Chapitre 30

Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, on note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on se donne E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $E \neq \{0\}$.

> Comme pour les matrices, polynômes etc. on se restreint au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est le cadre du programme mais les résultats de ce chapitre sont encore vrais avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque (à part dans le cadre de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle et dans le cadre des suites récurrentes linéaires).

I Dimension d'un espace vectoriel

I.1 Préliminaires

Proposition (rappel - cf. chapitre 28). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. S'il existe $j \in I$ tel que x_j soit CL des $(x_i)_{i\neq j}$, alors $\text{Vect}(x_i)_{i\in I} = \text{Vect}(x_i)_{i\neq j}$.

Remarque : En d'autres termes, si un élément est CL des autres, il est « superflu », on peut le retirer et la famille engendre toujours le même espace. On peut aussi effectuer l'opération inverse, i.e. l'ajouter à la famille. Mais en fait, si F est une famille de vecteurs, l'inclusion, $\text{Vect}(F) \subset \text{Vect}(F \cup \{y\})$ est vraie quel que soit $y \in E$ (cf. preuve de ce résultat dans le chapitre 28). En particulier, si G est une famille génératrice, alors $\text{Vect}(G) = E$ donc, pour tout $y \in E$, $\text{Vect}(G \cup \{y\}) = E$. En d'autres termes (nous utiliserons ceci plusieurs fois dans ce chapitre) : si l'on rajoute un élément (ou plusieurs si on effectue cela plusieurs fois) à une famille génératrice, on obtient encore une famille génératrice.

Exemple : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((2,1),(1,1),(3,2))$ car, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(x,y) = x(2,1) + (3y-x)(1,1) - y(3,2)$$

Or, $(3,2) = (2,1) + (1,1)$ donc :

$$\begin{aligned}(x,y) &= x(2,1) + (3y-x)(1,1) - y\big((2,1)+(1,1)\big)\\ &= (x-y)(2,1) + (2y-x)(1,1).\end{aligned}$$

Ainsi, on a également $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((2,1),(1,1))$.

Remarque : Par abus de langage, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, on l'assimilera parfois à la partie de E : $\{x_i \,|\, i \in I\}$. Ainsi, on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion (alors qu'il faudrait parler de sous-famille ou de restriction, ainsi que de sur-famille ou de prolongement), d'union et d'intersection de familles. En d'autres termes, on assimilera parfois parties libres (respectivement génératrices) et familles libres (respectivement génératrices).

Proposition (rappel - cf. chapitre 28). Soit L une famille libre, et soit $y \in E$. Si $y \notin \text{Vect}(L)$, alors $L \cup \{y\}$ est encore libre.

I.2 Espaces vectoriels de dimension finie

Définition. On dit que E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. Si ce n'est pas le cas, on dit que E est de dimension infinie.

Exemples :

- Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie car $(1, X, \dots, X^n)$ est la base canonique donc une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$; $(e_1, \dots, e_n)$ est même une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique (cf. chapitre 28).

- Si n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension finie car les matrices élémentaires (c'est-à-dire les $E_{i,j}$ avec $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $j \in [\![1\,;\, p]\!]$) forment la base canonique donc une famille génératrice de $\mathbb{K}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Montrons que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie. Si $\mathbb{K}[X]$ admet une famille génératrice finie, notée $(P_1, \dots, P_n)$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $P = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$, et en particulier

$$\deg(P) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\deg(\lambda_i P_i)) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (\deg(P_i)),$$

ce qui est absurde car les degrés ne sont pas bornés dans $\mathbb{K}[X]$. On en déduit que $\mathbb{K}[X]$ est donc bien de dimension infinie.

Rappelons que le degré d'une somme est inférieur ou égal au maximum des degrés, et que si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P)$.

$\mathbb{K}[X]$ est l'exemple le plus simple d'espace de dimension infinie : y penser quand on demande un contre-exemple en dimension infinie !

I.3 Théorème de la base incomplète

Lemme. On suppose que E est de dimension finie. Soit G une famille génératrice finie et soit L une famille libre incluse dans G. Alors il existe une base B de E contenue dans G et contenant L, i.e. telle que $L \subset B \subset G$.

Démonstration. Considérons les ensembles $A = \{F \mid F \text{ famille libre}, L \subset F \subset G\}$ et $C = \{\operatorname{card}(F) \mid F \in A\}$.

- $L \in A$ donc $\operatorname{card}(L) \in C$: C est non vide.
- Si $F \in A$ alors $F \subset G$ donc $\operatorname{card}(F) \leqslant \operatorname{card}(G)$. En d'autres termes, C est majorée par $\operatorname{card}(G)$.

En d'autres termes, A est l'ensemble de toutes les familles libres de E contenant L et contenues dans G, et C est l'ensemble de leurs cardinaux. En particulier, C est une partie de $\mathbb{N}$.

Ainsi, C est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément noté n_0. Comme $n_0 \in C$, il existe $B \in A$ de cardinal n_0. Montrons que B est une base de E.

- $B \in A$ donc B est une famille libre.
- Soit $x \in G$. Si $x \notin \operatorname{Vect}(B)$, d'après les préliminaires, $B \cup \{x\}$ est une famille libre contenant toujours L (car $L \subset B$) et toujours contenue dans G, si bien que $B \cup \{x\} \in A$ donc $\operatorname{card}(B \cup \{x\}) = n_0 + 1 \in C$ ce qui est absurde car $n_0 + 1 > n_0$ et car n_0 est le plus grand élément de C. Par conséquent, $x \in \operatorname{Vect}(B)$. Toujours d'après les préliminaires, on peut donc « supprimer » de G tous les éléments qui ne sont pas dans B, d'où $\operatorname{Vect}(B) = \operatorname{Vect}(G) = E$ c'est-à-dire que B est une famille génératrice.

Finalement, B est une base de E, et puisque $B \in A$, on a bien $L \subset B \subset G$.

Théorème (théorème de la base incomplète). On suppose que E est de dimension finie. Soient G une famille génératrice et L une famille libre finies. Alors L peut être complétée en base de E avec des éléments de G. En particulier :

- toute famille libre peut être complétée en base de E.
- E admet une base de cardinal fini.

La différence avec le lemme est qu'on ne suppose plus que L est incluse dans G.

Démonstration. D'après le lemme, qu'on applique à L et $\widetilde{G} = L \cup G$ (qui est génératrice et contient L : voir ci-dessus, si on rajoute des éléments à une famille génératrice, on obtient encore une famille génératrice), on peut compléter L en base à l'aide d'éléments de $\widetilde{G}$. Or, ces éléments appartiennent à G car, sinon, la base contient plusieurs fois le même élément donc n'est pas une famille libre. $\square$

Il n'est en fait pas nécessaire de supposer L finie car on verra dans le paragraphe suivant qu'une famille libre dans un espace vectoriel de dimension finie est automatiquement finie.

Théorème (théorème de la base extraite). On suppose que E est de dimension finie. Alors, de toute famille génératrice finie on peut extraire une base.

Démonstration. Soit G une famille génératrice (de E) finie. Comme $E \neq \{0\}$, G contient au moins un vecteur x_0 non nul. Puisque $L = \{x_0\}$ est une partie libre incluse dans G, le lemme permet de conclure. $\square$

I.4 Dimension d'un espace vectoriel

I.4.a Définition

Lemme. S'il existe $(n+1)$ vecteurs $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ qui sont CL de n vecteurs $(e_1, \ldots, e_n)$, alors les $n+1$ vecteurs sont liés.

Démonstration. Par récurrence sur n.

- Si $n \geqslant 1$, on note H_n : « Si $n+1$ vecteurs sont CL de n vecteurs, alors les $n+1$ vecteurs sont liés. »
- Si $n = 1$: soient (u_1, u_2) deux vecteurs combinaison linéaire d'un vecteur e_1. Alors il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$ tels que $u_1 = \alpha_1 e_1$ et $u_2 = \alpha_2 e_1$. Si $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ alors $u_1 = u_2 = 0$ donc u_1 et u_2 sont liés. Si α_1 et α_2 sont non tous nuls, alors

$$\begin{aligned} \alpha_2 u_1 - \alpha_1 u_2 &= \alpha_2 \alpha_1 e_1 - \alpha_1 \alpha_2 e_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  On a une combinaison linéaire non triviale qui annule u_1 et u_2 : u_1 et u_2 sont liés. Dans tous les cas, H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_{n-1} vraie, et montrons que H_n est vraie. Soient $(u_1, \ldots, u_{n+1}) \in E^{n+1}$ et $(e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ et on suppose que les u_i sont CL des e_i. Par hypothèse, il existe une famille de scalaires $(\alpha_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n+1, 1 \leqslant j \leqslant n}$ tels que

$$\begin{array}{ccccccccc} u_1 & = & \alpha_{1,1} e_1 & + & \alpha_{1,2} e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n} e_n \\ u_2 & = & \alpha_{2,1} e_1 & + & \alpha_{2,2} e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n} e_n \\ \vdots & & & & & & & & \\ u_{n+1} & = & \alpha_{n+1,1} e_1 & + & \alpha_{n+1,2} e_2 & + & \cdots & + & \alpha_{n+1,n} e_n \end{array}$$

  De manière plus concise :

$$\forall i \in [\![1\,; n+1]\!], \qquad u_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} e_j$$

  - ⋆ Premier cas : pour tout $i \in [\![1\,; n+1]\!], \alpha_{i,1} = 0$ (ie tous les coefficients de la première colonne sont nuls). Alors $u_1, \ldots, u_n$ sont CL de $e_2, \ldots, e_n$. On a n vecteurs qui sont CL de $n-1$ vecteurs donc, par hypothèse de récurrence, $u_1, \ldots, u_n$ sont liés, et donc $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ sont également liés.
  - ⋆ Deuxième cas : il existe $i \in [\![1\,; n+1]\!]$ tel que $\alpha_{i,1} \neq 0$. Quitte à renuméroter les vecteurs, on suppose que $\alpha_{1,1} \neq 0$, d'où :

$$e_1 = \frac{1}{\alpha_{1,1}} \left[u_1 - \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1,j} e_j \right]$$

    Soit $i \in [\![2\,; n+1]\!]$.

$$\begin{aligned} u_i &= \alpha_{i,1} e_1 + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} e_j \\ &= \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} \left[u_1 - \sum_{j=2}^{n} \alpha_{1,j} e_j \right] + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{i,j} e_j \end{aligned}$$

    et donc, en mettant le u_1 à gauche, il vient

$$u_i - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} u_1 = \sum_{j=2}^{n} \left[\alpha_{i,j} - \frac{\alpha_{i,1} \alpha_{1,j}}{\alpha_{1,1}} \right] e_j$$

Par conséquent, les n vecteurs $\left(u_i - \dfrac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} u_1\right)_{2 \leqslant i \leqslant n}$ sont CL des $n-1$ vecteurs $(e_2, \dots, e_n)$ donc sont liés, par hypothèse de récurrence. Il existe donc $(\beta_2, \dots, \beta_{n+1})$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=2}^{n+1} \beta_i \left(u_i - \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}} u_1\right) = 0$$

c'est-à-dire tels que

$$-\left(\sum_{i=2}^{n+1} \beta_i \frac{\alpha_{i,1}}{\alpha_{1,1}}\right) u_1 + \sum_{i=2}^{n+1} \beta_i u_i = 0$$

□

Or, les coefficients devant $u_2, \dots, u_{n+1}$ sont non tous nuls donc la combinaison linéaire ci-dessus est non triviale : les vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ sont liés.

Ainsi, dans tous les cas, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Remarque : Ce lemme est valable même si E n'est pas de dimension finie.

cf. exercice 23.

Corollaire. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que E admet une famille génératrice de cardinal n (en particulier, E est de dimension finie). Alors :

- Toute famille admettant au moins $n+1$ éléments est liée.
- Toute famille libre admet au plus n éléments.

En d'autres termes, dans un espace vectoriel de dimension finie, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal au cardinal d'une famille génératrice. Si le cardinal d'une famille est strictement supérieur au cardinal d'une famille génératrice, cette famille est liée.

Corollaire.

- Si E admet une famille libre infinie, alors E est de dimension infinie.
- Si, pour tout $n \geqslant 1$, E admet une famille libre à n éléments, alors E est de dimension infinie.

