Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Premier semestre - Analyse - Chapitres 10 à 15.

Table des matières

Chapitre 10

Calcul intégral

« - What if she ends up with a toddler who doesn't know if he should use an integral or a differential to solve for the area under a curve ?
- I'm sure she'll still love him.
- I wouldn't. »

The Big Bang Theory.

Vrai ou faux ?

1. La valeur absolue n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est continue, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto f(x) - f(a)$.
3. Une primitive de la fonction constante égale à 1 est $x \mapsto x - 2023$.
4. La fonction inverse n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}^{-*}$.
5. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $G : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $G'(x) = f(3x) - f(2x)$.

10.1 Divers

Exercice 1 - Autour de la valeur absolue : ✪ Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^n \sum_{k=0}^n |x-k|\,\mathrm{d}x\,.$
2. ✪✪ $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x\,.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$ Donner sans calcul la valeur de $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$

Correction :

1. Par linéarité de l'intégrale puis d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^n |x-k| \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^k |x-k| \, \mathrm{d}x + \int_k^x |x-k| \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \int_0^k (k-x) \, \mathrm{d}x + \int_k^x (x-k) \, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left[-\frac{(k-x)^2}{2} \right]_0^k + \left[\frac{(x-k)^2}{2} \right]_k^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n-k)^2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{2} + \sum_{j=0}^{n} \frac{j^2}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

2. Séparons les cas selon le signe de la fonction intégrée.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-2}^{-1} \frac{|x+1|}{|x|+1} \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{|x+1|}{|x|+1} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{|x+1|}{|x|+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{(-1-x)}{1-x} \, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \frac{x+1}{1-x} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{5} \frac{x+1}{x+1} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{-1} \frac{1-x}{1-x} \, \mathrm{d}x - 2\int_{-2}^{-1} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x - \int_{-1}^{0} \frac{1-x}{1-x} \, \mathrm{d}x + 2\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x + 5 \\
&= 1 - 2[-\ln(1-x)]_{-2}^{-1} - 1 + 2[-\ln(1-x)]_{-1}^{0} + 5 \\
&= -2(-\ln(2) + \ln(3)) + 2(\ln(2)) + 5 \\
&= -2\ln(3) + 4\ln(2) + 5
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-1}^{0} -x^2 \, \mathrm{d}x + \int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= -\left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{8}{3} \\
&= \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

Enfin, $I_4 = 0$ car intégrale d'une fonction impaire (car produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire) sur un intervalle centré en 0.

Exercices 2 - Fonctions composées : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes (on donnera des primitives sans s'intéresser aux domaines de définition ou de primitivation) :

1. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)^2$.
8. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}$.
9. $f : x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$.

10. $f : x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(x)}{1+x^2}$.

11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(\ln(x))}{x}$.

12. $f : x \mapsto e^{e^x+x}$.

13. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.

14. $f : x \mapsto e^x \sin(e^x)$.

15. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{a+b\cos(x)}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Correction :

1. On a une fonction de la forme $-u'e^u/2$ qui se primitive en $-e^u/2$ si bien que
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad = \quad -\frac{e^{-x^2}}{2}$$
2. On a une fonction de la forme $u' \times u^{-1/2}$ qui se primitive en $2u^{1/2}$, si bien que
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \,=2\sqrt{\ln(x)}$$
3. On a une fonction de la forme $u'e^u$ qui se primitive en e^u donc une primitive de f est $x \mapsto e^{\tan(x)}$.
4. On a une fonction de la forme $u' \times u$ qui se primitive en $u^2/2$ si bien qu'une primitive de f est $x \mapsto \ln(x)^2/2$ (le carré est à l'extérieur du ln).
5. On a $f(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$ donc f est de la forme $u'/2\sqrt{u}$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \,= \sqrt{x^2+3}$$
6. On a une fonction de la forme $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{u'}{u^2}$ donc une primitive de f est $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{-1}{u}$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \,= \frac{-1}{2\left(e^{2x}+1\right)}$$
7. On a une fonction de la forme $u'\times u^2$ donc une primitive de f est $u^3/3$ c'est-à-dire :
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \,= \frac{\ln(x)^3}{3}$$
8. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{\text{Arcsin}(x)}$ donc on a une fonction de la forme $u' \times \sqrt{u} = u' \times u^{1/2}$ si bien qu'une primitive est $u^{3/2}/(3/2) = 2u^{3/2}/3$ si bien qu'une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{2}{3}\text{Arcsin}^{3/2}(x)$.
9. Si $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x)\times\cos^2(x)\sin^4(x) \\ &= \cos(x)\times\left(1-\sin^2(x)\right)\sin^4(x) \\ &= \cos(x)\sin^4(x) - \cos(x)\sin^6(x) \end{aligned}$$
On a des fonctions de la forme $u'u^4$ et $u'u^6$ donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{\sin^5(x)}{5} - \dfrac{\sin^7(x)}{7}$.
10. On a une fonction de la forme $u'\times u$ donc une primitive de f est u^2 c'est-à-dire $x\mapsto \text{Arctan}(x)^2$.
11. On a une fonction de la forme $u' \times \tan(u)$. Or, une primitive de tan est $-\ln|\cos|$ donc une primitive de f est $x \mapsto -\ln|\cos(u)| = -\ln|\cos(\ln(x))|$.
12. Tout d'abord, si $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = e^x\times e^{e^x}$ donc on a une fonction de la forme $u'\times e^u$ donc une primitive de f est $x\mapsto e^{e^x}$.
13. On a $f(x) = (x-1)^{-1/3}$ donc une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{(x-1)^{2/3}}{2/3} = \dfrac{3}{2}(x-1)^{2/3}$.
14. On a une fonction du type $u'\sin(u)$ donc
$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t \,= -\cos\left(e^x\right)$$
15. On a une fonction sous la forme $-\dfrac{1}{b}\times\dfrac{u'}{u}$ donc une primitive de f est $x\mapsto -\dfrac{1}{b}\ln(a+b\cos(x))$.

Exercice 3 - Polynômes de Bernoulli : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$g' = f \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. On peut donc définir par récurrence la suite de fonctions polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

- $B_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, {B_n}' = n \times B_{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Ainsi, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie : les fonctions polynômes B_n sont appelés polynômes de Bernoulli.

(a) Expliciter B_1, B_2 et B_3.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2, B_n(1) - B_n(0) = 0$.

Correction :

1. Soit F une primitive de f (qui existe car f est continue). Soit g une autre primitive de f. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $g = F + \lambda$. Alors :

$$\begin{aligned} g \text{ convient} \quad &\iff \quad \int_0^1 F(t) + \lambda\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff \quad \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \lambda\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\iff \quad \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t + \lambda = 0 \\ &\iff \quad \lambda = -\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

En d'autres termes, il existe un unique λ tel que $F + \lambda$ convienne : d'où l'existence et l'unicité de g.

2. (a) ${B_1}' = 1 \times B_0 = 1$ donc il existe b_1 tel que, pour tout x, $B_1(x) = x + b_1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 t + b_1\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + b_1 \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + b_1 \\ &= \frac{1}{2} + b_1 \end{aligned}$$

et puisque cette intégrale est nulle, on en déduit que $b_1 = -1/2$ si bien que B_1 est la fonction $x \mapsto x - 1/2$. On sait que ${B_2}' = 2 \times B_1$ donc, pour tout x, ${B_2}'(x) = 2x - 1$ si bien qu'il existe b_2 tel que pour tout x, $B_2(x) = x^2 - x + b_2$. On trouve de même que $b_2 = 1/6$ si bien que B_2 est la fonction $x \mapsto x^2 - x + \dfrac{1}{6}$. On trouve de même que B_3 est la fonction $x \mapsto x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}x$.

(b) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} B_n(1) - B_n(0) &= \int_0^1 {B_n}'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 nB_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

10.2 Fonctions rationnelles

Exercice 4 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+7}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

Correction :

1. Décomposons en éléments simples. Puisque le quotient est nul (le degré du numérateur vaut 1 et celui du dénominateur vaut 3), il existe a, b, c tels que, pour tout $x \neq 2, 3, 4$:
$$f(x) = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-4}$$
On trouve comme d'habitude $a = 5/2$, $b = -7$ et $c = 9/2$ si bien que pour tout $x \neq 2, 3, 4$,
$$f(x) = \frac{5}{2(x-2)} - \frac{7}{x-3} + \frac{9}{2(x-4)}$$
Dès lors, une primitive de f est (ne pas oublier les valeurs absolues) $x \mapsto \dfrac{5}{2}\ln|x-2| - 7\ln|x-3| + \dfrac{9}{2}\ln|x-4|$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ si bien que, pour tout $x \neq 1, 2$,
$$f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$
On trouve de même qu'une primitive de f est $x \mapsto -\ln|x-1| + \ln|x-2|$.
3. Le discriminant de $x^2 + 4x + 7$ étant strictement négatif, f ne peut pas être écrite sous une forme plus simple. On se retrouve donc dans le cas de figure du cours. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisqu'il n'y a pas de x, on se ramène à la deuxième étape : mettre le dénominateur sous forme canonique.
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 + 2\times x \times 2 + 7} \\ &= \frac{1}{(x+2)^2 + 3} \end{aligned}$$
Dès lors :
$$\begin{aligned} \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t+2)^2+3} \\ &= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \dfrac{(t+2)^2}{3}} \\ &= \frac{1}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(\dfrac{t+2}{\sqrt{3}}\right)^2} \end{aligned}$$
Effectuons le changement de variable $u = \dfrac{t+2}{\sqrt{3}}$, $t = u\sqrt{3} - 2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,\sqrt{3}$, ce qui donne :
$$\begin{aligned} \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{3}\int^{\frac{x+2}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}t\,\sqrt{3}}{1+u^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$
4. Le dénominateur a un discriminant nul (ou on reconnaît une identité remarquable) si bien que, pour tout $x \neq 3$,
$$f(x) = \frac{1}{(x-3)^2}$$
On en déduit qu'une primitive de f est $x \mapsto \dfrac{-1}{x-3}$.

5. Pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Dès lors, il existe a, b, c tels que pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

En multipliant par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1, il vient $a = 1/3$. En évaluant en 0, on trouve $1 = a + c$ donc $c = 2/3$ et en évaluant en 1 on trouve $1/2 = a/2 + b + c$ si bien que $b = -1/3$. En d'autres termes, pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3} \times \frac{-x+2}{x^2-x+1}$$

Soit $x \neq -1$. Posons $g(x) = \dfrac{-x+2}{x^2-x+1}$. Il suffit donc de trouver une primitive de g. Première étape : faire apparaître du u'/u.

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x-4}{x^2-x+1} \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2-x+1} \end{aligned}$$

Posons enfin $h(x) = \dfrac{1}{x^2-x+1}$. Idem, comme en cours, écrivons le dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^2 - 2 \times x \times \dfrac{1}{2} + 1} \\ &= \frac{1}{(x-1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 + \dfrac{4}{3}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \times \frac{1}{1 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\right)^2} \end{aligned}$$

Dès lors, en effectuant le changement de variable $u = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)$, $t = \dfrac{\sqrt{3}}{2}u + \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{2}$, une primitive de h est :

$$\begin{aligned} \int^x h(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3} \times \int^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)\right)^2} \\ &= \frac{4}{3} \times \int^{\frac{2}{\sqrt{3}}(x-1/2)} \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{1}{3} \times \ln|x+1| + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| + \frac{3}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

c'est-à-dire :

$$x \mapsto \frac{1}{3} \times \ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Exercice 5 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+3}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5}$.
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t-2}$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)}$$

Il existe donc a et b tels que pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}$$

On trouve comme d'habitude $a = 1/2$ et $b = -1/2$ si bien que

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1} &= \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \frac{1}{2}\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} \\
&= \frac{1}{2}[\ln|t-1|]_3^4 - \frac{1}{2}[\ln[t+1|]_3^4 \\
&= \frac{1}{2}(\ln(3)-\ln(2)) - \frac{1}{2}(\ln(5)-\ln(4)) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3\times 4}{2\times 5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{6}{5}\right)
\end{aligned}$$

2. On décompose en éléments simples : pour tout $t \neq -1, 2$:

$$\frac{1}{(t+1)(t-2)} = -\frac{1}{3}\times\frac{1}{t+1} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{t-2}$$

si bien que (ne pas oublier la valeur absolue dans la deuxième intégrale !)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)} &= -\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t-2} \\
&= -\frac{1}{3}[\ln|t+1|]_0^1 + \frac{1}{3}[\ln|t-2|]_0^1 \\
&= -\frac{1}{3}\times\ln(2) - \frac{1}{3}\times\ln(2) \\
&= -\frac{2}{3}\times\ln(2)
\end{aligned}$$

3. Méthode du « $+3-3$ » à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{t}{2t+3} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{2t+3} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t+3}{2t+3} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3}{2t+3} \\
&= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times\left[\frac{\ln|2t+3|}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{3}{2}\times\frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\times(\ln(5)-\ln(3))
\end{aligned}$$

4. Le discriminant du dénominateur étant strictement négatif, on revient encore à l'exemple du cours. On met sous forme canonique etc. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{9t^2+6t+5} &= \frac{1}{9\left(t^2+\frac{2t}{3}+\frac{5}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(t^2+2\times t\times\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}\right)} \\
&= \frac{1}{9\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+4}
\end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5} &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9\left(t+\frac{1}{3}\right)^2+4} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\frac{9}{4}\left(t+\frac{1}{3}\right)^2}
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $u = \frac{3}{2}\left(t+\frac{1}{3}\right)$, $t = \frac{2}{3}\times u - \frac{1}{3}$, $\mathrm{d}t = \frac{2\,\mathrm{d}u}{3}$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5} &= \frac{1}{4}\int_{1/2}^2 \frac{2}{3}\times\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{6}[\mathrm{Arctan}(u)]_{1/2}^2 \\
&= \frac{1}{6}\times\left(\mathrm{Arctan}(2)-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

5. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2+t-2 = (t-1)(t+2)$. On trouve comme d'habitude que pour tout $t \neq 1, -2$:

$$\frac{1}{t^2+t-2} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{t-1} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{t+2}$$

On trouve comme d'habitude que cette intégrale vaut $\frac{1}{3}\ln\left(\frac{8}{5}\right)$.

6. Commençons par décomposer en éléments simples : pour tout $t \neq -1$,

$$\frac{2t+5}{(t+1)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2}$$

En multipliant par $(t+1)^2$ et en faisant tendre t vers -1, on trouve $b = 3$ puis, en évaluant en 0, on trouve que $5 = a + b$ donc $a = 2$ si bien que

$$\frac{2t+5}{(t+1)^2} = \frac{2}{t+1} + \frac{3}{(t+1)^2}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t &= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} + 3\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} \\ &= 2[\ln|t+1|]_0^1 + 3\left[\frac{-1}{t+1}\right]_0^1 \\ &= 2\ln(2) + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

7. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t(t^2-4) = t(t-2)(t+2)$ donc il existe a, b, c tels que pour tout $t \neq 0, \pm 2$,

$$\frac{4}{t(t^2-4)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t-2} + \frac{c}{t+2}$$

On trouve comme d'habitude que $a = -1$, $b = 1/2$ et $c = 1/2$. On trouve comme précédemment (ne pas oublier les valeurs absolues dans les ln) $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{27}{20}\right)$.

8. Ici, attention avant de décomposer en éléments simples : il ne faut pas oublier le quotient. On trouve que la division euclidienne du numérateur par le dénominateur est : $(6t^2+t+5) = (2t+1)\times(3t-1)+6$ si bien que pour tout $t \neq -1/2$,

$$\frac{6t^2+t+5}{2t+1} = 3t - 1 + \frac{6}{2t+1}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (3t+1)\,\mathrm{d}t + 3\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2t+1} \\ &= \left[\frac{3t^2}{2} + t\right]_0^1 + 3[\ln|2t+1|]_0^1 \\ &= \frac{5}{2} + 3\ln(3) \end{aligned}$$

9. Idem, commençons par effectuer la division euclidienne, et on trouve : $t^3 + 2t = (t^2+t+1)\times(t-1) + 2t + 1$. Dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{t^3+2t}{t^2+t+1} = t - 1 + \frac{2t+1}{t^2+t+1}$$

L'avantage est que la fraction est déjà sous la forme u'/u donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (t-1)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{2t+1}{t^2+t+1} \\ &= \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^1 + [\ln|t^2+t+1|]_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + \ln(3) \end{aligned}$$

Exercice 6 : ✪✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes là où elles sont définies :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2}$.

Correction :

1. Si on pose $Z = x^2$, l'équation $x^4+x^2+1=0$ devient $Z^2+Z+1=0$ dont les solutions sont j et j^2 si bien que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
x^4+x^2+1 &= (Z-j)(Z-j^2)\\
&= \left(x^2-e^{2i\pi/3}\right)\times\left(x^2-e^{4i\pi/3}\right)\\
&= \left(x-e^{i\pi/3}\right)\times\left(x+e^{i\pi/3}\right)\times\left(x-e^{2i\pi/3}\right)\times\left(x+e^{2i\pi/3}\right)\\
&= \left(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \left(x-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= \left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\times\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\\
&= (x^2-x+1)\times(x^2+x+1)
\end{aligned}$$

Dès lors, il existe (a,b,c,d) uniques tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{ax+b}{x^2-x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, en évaluant en $-x$:

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{-ax+b}{x^2+x+1}+\frac{-cx+d}{x^2-x+1}$$

Par unicité, on en déduit que $c=-a$ et $b=d$. En évaluant en 0, il vient : $1=b+d$ et puisque $b=d$, on trouve $b=d=1/2$. Enfin, en évaluant en 1, on obtient : $1/3 = a+b+\dfrac{c+d}{3}$ donc

$$\frac{1}{3} = a+\frac{1}{2}-\frac{a}{3}+\frac{1}{6}$$

On trouve alors $2a/3=-1/3$ et donc $a=-1/2$ et $c=1/2$. En d'autres termes, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{-1}{2}\times\frac{x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Posons

$$g(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}\qquad\text{et}\qquad h(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Cherchons à présent une primitive de g et une primitive de h. Faisons comme en classe : faisons apparaître du u'/u.

$$g(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-x+1}$$

Posons $u(x)=\dfrac{1}{x^2-x+1}$. Il suffit donc de trouver une primitive de u pour trouver une primitive de g. Mettons le dénominateur sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{x^2-2\times x\times\dfrac{1}{2}+1}\\
&= \frac{1}{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}
\end{aligned}$$

Par conséquent, en faisant aussi le changement de variable $u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}$, $\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}u}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int^x u(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{1 + \frac{4}{3}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\int^x \frac{dt}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^2} \\
&= \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}\int^{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)} \frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

On trouve donc qu'une primitive de g est

$$x \mapsto \frac{1}{2} \times \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Par un raisonnement analogue, une primitive de h est :

$$x \mapsto \frac{1}{2} \times \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

si bien qu'une primitive de f est :

$$x \mapsto -\frac{1}{4} \times \ln|x^2 - x + 1| - \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{4} \times \ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)$$

2. Il existe a, b, c, d tels que pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{cx+d}{1+x^2}$$

En multipliant par $(x+2)^2$ et en faisant tendre x vers -2, il vient : $b = -3/5$. En multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve : $0 = a + c$ donc $c = -a$. En évaluant en -1, on trouve :

$$\begin{aligned}
0 &= a + b + \frac{-c+d}{2} \\
&= a - \frac{3}{5} + \frac{a+d}{2} \\
&= \frac{3a}{2} - \frac{3}{5} + \frac{d}{2}
\end{aligned}$$

Enfin, en évaluant en 0, on trouve :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + d \\
&= \frac{a}{2} - \frac{3}{20} + d
\end{aligned}$$

On trouve après calculs que $a = 8/25$, $c = -8/25$ et $d = 6/25$ si bien que pour tout $x \neq -2$,

$$f(x) = \frac{8}{25} \times \frac{1}{x+2} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{-8x+6}{25(1+x^2)}$$

Trouver une primitive des deux premiers termes ne présente pas de difficulté. De plus,

$$\frac{-8x+6}{25(1+x^2)} = \frac{-4}{25} \times \frac{2x}{1+x^2} + \frac{6}{25} \times \frac{1}{1+x^2}$$

Finalement, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{8}{25} \times \ln|x+2| + \frac{3}{5} \times \frac{1}{x+5} - \frac{4}{25} \times \ln|1+x^2| + \frac{6}{25} \times \mathrm{Arctan}(x)$$

10.3 Trigonométrie sans changement de variable

Exercice 7 - Linéarisation : ✪

1. Donner une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$.
2. **Remake :** Donner une primitive de $f : x \mapsto \sin(x)^2\cos(2x)$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule donnant $\sin(a)\sin(b)$ puis celle donnant $\sin(a)\cos(b)$ et $\sin(2a)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}(\cos(-x) - \cos(3x))\sin(3x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(3x)\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(3x)\cos(3x) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\sin(4x) + \sin(2x)) - \frac{\sin(6x)}{4} \\ &= \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(6x)}{4} \end{aligned}$$

Dès lors, une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \frac{-\cos(4x)}{16} - \frac{\cos(2x)}{8} + \frac{\cos(6x)}{24}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \times \cos(2x) \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos^2(2x)}{2} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(4x) + 1}{4} \\ &= \frac{\cos(2x)}{2} - \frac{\cos(4x)}{4} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

On trouve finalement qu'une primitive de f est :

$$F : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{4} - \frac{\sin(4x)}{16} - \frac{x}{4}$$

Exercice 8 : ✪ Soient $(n, k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer (en différenciant les cas) l'intégrale

$$I_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

Correction : En utilisant la formule donnant $\cos(a)\cos(b)$, et par linéarité de l'intégrale :

$$I_{n,k} = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+k)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n-k)t)\,\mathrm{d}t$$

On a envie de primitiver en $t \mapsto \dfrac{\sin((n \pm k)t)}{n \pm k}$: encore faut-il que les dénominateurs soient non nuls. Cela justifie la disjonction de cas suivante :

- Premier cas : $n \neq k$ (et alors $n + k \neq 0$ car la seule façon d'obtenir $n + k = 0$ avec n et k positifs est d'avoir $n = k = 0$). Alors $n \pm k \neq 0$ donc :

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+k)t)}{n+k}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-k)t)}{n-k}\right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Deuxième cas : $n = k \neq 0$. Alors $n-k=0$ mais $n+k=0$, un seul des deux est nul. Dès lors,

$$\begin{aligned}
I_{n,k} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+k)t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+k)t)}{n+k}\right]_0^\pi + \frac{\pi}{2} \\
&= 0 + \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

- Troisième cas : $n = k = 0$. Alors $n+k = n-k = 0$, les deux intégrales valent $\pi/2$ donc $I_{n,k} = \pi$.

Exercice 9 - Primitives (presque) usuelles : ✪

1. Déterminer des primitives des fonctions :

(a) $f : x \mapsto \tan(x)$.
(b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$.
(c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.
(d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

2. ✪✪ Montrer que $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $]\,0\,;\pi\,[$. En déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Correction :

1. (a) Puisque $\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = \dfrac{-\cos'}{\cos}$, une primitive de tan est $-\ln|\cos|$.
 (b) Puisque $\dfrac{1}{\tan} = \dfrac{\cos}{\sin} = \dfrac{\sin'}{\sin}$, une primitive de $\dfrac{1}{\tan}$ est $\ln|\sin|$.
 (c) C'est du cours : $1/\cos^2$ est la dérivée de tan donc tan est une primitive de $1/\cos^2$.
 (d) La dérivée de $1/\tan = \cos/\sin$ est

$$\frac{\cos'\times\sin - \sin'\times\cos}{\sin^2} = \frac{-\sin^2-\cos^2}{\sin^2} = \frac{-1}{\sin^2}$$

 Finalement, $-1/\tan$ est une primitive de $1/\sin^2$.

2. Soit $x \in\,]\,0\,;\pi\,[$. Alors $x/2 \in\,]\,0\,;\pi/2\,[$ si bien que $\tan(x/2)$ est bien défini et à valeurs strictement positives : la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ est bien définie et dérivable en tant que composée de fonctions qui le sont, et :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2}\times\tan'(x/2)\times\frac{1}{\tan(x/2)} \\
&= \frac{1+\tan^2(x/2)}{2\tan(x/2)} \\
&= \frac{1}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

en utilisant la formule de trigo reliant $\sin(\theta)$ à $\tan(\theta/2)$. Finalement, si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x + \dfrac{\pi}{2} \in\,]\,0\,;\pi\,[$ et

$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sin(x+\pi/2)}$$

On en déduit qu'une primitive de $1/\cos$ est $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\dfrac{x+\pi/2}{2}\right)\right) = \ln\left(\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

10.4 Autour du théorème fondamental de l'analyse

Exercice 10 : ✪ Pour tout réel x civilisé, on pose

$$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\text{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Donner la valeur de $f(x)$.
4. **Remake :** Donner la valeur de $g(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Pour l'instant, on ne sait définir que des intégrales de fonctions continues sur des segments. Dès lors, une intégrale n'existe que lorsque la fonction intégrée est continue sur le segment formé par les bornes. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ existe si et seulement si $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ est continue sur le segment $[\,1/x\,;x\,]$. Une condition nécessaire pour que f soit définie en x est évidemment que $x \neq 0$. Prouvons que c'est une condition suffisante. Si $x \neq 0$, x et $1/x$ sont de même signe donc à $\notin [\,1/x\,;x\,]$ donc $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ est continue sur $[\,1/x\,;x\,]$ donc f est bien définie en x. En conclusion, f est définir sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. D'après le théorème de dérivation des bornes variables, f est dérivable. On peut aussi le justifier depuis le début : soit G une primitive de $t \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(t)}{t}$ (une telle primitive existe car cette fonction est continue). Alors, pour tout x, $f(x) = G(x) - G(1/x)$ donc f est dérivable car somme et composée de fonctions dérivables (G est dérivable par définition d'une primitive). De plus, pour tout $x \neq 0$ (ne pas oublier de dériver les bornes),
$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \frac{\text{Arctan}(x)}{x} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{\text{Arctan}(1/x)}{1/x} \\ &= \frac{\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)}{x} \end{aligned}$$
La valeur de $f'(x)$ dépend du signe de x : si $x > 0$, $f'(x) = \pi/2x$, tandis que si $x < 0$, alors $f'(x) = -\pi/2x$.
3. Par conséquent, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times \ln(x)$ (on est sur $\mathbb{R}_+^*$) et puisque $f(1) = A = 0$, alors $A = 0$, si bien que $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De même, il existe B tel que pour tout $x < 0$, $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln|x| + B$ (ne pas oublier la valeur absolue) et $f(-1) = 0$ donc $B = 0$. En conclusion, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x)$ si $x > 0$ et $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}\ln(-x)$ si $x < 0$.
4. On trouve de même que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée nulle, donc est constante et $g(1) = 0$ donc g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 11 : ✪ Étudier les variations (sans les limites aux bornes) de $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

Correction : La fonction intégrée étant continue, F est bien dérivable et, pour tout $x > 1$ (on n'oublie pas de dériver les bornes !) :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2 \times \frac{1}{\ln(2x)} - 1 \times \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2}{\ln(2) + \ln(x)} - \frac{1}{\ln(x)} \\ &= \frac{2\ln(x) - \ln(2) - \ln(x)}{(\ln(2) + \ln(x)) \times \ln(x)} \\ &= \frac{\ln(x) - \ln(2)}{(\ln(2) + \ln(x)) \times \ln(x)} \end{aligned}$$

On en déduit les variations de F :

x	1		$\ln(2)$		$+\infty$
$F'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
F	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

Exercice 12 : ✪ Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que la réciproque du résultat vu en classe est vraie, c'est-à-dire que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante, alors f est T-périodique.

Correction : Notons g la fonction constante de l'énoncé. Alors g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ne pas oublier de dériver les bornes), $g'(x) = 1 \times f(x+T) - 1 \times f(x)$. Or, g est constante donc $g'(x) = 0$ si bien que $f(x+T) - f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est bien T-périodique.

Exercice 13 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donner

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Soit F une primitive de f (possible car f est continue). En particulier, F est dérivable et, en reconnaissant le taux d'accroissement de F en 0,

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} F'(0) = f(0)$$

Exercice 14 : ✪

1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2. **Remake :** Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est une fonction impaire.

Correction :

1. Soit F une primitive de f (possible car f est continue). Par hypothèse, $F(x) - F(0) = 0$ pour tout x donc F est constante donc $f = F'$ est nulle.
2. De même, si on note F une primitive de f alors, pour tout x, $F(x) = F(-x)$ et, en dérivant cette égalité (sans oublier de dériver ce qu'il y a à l'intérieur, comme une composée), il vient : $F'(x) = -F'(-x)$ i.e. $f(x) = -f(-x)$, f est bien impaire.

Exercice 15 : ✪✪ Montrer que

$$f : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

est constante et donner sa valeur.

Correction : D'après le théorème des bornes variables (les fonctions Arcsin et Arccos sont continues, et les fonctions $\sin^2$ et $\cos^2$ sont dérivables), f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)\operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{\sin^2(x)}\right) - 2\sin(x)\cos(x)\operatorname{Arccos}\left(\sqrt{\cos^2(x)}\right)$$

On aimerait dire que $\sqrt{\sin^2(x)} = \sin(x)$ et idem pour le cos, mais on ne connaît pas leur signe : réduisons en fait l'intervalle d'étude pour que le cos et le sin soient positifs. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ donc $\sin^2(x+\pi) = \sin^2(x)$ et idem pour le cos. En en déduit que f est π-périodique : il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur π, disons $[-\pi/2\,;\pi/2]$, et puisque f est paire, il suffit de l'étudier sur $[0\,;\pi/2]$, intervalle sur lequel sin et cos sont positifs, si bien que (si $x \in [0\,;\pi/2]$),

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(2x)\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) - \sin(2x)\operatorname{Arccos}(\cos(x)) \\ &= \sin(2x) \times x - \sin(2x) \times x \end{aligned}$$

car, sur cet intervalle, $\operatorname{Arcsin}(\sin(x)) = x$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x)) = x$ donc $f'(x) = 0$: f est constante. Prenons $x = \pi/4$ pour que les deux intégrales aient les mêmes bornes :

$$f(\pi/4) = \int_0^{1/2} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t}) + \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t$$

Or, $\operatorname{Arcsin} + \operatorname{Arccos} = \pi/2$ donc on trouve que $f(\pi/4) = \pi/4$: f est constante égale à $\pi/4$.

10.5 Fonctions complexes

Exercice 16 : ✪ Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. Donner une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t-\lambda}$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$ ($t - \lambda$ n'est jamais nul puisque $\lambda \notin \mathbb{R}$). Alors (on fait le changement $u = (t-a)/b$, $t = bu + a$, $\mathrm{d}t = b\,\mathrm{d}u$ à la quatrième ligne) :

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\lambda} &= \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)+ib} \\
&= \int^x \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} - ib\frac{1}{(t-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} - \frac{i}{b}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\dfrac{t-a}{b}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\int^x \frac{2(t-a)}{(t-a)^2+b^2} - \frac{i}{b}\int^{\frac{x-a}{b}} \frac{b\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{2}\ln|(x-a)^2+b^2| - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln((x-a)^2+b^2) - i\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-a}{b}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 17 : ✪ Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{7x}\cos(4x)$ et $x \mapsto e^{6x}\sin(2x)$.

Correction : Notons $f : x \mapsto e^{(7+4i)x}$. Une primitive de f est

$$x \mapsto \frac{e^{(7+4i)x}}{7+4i}$$

Or, pour tout x,

$$\frac{e^{(7+4i)x}}{7+4i} = \frac{e^{7x} \times (\cos(4x) + i\sin(4x))}{7^2+4^2} \times (7-4i)$$

donc, en prenant la partie réelle, une primitive de $x \mapsto e^{7x}\cos(4x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{7x} \times (7\cos(4x) + 4\sin(4x))}{65}$$

On trouve de même (avec une partie imaginaire) qu'une primitive de $x \mapsto e^{6x}\sin(2x)$ est :

$$x \mapsto \frac{e^{6x} \times (3\sin(2x) - \cos(2x))}{20}$$

Exercice 18 : ✪ Donner une primitive de $\mathrm{sh} \times \sin$:

1. À l'aide de l'exponentielle complexe.
2. À l'aide d'une IPP.

Correction : Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x) \times \sin(x) = \dfrac{1}{2} \times e^x\sin(x) - \dfrac{1}{2} \times e^{-x}\sin(x)$.

1. Tout d'abord, une primitive de $x \mapsto e^x e^{ix} = e^{(1+i)x}$ est

$$x \mapsto \frac{e^{(1+i)x}}{1+i} = \frac{e^x \times (\cos(x) + i\sin(x))}{1^2+1^2} \times (1-i)$$

Dès lors, en prenant la partie imaginaire, une primitive de $x \mapsto e^x\sin(x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^x(\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

De même, une primitive de $x \mapsto e^{-x}\sin(x)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{-x}(-\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

Finalement, une primitive de sh $\times$ sin est :

$$x \mapsto \frac{e^x(\sin(x)-\cos(x))}{4} + \frac{e^{-x}(\sin(x)+\cos(x))}{4}$$

2. On a (en dérivant sh puis ch) :

$$\begin{aligned}\int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t &= [-\mathrm{sh}(t)\times\cos(t)]^x + \int^x \mathrm{ch}(t)\times\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{sh}(x)\times\cos(x) + [\mathrm{ch}(t)\sin(t)]^x - \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{sh}(x)\times\cos(x) + \mathrm{ch}(x)\sin(x) - \int^x \mathrm{sh}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

donc une primitive de sh $\times$ sin est

$$x \mapsto \frac{-\mathrm{sh}(x)\times\cos(x)+\mathrm{ch}(x)\times\sin(x)}{2}$$

On vérifie évidemment qu'on obtient la même chose qu'avec la méthode de l'exponentielle complexe.

Exercice 19 : ✪✪ Calculer une primitive de $x \mapsto x^2e^x\sin(x)$.

Correction : Notons $f : x \mapsto x^2e^x\sin(x)$. Alors $f = \mathrm{Im}(g)$ où $g : x \mapsto x^2e^{(1+i)x}$. Dès lors, il suffit de primitiver g à l'aide de deux IPP. Rappelons qu'on peut supprimer les constantes puisqu'on cherche une primitive « générique », cf. cours.

$$\begin{aligned}\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2e^{(1+i)t}}{1+i}\right]^x - \frac{2}{1+i}\int^x te^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\times\left(\left[\frac{te^{(1+i)t}}{1+i}\right]^x - \frac{1}{1+i}\int^x e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2}{1+i}\times\left(\frac{xe^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{1}{1+i}\times\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right) \\ &= \frac{x^2e^{(1+i)x}}{1+i} - \frac{2xe^{(1+i)x}}{(1+i)^2} + \frac{2e^{(1+i)x}}{(1+i)^3}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+i} &= \frac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} \\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned}\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{x^2e^{(1+i)x-i\pi/4}}{\sqrt{2}} - \frac{2xe^{(1+i)x-i\pi/2}}{2} + \frac{2e^{(1+i)x-3i\pi/4}}{\sqrt{2}^3} \\ &= \frac{x^2e^{x+i(x-\pi/4)}}{\sqrt{2}} - 2xe^{x+i(x-\pi/2)} + \frac{e^{x+i(x-3\pi/4)}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie imaginaire, une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{x^2e^x\sin(x-\pi/4)}{\sqrt{2}} - 2xe^x\sin(x-\pi/2) + \frac{e^x\sin(x-3\pi/4)}{\sqrt{2}}$$

10.6 Calculs en vrac

10.6.1 Intégrations par parties

Exercice 20 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \text{Arctan}(x)$
2. $x \mapsto \text{Arcsin}(x)$
3. $x \mapsto \text{Arccos}(x)$
4. $x \mapsto \sin \circ \ln$
5. $x \mapsto x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.
6. $x \mapsto \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$
7. $x \mapsto x \tan^2(x)$
8. $x \mapsto \ln(1+\sqrt{x})$
9. $x \mapsto x \times (\text{Arctan}(x))^2$
10. $f : x \mapsto \dfrac{x \ln(x)}{(x^2+1)^2}$

Correction :

1.

$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arctan}(t)]^x - \int^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\int^x \frac{2t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{\ln|1+t^2|}{2} \\
&= x\text{Arctan}(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arcsin}(t)]^x - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arcsin}(x) + \int^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int^x \text{Arccos}(t)\,\mathrm{d}t &= [t \times \text{Arccos}(t)]^x + \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arccos}(x) - \int^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\text{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int^x \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= [t \times \sin(\ln(t))]^x - \int^x t \times \frac{1}{t} \times \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= x\sin(\ln(x)) - \int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t \\
&= x\sin(\ln(x)) - \left([t \times \cos(\ln(t))]^x - \int^x t \times \frac{1}{t} \times -\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= x\sin(\ln(x)) - \left(x\cos(\ln(x)) + \int^x t\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t\right) \\
&= x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x)) - \int^x t\sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

si bien qu'une primitive de $\sin \circ \ln$ est : $x \mapsto \dfrac{x\sin(\ln(x)) - x\cos(\ln(x))}{2}$.

5.

$$\begin{aligned}
\int^x t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \times \ln(x)\right]^x - \int^x \frac{t^{n+1}}{n+1} \times \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int^x t^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

6. En dérivant $x \mapsto xe^x$ et en primitivant $x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{te^t}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-e^t}{t+1}\right]^x + \int^x \frac{(t+1)e^t}{t+1}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{e^x}{x+1} + \int^x e^t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{e^x}{x+1} + e^x
\end{aligned}$$

7. Puisque $\tan^2(x) = (1+\tan^2(x)) - 1 = \tan'(x) - 1$, une primitive de $\tan^2$ est $x \mapsto \tan(x) - x$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\int^x t\tan^2(t)\,\mathrm{d}t &= [t\times(\tan(t)-t)]^x - \int^x \tan(t) - t\,\mathrm{d}t \\
&= x(\tan(x)-x) + \ln|\cos(x)| + \frac{x^2}{2}
\end{aligned}$$

car une primitive de tan est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$.

8.

$$\begin{aligned}
\int^x \ln(1+\sqrt{t})\,\mathrm{d}t &= \left[t\times\ln(1+\sqrt{t})\right]^x - \int^x t\times\frac{1}{2\sqrt{t}}\times\frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int^x \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\int^x \frac{\sqrt{t}+1-1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Faisons le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\int^x \ln(1+\sqrt{t})\,\mathrm{d}t &= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int^{\sqrt{x}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \int^{\sqrt{x}} \frac{u+1-1\,\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \int^{\sqrt{x}} \frac{1\,\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= x\ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
\int^x t(\mathrm{Arctan}(t))^2\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^2}{2}\times\mathrm{Arctan}(t)^2\right]^x - \int^x \frac{t^2}{2}\times 2\mathrm{Arctan}(t)\times\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - \int^x \mathrm{Arctan}(t)\times\frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - \int^x \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t + \int^x \mathrm{Arctan}(t)\times\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x^2\mathrm{Arctan}(x)^2}{2} - x\mathrm{Arctan}(x) + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \frac{\mathrm{Arctan}(x)^2}{2}
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{-\ln(t)}{2(t^2+1)}\right]^x + \frac{1}{2}\int^x \frac{1}{t^2+1}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t^2+1)}
\end{aligned}$$

Décomposons la fraction intégrée en éléments simples : il existe (a, b, c) tel que pour tout $t \neq 0$,

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{a}{t} + \frac{bt+c}{t^2+1}$$

En multipliant par t et en faisant tendre t vers 0, on trouve que $a = 1$. En multipliant par t et en faisant tendre t vers $+\infty$, on trouve que $a + b = 0$ donc $b = -1$, et enfin en évaluant en 1 on trouve

$$\frac{1}{2} = a + \frac{b+c}{2}$$

si bien que $c = 0$. Finalement,

$$\begin{aligned} \int^x \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\int^x \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{-\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{\ln(x)}{2} - \frac{\ln(x^2+1)}{4} \end{aligned}$$

Exercice 21 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_1^e (x-e)\ln(x)\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_0^1 x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}(t))^2\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Correction :

1.

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \\ &= e - [e^x]_0^1 \\ &= e - (e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\ln(2) - \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\int_1^e (x-e)\ln(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{(x-e)^2}{2}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{(x-e)^2}{2}\times\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^e x-2e+\frac{e^2}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-2ex+e^2\ln(x)\right]_1^e \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-2e^2+e^2-\frac{1}{2}+2e\right) \\
&= \frac{e^2}{4}-e+\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3e^{x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^2\times xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[x^2\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\times\frac{e^{x^2}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e}{2}-\int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{e}{2}-\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{e}{2}-\left[\frac{e}{2}-\frac{1}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (2-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x &= [(2-x)\times -e^{-x}]_0^2 - \int_0^2 (-1)\times(-e^{-x})\,\mathrm{d}x \\
&= 2-\int_0^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x \\
&= 2-[-e^{-x}]_0^2 \\
&= 2+e^{-2}-1 \\
&= 1+e^{-2}
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\times e^x\right]_{-1}^1 - 2\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x \\
&= e-e^{-1}-2\left([xe^x]_{-1}^1-\int_{-1}^1 e^x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= e-e^{-1}-2\left(e+e^{-1}-[e^x]_{-1}^1\right) \\
&= e-e^{-1}-2(e+e^{-1}-e+e^{-1}) \\
&= e-3e^{-1}
\end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x &= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x} \times \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{x} \times -e^{1/x}\right]_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1} \frac{-1}{x^2} \times -e^{1/x}\,\mathrm{d}x \\ &= -e + 2e^{1/2} + \int_{1/2}^{1} -\frac{1}{x^2} \times e^{1/x}\,\mathrm{d}x \\ &= -e + 2e^{1/2} + [e^{1/x}]_{1/2}^{1} \\ &= -e + 2e^{1/2} + e - e^{1/2} \\ &= 3e^{1/2}\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} (\mathrm{Arcsin}(t))^2\,\mathrm{d}t &= [t\mathrm{Arcsin}(t)^2]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} t \times 2\mathrm{Arcsin}(t) \times \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} + 2\int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(t) \times \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{12} + 2\left([\mathrm{Arcsin}(t) \times \sqrt{1-t^2}]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \times -\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{\pi}{12} + 2\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \int_0^{1/2} \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{\pi}{12} + 2\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} + 1\end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/3} x \times \tan'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [x\tan(x)]_0^{\pi/3} - \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{3} \times \sqrt{3} - [-\ln|\cos(x)|]_0^{\pi/3} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln(1/2) \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln(2)\end{aligned}$$

Exercice 22 : ✪ Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Correction : Tout d'abord,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi} x \times \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos(2x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\cos(2x)\,\mathrm{d}x &= \left[x\times\frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi 1\times\sin(2x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(2x)}{2}\right]_0^\pi\\ &= 0\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\times\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}I+J &= \int_0^\pi x(\cos^2(x)+\sin^2(x))\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi x\,\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

et donc $J=\pi^2/2-I=\pi^2/4$ (mais bon, on aurait pu calculer J directement en se souvenant que $\sin^2(x)=\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$).

10.6.2 Changements de variables

Exercice 23 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\,.$
2. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t+2\sqrt{t}}.$
3. $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+e^t}}.$
5. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$
6. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}.$
7. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$
8. $\displaystyle\int_4^3 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\,\mathrm{d}t\,.$
9. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)}.$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan(x)^3+\tan(x)^5}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Correction : Notons à chaque fois l'intégrale I.

1. Posons $u=e^x$, $x=\ln(u)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$ si bien que

$$\begin{aligned}I &= \int_1^e \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_1^e \frac{u+1-1}{1+u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_1^e \left(1-\frac{1}{1+u}\right)\,\mathrm{d}u\\ &= (e-1)-[\ln(1+u)]_1^e\\ &= e-1-(\ln(1+e)-\ln(2))\\ &= e-1+\ln(2)-\ln(1+e)\end{aligned}$$

2. Posons $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$, $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2}{u+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [2\ln(1+u)]_1^{\sqrt{2}} \\ &= 2\ln(1+\sqrt{2})-2\ln(2) \end{aligned}$$

3. Posons $u=\sqrt{t}$, $t=u^2$, $\mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u$, puis faisons une IPP.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{2}} e^u\times 2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\left([ue^u]_1^{\sqrt{2}}-\int_1^{\sqrt{2}} e^u\,\mathrm{d}u\right) \\ &= 2\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}-e-(e^{\sqrt{2}}-e)\right) \\ &= 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. Posons $u=\sqrt{1+e^t}$, $t=\ln\left(u^2-1\right)$, $\mathrm{d}t=\dfrac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$, puis décomposons en éléments simples.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{1}{u}\times\frac{2u}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{u+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= [\ln|u+1|-\ln|u-1|]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\ &= \ln(\sqrt{1+e}+1)-\ln(\sqrt{1+e}-1)-\ln(\sqrt{2}+1)+\ln(\sqrt{2}-1) \end{aligned}$$

5. Posons $u=\sqrt{1+x^3}$, $x=(u^2-1)^{1/3}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2u\,\mathrm{d}u}{3(u^2-1)^{2/3}}$ si bien que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u}{(u^2-1)^{1/3}}\times\frac{2u\,\mathrm{d}u}{3(u^2-1)^{2/3}} \\ &= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u^2}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{u^2-1+1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2} 1+\frac{1}{u^2-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3})+\frac{2}{3}\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{u+1}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3})+\frac{1}{3}[\ln|u+1|-\ln|u-1|]_{\sqrt{3}}^{2} \\ &= \frac{2}{3}\times(2-\sqrt{3})+\frac{1}{3}[\ln(3)-\ln(\sqrt{3}+1)+\ln(\sqrt{3}+1)] \end{aligned}$$

6. Posons $u = x^{1/3}$, $x = u^3$, $\mathrm{d}x = 3u^2\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{3u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= 3\int_2^3 \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 3 + 3[\mathrm{Arctan}(u)]_2^3 \\ &= 3 + 3(\mathrm{Arctan}(3) - \mathrm{Arctan}(2)) \end{aligned}$$

7. Posons $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $\mathrm{d}x = 2u\,\mathrm{d}u$ puis décomposons en éléments simples (sans oublier le quotient) :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \frac{1-u}{1+u} \times 2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_1^2 \frac{u-u^2}{1+u}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_1^2 \left(-u+2-\frac{2}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\left[-\frac{u^2}{2}+2u-2\ln|1+u|\right]_1^2 \\ &= 2\left(-2+4-2\ln(3)+\frac{1}{2}-2+2\ln(2)\right) \\ &= 1+4\ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

8. Posons $u = \sqrt{t-2}$, $t = u^2+2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sqrt{2}}^1 \frac{u^2+2}{u} \times 2u\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{\sqrt{2}}^1 u^2+2\,\mathrm{d}u \\ &= 2\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^1 + 4(1-\sqrt{2}) \\ &= 2\left(\frac{1}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + 4(1-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

9. Posons $u = e^t$, $t = \ln(u)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln(2)} \frac{2}{e^t+e^{-t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^2 \frac{2}{u+\frac{1}{u}}\frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \int_1^2 \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u \\ &= [\mathrm{Arctan}(u)]_1^2 \\ &= \mathrm{Arctan}(2) - \mathrm{Arctan}(1) \\ &= \mathrm{Arctan}(2) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

10. Posons $u = \tan(x)$ (inutile d'avoir recours aux règles de Bioche ici, celui-ci saute tout de même aux yeux), $x = \operatorname{Arctan}(u)$, $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Il faut également se souvenir que

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = 1 + u^2$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1+u^3+u^5) \times (1+u^2) \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^1 (1+u^3+u^5)\,\mathrm{d}u \\ &= \left[u + \frac{u^4}{4} + \frac{u^6}{6}\right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{17}{12} \end{aligned}$$

Exercice 24 : ✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
2. $x \mapsto \dfrac{2e^{3x}}{1+e^{2x}}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x + x\ln(x)}$

Correction :

1. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{t}}$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$, $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{\sqrt{x}} \frac{2u\,\mathrm{d}u}{u^2+u} \\ &= \int^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}u}{u+1} \\ &= \ln(1+\sqrt{x}) \end{aligned}$$

2. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{2e^{3t}}{1+e^{2t}}\,\mathrm{d}t$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = e^t$, $t = \ln(u)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{e^x} \frac{2u^3}{1+u^2} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int^{e^x} \frac{u^2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int^{e^x} \frac{u^2+1-1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2\int^{e^x} \mathrm{d}u - 2\int^{e^x} \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= 2e^x - 2\operatorname{Arctan}(e^x) \end{aligned}$$

3. Notons

$$f(x) = \int^x \frac{1}{t + t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

une primitive générique de la fonction de l'énoncé. Posons $u = \ln(t)$, $t = e^u$, $\mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int^{\ln(x)} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u + e^u \times u} \\ &= \int^{\ln(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\ &= \ln(1+\ln(x)) \end{aligned}$$

Exercice 25 - Utilisation des règles de Bioche : ✪✪✪

1. Donner une primitive des fonctions suivantes :

(a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\tan(x)}$.

(b) $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{3+\sin(x)}$.

(c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}$.

(d) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}$.

(e) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}$.

2. On pose

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

Calculer $I - J$ et $I + J$. En déduire I et J.

Correction : Nous allons utiliser les règles de Bioche, qui sont HP. Vous pouvez donc regarder le changement de variable dans le corrigé et essayer de le faire, il y aurait sans doute une indication à l'écrit.

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} f(-x)\mathrm{d}(-x) &= \frac{-\,\mathrm{d}x}{\sin(-x)+\tan(-x)} \\ &= \frac{-\,\mathrm{d}x}{-\sin(x)-\tan(x)} \\ &= f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Posons donc $u = \cos(t)$ donc $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$. La méthode est souvent la même : on garde x le plus possible jusqu'à pouvoir tout remplacer.

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{1}{\sin(t)+\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)}} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin^2(t)+\dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-\cos^2(t)+\dfrac{1-\cos^2(t)}{\cos(t)}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-u^2+\dfrac{1-u^2}{u}} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)\left(1+\dfrac{1}{u}\right)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-u\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)(u+1)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-u\,\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)^2}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm 1$:

$$\frac{-u}{(1-u)(1+u)^2} = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{1-u} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{1+u} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{(1+u)^2}$$

Finalement (on n'oublie pas de faire sortir un -1 quand on intègre $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\ln|1-\cos(x)| + \frac{1}{4}\ln|1+\cos(x)| + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\cos(x)}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}
f(\pi-x)\mathrm{d}(\pi-x) &= \frac{\tan(-x) \times -\,\mathrm{d}x}{3+\sin(x)} \\
&= f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Posons donc $u = \sin(t)$, $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ i.e. $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\,/\cos(t)$.

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\sin(x)} \frac{\tan(t)}{3+\sin(t)} \times \frac{\mathrm{d}u}{\cos(t)} \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{\sin(t)}{\cos^2(t) \times (3+\sin(t))}\,\mathrm{d}u \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{\sin(t)}{(1-\sin^2(t)) \times (3+\sin(t))}\,\mathrm{d}u \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{u}{(1-u^2) \times (3+u)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm 1, -3$:

$$\frac{u}{(1+u)(1-u)(3+u)} = \frac{-1}{4} \times \frac{1}{1+u} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-u} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{3+u}$$

Et finalement (on n'oublie pas le $-$ qui sort en primitivant $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}\ln|1+\sin(x)| - \frac{1}{8}\ln|1-\sin(x)| + \frac{3}{8}\ln|3+\sin(x)|$$

(c) Posons $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$:

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{1}{\sin(t)+2\sin(t)\cos(t)} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin^2(t)+2\sin^2(t)\cos(t)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{1-\cos^2(t)+2(1-u^2)u} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{-\,\mathrm{d}u}{(1-u^2)\times(1+2u)}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm 1, -1/2$:

$$\frac{-1}{(1+u)(1-u)(1+2u)} = \frac{-1}{2}\times\frac{1}{1+u} - \frac{1}{6}\times\frac{1}{1-u} - \frac{4}{3}\times\frac{1}{3+u}$$

Et finalement (on n'oublie pas le $-$ qui sort en primitivant $1/(1-u)$) :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln|1+\cos(x)| - \frac{1}{6}\ln|1-\cos(x)| - \frac{4}{3}\ln|2+\cos(x)|$$

(d) Posons $u = \cos(t)$, $\mathrm{d}u = -\sin(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u\,/\sin(t)$:

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\cos(x)} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{4\cos^3(t)-3\cos(t)} \times \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(t)} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{4\cos^2(t)-3} \\
&= \int^{\cos(x)} \frac{2\,\mathrm{d}u}{4u^2-3}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm\sqrt{3}/2$:

$$\frac{2}{4(u-\sqrt{3}/2)(u+\sqrt{3}/2)} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{u-\sqrt{3}/2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\times\frac{1}{u+\sqrt{3}/2}$$

Et finalement :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\cos(x)-\sqrt{3}/2| - \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln|\cos(x)+\sqrt{3}/2|$$

(e) Posons $u = \sin(t)$, $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ donc $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,/\cos(t)$:

$$\begin{aligned}
\int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^{\sin(x)} \frac{\cos(t)}{1-2\sin^2(t)} \times \frac{\mathrm{d}u}{\cos(t)} \\
&= \int^{\sin(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1-2u^2}
\end{aligned}$$

En décomposant en éléments simples, on trouve que pour tout $u \neq \pm\sqrt{2}/2$:

$$\frac{1}{2(\sqrt{2}/2-u)(\sqrt{2}/2+u)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}/2-u} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{3}/2+u}$$

Et finalement :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sqrt{2}/2-\sin(x)| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln|\sin(x)+\sqrt{2}/2|$$

2. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\pi/12} \frac{\cos^2(t) - \sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/12} \frac{\cos(2t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

De plus,

$$I - J = \int_0^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}t}{\cos(2t)}$$

En utilisant les règles de Bioche, on pense à poser $u = \tan(t)$, $t = \mathrm{Arctan}(u)$, $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{1+u^2}$:

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\cos(2\mathrm{Arctan}(u))} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{2\cos^2(\mathrm{Arctan}(u)) - 1} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{\dfrac{2}{1+u^2} - 1} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{2 - 1 - u^2} \\ &= \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{3}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}[\ln|u+1| - \ln|u-1|]_0^{1/\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \end{aligned}$$

Finalement, si on note cette quantité α, alors $I = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2}$ et $J = \dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\alpha}{2}$.

Exercice 26 : ✪✪✪✪ Soient $a < b$ deux réels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$ et interpréter géométriquement.

Correction : Notons I_1 cette intégrale. Mettons le terme dans la racine carrée sous forme canonique. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$.

$$\begin{aligned} (x-a)(b-x) &= -x^2 + x(b+a) - ab \\ &= -\left(x^2 - 2 \times x \times \left(\frac{b+a}{2}\right) + ab\right) \\ &= -\left[\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 + ab\right] \\ &= -\left[\left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\right] \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{b+a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, en factorisant la le premier terme (et $b-a>0$ donc on peut simplifier la racine carrée) :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} \times \sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}\right)^2\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{2}\int_a^b \sqrt{1-\left(\frac{2}{b-a}\times\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)^2}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Posons

$$\cos(u) = \left(\frac{2}{b-a}\times\left(x-\frac{b+a}{2}\right)\right)$$

si bien que $-\sin(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{2}{b-a}\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \dfrac{-(b-a)\sin(u)}{2}\,\mathrm{d}u$. Pour les bornes : lorsque $x=a$, $\cos(u)=-1$ donc $u=\pi$ convient, et pour $x=b$, $\cos(u)=1$ donc $u=0$ convient (on ne peut pas forcément passer à l'Arccos, et on n'en a même pas besoin : il suffit de trouver des bornes qui conviennent). Dès lors :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_\pi^0 \sqrt{1-\cos^2(u)}\times-\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_0^\pi \sqrt{\sin^2(u)}\sin(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Or, sur $[\,0\,;\pi\,]$, le sinus est positif donc $\sqrt{\sin^2(u)}=\sin(u)$ si bien que

$$I_1 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2\int_0^\pi \sin^2(t)\,\mathrm{d}t$$

En écrivant $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, on trouve finalement que

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

Avec l'interprétation de l'intégrale comme aire sous la courbe, on vient de calculer l'aire sous la courbe d'équation

$$y = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2}$$

c'est-à-dire la courbe (au-dessus de l'axe des abscisses pour avoir une ordonnée positive) d'équation

$$y^2+-\left(x-\frac{b+a}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2$$

On reconnaît l'équation du cercle de centre $M\left(\dfrac{b+a}{2},0\right)$ de rayon $R=\dfrac{b-a}{2}$. Dès lors, on vient de calculer l'aire du demi-disque (celui au-dessus de l'axe des ordonnées) associé : on trouve bien une aire égale à $\dfrac{1}{2}\pi R^2$ (car on ne prend qu'un demi-disque).

10.7 Applications classiques

Exercice 27 : ✪ Dans cet exercice, on fait semblant de ne pas connaître la fonction ln. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction L par :

$$L : x\mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Montrer que pour tous x et y strictement positifs, $L(xy)=L(x)+L(y)$.

Correction : Soient x et y strictement positifs. On a alors

$$L(xy) = \int_1^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Posons $u=t/x$, $t=ux$, $\mathrm{d}t = x\,\mathrm{d}u$ (et $v=1/u$, $u=1/v$, $\mathrm{d}u = -\mathrm{d}v/v^2$ à la quatrième ligne). Alors

$$
\begin{aligned}
L(xy) &= \int_{1/x}^{y} \frac{x\,\mathrm{d}u}{xu} \\
&= \int_{1/x}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= \int_{1}^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_{1/x}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{u} \\
&= L(y) + \int_{x}^{1} v \times \frac{-\,\mathrm{d}v}{v^2} \\
&= L(y) + \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}v}{v} \\
&= L(y) + L(x)
\end{aligned}
$$

Exercice 28 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$
I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,\mathrm{d}x
$$

1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. On admet que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En déduire que

$$
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e
$$

Remarque : On montrera dans le chapitre sur les suites (plus précisément dans le paragraphe des suites adjacentes) que la limite de cette somme était irrationnelle (sans donner sa valeur). Ainsi, e est irrationnel. On peut même montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ pour tout rationnel non nul r.

Correction :

1. Faisons une IPP :

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n!}\left(-\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \times e^x \right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x\,\mathrm{d}x \right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 (1-x)^{n+1} e^x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}
\end{aligned}
$$

2. Soit $k \geq 1$. D'après la question précédente (penser à « truc » : remplacer n par truc puis par $k-1$, d'où la nécessité de prendre $k \geq 1$) :

$$
\frac{1}{k!} = I_{k-1} - I_k
$$

Dès lors, pour tout $n \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) \\
&= 1 + I_0 - I_n \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + I_0
\end{aligned}
$$

puisque $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $I_0 = e-1$ ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 29 : ✪✪ On définit les deux intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}} \qquad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}}$$

Calculer $I+J$ puis montrer que $I=J$. En déduire la valeur de ces intégrales.

Correction : D'une part :

$$\begin{aligned} I+J &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+2\sin(t)\cos(t)}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sqrt{(\sin(t)+\cos(t))^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)+\cos(t)}{\sin(t)+\cos(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La troisième ligne vient du fait que le sinus et le cosinus sont positifs sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, donc leur somme l'est également. D'autre part, faisons le changement de variable $u = \pi/2-t$, $t=\pi/2-u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ dans I (changement de variable habituel pour changer un sinus en cosinus, cf. cours) :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin(\pi/2-u)}{\sqrt{1+2\sin(\pi/2-u)\cos(\pi/2-u)}}(-\,\mathrm{d}u\,) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(u)}{\sqrt{1+2\cos(u)\sin(u)}}\,\mathrm{d}u \\ &= J \end{aligned}$$

On en déduit donc que $I = J = \pi/4$.

Exercice 30 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]\,, f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que

$$\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$

Correction :

1. Notons I l'intégrale de gauche. Posons $u = a+b-x$, $x = a+b-u$, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u\,$.

$$\begin{aligned} I &= \int_b^a (a+b-u)f(a+b-u)(-\,\mathrm{d}u\,) \\ &= \int_a^b (a+b-u)f(u)\,\mathrm{d}u \\ &= (a+b)\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^b uf(u)\,\mathrm{d}u \\ I &= (a+b)\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u - I \end{aligned}$$

   D'où le résultat.

2. On cherche à appliquer le résultat précédent. On définit sur $[0;\pi]$ la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}$$

Soit $x \in [0;\pi]$.

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= \frac{\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{1+(-\cos(x))^2} \\ &= \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

f vérifie les conditions de la question précédente (elle est évidemment continue). Ainsi,

$$I = \frac{\pi}{2} \times \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

À l'aide des règles de Bioche, on pense à poser $u = \cos(x)$, $\mathrm{d}u = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et donc $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u\,/\sin(x)$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \times \int_1^{-1} \frac{\sin(x)}{1+u^2} \frac{-\,\mathrm{d}u}{\sin(x)} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \times [\mathrm{Arctan}(u)]_{-1}^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \times \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Exercice 31 : ✪✪ Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_{-1}^1 (t-1)^p (t+1)^q \,\mathrm{d}t$

1. Donner la valeur de $I(p,q)$.
2. **Remake :** Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. À l'aide de l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p (1-t)^q \,\mathrm{d}t$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^q \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Correction :

1. L'idée est de trouver une relation de récurrence à l'aide d'une IPP et d'en déduire la formule générale. Soit donc $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \geq 1$.

$$\begin{aligned} I(p,q) &= \left[(t-1)^p \times \frac{(t+1)^{q+1}}{q+1}\right]_{-1}^1 - \frac{p}{q+1} \int_{-1}^1 (t-1)^{p-1} (t+1)^{q+1} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-p}{q+1} \times I(p-1, q+1) \end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$I(\text{truc}, \text{machin}) = \frac{-\text{truc}}{\text{machin}+1} \times I(\text{truc}-1, \text{machin}+1)$$

On peut donc itérer cette relation jusqu'à tomber sur une intégrale qu'on sait calculer :

$$\begin{aligned}I(p,q) &= \frac{-p}{q+1}\times\frac{-(p-1)}{q+2}I(p-2,q+2)\\ &= \frac{-p}{q+1}\times\frac{-(p-1)}{q+2}\times\cdots\times\frac{-1}{q+p}\times I(0,q+p)\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}I(0,q+p) &= \int_{-1}^{1}(t+1)^{q+p}\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{(t+1)^{q+p+1}}{q+p+1}\right]_{-1}^{1}\\ &= \frac{2^{q+p+1}}{q+p+1}\end{aligned}$$

si bien que :

$$I(p,q)=\frac{-p}{q+1}\times\frac{-(p-1)}{q+2}\times\cdots\times\frac{-1}{q+p}\times\times\frac{2^{q+p+1}}{q+p+1}$$

Un calcul classique permet d'affirmer que

$$I(p,q)=\frac{(-1)^p\times p!\times q!\times 2^{q+p+1}}{(q+p+1)!}$$

2. On trouve de la même façon que

$$I_{p,q}=\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

De plus, en appliquant le binôme de Newton et la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}I_{p,q} &= \int_0^1 t^p\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-t)^k\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k\int_0^1 t^{p+k}\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}(-1)^k\times\frac{1}{p+k+1}\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 32 - Intégrale de Poisson (stage one) : ✪✪✪ Soit $x\in\mathbb{R}\backslash\{\pm1\}$. On pose

$$I(x)=\int_0^{\pi}\ln\left(1-2x\cos(t)+x^2\right)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $I(x)$ est bien définie.
2. Montrer que $I(-x)=I(x)$.
3. En calculant $I(x)+I(-x)$, prouver que $I(x)=\dfrac{I\left(x^2\right)}{2}$.
4. On admet que $I(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$. Prouver que si $|x|<1$, alors $I(x)=0$.
5. Exprimer $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $I(x)$. En déduire la valeur de $I(x)$ si $|x|>1$.

Remarque : Nous redonnerons la valeur de $I(x)$ avec des sommes de Riemann (et nous en profiterons pour démontrer que $I(x)\xrightarrow[x\to0]{}0$) dans le chapitre 22.

Correction :

1. Il faut prouver que $f : t \mapsto \ln(1-2x\cos(t)+x^2)$ est continue sur $[\,0\,;\pi\,]$. Il suffit de prouver que, pour tout $t \in [\,0\,;\pi\,]$, $1-2x\cos(t)+x^2 > 0$. En effet, si c'est le cas, f est continue car composée de fonctions continues. Or, le discriminant de $1-2x\cos(t)+x^2$ (trinôme en x) vaut $4\cos^2(t)-4 = 4(\cos^2(t)-1)$. Si $t \in \,]\,0\,;\pi\,[$, $\Delta < 0$ donc $1-2x\cos(t)+x^2 > 0$ car du signe de son coefficient dominant, et si $t=0$ ou $t=\pi$ alors $1-2x\cos(t)+x^2 = 1 \pm 2x + x^2 = (x\pm 1)^2 > 0$ car $x \neq \pm 1$. Dans tous les cas on a le résultat voulu. On pouvait aussi encadrer $\cos(x)$ par ± 1 mais il fallait faire deux cas selon le signe de x.
2. Tout d'abord,

$$I(-x) = \int_0^{\pi} \ln(1+2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = \pi - t$, $t = \pi - u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned} I(-x) &= \int_{\pi}^{0} \ln(1+2x\cos(\pi-u)+x^2)(-\,\mathrm{d}u\,) \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(u)+x^2)\,\mathrm{d}u \\ &= I(x) \end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned} I(-x)+I(x) &= \int_0^{\pi} \ln(1-2x\cos(t)+x^2)+\ln(1+2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln((1+x^2-2x\cos(t))\times(1+x^2+2x\cos(t)))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln((1+x^2)^2-4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1+2x^2+x^4-4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1+2x^2(\cos^2(t)+\sin^2(t))+x^4-4x^2\cos^2(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1+2x^2(\sin^2(t)-\cos^2(t))+x^4)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \ln(1-2x^2\cos(2t)+x^4)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons $u = 2t$, $t = u/2$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u\,/2$:

$$\begin{aligned} I(-x)+I(x) &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \ln(1-2x^2\cos(u)+x^4)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

La première intégrale est égale à $I(x^2)$. En posant $v = u - \pi$, $u = v + \pi$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned} I(-x)+I(x) &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1-2x^2\cos(v+\pi)+x^4)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(1+2x^2\cos(v)+x^4)\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\times I(x^2) + \frac{1}{2}\times I(-x^2) \\ &= I(x^2) \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente, $I(x) = I(-x)$ donc $I(x)+I(-x) = 2I(x)$ ce qui permet de conclure.

4. $I(x) = \dfrac{I(x^2)}{2}$. En appliquant ce résultat à x^2 (penser à : « truc »), on trouve que $I(x^2) = \dfrac{I(x^4)}{2}$ donc $I(x) = \dfrac{I(x^4)}{4}$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I(x) = \dfrac{I(x^{2^n})}{2^n}$. Or, si $|x| < 1$ alors $x^{2^n} = e^{2^n \ln(|x|)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\ln|x| < 1$ et I tend vers 0 en 0 donc $I(x^{2^n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. De plus, $2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $I(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, mais $I(x)$ est indépendant de n donc $I(x) = 0$.
5. Soit donc $x \neq \pm 1$, $x \neq 0$. Attention, x peut être négatif, donc il ne faut pas écrire $\ln(x)$ (et idem pour la question précédente).

$$\begin{aligned}
I\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^\pi \ln\left(1 - \frac{2\cos(t)}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \ln\left(\frac{x^2 - 2x\cos(t) + 1}{x^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) - 2\ln|x| \,\mathrm{d}t \\
&= I(x) - 2\pi \ln|x|
\end{aligned}$$

Finalement, si $|x| > 1$, alors $|1/x| < 1$ donc $I(1/x) = 0$ si bien que $I(x) = 2\pi \ln|x|$.

Exercice 33 - Inégalité de Young (stage one) : ✪✪✪ Soit $a > 0$, $f : [\,0\,;a\,] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et telle que $f(0) = 0$. La fonction f est donc une bijection de $[\,0\,;a\,]$ dans $[\,0\,;f(a)\,]$ et on note $g : [\,0\,;f(a)\,] \to [\,0\,;a\,]$ sa bijection réciproque. On pose pour $x \in [\,0\,;a\,]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \; + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t \; - xf(x)$$

1. On suppose f dérivable. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Que vaut $F(0)$ et que peut-on en déduire ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in [\,0\,;a\,]$ et tout $\beta \in [\,0\,;f(a)\,]$ on a :

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \; + \int_0^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. **Application :** Soient p et q strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Correction :

1. f étant continue, la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée f. De même, la fonction

$$\psi : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable, de dérivée g, si bien que $F : x \mapsto \varphi(x) + \psi(f(x)) - xf(x)$ est dérivable car composée, somme et produit de fonctions dérivables (car f est supposée dérivable). Soit $x \in [\,0\,;a\,]$.

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \varphi'(x) + f'(x) \times \psi'(f(x)) - f(x) - xf'(x) \\
&= f(x) + f'(x) \times g(f(x)) - f(x) - xf'(x) \\
&= f'(x) \times g(f(x)) - xf'(x)
\end{aligned}$$

Or, g est la réciproque de f si bien que $g(f(x)) = x$ et donc

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x) \times x - xf'(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

En particulier, F est constante.

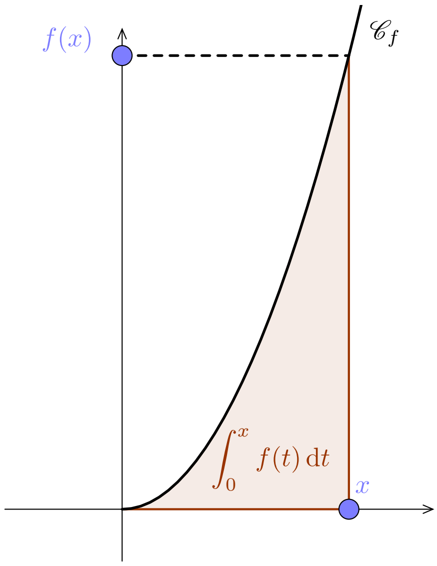
2. Puisque $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} F(0) &= \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^0 g(t)\,\mathrm{d}t - 0 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

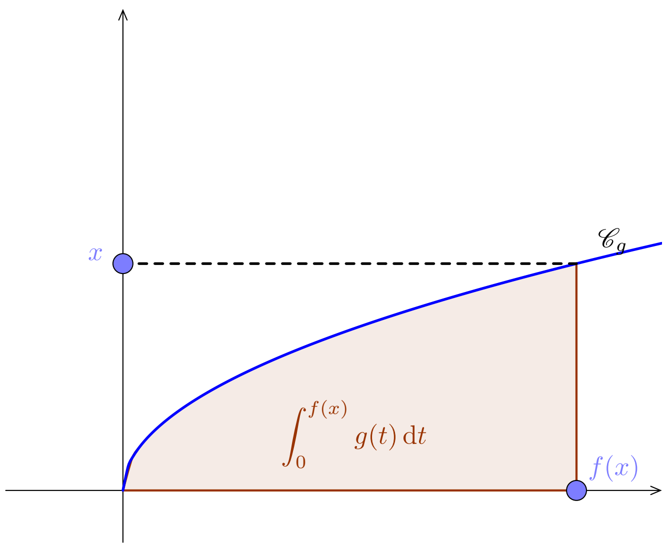
Or, F est constante d'après la question précédente donc F est la fonction nulle. On en déduit que, pour tout $x \in [\,0\,;a\,]$,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$$

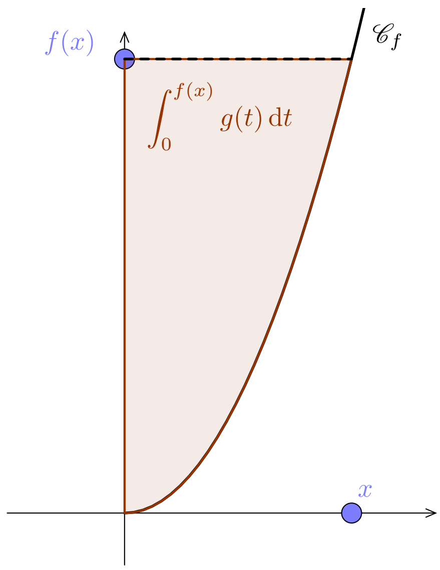
Donnons une interprétation géométrique de ce résultat : rappelons que l'interprétation géométrique de l'intégrale est l'aire sous la courbe. Par conséquent, l'interprétation géométrique de la première intégrale est l'aire sous la courbe de f entre 0 et x.



Rappelons à présent que la courbe de g est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice, et son intégrale est aussi l'aire sous la courbe. Si on refait cette symétrie (celle par rapport à la première bissectrice), on retombe sur la courbe de f, et l'aire sous la courbe devient l'aire entre la courbe et l'axe des ordonnées :



Avant la symétrie.

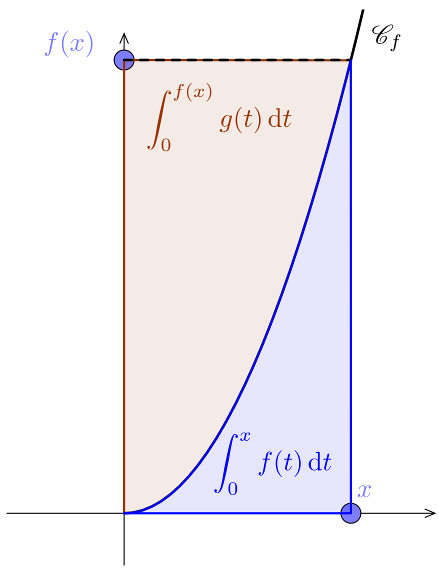


Après la symétrie.

Finalement, la quantité

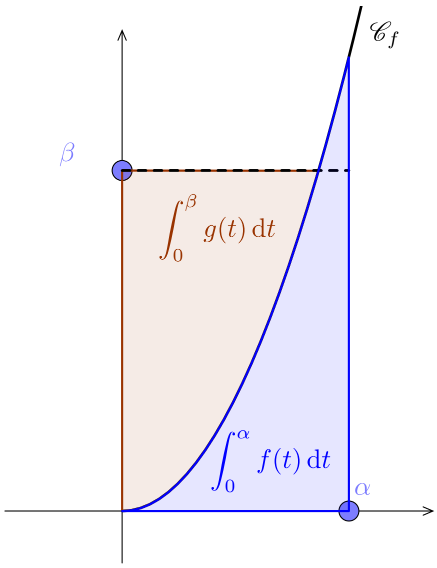
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t$$

est, géométriquement, la somme de l'aire sous la courbe (l'aire de la partie délimitée par la courbe et l'axe des abscisses) et de l'aire « à gauche de la courbe » (délimitée par la courbe et l'axe des ordonnées) :



et on retrouve le fait que cette quantité vaut $x \times f(x)$... ce qui se voit bien sur un dessin car c'est juste l'aire d'un rectangle !

3. Cela se voit très bien sur un dessin (ci-dessous le cas où $\beta \leq f(\alpha)$, le dessin dans l'autre cas est laissé à votre charge) : la quantité $\alpha\beta$ est l'aire du rectangle formé par α et β, et la somme des intégrales est la somme des deux aires coloriées ci-dessous, et on voit que cette aire est supérieure à celle du rectangle.



Prouvons ce résultat rigoureusement. Fixons $\alpha \geq 0$ et définissons sur $\mathbb{R}_+$ la fonction

$$h : x \mapsto \int_0^\alpha f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t - \alpha x$$

et prouvons que h est positive sur $\mathbb{R}_+$. h est dérivable et, pour tout $x \geq 0$, $h'(x) = g(x) - \alpha = f^{-1}(x) - \alpha$. On en déduit le tableau de variations de h (précisons que f et f^{-1} sont croissantes) :

x	0		$f(\alpha)$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

En effet, $h(f(\alpha)) = 0$ d'après la question précédente, si bien que h est positive, ce qui permet de conclure.

4. Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente avec $f : x \mapsto x^{p-1}$ et $g : x \mapsto x^{q-1}$: il suffit de vérifier que g est la réciproque de f. Or, pour tout $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= g\left(x^{p-1}\right) \\ &= \left(x^{p-1}\right)^{q-1} \\ &= x^{(p-1)(q-1)} \\ &= x^{pq-p-q+1} \end{aligned}$$

Or, $1/p + 1/q = 1$ donc, en mettant au même dénominateur, $p+q = pq$ si bien que $g(f(x)) = x$ donc g est la réciproque de f, et l'inégalité de Young (que nous reverrons dans l'exercice 17 du chapitre 15) découle de la question précédente.

Exercice 34 - Moments d'ordre pair de la loi semi-circulaire : ✪✪✪ On rappelle (cf. exercice 31 du chapitre 3) que les nombres de Catalan sont définis pour tout $n \geq 0$ par $C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^n \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que si n est impair, $m_n = 0$.
2. Donner la valeur de m_0. Dans la suite, on suppose que n est pair supérieur ou égal à 2 et on note $n = 2k$.
3. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+1}}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} u^{2k} \sqrt{1 - u^2}\,\mathrm{d}u\,.$
4. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+2}}{\pi} \left(W_{2k} - W_{2k+2}\right)$ où $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des intégrales de Wallis (cf. cours).

5. En déduire, à l'aide de l'expression des intégrales de Wallis vue en classe, que $m_{2k} = C_k$.

Correction :

1. Soit n impair. Soit f la fonction définie sur $[-2\,;2]$ par $f(x) = x^n\sqrt{1-x^2}$. f est impaire. Puisqu'on l'intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0,
$$m_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$
2. Posons $x = 2\sin(t)$, $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.
$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2(t)} \times 2\cos(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t)} \times \cos(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Or, si $t \in [-\pi/2\,;\pi/2]$, $\cos(t) \geq 0$ donc $\sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$, ce qui implique que
$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{aligned}$$
Finalement, $m_0 = 1$.
3. Il suffit de poser $u = x/2, x = 2u$, $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}u$:
$$m_{2k} = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} 2^{2k}u^{2k}\sqrt{4-4u^2} \times 2\,\mathrm{d}u = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-1}^{1} u^{2k}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$$
4. Faisons le changement de variable : $u = \sin(t)$ et $\mathrm{d}u = \cos(t)\,\mathrm{d}t$ soit
$$m_{2k} = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k}(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{d}t$$
Or, sur $[-\pi/2\,;\pi/2]$, $\sqrt{1-\sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t)} = \cos(t)$ (le cos est positif). Dès lors
$$m_{2k} = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k}(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2k+1}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2k}(t)(1-\sin^2(t))\,\mathrm{d}t$$
Or, la fonction intégrée est paire, d'où
$$m_{2k} = \frac{2^{2k+2}}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \sin^{2k}(t) - \sin^{2k+2}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2^{2k+2}}{\pi}(W_{2k} - W_{2k+2})$$
5. D'après la question précédente, la relation de récurrence et l'expression des intégrales de Wallis vues en classe :

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{2^{2k+2}}{\pi}(W_{2k} - W_{2k+2}) \\ &= \frac{2^{2k+2}}{\pi}\left(W_{2k} - \frac{2k+1}{2k+2}W_{2k}\right) \\ &= \frac{2^{2k+2}}{\pi} \times \frac{W_{2k}}{2k+2} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+1)} \times W_{2k} \\ &= \frac{2^{2k+1}}{\pi(k+1)} \times \frac{\pi(2k)!}{2^{2k+1}(k!)^2} \\ &= \frac{1}{k+1} \times \frac{(2k)!}{(k!)^2} \end{aligned}$$

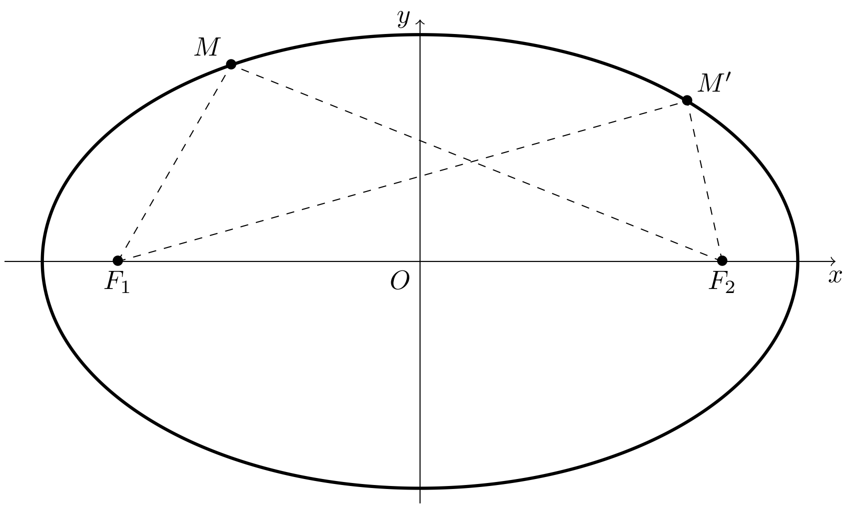
Finalement :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad m_{2k} = \frac{1}{k+1} \times \binom{2k}{k} = C_k$$

Exercice 35 - L'aire d'une ellipse : ✪✪✪ Soient a et b non nuls. L'ellipse (centrée en 0) de paramètres a et b est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le but de l'exercice est de donner l'aire de cette ellipse. Comme il n'y a que leur carré qui intervient, on peut supposer que a et b sont tous les deux strictement positifs. Un cercle est bien sûr une ellipse particulière avec $a = b = R$ le rayon du cercle. Une ellipse générale est dessinée ci-dessous (ici $a = 5$ et $b = 3$) :



1. Donner les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse avec les axes.
2. Écrire l'aire de l'ellipse comme la différence de deux intégrales que l'on précisera. Montrer que l'aire est égale à

$$4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$

3. En déduire que l'aire d'une ellipse de paramètres a et b vaut πab.

Remarque : On peut montrer que le périmètre d'une ellipse de paramètres a et b vaut

$$P = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle une intégrale elliptique, et on ne sait pas en donner une valeur exacte (sauf dans le cas où $a = b$...). Il existe cependant des méthodes assez efficaces pour en donner une valeur approchée.

Remarque : On suppose que $a \geq b$ et on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (si $b \geq a$, l'ellipse est « verticale » et il suffit de tourner la tête). Les points $F_1(-c, 0)$ et $F_2(0, c)$ sont appelés les foyers de l'ellipse. On peut montrer comme sur la figure ci-dessus que tous les rayons lumineux partant de F_1 se réfléchissent et arrivent en F_2. C'est bien sûr la même chose avec les ondes sonores, et puisque les stations de métro parisiennes sont de forme elliptique, c'est la raison pour laquelle, quand on se place à un endroit précis (un des foyers), on entend très bien ce qui est dit de l'autre côté de la voie. Une dernière pour la route : d'après la première loi de Kepler, les planètes du système solaire ont une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Correction :

1. Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse. M appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $y = 0$ si et seulement si $x^2/a^2 = 1$ (car M est un point de l'ellipse). Par conséquent, les points de l'ellipse appartenant à l'axe des abscisses sont les points de coordonnées $(\pm a, 0)$. On prouve de même que les points de coordonnées $(0, \pm b)$ sont les points d'intersection de l'ellipse avec l'axe des ordonnées.
2. L'aire de l'ellipse est l'aire de la partie au-dessus de l'axe des abscisses plus l'aire de la partie sous cet axe. Soit $M(x, y)$ un point du plan. M appartient à l'ellipse si et seulement si $y^2 = b^2 \times \left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$ si et seulement si (rappelons que b est positif) :
$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$
En d'autres termes, l'ellipse est la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \pm b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, la partie au-dessus de l'axe des abscisses étant le graphe de la fonction $x \mapsto b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$, et la partie sous cet axe est le graphe de la fonction $x \mapsto -b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$. De plus, ces deux fonctions sont définies sur $[-a\,;a]$. Par conséquent, l'aire de la partie au-dessus de l'axe des abscisses est égale à
$$\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$
Attention, une aire (géométrique) est toujours positive, et l'intégrale d'une fonction négative est égale à **moins** l'aire (géométrique) entre la courbe et l'axe des abscisses. Tout ça pour dire que l'aire (géométrique) de l'ellipse située sous l'axe des abscisses est égale à
$$-\int_{-a}^{a} -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$
Dès lors, l'aire de l'ellipse est égale à
$$2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$
Or, la fonction intégrée est paire donc l'intégrale ci-dessus (sans le 2) est égale à
$$2\int_{0}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$$
ce qui permet de conclure.
3. Il ne nous reste plus qu'à calculer cette intégrale. Comme à chaque fois qu'on a une quantité de la forme $1 - \text{truc}^2$, on pose truc = cos ou sin. Posons $x/a = \cos(u)$, $\mathrm{d}x = -a\sin(u)\,\mathrm{d}u$:

$$
\begin{aligned}
I &= 4b\int_{\pi/2}^{0} \sqrt{1-\cos^2(u)} \times -a\sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2(u)} \times \sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin(u) \times \sin(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \sin^2(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\int_{0}^{\pi/2} \frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= 4ab\left[\frac{u}{2} - \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\
&= 4ab \times \frac{\pi}{4} \\
&= \pi ab
\end{aligned}
$$

Exercice 36 - Formule de sommation d'Euler : ✪✪✪ Si $u \in \mathbb{R}$, on note $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ la partie fractionnaire du réel u. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;n\,]$. Montrer que

$$
\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t
$$

Correction : Notons

$$
I = \int_1^n \left(\{t\} - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t
$$

On a :

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^n \left(t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(t-k-\frac{1}{2}\right) \times f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(f(k+1)+f(k)) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n} f(j) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f(j) - \frac{1}{2} \times f(1) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} f(k) - \frac{1}{2} \times f(n) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(j) - \frac{1}{2} \times (f(1)+f(n)) - \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

ce qui est bien le résultat voulu.

Chapitre 11

Équations différentielles

« Solal chevauchait et il regardait le soleil face à face. »

Albert Cohen, Solal

Si rien n'est précisé, on cherche les solutions à valeurs réelles.

