Chapitre 22

Intégration sur un segment

La définition de l'intégrale en tant qu'aire sous la courbe n'est pas satisfaisante pour des raisons déjà évoquées dans le chapitre 10. Par exemple, pourquoi l'aire sous la courbe existe-t-elle ? Ou, plus simplement, qu'est-ce qu'une aire ? Cela peut mener à des paradoxes type Banach-Tarski. Nous allons en fait raisonner à l'envers : nous allons définir l'intégrale (plus précisément, nous allons donner une méthode de construction de l'intégrale due à Riemann), en nous arrangeant pour que cela coïncide avec la notion d'aire dans des cas simples, et nous définirons ensuite l'aire comme étant l'intégrale. L'interprétation de l'intégrale comme aire sous la courbe permettra d'avoir une bonne intuition des résultats que l'on veut montrer, mais attention : ce n'est pas la définition, ce n'est pas rigoureux et ce ne sera jamais une justification suffisante.

On rappelle d'ailleurs qu'une anagramme (oui, anagramme est un nom féminin) de Banach - Tarski est Banach - Tarski - Banach - Tarski.

Sauf indication contraire, les fonctions sont définies sur un segment $[a;b]$ (avec $a<b$) et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

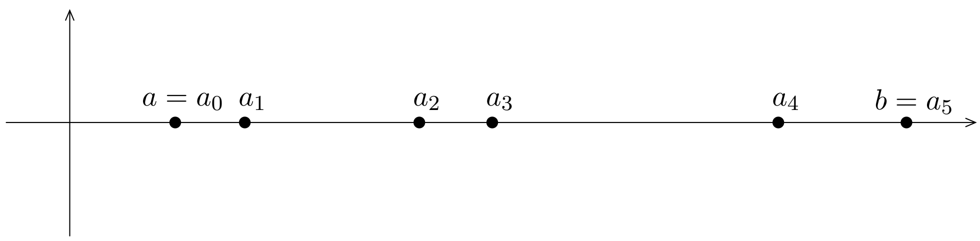
I Quelques outils

I.1 Subdivisions

Définition. On appelle subdivision de $[a;b]$ toute famille finie strictement croissante, notée $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, vérifiant :

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_n=b$$

Exemple :

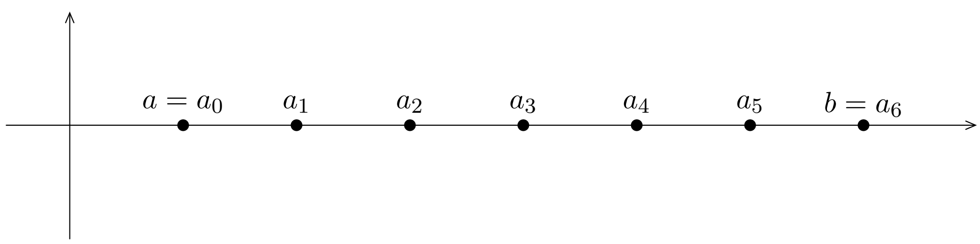


Définition. Si $n\geqslant 1$, la subdivisions $\sigma=(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ définie par :

$$\forall i\in[\![0;n]\!],\qquad a_i=a+i\times\left(\frac{b-a}{n}\right)$$

est la subdivision obtenue en coupant le segment $[a;b]$ en n morceaux égaux. On l'appelle la subdivision régulière.

Pour une subdivision quelconque, les morceaux n'ont aucune raison d'être tous de même taille.

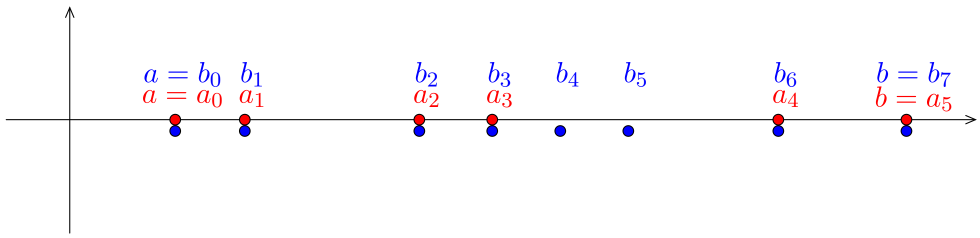


Remarque : Une subdivision est une famille mais on assimilera souvent la subdivision $\sigma=(a_0,\dots,a_n)$ à l'ensemble $\{a_0;\dots;a_n\}$, si bien qu'on s'autorisera à parler d'appartenance, d'inclusion, d'intersection et d'union de subdivision. Par exemple, si $\sigma_1=(0,1,2,3)$ et $\sigma_2=(0,1/2,1,2,3)$, on dira que $\sigma_1\subset\sigma_2$. De plus, quitte à réordonner les éléments, une union de subdivisions est encore une subdivision : par exemple, si $\sigma_1 = (0, 1, 2, 3)$ et $\sigma_2 = (0, 1/2, \sqrt{2}, 3)$, alors on notera $\sigma_1 \cup \sigma_2 = (0, 1/2, 1, \sqrt{2}, 2, 3)$.

Définition. Soient $\sigma_1 = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $\sigma_2 = (b_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ deux subdivisions de $[\,a\,;b\,]$. On dit que σ_2 est plus fine que σ_1 si $\sigma_1 \subset \sigma_2$ ie si σ_2 contient tous les éléments de σ_1.

Attention, une subdivision plus fine qu'une autre contient plus de points donc a évidemment plus d'éléments, mais la réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce qu'une subdivision a plus d'éléments qu'une autre qu'elle est plus fine, les différents éléments des deux subdivisions peuvent se trouver à des endroits totalement différents !

Remarque : En d'autres termes, on obtient σ_2 à partir de σ_1 en rajoutant des points. Ci-dessous, $\sigma_2 = (b_j)_{0 \leqslant j \leqslant 7}$ est plus fine que $\sigma_1 = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant 5}$.



Définition. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[\,a\,;b\,]$. On appelle pas de la subdivision le réel $p(\sigma) = \displaystyle\max_{i \in [\![\, 0\,;n-1\,]\!]} a_{i+1} - a_i$. C'est le plus grand écart entre deux a_i consécutifs.