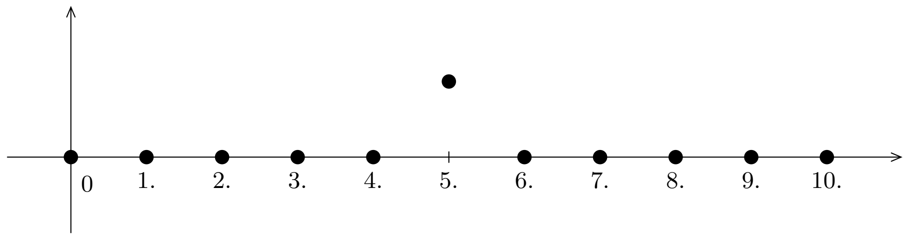
Démonstration. Si E est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie. Si n désigne le cardinal de cette famille génératrice, alors E n'admet pas de famille libre à $n+1$ éléments, ce qui est absurde. □

Remarque : Un espace vectoriel est donc de dimension infinie quand il admet des familles libres de cardinal arbitrairement grand. La réciproque est vraie : si E est de dimension infinie, alors, pour tout $n \geqslant 1$, E admet une famille libre de cardinal n. Montrons-le par récurrence : supposons E de dimension infinie. L'initialisation est triviale. Pour l'hérédité : soit $n \geqslant 1$ et supposons que E contienne une famille libre $x_1, \dots, x_n$ à n éléments. $E \neq \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ (car sinon, E est de dimension finie car admet une famille génératrice finie). Soit $x \in E \backslash \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. La famille à $n+1$ éléments $(x_1, \dots, x_n, x)$ est libre d'après les préliminaires, ce qui clôt la récurrence.

Exemples :

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension infinie car (cf. chapitre 28), les fonctions $x \longmapsto e^{\lambda x}$, lorsque $\lambda \in \mathbb{R}$, forment une famille libre infinie. Ainsi, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ admet une famille libre infinie donc est de dimension infinie.
- Ces fonctions appartenant également (entre autres) à $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ..., $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tous ces espaces contiennent une famille libre infinie donc sont de dimension infinie.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est également de dimension infinie. En effet, si $k \in \mathbb{N}$, on définit la suite $\left({u_n}^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général ${u_n}^{(k)} = 0$ si $n \neq k$ et 1 si $n = k$.

On a l'embarras du choix pour la famille libre infinie : cf. chapitre 28.



La suite $\left(u_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $u^{(k)}$ a un unique terme, celui d'indice k, qui vaut 1, et les autres qui sont nuls. Ci-contre la suite $\left(u_n{}^{(5)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement, $u^{(5)}$.

Les suites de la forme $\left(u_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment une famille libre (nous l'avons prouvé dans le chapitre 28) infinie, ce qui permet de conclure.

Théorème. Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Démonstration. Soient B_1 et B_2 deux bases de E. B_1 est une famille libre et B_2 est génératrice donc $\text{card}(B_1) \leqslant \text{card}(B_2)$. Par symétrie des rôles, $\text{card}(B_2) \leqslant \text{card}(B_1)$. D'où l'égalité. □

Définition. Si E est de dimension finie, le cardinal commun de toutes les bases de E est appelé dimension de E, et noté $\dim(E)$.

Remarques :

- Par convention (cf. chapitre 28), $\varnothing$ est une base de $\{0\}$: on peut donc considérer que $\{0\}$ a une base ne contenant aucun élément. On dit donc que $\{0\}$ est de dimension finie nulle. Finalement, $\dim(E)$ est donc un entier positif ou nul, et $\dim(E) = 0$ si et seulement si $E = \{0\}$.
- Intuitivement, la dimension d'un espace vectoriel est le nombre de degrés de liberté dont on dispose pour construire un élément de cet espace, ou le nombre d'informations nécessaires pour construire les éléments de cet espace (par exemple, pour décrire une suite, il faut l'image de tout entier n, il faut une infinité d'informations, ce qui est cohérent avec le fait que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ soit de dimension infinie). Attention, ceci n'est pas la définition, mais cela permet de deviner le résultat, avant de le prouver rigoureusement. Voir le paragraphe suivant pour une illustration de ce résultat.

Par exemple, si on prouve dans un exercice que $\dim(E) \leqslant 0$, alors on peut en déduire directement que $E = \{0\}$.

Exemples :

- Une droite vectorielle (c'est-à-dire un espace de la forme $\text{Vect}(a)$ avec a non nul) est de dimension 1.
- Un plan vectoriel (c'est-à-dire un espace de la forme $\text{Vect}(a, b)$ avec a et b non colinéaires) est de dimension 2.

Proposition.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n.
- Si n et p sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de dimension $n \times p$. En particulier, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension n^2.
- Si $n \in \mathbb{N}, \mathbb{K}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.

Attention, $\mathbb{K}_n[X]$ n'est pas de dimension n !

Démonstration. On a donné les bases canoniques de ces espaces en I.2, et elles contiennent respectivement $n, n \times p$ et $n + 1$ éléments.

Remarque : Cela se voit très bien si on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté. En effet :

- Un élément de $\mathbb{K}^n$ est un vecteur à n coordonnées.
- Une matrice de taille $n \times p$ est un tableau avec n lignes et p colonnes donc a $n \times p$ coefficients. En particulier, une matrice carrée de taille n a n^2 coefficients.

- Un polynôme de degré inférieur ou égal à n a $n+1$ coefficients : du coefficient constant jusqu'au coefficient de X^n.

Proposition.

- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle **homogène** d'ordre 1 est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
- L'ensemble des solutions d'une équation différentielle **homogène** d'ordre 2 à coefficients constants est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2.

On s'intéresse ici uniquement aux équations homogènes. Si l'équation n'est pas homogène, l'ensemble des solutions n'est pas un espace vectoriel (il ne contient pas la fonction nulle) : nous dirons dans le chapitre 36 que l'ensemble des solutions est un espace affine.

Remarque : Nous n'avons pas précisé le cadre pour ne pas alourdir l'énoncé, mais il est sous-entendu qu'on fait les mêmes hypothèses que dans le chapitre 11, à savoir :

- Pour les équations d'ordre 1 : on s'intéresse aux équations différentielles de la forme $y'+ay=0$, avec a une fonction continue de I dans $\mathbb{K}$, avec I un intervalle d'intérieur non vide, et à valeurs dans $\mathbb{K}$.
- Pour les équations d'ordre 2 : on s'intéresse aux équations différentielles de la forme $y''+ay'+by=0$, avec $(a,b)\in\mathbb{K}^2$.

Démonstration. Dans le cadre d'une équation différentielle du premier ordre : soit (H) : $y'+a(x)y=0$ une EDL homogène. L'ensemble des solutions de H est :

$$S_H=\left\{x\mapsto \lambda e^{-A(x)}\;\middle|\;\lambda\in\mathbb{K}\right\}$$

où A est une primitive de a. En d'autres termes, $S_H=\text{Vect}\left(x\mapsto e^{-A(x)}\right)$, S_H est engendré par un élément non nul donc est un espace vectoriel de dimension 1. Dans le cadre d'une équation différentielle du second ordre : soit (H) : $y''+ay'+by=0$. La forme de S_H dépend de si on est sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, et du discriminant. Par exemple, sur $\mathbb{R}$, si $\Delta<0$, alors

a admet bien des primitives car est continue.

$$S_H=\left\{x\mapsto e^{\alpha x}\times(\lambda\cos(\beta x)+\mu\sin(\beta x))\mid(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}\qquad\square$$

où $\alpha\pm i\beta$ sont les solutions conjuguées de l'équation caractéristiques. En d'autres termes, $S_H=\text{Vect}(f,g)$ où $f:x\mapsto e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ et $g:x\mapsto e^{\alpha x}\sin(\beta x)$. Ces deux fonctions sont libres : en effet, si λ et μ sont deux réels tels que $\lambda f+\mu g=0$, en évaluant en 0, on trouve que $\lambda=0$, et en évaluant en $\pi/2\beta$ (car $\beta\neq 0$ puisque $\Delta<0$), on trouve que $\mu=0$: S_H est donc bien un espace vectoriel de dimension 2. De même dans tous les autres cas.

Remarques :

- Le résultat précédent est intuitif si on pense en degrés de liberté : une solution de l'équation différentielle homogène est entièrement déterminée par λ (si on a une équation d'ordre 1) ou λ et μ (si on a une équation d'ordre 2).
- La dimension d'un espace vectoriel dépend de $\mathbb{K}$, le corps sur lequel on se place. Par exemple, 1 formant une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})=1$, mais $(1,i)$ formant une base de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C})=2$.
- Comme dit au début du chapitre, tout le cours (à part la partie sur les équations différentielles et sur les suites récurrentes) est valable avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque. On peut donc également parler de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, et $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de la même façon que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cependant, là, la dimension est plus difficile à donner : $\mathbb{R}$ est en fait de dimension infinie en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel (alors qu'il est de dimension 1 en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel), cf. exercice 54.

Par exemple, la cryptographie n'est rien d'autre que de l'algèbre linéaire sur des corps finis. On travaille souvent avec $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, qui est donc un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel de dimension n.

Donnons une dernière application de ce résultat, qu'on a évoquée dans le chapitre 29.

Proposition. Supposons que E soit de dimension finie supérieure ou égale à 2. Alors $\mathscr{L}(E)$ est non commutatif.

Il est sous-entendu : pour la loi $\circ$. Rappelons que $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, cf. chapitre 29.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $n \geqslant 2$. Soient u et v les deux uniques endomorphismes vérifiant :

Pour caractériser une AL, il suffit de se donner l'image d'une base.

$$u(e_1) = e_1, u(e_2) = -e_2, v(e_1) = e_2, v(e_2) = e_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i \geqslant 3, u(e_i) = v(e_i) = 0 \qquad \square$$

Alors $u \circ v(e_1) = -e_2$ et $v \circ u(e_1) = e_2$ et $e_2 \neq 0$ donc $e_2 \neq -e_2$: u et v ne commutent pas.

Remarque : Montrons plus généralement qu'une application linéaire qui commute avec toutes les autres est une homothétie. Soit donc $u \in \mathscr{L}(E)$ qui commute avec tout endomorphisme de E. Soit $x \in E$ non nul, qu'on peut donc compléter en base d'après le théorème de la base incomplète (puisque x est une famille libre à un élément car il est non nul) : notons cette base $B = (x, e_2, \dots, e_n)$. Soit v l'unique endomorphisme vérifiant $v(x) = x$ et $v(e_2) = \cdots = v(e_n) = 0$ (pour caractériser un endomorphisme, il suffit de se donner l'image d'une base). Par conséquent, $u(v(x)) = u(x)$ mais u et v commutent donc $u(v(x)) = v(u(x))$. Or, B est une base donc il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $u(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 \cdots + \lambda_n e_n$. Par linéarité de v,

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= \lambda_1 v(x) + \lambda_2 v(e_2) + \cdots + \lambda_n v(e_n) \\ &= \lambda_1 x \end{aligned}$$

par choix de v. En d'autres termes, $u(x) = \lambda_1 x$: x et $u(x)$ forment une famille liée pour tout x non nul et c'est évidemment aussi le cas si $x = 0$. D'après l'activité classique vue dans le chapitre 29, u est une homothétie. On en déduit encore une fois que $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutatif puisqu'il existe des applications linéaires qui ne sont pas des homothéties : il suffit de prendre une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ et une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2) = -e_2$ qui est linéaire et qui n'est pas une homothétie.

I.4.b Exemple des matrices symétriques et antisymétriques (HP mais très classique)

Soit $n \geqslant 2$. Donnons la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, respectivement l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques de taille n. Essayons de deviner cette dimension, à l'aide de l'interprétation de la dimension en tant que nombre de degrés de liberté. Un élément de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est entièrement déterminé par ses coefficients « au-dessus » (au sens large) de sa diagonale :

Ce résultat est toujours vrai si les matrices sont à valeurs dans un autre corps que $\mathbb{R}$ (par exemple sur $\mathbb{C}$) mais on ne se sert de matrices symétriques que sur $\mathbb{R}$. Vous verrez ça l'an prochain !

$$\begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ & * & * & & * \\ & & * & & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

Les coefficients « au-dessus » de la diagonale (au sens-large) sont représentés sous forme d'étoile : il y a $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ degrés de liberté. Les autres (sous la diagonale, que l'on n'a pas représentés) ne sont pas quelconques, ils découlent du choix des autres. On devine donc que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = n(n+1)/2$. Montrons-le rigoureusement. Pour cela, exhibons une base de cet espace : la dimension sera, par définition, le cardinal de cette base. Pour bien visualiser la situation, on commence par la dimension 3. Une matrice symétrique de taille 3 est de la forme

La démonstration rigoureuse qui suit est difficile et peut être sautée en première lecture. Cependant, pour se forger une intuition solide, il faut bien comprendre l'explication heuristique ci-contre.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Plus généralement, montrons que les matrices $E_{i,i}$ pour $i \in [\![1 ; n]\!]$ et les matrices $E_{i,j}+E_{j,i}$, pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, forment une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Soit $S = (S_{i,j})_{1\leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} S_{i,j}E_{i,j} \\
&\quad \text{(car la famille } (E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ est génératrice de } \mathscr{M}_n(\mathbb{R})) \\
&= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} S_{i,i}E_{i,i}}_{\text{termes de la diagonale}} + \underbrace{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{i,j}E_{i,j}}_{\text{termes au-dessus}} + \underbrace{\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} S_{i,j}E_{i,j}}_{\text{termes en dessous}} \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{j,i}E_{j,i} \\
&\quad \text{(car les indices sont muets dans la dernière somme)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{i,j}E_{i,j} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{i,j}E_{j,i} \\
&\quad \text{(car } S \text{ est symétrique donc } S_{j,i} = S_{i,j} \text{ pour tous } i \text{ et } j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} S_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} S_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i})
\end{aligned}$$

  En d'autres termes, les $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et les $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ forment une famille génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

- Montrons que c'est une famille libre. Soient $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(a_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ une famille de réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j}(E_{i,j}+E_{j,i}) = 0.$$

  On a une combinaison linéaire, nulle, des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, qui forment une famille libre (la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) donc tous les coefficients sont nuls : les matrices $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$ et les $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ forment une famille libre.