11.1 Résolution d'équations :

Exercice 1 - Équations du premier ordre : ✪ Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = -7$
2. $(1-x^2)y' + xy = ax$
3. $y' + y = x^2$
4. $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{2}$
5. $y'\cos(x) - y\sin(x) = \sin(2x)$

Correction :

1. L'équation homogène associée est $(H) : y' - 2y = 0$ dont l'ensemble des solutions est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Or, la fonction constante égale à $7/2$ est solution évidente (toujours chercher une solution évidente avant de se lancer dans une méthode de variation de la constante) donc :

$$S_E = \left\{x \mapsto \frac{7}{2} + \lambda e^{2x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Les domaines d'intégration sont $]-\infty\,;-1\,[\,,]-1\,;1\,[$ et $]\,1\,;+\infty\,[$. Plaçons-nous sur un domaine d'intégration. Soit $x \neq \pm 1$. (E) est équivalente à

$$y' + \frac{x}{1-x^2}y = \frac{ax}{1-x^2}$$

L'EHA est $(H) : y' + \dfrac{x}{1-x^2}y = 0$. Puisqu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|$ (ne pas oublier la valeur absolue !), on en déduit que :

$$\begin{aligned} S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \mapsto \lambda\sqrt{|1-x^2|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

La fonction constante égale à a est solution évidente donc

$$S_E = \left\{x \mapsto a + \lambda\sqrt{|1-x^2|} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

3. L'équation homogène associée est $(H) : y' + y = 0$ donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Aucune solution évidente ne saute aux yeux : appliquons la méthode de variation de la constante. Soit λ dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-x}$. Alors y_0 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ${y_0}'(x) = \lambda'(x)e^{-x} - \lambda(x)e^{-x}$. Dès lors,

$$y_0{}'(x) + y_0(x) = \lambda'(x)e^{-x}$$

Finalement, y_0 est une solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = x^2e^x$ si et seulement si λ est une primitive de $x \mapsto x^2e^x$. Cherchons une primitive générique de cette fonction, de même que dans le chapitre précédent :

$$\begin{aligned}
\int^x t^2e^t \,\mathrm{d}t &= \left[t^2e^t\right]^x - 2\int^x te^t \,\mathrm{d}t \\
&= x^2e^x - 2\left(\left[te^t\right]^x - \int^x e^t \,\mathrm{d}t\right) \\
&= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) \\
&= x^2 - 2xe^x + 2e^x
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $y_0 : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ est solution particulière, si bien que :

$$S_E = \{x \mapsto x^2 - 2x + 2 + \lambda e^{-x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

4. Les domaines d'intégration sont $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x \neq 0$. (E) est équivalente à

$$y' - \frac{2}{x} \times y = \frac{x^2}{2}$$

L'EHA est $(H) : y' - \dfrac{2}{x} \times y = 0$ donc

$$\begin{aligned}
S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{2\ln|x|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{x \mapsto \lambda |x|^2 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} \\
&= \{x \mapsto \lambda x^2 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Soit λ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)x^2$. Alors y_0 est dérivable et $y_0{}'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x)$ si bien que

$$y_0{}'(x) - \frac{2}{x} \times y_0(x) = \lambda'(x)x^2$$

En particulier, y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = 1/2$. Dès lors, $y_0 : x \mapsto \dfrac{x}{2} \times x^2 = \dfrac{x^3}{2}$ est solution particulière. En conclusion :

$$S_E = \left\{x \mapsto \frac{x^3}{2} + \lambda x^2 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

5. Les domaines d'intégration sont tous les intervalles de la forme $\left]k\pi - \dfrac{\pi}{2}\,; k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Soit x dans un domaine d'intégration. (E) est équivalente à :

$$y' - \tan(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(x)}$$

L'EHA est $(H) y' - \tan(x) = 0$ et on sait qu'une primitive de tan est $x \mapsto -\ln|\cos(x)|$, donc une primitive de $-\tan$ est $x \mapsto \ln|\cos(x)|$ si bien que :

$$\begin{aligned}
S_H &= \left\{x \mapsto \lambda e^{-\ln|\cos(x)|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{|\cos(x)|} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}$$

Quitte à changer λ en $-\lambda$, ce qui ne change pas l'ensemble des solutions, on a donc

$$S_H = \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{\cos(x)} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Attention, cela ne veut pas dire que $|\cos| = \cos$ i.e. que le cos est positif sur l'intervalle ! On change en fait λ en $-\lambda$, cf. cours. De plus, $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ donc on cherche une solution particulière de :

$$y' - \tan(x)y = 2\sin(x)$$

Soit λ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)/\cos(x)$. Alors y_0 est dérivable et ${y_0}'(x) = \lambda'(x)/\cos(x) + \lambda(x)\sin(x)/\cos^2(x)$ si bien que

$${y_0}'(x) - \tan(x)y_0(x) = \lambda'(x)/\cos(x)$$

Dès lors, y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x dans le domaine d'intégration choisi, $\lambda'(x)/\cos(x) = 2\sin(x)$ donc si et seulement si $\lambda'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$. Dès lors, $\lambda = -\cos(2x)/2$ convient. En conclusion :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \frac{-\cos(2x)}{2\cos(x)} + \frac{\lambda}{\cos(x)} \,|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2 - Équations du second ordre : ✪ Idem.

1. $y'' - y' - 6y = x^2 - x + 5$
2. $y'' + 9y = 3x^2 + 2$
3. $y'' - y = 3\cos(x)$
4. $y'' - 2y' + y = e^x + \cos(3x)$
5. $y'' + 4y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$
6. $y'' + 3y' + 4y = \mathrm{sh}(2x)$
7. ✪✪ $y'' + \omega^2 y = \sin^3(x)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$
8. ✪✪✪ $y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = e^{\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Correction :

1. L'EHA est $(H) : y'' - y' - 6y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - r - 6 = 0$ dont les solutions sont 3 et -2 si bien que

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

0 n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (même degré que le second membre). Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) - Q'(x) - 6Q(x) = -6ax^2 + (-2a - 6b)x + (2a - b - 6c)$$

Dès lors :

$$Q \text{ est solution} \iff \begin{cases} -6a & & & = 1 \\ -2a & - 6b & & = -1 \\ 2a & - b & - 6c & = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = -1/6 \\ & - 6b & & = -4/3 \\ & - b & - 6c & = 16/3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = -1/6 \\ & b & & = 2/9 \\ & & - 6c & = 50/9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = -1/6 \\ & b & & = 2/9 \\ & & c & = -25/27 \end{cases}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto -\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{2x}{9} - \dfrac{25}{27}$ est solution particulière. Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^{3x} + \mu e^{-2x} + -\frac{x^2}{6} + \frac{2x}{9} - \frac{25}{27} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. L'EHA est $(H) : y'' + 9y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 9 = 0$ dont les solutions sont $\pm 3i$. On cherche les solutions réelles (c'est écrit au début de la feuille) donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

0 n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (même degré que le second membre). Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) + 9Q(x) = 9ax^2 + 9bx + (2a + 9c)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} Q \text{ est solution} \quad &\iff \quad \begin{cases} 9a & & & = & 3 \\ & 9b & & = & 0 \\ 2a & & + \quad 9c & = & 2 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} a & & & = & 1/3 \\ & b & & = & 0 \\ & & c & = & 4/27 \\ \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{4}{27}$ est solution particulière. Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(3x) + \mu \sin(3x) + \frac{x^2}{3} + \frac{4}{27} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

3. L'EHA est $(H) : y'' - y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont ± 1 si bien que

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Pour trouver une solution particulière, intéressons-nous à l'équation « complexifiée » $(E') : y'' - y = e^{ix}$. i n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière de la forme $Q : x \mapsto ce^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = ice^{ix}$ et $Q''(x) = -ce^{ix}$ si bien que

$$Q''(x) - Q(x) = (-c - c)e^{ix}$$

Dès lors, $Q : x \mapsto -e^{ix}/2$ est solution particulière de (E'). En prenant la partie réelle, $\mathrm{Re}(Q_0) : x \mapsto -\cos(x)/2$ est solution de $y'' - y = \cos(x)$ donc, d'après le principe de superposition, $x \mapsto -3\cos(x)/2$ est solution de (E). Finalement :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} - \frac{3\cos(x)}{2} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

4. L'EHA est $(H) : y'' - 2y' + y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 2r - 1 = (r-1)^2 = 0$ dont l'unique solution est 1. Ainsi,

$$S_H = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

D'après le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière de $(E_1) : y'' - 2y' + y = e^x$ et de $(E_2) : y'' - 2y' + y = \cos(3x)$. Commençons par (E_1). 1 étant racine double de (C), on cherche une solution particulière de la forme $Q_1 : x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_1}'(x) = (ax^2 + (2a+b)x + b + c)e^x$ et ${Q_1}''(x) = (ax^2 + (4a+b) + (2a + 2b + c))e^x$ si bien que

$${Q_1}''(x) - 2{Q_1}'(x) + Q_1(x) = \left((a - 2a + a)x^2 + (4a + b - 4a - 2b + b)x + (2a + 2b + c - 2b - 2c + c)\right) e^x$$

Dès lors, Q_1 est solution si et seulement si $2a = 1$ si et seulement si $a = 1/2$, b et c étant quelconques. Ainsi, $Q_1 : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} \times e^x$ est solution particulière de E_1. Pour (E_2), donnons une solution particulière de l'équation « complexifiée » $(F_2) : y'' - 2y' + y = e^{3ix}$. $3i$ n'est pas une solution de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $Q_2 : x \mapsto ae^{3ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_2}'(x) = 3iae^{3ix}$ et ${Q_2}''(x) = -9ae^{3ix}$ si bien que

$${Q_2}''(x) - 2{Q_2}'(x) + Q_2(x) = (-9a - 6ia + a)\, e^{3ix}$$

Finalement, Q_2 est solution si et seulement si $-8a - 6ia = 1$ si et seulement si $a = \dfrac{-1}{8 + 6i}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= \frac{-1}{8+6i} \times e^{3ix} \\ &= \frac{-(8-6i)}{8^2+6^2} \times e^{3ix} \\ &= \frac{-8+6i}{100} \times (\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ &= \frac{-4+3i}{50} \times (\cos(3x) + i\sin(3x)) \end{aligned}$$

Finalement, en prenant la partie réelle, $x \mapsto \dfrac{-4\cos(3x) - 3\sin(3x)}{50}$ est solution particulière de (E_2). D'après le principe de superposition,

$$S_E = \left\{ x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu \right) e^x - \frac{4\cos(3x) + 3\sin(3x)}{50} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

5. L'EHA est $(H) : y'' + 4y = 0$, l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont $\pm 2i$. Ainsi (rappelons que, sauf indication contraire, on cherche les solutions réelles) :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

D'après le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière aux équations $(E_1) : y'' + 4y = \cos(2x)$ et $(E_2) : y'' + 4y = \sin(2x)$. On s'intéresse à la même équation complexifiée $(F) : y'' + 4y = e^{2ix}$. $2i$ étant solution simple de (C), on cherche une solution particulière de (F) sous la forme $Q : x \mapsto (ax+b)e^{2ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors $Q'(x) = (2iax + (a+2ib))e^{2ix}$ et $Q''(x) = (-4ax + (4ia - 4b))e^{2ix}$ si bien que

$$Q''(x) + 4Q(x) = 4iae^{2ix}$$

Ainsi, Q est solution particulière de (F) si et seulement si $4ia = 1$ si et seulement si $a = 1/4i = -i/4$. Dès lors,

$$\begin{aligned} Q(x) &= -\frac{ix}{4} \times e^{2ix} \\ &= -\frac{ix}{4} \times (\cos(2x) + i\sin(2x)) \end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathrm{Re}(Q) : x \mapsto \dfrac{x\sin(2x)}{4}$ est solution de (E_1) et $\mathrm{Im}(Q) : x \mapsto -\dfrac{x\cos(2x)}{4}$ est solution de (E_2). D'après le principe de superposition :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) + \frac{3x\sin(2x)}{4} - \frac{x\cos(2x)}{4} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

6. On trouve de même (idem que dans le cours, avec le principe de superposition, et puisque ± 2 ne sont pas solutions de l'équation caractéristique) que

$$S_E = \left\{ x \mapsto e^{-3x/2} \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{7}}{2} \right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{7}}{2} \right) \right) - \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{28} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

7. L'EHA est $(H) : y'' + \omega^2 y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + \omega^2 = 0$ dont les solutions sont $\pm i\omega$ (distinctes car $\omega \neq 0$). Dès lors,

$$S_H = \{ x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Cherchons à présent une solution particulière. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$ donc $\sin^3(x) = \dfrac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$. Il suffit donc de trouver une solution particulière aux équations $(E_1) : y'' + \omega^2 y = \sin(x)$ et $(E_2) : y'' + \omega^2 y = \sin(3x)$ puis d'appliquer le principe de superposition. Pour cela, on s'intéresse aux équations complexifiées $(F_1) : y'' + \omega^2 y = e^{ix}$ et $(F_2) : y'' + \omega^2 y = e^{3ix}$. Il faut donc séparer les cas selon la valeur de ω (rappelons que ω est strictement positif).

- Supposons que $\omega \neq 1$. Alors i n'est pas une solution de (C), on cherche donc une solution particulière de (F_1) sous la forme $Q_1 : x \mapsto ae^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_1}'(x) = iae^{ix}$ et ${Q_1}''(x) = -ae^{ix}$. Ainsi,

$$Q''(x) + \omega^2 Q(x) = a(\omega^2 - 1)e^{ix}$$

c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = \dfrac{1}{\omega^2 - 1}$. En prenant la partie réelle, on trouve que

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{\omega^2 - 1}$$

est solution particulière de (E_1).

- Supposons que $\omega \neq 3$. On trouve de même que

$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{\omega^2 - 9}$$

est solution particulière de (E_2).

- Supposons que $\omega = 1$. Alors i est solution simple de (C) : on cherche une solution particulière de (F_1) sous la forme $Q_1 : x \mapsto (ax+b)e^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_1}'(x) = (iax + ib + a)e^{ix}$ et ${Q_1}''(x) = (-ax - b + 2ia)e^{ix}$. Ainsi,

$${Q_1}''(x) + \omega^2 Q_1(x) = {Q_1}''(x) + Q_1(x) = 2iae^{ix}$$

c'est-à-dire que Q_1 est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = 1/2i = -i/2$, c'est-à-dire que

$$Q_1 : x \mapsto -\frac{ix}{2}e^{ix} = -\frac{ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

est solution de (F_1). En prenant la partie imaginaire, on trouve que $x \mapsto -x\cos(x)/2$ est solution particulière de (E_1).

- Supposons enfin que $\omega = 3$. Alors $3i$ est solution simple de (C) : on cherche une solution particulière de (F_2) sous la forme $Q_2 : x \mapsto (ax+b)e^{3ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. ${Q_2}'(x) = (3iax + 3ib + a)e^{3ix}$ et ${Q_2}''(x) = (-9ax - 9b + 6ia)e^{3ix}$. Ainsi,

$${Q_2}''(x) + \omega^2 Q_2(x) = {Q_2}''(x) + 9Q_2(x) = 3iae^{3ix}$$

c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F_1) si et seulement si $a = 1/6i = -i/6$, c'est-à-dire que

$$Q_2 : x \mapsto -\frac{i}{6} \times x \times e^{3ix} = -\frac{i}{6} \times x \times (\cos(3x) + i\sin(3x))$$

est solution de (F_2). En prenant la partie imaginaire, on trouve que $x \mapsto -\dfrac{x}{6}\cos(3x)$ est solution particulière de (E_2).

Conclusion, d'après le principe de superposition :

- Si $\omega \neq 1, 3$:

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(\omega x) + \mu\sin(\omega x) + \frac{3}{4} \times \frac{\sin(x)}{\omega^2 - 1} - \frac{1}{4} \times \frac{\sin(3x)}{\omega^2 - 9} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Si $\omega = 1$ (en utilisant le fait que $\omega^2 - 9 = -8$) :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{3x\cos(x)}{8} + \frac{1}{32} \times \sin(3x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Si $\omega = 3$ (en utilisant le fait que $\omega^2 - 1 = 8$) :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) + \frac{3}{32} \times \sin(x) + \frac{x}{24} \times \cos(3x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

8. L'EHA est $(H) : y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 - 2r\cos(\alpha) + 1 = 0$ dont le discriminant vaut $\Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4$. Il faut donc distinguer plusieurs cas selon la valeur de α.
   - Supposons que $\alpha \equiv 0[2\pi]$ si bien que $\cos(\alpha) = 1$. 1 est solution double de (C) donc

$$S_H = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On cherche à présent une solution de l'équation complexifiée $(F) : y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = y'' - 2y' + y = e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$. Puisque $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ n'est pas solution de (C), on cherche une solution sous la forme $Q : x \mapsto ae^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = a \times e^{i\pi/3}e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$ et $Q'(x) = a \times e^{2i\pi/3}e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$ donc

$$Q''(x) - 2Q'(x) + Q(c) = a\left(e^{2i\pi/3} - 2e^{i\pi/3} + 1\right)e^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x}$$

si bien que Q est solution particulière si et seulement si $a \times \left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = a \times j^2 = 1$ si et seulement si $a = 1/j^2 = j$. Finalement, une solution particulière de (F) est :

$$Q : x \mapsto je^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)x} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) \times e^{x/2} \times \left(\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

En prenant la partie réelle, une solution particulière est :

$$x \mapsto -\frac{1}{2} \times e^{x/2} \times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{x/2} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

En conclusion,

$$S_E = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x - \frac{1}{2} \times e^{x/2} \times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \times e^{x/2} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Deuxième cas : $\alpha \equiv \pi[2\pi]$. On trouve de même que :

$$S_E = \left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x} + \frac{1}{6} \times e^{x/2} \times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \times e^{x/2} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Supposons que $\alpha \not\equiv 0[\pi]$. (C) se réécrit $(r - e^{i\alpha}) \times (r - e^{-i\alpha}) = 0$ si bien que les deux solutions sont $e^{\pm i\alpha} = \cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha)$. On trouve donc :

$$S_H = \left\{x \mapsto e^{\cos(\alpha)x} \times (\lambda\cos(\sin(\alpha) \times x) + \mu\sin(\sin(\alpha) \times x)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

On cherche à présent une solution particulière de l'équation complexifiée (F). Les solutions de (C) étant $e^{\pm i\alpha}$, il faut séparer les cas selon que $\alpha = \pm\pi/3$ ou non.

Supposons donc que $\alpha \not\equiv \pm\pi/3[2\pi]$. Alors $2\pi/3$ n'est pas racine de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto ae^{xe^{i\pi/3}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $Q'(x) = ae^{i\pi/3}e^{xe^{i\pi/3}}$ et $Q''(x) = ae^{2i\pi/3}e^{xe^{i\pi/3}}$ donc

$$Q''(x) - 2\cos(\alpha)Q'(x) + Q(x) = a\left(e^{2i\pi/3} - 2\cos(\alpha)e^{i\pi/3} + 1\right)e^{xe^{i\pi/3}}$$

Finalement, Q est solution particulière si et seulement si (on utilise le fait que $e^{2i\pi/3} + 1 = e^{i\pi/3}$) :

$$a \times e^{i\pi/3}(1 - 2\cos(\alpha)) = 1$$

si et seulement si

$$a = \frac{e^{-i\pi/3}}{1 - 2\cos(\alpha)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1 - 2\cos(\alpha)}$$

Finalement, une solution particulière de (F) est :

$$Q : x \mapsto \frac{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1 - 2\cos(\alpha)} \times e^{xe^{i\pi/3}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}}{1 - 2\cos(\alpha)} \times e^{x/2} \times \left(\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$

En trouvant la partie réelle, on trouve enfin que

$$\begin{aligned} S_E \quad = \quad & \left\{x \mapsto e^{\cos(\alpha)x} \times (\lambda\cos(\sin(\alpha) \times x) + \mu\sin(\sin(\alpha) \times x))\right. \\ & \left. + \frac{e^{x/2}}{1 - 2\cos(\alpha)} \times \left(\frac{1}{2} \times \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\} \end{aligned}$$

Il nous reste à étudier le cas où $\alpha \equiv \pm\pi/3[2\pi]$. Alors $e^{i\pi/3}$ est racine simple de (C) : on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto (ax + b)e^{xe^{i\pi/3}}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$Q'(x) = \left(axe^{i\pi/3} + be^{i\pi/3} + a\right)e^{xe^{i\pi/3}} \qquad \text{et} \qquad Q''(x) = \left(ax\left(e^{i\pi/3}\right)^2 + b\left(e^{i\pi/3}\right)^2 + 2ae^{i\pi/3}\right)e^{xe^{i\pi/3}}$$

Or, en utilisant le fait que $\left(e^{i\pi/3}\right)^2 - 2\cos(\alpha)e^{i\pi/3} + 1 = 0$, on trouve que Q est solution particulière si et seulement si

$$2ae^{i\pi/3} - 2\cos(\alpha)a = 1$$

En utilisant le fait que $\cos(\alpha) = 1/2$ et $e^{i\pi/3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$, on trouve que Q est solution si et seulement si $a = -i/\sqrt{3}$. Ainsi,

$$Q = \frac{-ix}{\sqrt{3}} e^{xe^{i\pi/3}}$$

est solution particulière, et en prenant la partie réelle,

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3}} \times \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) \times e^{x/2}$$

est solution particulière de (E), ce qui permet de conclure. Ouf !

Exercice 3 : ✪ Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Correction : L'EHA est $(H) : y'' + 9y = 0$ et l'équation caractéristique est $(C) : r^2 + 9 = 0$ dont les solutions sont $\pm 3i$ donc

$$S_H = \{x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Puisque 0 n'est pas solution de (C), on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = 2ax + b$ et $Q''(x) = 2a$ si bien que

$$Q''(x) + 9Q(x) = 9ax^2 + 9bx + (9c + 2a)$$

Dès lors,

$$Q \text{ est solution} \iff \begin{cases} 9a & & & = & 1 \\ & 9b & & = & 0 \\ 2a & & + \; 9c & = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = & 1/9 \\ & b & & = & 0 \\ & & c & = & 7/81 \end{cases}$$

On en déduit :

$$S_E = \left\{x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81} \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit

$$y : x \mapsto \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}$$

Alors :

$$y(0) = \lambda + \frac{7}{81} \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 3\mu$$

Finalement, y est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\mu = 0$ et $\lambda = 74/81$ c'est-à-dire que

$$y : x \mapsto \frac{74}{81} \times \cos(3x) + \frac{x^2}{9} + \frac{7}{81}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy. On voit (cf. cours) qu'il y a bien existence et unicité !

Exercice 4 - Une équation d'ordre 3 : ✪✪ On cherche les solutions (réelles) de l'équation différentielle $(E) : y''' = y$.

1. Donner l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(F) : y' = y$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable trois fois. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F).
3. En déduire les solutions de (E).

Correction :

1. C'est immédiat :

$$S_F = \{x \mapsto \lambda e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

2. Travaillons par équivalences :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (F) &\iff g' = g \\ &\iff f''' + f'' + f = f'' + f' + f \\ &\iff f''' = f \\ &\iff f \text{ est solution de } (E) \end{aligned}$$

3. D'après les questions précédentes, f est solution de (E) si et seulement s'il existe g solution de (F) telle que $f''+f'+f = g$ donc si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f soit solution de $y'' + y' + y = \lambda e^x$. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et résolvons l'équation $(E_\lambda) : y'' + y' + y = \lambda e^x$. L'EHA est $(H) : y'' + y' + y = 0$ et l'équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ donc les solutions sont j et j^2 c'est-à-dire $-1/2 \pm i\sqrt{3}/2$. Par conséquent,

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

(rappelons que λ est déjà pris). 1 n'étant pas racine de (C), on cherche une solution particulière sous la forme $Q : x \mapsto ae^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = Q''(x) = ae^x$ si bien que

$$Q''(x) + Q'(x) + Q(x) = 3ae^x$$

Dès lors, Q est solution particulière si et seulement si $a = \lambda/3$. L'ensemble des solutions de (E_λ) est donc :

$$S_{E_\lambda} = \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{\lambda}{3} \times e^x \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Finalement, les solutions de (E) sont les solutions de (E_λ) quand λ décrit $\mathbb{R}$. En conclusion :

$$\begin{aligned} S_E &= \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \frac{\lambda}{3} \times e^x \mid (\alpha,\beta,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\alpha \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \beta \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right) + \lambda e^x \mid (\alpha,\beta,\lambda) \in \mathbb{R}^3 \right\} \end{aligned}$$

La dernière ligne est obtenue de façon analogue à d'habitude : les deux ensembles sont les mêmes, quitte à changer λ en 3λ. Cela ne veut pas dire que $\lambda = \lambda/3$!

Exercice 5 : ✪ Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'' &=& \omega y' \\ y'' &=& -\omega x' \\ z'' &=& 0 \end{array} \right.$$

En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à $u = x' + iy'$ (on s'intéresse donc à des solutions complexes). x et y étant dérivables deux fois, u est dérivable et $u' = x'' + iy''$. Puisque x et y sont solutions (avec z) du système différentiel de l'énoncé, $x'' = \omega y'$ et $y'' = -\omega x'$ c'est-à-dire que $u' = \omega y' - i\omega x' = -i\omega u$. En d'autres termes, u est solution de l'équation (complexe) $y' + i\omega y = 0$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (u est à valeurs complexes) tel que pour tout t (x est déjà pris), $u(t) = \lambda e^{-i\omega t}$. En écrivant $\lambda = a + ib$, on en déduit que pour tout t,

$$u(t) = (a + ib) \times (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$

En développant, et en se souvenant que $x = \mathrm{Re}(u)$ et $y = \mathrm{Im}(u)$, on trouve que pour tout t,

$$x(t) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad y(t) = b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t)$$

Enfin, z est une fonction affine puisque $z'' = 0$. Finalement, les solutions du système sont les fonctions x, y, z de la forme

$$x : t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t), y : t \mapsto b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) \qquad \text{et} \qquad z : t \mapsto ct + d$$

où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. La synthèse est immédiate.

Exercice 6 : ✪✪ On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution de (E).
2. En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $g'(x) = f'(-x)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g'(x) + 2xg(x) &= f'(-x) - 2xf(-x) \\ &= f'(-x) + 2 \times (-x) \times f(-x) \end{aligned}$$

   On reconnaît le membre de droite de (E) avec f dans le rôle de y et $-x$ à la place de x (penser à « truc »). Puisque f est solution de (E), cette quantité est égale à 1 c'est-à-dire que $g'(x) + 2xg(x) = 1$: g est aussi solution de (E).
2. Rappelons qu'une fonction impaire **définie en** 0 est nulle en 0. Dès lors, une fonction f impaire solution de (E) est solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' + 2xy &=& 1 \\ y(0) &=& 0 \end{array} \right.$$

   D'après le cours, ce problème de Cauchy admet une unique solution donc (E) admet au plus une solution impaire. Pourquoi « au plus » ? Car on vient simplement de prouver qu'il existait une unique solution de (E) nulle en 0 mais celle-ci n'a aucune raison d'être impaire, il existe des fonctions nulles en 0 qui ne sont pas impaires ! Soit donc f cette solution. D'après ce qui précède, $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution. Or, ces deux solutions sont nulles en 0 (f par hypothèse et g car $g(0) = -f(0) = 0$). Par unicité au problème de Cauchy, $g = f$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ i.e. $f(x) = -f(-x)$: f est bien impaire. D'où l'existence, et l'unicité découle du fait qu'on a montré auparavant qu'il y avait au plus une solution impaire.

Exercice 7 : ✪✪ Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f'' &=& f' + g' - g \\ g'' &=& f' + g' - f \end{array} \right.$$

On pourra s'intéresser aux fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.

Correction : Notons S ce système différentiel.

$$
\begin{aligned}
S &\iff \begin{cases} f''-g'' &= f-g \\ \quad g'' &= f'+g'-f \end{cases} && L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
&\iff \begin{cases} f''-g'' &= f-g \\ f''+g'' &= 2(f'+g')-(f+g) \end{cases} && L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\
&\iff \begin{cases} v'' &= v \\ u'' &= 2u'-u \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} v''-v &= 0 \\ u''-2u'+u &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R}, & v(x)=f(x)+g(x)=\lambda e^x+\mu e^{-x} \\ \exists(a,b)\in\mathbb{R}^2, \forall x\in\mathbb{R}, & u(x)=f(x)-g(x)=(ax+b)e^x \end{cases} \\
&\iff \exists(\lambda,\mu,a,b)\in\mathbb{R}^4, \forall x\in\mathbb{R} \begin{cases} f(x)=\left(\dfrac{\lambda+ax+b}{2}\right)e^x+\dfrac{\mu}{2}e^{-x} \\ g(x)=\left(\dfrac{\lambda-ax-b}{2}\right)e^x+\dfrac{\mu}{2}e^{-x} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Quitte à changer λ en 2λ, a en $2a$, b en $2b$ et μ en 2μ, les solutions sont de la forme :

$$f : x \mapsto (\lambda+ax+b)\,e^x+\mu e^{-x} \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto (\lambda-ax-b)\,e^x+\mu e^{-x}$$

11.2 Équations fonctionnelles se ramenant à une équation différentielle :

Exercice 8 : ✪✪ :

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles réelles telles que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x+y)=f(x)f(y)$$

Correction : Ce genre de question se traite toujours par analyse synthèse : en dérivant, on perd l'équivalence.

1. Analyse : soit f une fonction qui convient. Alors f' est dérivable (car f est dérivable) et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= -f'\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\
&= -f\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right) \quad \text{(penser à « truc »)} \\
&= -f(x)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $y''+y=0$ dont l'ensemble des solutions est

$$S_H=\{x\mapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

Synthèse : soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et soit $f : x\mapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$. Alors f est dérivable. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$f'(x)=-\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)$$

Or, on a également :

$$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\lambda\sin(x)+\mu\cos(x)$$

Si f convient alors, pour $x = \pi/2$ (on oublie le : « par identification » !), on obtient $\lambda = -\lambda$ donc $\lambda = 0$ donc $f(x) = \mu \sin(x)$, et cette fonction est bien solution. En conclusion, les solutions sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \mu \sin(x)$ pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. On peut généraliser cet exercice et chercher toutes les fonctions dérivables telles que, pour tout x, $f'(x) = f(a-x)$, mais on se retrouve alors avec des $\cos(a-x)$ et des $\sin(a-x)$ ce qui donne des calculs innommables et ne change rien à la méthode.

2. Analyse : soit f solution. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Fixons y et dérivons l'égalité de l'énoncé par rapport à x (si y est constante, on peut réécrire l'égalité de l'énoncé sous la forme $g(x) = h(x)$ avec $g(x) = f(x+y)$ et $h(x) = f(x)f(y)$ ce qui implique que $g'(x) = h'(x)$) ce qui donne :

$$f'(x+y) = f'(x) \times f(y)$$

En prenant $x = 0$, on en déduit que $f'(y) = f'(0) \times f(y)$. Posons $\lambda = f'(0)$. Alors f est solution de l'équation différentielle $y' - \lambda y = 0$ donc il existe $a \in \mathbb{R}$ (λ est déjà pris) tel que $f : x \mapsto ae^{\lambda x}$.

Synthèse : soit $(a, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : x \mapsto ae^{\lambda x}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'une part, $f(x+y) = ae^{\lambda x + \lambda y}$ et d'autre part, $f(x) \times f(y) = a^2 e^{\lambda x + \lambda y}$. Si $a \neq a^2$ alors il n'y a pas égalité donc f n'est pas solution. Si $a^2 = a$, c'est-à-dire si $a = 0$ ou $a = 1$, alors on a égalité et f est solution. En conclusion, les seules solutions sont la fonction nulle et les fonctions du type $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : ✪✪✪ : Cet exercice est assez calculatoire mais pas si difficile que cela.

1. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t) f(t) \,\mathrm{d}t$$

2. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + 2 \int_0^x e^{x-t} f(t) \,\mathrm{d}t$$

Correction :

1. Analyse : soit f une solution, et soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = \cos(x) - x - x \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t + \int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t$$

Tout d'abord, $f(0) = 1$ (dans ce genre de problème, regarder les valeurs en certains points permet d'obtenir des informations sur les fonctions cherchées, il faut donc se demander si certaines valeurs sont faciles à calculer). De plus, f étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \int_0^x t f(t) \,\mathrm{d}t$$

sont dérivables (et même $\mathscr{C}^1$). f est donc dérivable car somme et produit de fonctions dérivables, et en dérivant l'égalité ci-dessus (on peut le faire puisqu'elle est valable en tout x),

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 - x f(x) - \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t + x f(x)$$

si bien que

$$f'(x) = -\sin(x) - 1 - \int_0^x f(t) \,\mathrm{d}t$$

En particulier, $f'(0) = -1$. De même, f' est dérivable donc, en dérivant une nouvelle fois, il vient :

$$f''(x) = -\cos(x) - f(x)$$

c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $(E) : y'' + y = -\cos(x)$. Résolvons cette équation différentielle. Les solutions (réelles) de l'EHA sont

$$S_H = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Cherchons une solution à l'équation complexifiée $(F) : y'' + y = -e^{ix}$. i est solution simple de $(C) : r^2 + 1 = 0$: on cherche une solution particulière de (F) sous la forme $Q : x \mapsto (ax+b)e^{ix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $Q'(x) = (iax + ib + a)e^{ix}$ et $Q''(x) = (-ax - b + 2ia)e^{ix}$. Ainsi,

$$Q''(x) + Q(x) = 2iae^{ix}$$

c'est-à-dire que Q est solution particulière de (F) si et seulement si $a = -1/2i = i/2$, c'est-à-dire que

$$Q : x \mapsto \frac{ix}{2}e^{ix} = \frac{ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

est solution de (F). En prenant la partie réelle, on trouve que $x \mapsto -x\sin(x)/2$ est solution particulière de (E). Finalement,

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + \frac{x\sin(x)}{2} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Synthèse : soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit

$$f : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

Avec les conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$, on trouve que $\lambda = 1$ et $\mu = -1$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$g(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t\ = \cos(x) - x - x\int_0^x \cos(t) - \sin(t) - \frac{t\sin(t)}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^x t\cos(t) - t\sin(t) - \frac{t^2\sin(t)}{2}\,\mathrm{d}t$$

et voyons si $g(x) = f(x)$. À l'aide d'IPP on trouve :

$$\int_0^x t\sin(t)\,\mathrm{d}t\ = \sin(x) - x\cos(x) \qquad \text{et} \qquad \int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t\ = x\sin(x) + \cos(x) - 1$$

ainsi que

$$\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t\ = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2$$

Tous calculs faits, on trouve bien que $g(x) = f(x)$. Finalement, la seule solution est

$$f : x \mapsto \cos(x) - \sin(x) - \frac{x\sin(x)}{2}$$

2. Idem, travaillons par analyse-synthèse. Analyse : soit f une fonction qui convient. Tout d'abord, $f(0) = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(x) = \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction $t \mapsto e^{-t}f(t)$ étant continue, d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$x \mapsto \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable donc f est dérivable en tant que somme et produit de fonctions dérivables. Dès lors,

$$f'(x) = \cos(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t}f(t)\,\mathrm{d}t\ + 2e^x \times e^{-x}f(x)$$

En particulier, puisque $f(0) = 0$, on trouve que $f'(0) = 1$. Le membre central de l'égalité ci-dessus étant égal à $f(x) - \sin(x)$, on trouve que $f'(x) = \cos(x) + f(x) - \sin(x) + 2f(x)$, on en déduit que f est solution de l'équation $(E) : y' - 3y = \cos(x) - \sin(x)$. L'EHA est $y' - 3y = 0$ dont l'ensemble des solutions est :

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{3x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Appliquons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E). Soit λ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{3x}$. Alors y_0 est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, ${y_0}'(x) = (\lambda'(x) + 3\lambda(x))e^{3x}$ si bien que

$$y_0{}'(x) = \lambda'(x)e^{3x}$$

On en déduit que y_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = (\cos(x) - \sin(x))e^{-3x}$. On cherche donc une primitive de $x \mapsto (\cos(x) - \sin(x))e^{-3x}$. Or,

$$\begin{aligned} \int^x e^{(-3+i)t}\,\mathrm{d}t &= \frac{e^{(-3+i)t}}{-3+i} \\ &= \frac{e^{-3t} \times (\cos(t) + i\sin(t))}{10} \times (-3-i) \end{aligned}$$

En prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\int^x \cos(t)e^{-3t}\,dt = \frac{e^{-3t} \times (-3\cos(t) + \sin(t))}{10} \qquad \text{et} \qquad \int^x \sin(t)e^{-3t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-3t} \times (-\cos(t) - 3\sin(t))}{10}$$

Dès lors, une primitive de $t \mapsto (\cos(t) - \sin(t))e^{-3t}$ est :

$$t \mapsto \frac{e^{-3t} \times (-2\cos(t) + 4\sin(t))}{10} = \frac{e^{-3t} \times (-\cos(t) + 2\sin(t))}{5}$$

On en déduit que $y_0 : x \mapsto \dfrac{-\cos(x) + 2\sin(x)}{5}$ est solution particulière de (E). En conclusion :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda e^{3x} - \frac{\cos(x)}{5} + \frac{2\sin(x)}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Puisque f est solution de (E), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda e^{3x} - \frac{\cos(x)}{5} + \frac{2\sin(x)}{5}$$

En se souvenant que $f(0) = 0$, on trouve $\lambda = 1/5$ si bien que f est la fonction définie par

$$f(x) = \frac{e^{3x} - \cos(x) + 2\sin(x)}{5}$$

Synthèse : soit f la fonction ci-dessus. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit

$$\begin{aligned} g(x) &= \sin(x) + 2e^x \int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x) + \frac{2}{5}e^x \int_0^x e^{-t} \times (e^{3t} - \cos(t) + 2\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \sin(x) + \frac{2}{5}e^x \int_0^x (e^{2t} - e^{-t}\cos(t) + 2e^{-t}\sin(t))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On trouve tout d'abord :

$$\int_0^x e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

puis

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{(-1+i)t}\,\mathrm{d}t &= \frac{e^{(-1+i)x} - 1}{-1+i} \\ &= \frac{e^{-x} \times (\cos(x) + i\sin(x)) - 1}{2} \times (-1-i) \end{aligned}$$

et donc, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire :

$$\int_0^x e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x} \times (-\cos(x) + \sin(x)) - 1}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^x e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x} \times (-\sin(x) - \cos(x))}{2}$$

Après calculs, on trouve bien que $g(x) = f(x)$, c'est-à-dire que f est bien solution de l'équation. En conclusion, la seule solution est la fonction

$$f : x \mapsto \frac{e^{3x} - \cos(x) + 2\sin(x)}{5}$$

Exercice 10 - Une recherche d'espaces propres en dimension infinie : ✪✪✪✪ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f continues sur $[0;1]$ telles que :

$$\forall x \in [0;1], \int_0^1 f(t)\min(x,t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$$

Correction : Comme dans l'exercice précédent, procédons par analyse synthèse. Soit donc f une solution du problème. Soit $x \in [0;1]$. Alors :

$$\begin{aligned}\lambda f(x) &= \int_0^x \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, f est continue donc les fonctions

$$x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont dérivables. Supposons dans un premier temps $\lambda \neq 0$. Alors $f(0) = 0$ (repérer des valeurs faciles à calculer nous aidera à trouver la valeur exacte de f : y penser dans ce genre de problème) puis, en divisant par λ dans l'égalité ci-dessus, on a exprimé f comme somme et produit de fonctions dérivables donc f est dérivable. En dérivant l'égalité ci-dessus (attention, dans la deuxième intégrale, x est la borne inférieure, il y a donc un $-$ qui sort en dérivant), il vient :

$$\begin{aligned}\lambda f'(x) &= xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t - xf(x) \\ &= \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

En particulier, $f'(1) = 0$ (toujours dans le cas où $\lambda \neq 0$). De même, on en déduit que f' est dérivable donc on peut dériver cette égalité, ce qui donne : $\lambda f''(x) = -f(x)$ c'est-à-dire que f est solution de l'équation différentielle $(H) : y'' + (1/\lambda)y = 0$. Pour résoudre cette équation différentielle, il faut séparer les cas selon la valeur de λ.

Premier cas : $\lambda < 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique $(C) : r^2 + 1/\lambda = 0$ sont $\pm 1/\sqrt{-\lambda}$ (rappelons que λ est déjà pris)

$$S_H = \left\{x \mapsto ae^{x/\sqrt{-\lambda}} + be^{-x/\sqrt{-\lambda}} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par conséquent, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout x, $f(x) = ae^{x/\sqrt{-\lambda}} + be^{-x/\sqrt{-\lambda}}$. En se souvenant que $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$, il vient :

$$a + b = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{ae^{1/\sqrt{-\lambda}} - be^{-1/\sqrt{-\lambda}}}{\sqrt{-\lambda}} = 0$$

On en déduit que $b = -a$ donc

$$\frac{ae^{1/\sqrt{-\lambda}} + ae^{-1/\sqrt{-\lambda}}}{\sqrt{-\lambda}} = 0$$

donc $\dfrac{a \times 2\mathrm{ch}(1/\sqrt{-\lambda})}{\sqrt{-\lambda}} = 0$ mais le ch ne s'annule pas donc $a = 0$ donc $b = 0$. On en déduit que f est la fonction nulle.

Deuxième cas : $\lambda > 0$. Alors les solutions de l'équation caractéristique sont $\pm i/\sqrt{\lambda}$ donc

$$S_H = \left\{x \mapsto a\cos\left(x/\sqrt{\lambda}\right) + b\sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Par conséquent, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout x, $f(x) = a\cos\left(x/\sqrt{\lambda}\right) + b\sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right)$. Les conditions $f(0) = 0$ et $f'(1) = 0$ donnent :

$$a = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{b}{\sqrt{\lambda}} \times \cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

Là aussi, examinons plusieurs cas. Si $1/\sqrt{\lambda} \equiv \pi/2[\pi]$ donc s'il existe $k \in \mathbb{N}$ (car $\sqrt{\lambda} > 0$) tel que

$$\lambda = \frac{1}{(k\pi + \pi/2)^2} = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

alors le cosinus ci-dessus est nul donc b est quelconque donc il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$f : x \mapsto b \sin\left(x/\sqrt{\lambda}\right)$$

Si ce n'est pas le cas, alors $a = 0$ donc f est la fonction nulle. Supposons enfin que $\lambda = 0$. En dérivant deux fois l'égalité initiale (ce qui est possible car le membre λf est nul) on trouve $-f(x) = 0$ donc f est la fonction nulle.

Synthèse : dans les cas où $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ ou $\lambda > 0$ qui n'est pas de la forme $\dfrac{4}{((2k+1)\pi)^2}$, la fonction nulle est évidemment solution donc c'est l'unique solution du problème. Supposons à présent qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

et posons $f : x \mapsto b\sin(x/\sqrt{\lambda})$ où b est un réel quelconque. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

De même, g est dérivable deux fois et $g''(x) = -f(x) = \lambda f''(x)$ car f est solution de (E). Ainsi, il existe A et B tels que pour tout x, $g(x) = \lambda f(x) + Ax + B$. Or, $g(0) = 0 = f(0)$ donc $B = 0$ et $g'(1) = 0 = f'(1)$ (cela découle des mêmes calculs que ci-dessus) donc $A = 0$ si bien que $g(x) = \lambda f(x)$ c'est-à-dire que f est solution (on pouvait également prouver que f est solution par le calcul avec quelques IPP). En conclusion, s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2}$$

alors les solutions sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto b \sin\left(\frac{2x}{(2k+1)\pi}\right)$$

avec b un réel quelconque.

11.3 Quelques équations non linéaires

Exercice 11 : ✪✪ On note (E) l'équation différentielle $-x^2y' + xy = y^2$ sur $I = \left]1\,;+\infty\right[$. En procédant au changement de fonction inconnue $z = 1/y$, déterminer les solutions qui ne s'annulent pas sur I.

Correction : Soit y une fonction qui ne s'annule pas sur I et soit $z = 1/y$. Alors z ne s'annule pas sur I et est dérivable car inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas. De plus, $y = 1/z$ donc $y' = -z'/z^2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E) &\iff -x^2y' + xy = y^2 \\ &\iff -x^2 \times \frac{-z'}{z^2} + \frac{x}{z} = \frac{1}{z^2} \\ &\iff x^2z' + xz = 1 \\ &\iff z' + \frac{z}{x} = \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

On peut diviser par x^2 puisqu'on est sur I. Résolvons cette équation différentielle linéaire. L'EHA est $(H) : z' + z/x$ dont l'ensemble des solutions est (il n'y a pas de valeur absolue dans le ln car on est sur I)

$$\begin{aligned} S_H &= \{x \mapsto \lambda e^{-\ln(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{x \mapsto \frac{\lambda}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

Cherchons une solution particulière. Soit λ dérivable sur I et soit $z_0 : x \mapsto \lambda(x)/x$. Alors z_0 est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$z_0{}'(x) = \frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2}$$

si bien que

$$z_0{}'(x) + \frac{z_0}{x} = \frac{\lambda'(x)}{x}$$

Dès lors, z_0 est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x) = 1/x$ pour tout x. En particulier, $z_0 : x \mapsto \ln(x)/x$ est solution particulière. Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{y(x)} = z(x) = \frac{\lambda + \ln(x)}{x}$$

De plus, z ne s'annule pas donc $\lambda \geq 0$ car, si $\lambda < 0$, alors z s'annule en $e^{-\lambda} > 1$. Finalement, les solutions de l'équation non linéaire (E) sont les fonctions

$$y : x \mapsto \frac{x}{\lambda + \ln(x)}$$

où λ est un réel positif. Si on prend des réels non positifs, on a toujours des solutions mais pas sur I tout entier : bienvenue dans le monde des équations non linéaires, dans lequel l'existence d'une solution sur tout l'intervalle n'est pas automatique (cf. exemple suivant).

Exercice 12 : ✪✪ À l'aide du changement de variable $z = y^2$, résoudre l'équation différentielle $yy' + y^2 = \dfrac{e^{-2x}}{2}$.

Correction : Là aussi, soit y dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $z = y^2$. Alors z est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $z' = 2yy'$ si bien que y est solution de l'équation de l'énoncé si et seulement si $z' + 2z = e^{-2x}$. On trouve aisément que les solutions de cette équation différentielle sont les fonction de la forme

$$z : x \mapsto (\lambda + x)e^{-2x}$$

Par conséquent, les solutions de l'équation de l'énoncé sont les fonctions de la forme

$$y : x \mapsto \pm\sqrt{\lambda + x} \times e^{-x}$$

Cependant, cela n'est possible que sur $]-\lambda\,;+\infty[$. En effet, en dehors de $[-\lambda\,;+\infty[$, y n'est pas définie et y n'est pas dérivable en $-\lambda$ (on le voit en calculant le taux d'accroissement). En conclusion, les solutions sont exactement les fonctions de la forme :

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\lambda\,;+\infty[& = & \mathbb{R} \\ \\ x & \mapsto & \pm\sqrt{\lambda + x} \times e^{-x} \end{array} \right.$$

où λ est un réel quelconque.

11.4 Étude qualitative

Exercice 13 : ✪ Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène à coefficients constants, et soit f une solution de (H). Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Correction : Montrons par récurrence que f est $\mathscr{C}^n$ pour tout n.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « f est $\mathscr{C}^n$ ».
2. f est solution de (H) donc est dérivable deux fois. En particulier, f est continue i.e. $\mathscr{C}^0$ et f est dérivable et f' est dérivable donc continue, c'est-à-dire que f est $\mathscr{C}^1$. En d'autres termes, H_0 et H_1 sont vraies (on verra ci-dessous pourquoi il est nécessaire de prouver H_1).
3. Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est $\mathscr{C}^n$ et $n \geq 1$ (c'est ici qu'il faut avoir $n \geq 1$) donc f' est $\mathscr{C}^{n-1}$. $f'' = -af' - bf$ est donc une combinaison linéaire de fonctions $\mathscr{C}^{n-1}$ donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$: H_{n+1} est vraie.
4. D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14 : ✪✪ Soient $T > 0$ et b et c deux fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + b(x)y = c(x)$.

2. Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Correction :

1. Soit B une primitive de b (une telle primitive existe car b est continue). Tout d'abord,

$$S_H = \{x \mapsto \lambda e^{-B(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^{-B(x)}$. Alors y_0 est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_0`(x) = (\lambda'(x) - \lambda(x)b(x))e^{-B(x)} \qquad \text{et} \qquad y_0'(x) + b(x)y_0(x) = \lambda'(x)e^{-B(x)}$$

c'est-à-dire que y_0 est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x) = c(x)e^{B(x)}$. Finalement,

$$y_0 : x \mapsto \left(\int_0^x c(t)e^{B(t)}\,\mathrm{d}t\right) \times e^{-B(x)}$$

est une solution particulière de (E). En conclusion,

$$S_E = \left\{x \mapsto \lambda e^{-B(x)} + e^{-B(x)} \times \int_0^x c(t)e^{B(t)}\,\mathrm{d}t \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

2. Si une solution y de (E) est T-périodique, alors $y(0) = y(T)$. Montrons la réciproque et supposons que y est une solution de (E) vérifiant $y(0) = y(T)$. Soit $f : x \mapsto y(x+T)$. Alors f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = y'(x+T)$ si bien que :

$$f'(x) + b(x)f(x) = y'(x+T) + b(x+T) \times y(x)$$

puisque b est T-périodique. Dès lors, y étant solution de (E), cette quantité est égale à $c(x+T) = c(x)$ puisque c est T-périodique. En d'autres termes, f est solution de (E) et puisque $y(T) = y(0)$, alors $f(0) = y(0)$. En conclusion, f et y sont toutes les deux solutions de (E) et coïncident en 0 donc, par unicité au problème de Cauchy, sont égales, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+T) = y(x)$: y est bien T-périodique.

Chapitre 12

Suites numériques

« Moi, quand je suis en présence d'un con, d'un vrai, c'est l'émotion et le respect parce qu'enfin on tient une explication et on sait pourquoi. Chuck dit que si je suis tellement ému devant la Connerie, c'est parce que je suis saisi par le sentiment révérenciel de sacré et d'infini. Il dit que je suis étreint par le sentiment d'éternité et il m'a même cité un vers de Victor Hugo, *oui, je viens dans ce temple adorer l'Eternel*. Chuck dit qu'il n'y a pas une seule thèse sur la Connerie à la Sorbonne et que cela explique le déclin de la pensée en Occident. »

Romain Gary (Émile Ajar), L'angoisse du roi Salomon

Sauf indication contraire, les suites sont considérées réelles.

Vrai ou faux ?

1. Un sous-ensemble d'un ensemble dense est dense.
2. Un ensemble contenant un ensemble dense est dense.
3. Une suite convergente est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.
4. Une suite majorée est croissante.
5. Une suite croissante est majorée.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
7. Si $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
8. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
9. Si $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
10. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
11. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
12. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
13. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
14. Si $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
15. Une suite (u_n) vérifiant « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{1}{2} \times u_{n+1} + \dfrac{1}{4} \times u_n$ » tend vers 0.
16. La somme de deux suites convergentes est convergentes.
17. La somme de deux suites divergentes est divergente.
18. La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente.
19. Si u admet deux suites extraites distinctes qui convergent vers la même limite avec u converge.
20. Si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L'$ alors $L = L'$.
21. Une suite géométrique bornée converge.
22. La somme de deux suites minorées est minorée.
23. La différence de deux suites minorées est minorée.
24. Le produit de deux suites minorées est minoré.
25. Le quotient de deux suites convergentes est convergent.
26. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \mathbb{R}$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
27. Si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
28. Si (u_n) est une suite croissante telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) converge.
29. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
30. Si $u_n > 0$ pour tout n et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $L > 0$.
31. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
32. Si $\left({u_n}^2\right)$ est convergente alors $(|u_n|)$ est convergente.
33. $\left\lfloor -\dfrac{1}{n} \right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor 0 \rfloor = 0$.
34. Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, et si (u_n) est croissante, alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
35. La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.
36. Deux suites bornées dont la différence tend vers 0 convergent vers la même limite.
37. Une suite qui tend vers 1 est positive à partir d'un certain rang.
38. Une suite qui tend vers 0 tend vers 0^+ ou 0^-.
39. Une suite (u_n) croissante telle que (u_{2n}) converge est convergente.

40. $\left(1+\frac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

41. $\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

42. $e^{-n\times\frac{2i\pi}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

43. $e^{-n+i\times n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

44. $\dfrac{\ln\left(n^2+n\right)}{2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

45. $n\sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

46. $n\cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

47. La suite $\left(\dfrac{1}{\cos(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

48. La suite $\left(\dfrac{1}{\sin(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

49. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{k\to+\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)=\lim_{k\to+\infty}\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{(n+1)^k}\right)$.

50. La suite de terme général $u_n=2^{6n+2}-3\times\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}$ est géométrique.

51. Si la suite $(\cos(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(\sin(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12.1 Intervalles

Exercice 1 : ✪✪ Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est un intervalle (éventuellement vide).
2. Montrer que si $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est non vide, alors $\displaystyle\bigcup_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

Correction :

1. Si I est vide alors I est un intervalle (par convention, l'ensemble vide est un intervalle). Sinon, soient $a\leq b$ deux éléments de $I=\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ et soit $c\in[\,a\,;b\,]$. Soit $j\in J$. Puisque a et b appartiennent à l'intersection, alors a et b appartiennent à I_j qui est un intervalle donc $[\,a\,;b\,]\subset I_j$ si bien que $c\in I_j$. j étant quelconque, c appartient à I (l'intersection) donc $[\,a\,;b\,]\subset I$: I est un intervalle.
2. Supposons que I (l'intersection) soit non vide et soient $a\leq b$ deux éléments de U (l'union). Soit $c\in[\,a\,;b\,]$. Puisque a et b appartiennent à U, il existe j_1 et j_2 (qui n'ont aucune raison d'être égaux) tels que $a\in I_{j_1}$ et $b\in I_{j_2}$. Or, I est non vide : soit donc $d\in I$. En particulier, $d\in I_{j_1}$ et $d\in I_{j_2}$. Séparons les cas selon la valeur de d.
   - Premier cas : $d\leq a$. Alors $d\leq a\leq c\leq b$ donc $c\in[\,d\,;b\,]$. Or, d et b appartiennent à I_{j_2} qui est un intervalle donc $[\,d\,;b\,]\subset I_{j_2}$ donc $c\in I_{j_2}$ c'est-à-dire que $c\in U$.
   - Deuxième cas : $d\geq b$. Idem.
   - Troisième cas : $a<d<b$. Il faut alors séparer les cas selon que $c\leq d<b$ (et alors $c\in[\,a\,;d\,]$) ou $d<c\leq b$ (et alors $c\in[\,d\,;b\,]$). Dans tous les cas on conclut que $c\in U$.

   Finalement, $[\,a\,;b\,]\subset U$: U est un intervalle.

12.2 Borne supérieure, borne inférieure :

Exercice 2 : ✪ Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\sup A>0$. Montrer que A contient un élément strictement positif.
2. On suppose que $\sup A\geq 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Correction :

1. Soit $\varepsilon=\sup(A)/2>0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $a\in A$ tel que $\sup(A)-\varepsilon<a\leq\sup(A)$. Or, $\sup(A)-\varepsilon=\sup(A)/2>0$ donc $a>0$: A contient un élément strictement positif.
2. Pas forcément, il suffit de prendre $A=\mathbb{R}_-^*$.

Exercice 3 - Un minimax : ✪✪ Existence et calcul de $\displaystyle\inf_{t\in\mathbb{R}}\left(\sup_{x\in[\,0\,;1\,]}\left(x^2+tx\right)\right)$.

Correction : Soit $t\in\mathbb{R}$. Supposons dans un premier temps $t\geq 0$. Soit $x\in[\,0\,;1\,]$. Alors $x^2+tx\leq 1+t$. En d'autres termes, $1+t$ est un majorant de $\{x^2+tx\,|\,x\in[\,0\,;1\,]\}$. Cet ensemble est donc majoré, et puisqu'il est non vide, il admet une borne supérieure. Or, $1+t$ est un majorant de cet ensemble et il est atteint pour $x=1$: c'est donc sont plus grand élément, et en particulier sa borne supérieure (plus grand élément implique borne supérieure, réciproque fausse). Dès lors, si $t\geq 0$,

$$\sup_{x\in[\,0\,;1\,]}\left(x^2+tx\right)=1+t$$

Supposons à présent $t < 0$. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Alors $x^2 + tx \leq x^2 \leq 1$ c'est-à-dire que 1 est un majorant de l'ensemble $\{x^2 + tx \,|\, x \in [\,0\,;1\,]\}$. Puisqu'il est non vide, il admet une borne supérieure. La fonction $x \mapsto x^2 + tx$ est un trinôme du second degré donc est décroissante sur $]\,-\infty\,;-t/2\,]$ (le sommet de la parabole est en $-b/2a$) et croissante sur $[\,-t/2\,;+\infty\,[$. Séparons les cas selon la valeur de t.

- Si $t \leq -2$, alors $-t/2 \geq 1$ c'est-à-dire que $x \mapsto x^2 + tx$ est décroissante sur $[\,0\,;1\,]$: son maximum est donc atteint en $x = 0$ c'est-à-dire que le maximum et donc la borne supérieure de l'ensemble $\{x^2 + tx \,|\, x \in [\,0\,;1\,]\}$ vaut 0.
- Si $t \in]\,-2\,;0\,[$: alors $-t/2 \in]\,0\,;1\,[$, on a donc le tableau de variations suivant :

x	0		$-t/2$		1
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	$1+t$

  Le maximum, donc la borne supérieure, vaut 0 ou $1+t$, cela dépend qui est le plus grand. Or, $1 + t \geq 0 \iff t \geq -1$. Finalement, si $t \geq -1$, la borne supérieure vaut $1 + t$, et si $t < -1$, elle vaut 0.

En conclusion, dans tous les cas (que x soit positif ou négatif) :

- Si $t \geq -1$, la borne supérieure vaut $1 + t$.
- Si $t < -1$, la borne supérieure vaut 0.

En particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\sup_{x\in[\,0\,;1\,]} \left(x^2 + tx\right) \geq 0$$

donc l'ensemble $\left\{\sup_{x\in[\,0\,;1\,]} \left(x^2 + tx\right) \,|\, t \in \mathbb{R}\right\}$ est minoré par 0 et non vide, d'où l'existence de la borne inférieure. De plus, 0 est atteint (pour tous les réels inférieurs ou égaux à -1) donc est le plus petit élément donc la borne inférieure. En conclusion, le minimax recherché vaut 0.

Exercice 4 : ✪✪ Dans cet exercice, on se donne A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B = \{a+b \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. On définit de même $A - B$, AB et , si $\lambda \in \mathbb{R}$, λA et $A + \lambda$. Établir les relations suivantes (on montrera bien sûr que les sup et inf existent) :

- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.
- $\sup(A + \lambda) = \sup(A) + \lambda$.
- Si $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$. Que dire lorsque $\lambda < 0$ ou $\lambda = 0$?
- $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$.
- Si A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$, alors $\sup(AB) = \sup A \times \sup B$. Le résultat est-il encore valable sans l'hypothèse $A, B \subset \mathbb{R}_+$?
- Si A est incluse dans $\mathbb{R}_+$, $\sup \sqrt{A} = \sqrt{\sup A}$ ($\sqrt{A}$ est défini de façon analogue aux autre ensembles).

On suppose enfin que A et B sont non disjoints. Montrer que $A\cap B$ est majoré et que $\sup(A\cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$ et donner un exemple où cette inégalité est stricte. Que dire de $\sup(A \cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et de $\sup(B)$?

Correction :

- Soit $x \in A + B$. Il existe alors $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a + b$ si bien que $x \leq \sup(A) + \sup(B)$ (la borne supérieure est un majorant). On en déduit que $A + B$ est majoré par $\sup(A) + \sup(B)$. Prouvons qu'il y a égalité avec la caractérisation séquentielle de la borne supérieure : il suffit de trouver une suite de $A + B$ qui converge vers $\sup(A) + \sup(B)$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) de A qui converge vers $\sup(A)$, et une suite (b_n) de B qui converge vers $\sup(B)$. Par conséquent, $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A) + \sup(B)$: on a une suite de $A + B$ qui converge vers $\sup(A) + \sup(B)$, d'où le résultat par caractérisation séquentielle de la borne supérieure.
- Soit $x \in -A$. Il existe $a \in A$ tel que $x = -a$. Or, $a \geq \inf(A)$ donc $x \leq -\sup(A)$: $-\sup(A)$ est un majorant de $-A$. $-A$ est une partie non vide majorée donc admet une borne supérieure. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe une suite (a_n) de A qui converge vers $\inf(A)$ donc $x_n = -a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\inf(A)$: on en déduit que $-\inf(A)$ est la borne supérieure de $-A$ par caractérisation séquentielle de la borne supérieure. De même pour l'autre égalité.
- On pourrait le faire de la même façon, mais utilisons la caractérisation de la borne supérieure avec le ε. On prouve comme ci-dessus que $\sup(A) + \lambda$ est un majorant de $A + \lambda$ donc cet ensemble admet une borne supérieure. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \varepsilon < a \leq \sup(A)$ donc $\sup(A) + \lambda - \varepsilon < a + \lambda \leq \sup(A) + \lambda$, d'où le résultat par caractérisation de la borne supérieure.
- Soit $x \in A - B$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ tel que $x = a - b$. Or, $a \leq \sup(A)$ et $b \geq \inf(B)$ donc $x \leq \sup(A) - \inf(B)$, et on prouve de même que précédemment par caractérisation séquentielle de la borne supérieure l'égalité voulue.
- Soit $x \in AB$: il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = ab$. De plus, $a \leq \sup A$ et $b \leq \sup B$. Puisque A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$, tout est positif et on peut multiplier les inégalités positives donc $x \leq \sup(A) \times \sup(B)$, d'où l'existence de la

borne supérieure, et on prouve l'égalité comme précédemment. Si les parties ne sont pas incluses dans $\mathbb{R}_+$, le résultat n'est plus valide : par exemple, si $A = B = [-1\,;0]$ alors $\sup(AB) = 1 \neq \sup(A) \times \sup(B)$.

- Soit $x \in \sqrt{A}$: il existe $a \in A$ tel que $x = \sqrt{a}$. Or, $a \leq \sup(A)$ et la racine carrée est croissante donc $x \leq \sqrt{\sup A}$: $\sqrt{A}$ est majoré par $\sqrt{\sup A}$, d'où l'existence de la borne supérieure. De plus, par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (a_n) d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$, et $\sqrt{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\sup A}$ par continuité de la racine carrée, ce qui permet de conclure.
- $A \cap B$ est inclus dans A qui est majoré donc tout élément de $A \cap B$ est majoré par $\sup(A)$. On en déduit que $A \cap B$ est majoré par $\sup(A)$ si bien que $\sup(A \cap B) \leq \sup(A)$. Par symétrie des rôles, $\sup(A \cap B) \leq \sup(B)$ d'où l'inégalité voulue. Prenons $A = [0\,;1] \cup \{2\}$ et $B = [0\,;2[$ donc $A \cap B = [0\,;1]$: on a bien une inégalité stricte.

Exercice 5 : ✪✪ Soient A et B deux parties non vides de R telle que, pour tout $(a, b) \in A \times B$, $a \leq b$. Montrer que $\sup A \leq \inf B$ (on montrera évidemment qu'ils existent). Montrer que si $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\sup(A) = \inf B$.

Correction : Soit $b \in B$. Alors, pour tout $a \in A$, $a \leq b$ c'est-à-dire que b est un majorant de A. A étant non vide et majorée, elle admet une borne supérieure. De même, soit $a \in A$. Alors, pour tout $b \in B$, $a \leq b$ donc a est un minorant de B. De même, B admet une borne inférieure.

On a donc montré que tout élément de A minore B et tout élément de B majore A. Par définition de la borne supérieure, $\sup(A) \leq b$ pour tout $b \in B$ (car b est un majorant). Dès lors, $\sup(A)$ est un minorant de B donc, par définition de la borne inférieure, $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Supposons donc que $A \cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$. Supposons que $\sup(A) < \inf(B)$. $A \cup B$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $c \in A \cup B$ tel que $\sup(A) < c < \inf(B)$. Or, $c \in A \cup B$ donc $c \in A$ ou $c \in B$. Si $c \in A$ alors $c \leq \sup(A)$ car $\sup(A)$ est un majorant de A, ce qui est absurde. Donc $c \in B$, mais alors $c \geq \inf(B)$ car $\inf(B)$ minore B, ce qui est aussi absurde : on en déduit que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 6 : ✪✪ Soient a et b deux réels. Donner, lorsque c'est possible, les bornes inférieure et supérieure, les plus petit et plus grand éléments des ensembles suivants :

1. $]0\,;1[$
2. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\left\{a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
5. $\left\{\dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
6. $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \;\middle|\; (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$
7. $\left\{\dfrac{p}{n+p} \;\middle|\; (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$
8. $\left\{\dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$
9. $\left\{\dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \;\middle|\; (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$

Correction : Nous utiliserons certains résultats vus dans l'exercice 13 du chapitre 2.

1. D'après le cours, $]0\,;1[$ admet une borne inférieure égale à 0 et une borne supérieure égale à 1.
2. Cela dépend de b.
   - Si $b = 0$, alors l'ensemble (qu'on notera E à chaque fois) E est le singleton $\{a\}$ donc admet un plus grand élément et un plus petit élément égaux à a donc une borne supérieure et une borne inférieure égales à a (un plus grand élément est une borne supérieure, réciproque fausse, et idem pour le plus petit élément et la borne inférieure).
   - Si $b > 0$, l'ensemble n'est pas majoré donc n'a pas de borne supérieure, et a est le plus petit élément donc la borne inférieure.
   - Si $b < 0$, l'ensemble n'est pas minoré donc n'a pas de borne inférieure, et a est le plus grand élément donc la borne supérieure.
3. $E = \{a - b; a + b\}$. Si $b \geq 0$, alors le plus grand élément est $a + b$ donc également sa borne supérieure, et $a - b$ est le plus petit élément donc la borne inférieure, et c'est le contraire si $b < 0$.
4. Cela dépend de b.
   - Si $b = 0$, alors l'ensemble (qu'on notera E à chaque fois) E est le singleton $\{a\}$ donc admet un plus grand élément et un plus petit élément égaux à a donc une borne supérieure et une borne inférieure égales à a.
   - Si $b > 0$, $a + b$ est le plus grand élément donc la borne supérieure, et a est un minorant. De plus, $a + \dfrac{b}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ donc, par caractérisation de la borne inférieure, $\inf(E) = a$.
   - Si $b < 0$, on montre de même que $a + b$ est le plus petit élément donc la borne inférieure, et on montre de même que $a = \sup(E)$.
5. $3/2$ est le plus grand élément donc la borne supérieure. -1 est un minorant et est limite de la suite de terme général $\dfrac{1}{2n+1} + (-1)^{2n+1}$ donc, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, $-1 = \inf(E)$.
6. 2 est le plus grand élément donc la borne supérieure. De plus, $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et 0 est un minorant donc $0 = \inf(E)$.

7. 1 est un majorant et 0 un minorant. De plus,

$$\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet de conclure.

8. 0 est le plus petit élément donc la borne inférieure. De plus, 1 est un majorant et

$$\frac{n-\dfrac{1}{n}}{n+\dfrac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

ce qui permet de conclure.

9. 3/2 est le plus grand élément donc la borne supérieure. De plus, pour tous n et p, $\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^p}{p} \geq 0+(-1) = -1$. De plus, pour $p=1$,

$$\frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 7 - Diamètre d'une partie bornée : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Correction : A étant bornée, elle est majorée et minorée et puisqu'elle est non vide, elle admet bien une borne supérieure et une borne inférieure. Soit $(x,y)\in A^2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $y\leq x$. Alors $|x-y| = x-y$ et puisque $x \leq \sup(A)$ et $y\geq \inf(A)$, alors $|x-y|\leq \sup(A)-\inf(A)$. En d'autres termes, $\sup(A)-\inf(A)$ est un majorant de $\{|x-y|\,|\,(x,y)\in A^2\}$: cet ensemble admet donc une borne supérieure. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$, et il existe également une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers $\inf(A)$. Dès lors, $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup(A)-\inf(A)$ et, la valeur absolue étant continue,

$$|x_n-y_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\sup(A)-\inf(A)| = \sup(A)-\inf(A)$$

puisque $\sup(A)-\inf(A)$. En d'autres termes, $\sup(A)-\inf(A)$ est un majorant de $\{|x-y|\,|\,(x,y)\in A^2\}$ et il existe une suite d'éléments de $\{|x-y|\,|\,(x,y)\in A^2\}$ qui converge vers $\sup(A)-\inf(A)$. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a le résultat voulu.

Exercice 8 - Distance à une partie : ✪✪✪ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x\in\mathbb{R}$ on pose $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A}|x-a|$: c'est la distance de x à la partie A.

1. Montrer que cette distance est bien définie.
2. On suppose dans cette question que $A = \left]0\,;1\right[$. Tracer le graphe de la fonction $x\mapsto d(x,A)$.
3. Même question lorsque $A = \left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[$.
4. Donner un exemple de partie A et de réel x tel que :
   - $d(x,A)$ ne soit pas atteinte.
   - $d(x,A)$ soit atteinte en exactement un point de A.
   - $d(x,A)$ soit atteinte en exactement deux points de A.

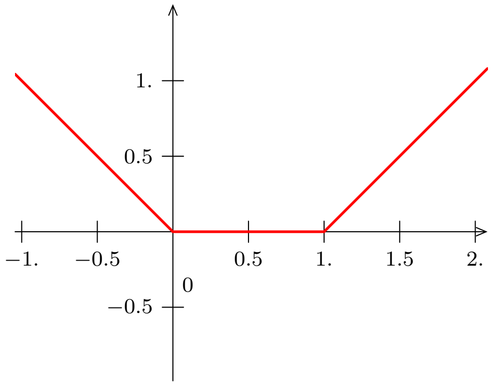
   Est-il possible que $d(x,A)$ soit atteinte en plus de deux points de A ?
5. Montrer que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|d(x,A)-d(y,A)|\leq|x-y|$.
6. On suppose que A est telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un unique $y\in A$ tel que $d(x,A)=|x-y|$. Montrer que A est un intervalle fermé (mais pas forcément borné).

Remarque Un théorème de Motzkin montre qu'une partie fermée A de $\mathbb{R}^n$ telle que la distance de x à A soit atteinte en un unique point pour tout x est convexe. Il s'agit ici du cas $n=1$.

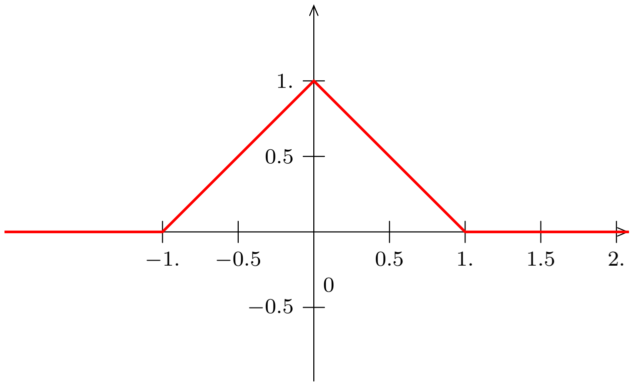
Correction :

1. L'ensemble $\{|x-a|\,|\,a\in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et minorée par 0 donc admet une borne inférieure.

2. Soit $x \leq 0$. Alors, pour tout $a \in A$, $a \geq x$ donc $|x-a| = a-x$ donc $\{|x-a| \,|\, a \in A\} = \{a-x \,|\, a \in \,]\,0\,;1\,[\} = \,]-x\,;1-x\,[$ si bien que sa borne inférieure est $-x$. Si $x \geq 1$, alors $|x-a| = x-a$ pour tout $a \in A$ donc $\{|x-a| \,|\, a \in A\} = \{x-a \,|\, a \in \,]\,0\,;1\,[\} = \,]\,x-1\,;x\,[$ donc sa borne inférieure est $x-1$. Enfin, si $x \in \,]\,0\,;1\,[$, alors $x \in A$ donc $0 \in \{|x-a| \,|\, a \in A\}$ (en prenant $a = x$) si bien que la borne inférieure recherchée vaut 0. En conclusion, $d(x,A) = -x$ si $x \leq 0$, $d(x,A) = x-1$ si $x \geq 1$, et $d(x,A) = 0$ si $x \in \,]\,0\,;1\,[$. Ci-dessous son graphe :



3. Si $x \leq -1$ alors $x \in A$ donc $0 \in \{|x-a| \,|\, a \in A\}$: 0 est le plus petit élément donc la borne inférieure donc la distance est nulle. De même si $x \geq 1$. Supposons que $x \in [\,0\,;1\,[$. Soit $a \in A$. Si $a \geq 1$ alors $|x-a| = a-x \geq 1-x$ avec égalité en 1. Dès lors, $\inf\{|x-a| \,|\, a \geq 1\} = 1-x$. De même, si $a \leq -1$, $|x-a| = x+1$ donc $\inf\{|x-a| \,|\, a \leq -1\} = x+1 \geq x-1$. On en déduit que $d(x,A) = x-1$, et si $x \in \,]-1\,;0\,[$, $d(x,A) = x+1$. Ci-dessous le graphe de la distance :



4.
   - Si $A = \,]\,0\,;1\,[$ et $x = 0$, alors $d(x,A) = 0$ mais n'est pas atteinte, il n'existe pas d'élément $a \in A$ tel que $|x-a| = 0$.
   - Si $A = \,]\,0\,;1\,[$ et $x = 1/2$, alors $d(x,A) = 0$ atteinte uniquement en $1/2$: si $a \neq 1/2$, $|x-a| \neq 0$.
   - Si $A = \,]-\infty\,;-1\,] \cup [\,1\,;+\infty\,[$ et $x = 0$, alors $d(x,A) = 1$ atteint exactement en ± 1.

   Supposons que $d(x,A)$ soient atteinte en au moins trois points distincts a_1, a_2, a_3. Alors $|x-a_1| = |x-a_2| = |x-a_3| = d(x,A)$. Si a_1, a_2, a_3 sont supérieurs à x, alors $a_1 - x = a_2 - x = a_3 - x$ donc $a_1 = a_2 = a_3$, ce qui est absurde. Si $a_1 \leq x \leq a_2, a_3$ alors $x - a_1 = a_2 - x = a_3 - x$ donc $a_2 = a_3$ et on exclut tous les autres cas de la même manière. Dans tous les cas, c'est absurde.

5. Soit $a \in A$. D'après l'inégalité triangulaire, $|x-y| = |x-a+a-y| \geq |x-a| - |y-a|$. On en déduit que $|x-a| \leq |x-y| + |y-a|$. Or, $d(x,A) \leq |x-a|$ donc $d(x,A) \leq |x-y| + |y-a|$. En prenant la borne inférieure du membre de droite quand $a \in A$, on obtient l'inégalité $d(x,A) \leq |x-y| + d(x,A)$. On peut aussi dire que $d(x,A) - |x-y| \leq |y-a|$ donc $d(x,A) - |x-y|$ est un minorant de tous les $|y-a|$ donc est inférieur à la borne inférieure $d(y,A)$ ce qui donne le même résultat. On en déduit que $d(x,A) - d(y,A) \leq |x-y|$. Par symétrie des rôles, $d(y,A) - d(x,A) \leq |x-y|$ d'où l'inégalité voulue.

6. Montrons que A est un intervalle. Utilisons pour cela la caractérisation des intervalles : soient a et b deux éléments de A tels que $a \leq b$, et prouvons que $[\,a\,;b\,] \subset A$. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Si $x \notin A$, introduisons $A_d = \{a \in A \,|\, a \geq x\}$ et $A_g = \{a \in A \,|\, a \leq x\}$. A_d est non vide (il contient b) et minoré par x donc admet une borne inférieure d. De même, A_g admet une borne supérieure c. Posons enfin $m = \dfrac{c+d}{2}$ (faire un dessin). Alors $d(m,A) = \dfrac{d-c}{2}$ atteinte en deux points : d à droite et c à gauche, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ (enfin, ça c'est si $d \neq c$, mais sinon, alors $c = d = x$ et la distance de x à A n'est pas atteinte puisque $x \notin A$). On en déduit que A est un intervalle, de la forme $(a;b)$ (les parenthèses indiquent qu'on ne sait pas encore si l'intervalle est ouvert ou fermé) avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$. Prouvons que A est fermé, c'est-à-dire que si a ou b est réel, alors il appartient à l'ensemble A. Si a est réel et n'appartient pas à A, alors $d(a,A) = 0$ mais n'est pas atteinte ce qui est contraire à l'hypothèse, ce qui permet de conclure.

12.3 Densité

Exercice 9 : ✪ L'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Correction : Il n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car il n'y a aucun élément de $\pi\mathbb{Z}$ dans l'intervalle ouvert $]\,0\,;\pi\,[$. En effet, un ensemble dense intersecte tout intervalle ouvert non vide.

Exercice 10 : ✪ Montrer que $\{q^2 \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. Généraliser à l'ensemble $\{q^n \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$.

Correction : Soient $a < b$ deux éléments de $\mathbb{R}_+$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$ (cf. cours), il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt{a} < q < \sqrt{b}$. Par stricte croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $a < q^2 < b$, d'où le résultat. Le même raisonnement prouve que $\{q^n \,|\, q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$ pour tout n. Mieux : si n est impair, cet ensemble est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11 - Caractérisation des rationnels décimaux : ✪✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et on suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{D}$ si et seulement si les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2;5\}$.

Correction : Supposons que les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2;5\}$. Alors il existe $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ (c et d peuvent être nuls) tels que $b = 2^c 5^d$. Sans perte de généralité, on peut supposer $c \geq d$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a}{2^c 5^d} \\ &= \frac{a \times 5^{c-d}}{2^c 5^c} \\ &= \frac{a \times 5^{c-d}}{10^c} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $a/b \in \mathbb{D}$. Réciproquement, supposons que $a/b \in \mathbb{D}$. Alors il existe $(k,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $a/b = k/10^n$ si bien que $b \times k = a \times 10^n$. En d'autres termes, b divise $a \times 10^n$ et puisque a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauß, b divise 10^n donc les facteurs premiers de b ne peuvent être que dans l'ensemble $\{2;5\}$. Pour le faire proprement : soit p un facteur premier de b. Alors $1 \leq v_p(b) \leq v_p(10^n) = nv_p(10)$. Or, si $p \notin \{2;5\}$ alors $v_p(10) = 0$ ce qui est absurde. D'où l'équivalence.

Exercice 12 - Endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$: ✪✪✪ On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ainsi que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y. On se donne dans la suite f une telle application.

1. Donner la valeur de $f(0)$. Montrer que $f(1) \in \{0;1\}$. Que dire de f si $f(1) = 0$? On supposera dans la suite que $f(1) = 1$.
2. Montrer que f est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{Z}, f(n) = n$.
3. Montrer que $f(r) = r$ pour tout rationnel r.
4. Montrer que f est croissante.
5. En déduire que f est l'identité sur $\mathbb{R}$.

Correction :

1. $f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 2f(0)$: on en déduit que $f(0) = 0$. De plus, $f(1 \times 1) = f(1) \times f(1)$ donc $f(1) = f(1)^2$: on en déduit que $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$. Supposons que $f(1) = 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x \times 1) \\ &= f(x) \times f(1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que f est l'application nulle. Réciproquement, l'application nulle est bien solution. On suppose donc dans la suite que $f(1) = 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f(x-x) = f(x) + f(-x)$. Or, $f(x-x) = f(0) = 0$ donc $f(x) + f(-x) = 0$ i.e. $f(-x) = -f(x)$: f est impaire. On sait déjà que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. De plus,

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1)+f(1) \\ &= 1+1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2+1) \\ &= f(2)+f(1) \\ &= 2+1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit à présent $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$. Alors f est impaire donc $f(n) = -f(-n)$ mais $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après ce qui précède, $f(-n) = -n$ si bien que $f(n) = n$.

3. Soit $r = a/b$ un rationnel. Alors $f(r) = f(a) \times f(1/b) = a \times f(1/b)$. Or, $1 = b \times 1/b$ donc

$$\begin{aligned} 1 &= f(1) \\ &= f(b \times 1/b) \\ &= f(b) \times f(1/b) \\ &= b \times f(1/b) \end{aligned}$$

donc $f(1/b) = 1/b$ si bien que $f(r) = a \times 1/b = r$.

4. Soient $x \leq y$ deux réels. Alors

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= f(y)+f(-x) \quad (f \text{ impaire}) \\ &= f(y-x) \end{aligned}$$

Or, $y - x \geq 0$ donc $y - x = \sqrt{y-x}^2$. Dès lors :

$$\begin{aligned} f(y)-f(x) &= f\left(\sqrt{y-x} \times \sqrt{y-x}\right) \\ &= f(\sqrt{y-x}) \times f(\sqrt{y-x}) \\ &= f(\sqrt{y-x})^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est croissante.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soient (x_n) et (y_n) deux suites de rationnels vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq x \leq y_n$. Si on veut des suites explicites, il suffit de prendre les suites définies (à partir du rang 1 mais on ne va pas s'embêter avec ça) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. f étant croissante, $f(x_n) \leq f(x) \leq f(y_n)$. Or, x_n et y_n étant rationnels, $f(x_n) = x_n$ et $f(y_n) = y_n$ donc $x_n \leq f(x) \leq y_n$. De plus, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ mais $f(x)$ ne dépend pas de n donc $f(x) = x$: f est l'identité. Synthèse : l'identité est bien solution. Les seules solutions du problème sont donc la fonction nulle et l'identité.

Exercice 13 : ✪✪✪

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs. Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]\,nx\,; ny\,[$ contient un intervalle du type $]\,a\,; +\infty\,[$.

2. Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Si $n \geq 1$, on pose $\dfrac{1}{n} \times A = \left\{ \dfrac{a}{n} \,|\, a \in A \right\}$. Montrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \times A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Correction :

1. Il suffit qu'un intervalle $]\, nx\,; ny\,[$ chevauche le suivant. La suite de terme général $\dfrac{n}{n+1}$ converge vers 1 donc est supérieure strictement à $\dfrac{x}{y}$ pour n assez grand. En d'autres termes, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{n}{n+1} > \dfrac{x}{y}$ donc $ny > (n+1)x$. En d'autres termes : à partir de n_0, l'intervalle $]\, nx\,; ny\,[$ empiète sur le suivant i.e. $(n+1)x < ny$. Prouvons que tous les réels appartiennent à l'union à partir de $n_0 x$. En d'autres termes, prouvons que $]\, n_0 x\,; +\infty\,[$ est inclus dans l'union. Soit donc $a > n_0 x$. Notons $n_1 = \max\{n \geq n_0 \,|\, nx < a\}$ (un tel maximum existe car l'ensemble en question est une partie de $\mathbb{N}$, non vide, car contient n_0, majorée par a/x donc admet un plus grand élément). Alors $n_1 x < a < (n_1+1)x$ mais $n_1 y > (n_1+1)x$ car $n_1 > n_0$ si bien que $a \in\,]\, n_1 x\,; n_1 y\,[$ donc est dans l'union.
2. Soient $x < y$ deux réels positifs. Montrons que $]\, x\,; y\,[$ contient un élément de B. Soit $z \in \mathbb{R}_+$. Alors $z \in B$ si et seulement s'il existe $n \geq 1$ tel que $z \in \dfrac{1}{n} A$, si et seulement s'il existe $n \geq 1$ et $a \in A$ tel que $z = a/n$. Un élément de cette forme appartient à $]\, x\,; y\,[$ si et seulement si $x < a/n < y$ si et seulement si $nx < a < ny$.

   D'après la question précédente, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $]\, a\,; +\infty\,[$ soit inclus dans l'union $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}]\, nx\,; ny\,[$. Puisque A n'est pas majorée, il existe $\alpha \in A$ (a est déjà pris) supérieur strict à α. Dès lors, $\alpha \in\,]\, a\,; +\infty\,[$ donc α appartient à l'union : il existe n tel que $nx < \alpha < ny$ donc $x < \alpha/n < y$: B est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tendant vers $+\infty$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\{u_n - v_m \,|\, (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Correction : Soient x et y deux réels avec $x < y$. L'idée est de faire comme dans le cours : on part d'avant x, et ensuite on rajoute des $u_{n+1} - u_n$ qui font des pas de longueur inférieure à $y - x$ (possible car $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) et on tombera entre x et y. Faisons cela rigoureusement.

$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| < y - x$. De plus, $v_m \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$: il existe m_0 tel que $u_{n_0} - v_{m_0} < x$. Posons

$$A = \{k \geq n_0 \,|\, u_k - v_m < y\}$$

A est une partie de $\mathbb{N}$, non vide car contient n_0, et majorée. En effet, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $u_n - v_m \geq y$ et donc A est majorée par n_1. A admet donc un plus grand élément N. $N \in A$ donc $u_N - v_m < y$. Si $u_N - v_m \leq x$, alors $u_{N+1} - v_m = (u_{N+1} - u_N) + u_N - v_m < (y-x) + x = y$ donc $N+1 \in A$ ce qui est absurde puisque N est le plus grand élément de A. Dès lors, $x < u_N - v_m < y$ ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. **✪✪** Montrer que l'ensemble $\left\{ a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \,|\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![\, 0\,; 2^n \,]\!] \right\}$ est dense dans $[\, a\,; b\,]$.
2. **✪✪✪✪** Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que :

   $$\forall (a,b) \in M^2, \sqrt{ab} \in M$$

   Montrer que $]\inf M\,; \sup M\,[\, \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans M.

Correction :

1. Soient $x < y$ deux éléments de $[\, a\,; b\,]$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![\, 0\,; n \,]\!]$. Alors :

   $$\ln\left(a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}}\right) = \frac{k}{2^n} \times (\ln(a) - \ln(b)) + \ln(b)$$

   Par stricte croissance de la fonction ln (et puisque $\ln(a) - \ln(b) < 0$) :

   $$\begin{aligned} x < a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} < y \quad & \iff \quad \ln(x) < \ln\left(a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}}\right) < \ln(y) \\ & \iff \quad \ln(x) < \frac{k}{2^n} \times (\ln(a) - \ln(b)) + \ln(b) < \ln(y) \\ & \iff \quad 1 > \frac{\ln(x) - \ln(b)}{\ln(a) - \ln(b)} > \frac{k}{2^n} > \frac{\ln(y) - \ln(b)}{\ln(a) - \ln(b)} > 0 \end{aligned}$$

Or, l'ensemble des nombres dyadiques positifs est dense dans $\mathbb{R}_+$ donc il existe bien n et $k \in [\![0\,;\,2^n]\!]$ (car on est entre 0 et 1) tel que l'inégalité ci-dessus soit vérifiée, et puisqu'on a travaillé par équivalences, la première inégalité est aussi vérifiée : l'ensemble $\left\{a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \,|\, n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![0\,;\,n]\!]\right\}$ intersecte tout intervalle ouvert non vide de $[\,a\,;b\,]$ donc est dense dans $[\,a\,;b\,]$.

