Chapitre 14

Dérivation.

Dans ce chapitre, on se donne I un intervalle non vide et non réduit à un point. On se donne dans ce chapitre deux fonctions f et g définies sur I et, sauf indication contraire (dans la partie V) à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I Dérivabilité

I.1 Généralités

I.1.a Premières définitions

Définition. Soit $a \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en a la fonction $\tau_a(f)$ (ou τ_a quand aucune confusion n'est possible) définie par :

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

Définition. Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I \backslash \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite finie en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Remarque : En posant $h = x - a \xrightarrow[x \to a]{} 0$, on a la définition équivalente suivante : f est dérivable en a lorsque la fonction $h \longmapsto \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0, et on a alors :$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Définition. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On appelle alors dérivée de f la fonction notée f' définie par :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right.$$

Remarque : Ainsi, la dérivabilité est une notion ponctuelle : une fonction est dérivable sur un ensemble si elle est dérivable en tout point de cet ensemble. Une conséquence de ce résultat est que la dérivabilité passe à l'union (comme la continuité, mais pas comme la continuité uniforme, cf. chapitre 13, ou comme la lipschitzianité, cf. II.3), c'est-à-dire que si f est dérivable sur une famille d'ensembles $(E_i)_{i \in I}$, alors elle est dérivable sur $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$.

Attention, contrairement à tous les dessins qu'on a déjà vus, une fonction peut très bien être dérivable en un point sans être dérivable sur un voisinage de ce point, cf. exercice 15.

Définition. On dit que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.

Définition. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $D(I, \mathbb{R})$ et l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ sur I est noté $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$.

On connaît déjà les dérivées mais, comme pour les limites et la continuité, le but de ce chapitre est de tout redémontrer (et de voir de nouveaux résultats). On part de zéro et on ne suppose rien d'acquis. Nous allons en particulier prouver les résultats admis dans les chapitres 2 et 4.

En d'autres termes, le nombre dérivé est, quand elle existe, la limite du taux d'accroissement. De plus, la dérivée étant une limite quand x tend vers a mais x différent de a, cela n'a pas de sens de s'intéresser à la dérivabilité d'une fonction définie en un point isolé.

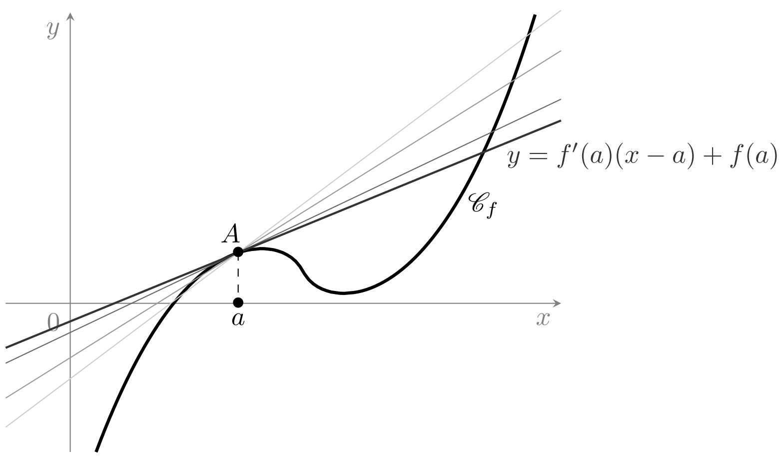
En résumé, « f est dérivable sur I » = « f' est définie sur I » et « f est $\mathscr{C}^1$ sur I » = « f' est continue sur I ». Une fonction $\mathscr{C}^1$ est évidemment dérivable par définition. On verra dans le paragraphe I.3. que la réciproque est fausse. En termes ensemblistes,

$$\mathscr{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset D(I, \mathbb{R}).$$

Exemples :

- Soit $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{x-a}{x-a} = 1 \xrightarrow[x\to a]{} 1$.
  En d'autres termes, f est dérivable en a (et donc sur $\mathbb{R}$ car a est quelconque) et $f'(a) = 1$. De plus f est donc $\mathscr{C}^1$ car f' (la fonction constante égale à 1) est continue sur $\mathbb{R}$.
- Si f est constante (disons égale à λ), alors on montre de même que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée nulle et est donc $\mathscr{C}^1$.
- Si f est la fonction racine carrée : soit $a > 0$ et soit $x \in \mathbb{R}_+, x \neq a$.
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}},$$
  par continuité de la racine carrée. De plus, si $a = 0$ et si $x > 0$,
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$
  En d'autres termes, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, n'est pas dérivable en 0, et si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Ainsi, f est donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Si f est la fonction valeur absolue : si $a > 0$ alors, de même que précédemment, f est dérivable en a et $f'(a) = 1$, tandis que si $a < 0$, f est dérivable en a et $f'(a) = -1$. Supposons que $a = 0$: soit $x \neq 0$. Si $x > 0$,
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$
  tandis que si $x < 0$,
  $$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{|x|}{x} = -1 \xrightarrow[x\to 0^-]{} -1$$
  Le taux d'accroissement de f n'admet donc pas de limite en 0 (car admet des limites à gauche et à droite distinctes) donc la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Interprétation géométrique : On note A le point de coordonnées $(a, f(a))$ (c'est-à-dire le point d'abscisse a sur la courbe de f) et M le point d'abscisse x. Ainsi $\tau_a(x)$ est le coefficient directeur de la droite (AM). Si f est dérivable en a alors, quand x tend vers a, « M tend vers A » et la droite (AM) « tend vers une droite limite » (passant toujours par A) de coefficient directeur $f'(a)$.



Cette droite est appelée tangente à $\mathscr{C}_f$ en A ou au point d'abscisse a (ou en a par abus de langage). En d'autres termes :

Si $x > 0$, la notation $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ n'est pas correcte car $\sqrt{x}$ est un réel, pas une fonction. On prendra l'habitude d'introduire une fonction f : « soit f la fonction $x \longmapsto \dots$ alors f est dérivable et pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dots$ ». On peut également utiliser la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

On verra dans le paragraphe suivant (I.2.b) qu'une fonction dérivable est continue. On voit ci-contre que la réciproque est fausse : la valeur absolue et la racine carrée sont continues non dérivables en 0.

Interprétation physique/cinématique : Si $f(t)$ est la position à l'instant t, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la vitesse moyenne (éventuellement négative si on recule) entre x et a (le très célèbre « $v = d/t$ »). Au fur et à mesure que x se rapproche de a, on calcule la vitesse moyenne sur un laps de temps toujours plus court contenant a et donc on peut interpréter $f'(a)$ comme la vitesse instantanée à l'instant a (et c'est même comme cela qu'on la définit en physique).

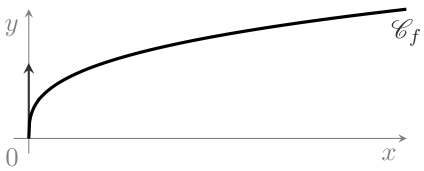
Définition. Si f est dérivable en a, on appelle tangente à la courbe de f en a la droite passant par $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$.

Proposition. Si f est dérivable en a, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est la droite d'équation $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'appliquer la définition. $\square$

Définition. Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est appelée tangente verticale à $\mathscr{C}_f$ en $A(a, f(a))$.

Si $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} \pm\infty$, alors la droite (AM) « tend » aussi vers une une position limite, qu'on appelle aussi tangente à $\mathscr{C}_f$ en a, mais cette fois la droite est alors verticale.



En conclusion : Géométriquement, f est dérivable en a si et seulement si $\mathscr{C}_f$ admet en a une tangente **non verticale**.

I.1.b Une condition nécessaire importante

Proposition. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

La réciproque est fausse ! Une fonction peut être continue en un point mais non dérivable. Par exemple, la valeur absolue et la racine carrée sont continues mais non dérivables en 0. Il existe même des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dérivables en aucun point !

DÉMONSTRATION. Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{a\}$,

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times (x-a).$$

Or, f est dérivable en a donc $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a)$ et $x - a \xrightarrow[x \to a]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ donc f est continue en a. $\square$

I.1.c Dérivabilité à droite et à gauche

Définition. Soit $a \in I$. f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a si τ_a admet une limite à droite (respectivement à gauche) finie en a. On note alors cette limite $f_d'(a)$ (respectivement $f_g'(a)$).

Remarque : De manière analogue à la continuité à droite, la dérivabilité à droite en a est équivalente à la dérivabilité en a de la restriction de f à $I \cap [\, a\,; +\infty\,[$. De même à gauche. Cela permettra d'appliquer à la dérivabilité à gauche ou à droite des résultats vrais pour la dérivabilité.

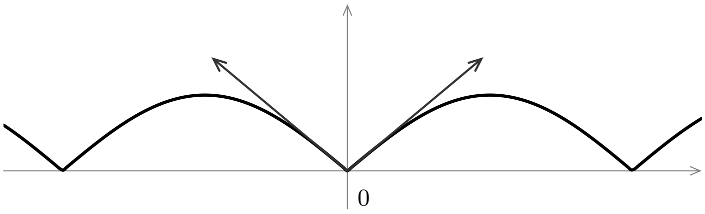
Exemple : La valeur absolue est dérivable à droite et à gauche en 0, et si on la note f, alors $f_d'(0) = 1$ et $f_g'(0) = -1$.

Proposition. Si f est dérivable à droite (respectivement à gauche) en a, alors f est continue à droite (respectivement à gauche) en a.

DÉMONSTRATION. Analogue au paragraphe précédent. $\square$

On définit de manière analogue au I.1.a une fonction dérivable à droite ou à gauche sur I tout entier.

Remarque : Si f est dérivable à gauche (respectivement à droite) en a, on dit que $\mathscr{C}_f$ admet en a une demi tangente à gauche (respectivement à droite) en a, définie de manière analogue au a). Ci-dessous le graphe de $|\sin|$.



Proposition. Soit $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

On retrouve le fait que la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. De manière générale, si le graphe d'une fonction f présente un « pic » en a, alors f n'est pas dérivable en a.

DÉMONSTRATION. cf. chapitre : la fonction τ_a n'étant pas définie en a, elle admet une limite finie en a si et seulement si elle admet une limite finie à gauche et à droite et si celles-ci sont égales.

Application aux fonctions définies « par cas » : Donnons un exemple « où tout se passe bien ». Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \ln(1+x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

La fonction ln et la fonction sin étant continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue à droite (car l'inégalité est large) en 0 avec $f(0) = 0$. De plus, si $x < 0$, alors $f(x) = \sin(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \sin(0) = 0 = f(0)$. Ainsi f est continue à gauche donc continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

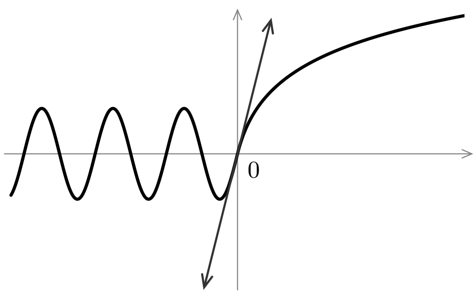
On utilise dans cet exemple les expressions des dérivées des fonctions ln et sin, qu'on démontrera dans la suite.

La fonction ln et la fonction sin étant dérivables (voir I.4.c pour le sinus, et III.1 pour le ln), f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable à droite en 0 avec $f'_d(0) = 1$. De plus, si $x < 0$:

Limite usuelle, qui découle de la dérivée du sinus.

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 1$$

Ainsi, f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1 = f'_d(0)$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Ci-dessous le graphe de f (non à l'échelle : la tangente en 0 est la première bissectrice !).



Morale de l'histoire : faire attention aux points de recollement ! Comme pour les fonctions continues, même si la dérivabilité est une notion ponctuelle, qui passe donc à l'union, il est faux de dire : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car $x \mapsto \ln(1+x)$ l'est, et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ car sin l'est, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. En effet, le fait que $x \mapsto \ln(1+x)$ soit dérivable assure simplement la dérivabilité **à droite** en 0 ! On voit bien d'ailleurs avec le deuxième exemple que ce genre de raisonnement ne tient pas.