Si $i \in [\![1 ; n]\!]$, $E_{i,i}$ est la matrice suivante, dont tous les termes sont nuls sauf celui en position (i,i) qui vaut 1 :
$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & & & \end{array} &
\end{array}$$

Si $i < j$, $E_{i,j}+E_{j,i}$ est la matrice suivante, dont tous les termes sont nuls sauf ceux en positions (i,j) et (j,i) qui valent 1 :
$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

Ces matrices forment donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Elle est constituée de

$$n + \sum_{j=1}^{n}(j-1) = \frac{n(n+1)}{2}$$

matrices donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Les $E_{i,i}$ sont au nombre de n, et, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, il y a $j-1$ entiers i strictement inférieurs à j. Il y a donc $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(j-1)$ matrices de la forme $E_{i,j}+E_{j,i}$ avec $i<j$.

En se souvenant qu'une matrice antisymétrique a une diagonale nulle, on montre de même qu'une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est la famille $E_{i,j}-E_{j,i}$ pour $i<j$. Cette famille est constituée de $n(n-1)/2$ éléments donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = n(n-1)/2$. Encore une fois, c'est intuitif ! Une matrice antisymétrique est entièrement déterminée par ses coefficients « au-dessus » (au sens strict) de la diagonale, ceux « en-dessous » étant opposés : il y a $1+2+\cdots+(n-1) = n(n-1)/2$ degrés de liberté.

$$\begin{pmatrix}
0 & * & * & \cdots & * \\
 & 0 & * & & * \\
 & & 0 & & * \\
 & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & 0
\end{pmatrix}$$

Si $i < j$, $E_{i,j}-E_{j,i}$ est la matrice suivante, dont tous les termes sont nuls sauf ceux en positions (i,j) et (j,i) qui valent respectivement 1 et -1 :
$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & -1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} &
\end{array}$$

I.4.c Produits d'espaces vectoriels de dimension finie

Proposition. Si E et F sont de dimension finie, alors $E \times F$ est de dimension finie, et $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Rappelons que $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$.

Moyen mnémotechnique : 1 est une base de $\mathbb{R}$ et $(1,0)$ et $(0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_p)$ des bases respectives de E et F (et donc E est de dimension n et F de dimension p). Montrons que la famille $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0)$, $(0, f_1), \dots, (0, f_p)$ est une base de $E \times F$.

- Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{n+p}$ tels que

$$\lambda_1(e_1, 0) + \cdots + \lambda_n(e_n, 0) + \mu_1(0, f_1) + \cdots + \mu_p(0, f_p) = 0$$

  (le 0 de droite est le 0 de $E \times F$, i.e. le couple $(0_E, 0_F)$). Alors

$$(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n, \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p) = (0_E, 0_F).$$

  Il en découle que $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0_E$ et $\mu_1 f_1 + \cdots + \mu_p f_p = 0_F$. Comme $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre, les λ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, sont tous nuls. De même pour les μ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc on a bien une famille libre.
- Soit $(x, y) \in E \times F$. $(e_1, \dots, e_n)$ étant génératrice de E, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. De même, il existe $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $y = \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_p f_p$. Dès lors,

$$\begin{aligned} (x, y) &= (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n, \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_p f_p) \\ &= \alpha_1(e_1, 0) + \cdots + \alpha_n(e_n, 0) + \beta_1(0, f_1) + \cdots + \beta_p(0, f_p) \end{aligned}$$ □

  C'est donc également une famille génératrice.

Finalement, $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, f_1), \dots, (0, f_p)$ est une base de $E \times F$. Comme $E \times F$ admet une famille génératrice finie donc est de dimension finie, et sa dimension étant le cardinal commun de toutes ses bases, $\dim(E \times F) = n + p$ donc on a bien $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Remarque : Le résultat de cette proposition se généralise par récurrence au cas d'un nombre fini quelconque d'espaces vectoriels de dimension finie (la dimension du produit étant la somme des dimensions). En particulier, si E est de dimension finie, E^n aussi et $\dim(E^n) = n \times \dim(E)$.

I.4.d Familles libres et génératrices en dimension finie

Proposition. On suppose que E est de dimension n.

1. Soit L une famille libre. Alors L est finie et $\operatorname{card}(L) \leqslant n$. En particulier, toute famille à au moins $n+1$ éléments est liée.
2. Soit G une famille génératrice. Alors $\operatorname{card}(G) \geqslant n$.
3. Une famille libre ou génératrice à n éléments est une base de E.

En particulier, en dimension finie, le cardinal d'une famille libre est inférieur ou égal au cardinal d'une famille génératrice.

Démonstration. 1. Déjà fait en I.4.a.

2. Soit G une famille génératrice de E et soit B une base de E. Comme B est libre, on a $\operatorname{card}(B) \leqslant \operatorname{card}(G)$. Or $\dim(E) = n$ donc $\operatorname{card}(B) = n$.
3. Soit L une famille libre à n éléments. Si L n'est pas génératrice, il existe $x \in E \backslash \operatorname{Vect}(L)$. D'après les préliminaires, $L \cup \{x\}$ est une famille libre à $n+1$ éléments, ce qui est absurde.

   Soit à présent G une famille génératrice à n éléments. Si G n'est pas libre, il existe $x \in G$ qui est CL des autres éléments de G. Toujours d'après les préliminaires, $\operatorname{Vect}(G \backslash \{x\}) = \operatorname{Vect}(G) = E$ donc $G \backslash \{x\}$ est une famille génératrice de cardinal $n-1$: c'est absurde. □

Encore une fois, on assimile famille et partie.

Exemples :

- $(\pi, 13)$ et $(-1, 1789)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, ils sont non colinéaires donc forment une famille libre à deux éléments dans un espace de dimension 2, d'où le résultat.
- $(3, 2X+1, -X^2+5X-3, 2X^3+X^2+X)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. En effet, c'est une famille libre de cardinal 4 (car famille échelonnée en degré) dans un espace de dimension 4 (rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n+1$) donc c'est une base.

Remarque : Montrer qu'une famille est génératrice est en général plus difficile que de montrer qu'une famille est libre. Le résultat précédent permet de s'affranchir de cette étape quand on veut prouver qu'une famille est une base, à la condition qu'il y ait le bon nombre d'éléments : il suffit de montrer que la famille est libre, si le cardinal de la famille est égal à la dimension (qu'il faut donc connaître), la famille est une base.

Remarque : Le dernier exemple ci-dessus est classique : montrer qu'une famille de polynômes est libre car échelonnée en degré (même si on rappelle que la réciproque est fausse : une famille libre n'est pas forcément échelonnée en degré), puis que c'est une base car son cardinal est égal à la dimension de l'espace. Il y a en fait un résultat général (mais dangereux, voir plus bas) :

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Une famille échelonnée en degré de $n+1$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de polynômes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$. Alors $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Ce résultat est utile pour prouver qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui préserve le degré est bijectif : cf. par exemples les exercices 18 et 19 (entre autres).

DÉMONSTRATION.

- Une telle famille est libre (car échelonnée en degré) et a $n+1$ éléments dans un espace vectoriel de dimension $n+1$ donc est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- On sait déjà que cette famille est libre. Prouvons qu'elle est génératrice. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et soit $n \geqslant \deg(P)$, si bien que $P \in \mathbb{K}_n[X]$. D'après ce qui précède, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ donc $P \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n)$. En particulier, tout polynôme P est CL de la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui permet de conclure.

Remarque : ⚠ Attention à ne pas mal appliquer ce résultat et ne pas dire : « $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille échelonnée en degré donc est une base de $\mathbb{K}[X]$ » ce qui est évidemment faux ! Par exemple, la famille $(X^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degré mais n'est pas une base de $\mathbb{K}[X]$!

Donnons une dernière application de ces résultats.

Activité : On suppose que $\dim(E) = n$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Montrons que $u^n = 0$.

⚠ ULTRA-MÉGA CLASSIQUE !

Soit p l'indice de nilpotence de u, c'est-à-dire le plus petit entier k tel que $u^k = 0$. Par conséquent, $u^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$. Montrons que $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$. Composons cette égalité par u^{p-1} (linéaire) :

$$\lambda_0 u^{p-1}(x_0) + \lambda_1 u^p(x_0) + \cdots = 0$$

Tous les termes sauf le premier sont nuls (les puissances sont toutes supérieures ou égales à p), si bien que $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$. Or, $u^{p-1}(x_0) \neq 0$ donc $\lambda_0 = 0$. L'égalité initiale se réécrit donc :

$$\lambda_1 u(x_0) + \cdots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$$

En composant cette égalité par u^{p-2}, il vient : $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) + \lambda_2 u^p(x_0) + \cdots + = 0$. De même, les termes suivants étant nuls, il ne reste que $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, et donc $\lambda_1 = 0$ car

$u^{p-1}(x_0)=0$. L'égalité initiale devient donc : $\lambda_2 u^2(x_0)+\cdots+\lambda_{p-1}u^{p-1}(x_0)=0$. De même, en composant par u^{p-3} on obtient $\lambda_2=0$. De proche en proche, tous les λ_k sont nuls donc la famille est libre. Or, une famille libre a un cardinal inférieur à la dimension donc $p\leqslant n$: en d'autres termes, l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension de l'espace.

Remarque : On a raisonné ici comme quelqu'un n'ayant jamais vu ce type d'exercice et qui tâtonne un peu. Quand on est plus à l'aise, on peut raisonner par récurrence (finie) et montrer que pour tout $k\in[\![0\,;\,p-1]\!]$, $\lambda_k=0$. On peut également effectuer un raisonnement par l'absurde. Supposons que les λ_k soient non tous nuls. Posons $i=\min\{k\mid\lambda_k\neq 0\}$ ie le premier indice pour lequel $\lambda_k\neq 0$. Par conséquent, l'égalité initiale devient :

$$\lambda_k u^k(x_0)+\lambda_{k+1}u^{k+1}(x_0)+\cdots+\lambda_{p-1}u^{p-1}(x_0)=0$$

En composant par u^{p-1-k}, on obtient $\lambda_k u^{p-1}(x_0)+\lambda_{k+1}u^p(x_0)+\cdots=0$ et on conclut comme précédemment.

I.4.e Isomorphismes en dimension finie

Rappels (cf. chapitre 29) :

- Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et soit B une base de E.
  1. u est injective si et seulement si $u(B)$ est une famille libre.
  2. u est surjective si et seulement si $u(B)$ est une famille génératrice.
  3. u est bijective si et seulement si $u(B)$ est une base.
- Soient $(e_i)_{i\in I}$ une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de F (pas forcément une base). Alors il existe une unique application linéaire $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que $u(e_i)=f_i$ pour tout $i\in I$.

Si u est bijective, on dit que u est un isomorphisme

Théorème. On suppose que E et F sont de dimension finie.

1. $\exists u\in\mathscr{L}(E,F)$ surjective $\iff\dim(F)\leqslant\dim(E)$.
2. $\exists u\in\mathscr{L}(E,F)$ injective $\iff\dim(F)\geqslant\dim(E)$.
3. $\exists u\in\mathscr{L}(E,F)$ bijective $\iff\dim(F)=\dim(E)$. En d'autres termes, deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.

Attention, le théorème ne dit PAS que si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si $\dim(E)\leqslant\dim(F)$ alors u est injective (prendre l'application nulle). Par contre, si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si $\dim(E)>\dim(F)$, alors on peut affirmer que u n'est pas injective. On pourra même être plus précis et donner la dimension du noyau : cf. partie III.

