Programme de colle - Semaine n°20

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Nathan BISKUPSKI, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 20 - Fractions rationnelles

- cf. semaine 18.

Chapitre 21 - Matrices

- cf. semaines 18 et 19.

Chapitre 22 - Intégration sur un segment

- cf. semaine 19.

Chapitre 23 - Formules de Taylor

- Formule de Taylor reste intégral.
- Inégalité de Taylor-Lagrange (l'égalité de Taylor-Lagrange est HP mais sera vue en TD).
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(x)$$

Contre-exemple : $x \mapsto e^{-1/x^2}$.

Chapitre 24 - Analyse asymptotique et Développements Limités

- Définition d'une suite négligeable devant une autre (on ne manipule dans ce chapitre que des suites non nulles à partir d'un certain rang, les différentes notions sont donc définies à l'aide d'un quotient). Notation $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$. Exemples : si $\alpha < \beta$, $n^\alpha = \mathrm{o}\left(n^\beta\right)$ et $1/n^\beta = \mathrm{o}\left(1/n^\alpha\right)$. Autre écriture des croissances comparées vues au premier semestre. Cas particulier important : $u_n = \mathrm{o}\left(1\right) \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Interprétation.
- Propriétés : une suite bornée est négligeable devant une suite qui tend vers $\pm\infty$, transitivité de la négligeabilité (mais la négligeabilité n'est pas une relation d'ordre), compatibilité avec le produit, on peut sommer les $\mathrm{o}\left(\right)$.
- Suites équivalentes, notation $u_n \sim v_n$, l'équivalence est une relation d'équivalence. Interprétation.
- Équivalents usuels ($\sin, \tan, \mathrm{Arctan}$ etc. d'une suite qui tend vers 0, équivalent d'une suite polynomiale).
- Propriétés : compatibilité avec le $\mathrm{o}\left(\right)$, deux suites équivalentes ont même signe à partir d'un certain rang (mais pas la même monotonie), deux suites équivalentes ont même limite éventuelle (réciproque fausse, sauf dans le cas d'une limite finie non nulle). Attention : dire qu'une suite est équivalente à 0 est passible de châtiments corporels.
- Lien entre équivalence et négligeabilité, obtention d'un équivalent par encadrement. Un équivalent n'a qu'un terme, au-delà, on utilise un $\mathrm{o}\left(\right)$. On ne peut pas simplifier les $\mathrm{o}\left(\right)$.
- Opérations légales (produit, quotient, élévation à une puissance fixe) et illégales (somme, composition par une fonction même continue, élévation à une puissance variable) sur les équivalents. Comment contourner la loi pour la somme.
- Comment contourner la loi avec un ln, avec une exponentielle. Exemple de $\ln(n!)$ en admettant la formule de Stirling.
- Utilisation du théorème de Cesàro pour donner un équivalent. Exemple : $u_0 > 0, u_{n+1} = u_n + 1/u_n$.

- Suites dominées, notation $u_n = \mathrm{O}\,(v_n)$. Cas particulier des fractions rationnelles. Premières propriétés.
- Extension aux fonctions. Attention, la négligeabilité, l'équivalence ou le caractère dominé dépendent de l'endroit où on se place.
- Développements limités au voisinage de 0. Le premier terme non nul du DL donne un équivalent. Unicité du DL, cas des fonctions paires ou impaires. Troncature d'un DL, CNS d'existence du DL à l'ordre 0, à l'ordre 1. Il n'y a plus d'équivalence pour les ordres supérieurs : contre-exemple de $x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ prolongée en 0.
- Formule de Taylor-Young, DL usuels. Primitivation d'un DL (ne pas oublier le terme constant !). Attention, il n'y a pas de propriété de dérivation des DL.
- Allure locale des graphes.
- Écriture d'un DL avec un O, DL ailleurs qu'en 0 (poser $x = a + h, h = x - a$ ce qui permet de se ramener à un DL en 0).
- Opérations sur les DL, exemples.

Chapitres au programme

Chapitre 20 (exercices uniquement), chapitres 21 et 22 (cours et exercices), chapitres 23 et 24 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Toute matrice s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (démonstration).
2. Produit de deux matrices diagonales, produit de deux matrices triangulaires supérieures ou inférieures (énoncé précis, sans démonstration).
3. CNS d'inversibilité des matrices diagonales, triangulaires (énoncé précis, sans démonstration).
4. L'examinateur donne une matrice 3×3 explicite et demande au candidat si elle est inversible, et de l'inverser le cas échéant.
5. Définition d'une fonction en escalier, d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[\,a\,;b\,]$ (à chaque fois avec un joli dessin).
6. Définition d'une somme de Riemann à pas constant (les deux : rectangles à gauche ou à droite, avec à chaque fois un joli dessin).
7. Limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
8. Formule de Taylor avec reste intégral (démonstration).
9. Inégalité de Taylor-Lagrange (sans démonstration).
10. Définition d'une suite négligeable devant une autre, de deux suites négligeables.
11. Opérations légales/illégales pour les équivalents (sans démonstration pour les opérations légales, mais avec un contre-exemple pour les opérations illégales).
12. Donner un équivalent de $\sin(1/n) + \tan(1/n)$ et un équivalent de $\ln(\sin(1/n))$.
13. CNS d'existence d'un DL à l'ordre 0, à l'ordre 1 en 0 (énoncé précis, sans démonstration).
14. Formule de Taylor-Young en 0 (sans démonstration).
15. Les 11 DL de base.

Groupes B - C :

1. Produit de deux matrices triangulaires supérieures et coefficients diagonaux (démonstration).
2. Définition d'une matrice de transvection, de dilatation, de permutation. Opérations élémentaires associées (sans démonstration).
3. Existence de la constante d'Euler, $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (démonstration).
4. Limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{1/n}$.
5. Lemme de Riemann-Lebesgue (démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$).

6. Unicité du DL (démonstration).
7. Théorème de primitivation d'un DL en 0 (énoncé précis, sans démonstration).
8. Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x^2) - \sin^2(x)$.
9. Si α et $\beta \in \mathbb{R}$ alors la fonction [1]

$$f : \begin{cases}]\,0\,;\pi\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\alpha t^2 + \beta t}{2\sin(t/2)} \end{cases}$$

est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Groupe C :

1. Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier (énoncé précis, démonstration uniquement dans le cas où f est continue, avec un joli dessin).
2. Lemme de Riemann-Lebesgue (démonstration dans le cas continu par morceaux).
3. La norme infinie est la limite des normes p (démonstration). Le cas où $||f||_\infty$ est atteinte aux bornes n'a pas été traité en classe : l'examinateur, s'il le souhaite, peut demander au candidat de traiter ce cas. Question à préparer, donc.
4. Limite et équivalent de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

Prévisions pour la semaine prochaine

- Vacances ! ! !
- Fin de l'analyse asymptotique.
- Début des Séries numériques.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14 du chapitre 23 et exercices 1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 48 du chapitre 24.

Cahier de calcul

Chapitre 22.

1. Nous avons traité en classe le cas $\alpha = 1/2\pi$ et $\beta = -1$ pour suivre le sujet des Mines MPI 2023 mais le résultat est toujours vrai pour des réels quelconques. On traitera donc cette question de cours avec des réels quelconques.