Remarque : La subdivision régulière (voir ci-dessus) est aussi appelée subdivision à pas constant. Elle sera particulièrement utile quand on manipulera des sommes de Riemann à pas constant (cf. paragraphe VI.1).

Proposition. La relation « être plus fine que » est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[\,a\,;b\,]$.

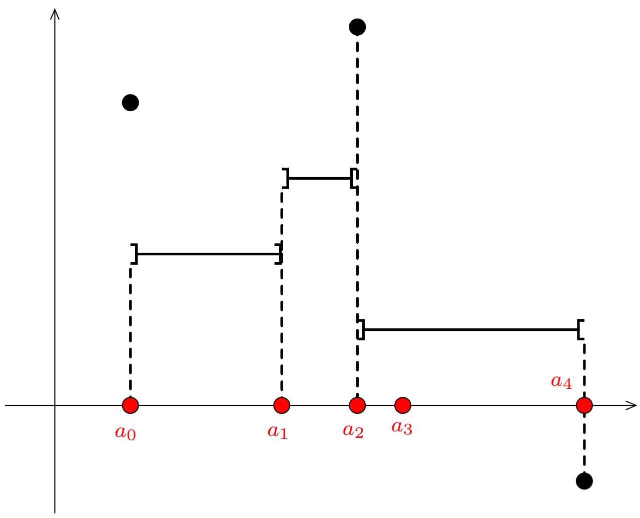
Démonstration. Découle directement que l'inclusion est une relation d'ordre sur l'ensemble des parties de $[\,a\,;b\,]$.

I.2 Fonctions en escalier

Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. On dit que f est en escalier s'il existe $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que, pour tout $i \in [\![\, 0\,;\,n-1\,]\!]$, f soit constante sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.

Remarques :

- En d'autres termes, une fonction en escalier est une fonction « constante sur un nombre fini de morceaux » avec des valeurs quelconques « aux points de jointure » entre les différents morceaux.
- En particulier, une fonction constante sur $[\,a\,;b\,]$ est en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ (réciproque évidemment fausse).
- Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs (les n valeurs sur les n intervalles ouverts $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et les $n+1$ valeurs en les points de la subdivision $a_0, \dots, a_n$).
- Ci-dessous le graphe d'une fonction en escalier. Par définition, une fonction en escalier est continue sur chaque intervalle $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$, c'est-à-dire que les seuls points de discontinuité éventuels sont les points de la subdivision, mais attention, cela ne signifie pas qu'elle soit discontinue en tous les points de la subdivision : si le « recollement » en a_i se passe bien (i.e. si les valeurs de f sur $]\,a_{i-1}\,;a_i\,[$, sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et en a_i sont égales), alors f est continue en a_i. Par exemple, sur le dessin ci-dessous, f est continue en a_3.



Exemple : La fonction partie entière est en escalier sur $[\,0\,;3\,]$.

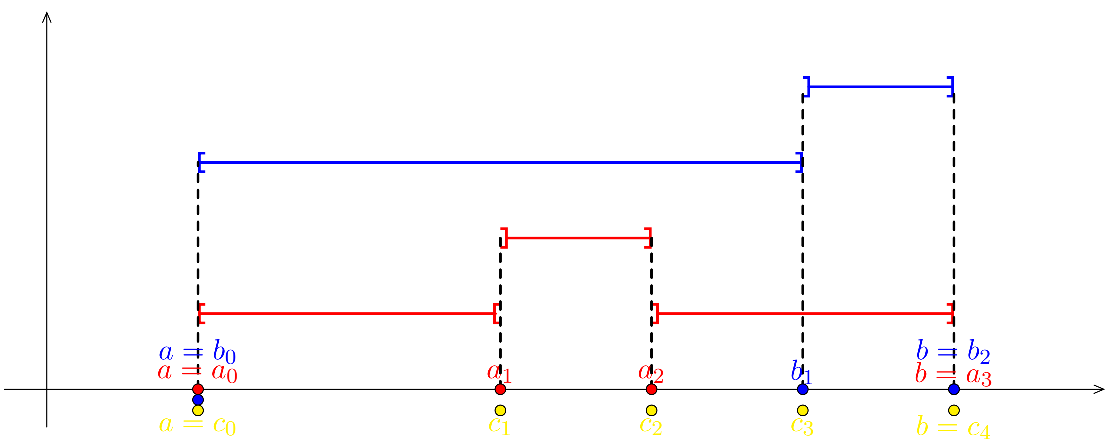
Définition. Avec les notations de la définition, la subdivision σ est dite adaptée à la fonction f.

Exemple : $\sigma = (0, 1, 2, 3)$ est adaptée à la partie entière sur $[\,0\,;3\,]$.
Remarques :

- En d'autres termes, $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à la fonction f si f est constante sur les intervalles ouverts délimités par σ i.e. sur les $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.
- Encore en d'autres termes, σ est adaptée à f si les éventuels points de discontinuité de f appartiennent à σ (mais attention, tous les points de σ ne sont pas nécessairement des points de discontinuité de f).
- Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptés à une fonction en escalier. Par exemple, $\sigma' = (0, 1/2, 1, 2, 3)$ est adaptée à la partie entière sur $[\,0\,;3\,]$, et pour l'exemple ci-dessus, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ et (a_0, a_1, a_2, a_4) sont deux subdivisions adaptées. Plus généralement, si σ est adaptée à f, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.

Lemme. Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une subdivision adaptée à f et à g.

Démonstration. Soient σ_1 adaptée à f et σ_2 adaptée à g. Alors $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$ est adaptée à f et à g.



Définition. On note $\mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème. $\mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, muni de la somme et du produit, est un anneau commutatif.

DÉMONSTRATION. On sait déjà (cf. chapitre 18) que $\mathbb{R}^{[a\,;b]}$, muni de ces opérations, est un anneau commutatif. Il suffit donc de prouver que $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a\,;b]}$, et donc il suffit de prouver que $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est stable par somme, par opposé et par produit, puisqu'il contient évidemment la fonction nulle et la fonction constante égale à 1 (sur $[\,a\,;b\,]$).