Démonstration. 1. Supposons qu'il existe $u\in\mathscr{L}(E,F)$ surjective. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Alors $(u(e_1),\dots,u(e_n))$ est une famille génératrice de F donc (le cardinal d'une famille génératrice est supérieur ou égal à la dimension) :

$$\dim(F)\leqslant\operatorname{card}(u(e_1),\dots,u(e_n))=n=\dim(E).$$

Réciproquement, supposons que $\dim(E)\geqslant\dim(F)$. On se donne $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $(f_1,\dots,f_p)$ (avec $p\leqslant n$) une base de F. Soit u l'unique application linéaire de E dans F vérifiant $u(e_1)=f_1,\dots,u(e_p)=f_p$, $u(e_{p+1})=0,\dots,u(e_n)=0$. Comme u envoie une base sur une famille génératrice, elle est surjective.

2. La démonstration est analogue est laissée en exercice.
3. Découle de 1 et 2. $\square$

Dans la démonstration du 1., on a montré également le résultat plus général suivant : si E est de dimension finie et s'il existe une surjection de E dans F alors F est de dimension finie et $\dim(F)\leqslant\dim(E)$. En particulier, si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si E est de dimension finie, alors $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie, car u est une surjection de u dans $\operatorname{Im}(u)$.

Remarque : Grâce à ce théorème, on peut parfois faire un abus de langage et « identifier » deux espaces vectoriels de même dimension finie, puisqu'ils sont isomorphes. Par exemple :

- on peut identifier (et d'ailleurs on ne s'est pas privé de le faire !) un élément $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ à l'élément

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),$$

- on peut identifier $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}$, ce qui permet de dire (par exemple) que si X et Y appartiennent à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors $X^\top Y \in \mathbb{R}$ (alors qu'en fait c'est un élément de $\mathscr{M}_1(\mathbb{R})$). Nous en reparlerons dans le chapitre 34.

Remarque : Ce théorème fournit également un moyen pratique de donner la dimension d'un espace vectoriel qu'on a « devinée » grâce aux degrés de liberté de ses éléments : il suffit d'exhiber un isomorphisme entre cet espace et un espace vectoriel dont on connaît la dimension (typiquement : $\mathbb{K}^n$) : voir paragraphe suivant.

Corollaire. Un espace vectoriel E est de dimension n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

En particulier, si $n \neq m$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ ne sont pas isomorphes.

I.4.f Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donnons-nous $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}^*$. Notons $E_{a,b}$ l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, i.e. l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

Nous les avons introduites dans le chapitre 12 et énoncé le théorème principal les concernant mais sans le démontrer. C'est le moment ! Nous renvoyons également au chapitre 12 pour le cas $b = 0$, et pour le cas où a et b sont réels.

Théorème. $E_{a,b}$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $E_{a,b}$ est un espace vectoriel.

- La suite nulle est un élément de $E_{a,b}$ donc $E_{a,b}$ est non vide.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $E_{a,b}$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ et $v_{n+2} = av_{n+2} + bv_n$, si bien que

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = a(\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n)$$

c'est-à-dire que $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$: $E_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.

$E_{a,b}$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier, c'est un espace vectoriel. Montrons à présent qu'il est de dimension 2. Exhibons pour cela un isomorphisme entre $\mathbb{R}^2$ et $E_{a,b}$. Soit

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_{a,b} & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array} \right. .$$

Il est intuitif que $\dim E_{a,b} = 2$ si l'on considère la dimension comme le nombre de degrés de liberté : en effet, un élément de $E_{a,b}$ est entièrement déterminé par u_0 et u_1 ! Maintenant qu'on a deviné la dimension, on le prouve rigoureusement en exhibant un isomorphisme avec $\mathbb{R}^2$, qui est de dimension 2.

- φ est linéaire : $\rightsquigarrow$ Exercice.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Ker}\varphi$. Alors $u_0 = u_1 = 0$. Dès lors, $u_2 = au_1 + bu_0 = 0$. Par une récurrence (double) immédiate, $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, c'est-à-dire que φ est injective.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = x$, $u_1 = y$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ et $\varphi(\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ ) = (x, y)$. Ainsi φ est surjective et donc c'est un isomorphisme.

Il en découle que $\dim(E_{a,b}) = \dim(\mathbb{C}^2) = 2$ car deux espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension. □

On cherche à présent une base de $E_{a,b}$. On va essayer de trouver une base de suites « simples ». On cherche donc les suites géométriques dans $E_{a,b}$.

Les suites les plus simples sont les suites constantes ou arithmétiques, mais (sauf cas particulier) $E_{a,b}$ ne contient aucune suite constante ou arithmétique non nulle. On cherche donc des suites un peu moins simples : des suites géométriques.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r \neq 0$ de premier terme $u_0 \neq 0$. Alors :

$$(u_n) \in E_{a,b} \qquad \iff \qquad r^2 = ar + b.$$

Démonstration. On a $(u_n) \in E_{a,b}$ si et seulement, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r^{n+2}u_0 = ar^{n+1}u_0 + br^n u_0$ si et seulement si $r^2 = ar + b$ (on a simplifié par $r^n u_0 \neq 0$). □

L'équation $r^2 = ar + b$ est appelée équation caractéristique des suites de $E_{a,b}$. Son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

Théorème.

1. Si l'équation $r^2 = ar + b$ admet deux racines distinctes r_1 et r_2 (c'est-à-dire si $\Delta \neq 0$) alors les deux suites $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:
$$\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda_1 \times {r_1}^n + \lambda_2 \times {r_2}^n.$$
2. Si l'équation $r^2 = ar + b$ admet une racine double r_0 (c'est-à-dire si $\Delta = 0$) alors les deux suites $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de $E_{a,b}$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$:
$$\exists!(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = (\lambda_1 + n \times \lambda_2) \times {r_0}^n.$$

On trouve λ_1 et λ_2 grâce aux valeurs de u_0 et u_1 : voir les exemples dans le chapitre 12.

DÉMONSTRATION. 1. D'après ce qui précède, les deux suites $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{a,b}$. Puisque r_1 et r_2 sont distinctes non nulles, les deux suites $({r_1}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $({r_2}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas proportionnelles donc forment une famille libre. Elles forment une famille libre à 2 éléments dans un espace vectoriel de dimension 2 donc forment une base.

0 n'est pas solution de $r^2 = ar + b$ puisque $b \neq 0$, et donc r_1 et r_2 sont non nulles.

2. La suite $({r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Montrons que $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{a,b}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}(n+2){r_0}^{n+2} &= (n+2){r_0}^n \times {r_0}^2 \\ &= (n+1+1){r_0}^n \times (ar_0 + b) \\ &= (n+1){r_0}^n \times ar_0 + {r_0}^n \times ar_0 + n{r_0}^n b + 2{r_0}^n b \\ &= a(n+1){r_0}^n r_0 + bn{r_0}^n + 2{r_0}^n \times (ar_0 + 2b).\end{aligned}$$
Or, r_0 est une solution double de $r^2 - ar - b = 0$ donc, d'une part, $\Delta = a^2 + 4b = 0$ et d'autre part, $r_0 = a/2$ donc $a = 2r_0$. Ainsi $\Delta = a \times (2r_0) + 4b = 2(ar_0 + 2b)$ si bien que $ar_0 + 2b = 0$ (rappelons que $\Delta = 0$). Finalement, on obtient $(n+2){r_0}^{n+2} = a(n+1){r_0}^{n+1} + bn{r_0}^n$ c'est-à-dire que $(n \times {r_0}^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{a,b}$ et on conclut de la même manière. □

II Dimension d'un sous-espace vectoriel

II.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E. Si E est de dimension finie alors E_1 est de dimension finie et $\dim(E_1) \leqslant \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $E_1 = E$.

En particulier, pour montrer que deux espaces vectoriels de dimension finie sont égaux, il suffit de montrer que l'un d'eux est inclus dans l'autre et qu'ils ont la même dimension. cf. III.2 pour un exemple.

Cette proposition est totalement intuitive. La dimension est une manière de quantifier la notion de « taille » d'un espace vectoriel. Si un espace vectoriel est inclus dans un autre, il a une « taille » plus petite, et ils ont la même « taille » si et seulement s'ils sont égaux (encore une fois, si l'un est inclus dans l'autre).

DÉMONSTRATION. Si $E_1 = \{0\}$ alors E_1 est de dimension finie et $\dim(E_1) \leqslant \dim(E)$. Supposons à présent que $E_1 \neq \{0\}$. Considérons $C = \{\mathrm{card}(L) \,|\, L \text{ famille libre de } E_1\}$.

- $E_1 \neq \{0\}$ donc il existe $x \in E_1$ non nul. La famille (x) est libre à un élément de E_1 donc $1 \in C$: C est non vide.
- Si L est une famille libre de E_1 alors L est une famille libre de E donc $\mathrm{card}(L) \leqslant \dim(E)$: C est majorée par $\dim(E)$.

Ainsi C est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un plus grand élément n_0. Soit B une famille libre de E_1 de cardinal n_0. De même que dans le lemme précédant le théorème de la base incomplète (cf. I.3), B est une base de E_1 donc E_1 admet une base donc une famille génératrice finie. Le sous espace vectoriel E_1 est donc de dimension finie et $\dim(E_1) = n_0 \leqslant \dim(E)$.

Examinons à présent le cas d'égalité. Si $\dim(E) = \dim(E_1)$, alors B est une famille libre de E de cardinal $n_0 = \dim(E_1) = \dim(E)$ donc est une base de E. En particulier, $\mathrm{Vect}(B) = E$. Or, B est une base de E_1 donc $\mathrm{Vect}(B) = E_1$ donc $E = E_1$. La réciproque est évidente. □

Remarque : On peut à présent démontrer le résultat admis au chapitre 28, à savoir :

- Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{K}^2$.
- Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{K}^3$.

Soit en effet E_1 un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ (le cas de $\mathbb{K}^3$ est analogue). Alors E_1 est de dimension finie inférieure ou égale à 2.

- Si $\dim(E_1) = \{0\}$, alors $E_1 = \{0\}$.
- Si $\dim(E_1) = 1$ alors E_1 admet une base à un élément noté x (non nul) i.e. $E_1 = \text{Vect}(x)$: E_1 est une droite vectorielle.
- Si $\dim(E_1) = 2$, alors $E_1 = \mathbb{K}^2$.

II.2 Existence et dimension d'un supplémentaire en dimension finie

Rappel (théorème de concaténation des bases, cf. chapitre 28) :

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E, de bases respectives B_1 et B_2. E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si la concaténation de B_1 et de B_2 est une base de $E_1 + E_2$. En particulier, E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si la concaténation de B_1 et B_2 est une base de E.

Théorème. Soient E_1 et E_2 deux sev de E, en somme directe. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors $E_1 \oplus E_2$ est de dimension finie et $\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Ce résultat est valable même si E est de dimension infinie. Seul compte le fait que E_1 et E_2 le sont. Ce sera la même chose avec la formule de Graßmann (cf II.3).

Démonstration. Soient B_1 et B_2 des bases respectives de E_1 et E_2 (et celles-ci sont finies car E_1 et E_2 sont de dimension finie). Notons B la concaténation de B_1 et B_2. Alors B est une base de $E_1 \oplus E_2$ et $\text{card}(B) = \text{card}(B_1) + \text{card}(B_2)$. En particulier, B est finie donc $E_1 \oplus E_2$ est de dimension finie, et $\text{card}(B) = \text{card}(B_1) + \text{card}(B_2)$. Par conséquent,

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \text{card}(B) = \text{card}(B_1) + \text{card}(B_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2). \qquad \square$$

Remarque : Une autre démonstration possible consiste à définir la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & E_1 \oplus E_2 \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

On montre aisément que φ est linéaire. De plus, par définition d'une somme directe, φ est bijective : tout élément de la somme s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. Ainsi φ est donc un isomorphisme. Deux espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension donc

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Théorème. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E. Si E est de dimension finie alors E_1 admet un supplémentaire.

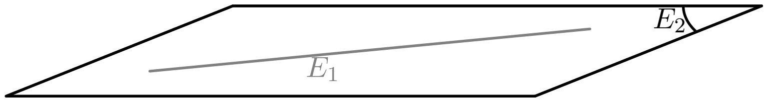
Là, par contre, il est indispensable que ce soit l'espace **global** qui soit de dimension finie.

Démonstration. Si $E_1 = \{0\}$ ou $E_1 = E$, c'est immédiat (un supplémentaire de E_1 est alors, respectivement, E ou $\{0\}$). On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas. Comme E est de dimension finie, E_1 l'est également. Soit $p = \dim(E_1)$ et soit $n = \dim(E)$, et on a donc $1 \leqslant p \leqslant n-1$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1. C'est en particulier une famille libre de E. D'après le théorème de la base incomplète, on peut la compléter en base de E : il existe $(e_{p+1}, \dots, e_n) \in E^{n-p}$ tels que $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Soit $E_2 = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E_2 (génératrice par définition, et libre car sous-famille d'une famille libre). Ainsi E_2 est un supplémentaire de E_1 d'après le théorème de concaténation des bases. $\square$

Corollaire. On suppose que E est de dimension finie. Soient E_1 un sous-espace vectoriel de E et E_2 un supplémentaire de E_1. Alors :

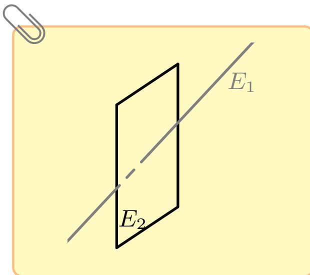
$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E).$$

Cependant, la réciproque est fausse : si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E et si $\dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$, alors E_1 et E_2 ne sont pas forcément supplémentaires :



Il faut une condition supplémentaire, cf. paragraphe suivant.