Donnons un exemple où cela se passe moins bien : on pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors f est dérivable à droite en 0 avec ${f_d}'(0) = 1$. Soit $x < 0$. Alors

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$$

ce qui implique que f est dérivable à gauche en 0 avec ${f_g}'(0) = -1 \neq {f_d}'(0)$: f n'est pas dérivable en 0, alors que $x \mapsto \pm x$ le sont. On voit donc que dire : « $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont dérivables donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ donc sur $\mathbb{R}$ » est faux. L'erreur est que f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}_+$, mais seulement sur $\mathbb{R}_+^*$ et dérivable **à droite** en 0.

On a bien sûr reconnu la fonction valeur absolue.

Application : raccordement (ou recollement) des solutions d'une EDL du premier ordre : On peut parfois vouloir des solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier et pas uniquement sur les domaines d'intégrations (i.e. les intervalles composant l'ensemble sur lesquels l'équation a un sens, ou les intervalles sur lesquels la fonction devant y' ne s'annule pas, cf. chapitre 11). La méthode est très simple :

- On fait comme d'habitude, on résout l'équation sur chaque domaine d'intégration. En effet, pour qu'une fonction soit solution sur $\mathbb{R}$, elle doit l'être au moins « sur chaque morceau ». On travaille ensuite par analyse synthèse.
- On calcule la valeur en les points de recollement, i.e. les points de jointure des domaines d'intégration.
- On vérifie que f est dérivable en ces points (ou on cherche une CNS pour qu'elle le soit). Il faut en général s'intéresser à la dérivée à droite et à gauche (il faut également parfois appliquer le théorème de la limite de la dérivée, cf. paragraphe II.6).
- Étape qui passe souvent à la trappe : il faut vérifier que f est encore solution de l'EDL en les points en lesquels elle a été prolongée.

Exemple : Étudier l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'EDL $xy' - (1+x)y + (1+x^2)e^x = 0$.

On montre comme dans le chapitre 11 (exo) que, sur les domaines d'intégration $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, l'ensemble des solutions est :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda x e^x + \left(1 - x^2\right) e^x \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche les éventuelles solutions sur $\mathbb{R}$. Analyse : soit f une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

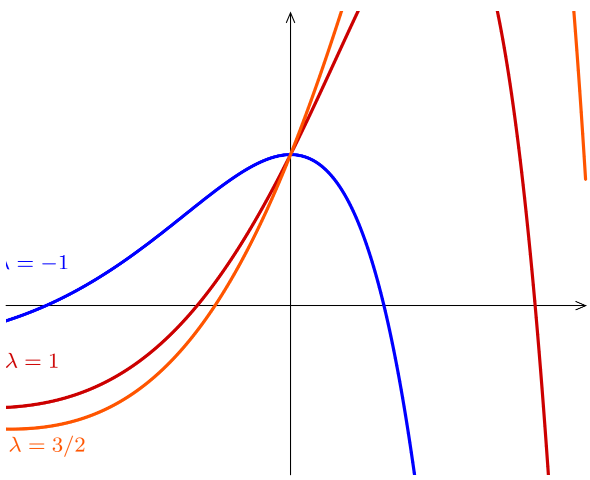
Les deux constantes n'ont aucune raison d'être les mêmes sur chaque domaine d'intégration !

$$\forall x < 0, f(x) = \lambda_1 x e^x + \left(1 - x^2\right) e^x \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, f(x) = \lambda_2 x e^x + \left(1 - x^2\right) e^x$$

Par conséquent, $f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$. Or, f est solution sur $\mathbb{R}$ donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, f est continue en 0 donc $f(0) = 1$. Dès lors, pour tout $x < 0$:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\lambda_1 x e^x + \left(1 - x^2\right) e^x - 1}{x} \\ &= \lambda_1 e^x + \frac{e^x - 1}{x} - x e^x \\ &\xrightarrow[x\to 0^-]{} \lambda_1 + 1 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f'(0) = \lambda_1 + 1$ (f est dérivable donc dérivable à gauche et ${f_g}'(0) = f'(0)$). De même, en regardant la dérivabilité à droite, $f'(0) = \lambda_2 + 1$ donc $\lambda_2 = \lambda_1$. Ci-joint le graphe de plusieurs solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On voit que le raccordement n'est pas toujours dérivable : pour que ce soit le cas, il faut avoir $\lambda_1 = \lambda_2$.



Posons $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Il en découle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (valable aussi si $x = 0$), $f(x) = \lambda x e^x + e^x\left(1 - x^2\right)$. Synthèse : il est immédiat (exo) que cette fonction est bien solution sur $\mathbb{R}$. En conclusion, les solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier sont toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda x e^x + \left(1 - x^2\right) e^x$.

I.2 Opérations sur les fonctions dérivables en un point

I.2.a Sommes et produits

Théorème. Soit $a \in I$. Si f et g sont dérivables en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f + g, \lambda f$ et $f \times g$ sont dérivables en a et :

- $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
- $(\lambda f)'(a) = \lambda \times f'(a)$.
- $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Tous ces résultats sont encore vrais si on remplace « dérivable » par « dérivable à gauche » ou « dérivable à droite » : en effet, I étant quelconque, ce qui est vrai pour une fonction dérivable sur I l'est aussi pour une fonction dérivable sur $I \cap\,]-\infty\,;a]$ ou $I \cap [\,a\,;+\infty[$.

Démonstration. Soit $x \in I$ tel que $x \neq a$.

- Pour la somme :

$$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x) - f(a)}{x-a} + \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) + g'(a).$$

  car f et g sont dérivables en a. En d'autres termes, $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

Rappelons qu'une fonction est dérivable ssi son taux d'accroissement admet une limite finie, et alors le nombre dérivé est égal à cette limite.

- Pour la multiplication par un scalaire : $\rightsquigarrow$ Exercice.
- Pour le produit : notons $\tau_a(x) = \dfrac{(f \times g)(x) - (f \times g)(a)}{x-a}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \tau_a(x) &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= f(x) \times \frac{g(x) - g(a)}{x-a} + \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \times g(a). \end{aligned}$$

  Or, f est dérivable donc continue en a donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. De plus, f et g sont dérivables en a donc, finalement, $\tau_a(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)g'(a) + f'(a)g(a)$. En d'autres termes, $f \times g$ est dérivable en a et $(f \times g)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$. □

I.2.b Composition

Théorème. Soient $f : I \longrightarrow J$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$$

J est un autre intervalle non vide, non réduit à un point.

Démonstration. Définissons la fonction

$$\tau_{f(a)} : \left\{ \begin{array}{ccc} J \backslash f(a) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \dfrac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} \end{array} \right.$$

Puisque g est dérivable en $f(a)$, alors $\tau_{f(a)}(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} g'(f(a))$. On prolonge $\tau_{f(a)}$ par continuité en posant $\tau(f(a)) = g'(f(a))$. Soit $x \in I$. Alors

$$\tau_{f(a)}(f(x)) \times (f(x) - f(a)) = g \circ f(x) - g \circ f(a)$$

Attention, de même qu'une composée de fonctions continues à droite n'est pas continue à droite, une composée de fonctions dérivables à droites n'est pas forcément dérivable à droite. En effet, si f décroît, alors f « transforme la droite en gauche ». Comme pour la continuité, une seule solution : le cas par cas, et le faire à la main.

(que $f(x)$ soit égal à $f(a)$ ou non). Par conséquent, pour tout $x \neq a$,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \tau_{f(a)}(f(x))$$

Or, $y = f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ car f est dérivable donc continue en a, et $\tau_{f(a)}(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} g'(f(a))$. Par composition de limites, $\tau_{f(a)}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} g'(f(a))$. Par conséquent,

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a]{} f'(a) \times g'(f(a)) \qquad \square$$

ce qui permet de conclure.

I.2.c Quotient

On revient dans ce paragraphe à des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

Théorème. La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, de fonction dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x^2}$. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Démonstration. Soit $a \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^* \backslash \{a\}$,

$$\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = \frac{a-x}{ax(x-a)} = \frac{-1}{ax} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{a^2}$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Corollaire. Si f et g sont dérivables en a et si $g(a) \neq 0$ alors :

- $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(a) = \dfrac{-g'(a)}{g^2(a)}$.
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)$ est dérivable en a et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

Encore une fois, c'est vrai pour les fonctions dérivables à droite ou à gauche.

Démonstration. Immédiat en remarquant que $\dfrac{1}{g} = \varphi \circ g$ où φ est la fonction inverse puis en remarquant que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. $\square$

Il peut être parfois plus simple de dériver un quotient $\dfrac{f}{g}$ comme un produit (c'est-à-dire en l'écrivant $f \times \dfrac{1}{g}$).

I.3 Opérations sur les fonctions dérivables sur un intervalle

Le réel a dans les paragraphes précédents étant quelconque, on en déduit les deux théorèmes suivants.

Théorème. Si f et g sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g', \qquad (\lambda f)' = \lambda \times f', \qquad (f \times g)' = f'g + fg'.$$

De plus, si g ne s'annule pas sur I, alors $1/g$ et f/g sont dérivables et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2} \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

En particulier, si f et g sont $\mathscr{C}^1$ sur I, alors $f+g$, λf, $f \times g$ sont $\mathscr{C}^1$ sur I. Si, de plus, g ne s'annule pas sur I, $1/g$ et f/g sont $\mathscr{C}^1$ sur I.

En d'autres termes, une somme, un produit de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) et un quotient de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$) là où son dénominateur ne s'annule pas.

Remarque : Ces résultats se généralisent facilement à un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables (par récurrence) :

Nous l'avons déjà vu dans le chapitre 3.

- Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont dérivables alors $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ l'est aussi et
$$(\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n)' = \lambda_1 {f_1}' + \cdots + \lambda_n {f_n}'$$
Avec un symbole $\sum$:
$$\left(\sum_{i=1} \lambda_i f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {f_i}'$$
On dit que la dérivation est **linéaire**.
- Si f, g, h sont trois fonctions dérivables alors fgh l'est et
$$(f \times g \times h)' = f'gh + fg'h + fgh'$$
et on généralise sans peine à $f_1 \times \cdots \times f_n$. Inutile d'apprendre une formule compliquée : on dérive les fonctions une à une et on somme. Avec les symboles $\sum$ et $\prod$:
$$\left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left({f_i}' \times \prod_{j \neq i} f_j\right)$$

On se replace dans le cadre du paragraphe I.2.b : f va de I dans J et g va de J dans $\mathbb{R}$ avec J un autre intervalle non vide, non réduit à un point.

Théorème. Si f est dérivable sur I, $f(I) \subset J$ et g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$. En particulier, si f et g sont $\mathscr{C}^1$, alors $g \circ f$ l'est aussi. En d'autres termes, une composée de fonctions dérivables (resp. $\mathscr{C}^1$) est dérivable (resp. $\mathscr{C}^1$).

Proposition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ dérivable.

- Si f est paire alors f' est impaire.
- Si f est impaire alors f' est paire.
- Soit $T \in \mathbb{R}$. Si f est T-périodique alors f' est T-périodique.

D est une union d'intervalles non vides, non réduits à un point.

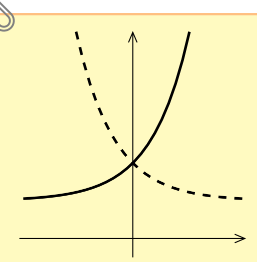
Démonstration.
- Supposons f paire. Notons $g : x \mapsto f(-x)$. Puisque $f = g$ alors $f' = g'$. Or, pour tout $x \in E$, $g'(x) = -f'(-x)$ donc $f'(x) = -f'(-x)$: f' est impaire.
- Démonstration analogue : $\rightsquigarrow$ Exercice.
- Supposons f T-périodique. Notons $g : x \mapsto f(x+T)$. Puisque $f = g$ alors $f' = g'$. Or, pour tout $x \in E$, $g'(x) = f'(x+T)$ donc $f'(x) = f'(x+T)$: f' est T-périodique.

