geqslant (k-1)4^{k-1}$. Dès lors, en se souvenant que $k = n/2$,

$$\begin{aligned}\Delta_n &\geqslant \left(\frac{n}{2}-1\right)4^{\frac{n}{2}-1} \\ &\geqslant \left(\frac{n-2}{2}\right)\frac{4^{\frac{n}{2}}}{4} \\ &\geqslant \left(\frac{n-2}{8}\right)\times 2^n\end{aligned}$$

  Or, n est pair et $n \geqslant 9$ donc $n \geqslant 10$ si bien que $\dfrac{n-2}{8} \geqslant 1$. On en déduit que $\Delta_n \geqslant 2^n$.
- Deuxième cas : n est impair. Il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$. Toujours d'après la question précédente,

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Delta_{2k+1} \\ &\geqslant k4^k \\ &\geqslant \frac{n-1}{2}\times 4^{\frac{n-1}{2}} \\ &\geqslant \frac{n-1}{2}\times 2^{n-1} \\ &\geqslant \frac{n-1}{4}\times 2^n\end{aligned}$$

  Or, $n \geqslant 9$ donc $n-1 \geqslant 4$ si bien que $\Delta_n \geqslant 2^n$.

Pour $n = 7$, $2^7 = 128$ et $\Delta_7 = 4\times 3\times 5\times 7 = 12\times 35 > 128$ et $\Delta_8 = 8\times 3\times 5\times 7 = 24\times 35 > 256 = 2^8$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 7,\ \Delta_n \geqslant 2^n}$$

5.(a) Il suffit de justifier que les facteurs premiers de Δ_n sont inférieurs ou égaux à n, le résultat découlera ensuite de la décomposition de Δ_n en produit de facteurs premiers. Soit donc $p > n$. Alors p est premier avec $1, 2, \dots, n$ donc est premier avec $1\times 2\times\cdots\times n = n!$. Alors Δ_n divise $n!$ donc Δ_n est premier avec p donc p n'est pas un facteur premier de Δ_n : on a le résultat par contraposée.

$$\boxed{\Delta_n = \prod_{p\leqslant n} p^{v_p(\Delta_n)}}$$

5.(b) Puisque $v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), \dots, v_p(n))$, il existe $k \leqslant n$ tel que $v_p(\Delta_n) = v_p(k)$. Il en découle que $p^{v_p(\Delta_n)} = p^{v_p(k)}$ divise k (puisque $p^{v_p(k)}$ apparaît dans la décomposition en produit de facteurs premiers de k) et donc $p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant k \leqslant n$.

$$\boxed{p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n}$$

5.(c) Par produit (on peut multiplier les inégalités positives),

$$\Delta_n \leqslant \prod_{p \leqslant n} n$$

Or, ce produit contient $\pi(n)$ termes (le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n) ce qui est le résultat voulu (un produit d'un terme constant est le terme constant à la puissance le nombre de termes).

$$\boxed{\Delta_n \leqslant n^{\pi(n)}}$$

6 Soit $n \geqslant 7$. D'après les questions 4.(c) et 5.(c), $2^n \leqslant \Delta_n \leqslant n^{\pi(n)} = e^{\pi(n)\ln(n)}$. La fonction ln est strictement croissante et $\ln(n) > 0$, d'où le résultat. De plus :

- $\pi(2) = 1$ et $\ln(2) \times \dfrac{2}{\ln(2)} = 2$ donc cette inégalité est fausse pour $n = 2$.
- $\pi(3) = 2$ et $\ln(2) \times \dfrac{3}{\ln(3)} \approx 1.89$ donc cette inégalité est vraie pour $n = 3$.
- $\pi(4) = 2$ et $\ln(2) \times \dfrac{4}{\ln(4)} = 2$ donc cette inégalité est vraie pour $n = 4$.
- $\pi(5) = 3$ et $\ln(2) \times \dfrac{5}{\ln(5)} \approx 2.15$ donc cette inégalité est vraie pour $n = 5$.
- $\pi(6) = 3$ et $\ln(2) \times \dfrac{6}{\ln(6)} \approx 2.32$ donc cette inégalité est vraie pour $n = 6$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \qquad \ln(2) \times \frac{n}{\ln(n)} \leqslant \pi(n)}$$

Partie II. Majoration de la fonction π

1 cf. exercice 77 du chapitre 6.

2.(a) On fait comme en TD, à ceci près que cette fois la fonction est croissante. Soit donc $k \geqslant 2$.