Rappelons (cf. chapitre 18) que si X est un ensemble quelconque et A un anneau, on peut munir A^X d'une structure d'anneau à l'aide de la somme et du produit de fonctions.

Soient donc f et g en escalier sur $[\,a\,;b\,]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f et g (une telle subdivision existe d'après le lemme précédent). Par définition d'une subdivision adaptée, pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, f et g sont constantes sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ donc $f+g$, $-f$ et $f\times g$ également, si bien que $f+g$ et $f\times g$ sont en escalier, ce qui permet de conclure.

Théorème. $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un réel, c'est-à-dire que si $f \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Nous dirons dans le chapitre 28 que $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

II Fonctions continues par morceaux

Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. f est continue par morceaux (en abrégé : $\mathscr{C}^{pm}$) s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de $[\,a\,;b\,]$ telle que pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$:

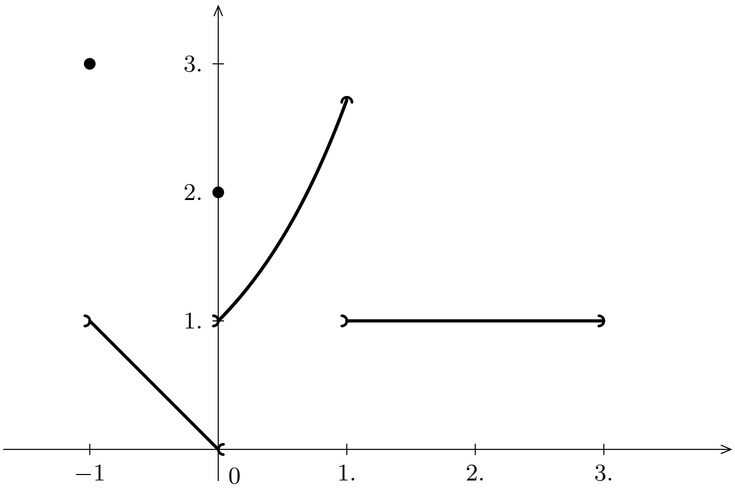
- f soit continue sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$
- f admette une limite à gauche en a_{i+1} et une limite à droite en a_i finies.

Exemple :

- Une fonction continue est continue par morceaux.
- Une fonction en escalier est continue par morceaux.
- La fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$ est continue par morceaux sur $[\,-1\,;1\,]$.
- La fonction

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} [\,-1\,;3\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 3 & \text{si } x=-1 \\ -x & \text{si } x \in \,]\,-1\,;0\,[\\ 2 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 1 & \text{si } x \in \,]\,1\,;3\,] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

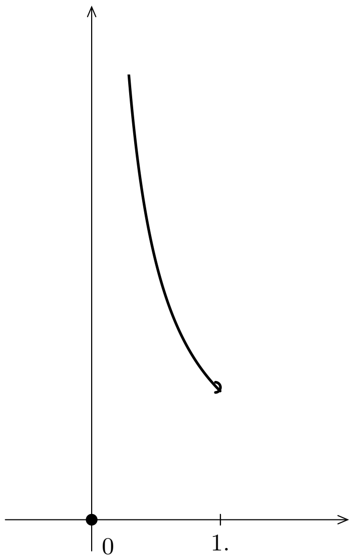
est continue par morceaux sur $[\,-1\,;3\,]$.



- La fonction

$$f : \begin{cases} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \end{cases} \end{cases}$$

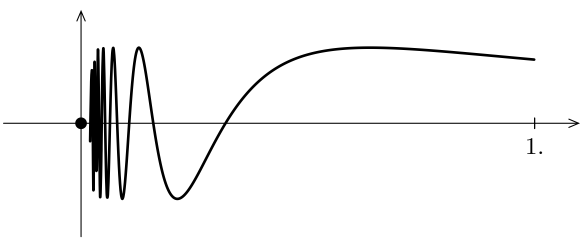
n'est pas continue par morceaux. En effet, elle n'admet pas de limite à droite finie en 0.



- La fonction

$$f : \begin{cases} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \end{cases} \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux car n'admet pas de limite à droite en 0.

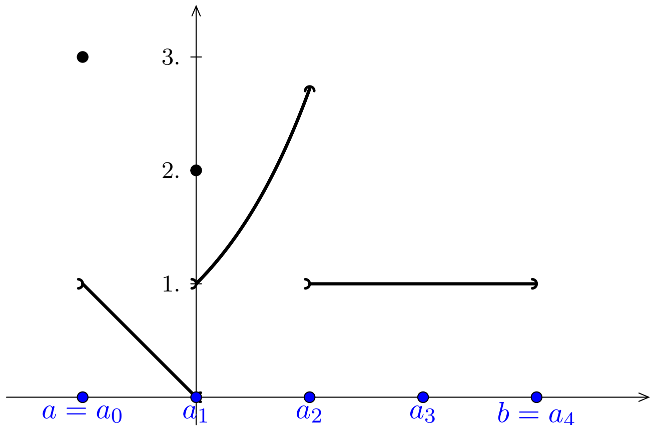


Définition. Avec les notations de la définition, la subdivision σ est dite adaptée à la fonction f.

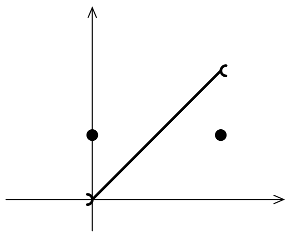
Exemple : $\sigma = (0, 1, 2, 3)$ est adaptée à la partie entière sur $[\,0\,;3\,]$.

Remarques :

- En d'autres termes, $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est adaptée à la fonction f si f est continue sur les intervalles ouverts délimités par σ i.e. sur les $]\,a_i\,; a_{i+1}\,[$.
- Encore en d'autres termes, σ est adaptée à f si les éventuels points de discontinuité de f appartiennent à σ (mais attention, tous les points de σ ne sont pas nécessairement des points de discontinuité de f).
- Il n'y a pas toujours pas unicité de la subdivision adaptée à une fonction en escalier. Si σ est adaptée à f, toute subdivision plus fine que σ est adaptée à f.



