Correction du DM n°7

Problème 1

1 La figure se trouve à la fin du corrigé. Tout d'abord,

$$\boxed{[1;i;-1;-i] = \frac{(-1-1)(-i-i)}{(-i-1)(-1-i)} = \frac{24i}{(i+1)^2} = \frac{4i}{2i} = 2}$$

De même que dans le cours, $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ ce qui implique que

$$\boxed{[0;-1-i;e^{i\pi/4};1+i] = \frac{e^{i\pi/4}\left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}\left(e^{i\pi/4}+\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{2}{1+\sqrt{2}}}$$

2 D'après le résultat rappelé au début de l'énoncé, puisque a, b et c sont alignés, il existe un réel λ (non nul car $c \neq a$)tel que $c - a = \lambda(c-b)$. Ainsi,

$$[a;b;c;d] \in \mathbb{R} \iff \frac{\lambda(c-b)(d-b)}{(d-a)(c-b)} \in \mathbb{R} \iff \lambda\frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R} \iff \frac{d-b}{d-a} \in \mathbb{R}$$

La dernière équivalence vient du fait que λ est un réel non nul et donc, si z est un complexe : $\lambda z \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$. Toujours d'après le résultat rappelé par l'énoncé, cette dernière condition est équivalente à « a, b et d sont alignés ». Or puisque a, b et c sont aussi alignés, on a le résultat voulu.

$$\boxed{[a;b;c;d] \in \mathbb{R} \iff a, b, c \text{ et } d \text{ sont alignés.}}$$

3.(a) Si β et β' sont nuls alors $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ ce qui est exclu. Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme dit dans l'énoncé, séparons les cas.

- Premier cas : $\beta = 0$. Alors, de même que ci-dessus, $\alpha \neq 0$. Dès lors,

$$(x,y) \text{ est solution} \iff \begin{cases} \alpha x & = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y & = \gamma' \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\gamma}{\alpha} \\ y = \dfrac{1}{\beta'} \times \left(\gamma' - \dfrac{\gamma}{\alpha}\right) \end{cases}$$

- Deuxième cas : $\beta' = 0$. Idem.
- Troisième cas : β et β' sont non nuls.

$$(x,y) \text{ est solution} \iff \begin{cases} \alpha\beta' x + \beta\beta' y = \beta'\gamma \\ \alpha'\beta x + \beta\beta' y = \beta\gamma' \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_1 \leftarrow \beta'\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2 \leftarrow \beta\mathrm{L}_2)$$

$$\iff \begin{cases} (\alpha\beta' - \alpha\beta)x = \beta'\gamma - \beta\gamma' \\ \alpha'\beta x + \beta\beta' y = \beta\gamma' \end{cases} \qquad (\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2)$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \\ y = \dfrac{1}{\beta\beta'} \times \left(\beta\gamma' - \alpha'\beta \times \dfrac{\beta'\gamma - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right) \end{cases} \qquad (\text{car } \alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0 \text{ et } \beta\beta' \neq 0)$$

En particulier, dans tous les cas, $\boxed{\text{Ce système admet une unique solution.}}$

> Quand on aura fait les matrices, on pourra conclure en une ligne en disant que c'est un système de Cramer donc admet une unique solution.

3.(b) Soit $\omega = x + iy$. Notons $a = x_a + iy_a, b = x_b + iy_b, c = x_c + iy_c$ et enfin $\omega = x + iy$.

$$\omega \text{ convient } \iff \begin{cases} |\omega - a| = |\omega - b| \\ |\omega - a| = |\omega - c| \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |\omega - a|^2 = |\omega - b|^2 \\ |\omega - a|^2 = |\omega - c|^2 \end{cases} \qquad \text{(les modules sont positifs)}$$

$$\iff \begin{cases} (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_b)^2 + (y - y_b)^2 \\ (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 \end{cases}$$

$$\omega \text{ convient } \iff \begin{cases} x(2x_b - 2x_a) + y(2y_b - 2y_a) = {x_b}^2 - {x_a}^2 + {y_b}^2 - {y_a}^2 \\ x(2x_c - 2x_a) + y(2y_c - 2y_a) = {x_c}^2 - {x_a}^2 + {y_c}^2 - {y_a}^2 \end{cases}$$

