Chapitre 2.3

Rappels sur les limites et la continuité.

Dans ce chapitre, sauf indication contraire (par exemple dans tous les résultats faisant intervenir une composée de fonctions ou tous les résultats traitant de continuité), les fonctions seront définies sur un domaine D, union d'intervalles non vides, non réduits à un point, et a est un point adhérent à D. Les résultats de ce chapitre et du suivant consistent en des rappels et des approfondissements concernant la continuité et la dérivation. Nous les démontrerons plus tard dans l'année, le but actuel étant de se donner les outils nécessaires pour étudier des fonctions efficacement.

Nous verrons la notion de point adhérent dans le chapitre 12. Pour l'instant, on peut considérer que a est un élément ou une borne de D, éventuellement infinie. Par exemple, si $D = \mathbb{R}^*$, alors a peut être égal à 1, à 0 ou à $\pm\infty$.

I Rappel sur les limites

Théorème. Soient L_1 et L_1 deux réels.

1. Somme :
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1+L_2$
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
2. Produit :
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1\times L_2$
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1 \neq 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
3. Quotient :
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2 \neq 0$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{L_1}{L_2}$
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1 \neq 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (définition analogue à celle des suites avec un voisinage) ou 0^- alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ ou 0^- alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
   - Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ (règle des signes).

Remarque : Les cas suivants sont appelés formes indéterminées : « $0/0$ », « ∞/∞, « $+\infty-\infty$ » et « $0\times\infty$ » et doivent être étudiés au cas par cas. Cependant, les cas « $\infty/0$ », « $\infty\times\infty$ » ou autres ne sont pas des formes indéterminées.

Pour la composition, les hypothèses changent, f et g ne sont pas définies sur le même ensemble D. Nous expliciterons les hypothèses de ce théorème dans le chapitre 13. Par exemple, il faut avoir $f(D_f) \subset D_g$, L_1 doit être un point adhérent à D_g etc. Bref, on zappe provisoirement.

Théorème (Composition de limites). Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(y) \xrightarrow[y\to L_1]{} L_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$.

Théorème (Théorème d'encadrement, de majoration et de minoration).

- Soit $L \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ et si $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ alors $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
- Si $f(x) \leqslant g(x)$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

Remarque : Attention, ne jamais manipuler une limite sans avoir prouvé son existence !

Exemple : Soit $n \geqslant 1$. Donner la valeur de $\lim\limits_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$.

Les arguments mathématiques seront vus ultérieurement. On se concentrera surtout sur la rédaction.

Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(n\theta)}{n\theta)} \times \frac{n\theta}{\sin(\theta)}$$

Or, $u = n\theta \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. Par composition de limites, $\dfrac{\sin(n\theta)}{n\theta)} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1$. De plus, $\dfrac{\sin(\theta)}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} 1$ donc $\dfrac{\theta}{\sin(\theta)} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \dfrac{1}{1} = 1$. Finalement,

$$\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \xrightarrow[\theta\to 0]{} n$$

Cependant, écrire

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} &= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(n\theta)}{n\theta)} \times \frac{n\theta}{\sin(\theta)} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

n'a aucun sens car on ne sait pas encore que ces limites existent !

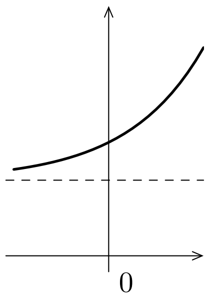
Théorème (Unicité de la limite). Soit $(L_1, L_2) \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^2$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ alors $L_1 = L_2$.

En d'autres termes, si f a deux limites en a, alors celles-ci sont égales.

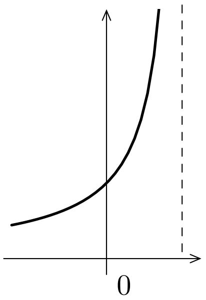
II Asymptotes.

Définition.