Remarque : En particulier, tous les supplémentaires de E_1 ont la même dimension, $\dim(E) - \dim(E_1)$, et donc sont isomorphes. Par exemple, sur le dessin ci-contre, on se place dans $\mathbb{R}^3$, E_2 est un supplémentaire de E_1 et on a $\dim(E_1) = 1$ et $\dim(E_2) = 2$.

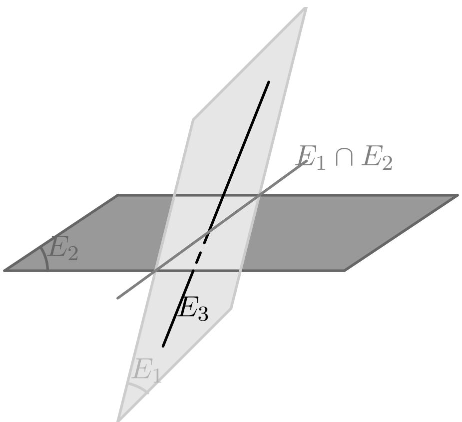


II.3 Dimension d'une somme quelconque

Théorème (formule de Graßmann). Soient E_1 et E_2 deux sev de E. Si E_1 et E_2 sont de dimension finie alors $E_1 + E_2$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2).$$

Démonstration. Soit E_3 un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_1 c'est-à-dire tel que $E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_3$. Démarrons par un dessin pour nous donner une idée.



D'après le paragraphe précédent, $\dim(E_1) = \dim(E_3) + \dim(E_1 \cap E_2)$ donc $\dim(E_3) = \dim(E_1) - \dim(E_1 \cap E_2)$. Montrons que $E_1 + E_2 = E_3 \oplus E_2$.

$E_1 + E_2 = E_3 + E_2$ ne veut pas dire que $E_1 = E_3$!

- Montrons tout d'abord que $E_1 + E_2 = E_3 + E_2$. Soit $x \in E_1 + E_2$. Il existe donc $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Or, $x_1 \in E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_3$ donc il existe $y \in E_1 \cap E_2$ et $x_3 \in E_3$ tels que $x_1 = y + x_3$, d'où $x = y + x_3 + x_2$ c'est-à-dire que

$$x = \underbrace{x_3}_{\in E_3} + \underbrace{(y + x_2)}_{\in E_2} \in E_3 + E_2.$$

  Finalement, $E_1 + E_2 \subset E_3 + E_3$, et puisque $E_3 \subset E_1$, on a l'inclusion $E_3 + E_2 \subset E_1 + E_2$. D'où l'égalité.

- Montrons à présent que E_3 et E_2 sont en somme directe. Puisqu'il n'y a que deux sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer que leur intersection est nulle. Soit donc $x \in E_3 \cap E_2$. Comme $x \in E_3$, on a $x \in E_1$ et $x \in E_2$ donc $x \in E_1 \cap E_2$. Finalement, $x \in E_3 \cap (E_1 \cap E_2) = \{0\}$ car E_3 et $E_1 \cap E_2$ sont en somme directe. Par conséquent $x = 0$. Ainsi $E_3 \cap E_2 = \{0\}$: E_3 et E_2 sont bien en somme directe.

Rappelons que **deux** espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si leur intersection est nulle.

En conclusion, $E_1 + E_2 = E_3 \oplus E_2$ donc, d'après le paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} \dim(E_1+E_2) &= \dim(E_3)+\dim(E_2) \\ &= \dim(E_1) - \dim(E_1 \cap E_2) + \dim(E_2). \end{aligned}$$

□

Remarque : On a déjà vu que si on avait $\dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$, alors on n'a pas forcément $E = E_1 \oplus E_2$. Il faut une condition supplémentaire !

Théorème. On suppose que E est de dimension finie. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. $E = E_1 \oplus E_2$ (i.e. E_1 et E_2 sont supplémentaires).
2. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$.
3. $E = E_1 + E_2$ et $\dim(E_1)+\dim(E_2) = \dim(E)$.

En d'autres termes, si on a égalité des dimensions, il suffit d'une des deux conditions ($E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ou $E_1 + E_2 = E$) pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, ce qui simplifie la tâche par rapport au chapitre 28 : comparer l'exercice 13 de ce chapitre et l'exercice 42 du chapitre 28.

Démonstration.
- $1 \Rightarrow 2$: déjà fait dans le paragraphe précédent.
- $2 \Rightarrow 3$: Supposons que le point 2 est vrai. D'après la formule de Graßmann ,

$$\dim(E_1+E_2) = \underbrace{\dim(E_1)+\dim(E_2)}_{=\dim(E)} - \underbrace{\dim(E_1\cap E_2)}_{=0} = \dim(E)$$

  donc $E_1+E_2 = E$.
- $3 \Rightarrow 1$: supposons que le point 3 est vrai. D'après la formule de Graßmann,

$$\dim(E_1\cap E_2) = \underbrace{\dim(E_1)+\dim(E_2)}_{=\dim(E)} - \underbrace{\dim(E_1+E_2)}_{=\dim(E)} = 0.$$

□

  Dès lors, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$: E_1 et E_2 sont supplémentaires.

Type de raisonnement classique : pour prouver $1 \iff 2 \iff 3$, il suffit de prouver successivement $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3$ puis $3 \Rightarrow 1$.

III Rang d'une application linéaire

III.1 Définition et théorème du rang

Remarque : Dans le paragraphe I.4.c, on a donné des CNS pour qu'une application linéaire vérifiant certaines propriétés (injectivité, etc.) existe. On poursuit à présent le but inverse : on se donne une application linéaire et on cherche des informations sur elle.

Définition. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle rang de u la dimension de $\mathrm{Im}(u)$. Lorsque celle-ci est finie, on dit que u est de rang fini et on la note $\mathrm{rg}(u)$.

Lorsque $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension infinie, on dit parfois que u est de rang infini. Cependant, même si les applications linéaires dont l'image est de dimension infinie sont légion, on utilise rarement la terminologie de « rang » dans ce cas, on préfère la garder pour le cas où $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie.

Remarque : On a déjà vu (cf. I.4.c) que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension finie lorsque E est de dimension finie par exemple. Ainsi, lorsqu'on aura une application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie, elle sera automatiquement de rang fini (même si F n'est pas de dimension finie) et on pourra écrire $\mathrm{rg}(u)$ sans se poser de question.

Théorème (théorème du rang). Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) \\ &= \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rg}(u) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$. Montrons que S est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$. Soit $\widetilde{u}$ la restriction de u à S (i.e. $u_{|S}$), c'est-à-dire que

Ker(u) admet un supplémentaire car E est de dimension finie.

$$\widetilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. .$$

Tout d'abord, $\widetilde{u}$ est à valeurs dans $\mathrm{Im}(u)$. On peut donc réécrire

$$\widetilde{u} : \left\{ \begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Montrons que $\widetilde{u}$ est un isomorphisme.

- $\widetilde{u}$ est linéaire car u l'est.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(\widetilde{u})$. D'une part, $\widetilde{u}(x) = u(x) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. D'autre part, $x \in S$ car x appartient au domaine de définition de $\widetilde{u}$. Par conséquent, $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap S = \{0\}$ car $\mathrm{Ker}(u)$ et S sont supplémentaires. Finalement, $\mathrm{Ker}\,\widetilde{u} = \{0\}$: $\widetilde{u}$ est injective.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Le problème est que x n'appartient pas forcément à S donc on ne peut pas écrire que $y = \widetilde{u}(x)$. Cependant, on sait que $E = S \oplus \mathrm{Ker}(u)$: il existe $x_1 \in S$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}(u)$ tels que $x = x_1 + x_2$ si bien que

$$\begin{array}{ccccclr} y & = & u(x) & = & u(x_1+x_2) & = & u(x_1)+u(x_2) & \text{(car } u \text{ est linéaire)} \\ & & & & & = & u(x_1) & \text{(car } x_2 \in \mathrm{Ker}(u)\text{)} \\ & & & & & = & \widetilde{u}(x_1). & \text{(car } x_1 \in S\text{)} \end{array}$$

Ainsi $\widetilde{u}$ est surjective donc bijective : c'est bien un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}(u)$. Par conséquent, $\dim(S) = \dim \mathrm{Im}(u)$, et S et $\ker(u)$ sont supplémentaires donc :

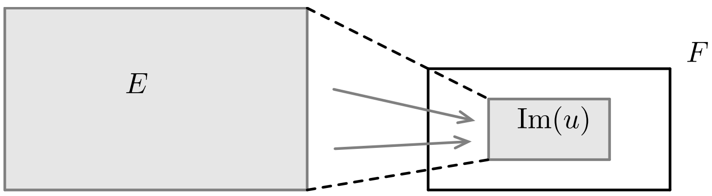
$$\dim(E) = \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim(S) = \dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u). \qquad \square$$

Pour appliquer le théorème du rang, E (l'espace de départ) doit être de dimension finie, mais F (l'espace d'arrivée) peut être de dimension infinie.

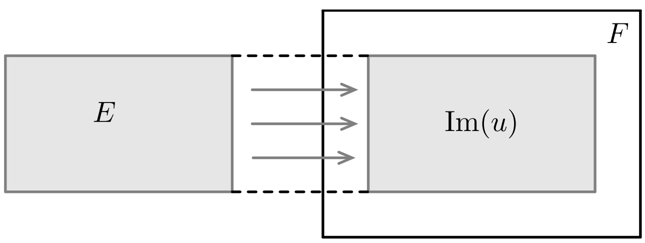
Remarques :

- D'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim \mathrm{Ker}(u)$. De manière imagée : « la taille de l'image est égale à la taille de l'ensemble de départ, moins la taille de ce qu'on perd en l'envoyant sur 0 ».
- En particulier, une application linéaire ne peut que « contracter » son ensemble de définition, l'image est « plus petite » que l'ensemble de départ (voir une application de ce principe dans exercice 27). Attention, les dessins qui suivent sont peu rigoureux !

Et donc, si on connaît la dimension du noyau, on connaît la dimension de l'image, et inversement.



Dans le meilleur des cas (quand $\dim \mathrm{Ker}(u) = 0$, i.e. quand u est injective), l'image est « de même taille que l'espace de départ ».



- Comme on peut le voir sur les dessins ci-dessus, quand on s'intéresse au rang, on peut se représenter une application linéaire comme un « tuyau » dont le diamètre au départ est la dimension de l'espace de départ, et le diamètre à l'arrivée la dimension de l'image, c'est-à-dire le rang. Le diamètre d'un tuyau ne peut que diminuer et, dans le meilleur des cas, quand u est injective, le tuyau garde un diamètre constant : l'image est « de même taille que l'espace de départ ».

C'est ce qu'on appellera parfois dans la suite : le point plomberie. Attention, ce n'est valable qu'en dimension finie ! En dimension infinie, le débit peut augmenter ! cf. exercice 27.

- On peut voir aussi le rang comme le débit d'eau qui passe par ce tuyau : on peut diminuer le diamètre et donc le débit à l'arrivée mais, même on ne peut jamais augmenter le débit : si on essaye de tricher avec un tuyau plus grand à l'arrivée, le tuyau ne « sera pas rempli », le débit ne peut pas être plus grand à l'arrivée qu'au départ. Encore une fois : le rang ne peut que diminuer !
- Attention, le théorème du rang ne dit **pas** que $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$, ni même que $E = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$. Tout d'abord, $\mathrm{Im}(u)$ n'a aucune raison d'être inclus dans E (rappelons que $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F) mais, même si c'est le cas (si, par exemple, u est un endomorphisme de E), on n'a pas forcément $\mathrm{Ker}(u)+\mathrm{Im}(u) = E$.

  Exemple : Soit
  $$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (0,x) \end{array} \right. .$$
  Alors u est linéaire et on montre de même que dans le chapitre 29 que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((0,1))$. On a bien
  $$\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = 1 + 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$
  mais on n'a pas $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{Im}(u)$.

Même si S, le supplémentaire de la démonstration du théorème du rang, est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$, cela ne signifie pas que $\mathrm{Im}(u)$ soit un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$!

III.2 Un exemple

Soit
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P(X) - P(X-1). \end{array} \right.$$
On montre aisément que φ est linéaire. Donnons son image et son noyau.