Posons $\alpha = 2x_b - 2x_a, \beta = \dots, \alpha' = \dots, \beta' = \dots$ les coefficients auxquels on pense. D'après le résultat rappelé par l'énoncé, $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ et la question précédente assure l'existence et l'unicité de ω.

$$\boxed{\omega \text{ existe et est unique.}}$$

4.(a) D'après le cours, la condition $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$ est équivalente à

$$\boxed{\alpha \not\equiv \beta[2\pi]}$$

D'où
$$\frac{\alpha - \beta}{2} \not\equiv 0[\pi]$$

Par conséquent, le sinus de ce réel est non nul. Les autres résultats s'obtiennent de la même façon.

$$\boxed{\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right), \sin\left(\frac{\alpha - \gamma}{2}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) \text{ sont non nuls.}}$$

4.(b) Notons B le birapport recherché. En factorisant par $e^{i\gamma}$ au numérateur et au dénominateur il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{\left(e^{i\gamma} - e^{i\alpha}\right)\left(z - e^{i\beta}\right)}{\left(z - e^{i\alpha}\right)\left(e^{i\gamma} - e^{i\beta}\right)} \\ &= \frac{e^{i\gamma}\left(1 - e^{i(\alpha-\gamma)}\right)\left(z - e^{i\beta}\right)}{\left(z - e^{i\alpha}\right)e^{i\gamma}\left(1 - e^{i(\beta-\gamma)}\right)} \\ \mathrm{B} &= \frac{\left(1 - e^{i(\alpha-\gamma)}\right)\left(z - e^{i\beta}\right)}{\left(1 - e^{i(\beta-\gamma)}\right)\left(z - e^{i\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Appliquons à présent la méthode de l'arc-moitié :

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{e^{i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)}\right)\left(z - e^{i\beta}\right)}{e^{i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}\left(e^{-i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)} - e^{i\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}\right)\left(z - e^{i\alpha}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{-2i\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)\left(z - e^{i\beta}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)\left(z - e^{i\alpha}\right)} \end{aligned}$$

$$\mathrm{B} = e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{z-e^{i\beta}}{z-e^{i\alpha}}$$

Le résultat en découle avec la méthode de l'espression conjuguée en multipliant au numérateur et au dénominateur par $\overline{z-e^{i\alpha}} = \overline{z} - e^{-i\alpha}$.

$$\boxed{\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right] = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)}{|z-e^{i\alpha}|^2}}$$

4.(c) Notons C le membre de gauche de l'énoncé. En développant on obtient

$$\mathrm{C} = |z|^2 e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} - z e^{i\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)} - \overline{z} e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

Posons
$$\mathrm{D} = -z e^{i\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)} - \overline{z} e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

On remarque que D est la somme de deux complexes conjugués. Dès lors,

$$\boxed{\mathrm{D} = -2\mathrm{Re}\left(z e^{i\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}\right) \in \mathbb{R}}$$

D'où
$$\boxed{e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right) = |z|^2 e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + \mathrm{D} \text{ avec } \mathrm{D} \in \mathbb{R}}$$

4.(d) Reprenons la notation B pour le birapport. D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\mathrm{B}) &= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)|z-e^{i\alpha}|^2} \times \mathrm{Im}\left[e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z-e^{i\beta}\right)\left(\overline{z}-e^{-i\alpha}\right)\right] \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)|z-e^{i\alpha}|^2} \times \mathrm{Im}\left[|z|^2 e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + \mathrm{D}\right] \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)|z-e^{i\alpha}|^2} \times \mathrm{Im}\left[|z|^2 e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)}\right] && (\mathrm{D} \in \mathbb{R}) \\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)|z-e^{i\alpha}|^2} \times \left[|z|^2 \sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\tfrac{\beta-\alpha}{2}\right)\right] \\
\mathrm{Im}\,(\mathrm{B}) &= \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)|z-e^{i\alpha}|^2} \times \left[|z|^2 \sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) - \sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]
\end{aligned}$$

La dernière égalité vient de l'imparité de la fonction sinus. Le résultat en découle.

$$\boxed{\mathrm{Im}\,\left(\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right]\right) = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) \times \sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times \frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}}$$

4.(e) Le birapport est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. D'après la question précédente, c'est le cas si et seulement si $|z|^2 - 1 = 0$ puisque les sinus au numérateur sont non nuls d'après la question 4.(a).

$$\boxed{\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right] \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{U}}$$