2. Soient donc $x < y$ deux éléments de $]\inf M\,;\sup M\,[$. Il suffit de prouver qu'il existe un élément irrationnel de M dans $]\,x\,;y\,[$. Puisque $\inf M < x$ et $y < \sup M$, il existe $(a,b) \in M^2$ tel que $\inf M < a < x$ et $y < b < \sup M$. Par hypothèse sur M, $\sqrt{ab} = a^{1/2}b^{1/2} \in M$ puis, avec $\sqrt{ab}$ à la place de b :

$$\begin{aligned}\sqrt{a \times \sqrt{ab}} &= \left(a \times a^{1/2}b^{1/2}\right)^{1/2} \\ &= a^{3/4} \times b^{1/4} \in M\end{aligned}$$

Avec cette fois $\sqrt{ab}$ à la place de a (et b à la place de b), on montre de même que $a^{1/4}b^{3/4} \in M$. On voit apparaître les nombres de la question précédente en prenant toutes les racines carrées possibles des nombres obtenus aux étapes précédentes. Montrons donc par récurrence que tous les éléments de la forme de la question ci-dessus sont encore dans M.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k \in [\![0\,;\,2^n]\!], a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \in M$ ».
- $a^{0/2^0} \times b^{1-0/2^0} = b \in M$ et $a^{1/2^0} \times b^{1-1/2^0} = a \in M$: H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc $k \in [\![0\,;\,2^{n+1}]\!]$. Si k est pair, il existe p (pas forcément premier) tel que $k = 2p$ donc

$$a^{\frac{k}{2^{n+1}}} \times b^{1-\frac{k}{2^{n+1}}} = a^{\frac{p}{2^n}} \times b^{1-\frac{p}{2^n}} \in M$$

par hypothèse de récurrence. Supposons à présent k impair. Alors $k-1$ et $k+1$ sont pairs donc, d'après ce qui précède,

$$\alpha = a^{\frac{k-1}{2^{n+1}}} \times b^{1-\frac{k-1}{2^{n+1}}} \qquad \text{et} \qquad \beta = a^{\frac{k+1}{2^{n+1}}} \times b^{1-\frac{k+1}{2^{n+1}}}$$

appartiennent à M. Par hypothèse, $\sqrt{\alpha\beta} = \alpha^{1/2}\beta^{1/2} \in M$ donc :

$$\begin{aligned}a^{\frac{k-1}{2^{n+2}}} \times b^{1-\frac{k-1}{2^{n+2}}} \times a^{\frac{k+1}{2^{n+2}}} \times b^{1-\frac{k+1}{2^{n+2}}} &= a^{\frac{2k}{2^{n+2}}} \times b^{1-\frac{2k}{2^{n+2}}} \\ &= a^{\frac{k}{2^{n+1}}} \times b^{1-\frac{k}{2^{n+1}}} \in M\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'ensemble de ces nombres étant dense dans $[\,a\,;b\,]$, il existe $c < d$ dans $M \cap intffab$. Si c ou d est irrationnel, alors on a terminé. Dans le cas contraire, on montre de même que tous les nombres de la forme $a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0\,;\,2^n]\!]$ appartiennent à M. Il suffit de prouver que l'un d'entre eux est irrationnel. En particulier, pour tout n,

$$c^{\frac{1}{2^n}} \times d^{1-\frac{1}{2^n}} = \left(\frac{c}{d}\right)^{1/2^n} \times d \in M$$

Puisqu'on a supposé d rationnel (sinon c'est terminé), il suffit de prouver qu'il existe n tel que $(c/d)^{1/2^n}$ soit irrationnel. S'il est rationnel, alors il existe a, b premiers entre eux tels que $(c/d)^{1/2^n} = a/b$ i.e. tels que

$$\frac{c}{d} = \frac{a^{2^n}}{b^{2^n}}$$

Or, l'écriture irréductible d'un rationnel est unique : par contraposée, si l'écriture irréductible de c/d n'est pas de cette forme, alors $(c/d)^{1/2^n}$ est irrationnel, et si elle est de cette forme, il suffit de prendre une puissance plus élevée, c'est-à-dire que s'il existe a, b deux entiers premiers entre eux et n maximal (i.e. le numérateur et le dénominateur sont des puissances 2^n-ièmes mais pas 2^{n+1} i.e. leurs valuations p-adiques sont divisibles par 2^n mais pas par 2^{n+1}, c'est-à-dire qu'il existe a ou b avec des valuations p-adiques pas toutes paires) tels que c/d soit sous la forme ci-dessus, alors

$$(c/d)^{1/2^{n+1}} = \sqrt{a/b}$$

avec, donc, a ou b dont les valuations p-adiques ne sont pas toutes paires donc a/b n'est pas un carré donc $\sqrt{a/b}$ est irrationnel ce qui conclut l'exercice. Ouf !

12.4 Suites explicites

Exercice 16 : ✪ Montrer que la suite de terme général n^2 n'est pas arithmético-géométrique.

Correction : Supposons que cette suite soit arithmético-géométrique. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)^2 = an^2 + b$$

Soit $n \geq 1$. D'une part,

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et d'autre part

$$\frac{(n+1)^2}{n^2} = a + \frac{b}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$$

Par unicité de la limite, $a = 1$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)^2 = n^2 + b$$

En particulier, la suite de terme général $(n+1)^2 - n^2$ est constante, ce qui est absurde puisque $(0+1)^2 - 0^2 = 1$ et $(1+1)^2 - 1^2 = 3$.

Exercice 17 : ✪ Montrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous divergent :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.
2. $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n+2} \times \pi\right)$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n = \mathrm{Re}(v_n)$ où

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{i\pi/5}\right)^k$$

Puisque $e^{i\pi/5} \neq 1$ (attention, la somme commence en 1) :

$$v_n = e^{i\pi/5} \times \frac{1-e^{in\pi/5}}{1-e^{i\pi/5}}$$

On pourrait calculer v_n pour tout n (angle moitié etc.) mais on n'a même pas besoin d'en faire autant. Si n est un multiple de 10 i.e. s'il existe k tel que $n = 10k$ alors $e^{in\pi/10} = 1$ donc $v_n = 0$ donc $u_n = 0$. En d'autres termes, la suite extraite $(u_{10n})_{n\in\mathbb{N}}$ (on devrait prendre $10k$ mais l'indice est muet) est nulle donc converge vers 0. Si $n \equiv 1[10]$ i.e. s'il existe k tel que $n = 1 + 10k$ alors $e^{in\pi/5} = e^{i\pi/5}$ puisque $e^{2ik\pi} = 1$ si bien que $v_n = e^{i\pi/5}$ donc $u_n = \cos(\pi/5)$. En d'autres termes, la suite extraite $(u_{10n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\cos(\pi/5)$ donc converge vers $\cos(\pi/5) \neq 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes donc diverge.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. En effectuant la division euclidienne, on trouve que $n^2 - 3n + 1 = (n+2) \times (n-5) + 11$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left((n-5)\pi + \frac{11\pi}{n+2}\right) \\ &= (-1)^{n-5} \times \cos\left(\frac{11\pi}{n+2}\right) \end{aligned}$$

car on rappelle que $\cos(k\pi + u) = (-1)^k \cos(u)$. Dès lors, la fonction cos étant continue,

$$u_{2n} = (-1) \times \cos\left(\frac{11\pi}{2n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$$

et, de même, $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers la même limite donc la suite diverge.

Exercice 18 : ✪ Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \pi \end{cases}$

3. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5} \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases}$

5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

6. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+1} \end{cases}$

7. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$

8. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$

9. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^4}{{u_n}^3} \end{cases}$

10. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + 1\right) \end{cases}$

11. $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 \times {u_n}^3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \times {u_n}^2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$

14. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Correction :

1. On a une suite géométrique de raison $1/e^2$ de premier terme 1 donc le terme général de cette suite est $u_n = e^{-2n}$.
2. Attention, la suite n'est pas arithmétique car, pour tout n, $u_{n+1} = -u_n + \pi$ et pas $u_{n+1} = u_n + \pi$! La suite (u_n) est arithmético-géométrique, dont l'équation caractéristique est : $c = -c + \pi \iff c = \pi/2$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & -u_n & + & \pi \\ \pi/2 & = & -\pi/2 & + & \pi \end{array}$$
Par différence, $(u_{n+1} - \pi/2) = -(u_n - \pi/2)$ i.e. la suite de terme général $u_n - \pi/2$ est géométrique de raison -1. Dès lors,
$$u_n - \pi/2 = (u_0 - \pi/2) \times (-1)^n$$
Finalement : $u_n = (-2 - \pi/2) \times (-1)^n + \pi/2$.
3. On fait comme d'habitude et on trouve que le terme général est
$$u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n \times 5 - 1$$
4. Suite récurrence linéaire d'ordre 2 (1 est racine double de l'équation caractéristique) : comme d'habitude, on trouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1+n) \times 1^n = n + 1$.
5. Flemme. Si vous n'y arrivez pas venez me voir.
6. Pour $n = 0$, on trouve que $u_3 = 7u_1$. Pour $n = 1$, on trouve que $u_4 = 7u_2$. Pour $n = 2$, on trouve que $u_5 = 7u_3$. Prouvons que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont géométriques de raison 7 (à partir du rang 1 : u_0 n'apparaît pas). Soit $n \geq 1$.
$$\begin{aligned} u_{2n+2} &= u_{2n-1+3} \\ &= 7u_{2n-1+1} \\ &= 7u_{2n} \end{aligned}$$
ce qui est le résultat voulu, et idem pour l'autre. Dès lors, pour tout $n \geq 1$, $u_{2n} = 7^{n-1}u_2 = 0$ et $u_{2n+1} = 7^{n-1}u_1 = 7^{n-1}$. En conclusion, $u_0 = -1$, les autres termes pairs sont nuls et $u_{2n+1} = 7^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n^2$. Par somme (télescopique),
$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} k^2$$
si bien que
$$u_n = \frac{(n-1) \times n \times (2n-1)}{6} + 1$$

8. Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Dès lors, si $n \in \mathbb{N}$,
$$\ln(u_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \ln(u_n) + \ln(3)$$
On en déduit que la suite de terme général $\ln(u_n)$ est arithmético-géométrique, et cela ne pose plus de difficulté.
9. De même, par une récurrence (double) immédiate (faites-la !), $u_n > 0$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\ln(u_{n+2}) = 4\ln(u_{n+1}) - 3\ln(u_n)$$
c'est-à-dire que $(\ln(u_n))$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Le reste est laissé à votre charge.
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} + 1$: la suite de terme général e^{u_n} est arithmétique de raison 1 donc $e^{u_n} = e^{u_0} + n$ et donc $u_n = \ln(e^{u_0} + n)$.
11. De même, la suite est à valeurs strictement positives, et pour tout n,
$$\ln(u_{n+1}) = 3\ln(u_n) + \ln(5)$$
c'est-à-dire que $(\ln(u_n))$ est arithmético-géométrique, et on fait comme d'habitude.
12. Idem.
13. Rien ne semble évident : calculons les premiers termes pour nous donner une idée. $u_1 = 1/2$, $u_2 = 1/3$, $u_3 = 1/4$. Par une récurrence immédiate (faites-la), $u_n = 1/(n+1)$ pour tout n.
14. Par une récurrence immédiate, $u_n \neq 0$ pour tout n : posons $v_n = 1/u_n$ si bien que pour tout n, $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$, c'est-à-dire que $(1/u_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 : CQPC.

Exercice 19 : ✪ Donner à chaque fois la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

1. $u_n = \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$ (pour $a \in \mathbb{R}$)
2. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{n}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$
5. $u_n = \dfrac{\sin\left(\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n!} k!^{k!}\right)\right)}{\sqrt{n}}$
6. $u_n = \dfrac{n^2 - n\ln(n)}{n^2 + n(\ln(n))^2}$
7. $u_n = \dfrac{2+\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+1}$
8. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^{2023}+n\right)}{\ln(n)}$
9. $u_n = n \times \sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
10. $u_n = n \times \cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
11. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n+k}}$
12. $u_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$
13. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
14. $u_n = 3^n - n^2 2^n$
15. $u_n = \dfrac{n2^{2n} + 5^n}{n2^{2n} - 5^n}$
16. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n - \frac{1}{2}\right)^3 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n + \frac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k k^3}{2 - \sin k}$
18. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
19. $u_n = \sqrt[n]{n}$
20. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor}{2n-1}$

Correction :

1. On reconnaît une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$. Comparons cette raison à -1 et 1.
$$\begin{aligned} -1 < \frac{1-a^2}{1+a^2} < 1 &\iff -1 - a^2 < 1 - a^2 < 1 + a^2 \\ &\iff 0 < 2a^2 \\ &\iff a \neq 0 \end{aligned}$$
Dès lors, si $a \neq 0$, on a une suite géométrique de raison dans $]-1\,;1\,[$ donc converge vers 0. Si $a = 0$, la suite est constante égale à 1 donc converge vers 1.
2. Faisons comme en classe : soit $n \geq 1$.
$$u_n = e^{(2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$
Or,

$$
\begin{aligned}
(2n+1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) &= (2n+1)\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{-\dfrac{1}{n}}\times -\frac{1}{n} \\
&= -\frac{2n+1}{n}\times\frac{\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)}{-\dfrac{1}{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} -2
\end{aligned}
$$

et la fonction exponentielle est continue donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-2}$.

3. Si $n \geq 1$,

$$
u_n = e^{n\ln\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{n}\right)}
$$

Or, $\ln\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1/5) < 0$ par continuité de la fonction ln. Par produit, la quantité dans l'exponentielle tend vers $-\infty$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1/n \leq u_n \leq 1/n$: d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Idem : ce qu'il y a dans le sinus est moche, mais le sinus est quand même compris entre -1 et 1 et u_n est compris entre $-1/\sqrt{n}$ et $1/\sqrt{n}$.
6. Soit $n \geq 1$. Factorisons par n^2, le terme prédominant :

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{n^2\left(1-\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}{n^2\left(1+\dfrac{\ln(n)^2}{n}\right)} \\
&= \frac{1-\dfrac{\ln(n)}{n}}{1+\dfrac{\ln(n)^2}{n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{aligned}
$$

par croissances comparées.

7. On factorise par $\sqrt{n}$: la suite tend vers $1/3$.
8. Classique dans un ln : factoriser par le terme prédominant. Soit $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{\ln(n^{2023})+\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2022}}\right)}{\ln(n)} \\
&= 2023+\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n^{2022}}\right)}{\ln(n)} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 2023
\end{aligned}
$$

9. On reconnaît un taux d'accroissement.

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{\sin(1/(n+2))}{1/(n+2)}\times\frac{n}{n+2} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{aligned}
$$

puisque $\dfrac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

10. Ce n'est pas une forme indéterminée : le cosinus tend vers 1 et n vers $+\infty$. Par produit, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

11. Une somme, soit ça se calcule, soit ça s'encadre. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq u_n \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+n} = \frac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = 1$$

D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leq kx$. Par somme, et en divisant par $1/n^2$ (positif) :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) < u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kx$$

Notons v_n le terme de gauche et w_n le terme de droite. Alors :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{x}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}1 \\ &= x \times \frac{n(n+1)}{2n^2} - \frac{1}{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2} \end{aligned}$$

et on trouve de même que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x/2$. D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x/2$.

14. En factorisant par le terme prédominant :

$$u_n = 3^n\left(1 - n^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

Or, $2/3 < 1$ donc, par croissances comparées, $n^2(2/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

15. En factorisant par 5^n et en se souvenant que $2^{2n} = 4^n$, on trouve de même que (u_n) tend vers -1.

16. On fait comme en classe : quant une quantité tend vers $\pm\infty$, alors sa partie entière, divisée par cette quantité, tend vers 1.

$$u_n = \frac{\left\lfloor\left(5n-\frac{1}{2}\right)^3\right\rfloor}{\left(5n-\frac{1}{2}\right)^3} \times \frac{\left(5n-\frac{1}{2}\right)^3}{\left(4n+\frac{1}{3}\right)^3} \times \frac{\left(4n+\frac{1}{3}\right)^3}{\left\lfloor\left(4n+\frac{1}{3}\right)^3\right\rfloor}$$

Les deux termes extrémaux tendent donc vers 1, et celui du milieu vers $5^3/4^3$ (en factorisant par n dans chaque parenthèse) si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5^3/4^3$.

17. Une somme, soit... Soit $n \geq 1$ et soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. Alors (pour majorer une fraction, on majore le numérateur et on minore le dénominateur), puisque $1 \leq 2 - \sin(k) \leq 3$:

$$\frac{k^3}{3} \leq \frac{k^3}{2-\sin(k)} \leq \frac{k^3}{1} \leq n^3$$

et donc

$$-n^3 \leq \frac{(-1)^k k^3}{2-\sin(k)} \leq n^3$$

Il en découle que $-1/n \leq u_n \leq 1/n$ (car la somme des n^3 vaut n^4) : d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec la méthode de l'expression conjuguée :

$$u_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

19. Puissance variable : notation exponentielle. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} u_n &= n^{1/n} \\ &= e^{\frac{\ln(n)}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1 \end{aligned}$$

par croissances comparées (car l'exponentielle est continue).

20.
$$u_n = \frac{\left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor}{\frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n} \times \frac{\frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n}{2n-1}$$

Le premier terme tend vers 1, le deuxième vers $+\infty$ par croissances comparées : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 20 : ✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = -2, v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$: la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} + v_{n+1} = 9(u_n + v_n)$. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison 9 de premier terme -1.
3. On en déduit que pour tout n, $u_n + v_n = -9^n$ et $u_n - v_n = -3$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2}\left(-3 - 9^n\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2} \times \left(-9^n + 3\right)$$

Exercice 21 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1. Déterminer α pour que la suite de terme général $s_n = \alpha \times n \times (-1)^n$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer v_n en fonction de v_0 et de v_1.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n pour tout n.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $s_{n+2} = \alpha(n+2) \times (-1)^n$ (car $(-1)^{n+2} = (-1)^n$) et

$$\begin{aligned} s_{n+1} + 2s_n + (-1)^n &= \alpha(n+1) \times (-1)^{n+1} + 2\alpha n(-1)^n + (-1)^n \\ &= (-\alpha(n+1) + 2\alpha n + 1) \times (-1)^n \\ &= (\alpha(n-1) + 1) \times (-1)^n \end{aligned}$$

On cherche donc α pour que $\alpha(n-1) + 1 = \alpha(n+2)$ pour tout n, c'est-à-dire tel que $-\alpha + 1 = 2\alpha$. On en déduit que $\alpha = 1/3$ convient.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n - (s_{n+2} + 2s_n + (-1)^n) \\ &= (u_{n+1} - s_{n+1}) + 2(u_n - s_n) \end{aligned}$$

En d'autres termes : $(u_n - s_n)$ est récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $r^2 = r+2 \iff r^2 - r - 2 = 0$, dont les solutions sont -1 et 2. Dès lors, il existe (λ, μ) unique tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - s_n = \lambda(-1)^n + \mu \times 2^n$$

En prenant $n = 0$: $\lambda + \mu = v_0$, et en prenant $n = 1$: $2\mu - \lambda = v_1$ si bien que $\mu = (v_0 + v_1)/3$ et $\lambda = (2v_0 - v_1)/3$. En d'autres termes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2v_0 - v_1}{3} \times (-1)^n + \frac{v_0 + v_1}{3} \times 2^n$$

3. Il suffit de remplacer, en se souvenant que $s_0 = 0$ et $s_1 = -\alpha = -1/3$ donc $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1 + 1/3$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n - \frac{n}{3} \times (-1)^n = \frac{2u_0 - u_1 - 1/3}{3} \times (-1)^n + \frac{u_0 + u_1 + 1/3}{3} \times 2^n$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 22 : ✪✪

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = (-1)^n$$

Correction :

1. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : les solutions sont les suites de terme général

$$u_n = \lambda \times 1^n + \mu \times (-2)^n = \lambda + \mu \times (-2)^n$$

La suite est bornée si et seulement si $\mu = 0$: on en déduit les seules solutions bornées sont les suites constantes.

2. Faisons comme dans l'exercice précédent : cherchons une solution évidente, faisons la différence pour nous ramener à une suite d'un type connu. La suite de terme général $(-1)^n/12$ est solution évidente car, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(-1)^{n+2} - 5(-1)^{n+1} + 6(-1)^n = (-1)^n + 5(-1)^n + 6(-1)^n = 12(-1)^n$$

Soit (v_n) une suite solution (analyse synthèse). Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ccccccc} v_{n+2} & - & 5v_{n+1} & + & 6v_n & = & (-1)^n \\ \dfrac{(-1)^{n+2}}{12} & - & 5 \times \dfrac{(-1)^{n+1}}{12} & + & 6 \times \dfrac{(-1)^n}{12} & = & (-1)^n \end{array}$$

Par différence :

$$\left(v_{n+2} - \frac{(-1)^{n+2}}{12}\right) - 5\left(v_{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{12}\right) + 6\left(v_n - \frac{(-1)^n}{12}\right) = 0$$

La suite de terme général $v_n - (-1)^n/12$ est récurrence linéaire d'ordre 2 : l'équation caractéristique est $r^2 - 5r + 6 = 0$ dont les solutions sont 2 et 3. Dès lors, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n - \frac{(-1)^n}{12} = \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n$$

si bien que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{(-1)^n}{12} + \lambda \times 2^n + \mu \times 3^n$$

Cette suite est bornée si et seulement si $\lambda = \mu = 0$ (si $\mu \neq 0$ alors, en factorisant par 3^n, la suite tend vers $\pm\infty$ selon le signe de μ ce qui est absurde, et si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$, idem). Dès lors, la seule suite bornée solution éventuelle est la suite de terme général $(-1)^n/12$, et on a déjà vu (synthèse) qu'elle était solution : c'est la seule solution.

Exercice 23 : ✪✪ Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2, u_1 = e/2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$$

Correction : Par une récurrence (double) immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\ln(u_{n+2}) = \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) + \ln(2)$$

Faisons comme pour les suites arithmético-géométriques et cherchons un point fixe. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x = x + x + \ln(2) \iff x = -\ln(2)$$

Dès lors, en posant $x = -\ln(2)$:

$$\begin{array}{lcl} \ln(u_{n+2}) & = & \ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) + \ln(2) \\ x & = & x + x + \ln(2) \end{array}$$

Par différence :

$$\ln(u_{n+2}) - x = (\ln(u_{n+1}) - x) + (\ln(u_n) - x)$$

En d'autres termes, la suite de terme général $\ln(u_n) - x$ est une suite récurrence linéaire d'ordre 2 et vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$$

De plus, $v_0 = 0$ et $v_1 = 1$. On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ln(u_n) + \ln(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = e^{F_n}/2$ où F_n est le n-ième terme de la suite de Fibonacci.

Exercice 24 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq c$.
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$.

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

   Or, pour tout $k \in [\![n+1\,;\, 2n]\!], 1/k \geq 1/2n$ si bien que

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

   On en déduit que $c = 1/2$ convient.
2. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est évidemment croissante donc elle converge vers une limite L ou diverge vers $+\infty$. Si elle converge vers une limite L alors (H_{2n}) converge aussi vers L (toutes les suites extraites d'une suite convergente convergent vers la même limite) donc $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L - L = 0$. Or, d'après la question précédente, pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq 1/2$. L'inégalité large passe à la limite donc $0 \geq 1/2$: absurde.

Exercice 25 : ✪✪ En revenant à la définition d'une limite, donner la limite des suites de terme général :

1. $\dfrac{n}{n^2+1}$
2. $\sqrt{n^2-n}$
3. $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4}$
4. $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$
5. $\dfrac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n}$.

Correction :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$0 \leq \frac{n}{n^2+1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$
Or, $1/n \leq \varepsilon \iff n \geq 1/\varepsilon$. Soit $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq n_0$,
$$\left| \frac{n}{n^2+1} - 0 \right| \leq \varepsilon$$
En d'autres termes, $\dfrac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Soit $n \geq 2$ et soit $A \geq 0$.
$$\sqrt{n^2-n} = n\sqrt{1-\frac{1}{n}} \geq n \times \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{n}{\sqrt{2}}$$
Or, $n/\sqrt{2} \geq 2 \iff n \geq A\sqrt{2}$. Soit donc $n_0 = \lfloor n\sqrt{2} \rfloor + 1$. Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \geq 2$.
$$0 \leq \frac{\sqrt{n+1}}{n^2-4} \leq \frac{\sqrt{n+n}}{n^2-n^2/2} = \frac{\sqrt{2n}}{n^2/2} = \frac{2\sqrt{2}}{n^{3/2}}$$
Or, $2\sqrt{2}/n^{3/2} \leq \varepsilon \iff n \geq \left(2\sqrt{2}/\varepsilon\right)^{2/3}$. Soit donc $n_0 = \left\lfloor \left(2\sqrt{2}/\varepsilon\right)^{2/3} \right\rfloor + 1$. Si $n \geq n_0$, alors $|u_n| \leq \varepsilon$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Soit $A \geq 0$. Soit $n \geq 1$.
$$\frac{n^4-1}{n^3+2n+1} \geq \frac{n^4-n^4/2}{n^3+2n^3+n^3} = \frac{n^4/2}{6n^3} = \frac{n}{12}$$
Or, $n/12 \geq A \iff n \geq 12A$. Soit $n_0 = \lfloor 12A \rfloor + 1$. Si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
5. Soit $n \geq 1$ et soit $\varepsilon > 0$.
$$0 \leq \frac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n} \leq \frac{\sqrt{2n}}{n^2-n^2/2} = \frac{2\sqrt{2}}{n^3/2}$$
et on conclut comme précédemment.

Exercice 26 : ✪✪ Montrer que pour tout $x > 0, \ln(1+x) < x$ puis que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(1+e^{-k}\right)$ converge.

Correction : La convexité ne donne que des inégalités larges, on est obligé de faire autrement. Un rapide tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ (pas $\mathbb{R}_+^*$ sinon il faut calculer une limite en 0 et non pas calculer $f(0)$) par $f(x) = x - \ln(1+x)$ montre qu'elle est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui donne la majoration voulue. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + e^{-(n+1)} > 1$$
donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante puisqu'elle est à termes strictement positifs (attention, ce critère ne marche que pour les suites strictement positives, cf. cours, mais quand on a des produits, comme ici, ou des puissances ou des factorielles, il est particulièrement pratique). Il suffit donc de montrer qu'elle est majorée. On a un produit : on pense à prendre le ln. D'après la première partie de l'exercice,
$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \sum_{k=0}^{n} \ln(1+e^{-k}) \\
&< \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \\
&< \frac{1-e^{-(n+1)}}{1-e^{-1}} \\
&< \frac{1}{1-e^{-1}}
\end{aligned}$$

et donc, par croissance de l'exponentielle, $u_n \leq e^{\frac{1}{1-e^{-1}}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc converge. Remarquons qu'on ne demandait pas la limite.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $a > 0$. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Correction : Une récurrence (forte) immédiate prouve que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

La racine carrée étant croissante,

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k} \geq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}$$

c'est-à-dire que $u_{n+1} \geq u_n$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang 1. Attention, elle n'est pas forcément croissante tout court : on a $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{a}$ donc on n'a pas forcément $u_1 \geq u_0$, tout dépend de si $a \geq 1$ ou non. Cependant, le théorème de la limite monotone est encore valable pour les suites croissantes à partir d'un certain rang. Dès lors, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite L. On a :

$${u_{n+1}}^2 = u_n + \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

c'est-à-dire que ${u_{n+1}}^2 = u_n + {u_n}^2$ i.e. ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = u_n \geq u_1$ par croissance de la suite (à partir du rang 1). Or, par opération sur les limites (ou parce que la fonction carré est continue), ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} L^2$ et idem pour ${u_{n+1}}^2$ si bien que ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, l'inégalité large passe à la limite donc $0 \geq u_1$ ce qui est absurde. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 28 : ✪✪ Donner en fonction des valeurs de $q > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$$

Correction : Il faut examiner beaucoup de cas.

- Si $q > 1$ alors (peu importe la valeur de α et β), par croissances comparées, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$.
- Si $q \leq 1$ alors la suite de terme général q^n est bornée. Dès lors, si $\alpha > 0$, peu importe β, (u_n) tend encore vers $+\infty$.
- Si $q < 1$ et $\alpha < 0$, le numérateur tend vers 0. Le dénominateur tend vers $1, 2$ ou $+\infty$ selon la valeur de β : dans tous les cas, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$, alors le numérateur tend vers 1. La limite de la suite dépend donc de β. Si $\beta > 0$, le dénominateur tend vers $+\infty$, la suite tend vers 0. Si $\beta = 0$, le dénominateur est constant égal à 2, la suite tend vers $1/2$. Si $\beta < 0$, le dénominateur tend vers 1, la suite tend vers 1. Le cas $q < 1$ et $\alpha = 0$ est analogue.
- Enfin, si $q = 1$ et $\alpha = 0$, le numérateur est constant égal à 2. Il suffit de multiplier les limites par 2 dans le cas précédent.

Exercice 29 : ✪✪

1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \geq 0$, $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On rappelle qu'une suite d'entiers converge si et seulement si elle est stationnaire.
3. ✪✪✪ Soit d un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Correction :

1. On pourrait montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(\sqrt{2} - 1)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ mais ce raisonnement (bien que correct et répondant à la question) ne donne pas leur valeur exacte (non demandée il est vrai). Nous préférons la méthode suivante surtout car elle permet s'entraîner à la manipulation des sommes. Soit donc $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(\sqrt{2} - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k}$$

Séparons la somme en termes pairs/impairs et faisons comme d'habitude, les changements d'indice $k=2j$ et $k=2j+1$ ce qui donne, en se souvenant que $\sqrt{2}=2^{1/2}$ (admirons là aussi l'utilité de la notation « généralisée ») :

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-1)^n &= \sum_{0\leq 2j\leq n}\binom{n}{2j}\sqrt{2}^{2j}(-1)^{n-2j}+\sum_{0\leq 2j+1\leq n}\binom{n}{2j+1}\sqrt{2}^{2j+1}(-1)^{n-2j-1}\\ &= \sum_{0\leq 2j\leq n}\binom{n}{2j}2^j(-1)^{n-2j}+\sqrt{2}\sum_{0\leq 2j+1\leq n}\binom{n}{2j+1}2^j(-1)^{n-2j-1}\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de poser $a_n=\displaystyle\sum_{0\leq 2j\leq n}\binom{n}{2j}2^j(-1)^{n-2j}$ et $b_n=\displaystyle\sum_{0\leq 2j+1\leq n}\binom{n}{2j+1}2^j(-1)^{n-2j-1}$ qui sont bien des entiers relatifs car somme et produit d'entiers relatifs.

2. Comme d'habitude, faisons un raisonnement par l'absurde et supposons qu'il existe p et q entiers (non nuls) tels que $\sqrt{2}=p/q$. D'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}$,$(\sqrt{2}-1)^n=a_n+(pb_n)/q$. On souhaite utiliser le fait que toute suite d'entiers convergente est stationnaire. On multiplie donc par q pour avoir une suite d'entiers relatifs, ce qui donne : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $q(\sqrt{2}-1)^n=qa_n+pb_n$. Or, $\sqrt{2}\in\,]\,1\,;2\,[$ donc $\sqrt{2}-1\in\,]\,0\,;1\,[$: il en découle que $(\sqrt{2}-1)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ (suite géométrique). En particulier, $q(\sqrt{2}-1)^n=qa_n+pb_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Or, c'est une suite d'entiers relatifs donc, d'après le cours, elle est stationnaire. En d'autres termes, $q(\sqrt{2}-1)^n=0$ pour tout n assez grand, ce qui est absurde car $q\neq 0$ et $\sqrt{2}-1\neq 0$. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel (encore).
3. Dans la question précédente, le point clef est le fait que $(\sqrt{2}-1)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ sans jamais être nulle, ce qui apportait une contradiction (quand on veut généraliser un raisonnement, toujours chercher le point clef, toujours se demander : « qu'est-ce qui fait que ça marche ? »). Si on veut généraliser à $\sqrt{d}$, on ne peut pas s'intéresser à $\sqrt{d}-1$ car cette quantité n'est pas forcément entre 0 et 1. Il suffit en fait de s'intéresser à $\sqrt{d}-\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor$: on montre de même que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $(c_n,d_n)\in\mathbb{Z}^2$ tels que $\left(\sqrt{d}-\left\lfloor\sqrt{d}\right\rfloor\right)^n=c_n+d_n\sqrt{d}$, et le même raisonnement prouve que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Exercice 30 : ✪✪ Dans tout l'exercice, si $n\geq 1$, on pose u_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$v_n=\frac{u_n\ln n}{{u_n}^2+1}$$

2. **(Encore d'après projecteuler.net)** On suppose que n a k chiffres et que n est une puissance k-ième, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $n=p^k$ (par exemple, 125 a 3 chiffres et $125=5^3$, ou encore 262144 a 6 chiffres, et est égal à 8^6). Montrer que $p\in[\![\,1\,;\,9\,]\!]$ et que $k\leq 21$.

   Remarque : Avec un algorithme, on peut montrer qu'il existe exactement 49 entiers n vérifiant cette propriété, le plus grand étant 9^{21} (qui a donc 21 chiffres).

Correction :

1. Rappelons que $u_n=\left\lfloor\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}\right\rfloor+1$. Dès lors,

$$\frac{u_n}{\ln(n)}=\frac{\left\lfloor\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}\right\rfloor}{\dfrac{\ln(n)}{\ln(10)}}\times\frac{\ln(n)}{\ln(10)}\times\frac{1}{\ln(n)}+\frac{1}{\ln(n)}$$

Le premier terme tend vers 1 (cf. cours : quand une quantité tend vers $\pm\infty$, alors quand on divise par sa partie entière, le quotient tend vers 1). Il en découle que $u_n/\ln(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1/\ln(10)$. Dès lors :

$$\begin{aligned}v_n &= \frac{\dfrac{u_n}{\ln(n)}\times\ln(n)^2}{\dfrac{{u_n}^2}{\ln(n)^2}\times\ln(n)^2+1}\\ &= \frac{\dfrac{u_n}{\ln(n)}}{\dfrac{{u_n}^2}{\ln(n)^2}+\dfrac{1}{\ln(n)^2}}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1/\ln(10)}{1/\ln(10)^2}=\ln(10)\end{aligned}$$

2. On sait que

$$k = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$$

Or, $n = p^k$ donc

$$k = \left\lfloor \frac{k\ln(p)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$$

Par définition de la partie entière ($\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$) :

$$\frac{k\ln(p)}{\ln(10)} < k \leq \frac{k\ln(p)}{\ln(10)} + 1$$

On en déduit que $\ln(p)/\ln(10) < 1$ donc $p < 10$: p étant un entier, $p \leq 9$. De plus,

$$k\left(1 - \frac{\ln(p)}{\ln(10)}\right) \leq 1$$

si bien que

$$k \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\ln(p)}{\ln(10)}\right)}$$

Or, le membre de droite est maximal pour $p = 9$:

$$k \leq \frac{1}{\left(1 - \dfrac{\ln(9)}{\ln(10)}\right)}$$

Avec une calculatrice, on trouve que le membre de droite est égal à $21.85\ldots$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 31 - Fonction de Pringsheim : ✪✪✪ Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2p}\right)$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Posons (sous réserve d'existence) $u_n(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^p$ et . Alors (sous réserve d'existence)

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x)$$

Calculons d'abord la valeur de $u_n(x)$ i.e. la première limite (celle dépendant de p). Bien sûr, il faut prouver qu'elle existe. On reconnaît la limite d'une suite géométrique de raison $q = \cos(n!\pi x)^2$. Un $\cos^2$ étant compris entre 0 et 1, cette limite vaut 1 lorsque $\cos(n!\pi x)^2 = 1$ et 0 sinon. Cherchons quand cette quantité vaut 1.

$$\begin{aligned} \cos(n!\pi x)^2 = 1 \quad &\iff \quad \cos(n!\pi x) = \pm 1 \\ &\iff \quad n!\pi x \equiv 0[\pi] \\ &\iff \quad n!x \equiv 0[1] \\ &\iff \quad n!x \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

On sépare donc les cas selon que $x \in \mathbb{Q}$ ou non.

- Premier cas : $x \notin \mathbb{Q}$. Alors, pour tout n, $n!x \notin \mathbb{Z}$ donc $\cos(n!\pi x) \neq \pm 1$ si bien que $\cos(n!\pi x)^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. En d'autres termes, $u_n(x) = 0$ donc la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle et $f(x)$ est la limite de la suite nulle donc $f(x) = 0$.
- Deuxième cas : $x \in \mathbb{Q}$. Alors il existe $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = a/b$ si bien que $n!x = n! \times a/b$. Tout dépend de si b divise $n!$ ou non. Si $n \geq b$ alors b apparaît dans le produit $n! = 1 \times \cdots \times n$ donc b divise $n!$. Cependant, cela nous suffit : rappelons qu'on cherche à la fin la limite quand $n \to +\infty$. Dès lors, si $n \geq b$, alors $\cos(n!\pi x) = \pm 1$ donc

$$u_n(x) = \lim_{p\to+\infty} \cos(n!\pi x)^{2p} = 1$$

En d'autres termes, $(u_n(x))_{n\to+\infty}$ est stationnaire égale à 1 donc converge vers 1 si bien que $f(x) = 1$.

En conclusion, f est la fonction qui vaut 1 en les rationnels et 0 en les irrationnels i.e. $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$.

Exercice 32 : ✪✪✪

1. Vous empruntez un capital C à un taux d'intérêt mensuel t_m et et vous le remboursez en N mensualités constantes. Calculez la valeur M de chaque mensualité. Quel est le coût total du crédit ?
2. Le problème est que les banques et les sociétés de crédit donnent en général le taux annuel t_a et non pas le taux mensuel t_m : pour le taux annuel, il y a un seul versement en un an, et pour le taux mensuel, il y en a 12, et ils sont calculés pour que la somme avec les intérêts à la fin de l'année soit la même (sans mensualité, juste avec la somme initiale). Exprimer t_m en fonction de t_a et en déduire M et le coût total du crédit en fonction de t_a.
3. Vérifiez sur la première publicité de crédit que vous trouverez !
4. **Remake :** Une personne a dépensé tout ce qu'elle avait dans N magasins. Dans chacun, elle a dépensé dix euros de plus que la moitié de ce qu'elle avait en rentrant. Combien avait-elle en poche au départ ?

Correction :

1. Le principe est simple : chaque mois, la somme à rembourser est augmentée d'une proportion de $t_m/100$ (on donne le taux en général sous forme d'un pourcentage, disons 1%) et on soustrait la mensualité M. Notons, pour tout $n \in [\![0\,;\, N]\!]$, la somme à rembourser après la n-ième mensualité. On a $u_0 = C$ (la somme empruntée), $u_N = 0$ (après les N mensualités, il ne reste plus rien à payer) et, pour tout $n \in [\![0\,;\, N-1]\!]$,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times u_n - M$$

On reconnaît une suite (enfin presque : il n'y a qu'un nombre fini de termes) arithmético-géométrique. L'équation caractéristique est :

$$c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times c - M \iff c = \frac{100M}{t_m}$$

Soit $c = 100M/t_m$ et soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right) \times u_n \quad - \quad M \\[2ex] c & = & \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right) \times c \quad - \quad M \end{array}$$

Par différence :

$$u_{n+1} - c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right) \times (u_n - c)$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n - c$ est géométrique de raison $(1 + t_m/100)$. Par conséquent,

$$u_N - c = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N \times (u_0 - c)$$

c'est-à-dire, puisque $u_N = 0$:

$$0 = \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N \times \left(C - \frac{100M}{t_m}\right) + \frac{100M}{t_m}$$

Par conséquent :

$$\frac{100M}{t_m} \times \left(1 - \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N\right) = -C \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N$$

Donc

$$\frac{100M}{t_m} = \frac{C \times \left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N}{\left(1 + \dfrac{t_m}{100}\right)^N - 1}$$

En conclusion :

$$M = \frac{t_m}{100} \times \frac{C \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N}{\left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^N - 1}$$

2. Si on note S la somme au début de chaque année, avec le taux annuel (sans mensualité), la somme avec les intérêts est $S \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right)$ tandis qu'avec le taux mensuel, elle est de $S \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^{12}$. Par conséquent :

$$S \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right) = S \times \left(1 + \frac{t_m}{100}\right)^{12}$$

On en déduit que

$$t_m = 100 \times \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right)$$

En conclusion, la valeur de chaque mensualité en fonction du taux annuel t_a est :

$$M = \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right) \times \frac{C \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12}}{\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12} - 1}$$

Le coût total du crédit est donc

$$N \times M = N \times \left(\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{1/12} - 1\right) \times \frac{C \times \left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12}}{\left(1 + \frac{t_a}{100}\right)^{N/12} - 1}$$

3. Premier exemple en tapant « crédit » sur Google : on emprunte 10000 euros en 48 mensualités à un taux de 2.99% : cela donne des mensualités de 221.12 euros et un coût total de 10613.83 euros (et la société de crédit ajoute 200 euros de frais de dossier mais ça, c'est une autre histoire).

4. Si $n \in [\![0 \,;\, N]\!]$, notons u_n la somme qu'il lui reste après n magasins. u_0 est donc la somme initiale (ce qu'on cherche) et $u_N = 0$. De plus, par hypothèse, pour tout $n \in [\![0 \,;\, N-1]\!]$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - 10$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique dont l'équation arithmétique est :

$$c = c/2 - 10 \iff c = -20$$

Soit donc $c = -20$.

$$\begin{array}{ccccc} u_{n+1} & = & u_n/2 & - & 10 \\ c & = & c/2 & - & 10 \end{array}$$

Par différence, $u_{n+1} - c = (u_n - c)/2$ donc la suite de terme général $u_n - c$ est géométrique de raison 1/2. Par conséquent,

$$u_N - c = \frac{u_0 - c}{2^N}$$

donc

$$0 + 20 = \frac{u_0 + 20}{2^N}$$

Finalement, $u_0 = 20 \times \left(2^N - 1\right)$.

Exercice 33 : ✪✪✪ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $a_{n+2} \leq \dfrac{a_{n+1}+a_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la suite,

$$a_{n+2} \leq \frac{2\max(a_{n+1}, a_n)}{3}$$

Par exemple,

$$a_2 \leq \frac{2\max(a_0,a_1)}{3}, \qquad a_3 \leq \frac{2\max(a_2,a_1)}{3} \qquad \text{et} \qquad a_4 \leq \frac{2\max(a_3,a_2)}{3}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{2n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1) \qquad \text{et} \qquad a_{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n l'assertions ci-dessus.
- H_0 est vraie puisque a_0 et a_1 sont inférieurs à $(2/3)^0 \max(a_0,a_1) = \pm\max(a_0,a_1)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Tout d'abord,

$$a_{2n+2} \leq \frac{2\max(a_{2n}, a_{2n+1})}{3}$$

Or, par hypothèse de récurrence, a_{2n} et a_{2n+1} sont inférieurs à $(2/3)^n \times \max(a_0,a_1)$ donc leur maximum l'est également, si bien que

$$a_{2n+2} \leq \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

De plus,

$$a_{2n+3} \leq \frac{2\max(a_{2n+2}, a_{2n+1})}{3}$$

Or, $a_{2n+1} \leq (2/3)^n \max(a_0,a_1)$ par HR et, d'après ce qui précède,

$$a_{2n+2} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \times \max(a_0,a_1) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

On conclut comme précédemment que $a_{2n+3} \leq (2/3)^{n+1} \times \max(a_0,a_1)$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Or, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq a_{2n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1) \qquad \text{et} \qquad 0 \leq a_{2n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \max(a_0,a_1)$$

Puisque $2/3 \in \left]-1\,;1\right[$, $(2/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $a_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le cours, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 34 - Un calcul d'espérance : ✪✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{\left(1+e^{\alpha/n}\right)^n}{2^n}$$

Correction : Puissance variable : notation exponentielle. Soit $n \geq 1$. $u_n = \exp(v_n)$ où

$$\begin{aligned} v_n &= n\ln\left(1+e^{\alpha/n}\right) - n\ln(2) \\ &= n\ln\left(\frac{1+e^{\alpha/n}}{2}\right) \end{aligned}$$

Cela fait penser à un taux d'accroissement. Problème, on n'a pas $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0, du moins pas tout de suite : faisons le apparaître.

$$v_n = n\ln\left(1+\frac{e^{\alpha/n}-1}{2}\right)$$

Or, $\alpha/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\frac{e^{\alpha/n}-1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On peut donc faire comme dans le cours :

$$v_n = n \times \frac{\ln\left(1+\dfrac{e^{\alpha/n}-1}{2}\right)}{\dfrac{e^{\alpha/n}-1}{2}} \times \frac{e^{\alpha/n}-1}{2}$$

D'après ce qui précède, la fraction du milieu tend vers 1 quand $n\to+\infty$. De plus, en faisant apparaître là aussi un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} n \times \frac{e^{\alpha/n}-1}{2} &= \frac{e^{\alpha/n}-1}{\frac{\alpha}{n}} \times \frac{\alpha}{n} \times \frac{n}{2} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha/2$. La fonction exponentielle étant continue, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha/2}$.

Exercice 35 : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_1 &= 3 \\ u_{n+1} &= u_n + \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin(u_n))}{2^n} \end{cases}$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x, c'est-à-dire 1 si x est strictement positif, -1 s'il est strictement négatif[1].

1. En regardant la somme télescopique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$, montrer que la suite (u_n) est à valeurs dans un intervalle que l'on précisera. En déduire que $\sin(u_n)$ est du même signe que $\pi - u_n$.
2. En déduire u_{n+1} en fonction de u_n selon les cas.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n\geq 1$:

$$\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$$

4. Conclure.

Correction :

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Cette somme télescopique vaut $u_n - u_1 = u_n - 3$. Or, cette somme est également égale, par définition de la suite, à

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\operatorname{sgn}(\sin(u_k))}{2^k}$$

Par conséquent,

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} \leq u_n - 3 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k}$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^k} &= \frac{1}{2}\times\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, $-1\leq u_n - 3\leq 1$ donc $u_n\in[\,2\,;4\,]$. En particulier, $u_n\in[\,0\,;2\pi\,]$: si $u_n\geq\pi$ alors $\sin(u_n)\leq 0$ donc $\sin(u_n)$ est du signe de $\pi-u_n$ (négatif), et c'est la même chose si $u_n\leq\pi$.

1. Mais alors... ça veut dire que $\sin(u_n)$ ne va jamais être nul ? ? ? Montrez-le !

2. D'après la question précédente, si $u_n \geq \pi$, alors $\sin(u_n)$ est négatif donc

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n}$$

tandis que si $u_n \geq \pi$,

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}$$

Disons tout de suite qu'en fait u_n n'est jamais égal à π car u_n est rationnel pour tout n : les inégalités sont strictes et il n'y a aucun problème de définition pour le signe.

3. Raisonnons donc par récurrence.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$ ».
   - Puisque $u_1 = 3$, alors $\pi - 1 \leq u_1 \leq \pi + 1$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

     $$\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$$

     Si $u_n \geq \pi$ alors, d'après la question précédente,

     $$\pi - \frac{1}{2^n} \leq u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

     et le raisonnement est le même si $u_n \leq \pi$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. D'après la question précédente et le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.

Exercice 36 : ✪✪✪ Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n!} \times \sum_{k=0}^{n} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Correction : Première méthode : Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \leq n-2$,

$$\frac{k!}{n!} = \frac{1}{(k+1) \times \cdots \times (n-1) \times n} \leq \frac{1}{n(n-1)}$$

Dès lors :

$$0 \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n}$$

car on somme un terme constant. D'après le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut en remarquant que

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Deuxième méthode : Notons u_n le terme de gauche. Cherchons si la suite (u_n) est monotone. Pour cela, cherchons une relation de récurrence entre u_n et u_{n+1}.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! + \frac{(n+1)!}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{n+1}(u_n + n + 1) \\ &= \frac{u_n}{n+1} + 1 \end{aligned}$$

Par conséquent (si $n \geq 1$ pour pouvoir diviser par n) :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n \leq 0 \quad & \iff \quad \frac{u_n}{n+1}+1-u_n \leq 0 \\
& \iff \quad \frac{u_n-(n+1)u_n}{n+1} \leq -1 \\
& \iff \quad -nu_n \leq -(n+1) \\
& \iff \quad u_n \geq 1+\frac{1}{n} \\
& \iff \quad \sum_{k=0}^{n} k! \geq n!\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
& \iff \quad \sum_{k=0}^{n} k! \geq n!+(n-1)!
\end{aligned}
$$

Ce qui est vrai à partir de $n \geq 1$: la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1, et puisqu'elle est minorée par 0, elle converge vers une limite L (positive). Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_n/(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, avec la relation de récurrence vue ci-dessus, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ donc, par unicité de la limite, $L=1$.

Exercice 37 - La fonction d'Ackermann : ✪✪✪ On se donne le tableau suivant indexé par $\mathbb{N}^2$:

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5	...
0	1	2	3	4	5	6	...
1							
2							
3							
4							
5							
$\vdots$							

Le terme dans la case indexée par (m,n) est $f(m,n)$, où f est la fonction d'Ackermann, qui va de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ et qui est définie de la façon suivante :

$$
\begin{cases}
\forall n \geq 0, & f(0,n) = n+1 \\
\forall m \geq 1, & f(m,0) = f(m-1,1) \\
\forall m,n \geq 1, & f(m,n) = f(m-1,f(m,n-1))
\end{cases}
$$

Donner $f(4,4)$. On utilisera pour cela la notation des puissances itérées, introduite par Donald Knuth en 1976 : si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$
a \uparrow\uparrow n = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}
$$

où a apparaît n fois, par exemple $4 \uparrow\uparrow 3 = 4^{4^4}$.

Correction : Calculons les premières valeurs pour nous donner une idée. On trouve assez facilement $f(1,0)=f(0,1)=2$, $f(1,1)=f(0,f(1,0))=f(0,2)=3$ et $f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(1,n)=n+2$.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f(1,n)=n+2$ ».
- H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$
\begin{aligned}
f(1,n+1) &= f(0,f(1,n)) \\
&= f(0,n+2) \qquad \text{(HR)} \\
&= n+3
\end{aligned}
$$

ce qui clôt la récurrence.

Par conséquent, $f(1,n) = n+2$ pour tout n : on peut compléter totalement la première ligne (celle pour $m=1$).

m \ n	0	1	2	3	4	5	...
0	1	2	3	4	5	6	...
1	2	3	4	5	6	7	...
2							
3							
4							
5							
$\vdots$							

Continuons sur notre lancée et complétons la deuxième ligne (celle pour $m=2$). Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(2,0) &= f(1,1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

d'après ce qui précède. De plus,

$$\begin{aligned} f(2,1) &= f(1, f(2,1)) \\ &= f(1,3) \\ &= 5 \end{aligned}$$

On trouve de même que $f(2,2) = 7$: on semble être face à une suite arithmétique de raison 2 : une récurrence simple (exo) prouve que, pour tout n, $f(2,n) = 2n+3$ (suite arithmétique de raison 2 de premier terme 3).

m \ n	0	1	2	3	4	5	...
0	1	2	3	4	5	6	...
1	2	3	4	5	6	7	...
2	3	5	7	9	11	13	...
3							
4							
5							
$\vdots$							

$f(3,0) = f(2,1) = 5$ mais aucune formule simple ne semble se dégager pour les suivants. Cherchons une relation de récurrence générale. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f(3,n+1) &= f(2, f(3,n)) \\ &= 2f(3,n) + 3 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $f(3,n)$ est arithmético-géométrique. On trouve comme d'habitude (avec l'équation caractéristique) que, pour tout n, $f(3,n) = 8 \times 2^n - 3 = 2^{n+3} - 3$. À présent, nous sommes en mesure de calculer $f(4,4)$. On trouve successivement $f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3$,

$$\begin{aligned} f(4,1) &= f(3, f(4,0)) \\ &= f(3, 2^4 - 3) \\ &= 2^{2^4 - 3 + 3} - 3 \\ &= 2^{2^4} - 3 \end{aligned}$$

puis $f(4,2) = 2^{2^{2^4}} - 3$, $f(4,3) = 2^{2^{2^{2^4}}} - 3$ et enfin $f(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^4}}}} - 3$ et puisque $4 = 2^2$,

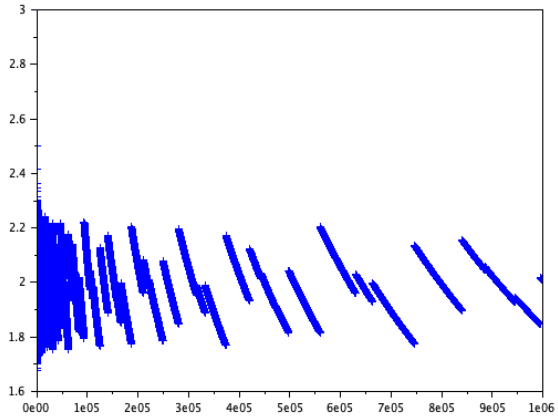
$$f(4,4) = 2^{2^{2^{2^{2^{2^2}}}}} - 3 = 2 \uparrow\uparrow 7 - 3$$

Exercice 38 - « A very slowly convergent sequence » (Erdös et al.) : ✪✪✪ On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lfloor n/3 \rfloor} + a_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

1. Rappeler l'encadrement définissant la partie entière. En déduire un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ à l'aide de x. On fera attention aux inégalités larges et strictes.
2. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n+1$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 5$, $a_n \leq 3n$. Où a-t-on besoin de supposer que $n \geq 5$?

Remarque : La suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ est donc à valeurs dans $[1\,;3]$. On a représenté ci-dessous les « premiers » termes de la suite :



Elle semble osciller indéfiniment, mais on peut montrer (c'est l'objectif du sujet de l'ENS Cachan 1991) qu'elle converge en fait vers $\dfrac{12}{\ln(432)} \approx 1.9774487$: il faut parfois se méfier des évidences numériques !

Correction :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ puis $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ (c'est du cours).
2. $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_3 = 7$, $a_4 = 9$, $a_5 = 9$. Montrons par récurrence que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « $a_n \geq a_{n-1}$ et $a_n \in \mathbb{N}$ ».
   - H_1 est vraie d'après ce qui précède.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons $H_1, \dots, H_n$ vraies (récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition,
   $$a_{n+1} = a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}.$$
   Or, $n+1 \geq n$ et la partie entière est croissante donc $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. Or, par hypothèse de récurrence, $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n$ donc, si $p \leq q$ alors $a_p \leq a_q$ donc en particulier, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$. De même, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}$ et $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor} \geq a_{\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor}$ et donc, par somme, $a_{n+1} \geq a_n$. De plus, toujours par hypothèse de récurrence, $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}, a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor}$ et $a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}$ appartiennent à $\mathbb{N}$ donc $a_{n+1} \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Raisonnons encore une fois par récurrence.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $a_n \geq n+1$ ».
   - H_0 est vraie d'après ce qui précède.
   - Soit $n \geq 0$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies (récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition, $a_{n+1} = a_{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor} + a_{\left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor}$. Par hypothèse de récurrence,
   $$a_{n+1} \geq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor + 1$$
   De plus, par propriété de la partie entière (voir question 1)
   $$a_{n+1} > \frac{n+1}{2} - 1 + 1 + \frac{n+1}{3} - 1 + 1 + \frac{n+1}{6} - 1 + 1$$
   c'est-à-dire que $a_{n+1} > n+1$. Or, a_{n+1} est un entier donc $a_{n+1} \geq n+2$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Finalement, d'après le théorème d'encadrement, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. Raisonnons encore une fois par récurrence.
   - Si $n \geq 5$, notons H_n : « $a_n \leq 3n$ ».
   - H_5 est vraie d'après ce qui précède.

- Soit $n \geq 5$. Supposons $H_5, \ldots, H_n$ vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. Par définition,

$$a_{n+1} = a_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor} + a_{\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor}$$

On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence. Pour cela, les termes en indice doivent être supérieurs ou égaux à 5, mais ce n'est pas forcément le cas. En effet, $n \geq 5$ donc $(n+1)/6 \geq 1$ et les autres termes sont également supérieurs ou égaux à 1. Soit les termes en indices sont supérieurs ou égaux à 5 et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, soit ils sont compris entre 1 et 4 et on peut quand même appliquer le résultat puisque $a_1 \leq 3 \times 1, \ldots, a_4 \leq 3 \times 4$. On a en fait besoin de supposer $n \geq 5$ sinon $\lfloor \frac{n+1}{6} \rfloor$ peut être nul et on n'a pas $a_0 \leq 3 \times 0$: 0 est en fait le seul entier pour lequel l'inégalité est fausse. Bref, dans tous les cas, les termes de l'égalité ci-dessus vérifient l'inégalité $a_k \leq 3k$ d'où

$$a_{n+1} \leq 3 \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 3 \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 3 \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor.$$

De plus, par propriété de la partie entière (voir question 1),

$$a_{n+1} \leq 3 \times \frac{n+1}{2} + 3 \times \frac{n+1}{3} + 3 \times \frac{n+1}{6}$$

c'est-à-dire que $a_{n+1} \leq 3(n+1)$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 5$.

12.5 Suites génériques

Exercice 39 - Monotonie des moyennes d'une suite monotone : ✪ Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est monotone de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant la suite des moyennes arithmétiques de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est intuitif qu'elle se « comporte comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \cdots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \\ &= \frac{n(u_1 + \cdots + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - u_1 - \cdots - u_n}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante (raisonnement analogue dans l'autre cas). Alors $u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq u_{n+1}$ donc $u_1 \leq u_{n+1}, \ldots, u_n \leq u_{n+1}$. Par somme,

$$u_1 + \cdots + u_n \leq nu_{n+1}$$

si bien que $v_{n+1} \geq v_n$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 40 : ✪ Montrer qu'une suite u est arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

Correction : Supposons que la suite u est arithmétique de raison q. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} &= \frac{u_0 + (n+1)q + u_0 + (n-1)q}{2} \\ &= u_0 + nq \\ &= u_n \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_{n+1} - \frac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2} \\ &= \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2} \end{aligned}$$

En multipliant par 2, il vient que $2u_{n+1} - 2u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$ donc $u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}$: la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est constante donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Exercice 41 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_n > 0$ à partir d'un certain rang n_0. Pour tout $n \geq n_0$, on pose $v_n = 1/\sqrt{u_n}$ si bien que

$$u_n \times v_n = \sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Si on veut absolument une suite définie à partir du rang 0, il suffit de définir $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $v_n = 0$ si $n < n_0$ et $v_n = 1/\sqrt{u_n}$ si $n \geq n_0$.

Exercice 42 : ✪

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ \\ u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[\to+\infty]{} b$.

2. **Remake :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ telles que $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Correction :

1. Supposons que (u_n) ne converge pas vers a. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - a| \geq \varepsilon$$

mais puisque $u_n \leq a$ pour tout n, la dernière condition devient $u_n \leq a - \varepsilon$. Dès lors, puisque $v_n \leq b$ pour tout n :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n + v_n \leq a + b - \varepsilon$$

c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n + v_n - (a+b)| \geq \varepsilon$$

ce qui contredit le fait que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a + b$: c'est absurde. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et par symétrie des rôles, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$.

2. Faisons un copier coller. Supposons que (u_n) ne converge pas vers 1. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - 1| \geq \varepsilon$$

mais puisque $u_n \leq 1$ pour tout n, la dernière condition devient $u_n \leq 1 - \varepsilon$. Dès lors, puisque $v_n \leq 1$ pour tout n et puisque $u_n, v_n \geq 0$ (on peut donc multiplier les inégalités) :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n v_n \leq (1-\varepsilon) \times 1$$

et on conclut de la même façon.

Exercice 43 : ✪ Montrer qu'une suite périodique non constante diverge. Peut-elle diverger vers $\pm\infty$?

Correction : Soit $k \in \mathbb{N}^*$ une période, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n+k}$. La suite étant non constante, il existe $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_1} \neq u_{n_2}$. La suite étant k-périodique, les suites extraites $(u_{n_1+kn})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n_2+kn})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement constantes égales à u_{n_1} et u_{n_2} donc convergent vers ces mêmes valeurs. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux suites extraites qui convergent vers des limites distinctes donc elle diverge. Cependant, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (les valeurs $u_0, \dots, u_{k-1}$) donc est bornée donc ne peut pas diverger vers $\pm\infty$.

Exercice 44 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire de la convergence éventuelle de la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas où $L = \pm\infty$? $L \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$? $L \in \mathbb{Z}$?

Correction : Supposons que $L = +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 < \lfloor u_n \rfloor$. Or, $u_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De même si $L = -\infty$ en majorant $\lfloor u_n \rfloor$ par u_n. Si $L \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ alors la partie entière est continue en L donc $\lfloor u_n \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor L \rfloor$. Cependant, si $L \in \mathbb{Z}$, alors la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ ne converge pas forcément. Par exemple, si on pose $u_n = (-1)^n/n$ pour tout $n \geq 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 mais, pour tout $n \geq 1$:

$$\lfloor u_{2n} \rfloor = 0 \qquad \text{et} \qquad \lfloor u_{2n+1} \rfloor = -1$$

donc $\lfloor u_{2n} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\lfloor u_{2n+1} \rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$: la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ diverge car admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes. On peut bien sûr donner un contre-exemple dans le cas d'une limite entière quelconque (par exemple $u_n = L + (-1)^n/n$).

Exercice 45 : ✪✪ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par produit (tout est positif) et par télescopage,

$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_{k+1}}{b_k} = \frac{b_n}{b_0}$$

donc $0 \leq a_n \leq b_n \times a_0/b_0$. D'après le théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

Exercice 46 : ✪✪ Soit (u_n) une suite. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \geq 0, L \neq 1$. Que peut-on dire de la suite $({u_n}^n)$? Montrer qu'on ne peut rien dire si $L = 1$. Plus précisément, exhiber trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) de limite 1 telles que

- ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2023$
- ${v_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
- $({w_n}^n)$ n'ait pas de limite.

Correction : Supposons que $L < 1$. Soit $\alpha = \dfrac{L+1}{2}$. Alors $u_n \leq \alpha$ à partir d'un rang n_0. Dès lors, pour tout $n \geq n_0$, ${u_n}^n \leq \alpha^n$ et $\alpha < 1$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On conclut de façon analogue que si $L > 1$ alors ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Intéressons-nous au cas $L = 1$.

- Soit (u_n) la suite de terme général $2023^{1/n}$. Alors $u_n = e^{\ln(2023)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ mais ${u_n}^n = 2023 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2023$. On pourrait aussi prendre la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{\ln(2023)}{n}\right)^n$ puisque, pour tout x, $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$ (cf. cours).
- Soit (v_n) la suite de terme général $n^{1/n}$. Alors ${v_n}^n = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ tandis que $v_n = e^{\ln(n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ par croissances comparées.
- Posons $w_n = (2 + (-1)^n)^{1/n}$. Par conséquent, ${w_n}^n = 2 + (-1)^n = 3$ si n est pair et 1 si n est impair donc $({w_n}^n)$ n'a pas de limite tandis que $w_n = e^{\ln(2+(-1)^n)/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. En effet, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln(2 + (-1)^n)}{n} \leq \frac{\ln(3)}{n}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 47 : ✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Étudier la convergence des suites de terme général $w_n = \max(u_n, v_n)$ et $t_n = \min(u_n, v_n)$:

- en donnant une expression explicite de w_n et de t_n en fonction de u_n et de v_n (sans utiliser de min ou de max, donc).
- en epsilonant.

Correction : Notons L_1 et L_2 respectivement les limites de (u_n) et de (v_n).

- Gros classique : il suffit de voir que, pour tous x et y,

$$\max(x, y) = \frac{|x - y| + x + y}{2} \qquad \text{et} \qquad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

(séparer les cas selon que $x \leq y$ ou $x \geq y$). Or, la valeur absolue est continue donc

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{|L_1 - L_2| + L_1 + L_2}{2} = \max(L_1, L_2) \qquad \text{et} \qquad t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{L_1 + L_2 - |L_1 - L_2|}{2} = \min(L_1, L_2)$$

- Séparons les cas selon que $L_1 = L_2$ ou non. Supposons que $L_1 \neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $L_1 > L_2$. Raisonnons comme dans le théorème d'unicité de la limite et posons $\varepsilon = (L_1 - L_2)/3$. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$:

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1, L_1 - \varepsilon \leq u_n \leq L_1 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_2, \forall n \geq n_2, L_2 - \varepsilon \leq v_n \leq L_2 + \varepsilon$$

Notons $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors, pour tout $n \geq n_3$, $v_n \leq L_2 + \varepsilon$ et $L_1 - \varepsilon \leq u_n$. Or, $L_2 + \varepsilon < L_1 - \varepsilon$ (il suffit de faire la différence) si bien que $v_n < u_n$ donc $w_n = u_n$ et $t_n = v_n$ dès que $n \geq n_3$, et donc $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $t_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$.

Supposons à présent que $L_1 = L_2$. Notons $L = L_1 = L_2$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists n_1, \forall n \geq n_1, L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_2, \forall n \geq n_2, L - \varepsilon \leq v_n \leq L + \varepsilon$$

Soit $n_3 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geq n_3$. Alors $w_n = u_n$ ou $w_n = v_n$: dans tous les cas, $L - \varepsilon \leq w_n \leq L + \varepsilon$. En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_3, |w_n - L| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. On montre de même que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$: dans tous les cas, on a le résultat voulu.

Exercice 48 - Règle de d'Alembert faible : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$.

- Montrer que si $k < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Montrer que si $k > 1$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas $k = 1$.

Correction :

- Supposons que $k < 1$ et posons $\alpha = \dfrac{k+1}{2}$. Dès lors, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq \alpha$ i.e. $|u_{n+1}| \leq \alpha \times |u_n|$. En particulier, $|u_{n_0+1}| \leq \alpha |u_{n_0}|$ puis

$$|u_{n_0+2}| \leq \alpha |u_{n_0+1}| \leq \alpha^2 |u_{n_0}|$$

Par une récurrence immédiate (faites la !), $|u_n| \leq \alpha^{n-n_0} \times |u_{n_0}|$. Or, $\alpha < 1$ donc $\alpha^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- On minore $|u_n|$ de même à partir d'un rang n_0 par $\alpha^{n-n_0} \times |u_n|$ sauf que cette fois $\alpha > 1$ et on conclut de la même façon avec le théorème de minoration.
- Si, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1/n$ alors $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si, pour tout $n \geq 1$, $u_n = 1 + (1/n)$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ tandis que $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Enfin, si pour tout n, $u_n = (-1)^n$, alors la suite de terme général u_n n'a pas de limite mais $|u_{n+1}/u_n| = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Tout peut se produire, on ne peut pas conclure si $L = 1$.

Exercice 49 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $n \geq 1$ et soit $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Alors $\sqrt{n} - 1 < k \leq \sqrt{n}$ donc

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n} - 1} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

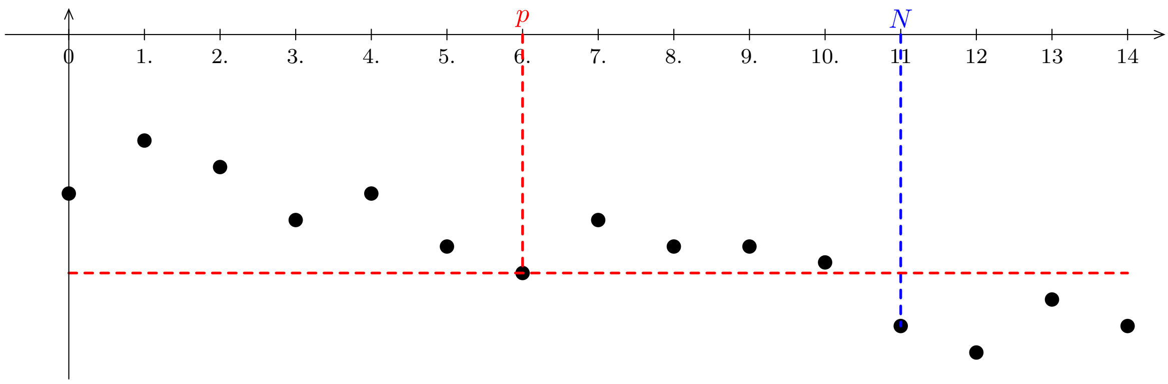
Exercice 50 - Suites pseudo-décroissantes : ✪✪✪ Une suite réelle (u_n) est dite pseudo-décroissante si on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq u_p$.

1. Faire un dessin.

2. Montrer qu'une suite décroissante est pseudo-décroissante. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer qu'une suite pseudo-décroissante minorée converge.
4. Montrer qu'une suite strictement positive de limite nulle est pseudo-décroissante.
5. Montrer qu'une suite pseudo-croissante et pseudo-décroissante est constante.

Correction :

1. En clair : pour chaque terme, noté u_p, tous les termes finissent par lui être inférieurs : pas forcément à partir du rang suivant, comme une suite décroissante, mais ils finissent par l'être à partir d'un rang N.



2. Si (u_n) est décroissante, alors pour tout p, il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \leq u_p$: $N = p$ convient. La réciproque est fausse : le contre-exemple graphique ci-contre convient. Si on veut un contre-exemple explicite, on peut prendre la suite de terme général $u_n = -n + 2 \times (-1)^n$: elle n'est pas décroissante car $u_1 = -3$ et $u_2 = 0$, mais est pseudo décroissante. En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}$, si $N = p + 4$, alors pour tout $n \geq N$,
$$u_n \leq -p - 4 + 2 \leq -p + 2 \times (-1)^p = u_p$$
3. Soit $E = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. La suite étant minorée, E est un ensemble non vide minoré donc admet une borne inférieure α. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe p tel que $\alpha + \varepsilon > u_p \geq \alpha$. La suite étant pseudo-décroissante, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,
$$\alpha + \varepsilon > u_p \geq u_n \geq \alpha$$
c'est-à-dire que $|u_n - \alpha| \leq \varepsilon$: la suite converge vers α.
4. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $u_p > 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $u_p > u_n$ pour n assez grand : il existe N tel que pour tout $n \geq N$, $u_p \geq u_n$: la suite est bien pseudo-décroissante.
5. Soit $p \in \mathbb{N}$. La suite étant pseudo-décroissante, $u_n \leq u_p$ à partir d'un rang N, et $u_n \geq u_p$ à partir d'un rang N' puisqu'elle est pseudo-croissante. Soit $N'' = \max(N, N')$. Pour tout $n \geq N''$, $u_n = u_p$: la suite (u_n) est stationnaire égale à u_p. p étant quelconque, si $p' \neq p$, la suite est stationnaire égale à $u_{p'}$ donc $u_p = u_{p'}$: la suite est constante.

Exercice 51 : ✪✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $U = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite.

1. Montrer que si u converge, alors U est bornée et admet un plus petit ou un plus grand élément.
2. Donner un exemple de suite u convergente pour laquelle U admet un plus petit et pas de plus grand élément, puis un exemple où il y a un plus grand mais pas de plus petit élément.
3. Donner enfin un exemple de suite bornée pour laquelle U n'a ni plus grand, ni plus petit élément.

Correction :

1. Une suite convergente est bornée donc, si u converge, alors U est bornée. Puisque c'est une partie non vide de $\mathbb{R}$, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure notées respectivement m et M si bien que $U \subset [\,m\,;M\,]$. Notons L la limite. Puisque $m \leq u_n \leq M$ pour tout n, et puisque l'inégalité large passe à la limite, alors $m \leq L \leq M$. L'idée est de créer un cylindre de sécurité (faites un dessin) autour de L assez loin des bornes supérieure et inférieure : en dehors, il y aura un nombre fini de termes donc il y aura un maximum ou un minimum. Encore faut-il que ce soit possible donc que L ne soit pas égale à m ou à M. Si $m = M$ alors U est un singleton donc tous les termes de la suite sont égaux à $m = M$ donc les deux bornes sont atteintes. Supposons que $m < M$. Dès lors, $L \neq m$ ou $L \neq M$ (ou les deux). Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $L \neq m$. Dès lors, $L > m$: posons $\alpha = (L+m)/2$. Alors $u_n \geq \alpha$ à partir d'un rang n_0. En particulier, α minore l'ensemble $\{u_n \,|\, n \geq n_0\}$. De plus, l'ensemble $\{u_n \,|\, n < n_0\}$ est fini donc admet un minimum a. Si $a > m$ alors $\min(a, \alpha)$ est un minorant de U strictement supérieur à m ce qui est absurde par définition de la borne inférieure. Il en découle que $a = m$: m est atteint.

2. Il suffit de prendre u la suite de terme général $1 - 1/n$ (pas de plus grand élément, le plus petit élément valant 0) et u la suite de terme général $1/n$ (plus grand élément 1, pas de plus petit élément).
3. Il suffit de prendre u la suite de terme général $(-1)^n \times (1 - 1/n)$: pas de plus petit ni de plus grand élément, les bornes supérieure et inférieure ne sont pas atteintes.

Exercice 52 - Limite supérieure, limite inférieure et lemme de sous-additivité de Fekete (d'après Mines MP 2018) : ✪✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \mid \ k \geq n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules

$$\underline{u}_n = \inf U_n \qquad \text{et} \qquad \overline{u}_n = \sup U_n$$

1. Justifier que les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

   Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v \preccurlyeq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

2. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est croissante et plus petite que u.

   Dans toute la suite, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n}$$

3. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
4. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

   On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive si, pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

   Dans le reste de cet exercice, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

   et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1})}{m}$$

6. En déduire que la suite $\left(\dfrac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$$

7. En conclure que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. U_n est non vide et borné car la suite u converge donc est bornée, donc U_n admet une borne supérieure et une borne inférieure : les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. De plus, $U_{n+1} \subset U_n$ donc $\inf(U_{n+1}) \geq \inf(U_n)$ et $\sup(U_{n+1}) \leq \sup(U_n)$ (cf. cours : on prend la borne inf sur un ensemble plus petit donc la borne inf est supérieure, et c'est le contraire pour la borne supérieure). On en déduit que $\underline{u}$ est croissante et $\overline{u}$ est décroissante. Par conséquent,

$$\underline{u}_0 \leq \underline{u}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{u}_0$$

   La suite croissante est majorée et la suite décroissante est minorée : les deux convergent.
2. On sait déjà que $\overline{u}$ est décroissante. De plus, pour tout n, $u_n \in U_n$ donc $u_n \leq \overline{u}_n$ (un élément d'un ensemble est inférieur à sa borne supérieure) : la suite $\overline{u}$ est plus grande que u. Soit enfin v une suite décroissante plus grande que u et montrons que $\overline{u} \leq v$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \geq n$. La suite v étant décroissante et plus grande que u, $u_k \leq v_k \leq v_n$. En d'autres termes, v_n est un majorant de U_n (tous les u_k avec $k \geq n$ sont inférieurs ou égaux à v_n) donc, par définition de la borne supérieure, $\overline{u}_n \leq v_n$ donc $\overline{u} \leq v$. De même pour $\underline{u}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \geq n$. Alors $u_k \leq v_k \leq \overline{v}_n$ (rappelons que $\overline{v}_n$ est la borne supérieure des v_k pour $k \geq n$). Dès lors, $\overline{v}_n$ est un majorant de U_n donc, par définition de la borne supérieure, $\overline{u}_n \leq \overline{v}_n$. Puisque ces suites convergent et l'inégalité large passant à la limite, on a le résultat.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n$. Par conséquent, si $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite donc, d'après le théorème d'encadrement, u converge aussi vers cette limite commune.

   Réciproquement, supposons que u converge vers une limite L et montrons que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes. Puisque $\overline{u}$ est décroissante et $\underline{u}$ croissante, pour prouver qu'elles sont adjacentes, il suffit de prouver qu'elles ont une limite commune. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque u converge vers L, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$. En d'autres termes, U_n est minoré par $L - \varepsilon$ donc $\underline{u}_n \geq L - \varepsilon$, et il est majoré par $L + \varepsilon$ donc $\overline{u}_n \leq L + \varepsilon$. En d'autres termes, on a montré qu'il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$L - \varepsilon \leq \underline{u}_n \leq u_n \leq \overline{u}_n \leq L + \varepsilon$$

   En particulier, pour tout $n \geq n_0$, $|\underline{u}_n - L| \leq \varepsilon$ donc $\underline{u}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ et idem pour $\overline{u}_n$ ce qui permet de conclure. Dans le cas où ces conditions sont réunies, les trois suites ont la même limite.
5. Par hypothèse, $m = nq + r$ donc $m = n(q-1) + (n + r)$. La suite étant sous-additive, $u_m \leq u_{n(q-1)} + u_{n+r}$. Or,

$$u_{2n} = u_{n+n} \leq u_n + u_n = 2u_n$$

   Par une récurrence immédiate, $u_{kn} \leq k u_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui permet de conclure quant à la première inégalité. En divisant par m :

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{q-1}{m} \times u_n + \frac{u_{n+r}}{m}$$

   Or, $m = qn + r$ donc $q = \dfrac{m-r}{n}$ si bien que $q - 1 = \dfrac{m-r-n}{n}$ si bien que

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-r-n}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{u_{n+r}}{m}$$

   Or, d'après le théorème de division euclidienne, $r \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ donc $n \leq n+r \leq 2n-1$ donc $u_{n+r} \leq \max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1})$ ce qui permet de conclure.
6. D'après la question précédente,

$$\frac{u_m}{m} \leq M = \frac{u_n}{n} + \max(u_n, \dots, u_{2n-1})$$

   La suite de terme général u_m/m est majorée par M à partir du rang $2n$ (puisqu'on a supposé que $m \geq 2n$). Soit $A = \max\{u_m/m \,|\, m < 2n\}$ (qui existe car on a un ensemble fini). Alors (u_m/m) est majorée par $\max(M, A)$ donc est majorée, et elle est minorée puisqu'elle est positive : la suite est bien bornée. Posons, pour tout m,

$$v_m = \frac{m-r-n}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1})}{m}$$

   Alors (v_n) est une suite bornée (de même que ci-dessus) supérieure à (u_m/m) donc, d'après la question 3,

$$\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \varlimsup_{m \to +\infty} v_m$$

   Or, (v_m) converge vers u_n/n donc, d'après la question 4, sa limite supérieure est aussi égale à u_n/n ce qui permet de conclure.
7. D'après la question précédente, pour tout n, $\displaystyle\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{u_m}{m}$ est un minorant de $\{u_n/n \,|\, n \geq 1\}$ donc est inférieur à sa limite inférieure, c'est-à-dire que

$$\varlimsup_{m \to +\infty} \frac{u_m}{m} \leq \varliminf_{m \to +\infty} \frac{u_m}{m}$$

   Or, on sait qu'on a aussi l'inégalité inverse donc on a égalité : d'après la question 4, cela signifie que la suite converge.

Exercice 53 - Suites de Cauchy : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |u_p - u_n| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy. Redémontrer la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$.

2. On souhaite à présent montrer la réciproque : on suppose donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence L.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Correction :

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite L. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - L| \leq \varepsilon/2$. Soit $n \geq n_0$ et soit $p \geq n_0$. D'après l'inégalité triangulaire,
$$|u_n - u_p| \leq |u_n - L + L - u_p| \leq |u_n - L| + |L - u_p| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$
c'est-à-dire que (u_n) est une suite de Cauchy. Par contraposée, si une suite n'est pas une suite de Cauchy, alors elle diverge. Or, pour $\varepsilon = 1$, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, si on prend $n = 2n_0$ et $p = 2n_0 + 1$, alors $|(1)^n - (-1)^p| = 2 > \varepsilon$: la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy donc diverge.
2. (a) Soit $\varepsilon = 1$. Il existe donc n_0 tel que, pour tous n et p supérieurs ou égaux à n_0, $|u_n - u_p| \leq 1$. En particulier, si $n \geq n_0$ et $p = n_0$, d'après l'inégalité triangulaire, $|u_n| - |u_{n_0}| \leq 1$ si bien que $|u_n| \leq 1 + |u_{n_0}|$. De plus, l'ensemble $\{|u_n| \,|\, n < n_0\}$ est fini donc admet un majorant A. En posant $M = \max(A, |u_{n_0}| + 1)$, la suite $(|u_n|)$ est majorée par M donc la suite (u_n) est bien bornée. Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß.
   (b) Soit $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui converge vers L. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p_0 tel que, pour tout $p \geq p_0$, $|u_{n_p} - L| \leq \varepsilon$. Or, (u_n) est une suite de Cauchy : il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $p \geq n_0$, $|u_n - u_p| \leq \varepsilon$. Soit $n_1 = \max(n_{p_0}, n_0)$ et soit $n \geq n_1$. Soit également p_1 tel que $n_{p_1} \geq n_1$ (un tel p_1 existe car la suite d'indices $(n_p)_p$ tend vers $+\infty$). Alors
$$|u_n - L| = |u_n - u_{n_{p_1}} + u_{n_{p_1}} - L| \leq |u_n - u_{n_{p_1}}| + |u_{n_{p_1}} - L|$$
D'une part, n et n_{p_1} sont supérieurs à n_1 donc à n_0 si bien que $|u_n - u_{n_{p_1}}| \leq \varepsilon$. De plus, $n_{p_1} \geq n_1 \geq n_{p_0}$ donc $|u_{n_{p_1}} - L| \leq \varepsilon$ si bien que $|u_n - L| \leq 2\varepsilon$ ce qui est le résultat voulu.

12.6 Théorème de Cesàro

Exercice 54 : ✪ Démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où la suite (u_n) tend vers $\pm\infty$.

Correction : Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq A$. Soit $n \geq n_0$ et soit
$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1}$$
Alors :
$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{u_{n_0} + \cdots + u_n}{n+1} \\ &\geq \frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} + \frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1} \end{aligned}$$
Or :
$$\frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$$
Dès lors :
$$\exists n_1, \forall n \geq n_1, \frac{u_0 + \cdots + u_{n_0-1}}{n+1} \geq \frac{-A}{4} \qquad \text{et} \qquad \exists n_2, \forall n \geq n_2, \frac{(n-n_0+1)\times A}{n+1} \geq \frac{3A}{4}$$
Soit enfin $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$ et soit $n \geq n_3$. Alors $v_n \geq 3A/4 - A/4 = A/2$. On a donc prouvé le résultat suivant :
$$\forall A \geq 0, \exists n_3, \forall n \geq n_3, v_n \geq A/2$$
et on sait que c'est équivalent à « $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ». De même si la limite vaut $-\infty$.

Exercice 55 : ✪✪ Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers $L > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{a_n})$ converge aussi vers L. En déduire les limites, quand n tend vers l'infini, des suites de terme général :
$$\binom{n}{p}^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(n+n)}}{n}, \qquad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Correction : La fonction ln étant continue,

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$$

D'après le théorème de Cesàro :

$$v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \ln(a_{k+1}) - \ln(a_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$$

Or, par télescopage,

$$v_n = \frac{\ln(a_n) - \ln(a_0)}{n}$$

Finalement, puisque $\ln(a_0)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\frac{\ln(a_n)}{n} = v_n + \frac{\ln(a_0)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L) + 0 = \ln(L)$$

La fonction exponentielle étant continue,

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[n]{a_n} & = & (a_n)^{1/n} \\ & = & e^{\ln(a_n)/n} \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & e^{\ln(L)} = L \end{array}$$

Soit $n \geq 1$.

- Soit $a_n = \binom{n}{p}$. On a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{p! \times (n+1-p)!} \times \frac{p! \times (n-p)!}{n!} = \frac{n+1}{n+1-p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

  D'après ce qui précède (avec $L = 1$), $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- Soit $a_n = n^n/n!$. On a :

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} & = & \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \times \dfrac{n!}{n^n} \\ & = & \dfrac{(n+1)^n}{n!} \times \dfrac{n!}{n^n} \\ & = & \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \\ & = & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \\ & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & e \end{array}$$

  D'après ce qui précède, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.
- Soit $a_n = \dfrac{n(n+1)\cdots(n+n)}{n^n}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n(n+1)\cdots(n+n)} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n(n+1)\cdots(2n)} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{(n+1)^{n}} \times \frac{n^n}{n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{n} \times \frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{(2n+1)\times 2}{n} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e}
\end{aligned}$$

si bien que $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4/e$ (nous reprouverons ce résultat au chapitre 22 avec des sommes de Riemann).

- Posons

$$a_n = \frac{1}{n^{2n}} \times \frac{(3n)!}{n!}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3n+3)!}{(n+1)^{2n+2}\times(n+1)!} \times \frac{n^{2n}\times n!}{(3n)!} \\
&= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{n^{2n}}{(n+1)^{2n+2}} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)\times n^{2n}}{(n+1)\times(n+1)^2\times(n+1)^{2n}} \\
&= \frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3} \times \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 3^3 \times \frac{1}{e^2} = 27e^{-2}
\end{aligned}$$

En conclusion, $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27e^{-2}$.

Exercice 56 : ✪✪ Soient $a, L > 0$. Soit f une fonction définie sur $[\,0\,;a\,]$, strictement positive telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} L.$$

Donner la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sqrt[n]{n!f(a)f\left(\frac{a}{2}\right)\cdots f\left(\frac{a}{n}\right)}.$$

Correction : Soit $n \geq 1$. $u_n > 0$ donc

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\left(\ln(n!) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\ln(1\times 2\times\cdots\times n) + \sum_{k=1}^{n} \ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k) + \ln\left(f\left(\frac{a}{k}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(k\times f\left(\frac{a}{k}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or, $a/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites,

$$\frac{f(a/n)}{a/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

donc

$$n\times f\left(\frac{a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} aL$$

La fonction ln étant continue,

$$\ln\left(n\times f\left(\frac{a}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(aL)$$

D'après le théorème de Cesàro, $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(aL)$. La fonction exponentielle étant continue,

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(aL)} = aL$$

Exercice 57 - D'après X MP 2012 : ✪✪ Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite C-convergente si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \geq 0, \qquad v_n = \frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}$$

est convergente, et la limite de la suite (v_n) est appelée C-limite de la suite (v_n). Le théorème de Cesàro nous dit donc qu'une suite convergente est C-convergente et que la limite de (u_n) est égale à sa C-limite.

1. Donner un exemple de suite C-convergente non convergente.
2. Montrer que si la suite (u_n) est C-convergente alors $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in]\,0\,;1\,[$, la suite de terme général $a_n = (-1)^n n^\alpha$ est C-convergente.

Correction :

1. Soit (u_n) la suite de terme général $(-1)^n$: on sait qu'elle n'est pas convergente. Cependant, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_0+\cdots+u_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \\
&= \frac{1-(-1)^n}{1-(-1)} \\
&= \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $v_n = 0$ si n est pair et $1/n$ si n est impair. Dans tous les cas, $0 \leq v_n \leq 1/n$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (u_n) n'est pas convergente mais est C-convergente (de C-limite nulle).

2. Supposons donc la suite (u_n) C-convergente et notons L sa C-limite, c'est-à-dire que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\frac{u_n}{n} &= \frac{n+1}{n}\times v_n - \frac{u_0+\cdots+u_{n-1}}{n} \\
&= \frac{n+1}{n}\times v_n - v_{n-1}
\end{aligned}$$

Or, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ donc $v_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure.