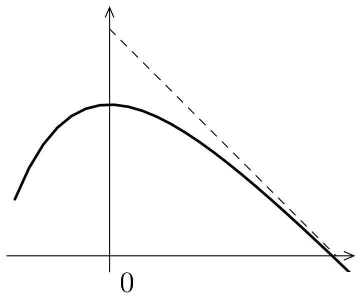
- Supposons que $a \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale au graphe de f.
- Soit $L \in \mathbb{R}$. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale au graphe en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (respectivement $f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).



asymptote horizontale



asymptote verticale



asymptote oblique

Exemples :

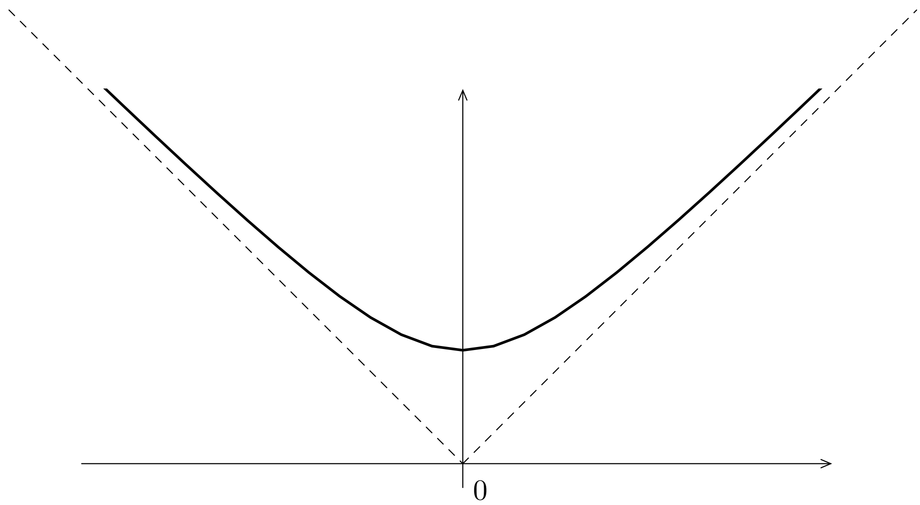
- La fonction exponentielle admet une asymptote horizontale en $+\infty$. Plus précisément, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale.
- La fonction $x \mapsto 1/x^2$ admet une asymptote verticale en 0. Plus précisément, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale.
- La droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$ au graphe de $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. En effet, si $x < 0$ (ce qu'on peut supposer car on cherche la limite en $-\infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}+x &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\times\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x} \quad \text{(expression conjuguée)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \\
&\xrightarrow[x\to-\infty]{} 0
\end{aligned}$$

De même, la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ (on aurait aussi pu utiliser le fait que f est paire).

Voir les graphes dans le chapitre 2.5.

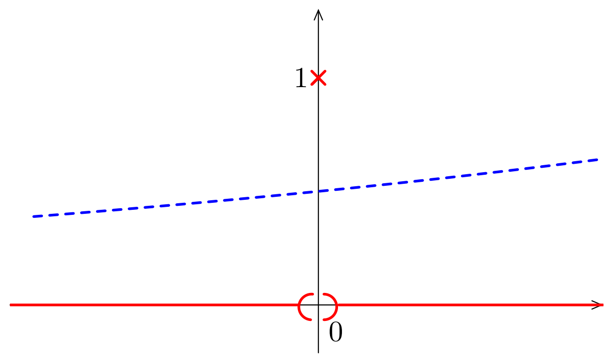
f étant paire, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote en $-\infty$ si et seulement si la droite d'équation $y = -ax + b$ est asymptote en $+\infty$.



III Rappels sur la continuité.

Définition. Soit $a \in D$. On dit que f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$.

Attention, a est ici un réel : cela n'a pas de sens de parler d'une fonction continue en $\pm\infty$.



Une fonction non continue (en traits pleins) et une fonction continue (en pointillés) en 0.

Remarque : L'interprétation géométrique habituelle est : on trace la courbe sans lever son crayon. Mais elle montre ses limites car elle semble impliquer qu'une fonction est toujours continue sur au moins un intervalle. Or, il existe des fonctions continues en un seul point (cf. chapitre 13), même si c'est difficile à visualiser !