5.(a) On a

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{a-\omega} \qquad \text{et} \qquad \mu = \frac{-\omega}{a-\omega}}$$

5.(b) Raisonnons par équivalences.

$$|h(z)| = 1 \iff |\lambda z + \mu| = 1 \iff \left|\frac{z-\omega}{a-\omega}\right| = 1 \iff |z-\omega| = |a-\omega|$$

Or, par définition, $\mathrm{R} = |a-\omega|$, d'où l'équivalence.

$$\boxed{|h(z)| = 1 \iff |z-\omega| = \mathrm{R}}$$

Puisque $|a-\omega| = |b-\omega| = |c-\omega| = \mathrm{R}$ alors $|h(a)| = |h(b)| = |h(c)| = 1$. Or, d'après le cours, tout complexe de module 1 peut s'écrire sous la forme $e^{i\theta}$. D'où l'existence de α, β et γ.

$$\boxed{\text{Il existe trois réels } \alpha, \beta \text{ et } \gamma \text{ tels que } h(a) = e^{i\alpha}, h(b) = e^{i\beta} \text{ et } h(c) = e^{i\gamma}.}$$

5.(c) Deux méthodes pour montrer que h est une bijection de $\mathbb{C}$ dans lui-même : à la main, c'est-à-dire montrer qu'elle est injective et surjective (c'est le plus sûr) ou alors montrer qu'elle admet une bijection réciproque (on pourrait le faire ici car h est une fonction simple mais ce n'est pas toujours possible, c'est pour cela que la première méthode est la plus sûre). On va utiliser la première méthode.

- Montrons que h est injective. Soient $z_1 \neq z_2$ deux complexes. Puisque λ est non nul, $\lambda z_1 \neq \lambda z_2$ donc $\lambda z_1 + \mu \neq \lambda z_2 + \mu$. En d'autres termes, $h(z_1) \neq h(z_2)$ c'est-à-dire que h est injective.
- Montrons que h est surjective. Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\widetilde{z} = (z-\mu)/\lambda$ (possible car $\lambda \neq 0$). Alors $h(\widetilde{z}) = z$: $\widetilde{z}$ est un antécédent de z par h, donc h est surjective.

$$\boxed{h \text{ est une bijection de } \mathbb{C} \text{ dans } \mathbb{C}.}$$

La fonction h étant injective et les complexes a, b, c et d étant distincts, leurs images sont distinctes.

$$\boxed{\text{Les complexes } e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma} \text{ et } h(d) \text{ sont deux à deux distincts.}}$$

5.(d) C'est immédiat par le calcul, en écrivant $e^{i\alpha} = \lambda a + \mu$ etc...

$$\boxed{\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right] = [a; b; c; d]}$$

5.(f) D'après la question précédente, $[a; b; c; d] \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right] \in \mathbb{R}$. D'après la question 4.(e), c'est le cas si et seulement si $z \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire si et seulement si $|h(d)| = 1$. Enfin, d'après la question 5.(b), c'est le cas si et seulement si $|d-\omega| = \mathrm{R}$.

$$\boxed{[a; b; c; d] \in \mathbb{R} \text{ si et seulement si } d \in \mathscr{C}(\omega, \mathrm{R}).}$$

6 Réécrivons le théorème des six birapports :

$$[a; b; c; d] \times [c'; a'; d'; b'] \times [a'; b; a; b'] \times [b; c'; c; b'] \times [c; d'; c'; d] \times [d'; a; a'; d] = 1$$

Puisqu'aucun des birapports n'est nul (leur produit vaut 1, et de toute façon un birapport de quatre complexes distincts n'est pas nul car son numérateur n'est pas nul) :