3. L'idée est que la suite est alternée, entre positive et négative, et qu'à chaque fois la somme est inférieure en valeur absolue à n^α donc, en divisant par n, on tend bien vers 0. Montrons cela rigoureusement.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $a_0 + \cdots + a_n$ est du signe de $(-1)^n$ et $|a_0 + \cdots + a_n| \leq n^\alpha$ ».
   - $a_0 + a_1 = -1^\alpha$ qui est bien négatif et $|a_0 + a_1| \leq 1^\alpha$ donc H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $a_0 + \cdots + a_n$ est du signe de $(-1)^n$ donc $a_0 + \cdots + a_n = (-1)^n \times |a_0 + \cdots + a_n|$. Dès lors,
   $$\begin{aligned} a_0 + \cdots + a_{n+1} &= (-1)^n \times |a_0 + \cdots + a_n| + (-1)^{n+1}(n+1)^\alpha \\ &= (-1)^{n+1} \times ((n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n|) \end{aligned}$$
   Toujours par hypothèse de récurrence, $|a_0 + \cdots + a_n| \leq n^\alpha$ donc
   $$(n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n| \geq (n+1)^\alpha - n^\alpha \geq 0$$
   donc $a_0 + \cdots + a_{n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et
   $$|a_0 + \cdots + a_{n+1}| = (n+1)^\alpha - |a_0 + \cdots + a_n| \leq (n+1)^\alpha$$
   c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

   Finalement, pour tout $n \geq 1$,
   $$\left|\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1}\right| \leq \frac{n^\alpha}{n} = \frac{1}{n^{1-\alpha}}$$
   et puisque $\alpha < 1$, $1/n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le cours, cela signifie que
   $$\frac{a_0 + \cdots + a_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
   c'est-à-dire que (a_n) est C-convergente vers 0.

Exercice 58 : ✪✪✪ *Cet exercice n'a rien à voir avec le théorème de Cesàro mais la démonstration est analogue.* Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que
$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} ab$$

Correction : Soit ε. Puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$:
$$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_1, \forall n \geq n_1, |b_n - b| \leq \varepsilon$$
Soit $n_2 = n_0 + n_1$ et soit $n \geq n_2$. Posons
$$v_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}}{n+1}$$
Enfin, (a_n) et (b_n) convergent donc sont bornées : soit donc M tel que $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$ pour tout n. Alors :
$$\begin{aligned} |v_n - ab| &= \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n}(a_k b_{n-k} - ab)\right| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|a_k b_{n-k} - ab| \\ &\leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n_0}^{n-n_1}|a_k b_{n-k} - ab| + \sum_{k=n-n_1+1}^{n}|a_k b_{n-k} - ab|\right) \end{aligned}$$
Soit $k \in [\![n_0 \,;\, n - n_1]\!]$. Alors $k \geq n_0$ donc $|a_k - a| \leq \varepsilon$ et $n - k \geq n - (n - n_1) = n_1$ donc $|b_{n-k} - b| \leq \varepsilon$ si bien que

$$\begin{aligned}|a_kb_{n-k}-ab| &= |a_kb_{n-k}-ab_{n-k}+ab_{n-k}-ab| \\ &\leq |(a_k-a)b_{n-k}|+|a(b_{n-k}-b)| \\ &\leq |a_k-a|\times M+M\times|b_{n-k}-b| \\ &\leq 2M\varepsilon\end{aligned}$$

Dès lors, la deuxième somme est inférieure à $(n-n_1-n_0+1)\times 2M\varepsilon \leq 2(n+1)M\varepsilon$. La troisième somme contient n_1 termes tous inférieurs à $2M^2$ (inégalité triangulaire et les termes sont tous bornés par M). Par conséquent :

$$|v_n-ab| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n_0-1}|a_kb_{n-k}-ab|+2M\varepsilon+\frac{2n_1M^2}{n+1}$$

De même que dans le théorème de Cesàro, le premier terme et le troisième tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc sont inférieurs à ε à partir, respectivement, d'un rang n_3 et d'un rang n_4. Soit donc $n \geq \max(n_2,n_3,n_4)$. On a alors

$$|v_n-ab| \leq (2M+2)\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

12.7 Suites adjacentes

Exercice 59 : ✪ Montrer que les suites de terme général

$$u_n=\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad v_n=\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}$$

sont adjacentes.

Correction : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}-\left(\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\times\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\times(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &\leq 0\end{aligned}$$

  c'est-à-dire que (u_n) est décroissante.
- On montre de même que (v_n) est croissante.
- Enfin,

$$\begin{aligned}v_n-u_n &= \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Les deux suites sont bien adjacentes.

Exercice 60 : ✪✪ Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q=1$ et $p>q$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 < v_0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} = pu_n + qv_n \\ \\ v_{n+1} = pv_n + qu_n \end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on explicitera en fonction de u_0 et v_0.

Correction : Montrons que les deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= pu_n + qv_n - u_n \\ &= (p-1)u_n + qv_n \\ &= q(v_n - u_n) \end{aligned}$$

puisque $p+q=1$ donc $p-1=-q$. Pour donner la monotonie de (u_n), il faut connaître le signe de $u_n - v_n$. Montrons par récurrence que pour tout k (n est déjà pris), $u_k < v_k$.

- Si $k \in \mathbb{N}$, notons H_k : « $u_k < v_k$ ».
- H_0 est vraie par hypothèse.
- Soit $k \geq 0$. Supposons H_k vraie et prouvons que H_{k+1} est vraie.

$$\begin{aligned} v_{k+1} - u_{k+1} &= pv_k + qu_k - pu_k - qv_k \\ &= (p-q)(v_k - u_k) \end{aligned}$$

  Or, $p>q$ et, par hypothèse de récurrence, $v_k - u_k > 0$ donc $v_{k+1} - u_{k+1} > 0$: H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Par conséquent (retour au calcul), $v_n - u_n > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$: (u_n) est (strictement) croissante. De même, (v_n) est décroissante. De plus, on a prouvé ci-dessus que $(v_n - u_n)$ est géométrique de raison $(p-q)$. Or, $0 < p-q < p < 1$ (car $p+q=1$ et p et q strictement positifs). Par conséquent, $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les deux suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes donc convergent et ont la même limite. Notons L leur limite commune

$$\begin{aligned} v_{n+1} + u_{n+1} &= pv_n + q_n + pu_n + qv_n \\ &= (p+q)(v_n + u_n) \\ &= v_n + u_n \end{aligned}$$

En d'autres termes, la suite $(v_n + u_n)$ est constante. Elle est d'une part égale à son premier terme $u_0 + v_0$. D'autre part, $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2L$ donc est constante égale à $2L$ (une suite constante est constante égale à sa limite). Ainsi, $2L = u_0 + v_0$ si bien que $L = (u_0 + v_0)/2$.

Exercice 61 - Moyenne arithmético-géométrique : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels strictement positifs. On définit les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $x_0 = a$ et $y_0 = b$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \qquad \text{et} \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. La limite commune de ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

Correction : Par une récurrence immédiate, (x_n) et (y_n) sont à valeurs strictement positives. Par une autre récurrence immédiate (?), $x_n < y_n$ pour tout n (et donc $\sqrt{x_n} < \sqrt{y_n}$ pour tout n par stricte croissance de la racine carrée). Dès lors, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \sqrt{x_n y_n} - \sqrt{x_n}^2 \\ &= \sqrt{x_n}(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}) \\ &> 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que (x_n) est (strictement) croissante. De plus :

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \frac{y_n + x_n}{2} - y_n \\ &= \frac{x_n - y_n}{2} \\ &< 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que (x_n) est (strictement) croissante. Enfin,

$$\begin{aligned} y_{n+1} - x_{n+1} &= \frac{x_n + y_n - 2\sqrt{x_n y_n}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

De plus, (x_n) est croissante donc $y_{n+1} - x_{n+1} \leq y_{n+1} - x_n = \dfrac{y_n - x_n}{2}$. Par une récurrence immédiate, pour tout n,

$$0 \leq y_n - x_n \leq \frac{y_0 - x_0}{2^n}$$

D'après le théorème d'encadrement, $y_n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites sont bien adjacentes.

12.8 Systèmes dynamiques

Exercice 62 : ✪ Étudier la suite (u_n) de premier terme strictement positif et vérifiant la relation de récurrence suivante, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Correction : Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. Soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers une limite L. D'une part, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et d'autre part, la suite étant croissante, $L \geq u_0 > 0$ donc

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L + \frac{1}{L}$$

Par unicité de la limite, $L = L + 1/L$ donc $1/L = 0$ ce qui est absurde. En conclusion, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 63 : ✪ Etudier la suite définie par $u_0 = 2023$ et pour tout $n \geq 0$

$$u_{n+1} = 1805 + \sqrt{u_n}$$

Plus précisément, on pourra montrer que :

1. Il existe un unique réel α strictement positif tel que $1805 + \sqrt{\alpha} = \alpha$.
2. $I = [\,\alpha\,; +\infty\,[$ est stable par $x \mapsto 1805 + \sqrt{x}$ (on rappelle que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$).
3. Pour tout n, u_n est bien défini et appartient à I.
4. La suite (u_n) est décroissante.
5. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Recommencer l'exercice avec $u_0 = 800$.

Correction :

1. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = \sqrt{x} + 1805 - x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Alors : $g'(x) \geq 0 \iff 2\sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1/4$. On en déduit le tableau de variations de g :

x	0		$1/4$		$+\infty$
$g'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	1805	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

g n'admet aucun zéro sur $[0\,;1/4]$ (pas de TVI ici !!!). De plus, g est continue, strictement décroissante sur $[1/4\,;+\infty[$ donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois sur $[1/4\,;+\infty[$ donc s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+^*$: il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $1805 + \sqrt{\alpha} = \alpha$.

2. Notons f cette fonction. Soit $x \in I$. Alors $x \geq \alpha$. Par croissance de la racine carrée, f est croissante donc $f(x) \geq f(\alpha) = \alpha$ donc $f(x) \in I$: I est stable par f.
3. Une récurrence immédiate prouve que $u_n \geq 0$ pour tout n : u_n est bien défini. De plus, $u_0 \in I$ (en effet, $g(2023) = \sqrt{2023} - 218 < 0$ puisque $\sqrt{2023} < \sqrt{10000} = 100$ donc $2023 \geq \alpha$ car g est négative sur I et positive sur $[0\,;\alpha]$) et I est stable par f donc $u_1 = f(u_0) \in I$. De même, $u_2 = f(u_1) \in I$: par une récurrence immédiate, $u_n \in I$ pour tout n.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n)$. Or, d'après la question 1, g est négative sur $[\alpha\,;+\infty[$ et, d'après la question précédente, $u_n \geq \alpha$ donc $g(u_n) \leq 0$ i.e. $u_{n+1} - u_n \leq 0$: la suite est bien décroissante.
5. La suite est décroissante et minorée par α (puisque $u_n \geq \alpha$ pour tout n) donc converge. Puisque f est continue, sa limite est un point fixe, et puisque α est le seul point fixe de f, on a le résultat voulu.
6. On montrer de même que $[0\,;\alpha]$ est stable par f, puis que $u_n \leq \alpha$ pour tout n (l'initialisation vient du fait que $g(800) = \sqrt{800} + 1005 > 0$). Dès lors, g étant positive sur $[0\,;\alpha]$, on prouve de même que (u_n) est croissante, et puisqu'elle est majorée par α, elle converge, et sa limite est l'unique point fixe, donc α.

Exercice 64 : ✪✪

1. Étudier la suite récurrence définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$..
2. Donner toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\mathrm{Arctan}(x))$.

Correction :

1. Une rapide étude de fonction prouve que $g : x \mapsto \mathrm{Arctan}(x) - x$ est nulle en 0, strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$ (flemme de faire un tableau de signes). Il en découle que 0 est le seul point fixe de l'Arctangente donc la seule limite ÉVENTUELLE de la suite est 0 (puisque l'Arctangente est une fonction continue).

   Supposons $u_0 \geq 0$. Une récurrence triviale prouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geq 0$ puisque $u_n \geq 0$ (d'où la nécessité de la récurrence précédente) donc la suite (u_n) est décroissante, et puisqu'elle est minorée par 0 (elle est positive), alors elle converge, donc elle converge vers 0 puisque 0 est la seule limite possible (a priori rien à voir avec le fait que la suite soit minorée par 0). De même, si $u_0 < 0$, la suite est croissante majorée (car négative) donc converge vers 0 car c'est la seule limite possible.

   En conclusion, peu importe u_0, la suite converge vers 0. Essayez de la représenter graphiquement !
2. Analyse : soit h une telle fonction. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on définit une suite (u_n) par :

   $$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)$$

   alors, d'après la question précédente, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, par hypothèse sur h, $h(x) = h(\mathrm{Arctan}(x))$ mais $x = u_0$ donc $\mathrm{Arctan}(x) = u_1$ si bien que $h(x) = h(u_1)$. En appliquant l'hypothèse faite sur h à u_1, il vient $h(u_1) = h(\mathrm{Arctan}(u_1)) = h(u_2)$ donc $h(x) = h(u_2)$. Une récurrence immédiate prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}, h(x) = h(u_n)$. La fonction h étant continue, $h(x) = h(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(0)$. Or, $h(x)$ est indépendant de n donc $h(x) = h(0)$ et x est quelconque donc h est constante.

   Synthèse : il est immédiat que les fonctions constantes sont solutions du problème. En conclusion, les seules solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 65 : ✪✪ Étudier la suite récurrence définie par $w_0 < 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \dfrac{w_n + 1}{\sqrt{w_n^2 + 1}} - 1$..

Correction : Soit f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1} - 1$ et soit g définie sur $\mathbb{R}_-$ par $g(x) = f(x) - x$. Soit $x < 0$. Alors :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x+1-x\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= (x+1)\times\underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)}_{<0}
\end{aligned}
$$

Dès lors, g est strictement positive sur $]-\infty\,;-1\,[$, nulle en -1, strictement négative sur $]-1\,;0\,[$ et nulle en 0 : les seuls points fixes de f sur $\mathbb{R}_-$ sont -1 et 0. Séparons les cas selon la valeur de w_0.

Supposons que $w_0 \in\,]-1\,;1\,[$. Soit $x \in\,]-1\,;0\,[$. Alors $-1 < x < 0$. On veut appliquer f : une rapide étude de fonction prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc $f(-1) = -1 < x < 0$: $]-1\,;0\,[$ est stable par f. De plus, $w_0 \in\,]-1\,;0\,[$, $w_1 = f(w_0) \in\,]-1\,;0\,[$ car cet intervalle est stable par f. De même, $w_2 = f(w_1) \in\,]-1\,;0\,[$. Par une récurrence immédiate, $w_n \in\,]-1\,;0\,[$ pour tout n. Soit $n \in \mathbb{N}$. $w_{n+1} - w_n = f(w_n) - w_n = g(w_n)$. Or, g est strictement négative sur cet intervalle donc $g(w_n) < 0$: la suite est strictement décroissante. Puisqu'elle est minorée par -1, elle converge et puisque f est continue, sa limite L est un point fixe. Or, la suite est décroissante donc $L \leq w_0 < 0$ donc $L = -1$, l'unique point fixe strictement négatif.

Supposons que $w_0 < -1$. On montre de même que la suite est croissante et converge encore vers -1. Enfin, si $w_0 = 1$, alors la suite est constante égale à -1 donc converge vers -1.

Exercice 66 : ✪ Même chose avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$.

Correction : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3+6x}{2x^2+2}$ admet trois points fixes : 0 et $\pm\sqrt{2}$. On prouve comme d'habitude que si $u_0 \in\,]\,0\,;\sqrt{2}\,[$, si $u_0 = \sqrt{2}$ (dans ce cas la suite est constante), ou si $x > \sqrt{2}$, alors la suite converge vers $\sqrt{2}$. Si $u_0 = 0$, alors la suite est constante égale à 0 donc converge vers 0. Enfin, dans les autres cas, la suite converge vers $-\sqrt{2}$.

Exercice 67 : ✪✪✪ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Correction : Définissons sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction f par $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x}$. La fonction f est définie, continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction inverse l'est. L'étude habituelle ne marcherait pas ici : on va regarder les termes pairs et impairs. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n}) \qquad \text{et} \qquad u_{2n+3} = f\circ f(u_{2n+1})$$

et $f\circ f$ est strictement croissante car composée de deux fonctions décroissantes : on va donc appliquer le schéma habituel à $f\circ f$ au lieu de f.

Soit $g : x \mapsto f\circ f(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On montre aisément que g s'annule en $\alpha = 2$, qui est donc l'unique point fixe de $f\circ f$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et c'est même un point fixe de f). De plus g est strictement positive sur $]\,0\,;\alpha\,[$ et strictement négative sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$.

Si $u_0 = 2$, alors la suite (u_n) est constante égale à 2 donc converge vers 2.

Supposons que $u_0 < \alpha$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \alpha$. Raisonnons par récurrence. L'initialisation est établie par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n : $u_{2n} < \alpha$. Puisque f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $u_{2n+1} = f(u_{2n}) > f(\alpha) = \alpha$ puis $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) < f(\alpha) = \alpha$, i.e. $u_{2(n+1)} < \alpha$. La propriété est donc vraie au rang $n+1$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} < \alpha$. Ainsi, on montre comme d'habitude que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) < f(u_{2n}) = u_{2n+1}$ car f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. De plus, (u_{2n}) est majorée par α et (u_{2n+1}) est minorée par α : les suites convergent, et $f\circ f$ est continue donc elles convergent vers un point fixe de $f\circ f$: il n'y a que 2. Les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite donc (u_n) converge vers 2.

On montrerait de même que, si $u_0 > \alpha$, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et le raisonnement est analogue.

Exercice 68 : ✪✪✪ Soit u définie par $u_0 \in\,]\,0\,;1\,]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 \times \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que, si elle n'est pas stationnaire, alors sa limite est nulle.

Correction : On définit sur $]\,0\,;1\,]$ la fonction f par $f(x) = x^2 \times \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$. Soit $x \in\,]\,0\,;1\,]$. Par définition de la partie entière, $\lfloor 1/x \rfloor \leq 1/x$ donc $f(x) \leq x^2 \times \dfrac{1}{x} = x$. Par conséquent, puisque $x \leq 1$, alors $f(x) \leq 1$. De plus, $x \neq 0$ donc $x^2 > 0$ et puisque

$x \leq 1$ alors $1/x \geq 1$ donc $\lfloor 1/x \rfloor > 0$. Finalement, $f(x) > 0$: $]\,0\,;1\,]$ est stable par f.

Étudions la monotonie de la suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $u_n > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n \times \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor \leq u_n \times \frac{1}{u_n} = 1$$

La suite (u_n) étant à valeurs strictement positives, la suite (u_n) est décroissante (ne pas oublier de le préciser, le critère de monotonie à l'aide du quotient n'est valable que pour les suites strictement positives) et puisqu'elle est minorée (par 0), elle converge vers une limite $L \geq 0$ (car l'inégalité large passe à la limite). Ainsi, la suite (u_n) est décroissante et converge vers une limite $L \geq 0$.

Supposons L non nulle : prouvons alors que la suite est stationnaire. Commençons par donner la valeur éventuelle de L. L étant non nulle, la fonction inverse est continue en L. Supposons que L ne soit pas l'inverse d'un entier. Par hypothèse, $1/L \notin \mathbb{N}$ donc la partie entière est continue en $1/L$ (rappelons que la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$). Par composition, la fonction $x \mapsto \lfloor 1/x \rfloor$ est continue en L. La fonction carré est aussi continue en L donc, par produit, la fonction f est continue en L. Dès lors, L est un point fixe : $f(L) = L$. Par conséquent, $L = L^2 \times \lfloor 1/L \rfloor$. Or, L est non nul donc

$$\frac{1}{L} = \left\lfloor \frac{1}{L} \right\rfloor$$

Il en découle que $1/L \in \mathbb{N}$ (c'est un nombre positif égal à sa partie entière donc un entier positif) ce qui contredit l'hypothèse faite au début de cette question : absurde, L est forcément l'inverse d'un entier. Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $L = 1/p$. Puisque $L = 1/p$,

$$f(L) = \frac{1}{p^2} \times \lfloor p \rfloor = \frac{1}{p^2} \times p = \frac{1}{p} = L$$

Ainsi, L est un point fixe de f : s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = L$ alors $u_{n_0+1} = f(L) = L$ et par une récurrence immédiate, $u_n = L$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent, il suffit de prouver que u_n prend au moins une fois la valeur L. Supposons dans la suite que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que pour tout n, $u_n \neq L$. La suite (u_n) étant décroissante, elle est minorée par sa limite, c'est-à-dire que pour tout $n, u_n \geq L = 1/p$. D'après ce qui précède, l'inégalité est stricte c'est-à-dire que pour tout $n, u_n > 1/p$. Enfin, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$ donc $u_n < 1/(p-1)$ pour n assez grand : il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \in \,]\,1/p\,;1/(p-1)\,[$.

Soit $n \geq n_0$. D'après ce qui précède, $p - 1 < 1/u_n < p$ donc

$$\left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = p - 1$$

Dès lors :

$$u_{n+1} = {u_n}^2 \times \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor = {u_n}^2 \times (p-1)$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$ alors, la fonction carré étant continue,

$$u_{n+1} = {u_n}^2 \times (p-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{p^2} \times (p-1)$$

De plus, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/p$. Par unicité de la limite,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p^2} \times (p-1)$$

c'est-à-dire que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}$ ce qui est absurde : la suite est stationnaire.

Terminons par deux exercices tirés de l'arithmétique. Évidemment, ici, on abandonne toute notion de continuité : l'étude de g ne présente donc plus aucun intérêt !

Exercice 69 : ✪✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p(n)$ le produit des chiffres de n écrit en bases 10, et on note $f(n) = n + p(n)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme de u_n et du produit de ses chiffres en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Par exemple, si $u_0 = 7$, alors on a successivement $u_1 = 14, u_2 = 18, u_3 = 26, u_4 = 38, u_5 = 62, u_6 = 74, u_7 = 102, u_8 = 102\dots$

Correction : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est évidemment croissante puisque p est à valeurs positives. Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} = u_n$ si et seulement si $p(u_n) = 0$ si et seulement si l'écriture de u_n contient le chiffre 0 et alors, par une récurrence immédiate, $u_k = u_n$ pour tout $k \geq n$. Par conséquent, il suffit de prouver qu'il existe n tel que u_n s'écrive avec le chiffre 0. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors (u_n) est strictement croissante (car on a vu que si elle prenait deux fois la même valeur, alors elle était stationnaire). Puisqu'on a une suite strictement croissante d'entiers, alors $u_n \geq n$ pour tout n et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. L'idée est de prouver qu'on ne peut pas faire des sauts trop grands donc on se retrouvera à un moment donné avec un terme de la forme $10abc\dots$

Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante de limite $+\infty$ et aucun terme ne s'écrivant avec un 0, il existe n_0 tel que $u_{n_0} < 10 \times 10^{k-1} < 11 \times 10^{k-1} < u_{n_0+1}$ (car sinon un terme de la suite est de la forme $10abc\dots$). Or, u_{n_0} admet au plus k chiffres égaux à 9 donc $p(u_{n_0}) \leq 9^k$ c'est-à-dire que $11 \times 10^{k-1} - 10 \times 10^{k-1} = 10^{k-1} < u_{n_0+1} - u_{n_0} \leq 9^k$ donc

$$10^{k-1} < 9^k$$

donc $(10/9)^k < 10$: k étant quelconque, cette inégalité est vraie pour tout k ce qui est absurde puisque $(10/9)^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 70 : ✪✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f(n)$ la somme des carrés des chiffres de n écrits en base 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme des carrés des chiffre de u_n en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Correction : Rappelons que le nombre de chiffres d'un entier $n \geq 1$ est $\left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$. Par conséquent, pour tout n, les chiffres de u_n étant inférieurs ou égaux à 9, on trouve que

$$u_{n+1} = f(u_n) \leq \left(\left\lfloor \frac{\ln(u_n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81$$

Or, par croissances comparées,

$$g(x) = \frac{x}{\left(\left\lfloor \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc il existe A tel que, pour tout x, $g(x) > 1$. Supposons qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > A$. Alors $g(u_n) > 1$ donc

$$u_n > \left(\left\lfloor \frac{\ln(u_n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 \right) \times 81 \geq u_{n+1}$$

Si $u_{n+1} > A$ alors on a de même $u_{n+1} > u_{n+2}$ et ainsi de suite jusqu'à redescendre sous A : ensuite, on peut remonter, mais les images sont en nombre fini. En effet, si on a une image supérieure à A, on redescend jusqu'à redescendre sous A. Par conséquent, u_n ne peut prendre que les valeurs $1, \dots, A$ ainsi que $f(1), \dots, f(A)$. En d'autres termes, (u_n) prend un nombre fini de valeurs donc prend au moins deux fois la même : il existe $k_1 < k_2$ tels que $u_{k_1} = u_{k_2}$. La suite étant ensuite totalement déterminée, on a $u_{k_1+1} = f(u_{k_1}) = f(u_{k_2}) = u_{k_2+1}$ et ainsi de suite. Intuitivement, cela se comprend très bien : on va retomber une infinité de fois sur cette valeur, et ensuite on reprendra à chaque fois les mêmes valeurs (on n'a pas le choix, la suite (u_n) est totalement déterministe) donc sera périodique. On montre par une récurrence immédiate (exo) que pour tout $n \geq k_1$, $u_{n+k_2-k_1} = u_n$ ce qui permet de conclure.

12.9 Suites extraites et valeurs d'adhérence

On rappelle qu'une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un ***réel***[2] *qui est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 71 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction : La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est extraite d'aucune des autres suites, la suite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ n'est extraite d'aucune autre suite, la suite $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, et la suite $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 72 : ✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.
2. ✪✪ Donner un exemple d'une suite u divergente telle que, pour tout $p \geq 2$, la suite $(u_{p\times n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction :

2. Ou un complexe pour une suite complexe mais en tout cas une quantité finie : $+\infty$ n'est donc pas considéré comme une valeur d'adhérence, même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

1. La différence avec le cours est que les limites ne sont a priori pas les mêmes. Notons L_1, L_2, L_3 les limites respectives de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_1. De plus, elle est extraire de $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_2. Par unicité de la limite, $L_1 = L_2$. De même, la suite $(u_{6n+3})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite des suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ donc converge vers L_2 et L_3 si bien que $L_2 = L_3$ donc $L_1 = L_3$: les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ce qui permet de conclure.
2. Prenons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indicatrice des nombres premiers c'est-à-dire que $u_n = 1$ si n est un nombre premier et 0 sinon. La suite u diverge car admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes : la suite extraire $(u_p)_{p\in\mathbb{P}}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 et la suite des termes pairs est stationnaire égale à 0 (à partir de u_4) donc converge vers 0. Cependant, pour tout $p \geq 2$ (pas forcément premier), la suite extraite $(u_{pn})_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir du rang 2 (car pn n'est pas premier dès que $n \geq 2$) donc converge vers 0.

Exercice 73 : ✪ Que peut-on dire d'une suite croissante qui admet une sous-suite convergente ? qui admet une sous-suite majorée ?

Correction : Montrons dans ces deux cas que la suite converge. Rappelons qu'une suite croissante converge ou diverge vers $+\infty$. Soit donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Puisqu'une suite convergente est bornée, il suffit de prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite bornée, alors elle converge, cela prouvera le résultat dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. Supposons donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ bornée par un réel M, c'est-à-dire que pour tout $p, u_{n_p} \leq M$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Puisque $n_p \geq p$ (cf. cours), et puisque la suite est croissante, $u_p \leq u_{n_p} \leq M$: la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par M donc converge.

Exercice 74 : ✪ Montrer que la suite (u_n) n'a pas de limite où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$ pour le premier) :

1. u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n.
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$.
3. $u_n = \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor - \dfrac{n}{5}$.

Correction :

1. Lorsque $(n_p)_{p\geq 1}$ est la suite strictement croissante des nombres premiers, la suite extraite $(u_{n_p})_{p\geq 1}$ est constante égale à 1, tandis que lorsque $(n_p)_{p\geq 1}$ est la suite de terme général 6^p alors, pour tour tout p, $u_{n_p} = 1/2$ donc la suite $(u_{n_p})_{p\geq 1}$ converge vers $1/2$. La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ admet deux sous-suites qui convergent vers des limites différentes donc diverge.
2. La suite extraite $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 donc converge vers 0 et la suite $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$ donc converge vers $\sqrt{3}/2$ et on montre comme ci-dessus que la suite diverge.
3. La suite extraire $(u_{5n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0 donc converge vers 0 et la suite extraite $(u_{5n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $-1/5$ donc converge vers $-1/5$ ce qui permet de conclure.

Exercice 75 : ✪✪ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite n'admettant aucune sous-suite bornée. Montrer que $|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : Par contraposée, montrons que si $(|x_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$, alors (x_n) admet une sous-suite bornée. Supposons donc que $(|x_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. Dès lors :

$$\exists A, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |x_n| \leq A$$

Donnons nous cette valeur de A dans la suite. On définit la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par :

- $n_0 = \min\{n \,|\, |x_n| \leq A\}$: n_0 est bien défini car cet ensemble est non vide.
- $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, |x_n| \leq A\}$: n_1 est bien défini car, par hypothèse, il existe $n \geq n_0 + 1$ donc $n > n_0$ tel que $|x_n| \leq A$. Dès lors, $\{n > n_0 \,|\, |x_n| \leq A\}$ est non vide donc admet un minimum.
- Soit $k \geq 1$. Supposons $n_0, \dots, n_k$ construits et posons $n_{k+1} = \min\{n > n_k \,|\, |x_n| \leq A\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

On a donc défini une suite strictement croissante d'indices $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $|x_{n_k}| \leq A$: on a donc construit une sous-suite bornée de (x_n), d'où le résultat par contraposée.

Exercice 76 : ✪✪ Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Correction : Soit a une valeur d'adhérence de la suite, c'est-à-dire qu'il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers a. Soit la suite $(n_p)_p$ contient une infinité de termes pairs, soit elle contient une infinité de termes impairs (soit les deux mais on peut montrer que ce n'est pas possible). Supposons qu'elle contienne une infinité de termes pairs. Notons $(n_{p_q})_q$ la sous-suite formée de termes pairs. Alors $(u_{n_{p_q}})_q$ est la sous-suite de (u_{n_p}) formée des termes d'indice pair. Par conséquent, pour tout q,

$$u_{n_{p_q}} = \left(1+\frac{1}{n_{p_q}}\right)^{n_{p_q}} \xrightarrow[q\to+\infty]{} e$$

Or, une suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite donc $a = e$. Dans le cas où la suite $(n_p)_p$ contient une infinité de termes impairs, on montre de même que $a = e^{-1}$. Dès lors, les seules valeurs possibles de a sont e et e^{-1} si bien que e et e^{-1} sont les seules valeurs d'adhérence possibles de la suite (u_n).

Exercice 77 : ✪✪

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite constante.
2. Montrer qu'une suite d'entiers naturels deux à deux distincts tend vers $+\infty$.
3. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs non nuls. On suppose que $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite α irrationnelle. Montrer que $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Correction :

1. Par hypothèse :

$$\exists A, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, u_n < A$$

Il y a donc une infinité de valeurs de u_n inférieures strictement à A. Puisque (u_n) est à valeurs dans $\mathbb{N}$, il y a un nombre fini de valeurs de u_n possibles : il y a donc une valeur que (u_n) prend une infinité de fois, et donc cela permet de construire comme d'habitude une sous-suite constante.
2. D'après la question précédente, une suite qui ne tend pas vers $+\infty$ admet une sous-suite constante, donc n'est pas une suite d'entiers deux à deux distincts. On en déduit le résultat par contraposée.
3. Supposons que $(|q_n|)$ ne tende pas vers $+\infty$. D'après ce qui précède, on peut extraire une suite $(|q_{n_s}|)_{s\in\mathbb{N}}$ constante, disons égale à A. Par conséquent, la suite $(p_{n_s}/q_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ a tous ses dénominateurs égaux à A (même si les fractions ne sont pas forcément irréductibles). Puisque c'est une suite extraite d'une suite qui converge vers α, alors elle converge aussi vers α, et donc

$$p_{n_s} = q_{n_s} \times \frac{p_{n_s}}{q_{n_s}} \xrightarrow[s\to+\infty]{} A \times \alpha$$

Mais A est non nul et $\alpha \notin \mathbb{Q}$ donc $A\times\alpha \notin \mathbb{Q}$ ce qui est absurde car une suite d'entiers convergente est stationnaire (cf. cours) donc ne peut converger que vers une limite entière et donc rationnelle. C'est donc absurde : $|q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Dès lors, si $(|p_n|)$ ne tend pas vers $+\infty$, d'après ce qui précède, elle admet une sous-suite $(|p_{n_s}|)_{s\in\mathbb{N}}$, constante, disons égale à B. Mais $(|q_n|)$ tend vers $+\infty$ donc $(|q_{n_s}|)$ également en tant que suite extraite, donc la suite (p_{n_s}/q_{n_s}) tend vers 0 ce qui est absurde car elle tend vers α en tant que suite extraite de (p_n/q_n). On pouvait aussi dire que

$$|p_n| = |q_n| \times \left|\frac{p_n}{q_n}\right|$$

Or, $|q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $|p_n/q_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\alpha| > 0$ (car $\alpha \neq 0$ puisque $0 \in \mathbb{Q}$) ce qui permet de conclure.

Exercice 78 : ✪✪ Donner un exemple de suite complexe $(z_n) = (x_n + iy_n)$ sans valeur d'adhérence mais telle que (x_n) et (y_n) aient des valeurs d'adhérence.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = n(1+(-1))^n$ et $y_n = n(1+(-1)^{n+1})$. Alors $x_n = 0$ lorsque n est impair donc 0 est valeur d'adhérence (plus précisément, 0 est limite de la sous-suite des termes impairs) et $y_n = 0$ lorsque n est pair donc 0 est aussi valeur d'adhérence de y_n. Cependant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, si on pose $z_n = x_n + iy_n$ alors

$$|z_n| \geq \max(|x_n|, |y_n|) = 2n$$

En effet, le module d'un complexe est supérieur ou égal à la valeur absolue de sa partie réelle ou de sa partie imaginaire, et si n est pair alors $x_n = 2n$ et $y_n = 0$, et c'est le contraire si n est impair. Dès lors, $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc n'admet aucune sous-suite bornée donc n'admet aucune valeur d'adhérence.

Exercice 79 : ✪✪ Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Correction : Par symétrie des rôles, il suffit de prouver que si L est une valeur d'adhérence éventuelle de (u_n), c'est aussi une valeur d'adhérence de (v_n). Supposons donc qu'il existe une suite extraite de (u_n), que l'on note $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, qui converge vers L. La suite $(u_n - v_n)$ tendant vers 0, toutes ses suites extraites aussi donc $(u_{n_p} - v_{n_p})$ aussi, et il suffit de voir que $v_{n_p} = v_{n_p} - u_{n_p} + u_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 + L = L$ donc L est bien une valeur d'adhérence de (v_n).

Exercice 80 : ✪✪✪ Montrer qu'il n'existe pas de suite dont l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $]\,0\,;1\,[$.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle suite (x_n) existe. Montrons qu'alors 0 est valeur d'adhérence ce qui sera absurde (on montrerait de même que 1 est aussi valeur d'adhérence). On construit une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geq 1}$ de la façon suivante :

- $n_1 = \min\{n \,|\, |x_n| \leq 1\}$: n_1 est bien défini car $1/2$ est valeurs d'adhérence donc il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers $1/2$ donc, en particulier, à valeurs dans $]\,0\,;1\,[$ à partir d'un certain rang.
- $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, |x_n| \leq 1/2\}$: n_1 est bien défini car, par hypothèse, il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers $1/4$: si on note (x_{n_p}) cette suite extraite, alors $x_{n_p} \in [\,0\,;1/2\,]$ pour n assez grand : il existe donc $n > n_1$ tel que $x_n \leq 1/2$.
- Soit $k \geq 1$. Supposons $n_0, \dots, n_k$ construits et posons $n_{k+1} = \min\{n > n_k \,|\, |x_n| \leq 1/(k+1)\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

Dès lors, on a construit une suite extraite (car la suite $(n_k)_k$ est strictement croissante) de (x_n), la suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$, telle que, pour tout $k \geq 1$, $0 \leq |x_{n_k}| \leq 1/k$. D'après le théorème d'encadrement, $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ si bien que 0 est limite d'une suite extraite de (x_n) donc est valeur d'adhérence de (x_n) ce qui permet de conclure.

Exercice 81 : ✪✪✪

1. Montrer qu'une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence converge. Montrer que ce résultat est faux si on en enlève l'hypothèse « bornée » ? Ce résultat est fort utile, voici quatre exercices qui l'utilisent.
2. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $x_{2n} + 2x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et k un entier naturel impair tels que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ${u_n}^k - {v_n}^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?
   (c) Que dire de deux suites réelles u et v telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{u_n} + e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$?
   (d) ✪✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et tel que les deux suites $\left(e^{iau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(e^{ibu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que ce résultat n'est plus valable sans l'hypothèse $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Correction :

1. Soit L l'unique valeur d'adhérence de la suite. Supposons que (u_n) ne converge pas vers L. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |u_n - L| > \varepsilon$$

En d'autres termes, il existe une infinité de termes qui vérifient $|u_n - L| > \varepsilon$, c'est-à-dire une suite extraite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes sont à distance supérieure à ε de L. Cette suite extraite est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, admet aussi une sous-suite convergente : il existe donc une suite $(u_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel L'. Or, pour tout q, $|u_{n_{p_q}} - L| > \varepsilon$, et l'inégalité large passe à la limite donc $|L' - L| \geq \varepsilon$ et en particulier, $L \neq L'$. Or, $(u_{n_{p_q}})$ est extraite d'une suite extraite donc est extraite de (u_n) donc L' est une valeur d'adhérence de (u_n) ce qui contredit le fait que (u_n) n'a qu'une valeur d'adhérence.

Si on enlève l'hypothèse de bornitude, cela ne marche plus : la suite de terme général $n(1+(-1)^n)$ n'admet que 0 comme valeur d'adhérence (rappelons que $+\infty$ n'est pas une valeur d'adhérence) mais diverge.

2. (a) D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, (x_n) admet une valeur d'adhérence notée L. Il existe donc une suite extraite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L. Ainsi,

$$x_{2n_p} = (x_{2n_p} + 2x_{n_p}) - 2x_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 - 2L = -2L$$

Or, $(x_{2n_p} + 2x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{2n} + 2x_n)$ donc converge vers 0 si bien que $-2L = 0$ par unicité de la limite donc $L = 0$: la suite (x_n) étant bornée avec une unique valeur d'adhérence, elle converge (vers 0).

   (b) Prouvons que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées. Si (u_n) n'est pas bornée, alors elle admet une suite extraite qui converge vers $\pm\infty$, disons $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Dès lors,

$$v_{n_p} = u_{n_p} + v_{n_p} - u_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0 - \infty = -\infty$$

Dès lors, k étant impair, c'est la même chose à la puissance k donc

$$u_{n_p}{}^k - v_{n_k}{}^k \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

car « $+\infty-(-\infty)=+\infty$ » ce qui est absurde : les deux suites sont bornées. Soit L une valeur d'adhérence de (u_n) (qui existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß) : il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers L_1. La suite (v_{n_p}) est bornée donc admet aussi une sous-suite convergente, notée $(v_{n_{p_q}})$, vers L_2, $(u_{n_{p_q}})$ est extraite de (u_{n_p}) donc converge aussi vers L_1 (c'est une preuve analogue au théorème de Bolzano-Weierstraß complexe : des extractions successives). Par conséquent,

$$u_{n_{p_q}} + v_{n_{p_q}} \xrightarrow[q\to+\infty]{} L_1+L_2$$

donc, par unicité de la limite, $L_1=-L_2$. De même, la fonction $x\mapsto x^k$ étant continue, $L_1{}^k = L_2{}^k$ mais k est impair donc $L_1=L_2$ et puisque $L_1=-L_2$, alors $L_1=L_2=0$. (u_n) et (v_n) sont bornées et ont une unique valeur d'adhérence donc convergent vers 0.

(c) Idem : les suites sont bornées sinon l'une tend vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$ avec la première condition, mais alors $e^{u_n}+e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est exclu. Avec deux extractions successives, on trouve de même que $L_1+L_2=0$ donc $L_1=-L_2$, et que $e^{L_1}+e^{L_2}=2$ donc $e^{L_1}+e^{-L_1}=2$ donc $\mathrm{ch}(L_1)=1$ donc $L_1=0$ et on conclut comme précédemment.

(d) Soit L une valeur d'adhérence de (u_n) (qui existe car la suite est bornée) : il existe une suite extraite (u_{n_p}) qui converge vers L. Notons L_1 la limite de la suite (e^{iau_n}) et L_2 la limite de (e^{ibu_n}). En tant que suite extraite de suites convergentes, on a donc :

$$e^{iau_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} L_1 \qquad \text{et} \qquad e^{ibu_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} L_2$$

Or, la fonction $x\mapsto e^{ix}$ est continue donc

$$e^{iau_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^{iaL} \qquad \text{et} \qquad e^{ibu_{n_p}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^{ibL}$$

Par unicité de la limite, $L_1=e^{iaL}$ et $L_2=e^{ibL}$. Or, pour tout n, $|e^{iau_n}|=|e^{ib_n}|=1$ donc, en passant à la limite, $|L_1|=|L_2|=1$ donc il existe θ_1 et θ_2 tels que $L_1=e^{i\theta_1}$ et $L_2=e^{i\theta_2}$. Dès lors,

$$aL\equiv\theta_1[2\pi] \qquad \text{et} \qquad bL\equiv\theta_2[2\pi]$$

Supposons qu'il existe deux valeurs d'adhérence distinctes $L_1\neq L_2$. D'après ce qui précède, $aL_1\equiv aL_2\equiv\theta_1[2\pi]$ et $bL_1\equiv bL_2\equiv\theta_2[2\pi]$. Il en découle qu'il existe $(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $aL_1=aL_2+2k_1\pi$ et $bL_1=bL_2+2k_2\pi$. Dès lors, $a(L_1-L_2)=2k_1\pi$ et $b(L_1-L_2)=2k_2\pi$. Or, $a/b\notin\mathbb{Q}$ donc en particulier a et b sont non nuls si bien que

$$L_1-L_2=\frac{2k_1\pi}{a}=\frac{2k_2\pi}{b}$$

Or, $L_1\neq L_2$ donc k_1 et k_2 sont non nuls si bien que

$$\frac{a}{b}=\frac{2k_1\pi}{2k_2\pi}=\frac{k_1}{k_2}\in\mathbb{Q}$$

ce qui est absurde : il n'y a qu'une valeur d'adhérence, ce qui permet de conclure. Si a/b est rationnel, ce n'est plus forcément vrai : par exemple si $a=\sqrt{2}$ et $b=3\sqrt{2}$, il suffit de prendre (u_n) de terme général $(-1)^n\times 2\pi/\sqrt{2}$: la suite (u_n) ne converge pas mais les suites $\left(e^{iau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(e^{ibu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes égales à 1.

Exercice 82 : ✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$ bijective (on montrera l'existence d'une telle bijection au chapitre 17). Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\varphi(n))$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrons qu'il existe une suite extraite $(\varphi(n_p))_{p\geq1}$ qui converge vers x. Construisons une suite strictement croissante d'entiers $(n_p)_{p\geq1}$ de la façon suivante :

- $n_1=\min\{n\,|\,|\varphi(n)-x|\leq1\}$: n_1 est bien défini car il existe un rationnel r tel que $|x-r|\leq1$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Or, φ est surjective donc il existe n tel que $r=\varphi(n)$. L'ensemble $\{n\,|\,|\varphi(n)-x|\leq1\}$ est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.
- $n_2=\min\{n>n_1\,|\,|x-\varphi(n)|\leq1/2\}$: n_1 est bien défini car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une infinité de rationnels dans l'intervalle $]\,x-1/2\,;x+1/2\,[$ donc dans l'intervalle $[\,x-1/2\,;x+1/2\,]$. Il existe donc une infinité de n tel que $\varphi(n)$ soit dans cet intervalle, et puisqu'il y a une infinité de n, il y a au moins un $n>n_1$ qui convient, d'où l'existence de n_2.
- Soit $p\geq1$. Supposons $n_0,\dots,n_p$ construits et posons $n_{p+1}=\min\{n>n_p\,|\,|x-\varphi(n)|\leq1/(p+1)\}$ qui existe pour la même raison que ci-dessus.

On a donc une suite strictement croissante d'entiers (n_p) telle que, pour tout p, $|x-\varphi(n_p)|\leq1/p$ donc $(\varphi(n_p))_p$ converge vers x : x est valeur d'adhérence de $(\varphi(n))$.

12.10 Suites complexes

Exercice 83 : ✪ Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\cos(k)}{2^k}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Correction : Comme dans le chapitre 7 :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\mathrm{Re}(e^{ik})}{2^k} \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{e^{ik}}{2^k}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{-e^i}{2}\right)^k\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\left(1-\frac{e^i}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left|1-\frac{e^i}{2}\right| &= \sqrt{\left(1-\frac{\cos(1)}{2}\right)^2+\frac{\sin^2(1)}{4}} \\ &= \sqrt{1-\cos(1)+\frac{\cos^2(1)}{4}+\frac{\sin^2(1)}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}-\cos(1)} \end{aligned}$$

Or, $0 \leq 1 \leq \pi/3$ et le cosinus est décroissant sur $\left[0\,;\frac{\pi}{3}\right]$ donc $1 \geq \cos(1) \geq 1/2$ si bien que $5/4 - \cos(1) \leq 3/4$. Dès lors,

$$\left|1-\frac{e^i}{2}\right| \leq \sqrt{3/4} < 1$$

On a une suite géométrique de module strictement inférieur à 1 donc converge vers 0 donc sa partie réelle également.

Exercice 84 : ✪✪ On se place sur le plan complexe en bijection avec $\mathbb{C}$ par la bijection habituelle. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-i$. On construit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- M_0 est un point quelconque du plan.
- M_1 est le milieu du segment $[AM_0]$.
- M_2 est le milieu du segment $[BM_1]$.
- M_3 est le milieu du segment $[AM_2]$.
- M_4 est le milieu du segment $[BM_3]$.
- etc.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, on note z_n l'affixe du point M_n. Exprimer z_n en fonction de n.
2. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons z_n l'affixe de M_n. Par définition,

$$z_{2n+2} = \frac{z_{2n+1}-i}{2} \qquad \text{et} \qquad z_{2n+1} = \frac{z_{2n}+i}{2}$$

On en déduit que

$$z_{2n+2} = \frac{z_{2n}-i}{4}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique d'équation caractéristique $c = (c-i)/4$ de solution $c = -i/3$. Posons donc $c = -i/3$. Alors :

$$\begin{array}{rcccc} z_{2n+2} & = & \dfrac{z_{2n}}{4} & - & \dfrac{i}{4} \\[2mm] c & = & \dfrac{c}{4} & - & \dfrac{i}{4} \end{array}$$

Par différence : $(z_{2n+2}-c) = (z_{2n}-c)/4$: la suite $(z_{2n}-c)$ est géométrique de raison $1/4$ si bien que $z_{2n}-c = (z_0-c)/4^n$. Finalement,

$$z_{2n} = \left(z_0 + \frac{i}{3}\right) \times \frac{1}{4^n} - \frac{i}{3}$$

et on a aussi

$$\begin{aligned} z_{2n+1} &= \frac{z_{2n}+i}{2} \\ &= \left(z_0 + \frac{i}{3}\right) \times \frac{1}{2\times 4^n} - \frac{i}{6} + \frac{i}{2} \\ &= \left(z_0 + \frac{i}{3}\right) \times \frac{1}{2\times 4^n} + \frac{i}{3} \end{aligned}$$

2. Puisque $1/4 \in \,]-1\,;1\,[$, $z_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -i/3$ et $z_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} i/3$: les deux suites convergent vers des limites différentes donc la suite (z_n) diverge.

Exercice 85 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de prouver que, si (u_n) est une suite de nombres complexes convergeant vers un complexe L, alors

$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L$$

1. Vérifier le résultat si (u_n) est une suite réelle.
2. On suppose que la suite (u_n) est constante égale à L. Pour tout $n\geq 1$, on définit sur $\mathbb{C}$ les deux fonctions P_n et Q_n par :

$$\forall z\in\mathbb{C}, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad Q_n(z) = P_n(z) - \left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

   (a) Montrer que, pour tout n, Q_n est une fonction polynomiale à coefficients positifs.

   (b) En déduire que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|Q_n(z)| \leq Q_n(|z|)$ et prouver le résultat dans ce cas particulier. On admettra (on le prouvera au second semestre) que $P_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

3. On suppose que $L=0$. En remarquant que la fonction polynôme $z\mapsto (1+z)^n-1$ est à coefficients positifs, adapter la démarche de la question précédente pour prouver que

$$\left|\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - 1\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4. On suppose enfin que $L\neq 0$. Pour tout n, posons $u_n = L(1+v_n)$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que, pour tout $n\geq 1$,

$$\begin{aligned} \left|\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{L}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{|L|^k}{n^k}((1+|v_n|)^k-1) \\ &\leq \left|\left(1+\frac{|L|(1+|v_n|)}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|L|}{n}\right)^n\right| \end{aligned}$$

   et conclure à l'aide des questions précédentes.

Correction :

1. Tout d'abord, $L\in\mathbb{R}$ puisque (u_n) est une suite réelle (on peut l'affirmer directement, mais on peut le justifier en disant que la partie imaginaire de (u_n), qui est la suite constante nulle, converge vers la partie imaginaire de L, donc celle-ci vaut 0 et donc $L\in\mathbb{R}$). De plus, $1+u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $1+u_n/n>0$ pour n assez grand. Dès lors, pour n assez grand :

$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)}$$

Or :

$$\begin{aligned} n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) &= n\times\frac{\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)}{\frac{u_n}{n}}\times\frac{u_n}{n} \\ &= u_n\times\frac{\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)}{\frac{u_n}{n}} \end{aligned}$$

$u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+u)/u \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc, par composition de limites, la fraction ci-dessus tend vers 1 donc

$$n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L\times 1 = L$$

L'exponentielle étant continue, on a le résultat voulu. Le problème est que cette preuve n'est plus valable pour des complexes car il n'existe pas de log complexe.

2. (a) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $z\in\mathbb{C}$. En utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{z}{n}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\times\frac{1}{n^k}\right) z^k \end{aligned}$$

Q_n est évidemment une fonction polynomiale (à coefficients réels). Il suffit donc de prouver que, pour tout $k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]$,

$$\frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\times\frac{1}{n^k} \geq 0$$

Soit donc $k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} - \binom{n}{k}\times\frac{1}{n^k} &= \frac{1}{k!} - \frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{1}{n^k} \\ &= \frac{1}{k!}\times\left(1-\frac{n!}{(n-k)!n^k}\right) \\ &= \frac{1}{k!}\times\left(1-\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right) \\ &= \frac{1}{k!}\times\left(1-\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right) \end{aligned}$$

On a un produit de k termes positifs et inférieurs à 1 donc, par produit, le gros produit de droite à l'intérieur de la parenthèse est inférieur à 1 si bien que le coefficient est bien positif.

(b) Soit $z\in\mathbb{C}$. Notons donc $Q_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k z^k$ avec les a_k positifs. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|Q_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k z^k|$$

Or, pour tout k, $|a_k z^k| = |a_k|\times|z|^k$ par propriété du module, et comme a_k est positif, $|a_k| = a_k$ donc on a finalement :

$$|Q_n(z)| \leq \sum_{k=0}^n a_k|z|^k = Q_n(|z|)$$

Par conséquent, $|Q_n(L)| \leq Q_n(|L|)$. Or,

$$Q_n(|L|) = P_n(|L|) - \left(1+\frac{|L|}{n}\right)^n$$

$|L|$ étant un réel, on a prouvé à la question 1 (et même en cours car c'est une constante) que

$$\left(1+\frac{|L|}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|L|}$$

Or, d'après le résultat admis dans l'énoncé, $P_n(|L|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{|L|}$. On en déduit que $Q_n(|L|) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $Q_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que :

$$\left(1+\frac{L}{n}\right)^n = P_n(L) - Q_n(L) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L - 0 = e^L$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(1+z)^n - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} z^k$$

puisque le terme pour $k=0$ vaut 1, donc on a bien (encore une fois) une fonction polynomiale à coefficients positifs. Notons cette fonction polynomiale Q_n. De même que dans la question précédente, pour tout n, à l'aide de l'inégalité triangulaire et puisque les coefficients sont positifs :

$$\left|P_n\left(\frac{u_n}{n}\right)\right| \leq P_n\left(\frac{|u_n|}{n}\right)$$

Or,

$$P_n\left(\frac{|u_n|}{n}\right) = \left(1+\frac{|u_n|}{n}\right)^n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après la question 1 puisque la suite $(|u_n|)$ est à valeurs réelles et converge vers 0, et on conclut encore une fois à l'aide du théorème d'encadrement.

4. Tout d'abord, il existe bien une telle suite (v_n) puisqu'il suffit de poser

$$v_n = \frac{u_n - L}{L}$$

(ce qui est possible car $L \neq 0$) et (v_n) converge bien vers 0 (nous ferons ça souvent au chapitre 24). Soit donc $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\left|\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{L}{n}\right)^n\right| &= \left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{u_n}{n}\right)^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\left(\frac{L}{n}\right)^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k}\left({u_n}^k - L^k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{n^k}\left(L^k(1+v_n)^k - L^k\right)\right| \qquad (u_n = L(1+v_n)) \\
&= \left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{L^k}{n^k}\left((1+v_n)^k - 1\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{|L|^k}{n^k}\left|(1+v_n)^k - 1\right| \qquad \text{(I.T. et coeffs positifs)}
\end{aligned}$$

Il ne faut pas appliquer ensuite brutalement l'inégalité triangulaire car on veut un signe $-$ à la fin. Comme dans la question précédente, pour tout k, $z \mapsto (1+z)^k - 1$ est à coefficients positifs donc on montre comme dans les deux questions précédentes que, pour tout z, $|(1+z)^k - 1| \leq (1+|z|)^k - 1$ ce qui donne la première inégalité de l'énoncé. En développant et en appliquant le binôme de Newton, on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{|L|^k}{n^k}((1+|v_n|)^k - 1) = \left(1+\frac{|L|(1+|v_n|)}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|L|}{n}\right)^n$$

et on conclut à l'aide de l'inégalité triangulaire (version minoration : $a - b \leq |a-b|$).

5. Puisqu'on a des suites réelles, on peut affirmer à l'aide de la question 1 que le membre de droite tend vers $|e^{|L|}-e^{|L|}| = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{L}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

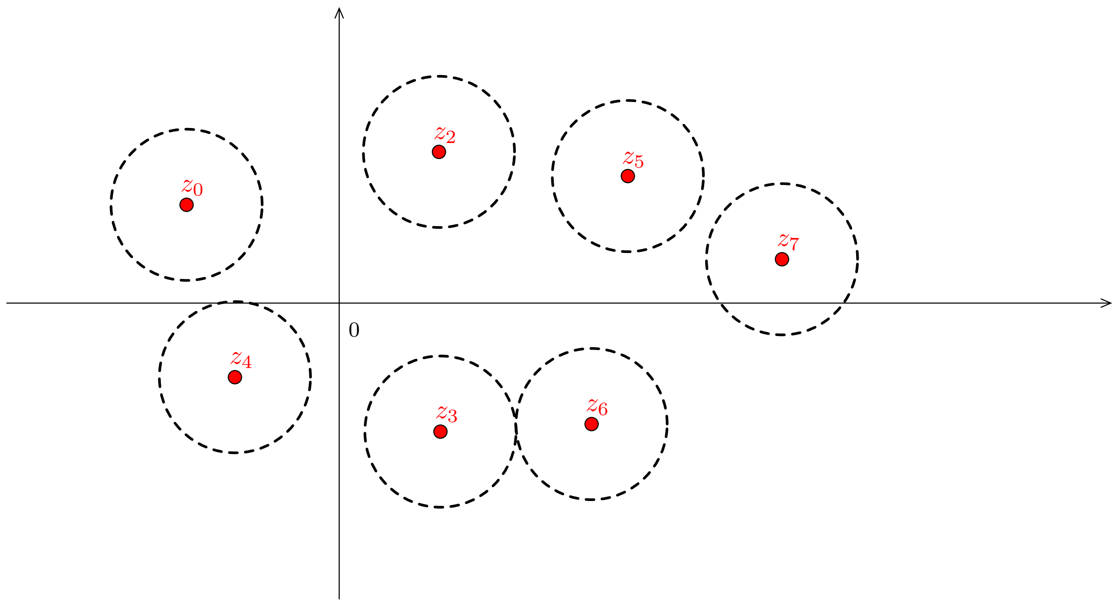
Or, d'après la question 2, $\left(1+\dfrac{L}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L$ donc

$$\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n = \left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{L}{n}\right)^n + \left(1+\frac{L}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + e^L = e^L$$

Exercice 86 : ✪✪✪ Soit (z_n) une suite complexe vérifiant : $\forall p \neq q, |z_p - z_q| \geq 1$. Montrer que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Remarque : On montrera à l'exercice 21 du chapitre 35 un résultat plus fort, à savoir que la série $\sum 1/{z_n}^3$ converge.

Correction : Les z_k sont distants d'au moins 1 : il y a un « périmètre de sécurité » (on pourrait presque dire qu'ils respectent les gestes barrières) autour d'eux : si on trace un cercle de rayon 1/2, les disques délimités ne s'intersectent pas (sauf peut-être en un point s'ils sont tangents). On prend des cercles de rayon 1/2 comme ça deux points distincts sont distants d'au moins 1.



L'idée est simple : cette contrainte va les forcer à s'éloigner de plus en plus de l'origine pour avoir de la place, leur module va augmenter et donc $|z_n|$ va tendre vers $+\infty$.

Raisonnons par l'absurde et donnons la négation de $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$:

$$\exists A > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geq n_0, |z_n| < A$$

En d'autres termes, il existe une infinité de termes de la suite de module strictement inférieur à A ce qui donne une suite extraite $(z_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ (une infinité de termes, cela donne une suite extraite). On a une suite extraite bornée : on peut donc en extraire une sous-suite convergente qu'on note $(z_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$, suite qui converge vers une limite L. Or, si une suite converge, ses termes se rapprochent de plus en plus de L et donc se rapprochent de plus en plus les uns des autres (et donc on a une suite de Cauchy, cf. exercice 53), ce qui est incompatible avec la condition vérifiée par la suite. Prouvons cela rigoureusement : il existe q_0 tel que, pour tout $q \geq q_0$,

$$\left|z_{n_{p_q}} - L\right| \leq \frac{1}{4}$$

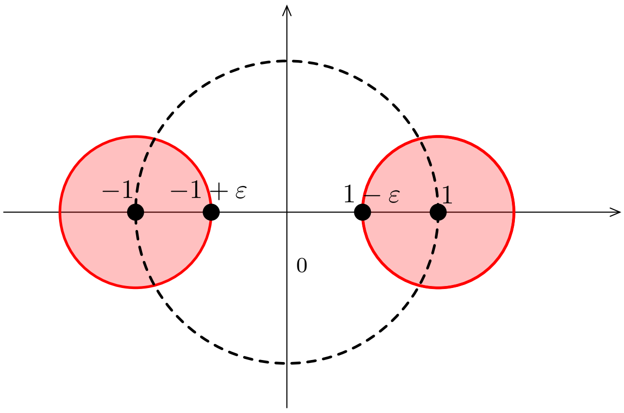
Dès lors, pour tous $q_1 \neq q_2$ supérieurs ou égaux à q_0, par inégalité triangulaire,

$$\left|z_{n_{p_{q_1}}} - z_{n_{p_{q_2}}}\right| = \left|z_{n_{p_{q_1}}} - L + Lz_{n_{p_{q_2}}}\right| \leq \left|z_{n_{p_{q_1}}} - L\right| + \left|L - z_{n_{p_{q_2}}}\right| \leq \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde.

Exercice 87 : ✪✪✪✪ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que ${z_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1}-z_n| \leq 1$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction : L'idée générale est très simple : puisque $({z_n}^2)$ converge vers 1, alors (z_n) n'a que deux valeurs d'adhérence, -1 et 1. Si (z_n) ne converge pas, alors (z_n) « voyagera » entre -1 et 1 donc se retrouvera pour n assez grand dans l'un des deux disques ci-dessous, ce qui ne sera pas possible car, pour passer de l'un à l'autre, il faut faire un saut de distance supérieure à 1 ce qui est exclu par l'hypothèse selon laquelle $|z_{n+1} - z_n| \leq 1$ pour tout n.



Montrons cela rigoureusement.

Supposons que (z_n) ne converge ni vers 1 ni vers -1. Dès lors :

$$\exists \varepsilon_1 > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, |u_n - 1| > \varepsilon_1$$

et

$$\exists \varepsilon_2 > 0, \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \geq p, |u_n + 1| > \varepsilon_2$$

Notons enfin $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1/3)$ (on prend $1/3$ pour que les deux disques ci-dessus soient suffisamment loin l'un de l'autre). Alors $0 < \varepsilon < 1/3$. Puisque ${z_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0, |{z_n}^2 - 1| \leq {\varepsilon_1}^2$. Soit $n \geq n_0$. Alors $|z_n - 1| \times |z_n + 1| \leq {\varepsilon_1}^2$: on en déduit que $|z_n - 1| \leq \varepsilon_1$ ou que $|z_n + 1| \leq \varepsilon_1$ (si ce n'est pas le cas, puisqu'on peut multiplier les inégalités positives, alors $|{z_n}^2 - 1| > {\varepsilon_1}^2$ ce qui est exclu). Ainsi, $|z_n - 1| \leq \varepsilon_1$ ou $|z_n + 1| \leq \varepsilon_1$ pour $n \geq n_0$: tous les termes de la suite sont dans l'un des deux disques ci-dessus (de rayon ε) à partir du rang n_0, mais d'après ce qui précède, il y a une infinité de termes en dehors du premier disque (c'est la ligne ci-dessus avec le ε_1), et une infinité en dehors du deuxième (c'est la ligne ci-dessus avec le ε_2). Par conséquent, à partir du rang n_0, tous les termes sont dans ces deux disques, avec une infinité de termes dans chaque.

Soit $p \geq n_0$. Supposons sans perte de généralité que z_p appartient au premier disque i.e. $|z_p - 1| \leq \varepsilon$. Il existe $n > p$ tel que z_n soit dans le deuxième disque. Prenons le premier, c'est-à-dire qu'on prend

$$N = \min\{n > p \,|\, |z_n + 1| < \varepsilon\}$$

Un tel N existe car l'ensemble ci-dessus est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Dès lors, $|z_N + 1| < \varepsilon$ et puisque $N - 1$ n'est pas dans cet ensemble, $|z_{N-1} - 1| < \varepsilon$ donc z_{N-1} est dans le premier disque. Cependant,

$$|z_N - z_{N-1}| \geq 2 - 2\varepsilon > 2 - 2/3 > 1$$

ce qui est absurde. La première inégalité ci-dessus est évidente sur le dessin, prouvons-la rigoureusement. z_N est dans le deuxième disque donc a une partie réelle inférieure à $-1 + \varepsilon$, sinon $|z_N + 1| \geq |\mathrm{Re}(z_N + 1)| > \varepsilon$, et idem $\mathrm{Re}(z_{N-1}) \geq 1 - \varepsilon$, donc $|z_N - z_{N-1}| \geq |\mathrm{Re}(z_N) - \mathrm{Re}(z_{N-1})| \geq 2 - 2\varepsilon$.

Exercice 88 : ✪✪

1. Étudier la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + \overline{z_n}}{2}$.
2. ✪✪✪✪ Même question avec la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{Re}(z_n)$ donc $z_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dès lors, pour tout $n \geq 1$, $z_{n+1} = z_n$: la suite est constante égale à $\mathrm{Re}(z_0)$ à partir du rang 1.
2. On veut écrire z_n sous forme exponentielle. Pour cela, il doit être nul. Si $z_0 = 0$ alors une récurrence immédiate assure que $z_n = 0$ pour tout n. Si z_0 est un réel négatif, alors $z_1 = 0$ et $z_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. On suppose donc que $z \notin \mathbb{R}_-$. Prouvons que $z_n \notin \mathbb{R}_-$ pour tout n.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $z_n \notin \mathbb{R}_-$ ».
- H_0 est vraie par hypothèse.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Dès lors, $z_n \notin \mathbb{R}_-$. Si z_n n'est pas réel, alors z_{n+1} non plus (il a une partie imaginaire non nulle), et si z_n est un réel strictement positif, z_{n+1} aussi donc H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

En particulier, $z_n \neq 0$ pour tout n : on peut l'écrire sous forme exponentielle. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe $\theta_n \in [\,0\,;2\pi\,[$ tel que $z_n = |z_n|e^{i\theta_n}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
|z_{n+1}|e^{i\theta_{n+1}} &= \frac{|z_n|e^{i\theta_n} + |z_n|}{2} \\
&= |z_n| \times \frac{e^{i\theta_n} + 1}{2} \\
&= |z_n| \times e^{i\theta_n/2} \times \frac{e^{i\theta_n/2} + e^{-i\theta_n/2}}{2} \\
&= |z_n| \times \cos(\theta_n/2) \times e^{i\theta_n}
\end{aligned}$$

Supposons que $\theta_0 \in \,]\,0\,;\pi\,[$. Alors, avec $n = 0$ ci-dessus, $\theta_0/2 \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$: le cosinus est positif donc $|z_1| = |z_0| \times \cos(\theta_0/2)$ et $\theta_1 \equiv \theta_0/2[2\pi]$ donc (ce sont des éléments de $[\,0\,;2\pi\,[$) $\theta_1 = \theta_0/2$. On prouve par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $\theta_n \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$ donc $\cos(\theta_n) > 0$ si bien que $|z_{n+1}| = |z_n| \times \cos(\theta_n/2)$ et $\theta_{n+1} = \theta_n/2$. On en déduit que la suite (θ_n) est géométrique de raison 2 : $\theta_n = \theta_0/2^n$ pour tout n. On en déduit que

$$|z_n| = |z_0| \times \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{\theta_0}{2^k}\right)$$

Supposons que $\theta_0 \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[$. Alors $\theta_1 \in \,]\,\pi/2\,;\pi\,[$ donc $\cos(\theta_2) < 0$ si bien que l'égalité devient :

$$|z_1|e^{i\theta_1} = (|z_0| \times -\cos(\theta_0/2)) \times e^{i(\theta_0/2+\pi)}$$

On en déduit que $|z_1| = -|z_0| \times \cos(\theta_0/2)$ et que $\theta_1 = \theta_0 + \pi$ (car congru modulo 2π et dans l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,[$) qui appartient à $]\,3\pi/2\,;2\pi\,[$ donc à $]\,\pi\,;2\pi\,[$. Ensuite, on recommence : on prouve par récurrence que, pour tout n, $\theta_n \in \,]\,\pi\,;2\pi\,[$ donc que $\cos(\theta_n/2) < 0$ si bien que

$$|z_{n+1}|e^{i\theta_{n+1}} = (|z_n| \times -\cos(\theta_n/2)) \times e^{i(\theta_n/2+\pi)}$$

On en déduit que $|z_{n+1}| = -|z_n| \times \cos(\theta_n/2)$ et que $\theta_{n+1} = \theta_n/2 + \pi$. On a une suite arithmético-géométrique : on trouve comme d'habitude que, pour tout n,

$$\theta_n = \frac{1}{2^n}(\theta_0 - 2\pi) + 2\pi$$

On en déduit que

$$|z_n| = \prod_{k=0}^{n-1} \cos(\theta_k)$$

ce qui permet de conclure.

Chapitre 13

Limites et continuité

Vrai ou Faux ?

1. $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. $\dfrac{1}{x}\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3. $\dfrac{1}{x}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
5. Si $\exp \circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
6. Si $\ln \circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
7. Le produit d'une fonction qui tend vers 0 en a et d'une fonction bornée tend vers 0 en a.
8. Une fonction monotone admet une limite en tout point intérieur à son domaine de définition.
9. Si $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
10. Une fonction f strictement monotone réalise une bijection entre un intervalle I et $f(I)$.
11. Si f est continue alors $|f|$ est continue.
12. Si $|f|$ est continue alors f est continue.
13. Si $f(x_0+h) - f(x_0-h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et si f est définie en x_0 alors f est continue en x_0.
14. Si f et g sont discontinues en x_0 alors $f+g$ l'est également.
15. Une fonction définie sur un segment est bornée sur ce segment.
16. Une fonction continue est bornée.
17. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ni majorée ni minorée est surjective.
18. L'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
19. La fonction Arctan est uniformément continue.
20. Une fonction uniformément continue est bornée.
21. Une fonction bornée est uniformément continue.
22. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
23. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est uniformément continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
24. Une fonction monotone sur un segment est bornée sur ce segment.
25. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur I. Alors f est bornée sur I.
26. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est bornée sur I.
27. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est constante.
28. Une fonction bornée qui atteint ses bornes sur un segment est continue.
29. Si f est croissante majorée sur $]\,a\,;b\,[$ alors f admet une limite finie en a et b.
30. Soient f et g continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.
31. ✪✪ Soient f et g continues de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $f(x) > g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} f(x) > \sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} g(x)$.
32. ✪✪ Si $f\left(a + \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors f admet une limite à droite en a égale à L.

13.1 Limites

Exercice 1 : ✪ Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+2|x|}{x}$

Correction :

1. Soit $x\,]-\pi/4\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;\pi/4\,[$ (ou $x \not\equiv 0[\pi/4]$) pour que le dénominateur soit non nul.

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} = \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{2x}{4x} \times \frac{4x}{\sin(4x)}$$

Or, $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\frac{\ln(1+2x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

De même :

$$\frac{\sin(4x)}{4x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc

$$\frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}$$

2. Soit $x>0$. Alors

$$\frac{x+2|x|}{x} = \frac{x+2x}{x} = 3 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 3$$

Soit $x<0$. Alors :

$$\frac{x+2|x|}{x} = \frac{x-2x}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{x+2|x|}{x}$ admet des limites à gauche et à droite distinctes en 0 donc n'a pas de limite en 0. La limite recherchée n'existe pas.

Exercice 2 : ✪ Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$.

Correction : Soit $x \geq 1$. Alors $x^2 - 1 < \lfloor x^2 \rfloor \leq x^2$ donc, en multipliant par -1 et par croissance de la racine carrée :

$$x - \sqrt{x^2} = 0 \leq f(x) \leq x - \sqrt{x^2-1}$$

Or, avec la méthode de l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\times\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x^2-\sqrt{x^2-1}^{\,2}}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 3 : ✪ Étudier l'existence, et calculer le cas échéant, les limites des fonctions suivantes au point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ indiqué :

1. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
2. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
3. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
4. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
5. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en 0.
6. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en $+\infty$.
7. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en 0.
8. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en $+\infty$.
9. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ en $+\infty$

Correction :

1. Pour tout n, on pose
$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$$
Alors (on note f la fonction à chaque fois) $f(u_n) = \sin(2n\pi) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ tandis que $f(v_n) = \sin(\pi/2) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: on a exhibé deux suites (u_n) et (v_n) de limite nulle telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites distinctes : on en déduit que f n'a pas de limite en 0.
2. Pour tout n, on pose $u_n = n\pi$ et $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$. Alors $f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $f(v_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure de la même façon.
3. Pour tout $x \neq 0$, $-|x| \leq f(x) \leq |x|$ (attention de ne pas encadrer par x et $-x$ car cela dépend du signe de x) donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. f n'a pas de limite en 0 : il suffit de poser, pour tout n, $u_n = n\pi$ et donc $f(u_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ si bien que $f(v_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et on conclut comme précédemment.
5. Tend vers 0 par continuité (ou composition de limites).
6. Pas de limite : poser $u_n = \sqrt{n\pi}$ et $v_n = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$.
7. Tend vers 0.
8. Pas de limite : poser $u_n = (n\pi)^2$ et $v_n = \left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)^2$.
9. Pas de limite : poser $u_n = n$ et $v_n = n + \dfrac{1}{2}$.

Exercice 4 : ✪ Notons $\sin^1 = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{n+1} = \sin \circ \sin^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^n(x)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction : Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette limite vaut 1. Pour $n = 1$, cela découle du cours puisque
$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il reste vrai au rang $n+1$. On a :
$$\begin{aligned} \frac{\sin^{n+1}(x)}{x} &= \frac{\sin(\sin^n(x))}{x} \\ &= \frac{\sin(\sin^n(x))}{\sin^n(x)} \times \frac{\sin^n(x)}{x} \end{aligned}$$
Par hypothèse de récurrence,
$$\frac{\sin^n(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
Par une récurrence immédiate, $u = \sin^n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (attention, la notation puissance désigne la composition, pas la multiplication ! On ne peut donc pas dire que $\sin^n(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0^n = 0$, on est obligé de faire une récurrence) et on a toujours
$$\frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$$
si bien que
$$\frac{\sin(\sin^n(x))}{\sin^n(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 5 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Correction : Supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit périodique (notons $T > 0$ une période) et admet une limite finie ℓ en $+\infty$. Nous allons montrer que f est constante (égale à ℓ). Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas constante : il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq \ell$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. Considérons $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_0 + nT > B$. On a alors

$$|f(x_0) - \ell| = |f(x_0 + nT) - \ell| \leq \varepsilon.$$

C'est absurde si on prend $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0) - \ell|}{2} > 0$. Nous en déduisons que f est constante égale à ℓ.

Montrons qu'une fonction périodique ne peut pas admettre de limite infinie en $+\infty$. Supposons par l'absurde que f soit T-périodique (avec $T > 0$) et tende vers $+\infty$ en $+\infty$ (raisonnement analogue si f tend vers $-\infty$). Soit $A = |f(0)| + 1$. Il existe $B \geq 0$ tel que, pour tout $x \geq B$, $f(x) \geq B$. Soit n tel que $nT \geq A$. Alors $f(nT) \geq |f(0)| + 1 > |f(0)| \geq f(0)$ mais $f(nT) = f(0)$ ce qui est absurde.

Exercice 6 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ si et seulement si $f(\sin(x)) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$?

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. f étant positive, $f(x) \leq f(x) + 1/f(x)$ et puisque $f(x) + 1/f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2$, cette quantité est inférieure à 3 au voisinage de 0. Par conséquent, $f(x) \leq 3$ au voisinage de 0. Dès lors
$$f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
et en multipliant par $f(x)$ borné (toujours au voisinage de 0) :
$$f(x)^2 + 1 - 2f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
En effet (cf. cours), le produit d'une fonction qui tend vers 0 par une fonction bornée tend encore vers 0. En d'autres termes, $(f(x) - 1)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Par continuité de la racine carrée,
$$\sqrt{(f(x) - 1)^2} = |f(x) - 1| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
ce qui permet de conclure.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ alors, par composition de limites puisque $\sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, on a : $f(\sin(x)) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Réciproquement, supposons que $f(\sin(x)) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. L'idée est qu'au voisinage de 0, sin admet une bijection réciproque : Arcsin. Plus précisément, par continuité de l'Arcsin,
$$u = \operatorname{Arcsin}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \operatorname{Arcsin}(0) = 0$$
et $f(\sin(u)) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$. Par composition de limites, $f(\sin(\operatorname{Arcsin}(x))) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, et on conclut en disant qu'au voisinage de 0 (plus précisément, sur $[-1\,;1]$), $\sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x$.
3. Non, pas forcément. Prenons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$f(x) = \sin(\pi/x)$$
Alors, pour tout $x > 0$,
$$f\left(\frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) = \sin(\pi \lfloor 1/x \rfloor)0$$
car est l'image du sinus en un multiple entier de π donc
$$f\left(\frac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$
mais on montre comme dans l'exercice 3 que f n'a pas de limite en 0.

Exercice 7 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une limite en 0 telle que $f(x) \times f(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. À l'aide de l'indicatrice de l'ensemble des inverses des entiers impairs, montrer que ce résultat est faux si on ne suppose pas que f admet une limite en 0.

Correction :

1. Notons L la limite de f en 0 (qui existe par hypothèse). Puisque $2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, par composition, $f(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} L$ donc $f(x) \times f(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} L^2$. Par unicité de la limite, $L^2 = 0$ donc $L = 0$.
2. Prenons donc f la fonction qui vaut 1 en x s'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 1/(2n+1)$, et 0 sinon. Alors f n'a pas de limite en 0 donc ne tend pas vers 0 (prendre $u_n = 1/2n$ et $v_n = 1/(2n+1)$). Cependant, pour tout x, soit x n'est pas de la forme $1/(2n+1)$, et alors $f(x) = 0$, soit x est de la forme $1/(2n+1)$ donc $2x$ n'est pas de cette forme donc $f(2x) = 0$. On en déduit que $f(x) \times f(2x) = 0$ pour tout x donc $f(x) \times f(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: on voit que le résultat de la question précédente n'est plus vrai.

Exercice 8 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs. Étudier les limites éventuelles en 0 des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{x}{a} \times \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \qquad g : x \mapsto \frac{b}{x} \times \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$$

Correction : Soit $x > 0$. Alors

$$\frac{b}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x}$$

En multipliant par $x/a > 0$, il vient :

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} < f(x) \leq \frac{b}{a}$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ (limite à droite car on a pris $x > 0$). De même, on prend $x < 0$, on n'oublie pas de changer le sens de l'inégalité en multipliant par $x/a < 0$ et on trouve que la limite à gauche est nulle : f n'est pas définie en 0, admet une limite à gauche et une limite à droite nulles en 0 donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Pour g, ce n'est pas la même chanson : si on essaye de faire la même chose, alors pour tout $x > 0$, on obtient l'encadrement

$$\frac{b}{a} - \frac{b}{x} < g(x) \leq \frac{b}{a}$$

Cet encadrement est juste, mais il ne permet pas de conclure puisque le membre de gauche tend vers $-\infty$ et le membre de droite vers b/a : on encadre par des quantités n'ayant pas la même limite et donc on ne peut pas appliquer le théorème d'encadrement. En fait, ici, l'encadrement de la partie entière ne va pas nous servir, ce qui se comprend assez bien : cet encadrement est utile lorsqu'on ne peut pas calculer explicitement la partie entière, mais ici, x/a est proche de 0, donc on peut calculer explicitement sa partie entière. On ne va donc pas encadrer g mais calculer g explicitement, ce qui nous permettra de calculer sa limite éventuelle. Si x tend vers 0^+, alors x/a aussi donc on a envie de dire que sa partie entière est nulle. Plus précisément, la partie entière de « truc » est nulle sur $[\,0\,;1\,[$: soit donc $x \in \,]\,0\,;a\,[$ (ouvert en 0 car x ne peut pas être nul) si bien que $x/a \in \,]\,0\,;1\,[$ donc $\lfloor x/a \rfloor = 0$ et donc $g(x) = 0 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. De même, soit $x \in [\,-a\,;0\,[$. Alors $x/a \in [\,-1\,;0\,[$ donc $\lfloor x/a \rfloor = -1$ si bien que

$$g(x) = -\frac{b}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$$

g admet des limites à gauche et à droites distinctes donc n'a pas de limite en 0.

Exercice 9 - Contre-exemple au lemme de Croft : ✪✪ On définit dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = \sqrt{2} + n \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
2. Écrire la propriété « $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ » avec des quantificateurs, ainsi que sa négation. En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $x > 0$.

(a) Montrer que la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus un terme non nul.
(b) En déduire la limite de cette suite.

Remarque : Le lemme de Croft est le résultat suivant :

« si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si pour tout $x>0, f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ »

Malgré son apparente simplicité, la démonstration (« Ah bon, il y a quelque-chose à montrer ? ») de ce lemme nécessite des outils assez sophistiqués, loin au-delà du programme des classes préparatoires. On a montré dans cet exercice que le résultat est faux si la fonction f n'est pas supposée continue, ce qui montre déjà que ce lemme n'est pas si simple que cela... Nous démontrerons ce résultat pour les fonctions uniformément continues dans l'exercice 84.

Correction :

1. f n'est pas continue car $f(\mathbb{R})=\{0;1\}$ qui n'est pas un intervalle (si f était continue, l'image d'un intervalle serait un intervalle d'après le TVI). De façon analogue, $f(0)=0$ et $f(\sqrt{2})=1$: si f est continue, d'après le TVI, il existe $x\in\left[\,0\,;\sqrt{2}\,\right]$ tel que $f(x)=1/2$ ce qui est absurde puisque f ne prend que les valeurs 0 et 1, donc f n'est pas continue. Vous avez l'embarras du choix !
2. La propriété « $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ » s'écrit :
$$\forall\varepsilon>0,\exists A\geq 0,\forall x\geq A,|f(x)|\leq\varepsilon$$
et sa négation :
$$\exists\varepsilon>0,\forall A\geq 0,\exists x\geq A,|f(x)|>\varepsilon$$
Posons $\varepsilon=1/2>0$. La suite $(\sqrt{2}+n)$ tend vers $+\infty$ donc, pour tout $A\geq 0$, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $\sqrt{2}+n\geq A$ donc il existe un élément $x\geq A$ tel que $f(x)=1>1/2=\varepsilon$: la fonction ne tend pas vers 0.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $u_n=n$ et $v_n=\sqrt{2}+n$. Les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers $+\infty$, mais les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ont des limites distinctes donc f n'a pas de limite en $+\infty$. En effet, la suite $(f(v_n))$ est constante égale à 1 donc converge vers 1. Prouvons que la suite $(f(u_n))$ est constante égale à 0, donc converge vers 0. Soit $p\in\mathbb{N}$. S'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $u_p=p=\sqrt{2}+n$ alors $\sqrt{2}=p-n\in\mathbb{Z}$ ce qui est absurde (même pas besoin d'utiliser son irrationnalité ici : $\sqrt{2}$ n'est pas un entier !). Dès lors, aucun terme de la suite (u_p) n'est égal à un $\sqrt{2}+n$ donc $f(u_p)=0$ pour tout p.
4. (a) Supposons que cette suite admette deux termes non nuls, c'est-à-dire qu'il existe $n_1\neq n_2$ tels que $f(n_1x)$ et $f(n_2x)$ soient non nuls. On en déduit qu'il existe k_1 et k_2 tels que $n_1x=\sqrt{2}+k_1$ et $n_2x=\sqrt{2}+k_2$. Or, n_1 et n_2 sont non nuls (car 0 n'est pas de la forme $\sqrt{2}+n$) donc
$$x=\frac{\sqrt{2}+k_1}{n_1}=\frac{\sqrt{2}+k_2}{n_2}$$
On en déduit que $n_2(\sqrt{2}+k_1)=n_1(\sqrt{2}+k_2)$ si bien que $\sqrt{2}(n_2-n_1)=n_1k_2-n_2k_1$ et puisque $n_2\neq n_1$, n_2-n_1 est non nul donc
$$\sqrt{2}=\frac{n_1k_2-n_2k_1}{n_2-n_1}\in\mathbb{Q}$$
ce qui est absurde : la suite a bien au plus un terme non nul.
(b) D'après la question précédente, soit la suite a tous ses termes nuls, donc est constante égale à 0, soit elle a un terme non nul, et donc est nulle à partir d'un certain rang, c'est-à-dire stationnaire égale à 0. Dans les deux cas, cette suite converge vers 0.

Exercice 10 : ✪✪✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Correction : L'idée est simple : si g n'est pas constante, il y a deux nombres qui ont une image différente, donc un qui a une image strictement plus petite que l'autre, et g est périodique donc il existe des nombres aussi grands qu'on veut prenant ces deux valeurs, et f tend vers 0 donc, pour x assez grand, $f(x)$ ne permet pas à la plus petite valeur de passer au-dessus de la plus grande valeur, ce qui est absurde puisque $f+g$ est croissante. Prouvons cela rigoureusement.

Raisonnons par l'absurde et supposons g non constante. Il existe donc x_1 et x_2 tels que $g(x_1)\neq g(x_2)$, et sans perte de généralité on peut supposer $g(x_1)<g(x_2)$. Notons $\varepsilon=\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{3}>0$. Puisque f tend vers 0 :

$$\exists A \geq 0, \forall x \geq A, |f(x) \leq \varepsilon$$

Soit $T > 0$ une période de g. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x_2 + nT) = g(x_2)$ et idem pour x_1. De plus, les deux suites $(x_1 + nT)$ et $(x_2 + nT)$ tendent vers $+\infty$: on choisit n_2 tel que $x_2 + n_2 T \geq A$ et n_1 tel que $x_1 + n_1 T \geq x_2 + n_2 T \geq A$. On a alors les résultat suivants :

- $f + g$ est croissante donc $(f+g)(x_2 + n_2 T) \leq (f+g)(x_1 + n_1 T)$.
- g étant T périodique, $g(x_2 + n_2 T) = g(x_2)$ et $g(x_1 + n_1 T) = g(x_1)$, si bien que

$$(f+g)(x_1 + n_1 T) - (f+g)(x_2 + n_2 T) = (g(x_1) - g(x_2)) + f(x_1 + n_1 T) - f(x_2 + n_2 T) \geq 0$$

- $x_1 + n_1 T$ et $x_2 + n_2 T$ sont supérieurs à A donc $|f(x_1 + n_1 T)| \leq \varepsilon$ et idem pour l'autre donc

$$(f+g)(x_1 + n_1 T) - (f+g)(x_2 + n_2 T) \leq (g(x_1) - g(x_2)) + 2\varepsilon = -\varepsilon < 0$$

puisque $g(x_1) - g(x_2) = -3\varepsilon$, ce qui est donc absurde.

Exercice 11 : ✪✪✪ Soit f définie sur $I = [\,1\,;+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Donner la limite à gauche de f en p. f est-elle continue à gauche en p ?
2. Calculer les limites des suites $(f(u_n))$ dans les trois cas suivants :

(a) $u_n = n$. (b) $u_n = n + \dfrac{1}{2}$. (c) $u_n = n + \dfrac{3}{\ln n}$.

3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $a \in [\,0\,;1\,]$. Donner une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Correction :

1. Soit $x \in [\,p-1\,;p\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = p - 1$ si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lfloor x \rfloor \ln(x) - x \ln \lfloor x \rfloor} \\ &= e^{(p-1)\ln(x) - x\ln(p-1)} \end{aligned}$$

Or, la fonction ln et la fonction exponentielle sont continues donc $f(x) \xrightarrow[x\to p^-]{} e^{(p-1)\ln(p) - p\ln(p-1)} = \dfrac{p^{p-1}}{(p-1)^p}$. De plus, $f(p) = 1$ donc f n'est pas continue à gauche en p.