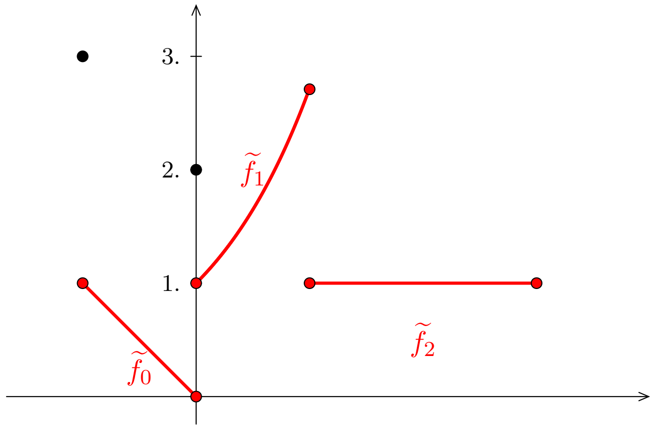
Activité : Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais n'atteint pas forcément ses bornes).



Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. f est continue sur $]\,a_i\,; a_{i+1}\,[$ et admet une limite à gauche en a_{i+1} notée G_{i+1} et une limite à droite en a_i notée D_i. Alors la fonction

$$\tilde{f}_i \left\{ \begin{array}{ccc} [\,a_i\,; a_{i+1}\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f(x) & \text{si } x \in\,]\,a_i\,; a_{i+1}\,[\\ D_i & \text{si } x = a_i \\ G_{i+1} & \text{si } x = a_{i+1} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est continue. Attention, $\tilde{f}_i$ n'est pas le prolongement de f à $[\,a_i\,; a_{i+1}\,]$ car f est déjà définie en a_i et a_{i+1}. $\tilde{f}_i$ est la fonction continue sur $[\,a_i\,; a_{i+1}\,]$ qui coïncide avec f sur $]\,a_i\,; a_{i+1}\,[$ (c'est en fait le prolongement de la restriction de f à $]\,a_i\,; a_{i+1}\,[$).



$\tilde{f}_i$ est continue sur le segment $[a_i\,;a_{i+1}]$ donc est bornée (et atteint ses bornes), disons par M_i. Résumons. Soit $x \in [a\,;b]$.

- Si $x \in \sigma$, $|f(x)| \leqslant \max(|f(a_0)|, \dots, |f(a_n)|)$.
- Sinon, il existe i tel que $x \in]a_i\,;a_{i+1}[$ donc $|f(x)| = |\tilde{f}_i(x)| \leqslant M_i$.

Dans tous les cas,

$$|f(x)| \leqslant \max(M_0, \dots, M_{n-1}, |f(a_0)|, \dots, |f(a_n)|)$$

c'est-à-dire que f est bornée.

C'est une définition équivalente des fonctions continues par morceaux : f est $\mathscr{C}^{pm}$ sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n-1]\!]$, la restriction de f à $]a_i\,;a_{i+1}[$ soit continue et prolongeable en une fonction continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$.

Lemme. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors il existe une subdivision adaptée à f et à g.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Définition. On note $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème. $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$, muni de la somme et du produit, est un anneau commutatif.

En particulier, une somme et un produit de fonctions continues par morceaux sont continus par morceaux.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Théorème. $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$ est stable par multiplication par un réel, c'est-à-dire que si $f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$.

Là aussi, nous dirons dans le chapitre 28 que $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

III Intégrale d'une fonction en escalier

III.1 Définition

Proposition/Définition. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ en escalier et soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ La quantité

$$I(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times (a_{i+1} - a_i)$$

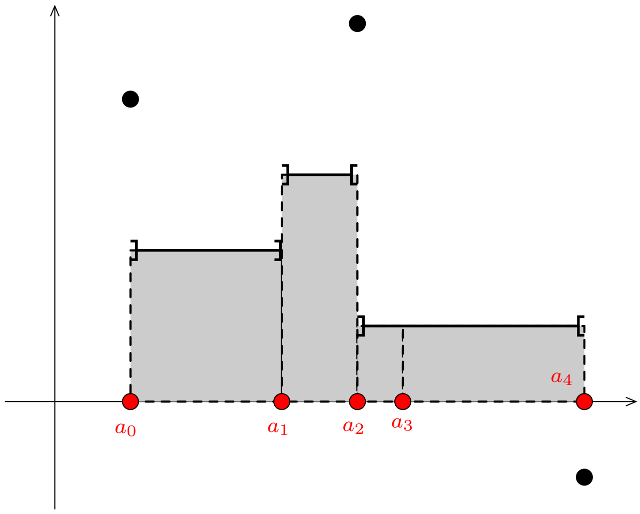
est indépendante du choix de la subdivision adaptée à f choisie. La valeur commune de

Rappelons que f est constante sur chaque intervalle de la forme $]a_i\,;a_{i+1}[$ puisqu'on a pris une subdivision adaptée à f.

toutes les quantités de la forme $I(\sigma, f)$ pour toutes les subdivisions σ adaptées à f est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,]} f$ et est appelée intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$.

Remarque : Géométriquement, l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ est la somme de toutes les aires (algébriques i.e. négatives lorsque la fonction est négative) des rectangles formés par l'axe des abscisses et les valeurs constantes de f sur chacun des intervalles $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. C'est donc l'aire entre l'axe des abscisses et la courbe.

Attention, ce ne sera plus la définition pour une fonction continue par morceaux quelconque, même si cette interprétation sera encore valable.