Attention, la réciproque est fausse ! Par exemple, si on pose $f : x \mapsto x^3 + 1$, alors f' est paire mais f n'est pas impaire. cf. chapitre 10.

Remarques :

- Nous avons parlé de la dérivabilité d'une fonction définie sur E, partie de $\mathbb{R}$, qui n'est pas forcément un intervalle. Ce n'est pas très grave, on peut généraliser la notion de fonction dérivable sur un ensemble qui n'est pas un intervalle dans le paragraphe II.5.
- Attention, quand on dérive $f(-x)$, il ne faut pas juste écrire $f'(-x)$, il ne faut pas oublier de dériver ce qu'il y a dedans i.e. d'appliquer le théorème de dérivation d'une composée.
- Attention, si deux fonctions dérivables sont égales, alors leurs taux d'accroissements sont égaux, donc elles ont la même dérivée, mais la réciproque est fausse ! Par exemple, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^2 + 1$ ont la même dérivée mais ne sont pas égales. En effet, (cf. chapitre 10) que, sur un intervalle, deux fonctions ont la même dérivée si et seulement si elles diffèrent d'une constante : on dit que les primitives d'une fonctions sont définies à une constante près.

- Attention, on ne peut dériver une égalité que lorsque celle-ci est valable sur tout un intervalle, pas uniquement en un point ! N'oublions pas que la notion de dérivée fait intervenir une limite, donc la fonction sur tout un voisinage. Ce n'est pas parce que deux fonctions coïncident en un point que les dérivées sont égales, les tangentes ne sont pas forcément les mêmes (voir dessin ci-contre : les fonctions coïncident en 0 mais les dérivées ne sont pas les mêmes). Par exemple, si $x = 0$, alors $e^x = 1$, mais qui irait dériver cette égalité en disant que $\exp'(0) = \exp(0) = 0$?



I.4 Fonctions usuelles

I.4.a Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Théorème. Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $f : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur D_f ($\mathbb{R}$ si $n \geqslant 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$) de dérivée $f' : x \longmapsto nx^{n-1}$. En particulier, f est $\mathscr{C}^1$ sur D_f.

Démonstration. Par récurrence pour $n \geqslant 0$ (on connaît déjà la dérivée de l'identité et des fonctions constantes), et si $n < 0$, il suffit de voir que $x^n = 1/x^{-n}$ avec $-n > 0$: $\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple : La fonction $f : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto 1/x^2 = x^{-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f' : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto (-2)x^{-2-1} = -2/x^3$.

Corollaire.
- Une fonction polynôme est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, si $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, alors $f' : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.
- Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

Rappelons qu'une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynômes.

On a fait un léger abus de langage : le domaine de définition d'une fonction rationnelle n'est pas forcément un intervalle, tout comme, dans le paragraphe précédent, l'ensemble des points en lesquels g ne s'annule pas. On en parlera plus en détails dans le paragraphe II.4.

Remarque : On donnera la dérivée des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \notin \mathbb{Z}$ dans le paragraphe III.1.

I.4.b Fonction exponentielle

Théorème (admis). La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Remarques :
- Cela découle en fait de sa définition, vue en terminale et dans le chapitre 2. C'est l'existence qui est admise, la démonstration n'étant pas au programme. Vous ferez ça l'année prochaine, avec les séries entières.
- On donnera la dérivée de la la fonction ln dans le paragraphe III.1.

I.4.c Fonctions trigonométriques

Théorème.
1. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
2. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

En particulier, sin et cos sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Cf. chapitre 5 pour la démonstration.

Corollaire. La fonction tangente est dérivable sur son domaine de définition et $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$. En particulier elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple : Appliquons le théorème de dérivation d'une composée. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\exp(f)$, $\sin(f)$, f^{1789} sont dérivables sur I et $(\exp(f))' = f' \times \exp(f)$, $(\sin(f))' = f' \times \cos(f)$, $(f^{1789})' = 1789 \times f' \times f^{1788}$.

De manière générale, « on dérive ce qu'il y a à l'intérieur, puis on dérive la fonction à l'extérieur appliquée à la fonction à l'intérieur ».

Exemples :

- Soit $\varphi : x \longmapsto (2x+3)^4$. Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = 4 \times 2 \times (2x+3)^3$.
- La fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'ést une composée de fonctions dérivables. En effet :
  - ⋆ $x \longmapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
  - ⋆ La racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
  - ⋆ L'exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
  - ⋆ La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $1+e^y \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

  Calculons la dérivée de f.
  - ⋆ Posons $g : x \longmapsto \sqrt{x^2+1}$. On a (on a déjà dit que tout était dérivable)
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
  - ⋆ Posons $h : x \longmapsto \cos(\sqrt{x^2+1}) = \cos(g(x))$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = g'(x) \times -\sin(g(x)) = \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$
  - ⋆ Posons $u : x \longmapsto e^{\cos(\sqrt{x^2+1})} = e^{h(x)}$. Alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u'(x) = h'(x) \times e^{h(x)} = \frac{-x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}.$$
  - ⋆ Finalement, puisque $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+u(x)}$, il vient :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{-u'(x)}{(1+u(x))^2} \\ &= \frac{x\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{\cos(\sqrt{x^2+1})} \times \frac{1}{\left(1+e^{\cos(\sqrt{x^2+1})}\right)^2}.\end{aligned}$$

⚠ Tous les résultats de ce paragraphe donnent des conditions <u>suffisantes</u> pour qu'une fonction soit dérivable. **Aucun** ne donne de condition pour qu'une fonction ne soit pas dérivable. En d'autres termes, si f et g sont dérivables, on peut dire que $f+g$ et $f \times g$ sont dérivables, mais on ne peut rien affirmer si f et g ne sont pas dérivables. En effet, une somme ou un produit de fonctions non dérivables peut être dérivable : par exemple, si f est la valeur absolue, alors f n'est pas dérivable en 0 mais $f-f$ est la fonction nulle et $f \times f$ est la fonction carré, toutes deux dérivables en 0. Si aucun des théorèmes ne s'applique, on ne peut pas conclure que la fonction étudiée n'est pas dérivable. Une seule solution : le taux d'accroissement, c'est-à dire revenir à la définition d'une fonction dérivable.

Exemple : Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto |x|^3$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \neq 0$.

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|^3}{x}$$

- Si $x > 0$, $\tau_0(x) = \dfrac{x^3}{x} = x^2 \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, i.e. f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$.
- Si $x < 0$, $\tau_0(x) = \dfrac{x^3}{-x} = -x^2 \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$, i.e. f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0) = 0 = f_d'(0)$.

⚠ Cependant, ce n'est pas parce que la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 que f ne l'est pas. Aucun théorème ne nous permet de conclure quant à la dérivabilité de f en 0. Une seule solution : le taux d'accroissement.

Par conséquent, f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Exemple : Soit

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x+x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\end{array}\right.$$

Montrons que f est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais non $\mathscr{C}^1$.
Déjà f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car somme, produit et composée de fonctions dérivables. Si $x\in\mathbb{R}^*$, $x-x^2\leqslant f(x)\leqslant x+x^2$ et donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$: on peut prolonger f par continuité en posant $f(0)=0$. De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1+x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

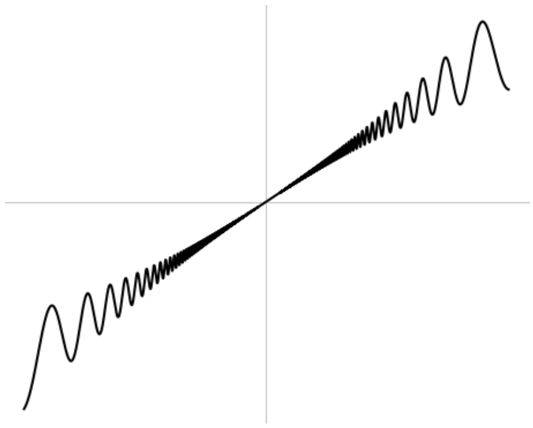
car $x\sin\left(1/x^2\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ (idem, on encadre par $\pm|x|$). En d'autres termes, f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$. Montrons cependant que f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$f'(x)=1+2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)+x^2\times\frac{-2}{x^3}\times\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=1+2x\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)-\frac{2}{x}\times\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si $n\geqslant 1$, posons $x_n=1/\sqrt{2n\pi}$. Puisque $\sin(2n\pi)=0$ et $\cos(2n\pi)=1$, il vient $f'(x_n)=1-2\sqrt{2n\pi}\xrightarrow[n\to+\infty]{}-\infty$. Si f est $\mathscr{C}^1$ alors f' est continue en 0. Or, $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $f'(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f'(0)\in\mathbb{R}$ ce qui est absurde : f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$.

Remarque : Une autre façon de voir que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ est de voir que si f est $\mathscr{C}^1$ alors f' est continue, et puisque $f'(0)=1$, alors f' est strictement positive sur un voisinage de 0, ce qui est absurde d'après ce qui précède : puisque $x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, alors tout voisinage de 0 contient x_n pour n assez grand, et en particulier, il existe au moins un point de ce voisinage en lequel f' est strictement négative, ce qui est donc absurde.

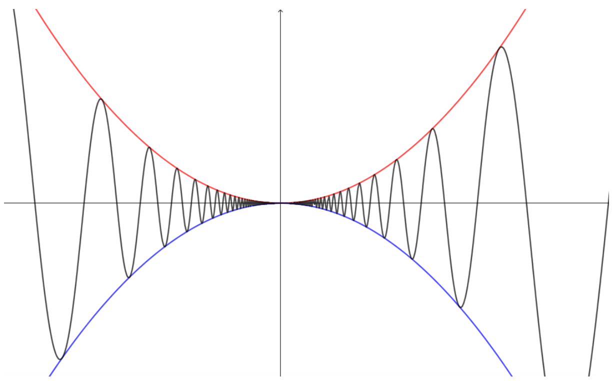
De plus, ceci implique que f n'est croissante sur aucun voisinage de 0 (car f n'est positive sur aucun voisinage, cf. paragraphe II.2), alors que $f'(0)=1$! Cela ne contredit pas l'équivalence « f croissante ssi f' positive » (vue dans le paragraphe II.2) : celle-ci n'est vraie que sur un intervalle, pas en un point ! Il faut comprendre que, même si la dérivée vaut 1 en 0, la fonction a une tangente dirigée vers le haut mais « oscille » très fortement sur tout voisinage de 0 donc n'est pas croissante, même localement (voir le dessin ci-contre).



Exemple : Soit

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\end{array}\right.$$

De même (exo), f est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais non $\mathscr{C}^1$.



II Accroissements finis

II.1 Théorème de Rolle

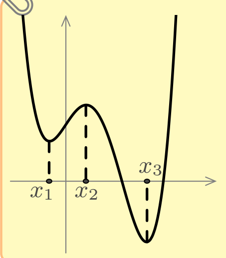
II.1.a Extrema locaux

Définition. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On dit que f admet en a :

- un maximum local s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,]$, $f(x) \leqslant f(a)$.
- un minimum local s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,]$, $f(x) \geqslant f(a)$.
- un extremum local si f admet en a un minimum ou un maximum local.

En d'autres termes, f admet un extremum local en a si f admet en a un extremum sur un voisinage de a.

Remarque : Par opposition à extremum local, on dit parfois qu'un extremum (minimum ou maximum) est un extremum global. Un extremum global est évidemment un extremum local mais la réciproque est fausse. Par exemple, sur le dessin ci-contre, f admet un minimum local en x_1, un maximum local en x_2, un minimum global en x_3 et n'admet pas de maximum global.



Remarque : Attention aux raccourcis concernant la monotonie ! Contrairement à ce que tous les dessins que nous faisons peuvent laisser croire, si f admet un minimum en x_0, elle n'est pas forcément « décroissante puis croissante » sur un voisinage de x_0, cf. exercice 9.