2. (a) La suite $(f(u_n))$ est constante égale à 1 donc converge vers 1.

(b) Soit $n \geq 1$. Alors $\lfloor u_n \rfloor = n$ si bien que

$$\begin{aligned} f(u_n) &= e^{n\ln\left(n+\frac{1}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln(n) + n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\times\ln(n)} \end{aligned}$$

On montre aisément que $n\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ (prendre un taux d'accroissements) donc

$$n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\times\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si bien que, par composition de limites, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(c) Puisque $\dfrac{3}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$, $\lfloor u_n \rfloor = n$ pour n assez grand, plus précisément (mais il n'est pas nécessaire de le préciser, ce qui précède suffit) dès que $\dfrac{3}{\ln(n)} < 1$ donc dès que $3 < \ln(n)$ donc dès que $n > e^3$, donc à partir du rang $n_0 = \lfloor e^3 \rfloor + 1$. Ainsi, pour n assez grand :

$$\begin{aligned} f(u_n) &= e^{n\ln\left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right)-\left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\ln(n)+n\left(1+\frac{3}{n\ln(n)}\right)-\left(n+\frac{3}{\ln(n)}\right)\ln(n)} \\ &= e^{n\left(1+\frac{3}{n\ln(n)}\right)-3} \end{aligned}$$

Idem, avec un taux d'accroissements, on montre que

$$n\ln\left(1+\frac{3}{\ln(n)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

si bien que, par continuité de l'exponentielle, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-3}$.

3. Non car on a trouvé dans la question précédente des suites (u_n) de limite $+\infty$ telles que les suites $(f(u_n))$ associées aient des limites distinctes.
4. Il faut bien comprendre que le -3 de la limite e^{-3} est le même 3 que dans $u_n = n + \dfrac{3}{\ln(n)}$: en mettant un 4 à la place, on aurait eu une limite égale à e^{-4} : on peut donc obtenir une suite qui converge vers n'importe quel réel de la forme e^{-A} donc tout réel de l'intervalle $]\,0\,;1\,]$. Plus précisément : si $a \in]\,0\,;1\,]$, posons (u_n) la suite de terme général

$$u_n = n + \frac{-\ln(a)}{\ln(n)}$$

Précisons que $\ln(a) \leq 0$. On montre exactement comme à la question 2.(c) que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(a)} = a$. Enfin, si $a = 0$, la suite de terme général $u_n = n + 1/2$ convient (cf. question 2.(b)).

Exercice 12 : ✪✪✪

1. Montrer que $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$ n'admet pas de limite finie en 0^+ si $\alpha \leq 0$ et $\beta < 0$.
2. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α, β) (α et β sont deux réels quelconques, pas forcément négatifs comme dans la question précédente) tels que f soit prolongeable par continuité en 0^+.

Correction :

1. Soient donc $\alpha \leq 0$ et $\beta > 0$. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$u_n = (n\pi)^{1/\beta} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{1/\beta}$$

Tout d'abord, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} f(u_n) &= (n\pi)^{\alpha/\beta}\sin(n\pi) \\ &= 0 \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha/\beta}\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{\alpha/\beta} \end{aligned}$$

quantité qui tend vers $+\infty$ si $\alpha < 0$ (car alors $\alpha/\beta > 0$) et qui est constante égale à 1 donc qui tend vers 1 si $\alpha = 0$. Or, $\beta < 0$ donc les deux suites (u_n) et (v_n) tendent vers 0^+ : on a deux suites (u_n) et (v_n) qui tendent vers 0^+ telles que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites distinctes : f n'a pas de limite en 0^+.
2. Soient α et β deux réels. Soit $x > 0$. Différencions les cas.

- Supposons que $\alpha > 0$. Alors $-x^\alpha \leq f(x) \leq x^\alpha$ et puisque $\alpha > 0$, alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
- Supposons que $\alpha = 0$. Si $\beta < 0$, alors f n'a pas de limite en 0^+ d'après la question précédente. Si $\beta = 0$, alors f est constante égale à $\sin(1)$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sin(1)$. Enfin, si $\beta > 0$, alors $x^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et le sinus est continu donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \sin(0) = 0$.
- Supposons enfin que $\alpha < 0$. Si $\beta < 0$, toujours d'après la question précédente, f n'a pas de limite en 0^+. Si $\beta = 0$, alors $f(x) = x^\alpha \sin(1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ (car $\sin(1) > 0$). Supposons enfin que $\beta > 0$. On a une forme indéterminée, mais on pense à un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} f(x) &= x^\alpha \times \frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \times x^\beta \\ &= x^{\alpha+\beta} \times \frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \end{aligned}$$

Or, $x^\beta \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc, par composition de limites,

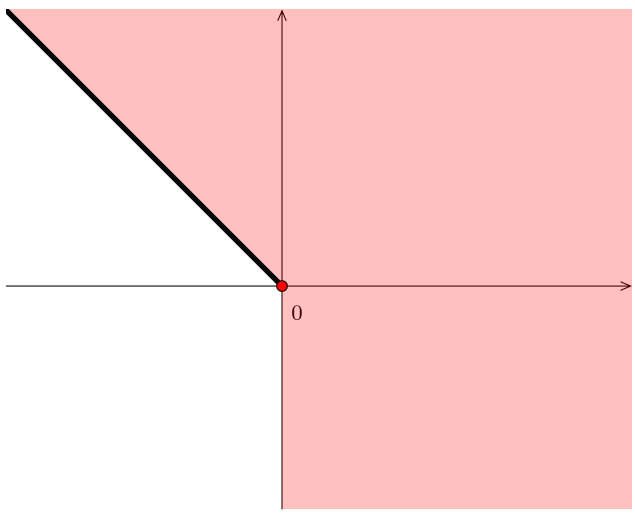
$$\frac{\sin(x^\beta)}{x^\beta} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

Finalement, f a une limite finie en 0 si et seulement si $x \mapsto x^{\alpha+\beta}$ en a une, si et seulement si $\alpha + \beta \geq 0$, si et seulement si $\beta \geq -\alpha$.

En conclusion, f admet une limite finie en (α, β) si et seulement si :

- $\alpha > 0$: géométriquement, c'est toute la partie du plan d'abscisse strictement positive, i.e. la partie du plan à droite de l'axe des ordonnées (au sens strict : l'axe n'en fait pas partie).
- $\alpha = 0$ et $\beta \geq 0$: géométriquement, c'est la partie supérieure (au sens large : 0 en fait partie) de l'axe des ordonnées.
- $\alpha < 0$ et $\beta \geq -\alpha$: géométriquement, c'est la partie du plan au-dessus (au sens large, la droite en fait partie) de la droite d'équation $y = -x$.

C'est donc la partie du plan coloriée ci-dessous. La partie inférieure de l'axe des ordonnées n'est pas dans l'ensemble.



13.2 Continuité :

Exercice 13 : ✪ Dire si les fonctions suivantes sont continues ou prolongeables par continuité en 0 :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$.
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Correction :

1. Non prolongeable par continuité en 0 puisque la limite à droite vaut 1 et la limite à gauche -1, elles sont distinctes donc f n'admet pas de limite en 0.

2. f n'est pas définie en 0. Cependant, $\pi/2 - x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \pi/2^-$ et $\tan(u) \xrightarrow[u\to\pi/2^-]{} +\infty$ donc, par composition de limites, $\tan(\pi/2 - x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. De même en 0^- donc f tend vers 0 en 0 car admet une limite à gauche et à droite égale à 0 en 0 : on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
3. f est définie en 0 : il faut regarder si la limite à gauche et à droite sont égales à $f(0) = 0$, ce qui est immédiat, donc f est continue en 0.
4. Idem, f est définie en 0 donc on se demande si la limite à gauche et à droite sont égales à $f(0) = -1$. Or, si $x > 0$, $f(x) = x\sin(1/x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (théorème d'encadrement) donc f a une limite à droite égale à 0 en 0 mais cette limite n'est pas égale à $f(0)$ donc f n'est pas continue à droite donc n'est pas continue en 0.

Exercice 14 : ✪ Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor}$
2. $x \mapsto \lfloor x\rfloor \sin(\pi x)$
3. $x \mapsto \lfloor x\rfloor \times x$
4. $x \mapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x - \lfloor x\rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$
5. ✪✪ $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
6. ✪✪ $x \mapsto S(x)$ (cf exercice 29 du chapitre 2)
7. ✪✪ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} - \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor}$

Correction : On notera toujours f la fonction étudiée.

1. Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \geq \lfloor x\rfloor$ si bien que $x - \lfloor x\rfloor \geq 0$: f est définie sur $\mathbb{R}$. la La racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la partie entière est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$: il en découle que f est continue sur (au moins) $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in [\,n\,;n+1\,[$. Alors $\lfloor x\rfloor = n$ si bien que
$$f(x) = n + \sqrt{x - n} \xrightarrow[x\to n^+]{} n + \sqrt{n - n} = n = f(n)$$
En d'autres termes, f est continue à droite en n. De même, soit $x \in [\,n-1\,;n\,[$. Alors $\lfloor x\rfloor = n - 1$ si bien que
$$f(x) = n - 1 + \sqrt{x - (n-1)} \xrightarrow[x\to n^-]{} n - 1 + \sqrt{n - (n-1)} = n - 1 + 1 = n = f(n)$$
f est continue à gauche en n donc continue en n : f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Idem, f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Par produit, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et continue à droite sur $\mathbb{R}$ (rappelons qu'une composée de fonctions continues à droite n'est pas forcément continue à droite, mais ça marche avec la somme, le produit, le quotient). Soit $n \in \mathbb{Z}$: f est donc continue en n si et seulement si f est continue à gauche en n. Soit $x \in \,]\,n-1\,;n\,]$. Alors
$$f(x) = (n-1)x \xrightarrow[x\to n^-]{} (n-1)n = n^2 - n$$
Or, $f(n) = n^2$. Par conséquent, si $n \neq 0$, alors la limite à gauche de f n'est pas égale à $f(n)$ donc f n'est pas continue à gauche en n donc n'est pas continue en n, et si $n = 0$, alors la limite à gauche en n est égale à $f(n)$ donc f est continue à gauche en n donc est continue en n puisqu'elle est continue à droite. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^*$.
4. Idem, f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \neq 0$. La partie entière étant continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, cherchons quand $1/x \in \mathbb{Z}$. C'est le cas lorsque x est l'inverse d'un entier. Introduisons donc l'ensemble
$$A = \left\{\frac{1}{n}\,|\, n \in \mathbb{Z}^*\right\}$$
des inverses des entiers (non nuls). Par exemple, A contient les réels $1, -1, 1/2, -1/2, 1/3, -1/3$ etc. Supposons que $x \notin A$ (toujours avec x non nul). Alors la fonction inverse est continue en x et la partie entière est continue en $1/x$ (car $1/x \notin \mathbb{Z}$). Par composition, f est continue en x. Supposons à présent que $x \in A$: il existe donc $n \in \mathbb{Z}^*$ tel que $x = 1/n$. On veut utiliser que la partie entière n'est pas continue à gauche, mais la partie entière est décroissante donc « transforme la droite en gauche » : on se place donc à droite de $x = 1/n$. Soit $t \in \left]\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{1}{n-1}\right]$ (si $n \neq 1$, et soit $t > 1$ si $n = 1$). Alors $1/t \in [\,n-1\,;n\,[$ (que n soit égal à 1 ou non) donc $f(t) = n - 1 \xrightarrow[t\to x^+]{} n - 1 \neq f(x) = n$: f n'est pas continue à droite donc n'est pas continue en $x = 1/n$: f est continue exactement sur $\mathbb{R}^*\backslash A$ (et, cf. cours, cela donne un exemple de composée de fonctions continues à droite qui n'est pas continue à droite) i.e. f est discontinue en chaque inverse d'entier.

6. Rappelons que S est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$S(x) = x \times 10^{-\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor} = x \times e^{-\left\lfloor \frac{\ln(x)}{\ln(10)} \right\rfloor \times \ln(10)}$$

Soit donc $x > 0$. Notons $B = \{10^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des puissances de 10 (positives ou négatives), par exemple B contient $1, 10, 1/10, 100, 1/100$ etc. Si $x \notin B$ alors $\ln(x)/\ln(10) \notin \mathbb{Z}$: dès lors, la partie entière est continue en $\ln(x)/\ln(10)$ et le ln est continu en x donc, par composition, f est continue en x. Supposons à présent que $x \in B$: il existe donc $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 10^n$. Soit $t \in \left[10^{n-1}\,;10^n\right[= \left[10^{n-1}\,;x\right[$. Alors $\lfloor \ln(t)/\ln(10) \rfloor = n-1$ si bien que (rappelons que $x = 10^n$) :

$$f(t) = t \times 10^{-(n-1)} \xrightarrow[t \to x^-]{} 10^n \times 10^{-n+1} = 10 \neq f(x) = 1$$

f n'est pas continue à gauche donc n'est pas continue en x : f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \backslash B$, i.e. f est discontinue en chaque puissance de 10.

7. De même qu'à la question 1, f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (on exclut 0 à cause de la fonction inverse) et, de même qu'à la question 5, f est continue en tout $x \in \mathbb{R}^* \backslash A$ avec le même ensemble A, c'est-à-dire que f est continue en tout réel non nul qui n'est pas l'inverse d'un entier. On prouve de même que f est discontinue en tout point de A.

Exercice 15 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = f(-1) = 0$ et, pour tout $x \neq \pm 1$:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$$

Montrer que f est bien définie et étudier la continuité de f.

Correction : Soit $x \neq \pm 1$.

- Supposons que $|x| < 1$. Alors $|x|^2 < 1$ donc la suite géométrique de raison x^2 tend vers 0, c'est-à-dire que $x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. En d'autres termes, $f(x)$ est bien défini et vaut -1.
- Supposons que $|x| > 1$. Alors $|x|^{2n} = x^{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (on peut enlever la valeur absolue car la puissance est paire donc ce terme est positif). On a une forme indéterminée, mais il suffit de factoriser par le terme prépondérant, à savoir x^{2n} :

$$\frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1} = \frac{1 + \dfrac{1}{x^{2n}}}{1 - \dfrac{1}{x^{2n}}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

c'est-à-dire que $f(x)$ est bien défini et vaut 1.

En conclusion, $f(\pm 1) = 0$, f est constante égale à -1 sur $\left]-1\,;1\right[$ et constante égale à 1 sur $\left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$. f est donc continue sur $\mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$ et discontinue en ± 1 (car admet une limite à gauche et une limite à droite distinctes, et en plus distinctes de la valeur de f en ces points).

Exercice 16 : ✪✪ Soit f une fonction continue en 0 et en 1 telle que pour tout $x, f(x^2) = f(x)$.

1. Montrer que f est paire.
2. Soit $x \in \left[0\,;1\right[$. Montrer que la suite $\left(f\left(x^{2^n}\right)\right)$ est constante et donner sa valeur. En déduire que $f(x) = f(0)$.
3. Soit $x \geq 1$. Même question avec la suite $\left(f\left(x^{1/2^n}\right)\right)$, et en déduire que $f(x) = f(1)$.
4. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction : On se référera souvent à la propriété de f, qu'on appliquera à des quantités plus générales que x. Disons le clairement, pour tout truc$\in \mathbb{R}$, $f\left(\text{truc}^2\right) = f(\text{truc})$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant cela à $-x$, on obtient

$$\begin{aligned} f(-x) &= f((-x)^2) \\ &= f(x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est paire.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $u_n = f\left(x^{2^n}\right)$. En appliquant la propriété à truc $= x^{2^n}$, il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= f\left(\left(x^{2^n}\right)^2\right) \\ &= f\left(x^{2^n \times 2}\right) \\ &= f\left(x^{2^{n+1}}\right) \\ &= u_{n+1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que la suite est constante. D'une part, elle est constante égale à son premier terme $u_0 = f(x)$, et d'autre part, elle est égale à sa limite. Or,

$$x^{2^n} = e^{2^n \ln(x)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $2^n \ln(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car $\ln(x) < 0$ (on pouvait aussi dire que la suite de terme général x^{2^n} est extraite de la suite géométrique x^n donc converge aussi vers 0). f étant continue en 0, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. Par unicité de la limite, $f(0) = f(x)$.

3. Même chose, et on prouve de même que $f(x) = f(1)$.
4. La fonction f est donc constante égale à $f(0)$ sur $[\,0\,;1\,[$ et constante égale à 1 sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc la limite à droite en 1 est $f(1)$ et la limite à gauche est $f(0)$. f étant continue en 1, ces deux limites sont égales donc $f(0) = f(1)$: f est constante sur $\mathbb{R}_+$.
5. f est constante sur $\mathbb{R}$ puisque f est paire.

Exercice 17 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, f(x) = f(2x)$.

1. Montrer que la fonction f qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ vérifie cette condition.
2. On suppose de plus que f est continue en 0. Montrer que f est constante (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

Correction :

1. Le double d'un rationnel est un rationnel, et le double d'un irrationnel est un irrationnel (plus généralement, le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est un irrationnel). Dès lors, pour tout x, que x soit rationnel ou non, $f(x) = f(2x)$. La continuité de f en 0 de la question suivante est donc indispensable pour que f soit constante.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, on montre de même que ci-dessus que la suite de terme général

$$u_n = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

est constante (on obtient cette suite en divisant plusieurs fois par 2, puisque $f(x) = f(2x)$ donc, en pensant à truc, $f(x) = f(x/2)$, et on avait obtenu la suite de l'exercice précédent en mettant plusieurs fois au carré : on applique plusieurs fois l'opération laissant f invariante) donc converge vers son premier terme, $f(x)$, et vers sa limite, $f(0)$ car f est continue en 0 donc $f(x) = f(0)$ par unicité de la limite : f est constante.

13.3 Bornes atteintes

Exercice 18 : ✪ Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que : $\forall x \in [\,0\,;1\,], Cf(x) \leq g(x)$. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions définies sur un segment.

Correction : Notons $h = g/f$. Alors h est bien définie sur $[\,0\,;1\,]$ puisque f ne s'annule pas, continue car quotient de fonctions continues (celle au dénominateur ne s'annulant pas), et strictement positives car quotient de fonctions strictement positives. h étant une fonction continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes : notons $C = \min(h)$. Alors il existe x_0 tel que $C = h(x_0)$, et puisque h est à valeurs strictement positives, alors $C > 0$. Puisque $C = \min(h)$, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $h(x) = g(x)/f(x) \geq C$ et $f(x) > 0$ donc $g(x) \geq Cf(x)$. Ce n'est plus vrai si on ne suppose pas les fonctions définies sur un segment : il suffit de prendre g la fonction constante égale à $\pi/2$ et f l'Arctangente, sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 19 : ✪ Montrer qu'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Correction : Soit $T \neq 0$ une période de f. Alors f est continue sur le segment $[\,0\,;T\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Il existe $x_0 \in [\,0\,;T\,]$ tel que

$$f(x_0) = \max_{[\,0\,;T\,]} f$$

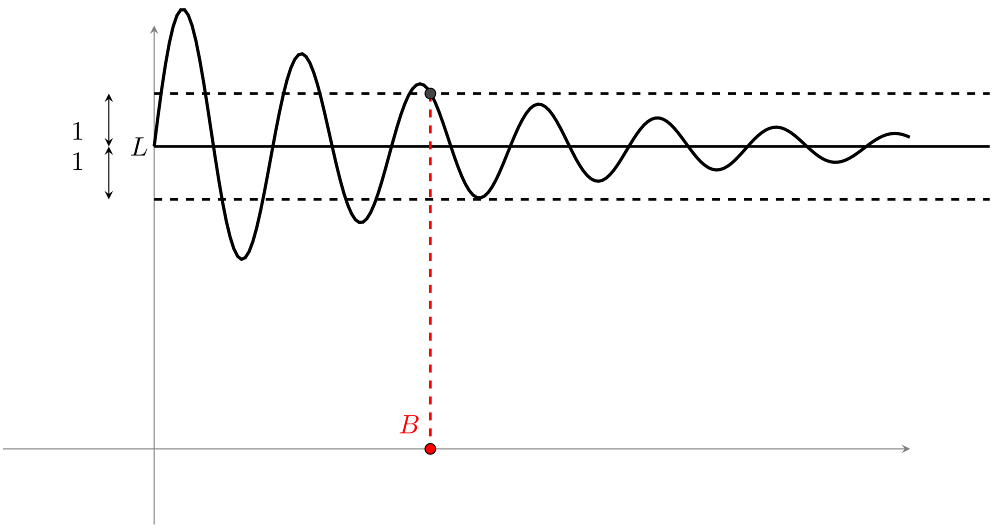
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe $y \in [\,0\,;T\,]$ (et même $[\,0\,;T\,[$) tel que $f(x) = f(y) \leq f(x_0)$. En d'autres termes, $f(x_0)$ est un majorant de f, donc f est majorée, et il est atteint (en x_0) donc f admet un maximum (atteint, par définition d'un maximum). De même, f est minorée et admet un minimum (qui est donc atteint).

Exercice 20 : ✪ Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et que g est continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Correction : La fonction f est bornée donc $f \circ g$ est bornée. Cependant, g n'est pas forcément bornée (par exemple, on peut avoir $g = \exp$ et $f = \sin$). Mais f étant bornée, elle admet une borne supérieure et une borne inférieure (pas forcément atteintes) notées respectivement M et m. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [\,m\,;M\,]$. Or, g est continue sur le segment $[\,m\,;M\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes mais ce ne sera pas utile ici) : il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tout $y \in [\,m\,;M\,]$, $A \leq g(y) \leq B$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $A \leq g(f(x)) \leq B$ car $y = f(x) \in [\,m\,;M\,]$. Ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 21 : ✪✪ Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée. On pourra commencer par faire un dessin. Atteint-elle ses bornes ?

Correction : Ce résultat est l'analogue du résultat sur les suites, qui dit qu'une suite convergente est bornée. Commençons par faire un dessin.



Notons L la limite de f en $+\infty$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$, alors il existe B tel que, pour tout $x \geq B$, $L-1 \leq f(x) \leq L+1$. Or, f est continue sur le segment $[\,0\,;B\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes mais cela ne nous servira pas ici) : il existe m et M tels que, pour tout $x \in [\,0\,;B\,]$, $m \leq f(x) \leq M$. Notons $\alpha = \min(m, L-1)$ et $\beta = \max(M, L+1)$. Alors f est bornée par α et β sur $\mathbb{R}_+$ donc est bornée. Les bornes ne sont pas forcément atteintes : par exemple, l'Arctangente est continue sur $\mathbb{R}_+$, admet une limite finie en $+\infty$ mais n'atteint pas sa borne supérieure. Par contre, on peut montrer que f atteint sa borne inférieure ou sa borne inférieure (exo).

Exercice 22 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la suite de terme général $u_n = \displaystyle\max_{0\leq k\leq n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Correction : Tout d'abord, la suite (u_n) est bien définie car, pour tout n, u_n est le maximum d'un nombre fini de termes. f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(x_0) = \max_{[\,0\,;1\,]} f$$

Montrons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$. Si $n \geq 1$, notons $x_n = \lfloor nx_0 \rfloor / n$. Alors x_n est un rationnel de la forme k/n donc $f(x_n) \leq u_n$ (car u_n est le max des $f(k/n)$) et $u_n \leq f(x_0)$ puisque u_n est le maximum de termes tous inférieurs à $f(x_0)$. En d'autres termes,

$$f(x_n) \leq u_n \leq f(x_0)$$

Or, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$ (cf. cours sur les suites) et f est continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$. D'après le théorème d'encadrement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) = \max f$.

Exercice 23 : ✪✪ Soit f une fonction continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que

$$\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x) = \sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$$

Correction : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes : d'où l'existence de $\displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$. De plus, pour tout $x \in \,]\,a\,;b\,[$,

$$f(x) \leq \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

Dès lors, f est majorée sur $]\,a\,;b\,[$. D'où l'existence de $\displaystyle\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$ et

$$\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x) \leq \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

Montrons l'inégalité inverse. Puisque $\displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$ est atteint, soit $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x_0) = \displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$. Il existe une suite (u_n) d'éléments de $]\,a\,;b\,[$ qui converge vers x_0 : en effet, si $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$, alors la suite constante égale à x_0 convient, si $x_0 = a$, alors la suite de terme général $x_0 + 1/n$ convient, et si $x_0 = b$, la suite de terme général $x_0 - 1/n$ convient. Pour tout n, $u_n \in \,]\,a\,;b\,[$ donc $f(u_n) \leq \displaystyle\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. f étant continue,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0) = \sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$$

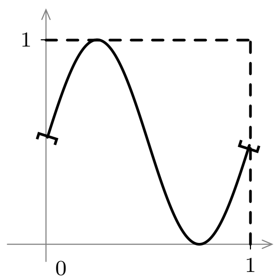
L'inégalité large passe à la limite donc $\displaystyle\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x) \leq \sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 24 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $]\,0\,;1\,[$?
- une surjection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathbb{R}$?
- une surjection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$?

Correction :

1. **Oui :** $\mathrm{Id}_{[\,0\,;1\,]}$ convient. La fonction carré (restreinte à $[\,0\,;1\,]$) convient également.
2. **Non :** Si une telle fonction f existe, alors $f([\,0\,;1\,]) = \,]\,0\,;1\,[$ car f est surjective. Or, f est continue et l'image d'un segment par une fonction continue est un segment : c'est absurde.
3. **Non :** Même chose, on ne peut pas avoir $f([\,0\,;1\,]) = \mathbb{R}$ si f est continue.
4. **Oui :** $\mathrm{Id}_{]\,0\,;1\,[}$ convient.
5. Oui : cf. exercice 30 du chapitre 5.
6. **Oui :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{1+\sin(2\pi x)}{2}$: je vous laisse donner son tableau de variations. Nous pouvons déduire de celui-ci que f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$. De plus, $f(1/4) = 1$ et $f(3/4) = 0$. f est continue donc, d'après le TVI, tous les éléments de f sont atteints par f. Puisque f n'atteint aucun réel en dehors de $[\,0\,;1\,]$, f est bien une surjection de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$.



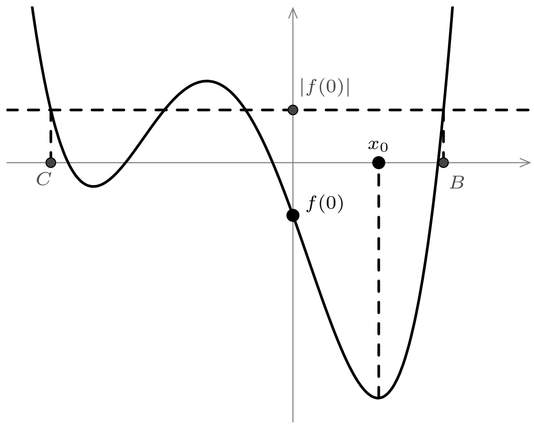
Exercice 25 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs : « f est minorée et atteint sa borne inférieure ».
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. On pourra (encore !) commencer par faire un dessin.

Correction :

1. $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$. En d'autres termes : f admet un minimum.
2. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$, il existe $B \geq 0$ et $C \leq 0$ tels que pour tout $x \in [\,B\,;+\infty\,[$, $f(x) \geq |f(0)|$ et pour tout $x \in \,]-\infty\,;C\,]$, $f(x) \geq |f(0)|$. Or, f est continue sur le segment $[\,C\,;B\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Plus précisément, elle atteint sa borne inférieure : il existe $x_0 \in [\,C\,;B\,]$ tel que, pour tout $x \in [\,C\,;B\,]$, $f(x) \geq f(x_0)$. Finalement, si $x \in \mathbb{R}$, soit $x \in [\,C\,;B\,]$, et alors $f(x) \geq f(x_0)$, soit

$x \notin [\,C\,;B\,]$, et alors



$$f(x) \geq |f(0)| \geq f(0) \geq f(x_0).$$

En effet, $0 \in [\,C\,;B\,]$ donc $f(0) \geq f(x_0)$. Finalement, f admet bien un minimum atteint en x_0 (voir ci-contre).

Exercice 26 - Version continue du théorème de Cesàro : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(t+1) - f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Si $x \in \mathbb{R}$, on pourra s'intéresser à la somme

$$f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right)$$

où on rappelle que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ est la partie fractionnaire de x.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a une somme télescopique donc

$$f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) = f(\{x\}) + f(\lfloor x \rfloor + \{x\}) - f(\{x\}) = f(x)$$

puisque $\lfloor x \rfloor + \{x\} = x$. Puisque $f(t+1) - f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, $f(k+\{x\}+1) - f(k+\{x\}) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. D'après le (vrai) théorème de Cesàro,

$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, si $x \geq 1$ (pour avoir $\lfloor x \rfloor > 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{1}{x} \times \left(f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \right) \\ &= \frac{f(\{x\})}{x} + \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \times \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \end{aligned}$$

D'après ce qui précède,

$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

De plus, $\lfloor x \rfloor / x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ (encadrer $\lfloor x \rfloor$ par $x-1$ et x). Enfin, f étant continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, elle est bornée (et atteint ses bornes mais cela ne nous sera pas utile ici) sur ce segment : il existe m et M tels que, pour tout $u \in [\,0\,;1\,], m \leq f(u) \leq M$. Puisque $\{x\} \in [\,0\,;1\,]$ (et même $[\,0\,;1\,[$), $m \leq f(\{x\}) \leq M$ donc

$$\frac{m}{x} \leq \frac{f(\{x\})}{x} \leq \frac{M}{x}$$

Par conséquent, d'après le théorème d'encadrement, $f(\{x\})/x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Le résultat découle alors, par somme et produit de limites, de l'expression de $f(x)/x$ donnée ci-dessus.

13.4 Continuité et densité

Exercice 27 : ✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue.

Correction : La fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ -1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

convient. En effet, $|f|$ est la fonction constante égale à 1 donc est continue, mais $|f|$ est discontinue en tout point. Soit $a \in \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, a est limite d'une suite de rationnels (x_n) et d'une suite d'irrationnels y_n. Dès lors, pour tout n, $f(x_n) = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ et $f(y_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Si f est continue en a alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$ donc, par unicité de la limite, $f(a) = -1$ mais on trouve de même avec $(f(y_n))$ que $f(a) = 1$ ce qui est absurde : f est bien discontinue en tout point.

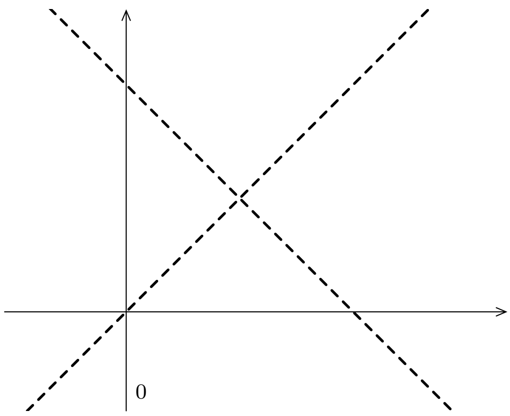
Exercice 28 : ✪ Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si B est dense dans A alors $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité ?

Correction : Soient $a < b$ deux éléments de $f(A)$ (si $f(A)$ est un singleton alors $f(B) = f(A)$ donc le résultat est immédiat). Soit $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Notons x et y respectivement un antécédent de a et un antécédent de b par f. f est continue donc, d'après le TVI, il existe $z \in \,]\,x\,;y\,[$ tel que $f(z) = c$. B étant dense dans A, il existe (z_n) une suite d'éléments de B qui converge vers z. Or, f est continue donc $f(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(z) = c$, si bien que $f(z_n) \in \,]\,a\,;b\,[$ pour n assez grand. En particulier, un élément de $f(B)$ dans l'intervalle $]\,a\,;b\,[$: $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Le résultat est faux sans l'hypothèse de continuité : par exemple, si $A = \mathbb{R}$, si f est l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{Q}$. Alors $f(A) = \{0; 1\}$, B est dense dans A mais $f(B) = \{1\}$ n'est pas dense dans $f(A)$: il n'existe aucun élément de $f(B)$ dans l'intervalle $]-1/2\,;1/2\,[$, ou (ce qui revient au même), il n'existe pas de suite d'éléments de $f(B)$ qui converge vers 0.

Exercice 29 : ✪✪ Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Correction : Prouvons que f est uniquement continue en $1/2$ (là où $x = 1 - x$), ce qui se voit bien sur un dessin (où on a un peu forcé le trait, hein) :



Soit $x \neq 1/2$. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ étant denses dans $\mathbb{R}$, x est limite d'une suite de rationnels (x_n) et limite d'une suite d'irrationnels (y_n). Si f est continue en x, alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or, pour tout x, $f(x_n) = 1 - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - x$ et $f(y_n) = y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ donc, par unicité de la limite, $f(x) = 1 - x$ et $f(x) = x$ donc $x = 1/2$ ce qui est absurde : f est discontinue en tout réel $x \neq 1/2$.

Montrons à présent que f est continue en $1/2$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon$. Soit enfin $x \in [\,1/2 - \eta\,; 1/2 + \eta\,]$ i.e. tel que $|x - 1/2| \leq \eta$. Si x est irrationnel, alors $f(x) = x$ donc $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| \leq \eta = \varepsilon$. Si x est rationnel, alors $f(x) = 1 - x$ donc $|f(x) - f(1/2) = |1 - x - 1/2| = |1/2 - x| \leq \eta = \varepsilon$. Dans tous les cas, $|f(x) - f(1/2)| \leq \varepsilon$: f est continue en 0. Oui, une fonction continue en un seul point, ça existe !

Exercice 30 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que :

$$\forall (x, y) \in [\,0\,;1\,]^2, \qquad f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

Que dire de f ?

Correction : Montrons que f est la fonction nulle. Montrons tout d'abord que f est nulle en tout nombre dyadique i.e. en tout nombre de la forme $k/2^n$ avec $0 \leq k \leq 2^n$ (puisqu'on travaille sur $[\,0\,;1\,]$). Puisque $f(0) = f(1) = 0$ alors (avec $x = 0$ et $y = 1$), on obtient $f(1/2) = 0$. De même, avec $x = 0$ et $y = 1/2$, on trouve que $f(1/4) = 0$ puis, avec $x = 1/2$ et $y = 1$, il vient : $f(3/4) = 0$. On pourrait dire « par récurrence immédiate », mais je ne suis pas sûr que tout le monde la trouve immédiate, alors rédigeons-la...

- si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k \in [\![\,0\,;\,2^n\,]\!], f(k/2^n) = 0$ ».
- D'après ce qui précède, H_0, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc $k \in [\![\,0\,;\,2^{n+1}\,]\!]$. Si k est pair, alors il existe k' tel que $k = 2k'$ si bien que $k/2^{n+1} = k'/2^n$ donc, par hypothèse de récurrence,
$$f\left(\frac{k}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k'}{2^n}\right) = 0$$
Si k est impair, il suffit de voir que $k-1$ et $k+1$ sont pairs donc, d'après ce qui précède,
$$f\left(\frac{k+1}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{k-1}{2^{n+1}}\right) = 0$$
Dès lors, puisque
$$\frac{\dfrac{k-1}{2^{n+1}} + \dfrac{k+1}{2^{n+1}}}{2} = \frac{k}{2^{n+1}}$$
on en déduit que $f(k/2^{n+1}) = 0$, ce qui clôt la récurrence.

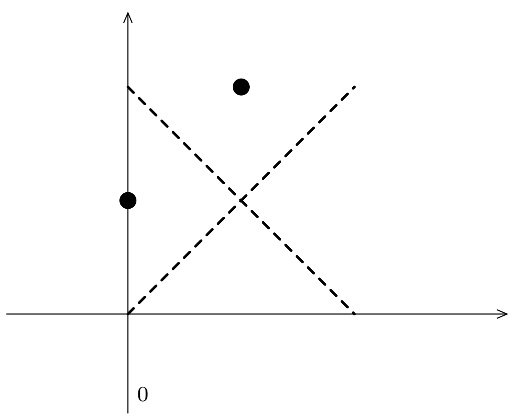
f étant nulle sur l'ensemble des nombres dyadiques, qui est dense dans $[\,0\,;1\,]$, et continue, alors elle est nulle sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 31 : ✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :
$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$
Montrer que f est continue 0 et discontinue en tout autre point.

Correction : analogue à l'exercice 29.

Exercice 32 : ✪✪ Construire une bijection de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Correction : On pense à poser $f(x) = x$ si x est rationnel et $1 - x$ sinon, mais le problème est que cette fonction est continue en $1/2$. Il suffit d'échanger $1/2$ avec un autre réel : définissons sur $[\,0\,;1\,]$ la fonction f par :
$$f : x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q},\ x \neq 1/2 \text{ et } x \neq 0 \\ 1/2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1/2 \end{cases}$$



Montrons que f est bijective et discontinue en tout point (il est donc hors de question d'appliquer le théorème de la bijection).

- Montrons que f est injective. Soient $x_1 \neq x_2$ deux éléments de $[\,0\,;1\,]$. Si x_1 est rationnel et x_2 irrationnel, alors $f(x_2) = x_2$ est irrationnel, et $f(x_1) = 1 - x_1$ ou $1/2$ ou 0 donc est rationnel si bien que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si x_1 et x_2 sont irrationnels, alors $f(x_1) = x_1$ et $f(x_2) = x_2$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$. Supposons à présent que x_1 et x_2 soient rationnels. S'ils sont tous les deux différents de 0 et de $1/2$ alors on obtient $f(x_1) \neq f(x_2)$ de la même façon. Supposons que $x_1 \neq 0, 1/2$ et $x_2 = 0$. Alors $f(x_1) = 1 - x_1$ et $f(x_2) = 1/2$ donc $f(x_1) \neq f(x_2)$ puisque $x_2 \neq 1/2$. On traite les autres cas de la même façon ($x_1 \neq 0, 1/2$ et $x_2 = 1/2$, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1/2$) : dans tous les cas, $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f est injective.
- Soit $y \in [\,0\,;1\,]$. Si $y = 1$ alors $1/2$ est un antécédent. Si $y = 1/2$ alors 0 est un antécédent. Supposons donc que $y \neq 1$ et $1/2$. Si y est un irrationnel alors $f(y) = y$: y est un antécédent de y. Enfin, si y est un rationnel (différent de 1 et de $1/2$) alors $1 - y$ est rationnel différent de $1/2$ et de 0 donc $f(1-y) = 1 - (1-y) = y$: $1 - y$ est un antécédent de y. Dans tous les cas, y admet un antécédent, f est surjective.
- Si $x \neq 0$ et $x \neq 1/2$, on montre de même que dans l'exercice 29 que f est discontinue en x. $f(0) = 1/2$ et, si $n \geq 3$, $f(1/n) = 1 - 1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0. On montre de même que f n'est pas continue en $1/2$.

Exercice 33 - Fonction de Thomae : ✪✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et si } \dfrac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de } x \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. On pourra utiliser l'exercice 77 du chapitre 12.

Remarque : On peut montrer qu'il n'existe aucune fonction continue en tout point rationnel et discontinue en tout point irrationnel.

Correction : Soit $x \in \mathbb{Q}$, qu'on écrit sous forme irréductible $x = p/q$, et donc $f(x) = 1/q \neq 0$. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc x est limite d'une suite d'irrationnels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x_n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \neq f(x)$$

c'est-à-dire que f n'est pas continue en x : f est donc discontinue en tout rationnel. Soit à présent $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et prouvons que f est continue en x. Utilisons la caractérisation séquentielle de la limite : montrons que pour toute suite (x_n) qui converge vers x, on a $f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ ce qui permettra de conclure. Soit donc une suite (x_n) qui converge vers x. Deux cas de figure : soit la suite ne contient que des irrationnels à partir d'un certain rang, soit la suite contient une infinité de termes rationnels.

- Le cas où (x_n) est composée uniquement d'irrationnels à partir d'un certain rang est le plus simple : dans ce cas, $f(x_n) = 0$ à partir d'un certain rang, donc converge vers $0 = f(x)$.
- Supposons que la suite contienne une infinité de termes rationnels. Soit v_n la suite extraite formée des termes rationnels (qui converge donc vers x car suite extraite d'une suite qui converge vers x). En écrivant $v_n = p_n/q_n$ sous forme irréductible, on a donc $f(v_n) = 1/q_n$. Or, x étant irrationnel, d'après l'exercice 77 du chapitre 12, $|q_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ (les dénominateurs d'une suite de rationnels qui converge vers un irrationnel tendent vers $+\infty$ en valeur absolue) si bien que $f(v_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f(x)$. La suite $(f(v_n))$ converge donc vers $0 = f(x)$: pour tout $\varepsilon > 0$, $|f(v_n)| \leq \varepsilon$ pour n assez grand, c'est-à-dire que les images des termes rationnels sont dans $[\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ pour n assez grand, et toutes les valeurs des irrationnels sont aussi dans cet intervalle (car ces valeurs sont nulles). L'intervalle $[\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$ contient tous les termes de la suite $(f(x_n))$ pour n assez grand (toutes les valeurs pour les x_n irrationnels, et toutes les valeurs pour n assez grand pour les x_n rationnels) donc $(f(x_n))$ converge bien vers $f(x)$ ce qui permet de conclure.

13.5 Théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 34 : ✪ Une bonne fois pour toutes, montrer qu'une fonction qui est continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas est de signe constant. C'est compris ?

Correction : cf. chapitre 1.

Exercice 35 : ✪ Reprendre l'exercice 34.

Exercice 36 : ✪

1. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs ?
2. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue ?
3. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ continue ?
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$? On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto f(x) + x$.

Correction :

1. Il était sous-entendu que la fonction était définie sur $\mathbb{R}$ (ou, tout du moins sur un intervalle). D'après le TVI, $f(\mathbb{R})$ est un intervalle donc est soit un singleton, soit un ensemble infini. Si elle prend un nombre fini de valeurs, alors son image est un singleton, c'est-à-dire qu'elle est constante.
2. Si f n'est pas constante, alors elle prend au moins deux valeurs entières (puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{Z}$) qu'on note n_1 et n_2. f étant continue, d'après le TVI, f prend toutes les valeurs entre n_1 et n_2 donc prend des valeurs non entières, ce qui est absurde. f est donc constante.
3. Montrons que f est constante. Si ce n'est pas le cas, f prend au moins deux valeurs rationnelles r_1 et r_2. f étant continue, d'après le TVI, f prend toutes les valeurs entre r_1 et r_2. Or, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $y \in \left]\, r_1 \,;r_2 \,\right[$. Dès lors, y est atteint par f, ce qui est absurde puisque f est à valeurs rationnelles. On en déduit que f est constante.
4. La fonction $g : x \mapsto f(x) + x$ est continue car somme de fonctions qui le sont. Or, par hypothèse, g est à valeurs dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$: en effet, que x soit rationnel ou non, $g(x) = f(x) + x$ est irrationnel car somme d'un rationnel et d'un irrationnel. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit comme dans la question précédente que g est constante.

Exercice 37 : ✪ Soit f continue sur le segment $[\,0\,;T\,]$ telle que $f(0) = f(T)$. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{T}{2}\right)$.

Correction : Soit g définie sur $[\,0\,;T/2\,]$ par :

$$g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{T}{2}\right)$$

Alors g est continue car somme et composée de fonctions qui le sont. De plus, $g(0) = f(0) - f(T/2)$ et $g(T/2) = f(T/2) - f(T)$. Or, $f(T) = f(0)$ si bien que $g(T) = f(T/2) - f(0) = -g(0)$. Par conséquent, $g(T)$ et $g(0)$ sont opposés donc de signes opposés donc, d'après le TVI, g s'annule sur $[\,0\,;T/2\,]$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 38 : ✪ Vrai ou Faux ?

1. Une fonction $f : [\,a\,;b\,] \to [\,a\,;b\,]$ (avec $a \leq b$) continue admet un point fixe.
2. Une fonction $f : [\,0\,;2\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue admet un point fixe.
3. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;2\,]$ continue admet un point fixe.
4. Une fonction $f : \left]\,0\,;1\,\right[\to \left]\,0\,;1\,\right[$ continue admet un point fixe.
5. Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue admet un point fixe.
6. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement croissante admet un unique point fixe.
7. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement décroissante admet un unique point fixe.

Correction : Je vous laisse faire un dessin dans chaque situation.

1. **Vrai :** Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors g est continue sur $[\,a\,;b\,]$ comme somme de fonctions qui le sont, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. D'après le TVI, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $g(x) = 0$ donc tel que $f(x) = x$: f admet un point fixe.
2. **Vrai :** On définit sur $[\,0\,;2\,]$ la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$. De même, g est continue, $g(0) \geq 0$ et $g(2) \leq 0$ car $f(2) \leq 1$ donc $f(2) - 2 \leq 0$. Ainsi, d'après le TVI, g s'annule donc f admet un point fixe.
3. **Faux :** La fonction constante égale à 2 n'a pas de point fixe sur $[\,0\,;1\,]$. On pouvait aussi prendre $f : x \mapsto x + 1$.
4. **Faux :** La fonction carré (définie sur $\left]\,0\,;1\,\right[$) n'a pas de point fixe.
5. **Faux :** La fonction $x \mapsto x + 1$ n'a pas de point fixe.
6. **Faux :** $\mathrm{Id}_{[\,0\,;1\,]}$ est strictement croissante et tout point est point fixe, il y en a donc une infinité.
7. **Vrai :** L'existence de ce point fixe a déjà été prouvée. De plus, $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante car somme de fonctions qui le sont, donc le point où g s'annule (dont on a déjà prouvé l'existence) est unique : f admet un unique point fixe.

Exercice 39 : ✪ Soit f une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Correction : Oui, le point fixe sera unique, même si f n'est pas strictement décroissante ! Je vous laisse vous en convaincre à l'aide d'un dessin : tracez une fonction constante (décroissante mais pas du tout strictement), et vous verrez qu'elle admet bien un unique point fixe. Prouvons ce résultat. La fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$ est la somme de deux fonctions décroissantes (f et $x \longmapsto -x$) dont l'une strictement ($x \longmapsto -x$) donc est strictement décroissante. De plus, g est continue car somme de fonctions qui le sont. Il ne reste plus qu'à calculer les limites en $\pm\infty$. La fonction f étant décroissante, elle tend soit vers $+\infty$, soit vers une limite finie (selon qu'elle est majorée ou non) en $-\infty$. Or, $-x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. Dans tous les cas, ce n'est pas une forme indéterminée : $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. De même, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. D'après le théorème de la bijection, il existe un unique x tel que $g(x) = 0$ donc tel que $f(x) = x$. Autrement dit f admet un unique point fixe.

Exercice 40 : ✪ Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

Montrer que f s'annule exactement $n - 1$ fois sur son ensemble de définition.

Correction : Tout d'abord, D_f est l'union disjointe des $n + 1$ intervalles ci-dessous :

$$D_f = \mathbb{R} \backslash \{a_1; \dots; a_n\} = \left]-\infty\,; a_1\right[\cup \left]a_1\,; a_2\right[\cup \cdots \cup \left]a_{n-1}\,; a_n\right[\cup \left]a_n\,; +\infty\right[.$$

La fonction f est dérivable (c'est une fonction rationnelle) sur D_f. Pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{-1}{(x - a_k)^2} < 0$. Attention, cela ne signifie pas que f soit strictement décroissante sur D_f ! En effet, D_f n'est pas un intervalle ! Cela signifie que f est strictement décroissante sur tout intervalle composant D_f. On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		a_1		a_2		$\cdots$		a_{n-1}		a_n		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$\cdots$		$\cdots$		$-$		$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$				$\Vert$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Calculons à présent les limites aux bornes des divers intervalles. Tout d'abord, $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ (nous laissons le lecteur compléter le tableau de variations ci-dessus au fur et à mesure). Il découle du tableau de variations que f ne s'annule pas sur $\left]-\infty\,; a_1\right[$ ni sur $\left]a_n\,; +\infty\right[$: inutile d'appliquer le TVI ici ! Il donne un résultat d'existence ! Ici, il est immédiat qu'une fonction strictement décroissante sur $\left]-\infty\,; a_1\right[$ qui tend vers 0 en $-\infty$ est strictement négative, et donc ne s'annule pas (au passage, il n'est donc pas nécessaire de calculer la limite à gauche en a_1), et idem sur $\left]a_n\,; +\infty\right[$. Soit $i \in [\![1\,; n-1]\!]$. Pour tout $x \in D_f$,

$$f(x) = \frac{1}{x - a_i} + \sum_{k \neq i} \frac{1}{x - a_k}.$$

Or, $x - a_i \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} 0^+$ donc $\dfrac{1}{x - a_i} \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} +\infty$, et $\displaystyle\sum_{k \neq i} \frac{1}{x - a_k} \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} \sum_{k \neq i} \frac{1}{a_i - a_k}$ qui est un réel : il n'y a donc pas de forme indéterminée, et $f(x) \xrightarrow[x \to {a_i}^+]{} +\infty$. De même, $f(x) \xrightarrow[x \to {a_{i+1}}^-]{} -\infty$. Comme f est continue strictement monotone sur $\left]a_i\,; a_{i+1}\right[$, d'après le théorème de la bijection (le TVI simple ne suffit pas ici : on veut un nombre exact et le TVI prouve qu'il existe au moins une solution), f s'annule exactement une fois sur cet intervalle. Finalement, f ne s'annule pas sur les deux intervalles extrémaux, et s'annule exactement une fois sur chacun des $n - 1$ autres intervalles : f s'annule donc exactement $n - 1$ fois sur D_f.

Exercice 41 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \pm\infty$. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Correction L'idée est simple : puisque $|f|$ tend vers $+\infty$, si f ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, alors f prend des grandes valeurs en valeur absolue mais son signe change indéfiniment donc f s'annule pour des valeurs de x très grandes ce qui contredit le fait que $|f|$ tende vers $+\infty$. Prouvons cela rigoureusement.

Supposons que f ne tende ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$ en $+\infty$. Dès lors :

$$\exists A_1 > 0, \forall B \geq 0, \exists x \geq B, f(x) < A_1$$

et puisque f ne tend pas non plus vers $-\infty$:

$$\exists A_2 < 0, \forall B \geq 0, \exists x \geq B, f(x) > A_2$$

Soit $M = \max(|A_1|, |A_2|) = \max(A_1, -A_2)$. Puisque $|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe B tel que pour tout $x \geq B$, $|f(x)| \geq M$. Or, par hypothèse, il existe $x_1 \geq B$ tel que $f(x_1) < A_1$. Or, $x_1 \geq B$ donc $|f(x)| \geq M$. Si $f(x) \geq 0$ alors $f(x_1) \geq M \geq A_1$ ce qui est exclu, donc $f(x_1) < 0$. De même, par hypothèse, il existe $x_2 \geq B$ tel que $f(x_2) > A_2$. Si $f(x_2) < 0$, alors $|f(x_2)| = -f(x_2) \geq M \geq |A_2| = -A_2$ donc $f(x_2) \leq A_2$ ce qui est exclu, donc $f(x_2) > 0$. f étant continue, d'après le TVI, f s'annule sur $[\,x_1\,;x_2\,]$ donc il existe $x_3 \geq B$ tel que $f(x_3) = 0$ ce qui contredit le fait que $|f(x)| \geq M > 0$ pour tout $x \geq B$.

Exercice 42 : ✪ Soit $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[\,a\,;a+\frac{T}{2}\,\right]\right)$$

Correction : Par exemple, les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques et on a $\cos(\mathbb{R}) = \cos([\,0\,;\pi\,])$ et $\sin(\mathbb{R}) = \sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]\right)$. Prouvons donc cela dans le cas général. On prouve de même que dans l'exercice 19 que f est bornée et atteint ses bornes, et qu'il existe $(x_0, x_1) \in [\,0\,;T\,]^2$ tel que $f(x_0) = \max(f)$ et $f(x_1) = \min(f)$ (le max et le min étant pris sur $\mathbb{R}$). Sans perte de généralité, supposons que $x_0 \leq x_1$.

Si $x_1 - x_0 \leq T/2$, posons $a = x_0$, si bien que $a \leq x_0 \leq x_1 \leq a + T/2$. Sinon, $0 \leq (x_0 + T) - x_1 \leq T/2$. En effet, x_0 et x_1 appartiennent à $[\,0\,;T\,]$ donc $x_0 + T \geq T \geq x_1$, d'où l'inégalité de gauche. De plus, $x_1 \geq x_0 + T/2$ donc $x_1 + T/2 \geq x_0 + T$ ce qui donne la deuxième inégalité en mettant x_1 à droite. En posant $a = x_1$, alors $a \leq x_1 \leq x_0 + T \leq a + T/2$ (l'idée de ce qui précède est simple : soit $x_1 - x_0 \leq T/2$, soit on rajoute T à x_0 et alors x_1 et $x_0 + T$ sont eux aussi distants de moins de T, faites un dessin).

Dans tous les cas, il existe a tel que $\max(f)$ et $\min(f)$ soient atteints sur $[\,a\,;a + T/2\,]$ (le min est atteint en x_1 et le max en x_0 ou $x_0 + T$ puisque f est T-périodique). f étant continue, d'après le TVI, toutes les valeurs entre le max et le min sont atteintes sur $[\,a\,;a + T/2\,]$ donc toutes les valeurs de $f(\mathbb{R})$ sont atteintes sur cet intervalle, d'où le résultat.

Exercice 43 : ✪ Soit f définie et continue sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$ non vide (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$) telle que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x)$$

les limites étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f n'est pas injective.

Correction : Supposons dans un premier temps que les limites soient réelles, et notons-les L. Si f est constante égale à L sur $]\,a\,;b\,[$ alors f n'est pas injective. Sinon, il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) \neq L$. Sans perte de généralité, supposons que $f(c) > L$, et soit $m \in \,]\,L\,;f(c)\,[$. f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1 \in \,]\,a\,;c\,[$ tel que $f(x_1) = m$, et il existe $x_2 \in \,]\,c\,;b\,[$ tel que $f(x_2) = m$, donc f n'est pas injective puisque $x_1 < c < x_2$ et en particulier $x_1 \neq x_2$.

Supposons que ces deux limites (égales) soient égales à $+\infty$. Soit $c \in \,]\,a\,;b\,[$ et soit $m > f(c)$. Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1 \in \,]\,a\,;c\,[$ tel que $f(x_1) = m$, et idem entre b et c et on conclut de la même façon. De même si $L = -\infty$.

Exercice 44 : ✪ Soient $(a_1, \dots, a_n)$ dans $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \frac{1}{2}$$

Correction : Soit g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $g : x \mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| - \frac{1}{2}$. Montrons que g s'annule. Tout d'abord, les a_k sont positifs donc

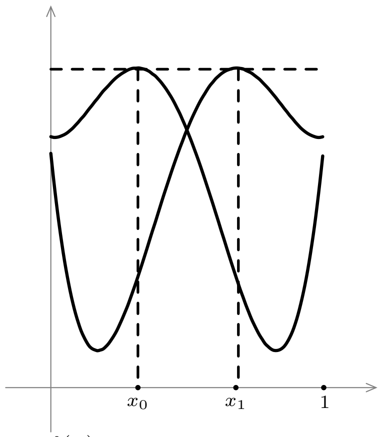
$$g(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |-a_k| - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{1}{2}$$

Précisons que le $1/2$ se trouve en dehors de la somme. De plus, les a_k sont inérieurs ou égaux à 1 donc, pour tout $k, 1 - a_k \geq 0$, si bien que :

$$g(1) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|1-a_k| - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(1-a_k) - \frac{1}{2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k - \frac{1}{2}$$

Finalement, $g(1) = -g(0)$. Ainsi, $g(1)$ et $g(0)$ sont de signe contraire. La fonction g étant continue, d'après le TVI, g s'annule.

Exercice 45 : ✪ Soient f et g continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que $\sup f = \sup g$. Montrer que les graphes de f et g se croisent.



Correction : Les fonctions f et g sont continues sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc sont bornées et atteignent leurs bornes, plus précisément leur borne supérieure. Il existe $(x_0, x_1) \in [\,0\,;1\,]^2$ tels que $f(x_0) = \sup f$ (c'est en fait un maximum puisqu'il est atteint) et $g(x_1) = \sup g$. Attention, même si les bornes sup sont égales, elles ne sont pas forcément atteintes au même endroit : on n'a pas forcément $x_0 = x_1$. On veut montrer qu'il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $f(x) = g(x)$ donc tel que $f(x) - g(x) = 0$. En d'autres termes, on veut montrer que $f - g$ s'annule. Or, $(f-g)(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = \sup f - g(x_0)$, et puisque $\sup(f) = \sup(g)$, il vient $(f-g)(x_0) = \sup(g) - g(x_0) \geq 0$. De même, $(f-g)(x_1) \leq 0$. Enfin, $f - g$ est continue en tant que différence de fonctions qui le sont. D'après le TVI, il existe x tel que $(f-g)(x) = 0$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 46 : ✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $L < 1$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que f admet un point fixe.

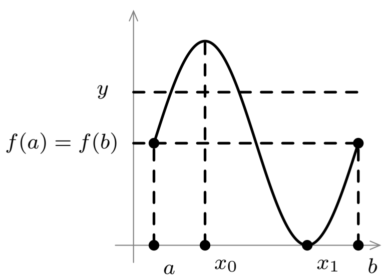
Correction : Ici, pour une fois, définir $g : x \longmapsto f(x) - x$ ne servirait à rien. On cherche une autre façon de montrer qu'un réel x est un point fixe. Vu l'exercice, on pense au quotient. Or, **si x est non nul**, x est un point fixe si et seulement si $f(x)/x = 1$. On définit donc (sur $\mathbb{R}_+^*$) la fonction $g : x \longmapsto f(x)/x$. Deux cas se présentent :

- Premier cas : il existe $x_0 > 0$ tel que $g(x_0) \geq 1$. Dans ce cas, puisque $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L < 1$, g étant continue en tant que quotient de fonctions qui le sont (celle au dénominateur ne s'annulant pas), d'après le TVI, il existe $x \in [\,x_0\,;+\infty\,[$ tel que $g(x) = 1$ donc tel que $f(x) = x$: f admet un point fixe.
- Deuxième cas : pour tout $x > 0$, $g(x) < 1$, c'est-à-dire $0 \leq f(x) < x$ car x est positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant par x) et car f est à valeurs positives. Or, $x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ (on s'intéresse à la limite à droite en 0 car cette inégalité est valable pour tout $x > 0$: attention, elle n'est a priori pas valable en 0 !). D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. Or, f est continue en 0 donc continue à droite : $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} f(0)$. Par unicité de la limite, $f(0) = 0$: 0 est un point fixe.

Dans tous les cas, f admet un point fixe.

Exercice 47 : ✪✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ telle que $f(a) = f(b)$. Soient $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max_{[\,a\,;b\,]} f$ (pourquoi existent-ils ?). On suppose que $m < M$. Soit $y \in]\,m\,;M\,[$. Montrer que y a au moins deux antécédents dans $[\,a\,;b\,]$.

Correction : Tout d'abord, m et M existent car f est une fonction continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes. Faisons un dessin :



Puisque m et M sont atteints, soient x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = M$ et $f(x_1) = m$. Sans perte de généralité, supposons $x_0 < x_1$ (essayez de refaire l'exo en supposant $x_1 > x_0$). f est continue, $f(x_0) = M > y > f(x_1) = m$: d'après le TVI, il existe $x_3 \in]\,x_0\,;x_1\,[$ tel que $f(x_3) = y$: cela fait un antécédent. Pour en avoir un deuxième, il faut séparer les cas.

Supposons que $y \geq f(a)$ (ce qui est le cas sur le dessin ci-dessus). Alors $f(a) \leq y < f(x_0) = M$ donc, d'après le TVI, il existe $x_4 \in [\,a\,;x_0\,[$ tel que $f(x_4) = y$ donc cela fait un deuxième antécédent.

Supposons que $y \leq f(a)$ (faites le dessin !). Alors $f(x_1) = m < y \leq f(b) = f(a)$ donc, de même, y admet un antécédent sur $]\, x_1\,; b\,]$. Dans tous les cas, y admet deux antécédents.

Exercice 48 - Un calcul barycentrique : ✪✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,; b\,]$ et soient x, y deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,; b\,]$ tel que $(x+y)f(c) = xf(a) + yf(b)$.

Correction : Tout d'abord, si $x = 0$, alors $c = b$ convient, et si $y = 0$, alors $c = a$ convient. Supposons donc x et y strictement positifs. f étant bornée sur le segment $[\,a\,; b\,]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe x_0 tel que $f(x_0) = \max_{[\,a\,;b\,]} f$ et x_1 tel que $f(x_1) = \min_{[\,a\,;b\,]} f$. x étant positif, $xf(a) \leq xf(x_0)$ et, de même, $yf(b) \leq yf(x_0)$ si bien que $xf(a) + yf(b) \leq (x+y)f(x_0)$ et $x + y > 0$ donc :

$$\frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b) \leq f(x_0)$$

De même :

$$\frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b) \geq f(x_1)$$

f étant continue, d'après le TVI, il existe $c \in [\,x_0\,; x_1\,]$ tel que

$$f(c) = \frac{x}{x+y} \times f(a) + \frac{y}{x+y} \times f(b)$$

Exercice 49 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Correction : Par hypothèse, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(a)) = a$. Si $f(a) = a$ alors f admet un point fixe. Supposons que $f(a) \neq a$. Sans perte de généralité, on peut supposer $f(a) > a$. Alors $g(a) > 0$, où l'on a noté comme d'habitude $g : x \mapsto f(x) - x$. De plus, $f(f(a)) = a < f(a)$ donc $g(f(a)) = f(f(a)) - f(a) < 0$. Si on note $b = f(a)$, on obtient que $g(b) < 0$. Puisque g est continue, d'après le TVI, g s'annule sur $[\,a\,; b\,]$ donc f admet un point fixe. Le résultat est faux sans l'hypothèse de continuité. En effet, si on note f l'indicatrice de $\{0\}$ (i.e. la fonction qui vaut 1 en 0 et 0 sinon), alors f n'a pas de point fixe (car $f(x) = 0$ si $x \neq 0$, donc $f(x) \neq x$, et $f(0) = 1 \neq 0$) mais $f \circ f(1) = f(0) = 1$ donc 1 est un point fixe : $f \circ f$ admet un point fixe mais pas f.

Exercice 50 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue et soit $(x_1, \dots, x_n) \in [\,0\,;1\,]^n$. Montrer qu'il existe $c \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Correction : Soit g définie sur $[\,0\,;1\,]$ par :

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

f étant continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes : soit a tel que $f(a) = \max_{[\,0\,;1\,]} f$ et soit b tel que $f(b) = \min_{[\,0\,;1\,]} f$, si bien que $f(b) \leq f(x_i) \leq f(a)$ pour tout i, et donc :

$$g(a) = \frac{nf(a) - f(x_1) - \cdots - f(x_n)}{n} \geq 0$$

et on obtient de même que $g(b) \leq 0$. g est continue car f l'est donc, d'après le TVI, g s'annule, ce qui permet de conclure.

Exercice 51 : ✪✪ Un candidat à l'X (peu entraîné...) court le 1000m en 5 minutes. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 minutes 30 pendant lequel il a avancé d'exactement 500 mètres.

Correction : Soit φ la fonction qui va de $[\,0\,;300\,]$ dans $\mathbb{R}$ et qui, au temps écoulé t (en secondes, et il y a 300 secondes en 5 minutes), associe la distance entre le candidat et la ligne de départ au temps t. Ainsi, si $t \in [\,0\,;300\,], \varphi(t)$ est la distance entre le candidat et la ligne de départ au bout de t secondes. On a en particulier $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(300) = 1000$. On souhaite donc montrer qu'il existe $t \in [\,0\,;150\,]$ tel que $\varphi(t+150) - \varphi(t) = 500$. On définit donc sur $[\,0\,;150\,]$ la fonction $g : t \longmapsto \varphi(t+150) - \varphi(t)$. Or, φ est continue (on suppose que le candidat ne se téléporte pas) donc g est continue. On a $g(0) = \varphi(150)$ et $g(150) = 1000 - \varphi(150)$. On veut montrer qu'il existe $t \in [\,0\,;150\,]$ tel que $g(t) = 500$. Le problème est que l'on ne connaît pas la valeur de $\varphi(150)$. Il suffit de faire deux cas : si $\varphi(150) \geq 500$, alors $g(0) \geq 500$ et $\varphi(150) \leq 500$, et c'est le contraire si $\varphi(150) \leq 500$. Dans les deux cas, on peut appliquer le TVI : il existe $t \in [\,0\,;150\,]$ tel que $g(t) = 500$.

Exercice 52 - Cordes universelles (Théorème de Lévy, 1934) : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$ avec $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ et on pose $\alpha = 1/n$. On définit sur $[\,0\,;1 - \alpha\,]$ la fonction g par

$$g(x) = f\,(x + \alpha) - f(x)$$

(a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

(b) En déduire qu'il existe $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$ tel que $f(x) = f(x+\alpha)$. On dit que α est une corde universelle.

2. Soit maintenant $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. En considérant la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto x - \frac{\sin^2(\pi x/\alpha)}{\sin^2(\pi/\alpha)}$$

montrer que la propriété précédente est fausse. Où a-t-on utilisé le fait que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$?

Correction :

1. (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k}{n}+\alpha\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f(1) - f(0)$ par télescopage. Or, $f(1) = f(0)$ donc cette somme est nulle.

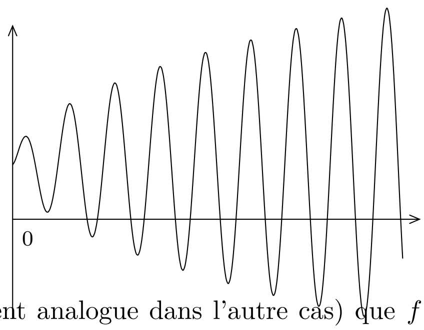
(b) Par conséquent, soit tous les termes de cette somme sont nuls, soit elle contient un terme strictement positif et un terme strictement négatif, c'est-à-dire qu'il existe $(k_1, k_2) \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]^2$ tels que $g(k_1/n) < 0$ et $g(k_2/n) > 0$, et g est continue car f l'est donc, d'après le TVI, il existe x tel que $g(x) = 0$. Dans tous les cas, g s'annule : il existe x tel que $f(x) = f(x+\alpha)$.

2. Pour montrer qu'une propriété est fausse, il faut montrer que les hypothèses sont vérifiées mais pas la conclusion (la négation de $A \Rightarrow B$ est A et (non(B))). Il faut donc prouver que f est continue, que $f(0) = f(1)$ mais qu'il n'existe pas de $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$ tel que $f(x) = f(x+\alpha)$. f est continue en tant que somme de fonctions qui le sont. De plus, $f(0) = f(1) = 0$. Enfin, si $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$,

$$f(x+\alpha) = x + \alpha - \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{\alpha} + \pi\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)} = x + \alpha - \frac{\left(-\sin\left(\dfrac{\pi x}{\alpha}\right)\right)^2}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)} = f(x) + \alpha$$

et, en particulier, $f(x+\alpha) \neq f(x)$. Le résultat de la question 1 n'est donc plus valable quand α n'est pas l'inverse d'un entier (on a utilisé ce résultat en définissant la fonction f : si α est l'inverse d'un entier, le sinus au dénominateur est nul et donc la fonction n'est pas définie).

Exercice 53 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.



Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que f s'annule un nombre fini de fois (f s'annule au moins une fois car f est surjective donc 0 est atteint). Soit A le dernier zéro de f (c'est-à-dire le dernier x tel que $f(x) = 0$, et un tel A existe car un ensemble fini admet un maximum). En particulier, pour tout $x > A$, $f(x) \neq 0$. Comme f est continue, puisqu'elle ne s'annule pas sur $]\,A\,;+\infty\,[$, alors elle est de signe constant. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe $x_0 > A$ et $x_1 > A$ tel que $f(x_0) < 0$ et $f(x_1) > 0$ donc, d'après le TVI (f est continue), f s'annule sur $]\,x_0\,;x_1\,[$ et en particulier sur $]\,A\,;+\infty\,[$, ce qui est exclu. Ainsi f est de signe constant sur $]\,A\,;+\infty\,[$. On suppose (raisonnement analogue dans l'autre cas) que f est strictement positive sur cet intervalle. Or, f est continue sur le segment $[\,0\,;A\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes). Plus précisément, f est minorée sur ce segment : il existe m tel que, pour tout $x \in [\,0\,;A\,]\,, f(x) \geq m$. Soit $B = \min(m, 0)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) \geq B$. En particulier, $B - 1$ n'est pas atteint, ce qui est absurde car f est surjective.

Exercice 54 : ✪✪✪ Soit

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en 0 mais vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]\,, \exists c \in [\,a\,;b\,]\,, f(c) = m$$

Correction : Montrons tout d'abord que f n'est pas continue en 0 par la caractérisation séquentielle de la continuité : soit (u_n) la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ mais $f(u_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq f(0)$ donc f n'est pas continue en 0. Soient à présent a et b deux réels et $m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]$.

Si a et b sont strictement positifs, f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc on peut appliquer le (vrai) TVI : il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$. Idem si a et b sont strictement négatifs.

Supposons donc $a \leq 0 \leq b$. Si $a = b = 0$ alors $m = f(0)$ et $c = 0$ convient. Supposons $a < 0 < b$. Cherchons b' appartenant à $]\,a\,;0\,[$ tel que $f(b) = f(b')$ (faites un dessin). On cherche donc $b' \in\,]\,a\,;0\,[$ tel que $\sin(1/b') = \sin(1/b)$ donc tel que $1/b' \equiv 1/b[2\pi]$, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $1/b' = 1/b + 2k\pi$.. On cherche donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a < \frac{1}{\dfrac{1}{b} + 2k\pi} < 0$$

Or,

$$\frac{1}{\dfrac{1}{b} + 2k\pi} \xrightarrow[k\to-\infty]{} 0^-$$

donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a < \frac{1}{\dfrac{1}{b} + 2k\pi} < 0$$

et posons

$$b' = \frac{1}{\dfrac{1}{b} + 2k\pi}$$

Alors on a bien $a < b' < 0$ et

$$\begin{aligned} f(b') &= \sin(1/b') \\ &= \sin(1/b + 2k\pi) \\ &= \sin(1/b) \\ &= f(b) \end{aligned}$$

Par conséquent, $m \in [\,f(a)\,;f(b')\,]$ mais f est continue sur $[\,a\,;b'\,]$ (puisque $a < b' < 0$) donc, d'après le TVI, il existe $c \in [\,a\,;b'\,]$ tel que $f(c) = m$.

Enfin, si $b = 0$, i.e. si $a < 0 = b$, on trouve de même un réel $b' \in\,]\,a\,;0\,[$ tel que $f(b') = 0 = f(b)$ (prendre b' de la forme $1/k\pi$ avec $a < 1/k\pi < 0$) et on conclut de la même façon, et de même si $a = 0 < b$. Dans tous les cas, on a le résultat voulu.

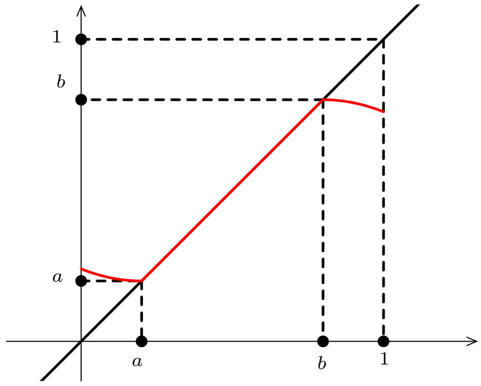
Exercice 55 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide). Donner l'allure de son graphe.

Correction : Montrons tout d'abord que l'ensemble des points fixes de f (qu'on note S dans la suite) est un intervalle (non vide). Tout d'abord (cf. cours), f admet au moins un point fixe donc S est non vide. Soient donc $x \leq y$ deux points fixes de f et montrons que $[\,x\,;y\,] \in S$. Soit $z \in [\,x\,;y\,]$ et prouvons que z est un point fixe de f i.e. que $f(z) = z$. Le problème est que f n'est pas forcément monotone : on ne peut pas appliquer f aux inégalités $x \leq z \leq y$.

Utilisons le fait que x et y soient des points fixes : on a donc $f(x) \leq z \leq f(y)$. Or, f est continue donc, d'après le TVI, il existe $c \in [\,x\,;y\,]$ tel que $f(c) = z$. Or, $f \circ f = f$ donc $f(f(c)) = f(c)$ c'est-à-dire que $f(z) = z$: z est un point fixe, $[\,x\,;y\,] \subset S$ donc S est un intervalle.

Or, S est borné donc est de la forme $(a;b)$, où on a noté $a = \inf(S)$ et $b = \sup(S)$, les parenthèses disant juste qu'on ne sait pas si l'intervalle est ouvert ou fermé. Il suffit, pour conclure, de prouver que a et b appartiennent à S. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, a est la limite d'une suite d'éléments de S qu'on note (a_n). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = a_n$ car a_n est un point fixe. D'une part, $f(a_n) = a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, et d'autre part, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et f est continue donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Par unicité, de la limite, $f(a) = a$ donc a est un point fixe donc $a \in S$, et on prouve de même que $b \in S$ donc $S = [\,a\,;b\,]$: S est un segment (non vide).

Puisque toute image est un point fixe, alors $f([0;1]) \subset [a;b]$ i.e. f est à valeurs dans $[a;b]$. Si f n'est que continue, le graphe de f est donc de la forme ci-dessous :



Exercice 56 : ✪✪✪ Soit f continue sur $[0;1]$ et soit

$$S = \{x \in [0;1] \mid \exists y > x, f(y) > f(x)\}$$

On suppose qu'il existe $(a,b) \in [0;1]^2$ tels que $]a;b[\subset S$ et $a \notin S, b \notin S$.

1. Montrer que pour tout $x \geq b, f(x) \leq f(b)$.
2. Montrer que $f(a) \geq f(b)$.
3. On suppose que $f(a) > f(b)$. Montrer que l'ensemble $A = \left\{ x \in]a;b[\;\middle|\; f(x) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \right\}$ admet une borne supérieure c.
4. Montrer que $c \notin S$. Que peut-on en déduire ?

Correction : En clair, S est l'ensemble des éléments de $[0;1]$ qui admettent un élément strictement supérieur avec une image strictement supérieure.

1. Soit $x \geq b$. Si $f(x) > f(b)$ alors, d'une part, $x > b$ (car x ne peut pas être égal à b) et d'autre part, $b \in S$ ce qui est exclu. On en déduit le résultat.
2. Il est sous-entendu que $a < b$. Si $f(a) < f(b)$ alors $a \in S$ ce qui est exclu.
3. Posons
$$m = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
Alors $f(b) < m < f(a)$: f étant continue, il existe $x \in]a;b[$ tel que $f(x) = m$. En d'autres termes, A est non vide, et il est majoré par b donc admet une borne supérieure c.
4. Par caractérisation de la borne supérieure, c est limite d'une suite d'éléments de A qu'on note (c_n). Pour tout n, $f(c_n) = m \xrightarrow[n\to+\infty]{} m$ et f est continue donc $f(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Par unicité de la limite, $f(c) = m$ donc $c \in A$ (c'est donc un maximum). Supposons que $c \in S$: il existe donc $y > c$ tel que $f(y) > f(c) = m$. Si $y \geq b$ alors $f(y) > f(b)$ ce qui contredit la question 2. Alors $y < b$: d'après le TVI, il existe $x \in]y;b[$ tel que $f(x) = m$ ce qui contredit la définition de c. On en déduit que $c \notin S$ ce qui contredit le fait que $]a;b[\subset S$. L'hypothèse absurde est que $f(a) > f(b)$: on en déduit finalement que $f(a) = f(b)$. D'où le nom de S : « S comme sourire » (faites un dessin).

13.6 Fonctions monotones :

Exercice 57 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. ✪ On suppose la restriction de f à $\mathbb{Q}$ croissante. Montrer que f est croissante.
2. ✪✪ Même question en remplaçant croissante par strictement croissante.

Correction :

1. Soient $x \leq y$ deux réels. Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$ et en particulier $f(x) \leq f(y)$. Supposons à présent $x < y$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers y. Dès lors, pour n assez grand, $x_n \leq \dfrac{x+y}{2} \leq y_n$ et en particulier $x_n \leq y_n$. f étant croissante sur $\mathbb{Q}$, $f(x_n) \leq f(y_n)$. f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et idem pour y. L'inégalité large passe à la limite donc $f(x) \leq f(y)$: f est croissante.

2. Soient $x < y$ deux réels. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers y. C'est un peu plus compliqué que dans le cas précédent puisque c'est l'inégalité LARGE qui passe à la limite. L'idée est de garder un peu de marge en donnant un majorant M pour x_n (à partir d'un certain rang), un minorant m pour y_n, avec $M < m$. $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe $M < m$ deux rationnels dans $]\,x\,;y\,[$. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, alors $x_n < M$ à partir d'un rang n_0 et $m < y_n$ à partir d'un rang n_1. Donc, si $n \geq \max(n_0, n_2)$, $x_n < M < m < y_n$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ donc $f(x_n) < f(M) < f(m) < f(y_n)$. f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et idem pour y, et l'inégalité large passe à la limite donc $f(x) \leq f(M) < f(m) \leq f(y)$ mais on a quand même $f(x) < f(y)$: f est strictement croissante.

Exercice 58 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes :

1. f est monotone.
2. f est strictement monotone.
3. f est continue.
4. f est injective.
5. $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Étudier toutes les implications entre ces propriétés. Prouver celles qui sont vraies et donner un contre-exemple à celles qui sont fausses.

Correction :

- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre la fonction nulle.
- L'implication $1 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre la partie entière.
- L'implication $1 \Rightarrow 4$ est fausse : prendre la fonction nulle.
- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre la partie entière (et on a alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ qui n'est pas un intervalle).
- L'implication $2 \Rightarrow 1$ est vraie : une fonction strictement monotone est monotone.
- L'implication $2 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre la fonction qui vaut x sur $\mathbb{R}_-$ et $x+1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est strictement croissante mais discontinue en 0.
- L'implication $2 \Rightarrow 4$ est vraie : c'est du cours.
- L'implication $1 \Rightarrow 2$ est fausse : prendre le même contre exemple que ci-dessus, l'image est $\mathbb{R}_- \cup \,]\,1\,;+\infty\,[$.
- L'implication $3 \Rightarrow 1$ est fausse : prendre la fonction carré.
- L'implication $3 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $3 \Rightarrow 4$ est fausse : idem.
- L'implication $3 \Rightarrow 5$ est vraie : c'est le TVI.
- L'implication $4 \Rightarrow 1$ est fausse : il y a un contre-exemple dans le cours.
- L'implication $4 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $4 \Rightarrow 3$ est fausse : idem.
- L'implication $4 \Rightarrow 5$ est fausse : prendre le même contre-exemple que pour $3 \Rightarrow 2$.
- L'implication $5 \Rightarrow 1$ est fausse : prendre la fonction carré, on a $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$.
- L'implication $5 \Rightarrow 2$ est fausse : idem.
- L'implication $5 \Rightarrow 3$ est fausse : prendre f égale à x sur $\mathbb{R}_-$ et égale à -1 sur $\mathbb{R}_+^*$, alors $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_-$ mais f est discontinue en 0.
- L'implication $5 \Rightarrow 4$ est fausse : prendre f la fonction carré.

Exercice 59 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Correction : Soit $A \geq 0$. f étant bijective, elle est surjective donc il existe B tel que $f(B) = A$. f étant croissante, pour tout $x \geq B$, $f(x) \geq f(B) = A$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 60 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'application

$$x \mapsto \lim_{t\to x^+} f(t)$$

est bien définie et croissante.

Correction : L'application (que l'on notera g) est bien définie car f est croissante donc admet en tout point intérieur à son domaine de définition (donc en tout réel puisque f est définie sur $\mathbb{R}$) une limite à droite finie. Soient $x < y$ deux réels. Alors (on justifie de même l'existence de la limite à gauche)

$$g(x) = \lim_{t\to x^+} f(t) \leq \lim_{t\to y^-} f(t) \leq \lim_{t\to y^+} f(t) = g(y)$$

ce qui prouve la croissance de g. La dernière égalité découle du cours. La première inégalité vient du fait que, si $z \in \,]\,x\,;y\,[$, pour tout $t \in \,]\,x\,;z\,[$, $f(t) \leq f(z)$ et l'inégalité large passe à la limite donc

$$\lim_{t\to x^+} f(t) \leq f(z)$$

et on prouve de la même façon que

$$f(z) \leq \lim_{t\to y^-} f(t)$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 61 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $]\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$?

Correction : Montrons dans les deux cas qu'une telle bijection continue n'existe pas en raisonnant par l'absurde.

- On suppose donc qu'il existe une bijection continue f de $]\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$. f étant injective et continue, elle est strictement monotone. Sans perte de généralité, on peut la supposer strictement croissante. Notons $M = f(1)$. f étant strictement croissante, $f(x) \leq f(1) = M$ pour tout $x \in\,]\,0\,;1\,]$ mais alors $M+1$ n'est pas atteint par f, f n'est pas surjective, ce qui est absurde.
- On suppose qu'il existe une bijection continue f de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$. De même, sans perte de généralité, on peut la supposer strictement croissante. 1 est atteint (car f surjective), il existe $x_0 \in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $f(x_0) = 1$. f étant strictement croissante, pour tout $x \in\,]\,x_0\,;1\,[$, $f(x_0) = 1 < f(x)$ ce qui est absurde car f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 62 : ✪✪ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue (on pourra s'intéresser aux limites à droite et à gauche de f et g en x).

Correction : Soit donc $x > 0$, et prouvons que f est continue en x. f étant croissante, f admet une limite à gauche et une limite à droite finies en x (car x est un point intérieur) et $f_g(x) \leq f(x) \leq f_d(x)$, avec égalité si et seulement s'il y a égalité.

Or, g est décroissante donc admet également des limites à gauche et à droite finies en x, et on a $g_g(x) \geq g(x) \geq g_d(x)$ car g est décroissante. Or, lorsque $t \to x^+$, $f(t) \to f_d(x)$ et $t \to x$ si bien que

$$g(t) \xrightarrow[t\to x^+]{} \frac{f_d(x)}{x}$$

Par unicité de la limite, $g_d(x) = f_d(x)/x$ et idem à gauche. Par conséquent,

$$\frac{f_g(x)}{x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{f_d(x)}{x}$$

et $x > 0$ donc on peut multiplier par x sans changer le sens de l'inégalité, si bien que $f_g(x) \geq f(x) \geq f_d(x)$. On a les inégalités dans l'autre sens (voir ci-dessus) donc on a égalité : $f_g(x) = f(x) = f_d(x)$ donc f est continue en x donc sur $\mathbb{R}_+^*$ car x est quelconque.

Exercice 63 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante, surjective de $[\,a\,;b\,]$ dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$. Montrer que f est continue.

Correction : Montrons que si f n'est pas continue, alors il y a un trou dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$ ce qui est absurde car elle est surjective. Supposons que f soit discontinue en un réel $c \in [\,a\,;b\,]$. Supposons dans un premier temps que $c \in\,]\,a\,;b\,[$. Puisque f est discontinue en c, alors soit f est discontinue à droite, soit à gauche (soit les deux évidemment). Sans perte de généralité, supposons f discontinue à droite. Dès lors, f étant croissante, elle admet une limite à droite (finie) en c, notée $f_d(c)$, et puisque f n'est pas continue à droite, $f(c) < f_d(c)$. f étant croissante, pour tout $x \leq c$, $f(a) \leq f(x) \leq f(c)$ et pour tout $x \geq c$, $f_d(c) \leq f(x) \leq f(b)$ (en effet, pour tout $t \in\,]\,c\,;x\,]$, $f(t) \leq f(x)$ et l'inégalité large passe à la limite donc, en faisant tendre t vers c^+, on a l'inégalité voulue). Dans tous les cas, aucun réel de l'intervalle ouvert $]\,f(c)\,;f_d(c)\,[$ n'est atteint, ce qui est absurde car f est surjective dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$. On exclut les cas où f est discontinue en a et en b de la même façon (à l'aide, respectivement, de la limite à droite et de la limite à gauche).

Exercice 64 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq g$.

Correction : On définit g de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, g est affine sur $[\,n\,;n+1\,]$ et égale à $f(n+1)$ en n et égale à $f(n+2)$ en $n+1$. Par exemple, $g(0) = f(1)$, $g(1) = f(2)$, $g(2) = f(3)$ etc. et g est affine entre ces valeurs. g est continue sur les intervalles ouverts (on exclut les points de recollement, cf. cours) $]\,n\,;n+1\,[$ (car affine) et admet $f(n+1)$ comme limite à droite et à gauche en n donc est aussi continue en les entiers : g est bien continue sur $\mathbb{R}_+$. À présent, si $x \in \mathbb{R}_+$, si on note $n = \lfloor x \rfloor$, alors $f(x) \leq f(n+1)$ car f est croissante donc $f(x) \leq g(n)$. Or, sur $[\,n\,;n+1\,]$, g est affine et $g(n) = f(n+1) \leq f(n+2) = g(n+1)$ donc g est croissante si bien que $f(x) \leq g(n) \leq g(x)$ ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 65 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent, une fonction croissante ne peut pas être « trop » discontinue...

Correction : Notons D l'ensemble des points de discontinuité de f. Soit $x \in D$. Alors $f_g(x) < f_d(x)$ où on a noté $f_g(x)$ la limite à gauche et $f_d(x)$ la limite à droite de f en x (qui existent bien puisque f est croissante). Dès lors, l'intervalle $]\, f_g(x)\,;f_d(x)\,[$ est ouvert non vide donc contient un rationnel par densité de $\mathbb{Q}$. Définissons l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} D & \to & \mathbb{Q} \\ & & \\ x & \mapsto & \text{un rationnel appartenant à l'intervalle }]\, f_g(x)\,;f_d(x)\,[\end{array} \right.$$

D'après ce qui précède, cette application est bien définie (et $\mathbb{Q}$ est dénombrable donc on pourrait s'arranger pour que le choix du rationnel soit non ambigu comme ci-dessus mais là on commence vraiment à couper les cheveux en quatre). Il suffit de prouver qu'elle est injective pour conclure. Soient $x_1 \neq x_2$ deux points de discontinuité de f distincts. Sans perte de généralité, on peut supposer $x_1 < x_2$. Alors $f_d(x_1) \leq f_g(x_2)$, la limite à droite en x_1 est inférieure ou égale à la limite à gauche en x_2. En effet, soit $m \in]\, x_1\,;x_2\,[$. Pour tout $t \in]\, x_1\,;m\,]$, f étant croissante, $f(t) \leq f(m)$ et l'inégalité large passe à la limite donc, quant $t \to {x_1}^+$, on obtient que $f_d(x_1) \leq f(m)$ et on trouve de même que $f(m) \leq f_g(x_2)$, d'où le fait que $f_d(x_1) \leq f_g(x_2)$. Or, $\varphi(x_1) < f_d(x_1)$ et $f_g(x_2) < \varphi(x_2)$ si bien que $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$: en particulier, $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, φ est injective.