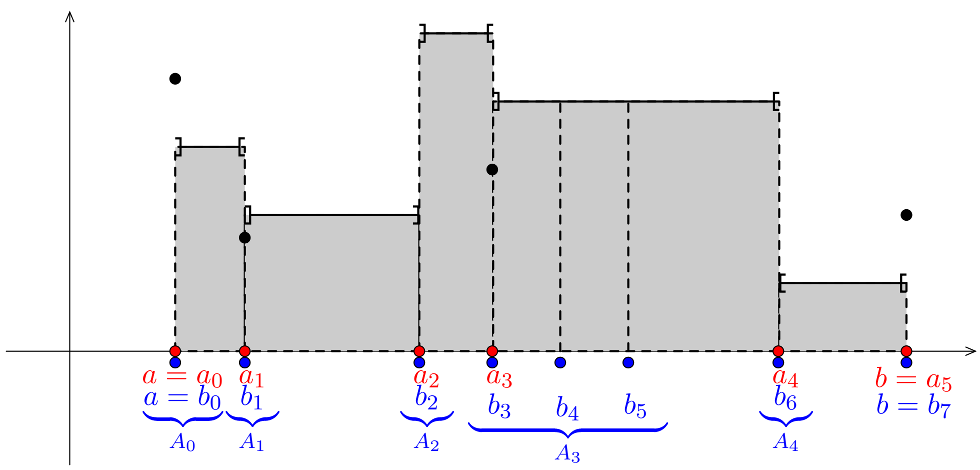
Démonstration. Prouvons que si σ_1 et σ_2 sont adaptées à f, alors $I(\sigma_1, f) = I(\sigma_2, f)$. Supposons dans un premier temps que σ_2 soit plus fine que σ_1. Notons $\sigma_1 = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $\sigma_2 = (b_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ (avec donc $n \leqslant p$). Pour tout $i \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et, pour tout $j \in [\![\,0\,;p-1\,]\!]$, z_j la valeur de f sur $]\,b_j\,;b_{j+1}\,[$, si bien que

$$I(\sigma_1, f) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1} - a_i) \qquad \text{et} \qquad I(\sigma_2, f) = \sum_{j=0}^{p-1} z_j(b_{j+1} - b_j)$$

Cela se voit bien sur le dessin ci-dessus : qu'on prenne $\sigma_1 = (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ ou $\sigma_2 = (a_0, a_1, a_2, a_4)$, cette quantité sera la même. La technicité de la démonstration ne doit pas masquer le fait que ce résultat est très intuitif et se voit très bien.

L'idée est de faire des regroupements par paquets dans $I(\sigma_2, f)$. Puisque $\sigma_1 \subset \sigma_2$, alors $a_0, \dots, a_n$ appartiennent à $\sigma_2 = (b_0, \dots, b_p)$: notons $j_0 < \cdots < j_n$ tels que $a_0 = b_{j_0}, \dots, a_n = b_{j_n}$ (en particulier, $j_0 = 0$ et $j_n = p$). Enfin, notons $A_0 = [\![\,j_0\,;j_1-1\,]\!], A_1 = [\![\,j_1\,;j_2-1\,]\!], \dots, A_{n-1} = [\![\,j_{n-1}\,;j_n-1\,]\!]$.

Les A_i sont « les paquets » : on part de a_i et on prend tous les éléments de σ_2 jusqu'au prochain, a_{i+1}, exclu. En clair, on regroupe tous les points de σ_2 qui correspondent à une même valeur de f.



Les ensembles d'indices $A_0, \dots, A_{n-1}$ sont disjoints et ont pour union $[\![\,0\,;p-1\,]\!]$ (puisque $b_{j_n} = a_n = b_p = p$) donc

C'est le principe du regroupement par paquets : cf. chapitre 3.

$$I(\sigma_2, f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j \in A_i} z_j(b_{j+1} - b_j)$$

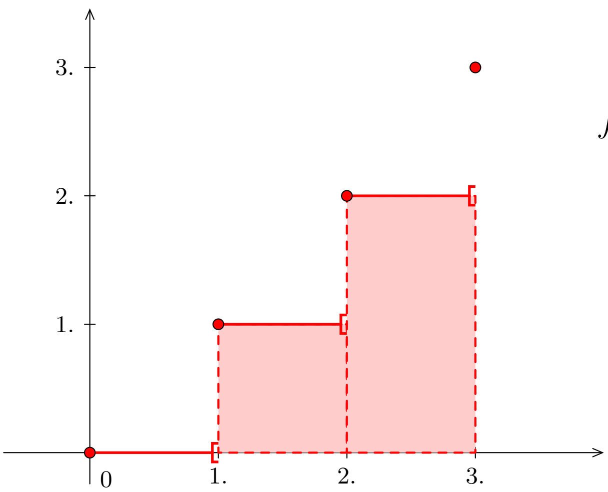
Soit enfin $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ et soit $j \in A_i = [\![j_i\,;\, j_{i+1}-1]\!]$ donc $j_i \leqslant j < j+1 \leqslant a_{i+1}$. Or, par définition, $b_{j_i} = a_i$ et $b_{j_{i+1}} = a_{i+1}$ si bien que $b_{j_i} = a_i \leqslant b_j < b_{j+1} \leqslant a_{i+1}$. Dès lors, f étant constante égale à y_i sur $]\, a_i\,;a_{i+1}\,[$, f est aussi constante égale à y_i sur $]\, b_j\,;b_{j+1}\,[$ si bien que $z_j = y_i$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
I(\sigma_2, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j\in A_i} y_i(b_{j+1}-b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j\in A_i} (b_{j+1}-b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i \sum_{j=j_i}^{j_{i+1}-1} (b_{j+1}-b_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i b_{j_{i+1}} - b_{j_i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i) \\
&= I(\sigma_1, f) \qquad \square
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Si σ_2 n'est pas plus fine que σ_1, notons $\sigma_3 = \sigma_1 \cup \sigma_2$, plus fine que σ_1 et σ_2. Dès lors, d'après ce qui précède, $I(\sigma_1, f) = I(\sigma_3, f)$ et $I(\sigma_2, f) = I(\sigma_3, f)$ donc $I(\sigma_1, f) = I(\sigma_2, f)$: dans tous les cas, on a le résultat voulu.

Exemple : Pour la partie entière sur $[\,0\,;3\,]$:



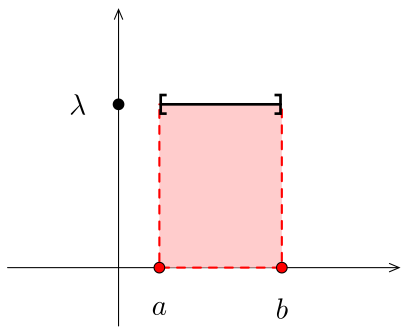
$$\begin{aligned}
\int_0^3 \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x &= 0\times(1-0)+1\times(2-1)+2\times(3-2) \\
&= 3
\end{aligned}$$

Exemple : Si f est constante égale à λ, alors f est en escalier et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \times (b-a)$.