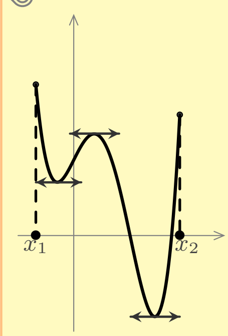
Rappel : On note $\overset{o}{I}$ l'intérieur de I (cf. chapitre 12). Puisque I est un intervalle, alors $\overset{o}{I}$ est l'intervalle ouvert ayant les mêmes bornes que I. En particulier, si I est ouvert, alors $I = \overset{o}{I}$.

Exemples :

- Si $I = \mathbb{R}_+$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}_+^*$.
- Si $I = [\,0\,;1\,]$, alors $\overset{o}{I} =]\,0\,;1\,[$.
- Si $I =]\,0\,;1\,[$, alors $\overset{o}{I} =]\,0\,;1\,[$
- Si $I = \mathbb{R}$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}$.

Proposition (condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $\underline{a \in \overset{o}{I}}$. Si f admet en a un extremum local et si f est dérivable en a alors $f'(a) = 0$.

Remarque : ⚠ L'hypothèse $a \in \overset{o}{I}$ est indispensable. En effet, le résultat ci-dessus est faux si a est une borne de I. Par exemple, sur le dessin ci-contre, f a bien une dérivée nulle en tous les extrema locaux intérieurs (géométriquement, cela se traduit par une tangente horizontale) mais f admet des extrema locaux en x_1 et en x_2 (et même un maximum global en x_1), et pourtant f' ne s'annule ni en x_1 ni en x_2 !



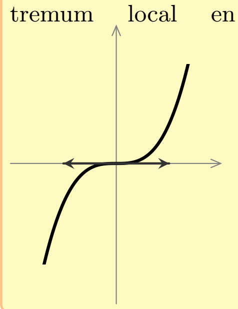
Démonstration. On suppose que f admet en a un minimum local (raisonnement analogue dans l'autre cas). Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in I \cap [\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,]$, $f(x) \geqslant f(a)$.

- Soit $x \in I \cap [\,a-\varepsilon\,;a\,[$ (un tel x existe car $a \in \overset{o}{I}$). Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$.

  Or, f étant dérivable en a, $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x \to a^-]{} f'(a)$. L'inégalité large passe à la limite donc $f'(a) \leqslant 0$.
- Soit $x \in I \cap]\,a\,;a+\varepsilon\,]$. Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$. De même, $f'(a) \geqslant 0$.

Finalement, $f'(a) = 0$. □

⚠ La réciproque est fausse ! Par exemple, si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0 !



Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, soit $a \in I$. Si $f'(a) = 0$, on dit que a est un point critique de f.

Remarques :

- En d'autres termes, un point critique est un zéro de la dérivée.

- On vient donc de montrer que si un extremum local est atteint en un point intérieur, celui-ci est un point critique, mais la réciproque est fausse.

II.1.b Théorème de Rolle

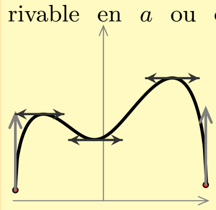
Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Théorème (théorème de Rolle). Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Notons $m = \min\limits_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max\limits_{[\,a\,;b\,]} f$.

- Premier cas : $m = M$. Alors f est constante sur $[\,a\,;b\,]$ donc tout $c \in\,]\,a\,;b\,[$ convient.
- Deuxième cas : $m < M$. Puisque $f(a) = f(b)$, alors au moins un des deux réels m ou M est atteint sur $]\,a\,;b\,[$ (les deux ne peuvent pas être atteints aux bornes). Supposons (le raisonnement est analogue dans l'autre cas) que m est atteint sur $]\,a\,;b\,[$: il existe donc $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) = m$. f atteint un minimum global donc local en c qui est un point intérieur à $[\,a\,;b\,]$, donc $f'(c) = 0$. $\square$

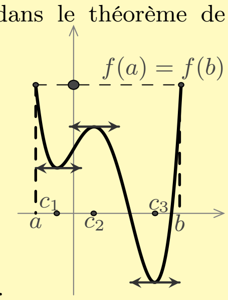
f n'a pas besoin d'être dérivable en a ou en b :

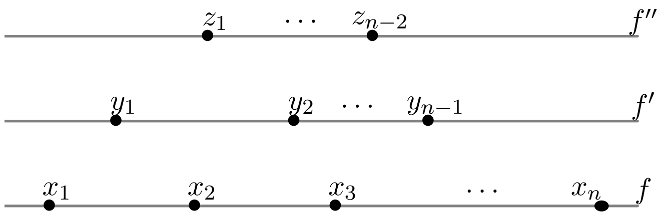


Exemple type : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable deux fois. Soit $n \geqslant 3$. On suppose que f s'annule n fois. Montrer que f'' s'annule au moins $n-2$ fois.

- Par hypothèse, il existe $x_1 < \cdots < x_n$ tels que $f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$. Pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, f est continue sur $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ et $f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in\,]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ tel que $f'(y_i) = 0$.
- Il existe donc $y_1 < \cdots < y_{n-1}$ tels que $f'(y_1) = \cdots = f'(y_{n-1}) = 0$. Pour tout $i \in [\![1\,;n-2]\!]$, f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $[\,y_i\,;y_{i+1}\,]$, dérivable sur $]\,y_i\,;y_{i+1}\,[$ et $f'(y_i) = f'(y_{i+1}) = 0$ donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $z_i \in\,]\,y_i\,;y_{i+1}\,[$ tel que $f''(z_i) = 0$.

Il n'y a pas forcément unicité dans le théorème de Rolle.





Finalement, f'' s'annule bien au moins $n-2$ fois.

Remarque : Il est impératif de bien visualiser le dessin ci-dessus (ou analogue) quand on applique le théorème de Rolle (et encore plus quand on l'applique plusieurs fois). Précisons que les y_i ne sont pas forcément au milieu des intervalles $]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$.

En clair : « quand on dérive, on perd un point où la fonction s'annule ».

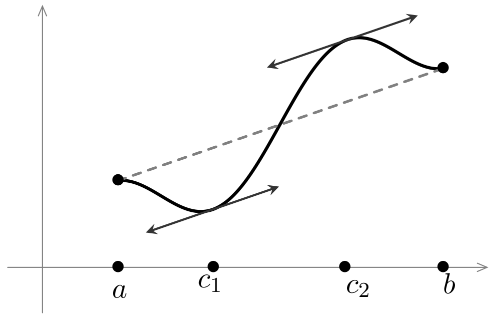
II.2 Égalité des accroissements finis

Théorème (EAF). Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$. Alors il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Là aussi, on suppose sans le dire que $a \neq b$.

Interprétation géométrique : Il existe $c \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ soit parallèle à la droite (AB).



Interprétation cinématique : Il y a un instant où la vitesse instantanée a été égale à la vitesse moyenne. Par exemple, si on parcourt 210 km ($f(b)-f(a)$) en 3h ($b-a$), il y a un instant où on a roulé à 70 km/h ($f'(c)$).

DÉMONSTRATION. Introduisons $\varphi = f - g$ avec $g : [\,a\,;b\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine vérifiant $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$, c'est-à-dire :

$$g : x \longmapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \times (x-a) + f(a).$$

C'est la fonction affine qui coïncide avec f en a et en b, la fonction dont le graphe est en pointillés dans le graphe ci-dessus.

- φ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ car f et g le sont (f par hypothèse et car g est affine).
- φ est dérivable sur $]\,a\,;b\,[$ car f et g le sont.
- $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or on a $\varphi'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui permet de conclure. □

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur I dérivable sur $\overset{o}{I}$.

1. f est croissante sur I si et seulement si f' est positive sur $\overset{o}{I}$.
2. f est décroissante sur I si et seulement si f' est négative sur $\overset{o}{I}$.
3. f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $\overset{o}{I}$.

Quand on dit « positive » ou « négative », il faut bien sûr comprendre : au sens large.

DÉMONSTRATION.

1. **Supposons f croissante sur I.** Soit $x \in \overset{o}{I}$. Soit $y \in I, y > x$ (possible car $x \in \overset{o}{I}$). Puisque f est croissante, $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \geqslant 0$. Or on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \xrightarrow[y \to x^+]{} f'(x)$. L'inégalité large passe à la limite donc $f'(x) \geqslant 0$.
   Réciproquement, supposons f' positive sur $\overset{o}{I}$: Soient $(x \leqslant y) \in I^2$. Si $x = y$ alors $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \leqslant f(y)$. Supposons à présent que $x < y$. f est continue sur $[\,x\,;y\,]$, dérivable sur $]\,x\,;y\,[$: d'après l'EAF, il existe $z \in \,]\,x\,;y\,[$ tel que
   $$f'(z) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$
   donc $f(y) - f(x) = f'(z)(y-x)$. Or, $f'(z) \geqslant 0$ et $y - x > 0$ donc $f(y) - f(x) \geqslant 0$: f est donc croissante sur I.
2. La fonction f est décroissante sur I si et seulement si $-f$ est croissante sur I si et seulement si $-f' \geqslant 0$ sur $\overset{o}{I}$ si et seulement si $f' \leqslant 0$ sur $\overset{o}{I}$.
3. Conséquence immédiate des deux points précédents. □

Attention, ce résultat permet de donner la monotonie de f lorsqu'on connaît le signe de f' sur un intervalle ! Connaître le signe en un point ne suffit pas ! Par exemple, on a vu en I.4.c qu'il existe f dérivable telle que $f'(0) > 0$ mais qui n'est croissante sur aucun voisinage de 0 (même si c'est difficile à visualiser) . Tout ce qu'on peut dire est que f est strictement positive sur un intervalle du type $]\,0\,;c\,]$ et strictement négative sur un intervalle du type $[\,d\,;0\,[$ (voir le dessin en I.4.c), mais ce résultat n'étant pas au programme, on le redémontrera à chaque fois (cf. exercice 21).

Exemple : La racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée strictement positive donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème. Soit f continue et monotone sur I, dérivable sur $\overset{o}{I}$. La fonction f est strictement monotone sur I si et seulement s'il n'existe pas d'intervalle $]\,c\,;d\,[$ (avec $c < d$) inclus dans I tel que f' soit nulle sur $]\,c\,;d\,[$.

Remarque : En d'autres termes, f est strictement monotone si et seulement si f « ne fait pas de palier ».

Démonstration. On suppose f croissante (le raisonnement est analogue dans l'autre cas).

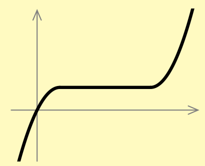
- **Supposons f strictement croissante :** Soit $]\,c\,;d\,[$ inclus dans I avec $c<d$. Soient $a_1<a_2$ deux éléments de $]\,c\,;d\,[$. f est continue sur $[\,a_1\,;a_2\,]$, dérivable sur $]\,a_1\,;a_2\,[$. D'après EAF, il existe $b\in\,]\,a_1\,;a_2\,[$ tel que

$$f'(b)=\frac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}.$$

  Puisque f est strictement croissante, $f(a_2)>f(a_1)$ donc $f'(b)>0$. Ainsi f' n'est pas nulle sur $]\,c\,;d\,[$.

- **Réciproquement, on suppose que f n'est pas strictement croissante sur I :** Comme f est cependant croissante, il existe $c<d$ tels que $f(c)=f(d)$. De plus, f étant croissante, pour tout $x\in\,]\,c\,;d\,[$, $f(c)\leqslant f(x)\leqslant f(d)$ donc $f(x)=f(c)$. Ainsi f est constante sur $]\,c\,;d\,[$ donc f' est nulle sur $]\,c\,;d\,[$. □

Ci-dessous le graphe d'une fonction croissante non strictement croissante.



Ainsi, une fonction dont la dérivée est strictement positive est strictement croissante, mais la réciproque est fausse : une fonction strictement croissante peut avoir une dérivée qui s'annule ! Par exemple, la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est nulle en 0 !