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On définie sur $\mathbb{R}_+$ la fonction F par $F(x) = \displaystyle\max_{t \in [\,0\,;x\,]} f(t)$.

1. Montrer que F est bien définie, croissante, continue et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq F(x)$.
2. Soit g une fonction croissante telle que $f \leq g$ (i.e. $f(x) \leq g(x)$ pour tout x). Montrer que $F(x) \leq g(x)$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. f étant continue sur le segment $[\,0\,;x\,]$, elle est bornée et atteint ses bornes donc admet un maximum sur le segment $[\,0\,;x\,]$: F est bien définie. Soient $x \leq y$ deux réels positifs. Puisque $[\,0\,;x\,] \subset [\,0\,;y\,]$, alors le maximum sur $[\,0\,;x\,]$ est inférieur à $[\,0\,;y\,]$ donc $F(x) \leq F(y)$: F est croissante. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Tout d'abord, $f(x) \leq \max_{[\,0\,;x\,]} f(t) = F(x)$. Prouvons enfin que f est continue en x. Il y a deux cas de figure : soit le maximum sur $[\,0\,;x\,]$ est atteint en x, et alors $f(x) = \max_{t \in [\,0\,;x\,]} = F(x)$, soit il ne l'est pas et alors $f(x) < \max_{t \in [\,0\,;x\,]} = F(x)$. Soit $\varepsilon > 0$.
   - Dans le second cas, $f(x) < F(x)$ donc, sur un voisinage de x, $f(y) < F(x)$ donc F est constante donc continue.
   - Plaçons nous dans le premier cas : $f(x) = F(x)$. f étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $y \in [\,x - \eta\,;x + \eta\,]$, $f(y) \leq f(x) + \varepsilon = F(x) + \varepsilon$. En d'autres termes, $F(x) + \varepsilon$ majore f sur $[\,x - \eta\,;x + \eta\,]$ si bien que $F(y) \leq F(x) + \varepsilon$ sur $[\,x - \eta\,;x + \eta\,]$. On en déduit de même que $F(y) \geq F(x) - \varepsilon$ sur cet intervalle. En d'autres termes, $|F(y) - F(x)| \leq \varepsilon$ sur $[\,x - \eta\,;x + \eta\,]$: F est continue en x donc sur $\mathbb{R}_+$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe $t \in [\,0\,;x\,]$ tel que $F(x) = f(t)$ (encore une fois, les bornes sont atteintes). Il suffit de voir que $f(t) \leq g(t) \leq g(x)$ car g est croissante.

13.7 Utilisation de la borne supérieure

Exercice 67 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que :

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [\,x\,;x + \varepsilon\,]\,, f(x) \leq f(y)$$

   Montrer que f est croissante.
2. Même question si on suppose cette fois que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in [\,x\,;x + \varepsilon\,]\,, f(x) \leq f(y)$$

Correction :

1. Soient $x \leq y$ deux réels. L'idée est simple : on va faire des pas de ε pour aller de x jusqu'à y. Par une récurrence, prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [\,x\,;x + n\varepsilon\,]$, $f(x) \leq f(t)$. Il n'y a rien à prouver pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que le résultat soit vrai au rang n. Soit $t \in [\,x\,;x + (n+1)\varepsilon\,]$. Si $t \leq x + n\varepsilon$, par HR, $f(x) \leq f(t)$. Sinon, soit $z = t - \varepsilon$. Alors $z \leq x + n\varepsilon$ donc, par HR, $f(x) \leq f(z)$. Or, $t \in [\,z\,;z + \varepsilon\,]$ donc $f(z) \leq f(t)$ si bien que $f(x) \leq f(t)$, ce qui clôt la récurrence. Finalement, puisque $x + n\varepsilon \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, il existe n tel que $y \in [\,x\,;x + n\varepsilon\,]$ si bien que $f(x) \leq f(y)$: f est croissante.

2. Soient $x \leq y$. La différence avec la question précédente est que le ε dépend de x : on ne peut pas refaire comme avant, faire des pas de ε jusqu'à dépasser y car le ε peut devenir de plus en plus petit et rien ne dit qu'on va finir par dépasser y. Introduisons l'ensemble

$$A = \{t \in [\,x\,;y\,] \mid f(x) \leq f(t)\}$$

$x \in A$ donc A est non vide. De plus, A est par définition majoré par y donc A admet une borne supérieure α. Prouvons que $\alpha \in A$ donc que c'est en fait un maximum. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers α. Or, pour tout n, $x_n \in A$ donc $f(x_n) \geq f(x)$. De plus, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et f est continue donc $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$. Enfin, l'inégalité large passe à la limite donc $f(\alpha) \geq f(x)$ donc $\alpha \in A$. Supposons que $\alpha \neq y$ donc $\alpha < y$ puisque $\alpha \leq y$. Par hypothèse sur f, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [\,\alpha\,;\alpha+\varepsilon\,]$, $f(t) \geq f(\alpha) \geq f(x)$: il existe donc t tel que $\alpha < t < y$ tel que $f(t) \geq f(x)$ ce qui est absurde par définition de α, si bien que $\alpha = y$ donc $f(y) \geq f(x)$: f est croissante.

Exercice 68 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Un dessin rapide (même avec une fonction non continue) permet de s'en convaincre. La méthode habituelle (i.e. poser $g : x \mapsto f(x) - x$) ne marche pas ici puisque f n'est pas continue. Utilisons une borne supérieure comme le titre de la section le laisse présager. Introduisons

$$A = \{x \in [\,0\,;1\,] \mid f(x) \geq x\}$$

Alors A est non vide (car contient 0 puisque $f(0) \geq 0$) et majoré (par 1 puisque tous ses éléments appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ par définition) donc admet une borne supérieure α. Prouvons que α est un point fixe de f.

Première méthode : par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, α est limite d'une suite (x_n) d'éléments de A. Or, pour tout n, $x_n \in A$ donc $f(x_n) \geq x_n$. Attention, f n'est pas continue donc $(f(x_n))$ ne converge pas forcément vers α. Deux cas de figure se présentent : soit il existe n_0 tel que $x_{n_0} = \alpha$, soit $x_n < \alpha$ pour tout n (puisque $x_n \leq \alpha$ pour tout n car $\alpha = \sup(A)$). Dans le premier cas, l'inégalité $f(x_{n_0}) \geq x_{n_0}$ se traduit par $f(\alpha) \geq \alpha$, et dans le deuxième cas, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha^-$ si bien que

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_g(\alpha)$$

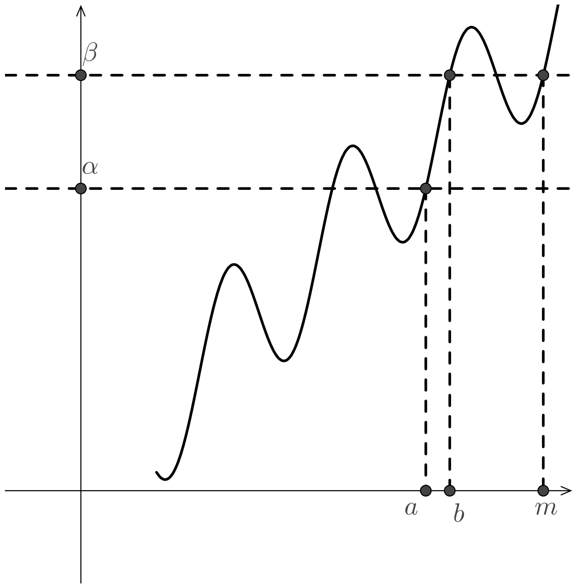
la limite à gauche de f en α (qui existe car f est croissante donc admet une limite à droite et une limite à gauche finies en tout point intérieur, et α est un point intérieur car on a supposé que les x_n étaient tous strictement inférieurs à α). L'inégalité large passe à la limite donc $f_g(\alpha) \geq \alpha$, et f est croissante donc $f(\alpha) \geq f_g(\alpha)$. Dans tous les cas, on a $f(\alpha) \geq \alpha$.

Prouvons l'autre inégalité. Si $\alpha = 1$, alors on vient de prouver que $f(1) \geq 1$ donc $f(1) = 1$ puisque f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ donc 1 est un point fixe. Sinon, alors α est un point intérieur donc f admet une limite à droite $f_d(\alpha)$ en α. Notons, pour n assez grand (pour que $y_n \leq 1$), $y_n = \alpha + 1/n$, si bien que $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha^+$ et que $y_n > \alpha$ pour tout n. On en déduit que, pour tout n, $y_n \notin A$ donc $f(y_n) < y_n$. Là aussi, l'inégalité large passe à la limite donc $f_d(\alpha) \leq \alpha$ (car $f(y_n)$ tend vers $f_d(\alpha)$ quand $n \to +\infty$) et puisque f est croissante, $f(\alpha) \leq f_d(\alpha) \leq \alpha$ donc $f(\alpha) \leq \alpha$: on en déduit finalement que $f(\alpha) = \alpha$, α est un point fixe de f, et donc f admet un point fixe.

Deuxième méthode (peut-être plus simple mais plus astucieuse, alors que la première ressemble beaucoup à la preuve du TVI) : reprenons la suite (x_n) ci-dessus. Pour tout n, $f(x_n) \geq x_n$ mais $x_n \leq \alpha$ donc, par croissance de f, $f(\alpha) \geq f(x_n) \geq x_n$ donc, l'inégalité large passant à la limite, $f(\alpha) \geq \alpha$. On montre l'autre inégalité (grâce à la suite (y_n)) de façon tout à fait analogue.

Exercice 69 : ✪✪✪✪ Soit I un intervalle d'intérieur non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit J un segment inclus dans $f(I)$. Montrer qu'il existe un segment K inclus dans I tel que $f(K) = J$.

Correction : Faisons un dessin.



Notons $J = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Puisque $\beta \in f(I)$, il existe m tel que $f(m) = \beta$. Si $\alpha = \beta$ alors $J = \{\beta\}$ donc $K = \{m\} = [\,m\,;m\,]$ convient. Supposons donc $\alpha < \beta$. α est aussi atteint, disons par un réel ℓ, mais le problème est qu'entre ℓ et m, la fonction n'a aucune raison de rester entre α et β (par exemple, sur le dessin, entre a et m, la fonction sort de $J = [\,\alpha\,;\beta\,]$). Supposons sans perte de généralité que $\ell \leq m$. Introduisons l'ensemble

$$A = \{x \leq m \,|\, f(x) = \alpha\}$$

A est non vide car contient ℓ et est majoré par m par définition donc admet une borne supérieure notée a. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe une suite d'éléments de A, notée (a_n), qui converge vers a. Or, pour tout n, $a_n \in A$ donc $f(a_n) = \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ et $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et f continue donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Par unicité de la limite, $f(a) = \alpha$ donc $a \in A$: c'est en fait un maximum, et par définition, α n'a aucun antécédent entre a et m (ce sera utile dans la suite). Introduisons à présent l'ensemble

$$B = \{x \in [\,a\,;m\,] \mid f(x) = \beta\}$$

B est non vide car contient m et est minoré par a donc admet une borne inférieure b. De même que ci-dessus, b est en fait un minimum et vérifie $f(b) = m$. Montrons que $K = [\,a\,;b\,]$ convient i.e. que $f(K) = J$ c'est-à-dire, avec nos notations, que $f([\,a\,;b\,]) = [\,\alpha\,;\beta\,]$. Attention, f n'a aucune raison d'être monotone ! Tout d'abord, pour tout $y \in J$, $f(a) \leq y \leq f(b)$ et f est continue donc, d'après le TVI, il existe $x \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x) = y$. En d'autres termes, $J \subset f(K)$. Prouvons que $f(K) \subset J$. Si ce n'est pas le cas, il existe $x \in K$ tel que $f(x) \notin J$ donc $f(x) < \alpha$ ou $f(x) > \beta$. Supposons sans perte de généralité que $f(x) < \alpha$. f est continue sur $[\,x\,;b\,]$ avec $f(x) < \alpha < \beta = f(b)$: d'après le TVI, il existe $c \in \,]\,x\,;b\,[$ tel que $f(c) = \alpha$. Or, $a < x < c < b \leq m$ donc il existe un élément $c > a$, $c \leq m$ tel que $f(c) = \alpha$ ce qui est absurde par définition de a, ce qui permet de conclure.

Exercice 70 : ✪✪✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, admettant en tout point un maximum local, c'est-à-dire (cf. chapitre 14) que, pour tout $x_0 \in [\,a\,;b\,]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,] \cap [\,x_0 - \varepsilon\,;x_0 + \varepsilon\,]$. Montrer que f est constante. On pourra commencer par montrer que

$$I = \{x \in [\,a\,;b\,] \mid \forall t \in [\,a\,;x\,]\,, f(t) \leq f(a)\}$$

est un intervalle fermé non vide et que $\max(I) = b$. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, admettant en tout point un extremum local. Le but de cette question est encore de prouver que f est constante.

   (a) Justifier l'existence de $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max_{[\,a\,;b\,]} f$.

   (b) On raisonne ensuite par l'absurde et on suppose que f n'est pas constante, donc que $m < M$ et on se donne $m < y < M$. Justifier que y est atteint par f.

   (c) Soit x un antécédent de y par f. Sans perte de généralité, on peut supposer que f admet en x un maximum local et que M est atteint en un réel x_0 strictement supérieur à x. Prouver l'existence de

$$c = \{t \in [\,x\,;x_0\,] \mid \forall z \in [\,a\,;t\,]\,, f(z) \leq y\}$$

   puis que f admet en c un minimum local.

(d) Justifier qu'il existe un rationnel q tel que $f(q) = y$ et conclure. On pourra utiliser le fait (cf. chapitre 17 et deuxième année) que $]\, m\,; M\,[$ n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune injection de $]\, m\,; M\,[$ dans $\mathbb{Q}$.

Correction :

1. Suivons l'indication de l'énoncé et introduisons

$$I = \{x \in [\, a\,; b\,] \mid \forall t \in [\, a\,; x\,]\,, f(t) \leq f(a)\}$$

   - $a \in I$ donc I est non vide.
   - Prouvons à présent que I est un intervalle à l'aide de la caractérisation des intervalles vue dans le chapitre précédent. Soient donc $x \leq y$ deux éléments de I et prouvons que $[\, x\,; y\,] \subset I$. Soit donc $z \in [\, x\,; y\,]$. Par hypothèse, pour tout $t \in [\, a\,; y\,]\,, f(t) \leq f(y)$ donc, en particulier, pour tout $t \in [\, a\,; z\,]\,, f(t) \leq f(a)$ donc $z \in [\, x\,; y\,]$: on en déduit que $z \in I$ donc I est bien un intervalle.
   - I est par définition majoré par b donc admet une borne supérieure notée c. Montrons que $c \in I$ (ce qui finira de prouver que I est un intervalle fermé). Soit donc (c_n) une suite d'éléments de I qui converge vers c. Par continuité de f, $f(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Or, pour tout n, $c_n \in I$ donc $f(c_n) \leq f(a)$ et l'inégalité large passe à la limite donc $f(c) \leq f(a)$. Enfin, si $t \in [\, a\,; c\,[$, alors $t \leq c_n$ pour n assez grand (puisque (c_n) converge vers c) donc $t \in [\, a\,; c_n\,]$ si bien que $f(t) \leq f(a)$. Ce résultat étant aussi vrai pour c, $f(t) \leq f(a)$ pour tout $t \in [\, a\,; c\,]$ donc $c \in I$ (et en particulier c est un maximum) : I est donc un intervalle borné non vide.
   - Montrons enfin que $c = b$. Si $c < b$, f admettant en c un maximum local, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(c) \geq f(x)$ pour tout $x \in [\, c\,; c+\varepsilon\,]$ et donc, en particulier, $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans cet intervalle. On en déduit que $c+\varepsilon \in I$ ce qui contredit la maximalité de c : $c = b$.

   On déduit de tous ces résultats que $I = [\, a\,; b\,]$ donc que, pour tout $t \in [\, a\,; b\,]\,, f(t) \leq f(a)$, et en particulier $f(b) \leq f(a)$. On montre de même que

$$J = \{x \in [\, a\,; b\,] \mid \forall t \in [\, x\,; b\,]\,, f(t) \leq f(b)\}$$

   est un intervalle fermé non vide et que $\min(J) = a$ et donc que $J = [\, a\,; b\,]$ donc que, pour tout $t \in [\, a\,; b\,]\,, f(t) \leq f(b)$, et en particulier $f(a) \leq f(b)$ si bien que $f(a) = f(b)$. Mais a et b sont quelconques : en appliquant ce qui précède à f sur l'intervalle $[\, a\,; x\,]$ avec x un réel quelconque de $[\, a\,; b\,]$, on prouver que $f(a) = f(x)$ donc que f est constante. Un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité est donné par la fonction f vérifiant $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$ (l'indicatrice de $\mathbb{R}_+$, donc) : f admet un maximum local en tout point mais n'est pas constante (le dessin est laissé à votre charge).

2. (a) Découle du théorème des bornes atteintes puisque f est continue sur le segment $[\, a\,; b\,]$.

   (b) Découle du TVI puisque m et M sont atteints et f continue.

   (c) Comme d'habitude : partie non vide de $\mathbb{R}$ (car contient x) et majorée par x_0 donc admet une borne supérieure. Par hypothèse sur f, f admet en c un extremum local. Supposons que f admette un maximum local en c : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [\, c\,; c+\varepsilon\,]\,, f(t) \leq f(c)$. Or, $f(c) \leq f(x) < f(x_0)$ donc $c \neq x_0$ donc $c < x_0$ si bien que, pour ε assez petit, $c+\varepsilon < x_0$ et donc $x+\varepsilon$ appartient à cet ensemble, ce qui contredit le fait que c est sa borne supérieure. On en déduit que f n'admet pas en c un maximum local : elle admet donc en c un minimum local.

   (d) On montre comme d'habitude (suite (x_n) d'éléments de l'ensemble qui converge vers c puis continuité et l'inégalité large passe à la limite) que $f(c) \leq y$ (et donc en particulier c est un max). On montre comme ci-dessus qu'on ne peut pas avoir $f(c) < y$ donc $f(c) = y$. f admettant en c un minimum local, $f(t) \geq f(c) = y$ sur un intervalle du type $[\, c-\varepsilon\,; c\,]$ mais $f(t) \leq y$ si $t \leq c$ par choix de c. On en déduit que f est constante égale à y sur un voisinage (à gauche) de c et, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, un tel voisinage contient un rationnel, donc il existe bien un rationnel tel que $f(q) = y$. On peut donc définir la fonction

$$\varphi : \begin{cases}]\, m\,; M\,[& \longrightarrow \quad \mathbb{Q} \\ y & \longmapsto \text{un rationnel } q \text{ tel que } f(q) = y \end{cases}$$

   D'après ce qui précède, φ est bien définie, et elle est évidemment injective : en effet, si on prend deux réels y_1 et y_2 distincts de $]\, m\,; M\,[$ alors les rationnels q_1 et q_2 correspondants ne peuvent pas être égaux (ils ont comme image par f y_1 et y_2 qui sont différents donc sont différents, aucune injectivité là-dedans, c'est juste que des réels ayant une image différente sont forcément différents), mais l'existence d'une telle injection contredit la non-dénombrabilité de $]\, m\,; M\,[$.

13.8 Fonctions uniformément continues et lipschitziennes

Exercice 71 : ✪ Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle I.

1. Montrer que $f+g$ est lipschitzienne.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λf est lipschitzienne.
3. Montrer que si f et g sont bornées alors $f \times g$ est lipschitzienne. Contre-exemple sans l'hypothèse de bornitude ?

Correction : On suppose dans tout l'exercice que f est k_1-lipschitzienne et g k_2-lipschitzienne.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|(f+g)(x)-(f+g)(y)| = |f(x)-f(y)+g(x)-g(y)| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq k_1|x-y|+k_2|x-y| = (k_1+k_2)|x-y|$$

c'est-à-dire que $f+g$ est (k_1+k_2)-lipschitzienne.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \times |f(x)-f(y)| \leq |\lambda| \times k_1 \times |x-y|$$

c'est-à-dire que λf est $(|\lambda| \times k_1)$-lipschitzienne.

3. Supposons que f soit bornée par M_1 et g par M_2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|(f \times g)(x) - (f \times g)(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&= |f(x) \times (g(x)-g(y)) + (f(x)-f(y)) \times g(y)| \\
&\leq |f(x)| \times |g(x)-g(y)| + |f(x)-f(y)| \times |g(y)| \\
&\leq M_1 \times k_2|x-y| + k_1|x-y| \times M_2 \\
&\leq (M_1k_2 + M_2k_1) \times |x-y|
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f \times g$ est $(M_1k_2+M_2k_1)$-lipschitzienne. C'est faux sans l'hypothèse de bornitude : la fonction $x \mapsto x$ est lipschitzienne, mais la fonction carré ne l'est pas, un produit de fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzienne.

Exercice 72 : ✪ Soit f une fonction lipschitzienne définie sur un intervalle I. On note

$$E = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$$

1. Montrer que E admet une borne inférieure qu'on notera $\mathrm{Lip}(f)$.
2. Montrer que cette borne inférieure est un minimum, autrement dit que f est $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne.
3. Montrer que $E = [\,\mathrm{Lip}(f)\,;+\infty\,[$.
4. Donner une CNS pour que $\mathrm{Lip}(f) = 0$.

Correction :

1. f étant lipschitzienne, elle est k-lipschitzienne pour au moins un réel positif k donc E est non vide. Puisque E est minoré par 0 (c'est une partie de $\mathbb{R}_+$), il admet une borne inférieure.
2. Par caractérisation de la borne inférieure, il existe une suite (k_n) d'éléments de E qui converge vers $\mathrm{Lip}(f)$. Soit $(x,y) \in I^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $k_n \in E$ donc f est k_n-lipschitzienne si bien que

$$|f(x)-f(y)| \leq k_n|x-y|$$

Or, $k_n|x-y| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Lip}(f) \times |x-y|$ et l'inégalité large passe à la limite donc $|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{Lip}(f) \times |x-y|$, ce qui est le résultat voulu.

3. Soit $k \geq \mathrm{Lip}(f)$. Soit $(x,y) \in I^2$. D'après ce qui précède, et puisque $k \geq \mathrm{Lip}(f)$:

$$|f(x)-f(y)| \leq \mathrm{Lip}(f) \times |x-y| \leq k|x-y|$$

c'est-à-dire que f est k-lipschitzienne donc $k \in E$. En d'autres termes, $[\,\mathrm{Lip}(f)\,;+\infty\,[\subset E$. L'inclusion réciproque est immédiate puisque $\mathrm{Lip}(f) = \inf(E)$ donc tout élément de E est supérieur ou égal à $\mathrm{Lip}(f)$.

4. Montrons que $\text{Lip}(f) = 0$ si et seulement si f est constante. Si f n'est pas constante, il existe x et y tels que $f(x) \neq f(y)$ et donc
$$0 < |f(x) - f(y)| \leq \text{Lip}(f) \times |x - y| \leq k|x - y|$$
On en déduit que $\text{Lip}(f) \neq 0$. Réciproquement, supposons f constante. Alors, pour tous x et y, $|f(x) - g(y)| = 0 \leq 0 \times |x - y|$ c'est-à-dire que $0 \in E$. Or, $\text{Lip}(f) = \inf(E)$ donc $\text{Lip}(f) \leq 0$, et $\text{Lip}(f) \in E$ donc $\text{Lip}(f) \geq 0$, d'où l'égalité, d'où l'équivalence.

Exercice 73 : ✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est uniformément continue et bornée et si g est continue alors $g \circ f$ est uniformément continue.

Correction : Notons $m = \inf(f)$ et $M = \sup(f)$ qui existent car f est bornée. En d'autres termes, f est à valeurs dans $[\,m\,;M\,]$ (ce qui ne veut pas dire que $f(\mathbb{R}) = [\,m\,;M\,]$, m et M n'ont aucune raison d'être atteints). D'après le théorème de Heine, g est continue sur le segment $[\,m\,;M\,]$ donc g est uniformément continue sur ce segment.

Soit $\varepsilon > 0$. g étant uniformément continue sur $[\,m\,;M\,]$, il existe η_1 tel que, pour tous a et b dans $[\,m\,;M\,]$ tels que $|a - b| \leq \eta_1$, on a $|g(a) - g(b)| \leq \varepsilon$. Or, f est uniformément continue donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \dots$$
C'est en particulier vrai pour η_1 à la place de ε (penser à « truc ») : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y tels que $|x - y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \eta_1$ et donc
$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq \varepsilon$$
ce qui est le résultat voulu : $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 74 : ✪ Montrer que $x \mapsto x\ln(x)$ est uniformément continue sur $]\,0\,;1\,]$.

Correction : Notons cette fonction f. f est évidemment continue sur $]\,0\,;1\,]$ par produit, et prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ (car $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par croissances comparées). f ainsi prolongée est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, est uniformément continue donc est uniformément continue sur $]\,0\,;1\,]$ (si une fonction est UC sur un ensemble A, alors elle est UC sur tout ensemble B inclus dans A).

Exercice 75 : ✪✪ Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur un intervalle I.

1. Étudier l'uniforme continuité sur I de $f + g$, de $f \times g$ et de $1/f$ lorsque f ne s'annule pas.
2. On suppose que $f(I) \subset I$. La fonction $g \circ f$ est-elle uniformément continue sur I ?
3. On suppose que f est strictement monotone sur I. La fonction f^{-1} est-elle uniformément continue sur $J = f(I)$?

Correction :

1. En prenant $f = g = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, uniformément continues (car lipschitziennes), $f \times g$ est la fonction carré donc n'est pas UC (cf. cours) : un produit de fonctions UC ne l'est pas forcément. De même, si $f = \text{Id}_{\mathbb{R}_+^*}$, alors $1/f$ est la fonction inverse donc n'est pas UC. Prouvons cependant que, dans le cas général, $f + g$ est UC. Soit $\varepsilon > 0$. f et g étant UC :
$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists \eta_2 > 0, \forall (x, y) \in I^2, |x - y| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$$
Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et soit $(x, y) \in I^2$ tel que $|x - y| \leq \eta$. Une rapide inégalité triangulaire prouve que
$$|(f + g)(x) - (f + g)(y)| \leq 2\varepsilon$$
si bien que $f + g$ est UC (si on veut absolument un ε à la fin, il suffit de partir de $\varepsilon/2$ au départ, mais on sait que si on arrive à 2ε, le résultat est encore valide).
2. Soit $\varepsilon > 0$. g étant uniformément continue sur I, il existe η_1 tel que, pour tous a et b dans I tels que $|a - b| \leq \eta_1$, on a $|g(a) - g(b)| \leq \varepsilon$. Or, f est uniformément continue donc :
$$\forall \varepsilon > 0, \dots$$
C'est en particulier vrai pour η_1 à la place de ε (penser à « truc ») : il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y appartenant à I tels que $|x - y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \eta_1$ et donc

$$|g(f(x)) - g(f(y))| \leq \varepsilon$$

ce qui est le résultat voulu : $g \circ f$ est uniformément continue.

3. Non : la racine carrée est UC sur $\mathbb{R}_+$ mais sa réciproque, la fonction carré (ou plutôt sa restriction à $\mathbb{R}_+$) ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 76 : ✪✪✪ Soit f continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

Correction : f est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, f est UC. Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit donc $(x,y) \in [\,a\,;b\,]^2$. Si $|x-y| \leq \eta$

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

donc on a l'inégalité voulue pour tout α : il suffit donc de trouver α qui convient lorsque $|x-y| > \eta$, il conviendra automatiquement lorsque $|x-y| \leq \eta$. Supposons donc $|x-y| \geq \eta$. alors $(x-y)^2 > \eta^2$ (fonction carré strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$) donc

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{(x-y)^2} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\eta^2}$$

De plus, f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M = \sup |f|$ (c'est même un maximum) si bien que, par inégalité triangulaire,

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{(x-y)^2} \leq \frac{2M}{\eta^2}$$

Posons

$$\alpha = \frac{2M}{\eta^2}$$

Par conséquent,

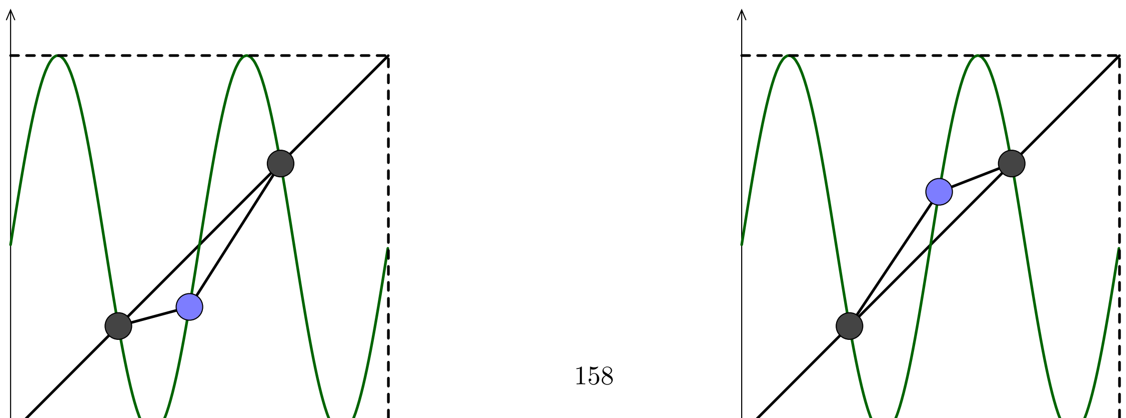
$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha(x-y)^2 \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

lorsque $|x-y| > \eta$, et on a déjà vu que cette valeur de α convenait aussi lorsque $|x-y| \leq \eta$. En fait, l'idée de la démonstration est de prouver que lorsque $|x-y| \leq \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, et sinon, $|f(x) - f(y)| \leq \alpha(x-y)^2$ donc, dans tous les cas, $|f(x) - f(y)|$ est inférieur à la somme des deux.

Exercice 77 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).

Correction : Puisque f est continue, alors f admet un point fixe (cf. cours) donc l'ensemble des points fixes de f (qu'on note S dans la suite) est non vide. Il suffit de prouver que c'est un intervalle, on prouvera ensuite de même que dans l'exercice 55 que c'est un segment.

Soient donc $x \leq y$ appartenant à S (donc deux points fixes de f), prouvons que $[\,x\,;y\,] \subset S$. Soit donc $z \in S$. L'idée est très simple : si z n'est pas un point fixe, alors il existe une pente strictement supérieure à 1 ce qui est absurde car f est 1-lipschitzienne.



Supposons donc que $f(z) \neq z$. Alors z n'est pas un point fixe donc $z \neq x$ car x est un point fixe, et de même, $z \neq y$. Supposons que $f(z) > z$, et montrons que la pente entre x et z est strictement supérieure à 1. Alors $f(z) > x = f(x)$ donc

$$\frac{|f(z) - f(x)|}{z - x} = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(z) - x}{z - x} > \frac{z - x}{z - x}$$

ce qui est absurde puisque f est 1-lipschitzienne. De même, si $f(z) < z$, alors la pente entre z et y est strictement supérieure à 1 ce qui est aussi absurde. On en déduit que z est un point fixe, donc $z \in S$ donc S est un intervalle, et on prouve de même que dans l'exercice 55 que S est un segment.

Exercice 78 : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas bornée. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Correction : Notons $\alpha = \inf(A)$ et $\beta = \sup(A)$, qui existent car A est bornée non vide. Supposons f uniformément continue. Alors, avec $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$

Soit N tel que $\alpha + (N-1)\eta \leq \beta < A + N\eta$ (on fait des sauts horizontaux de longueur η jusqu'à dépasser β). Soit $x_0 \in A$.

Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \llbracket 0\,;N \rrbracket$: H_k : « pour tout $x \in A$ tel que $|x - x_0| \leq k\eta$, alors $|f(x)| \leq |f(x_0)| + k$ » est vraie. Le résultat est évident au rang 0 ; soit $k \in \llbracket 0\,;N-1 \rrbracket$, supposons $H_0, \dots, H_k$ vraies et prouvons que H_{k+1} est vraie. Soit donc $x \in A$ tel que $|x - x_0| \leq (k+1)\eta$. Si $|x - x_0| \leq k\eta$ alors, par HR, $|f(x)| \leq |f(x_0)| + k \leq |f(x_0)| + (k+1)$. Sinon, alors soit $y = x - \eta$, soit $y = x + \eta$ vérifie $|y - x_0| \leq k\eta$ (si x est distant d'au plus $(k+1)\eta$ de x_0 alors, en se décalant vers la droite ou vers la gauche de η, on se ramène à une distance d'au plus $k\eta$) donc, par hypothèse de récurrence, $|f(y)| \leq |f(x_0)| + k$ et $|y - x| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(y)| \leq 1$ donc, par I.T., $|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq 1$ donc $|f(x)| \leq |f(y)| + 1$ ce qui clôt la récurrence.

Or, pour tout $x \in A$, $|x - x_0| \leq |\beta - \alpha| = N\eta$ si bien que $|f(x)| \leq N + |f(x_0)|$ donc f est bornée, d'où le résultat par contraposée.

Exercice 79 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Étudier si les conditions suivantes sont suffisantes pour dire que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$:

1. Pour toute suite croissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(\sqrt{n}))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Correction :

1. Oui : c'est la caractérisation séquentielle de la limite (la croissance de la suite n'est même pas nécessaire).
2. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x)$. On a alors, pour tout n, $f(n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ mais f n'a pas de limite en 0 : il suffit aussi d'évaluer f en $u_n = 2n + 1/2$, cela donne une suite qui tend vers $+\infty$ mais $f(u_n) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$. On a deux suites qui tendent vers $+\infty$ mais leurs images ont des limites différentes, ce qui permet de conclure.
3. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x^2)$.
4. Non : prendre $f : x \mapsto \sin(\pi x)$ qui est π-lipschitzienne. Rappelons qu'une fonction **dérivable »** est k-lipschitzienne si sa dérivée est bornée par k.
5. Oui. L'idée est que si f ne tend pas vers 0, elle devra monter et descendre régulièrement, mais puisque $f(\sqrt{n})$ tend vers 0, les images en les racines carrées tendent vers 0 donc f devra remonter entre deux racines carrées, mais puisque les racines carrées sont très proches les unes des autres (l'écart tend vers 0), la seule solution pour que f remonte est que f ait une pente de plus en plus raide, ce qui n'est pas possible avec f lipschitzienne.

   Montrons cela rigoureusement. Supposons donc que f soit k-lipschitzienne avec $k > 0$ et que $f(\sqrt{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Supposons que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$:

   $$\exists \varepsilon > 0, \forall A \geq 0, \exists x \geq A, |f(x)| > \varepsilon$$

   Prenons donc cette valeur de ε dans la suite. Puisque $f(\sqrt{n}) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:

   $$\exists n_0, \forall n \geq n_0, |f(\sqrt{n})| \leq \varepsilon/2$$

Soit $n \geq n_0$. En prenant $A = n$: il existe $x \geq n$ tel que $|f(x)| > \varepsilon$. On cherche N tel que $\sqrt{N} \leq x < \sqrt{N+1}$: on prend donc $N = \lfloor x^2 \rfloor \geq \lfloor n^2 \rfloor = n^2 \geq n_0$ si bien que $|f(\sqrt{N})| \leq \varepsilon/2$. On en déduit (inégalité triangulaire et f est k-lipschtzienne) que :

$$\varepsilon/2 \leq |f(x) - f(\sqrt{N})| \leq k|x - \sqrt{N}| \leq k|\sqrt{N+1} - \sqrt{N}|$$

On en déduit que

$$k \geq \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{N+1} - \sqrt{N})}$$

Or, $N \geq n$ donc

$$\frac{1}{\sqrt{N+1} - \sqrt{N}} = \sqrt{N+1} + \sqrt{N} \geq \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

On a donc montré le résultat suivant :

$$\forall n \geq n_0, k \geq \frac{\varepsilon}{2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$

ce qui est absurde puisque k est fixe et la quantité de droite tend vers $+\infty$.

Exercice 80 - Les fonctions UC sont sous-affines : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq ax + b$.

Correction : f étant UC, pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$

En clair : quand on fait des déplacements horizontaux de η, on fait des déplacements horizontaux de au plus 1. Dès lors, sur $[\,0\,;1\,]$, on est au plus en $|f(0)| + 1$, et sur $[\,0\,;2\,]$, au plus en $|f(0)| + 2$ et ainsi de suite : on progresse de 1 à chaque fois, ce qui « donne bien une fonction affine ». Prouvons cela rigoureusement.

Prouvons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(n\eta)| \leq n + |f(0)|$. Le résultat est immédiat si $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n.

$$|(n+1)\eta - n\eta| = \eta$$

donc $|f((n+1)\eta) - |f(n\eta)| \leq 1$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|f((n+1)\eta)| - |f(n\eta)| \leq |f((n+1)\eta) - |f(n\eta)| \leq 1$$

si bien que $|f((n+1)\eta)| \leq |f(n\eta)| + 1$ donc, par hypothèse de récurrence, $|f((n+1)\eta)| \leq n + |f(0)| + 1 = (n+1) + |f(0)|$ ce qui clôt la récurrence. Soit à présent $x \in \mathbb{R}_+$. Le truc est d'encadre x par deux multiples de η. Plus précisément, on cherche n tel que $n\eta \leq x < (n+1)\eta$ i.e. tel que $n \leq x/\eta < n+1$, donc on prend $n = \lfloor x/\eta \rfloor$. Tout d'abord, $|x - n\eta| \leq \eta$ donc $|f(x) - |f(n\eta)| \leq 1$. Toujours en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$|f(x)| - |f(n\eta)| \leq |f(x) - f(n\eta)| \leq 1$$

si bien que $|f(x)| \leq |f(n\eta)| + 1 \leq n + |f(0)| + 1$ d'après ce qui précède. Or, $n \leq x/\eta$ donc on trouve finalement :

$$\forall x \geq 0, |f(x)| \leq \frac{x}{\eta} + |f(0)| + 1$$

ce qui est le résultat voulu. Cela prouve d'une autre façon que la fonction carré et la fonction exponentielle ne sont pas UC ! Cependant, la réciproque est fausse, par exemple $f : x \mapsto \sin(x^2)$ est dominée par une fonction affine mais n'est pas UC.

Exercice 81 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie L_1 en $+\infty$ et une limite finie L_2 en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue. Une fonction bornée et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle forcément uniformément continue ?

Correction : On montre que f est bornée de même que dans l'exercice 21 : pour x assez grand (disons plus grand qu'un réel A), $L_1 - 1 \leq f(x) \leq L_1 + 1$, et pour x assez petit, disons inférieur à un réel C, $L_2 - 1 \leq f(x) \leq L_2 + 1$, et entre les deux, sur $[\,C\,;A\,]$, on applique le théorème des bornes atteintes, je vous laisse le rédiger. Montrons que f est UC. L'idée est assez simple : pour x assez grand, on est proche de L_1 donc on ne peut pas faire des bonds de plus de ε de hauteur, et idem pour x assez petit, et entre les deux, on est sur un segment donc on peut appliquer le théorème de Heine. Prouvons cela rigoureusement.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $B_1 \geq 0 \geq B_2$ tels que :

$$\forall x \geq B_1, |x - L_1| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall x \leq B_2, |f(x) - L_2| \leq \varepsilon$$

Or, f est continue sur le segment $[\,B_2\,;B_1\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, f est UC sur $[\,B_2\,;B_1\,]$: il existe $\eta > 0$ tel que, pour tous x et y dans $[\,B_2\,;B_2\,]$, si $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

Soient donc x et y deux réels quelconques tels que $|x - y| \leq \varepsilon$. On a cinq cas de figure :

- Si x et y appartiennent à $[\,B_2\,;B_1\,]$ alors on a $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ d'après ce qui précède.
- Si $x \leq B_1 \leq y$ alors

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f(B_1) + f(B_1) - f(y)| \leq |f(x) - f(B_1)| + |f(B_1) - f(y)|$$

  Or, x et B_1 appartiennent à $[\,B_2\,;B_1\,]$ et $|x - B_1| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(B_1)| \leq \varepsilon$. De plus, $f(B_1)$ et $f(y)$ appartiennent à $[\,L_1 - \varepsilon\,;L_1 + \varepsilon\,]$ donc $|f(B_1) - f(y)| \leq 2\varepsilon$ si bien que $|f(x) - f(y)| \leq 3\varepsilon$.
- Idem si $x \leq B_2 \leq y$.
- Enfin, si x et y appartiennent à $[\,B_1\,;+\infty\,[$ ou $]-\infty\,;B_2\,]$, on montre comme ci-dessus que $|f(x) - f(y)| \leq 2\varepsilon$.

Par conséquent, dans tous les cas, $|f(x)-f(y)| \leq 3\varepsilon$: f est bien uniformément continue. Cependant, une fonction continue bornée n'est pas forcément UC : cf. cours, $x \mapsto \sin(x^2)$ n'est pas UC.

Exercice 82 : ✪✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Correction : Notons u_n la quantité de l'énoncé. Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \,]\,0\,;1\,]^2\,, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Puisque $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $1/n \leq \varepsilon$. Soit donc $n \geq n_0$. L'idée est que k/n et $(k+1)/n$ sont distants de moins de η et l'un est multiplié par 1 et l'autre par -1 donc on a une quantité de la forme $f(x) - f(y)$ avec $|x - y| \leq \eta$ donc cette quantité sera comprise entre $-\varepsilon$ et ε, ce qui, en sommant, donne un terme inférieur à $n\varepsilon$, on divise par n, ce qui donne le résultat voulu.

Prouvons cela rigoureusement. On va regrouper les termes deux par deux. Séparons donc les cas selon la parité de n. Si n est pair, il existe p tel que $n = 2p$ si bien que

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p} f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{n}\right)$$

Or, $1/n \leq \eta$ si bien que chaque terme de la somme est compris entre $-\varepsilon$ et ε. Par somme,

$$\frac{-p\varepsilon}{n} = \frac{-\varepsilon}{2} \leq u_n \leq \frac{p\varepsilon}{n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Supposons n impair : il existe donc p tel que $n = 2p+1$. Dès lors :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\left(f\left(\frac{2k}{n}\right) - f\left(\frac{2k-1}{n}\right)\right) - \frac{f(1)}{n}$$

Le dernier terme vient du fait que n est impair. De même,

$$\frac{-p\varepsilon}{n} - \frac{f(1)}{n} = \frac{-(n-1)\varepsilon}{2n} - \frac{f(1)}{n} \leq u_n \frac{p\varepsilon}{n} - \frac{f(1)}{n} = \frac{(n-1)\varepsilon}{2n} - \frac{f(1)}{n}$$

Or, $f(1)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$, $|f(1)/n| \leq \varepsilon/2$.Pour tout $n \geq \max(n_0, n_1)$,

$$|u_n| \leq \frac{(n-1)\varepsilon}{2n} + \frac{|f(1)|}{n} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

Dans tous les cas, que n soit pair ou impair, lorsque $n \geq \max(n_0, n_1)$, $|u_n| \leq \varepsilon$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 83 : ✪✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Même question en remplaçant « lipschitzienne » par « uniformément continue ».

3. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la continuité.

Correction :

1. Soit $k \geq 0$ tel que f soit k-lipschitzienne. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f(n) \geq A$. Soit $x \geq n_0$ et soit $n = \lfloor x \rfloor \geq n_0$. Alors $f(n) \geq A$ et $|f(x) - f(n)| \leq k|x-n| \leq k$. Or,
$$f(n) - f(x) \leq |f(n) - f(x)| \leq k$$
si bien que $f(x) \geq f(n) - k \geq A - k$: on en déduit bien que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
2. Soit $A \geq 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $f(n) \geq A$. De plus, f est UC donc :
$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1$$
L'idée est qu'entre n et $n+1$, on ne peut faire un nombre fini et fixe de pas de longueur η ce qui ne peut pas trop faire descendre f. Plus précisément, soit $k = \lfloor 1/\eta \rfloor + 1$ si bien que $k - 1 \leq 1/\eta < k$ donc $1 < k\eta$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On prouve de même que dans l'exercice 78 ou l'exercice 80 que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $y \in [\,x\,;x + n\eta\,]$, $|f(y) - f(x)| \leq n$. Soit donc $x \geq n_0$ et soit $n = \lfloor x \rfloor \geq n_0$. Alors $f(n) \geq A$ et $|x - n| \leq 1 \leq k\eta$ si bien que $|f(x) - f(n)| \leq k$ donc $f(x) \geq f(n) - k \geq A - k$, ce qui permet de conclure (k est un entier fixe).
3. Il suffit de poser $f : x \mapsto x \times \sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ mais f ne tend par vers $+\infty$ en $+\infty$ car, par exemple, pour tout n,
$$f\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{n}{2} - \frac{1}{4}\right)\sin(n\pi) = 0$$
f fait des pics de plus en plus raides : ses valeurs entières tendent vers $+\infty$ mais entre chaque entier, elle repasse par 0.

Exercice 84 - Lemme de Croft pour les fonctions UC : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose que, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque : On peut montrer que ce résultat est toujours vrai si f est simplement continue, mais cela fait appel à un résultat hors programme appelé théorème de Baire. Cependant, si f n'est pas continue, ce résultat n'est plus valable : cf. exercice 9.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue,
$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2 |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
L'idée est simple : on prend $x = \eta$, tous ses multiples (donc l'écart entre deux multiples égal à η) finiront par être plus petits que ε puisque $f(nx) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, et les autres réels seront à distance inférieure de η donc, par uniforme continuité, seront distants d'un $f(nx)$ de moins de ε donc seront inférieurs à 2ε.

Montrons cela rigoureusement. En prenant $x = \eta$ dans l'hypothèse faite sur f, $f(n\eta) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f(n\eta)| \leq \varepsilon$$
Soit $x \geq A = n_0\eta$ et soit $n = \lfloor x/\eta \rfloor$ si bien que $n\eta \leq x < (n+1)\eta$. On en déduit que $n \geq n_0$ donc $|f(n\eta)| \leq \varepsilon$ et $|x - n\eta| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(n\eta)| \leq \varepsilon$ donc, toujours avec l'inégalité triangulaire,
$$|f(x)| - |f(n\eta)| \leq |f(x) - f(n\eta)| \leq \varepsilon$$
si bien que $|f(x)| \leq |f(n\eta)| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure.

Exercice 85 - Recollement : ✪✪✪✪ Soient $a < c$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $b \in \,]\,a\,;c\,[$ (b est donc un réel). Soit $f : \,]\,a\,;c\,[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est uniformément continue sur $]\,a\,;b\,]$ et sur $[\,b\,;c\,[$. Montrer que f est uniformément continue sur $]\,a\,;c\,[$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. f étant UC sur $]\,a\,;b\,]$ et sur $[\,b\,;c\,[$:

$$\exists \eta_1 > 0, \forall (x,y) \in \,]\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists \eta_2 > 0, \forall (x,y) \in [\,b\,;c\,[^2, |x-y| \leq \eta_2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Posons $m = \min(\eta_1, \eta_2)$. Prendre $|x - y| \leq m$ ne suffirait pas à obtenir $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$, il y aurait un problème dans le cas où $x \leq b \leq y$ (essayez !). Il faut « un sas de sécurité » autour de b. Sur le segment $[\,b - m\,;b + m\,]$, f est continue (en effet, f est UC donc continue sur $]\,a\,;b\,]$ et $[\,b\,;c\,[$ donc continue en tout point donc continue sur $]\,a\,;c\,[$, la continuité classique passe à l'union par définition) donc est uniformément continue d'après le théorème de Heine :

$$\exists \eta_3 > 0, \forall (x,y) \in [\,b-m\,;b+m\,]^2\,, |x-y|\|e\eta_3 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit à présent $\eta = \min(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = \min(m,\eta_3) > 0$ et soit $(x,y) \in \,]\,a\,;c\,[^2$ avec $|x-y| \leq \eta$. Si x et y sont inférieurs à b, alors $|x-y| \leq \eta_1$ donc $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. De même si x et y sont supérieurs à b. Dans le cas où $x \leq b \leq y$ (idem si $y \leq b \leq x$), puisque $|x-y| \leq \eta \leq m$, on a $b-m \leq x \leq b \leq y \leq b+m$ et $|x-y| \leq \eta \leq \eta_3$ donc on a encore $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Dans tous les cas, on a $|f(x)-f(y)|\|e\varepsilon$: f est UC sur $[\,a\,;c\,]$.

Chapitre 14

Dérivation

« - Eh bien, moi, à chaque fois que j'entends ça, je mets Duhamel à la porte.
- Mais comment savez-vous pour savoir que c'est lui ?
- Oh ! Je ne dis pas que c'est toujours lui qui fait la musique ; mais c'est toujours lui que je punis.
- Mais pourquoi ?
- Parce qu'il a une tête à ça.
- Voyons, mon cher collègue, vous plaisantez ?
- Pas le moins du monde.
- Alors, vous avez choisi un bouc émissaire, un pauvre enfant qui paye pour tous les autres ?
- Ah, permettez ! Duhamel, c'est pour la musique seulement. En cas de boules puantes, je punis le jeune Trambouze. Quand ils ont bouché le tuyau du poêle avec un chiffon, c'est Jusserand qui passa à la porte. Et si je trouve un jour de la colle sur ma chaise, ce sera tant pis pour les frères Gisher !
[...]
Et ce n'est pas si injuste que ça peut en avoir l'air ; parce que, voyez-vous, un élève qui a une tête à boucher le tuyau du poêle, il est absolument certain qu'il le bouchera et, neuf fois sur dix, c'est lui qui l'aura bouché.
- Mais la dixième fois ?
- Erreur judiciaire qui renforce mon autorité. »

Marcel Pagnol, Topaze

Si rien n'est précisé, I et J sont deux intervalles non vides, non réduits à un point, et a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Vrai ou Faux ?

1. Si f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ alors $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$.
2. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0)=1$. Il existe $a>0$ tel que f soit strictement croissante sur $[\,-a\,;a\,]$.
3. Si f est dérivable et strictement croissante alors f' est strictement positive.
4. La fonction $x \mapsto x \times |x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $\max(f,g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $|f|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est de signe constant.
7. Si f dérivable sur I admet un maximum en $a \in I$ alors $f'(a)=0$.
8. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(\alpha)=0$ alors $|f|$ n'est pas dérivable en α.
9. Si x et y sont inférieurs ou égaux à -1 alors $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x-y|/2$.
10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone dérivable. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.
11. Si f est dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f(a)$ lorsque h est suffisamment proche de 0.
12. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f_{|\mathbb{R}_+}$ et $f_{|\mathbb{R}_-}$ sont dérivable alors f est dérivable.
14. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
15. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
16. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
17. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
18. La dérivée n-ième du sinus est $x \longmapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

19. La dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto xe^x$ est $x \longmapsto (x+n)e^x$.
20. La dérivée n-ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est elle-même.
21. Si f est croissante et $\mathscr{C}^\infty$ alors, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est positive.
22. Si f est paire et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes paires.
23. Si f est périodique et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes périodiques.

14.1 Dérivées.

Exercice 1 : ✪ Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor) \times (x - \lfloor x \rfloor - 1)$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \times e^{-|x|}$
3. $f : x \mapsto |\sin(x)|$

On donnera à chaque fois l'allure du graphe, et on tracera les demi-tangentes en 0.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, alors f est dérivable en x car la partie entière est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Examinons à présent la dérivabilité sur $\mathbb{Z}$. Or :

$$\begin{aligned} f(x+1) &= (x+1-\lfloor x+1 \rfloor)(x+1-\lfloor x+1 \rfloor - 1) \\ &= (x+1-\lfloor x \rfloor - 1)(x+1-\lfloor x \rfloor - 1 - 1) \\ &= (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

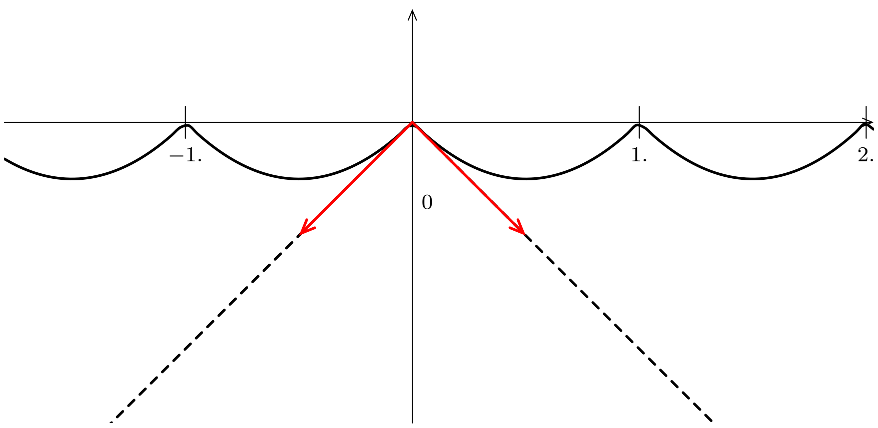
c'est-à-dire que f est 1-périodique. Il suffit donc d'étudier la dérivabilité en 0. Pour cela, étudions la dérivabilité à gauche et à droite. Sur $[\,0\,;1\,[$, $f(x) = x(x-1) = x^2 - x$ donc f est dérivable à droite en 0 avec $f'(x) = 2x-1$ donc f est dérivable à droite en 0 avec ${f_d}'(0) = -1$. Sur $]\,0\,;1\,[$, $\lfloor x \rfloor = -1$

$$f(x) = (x+1) \times x$$

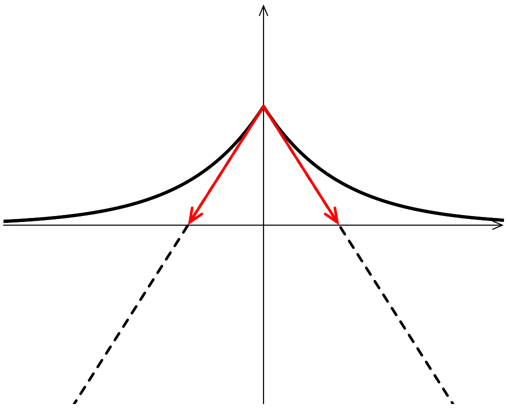
De cela on déduit que $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 = f(0)$: f est continue à gauche en 0 donc est continue en 0 (car f est continue à droite) donc sur $\mathbb{Z}$ par périodicité, et on en déduit également que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$$

f est donc dérivable à gauche en 0 avec ${f_g}'(0) = 1$. f n'est donc pas dérivable en 0 et, par périodicité, n'est pas dérivable en tout point de $\mathbb{Z}$. Ci-dessous le graphe de f avec les demi-tangentes en 0.



2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composée de fonctions dérivables (la valeur absolue est dérivable. Plus précisément, si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$ donc $f'(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$, et si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$ donc $f'(x) = -\dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$. Les égalités $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^x$ et $f(x) = \dfrac{\pi}{2} \times e^{-x}$ étant en fait valables sur $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+$, f est dérivable à gauche et à droite en 0 avec ${f_g}'(0) = \pi/2$ et ${f_d}'(0) = -\pi/2 \neq {f_g}'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0. Ci-dessous le graphe de f avec les demi-tangentes en 0.



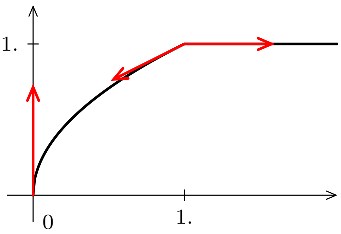
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$ car, sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$, sin est dérivable et ne s'annule pas, et la valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Sur $[\,0\,;\pi\,]$, $f(x) = \sin(x)$ donc f est dérivable à droite en 0 avec ${f_d}'(0) = 1$. Sur $[\,-\pi\,;0\,]$, $f(x) = -\sin(x)$ donc f est dérivable à gauche en 0 avec ${f_g}'(0) = -1 \neq {f_d}'(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0 et, par π-périodicité (f est π-périodique, exo), f n'est dérivable en aucun multiple de π. Le graphe de $|\sin|$ se trouve dans le cours.

Exercice 2 : ✪ Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

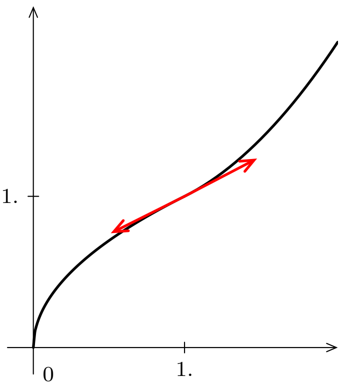
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ & \\ ax^2+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Même question avec $x \mapsto ax^2+bx+1$ à la place de ax^2+1.

Correction : Tout d'abord, une condition nécessaire pour que f soit $\mathscr{C}^1$ est que f soit continue en 1. Or, $f(1) = \sqrt{1} = 1$ et la limite à droite de f en 1 est $a+1$. Par conséquent, une condition nécessaire pour que f soit $\mathscr{C}^1$ donc continue en 1 est que a soit nul, donc que f soit constante égale à 1 sur $]\,1\,;+\infty\,[$, mais alors f n'est pas dérivable en 1 car sa dérivée à droite en 1 est nulle et sa dérivée à gauche vaut $1/2\sqrt{1} = 1/2$. En conclusion, pour tout a, f n'est pas dérivable en 1 donc f n'est pas $\mathscr{C}^1$.



Pour la deuxième partie de la question : une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue en 1 est d'avoir $a+b+1=1$ donc $a+b=0$, et une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en 1 est d'avoir $1/2 = 2a+b$ (dérivée à gauche égale à la dérivée à droite). Or, ces deux conditions sont remplies si et seulement si $a = 1/2 = -b$. Supposons donc $a = 1/2$ et $b = -1/2$. D'après ce qui précède, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec $f'(1) = 1/2$. Prouvons que f' est continue en 1 puisque f est évidemment $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$. Si $x<1$, $f'(x) = 1/2\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} 1/2 = f'(1)$ et, si $x>1$, $f'(x) = x - 1/2$ (car $a = 1/2$ et $b = -1/2$) donc $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1/2 = f'(1)$. En d'autres termes, f' est continue en 1 donc f est $\mathscr{C}^1$. En conclusion, f est $\mathscr{C}^1$ si et seulement si $a = 1/2$ et $b = -1/2$.



Exercice 3 : ✪ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$$

On suppose que pour tout x réel, $|f(x)|\leq |x|$. Montrer que $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leq 1$.

Correction : $f(0)=0$. Par hypothèse, pour tout $x\neq 0$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = \frac{|f(x)|}{|x|}\leq 1$$

Or, f est dérivable en 0 et la valeur absolue est continue donc

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \xrightarrow[x\to 0]{} |f'(0)|$$

L'inégalité large passe à la limite donc $|f'(0)|\leq 1$. Or, pour tout x,

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{n} ka_k \cos(kx)$$

En particulier,

$$f'(0)=\sum_{k=1}^{n} ka_k$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 4 : ✪ Montrer que la fonction f ci-dessous est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$f:x\mapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{sinon}\end{cases}$$

Correction : On va chercher à appliquer le théorème de la limite de la dérivée. Tout d'abord, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée d'une fonction qui l'est par une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (Arctangente). De plus, $y=1+\dfrac{1}{x^2}\xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $\operatorname{Arctan}(y)\xrightarrow[y\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{2}$. Par composition de limites, $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}\dfrac{\pi}{2}$: f est continue en 0. Pour conclure, il suffit donc de prouver que f' admet une limite finie en 0. Soit $x\neq 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2}{x^3}\times\frac{1}{1+\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^2} \\ &= \frac{-2}{x^3}\times\frac{1}{1+\dfrac{(x^2+1)^2}{x^4}} \\ &= \frac{-2}{x^3}\times\frac{x^4}{x^4+(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2x}{x^4+(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Ainsi $f'(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 : ✪ Soit f dérivable sur un intervalle I, soit $x_0\in I$. Après avoir montré leur existence, donner

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+7h)-f(x_0-4h)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}$$

Correction : Pour la première limite, on utilise le résultat suivant :

$$\frac{f(x_0+\text{truc})-f(x_0)}{\text{truc}}\xrightarrow[\text{truc}\to 0]{} f'(x_0)$$

Attention, ce doit être le même truc dans f qu'au dénominateur. Il faut donc parfois compenser. Soit $h\neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+7h)-f(x_0-4h)}{h} &= \frac{f(x_0+7h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0)-f(x_0-4h)}{h}\\ &= 7\times\frac{f(x_0+7h)-f(x_0)}{7h}-(-4)\times\frac{f(x_0-4h)-f(x_0)}{-4h}\\ &\xrightarrow[h\to 0]{} 7f'(x_0)-(-4)f'(x_0)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la première limite recherchée est $11f'(x_0)$. Pour la deuxième, si $x\neq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0} &= \frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}\\ &= \frac{(x-x_0)f(x_0)+x_0(f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\\ &= f(x_0)+x_0\times\frac{f(x_0)-f(x)}{x-x_0}\\ &\xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)+x_0\times f'(x_0)\end{aligned}$$

Exercice 6 - Fonctions hölderiennes dans un cas facile : ✪ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels $A\geq 0$ et $\alpha>1$ tels que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, |f(x)-f(y)|\leq A|x-y|^{\alpha}$$

Montrer que f est constante.

Correction : Il suffit de prouver que f est dérivable (ce qui n'est pas supposé : il faut le prouver) de dérivée nulle. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit $x\neq a$. Par hypothèse,

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\leq A|x-a|^{\alpha-1}$$

Or, $\alpha-1>0$ donc $A|x-a|^{\alpha-1}\xrightarrow[x\to a]{}0$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\xrightarrow[x\to a]{}0$$

On en déduit, d'une part, que f est dérivable (car son taux d'accroissement admet une limite finie) en a et que $f'(a)=0$ (c'est la limite du taux d'accroissement quand celle-ci existe). a étant quelconque, f est dérivable et de dérivée nulle donc f est constante.

Exercice 7 : ✪ Soit $f:[\,a\,;b\,]\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(a)>0$ et que $f(a)=f(b)$. Montrer qu'il existe $c\in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c)<0$.

Correction : Raisonnons par l'absurde et supposons que $f'(c)\geq 0$ pour tout $c\in\,]\,a\,;b\,[$. Alors f est croissante. Par conséquent, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$ et puisque $f(a)=f(b)$, alors f est constante sur $[\,a\,;b\,]$ ce qui est absurde puisque $f'(a)\neq 0$.

Exercice 8 : ✪ Justifier que $f:x\mapsto x+\cos(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et étudier la dérivabilité de sa réciproque.

Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=1-\sin(x)\geq 0$ avec égalité si et seulement s'il existe $n\in\mathbb{Z}$ tel que $x=\pi/2+2n\pi$. Dès lors, f' n'est nulle sur aucun intervalle d'intérieur non vide (f ne fait pas de palier) donc f est strictement croissante. De plus, f est continue. Enfin, $f(x)\geq x-1$ donc, par minoration, $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. De même, $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De plus, f^{-1} est dérivable sauf en l'image des points en lesquels f' s'annule. Or, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $f(\pi/2+2n\pi)=\pi/2+2n\pi$ puisque le cosinus s'annule en ces points. Par conséquent, f^{-1} est dérivable sauf en les $\pi/2+2n\pi$ lorsque n décrit $\mathbb{Z}$.

Exercice 9 : ✪✪

1. Montrer que

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[-1\,;0\,[\cup\,]\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x^2\times\left(1+\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)\end{array}\right.$$

est prolongeable en une fonction dérivable sur $[-1;1]$ mais que sa dérivée n'est pas bornée. En déduire que f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

2. Montrer que f admet un minimum global en 0 mais n'est décroissante sur aucun intervalle du type $[-\varepsilon;0]$, ni croissante sur aucun intervalle du type $[0;\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Correction :

1. Pour tout $x \in [-1;0[\cup]0;1]$, $0 \leq f(x) \leq 2x^2$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Soit $x \neq 0$.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \times \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

qui tend vers 0 pour la même raison (attention, x n'étant pas positif, il faut encadrer par $\pm|x|$) donc f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. Soit $x \neq 0$. Alors

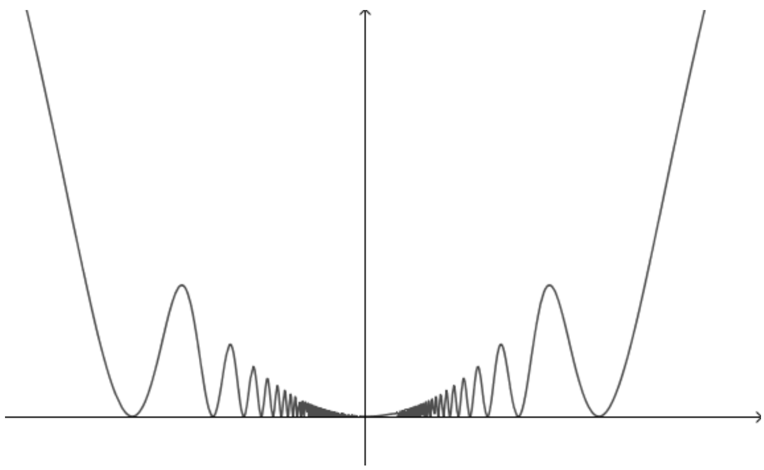
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) + x^2 \times \frac{-2}{x^3} \times \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \times \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \frac{2}{x} \times \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Il suffit d'exhiber une suite (x_n) telle que $|f'(x_n)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Le premier terme est borné par 4 : pour trouver une telle suite, il faut en chercher une qui maximise la deuxième quantité, et le cosinus nous gêne : on cherche une suite en laquelle $x \mapsto \cos(1/x^2)$ vaut 1. On pose donc, pour tout n, $x_n = 1/\sqrt{2n\pi}$. Pour tout n,

$$\begin{aligned} f'(x_n) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \times (1 + \sin(2n\pi)) - 2\sqrt{2n\pi} \times \cos(2n\pi) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} - 2\sqrt{2n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty \end{aligned}$$

si bien que f' n'est pas bornée. Si f était $\mathscr{C}^1$, alors f' serait continue donc bornée sur le segment $[-1;1]$ (théorème des bornes atteintes) et on vient de voir que ce n'était pas le cas, donc f est dérivable mais n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[-1;1]$.

2. f est positive et vaut 0 en 0 donc admet un minimum global en 0. Cependant, on vient d'exhiber une suite (x_n) strictement positive qui tend vers 0 telle que $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$: par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, $x_n \in [0;\varepsilon]$ et $f(x_n) < 0$ pour n assez grand. On en déduit que f n'est pas croissante sur $[0;\varepsilon]$ puisque f est strictement négative en un point (en fait : une infinité de points) sur $[0;\varepsilon]$. De même de l'autre côté, f' est strictement positive en une infinité de points (tous les $-1/\sqrt{2n\pi}$) donc n'est pas décroissante sur tout intervalle du type $[-\varepsilon;0]$. Ci-dessous, le graphe de f : même s'il y a un minimum en 0, aussi proche soit-on de 0, elle oscille indéfiniment (entre les deux enveloppes : le graphe de la fonction nulle et le graphe de $x \mapsto 2x^2$, tracez les, exo) donc n'est monotone ni à gauche, ni à droite de 0.



Exercice 10 : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \sup\{f'(x) \mid x \in [a;b]\}$$

Que peut-on dire de f ?

Correction : Intuitivement, il est clair que f est affine i.e. que le graphe de f coïncide avec la corde joignant les points du graphe de f d'abscisses a et b car, si ce n'est pas le cas, alors f est à un moment au dessus ou en dessous de la corde, et pour joindre $f(a)$ et $f(b)$, à un moment, la pente de la tangente (i.e. le coefficient directeur de la tangente i.e. le nombre dérivé) doit être plus grande que la pente de la corde, ce qui est exclut par hypothèse (la pente de la corde est la borne supérieure des pentes des tangentes au graphe de f) : faites un dessin pour vous en convaincre. Montrons donc que f est affine i.e. que f' est constante sur $[\,a\,;b\,]$. Comme dans la preuve de l'EAF, définissons sur $[\,a\,;b\,]$ la fonction

$$g : x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a) + f(a)$$

Alors g est dérivable et, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$,

$$(f-g)'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$$

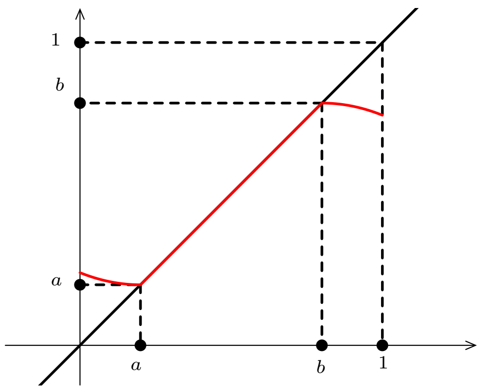
i.e. $f-g$ est décroissante. Or, $(f-g)(a) = (f-g)(b) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $(f-g)(a) = 0 \geq (f-g)(x) \geq (f-g)(b) = 0$ donc $(f-g)(x) = 0$. En d'autres termes, $f = g$, f est affine.

Exercice 11 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ dérivable vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).
2. Montrer que f est soit constante, soit égale à l'identité.

Correction :

1. cf. exercice 55 du chapitre 13.
2. Notons $[\,a\,;b\,]$ (avec $a \leq b$) l'ensemble des points fixes (non vide). Puisque toute image est un point fixe, alors $f([\,0\,;1\,]) \subset [\,a\,;b\,]$ i.e. f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$. Si f n'est que continue, le graphe de f est donc de la forme ci-dessous :



Prouvons que ce n'est pas possible si f est dérivable. L'idée est très simple : la dérivée à droite et à gauche en a ou en b ne seront pas égales, si f n'est pas constante ou égale à l'identité, ce qui est absurde si f est dérivable. Si $a = b$, alors l'ensemble des points fixes est un singleton, et puisque $f([\,0\,;1\,]) \subset [\,a\,;b\,] = \{a\}$, alors f est constante. Supposons donc $a < b$. Prouvons que $a = 0$ et $b = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $a > 0$. Sur $[\,a\,;b\,]$, $f(x) = x$ donc f est dérivable à droite en a et ${f_d}'(x) = 1$ et puisque f est dérivable, la dérivée à droite est égale à la dérivée donc $f'(a) = 1$. Or, on a déjà dit plusieurs fois que f est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$, et en particulier, f ne prend que des valeurs supérieures à a. Dès lors, pour tout $x < a$, $f(x) \geq f(a)$ si bien que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

L'inégalité large passe à la limite donc ${f_g}'(a) = f'(a) \leq 0$ ce qui est absurde. On en déduit que $a = 0$. De même, $b = 1$ si bien que l'ensemble des points fixes est $[\,0\,;1\,]$. En d'autres termes, tout élément de $[\,0\,;1\,]$ est un point fixe, f est l'identité.

Exercice 12 : ✪✪ Soient $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On se donne f de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(ax+b) = af(x) + b$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'\left(a^n x + \frac{a^n-1}{a-1} b\right)$$

2. En déduire toutes les fonctions f qui conviennent lorsque $a < 1$.

3. Même question lorsque $a > 1$.

Correction :

1. Notons $g : x \mapsto f(ax+b)$ et $h : x \mapsto af(x)+b$. g et h sont égales donc ont la même dérivée, si bien que pour tout x, $af'(ax+b) = af'(x)$ et puisque $a \neq 0$, $f'(ax+b) = f'(x)$. Le résultat découle alors d'une récurrence immédiate (faites la).
2. Supposons $a < 1$ i.e. $a \in \,]\,0\,;1\,[$ donc $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. f' étant continue (car f est $\mathscr{C}^1$),
$$f'(x) = f'\left(a^n x + \frac{a^n-1}{a-1}b\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'\left(\frac{-b}{a-1}\right)$$
Or, $f'(x)$ ne dépendant pas de n, on a égalité, c'est-à-dire que $f'(x) = f'(-b/(a-1))$. En particulier, f' est constante : f est affine. Réciproquement, soit $f : x \mapsto cx+d$ une fonction affine. Alors f est solution si et seulement si :
$$\forall x \in \mathbb{R}, c(ax+b)+d = a(cx+d)+b$$
si et seulement si $bc+d = ad+b$. Dès lors, les solutions sont les fonctions affines $f : x \mapsto cx+d$ avec c et d vérifiant l'égalité $bc+d = ad+b$ (il ne s'agit donc pas de toutes les fonctions affines !).
3. L'égalité $f'(ax+b) = f'(x)$ de la question 1 se réécrit, avec $\dfrac{x-b}{a}$ à la place de x (penser à « truc ») :
$$f'(x) = f'\left(\frac{x-b}{a}\right) = f'\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right)$$
En d'autres termes, c'est la même relation que $f'(x) = f'(ax+b)$ avec $1/a$ à la place de a et $-b/a$ à la place de b, si bien que l'égalité obtenue à la question 1 devient :
$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{a^n} + \frac{\frac{1}{a^n}-1}{\dfrac{1}{a}-1} \times \frac{-b}{a}\right)$$
On conclut de la même façon et on obtient le même résultat qu'à la question précédente.

Exercice 13 - Dérivée symétrique : ✪✪ Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Lorsque la limite
$$\lim_{h\to0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$
existe (et est finie), on la note ${f_s}'(a)$ et on l'appelle la dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a alors ${f_s}'(a)$ existe et donner sa valeur.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Si f est croissante sur I et admet une dérivée symétrique en tout point, montrer que celle-ci est positive sur I.
4. Si ${f_s}'$ est nulle sur I, f est-elle constante sur I ?

Correction :

1. Soit $a \in I$. Supposons donc f dérivable à droite et à gauche, de dérivée à gauche ${f_d}'(a)$ et ${f_g}'(a)$. Soit $h > 0$.
$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2} \times \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{1}{2} \times \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}$$
Or,
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to0^+]{} {f_d}'(a) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to0^-]{} {f_g}'(a)$$
et $-h \xrightarrow[h\to0^+]{} 0^-$ si bien que
$$\frac{f(a-h)-f(a)}{-h} \xrightarrow[h\to0^+]{} {f_g}'(a)$$
On en déduit que
$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \xrightarrow[h\to0^+]{} \frac{{f_d}'(a)+{f_g}'(a)}{2}$$

2. Prendre l'indicatrice de $\{0\}$: non dérivable à droite ni à gauche en 0 (car n'est pas continue à droite ni à gauche) mais admet une dérivée symétrique car, pour tout $h > 0$,

$$\frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = 0 \xrightarrow[h \to 0^+]{} 0$$

3. Soit $a \in I$ et soit $h > 0$. f étant croissante, $f(a+h) \geq f(a-h)$ donc

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \geq 0$$

et on conclut en disant que l'inégalité large passe à la limite.

4. Non, par exemple, si f est l'indicatrice de $\{0\}$, alors f admet une dérivée symétrique nulle mais n'est pas constante.

Exercice 14 : ✪✪ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Correction : Analyse : soit f une fonction qui convient. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(2x) = 2f(x)$. En appliquant cette égalité à $x/2$ (penser à « truc »), il vient : $f(x) = 2f(x/2)$ donc $f(x/2) = f(x)/2$. Par une récurrence immédiate (faites-la), pour tout n, $f(x/2^n) = f(x)/2^n$. De plus, en prenant $x = 0$, il vient : $f(2 \times 0) = 2f(0)$ i.e. $f(0) = 2f(0)$ si bien que $f(0) = 0$. Par conséquent :

$$\frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} = \frac{2^n}{x} \times \frac{f(x)}{2^n} = \frac{f(x)}{x}$$

Or, f étant dérivable en 0, et puisque $x/2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il vient :

$$\frac{f(x/2^n) - f(0)}{x/2^n} = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)$$

Mais $f(x)/x$ étant constant (ne dépend pas de n), il y a égalité donc $f(x)/x = f'(0)$ pour tout x donc $f(x) = f'(0) \times x$: f est une fonction linéaire. Synthèse : une fonction linéaire i.e. de la forme $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ convient. Conclusion : les solutions sont exactement les fonctions linéaires.

Exercice 15 - La dérivabilité est une notion ponctuelle : ✪✪ Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Correction : La discontinuité en tout réel non nul se prouve de la même façon que dans les exercices 29 et 31 du chapitre 13. Prouvons que f est dérivable en 0. On cherche à prouver que

$$\tau_0 : x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

admet une limite finie en 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon$. Soit $x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta = \varepsilon$. Alors $|\tau_0(x)| = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $|\tau_0(x)| = |x| \leq \varepsilon$ si $x \in \mathbb{Q}$. Dans tous les cas, $|\tau_0(x) - 0| \leq \varepsilon$. On a donc prouvé le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - 0| \leq \eta \Rightarrow |\tau_0(x) - 0| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $\tau_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$: le taux d'accroissement admet une limite finie, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f \times f' \times f'' = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction affine.

1. Supposons que $f''(0) \neq 0$.
   (a) Supposons également que $f'(0) \neq 0$. Qui est nul alors ?
      i. Montrer que f est strictement monotone sur un voisinage de 0.
      ii. Montrer que f'' est nulle sur un voisinage de 0, sauf en 0, et conclure à une absurdité.
   (b) Conclure à une absurdité en supposant à présent que $f'(0) = 0$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x + x_0)$, montrer que $f''(x_0) = 0$ et conclure.

Correction :

1. (a) Puisque $ff'f''=0$, que $f'(0)\neq 0$ et $f''(0)\neq 0$, alors $f(0)=0$.

   i. $f'(0)\neq 0$ et f' est continue donc f' est de signe constant sur un voisinage de 0, ce qui donne le résultat voulu.

   ii. On en déduit que f est strictement croissante ou strictement décroissante sur un voisinage de 0. Dès lors, sur ce voisinage, f ne s'annule qu'en 0. Finalement, sur ce voisinage, f' ne s'annule pas, et f ne s'annule qu'en 0. Puisque $ff'f''=0$, alors f'' est nulle sur ce voisinage, sauf éventuellement en 0, mais puisque f est $\mathscr{C}^2$, alors f'' est continue. f'' est nulle sur un voisinage de 0 sauf éventuellement en 0 donc $f''(0)=0$ ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $f''(0)=0$. Ce qui est absurde, c'est la dernière hypothèse faite, à savoir $f'(0)\neq 0$. On en déduit donc que $f'(0)=0$.

   (b) $f''(0)\neq 0$ et f'' est continue donc, de même, f'' est de signe constant au voisinage de 0 donc f' est strictement monotone au voisinage de 0. Il existe donc $\varepsilon>0$ tel que f' soit strictement négative sur $]-\varepsilon\,;0\,[$ et strictement positive sur $]\,0\,;\varepsilon\,[$ (si f' est strictement croissante sur ce voisinage), soit le contraire, c'est-à-dire strictement positive sur $]-\varepsilon\,;0\,[$ et strictement négative sur $]\,0\,;\varepsilon\,[$ (si f' est strictement décroissante sur ce voisinage). Selon les cas, cela implique que f est strictement décroissante puis strictement croissante ou le contraire sur ce voisinage de 0. Dans tous les cas, f et f' ne s'annulent qu'en 0, donc f'' s'annule sur ce voisinage de 0, sauf peut-être en 0, et on conclut à une absurdité de la même façon que dans la question précédente. On en déduit donc que $f''(0)=0$.

2. g est évidemment $\mathscr{C}^2$, et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$g(x)g'(x)g''(x)=f(x+x_0)f'(x+x_0)f''(x+x_0)=0$$

   g vérifie la même équation que f (i.e. $gg'g''=0$). D'après la question 1, $g''(0)=0$ donc $f''(x_0)=0$. x_0 étant quelconque, f'' est la fonction nulle, donc f est affine.

14.2 Extrema, Rolle et accroissements finis.

Exercice 17 : ✪ Montrer que la dérivée d'une fonction périodique dérivable s'annule une infinité de fois.

Correction : Soit $T>0$ une période. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f(nT)=f((n+1)T)$, f est continue sur $[\,nT\,;(n+1)T\,]$ et dérivable sur $]\,nT\,;(n+1)T\,[$: d'après le théorème de Rolle, f' s'annule sur $]\,nT\,;(n+1)T\,[$. Ces intervalles étant deux à deux disjoints, f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 18 : ✪ Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x\in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $4ax^3+3bx^2+2cx=a+b+c$.

Correction : Comme d'habitude, mettons tout du même côté : il faut donc montrer qu'il existe $x\in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $4ax^3+3bx^2+2cx-(a+b+c)=0$. Le membre de gauche ressemble à une dérivée (à cause du $4x^3$, du $3x^2$ et du $2x$) : posons $g:x\mapsto ax^4+bx^3+cx^2-(a+b+c)x$. Alors g est continue sur $[\,0\,;1\,]$, dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ avec $g(0)=g(1)=0$, et le théorème de Rolle permet de conclure.

Exercice 19 : ✪ À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001}\approx 100\qquad 0.99^2\approx 1\qquad\text{et}\qquad \cos(1)\approx\frac{1}{2}$$

Correction :

- On veut majorer $|\sqrt{10001}-\sqrt{10000}|$ donc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}|$ sur l'intervalle $I=[\,10000\,;10001\,]$. Notons f la racine carrée, dérivable sur I, de dérivée $f':x\mapsto 1/2\sqrt{x}$ qui est décroissante, donc $|f'|\leq 1/2\sqrt{10000}=1/200$. Par conséquent,

$$|\sqrt{10001}-100|=|\sqrt{10001}-\sqrt{10000}|\leq\frac{1}{200}|10001-10000|=\frac{1}{200}=0.005$$

  L'erreur est donc majorée par 0.005.
- On veut majorer $|1^2-0.99^2|$. Notons f la fonction carré, dérivable sur $[\,0.99\,;1\,]$. Sa dérivée est $f:x\mapsto 2x$, bornée par 2 sur $[\,0.99\,;1\,]$. D'après l'IAF,

$$|1-0.99^2|\leq 2|1-0.99|=\frac{2}{100}=0.02$$

- On veut majorer $|\cos(1)-\cos(\pi/3)|$. La fonction $\cos'=\sin$ est croissante sur $[\,1\,;\pi/3\,]$ donc est majorée par $\cos(\pi/3)=\sqrt{3}/2$. D'après l'IAF,

$$|\cos(1)-1/2|\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(\frac{\pi}{3}-1\right)\approx 0.03$$

  Dans tous les cas, l'approximation (simple !) est tout de même assez précise.

Exercice 20 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

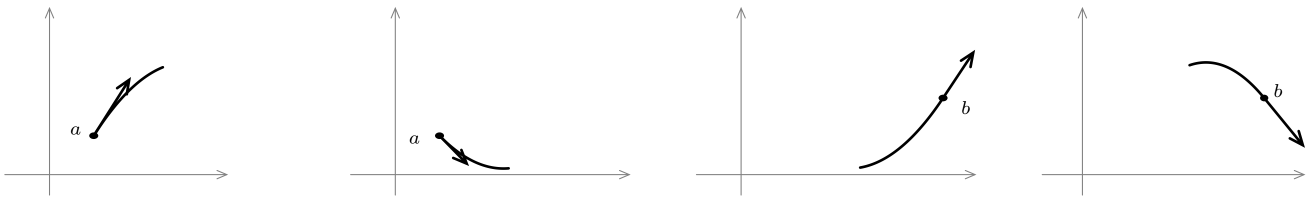
Correction : f' étant périodique (car f l'est), continue, on prouve de même que dans l'exercice 19 du chapitre 13 que f' est bornée donc f est lipschitzienne.

Exercice 21 - Un résultat bien utile : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $c \in \,]\,a\,;a+\eta\,]\,, f(c) > f(a)$ (on s'intéressera au taux d'accroissement). En particulier, il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) > f(a)$. Attention, cela ne veut pas dire que f est strictement croissante sur un voisinage de a ! On a en effet vu un contre-exemple dans le cours.
2. Donner un résultat analogue si $f'(a) < 0$, si $f'(b) > 0$ ou si $f'(b) < 0$. Ce genre de résultat peut être très utile. Voici quatre exercices qui l'utilisent.

Correction :

1. Il suffit de voir que, puisque $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a^+]{} f'(a) > 0$ alors il existe un voisinage $]\,a\,;a+\eta\,]$ de a (où $\eta > 0$) tel que, pour tout $x \in \,]\,a\,;a+\eta\,]$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$. Or, si $x \in \,]\,a\,;a+\eta\,]$, $x - a > 0$ ce qui permet de conclure. C'est le premier dessin ci-dessous.
2. De même, si $f'(a) < 0$, alors il existe $c > a$ tel que $f(c) < f(a)$ (deuxième dessin), si $f'(b) > 0$, il existe $c < b$ tel que $f(c) < f(b)$ (troisième dessin), tandis que si $f'(b) < 0$, alors il existe $c < b$ tel que $f(c) > f(b)$ (quatrième dessin).



Exercice 22 : ✪ Soient f et $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$ et $f'(b) > g'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) = g(c)$.

Correction : Je vous laisse faire le dessin. Notons $\varphi = f - g$. Alors φ est dérivable, $\varphi'(a) > 0$ et $\varphi'(b) > 0$. D'après l'exercice précédent, il existe $x_1 > a$ tel que $\varphi(x_1) > \varphi(a) = 0$. De même, il existe x_2 tel que $\varphi(x_2) < \varphi(b) = 0$. φ est continue donc, d'après le TVI, il existe $c \in \,]\,x_1\,;x_2\,[$ tel que $\varphi(c) = 0$ donc tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 23 : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$, que $f'(a) > 0$ et que $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c_1 < c_2 < c_3$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Correction : Je vous laisse faire le dessin. D'après l'exercice 21, il existe $c_1 > a$ tel que $f(c_1) > f(a) = 0$ et il existe $c_2 < b$ tel que $f(c_2) < f(b) = 0$. D'après le TVI (f est dérivable donc continue), il existe $x_2 \in [\,c_1\,;c_2\,]$ tel que $f(x_2) = 0$. Ensuite, f est dérivable sur $]\,a\,;x_2\,[$, continue sur $[\,a\,;x_2\,]$, et $f(a) = f(x_2) = 0$: le théorème de Rolle prouve l'existence de x_1, et idem pour x_3 entre x_2 et b.

Exercice 24 : ✪ Soit $f\,[\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) \times f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Correction : $f(1)$ et $f'(1)$ sont donc de signes opposés. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $f(1) > 0 > f'(1)$ (là aussi, je vous laisse faire le dessin). Il existe $d < 1$ tel que $f(d) > f(1) > f(0)$. Il en découle que le maximum de f sur $[\,0\,;1\,]$ (qui existe car f continue, d'après le théorème des bornes atteintes) n'est pas atteint en 0 ou en 1 : d'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, le point en lequel le maximum est atteint est un point où la dérivée s'annule.