L'intégrale d'une fonction constante est égale à la valeur de la constante multipliée par la longueur de l'intervalle. On retrouve le fameux :

« aire d'un rectangle = longueur $\times$ largeur $= \lambda \times (b-a)$ ».

On note parfois cette intégrale, par abus de langage, $\displaystyle\int_a^b \lambda\,\mathrm{d}t$, qui est donc égale à $\lambda \times (b-a)$.



Remarque : Les valeurs prises par f en les points de σ, une subdivision adaptée, n'apparaissent pas dans la définition de l'intégrale et donc n'ont aucune importance. Plus précisément :

Proposition. Si f et g sont deux fonctions en escalier qui sont égales sauf en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à la fois à f et à g. Soit $i \in [\![0\,;n-1]\!]$. L'intervalle $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ étant infini, f et g sont égales sur cet intervalle (elles sont constantes sur cet intervalle et ne diffèrent qu'en un nombre fini de points donc sont forcément égales) : soit y_i leur valeur commune. On en déduit que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1} - a_i) = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

□

En d'autres termes, les valeurs prises par une fonction en escalier en des points isolés ne changent pas la valeur de l'intégrale. Ce sera la même chose pour des fonctions continues par morceaux dans le paragraphe IV.

Corollaire. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, alors f est continue par morceaux et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

DÉMONSTRATION. Notons $a_1 < \cdots < a_{n-1}$ les points éventuels de $]\,a\,;b\,[$ en lesquels f n'est pas nulle, et notons $a_0 = a$ et $a_n = b$. Il en découle que f est nulle donc constante sur $]\,a_0\,;a_1\,[$, sur $]\,a_1\,;a_2\,[$ etc. jusque $]\,a_{n-1}\,;a_n\,[$ (que f soit nulle en a et en b, ou non). f est donc en escalier sur $]\,a\,;b\,[$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est adaptée à f. De plus, f est nulle sur chaque intervalle du type $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ donc son intégrale est nulle (les y_i sont nuls dans la définition).

III.2 Opérations sur les intégrales

III.2.a Relation de Chasles

Théorème (Relation de Chasles). Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier et soit $c \in\,]\,a\,;b\,[$. Alors f est en escalier sur $[\,a\,;c\,]$ et sur $[\,c\,;b\,]$, et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f : pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.

Supposons dans un premier temps que $c \in \sigma$: il existe donc $i_0 \in [\![1\,;n-1]\!]$ (car $c \in\,]\,a\,;b\,[$) tel que $c = a_{i_0}$. On a alors $a_0 = a$, $a_{i_0} = c$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_{i_0} = c$, c'est-à-dire que $\sigma_g = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant i_0}$ est une subdivision de $[\,a\,;c\,]$. De plus, f est constante égale à y_0 sur $]\,a_0\,;a_1\,[$, constante égale à y_1 sur $]\,a_1\,;a_2\,[$, ..., constante égale à y_{i_0-1} sur $]\,a_{i_0-1}\,;a_{i_0}\,[$: f est en escalier sur $[\,a\,;c\,]$, σ_g est adaptée à f et :

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{i_0-1} y_i(a_{i+1}-a_i)$$

De même, f est en escalier sur $[\,c\,;b\,]$, $\sigma_d = (a_i)_{i_0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision de $[\,c\,;b\,]$ adaptée à f et

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=i_0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i)$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\int_a^c f(f)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{i_0-1} y_i(a_{i+1}-a_i) + \sum_{i=i_0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(a_{i+1}-a_i) \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

□

Si c n'appartient pas à σ, notons $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$: σ' est plus fine que σ donc est encore adaptée à f, et $c \in \sigma'$, donc le premier cas permet de conclure.

On assimile σ à l'ensemble de ses éléments.

III.2.b Linéarité de l'intégrale

Théorème (Linéarité de l'intégrale). Soient $f_1, f_2 : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que l'intégrale est linéaire.

On sait déjà que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est en escalier d'après le paragraphe I.2.

Démonstration. Ce résultat découle immédiatement de la linéarité de la somme. Prouvons-le pour nous familiariser avec la définition d'une intégrale. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ adaptée à f_1 et f_2. Pour tout $i \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, notons y_i la valeur de f_1 et z_i la valeur de f_2 sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Il en découle que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est constante égale à $\lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i$ sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. On en déduit que, d'une part, σ est adaptée à $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, et d'autre part, que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1} (\lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i) \times (a_{i+1}-a_i) \\
&= \lambda_1 \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times (a_{i+1}-a_i) + \lambda_2 \sum_{i=0}^{n-1} z_i \times (a_{i+1}-a_i) \\
&= \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Linéarité de la somme.

□

Corollaire. Soient $f_1, \dots, f_n : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

DÉMONSTRATION. Par récurrence : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Attention, on n'a pas $\displaystyle\int_a^b f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$!! Par exemple, si f et g sont constantes (donc en escalier) égales à 1 sur $[\,0\,;2\,]$, on a :

$$\int_0^2 f(t)\times g(t)\,\mathrm{d}t = 2 \neq 4 = \int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^2 g(t)\,\mathrm{d}t$$

La linéarité de l'intégrale, c'est : « on casse les sommes et on sort les constantes », mais on ne peut pas casser les produits ni sortir ce qui dépend de t !

III.2.c Positivité et croissance de l'intégrale

Théorème. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier. Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

On rappelle que $a \leqslant b$!