Corollaire. Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ continue et monotone sur I, dérivable sur $\overset{o}{I}$. Si f' s'annule en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

Remarque : Là aussi, la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $f:x\longmapsto x-\sin(x)$ est strictement croissante alors que sa dérivée s'annule une infinité de fois. En effet, sa dérivée s'annule en tous les $2k\pi$, pour $k\in\mathbb{Z}$: elle s'annule donc une infinité de fois, ce qui n'empêche pas f d'être strictement croissante d'après le théorème précédent, car sa dérivée n'est identiquement nulle sur aucun intervalle d'intérieur non vide mais en une infinité de points isolés. Cependant, ce cas de figure est rare en pratique, le corollaire ci-dessus suffit.

II.3 Inégalités des accroissements finis

Théorème (IAF 1). Soit $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable. Soient m et M tels que pour tout $x\in I$, $m\leqslant f'(x)\leqslant M$. Alors :

$$\forall (a,b)\in I^2,\qquad a\leqslant b\quad\Longrightarrow\quad m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)\leqslant M(b-a)$$

On peut avoir $a=b$, mais attention, a doit être inférieur à b.

Remarque : En particulier, si $m\leqslant f'(x)\leqslant M$ sur un intervalle du type $[\,a\,;+\infty\,[$ alors, pour tout $x\geqslant a$, $m(x-a)\leqslant f(x)-f(a)\leqslant M(x-a)$ donc

$$m(x-a)+f(a)\leqslant f(x)\leqslant M(x-a)+f(a)$$

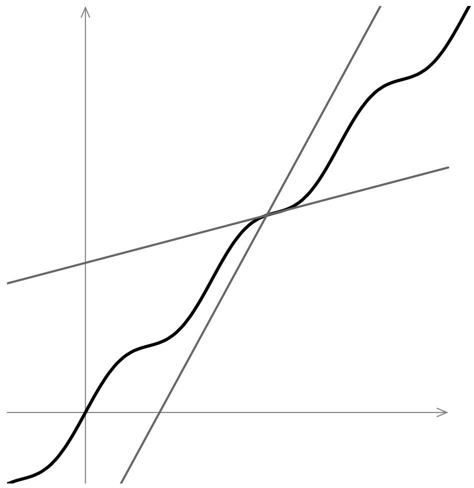
En d'autres termes, f est comprise entre les fonctions affines de pentes m et M qui coïncident avec f en a. Cela peut par exemple être pratique pour calculer des limites en $+\infty$ (par exemple si $m>0$).

Interprétation cinématique : Si on roule entre 90 km/h et 130 km/h pendant 4h, alors on parcourt entre 360 et 520 km.

Remarque : Si on a seulement une des deux inégalités dans l'hypothèse, alors on a seulement l'inégalité correspondante dans la conclusion. Par exemple, si on a seulement $m\leqslant f'(x)$ dans les hypothèses, alors on a $m(b-a)\leqslant f(b)-f(a)$ dans la conclusion.

Démonstration. Le résultat est immédiat si $a=b$. Supposons donc $a<b$. D'après l'égalité des accroissements finis (f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$), il existe $c\in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Or $c\in\,]\,a\,;b\,[$ donc $c\in I$ donc $m\leqslant f'(c)\leqslant M$. Il suffit ensuite de multiplier par $b-a>0$ pour conclure. □

Interprétation géométrique : Le graphe de f est compris dans le « cylindre » formé par les droites de pentes m et M coupant $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

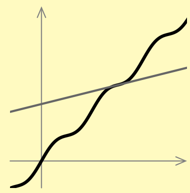


Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \geqslant 1/2$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Soit $x \geqslant 0$. Puisque f' est minorée par $\dfrac{1}{2}$, d'après l'IAF (avec $a = 0$ et $b = x$ de sorte que $a \leqslant b$), $f(x) - f(0) \geqslant \dfrac{1}{2}(x-0)$ donc $f(x) \geqslant \dfrac{x}{2} + f(0)$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
- Soit $x \leqslant 0$. Puisque f' est minorée par $\dfrac{1}{2}$, d'après l'IAF (avec $a = x$ et $b = 0$ de sorte que $a \leqslant b$), $f(0) - f(x) \geqslant \dfrac{1}{2}(0-x)$ donc $f(x) \leqslant \dfrac{x}{2} + f(0)$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.
- f' est strictement positive donc f est strictement croissante.
- f est dérivable donc continue.

Le théorème de la bijection permet de conclure.

Cela se voit très bien : si la pente est plus raide que 1/2, alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ et il suffit d'utiliser le théorème de la bijection pour conclure.



Remarque : On aurait évidemment pu prendre n'importe quel réel α strictement positif à la place de $1/2$: $\rightsquigarrow$ Exercice.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable bornée. On suppose que f' admet une limite L (finie ou infinie) en $+\infty$. Montrons que $L = 0$.

C'est intuitif ! Avec les mains, si $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$ alors f « se rapproche » d'une fonction affine de pente L, et donc, si $L \neq 0$, f tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ ce qui est impossible car f est bornée.

- **Supposons que $L \in \mathbb{R}_+^*$:** Comme $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$, on a :

$$\exists B \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \geqslant B, \qquad f'(x) \geqslant \frac{L}{2} > 0$$

(cela découle de la définition d'une limite avec $\varepsilon = L/2 > 0$: pour x assez grand, $L/2 \leqslant f(x) \leqslant 3L/2$).

Comme f est dérivable sur $[\,L\,;+\infty\,[$ et $f' \geqslant \dfrac{L}{2}$ sur $[\,B\,;+\infty\,[$, l'IAF entraîne que, pour tout $x \geqslant B$, $f(x) - f(B) \geqslant \dfrac{L}{2}(x-B)$ (on a pris $a = B$ et $b = x$ et on a bien $a \leqslant b$) donc

$$f(x) \geqslant \frac{L}{2}(x-B) + f(B).$$

Or $L > 0$ donc $\dfrac{L}{2}(x-B) + f(B) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. C'est exclu car f est bornée.

- **Si $L = +\infty$:** Comme $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$, on a :

$$\exists B \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \geqslant B, \qquad f(x) \geqslant 1$$

et on conclut de la même manière.

Nous ne sommes pas en train de prouver qu'une fonction bornée dérivable a une dérivée qui tend vers 0 ! On prouve que sa dérivée ne peut pas tendre vers une limite non nulle, mais celle-ci peut ne pas admettre de limite (par exemple, si f est la fonction sin, alors f est dérivable et bornée mais f' n'a pas de limite).

- **Supposons que** $L \in \mathbb{R}_-^*$ **:** $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$ donc :

$$\exists B \in \mathbb{R}, \qquad \forall x \geqslant B, \qquad f(x) \leqslant \frac{L}{2} < 0.$$

(cela découle de la définition d'une limite avec $\varepsilon = -L/2 > 0$).

Comme f est dérivable sur $[\,L\,;+\infty\,[$ et $f' \leqslant \dfrac{L}{2}$ sur $[\,B\,;+\infty\,[$, l'IAF entraîne que, pour tout $x \geqslant B$, $f(x) - f(B) \leqslant \dfrac{L}{2}(x-B)$ donc

$$f(x) \leqslant \frac{L}{2}(x-B) + f(B).$$

Or $L < 0$ donc $\dfrac{L}{2}(x-B) + f(B) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ ce qui est exclu car f est bornée.

- On exclut de la même manière le cas $L = -\infty$.

En conclusion : $L = 0$.

La réciproque de ce résultat est fausse : si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ alors f n'est pas forcément bornée. Par exemple : $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.

Théorème (IAF 2). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Si $|f'|$ est majorée par un réel k, alors f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant k|a-b|$$

C'est intuitif ! Si la pente est inférieure à k (en valeur absolue), alors le graphe de f est compris dans les cylindres de pente k, cf. chapitre 13 pour un dessin.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : On peut avoir $a \geqslant b$ ici.

Remarque : Les deux théorèmes précédents reposant entièrement sur l'EAF, ils sont encore valables en supposant uniquement f continue sur $[\,a\,;b\,]$, dérivable sur $]\,a\,;b\,[$ et en encadrant f (ou en majorant $|f'|$) sur $]\,a\,;b\,[$. En pratique, les énoncés donnés plus haut sont largement suffisants.

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **dérivable**. Alors f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée. Plus précisément, si $k \in \mathbb{R}_+$, alors f est k-lipschitzienne si et seulement si f' est bornée par k (i.e. $|f'|$ est majorée par k).

Démonstration. Supposons f k-lipschitzienne. Soit $a \in I$ et soit $x \in I$, $x \neq a$. On a

$$|\tau_a(x)| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right| \leqslant k$$

□

Or, la valeur absolue est continue et f est dérivable donc $|\tau_a(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |f'(a)|$. L'inégalité large passant à la limite, $|f'(a)| \leqslant k$. La réciproque découle de l'IAF.

Exemple : La fonction sin est 1-lipschitzienne (et donc on retrouve l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$), et on retrouve le fait que la racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, ni la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : La lipschitzianité est une notion **globale**, contrairement à la dérivabilité qui est une notion locale. En effet, si une fonction est lipschitzienne sur une famille d'ensemble, elle n'est pas forcément lipschitzienne sur leur union. Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction carré est lipschitzienne sur $[\,0\,;n\,]$ (car sa dérivée est bornée) mais elle n'est pas lipschitzienne sur $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\,0\,;n\,] = \mathbb{R}_+$.

Le critère précédent ne permet d'affirmer que la non-lipschitzianité de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+^*$, mais puisque $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}_+$, on peut en déduire que la racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ (en effet, si $E \subset F$ et si f est lipschitzienne sur F alors elle est lipschitzienne sur E, d'où le résultat par contraposée).

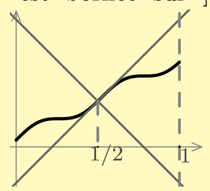
Remarque : Attention, on rappelle qu'une fonction lipschitzienne n'est pas forcément dérivable ! Le critère précédent n'est valable que pour les fonctions dérivables. Si la fonction n'est pas dérivable, on revient au chapitre 13.

Donnons un exemple d'utilisation de l'IAF2.

Exemple : Soit $f :]\,0\,;1\,[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que f' est bornée. Montrons que f est bornée.

Par hypothèse, il existe M tel que $|f'| \leqslant M$. Soit $x \in]\,0\,;1\,[$. D'après l'IAF, f' est M-lipschitzienne donc $|f(x)-f(1/2)| \leqslant M|x-1/2| \leqslant M/2$ car $x \in]\,0\,;1\,[$ donc $|x-1/2| \leqslant 1/2$. D'après l'inégalité triangulaire, $|f(x)| - |f(1/2)| \leqslant |f(x) - f(1/2)|$ donc, finalement, $|f(x)| \leqslant |f(1/2)| + M/2$: f est bien bornée.

Cela se voit bien sur un dessin : la pente est toujours comprise entre $-M$ et M donc le graphe est dans le cylindre formé par les droites de pentes $-M$ et M passant par un point du graphe (disons $1/2$) donc f est bornée sur $]\,0\,;1\,[$.



II.4 Application de l'IAF aux suites récurrentes

Cadre : On considère une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :

- $f(I) \subset I$.
- f admet un unique point fixe noté α sur I.
- Il existe un réel $k \in [\,0\,;1\,[$ tel que f soit k-lipschitzienne (on dit que f est contractante).

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors on montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ en majorant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha|$ par le terme général d'une suite géométrique de raison k.

Exemple : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,2\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3 + \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right.$$

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \geqslant 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

- **Première étape : Montrer que f admet un unique point fixe α.**

  $\rightsquigarrow$ Exercice.

- **Deuxième étape : Montrer que $[\,2\,;+\infty\,[$ est stable par f.**

  Pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x^2} \geqslant 3 \geqslant 2$ donc $f(x) \in [\,2\,;+\infty\,[$. D'où le résultat.