Théorème (Somme et produit). Soit $a \in D$. Si f et g sont continues en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g, \lambda f$ et $f \times g$ sont continues en a.

Théorème (Composition). Soit $a \in D$. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.

Là aussi, les hypothèses sont différentes, nous ne les explicitons pas.

Théorème. La fonction inverse est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$

Corollaire (Quotient). Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors :

- $\dfrac{1}{g}$ est continue en a.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est continue en a.

Le réel a dans les résultats précédents étant quelconque, on en déduit les deux théorèmes suivants.

Théorème. Si f et g sont continues sur D et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont continues sur D. De plus, si g ne s'annule pas sur D, alors $1/g$ et f/g sont continues.

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions continues :

- Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont continues alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ l'est aussi.
- Si $f_1, \dots, f_n$ sont continues alors $f_1 \times \cdots \times f_n$ est continue.

En d'autres termes, une somme, un produit de fonctions continues est continu et un quotient de fonctions continues est continu là où son dénominateur ne s'annule pas, et une combinaison linéaire de fonctions continues est une fonction continue.

Théorème. Si f est continue et g est continue (et si $g \circ f$ est bien définie), alors $g \circ f$ est continue sur E. En d'autres termes, une composée de fonctions continues est continue.

Remarque : Là aussi, nous n'explicitons pas les hypothèses, nous en reparlons dans le chapitre 13.

⚠ Tous les résultats de ce paragraphe donnent des conditions suffisantes pour qu'une fonction soit continue. Aucun ne donne de condition pour qu'une fonction ne soit pas continue. En d'autres termes, si f et g sont continues, on peut dire que $f+g$ et $f \times g$ sont continues, mais on ne peut rien affirmer si f et g ne sont pas continues. En effet, une somme ou un produit de fonctions non continues peut être continue : par exemple, si f est non continue, $f-f$ est la fonction nulle donc est continue. Si aucun des théorèmes ne s'applique, on ne peut pas conclure que la fonction étudiée n'est pas continue. Une seule solution : la définition.

IV Prolongement et restriction.

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Soit A une partie de E. On appelle restriction de f à A la fonction notée $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

E est une partie de $\mathbb{R}$. Nous généraliserons la notion de restriction et de prolongement dans le chapitre 4.

Remarque : C'est juste la même fonction définie sur un ensemble plus petit. L'utilité de cette notion est qu'en prenant un ensemble plus petit, la fonction peut vérifier des propriétés que ne vérifiait pas la fonction originelle.

Exemples :

- La fonction inverse n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$ mais sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est strictement décroissante.
- La fonction tangente n'est pas injective car elle est périodique mais sa restriction à $\left] -\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{\pi}{2} \right[$ l'est donc est une bijection de $\left] -\dfrac{\pi}{2} \,;\, \dfrac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$: cf. chapitre 5.

Définition. Si g est une restriction de f, on dit que f est un prolongement de g.

Remarque : En d'autres termes, prolonger une fonction, c'est la définir sur un ensemble plus grand, c'est la définir en des points où elle n'était pas définie jusqu'alors. On pourrait la prolonger de façon arbitraire mais il paraît plus naturel de la prolonger de telle sorte que la fonction prolongée vérifie des propriétés intéressantes, en particulier la continuité.

Proposition/Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D. On suppose que f admet une limite finie L en a. Alors la fonction f prolongée en a en posant $f(a) = L$ est continue en a : on dit qu'on a prolongé f par continuité en a.

Encore une fois, on définira la notion de point adhérent dans le chapitre 13. Pour l'instant, on se contente de retenir la méthode.

Démonstration. La continuité de f ainsi prolongée découle de la définition : par définition de $f(a)$, $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ donc f est bien continue en a.

Remarque : Ainsi, quand on demande de prouver qu'une fonction f est prolongeable par continuité en un réel a, la question cachée est : prouver que f admet une limite finie en a.

