Programme de colle - Semaine n°30

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 31 - Représentation matricielle des applications linéaires (Matrix Reloaded pour les intimes)

- cf. semaines 28 et 29.

Chapitre 32 - Groupe symétrique

- Définition du groupe symétrique d'ordre n ($n \geq 2$), notation S_n. S_n est un groupe muni de la composition et non abélien dès que $n \geq 3$ (fait lors du chapitre 18).
- Notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.
- Composition de permutations (attention, on va de la droite vers la gauche), inverse d'une permutation, support d'une permutation. Deux permutations à supports disjoints commutent, et le support de leur composée est l'union de leurs supports.
- Définition d'une transposition, d'un cycle. Notation $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_p \end{pmatrix}$. Si σ est un p-cycle et si x_1 appartient au support de σ, alors $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & \sigma(x_1) & \ldots & \sigma^{p-1}(x_1) \end{pmatrix}$. Attention, un produit de cycles n'est pas forcément un cycle.
- Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, méthode pratique. Décomposition d'une permutation en produit de transpositions, méthode pratique. Attention, pour celle-ci, il n'y a pas unicité.
- Signature d'une permutation, calcul pratique. Signature d'une transposition, d'un cycle.

Chapitre 33 - Déterminants

- Formes n-linéaires, distributivité (attention, il faut changer les indices quand on sort plusieurs sommes). Formes n-linéaires alternées, exemples, propriétés.
- Définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base B. $\Lambda_n(E)$, espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E, espace vectoriel de dimension n, est de dimension 1, et le déterminant en forme une base. En particulier, toute forme n-linéaire alternée est proportionnelle au déterminant.
- Formule de changement de base pour le déterminant. CNS pour qu'une famille soit une base.
- Orientation d'un espace.
- Déterminant d'un endomorphisme. Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de l'image d'une base par u. Propriétés : $\det(\lambda u), \det(\mathrm{Id}_E), \det(v \circ u)$, CNS de bijectivité et valeur de $\det(u^{-1})$. Le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$.
- Déterminant d'une matrice, notation avec des barres verticales. Le déterminant d'une matrice est le déterminant de tout endomorphisme représenté par cette matrice. Conséquence : les propriétés vues précédemment s'adaptent facilement au cas matriciel ($\det(\lambda A)$, etc.). Invariance du déterminant par similitude (réciproque fausse). Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée. Le déterminant est une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes et aux lignes de A. Règles de calcul.
- Interprétation du déterminant en termes d'aire et de volume.
- Déterminant d'une matrice 2×2, d'une matrice 3×3 (règle de Sarrus). Déterminant d'une matrice triangulaire, diagonale. Surjectivité et non-injectivité (si $n \geq 2$) du morphisme $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.

- Calcul du déterminant par la méthode du pivot de Gauß, développement par rapport à une ligne ou une colonne (mineurs, cofacteurs, la comatrice sera vue lundi). Exemples.

Chapitres au programme

Chapitre 31 (cours, exercices sur tout le chapitre), chapitre 32 (cours et exercices), chapitre 33 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. L'examinateur donne une matrice 3×3 ou 4×4 explicite simple (i.e. sans paramètre) et en demande le rang.
2. L'examinateur donne un certain nombre de vecteurs explicites en dimension 3 ou 4 (sans paramètre) et en demande le rang.
3. Formule de changement de base pour des vecteurs, pour des AL, pour des endomorphismes (sans démonstration).
4. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).
5. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).
6. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).
7. L'examinateur donne deux permutations explicites simples (disons $n \leq 10$) et demande d'en faire le produit.
8. L'examinateur donne une permutation explicite simple (disons $n \leq 15$) et demande sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions, et sa signature.
9. L'examinateur donne une permutation explicite simple et demande une décomposition en produit de transpositions sans passer par le produit en cycles à supports disjoints.
10. Définition du déterminant d'une matrice (on demande uniquement l'expression à l'aide de la somme).
11. L'examinateur donne un déterminant 3×3 explicite (pas trop moche) à calculer à l'aide de la règle de Sarrus.
12. Si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, valeur de
$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Groupes B - C :

1. Donner une base du noyau de la trace (démonstration).
2. Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions (démonstration, méthode au choix de l'élève).
3. Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (démonstration).

Groupe C :

1. Si u est une AL de rang r, alors il existe deux bases dans lesquelles la matrice de u est J_r (démonstration).
2. Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée (démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Groupe symétrique.
- Déterminant.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 36, 37, 39, 40, 45, 50 du chapitre 33.

Cahier de calcul

Chapitre 31.