DÉMONSTRATION. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Pour tout $i \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$, notons y_i la valeur de f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Par hypothèse, $y_i \geqslant 0$ et $a_{i+1}-a_i > 0$ si bien que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \times (a_{i+1}-a_i) \geqslant 0$$ □

Remarques :

- La valeur de l'intégrale étant inchangée si on modifie la valeur de f en un nombre fini de points (cf. paragraphe III.1), le résultat ci-dessus est encore valable si f est positive sur $[\,a\,;b\,]$ privé d'un nombre fini de points.
- Si f est négative, la même démonstration assure que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$: on pourrait appeler ce résultat « la négativité de l'intégrale », mais on parle plutôt de positivité de l'intégrale, même lorsque f est positive.
- Cependant, si f n'est pas de signe constant, on ne peut pas conclure quant au signe de son intégrale.

Corollaire (Croissance de l'intégrale). Soient f et $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier telles que $f \leqslant g$ sur $[\,a\,;b\,]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

DÉMONSTRATION. $g-f$ est positive donc $\displaystyle\int_a^b g(t)-f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$. Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b g(t)-f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$ □

ce qui permet de conclure.

Remarques :

- ⚠ Là aussi, ce résultat n'est valable que si $a \leqslant b$. Pour l'instant, cette remarque n'a pas vraiment de sens car, de toute façon, on ne sait définir une intégrale que si $a \leqslant b$, mais nous définirons dans le paragraphe IV.5 une intégrale pour $a \geqslant b$, et là les résultats de positivité et de croissance de l'intégrale ne seront plus valables. La première chose à faire sera donc de mettre les bornes dans l'ordre croissant (i.e. la plus petite en bas).
- Là aussi, ce résultat est encore valable si $f \leqslant g$ sauf en un nombre fini de points.

III.2.d Inégalité triangulaire

Théorème (Inégalité Triangulaire). Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Comme l'inégalité triangulaire pour les sommes, celle-ci doit devenir un nouveau réflexe de calcul.

Démonstration. $f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$ □

ce qui permet de conclure (rappelons que pour montrer une inégalité du type $|A| \leqslant \alpha$, il suffit de montrer que $A \leqslant \alpha$ et que $-A \leqslant \alpha$).

Remarque : Il n'y a pas forcément égalité.

Exemple : Si f est la fonction en escalier constante égale à -1 sur $[\,-1\,;0\,]$ et à 1 sur $]\,0\,;1\,]$, alors $\displaystyle\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\left|\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| = 0$ mais $|f|$ est constante égale à 1 donc $\displaystyle\int_{-1}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 2$.

Le dessin est laissé à votre charge.

IV Intégrale d'une fonction continue par morceaux

IV.1 Densité des fonctions en escalier

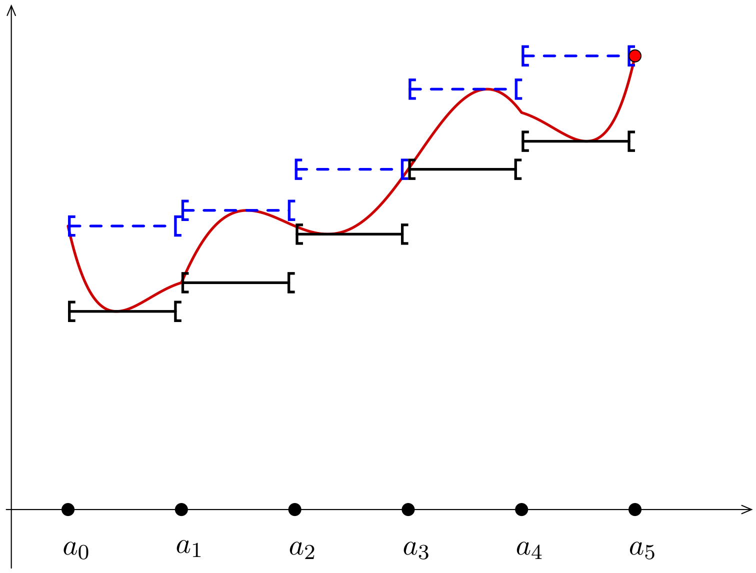
Lemme. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe φ et ψ : $[\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Quand on écrit « $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ », il faut évidemment lire : « pour tout $x \in [\,a\,;b\,], \varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ ». C'est la même chose avec $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. Supposons dans un premier temps f continue. f est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$ □

Soit n tel que $(b-a)/n \leqslant \eta$ et notons $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ la subdivision régulière d'indice n. Définissons à présent φ et ψ.



En d'autres termes, on fait des pas de largeur $(b-a)/n$. L'idée de la preuve est ensuite très simple : puisqu'on fait des pas de largeur inférieure à η, on fait des « sauts » verticaux d'amplitude inférieure à ε (puisque f est UC). En prenant le maximum égal à ψ et le minimum égal à φ, on est sûr d'avoir $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

On définit φ et ψ de la façon suivante :

- Si $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, ψ est constante égale à M_k, maximum de f sur $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$, et φ est constante égale à m_k, minimum de f sur $[\,x_k\,;x_{k+1}\,]$. Ces extrema existent bien d'après le théorème des bornes atteintes (car f est continue sur le segment $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$.

- $\psi(b) = \varphi(b) = f(b)$.

Le maximum et le minimum sont forcément atteints, mais pas forcément en a_k ou en a_{k+1}, ce qui se voit bien sur le dessin ci-dessus.

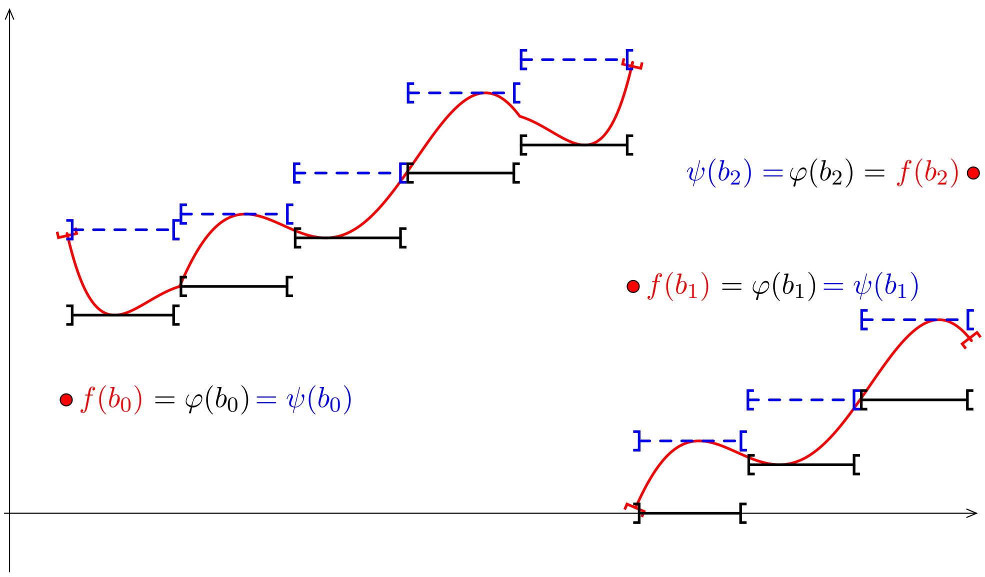
Montrons que ψ et φ conviennent.