Exercice 25 - Théorème de Darboux : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose dans cette question que $f'(a) < 0 < f'(b)$
   (a) Montrer que si f est $\mathscr{C}^1$, alors il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (b) On suppose à présent uniquement que f est dérivable. Montrer que le résultat de la question précédente est encore vérifié.
2. On ne suppose plus que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que pour tout $m \in [\,f'(a)\,;f'(b)\,]$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f'(c) = m$. En d'autres termes, une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue !
3. Montrer que la partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

4. Vérifier que la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, vérifie bien la propriété des valeurs intermédiaires.

Correction :

1. (a) Comme f est C^1, f' est continue et le TVI permet de conclure.
   (b) Comme f' n'est plus supposée continue, on ne peut plus conclure aussi facilement. D'après l'exercice 21, il existe $c_1 > a$ tel que $f(c_1) > f(a)$, et il existe $c_2 < b$ tel que $f(c_2) > f(b)$ (on combine le premier et le dernier dessins de l'exercice 21). Or, f est continue car dérivable sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne supérieure en un réel c. Or, d'après les inégalités précédentes, le sup n'est atteint ni en a ni en b, c'est-à-dire que c est un point intérieur. D'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $f'(c) = 0$.
2. Soit $m \in [\,f'(a)\,;f'(b)\,]$. Si $m = f'(a)$ (respectivement $f'(b)$) alors $c = a$ (respectivement $c = b$) convient. Supposons à présent $m \in \,]\,f'(a)\,;f'(b)\,[$. Il suffit d'appliquer la question précédente à $g : x \longmapsto f(x) - mx$. En effet, g est dérivable, de dérivée $g' : x \longmapsto f'(x) - m$ et, par hypothèse, $g'(a)$ et $g'(b)$ sont de signe contraire, donc g' s'annule : il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = m$.
3. D'après le théorème de Darboux, une dérivée (donc une fonction qui admet une primitive) vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. Or, la partie entière ne la vérifie pas : elle vaut 0 en 0, 1 en 1 mais ne vaut jamais 1/2. Par contraposée, elle n'admet pas de primitive.
4. Si $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

On montre qu'elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires de même que dans l'exercice 54 du chapitre 13.

Exercice 26 : ✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que f'' s'annule sur $]\,-1\,;1\,[$.

Correction : Notons $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors $g(-1) = g(0)$, g est continue sur $[\,-1\,;0\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;0\,[$ donc, d'après le théorème de Rolle, g' s'annule en un réel $a \in \,]\,-1\,;0\,[$. De même, g' s'annule en un réel $b \in \,]\,0\,;1\,[$. Or, $g'(a) = g'(b) = 0$ donc, de même (g' est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$ car f est dérivable deux fois), il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $g''(c) = 0$. Or, $g''(c) = f''(c)$ car la dérivée seconde de $x \mapsto x$ est nulle, ce qui permet de conclure.

Exercice 27 - Deux fois le même : ✪✪ Donner à l'aide de l'IAF puis de l'EAF les deux limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2\left(\mathrm{Arctan}(x+3) - \mathrm{Arctan}(x)\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (x+2)e^{1/(x+2)} - xe^{1/x}$

Correction :

1. Cela fait penser à l'EAF ou à l'IAF. Première méthode : avec l'IAF. Définissons $f : t \longmapsto \mathrm{Arctan}(t)$, si bien qu'on cherche $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2(f(x+3) - f(x))$. Appliquons l'IAF : pour cela, il faut encadrer f' (on cherche la limite en $+\infty$). Soit $x > 0$. La fonction f est dérivable sur $[\,x\,;x+3\,]$ et, pour tout t dans cet intervalle, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$. f' est décroissante (si on a un doute, on peut redériver comme dans l'exemple suivant), si bien que pour tout $t \in [\,x\,;x+3\,]$,

$$\frac{1}{1+(x+3)^2} \leq f'(t) \leq \frac{1}{1+x^2}$$

D'après l'IAF (avec $a = x$ et $b = x+3$ et on a bien $a \leq b$),

$$\frac{3}{1+(x+3)^2} = \frac{b-a}{1+(x+3)^2} \leq f(x+3) - f(x) \leq \frac{3}{1+x^2}$$

En multipliant par x^2 :

$$\frac{3x^2}{1+(x+3)^2} \leq x^2(f(x+3) - f(x)) \leq \frac{3x^2}{1+x^2}$$

D'après le théorème d'encadrement, la limite recherchée vaut 3.

Deuxième méthode : avec l'EAF. Soit $x > 0$. f étant continue sur $[\,x\,;x+3\,]$, dérivable sur $]\,x\,;x+3\,[$, d'après l'EAF, il existe $c_x \in \,]\,x\,;x+3\,[$ (il est important de préciser que c dépend de x en l'appelant c_x sinon on peut être tenté de croire qu'il est constant et cela pose problème plus tard au moment de passer à la limite) tel que

$$f'(c_x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{1+{c_x}^2} = \frac{\text{Arctan}(x+3) - \text{Arctan}(x)}{3}$$

Par conséquent :

$$x^2(\text{Arctan}(x+3) - \text{Arctan}(x)) = \frac{3x^2}{1+{c_x}^2} = \frac{3}{\dfrac{1}{x^2} + \left(\dfrac{c_x}{x}\right)^2}$$

Or, $1 \leq c_x/x \leq 1 + 3/x$ donc (théorème d'encadrement) $c_x/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (c'est là qu'il faut faire attention : c dépend de x !) donc on trouve encore une fois que la limite cherchée vaut 3.

2. Faisons comme dans l'exemple précédent. Définissons $f : t \longmapsto te^{1/t}$, si bien qu'on cherche $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x+2) - f(x))$. Appliquons l'IAF : pour cela, il faut encadrer f' (on cherche la limite en $+\infty$). Soit $x > 0$. La fonction $t \longmapsto e^{1/t}$ est dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$ par composée d'une fonction qui l'est par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit f est donc dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$. On a :

$$\forall t \in [\,x\,;x+2\,], \quad f'(t) = e^{1/t} + t \times \frac{-1}{t^2} \times e^{1/t} = \left(1 - \frac{1}{t}\right) \times e^{1/t}.$$

Nous cherchons à encadrer f'. Étudions sa monotonie : f' est aussi dérivable sur $[\,x\,;x+2\,]$ et :

$$\forall t \in [\,x\,;x+2\,], \quad f''(t) = \frac{1}{t^2} \times e^{1/t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \times \frac{-1}{t^2} \times e^{1/t} = \frac{1}{t^3} \times e^{1/t} > 0.$$

Il en découle que f' est croissante sur $[\,x\,;x+2\,]$. Ainsi, sur $[\,x\,;x+2\,]$, $f'(x+2) \geq f' \geq f'(x)$. D'après l'IAF (avec $b = x+2$ et $a = x$ et on a bien $b \geq a$),

$$2f'(x+2) = f'(x+2) \times (x+2-x) \geq f(x+2) - f(x) \geq f'(x) \times (x+2-x) = 2f'(x).$$

Or, $f'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ (pas besoin de croissances comparées : ce n'est même pas une forme indéterminée !) donc $2f'(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$ et $2f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x+2) - f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$. On pourrait là aussi appliquer l'EAF : exo.

Exercice 28 : ✪✪ Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ que l'on explicitera telle que pour tout $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\sin(t)e^{-{x_1}^2} - \sin(t)e^{-{x_2}^2}\right| \leq C|x_1 - x_2|.$$

Correction : Soit $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

$$\left|\sin(t)e^{-{x_1}^2} - \sin(t)e^{-{x_2}^2}\right| = |\sin(t)| \times \left|e^{-{x_1}^2} - e^{-{x_2}^2}\right| \leq \left|e^{-{x_1}^2} - e^{-{x_2}^2}\right|$$

Soit $f : x \mapsto e^{-x^2}$. Une rapide étude de fonction de f' (donc en donnant le tableau de signes de f'' pour donner le tableau de signes de f') prouve que $|f'| \leq \sqrt{2}e^{-1/2}$. D'après l'IAF,

$$\left|e^{-{x_1}^2} - e^{-{x_2}^2}\right| \leq \sqrt{2}e^{-1/2} \times |x_1 - x_2|$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 29 : ✪✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,-1\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 4c + 1$.

Correction : Définissons sur $[\,-1\,;1\,]$ la fonction g par $g(x) = f(x) - 2x^2 - x$. On souhaite donc montrer que g' s'annule sur $]\,-1\,;1\,[$. On a $g(-1) = -1$, $g(0) = 0$ et $g(1) = -3$ (faites un dessin d'une fonction g quelconque vérifiant ces conditions) : on ne peut pas appliquer directement le théorème de Rolle. Donnons deux solutions.

Première solution : d'après le TVI (g étant continue), il existe $x \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $g(x) = -1$. g étant continue sur $[\,-1\,;x\,]$, dérivable sur $]\,-1\,;x\,[$ avec $g(-1) = g(x) = 0$. D'après le théorème de Rolle, g s'annule sur $]\,-1\,;x\,[$.

Deuxième solution : g est continue sur le segment $[\,-1\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne supérieure (qui est donc un maximum) en un réel $a \in [\,-1\,;1\,]$. Or, $g(-1) < g(0)$ et $g(1) < g(0)$ donc $a \in \,]\,-1\,;1\,[$

(le maximum ne peut pas être atteint en ± 1). D'après la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $g'(a)=0$.

Exercice 30 : ✪✪ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $\varepsilon>0$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$:

$$\exists A>0, \forall x\geq A, |f'(x)|\leq \varepsilon$$

Soit $x\geq A$. Alors, sur $[\,A\,;x\,]$, $|f'(x)|\leq\varepsilon$ donc, d'après l'IAF (appliquée sur le segment $[\,A\,;x\,]$), $|f(x)-f(A)|\leq \varepsilon|x-A|$. En d'autres termes,

$$f(A)-\varepsilon(x-A)\leq f(x)\leq f(A)+\varepsilon(x-A)$$

En divisant par $x>0$,

$$\frac{f(A)-\varepsilon(x-A)}{x}\leq\frac{f(x)}{x}\leq\frac{f(A)+\varepsilon(x-A)}{x}$$

Le membre de gauche tend vers $-\varepsilon$ et le membre de droite vers ε quand $x\to+\infty$: pour x assez grand,

$$-2\varepsilon\leq\frac{f(x)}{x}\leq 2\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 31 : ✪✪ Redémontrer (nous l'avons en effet déjà fait dans le chapitre 13) que $f : x\mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas lipschitzienne. En déduire que cette fonction n'est pas périodique.

Correction : f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=2x\cos\left(x^2\right)$. Alors f' n'est pas bornée : en effet, si on pose $x_n=\sqrt{2n\pi}$ pour tout n, $f'(x_n)=\sqrt{2n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ si bien que f' n'est pas bornée donc f n'est pas lipschitzienne. Or, une fonction $\mathscr{C}^1$ périodique est lipschitzienne d'après l'exercice 20 donc, par contraposée, si f est $\mathscr{C}^1$ non lipschitzienne, elle ne peut pas être périodique.

Exercice 32 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ dérivable. Donner une CNS pour que la fonction

$$g : x\mapsto\begin{cases} f(2x) & \text{si } x\in\left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\,\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon}\end{cases}$$

soit dérivable sur $[\,0\,;1\,]$.

Correction : g est dérivable sur $[\,0\,;1/2\,[\,\cup\,]\,1/2\,;1\,]$ car composée de fonctions dérivables (on enlève $1/2$: exclure les points de recollement). Par conséquent, g est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ si et seulement si g est dérivable en $1/2$. De plus, on montre aisément que la limite à gauche de g en $1/2$ vaut $f(1)$ et que sa limite à droite vaut $f(0)$: g est donc continue en $1/2$ si et seulement si $f(1)=f(0)$, ce que l'on suppose à présent. Si on note $h : x\mapsto f(2x)$ et $\varphi : x\mapsto f(2x-1)$, alors g est dérivable à gauche en $1/2$ de dérivée à gauche $h'(1/2)=2f'(1)$ (un 2 sort quand on dérive h) et g est dérivable à droite en $1/2$ de dérivée à droite $\varphi'(1/2)=2f'(0)$. En conclusion, f est dérivable en $1/2$ si et seulement si $f(0)=f(1)$ et $f'(0)=f'(1)$.

Exercice 33 - Théorème de Rolle généralisé : ✪✪ Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit f continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$, dérivable sur $]\,a\,;+\infty\,[$, et tendant vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c>a$ tel que $f'(c)=0$:

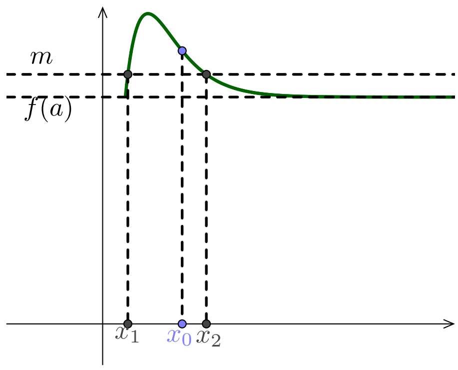
1. en appliquant le théorème de Rolle à f sur un segment bien choisi (après avoir fait un dessin, comme une personne civilisée).
2. en appliquant le théorème de Rolle à la fonction F définie sur $\left[\,\mathrm{Arctan}(a)\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ par

$$x\mapsto\begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f(a) & \text{sinon}\end{cases}$$

3. **Remake :** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable, telle que $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{+\infty} f$. Montrer que f' s'annule.

Correction :

1. Si f est constante égale à $f(a)$, alors f' est nulle donc tout $c > a$ convient. Supposons donc f non constante. Alors il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Sans perte de généralité, supposons $f(x_0) > f(a)$. Soit $m\dfrac{f(x_0)+f(a)}{2}$ de manière à avoir $f(a) = \lim_{+\infty} f < m < f(x_0)$. f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_1 < x_0$ et $x_2 > x_0$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = m$. f est continue sur $[\, x_1\, ;x_2\,]$, dérivable sur $]\, x_1\, ;x_2\,[$ avec $f(x_1) = f(x_2)$: le théorème de Rolle permet de conclure.



2. Si $x \in [\, Arctan(a)\, ;\pi/2\, [$, $\tan(x) \geq a$ donc $f(\tan x)$ est bien définie. De plus, f est continue sur $[\,\mathrm{Arctan}(a)\, ;\pi/2\,[$ car composée de fonctions continues. Enfin, $y = \tan(x) \xrightarrow[x\to\pi/2^-]{} +\infty$ et $f(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} f(a)$ donc, par composition de limites, $F(x) \xrightarrow[x\to\pi/2^-]{} f(a) = F(\pi/2)$: F est continue en $\pi/2$ donc sur $[\,\mathrm{Arctan}(a)\, ;\pi/2\,]$. De plus, F est dérivable sur l'intervalle ouvert. Enfin, $F(\mathrm{Arctan}(a)) = f(\tan(\mathrm{Arctan}(a))) = f(a) = F(\pi/2)$: d'après le théorème de Rolle, il existe $b \in \,]\,\mathrm{Arctan}(a)\, ;\pi/2\,[$ tel que $F'(b) = 0$. Or, pour tout $x \in \,]\,\mathrm{Arctan}(a)\, ;\pi/2\,[$,

$$F'(x) = (1+\tan^2(x)) \times f'(\tan(x))$$

Dès lors, $F'(b) = (1+\tan^2(b)) \times f'(\tan(b))$, mais $1+\tan^2(b) \neq 0$ donc $f'(\tan(b)) = 0$: il suffit de poser $c = \tan(b)$ donc $f'(c) = 0$.

3. Idem que dans la question 1 : si f est constante, c'est bon, sinon on applique deux fois le TVI puis le théorème de Rolle.

Exercice 34 - Accroissements finis généralisés et règle de l'Hôpital : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels. Soient f et g deux fonctions continues sur $[\, a\, ;b\,]$ et dérivables sur $]\, a\, ;b\,[$. Enfin, on suppose que g' ne s'annule pas sur $]\, a\, ;b\,[$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \,]\, a\, ;b\,]$, $g(x) \neq g(a)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \,]\, a\, ;b\,[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Pourquoi appelle-t-on ce résultat le théorème des AF généralisés ?

3. On suppose que f'/g' admet une limite finie L en a^+. Montrer que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow[x\to a^+]{} L$$

Ce résultat est connu sous le nom de règle de l'Hôpital.

4. Montrer les résultats suivants :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-\sin(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

Correction :

1. S'il existe $x \in \,]\, a\, ;b\,]$ tel que $g(x) = g(a)$ alors, d'après le théorème de Rolle (g continue sur $[\, a\, ;x\,]$ dérivable sur $]\, a\, ;x\,[$ avec $g(a) = g(x)$), il en découle que g' s'annule ce qui est contraire aux hypothèses.
2. Soit φ définie sur $[\, a\, ;b\,]$ par $\varphi(x) = (f(b)-f(a)) \times g(x) - (g(b)-g(a)) \times f(x)$. Alors φ est continue sur $[\, a\, ;b\,]$, dérivable sur $]\, a\, ;b\,[$, avec

$$\varphi(a) = \varphi(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]\, a\, ;b\,[$ tel que $\varphi'(c) = (f(b)-f(a)) \times g'(c) - (g(b)-g(a)) \times f'(c) = 0$ ce qui permet de conclure. Ce résultat est appelé théorème des AF généralisés car, lorsque g est égale à l'identité, on prouve qu'il existe c tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

c'est-à-dire le théorème des AF (l'égalité des AF).

3. Soit $x > a$. D'après le résultat précédent, il existe $c_x \in \left] a\,; x \right[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

Or, $a < c_x < x$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $y = c_x \xrightarrow[x\to a^+]{} a^+$ et $f(y)/g(y) \xrightarrow[y\to a^+]{} L$. Par composition de limites,

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \xrightarrow[x\to a^+]{} L$$

4. On prouverait la même chose en a^- et donc le résultat précédent est valable avec a à la place de a^+. Notons $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^2$. Étudions la limite de f'/g' en 0. Or, si $x \neq 0$,

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin(x)}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

D'après la règle de l'Hôpital,

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)} = \frac{\cos(x)-1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}$$

D'où la première égalité. Pour la deuxième, posons $f(x) = x - \sin(x)$ et $g(x)$, si bien qu'on cherche la limite en 0 de $\dfrac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}$. De même, cherchons la limite de f'/g'. Si $x > 0$,

$$\frac{1-\cos(x)}{3x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

d'après ce qui précède, ce qui permet de conclure.

Exercice 35 : ✪✪ Soit $n \geq 1$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, 2π-périodique, s'annulant n fois sur l'intervalle $[\,0\,; 2\pi\,[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[\,0\,; 2\pi\,[$.

Correction : Je vous laisse faire un dessin. Soient $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n$ les n zéros de f dans $[\,0\,; 2\pi\,[$. Si $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, f est continue sur $[\,x_k\,; x_{k+1}\,]$, dérivable sur $]\,x_k\,; x_{k+1}\,[$ avec $f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $y_k \in \left] x_k\,; x_{k+1} \right[$ tel que $f'(y_k) = 0$. Nous avons $n-1$ zéros : il en manque un, que nous allons obtenir grâce à la périodicité. Il suffit de voir que $f(x_1 + 2\pi) = f(x_1) = 0$. De même, f' s'annule en un point y_n sur $]\,x_n\,; x_1 + 2\pi\,[$. Cependant, attention $x_n < 2\pi \leq x_1 + 2\pi$ donc y_n peut ne pas appartenir à $[\,0\,; 2\pi\,[$. Il faut séparer deux cas : si $y_n < 2\pi$ alors c'est bon, tandis que si $y_n \geq 2\pi$ alors $y_n - 2\pi \in [\,0\,; x_1\,[$ et f' est aussi 2π-périodique donc $f'(y_n - 2\pi) = 0$. Dans tous les cas, on obtient un zéro de f' supplémentaire, ce qui permet de conclure.

Exercice 36 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ bornée. On veut montrer que f'' s'annule. Pour cela, on va raisonner par l'absurde.

1. Montrer que f'' est de signe constant. On suppose dans la suite qu'elle est strictement positive.
2. Montrer que f' admet une limite L_1 en $+\infty$ et une limite L_2 en $-\infty$, avec $L_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
3. Montrer que $L_1 = L_2 = 0$ et conclure.

Correction :

1. f'' est continue car f est $\mathscr{C}^2$ et ne s'annule pas donc est de signe constant (raisonnement classique à savoir faire en claquant des doigts, cf. par exemple chapitre 1 ou exercice 34 du chapitre 13).
2. f' est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive. Or, une fonction croissante tend vers une limite finie ou vers $+\infty$ en $+\infty$, selon qu'elle est majorée ou non. De même en $-\infty$.
3. Comme dans le cours (ce n'est pas à proprement parler du cours, il faut savoir le redémontrer), L_1 et L_2 sont nulles puisque f est bornée. f' est strictement croissante et tend vers 0 en $\pm\infty$ donc est constante, ce qui est absurde (f' strictement croissante) : f'' s'annule.

Exercice 37 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,; 1\,]$, dérivable sur $]\,0\,; 1\,[$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe des éléments distincts $0 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n$.
2. ✪✪✪ En tronçonnant les y plutôt que les x, montrer qu'il existe $0 < y_0 < \cdots < y_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f'(y_k)} = n$.

Correction :

1. Il faut appliquer l'EAF n fois (ce n'est pas l'IAF car on cherche une égalité, et ce n'est pas le théorème de Rolle car on ne veut pas montrer que la somme est nulle). Coupons l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ en n parts égales. Si $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, notons $a_k = k/n$. Pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, la fonction f est continue sur $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$, dérivable sur $]\,a_k\,;a_{k+1}\,[$. D'après l'EAF, il existe $x_k \in \,]\,a_k\,;a_{k+1}\,[$ tel que
$$f'(x_k) = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k} = \frac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{1/n} = n \times (f(a_{k+1}) - f(a_k)).$$
Il suffit de voir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n\sum_{k=0}^{n-1}(f(a_{k+1}) - f(a_k)) = n(f(1) - f(0))$ par télescopage, ce qui permet de conclure puisque $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.
2. Coupons cette fois l'axe des ordonnées en n parts égales : on cherche un antécédent à $1/n$, un antécédent à $2/n$ etc. Comme f est continue avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, d'après le TVI, il existe b_1 tel que $f(b_1) = 1/n$. De même, il existe $b_2 \in [\,b_1\,;1\,]$ tel que $f(b_2) = 2/n$. De proche en proche, on construit $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_n = 1$ tels que, pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, $f(b_k) = k/n$. Le même procédé que ci-dessus (en appliquant l'EAF entre les b_k) permettra de conclure, je vous laisse les détails.

Exercice 38 : ✪✪

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$
2. En déduire :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Correction :

1. On veut prouver que, pour tout $x > 0$,
$$e^{x(\ln(x+1)-\ln(x))} \leq e \leq e^{(x+1)(\ln(x+1)-\ln(x))}$$
La fonction exp étant croissante, il suffit de prouver que $x(\ln(x+1) - \ln(x)) \leq 1 \leq (x+1)(\ln(x+1) - \ln(x))$ et puisque x et $x+1$ sont strictement positifs, il suffit en fait de prouver que
$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$$
Soit $x > 0$. La fonction ln est dérivable sur $[\,x\,;x+1\,]$, de dérivée $t \mapsto 1/t$ décroissante donc, sur $[\,x\,;x+1\,]$, $1/(x+1) \leq 1/t \leq 1/x$. D'après l'IAF (avec $a = x \leq x+1 = b$) :
$$\frac{1}{x+1} \times (x+1-x) \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x} \times (x+1-x)$$
ce qui permet de conclure.
2. Par produit (rappelons qu'on peut multiplier les inégalités positives) :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq \prod_{k=1}^{n} e \leq \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$$
Le terme du milieu vaut e^n. Calculons le terme de gauche (on reconnaît à la première égalité un produit télescopique) :

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k &= \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^{k-1}}\times\frac{1}{k}\\ &= \frac{(n+1)^n}{1^0}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\\ &= \frac{(n+1)^n}{n!}\end{aligned}$$

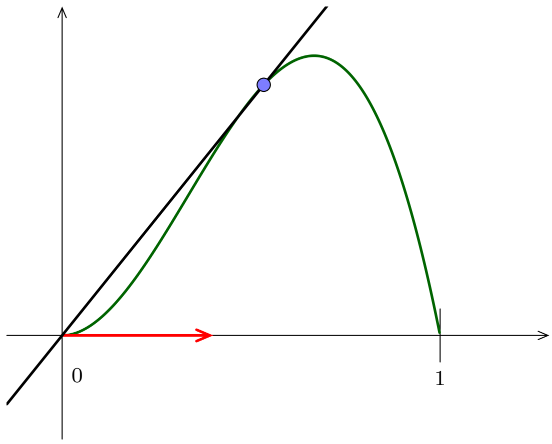
On trouve de même que le membre de droite vaut $\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 39 : ✪✪

1. Soit f une fonction dérivable de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0)=f'(0)=0$ et $f(1)=0$. Montrer qu'il existe $c\in\,]\,0\,;1\,[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par l'origine.
2. **Remake :** Soient $a<b$ deux réels et soit $f:[\,a\,;b\,]$ dérivable avec $f(a)=f(b)=0$. Montrer que, pour tout $x\notin[\,a\,;b\,]$, il existe $c\in[\,a\,;b\,]$ tel que la tangente à la courbe de f en c passe par le point $(x,0)$.

Correction :

1. Cela se voit bien sur le dessin ci-dessous (on a aussi tracé le vecteur tangent horizontal en 0).



Soit $c\in\,]\,0\,;1\,[$. La tangente au point d'abscisse c est la droite d'équation $y=f'(c)\times(x-c)+f(c)$. Elle passe par l'origine si et seulement si $(0,0)$ vérifie l'équation i.e. $0=f'(c)\times(0-c)+f(c)$. En d'autres termes, la tangente au point d'abscisse c passe par l'origine si et seulement si $f(c)-cf'(c)=0$. Cela nous fait penser à la dérivée d'un quotient. Soit g définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $g(x)=f(x)/x$. Pour appliquer le théorème de Rolle, il faut prolonger g par continuité en 0. Or, si $x\in\,]\,0\,;1\,]$,

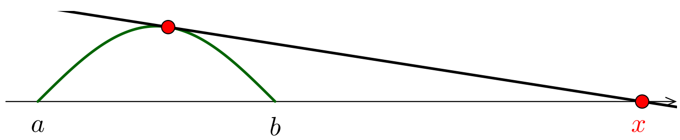
$$g(x)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\xrightarrow[x\to 0]{}f'(0)=0$$

g est donc prolongeable par continuité en posant $g(0)=0$. g ainsi prolongée est continue en 0 donc sur $[\,0\,;1\,]$ car g est continue sur $]\,0\,;1\,]$. De plus, g est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$. Enfin, $g(0)=0$ et $g(1)=f(1)=0=g(0)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c\in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $g'(c)=0$. Or,

$$g'(c)=\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}$$

Une fraction étant nulle si et seulement si son numérateur est nul, $cf'(c)-f(c)=0$ et on a vu que cela signifiait que la tangente en c passe par l'origine.

2. Soit $x\notin[\,a\,;b\,]$. Idem, commençons par faire un dessin.



Soit $c \in \left]a\,;b\right[$. La tangente en c a pour équation (on note t l'abscisse car x est déjà pris) $y = f'(c) \times (t-c) + f(c)$. Celle-ci passe par le point $(x,0)$ si et seulement si $(x,0)$ vérifie l'équation i.e. si et seulement si $0 = f'(c)\times(x-c)+f(c)$. On définit sur $[\,a\,;b\,]$ la fonction g par

$$g(t) = \frac{f(t)}{x-t}$$

qui est bien définie, continue et dérivable sur $[\,a\,;b\,]$ car quotient de fonctions qui le sont, celle au dénominateur ne s'annulant pas (car $x \notin [\,a\,;b\,]$). De plus, $g(a) = g(b) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \left]a\,;b\right[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(c) = \frac{f'(c)\times(x-c) - (-1)\times f(c)}{(x-c)^2}$$

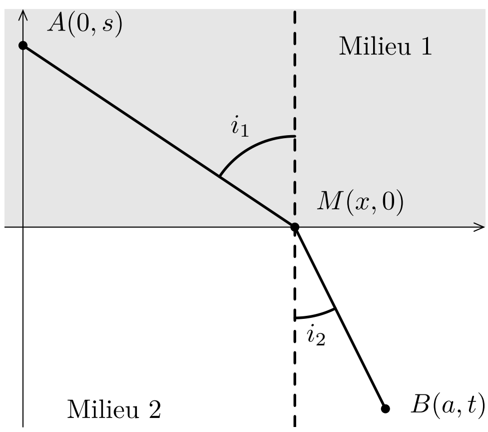
ce qui permet de conclure de la même façon.

Exercice 40 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bornée et deux fois dérivable. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha f \leq f''$. Montrer que f est décroissante et que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

Correction : f' est croissante car $f'' \geq \alpha f \geq 0$ puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\alpha > 0$. Dès lors, f' admet une limite L finie ou égale à $+\infty$ en $+\infty$. Comme d'habitude, f étant bornée, il en découle que $L = 0$. f' est croissante et tend vers 0 en $+\infty$ donc est négative : f est décroissante. f est positive minorée par 0 donc converge vers une limite $L' \geq 0$: si $L' > 0$ alors (f est décroissante), f est minorée par L' donc f'' est minorée par $\alpha L'$. D'après l'IAF, pour tout x, $f'(x) \geq \alpha L' x + f'(0)$ donc, d'après le théorème de minoration, $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car on a déjà prouvé que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 41 - Réfraction d'un rayon lumineux et loi de Snell-Descartes : ✪✪✪ Deux milieux homogènes (c'est-à-dire que, dans chaque milieu, la vitesse de la lumière ne dépend pas de la position) sont séparés par une frontière plane. La vitesse de la lumière vaut v_1 dans le premier milieu et v_2 dans le deuxième. Un rayon lumineux va du point A situé dans le premier milieu au point B situé dans le deuxième. Le point, noté M, où il change de milieu est déterminé par le principe de Fermat : il est tel que le temps de parcours soit minimal.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme sur la figure. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,s)$ et (a,t) avec s et a strictement positifs et t strictement négatif. Le point M a pour coordonnées $(x,0)$ avec $x \in [\,0\,;a\,]$. On désigne par i_1 et i_2 les angles géométriques (donc positifs) entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{j}$ d'une part, entre $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{j}$ d'autre part (voir la figure).



1. Exprimer le temps de parcours en fonction de x. Montrer que cela définit une fonction T de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;x\,]$.
2. Montrer que T admet un minimum en un point x_0, et que pour cette valeur x_0, on a $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$, où les indices $n_1 = c/v_1$ et $n_2 = c/v_2$ sont appelés les indices de réfraction.
3. On suppose que $n_2 < n_1$. Montrer que si l'angle d'incidence α est supérieur à un certain seuil, il n'y a pas de rayon réfracté.

Correction :

1. La vitesse de la lumière vaut v_1 dans le premier milieu de v_2 dans le deuxième donc le temps de parcours vaut (en utilisant le fameux $v = d/t$ ainsi que le théorème de Pythagore) :

$$
\begin{aligned}
T(x) &= \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} \\
&= \frac{\sqrt{x^2+s^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2+t^2}}{v_2}
\end{aligned}
$$

s et t étant non nuls, x^2+s^2 et $(a-x)^2+t^2$ sont strictement positifs et la racine carrée est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc T est bien $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;a\,]$.

2. T est continue sur le segment $[\,0\,;a\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Elle admet donc un minimum atteint en un point x_0. Donnons le tableau de variations de T. Soit $x \in [\,0\,;a\,]$. T est $\mathscr{C}^1$ et :

$$
\begin{aligned}
T'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} + \frac{-2(a-x)}{2\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} - \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2}
\end{aligned}
$$

$T'(0) = -a < 0$ et T' est continue donc T' est strictement négative au voisinage de 0 donc T est strictement décroissante au voisinage de 0. De même, $T'(a) > 0$ donc T est croissante au voisinage de a. On en déduit que $x_0 \neq 0$ et $x_0 \neq a$ donc $x_0 \in \,]\,0\,;a\,[$. Par condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur, $T'(x_0) = 0$. Cherchons donc quand T' s'annule. On suppose dans la suite que $x \in \,]\,0\,;a\,[$.

$$
\begin{aligned}
T'(x) = 0 &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2+s^2}\times v_1} = \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2} \\
&\iff x \times \sqrt{(a-x)^2+t^2}\times v_2 = (a-x)\times\sqrt{x^2+s^2}\times v_1 \\
&\iff x\times\frac{a-x}{\sin(i_2)}\times v_2 = (a-x)\times\frac{x}{\sin(i_1)}\times v_1 \\
&\iff \sin(i_1)v_2 = \sin(i_2)v_1 \\
&\iff \sin(i_1)\times\frac{c}{n_2} = \sin(i_2)\times\frac{c}{n_2} \\
&\iff n_1\sin(i_1) = n_2\sin(i_2)
\end{aligned}
$$

Or, $T'(x_0) = 0$ donc, en x_0, on a bien l'égalité voulue.

3. Supposons donc que $n_2 < n_1$. Lorsqu'il y a un rayon réfracté, on a $\sin(i_2) = \dfrac{n_1}{n_2}\times\sin(i_1)$. Cependant, $n_2/n_1 < 1$: si $n_2/n_1 < \sin(i_1) \leq 1$, alors $\sin(i_2) > 1$ ce qui est absurde : il n'y a pas de rayon réfracté dès que $i_1 > \text{Arcsin}(n_2/n_1)$, le rayon lumineux est entièrement réfléchi (cf. Wikipédia ou votre cours de physique pour une illustration).

Exercice 42 - Lemme de Sard, cas réel : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note C l'ensemble des points critiques de f. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si $|x-y| \leq \dfrac{b-a}{n}$, alors $|f'(x)-f'(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
2. Soit $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. On suppose que

$$
I_k = \left[a + k\times\frac{b-a}{n}\,;a+(k+1)\times\frac{b-a}{n}\right]
$$

contient un point critique de f. Justifier que $f(I_k)$ est un intervalle de longueur inférieure ou égale à $\dfrac{\varepsilon}{n}$.

3. Prouver le lemme de Sard : $f(C)$ est de mesure nulle, c'est-à-dire qu'il peut être recouvert par une famille finie ou une suite d'intervalles dont la somme des longueurs soit arbitrairement petite.

Correction :

1. f étant $\mathscr{C}^1$, f' est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc est uniformément continue d'après le théorème de Heine : en prenant $\varepsilon/(b-a)$ à la place de ε dans la définition de l'uniforme continuité (penser à « truc » : si c'est valable pour tout $\varepsilon > 0$, alors c'est valable pour $\varepsilon/(b-a)$) :

$$
\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f'(x)-f'(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}
$$

Enfin, $(b-a)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc finit par être inférieur ou égal à η à partir d'un certain rang.

2. Précisons tout d'abord que $f(I_k)$ est un intervalle d'après le TVI car image d'un intervalle par une fonction continue (on peut même dire que c'est un segment d'après le théorème des bornes atteintes, car image d'un segment par une application continue).

   Supposons donc que I_k contienne un point critique qu'on note c_k.

   Soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(I_k)$, il suffit donc de prouver que $|y_1 - y_2| \leq \varepsilon$: il existe x_1 et x_2 deux éléments de I_k tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On veut majorer $|f(x_1) - f(x_2)|$: on pense à l'IAF, donc il faut majorer $|f'|$ sur I_k. Or, I_k est de longueur $(b-a)/n$ donc deux éléments de I_n sont distants d'au plus $(b-a)/n$. En particulier, pour tout $x \in I_k$, $|x - c_k| \leq (b-a)/n$ donc (en se souvenant que $f'(c_k) = 0$ car c_k est un point critique) :

$$|f'(x) - f'(c_k)| = |f'(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

   En d'autres termes, $|f'|$ est majorée par $\varepsilon/(b-a)$. Dès lors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \times |x_1 - x_2| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \times \frac{b-a}{n} = \frac{\varepsilon}{n}$$

3. $f(C)$ est inclus dans l'union des $f(I_k)$ qui contiennent un point critique (c'est-à-dire que dans cette union, on ne prend que les I_k qui contiennent un point critique), et on vient de voir que ces $f(I_k)$ sont de longueur inférieure ou égale à ε/n, et puisqu'il y a au plus n intervalles I_k qui contiennent un point critique (car il y a n intervalles I_k), $f(C)$ est de mesure inférieure ou égale à ε : on a recouvert $f(C)$ par des intervalles dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à ε, et ce pour tout ε, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 43 : ✪✪✪ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \leq x + e^{x^2}$.

Correction : Définissons sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = e^{x^2} + x - e^x$. On cherche donc à prouver que φ est positive sur $\mathbb{R}$. φ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\varphi'(x) = 1 + 2xe^{x^2} - e^x$: le signe ne paraît pas immédiat, on dérive donc φ une deuxième fois, et $\varphi''(x) = e^{x^2}(2+4x^2) - e^x$. On souhaite donc comparer $e^{x^2}(2+4x^2)$ et e^x.

- Si $x \geq 1, x^2 \geq x$. La fonction exponentielle étant croissante, $e^{x^2} \geq e^x$. Or, $2 + 4x^2 > 1$ et $e^{x^2} > 0$ donc $(2+4x^2)e^{x^2} > e^{x^2} \geq e^x$. En d'autres termes, φ'' est strictement positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$.
- Si $x \in \mathbb{R}^-$ alors $x^2 \geq 0 \geq x$ et on conclut de la même façon : φ'' est strictement positive sur $\mathbb{R}_-$.
- On se place à présent sur $[\,0\,;1\,]$. On souhaite prouver que $e^{x-x^2} < 2 + 4x^2$. Tout d'abord, $x - x^2 \in [\,0\,;1/4\,]$ puisque $x \in [\,0\,;1\,]$. On pose $f(t) = e^t$, si bien que $f'(t) \leq e^{1/4}$ sur $[\,0\,;1/4\,]$ donc, puisque $x - x^2$ appartient à cet intervalle, d'après l'inégalité des accroissements finis, $f\left(x - x^2\right) - f(0) \leq e^{1/4} \times (x - x^2 - 0)$ donc $e^{x-x^2} \leq 1 + e^{1/4}(x - x^2)$.

  Or, le discriminant de $(2+4x^2) - \left(1 + e^{1/4}\left(x - x^2\right)\right)$ est égal à $\Delta = e^{1/2} - 4 \times \left(4 + e^{1/4}\right) \times 1 = -16 - 4e^{1/4} + e^{1/2}$ qui est strictement négatif (car $e^{1/2} < e < 3$). Ainsi, $(2+4x^2) - \left(1 + e^{1/4}\left(x - x^2\right)\right)$ est du signe de son coefficient dominant, à savoir $a = 4 + e^{1/4} > 0$, donc strictement positif. En d'autres termes :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad 1 + e^{1/4}\left(x - x^2\right) < 2 + 4x^2$$

  Cela permet d'affirmer que φ'' est strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$ donc sur $\mathbb{R}$.

φ' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\varphi'(0) = 0$ alors φ' est strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en découle que φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $\varphi(0) = 0$, la fonction φ est positive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 44 : ✪✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. Chercher toutes les implications vraies entre les assertions suivantes :

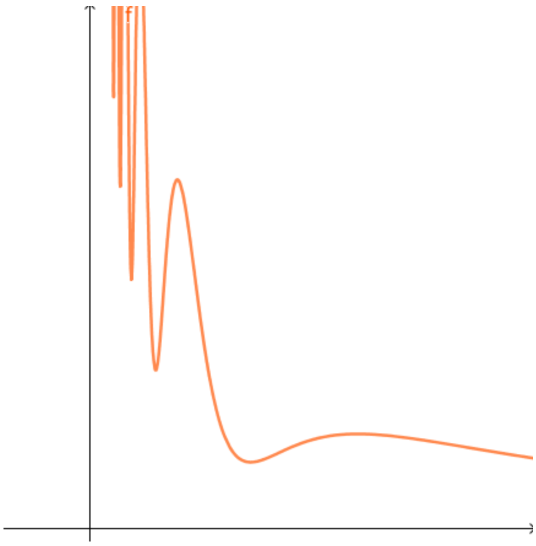
1. $|f(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
2. $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
3. f' n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$
4. f n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$

Correction :

- $1 \Rightarrow 2$: Faux. Prendre une fonction qui tend vers l'infini mais non monotone, qui « fait des vagues ». Par exemple, je vous laisse prouver de même que dans l'exercice 9 que la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \times \left(2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

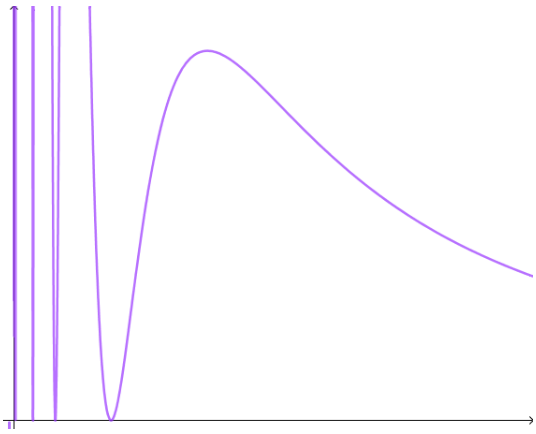
  tend vers $+\infty$ en 0 mais a une dérivée qui s'annule sur tout voisinage de 0 donc $|f'|$ ne tend par vers $+\infty$ en 0. Même sans donner d'expression explicite, le dessin ci-dessous suffit à dire que cette implication est fausse



- $1 \Rightarrow 3$: Vrai. On montre comme en cours (ce n'est pas du cours, il faut savoir le redémontrer), par contraposée, que si f' est bornée, alors f est bornée.
- $1 \Rightarrow 4$: Vrai de façon triviale.
- $2 \Rightarrow 1$: Faux, il suffit de prendre la racine carrée.
- $2 \Rightarrow 3$: Vrai de façon triviale.
- $2 \Rightarrow 4$: Faux avec la racine carrée.
- $3 \Rightarrow 1$: Faux avec la racine carrée.
- $3 \Rightarrow 2$: Faux, il suffit de prendre f' la fonction donnée en contre-exemple ci-dessus (et donc f une primitive, qu'il n'est pas nécessaire d'expliciter) : f' n'est pas bornée mais ne tend pas vers $+\infty$ en valeur absolue.
- $3 \Rightarrow 4$: Faux, prendre la racine carrée.
- $4 \Rightarrow 1$: Faux : prendre une fonction qui revient toujours à l'axe des abscisses, par exemple

$$f : x \mapsto \frac{1}{x} \times \left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

dont le graphe est donné ci-dessous.



- $4 \Rightarrow 2$: Faux avec le même exemple, f n'est pas bornée mais f' s'annule sur tout voisinage de 0.
- $4 \Rightarrow 3$: Vrai. On montre comme en classe, par contraposée, que si f' est bornée, alors f est bornée.

14.3 Suites récurrentes.

Exercice 45 : ✪✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comment obtenir une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près ?

Correction : On montre aisément que $f : x \mapsto e^{-x}$ admet un unique point fixe qui appartient à $[\,0\,;1\,]$ qu'on notera α dans la suite. Minorons la suite (u_n). Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\,e^{-1}\,;1\,\right]$ (l'intervalle $]\,0\,;1\,]$ ne suffit pas parce qu'il faut majorer la dérivée par un nombre strictement supérieur à 1). Le résultat est vrai au rang 0 puisque $u_0 = 1$. Soit $n \geq 0$. Supposons le résultat vrai au rang n. Alors $1 \geq u_n \geq e^{-1}$ et f est décroissante donc

$$f(1) = e^{-1} \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}}$$

Or, $-e^{-1} \leq 0$ donc $e^{-e^{-1}} \leq e^0 = 1$ ce qui clôt la récurrence. Or, f est dérivable sur $\left[e^{-1}\,;1\right]$ et, pour tout $x \in \left[e^{-1}\,;1\right]$, $|f'(x)| = e^{-x} \leq e^{-e^{-1}}$. Posons $M = e^{-e^{-1}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après l'IAF, puisque $f(\alpha) = \alpha$ (et $\alpha \in \left[e^{-1}\,;1\right]$ puisque $\alpha \leq 1$ donc $f(\alpha) = \alpha \geq f(1) = e^{-1}$)

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq M|u_n - \alpha|$$

Par une récurrence immédiate, pour tout n, $|u_n - \alpha| \leq M^n|u_0 - \alpha| = M^n|1-\alpha|$. Or, $M \in \left]0\,;1\right[$ donc $M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$. Pour avoir une valeur approchée à 10^{-3} près, il suffit de choisir n tel que $M^n \leq 10^{-3}$ car on aura alors

$$|u_n - \alpha| \leq M^n|1-\alpha| \leq M^n \leq 10^{-3}$$

puisque $|1-\alpha| \leq 1$. Il suffit de prendre n tel que $e^{n\ln(M)} \leq 10^{-3}$ i.e. $n\ln(M) \leq -3\ln(10)$ et $M < 1$ donc $\ln(M) < 0$: il suffit de prendre $n \geq \dfrac{-3\ln(10)}{\ln(M)}$.

Exercice 46 : ✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Correction : Comme dans l'exercice précédent après avoir montré par récurrence que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [-1\,;1]$, intervalle sur lequel $|\cos'|$ est majoré par $M = |\sin(1)| < 1$.

Exercice 47 : ✪✪ Soit f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Montrer que $[0\,;1]$ est stable par f.
2. Montrer que f admet un unique point fixe (dans $[0\,;1]$ donc puisque c'est le domaine de définition de f) qu'on notera α et qu'on ne cherchera pas à calculer (on pourra dériver deux fois f).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n \times |u_0 - \alpha|$$

et en déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Correction :

1. f est dérivable sur $[0\,;1]$ car quotient de fonctions qui le sont (celle au dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \in [0\,;1]$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \times (x+2) - 1 \times e^x}{(x+2)^2} \\ &= \frac{e^x \times (x+1)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

On en déduit que f est croissante. Dès lors, $0 \leq f(0) = 1/2 \leq f(x) \leq f(1) = e/3 \leq 1$ donc $f(x) \in [0\,;1]$: $[0\,;1]$ est stable par f.

2. Soit g définie sur $[0\,;1]$ par $g(x) = f(x) - x$. Alors g est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0\,;1]$. Soit $x \in [0\,;1]$. $g'(x) = f'(x) - 1$ donc

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) \\ &= \frac{(e^x(x+1) + e^x) \times (x+2)^2 - 2(x+2) \times e^x(x+1)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2)^3 - 2(x+2)(x+1)e^x}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2) \times ((x+2)^2 - 2(x+1))}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x+2)(x^2+2x+2)}{(x+2)^4} \end{aligned}$$

On en déduit que g'' est strictement positive donc f' est strictement croissante. Or, $g'(1) = f'(1) - 1 = 2e/9 - 1 < 0$ (car $e < 3$ donc $2e/9 < 6/9 < 1$) et g' est strictement croissante donc est strictement négative : g est strictement décroissante. De plus, $g(0) = f(0) = 1/2 > 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, g est continue, strictement décroissante donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois, f admet un unique point fixe.

3. On déduit de ce qui précède que f'' est strictement positive donc f' est strictement croissante : ci-dessous le tableau de variations de f'.

x	0		1
f'	$1/4$	$\nearrow$	$2e/9$

On conclut comme d'habitude (IAF, récurrence etc.).

Exercice 48 - Points fixes attractifs et répulsifs : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| < 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k \in [\,0\,;1\,[$ et d'un voisinage V de c tel que f soit k-lipschitzienne sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.

2. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k > 1$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \geq k$ sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V \backslash \{c\}$. Montrer qu'il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \notin V$. En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par sortir, par « être expulsée » du voisinage.

Correction :

1. (a) Cela découle de la continuité de f' (puisque f est $\mathscr{C}^1$) : notons $k = \dfrac{1 + |f'(c)|}{2} < 1$. f' étant continue, sur un voisinage de c, $|f'| \leq k$ donc f est k-lipschitzienne.
   (b) V est de la forme $[\,c - \varepsilon\,; c + \varepsilon\,]$ (c'est un voisinage de c). Montrons qu'il est stable par f. Soit $x \in V$. f étant k-lipschitzienne sur V, $|f(x) - f(c)| \leq k|x - c| \leq |x - c|$. Or, c est un point fixe donc $f(c) = c$ et $|x - c| \leq \varepsilon$ car $x \in V$ donc $|f(x) - c| \leq \varepsilon$ donc $f(x) \in V$: V est stable par f. Or, sur V, $|f'|$ est majorée par k et $k < 1$: on prouve comme d'habitude que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ (on montre par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n - c| \leq k^{n-n_0} \times |u_{n_0} - c|$ ce qui permet de conclure).
2. (a) Idem, par continuité.
   (b) Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in V$. Alors $|f'|$ est minorée par k sur V donc, par récurrence, $|u_n - c| \geq k^{n-n_0} \times |u_{n_0} - c|$ pour tout $n \geq n_0$. Puisque $k > 1$, le membre de droite tend vers $+\infty$ (puisque $u_{n_0} \neq c$, $|u_{n_0} - c| > 0$) donc $|u_n - c| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc u_n finit par sortir de V, ce qui est absurde, donc u_n finit par sortir de V.

14.4 Dérivées successives.

Exercice 49 : ✪ Soit $n \geq 2$. Donner la dérivée n-ième de $x \mapsto (x^2 + 2)e^{2x}$.

Correction : Notons $f : x \mapsto (x^2 + 2)e^{2x}$, $g : x \mapsto x^2 + 2$ et $h : x \mapsto e^{2x}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors f est dérivable n fois. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Leibniz,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Or, $g^{(0)}(x) = x^2 + 2$, $g^{(1)}(x) = 2x$, $g^{(2)}(x) = 2$ et $g^{(k)}(x) = 0$ dès que $k \geq 3$: la somme ne contient que les termes $k = 0, 1, 2$ (ce qui ne veut pas dire que $n = 2$, attention). Par conséquent :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \binom{n}{0}g^{(0)}(x)h^{(n)}(x) + \binom{n}{1}g^{(1)}(x)h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2}g^{(2)}(x)h^{(n-2)}(x) \\ &= (x^2+2)\times 2^n e^{2x} + n\times 2x \times 2^{n-1}e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2}\times 2\times 2^{n-2}e^{2x} \end{aligned}$$

Exercice 50 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}^+$ bornée telle qu'il existe $L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ telle que $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $L = 0$.

Correction : On rappelle que si f' tend vers une limite non nulle, alors f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ (cf. cours, mais ce n'est pas du cours, il faut savoir le redémontrer). On montre alors par une récurrence immédiate (faites-la !) que, pour tout n, si $f^{(n)}$ tend vers une limite $L \neq 0$, alors f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$, ce qui permet de conclure.

Exercice 51 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ tels que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \,]\,a_1\,;a_{n+1}\,[$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0$.

Correction : Montrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « si f est dérivable n fois et s'il existe $a_1 < \cdots < a_{n+1}$ tels que $f(a_1) = \cdots = f(a_{n+1})$, alors $f^{(n)}$ s'annule sur $]\,a_1\,;a_{n+1}\,[$ ».
- H_1 est vraie d'après le théorème de Rolle : si f est dérivable et s'il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1) = f(a_2)$, alors en particulier f est continue sur $[\,a_1\,;a_2\,]$ et dérivable sur $]\,a_1\,;a_2\,[$ et $f(a_1) = f(a_2)$ donc f' s'annule sur $]\,a_1\,;a_2\,[$ d'après le théorème de Rolle.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc que f soit dérivable $n+1$ fois et qu'il existe $a_1 < \cdots < a_{n+2}$ tels que $f(a_1) = \cdots = f(a_{n+2})$. Pour tout $i \in [\![\,1\,;n+1\,]\!]$, f est continue sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et $f(a_i) = f(a_{i+1})$: d'après le théorème de Rolle, il existe $b_i \in \,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ tel que $f'(b_i) = 0$. Cela nous donne $b_1 < \cdots < b_{n+1}$ tels que $f'(b_1) = \cdots = f'(b_{n+1}) = 0$, et f' est dérivable n fois car f est dérivable $n+1$ fois. Par hypothèse de récurrence, il existe $\alpha \in \,]\,b_1\,;b_{n+1}\,[$ tel que $(f')^{(n)}(\alpha) = 0$. Or, $a_1 < b_1 < \alpha < b_{n+1} < a_{n+2}$ donc $\alpha \in \,]\,a_1\,;a_{n+2}\,[$ et $(f')^{(n)}(\alpha) = f^{(n+1)}(\alpha)$ ce qui prouve que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 52 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Correction : Si $a \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{N}$, une récurrence (finie) immédiate prouve que pour tout $k \in [\![\,0\,;d\,]\!]$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la dérivée k-ième de $x \longmapsto (x-a)^d$ est $x \longmapsto d(d-1)\cdots(d-k+1)(x-a)^{d-k} = d!x^{d-k}/(d-k)!$ (par exemple, la dérivée seconde est $x \longmapsto d(d-1)(x-a)^{d-2}$) et, si $k \geq d+1$, sa dérivée k-ième est nulle.

Notons $g : x \longmapsto (x-a)^n$ et $h : x \longmapsto (x-b)^n$. D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} g^{(k)}(x)h^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k}\times\frac{n!}{k!}(x-b)^k.$$

On reconnaît l'expression d'un coefficient binomial : $f^{(n)}(x) = n!\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2(x-a)^{n-k}(x-b)^k$.

En particulier, si $a = b$, on a $f^{(n)}(x) = n!(x-a)^n\displaystyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2$. Or, si $a = b$, alors $f(x) = (x-a)^{2n}$ donc (en prenant $d = 2n$ dans la relation préliminaire), $f^{(n)}(x) = \dfrac{(2n)!}{n!}(x-a)^n$, si bien que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{(2n)!}{n!}(x-a)^n = n!(x-a)^n\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2.$$

Cette relation est en particulier vraie si $x \neq a$ et alors on peut simplifier par $(x-a)^n$. On trouve finalement

$$\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$$

Exercice 53 : ✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $\varphi_n : x \mapsto x^n\ln(x)$ et $f_n : x \mapsto x^n$ et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer ${\varphi_{n+1}}'$ en fonction de φ_n et de f_n.

3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, ${\varphi_n}^{(n)}(x) = n! \times (\ln(x) + H_n)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Correction :

1. φ_n est $\mathscr{C}^\infty$ car produit de fonctions qui le sont.
2. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}'(x) &= (n+1)x_n \ln(x) + x^{n+1} \times \frac{1}{x} \\ &= (n+1)\varphi_n(x) + x^n \end{aligned}$$

3. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons P_n : « $\forall x > 0, {\varphi_n}^{(n)}(x) = n! \times (\ln(x) + H_n)$ » (la notation H_n est déjà prise)
   - Soit $x > 0$. $\varphi_1(x) = x\ln(x)$ donc

$$\begin{aligned} {\varphi_1}'(x) &= \ln(x) + x \times \frac{1}{x} \\ &= \ln(x) + 1 \\ &= 1! \times (\ln(x) + H_1) \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que P_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 1$. Supposons P_n vraie et prouvons que P_{n+1} est vraie. Soit $x > 0$. D'après la question 1 :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= \left({\varphi_{n+1}}'\right)^{(n)}(x) \\ &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\left((n+1)\varphi_n(x) + x^n\right) \end{aligned}$$

   (rappelons que $x^{(n+1)}$ n'a aucun sens). Par linéarité de la dérivation, puis par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= (n+1){\varphi_n}^{(n)}(x) + \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^{\,n}}\left(x^n\right) \\ &= (n+1) \times (n! \times (\ln(x) + H_n)) + n! \end{aligned}$$

   Puisque la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n$ vaut $n!$. Finalement :

$$\begin{aligned} {\varphi_{n+1}}^{(n+1)}(x) &= (n+1)!(\ln(x) + H_n) + n! \\ &= (n+1)!\left(\ln(x) + H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) + n! \\ &= (n+1)!(\ln(x) + H_{n+1}) - n! + n! \end{aligned}$$

   Finalement, P_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
4. D'après la question précédente, ${\varphi_n}^{(n)}(1) = n! \times H_n$. D'autre part, notons $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^n$. D'après la formule de Leibniz,

$$ {\varphi_n}^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(1) g^{(n-k)}(1) $$

   Or, si $k = 0$, $f^{(k)}(1) = \ln(1) = 0$ donc la somme va de 1 à n. De plus, si $k \geq 1$, on a d'une part (on peut le prouver par récurrence immédiate)

$$ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} $$

   donc $f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1} \times (k-1)!$, et d'autre part :

$$ g^{(n-k)}(x) = n(n-1)\cdots(k+1)x^k = \frac{n!}{k!}x^k $$

si bien que $g^{(n-k)}(1) = n!/k!$. On en déduit que

$$\begin{aligned} {\varphi_n}^{(n)}(1) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k-1} \times \frac{(k-1)!n!}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{k-1} \times \frac{n!}{k} \end{aligned}$$

et on conclut en disant que $H_n = {\varphi_n}^{(n)}(1)/n!$ (voir ci-dessus).

Exercice 54 : ✪✪ Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0\}$. Montrer que E et $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash E$ sont stables par produit.

Correction : Soient f et g appartenant à E. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors, d'après la formule de Leibniz (f et g sont $\mathscr{C}^\infty$ donc $f \times g$ également) :

$$(f \times g)^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(0) \times g^{(k-i)}(0)$$

Or, pour tout i, $f^{(i)}(0) = 0$ et $g^{(k-i)}(0) = 0$ donc $(f \times g)^{(k)}(0) = 0$: $f \times g \in E$, E est stable par produit. Supposons à présent que f et g n'appartiennent pas à E : il existe donc n_1 et n_2 tels que $f^{(n_1)}(0) \neq 0$ et $g^{(n_2)}(0) \neq 0$. Posons $k_1 = \min\{n \,|\, f^{(n)}(0) \neq 0\}$, $k_2 = \min\{n \,|\, g^{(n)}(0) \neq 0\}$ (i.e. k_1 et k_2 sont les premiers indices pour lesquels $f^{(n)}(0) \neq 0$ et idem pour g) et $k = k_1 + k_2$. Dès lors, toujours d'après la formule de Leibniz :

$$(f \times g)^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)}(0) \times g^{(k-i)}(0)$$

Si $i < k_1$, alors $f^{(i)}(0) = 0$ (k_1 est le premier pour lequel la valeur est non nulle) et si $i > k_1$, alors $k-i \leq k-k_1 = k_2-1 < k_2$ si bien que $g^{(k-i)}(0) = 0$. Dans tous les cas, $f^{(i)}(0) \times g^{(k-i)}(0) = 0$ pour tout $i \neq k_1$ donc il ne reste que le terme d'indice $i = k_1$ dans la somme, c'est-à-dire que

$$(f \times g)^{(k)}(0) = \binom{k}{k_1} f^{(k_1)}(0) \times g^{(k-k_1)}(0) = \binom{k}{k_1} f^{(k_1)}(0) \times g^{(k_2)}(0) \neq 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 55 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 0, f^{(n)}(x_n) = 0$. On pourra utiliser l'exercice 33.

Correction : Posons $x_0 = 0$. D'après l'exercice 33, il existe $x_1 > 0$ tel que $f'(x_1) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que f'' ne s'annule pas sur $]\, x_1\,; +\infty\,[$. Puisque f est $\mathscr{C}^\infty$, elle est $\mathscr{C}^2$ donc f'' est continue, et puisqu'elle ne s'annule pas, elle est de signe constant sur $]\, x_1\,; +\infty\,[$. Sans perte de généralité, on suppose que f'' est strictement positive sur cet intervalle, si bien que f' est strictement croissante. Elle admet donc une limite L strictement positive (ou égale à $+\infty$) en $+\infty$. On montre comme dans le cours (à savoir faire !) que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde. Ainsi, f'' s'annule sur $]\, x_1\,; +\infty\,[$: il existe $x_2 > x_1$ tel que $f''(x_2) = 0$. Il suffit ensuite d'itérer le procédé. Avant cela, prouvons un résultat par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « si $f^{(n)}$ admet une limite L finie ou infinie en $+\infty$, alors $L = 0$ ».
- On montre comme dans le cours que H_1 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons que $f^{(n+1)}$ admette une limite finie ou infinie qu'on note L. Si $L \neq 0$ alors, comme dans le cours, $f^{(n)}$ tend vers $\pm\infty$ ce qui est absurde par hypothèse de récurrence. Alors $L = 0$, ce qui clôt la récurrence.

Il suffit d'itérer le procédé précédent. Faisons-le proprement : soit $n \geq 2$, supposons $x_0 < \cdots < x_n$ construits. Si $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $]\, x_n\,; +\infty\,[$, elle y est continue donc est de signe constant donc $f^{(n)}$ y est strictement monotone, et puisque $f^{(n)}(x_n) = 0$, $f^{(n)}$ admet en $+\infty$ une limite fini ou infinie non nulle, ce qui contredit le résultat précédent : $f^{(n+1)}$ s'annule sur $]\, x_n\,; +\infty\,[$ ce qui permet de construire x_{n+1}. On définit bien ainsi une suite (x_n) qui convient.

Exercice 56 : ✪✪ Soient $x \not\equiv \pi/2[\pi]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

En déduire les valeurs de $a_0, \dots, a_7$ lorsque $x = 0$.

Correction : Soit $n \geq 1$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(x)}{k!} \times \frac{\tan^{(n-k)}(x)}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \times \tan^{(n-k)}(x) = \frac{(\tan \times \tan)^{(n)}(x)}{n!}$$

d'après la formule de Leibniz. Or, $\tan^2 = \tan' - 1$ et $1^{(n)} = 0$ (puisque $n \geq 1$) donc

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \frac{(\tan^2)^{(n)}(x)}{n!} = \frac{(\tan' - 1)^{(n)}(x)}{n!} = \frac{(\tan')^{(n)}(x)}{n!} = (n+1) \times \frac{\tan^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} = (n+1)a_{n+1}.$$

Lorsque $x = 0$: on a $a_0 = 1$ et $a_1 = \tan(0) = 0$. D'après ce qui précède avec $n = 1$:

$$2a_2 = a_0 a_1 + a_1 a_0 = 0$$

De même avec $n = 2$:

$$3a_3 = a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = 1$$

donc $a_3 = 1/3$. On trouve de même $a_4 = a_6 = 0$, $a_2 = 2/15$ et $a_7 = 17/315$.

Exercice 57 - Fonctions absolument et complètement monotones : ✪✪✪ Toutes les fonctions de cet exercice sont $\mathscr{C}^\infty$. Une fonction f définie sur I est dite

- absolument monotone (en abrégé : AM) si $f^{(k)}$ est positive (au sens large) pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- complètement monotone (en abrégé : CM) si $(-1)^k f^{(k)}$ est positive (au sens large), c'est-à-dire si $f^{(k)}$ est du signe de $(-1)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction exponentielle est AM sur $\mathbb{R}$ et que la fonction inverse est CM sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On suppose dans cette question que $I = \mathbb{R}^{+*}$, que $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit sur I la fonction f par $f(x) = x^\alpha$. Montrer que f est AM sur I si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$, puis donner toutes les valeurs de α pour que f soit CM sur I.
3. Montrer, à l'aide de l'exercice 56 que la tangente est AM sur $\left[0\,; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions AM sur I est stable par somme.
5. Montrer que le produit de deux fonctions AM est AM. Et le produit de deux fonctions CM ? On se donne dans la suite de cet exercice une fonction AM sur I, notée f.
6. (a) Montrer que f est positive et monotone. Et si f est CM ?
   (b) Donner une fonction $\mathscr{C}^\infty$, positive, croissante, mais non AM.
   (c) On suppose dans cette question uniquement que $I = \left]a\,; b\right[$. Montrer que f admet une limite finie en a. En déduire que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[a\,; b\right[$. Le résultat est-il aussi valable en b ?
7. On suppose que I est symétrique par rapport à 0 et on définit sur I la fonction g par $g(x) = f(-x)$.
   (a) Montrer que f est AM si et seulement si g est CM.
   (b) En déduire toutes les fonctions paires AM sur I.
8. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions AM. Montrer que $g \circ f$ est AM.

Correction :

1. Pour tout k, la dérivée k^e de l'exponentielle est elle-même, et est positive. Ainsi, l'exponentielle est AM sur $\mathbb{R}$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$, si on note f la fonction inverse :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n \times (n-1)!}{x^{n+1}}$$

et cette quantité est bien du même signe que $(-1)^n$ (car $x > 0$, on est sur $\mathbb{R}_+^*$), ce qui est le résultat voulu.

2. De même, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - (n-1))x^{\alpha - n}$$

Cette formule est valable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, même si $\alpha \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, le facteur devant la puissance de x est nul pour n assez grand (plus précisément pour $n \geq \alpha + 1$). Ainsi, f est AM sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, $\alpha - (n-1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$. Ainsi, des termes strictement négatifs finissent par apparaître dans ce produit. Dès lors, la seule possibilité pour que ce produit soit positif ou nul **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ est qu'un des termes soit nul avant qu'un terme strictement négatif apparaisse, c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha - (n-1) = 0$. En d'autres termes, la seule possibilité est d'avoir $\alpha \in \mathbb{N}$. Montrons cela un peu plus rigoureusement.

- **Premier cas :** $\alpha \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n < \alpha + 1, \alpha - (n-1) > 0$ et donc $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) > 0$ (c'est un produit de termes strictement positifs). De plus, si $n \geq \alpha + 1$, ce produit est nul car il contient $(\alpha - (n_0 - 1)) = 0$ avec $n_0 = \alpha + 1 \leq n$. Ce produit est donc également positif ou nul, et f est AM.
- Deuxième cas : $\alpha \notin \mathbb{N}$. De même, pour tout $n < \alpha+1, \alpha-(n-1) > 0$ et donc $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) > 0$ et si n est le plus petit entier strictement supérieur à $\alpha+1$ ($n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ pour être précis) alors $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1)) < 0$ (car le dernier terme est strictement négatif et tous les autres sont strictement positifs) et la fonction n'est pas AM. Le cas $n = \alpha+1$ ne se produit pas car α n'est pas un entier, et on passe directement de $n < \alpha+1$ à $n > \alpha+1$.

En conclusion, f est AM si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$. Cherchons à présent les valeurs de α pour que f soit CM sur I. Tout d'abord, f doit être positive, ce qui est toujours le cas. Ensuite, f' doit être négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ qui est du signe de α. Une condition nécessaire est donc que α soit négatif ou nul. Montrons que c'est une condition suffisante, c'est-à-dire que si $\alpha \leq 0$ alors f est CM. Supposons donc que α soit négatif ou nul. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous les termes du produit $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))$ sont négatifs et ce produit est donc du même signe que $(-1)^n$ (car il contient n termes). Dès lors, $(-1)^n \times f$ est positive sur I, ce qui est le résultat voulu. Finalement, f est CM si et seulement si $\alpha \leq 0$.

3. Par une récurrence forte immédiate (faite dans le chapitre 1), $a_n \geq 0$ pour tout n (on reprend les notations de l'exercice 56) donc $\tan^{(n)}(x) \geq 0$ pour tout n (et tout $x \in [\,0\,;\pi/2\,[$) : la tangente est AM.
4. Soient f et g deux fonctions AM sur I. Pour tout $n \in \mathbb{N}, (f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$ par hypothèse sur f et g. Ainsi, $f+g$ est AM, c'est-à-dire que l'ensemble des fonctions AM est stable par somme.
5. Soient f et g deux fonctions AM. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz,

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \geq 0$$

car, par hypothèse, $f^{(k)} \geq 0$ et $g^{(n-k)} \geq 0$ pour tout k (car f et g sont AM). Ainsi, $f \times g$ est AM, ce qui est le résultat voulu : le produit de deux fonctions AM est AM. On suppose à présent que f et g sont CM. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}(-1)^n \times (f \times g)^{(n)} &= (-1)^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k f^{(k)} \times (-1)^{n-k} g^{(n-k)}\end{aligned}$$

et la dernière somme est positive par hypothèse sur f et g. $f \times g$ est par conséquent CM : le produit de deux fonctions CM est CM.

6. (a) Par hypothèse, $f^{(0)} = f \geq 0$ et $f^{(1)} = f' \geq 0$, donc f est positive et croissante (donc monotone). De plus, si f est CM, $f^{(0)} = f \geq 0$ et $f^{(1)} = f' \leq 0$ donc f est positive et décroissante (donc monotone).
   (b) D'après la question 2, en prenant $\alpha = 1/2 \notin \mathbb{N}$, la racine carrée est positive, croissante, mais non AM sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) f étant croissante et minorée (car positive), f admet une limite finie en a, notée L. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = L$. On cherche à présent à appliquer le théorème la limite de la dérivée, version $\mathscr{C}^1$. Pour cela, il ne reste qu'à montrer que f' admet une limite finie en a : il suffit de faire exactement la même chose ! f' est positive (donc minorée) et croissante (car $f'' \geq 0$) donc admet une limite finie en a, notée L'. En d'autres termes : f est continue sur $[\,a\,;b\,[$, $\mathscr{C}^1$ sur $]\,a\,;b\,[$ et f' admet une limite finie en a. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;b\,[$. Le résultat n'est pas forcément valable en b. Par exemple, si on prend $f = \tan$ (AM d'après la question 3), $a = 0$ et $b = \pi/2$, $f(x) \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.
7. (a) Tout d'abord, pour tout $x \in I, g'(x) = -f'(-x)$. Par une récurrence immédiate, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$. Par conséquent, f est AM
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, f^{(n)}(x) \geq 0$.
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, f^{(n)}(-x) \geq 0$ (car si c'est vrai pour tout x, c'est aussi vrai pour $-x$).
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, (-1)^n \times (-1)^n \times f^{(n)}(-x) \geq 0$ (car $(-1)^n \times (-1)^n = (-1)^{2n} = 1$).
   - si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I, (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$.
   - si et seulement si g est CM.

   (b) Soit f une fonction paire AM. En particulier, $f' \geq 0$. Ensuite, d'après la question précédente, $g = f$ est CM, ce qui implique que $f' \leq 0$ et donc $f' = 0$: f est constante (et positive car est AM). La réciproque étant immédiate : les seules fonctions paires AM sur I sont les fonctions constantes positives.
8. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « Pour toutes fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM, la dérivée n-ième de $g \circ f$ est positive ».
   - Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM. Alors g est positive donc $g \circ f = (g \circ f)^{(0)}$ est positive : H_0 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies (on fait donc une récurrence forte). Soient donc $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ AM. Notons $h = g \circ f$. Alors $h' = f' \times g' \circ f$ donc, d'après la formule de Leibniz :

$$h^{(n+1)} = (h')^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f')^{(k)} \times (g' \circ f)^{(n-k)}$$

  Or, pour tout $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, $(f')^{(k)} = f^{(k+1)} \geq 0$ car f est AM. L'astuce est d'appliquer l'hypothèse de récurrence avec g' et f à la place de g et f (penser à « truc »), qui sont bien AM. Par HR, toutes les dérivées de l'ordre 0 à l'ordre n de $g' \circ f$ sont positives donc $(g' \circ f)^{(n-k)} \geq 0$ pour tout $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$. Par produit et par somme, $h^{(n+1)} \geq 0$ ce qui clôt la récurrence.

Exercice 58 : ✪✪

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\varphi(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que

$$f_x : y \mapsto \int_x^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle est dérivable (c'est l'unique primitive de $t \mapsto e^{t^2}$ qui s'annule en x) de dérivée $t \mapsto e^{t^2} > 0$ donc est strictement croissante. Par croissance de l'intégrale, pour tout $y \geq x$,

$$f_x(y) \geq \int_x^y \mathrm{d}t = y - x$$

   Or, $y - x \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de minoration, $f_x(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} +\infty$. De même, si $y \leq x$ (pour appliquer le théorème de croissance de l'intégrale, les bornes doivent être dans l'ordre croissant) :

$$\int_y^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_y^x \mathrm{d}t = x - y$$

   donc

$$f_x(y) = -\int_y^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t \leq -(x-y) = y - x$$

   Cette fois, à l'aide du théorème de majoration, $f_x(y) \xrightarrow[y \to -\infty]{} -\infty$. f_x étant continue (car dérivable) strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection, f_x est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc il existe un unique réel (noté $\varphi(x)$) tel que $f_x(\varphi(x)) = 1$.
2. Notons

$$F : y \mapsto \int_0^y e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

   On sait déjà (en prenant $x = 0$ dans la question précédente) que F est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de $\varphi(x)$:

$$\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

   donc

$$\int_0^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$

   En d'autres termes, $F(\varphi(x)) - F(x) = 1$ i.e. $\varphi(x) = F^{-1}(1 - F(x))$. F étant $\mathscr{C}^\infty$ de dérivée qui ne s'annule pas, F^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$ donc φ est $\mathscr{C}^\infty$ par composition.

Exercice 59 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-x^2\right)^n & \text{si } x \in [-1\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Correction : f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ (et ses dérivées successives sont bornées sur $]-1\,;1[$, ce sera utile dans la suite). La fonction f est paire donc la situation est la même en 1 et en -1. Plus précisément, si $p \in \mathbb{N}$, alors f_n est $\mathscr{C}^p$ si et seulement si ${f_n}^{(p)}$ est continue en 1.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ et ${f_n}^{(n)}$ admet une limite finie non nulle en 1^- et donc f_n n'est pas $\mathscr{C}^n$. »
- f_1 est la fonction définie par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1-x^2\right) & \text{si } x \in [-1\,;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  On montre aisément que f_1 est continue en 1 (limite à droite égale à la limite à gauche égale à la valeur de la fonction en 1) mais n'est pas dérivable en 1. En effet, f_1 est dérivable à droite en 1 de dérivée (à droite) nulle, et f_1 est dérivable à gauche de dérivée (à gauche) égale à -2 donc f_1 n'est pas dérivable en 1 donc n'est pas $\mathscr{C}^1$: H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. $fn+1(x) = f_n(x) \times (1-x^2)$. Par hypothèse de récurrence, f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ donc, par produit, f_{n+1} est $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$. Supposons à présent que $x \in]-1\,;1[$. Notons $g(x) = 1-x^2$. D'après la formule de Leibniz (f_n est $\mathscr{C}^\infty$ donc dérivable n fois sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$) :

$$f_{n+1}{}^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) {f_n}^{(n-k)}(x)$$

  Or, $g^{(k)}(x) = 0$ si $k \geq 3$ donc

$$f_{n+1}{}^{(n)}(x) = (1-x^2) \times {f_n}^{(n)}(x) + n \times -2x \times {f_n}^{(n-1)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times -2 \times {f_n}^{(n-2)}(x)$$

  Par hypothèse de récurrence, ${f_n}^{(n)}$ admet une limite finie non nulle en 1^- et f_n est $\mathscr{C}^{n-1}$ donc ${f_n}^{(n-1)}$ et ${f_n}^{(n-2)}$ sont continues en 1 donc tendent vers 0 en 1^- (car tendent vers 0 en 1^+). On en déduit que $f_{n+1}{}^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. C'est évidemment aussi le cas en 1^+ donc en 1. De plus, $f_{n+1}{}^{(n-1)}$ est continue d'après ce qui précède, et $f_{n+1}{}^{(n)}$ admet une limite en 1 donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée (version $\mathscr{C}^1$), $f_{n+1}{}^{(n-1)}$ est $\mathscr{C}^1$ donc f_{n+1} est $\mathscr{C}^n$. De même que ci-dessus :

$$f_{n+1}{}^{(n+1)}(x) = (1-x^2) \times {f_n}^{(n+1)}(x) + n \times -2x \times {f_n}^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2} \times -2 \times {f_n}^{(n-1)}(x)$$

  Le premier (car toutes les dérivées de f_n sont bornées sur $]-1\,;1[$) et le troisième terme tendent vers 0 quand $x \to 1^-$ et le deuxième vers une limite finie non nulle donc $f_{n+1}{}^{(n+1)}$ a une limite finie non nulle en 1^- ce qui clôt la récurrence.

Exercice 60 : ✪✪✪ Trouver toutes les fonctions f dérivables n fois sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Correction : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable n fois. L'idée est de faire comme dans le binôme de Newton quand il n'y a qu'une variable, on dit que la deuxième vaut 1, sauf que cela ne fonctionne pas ici : cela ne fonctionne dans le cas réel que parce que toutes les puissances de 1 valent 1 (c'est-à-dire $1^{n-k} = 1$ pour tout k). Il suffit de prendre une fonction g telle que toutes les dérivées de g soient égales à g, c'est-à-dire telles que $g^{(n-k)} = g$ pour tout k, et on pense évidemment à l'exponentielle (une espèce d'élément neutre de la dérivation, si on veut). Une fois cette idée trouvé, l'exercice ne pose plus de difficulté. La première équivalence vient du fait que l'exponentielle ne s'annule jamais, la troisième de la formule de Leibniz et la dernière de l'équivalence : $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynôme de degré $\leq n-1$.

$$\begin{aligned} f \text{ convient} \quad &\iff \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times \exp = 0 \\ &\iff \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times \exp^{(n-k)} = 0 \\ &\iff \quad (f \times \exp)^{(n)} = 0 \\ &\iff \quad \exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], f \times \exp = P \end{aligned}$$

Prouvons en effet que $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par récurrence : une fonction est de dérivée nulle si et seulement si elle est constante, si et seulement si elle est polynomiale de degré inférieur ou égal à 0, donc le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est vrai au rang $n+1$. $f^{(n+1)} = 0$ si et seulement si la dérivée n-ième de f' est constante. D'après l'hypothèse de récurrence, c'est le cas si et seulement si f' est polynomiale de degré $\leq n$ donc est de la forme $x \mapsto a_n x^n + \cdots + a_0$. En primitivant, $f^{(n+1)} = 0$ si et seulement si f est de la forme $x \mapsto a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots + c_0 x + K$ donc si et seulement si f est polynomiale de degré n, ce qui clôt la récurrence.

En conclusion, f est solution si et seulement s'il existe P fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x) \times e^{-x}$ (en divisant la dernière égalité par e^x).

Exercice 61 - Pour les amateurs de calculs et de sommes : ✪✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, et soit $g : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ et que pour tout $x > 0$:

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Correction : g est $\mathscr{C}^n$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^n$. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_n l'égalité de l'énoncé.
- D'une part,

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} \times f'\left(\frac{1}{x}\right)$$

D'autre part, lorsque $n = 1$:

$$\begin{aligned}
(-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) &= (-1) \times \frac{1-0}{x^{2\times 1-0}} \binom{1}{0} f^{(1-0)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{-1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= g'(x)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que H_n soit vraie, et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Par hypothèse de récurrence,

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Dès lors, en dérivant :

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times -(2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} \times \frac{-1}{x^2} f^{(n-p+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times (2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p+2}} \binom{n}{p} \times f^{(n-p+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p) \times (2n-p)}{x^{2n-p+1}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\quad + (-1)^{n+1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2(n+1)-p}} \binom{n}{p} \times f^{(n+1-p)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Dans la première somme, faisons le changement d'indice $k = p+1$, $p = k-1$.

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)\times(2n-k+1)}{x^{2n-k+2}}\binom{n}{k-1}f^{(n-k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&\quad+(-1)^{n+1}\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2(n+1)-p}}\binom{n}{p}\times f^{(n+1-p)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

L'indice étant muet, mettons en facteur les termes de k allant de 1 à $n-1$ qui apparaissent dans les deux sommes :

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\times\left[(2n-k+1)\binom{n}{k-1}+(n-k)\binom{n}{k}\right]f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right)\\
&\quad\underbrace{+(-1)^{n+1}\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1\times(n+1)}{x^{n+2}}\times n\times f'\left(\frac{1}{x}\right)}_{k=n}+\underbrace{(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2(n+1)}}\times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)}_{p=0}
\end{aligned}
$$

Or, pour tout $k\in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$
\begin{aligned}
(2n-k+1)\binom{n}{k-1}+(n-k)\binom{n}{k} &= \frac{n!(2n-k+1)}{(k-1)!(n+1-k)!}+\frac{n!}{k!(n-k-1)}\\
&= \frac{n!(2n-k+1)\times k+n!\times(n-k)(n-k+1)}{k!(n+1-k)!}\\
&= \frac{n!(2nk-k^2+k+n^2-2nk-k+k^2)}{k!(n+1-k)!}\\
&= \frac{n!\times(n+1)\times n}{k!(n+1-k)!}\\
&= n\binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)(n-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\times n\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right)\\
&\quad+(-1)^{n+1}\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1\times(n+1)}{x^{n+2}}\times n\times f'\left(\frac{1}{x}\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2(n+1)}}\times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right)\\
&\quad+(-1)^{n+1}\times\frac{(n-1)(n-2)\cdots 1\times(n+1)}{x^{n+2}}\times n\times f'\left(\frac{1}{x}\right)+(-1)^{n+1}\frac{1}{x^{2(n+1)}}\times f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}
$$

Le dernier terme correspond au terme pour $k=0$ et l'avant dernier au terme pour $k=n$ (le $n+1$ est égal au coefficient binomial $\binom{n+1}{n}$) si bien que

$$
g^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1-1)(n+1-2)\cdots(n+1-k)}{x^{2(n+1)-k}}\binom{n+1}{k}f^{(n+1-k)}\left(\frac{1}{k}\right)
$$

ce qui permet de conclure.

14.5 Fonctions à valeurs complexes.

Exercice 62 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. Donner la dérivée n-ième de $\sin^5$.

Correction : Soit $x\in\mathbb{R}$. Notons $f(x)=\sin^5(x)$. D'après la formule d'Euler et le triangle de Pascal (et en se souvenant que $i^5=i$)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5\\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i}\\
&= \frac{\sin(5x)}{32}-\frac{5\sin(3x)}{32}+\frac{10\sin(x)}{32}
\end{aligned}$$

Dès lors, toujours en utilisant le fait que, pour tout n et pour tout u, $\sin^{(n)}(u) = \sin(u+n\pi/2)$, on obtient que :

$$f^{(n)}(x) = \frac{5^n\sin(5x+n\pi/2)}{32} - \frac{5\times 3^n\sin(3x+n\pi/2)}{32} + \frac{10\sin(x+n\pi/2)}{32}$$

Exercice 63 : ✪ Soit $n\in\mathbb{N}$. Redémontrer le fait que la dérivée n-ième du sinus est $x\mapsto \sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

Correction : Notons $f : x\mapsto e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= i^n e^{ix}\\
&= e^{in\pi/2}\times e^{ix}\\
&= e^{i(x+n\pi/2)}\\
&= \cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)+i\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

et, d'autre part, $f^{(n)}(x) = \cos^{(n)}(x)+i\sin^{(n)}(x)$ ce qui permet de conclure (deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales).

Exercice 64 : ✪ Soit $f : I\to\mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I, et que $|f|$ est dérivable en tout point en lequel f ne s'annule pas.

Correction : f est dérivable donc $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables donc $\overline{f} = \mathrm{Re}(f)-i\mathrm{Im}(f)$ est dérivable, et

$$|f| = \sqrt{\mathrm{Re}(f)^2+\mathrm{Im}(f)^2}$$

est dérivable là où f ne s'annule pas, car alors $\mathrm{Re}(f)^2+\mathrm{Im}(f)^2>0$ et la racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 65 : ✪✪✪

1. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et que $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Montrer que $\{e^{if(n)}\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.
2. Montrer que $\{\sin(\sqrt{n})\,|\,n\in\mathbb{N}\}$ et $\{\cos(\ln(n))\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$ sont denses dans $[-1\,;1]$.

Correction :

1. L'idée est simple : f tend vers $+\infty$ donc $e^{if(n)}$ va faire une infinité de tours autour du cercle, et puisque f' tend vers 0, alors les $e^{if(n)}$ vont être de plus en plus rapprochés, donc ces éléments vont former un ensemble dense dans $\mathbb{U}$.

   Prouvons le rigoureusement. Cet ensemble est évidemment inclus dans le cercle unité. Pour conclure, il suffit de prouver que pour tout $z\in\mathbb{U}$, pour tout ε, il existe n tel que $|z-e^{if(n)}|\le\varepsilon$ (définition de la densité sur $\mathbb{C}$: il existe des éléments de l'ensemble aussi près qu'on veut de tout élément de $\mathbb{U}$). Soient donc $z\in\mathbb{U}$ et $\varepsilon>0$. Puisque $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$:

   $$\exists A>0, \forall x\ge A, |f'(x)|\le\varepsilon$$

   $z\in\mathbb{U}$ donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $z=e^{i\alpha}$. De plus, par 2π-périodicité, on peut supposer $\alpha>A$ (quitte à prendre $\alpha+2n\pi$ avec n choisi pour avoir $\alpha+2n\pi>A$). Puisque $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, il existe n tel que $f(n)\ge\alpha$ (puisque f' tend vers 0, les $eif(n)$ sont de plus en plus rapprochés, on prend un n tel que z_0 soit compris entre $e^{if(n)}$ et $e^{if(n+1)}$). Soit $n_0=\min\{n\,|\,f(n)\ge\alpha\}$. Alors $f(n_0-1)<\alpha<f(n_0)$: d'après le TVI, il existe $x_0\in[\,n_0\,;n_0+1\,]$ tel que $f(x_0)=\alpha$ si bien que :

   $$|z-e^{if(n_0)}| = |e^{i\alpha}-e^{if(n_0)}| = |e^{if(x_0)}-e^{if(n_0)}|$$

Or, la dérivée de $x \mapsto e^{if(x)}$ est $x \mapsto if'(x)e^{if(x)}$ bornée par $|f'|$ donc par ε puisqu'on est sur $[\,A\,;+\infty\,[$. D'après l'IAF,

$$|z - e^{if(n_0)}| \leq \varepsilon |x_0 - n_0| \leq \varepsilon$$

2. D'après la question précédente (puisque la racine carrée et le ln tendent vers $+\infty$ et ont une dérivée qui tend vers 0), $\{e^{i\sqrt{n}}\,|\,n \in \mathbb{N}\}$ et $\{e^{i\ln(n)}\,|\,n \in \mathbb{N}^*\}$ sont denses dans $\mathbb{U}$. En prenant la partie imaginaire et la partie réelle, respectivement, on a le résultat voulu. En effet, si $y \in [\,-1\,;1\,]$, il existe $z_0 \in \mathbb{U}$ tel que $y = \mathrm{Im}(z_0)$ et, pour tout ε, il existe n tel que $|z_0 - e^{i\sqrt{n}}| \leq \varepsilon$ donc

$$|y - \sin(\sqrt{n})| = |\mathrm{Im}(z_0 - e^{i\sqrt{n}})| \leq |z_0 - e^{i\sqrt{n}}| \leq \varepsilon$$

D'où la densité du premier ensemble, et idem pour le deuxième avec la partie réelle.