La dernière équivalence a été vue dans le chapitre 19.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors
  $$\begin{aligned} P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \iff \quad P(X) = P(X-1) \quad & \iff \quad P \text{ est 1-périodique} \\ & \iff \quad P \text{ est constant.} \end{aligned}$$
  En d'autres termes, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}_0[X]$ donc est de dimension 1.
- Trouvons l'image de φ. On note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
  $$\begin{aligned} P(X-1) = \sum_{k=0}^{n} a_k (X-1)^k &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} X^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \right) X^j. \end{aligned}$$
  Si $j = n$, le coefficient devant X^n est égal à a_n. Il existe donc $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(X-1) = a_n X^n + Q$, d'où :
  $$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X].$$
  En d'autres termes, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Or, d'après le théorème du rang (on peut l'appliquer ici même si $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, car seul compte le fait que l'espace de départ est de dimension finie),
  $$\dim \mathrm{Im}(\varphi) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = n + 1 - 1 = n.$$
  En conclusion, $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et ces deux espaces sont de même dimension finie donc sont égaux : $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

III.3 Composition d'applications linéaires

Dans le lemme suivant, $\tilde{E}$ et $\tilde{F}$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Lemme. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $g \in \mathscr{L}(\tilde{E},E)$ et $h \in \mathscr{L}(F,\tilde{F})$. On suppose que g et h sont bijectives. Alors :

- $\ker(h \circ u) = \ker(u)$.
- $\operatorname{Im}(u \circ g) = \operatorname{Im}(u)$.

Démonstration. Soit $x \in \ker(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc $h(u(x)) = h(0) = 0$ car h est linéaire. En d'autres termes, $x \in \ker(h \circ u)$ donc $\ker(u) \subset \ker(h \circ u)$.

Réciproquement, soit $x \in \ker(h \circ u)$. Alors $h(u(x)) = 0$. En d'autres termes, $u(x) \in \ker(h) = \{0\}$ puisque h est injective. On en déduit que $u(x) = 0$ donc $x \in \ker(u)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Soit $y \in \operatorname{Im}(u \circ g)$. Alors il existe $\tilde{x} \in \tilde{E}$ tel que $y = u(g(x))$ et en particulier, il existe $x \in E$ $(g(\tilde{x}))$ tel que $y = u(x)$ donc $y \in \operatorname{Im}(u)$. On en déduit que $\operatorname{Im}(u \circ g) \subset \operatorname{Im}(u)$.

Réciproquement, soit $y \in \operatorname{Im}(u)$: il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. g étant surjective, il existe $\tilde{x} \in \tilde{E}$ tel que $x = g(\tilde{x})$ donc $y = u(g(\tilde{x})) \in \operatorname{Im}(u \circ g)$ ce qui permet de conclure.

Remarques :

- Nous n'avons pas supposé ces espaces de dimension finie : ces résultats sont donc aussi valables en dimension infinie.
- Ils sont même valable si g est simplement supposée surjective et h injective.

Corollaire. Supposons que E soit de dimension finie. Avec les mêmes hypothèses, $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u \circ g) = \operatorname{rg}(h \circ u)$. En d'autres termes, on ne change pas le rang en composant par un isomorphisme.

Point plomberie : cela se voit bien avec l'interprétation d'une AL en tant que « tuyau » : si, à gauche ou à droite, vous ajoutez un tuyau qui « ne change pas le débit », alors le débit total (quand on met bout à bout les deux tuyaux) est le débit du tuyau u.

Démonstration. Pour $u \circ g$, c'est immédiat : u et $u \circ g$ ont même image donc leurs images ont la même dimension donc u et $u \circ g$ ont même rang.

Pour $h \circ u$: puisque $h \circ u$ et u ont même noyau, leurs noyaux ont la même dimension donc, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(u) &= \dim(E) - \dim\ker(u) \\ &= \dim(E) - \dim\ker(h \circ u) \\ &= \operatorname{rg}(h \circ u) \end{aligned}$$

□

Cependant, en pratique, on compose très souvent par des applications linéaires non bijectives : le résultat précédent ne s'applique donc plus. Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, un moyen simple et très souvent utile de donner des informations sur $v \circ u$ est d'appliquer le théorème du rang à $v_{|\operatorname{Im}(u)}$, dont on rappelle qu'elle est définie par :

$$v_{|\operatorname{Im}(u)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Im}(u) & \to & G \\ x & \mapsto & v(x) \end{array} \right.$$

Commençons par un lemme.

Lemme. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $\ker\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) = \ker(v) \cap \operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) = \operatorname{Im}(v \circ u)$.

Précisons que ce résultat est vrai également en dimension infinie.

Remarque : Ce résultat est intuitif : $v_{|\operatorname{Im}(u)}$ n'est rien d'autre que l'application v appliquée à un élément qui est dans l'image de u. Par conséquent, pour annuler $v_{|\operatorname{Im}(u)}$, il faut être

à la fois une image de u et annuler v, donc être dans $\ker(v) \cap \operatorname{Im}(u)$, et pour être dans l'image de $v_{|\operatorname{Im}(u)}$, il faut être l'image, par v, d'un élément qui est déjà une image par u, donc être une image par $v \circ u$.
Démonstration. Soit $y \in \ker\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right)$. Alors $v_{|\operatorname{Im}(u)}(y) = v(y) = 0$ donc $y \in \ker(v)$, et y est par définition dans le domaine de définition de $v_{|\operatorname{Im}(u)}$ donc $y \in \operatorname{Im}(u)$, si bien que $y \in \ker(v) \cap \operatorname{Im}(u)$: d'où l'inclusion $\ker\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) \subset \ker(v) \cap \operatorname{Im}(u)$. La réciproque et le résultat concernant l'image sont laissés en exercices.

Proposition. Supposons que E et F soient de dimension finie. Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$.

Démonstration. Il suffit de prouver que $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(v)$ et $\operatorname{rg}(v \circ u) \leqslant \operatorname{rg}(u)$. La première inégalité découle du fait que $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$. Pour la deuxième, appliquons le théorème du rang à $v_{|\operatorname{Im}(u)}$:

$$\dim \operatorname{Im}(u) = \dim \ker\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) + \dim \operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) \geqslant \dim \operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) \qquad \square$$

Or, $\operatorname{Im}\left(v_{|\operatorname{Im}(u)}\right) = \operatorname{Im}(v \circ u)$ si bien que $\dim \operatorname{Im}(u) \geqslant \dim \operatorname{Im}(v \circ u)$ ce qui est le résultat voulu.

On rappelle que, dans l'énoncé du théorème du rang, le membre de gauche est égal à **la dimension de l'espace de départ** ! Dès lors, à gauche, on ne met pas $\dim(E)$ mais $\dim(\operatorname{Im}(u))$.

Remarque : Ainsi, quand on compose, le rang ne peut que diminuer : c'est cohérent avec la remarque vue au paragraphe III.1. C'est aussi intuitif avec l'interprétation en tant que tuyau : le débit de deux tuyaux mis bout à bout est inférieur ou égal au plus petit des deux débits, même si on met à droite un plus gros tuyau : le débit initial ne peut pas augmenter, même si on met ensuite un plus gros tuyau (et le débit final peut même être nul, par exemple si on ne met pas les trous en face l'un de l'autre, c'est-à-dire si l'image de la première AL est incluse dans le noyau de la seconde).
Donnons un dernier exemple d'application de cette méthode.

C'est le point plomberie.

Exemple : On suppose que E est de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\dim \ker(u) \leqslant \dim \ker\left(u^2\right) \leqslant 2 \dim \ker(u)$$

L'inégalité de gauche est immédiate : soit $x \in \ker(u)$. $u(x) = 0$ donc

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u(u(x)) \\ &= u(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $x \in \ker\left(u^2\right)$. En d'autres termes, $\ker(u) \subset \ker\left(u^2\right)$ donc $\dim \ker(u) \leqslant \dim \ker\left(u^2\right)$. Montrons à présent l'inégalité de droite. Appliquons le théorème du rang à $u_{|\operatorname{Im}(u)}$:

$$\dim \operatorname{Im}(u) = \dim \ker\left(u_{|\operatorname{Im}(u)}\right) + \dim \operatorname{Im}\left(u_{|\operatorname{Im}(u)}\right)$$

Or, d'après le lemme :

$$\ker\left(u_{|\operatorname{Im}(u)}\right) = \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\left(u_{|\operatorname{Im}(u)}\right) = \operatorname{Im}\left(u^2\right)$$

Il en découle que $\operatorname{rg}(u) = \dim\left(\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)\right) + \operatorname{rg}\left(u^2\right)$. D'après le théorème du rang appliqué à u et à u^2 (qui sont, elles, définies sur E) :

$$\dim(E) - \dim \ker(u) = \dim\left(\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)\right) + \dim(E) - \dim \ker\left(u^2\right)$$

et donc, finalement,

$$\dim \ker\left(u^2\right) = \dim\left(\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)\right) + \dim \ker(u)$$

Or, $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) \subset \ker(u)$ donc $\dim\left(\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)\right) \leqslant \dim \ker(u)$, ce qui permet de conclure.

III.4 Applications linéaires injectives et surjectives en dimension finie

III.4.a Résultat fondamental

Théorème. On suppose que E et F sont de **même** dimension **finie**. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors :

$$u \text{ est injective} \iff u \text{ est surjective} \iff u \text{ est bijective.}$$

Point plomberie : si les deux espaces ont la même dimension (finie), le tuyau atteint tout l'espace d'arrivée si et seulement si sa taille ne diminue pas : u est surjective ssi u est injective. Mais attention : ce n'est plus vrai si les espaces sont de dimensions différentes !

Démonstration. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned} u \text{ est injective} &\iff \operatorname{Ker}(u)=\{0\} \\ &\iff \dim \operatorname{Ker}(u) = 0 \\ &\iff \dim(E) = \dim \operatorname{Im}(u) \\ &\qquad \text{(théorème du rang appliqué à } u\text{)} \\ &\iff \dim(F) = \dim\operatorname{Im}(u) \quad (\text{car } \dim(E)=\dim(F)) \\ &\iff \operatorname{Im}(u) = F \quad (\text{car } \operatorname{Im}(u)\subset F) \\ &\iff u \text{ est surjective.} \end{aligned}$$

□

Comme $\operatorname{Im}(u) \subset F$, ils sont donc égaux ssi ils ont même dimension.

III.4.b Importance des hypothèses

Exemple : L'application linéaire

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,y,0) \end{array} \right.$$

est injective mais non surjective. On ne peut pas appliquer le théorème précédent car l'espace de départ et l'espace d'arrivée n'ont pas la même dimension.

Exemple : L'application linéaire

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \right.$$

est surjective mais pas injective. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème, alors que l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont les mêmes ? Car ils ne sont pas de dimension finie !

Dire, le cas échéant, « u est linéaire, injective, est est un endomorphisme donc est bijective » est insuffisant : il faut préciser qu'on est en dimension finie pour appliquer ce théorème ! On s'en rend compte avec l'exemple ci-contre.

III.4.c Une application : les polynômes d'interpolation de Lagrange, le retour

Soient $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ distincts et

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ P & \longmapsto & (P(a_1),\dots,P(a_n)) \end{array} \right. .$$

L'application φ est linéaire. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Alors $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$ donc P admet donc au moins n racines distinctes. Or, $\deg(P) \leqslant n-1$. Il en découle que $P=0$ donc $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$: φ est injective. De plus, $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$. Par conséquent φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie : φ est bijective. En conclusion :

$$\forall (b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n, \quad \exists! P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], P(a_i) = b_i.$$

Remarque : P est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange (cf chapitre 19 pour un dessin). L'avantage de cette méthode par rapport à la méthode vue au premier semestre est qu'elle est particulièrement courte. L'inconvénient est qu'elle n'est pas constructive : en effet, on sait que P existe et est unique, mais on n'a aucune idée de son expression ! Cela peut s'avérer handicapant, par exemple pour ouvrir un coffre-fort, cf exercice 54 du chapitre 19.

Remarque : D'ailleurs, puisqu'on parle des polynômes d'interpolation de Lagrange, montrons un résultat qui sert dans plusieurs exercices (voir par exemple l'exercice 50) : si $a_0, \dots, a_n$ sont des réels deux à deux distincts, alors les polynômes d'interpolation de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![0\,;\, n]\!], L_i(a_i) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \neq i, L_i(a_j) = 0$$

forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (non échelonnée en degré !). Puisqu'on a $n+1$ polynômes en dimension $n+1$, il suffit de prouver qu'ils forment une famille libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Si $i \in [\![0\,;\, n]\!]$, évaluons cette égalité en a_i, ce qui donne $\lambda_i = 0$ (car $P_i(a_i) = 1$ et les autres P_j sont nuls en a_i) ce qui permet de conclure. Cette base peut se révéler plus utile que la base canonique, par exemple si on cherche une base prenant des valeurs données en des points donnés.