- **Troisième étape : Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2$.**

  $u_0 \in [\,2\,;+\infty\,[$ qui est stable par f donc $u_1 = f(u_0) \in [\,2\,;+\infty\,[$. Par une récurrence immédiate, $u_n \in [\,2\,;+\infty\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Quatrième étape : Majorer $|u_n - \alpha|$ par le terme général d'une suite géométrique, pour tout $n \in \mathbb{N}$.**

  Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque α est un point fixe, on a $|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|$. Or, f est dérivable sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et, pour tout $x \geqslant 2$, $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$. La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3}$ étant décroissante, f' est croissante donc $-\dfrac{1}{4} \leqslant f'(x) \leqslant 0$. En d'autres termes, f est dérivable sur $[\,2\,;+\infty\,[$ et, si $x \in [\,2\,;+\infty\,[$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$. D'après l'IAF,

  $$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$$

  Par une récurrence immédiate :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Quand utiliser la première IAF, et quand utiliser la seconde ? Cela dépend des hypothèses et de ce qui est demandé par l'énoncé : si on encadre f', on utilisera plutôt la première, et si on majore $|f'|$, plutôt la seconde. De même, si on demande un encadrement, on utilisera plutôt la première, et si on demande une majoration avec une valeur absolue, plutôt la seconde. On peut aussi se demander si on sait l'ordre dans lequel sont a et b : si on ne sait pas lequel est le plus grand, on a tout intérêt à utiliser l'IAF 2.

- **Cinquième étape : Conclure.**
On a $\dfrac{1}{4} \in \left]-1\,;1\right[$ donc $\left(\dfrac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $|u_n-\alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

II.5 Intervalle or not intervalle ?

On peut sans problème étendre la définition d'une fonction dérivable au cas d'une fonction définie sur un ensemble D, union d'intervalles non vides, non réduits à un point, par exemple sur $\mathbb{R}^*$ ou sur

$$D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left] k\pi - \frac{\pi}{2}\,; k\pi+\frac{\pi}{2}\right[.$$

Une fonction est dérivable sur un tel ensemble si elle est dérivable en chacun de ses points : la dérivabilité est une notion locale.

D'ailleurs, on ne s'est pas privé de le faire en disant que la fonction inverse était $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, quand on a dit qu'une fonction rationnelle était $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition, ou quand on a dit qu'un quotient de fonctions dérivables était dérivable là où son dénominateur ne s'annulait pas.

Cependant, on a largement utilisé le fait que I est un intervalle dans les paragraphes II.2 et II.3. Ainsi, si f n'est pas définie sur un intervalle, les résultats précédents ne sont pas forcément vérifiés, ils le sont uniquement **sur chaque intervalle composant** D_f.

Exemple : La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2} < 0$ donc est strictement décroissante sur chaque intervalle composant $\mathbb{R}^*$ (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$) mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

La fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$! En effet, si on la note f, alors $f(-1) < f(1)$.

Exemple : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 1 & \text{si } x<0 \\ -1 & \text{si } x>0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée nulle, donc est constante sur chaque intervalle composant $\mathbb{R}^*$ mais n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

On a vu un autre exemple de ce principe dans le paragraphe II.1.f du chapitre 5.

II.6 Théorème de la limite de la dérivée.

II.6.a Version dérivable.

Théorème (de la limite de la dérivée). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$.
- Il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$. En particulier, f' est continue en a.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$, on a :

$$\exists \eta > 0, \qquad \forall x \in I\backslash\{a\}, \qquad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f'(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in I\backslash\{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Considérons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,a\,;x\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) - L\times t \end{array}\right.$$

La fonction g est continue sur $[\,a\,;x\,]$, dérivable sur $]\,a\,;x\,[$ donc, d'après l'EAF, il existe $c \in \,]\,a\,;x\,[$ tel que $g'(c) = \dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}$.

Attention, il ne faut surtout pas croire qu'on prolonge f' en posant $f'(a) = L$! Cela n'aurait aucun sens car $f'(a)$ a une définition bien précise (la limite du taux d'accroissement).

Or $c \in]\,a\,;x\,[$ donc $|c-a| \leqslant \eta$, si bien que $|g'(c)| = |f'(c) - L| \leqslant \varepsilon$. Finalement,

$$\left|\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\right| = \left|\frac{f(x)-Lx-f(a)+La}{x-a}\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| \leqslant \varepsilon$$

On a donc montré le résultat suivant :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - L\right| \leqslant \varepsilon.$$

□

En d'autres termes, $\tau_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$, ce qui est le résultat voulu.

On peut donner un résultat analogue (négatif) dans le cas où $L = \pm\infty$.

Théorème (de la limite de la dérivée). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est dérivable sur $I\backslash\{a\}$.
- $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).

Alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) : f n'est donc pas dérivable en a.

Et le graphe de f admet une tangente verticale en a.

Démonstration. On se place dans le cas où la limite vaut $+\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $A \geqslant 0$. Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, on a :

$$\exists \eta > 0, \qquad \forall x \in I\backslash\{a\}, \qquad |x-a| \leqslant \eta \Longrightarrow f'(x) \geqslant A.$$

Soit $x \in I\backslash\{a\}$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. La fonction f est continue sur $[\,a\,;x\,]$, dérivable sur $]\,a\,;x\,[$ donc, d'après l'EAF, il existe $c \in]\,a\,;x\,[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.
Or $c \in]\,a\,;x\,[$ donc $|c-a| \leqslant \eta$, si bien que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \geqslant A.$$

On a donc montré le résultat suivant :

$$\forall A \geqslant 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant A.$$

En d'autres termes, $\tau_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$, ce qui est le résultat voulu. □

Remarque : ⚠ Encore une fois, ces deux théorèmes donnent une condition suffisante : si f' n'a pas de limite en a, on ne peut pas affirmer que f n'est pas dérivable en a (voir le dernier exemple en I.4.c : f' n'a pas de limite finie en 0 mais f est dérivable en 0). Tout ce qu'on peut affirmer si f' n'a pas de limite en a, c'est que f' n'est pas continue en a donc que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur I.

II.7 Version $\mathscr{C}^1$.

Corollaire (Théorème de la limite de la dérivée - version $\mathscr{C}^1$). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I\backslash\{a\}$.
- Il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$. En particulier, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

f est alors $\mathscr{C}^1$ sur I car f' est alors continue en a (et est continue sur $I\backslash\{a\}$ par hypothèse) : en effet, puisqu'on pose $f'(a)=L$ alors on a bien $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} f'(a)$, ce qui est la définition de la continuité en a.

Exemple : Considérons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-1/x^2} \end{array} \right.$$

Montrer que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Tout d'abord, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ car composée d'une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, f est prolongeable par continuité en 0. En effet,

$$y = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

Par composition de limites, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On pose $f(0) = 0$: f ainsi prolongée est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{2}{x^3}e^{-1/x^2}$. De même :

$$y = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad 2y^{3/2}e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0.$$

(la dernière limite étant obtenue par croissances comparées). Par composition de limites, $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

On reverra cette fonction dans le chapitre 19. En particulier, on renvoie à ce chapitre pour le graphe de cette fonction.

On est donc dans les conditions du théorème : f est continue sur $\mathbb{R}$, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. En particulier, f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

III Fonctions réciproques

On rappelle le théorème de la bijection : « Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue strictement monotone. Alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et f^{-1} est continue sur $f(I)$ de même monotonie que f ». On voit avec la fonction carré de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ que le résultat est faux si on remplace « continue » par « dérivable » : ce n'est pas parce que f est dérivable que f^{-1} l'est ! On se demande donc quand la réciproque d'une bijection dérivable est dérivable.

Théorème. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable strictement monotone. Soit $a \in I$ tel que $\underline{f'(a) \neq 0}$. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

Démonstration. On note $J = f(I)$. Considérons

$$\tau_b : \left\{ \begin{array}{ccc} J\backslash\{b\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x - b} \end{array} \right.$$

Soit $x \in J\backslash\{b\}$. On note $t = f^{-1}(x)$. On a $\tau_b(x) = \dfrac{f^{-1}(x) - f^{-1}(b)}{x-b} = \dfrac{t-a}{f(t) - f(a)}$.

On a bien $f(t) \neq f(a)$ puisque $x \neq b$ et f est injective.

- $t = f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to b]{} f^{-1}(b) = a$: en effet, f est dérivable donc continue donc, d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est continue.
- $\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a} \xrightarrow[t \to a]{} f'(a) \neq 0$ donc, par passage à l'inverse,

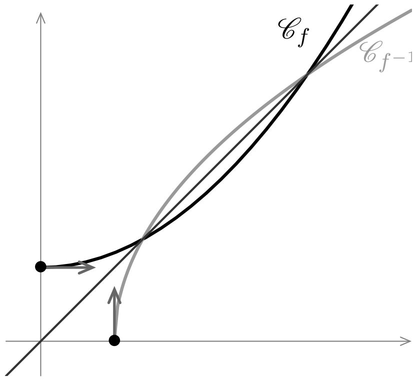
$$\frac{t-a}{f(t)-f(a)} \xrightarrow[t \to a]{} \frac{1}{f'(a)}.$$

On montre de même que si $f'(a) = 0$ alors $|\tau_b(x)| \xrightarrow[x \to b]{} +\infty$. En particulier, τ_b n'admet pas de limite finie en b donc f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Par composition de limites, $\tau_b(x) \xrightarrow[x \to b]{} \dfrac{1}{f'(a)} = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$. □

En conclusion : ⚠ f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$. En d'autres termes : f^{-1} **est dérivable uniquement en l'image (par f) des points en lesquels f' ne s'annule pas !**

Remarque : C'est intuitif ! Rappelons que le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice :



Ainsi, si $f'(a) = 0$, alors $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale en a donc $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en $b = f(a)$ donc f^{-1} n'est pas dérivable en b.

Corollaire. La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$. En particulier elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Notons f la fonction exp (on sait déjà que f est bijective et sa bijection réciproque f^{-1}, par définition, est la fonction ln, définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$). Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas donc la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x}$$

□

Corollaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction

$$\varphi_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$. En particulier, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}+^*$.

Rappelons que, si $\alpha > 0$, on prolonge φ_α par continuité en posant $\varphi_\alpha(0) = 0^\alpha = 0$. Si $\alpha > 1$, le théorème de la limite de la dérivée entraîne alors que φ_α est dérivable en 0 et $\varphi'(\alpha) = 0$. Si $\alpha > 1$, φ_α est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Découle du corollaire précédent et du théorème de dérivation d'une composée, puisque, pour tout $x > 0$, $\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque : En particulier, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ est dérivable, alors f^α est dérivable de dérivée $\alpha f' f^{\alpha-1}$.

IV Dérivées successives.

IV.1 Définitions et notations

Définition.

- Si f est dérivable, on note f' sa dérivée. Si f' est elle-même dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ sa dérivée : on dit que f est dérivable deux fois.
- De même, si f'' est dérivable, on note sa dérivée f''' ou $f^{(3)}$: on dit que f est dérivable trois fois et que $f^{(3)}$ est sa dérivée troisième.

Plus généralement :

Définition. Sous réserve d'existence, si $n \geqslant 1$, on note $f^{(n)}$ la fonction obtenue en dérivant n fois f. Si $f^{(n)}$ existe, on dit que f est dérivable n fois et que $f^{(n)}$ est sa dérivée n-ième.

La notation f''' est assez lourde et ne sera plus utilisée dans la suite : on commence à voir l'intérêt de la future notation $f^{(n)}$. Comme pour la dérivée, on n'appliquera pas l'exposant (n) à autre chose qu'une fonction : on n'écrira pas $x^{(n)}$ par exemple. Si on veut dériver n fois quelque-chose qui n'a pas de nom, comme pour dériver une seule fois, on introduit une fonction f ou on utilise la notation $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\cdots)$.

Remarque : Plus précisément, il s'agit d'une définition par récurrence, fondée sur la formule suivante, en tout point x où c'est possible : $f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x)$.

