Correction du Devoir Maison n^{o} 16 bis

1. f est constante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y)$ (ou, moins maniable : $\exists L \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = L$)

2. f n'est pas constante : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) \neq f(y)$.

3. f est strictement croissante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ (qu'on peut résumer en : $\forall x < y \in \mathbb{R}^2, f(x) < f(y)$)

4. f est décroissante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ (ou $\forall x \leq y \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq f(y)$)

5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$ (ou, moins maniable : $\exists L \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = L$).

6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.

7. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$

8. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$

9. Il y a une valeur que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prend deux fois : $\exists n \neq p \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p$ (ou : $\exists y \in \mathbb{R}, \exists n \neq p \in \mathbb{N}^2, y = u_n$ et $y = u_p$)

10. f admet un point fixe : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

11. f admet exactement un point fixe : $\exists ! x \in \mathbb{R}, f(x) = x$

12. f admet deux points fixes : $\exists x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^2, f(x_0) = x_0$ et $f(x_1) = x_1$

13. f n'admet aucun point fixe : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$

14. Il existe un réel ayant deux antécédents par f : $\exists x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^2, f(x_0) = f(x_1)$ (ou : $\exists y \in \mathbb{R}, \exists x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^2, f(x_0) = y$ et $f(x_1) = y$)

15. Il existe un réel n'ayant aucun antécédent par f : $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y \neq f(x)$

16. Tout réel admet un unique antécédent par f : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists ! x \in \mathbb{R}, y = f(x)$

17. f admet un minimum[1] : $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(x_0)$

18. f est à valeurs positives : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$

19. f n'est pas à valeurs positives : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) < 0$

20. f est à valeurs négatives : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 0$

21. f est bornée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M$ (ou : $\exists (m,M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$)

22. f n'est pas bornée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$ (plus maniable que l'autre).

23. f n'est pas l'identité : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$

[1] Je ne veux pas lire : « $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = \min f$ », je veux qu'on traduise le fait que c'est un minimum.

24. f s'annule : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
25. f s'annule deux fois : $\exists x_0 \neq x_1 \in \mathbb{R}^2, f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 0$
26. f ne s'annule pas : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
27. f n'est pas la fonction nulle : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
28. f est la fonction nulle : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$
29. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$ (ou, moins maniable : $\exists L \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = L$)
30. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang : $\exists n_0 \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n \geq 0$
31. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet un terme positif : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$
32. $f(x)$ est positif pour x assez grand : $\exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B, f(x) \geq 0$
33. f est majorée par 1 au voisinage de 0 : $\exists \eta > 0, \forall x \in [-\eta\,;\eta], f(x) \leq 1$
34. f n'est pas de signe constant : $\exists (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2, f(x_0) < 0$ et $f(x_1) > 0$
35. f est à valeurs dans $[-1\,;1]$: $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \in [-1\,;1]$
36. Tous les éléments de $[-1\,;1]$ sont atteints par f : $\forall y \in [-1\,;1], \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)$
37. f n'est pas paire : $\exists x \in \mathbb{R}, f(-x) \neq f(x)$
38. f n'est ni paire ni impaire : $\exists (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2, f(-x_0) \neq f(x_0)$ et $f(-x_1) \neq -f(x_1)$
39. f est périodique : $\exists T \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$
40. f est continue en 0 : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$.
41. f est uniformément continue : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.
42. f ne tend pas vers 0 en $+\infty$: $\exists \varepsilon > 0, \forall B \geq 0, \exists x \geq B, |f(x)| > \varepsilon$.
43. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + a$
44. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique : $\exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n$
45. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique : $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$
46. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge : $\exists L \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - L| \leq \varepsilon$
47. L'ensemble des réels en lesquels f s'annule n'est pas majoré : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x > M$ et $f(x) = 0$
48. r est rationnel : $\exists (n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, r = n/p$ (on pouvait prendre p dans $\mathbb{N}^*$ ou n dans $\mathbb{N}$).
49. G est commutatif : $\forall (x,y) \in G^2, xy = yx$.
50. G n'est pas commutatif : $\exists (x,y) \in G^2, xy \neq yx$.
51. A est intègre : $\forall (a,b) \in A^2, ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$. Ou, par contraposée : $\forall (a,b) \in A^2, (a \neq 0$ et $b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$.

52. A n'est pas intègre : $\exists (a,b) \in A^2, a \neq 0, b \neq 0$ et $ab = 0$.

53. P est de degré 3 : $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^3, P = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

54. P divise Q : $\exists A \in \mathbb{K}[X], Q = AP$.

55. M est diagonale : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, i \neq j \Rightarrow M_{i,j} = 0$.

56. M est triangulaire supérieure : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, i > j \Rightarrow M_{i,j} = 0$.

57. M est nilpotente : $\exists k \in \mathbb{N}, M^k = 0_n$.