Exemple : On définit la fonction sinus cardinal par :

$$\operatorname{sinc} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array} \right.$$

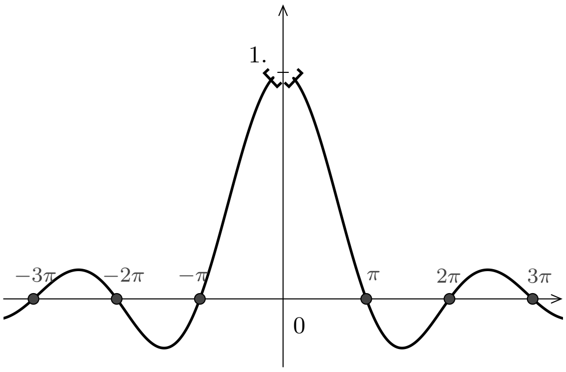
La fonction sinus cardinal est d'une importance capitale en physique et plus particulièrement en optique ondulatoire.

Alors sinc est continue sur $\mathbb{R}^*$ car quotient de fonctions continues, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Montrons qu'elle est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

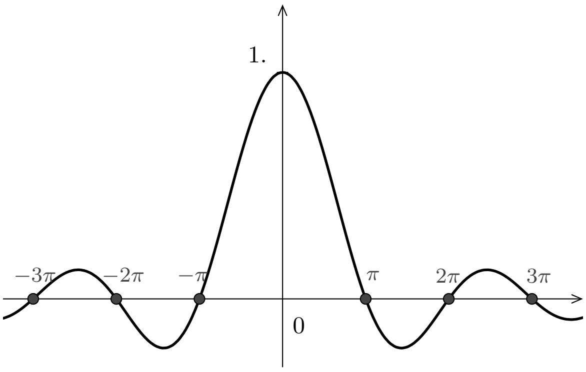
La fonction sinus étant dérivable en 0,

$$\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Posons $\operatorname{sinc}(0) = 1$ (on prolonge donc sinc en 0 avec la valeur 1). La fonction sinc ainsi prolongée est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.



avant

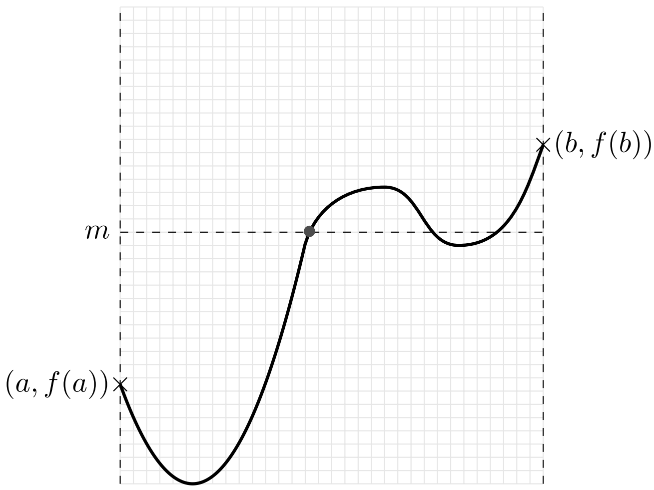


après

V TVI et Cie.

Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI)). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$. Soit $m \in [\,f(a)\,; f(b)\,]$. Alors il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$.

On n'a pas forcément $f(a) \leqslant f(b)$. La notation $m \in [\,f(a)\,; f(b)\,]$ est à prendre au sens de : « m est compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$ ». Cela évite de faire plusieurs cas. Cependant, si on sait que $f(a) > f(b)$, on écrira naturellement $[\,f(b)\,; f(a)\,]$.



Attention, le TVI ne prouve que ce qu'il prouve (et c'est déjà pas mal). En particulier, c'est un théorème qui porte bien son nom : il prouve que, si la fonction est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, mais on ne peut rien affirmer au sujet des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, et certainement pas qu'elles ne sont pas atteintes ! Si $f(a) \geqslant m$ et $f(b) \geqslant m$, on ne peut rien conclure, et surtout pas qu'il n'existe pas de $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$! Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, mais qui irait sérieusement dire que cos ne s'annule pas sur $[\,0\,;2\pi\,]$ d'après le TVI ?