14.6 Recollement de solutions d'équations différentielles

Exercice 66 : ✪✪ Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = |x| + 1$ (on étudiera l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Correction : L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$S_H = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)\,|\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Cherchons une solution particulière sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$: sur cet intervalle, l'équation différentielle devient $y'' + y = x + 1$, et 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ donc on cherche une solution de degré 1 i.e. $y_0 : x \mapsto ax + b$, mais $y_0 : x \mapsto x + 1$ est solution évidente, si bien que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ est :

$$S_E = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + x + 1\,|\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

On trouve de même (solution évidente) que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ est :

$$S_E = \{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - x + 1\,|\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

Travaillons par analyse synthèse et supposons qu'il existe f solution sur $\mathbb{R}$ tout entier. f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ (les λ et les μ ne sont pas forcément égaux !) tels que :

$$\forall x > 0, f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \mu_1 \sin(x) + x + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0, f(x) = \lambda_2 \cos(x) + \mu_2 \sin(x) - x + 1$$

f est dérivable deux fois car est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ tout entier donc en particulier f est continue. Or, $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} \lambda_1 + 1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \lambda_2 + 1$. On en déduit que $\lambda_1 = \lambda_2$. De plus, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) + \mu_1 \cos(x) + 1 \xrightarrow[x \to 0^+]{} \mu_1 + 1$$

De même, $f'(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \mu_2 - 1$ donc (f' est continue en 0 car f' est dérivable) $\mu_2 = \mu_1 + 2$.

Synthèse : soient λ et μ deux réels et définissons f par :

$$\forall x \geq 0, f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) + x + 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x < 0, f(x) = \lambda \cos(x) + (\mu + 2) \sin(x) - x + 1$$

On en déduit que f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^*$. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ en faisant comme précédemment. Enfin, en étudiant le taux d'accroissement, on trouve que f' est dérivable en 0 donc f'' est dérivable deux fois en 0 avec $f''(0) = \lambda$ (on étudie la limite à droite et la limite à gauche en 0 du taux d'accroissement de f'), si bien que l'égalité $f'' + f = |x| + 1$ est encore valable en 0 : f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 15

Fonctions convexes

« - J'ai des faims d'ogre !
- Eh bien !... Tu croques le marmot !
- Toujours le mot, la pointe !
- Oui, la pointe, le mot !
Et je voudrais mourir, un soir sous un ciel rose,
En faisant un bon mot, pour une belle cause !
Oh, frappé par la seule arme noble qui soit,
Et par un ennemi qu'on sait digne de soi,
Sur un gazon de gloire et loin d'un lit de fièvres,
Tomber la pointe au cœur en même temps qu'aux lèvres ! »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac.

Si rien n'est précisé, comme en cours, I est un intervalle non vide, non réduit à un point.

Vrai ou Faux :

1. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $]-\infty\,;x_0]$ et croissante sur $[x_0\,;+\infty[$.
2. Une fonction convexe est dérivable deux fois.
3. Une fonction convexe est continue.
4. Une fonction convexe est dérivable.
5. Une fonction convexe n'est pas concave.
6. La fonction $f : x \longmapsto x^5$ a un point d'inflexion en 0.
7. La fonction $f : x \longmapsto x^4$ a un point d'inflexion en 0.
8. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est convexe.
9. Si f est convexe, alors $x \mapsto f(x) - 2024x$ est convexe.
10. Une fonction dérivable deux fois est convexe ou concave.
11. Le produit d'une fonction convexe et d'une fonction concave est concave.
12. Le produit de deux fonctions convexes positives est convexe.
13. Si f est convexe, alors f ne peut pas tendre vers $-\infty$ en $+\infty$.

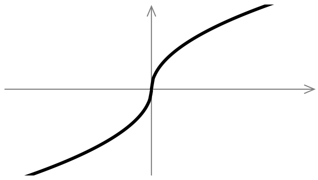
Exercice 1 : ✪ Donner les éventuels points d'inflexion de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Correction : On demande d'expliciter un point d'inflexion pour une fonction qui n'est pas dérivable deux fois. En effet, la racine n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas de classe dérivable deux fois. Une seule solution : la définition. Or, on sait que la racine carrée est concave sur $\mathbb{R}_+$. De plus, f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_-^*$ et si $x < 0$,

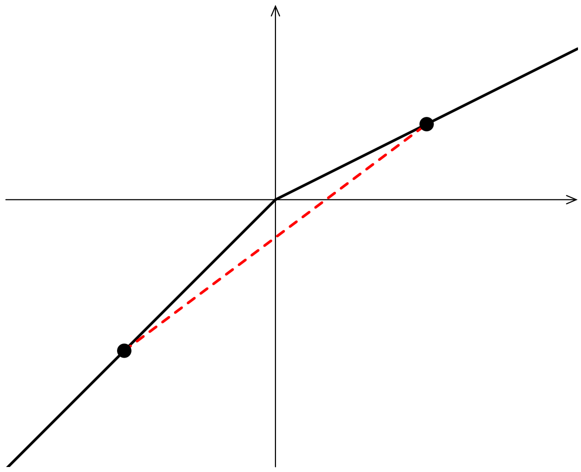
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2}(-x)^{-1/2} \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{1}{2} \times -\frac{1}{2} \times (-1) \times (-x)^{3/2} > 0.$$

La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}_-^*$. De plus, $f(x) = -\sqrt{-x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 : f est donc convexe sur $\mathbb{R}_-$. On en déduit que f change de convexité en 0 donc admet un point d'inflexion en 0. Ci-dessous, le graphe de f (on voit que l'on a une magnifique tangente verticale en 0) :



Exercice 2 - La convexité ne passe pas à l'union : ✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ mais non convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que si f est dérivable, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction : Pour le contre-exemple, il suffit de recoller deux fonctions convexes. Par exemple, si on définit la fonction f par $f(x) = x$ si $x \leq 0$ et $f(x) = x/2$ si $x > 0$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$ (exo), convexe sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ (car est affine sur ces intervalles) mais n'est pas convexe sur $\mathbb{R}$ car n'est pas en-dessous de ses cordes.



Si on veut le montrer rigoureusement (mais on peut l'affirmer directement comme ci-dessus), alors il suffit de voir qu'en prenant $x = -1, y = 1$ et $\lambda = 1/2$ alors $f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ ce qui permet de conclure. Montrons cependant que si f est dérivable alors f est convexe sur $\mathbb{R}$. Il suffit de montrer que f' est croissante sur $\mathbb{R}$. Soient $x \leq y$ deux réels. Si x et y sont négatifs (ou nuls) alors $f'(x) \leq f'(y)$ car f' est croissante sur $\mathbb{R}_-$ (car f convexe sur $\mathbb{R}_-$). De même si x et y sont positifs. Si $x \leq 0 \leq y$ alors $f'(x) \leq f'(0)$ car f' croissante sur $\mathbb{R}_-$ et $f'(0) \leq f'(y)$ car f' est croissante sur $\mathbb{R}_-$. En particulier, $f'(x) \leq f'(y)$. Dans tous les cas, $f'(x) \leq f'(y)$ donc f' est croissante donc f est convexe.

Exercice 3 : ✪ Soit $f : [\,0\,;2\pi\,] \to \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Correction : Notons I l'intégrale de l'énoncé. Puisque f est C^2, réflexe : on fait deux intégrations par parties, on dérive deux fois f, ce qui donne après calculs $I = f'(2\pi) - f'(0) - \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$. On cherche à tout rentrer dans la même intégrale : on remarque que $f'(2\pi) - f'(0) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)\,\mathrm{d}t$ ce qui donne $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} f''(t)(1-\cos(t))\,\mathrm{d}t$. Or, f est convexe donc f'' est positive, et $1 - \cos \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, I est positive.

Exercice 4 - Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, ou pourquoi vos professeurs sont vraiment très gentils : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer à l'aide de la concavité de la fonction ln que

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$

2. Montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

3. Montrer que $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$

Correction :

1. Appliquons l'inégalité de Jensen à $x_1, \dots, x_n$ et à la fonction ln qui est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Les $1/n$ étant positifs de somme 1,
$$\ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n} = \ln\left((x_1\cdots x_n)^{1/n}\right).$$
La fonction exponentielle étant croissante, on en déduit : $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq (x_1\cdots x_n)^{1/n}$. Pour l'inégalité de de droite, il suffit d'appliquer ce résultat à $1/x_1, \dots, 1/x_n$:
$$\frac{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{x_1}\times\cdots\frac{1}{x_n}\right)^{1/n} = \frac{1}{(x_1\cdots x_n)^{1/n}}.$$
On a la deuxième inégalité par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Appliquons la première inégalité à $\dfrac{x_1}{x_2}, \dfrac{x_2}{x_3}, \dots, \dfrac{x_n}{x_1}$ ce qui donne :
$$\frac{\dfrac{x_1}{x_2}+\cdots+\dfrac{x_n}{x_1}}{n} \geq \left(\frac{x_1}{x_2}\times\frac{x_2}{x_3}\times\cdots\times\frac{x_{n-1}}{x_n}\times\frac{x_n}{x_1}\right)^{1/n} = 1$$
et on a le résultat voulu en multipliant par n.
3. Le $\dfrac{n+1}{2}$ nous rappelle le $\dfrac{n(n+1)}{2}$ c'est à dire la somme des k : on pense donc à prendre $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\cdots$, $x_n = n$ et donc, toujours d'après la première inégalité de la question 1 :
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n} \geq (1\times 2\times\cdots\times n)^{1/n}$$
et donc $\dfrac{n+1}{2} \geq (n!)^{1/n}$. La fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a le résultat voulu.

Exercice 5 - Fonctions $\mathbb{Q}$-convexes : ✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est $\mathbb{Q}$-convexe, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \cap \mathbb{Q}, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
Montrer que f est convexe.

Correction : Soient $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. $[\,0\,;1\,] \cap \mathbb{Q}$ étant dense dans $[\,0\,;1\,]$, il existe une suite (λ_n) de rationnels de $[\,0\,;1\,]$ qui converge vers λ. Puisque f est $\mathbb{Q}$ convexe, pour tout n,
$$f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1-\lambda_n) f(y)$$
Par opération sur les limites, $\lambda_n f(x) + (1-\lambda_n)f(y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. Par continuité de f, $f(\lambda_n x + (1-\lambda_n)y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\lambda x + (1-\lambda)y)$. L'inégalité large passe à la limite donc :
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
c'est-à-dire que f est convexe.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $(a,b,x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$. Montrer que :
$$x\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y)\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

Correction : Soit $f : x \mapsto x\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. f est $\mathscr{C}^\infty$ donc dérivable deux fois et pour tout $x > 0$,
$$f'(x) = \ln(x) + 1 \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \frac{1}{x} > 0$$
si bien que f est convexe. Notons $\lambda = \dfrac{a}{a+b}$: on a bien $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ car x et y sont strictement positifs. Puisque f est convexe :
$$f\left(\lambda\times\frac{x}{a} + (1-\lambda)\frac{y}{b}\right) \leq \lambda f\left(\frac{x}{a}\right) + (1-\lambda) f\left(\frac{y}{b}\right)$$
c'est-à-dire :
$$f\left(\frac{a}{a+b}\times\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\times\frac{y}{b}\right) \leq \frac{a}{a+b}\times f\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b}\times f\left(\frac{y}{b}\right)$$

et en utilisant l'expression de f :

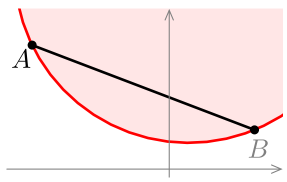
$$f\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = \left(\frac{x+y}{a+b}\right) \times \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leq \frac{a}{a+b} \times \frac{x}{a} \times \ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{b}{a+b} \times \frac{y}{b} \times \ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Il suffit de multiplier par $a+b>0$ pour conclure.

Exercice 7 - Une définition équivalente de la convexité : ✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'épigraphe de f est l'ensemble épi$(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geq f(x)\}$. Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Remarque : La définition d'une partie du plan convexe se généralise facilement (à $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ et plus généralement, cf. second chapitre 28, à tout espace vectoriel) : une partie est convexe si, pour tous points dans cette partie, le segment joignant ces deux points est inclus dans cette partie. Sur $\mathbb{R}$, cela devient : une partie non vide est convexe si et seulement si, pour tous a, b appartenant à I, $[\,a\,;b\,] \subset I$. On a montré dans le chapitre 12 que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. C'est d'ailleurs comme cela qu'on les définit parfois.

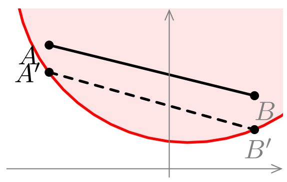
Correction : Supposons que l'épigraphe soit convexe et montrons que f est convexe. Soit $(x,y) \in I^2$ et soit $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Notons A le point de coordonnées $(x, f(x))$ et B le point de coordonnées $(y, f(y))$.



Dès lors, A et B appartiennent à l'épigraphe de f qui est une partie convexe donc $[AB]$ est inclus dans l'épigraphe de f. Il en découle que $\lambda A + (1-\lambda)B$, de coordonnées $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$, qui appartient au segment $[AB]$, appartient aussi à l'épigraphe. Par définition de l'épigraphe, cela signifie que

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

c'est-à-dire que f est convexe. Réciproquement, supposons f convexe et prouvons que l'épigraphe est convexe. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ dans l'épigraphe. Notons A' et B' les points de même abscisse que A et B respectivement, mais sur le graphe de f.



En d'autres termes, les coordonnées de A' sont $(x_A, f(x_A))$ et celles de B' sont $(x_B, f(x_B))$. De plus, A et B étant dans l'épigraphe, $y_B \geq f(x_B)$ et $y_A \geq f(x_A)$. Soit $M \in [AB]$. Il existe donc $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ tel que $M = \lambda A + (1-\lambda B)$ donc les coordonnées de M sont $(\lambda x_A + (1-\lambda)x_B, \lambda x_A + (1-\lambda)x_B)$. f étant convexe,

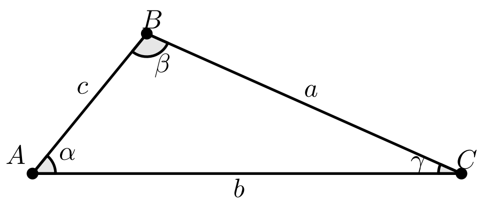
$$f(\lambda x_A + (1-\lambda)x_B) \leq \lambda f(x_A) + (1-\lambda)f(x_B)$$

Enfin, λ et $1-\lambda$ sont positifs donc

$$f(\lambda x_A + (1-\lambda)x_B) \leq \lambda f(x_A) + (1-\lambda)f(x_B) \leq \lambda y_A + (1-\lambda)y_B$$

En d'autres termes, M appartient à l'épigraphe de f, $[AB]$ est inclus dans l'épigraphe, l'épigraphe est convexe.

Exercice 8 - Inégalité de Weitzenböck : ✪✪ On se place dans tout l'exercice dans un triangle ABC non aplati quelconque. Pour alléger les notations, on notera $a = BC, b = AC, \alpha = \widehat{CAB}\ldots$ comme sur le dessin ci-dessous :

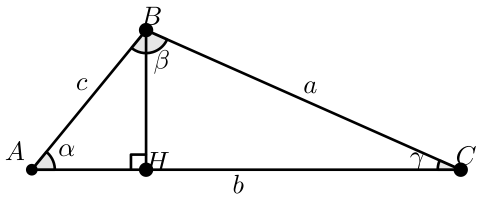


Enfin, on note S l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que $S = \dfrac{1}{2} \times bc \times \sin(\alpha)$. Par symétrie, on a également les égalités suivantes (il n'est pas demandé de les montrer) : $S = \dfrac{1}{2} \times ab \times \sin(\gamma)$ et $S = \dfrac{1}{2} \times ac \times \sin(\beta)$.
   (b) En déduire une expression de $ab + ac + bc$ en fonction de $S, \sin(\alpha), \sin(\beta)$ et $\sin(\gamma)$.
2. (a) Étudier la convexité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $]\,0\,;\pi\,[$. Donner également son tableau de variations et l'allure de son graphe.
   (b) En déduire que $\dfrac{ab+ac+bc}{3} \geq \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.
3. Montrer l'inégalité de Weitzenböck : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Correction :

1. (a) Notons H le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) (droite et non pas segment car si α est obtus, H est en dehors du segment $[AC]$), comme sur le dessin ci-dessous :



Il suffit de voir qu'on a $S = b \times BH/2$ et que, par définition d'un sinus dans le triangle rectangle AHB (« côté opposé sur hypoténuse »), $\sin(\alpha) = BH/c$ donc $BH = \sin(\alpha) \times c$ ce qui permet de conclure : $S = \dfrac{1}{2} \times bc \times \sin(\alpha)$.

   (b) D'après la question précédente, on a $bc = 2S/\sin(\alpha)$ et une expression analogue pour les autres produits (aucun sinus n'est nul car le triangle n'est pas aplati), d'où :

$$ab + ac + bc = 2S \times \left(\frac{1}{\sin(\alpha)} + \frac{1}{\sin(\beta)} + \frac{1}{\sin(\alpha)} \right)$$

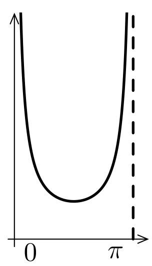
2. (a) Posons $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$, définie sur $]\,0\,;\pi\,[$. La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$, donc en particulier deux fois dérivable. Soit $x \in \,]\,0\,;\pi\,[$. On a $f'(x) = -\cos(x)/\sin^2(x)$. En dérivant comme un produit, il vient :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} + (-\cos(x)) \times \frac{(-2) \times \cos(x)}{\sin^3(x)} \\ &= \frac{1}{\sin(x)} + \frac{2\cos^2(x)}{\sin^3(x)} \end{aligned}$$

En particulier, $f'' \geq 0$ sur $]\,0\,;\pi\,[$: f est convexe.
Le tableau de variations de f découle de l'expression de f' donnée ci-dessus :

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$\Vert$

On en déduit le graphe de f.



(b) Puisque f est convexe, en utilisant l'égalité de Jensen avec $n=3$, on obtient :

$$\frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3} \geq f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}+\frac{1}{\sin(\beta)}+\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) \geq \frac{1}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right)}$$

Or, puisque α, β, γ sont les trois angles d'un triangle, leur somme est égale à π, ce qui donne :

$$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{\sin(\alpha)}+\frac{1}{\sin(\beta)}+\frac{1}{\sin(\alpha)}\right) \geq \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Il suffit de multiplier par $2S$ (positif) et d'appliquer la question 1.(b) pour conclure.

$$\frac{ab+ac+bc}{3} \geq \frac{4S}{\sqrt{3}}$$

3. On a l'inégalité suivante (c'est l'inégalité arithmético-géométrique, mais inutile de s'encombrer d'un nom savant dans un cas si simple) :

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

Par symétrie, il vient $bc \leq (b^2+c^2)/2$ et $ac \leq (a^2+c^2)/2$. Par conséquent,

$$ab+ac+bc \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2} = a^2+b^2+c^2$$

Ainsi, d'après la question 2.(b),

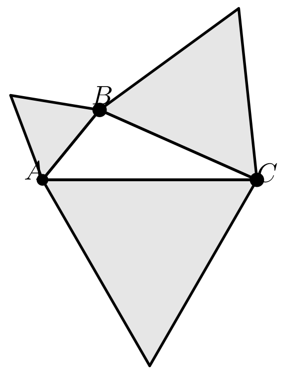
$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{4S}{\sqrt{3}}$$

En conclusion : $a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Remarque : On peut réécrire l'inégalité de Weitzenböck de la façon suivante :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+\frac{b^2\sqrt{3}}{4}+\frac{c^2\sqrt{3}}{4} \geq 3S$$

Or, $a^2\sqrt{3}/4$ est l'aire d'un triangle équilatéral de côté a (et idem pour les deux autres). Ainsi, on peut interpréter géométriquement l'inégalité de Weitzenböck de la façon suivante : la somme des aires des triangles équilatéraux ayant pour base les côtés d'un triangle est toujours supérieure à trois fois l'aire du triangle original. Par exemple, ci-dessous, la somme des trois aires des triangles grisés est supérieure à trois fois l'aire du triangle blanc.



Il y a évidemment d'autres démonstrations (Wikipédia est votre ami). Par exemple, Arthur Engel en donne onze (!) dans son livre Problem-Solving Strategies.

Exercice 9 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que

$$g : x \mapsto \int_{x-1}^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est convexe.

Correction : f étant convexe sur un intervalle ouvert, elle est continue, donc g est dérivable : on va donc essayer de montrer que g' est croissante (attention, f n'étant pas dérivable, g n'est pas forcément dérivable deux fois). Soient x et y deux réels avec $x \leq y$. On a

$$g'(x) = f(x+1) - f(x-1)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
g'(y) - g'(x) &= f(y+1) - f(y-1) - f(x+1) + f(x-1) \\
&= f(y+1) - f(1) + f(1) - f(y-1) - f(-1) + f(-1) - f(x+1) + f(x-1) \\
&= f(y+1) - f(1) + f(-1) - f(y-1) - f(x+1) + f(1) + f(x-1) - f(-1) \\
&= \frac{f(y+1) - f(1)}{1} + \frac{f(y-1) - f(-1)}{-1} - \frac{f(x+1) - f(1)}{1} - \frac{f(x-1) - f(-1)}{-1} \\
&= \tau_1(y) + \tau_{-1}(y) - \tau_1(x) - \tau_{-1}(x)
\end{aligned}$$

f étant convexe, les deux fonctions τ_1 et τ_{-1} sont croissantes donc $\tau_1(y) \geq \tau_1(x)$ et idem pour τ_{-1}, si bien que $g'(y) - g'(x) \geq 0$: g' est croissante, g est convexe.

Exercice 10 - Sup de fonctions convexes : ✪✪ Soit A un ensemble non vide. Soit $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions convexes indexée par A. On suppose que, pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f_\alpha(x) \,|\, \alpha \in A\}$ est majoré. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sup\{f_\alpha(x) \,|\, \alpha \in A\}$ est convexe. Illustrer par un dessin dans le cas où les f_α sont affines.

Correction : Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Soit $\alpha \in A$. f_α étant convexe :

$$f_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda) f_\alpha(y)$$

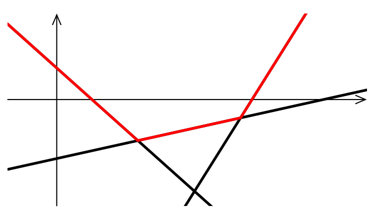
Or, par définition de f, $f_\alpha(x) \leq f(x)$ et $f_\alpha(y) \leq f(y)$. De plus, λ et $1-\lambda$ sont positifs si bien que :

$$f_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

En d'autres termes, $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ majore l'ensemble $\sup\{f_\alpha(\lambda y + (1-\lambda)y) \,|\, \alpha \in A\}$. Par définition de la borne supérieure, celle-ci est inférieure à tous les majorants donc :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

c'est-à-dire que f est convexe. Ci-dessous, on a représenté des fonctions f_α affines et f en rouge : elle est bien convexe.



Exercice 11 : ✪✪

1. Montrer que le sinus est concave sur $[\,0\,;\pi\,]$.
2. Calculer $\sup(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ où α, β, γ sont trois angles d'un triangle.
3. Soit $n \geq 3$. Quel est le périmètre maximal d'un polygone convexe à n côtés inclus dans le cercle unité ?

Correction :

1. Le sinus est dérivable deux fois sur $[\,0\,;\pi\,]$ de dérivée seconde $-\sin \leq 0$ donc est concave sur $[\,0\,;\pi\,]$.

2. Soient α, β, γ les trois angles d'un triangle. On cherche à majorer $\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)$. On peut bien sûr majorer par 3 mais on va essayer de faire mieux. On se demande quel résultat du cours utiliser. Or, il n'y a qu'un seul résultat dans le cours où on somme plus de deux termes : l'inégalité de Jensen. Rappelons son énoncé pour les fonctions concaves : si f est concave sur I alors, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ positifs de somme 1 et $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$ alors

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

(l'inégalité a changé de sens car on l'applique à une fonction concave). En particulier, si tous les λ_i sont égaux à $1/n$:

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Revenons à l'exercice. On va évidemment prendre $n = 3$. Appliquons ce qui précède à $f = \sin$ qui est concave, $n = 3$ et aux réels α, β, γ :

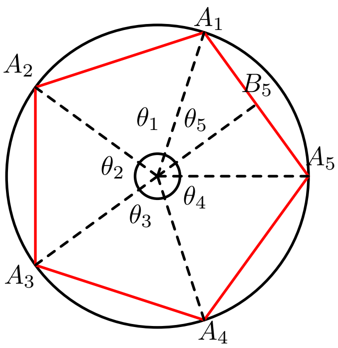
$$\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \geq \frac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)}{3}$$

et donc

$$\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma) \leq 3\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

car on rappelle que la somme des angles d'un triangle vaut π. Par conséquent, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ est un majorant de $\sin(\alpha) + \sin(\beta)+\sin(\gamma)$. Un moyen simple de montrer que c'est en fait la borne sup est de montrer qu'il est atteint (ce sera donc un maximum donc une borne supérieure, mais ça ne marche pas à chaque fois, cf chapitre 12). Or, il est atteint si $\alpha = \beta = \gamma = \pi/3$ donc si le triangle est équilatéral. Par conséquent, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ est un majorant atteint donc le maximum donc la borne sup.

3. Notons $\theta_1, \dots, \theta_n$ les angles intérieurs d'un polygone convexe à n côtés $A_1 \dots A_n$ inclus dans le cercle unité.



Prenons la médiatrice dans le triangle OA_nA_{n+1} qui est isocèle en O donc c'est aussi la bissectrice de l'angle intérieur $\widehat{A_nOA_{n+1}}$, et notons B_n le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$. Le triangle OA_nB_n est rectangle en B_n et l'angle $\widehat{A_nOB_n}$ vaut $\theta_n/2$ et $OA_n = 1$ (on est dans le cercle unité) si bien que $A_nB_n = \sin(\theta_n/2)$ donc $A_nA_{n+1} = 2\sin(\theta_n/2)$ et finalement le périmètre vaut

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} 2\sin(\theta_k/2)$$

De même que ci-dessus, d'après l'inégalité de Jensen, et puisque la somme des θ_k vaut 2π (un tour de cercle entier) :

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(\theta_k/2) \leq n\sin\left(\frac{\theta_1+\cdots+\theta_n}{2n}\right) = n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

On en déduit que $P_n \leq 2n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Si le polygone est régulier, il y a égalité car les θ_n valent tous $2\pi/n$. Le périmètre maximal d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité est donc $2n\sin(\pi/n)$, qui est atteint lorsque le polygone est régulier.

Exercice 12 : ✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tous réels $a_1, \dots, a_n$ positifs

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$$

En déduire que pour tout $x > 1$ on a

$$\sqrt{x^{2n}-1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

Correction : Là aussi, cela sent l'inégalité de Jensen à trois kilomètres. Cette fois, on ne nous donne pas d'indication donc, vu l'exercice, on va l'appliquer à la fonction racine carrée qui est concave sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, d'après l'inégalité de Jensen (les $1/n$ sont positifs de somme 1) :

$$\sqrt{\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}} \geq \frac{\sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_n}}{n}$$

En multipliant par $\sqrt{n}$, on obtient la première inégalité. On veut appliquer cette inégalité pour obtenir la deuxième. On cherche donc à quels a_i l'appliquer. Le $x^{2n} - 1$ nous fait penser à $q^{2n} - 1$: on pense donc à une suite géométrique. On pose donc $a_i = x^{2i} = \left(x^2\right)^i$ (et non pas x^i car on a x^{2n} dans l'énoncé). D'après la première inégalité,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(x^2\right)^i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x^{2i}}$$

Or, $x > 1$ donc $x^2 \neq 1$ (on peut appliquer la formule bien connue pour la somme des termes d'une suite géométrique) et $\sqrt{x^2} = x$ si bien que (on n'oublie pas que la somme commence en 1) :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2 \times \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}} \quad & \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times \sum_{i=1}^n x^i \\
& \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times x \times \frac{1 - x^n}{1 - x}
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{x^2} = x$ donc on peut simplifier par x à gauche et à droite. Attention, $x > 1$ donc on ne peut pas multiplier par $\sqrt{1 - x^2}$ car la quantité à l'intérieur de la racine est négative, mais on ruse en écrivant

$$\sqrt{\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Là on peut multiplier par $\sqrt{x^2 - 1}$ et reconnaître une identité remarquable

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^{2n} - 1} \quad & \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1 - x^n}{1 - x} \times \sqrt{x^2 - 1} \\
& \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1 - x^n}{1 - x} \times \sqrt{(x-1)(x+1)} \\
& \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{x^n - 1}{x - 1} \times \sqrt{(x-1)(x+1)} \\
& \geq \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{x^n - 1}{\sqrt{x - 1}} \times \sqrt{(x+1)}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 13 - Fonctions log-convexes : ✪✪

1. Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante et que $\varphi(I)$ est inclus dans J. Montrer que $g \circ \varphi$ est convexe. Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

   Dans la suite de l'exercice, on dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^{+*}$ est *logarithmiquement convexe* (en abrégé : *log-convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

2. À l'aide de la question précédente, montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si f est log-convexe alors f^α est convexe pour tout réel $\alpha > 0$. La réciproque est vraie : cf. exercice 43 du chapitre 24.

4. Montrer qu'un produit de fonctions log-convexes est encore log-convexe.
5. On s'intéresse à présent à la somme de fonctions log-convexes. On se donne dans la suite deux fonctions f et $g : I \to \mathbb{R}^{+*}$ dérivables deux fois.
   (a) Montrer que f est log-convexe si et seulement si f'/f est croissante.
   (b) Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f \times f'' - f'^2$ est positive.
   (c) On suppose que A et A' sont deux réels strictement positifs. Montrer que si $AC - B^2 > 0$ et $A'C' - B'^2 > 0$ alors
   $$(A + A')(C + C') - (B + B')^2 > 0$$
   Étendre ce résultat au cas où les inégalités sont larges (on pourra introduire des trinômes du second degré dont ces quantités sont les opposés des discriminants).
   (d) En déduire que si f et g sont log-convexes, alors $f + g$ est encore log-convexe.

Remarque : Ce résultat est toujours vrai, même si les deux fonctions ne sont pas dérivables deux fois, mais c'est un peu plus difficile à montrer, et la démonstration proposée ici est particulièrement élégante.

Correction :

1. Il n'est dit nulle part que les fonctions sont dérivables deux fois ni même une fois. Par conséquent, une seule solution : la définition. Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. φ étant convexe,
   $$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$$
   La fonction g étant croissante,
   $$g(\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y)) \leq g(\lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y))$$
   Enfin, la fonction g étant convexe,
   $$g \circ \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(\varphi(x)) + (1 - \lambda)g(\varphi(y))$$
   En d'autres termes, $g \circ \varphi$ (définie sur I) est convexe. Si g n'est pas croissante, on a vu un contre-exemple en classe : $g : x \mapsto e^{-x}$ et $\varphi : x \mapsto x^2$ sont convexes mais $g \circ \varphi$ n'est pas convexe.
2. Appliquons la question précédente avec $g = \exp$ (convexe croissante) et $\varphi = \ln \circ f$ (convexe par hypothèse) : $g \circ \varphi = f$ est convexe. Avec $f(x) = x^2$, on voit que la réciproque est fausse. C'est intuitif : la fonction ln a un effet « applatissant », donc la fonction $\ln \circ f$ est « plus plate » que la fonction f : si elle est convexe, c'est que f est déjà convexe au départ.
3. Soit $\alpha > 0$. Supposons f log-convexe. D'après le cours, si on multiplie une fonction convexe par un nombre positif, on obtient une fonction convexe. Dès lors, $\alpha \ln \circ f = \ln \circ f^\alpha$ est convexe. En d'autres termes, f^α est log-convexe, et il suffit d'appliquer la question précédente pour conclure : si f est log-convexe, alors f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$.
4. Soient f et g log-convexes. Alors $\ln(f \times g) = \ln(f) + \ln(g)$ qui est convexe car somme de fonctions convexes.
5. (a) f étant deux fois dérivable, $\ln \circ f$ est deux fois dérivable donc est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante, et sa dérivée est f'/f ce qui permet de conclure.
   (b) f est log-convexe si et seulement si $\ln \circ f$ est convexe si et seulement si $(\ln \circ f)'' \geq 0$. Or,
   $$(\ln \circ f)'' = \frac{f \times f'' - f'^2}{f'^2}$$
   et puisque $f'^2 \geq 0$, $(\ln \circ f)'' \geq 0$ si et seulement si $ff'' - f'^2 \geq 0$.
   (c) Soient $f : x \mapsto Ax^2 + 2Bx + C$ et $g : x \mapsto A'x^2 + 2B'x + C'$. Par hypothèse, les discriminants de f et g sont strictement négatifs donc f et g n'ont aucune racine réelle donc sont strictement positives car A et A' sont strictement positifs. Dès lors, c'est aussi le cas de $f + g$ si bien que le discriminant de $f + g$ est strictement négatif, ce qui permet de conclure. Raisonnement analogue avec des inégalités larges (les fonctions s'annulent alors au plus une fois donc sont positives au sens large).
   (d) Si f et g sont log-convexes, alors $ff'' - f'^2 \geq 0$ et $gg'' - g'^2 \geq 0$ donc $(f'' + g'')(f + g) - (f' + g')^2 \geq 0$ d'après ce qui précède, donc $f + g$ est log-convexe.

Exercice 14 - Réciproque d'une fonction convexe : ✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe injective. Étudier la convexité de f^{-1}.

Correction : f est continue car convexe sur un intervalle ouvert et injective donc f est strictement monotone (cf. chapitre 13), donc est une bijection entre I et $f(I)$ et f^{-1} est continue de même monotonie que f (théorème de la bijection). On se demande si f^{-1} est convexe. Puisque f n'est pas dérivable et donc pas dérivable deux fois, pas le choix, on n'a que la définition. Soient donc $(x,y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. On cherche à comparer

$$A = f^{-1}(\lambda x + (1-\lambda)y) \qquad \text{et} \qquad B = \lambda f^{-1}(x) + (1-\lambda) f^{-1}(y)$$

On veut se débarrasser de f^{-1} : on compose donc par f. On a

$$f(A) = \lambda x + (1-\lambda)y \qquad \text{et} \qquad f(B) = f\left(\lambda f^{-1}(x) + (1-\lambda) f^{-1}(y)\right)$$

Posons $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$ si bien que $f(B) = f(\lambda a + (1-\lambda)b)$. La fonction f étant convexe,

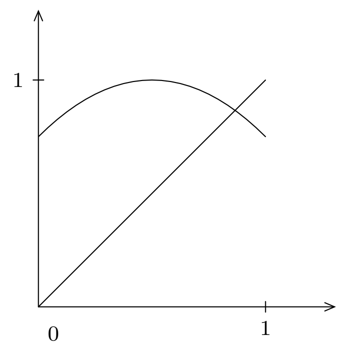
$$f(B) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b) = \lambda x + (1-\lambda)y = f(A)$$

En conclusion, $f(B) \leq f(A)$. On veut « récupérer » A et B donc composer par f^{-1} qui est strictement monotone : soit (strictement) croissante soit décroissante. Il faut donc faire deux cas.

- Premier cas : f est strictement croissante, et donc f^{-1} également car f^{-1} a la même monotonie que f. Par conséquent, $B \leq A$: f^{-1} est concave. Par exemple, si $f = \exp$, f est strictement croissante et $f^{-1} = \ln$ est concave.
- Deuxième cas : f est strictement décroissante, et donc f^{-1} également. Par conséquent, $B \geq A$: f^{-1} est convexe. Par exemple, si $f : x \mapsto e^{-x}$, f est strictement décroissante et $f^{-1} : x \mapsto -\ln(x)$ est convexe.

Exercice 15 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Montrer que si f est concave, alors f admet un unique point fixe.

Correction : Le résultat se voit très bien sur un dessin :



Prouvons-le rigoureusement. L'existence d'un point fixe est triviale et se montre comme d'habitude en appliquant le TVI à $g : x \mapsto f(x) - x$. Montrons l'unicité. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux points fixes $\alpha < \beta$. La corde joignant les points d'abscisses α et β est la droite d'équatio $y = x$ (puisque α et β sont des points fixes). L'idée est simple : à gauche de α, la courbe de f est en-dessous de la corde d'équation $y = x$ ce qui est absurde puisque $f(0) > 0$ (je vous laisse faire un dessin).

La fonction τ_α étant décroissante puisque f est concave,

$$\tau_\alpha(0) \geq \tau_\alpha(\beta) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 1$$

car α et β sont des points fixes. En d'autres termes,

$$\frac{f(0) - f(\alpha)}{0 - \alpha} = \frac{f(0) - \alpha}{-\alpha} \geq 1$$

Il en découle que $f(0) - \alpha \leq -\alpha$ donc $f(0) \leq 0$ ce qui est absurde : f admet un unique point fixe.

Exercice 16 - Fonctions quasi-concaves : ✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est quasi-concave si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y))$$

1. Montrer qu'une fonction concave sur I est quasi-concave sur I.
2. Montrer qu'une fonction monotone sur I est quasi-concave. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
3. On suppose que $I = [\,a\,;b\,]$ avec $a < b$. Soient $c \in \,]\,a\,;b\,[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, croissante sur $[\,a\,;c\,]$ et décroissante sur $[\,b\,;c\,]$. Montrer que f est quasi-concave.

Correction :

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ concave. Montrons que f est quasi-concave. Soient donc $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. La fonction f est concave donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

Supposons $f(x) \leq f(y)$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Alors $(1-\lambda)f(y) \geq (1-\lambda)f(x)$ car $1-\lambda \geq 0$ donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x) = f(x) = \min(f(x), f(y))$$

donc f est quasi-concave.

2. Soit f monotone sur I. Supposons f décroissante (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Sans perte de généralité, supposons $x \leq y$. Puisque $\lambda x + (1-\lambda)y \in [\,x\,;y\,]$, en particulier $\lambda x + (1-\lambda)y \leq y$ et f est décroissante donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(y)$$

Or, $f(y) \leq f(x)$ car f est décroissante donc $f(y) = \min(f(x), f(y))$, donc f est quasi-concave. Ainsi, une fonction monotone est quasi-concave. L'exponentielle est donc quasi-concave, mais puisqu'elle n'est pas concave, alors la réciproque de la question précédente est fausse.

3. Soient $(x, y) \in [\,a\,;b\,]$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in [\,x\,;y\,]$. Alors soit $z < c$, soit $z \geq c$. Si $z < c$ alors, f étant croissante sur $[\,a\,;c\,]$, $f(z) \geq f(x) \geq \min(f(x), f(y))$. Si $z \geq c$ alors, f étant décroissante sur $[\,c\,;b\,]$, $f(z) \geq f(y) \geq \min(f(x), f(y))$. Ainsi, f est quasi-concave.

Exercice 17 - Inégalités de Young (stage two), de Hölder et de Minkowski : ✪✪

1. Montrer à l'aide de la concavité de la fonction ln que pour tous $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ et $x, y \geq 0$, on a :

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$$

On fera bien attention à ne jamais évaluer le ln en une quantité nulle. Cette inégalité est appelée *inégalité de Young* (cf. exercice 33 du chapitre 10). On se donne dans la suite de cet exercice deux réels p, q strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et f et g continues sur I. On note alors

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad ||g||_q = \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q}$$

2. Le but de cette question est de montrer *l'inégalité de Hölder* :

$$\int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq ||f||_p ||g||_q$$

   (a) Montrer que $||f||_p \geq 0$ et $||g||_q \geq 0$. Démontrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $||f||_p = 0$ (respectivement $||g||_q = 0$). On admet (nous verrons cela dans le chapitre 22) que f (respectivement g) est alors nulle sur $[\,a\,;b\,]$. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

   (b) En appliquant l'inégalité de Young avec des valeurs de x, y et α que l'on explicitera, montrer que pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$,

$$\frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p ||g||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{{||f||_p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{{||g||_q}^q}$$

   (c) En déduire l'inégalité de Hölder.

3. On suppose maintenant que p est un réel supérieur ou égal à 1. On cherche à présent à montrer *l'inégalité de Minkowski* (appelée aussi inégalité triangulaire pour la norme $||.||_p$) :

$$||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

où $||f + g||_p$ et $||g||_p$ sont définies de la même façon que $||f||_p$ (dont la définition est étendue au cas $p = 1$).

   (a) Montrer l'inégalité de Minkowski dans le cas où $p = 1$. On suppose à présent que $p > 1$.

   (b) Montrer que $|f + g|^p \leq |f| \times |f + g|^{p-1} + |g| \times |f + g|^{p-1}$.

   (c) À l'aide de l'inégalité de Hölder, prouver l'inégalité de Minkowski.

Correction :

1. Tout d'abord, le résultat est immédiat si x ou y est nul, puisqu'alors le membre de gauche est nul et le membre de droite positif. On supposera donc dans la suite que x et y sont strictement positifs. La fonction ln étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $\alpha \in [\,0\,;1\,]$:

$$\ln(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha \ln(x) + (1-\alpha)\ln(y) = \ln\left(x^\alpha\right) + \ln\left(y^{1-\alpha}\right) = \ln\left(x^\alpha y^{1-\alpha}\right)$$

et puisque la fonction exponentielle est croissante, le résultat en découle.

2. (a) Tout d'abord, ces quantités sont bien positives par positivité de l'intégrale. Supposons que la quantité $||f||_p$ soit nulle. Alors, en élevant à la puissance p, il vient : $\displaystyle\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t = 0$. D'après le cours, la fonction $|f|$ étant continue et positive, celle-ci est identiquement nulle sur $[\,a\,;b\,]$ (nous le prouverons dans le chapitre 22). Ainsi, $f\times g$ est aussi identiquement nulle sur $[\,a\,;b\,]$ et $\displaystyle\int_a^b |f(t)g(t)| \,\mathrm{d}t = 0$ et l'inégalité de Hölder est vérifiée. C'est bien sûr exactement la même chose si $||g||_q = 0$.

   (b) On cherche à appliquer l'inégalité de Young au membre de gauche de cette inégalité pour arriver au membre de droite. Il semble logique de séparer les f et les g de sorte que l'on cherche x, y et α tels que $x^\alpha = \dfrac{|f(t)|}{||f||_p}$ et $y^{1-\alpha} = \dfrac{|g(t)|}{||g||_q}$. Trouvons tout d'abord α. Puisqu'une quantité doit être à la puissance α et l'autre à la puissance $1-\alpha$, on cherche deux puissances dont la somme vaut 1. Puisque $(1/p)+(1/q) = 1$, il semble logique de prendre $\alpha = 1/p$ et on a alors $1-\alpha = 1/q$. Vérifions si cela donne le résultat souhaité. Posons alors $x = \left(\dfrac{|f(t)|}{||f||_p}\right)^p$ et $y = \left(\dfrac{|g(t)|}{||g||_q}\right)^q$. Les quantités x^α et $y^{1-\alpha}$ sont par conséquent bien égales aux quantités souhaitées ci-dessus, et d'après l'inégalité de Young, $x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha)y$. En remplaçant par les valeurs explicites de x, y et α (en se souvenant que $1-\alpha = 1/q$) on a le résultat voulu :

$$\frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p||g||_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(t)|^p}{{||f||_p}^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(t)|^q}{{||g||_q}^q}$$

   (c) D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p||g||_q}\,\mathrm{d}t \quad &\leq \quad \frac{1}{p}\times\frac{1}{{||f||_p}^p}\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t + \frac{1}{q}\times\frac{1}{{||g||_q}^q}\int_a^b |g(t)|^g\,\mathrm{d}t \\ &\leq \quad \frac{1}{p}\times\frac{1}{{||f||_p}^p}\times{||f||_p}^p + \frac{1}{q}\times\frac{1}{{||g||_q}^q}\times{||g||_q}^q \;\leq\; \frac{1}{p}+\frac{1}{q}\end{aligned}$$

   c'est-à-dire :

$$\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p||g||_q}\,\mathrm{d}t \leq 1$$

   Or,

$$\int_a^b \frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p||g||_q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{||f||_p||g||_q}\times\int_a^b |f(t)g(t)|\,\mathrm{d}t$$

   Il suffit de multiplier par $||f||_p||g||_q > 0$ pour démontrer l'inégalité de Hölder.

3. (a) Supposons donc $p = 1$. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$, d'après l'inégalité triangulaire, $|f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)|$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)|+|g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

   c'est-à-dire que $||f+g||_1 \leq ||f||_1 + ||g||_1$: c'est l'inégalité de Minkowski.

   (b) D'après l'inégalité triangulaire, $|f+g| \leq |f|+|g|$ donc :

$$|f+g|^p = |f+g|\times|f+g|^{p-1} \leq (|f|+|g|)\times|f+g|^{p-1}$$

   ce qui permet de conclure.

(c) Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t \leq \int_a^b |f(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que

$$||f+g||_p^p \leq \int_a^b |f(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t$$

Posons $q = \dfrac{p}{p-1}$ de sorte que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1$$

D'après l'inégalité de Hölder appliquée à f et $h = |f+g|^{p-1}$ à la place de g (penser à « truc ») :

$$\int_a^b |f(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t \leq ||f||_p \times ||h||_q$$

Or,

$$\begin{aligned} ||h||_q &= \left(\int_a^b \left(|f(t)+g(t)|^{p-1}\right)^q \,\mathrm{d}t\right)^{1/q} \\ &= \left(\int_a^b \left(|f(t)+g(t)|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &= ||f+g||_p^{p-1} \end{aligned}$$

si bien que

$$\int_a^b |f(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t \leq ||f||_p \times ||f+g||_p^{p-1}$$

De même :

$$\int_a^b |g(t)| \times |f(t)+g(t)|^{p-1} \,\mathrm{d}t \leq ||g||_p \times ||f+g||_p^{p-1}$$

Par conséquent :

$$||f+g||_p^p \leq ||f||_p \times ||f+g||_p^{p-1} + ||g||_p \times ||f+g||_p^{p-1}$$

Si $||f+g||_p > 0$, on simplifie par $||f+g||_p^{p-1}$ ce qui donne le résultat voulu, et si $||f+g||_p = 0$, l'inégalité de Minkowski est évidente.

Exercice 18 : ✪✪ Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [\,0\,;\pi\,]$ de somme π. Montrer que

$$\sin(\theta_1) \times \sin(\theta_2) \times \sin(\theta_3) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

En déduire $\sup(AB \times AC \times BC)$ lorsque A, B, C sont trois points du cercle trigonométrique.

Correction : Si l'un des θ_i est égal à 0 ou π alors le membre de gauche est nul et l'inégalité est immédiate. Supposons donc les θ_i dans $]\,0\,;\pi\,[$ si bien que les sinus sont strictement positifs et on peut prendre le ln. Il suffit de prouver que

$$\ln(\sin(\theta_1)) + \ln(\sin(\theta_2)) + \ln(\sin(\theta_3)) \leq \ln\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right) = 3\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ce qu'on fait de même que dans l'exercice 11 puisque la fonction $\ln \circ \sin$ est concave (car dérivable deux fois de dérivée seconde négative) sur $]\,0\,;\pi\,[$. Pour la deuxième partie de la question, si on note $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ les trois angles au centre du triangle

ABC (même dessin que dans l'exercice 11 mais avec trois côtés), on montre comme dans l'exercice 11 que les trois côtés AB, AC, BC valent (dans un ordre qui n'a aucune importance) $2\sin(\theta_1/2), 2\sin(\theta_2/2), 2\sin(\theta_3/2)$ si bien qu'on cherche

$$\sup(8\sin(\theta_1/2)\sin(\theta_2/2)\sin(\theta_3/2))$$

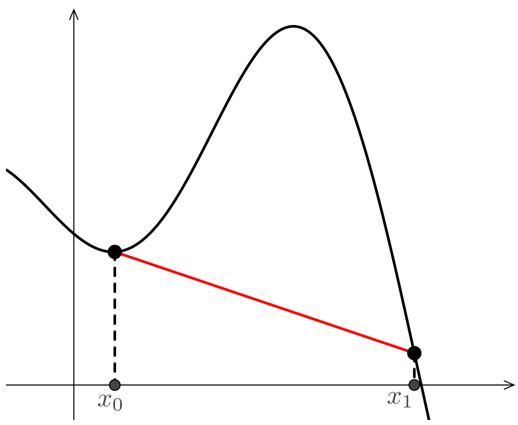
avec $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = 2\pi$ si bien que $\dfrac{\theta_1}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}+\dfrac{\theta_3}{2} = \pi$ et on est dans les conditions de la question précédente : le sup (qui est un max) vaut donc $8\times 3\sqrt{3}/8 = 3\sqrt{3}$ et est atteint lorsque les trois angles valent $2\pi/3$ i.e. lorsque A, B, C forment un triangle équilatéral.

Exercice 19 - Extrema des fonctions convexes : ✪✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Les questions sont indépendantes.

1. On suppose que f admet un minimum local en x_0. Montrer que c'est en fait un minimum global.
2. On suppose que f est dérivable. Soit $x_0 \in I$. Montrer que f admet un minimum global en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
3. Montrer que si f admet un maximum global, alors elle est constante.
4. On note $m(f)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points en lesquels f admet un minimum global.
   (a) Montrer que $m(f)$ est un intervalle (éventuellement vide).
   (b) Montrer que si $m(f)$ est non vide et majoré (respectivement minoré) alors il contient sa borne supérieure (respectivement supérieure).
   (c) Montrer que $m(f)$ peut être vide.
   (d) Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, montrer avec un exemple graphique que $m(f)$ peut être n'importe quel intervalle de la forme $[\,a\,;b\,]$, $[\,a\,;+\infty\,[$ ou $]-\infty\,;a\,]$.

Correction :

1. Raisonnons par l'absurde. Supposons que f n'admette pas en x_0 un minimum global. Il existe donc $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_1) < f(x_0)$. Supposons que $x_1 > x_0$ (raisonnement analogue dans l'autre cas : faites-le !). Expliquons l'idée du raisonnement sur le dessin ci-dessous (bien sûr, cela ne remplace pas une preuve... et oui, je sais que la fonction ci-dessous n'est pas convexe, j'ai toujours du mal à tracer quelque-chose d'impossible...).



L'idée est de prouver qu'au voisinage de x_0, à droite de x_0, le graphe de f va être au-dessus de la corde, ce qui n'est pas possible car f est convexe. Montrons cela rigoureusement. La corde joignant les points d'abscisses x_0 et x_1 a un coefficient directeur strictement négatif. En effet, la corde est la droite d'équation

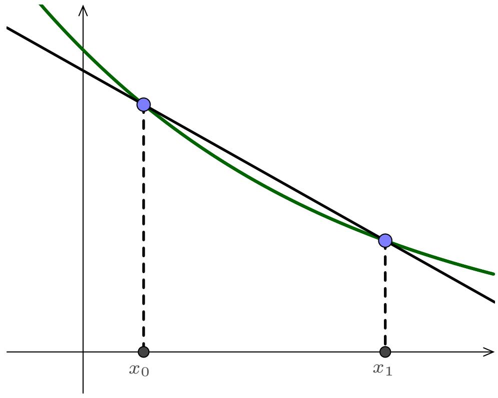
$$y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\times(x-x_0)+f(x_0)$$

et, par hypothèse, $f(x_1) < f(x_0)$ et $x_1 > x_0$, d'où le résultat. Si $x \in \mathbb{R}$, notons

$$g(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\times(x-x_0)+f(x_0)$$

D'après ce qui précède, si $x > x_0$, alors $g(x) < f(x_0)$. De plus, par hypothèse, f admet en x_0 un minimum local : il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,x_0-\varepsilon\,;x_0+\varepsilon\,]$, $f(x) \geq f(x_0)$. En particulier, pour tout $x \in \,]\,x_0\,;x_0+\varepsilon\,]$, $f(x) \geq f(x_0)$ et donc $f(x) > g(x)$. Or, f est convexe donc son graphe est en-dessous de ses cordes donc $f(x) \leq g(x)$ ce qui est absurde : f admet en x_0 un minimum global.

2. Si f admet un minimum global en x_0 alors $f'(x_0) = 0$ par condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur (I est ouvert). Réciproquement, supposons que $f'(x_0) = 0$. f est convexe et dérivable donc f' est croissante. Puisque $f'(x_0) = 0$ alors $f' \leq 0$ sur $]-\infty\,;x_0\,]$ et $f' \geq 0$ sur $[\,x_0\,;+\infty\,[$ donc f est respectivement décroissante et croissante sur ces intervalles, d'où le résultat.
3. Supposons que f admette en x_0 un maximum global et ne soit pas constante. Il existe alors x_1 tel que $f(x_0) \neq f(x_1)$ et donc $f(x_1) < f(x_0)$ (car f admet un maximum global en x_0). Sans perte de généralité, on peut supposer $x_1 > x_0$. Là aussi, faisons un dessin avant de le prouver rigoureusement.



Il suffit de prouver que $f(a) > f(x_0)$ si $a < x_0$ pour conclure à une absurdité puisque f admet un maximum global en x_0. L'idée est de prouver qu'à gauche de x_0, le graphe est au-dessus de la corde joignant les points d'abscisses x_0 et x_1. Soit $a < x_0$. La fonction τ_{x_0} étant croissante puisque f est convexe,

$$\tau_{x_0}(a) = \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \tau_{x_0}(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Or, $a - x_0 < 0$ donc

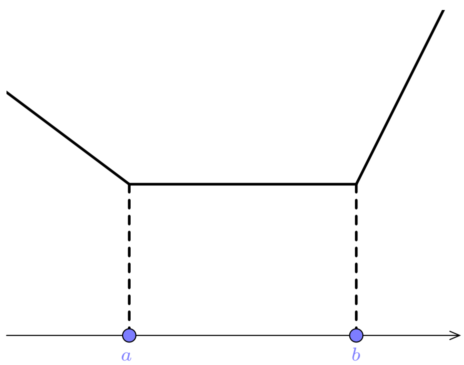
$$f(a) \geq f(x_0) + \underbrace{(a - x_0) \times \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}_{>0}$$

ce qui permet de conclure. On peut montrer de la même façon que si f admet un maximum **local** alors f est constante.
4. (a) Supposons $m(f)$ non vide et soient $a \leq b$ appartenant à $m(f)$. Prouvons que $[\,a\,;b\,] \subset m(f)$ ce qui permettra d'affirmer que $m(f)$ est un intervalle par caractérisation des intervalles (cf. chapitre 12). Soit donc $c \in [\,a\,;b\,]$. On sait que $f(a) = f(b)$ (deux minima globaux sont forcément égaux) donc la corde est horizontale entre a et b, son équation est $y = f(a) = f(b)$. De plus, f est convexe donc son graphe est en dessous de ses cordes : en d'autres termes, $f(x) \leq f(a) = f(b)$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, mais $f(a)$ et $f(b)$ sont des minima globaux donc $f(x) \geq f(a) = f(b)$ pour tout x. On en déduit que $f(x) = f(a) = f(b)$ sur $[\,a\,;b\,]$ donc $f(c) = f(a) = f(b)$ et en particulier f admet un minimum global en c. En d'autres termes, $c \in m(f)$, $[\,a\,;b\,] \subset m(f)$, $m(f)$ est un intervalle.

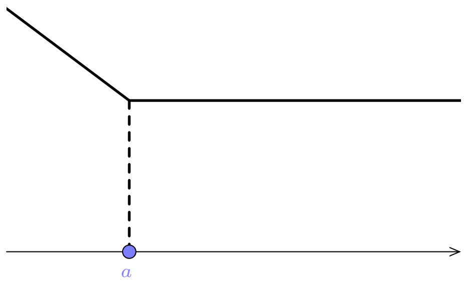
   (b) Par caractérisation de la borne supérieure, si on note α la borne supérieure de $m(f)$, α est limite d'une suite (a_n) d'éléments de $m(f)$. Or, d'une part, la suite $(f(a_n))$ est constante (car f admet en chaque a_n un minimum global), disons égale à m, et d'autre part, f est continue (car I est ouvert) donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\alpha)$. Par unicité de la limite, $f(\alpha) = m$ donc f admet en α un minimum global donc $\alpha \in m(f)$. De même pour une éventuelle borne inférieure.

   (c) $m(f)$ est vide lorsque f est la fonction exponentielle.

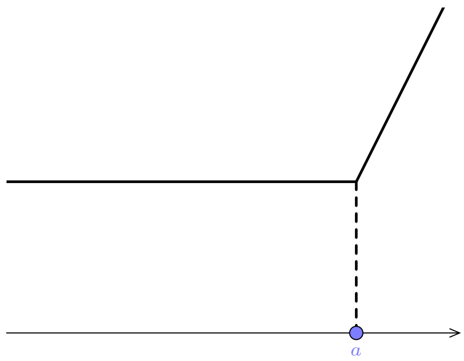
   (d) Dans l'exemple graphique ci-dessous, on a $m(f) = [\,a\,;b\,]$.



   Dans l'exemple graphique ci-dessous, on a $m(f) = [\,a\,;+\infty\,[$.



Dans l'exemple graphique ci-dessous, on a $m(f) =]-\infty\,; a\,]$.

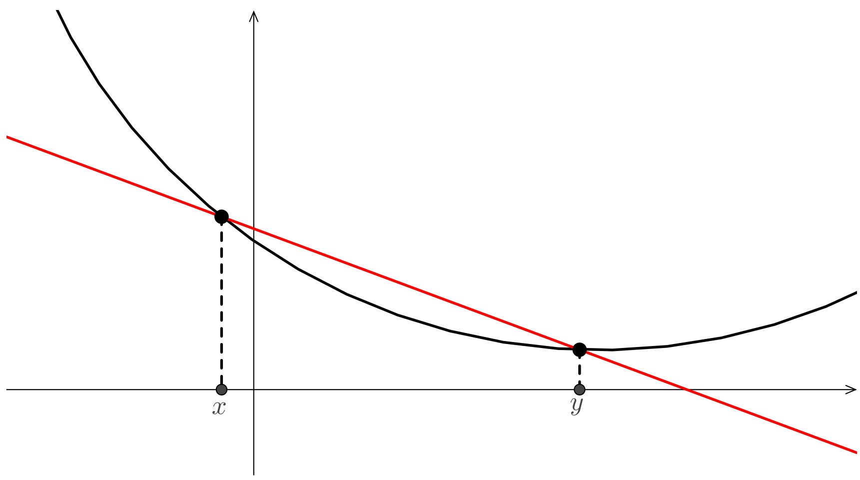


Exercice 20 - Fonctions convexes majorées : ✪✪

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.
2. Donner une fonction convexe non constante bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer cependant qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

Correction :

1. Faisons un raisonnement par l'absurde et supposons que f n'est pas constante : il existe donc $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. Faisons un dessin :



On voit que la fonction n'est pas bornée. L'idée est de dire qu'en dehors du segment $[\,x\,; y\,]$, le graphe de f est au-dessus de la droite rouge donc tend vers $+\infty$ ce qui est absurde car f est bornée. Sur le dessin, c'est en $-\infty$ que f tend vers $+\infty$, mais si la « droite rouge monte », alors c'est en $+\infty$: on voit que cela dépend si $f(x) > f(y)$ (comme sur le dessin) ou si $f(x) < f(y)$. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas, faites-le) que $f(x) > f(y)$ comme sur le dessin. Montrons que le graphe de f est au-dessus de la droite rouge à gauche de x. Soit donc $t < x$. On cherche le résultat de cours à utiliser : soit le théorème des trois pentes, soit la croissance du taux d'accroissements (c'est un peu la même chose). Utilisons le théorème des trois pentes entre les points $t < x < y$ (et donc il faut adapter les notations du théorème) ce qui donne (si on a du mal à remplacer, un rapide dessin comme dans le cours permet de retrouver le résultat)

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

En multipliant par $t-x<0$ (car on a pris $t<x$), il vient (en changeant le sens de l'inégalité) :

$$f(t) \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \times (t-x) + f(x)$$

On a donc montré le résultat voulu, c'est-à-dire que le graphe de f est au-dessus de la droite rouge à gauche de x. Cherchons à présent la limite en $+\infty$ du membre de droite. Puisque $x<y$ et $f(x)>f(y)$ alors

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$$

ce qui se voit très bien sur le dessin : le coefficient directeur de la droite est strictement négatif. Par conséquent,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \times (t-x) + f(x) \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car f est bornée. Si $f(x)<f(y)$ alors (faites le) on montre de même que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est aussi absurde. Donc f est constante.

2. $f : x \mapsto e^{-x}$ convient.

Exercice 21 - Fonctions mid-convexes : ✪✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Correction : Interprétation géométrique : le milieu de la courbe est en-dessous du milieu de la corde. L'idée est d'itérer le processus, de couper à chaque fois l'intervalle en deux : le quart de la courbe est en dessous du quart de la corde, puis les trois quarts etc. Soit $(x,y) \in I^2$. f étant mid-convexe :

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

En appliquant ce résultat avec x à la place de x et $(x+y)/2$ à la place de y (penser à « truc »), il vient :

$$f\left(\frac{3x+y}{4}\right) \leq \frac{f(x)+f((x+y)/2)}{2} \leq \frac{f(x)+\dfrac{f(x)+f(y)}{2}}{2}$$

Finalement :

$$f\left(\frac{3}{4}\times x + \frac{1}{4}\times y\right) \leq \frac{3}{4}\times f(x) + \frac{1}{4}\times f(y)$$

Montrons que pour tout $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ dyadique,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Raisonnons pour cela par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall k \in [\![\,0\,;\,2^n\,]\!]$, si $\lambda = k/2^n$, on a l'inégalité ci-dessus ».
- Si $\lambda = 0 = 0/2^0$ ou $\lambda = 1 = 1/2^0$, l'inégalité ci-dessus est vraie et est même une égalité.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $k \in [\![\,0\,;\,2^{n+1}\,]\!]$ et soit $\lambda = k/2^{n+1}$. Si k est pair, il existe m tel que $k=2m$ si bien que $\lambda = m/2^n$ donc l'inégalité est vraie par hypothèse de récurrence. Sinon, il existe m tel que $k=2m+1$. L'idée est de prendre le nombre dyadique à gauche de λ et celui à droite de λ puis à utiliser la propriété de mid-convexité de f. Plus précisément, posons

$$a = \frac{m}{2^n}\times x + \left(1-\frac{m}{2^m}\right)\times y \qquad \text{et} \qquad b = \frac{m+1}{2^n}\times x + \left(1-\frac{m+1}{2^m}\right)\times y$$

si bien que

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2m+1}{2^{n+1}}\times x + \left(1-\frac{2m+1}{2^{n+1}}\right)\times y = \lambda x + (1-\lambda) y$$

f étant mid-convexe :

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Or, par hypothèse de récurrence :

$$f(a) = f\left(\frac{m}{2^n} \times x + \left(1 - \frac{m}{2^m}\right) \times y\right) \leq \frac{m}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(y)$$

et idem pour $f(b)$, si bien que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \frac{\frac{m}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right) f(y) + \frac{m+1}{2^n} f(x) + \left(1 - \frac{m+1}{2^n}\right) f(y)}{2}$$

c'est-à-dire que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$: H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

L'inégalité de convexité est vraie pour tous les nombres dyadiques. Les nombres dyadiques formant un ensemble dense, et I étant ouvert, on en déduit que f est continue et on conclut comme dans l'exercice 5.

Exercice 22 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.
2. Montrer que, si $L \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) - Lx$ admet une limite $L' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.
3. Montrer avec des exemples explicites qu'on peut avoir $L = +\infty$ et $L' = -\infty$.

Correction :

1. Notons g cette fonction (définie sur $\mathbb{R}_+^*$). Elle ressemble au taux d'accroissement en 0 :

$$\tau_0 : x \mapsto \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

sauf que $f(0)$ n'a aucune raison d'être nul. Tant pis, ce n'est pas la même fonction, mais ce n'est pas très grave puisqu'elles diffèrent d'une quantité non pas nulle mais qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, et puisque c'est la limite en $+\infty$ qui nous intéresse. f est convexe donc τ_0 est croissante donc admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$, et

$$g(x) = \tau_0(x) + \frac{f(0)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} L + 0 = L$$

2. Notons cette fonction h. Il suffit de prouver que h est décroissante. Soient $a < b$ deux réels positifs.

$$\begin{aligned} h(b) - h(a) &= f(b) - Lb - f(a) + La \\ &= (b-a) \times \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a} - L\right) \\ &= (b-a) \times (\tau_a(b) - L) \end{aligned}$$

Or, τ_a est croissante et pour tout $x > a$,

$$\begin{aligned} \tau_a(x) &= \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \\ &= \frac{f(x)}{x} \times \frac{x}{x-a} - \frac{f(a)}{x-a} \\ &\xrightarrow[x \to +\infty]{} L \times 1 + 0 = L \end{aligned}$$

Une fonction croissante étant majorée par sa limite en $+\infty$, $\tau_a(b) \leq L$ si bien que $h(b) - h(a) \leq 0$ (car $b - a \geq 0$) : h est décroissante, ce qui permet de conclure.

3. Avec l'exponentielle (qui est bien convexe), on a $L = +\infty$. Avec $f : x \mapsto x - \ln(x)$ (qui est bien convexe car somme de fonctions convexes, ou car sa dérivée seconde est positive), on a $L = 1$ et $L' = -\infty$.

Exercice 23 - Suites convexes : ✪✪✪ Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite convexe si pour tout $n \geq 1$ on a $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$.

1. Interpréter géométriquement le fait qu'une suite soit convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que la suite de terme général $f(n)$ est convexe.
3. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convexe ou non (on le démontrera à partir de la définition d'une suite convexe, on n'utilisera pas la question précédente) :

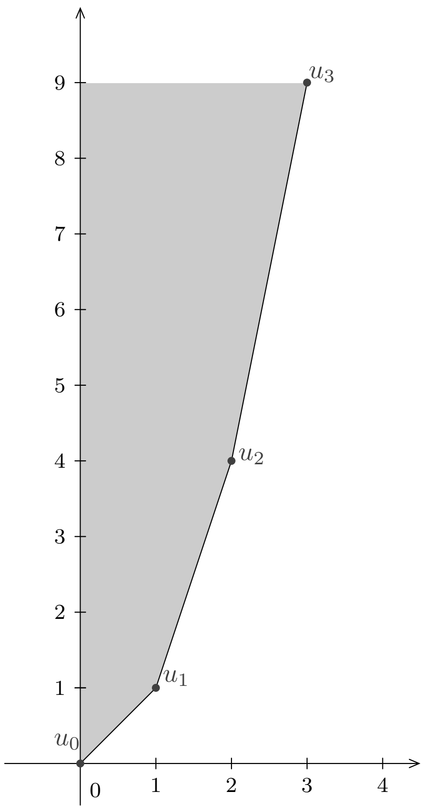
(a) $u_n = n^2$ (b) $u_n = 2^n$ (c) $u_n = \sqrt{n}$ (d) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

Illustrer par un dessin.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (u_n) est convexe si et seulement si (v_n) est croissante.
5. On suppose dans cette question que (u_n) est une suite convexe quelconque bornée. Montrer que la suite (v_n) définie à la question précédente converge vers 0. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
6. On se donne cette fois $\alpha \geq 2$ et on suppose dans cette question uniquement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $\lfloor n^\alpha \rfloor$. On définit enfin sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ la fonction g par $g(x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha$.
   (a) En dérivant deux fois g, montrer que pour tout $x \geq 0, g'(x) \geq 2$, et en déduire que $g(n) - g(n-1) \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe.

Correction :

1. Une suite est convexe lorsque, pour tout n, u_n est en-dessous de la corde joignant les points d'indices $n-1$ et $n+1$: pour reprendre les termes de l'exercice 7 (en l'adaptant pour les suites), une suite est convexe lorsque son épigraphe est convexe.



2. Supposons f convexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Avec $\lambda = 1/2$:

$$f(\lambda(n-1) + (1-\lambda)(n+1)) \leq \lambda f(n-1) + (1-\lambda)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.

3. (a) Soit $n \geq 1$. Alors $(n+1)^2 + (n-1)^2 = 2n^2 + 1 \geq 2n^2$: la suite $\left(n^2\right)$ est convexe. On peut aussi utiliser la question précédente : la fonction carré est convexe donc la suite de terme général n^2 est convexe.
   (b) Soit $n \geq 1$. Alors $2^{n+1} + 2^{n-1} \geq 2^{n+1} = 2 \times 2^n$: la suite (2^n) est convexe. On pouvait aussi utiliser la question précédente et dire que $x \mapsto e^{x\ln(2)}$ est convexe.
   (c) Là c'est beaucoup plus rapide, un contre-exemple suffit, inutile de montrer que l'inégalité n'est pas vérifiée quel que soit n : $2\sqrt{1} = 2 > \sqrt{2} + \sqrt{0} = \sqrt{2}$: la suite $(\sqrt{n})$ n'est pas convexe. Attention, la réciproque de la question précédente est fausse, on ne pouvait pas dire que la suite n'est pas convexe car la fonction racine carrée n'est pas convexe !

(d) Soit $n \geq 1$. Alors

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} = \frac{2n+2}{n(n+2)}$$

et

$$\frac{2n+2}{n(n+2)} - \frac{2}{n+1} = \frac{(2n+2)(n+1) - 2n(n+2)}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} > 0$$

En d'autres termes, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ est convexe.

4. On pourrait faire un sens et puis l'autre, mais on peut le démontrer directement par équivalences.

$$\begin{aligned}(u_n) \text{ est convexe} \quad &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1} \\ &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} \leq u_{n+1} - u_n \\ &\iff \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n-1} \leq v_n\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5. On suppose dans le reste que la question que la suite (u_n) est bornée par M. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|v_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2M$$

On en déduit que (v_n) est bornée. D'après la question précédente, (v_n) est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (v_n) converge. Supposons que sa limite L soit strictement positive. On fait comme en cours : une suite qui converge vers $L > 0$ est comprise entre $L/2$ et $2L$ pour n assez grand. Dès lors, Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, v_n \geq \dfrac{L}{2}$. Posons donc $a = L/2 > 0$. Ainsi, $u_{n_0+1} \geq u_{n_0} + a$, et

$$u_{n_0+2} \geq u_{n_0+1} + a \geq u_{n_0} + 2a$$

De même, $u_{n_0+3} \geq u_{n_0} + 3a$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geq n_0$,

$$u_n \geq u_{n_0} + (n - n_0)a = (u_{n_0} - n_0 a) + na$$

Dès lors, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et par le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car la suite (u_n) est bornée. C'est absurde. On en déduit que $L \leq 0$. De même, si $L < 0$, on montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ ce qui est également absurde pour la même raison. Finalement, $L = 0$. La suite (v_n) est croissante de limite nulle : elle est par conséquent négative, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante. Or, elle est bornée donc minorée : elle converge.

6. (a) Suivons l'indication de l'énoncé et dérivons deux fois g. Tout d'abord, g est bien dérivable sur son domaine de définition car somme de fonctions dérivables. Pour tout $x \geq 0$

$$g'(x) = \alpha\left((x+1)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}\right)$$

De la même façon, g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geq 0$ on a

$$g''(x) = \alpha(\alpha-1)\left((x+1)^{\alpha-2} - x^{\alpha-2}\right)$$

Or, $\alpha - 2 \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto x^{\alpha-2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $g''(x) \geq 0$. En particulier, g' est croissante et pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) \geq g'(0) = \alpha \geq 2$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $n \geq 1$, $g(n) - g(n-1) \geq 2(n - (n-1)) = 2$.

(b) Par définition de la partie entière (on rappelle que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$), pour tout $n \geq 1$

$$2u_n \leq 2n^\alpha \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} + u_{n-1} > (n+1)^\alpha - 1 + (n-1)^\alpha - 1$$

Or, d'après la question précédente,

$$g(n-1) = n^\alpha - (n-1)^\alpha \leq g(n) - 2 = (n+1)^\alpha - n^\alpha - 2$$

ce qui implique en particulier que

$$2u_n \leq 2n^\alpha \leq (n+1)^\alpha + (n-1)^\alpha - 2 < u_{n+1} + u_{n-1}$$

Dès lors, la suite (u_n) est convexe.

Exercice 24 - Théorème de Bohr [1]-Mollerup (1922) : ✪✪✪ La fonction Γ est une fonction définie à partir d'une intégrale que vous verrez sans doute l'année prochaine. Cette fonction va de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et vérifie les trois conditions suivantes :

- $\Gamma(1) = 1$.
- Γ est log-convexe (cf. exercice 13).
- $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Le but de cet exercice est de montrer que Γ est l'unique fonction qui vérifie ces conditions. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie ces trois conditions. Le but de cet exercice est donc de prouver que $F = \Gamma$. Soit $x \in]\,0\,;1\,]$ et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer à l'aide du théorème des trois pentes que
$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq \ln F(n+1) - \ln F(n).$$
2. Calculer $F(n)$ puis encadrer $F(n+x)$ à l'aide de $(n-1)^x(n-1)!$ et $n^x(n-1)!$.
3. Exprimer, pour $p \geq 1$, $F(x+p)$ en fonction de $F(x), x$ et p.
4. En déduire que
$$\frac{n}{x+n}F(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq F(x)$$
5. En déduire que $F(x) = \Gamma(x)$.
6. Conclure que $F = \Gamma$.

Correction :

1. D'après le théorème des trois pentes avec $x = n-1, y = n$ et $z = n+x$, la fonction $\ln \circ F$ étant convexe par hypothèse, on obtient :
$$\frac{\ln F(n) - \ln F(n-1)}{n-(n-1)} \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{n+x-n}$$
ce qui donne la première inégalité, la deuxième s'obtenant directement en appliquant le théorème des trois pentes à $\ln \circ F$ avec $x = n, y = n+x$ (pas le même x) et $z = n+1$.
$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq F(n+1) - \ln F(n)$$
2. Par une récurrence immédiate, en utilisant le fait que $F(1) = 1$ et que, puisque $n \geq 2, F(n) = (n-1)F(n-1)$ il vient : $F(n) = (n-1)!$. En remplaçant ainsi $F(n)$ par $(n-1)!$ et $F(n-1)$ par $(n-2)!$ dans ce qui précède, on a
$$\ln((n-1)!) + x\ln\left(\frac{(n-1)!}{(n-2)!}\right) \leq \ln F(n+x) \leq \ln((n-1)!) + x\ln\left(\frac{n!}{(n-1)!}\right)$$
d'où :
$$\ln((n-1)!) + x\ln(n-1) \leq \ln F(n+x) \leq \ln((n-1)!) + x\ln n$$
c'est-à-dire :
$$\ln((n-1)! \times (n-1)^x) \leq \ln F(n+x) \leq \ln((n-1)! \times n^x)$$
L'encadrement voulu découle de la croissance de la fonction exponentielle.
3. Par une récurrence immédiate :
$$\forall p \geq 1 \qquad F(x+p) = F(x) \times x \times (x+1) \times \cdots \times (x+p-1)$$
Naturellement, il ne viendrait à l'idée de personne de mettre des factorielles là-dedans, puisque ces nombres n'ont aucune raison d'être des entiers...

1. Du nom du mathématicien danois Harald Bohr, le frère du physicien Niels Bohr. Il a participé aux Jeux Olympiques de Londres en 1908 et a infligé à l'équipe de France de football avec le Danemark la plus lourde défaite de son histoire : 17-1 !

4. D'après les deux dernières questions :

$$(n-1)! \times (n-1)^x \leq x(x+1) \times \cdots \times (x+n-1)F(x) \leq (n-1)! \times n^x$$

donc

$$\frac{(n-1)! \times (n-1)^x}{x(x+1) \times \cdots \times (x+n-1)} \leq F(x) \leq \frac{(n-1)! \times n^x}{x(x+1) \times \cdots \times (x+n-1)}$$

Tout d'abord, en multipliant l'inégalité de droite par $n/(x+n) > 0$ il vient

$$\frac{n}{n+x} F(x) \leq \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}$$

Ensuite, l'inégalité de gauche étant vérifiée pour tout entier $n \geq 2$, elle est en particulier vérifiée pour... $n+1$, c'est-à-dire que

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq F(x)$$

En conclusion :

$$\frac{n}{n+x} F(x) \leq \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \leq F(x)$$

5. Les deux membres extrêmes de la question précédente tendant vers $F(x)$, d'après le théorème d'encadrement

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} F(x)$$

et ceci est vérifié pour toute fonction F vérifiant les trois conditions de l'énoncé. Or, la fonction Γ vérifie les trois mêmes conditions que F. En d'autres termes

$$\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \Gamma(x)$$

d'où, par unicité de la limite, $F(x) = \Gamma(x)$.

6. D'après la question précédente, $F = \Gamma$ sur l'intervalle $]\,0\,;1\,]$. Montrons qu'elles coïncident sur l'intervalle $]\,0\,;2\,]$. Soit $x \in\,]\,0\,;2\,]$. Si $x \in\,]\,0\,;1\,]$, il suffit d'appliquer la question précédente. Sinon, par hypothèse sur la fonction F

$$F(x) = (x-1)F(x-1) = (x-1)\Gamma(x-1) = \Gamma(x)$$

la deuxième égalité venant du fait que F et Γ coïncident sur $]\,0\,;1\,]$, et parce que $x-1 \in\,]\,0\,;1\,]$. Dès lors, $F = \Gamma$ sur $]\,0\,;2\,]$, et par une récurrence immédiate, $F = \Gamma$ sur $]\,0\,;n\,]$ pour tout $n \geq 1$. En conclusion : $F = \Gamma$.

Exercice 25 : ✪✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \exists \lambda \in\,]\,0\,;1\,[\,, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

1. Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est négative sur $[\,a\,;b\,]$.
2. Montrer que f est convexe.
3. Utiliser ce résultat pour refaire l'exercice 21.

Correction : Interprétation géométrique : il existe **un point** de la courbe sur l'intervalle $]\,x\,;y\,[$ qui est sous la corde, et on va voir (si la fonction est continue) que cela implique que la fonction est convexe donc que toute la courbe est sous ses cordes.

1. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrons qu'au voisinage de x_0, aucun point de la courbe n'est sous la corde, ce qui sera absurde. Il suffit de prendre le dernier point avant x_0 où f est nulle, et le premier point après x_0 où f est nulle. Introduisons pour cela les ensembles

$$A = \{x \in [\,a\,;x_0\,] \mid f(x) = 0\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in [\,x_0\,;b\,] \mid f(x) = 0\}$$

A est non vide car contient a et est majoré par x_0 donc admet une borne supérieure α. De même, B admet une borne inférieure β. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, α est limite d'une suite (α_n) d'éléments de A i.e. tels que $f(\alpha_n) = 0$ pour tout n. D'une part, $f(\alpha_n) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et d'autre part, f étant continue, $f(\alpha_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(\alpha)$

donc, par unicité de la limite, $f(\alpha) = 0$. On montre de même que $f(\beta) = 0$. Or, par définition de α, f ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;x_0\,]$ et par définition de β, f ne s'annule pas sur $[\,x_0\,;\beta\,[$ si bien que f ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$. f étant continue, elle est de signe constant (à savoir faire !) donc strictement positive car $f(x_0) > 0$. Dès lors, il n'existe aucun point de l'intervalle $]\,\alpha\,;\beta\,[$ qui soit sous la corde puisque la corde est l'axe des abscisses et que la fonction est strictement positive sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$: c'est absurde.

2. Faisons comme dans la démonstration de l'égalité des accroissements finis et « penchons la tête » : soit $(a,b) \in I^2$ et soit

$$\varphi : x \mapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a) - f(a)$$

c'est-à-dire que φ est la différence entre f et la fonction affine coïncidant avec f en a et b. On en déduit tout d'abord que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. De plus, φ est continue car somme de fonctions continues. Enfin, φ vérifie la condition de l'énoncé car f la vérifie et car une fonction affine est convexe donc tout λ convient. D'après la question précédente, φ est négative sur $[\,a\,;b\,]$, f est sous la corde, f est convexe.

3. L'exercice 21 consiste à étudier une telle fonction où λ vaut toujours $1/2$: d'après ce qui précède, une telle fonction est convexe.

Exercice 26 : ✪✪✪ Prouver la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Montrer que pour tous $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1+x_k)^{1/n}$$

En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ réels positifs on a

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k+b_k)\right)^{1/n}$$

Correction : La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$ et $f''(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. Ainsi f est convexe. Soient $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$. Notons $A_n = 1 + \left(\displaystyle\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}$ et $B_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n (1+x_k)^{1/n}$ et donc il faut montrer que $A_n \leq B_n$. Puisqu'il y a un produit, on pense à calculer $\ln(B_n)$, ce qui est possible car $B_n > 0$: $\ln(B_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^n \ln(1+x_k)$.

À quelle fonction va-t-on appliquer l'inégalité de Jensen ? Vu le début de l'exercice, on cherche à l'appliquer à f qui est convexe. Pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on cherche donc à écrire $\ln(1+x_k)$ à l'aide de la fonction f : on cherche donc à écrire x_k sous la forme d'une exponentielle, pour avoir $\ln(1+x_k) = \ln(1+e^{\text{truc}})$. On pense à écrire $x_k = e^{\ln(x_k)}$. Problème : les x_k sont positifs mais pas forcément strictement. Il faut donc faire plusieurs cas.

- Premier cas : un des x_k est nul. Alors $A_n = 1$ (car le produit dans A_n est nul) et B_n est un produit de termes supérieurs ou égaux à 1 donc $B_n \geq 1$ (rappelons que l'on peut multiplier les inégalités positives) et donc $B_n \geq A_n$. C'est un raisonnement qui revient souvent en convexité : séparer les termes nuls des autres.
- Deuxième cas : tous les x_k sont strictement positifs. Dès lors, pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, $x_k = e^{\ln(x_k)}$ si bien que

$$\ln(B_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\left(1+e^{\ln(x_k)}\right) = \frac{f(\ln(x_1)) + \cdots + f(\ln(x_n))}{n}.$$

Or, f est convexe donc, d'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}
\ln(B_n) &\geq f\left(\frac{\ln(x_1)+\cdots+\ln(x_n)}{n}\right) \\
&\geq f\left(\ln\left((x_1\times\cdots\times x_n)^{1/n}\right)\right) \\
&\geq \ln\left(1+e^{\ln\left((x_1\times\cdots\times x_n)^{1/n}\right)}\right) \\
&\geq \ln\left(1+(x_1\times\cdots\times x_n)^{1/n}\right) \\
&\geq \ln(A_n).
\end{aligned}$$

Or, la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $B_n \geq A_n$ ce qui est le résultat voulu.

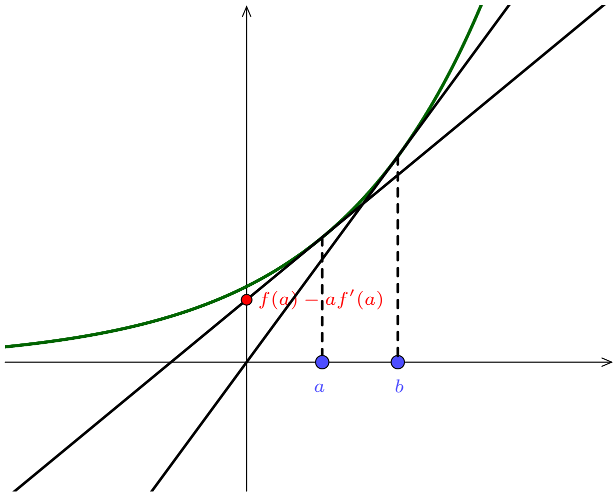
Pour la dernière partie de la question, on fait comme dans l'exercice 26 du chapitre 3.

Exercice 27 : ✪✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que représente géométriquement le nombre $f(a) - af'(a)$?
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - xf'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Correction :

1. Cela fait penser à l'équation de la tangente en a. Cette tangente a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Lorsque $x = 0$, on a $y = f(a) - af'(a)$. Dès lors, le nombre $f(a) - af'(a)$ est l'ordonnée du point d'intersection de la tangente au point d'abscisse a avec l'axe des ordonnées (quand l'abscisse est nulle).



2. On veut donc prouver que, quand on va de $-\infty$ à 0, « le point rouge monte », et quand on va de 0 à $+\infty$, « le point rouge descend », ce qui se voit bien sur le dessin. f n'étant pas dérivable deux fois, on ne peut pas dériver g donc il vaut revenir à la définition. Soient $0 \leq a \leq b$ et prouvons que $g(a) \geq g(b)$. Le résultat étant évident si $a = b$, supposons $a < b$. On sait que f est convexe donc f' est croissante : $f'(b) \geq f'(a)$, la tangente en b a une pente plus grande que la tangente en a.

   Prouvons le résultat qui se voit très bien sur le dessin, à savoir que les deux droites s'intersectent en un point $c \in [\,a\,;b\,]$ (les deux droites étant éventuellement confondues). Notons :

$$h_a : x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a) \qquad \text{et} \qquad h_b : x \mapsto f'(b)(x-b) + f(b)$$

   En d'autres termes, h_a et h_b sont les fonctions affines dont les graphes sont les tangentes en a et en b. Posons enfin $\varphi = h_a - h_b$ qui est donc affine de pente $h'(a) - h'(b) \leq 0$ donc décroissante. Tout d'abord, φ est affine donc continue. De plus :

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= h_a(a) - h_b(a) \\ &= f(a) - f'(b) \times (a-b) - f(b) \\ &= f(a) + f'(b) \times (b-a) - f(b) \end{aligned}$$

   Or, f est convexe donc la fonction τ_b est croissante et tend vers $f'(b)$ en b. Une fonction croissante sur $]-\infty\,;b\,[$ étant majorée par sa limite en b, et puisque $a < b$, on a :

$$\tau_b(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

   En multipliant par $b - a > 0$, il vient :

$$f(b) - f(a) \leq f'(b) \times (b-a)$$

   En mettant tout à droite, on trouve que $\varphi(a) \geq 0$. De même, $\varphi(b) \leq 0$. Puisque φ est continue, elle s'annule entre a et b en un point $c \in [\,a\,;b\,]$. La fonction affine φ admet pour coefficient dominant $f'(a) - f'(b) \leq 0$ donc est décroissante et s'annule en $c \in [\,a\,;b\,]$. En particulier, φ est positive sur $]-\infty\,;a\,]$ donc en 0 car $a \geq 0$: $\varphi(0) \geq 0$ donc $h_a(0) \geq h_b(0)$ ce qui est le résultat voulu puisque $h_a(0) = g(a)$ et $h_b(0) = g(b)$. La croissance de g sur $\mathbb{R}_-$ est analogue.