On vient de montrer l'existence et l'unicité de ces polynômes. Pour une écriture explicite : cf. chapitre 19.

III.4.d Tant qu'on parle de polynômes : passer par la dimension finie (méthode à retenir)

Le cas de figure suivant se produit dans bon nombre d'exercices (voir par exemple l'exercice 18, l'exercice 31, ou l'exercice 65 du chapitre 31) : on veut prouver qu'un endomorphisme $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ est bijectif. Pour cela, l'idée est de se restreindre à $\mathbb{K}_n[X]$ (qui est de bon goût d'être de dimension finie). La marche à suivre est souvent la même :

- on montre que, pour tout n, f induit un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire que la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$ est à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$: en d'autres termes, on montre que si $\deg(P) \leqslant n$, alors $\deg(f(P)) \leqslant n$.
- on montre que f est injective.
- on montre que f_n est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$: il découle en effet du point précédent que, pour tout n, f_n est linéaire injective de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même donc entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective.
- Si $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe n tel que $P \in \mathbb{K}_n[X]$, et puisque f (restreinte à $\mathbb{K}_n[X]$) est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f(Q) = P$ et donc f est surjective.

En général, il y a une indication dans l'énoncé, disant de s'intéresser à la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$.

Attention, on rappelle qu'en dimension infinie, injective n'implique pas forcément surjective. C'est là tout l'intérêt de cette méthode, puisque $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Exemple : Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ \quad P \longmapsto P - 2P' \end{cases}$$

est un isomorphisme.

f est évidemment linéaire. Soit $P \in \ker(f)$. Alors $P = 2P'$ donc P et $2P'$ ont le même degré, ce qui implique que $P = 0$ (car si $P \neq 0, \deg(P') < \deg(P)$). On en déduit que f est injective.

Soit à présent $n \in \mathbb{N}$. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $\deg(P - 2P') \leqslant \max(\deg(P), \deg(P')) = \deg(P) \leqslant n$ si bien que $f(P) \in \mathbb{K}_n[X]$: f va de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même, la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$, notée f_n, est linéaire injective de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même donc entre deux espaces de même dimension finie, donc est bijective.

Deuxième méthode : f préserve le degré donc, pour tout n, $f(X^n)$ est de degré n dont (cf. I.4.d) la famille $(f(X^n))$ est une base. f envoie une base sur une base donc est bijective.

Soit à présent $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe n tel que $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et f_n, la restriction de f à $\mathbb{K}_n[X]$, est surjective donc il existe $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $f_n(Q) = f(Q) = P$: f est surjective donc est un isomorphisme.

III.4.e Retour aux équations différentielles

Montrons le résultat admis au chapitre 11 :

Théorème. Soit $m \in \mathbb{C}$ et soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit $(E) : y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{mx}$ où Q est une fonction polynomiale :

- avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si m n'est pas solution de (C).
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si m est solution simple de (C).
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si m est solution double de (C).

(C) étant l'équation caractéristique de l'EHA associée à (E) à savoir $r^2 + ar + b = 0$.

DÉMONSTRATION. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et soit $y_0 : x \mapsto Q(x)e^{mx}$. Alors y_0 est dérivable deux fois (et même $\mathscr{C}^\infty$). Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$y_0''(x) + ay_0'(x) + by_0(x) = \left(Q''(x) + (2m+a)Q'(x) + (m^2 + am + b)Q(x)\right)e^{mx}$$

Ainsi, y_0 est solution particulière si et seulement si $Q'' + (2m+a)Q + (m^2 + am + b)Q = P$. Supposons dans un premier temps que m ne soit par racine de (C). Notons $n \geqslant 0$ le degré de P. Soit donc

$$u : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ Q \longmapsto Q'' + (2m+a)Q' + (m^2 + am + b)Q \end{cases}$$

Alors u est linéaire et va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$. Soit $Q \in \ker(u)$. Si $Q \neq 0$, soit $d \geqslant 0$ le degré de P et soit a_d le coefficient dominant de Q. Alors le coefficient de X^d de $u(Q)$ est $(m^2 + am + b)a_d$ qui est nul puisque $u(Q) = 0$, mais c'est absurde puisque $m^2 + am + b$ et a_d sont non nuls. Ainsi, u est injective et linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc est bijective, et en particulier surjective : il existe Q tel que $Q'' + (2m+a)Q + (m^2 + am + b)Q = P$ si bien qu'il existe une solution particulière de degré inférieur ou égal à $\deg(P)$. On montre même que, pour tout Q, $u(Q)$ et Q ont même degré (idem, on regarde le coefficient dominant) si bien l'antécédent de P et P ont même degré.

Supposons à présent que m soit racine simple de (C). Alors

$$y_0''(x) + ay_0'(x) + by_0(x) = \left(Q''(x) + (2m+a)Q'(x)\right)e^{mx}$$

donc y_0 est solution particulière si et seulement si $Q'' + (2m+a)Q = P$. On introduit cette fois

$$v : \begin{cases} \mathbb{C}_{n+1}[X] \longrightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ Q \longmapsto Q'' + (2m+a)Q' \end{cases}$$

□

On prouve de même que son noyau est l'ensemble des polynômes constants. D'après le théorème du rang, $\mathrm{Im}(v)$ est de dimension $n+1$ donc v est surjective : P admet un antécédent, noté Q, et on prouve de même que $\deg(v(Q)) = \deg(Q) - 1$ donc, si Q est un antécédent de P, $\deg(Q) = \deg(P) + 1$.

Le dernier cas est trivial : si m est racine double de $r^2 + ar + b = 0$ alors m est racine de $2r + a = 0$ (racine de la fonction polynomiale dérivée associée) donc y_0 est solution particulière si et seulement si $Q'' = 0$ et alors l'existence d'un polynôme Q de degré $\deg(P) + 2$ vérifiant $Q'' = P$ est immédiate en primitivant deux fois terme à terme.

Remarquons que, dans les deux derniers cas, il n'y a pas unicité de la solution particulière.

III.4.f Inversibilité en dimension finie

Corollaire (du théorème). On suppose que E et F sont de même dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. S'il existe $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ ou $v \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est un

En dimension finie, une seule des deux égalités suffit, mais en général, il faut les deux égalités, cf. exercice 47 du chapitre 29.

isomorphisme et $v = u^{-1}$. En d'autres termes, en dimension finie, une application linéaire inversible à gauche ou à droite est inversible.

Démonstration. On suppose qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $y \in F$. Alors $u(v(y)) = y$ i.e. $v(y)$ est un antécédent de y par u. u est donc surjective. Ainsi u est une application linéaire surjective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc elle est bijective. Par conséquent $v(y)$ est l'unique antécédent de y par u donc $v(y) = u^{-1}(y)$. $\square$

IV Formes linéaires et hyperplans

Dans les deux premiers paragraphes, E est de dimension quelconque (pas forcément finie). De toute manière, quand E sera supposé de dimension finie, on le dira explicitement.

IV.1 Formes linéaires

Définition. Une forme linéaire définie sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples :

- Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, alors
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \end{array} \right.$$
c'est-à-dire que toute application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui renvoie une CL des coordonnées est une forme linéaire. On verra dans la suite qu'en dimension finie, toute forme linéaire peut être mise sous cette forme (dans une base convenable).
- Si $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, alors
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(\sqrt{2}) \end{array} \right.$$
est une forme linéaire. Plus généralement, si $x_0 \in \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x_0)$ est une forme linéaire, appelée évaluation de f en x_0.
- Si $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors
$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
est une forme linéaire, par linéarité de l'intégrale.
- Soit $B = (e_i)_{i \in I}$ une base de E. Dès lors, pour tout $x \in E$, il existe une (unique) famille (à support fini) $(x_i)_{i \in I}$ (les coordonnées de x dans la base B) telle que $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$. Pour tout $i \in I$, l'application
$${e_i}^* : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$
est une forme linéaire, appelée forme linéaire selon la coordonnée i.

Répétons que, dans ce paragraphe et le suivant, E n'est pas forcément de dimension finie.

Proposition. Une forme linéaire est soit nulle soit surjective.

Démonstration. Soit $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$ donc $\dim \mathrm{Im}(\varphi) \leqslant \dim(\mathbb{K}) = 1$.

- Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 0$, alors φ est l'application nulle.
- Si $\mathrm{rg}(\varphi) = 1$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{K}$: φ est surjective.

IV.2 Hyperplans

Définition. Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

> Il ne faut pas oublier de préciser « non nulles ». La plupart du temps, il est inutile de le prouver, mais parfois, ce n'est pas si simple (cf. chapitre 34). En tout cas, ici, c'est immédiat : si on note f la fonction constante égale à 1, alors $\varphi_1(f) = \varphi_2(f) = 1$ donc φ_1 et φ_2 sont bien non nulles.

Exemples : Dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: soient

$$H_1 = \{f \in E \mid \ f(0) = 0\} \qquad \text{et} \qquad H_2 = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\, = 0 \right\}$$

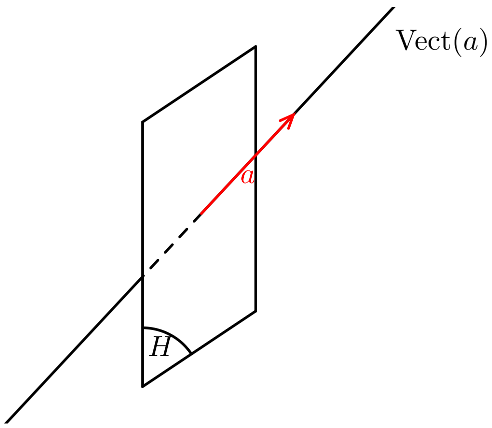
Alors H_1 et H_2 sont des hyperplans de E car sont les noyaux de, respectivement, $\varphi_1 : f \mapsto f(0)$ et $\varphi_2 : f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, qui sont des formes linéaires non nulles.

Morale de l'histoire : les hyperplans existent aussi en dimension infinie !

Théorème (Caractérisation géométrique des hyperplans). Soit H un sev de E. H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. En d'autres termes, un hyperplan est un sev de E qui admet un supplémentaire de dimension 1.

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^3$:



- Dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: les hyperplans

$$H_1 = \{f \in E \mid \ f(0) = 0\} \qquad \text{et} \qquad H_2 = \left\{ f \in E \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\, = 0 \right\}$$

  admettent comme supplémentaire l'ensemble des fonctions constantes (cf exercice 29 du chapitre 29), qui est de dimension 1.

Démonstration. Supposons que H soit un hyperplan i.e. le noyau d'une forme linéaire φ non nulle.

φ est non nulle donc il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$ (et en particulier a est non nul). Montrons que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Soit $x \in E$. On veut montrer qu'il existe $x \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ uniques tels que $x = h + \lambda a$.

- Analyse : si h et λ conviennent.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(h) + \lambda\varphi(a) && (\varphi \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda\varphi(a) && (h \in H = \ker(\varphi)) \end{aligned}$$

  Or, $\varphi(a)$ est un scalaire non nul donc $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.a$.

- Synthèse : soient $\lambda = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et $h = x - \lambda.a$. On a trivialement $x = h + \lambda a$. Montrons que $h \in H = \ker(\varphi)$.

$$\begin{aligned} \varphi(h) &= \varphi(x) - \lambda\varphi(a) \\ &= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.\varphi(a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $h \in H$.

On a démontré l'existence et l'unicité de la décomposition donc $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ avec a non nul.

Réciproque (esquisse) : supposons que H admette un supplémentaire de dimension 1. Il existe donc $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Par conséquent, tout élément x s'écrit de manière unique sous la forme $h + \lambda a$ avec $h \in H, \lambda \in \mathbb{K}$. Soit

$$\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{K} \\ x = h + \lambda a & \mapsto \lambda \end{cases}$$

$\square$

φ est « l'application coordonnée selon a ». Alors φ est linéaire et $H = \ker(\varphi)$: $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : un hyperplan H d'un espace vectoriel E de dimension infinie est lui-même de dimension infinie. En effet, si H est de dimension finie, alors il existe $a \neq 0$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$, donc E est de dimension finie, ce qui est absurde.

Proposition. Soit H un hyperplan de E. Alors :

$$\forall b \notin H, \qquad H \oplus \text{Vect}(b) = E$$

Remarque : La différence avec le résultat précédent est qu'on peut prendre n'importe quel élément qui n'appartient pas à H.

Démonstration. Découle de la proposition précédente : a était un élément quelconque qui n'était pas dans H donc tout élément qui n'est pas dans H convient !

Proposition. Soient φ_1 et φ_2 deux formes linéaires non nulles. Alors elles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau.