Contrairement à une croyance très (trop) répandue, aucune autre hypothèse que ce soit (et certainement pas de la monotonie) n'est nécessaire pour appliquer le TVI : seule importe la continuité. En clair, le TVI c'est : « à un moment c'est plus grand, à un moment c'est plus petit, c'est continu, alors ça coupe ».

Corollaire. Avec les mêmes hypothèses que dans le TVI et en supposant de plus f strictement monotone, alors c est unique.

Remarque : On peut généraliser aisément au cas où f n'est pas définie sur un segment, par exemple sur un intervalle semi-ouvert $[\,a\,;b\,[$ (avec b éventuellement égal à $+\infty$). Mais ce n'est pas l'endroit pour démontrer ce genre de résultat, ni pour donner un catalogue de ce qui se passe quand l'intervalle est ouvert, fermé, semi-ouvert, selon que f est croissante ou décroissante. On se contente d'illustrer cette généralisation avec un exemple.

Exemple : Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.

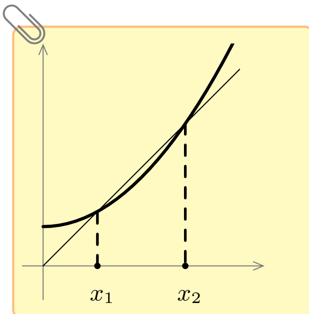
La fonction f est strictement croissante car somme de deux fonctions strictement croissantes (pas besoin de dériver !), $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Enfin, f est continue car somme de fonctions continues. Si $n \in \mathbb{N}$, d'après le corollaire du TVI, il existe un unique $x_n > 0$ tel que $f(x_n) = n$.

VI Points fixes, stage one.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in D$; a est un point fixe de f si $f(a) = a$.

La recherche de point fixe est centrale dans l'étude des suites récurrentes (entre autres).

Interprétation géométrique : a est un point fixe de f si et seulement si le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice) au point d'abscisse a. Par exemple, sur le premier dessin dans la marge, f admet deux points fixes x_1 et x_2. Avec un exemple plus explicite : la fonction carré admet deux points fixes : 0 et 1 (deuxième dessin dans la marge).

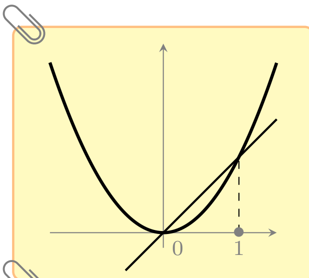


⚠ Même si f est continue, on ne peut pas appliquer le TVI directement à f pour prouver l'existence d'un point fixe ! En effet, le TVI ne peut pas (tel quel) prouver l'existence d'un x tel que $f(x) = x$: il ne permet de trouver un antécédent que pour une quantité **fixée** (à droite du signe $=$). D'où l'intérêt de l'introduction de la fonction g auxiliaire définie ci-dessous : on va utiliser le TVI pour prouver que 0 admet un antécédent par g, et pour cela, il n'y a aucun problème !

Méthode : on définit la fonction

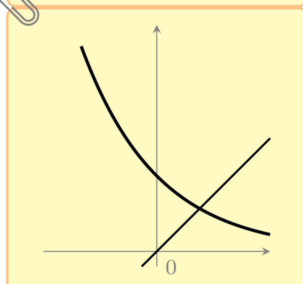
$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$

Soit $x \in D$. Alors x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$. Ainsi, prouver l'existence d'un point fixe de f revient à prouver que g s'annule.



Exemple : Montrer que la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ admet un unique point fixe.

Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Alors f est une somme de deux fonctions strictement décroissantes (f et $x \mapsto -x$) donc est strictement décroissante. De plus, g est continue car somme de fonctions qui le sont. De plus, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. D'après le corollaire du TVI, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$ donc tel que $f(x) = x$: f admet un unique point fixe. Voir graphe ci-contre.



Remarque : On peut montrer de la même façon (cf. exercice 39 du chapitre 13) qu'une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}$ admet un unique point fixe.