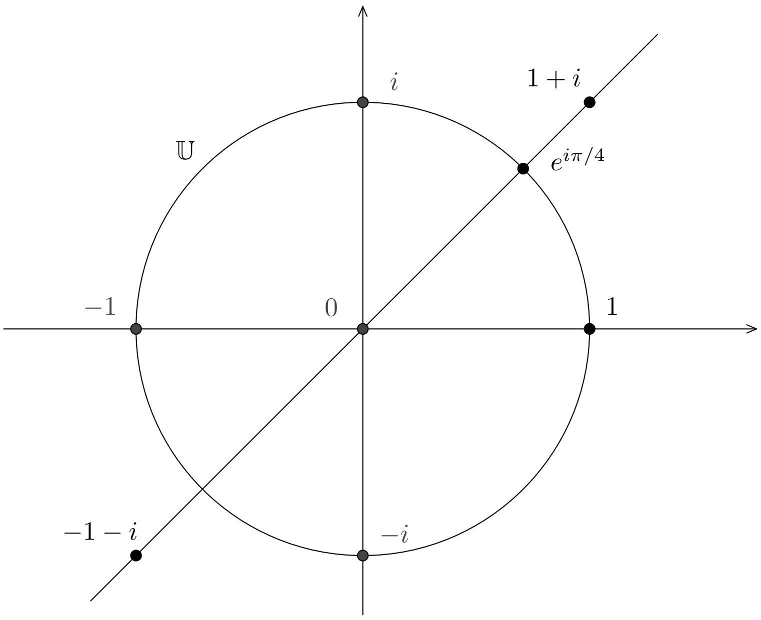
$$[a; b; c; d] = \frac{1}{[c'; a'; d'; b'] \times [a'; b; a; b'] \times [b; c'; c; b'] \times [c; d'; c'; d] \times [d'; a; a'; d]}$$

Or, les points a', b, a, b' sont cocycliques car appartiennent au cercle $\mathscr{C}_1$: leur birapport est donc réel. De même, les birapports $[b; c'; c; b'], [c; d'; c'; d], [d'; a; a'; d]$ sont réels. Par conséquent, d'après l'écriture ci-dessus, $[a; b; c; d]$ est réel si et seulement si

$[c';a';d';b']$ est réel. D'après la question précédente, a, b, c et d sont alignés ou cocycliques si et seulement si $[a;b;c;d] \in \mathbb{R}$ si et seulement si $[c';a';d';b'] \in \mathbb{R}$ si et seulement si c', a', d' et b' sont alignés ou cocycliques. Puisque cela ne dépend pas de l'ordre des points,

$$\boxed{\text{Le théorème de Miquel est démontré.}}$$

Enfin, traçons la figure de la première question. On remarque que les points du premier birapport sont cocycliques (ils appartiennent à $\mathbb{U}$) tandis que ceux du second sont alignés, ce qui est cohérent puisque les deux birapports calculés sont réels.



Problème 2 :

Partie I

$\boxed{\mathbf{1}}$ Par convention (d'après le poly sur les sommes), une somme indicée par un ensemble vide est nulle. Or, si $k = 1, k-1 = 0$ et donc j ne peut pas aller de 1 à $k-1$. Finalement

$$\sum_{j=1}^{k-1} c_k \overline{c_j} = 0 \text{ si } k = 1.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ On rappelle que si $z \in \mathbb{C}, z \times \overline{z} = |z|^2$. Dès lors

$$\begin{aligned}
|\mathrm{S}_n|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right) \times \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right)} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k\right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \times \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{c_j}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \times \left(\overline{c_k} + \sum_{j \neq k} \overline{c_j}\right)\right) \\
|\mathrm{S}_n|^2 &= \sum_{k=1}^{n} (c_k \times \overline{c_k}) + \sum_{k=1}^{n} c_k \times \sum_{j \neq k} \overline{c_j}
\end{aligned}$$

D'où
$$\boxed{|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} c_k\overline{c_j}}$$

Partons de l'égalité prouvée ci-dessus. On ne touche par à la première somme, et dans la dernière, il suffit de voir que sommer sur $j \neq k$, c'est en fait sommer une première fois pour j allant de 1 à $k-1$ puis une seconde fois de $k+1$ à n. En d'autres termes
$$|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} c_k\overline{c_j}$$
Il suffit ensuite d'intervertir les deux sommes du dernier terme du membre de droite (cf TD pour la méthode) et on obtient le résultat voulu
$$\boxed{|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=1}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} c_k\overline{c_j}}$$

