# Devoir Surveillé n°7 - Sujet groupe A

1. (Question de cours) Définition du noyau, de l'image d'une AL de $E$ dans $F$. Écriture de $y \in \mathrm{Im}(u)$ avec des quantificateurs. Caractérisation de l'injectivité (démonstration).
2. (Question de cours) Les applications suivantes sont-elles linéaires ?
   - $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3z, x-2y, x) \end{array} \right.$
   - $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, y-1, x+z) \end{array} \right.$
   - $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2, x-y, y-z) \end{array} \right.$
3. Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}}$ converge, donner le signe de sa somme, et majorer sa somme en valeur absolue.
4. Donner la nature de la série $\sum \left(n^{1/n} - 1\right)$.
5. Donner la nature de la série $\sum \frac{n^{2024}}{2^n}$.
6. Montrer que la série $\sum \frac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge et donner la valeur de sa somme.
7. On lance $n$ fois un dé équilibré. Donner un espace probabilisé modélisant cette expérience.
8. Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de boîtes contenant des clés USB. 5 % des boîtes sont abîmées. Le gérant estime que :
   - 60 % des boîtes abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
   - 98 % des boîtes non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

   Un client achète une boîte du lot et constate qu'une des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boîte abîmée ?
9. On effectue des tirages successifs avec remise d'une boule dans une urne qui en contient 10, numérotées de 1 à 10 : $B_1$, $B_2$, $B_3, \ldots, B_{10}$. L'un des participants a acheté un carton ayant des cases numérotées de 1 à $r$ (avec $r \in [\![ 2 ; 9 ]\!]$ fixé). À chaque fois que l'un des numéros écrits sur son carton est tiré au sort, il coche la case correspondante. Si le numéro tiré ne figure pas sur son carton ou si la case a déjà été cochée, il ne fait rien. La boule tirée est remise dans l'urne et on passe au tirage suivant. Si $n \geq 1$, on désigne par $Z_n$ le nombre de cases de son carton qui sont cochées à l'issue du $n^e$ tirage. Pour tout $n \in [\![ 1 ; r ]\!]$, montrer que $P(Z_n = n) = \frac{r!}{10^n (r-n)!}$.
10. (Question de cours) Donner la définition de $n$ événements $A_1, \ldots, A_n$ mutuellement indépendants.
11. Une urne contient 6 boules blanches et 2 boules noires. On y effectue des tirages sans remise et on note $X$ la variable aléatoire donnant le rang de sortie de la première boule blanche. Donner la loi de $X$ puis son espérance et sa variance.
12. On considère deux variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes de même loi, à valeurs dans $[\![ 1 ; n ]\!]$, telles que pour tout $k \in [\![ 1 ; n ]\!], P(X = k) = zk$, avec $z$ un réel. Identifier la valeur de $z$, et donner la probabilité que $X = Y$.
13. Soient $n \geq 1$, $X$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n$ et $1/2$, et $A$ un réel strictement positif. Donner l'espérance de $Y = A^X / 2n$.
14. Soient $n, r, N$ dans $\mathbb{N}^*$ avec $r < N$ et $n \leq N$. On dispose d'une urne contenant $r$ boules rouges et $N - r$ boules bleues. On tire successivement avec remise $n$ boules et on note $R$ le nombre de boules rouges tirées. Donner la loi de $R$ ainsi que son espérance et sa variance.
15. On tire deux boules successivement et sans remise dans une urne contenant initialement 1 boule blanche et 3 boules noires. On note $X_1$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la première boule tirée est blanche, et 0 sinon, et idem pour $X_2$. Donner la loi conjointe du couple $(X_1, X_2)$.
16. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![ 1 ; n ]\!]$ vérifiant :

$$\forall (i,j) \in [\![ 1 ; n ]\!]^2, P(X = i, Y = j) = \frac{4ij}{n^2(n+1)^2}$$

   Donner les lois marginales du couple $(X, Y)$.
17. Les variables aléatoires $X_1$ et $X_2$ de la question 15 sont-elles indépendantes ?
18. Soit $X \sim U(\{-1; 0; 1\})$. Calculer $\mathrm{Cov}(X^2, X^3)$. $X^2$ et $X^3$ sont-elles indépendantes ?
19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ croissante, soit $X$ une variable aléatoire. Montrer que $P(X \geq -1) \leq \frac{E(f(X))}{f(-1)}$.
20. On effectue $n$ lancers successifs d'une pièce équilibrée. Pour quels nombres $n$ de lancers peut-on affirmer, avec un risque de se tromper inférieur à 5 %, que la proportion de piles au cours de ces $n$ lancers diffère de $1/2$ de strictement moins d'un centième ?