Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 7

On considérera $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe par la bijection habituelle, et par abus de langage on confondra nombres complexes et leurs images dans le plan (par exemple, on dira que trois complexes sont alignés quand leurs images dans le plan complexe sont alignées). Étant donnés quatre nombres complexes deux à deux distincts a, b, c et d, on définit leur birapport $[a; b; c; d]$ par

$$[a; b; c; d] = \frac{(c-a)(d-b)}{(d-a)(c-b)}$$

On rappelle également le résultat suivant (au programme de seconde !) : les points a, b, c sont alignés si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $c - a = \lambda(c - b)$, si et seulement si $(x_b - x_a)(y_c - y_a) - (y_b - y_a)(x_c - x_a) = 0$, où l'on a noté de façon évidente $a = x_a + iy_a$, etc...

1. Expliciter les birapports $[1; i; -1; -i]$ puis $\left[0; -1-i; e^{i\pi/4}; 1+i\right]$ (pour le second, on commencera par écrire les complexes non nuls en fonction de $e^{i\pi/4}$). Représenter ces 8 complexes sur une même figure (on représentera également l'ensemble $\mathbb{U}$).
2. Soient a, b, c, d quatre complexes distincts. On suppose que a, b, c sont alignés. Montrer que a, b, c, d sont alignés si et seulement si $[a; b; c; d] \in \mathbb{R}$.
3. (a) Soient $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma')$ tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$. Montrer que β et β' ne peuvent pas être tous les deux nuls, et montrer que le système linéaire

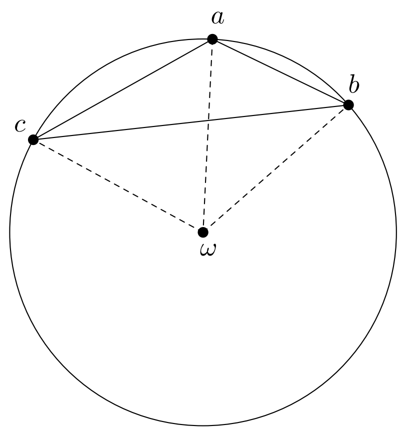
$$\begin{cases} \alpha x & + & \beta y & = & \gamma \\ \alpha' x & + & \beta' y & = & \gamma' \end{cases}$$

d'inconnues x et y admet une unique solution. On séparera les cas selon que $\beta = 0$, que $\beta' = 0$ ou que β et β' sont non nuls. Attention à la rédaction !

   (b) Soient a, b, c trois complexes non alignés. Montrer par le calcul qu'il existe un unique complexe ω tel que

$$|\omega - a| = |\omega - b| \qquad \text{et} \qquad |\omega - a| = |\omega - c|$$

On ne demande pas d'expliciter les coordonnées de ω, simplement de prouver son existence et son unicité.



Si on note $R = |\omega - a| = |\omega - b| = |\omega - c|$, on vient de montrer que les complexes a, b, c appartiennent au cercle de centre ω et de rayon R : ils sont dits cocycliques. On vient de redémontrer au passage que les trois médiatrices du triangle abc sont concourantes [1] (et ω est le centre du cercle circonscrit).

4. Soient α, β, γ trois réels, et z un complexe. On suppose que $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ et z sont distincts.

   (a) Traduire le fait que $e^{i\alpha} \neq e^{i\beta}$, $e^{i\alpha} \neq e^{i\gamma}$ et $e^{i\beta} \neq e^{i\gamma}$ à l'aide de congruences. En déduire que $\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)$ sont non nuls.

   (b) Montrer que

$$\left[e^{i\alpha}; e^{i\beta}; e^{i\gamma}; z\right] = \frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)} \times e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \frac{\left(z - e^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - e^{-i\alpha}\right)}{\left|z - e^{i\alpha}\right|^2}$$

   (c) Montrer que

$$e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \times \left(z - e^{i\beta}\right)\left(\overline{z} - e^{-i\alpha}\right) = |z|^2 e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)} + D$$

où D est un <u>réel</u> que l'on exprimera en fonction de z, α et β. On justifiera bien pourquoi D est un réel.

1. En particulier, on demande de ne pas utiliser ce résultat pour répondre à cette question.

(d) Montrer finalement que

$$\operatorname{Im}\left(\left[e^{i\alpha};e^{i\beta};e^{i\gamma};z\right]\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)\times\sin\left(\dfrac{\alpha-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{\beta-\gamma}{2}\right)}\times\frac{|z|^2-1}{|z-e^{i\alpha}|^2}$$

(e) En déduire que $\left[e^{i\alpha};e^{i\beta};e^{i\gamma};z\right]\in\mathbb{R}$ si et seulement si $z\in\mathbb{U}$.

5. On se donne dans cette question quatre complexes a,b,c et d distincts dont trois quelconques ne sont pas alignés. On note comme dans la question 3.(b) ω l'unique complexe équidistant de a,b et c (il n'est pas demandé de redémontrer son existence, ni de donner ses coordonnées) et $R=|\omega-a|$.

(a) Expliciter deux complexes λ et μ tels que $\lambda a+\mu=1$ et $\lambda\omega+\mu=0$. On définit dans la suite la fonction h sur $\mathbb{C}$ par $h(z)=\lambda z+\mu$.

(b) Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|h(z)|=1$ si et seulement si $|\omega-z|=R$. En déduire l'existence de trois réels α,β,γ tels que $h(a)=e^{i\alpha},h(b)=e^{i\beta}$ et $h(c)=e^{i\gamma}$.