Tout d'abord, d'après la question 1, si $k=1$, alors
$$\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} = 0$$
Ainsi,
$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} = \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j}$$
puisque, pour $k=1$, le terme correspondant est nul, et on ne change pas la valeur d'une somme en rajoutant un terme nul. Enfin, on rappelle que, dans une somme, l'indice de sommation est une variable muette : on ne change pas la somme en le notant autrement, c'est-à-dire que
$$\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i = \sum_{k\in\mathrm{I}} a_k = \sum_{t\in\mathrm{I}} a_t = \sum_{\mu\in\mathrm{I}} a_\mu = \cdots$$
Dès lors
$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} c_k\overline{c_j} &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{\theta=1}^{j-1} c_\theta\overline{c_j} && (\text{« } k=\theta \text{ »})\\ &= \sum_{k=2}^{n}\sum_{\theta=1}^{k-1} c_\theta\overline{c_k} && (\text{« } j=k \text{ »})\\ &= \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_j\overline{c_k} && (\text{« } \theta=j \text{ »})\end{aligned}$$

D'où
$$\boxed{|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=2}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_j\overline{c_k}}$$

> J'ai particulièrement détaillé le calcul, mais vous pouvez donner directement le résultat en disant juste que les variables de sommation sont muettes.

Pour la suivante, on peut ainsi regrouper les deux sommes, ce qui donne
$$|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=2}^{n}|c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\left(c_k\overline{c_j} + c_j\overline{c_k}\right)$$
Or, on rappelle que si $z\in\mathbb{C}; z+\overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$:
$$\boxed{|\mathrm{S}_n|^2 = \sum_{k=2}^{n}|c_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}\mathrm{Re}(c_k\overline{c_j})}$$

On rappelle ensuite que $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, c'est-à-dire que la somme des parties réelles est la partie réelle de la somme. En d'autres termes

$$|\mathrm{S}_n|^2=\sum_{k=2}^{n}|c_k|^2+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}c_k\overline{c_j}\right)$$

On fait le changement d'indice $j=(k-j)$ dans la dernière somme.

$$|\mathrm{S}_n|^2=\sum_{k=2}^{n}|c_k|^2+2\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1}c_k\overline{c_{k-j}}\right)$$

Il suffit ensuite d'intervertir cette somme double.

$$\boxed{|\mathrm{S}_n|^2=\sum_{k=2}^{n}|c_k|^2+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}c_k\overline{c_{k-j}}\right)}$$

Partie II

1 Soit $k\geqslant 2$ et soit $t\in[\,k-1\,;k\,]$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, $1/t\geqslant 1/k$. Par croissance de l'intégrale,

$$\boxed{\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\ln(k)-\ln(k-1)}$$

Par somme (de k allant de 2 à n,

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leqslant\sum_{k=2}^{n}\ln(k)-\ln(k-1)=\ln(n)$$

Il suffit d'ajouter 1 des deux côtés pour conclure.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln(n)}$$

2 Il suffit d'appliquer la question précédente en posant $c_j=e^{i\pi\mathrm{P}(j)}$. Ce complexe est de module 1, dès lors

$$|\mathrm{T}_n|^2=n+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}e^{i\pi\mathrm{P}(k)}\times\overline{e^{i\pi\mathrm{P}(k-j)}}\right)$$

$$|\mathrm{T}_n|^2=n+2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}e^{i\pi(\mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-j))}\right)$$

Or, d'après le cours, pour tout $z\in\mathbb{C},\mathrm{Re}(z)\leqslant|\mathrm{Re}(z)|\leqslant|z|$. Ainsi

$$|\mathrm{T}_n|^2\leqslant n+2\left|\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}e^{i\pi(\mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-j))}\right|$$

et d'après l'inégalité triangulaire

$$\boxed{|\mathrm{T}_n|^2\leqslant n+2\sum_{j=1}^{n-1}\left|\sum_{k=j+1}^{n}e^{i\pi(\mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-j))}\right|}$$

3 Notons, pour plus de commodité, A_n le membre de gauche. Par définition de P il vient

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{2i\pi(\mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-j))}\right| \\
&= \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{i\pi(k^2+bk+c-k^2+2kj-j^2-bk+bj-c))/n}\right| \\
&= \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{i\pi(2kj-j^2+bj))/n}\right| \\
&= \left|e^{i\pi(-j^2+bj)/n}\sum_{k=j+1}^{n} e^{2i\pi kj/n}\right| \\
\mathrm{A}_n &= \left|e^{i\pi(-j^2+bj)/n}\right| \times \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{2i\pi kj/n}\right|
\end{aligned}
$$

Soit
$$\mathrm{A}_n = \left|\sum_{k=j+1}^{n} \left(e^{2i\pi j/n}\right)^k\right|$$