Exemple : On a vu que la fonction $f : x \longmapsto x + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, prolongée en 0 en posant $f(0) = 0$, est dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$. Ainsi, f' n'est pas continue donc n'est pas dérivable en 0 : f n'est pas dérivable deux fois en 0.

Remarques :

- On note généralement f' et f'' au lieu de $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$. Cependant, comme on l'a vu plus haut, à partir de la dérivée troisième, on utilise exclusivement l'écriture $f^{(n)}$, surtout pour des raisons pratiques.
- Par convention (surtout quand on calculera des sommes, voir par exemple la démonstration de la formule de Leibniz), on pose $f^{(0)} = f$.
- Si f est dérivable n fois alors f' est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n)} = (f')^{(n-1)}$.
- Si f' est dérivable n fois alors f est dérivable $n+1$ fois et $(f')^{(n)} = f^{(n+1)}$ (ces deux dernières propriétés peuvent être utiles quand on raisonne par récurrence).
- ⚠ Attention à ne pas confondre $f^{(n)}$ avec $f^n = \underbrace{f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$.

Définition. Soit $n \geqslant 1$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue sur I.

Remarque : Par analogie, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue.

Remarque : De même que dans le paragraphe I.1.a, « f est dérivable n fois sur I » = « $f^{(n)}$ est définie sur I » et « f est $\mathscr{C}^n$ sur I » = « $f^{(n)}$ est continue sur I ». Une fonction $\mathscr{C}^n$ est évidemment dérivable n fois par définition, là aussi la réciproque est fausse : si on appelle f la fonction dérivable non $\mathscr{C}^1$ du paragraphe I.4.c, elle est continue donc admet une primitive F, dérivable deux fois, avec $F'' = f'$ non continue, donc F n'est pas $\mathscr{C}^2$, et on peut itérer le procécédé pour obtenir une fonction dérivable n fois non $\mathscr{C}^n$.

Proposition. Soit $n \geqslant 1$.

- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors, pour tout $p \leqslant n$, f est de classe $\mathscr{C}^p$.
- Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ alors f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$, f'' est de classe $\mathscr{C}^{n-2}$ etc.
- Si f' est de classe $\mathscr{C}^n$ alors f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Définition. Soit $n \geqslant 1$. On note $D^n(I,\mathbb{R})$ (respectivement $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des fonctions dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$) sur I à valeurs réelles.

Proposition. Soit $n \geqslant 1$. Si f est dérivable n fois alors f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.

Démonstration. Si f est dérivable n fois alors f est dérivable $n-1$ fois et $f^{(n-1)}$ est dérivable donc continue.

Remarque : On a donc les inclusions suivantes :

$$\cdots \subset \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R}) \subset D^n(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^{n-1}(I,\mathbb{R}) \subset D^{n-1}(I,\mathbb{R}) \cdots$$
$$\cdots \subset \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R}) \subset D^2(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R}) \subset D^1(I,\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$$

Définition. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.

Par conséquent, un moyen simple de prouver qu'une fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ est de prouver par récurrence que, pour tout n, f est $\mathscr{C}^n$.

Définition. Si, pour tout n, f est dérivable n fois, on dit que f est dérivable une infinité de fois.

Proposition. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si et seulement si f est dérivable une infinité de fois.

Démonstration. Si f est $\mathscr{C}^\infty$ alors, pour tout n, f est $\mathscr{C}^n$ donc dérivable n fois : f est donc dérivable une infinité de fois. Réciproquement, supposons que f soit dérivable une infinité de fois. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est dérivable $n+1$ fois donc est de classe $\mathscr{C}^n$: f est bien $\mathscr{C}^\infty$ □

Remarque : Par définition, $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R}) = \displaystyle\bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$.

En particulier, il en découle que si f est dérivable et si f' est $\mathscr{C}^\infty$ alors f est $\mathscr{C}^\infty$. En d'autres termes, une primitive d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$. De plus, la dérivée d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$.

IV.2 Opérations sur les fonctions dérivables n fois et les fonctions $\mathscr{C}^n$

IV.2.a Somme, multiplication par un scalaire.

Proposition. Soit $n \geqslant 1$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si f et g sont dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I, alors $f+g$ et λf sont dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I, et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$ et $(\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$. On dit que la dérivée n-ième est linéaire.

Démonstration. exo, par récurrence (l'initialisation a été prouvée au paragraphe I.2).

IV.2.b Produit

Proposition. Soit $n \geqslant 1$. Si f et g sont dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I, alors $f \times g$ est dérivable n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

Démonstration. Démontrons la proposition dans le cas où f et g sont $\mathscr{C}^n$ (le cas dérivable n fois est laissé en exercice). Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$ on note H_n : « si f et g sont $\mathscr{C}^n$ alors $f \times g$ est $\mathscr{C}^n$ ».
- H_1 est vraie d'après le paragraphe I.2.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc que f et g soient $\mathscr{C}^{n+1}$. Alors f' et g' sont $\mathscr{C}^n$ ainsi, bien sûr que f et g. Par hypothèse de récurrence, $f'g$ et fg' sont $\mathscr{C}^n$. Par somme, $(f\times g)' = f'g + fg'$ est $\mathscr{C}^n$ donc $f \times g$ est $\mathscr{C}^{n+1}$: H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

On en déduit le cas $\mathscr{C}^\infty$ qui, rappelons-le, correspond au cas où f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Théorème (formule de Leibniz). Soit $n \geqslant 1$. Si f et g sont dérivables n fois sur I, alors :

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$$

On sait déjà que $f \times g$ est dérivable n fois.

DÉMONSTRATION. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$ on note H_n : « si f et g sont dérivables n fois sur I, alors on a : $(f \times g)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \times g^{(n-k)}$ ».
- Si $n = 1$, d'une part, $(f \times g)^{(n)} = (f \times g)' = f'g + fg'$. D'autre part,

Rappelons que $f^{(0)} = f$ et que $f^{(1)} = f'$.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \binom{1}{0} f^{(0)} g^{(1)} + \binom{1}{1} f^{(1)} g^{(0)} = fg' + f'g.$$

  c'est-à-dire que H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Supposons f et g dérivables $n+1$ fois. Alors $f \times g$ est dérivable $n+1$ fois et $(f \times g)^{(n+1)} = \left((f \times g)^{(n)}\right)'$. Par hypothèse de récurrence,

$$(f \times g)^{(n+1)} = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

  Par linéarité de la dérivation :

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)'$$

  En utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

  En faisant le changement d'indice $i = k+1$ dans la première somme :

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} f^{(i)} g^{(n+1-i)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}.$$

□

  L'indice étant muet :

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

  Enfin, grâce à la formule du triangle de Pascal :

on utilise aussi le fait que $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ et que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$

$$(f \times g)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)} + \binom{n+1}{0} f^{(0)} g^{(n+1)}$$

  c'est-à-dire que $(f \times g)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

IV.2.c Quotient

Proposition. Soit $n \geqslant 1$. Si f et g sont dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I et si g ne s'annule pas sur I alors f/g est dérivable n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

En d'autres termes, un quotient de fonctions dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$) est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$) là où son dénominateur ne s'annule pas.

Démonstration. Par récurrence : l'initialisation (que ce soit pour dérivable n fois ou $\mathscr{C}^n$) a été prouvée au paragraphe I.2, et pour l'hérédité, il suffit de remarquer que

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{(n+1)} = \left(\left(\frac{f}{g}\right)'\right)^{(n)} = \left(f' \times \frac{1}{g} - f \times g' \times \frac{1}{g^2}\right)^{(n)} \qquad \square$$

On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat du paragraphe précédent.

IV.2.d Composition

Théorème. Soit $n \geqslant 1$. Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $u : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que $u(J) \subset I$. Si f et u sont dérivables n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$), alors $f \circ u$ est dérivable n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur J.

Comme dans le chapitre , J est un autre intervalle non vide et non réduit à un point. En d'autres termes, une composée de fonctions dérivables n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$) est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$).

Démonstration. Par récurrence : l'initialisation (que ce soit pour dérivable n fois ou $\mathscr{C}^n$) a été prouvée au paragraphe I.2, et pour l'hérédité, il suffit de remarquer que

$$(f \circ u)^{(n+1)} = \left((f \circ u)'\right)^{(n)} = \left(u' \times f' \circ u\right)^{(n)}$$

On conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence et le résultat du paragraphe IV.2.b. $\square$

IV.2.e Réciproque

Proposition. Soit $n \geqslant 1$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) strictement monotone, telle que $\underline{f' \text{ ne s'annule pas sur } I}$. Alors f^{-1} est dérivable n fois (respectivement de classe $\mathscr{C}^n$, de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $J = f(I)$.

f est une bijection de I dans $f(I)$ d'après le théorème de la bijection donc f^{-1} est bien définie.

Démonstration. Puisque f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Le résultat se prouve ensuite par récurrence (laissée en exercice). $\square$

IV.3 Fonctions usuelles

IV.3.a Fonctions polynômes et fonctions rationnelles

Théorème. Les fonctions constantes, la fonction $x \longmapsto x$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et la fonction inverse est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

Démonstration.

- La fonction nulle est $\mathscr{C}^\infty$: en effet, si on la note f, une récurrence immédiate prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est $\mathscr{C}^n$ avec $f^{(n)} = 0$.

  $\rightsquigarrow$ Exercice.

- Si f est constante alors f est dérivable et $f' = 0$ donc, d'après le point précédent, f' est $\mathscr{C}^\infty$ donc f est $\mathscr{C}^\infty$.
- Notons $f : x \longmapsto x$. Alors, de même, f est dérivable et f' est constante donc $\mathscr{C}^\infty$ d'après ce qui précède donc f est $\mathscr{C}^\infty$.

- La fonction inverse est le quotient de la fonction constante égale à 1 et de la fonction f précédente qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$. Comme elles sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, on en déduit que la fonction inverse l'est aussi. $\square$

Exemple : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f' = 1 + f^2$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Montrons par récurrence que f est $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « f est $\mathscr{C}^n$ ».
- La fonction f est dérivable par hypothèse. Dès lors, f est continue donc $f' = 1 + f^2$ est continue. Ainsi, f est $\mathscr{C}^1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, f est $\mathscr{C}^n$ donc $f^2 = f \times f$ est $\mathscr{C}^n$, et la fonction constante égale à 1 est $\mathscr{C}^n$ donc f' est $\mathscr{C}^n$ donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Puisque f est $\mathscr{C}^n$ pour tout $n \geqslant 1$, elle est $\mathscr{C}^\infty$.

Dans l'exemple, le 1 est évidemment la fonction constante égale à 1.

Comme on peut le voir, ce genre de raisonnement est utile quand on fait des équa-diffs.

Corollaire. Une fonction polynôme est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Une fonction rationnelle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Exemple : Notons φ la fonction inverse. On a vu qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $\varphi'(x) = -1/x^2$ puis $\varphi''(x) = 2/x^3$ puis $\varphi^{(3)}(x) = -6/x^4$. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Méthode classique : calculer les premières dérivées, conjecturer une expression de $\varphi^{(n)}$ et prouver la validité de la conjecture par récurrence. Il ne faut pas hésiter à calculer un grand nombre de dérivées au départ pour deviner la bonne formule. En effet, si on s'arrête à φ'', alors on ne sait pas si $2 = 1 + 1$, si $2 = 2 \times 1$, si $2 = 2^1$ ou si $2 = 2!$, ce qui empêche de conjecturer la bonne expression dans le cas général. Grâce à $\varphi^{(3)}$, on sait que $2 = 2!$.

Un autre exemple classique est le suivant :

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f_n : x \mapsto x^n$. Alors, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$:

$$f_n{}^{(k)} : x \mapsto \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

En particulier, la dérivée n-ième de $x \mapsto x^n$ est constante égale à $n!$, et donc toutes les dérivées d'ordre supérieur ou égal à $n+1$ sont nulles.

Démonstration. Par récurrence (finie) : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : ⚠ Attention, il y a deux cas, selon que $k \leqslant n$ ou $k \geqslant n+1$! Nous verrons dans le chapitre 19 que la dérivée $(n+1)$-ième d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n est nulle.