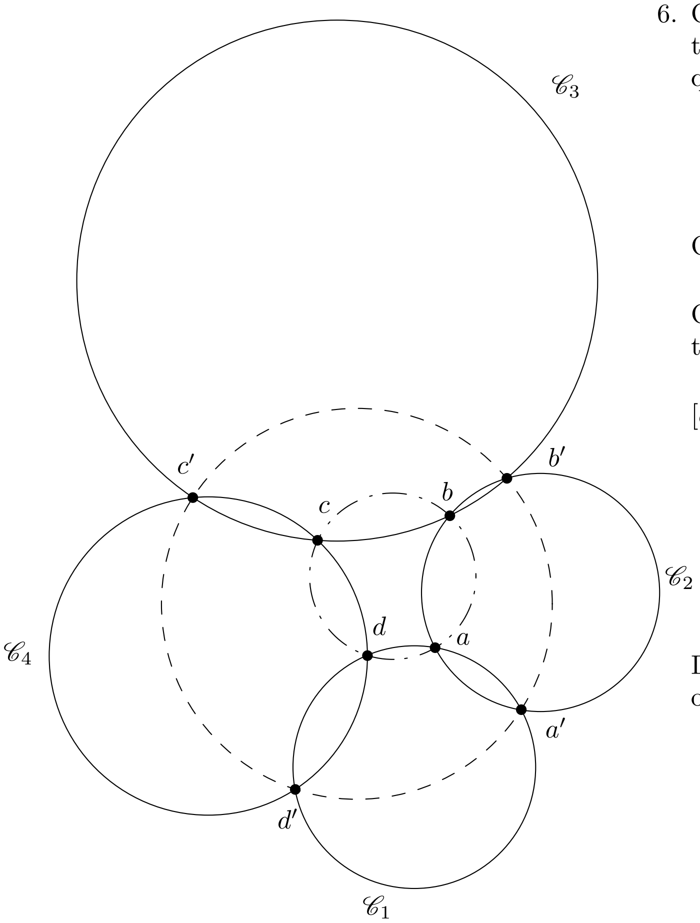
(c) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et en déduire que les complexes $e^{i\alpha},e^{i\beta},e^{i\gamma}$ et $h(d)$ sont deux à deux distincts.

(d) On pose $z=h(d)$. Montrer que $\left[e^{i\alpha};e^{i\beta};e^{i\gamma};z\right]=[a;b;c;d]$.

(e) En déduire que $[a;b;c;d]$ est réel si et seulement si $|d-\omega|=R$, en d'autres termes si et seulement si z appartient au cercle de centre ω et de rayon R.

On vient donc de montrer le résultat suivant :

$\boxed{\text{Quatre complexes distincts sont alignés ou cocycliques si et seulement si leur birapport est réel.}}$



6. On cherche à présent à utiliser ce résultat pour démontrer le théorème de ~~Mickey~~ Miquel. On se donne pour cela quatre cercles $\mathscr{C}_1,\mathscr{C}_2,\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$. On suppose que
   - $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ se coupent en deux points a et a'.
   - $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ se coupent en b et b'.
   - $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ se coupent en c et c'.
   - $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$ se coupent en d et d'.

   On suppose enfin que ces 8 points sont distincts.

   On admet (cela découle d'un calcul immédiat, les sceptiques pourront le vérifier) le théorème des six birapports :

$$[a;b;c;d]\times[c';a';d';b']\times[a';b;a;b']\times[b;c';c;b']\times[c;d';c';d]\times[d';a;a';d]=1$$

   Démontrer le théorème de Miquel : a,b,c et d sont alignés ou cocycliques si et seulement si a',b',c' et d' le sont.

Problème 2 - Une inégalité merveilleuse.

Partie I - Égalité quadratique.

Soient $(c_1, \dots, c_n)$ n nombres complexes qu'on fixe dans toute la partie.

1. Rappeler pourquoi $\displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} = 0$ si $k = 1$ (cf. chapitre sur les sommes).

2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$. Montrer successivement les égalités suivantes :

   - $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k} c_k\overline{c_j}$.
   - $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} + \sum_{j=2}^{n}\sum_{k=1}^{j-1} c_k\overline{c_j}$.
   - $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_k\overline{c_j} + \sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} c_j\overline{c_k}$.
   - $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + 2\sum_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{Re}(c_k\overline{c_j})$.
   - $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} c_k\overline{c_{k-j}}\right)$.

Partie II - L'inégalité proprement dite.

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ (on pourra comparer à une intégrale comme dans l'exercice 16 du chapitre sur les sommes). En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$.

2. Soit $n \geq 1$. On se donne dans la suite $P : x \mapsto (x^2 + bx + c)/n$ une fonction polynomiale de degré 2, et on pose $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi P(k)}$. Montrer que $|T_n|^2 \leq n + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}\left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{i\pi(P(k)-P(k-j))}\right|$.

3. Montrer, en s'inspirant d'un exercice fait en TD, que pour tout $j \in [\![1\,;\, n-1]\!]$,
$$\left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{i\pi(P(k)-P(k-j))}\right| = \left|\sum_{k=j+1}^{n} e^{2i\pi kj/n}\right| \leq \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi\times j}{n}\right)}$$

4. On suppose dans la suite que n est impair. Montrer que
$$|T_n|^2 \leq n + 4\sum_{j=1}^{(n-1)/2} \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi\times j}{n}\right)}$$
   On pourra couper la somme en $(n-1)/2$, et, dans une des deux sommes, poser $k = n - j$.

5. Montrer que pour tout $x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\dfrac{2}{\pi}\times x \leq \sin(x)$.

6. En déduire, à l'aide de la question 1, la très belle inégalité suivante :
$$\left|\sum_{k=1}^{n} e^{i\pi(k^2+bk+c)/n}\right| \leq \sqrt{2n(1+\ln(n))}$$
   Comparer avec le résultat obtenu en appliquant l'inégalité triangulaire.