Démonstration. Supposons que $\ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. Soit $H = \ker(\varphi_1) = \ker(\varphi_2)$. C'est donc un hyperplan de E : il existe $a \in E$ non nul tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Soit $x \in E$. Il existe $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ uniques tels que $x = h + \lambda a$.

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \varphi_1(h) + \lambda\varphi_1(a) && (\varphi_1 \text{ est linéaire}) \\ &= \lambda\varphi_1(a) && (h \in H = \ker(\varphi_1)) \end{aligned}$$

Or, $a \notin H$ donc $\varphi_1(a) \neq 0$, si bien que $\lambda = \dfrac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(a)}$. De plus,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \varphi_2(h) + \lambda\varphi_2(a) \quad &(\varphi_1 \text{ est linéaire})\\ &= \lambda\varphi_2(a) &(h \in H = \ker(\varphi_2))\\ &= \frac{\varphi_2(a)}{\varphi_1(a)} \times \varphi_1(x) \end{aligned}$$

□

En conclusion, φ_1 et φ_2 sont proportionnelles. La réciproque est laissée en exo : attention, φ_1 et φ_2 sont supposées non nulles.

IV.3 En dimension finie

IV.3.a Retour aux formes coordonnées et équation d'un hyperplan en dimension finie

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de dimension finie. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Dès lors, pour tout $x \in E$, il existe une (unique) famille (à support fini) $(x_i)_{i \in I}$ (les coordonnées de x dans la base B) telle que $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, l'application

$$e_i{}^* : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire, appelée forme linéaire selon la coordonnée i.

Proposition. $(e_1{}^*, \dots, e_n{}^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Démonstration.
- Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 e_1{}^* + \cdots + \lambda_n e_n{}^* = 0$ (i.e. l'application nulle). Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. $e_j{}^*(e_i) = \delta_{i,j}$ donc

$$\lambda_1 e_1{}^*(e_i) + \cdots + \lambda_n e_n{}^*(e_i) = \lambda_i$$

si bien que $\lambda_i = 0$: la famille est libre.

> Rappelons que $\delta_{i,j}$, le symbole de Kronecker, vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

- Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, K)$. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. φ étant linéaire,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x_1\underbrace{\varphi(e_1)}_{\in\mathbb{K}} + \cdots + x_n\underbrace{\varphi(e_n)}_{\in\mathbb{K}}\\ &= \varphi(e_1)x_1 + \cdots + \varphi(x_n)x_n\\ &= \varphi(e_1)e_1{}^*(x) + \cdots + \varphi(e_n)e_n{}^*(x) \end{aligned}$$

□

x étant quelconque, il vient : $\varphi = \varphi(e_1)e_1{}^* + \cdots + \varphi(e_n)e_n{}^* \in \mathrm{Vect}(e_1{}^*, \dots, e_n{}^*)$, d'où le côté générateur.

Remarque : L'espace $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est aussi noté E^* et est appelé le dual de E (et la base $(e_1{}^*, \dots, e_n{}^*)$ est appelée base duale de $(e_1, \dots, e_n)$). On vient de montrer qu'il est de dimension n. Il est donc isomorphe à E. Ce n'est plus forcément le cas si E est de dimension infinie.

> Nous montrerons dans le chapitre 31 que, si E et F sont de dimension finie, $\mathscr{L}(E, F)$ est de dimension $\dim(E) \times \dim(F)$.

Proposition. Soit $H \subset E$. Alors H est un hyperplan de E si et seulement s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que H soit d'équation :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

avec $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur $x \in E$ dans la base B.

Quand on dit que H est d'équation $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$, cela signifie que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ appartient à H si et seulement si $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Remarque : En d'autres termes, en dimension finie, un ensemble est un hyperplan de E si et seulement s'il admet comme équation une équation linéaire en les coordonnées de x. Par exemple, un hyperplan de $\mathbb{R}^2$ est un ensemble d'équation $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ avec a, b, c non tous nuls et x_1, x_2, x_3 les coordonnées d'un vecteur dans une base quelconque.

Démonstration. H est un hyperplan si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire non nulle φ. Or, toute forme linéaire non nulle s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire avec des coefficients non tous nuls des ${e_i}^*$ (car c'est une base de $\mathscr{L}(E, \mathbb{K})$) donc H est un hyperplan si et seulement s'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ non tous nuls tels que H soit le noyau de

$$\varphi : x \mapsto \alpha_1 {e_1}^*(x) + \cdots + \alpha_n {e_n}^*(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad \square$$

ce qui est le résultat voulu.

Remarque : Il n'y a pas unicité de l'équation. En effet, on a déjà prouvé au paragraphe IV.1 que deux formes linéaires ont même noyau, i.e. définissent le même hyperplan, si et seulement si elles sont proportionnelles. Ainsi, un hyperplan admet une infinité d'équations (dans une base donnée), toutes proportionnelles les unes aux autres. Par exemple, les deux équations $x + y + 2z = 0$ et $2x + 2y + 4z = 0$ définissent le même hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Remarque : On vient donc également de prouver que toute forme linéaire (en dimension finie) est en fait une fonction qui renvoie une CL des coordonnées de chaque vecteur (dans la base choisie).

IV.3.b Hyperplans et dimension

Théorème. On suppose que E est de dimension finie n. Soit H un sev de E. Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(H) = n - 1$.

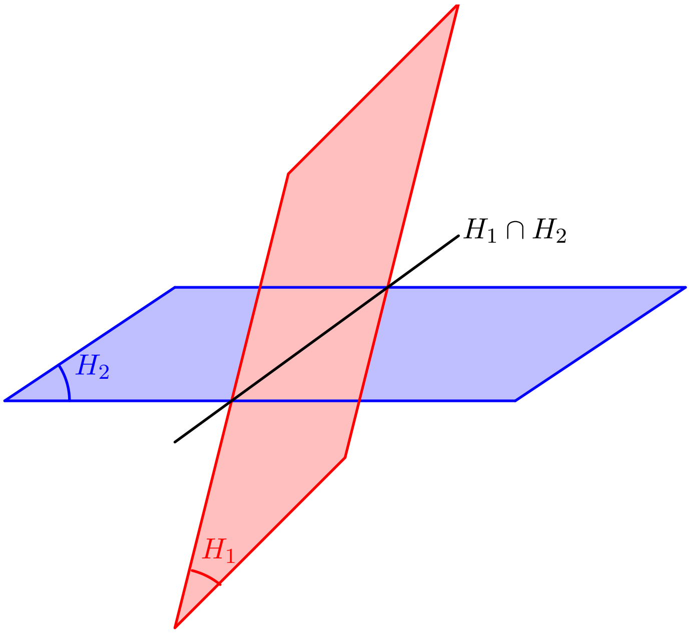
Par exemple, comme on le voit dans le dessin du paragraphe IV.2, en dimension 3, les hyperplans sont exactement les plans vectoriels.

Démonstration. Soit $p = \dim(H)$. E est de dimension finie donc H admet un supplémentaire. De plus, tous ses supplémentaires sont de même dimension $n - p$. H est un hyperplan si et seulement si H admet un supplémentaire de dimension 1 si et seulement si $p = n - 1$.

Remarque : ⚠ Attention, cela n'est valable qu'en dimension finie.

IV.3.c Intersection d'hyperplans en dimension finie et systèmes d'équations

Commençons par un cas particulier. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans distincts de E (toujours supposé de dimension $n \geqslant 2$). Montrons que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.



- Première méthode : avec la formule de Graßmann. $H_1 \neq H_2$ et $\dim(H_1) = \dim(H_2)$ donc H_1 n'est pas inclus dans H_2 donc il existe $a \in H_1 \backslash H_2$. $a \notin H_2$ donc $E = H_2 \oplus \text{Vect}(a)$. Or, $a \in H_1$ donc $\text{Vect}(a) \subset H_1$, d'où : $E = H_1 + H_2$. D'après la formule de Graßmann :

$$n = \dim(E) = \dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$$

  Or, $\dim(H_1) = \dim(H_2) = n - 1$, ce qui permet de conclure.

- Deuxième méthode : avec le théorème du rang. H_1 et H_2 sont des hyperplans de E donc il existe φ_1, φ_2 formes linéaires non nulles telles que $H_1 = \ker(\varphi_1)$ et $H_2 = \ker(\varphi_2)$. Appliquons le théorème du rang à $\varphi_{1|H_2}$, définie, rappelons-le, par :

$$\varphi_{1|H_2} : \left\{ \begin{array}{ccc} H_2 & \to & \mathbb{K} \\ & & \\ x & \mapsto & \varphi_1(x) \end{array} \right.$$

  Par hypothèse, les hyperplans sont distincts donc $H_2 \neq H_1$, et H_1 et H_2 ont la même dimension donc H_2 n'est pas inclus dans $H_1 = \ker(\varphi_1)$. Il existe donc $x \in H_2$ tel que $\varphi_1(x) \neq 0$. $\varphi_{1|H_2}$ est linéaire car φ_1 l'est. $\varphi_{1|H_2}$ est une forme linéaire non nulle donc est surjective : son image est donc de dimension 1. D'après le théorème du rang,

$$\dim(H_2) = \dim\ker(\varphi_{1|H_2}) + \dim \text{Im}(\varphi_{1|H_2})$$

  ie $n - 1 = \dim\ker(\varphi_{1|H_2}) + 1$. Or (cf TD), $\ker(\varphi_{1|H_2}) = H_1 \cap H_2$ donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

Généralisons ce résultat.

Théorème. On suppose que E est de dimension finie n. Soit $m \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

- L'intersection de m hyperplans est de dimension au moins égale à $n - m$.
- Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Remarque : Comme ci-dessus, l'idée est : « quand on intersecte avec un hyperplan, on peut perdre jusqu'à une dimension ». Ce n'est pas automatique, par exemple si on prend plusieurs fois le même hyperplan. Mais, dans tous les cas, on ne peut pas « descendre plus » que de 1 à chaque nouvelle intersection. Par exemple, l'intersection de 3 hyperplans en dimension 9 est de dimension au moins 6.

Démonstration. • Soient $H_1, \dots, H_m$ des hyperplans de E, noyaux de (respectivement) $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ qui sont m formes linéaires non nulles. Soit

$$\varphi : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K}^m \\ x & \mapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \end{cases}$$

Alors φ est linéaire et $\ker(\varphi) = H_1 \cap \dots \cap H_m$. D'après le théorème du rang,

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_m) = \dim E - \text{rg}(\varphi)$$

Or, $\text{rg}(\varphi) \leqslant m$ car $\text{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}^m$ ce qui permet de conclure.

- Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-m})$ une base de F, qu'on complète d'après le théorème de la base incomplète pour obtenir une base de E notée $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $i \in [\![n-m+1 \,;\, n]\!]$, notons $H_i = \ker({e_i}^*)$, qui est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire non nulle. Un élément x appartient à F si et seulement s'il appartient à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-m})$ si et seulement si les coordonnées selon $(e_{n-m+1}, \dots, e_n)$ sont nulles. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} x \in F \quad & \iff \quad {e_{n-m+1}}^*(x) = \dots = {e_n}^*(x) = 0 \\ & \iff \quad x \in H_{n-m+1} \cap \dots \cap H_n \end{aligned} \qquad \square$$

On en déduit que F est égale à cette intersection donc F est l'intersection de m hyperplans.

Remarque : Il découle des résultats précédents que l'ensemble des solutions d'un système homogène à m équations et n inconnues est un espace vectoriel de dimension au moins $n-m$ et, réciproquement, qu'un sev de E de dimension $n-m$ peut être décrit à l'aide d'un système de m équations à n inconnues :

$$(S) \quad \begin{cases} \alpha_{1,1}x_1 & + & \alpha_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{1,n}x_n & = & 0 \\ \alpha_{2,1}x_1 & + & \alpha_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{2,n}x_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_{m,1}x_1 & + & \alpha_{m,2}x_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m,n}x_n & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions n'est pas forcément de dimension $n-m$, par exemple si la troisième équation est la somme des deux premières.

Par exemple :

- les droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ $(n = 2, m = 1)$ admettent une équation de la forme $ax + by = 0$ avec a et b non tous nuls.
- Les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ $(n = 3, m = 1)$ admettent une équation de la forme $ax + by + cz = 0$ avec a, b, c non tous nuls.
- Les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ $(n = 3, m = 2)$ peuvent être décrits à l'aide de deux équations du type $ax+by+cz = 0$ avec a, b, c non tous nuls. Par exemple, le système

$$\begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \end{cases}$$

décrit une droite vectorielle.

On vient de prouver la validité de ce qu'on a fait dans le chapitre 28 : quand on a deux équations indépendantes dans $\mathbb{R}^3$, on obtient une droite vectorielle, quand on a une équation, on obtient un plan vectoriel. De plus, comme on l'a dit dans le chapitre 28 : tout sev de $\mathbb{K}^n$ s'écrit à l'aide d'une ou de plusieurs équations de ce type.