IV.3.b Fonctions exponentielle et ln

Théorème. La fonction exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.

Démonstration. Se prouve par récurrence immédiate (laissée en exercice)

Corollaire. La fonction ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Puisque la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et a une dérivée qui ne s'annule pas, sa réciproque ln est de classe $\mathscr{C}^\infty$ (cf. paragraphe I.2.e) sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^*$. $\square$

Corollaire. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple : Soit $n \geqslant 1$. Donner la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.
La fonction ln est $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$, $\ln''(x) = -1/x^2$, $\ln^{(3)}(x) = 2/x^3$ et $\ln^{(4)}(x) = -6/x^4$. Une récurrence immédiate prouve que, pour tout $k \geqslant 1$ (attention, c'est faux si $k = 0$), $\ln^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!/x^k$. Notons $g : x \mapsto x^{n-1}$, elle aussi $\mathscr{C}^\infty$. Comme f est produit de deux fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et en particulier dérivables n fois, on peut appliquer la formule de Leibniz (on enlève le terme pour $k = 0$ car la dérivée de g associée est nulle) : pour tout $n \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) \times g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \times x^{k-1} \end{aligned}$$

Précisons que la dérivée d'ordre $n-k$ de g est obtenue en appliquant le résultat du paragraphe avec $n-1$ au lieu de n et à l'ordre $n-k$ au lieu de k (et donc on remplace n par $n-1$ et k par $n-k$). Dès lors, en simplifiant :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{-(n-1)!}{x} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k - 1 \right) \\ &= \frac{-(n-1)!}{x} \times (0-1) \end{aligned}$$

et donc $f^{(n)}(x) = (n-1)!/x$.

IV.3.c Fonctions trigonométriques

Proposition. Les fonctions sin et cos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, sin est $\mathscr{C}^{4n+3}$ avec

$$\sin^{(4n)} = \sin, \quad \sin^{(4n+1)} = \cos, \quad \sin^{(4n+2)} = -\sin, \quad \sin^{(4n+3)} = -\cos\,.$$

On montre par récurrence (laissée en exercice) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cos est $\mathscr{C}^{4n+3}$ avec

$$\cos^{(4n)} = \cos, \quad \cos^{(4n+1)} = -\sin, \quad \cos^{(4n+2)} = -\cos, \quad \cos^{(4n+3)} = \sin\,. \qquad \square$$

On peut même donner leurs dérivées successives explicitement en fonction de n (sans séparer les cas selon la congruence modulo 4).

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

Démonstration. Par une récurrence immédiate, en se souvenant que, pour tout x, $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $-\sin(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Corollaire. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition.

Corollaire. La fonction Arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et les fonctions Arcsin et Arccos sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$.

V Fonctions complexes de la variable réelle.

On se donne dans cette partie deux fonctions f et g de I dans $\mathbb{C}$ et un réel $a \in I$. On rappelle (cf. chapitre 13) qu'une fonction h admet en a une limite $L \in \mathbb{R}$ lorsque $|h(x) - L| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et que :

$$h(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \iff \mathrm{Re}(h(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Re}(L) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(h(x)) \xrightarrow[x\to a]{} \mathrm{Im}(L)$$

Définition. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} I\backslash\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$$

admet une limite <u>finie</u> en a. Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$.

Remarque : ⚠ Attention, comme dans le chapitre 10, même si les fonctions sont à valeurs complexes, la variable est réelle ! Dériver une fonction de la variable complexe est furieusement hors programme (on parle alors de fonctions holomorphes). Il vous est par exemple strictement interdit de dire que $z \mapsto z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée égale à 1. La bonne nouvelle est que, par conséquent, on ne vous le demandera jamais.

Proposition. f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a, et alors $f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\,\mathrm{Im}(f)'(a)$.

En clair : dériver une fonction revient à dériver sa partie réelle et sa partie imaginaire. De plus, si f est dérivable, alors $\mathrm{Re}(f') = (\mathrm{Re}(f))'$, et idem pour la partie imaginaire.

DÉMONSTRATION. Découle directement du résultat rappelé ci-dessus pour les limites.

Remarque : Tous les résultats du I et du IV.2 sont encore valables pour des fonctions de la variable réelle à valeurs complexes (par exemple, une somme de fonctions dérivables est encore dérivable).

Remarque : ⚠ Cependant, ce n'est plus vrai pour les résultats du II. Certains résultats n'ont pas de sens pour des fonctions à valeurs complexes (par exemple, qu'est-ce qu'un minimum local ou une fonction croissante quand la fonction est à valeurs complexes ?) et certains sont tout simplement faux. Par exemple : LE THÉORÈME DE ROLLE ET L'EAF SONT FAUX QUAND LA FONCTION EST À VALEURS COMPLEXES ! Cependant, l'IAF 2 (car l'IAF 1 n'a aucun sens dans $\mathbb{C}$ car on ne peut pas comparer des complexes) et la caractérisation des fonctions constantes sont encore valable sur $\mathbb{C}$.

Voir un contre-exemple ci-dessous.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue sur I dérivable sur $\overset{o}{I}$. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $\overset{o}{I}$.

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned} f \text{ est constante sur } I &\iff \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont constantes sur } I \\ &\iff (\mathrm{Re}(f))' \text{ et } (\mathrm{Im}(f))' \text{ sont nulles sur } \overset{o}{I} \\ &\iff \mathrm{Re}(f') \text{ et } \mathrm{Im}(f') \text{ sont nulles sur } \overset{o}{I} \\ &\iff f' = 0 \text{ sur } \overset{o}{I} \end{aligned}$$

□

Théorème (IAF 2). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable. Si $|f'|$ est majorée par un réel k, alors f est k-lipschitzienne, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad |f(b) - f(a)| \leqslant k|a-b|$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in I^2$. Si $f(b)-f(a) = 0$, le résultat est immédiat. Supposons $f(b) - f(a) \neq 0$, et soit θ un argument de $f(b) - f(a)$. Il en découle que $e^{-i\theta} \times (f(b) - f(a)) \in \mathbb{R}$ (c'est même un réel strictement positif). Soit φ la fonction définie sur I par $\varphi(x) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(x)\right)$. Alors φ est dérivable et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times f'(x)\right)$ si bien que

Il suffit de faire une rotation pour se ramener au cas réel.

$$|\varphi'(x)| = \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times f'(x)\right)\right| \leqslant \left|e^{-i\theta} \times f'(x)\right| = |f'(x)| \leqslant k$$

Par conséquent, φ étant réelle et de dérivée bornée par k, on peut lui appliquer l'IAF2 (version réelle) : $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant k|b-a|$. Pour conclure, il suffit de voir que

$$\begin{aligned} |\varphi(b) - \varphi(a)| &= \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times f(b)\right) - \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times f(a)\right)\right| \\ &= \left|\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times (f(b) - f(a))\right)\right| \\ &= \left|e^{-i\theta} \times (f(b) - f(a))\right| \\ &= |f(b) - f(a)| \end{aligned}$$

$\square$

$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)$

$e^{-i\theta} \times (f(b) - f(a)) \in \mathbb{R}$.

Théorème. Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors e^{φ} est dérivable, et $(e^{\varphi})' = \varphi' \times e^{\varphi}$.

En clair : on peut dériver les exponentielles complexes comme les exponentielles réelles. On ne s'est d'ailleurs pas privé de le faire dans le chapitre 11 !

Démonstration. Notons $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ avec φ_1 et φ_2 à valeurs réelles (ce sont donc, respectivement, la partie réelle et la partie imaginaire de φ), qui sont donc dérivables car φ l'est. Par définition d'une exponentielle complexe,

$$\begin{aligned} e^{\varphi} &= e^{\varphi_1 + i\varphi_2} \\ &= e^{\varphi_1} \times (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)) \end{aligned}$$

Dès lors, e^{φ} est dérivable car composée, somme et produit de fonctions qui le sont, et

$$\begin{aligned} (e^{\varphi})' &= {\varphi_1}' e^{\varphi_1} \times (\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_1)) + e^{\varphi_1} \times (-{\varphi_2}'\sin(\varphi_2) + i{\varphi_2}'\cos(\varphi_1)) \\ &= {\varphi_1}' e^{\varphi} + e^{\varphi_1} \times i{\varphi_2}' \times (i\sin(\varphi_2) + \cos(\varphi_2)) \\ &= {\varphi_1}' e^{\varphi} + e^{\varphi_1} \times i{\varphi_2}' \times e^{i\varphi_2} \\ &= ({\varphi_1}' + i{\varphi_2}')\, e^{\varphi} \end{aligned}$$

$\square$

ce qui est le résultat voulu.

Exemple : Montrons que le théorème de Rolle n'est pas valable sur $\mathbb{C}$. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$. Alors f est continue sur $[\,0\,;2\pi\,]$, dérivable sur $]\,0\,;2\pi\,[$, $f(0) = f(2\pi) = 1$ mais f' ne s'annule pas sur $]\,0\,;2\pi\,[$ car, pour tout $x \in\,]\,0\,;2\pi\,[$, $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$.

Remarque : Comme dans le chapitre 7 quand on calculait des sommes, écrire une fonction réelle comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une fonction complexe peut parfois simplifier les choses.

Exemple : Soit $n \geqslant 1$. Donner la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \sin(x) \times e^x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Il suffit de voir que $f = \text{Im}(g)$ où $g : x \mapsto e^{ix} \times e^x = e^{(i+1)x}$. La fonction g est $\mathscr{C}^\infty$ donc en particulier dérivable n fois, et

$$g^{(n)}(x) = (1+i)^n e^{(i+1)x}$$

Dès lors, $f^{(n)}(x) = \text{Im}\left((1+i)^n e^{(i+1)x}\right)$. Or, $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ si bien que

$$g^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n \times e^{x+i\times\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)}$$

Finalement, $f^{(n)}(x) = \sqrt{2}^n \times e^x \times \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Remarque : Puisqu'on peut dériver une fonction complexe de la même façon qu'une fonction réelle, on peut intégrer une fonction complexe de la même façon qu'une fonction réelle. On vient donc de justifier a posteriori tout ce qu'on a fait dans les chapitres 10 et 11. Démontrons d'ailleurs le résultat concernant le passage des équations différentielles complexes aux équations différentielles réelles, que l'on rappelle ci-dessous.

Théorème.

- (Cas des EDL du premier ordre) Soient a et b deux fonctions continues sur I. On suppose que a est à valeurs réelles. Notons :

$$(E') : y' + a(x)y = b(x) \qquad \text{et} \qquad (E) : y' + a(x)y = \text{Re}(b(x))$$

  Alors, si y_0 est une solution de (E') alors $\text{Re}(y_0)$ est une solution de (E).
- (Cas des EDL du second ordre à coefficients constants) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Notons :

$$(E') : y'' + ay' + by = f(x) \qquad \text{et} \qquad (E) : y'' + ay' + by = \text{Re}(f(x))$$

  Alors, si y_0 est une solution de (E') alors $\text{Re}(y_0)$ est une solution de (E).

Démonstration. Démontrons le résultat pour les EDL du premier ordre, la démonstration étant analogue pour celles du deuxième ordre. Soit y_0 dérivable sur I, que l'on écrit $y_0 = \text{Re}(y_0) + i\,\text{Im}(y_0)$. Alors ${y_0}' = \text{Re}(y_0)' + i\,\text{Im}(y_0)'$ donc

Rappelons que a est à valeurs réelles.

$${y_0}' + a(x)y_0 = \left(\text{Re}(y_0)' + a(x)\,\text{Re}(y_0)\right) + i\left(\text{Im}(y_0)' + a(x)\,\text{Im}(y_0)\right) \qquad \square$$

Par conséquent (rappelons que deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelle et imaginaires sont égales), si y_0 est une solution de E', alors $\text{Re}(y_0)' + a(x)\,\text{Re}(y_0) = \text{Re}(b(x))$ si bien que $\text{Re}(y_0)$ est solution de (E).