- Soit $t \in [\,k\,;k+1\,]$, par croissance de la fonction ln, $\ln(t) \geqslant \ln(k)$. Par croissance de l'intégrale (on reverra tout cela en 2022) :

$$\int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \ln(k)$$

- L'autre inégalité s'obtient de façon tout-à-fait analogue en remarquant que pour tout $t \in [\,k-1\,;k\,]$, $\ln(t) \leqslant \ln(k)$.

$$\boxed{\forall k \geqslant 2 \qquad \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k) \leqslant \int_k^{k+1} \ln(t)\,\mathrm{d}t}$$

2.(b) L'inégalité de droite vient directement de la question précédente. Pour l'autre, il suffit de l'appliquer à $k-1$ au lieu de k.

$$\boxed{\forall k \geqslant 2 \qquad \ln(k-1) \leqslant \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(k)}$$

2.(c) Sommons les inégalités obtenues à la question précédente, pour $k \in [\![\,2\,;\,m\,]\!]$:

$$\sum_{k=2}^{m} \ln(k-1) \leqslant \sum_{k=2}^{m} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{m} \ln(k)$$

D'après la relation de Chasles (et en se rappelant qu'une primitive de la fonction ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$) il vient

$$\sum_{k=2}^{m} \int_{k-1}^{k} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^m \ln(t)\,\mathrm{d}t = m\ln(m) - m - (1\ln(1) - 1) = m\ln(m) - m + 1$$

Ensuite, en se souvenant que la somme des ln est le ln du produit, on a

$$\sum_{k=1}^{m} \ln(k) = \ln\left(\prod_{k=1}^{m} k\right) = \ln(m!) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{m-1} \ln(k) = \ln((m-1)!)$$

en d'autres termes $\boxed{\ln((m-1)!) \leqslant m\ln(m) - m + 1 \leqslant \ln(m!)}$

La fonction exponentielle étant croissante

$$(m-1)! \leqslant e^{m\ln(m)-m+1} = m^m e^{-m} \times e = e\left(\frac{m}{e}\right)^m \leqslant m!$$

En multipliant l'inégalité de gauche par m, on obtient

$$m \times (m-1)! = m! \leqslant me\left(\frac{m}{e}\right)^m$$

Il suffit de combiner les deux dernières lignes pour conclure :

$$\boxed{e\left(\frac{m}{e}\right)^m \leqslant m! \leqslant me\left(\frac{m}{e}\right)^m}$$

$\boxed{3}$ Notons $(p_k)_{k\geqslant 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Puisqu'il y a $\pi(n)$ nombres premiers inférieurs ou égaux à n, $\prod\limits_{p\leqslant n} p = p_1 \times \cdots \times p_{\pi(n)}$. De plus, la suite des nombres premiers étant strictement croissante, $p_k \geqslant k$ pour tout k (ce qu'on prouve pas une récurrence immédiate). Par produit (tout est positif), et en utilisant la question 1.(c),

$$\boxed{\prod_{k=1}^{\pi(n)} k = \pi(n)! \leqslant \prod_{k=1}^{\pi(n)} p_k = \prod_{p\leqslant n} p \leqslant 4^n}$$

D'après la question précédente, avec $m = \pi(n)$,

$$\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \leqslant e\left(\frac{\pi(n)}{e}\right)^{\pi(n)} \leqslant \pi(n)! \leqslant 4^n$$

En particulier, $$\pi(n)^{\pi(n)} \times e^{-\pi(n)} \leqslant 4^n$$

Il suffit d'appliquer la fonction ln croissante pour conclure.

$$\boxed{\pi(n)\ln(\pi(n)) - \pi(n) \leqslant n\ln(4)}$$

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$ f est une primitive du ln donc f est dérivable et $f' = \ln$: nulle en 1 et strictement positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$ (vous, faites un tableau de variations). On en déduit que f est strictement croissante. Puisque $\pi(n_0) > e \times \dfrac{n_0}{\ln(n_0)}$, alors

$$f(\pi(n_0)) > f\left(e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)}\right)$$

Dès lors

$$\begin{aligned}
\pi(n_0) \times \ln(\pi(n_0)) - \pi(n_0) &> e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \times \ln\left(e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)}\right) - e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \\
&> e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \times \ln(e) + e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \times \ln\left(\frac{n_0}{\ln(n_0)}\right) - e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \\
&> e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} + e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \times (\ln(n_0) - \ln(\ln(n_0))) - e \times \frac{n_0}{\ln(n_0)} \\
&> en_0 - en_0 \times \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 3, $\pi(n_0) \times \ln(\pi(n_0)) - \pi(n_0) < n_0\ln(4)$ donc

$$n_0\ln(4) > en_0 - en_0 \times \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}$$

En divisant par $en_0 > 0$:

$$\frac{\ln(4)}{e} > 1 - \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)}$$

ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)} > 1 - \frac{\ln(4)}{e} = \frac{e - \ln(4)}{e}}$$

$\boxed{\textbf{4.(b)}}$ Résulte d'une simple étude de fonction (flemme). Par conséquent,

$$\frac{e-\ln(4)}{e} < \frac{\ln(\ln(n_0))}{\ln(n_0)} \leqslant \frac{1}{e}$$

donc $e - \ln(4) < 1$ ce qui est absurde : en effet, $\ln(4) = 2\ln(2) \approx 2 \times 0.693 < 2 \times 0.7 = 1.4$ et $e \approx 2.71$ donc $e - \ln(4) > 2.7 - 1.4 = 1.3 \geqslant 1$. Ce qui est absurde, c'est l'hypothèse selon laquelle il existe n_0 tel que $\pi(n_0) > e \times \dfrac{n_0}{\ln(n_0)}$. En conclusion :

$$\boxed{\forall n \geqslant 3, \qquad \pi(n) \leqslant e \times \frac{n}{\ln(n)}}$$