Calculons explicitement la somme de droite, notée U_n dans la suite. C'est une somme de termes d'une suite géométrique (de raison $e^{2i\pi j/n}$ différente de 1 car $j < n$), mais la somme ne commence pas en 1, donc on fait comme d'habitude, on décale les indices et on met le premier terme en facteur. Notons $\theta = 2\pi j/n$ l'argument de la raison pour plus de commodité.

$$\mathrm{U}_n = \sum_{k=0}^{n-j-1} e^{i(k+j+1)\theta} = e^{i(j+1)\theta} \times \sum_{k=0}^{n-j-1} e^{ik\theta} = e^{i(j+1)\theta} \times \frac{1-e^{i(n-j)\theta}}{1-e^{i\theta}}$$

On fait ensuite comme en TD, on applique la méthode de l'angle-moitié et on simplifie.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{U}_n &= e^{i(j+1)\theta} \times \frac{e^{i((n-j)\theta)/2} \times -2i\sin\left(\dfrac{(n-j)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} \\
&= e^{i(j+1)\theta} \times e^{i((n-j)\theta)/2} \times \frac{\sin\left(\dfrac{(n-j)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Le résultat en découle en se souvenant qu'une exponentielle complexe est de module 1, et qu'un sinus est compris entre -1 et 1, et donc que son module est inférieur à 1 :

$$\boxed{\left|\sum_{k=n}^{p} e^{ik\theta}\right| \leqslant \frac{1}{|\sin(\theta/2)|}}$$

Enfin
$$\boxed{\forall j \in [\![1\,;\, n-1]\!] \qquad \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{2i\pi(\mathrm{P}(k)-\mathrm{P}(k-j))}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)}}$$

$\boxed{4}$ D'après les deux questions précédentes

$$|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{2\times\pi\times j}{n}\right)}$$

Coupons la somme en $(n-1)/2$:

$$|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 2\left(\sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)} + \sum_{j=(n-1)/2+1}^{n-1} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)}\right)$$

Suivons l'indication de l'énoncé et posons $k = n - j$ dans la deuxième somme pour obtenir

$$|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 2\left(\sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)} + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times (n-k)}{n}\right)}\right)$$

$$|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 2\left(\sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)} + \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\pi - \dfrac{\pi \times k}{n}\right)}\right)$$

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$. Le résultat en découle.

$$\boxed{|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 4 \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)}}$$

5 Découle de la concavité du sinus : cf. chapitre 2.

$$\boxed{\forall x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x)}$$

6 Pour tout $1 \leqslant j \leqslant \dfrac{n-1}{2}$ on a tout d'abord

$$0 < \frac{\pi \times j}{n} \leqslant \frac{\pi}{n} \times \frac{n-1}{2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{n-1}{n} < \frac{\pi}{2}$$

Dès lors, d'après la question précédente et par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi \times j}{n}\right)} \leqslant \frac{\pi}{2} \times \frac{n}{\pi \times j}$$

D'où
$$|\mathrm{T}_n|^2 \leqslant n + 2n \sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{j}$$

D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{T}_n|^2 &\leqslant n + 2n\left(1 + \ln\left(\frac{n-1}{2}\right)\right) \\
&\leqslant n + 2n(1 + \ln(n-1) - \ln(2)) \\
&\leqslant (3 - 2\ln(2))n + 2n\ln(n-1)
\end{aligned}$$

Le résultat en découle en remarquant que

- $3 - 2\ln(2) \leqslant 2$
- $\ln(n-1) \leqslant \ln(n)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi(k^2+bk+c)/n}\right| \leqslant \sqrt{2n(1+\ln(n))}}$$

D'un autre côté, si on applique l'inégalité triangulaire, on obtient simplement

$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi(k^2+bk+c)/n}\right| \leqslant n$$

Laquelle de ces deux majorations est la meilleure ? La première, et de loin. En effet,

$$\frac{n}{\sqrt{2n(1+\ln(n))}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\left(1+\dfrac{\ln(n)}{n}\right)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

En effet, par croissances comparées, $\ln(n)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui permet de conclure : le deuxième majorant, quand n tend vers l'infini, est beaucoup plus grand que le premier, et donc moins intéressant. En d'autres termes

$$\boxed{\text{La majoration obtenue est meilleure que celle obtenue par l'inégalité triangulaire.}}$$