- ψ et φ sont constantes sur chaque intervalle du type $]\,a_k\,;a_{k+1}\,[$ donc sont en escalier (et σ est adaptée à ψ et φ).
- Soit $x \in [\,a\,;b\,[$, soit k tel que $a_k \leqslant x < a_{k+1}$. Par définition, $\varphi(x) = m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k = \psi(x)$. Si $x = b$, on a $\varphi(x) = \psi(x) = f(x)$ et on conclut de la même façon. On a donc bien : $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$.
- Soit $x \in [\,a\,;b\,[$ et soit k tel que $a_k \leqslant x < a_{k+1}$. Il existe $(y,z) \in [\,a_k\,;a_{k+1}\,]$ tel que $\psi(x) = M_k = f(y)$ et $\varphi(x) = m_k = f(z)$. Or, y et z appartiennent à $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$ donc $|y-z| \leqslant (b-a)/n \leqslant \eta$ si bien que $|f(y) - f(z)| \leqslant \varepsilon$. En d'autres termes, $|\psi(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ donc $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$. De plus, le résultat est évidemment vrai si $x = b$.

Supposons à présent f continue par morceaux, et soit $\tau = (b_j)_{0 \leqslant j \leqslant p}$ adaptée à f. Comme on l'a déjà vu (cf. paragraphe II), pour tout $j \in [\![0\,;\, p-1]\!]$, la restriction de f à $]\,b_j\,;b_{j+1}\,[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[\,b_j\,;b_{j+1}\,]$ notée $\tilde{f}_j$. D'après le premier cas, il existe ψ_j et φ_j en escalier sur $[\,b_j\,;b_{j+1}\,]$ telles que $\varphi_j \leqslant \tilde{f}_j \leqslant \psi_j$ et $\psi_j - \varphi_j \leqslant \varepsilon$. Définissons les fonction ψ et φ de la façon suivante :

- Pour tout j, $\psi = \psi_j$ sur $]\,b_j\,;b_{j+1}\,[$.
- Même chose pour φ.
- Pour tout j, $\psi(b_j) = \varphi(b_j) = f(b_j)$.

En d'autres termes, on itère le procédé précédent sur chaque intervalle ouvert délimité par les points de la subdivision, et aux points de la subdivision, on attribue à φ et à ψ la valeur prise par f (ce qui n'a aucune importance : pour les fonctions en escalier, les valeurs ponctuelles aux points de la subdivision n'ont aucune incidence).



Montrons enfin que ψ et φ conviennent. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$.

- Si x est l'un des b_j, alors $f(x) = \varphi(x) = \psi(x)$ donc on a bien $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$.
- Sinon, il existe j tel que $x \in \,]\,b_j\,;b_{j+1}\,[$ si bien que $f(x) = \tilde{f}_j(x)$, $\psi(x) = \psi_j(x)$ et $\varphi(x) = \varphi_j(x)$ donc on a bien $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$ et $\psi(x) - \varphi(x) \leqslant \varepsilon$.

Corollaire. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier telle que $|f - g| \leqslant \varepsilon$: on dit que l'ensemble des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

Remarques :

- On dit parfois que $\mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ est dense dans $\mathscr{C}^{pm}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ (au sens de la norme $||.||_\infty$). Cela découle d'une définition plus large de la densité, valable dans ce qu'on appelle un espace vectoriel normé, que vous verrez l'année prochaine. Mais cela ne devrait pas trop vous choquer, c'est tout à fait analogue à la définition d'une partie dense dans $\mathbb{R}$. En effet (cf. chapitre 12), une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe des éléments de D « aussi près de x qu'on veut » i.e. si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $d \in D$ tel que $|x - d| \leqslant \varepsilon$: on voit bien que la situation ici est tout à fait analogue.
- Ce résultat est très important car il va nous permettre, d'une part, de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux et, d'autre part, car il permettra d'étendre aux intégrales de fonctions continues par morceaux des résultats vrais (et évidents) uniquement (pour l'instant) pour les intégrales des fonctions en escalier.

IV.2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On définit les ensembles $\mathscr{E}^-(f)$ et $\mathscr{E}^+(f)$ par :

$$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}) \,|\, \varphi \leqslant f\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,],\mathbb{R}) \,|\, f \leqslant \psi\}$$

En d'autres termes, $\mathscr{E}^-(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier inférieures (ou égales) à f, et $\mathscr{E}^+(f)$ est l'ensemble des fonctions en escalier supérieures à f. Par exemple, sur le dessin ci-dessus, $\psi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\varphi \in \mathscr{E}^+(f)$. Précisons enfin que la variable, dans la définition de ces ensembles, est muette...

Proposition/Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Soient les ensembles :

$$I^-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \right\} \qquad \text{et} \qquad I^+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \psi \in \mathscr{E}^-(f) \right\}$$

Les ensembles $I^-(f)$ et $I^+(f)$ admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, avec $\sup(I^-(f)) = \inf(I^+(f))$. Cette borne commune est appelée intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ et est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,]} f$.

...et qu'une fonction peut appartenir à l'un des deux ensembles sans s'appeler forcément φ ou ψ : on aurait pu l'appeler g au lieu de φ et de ψ, on n'a utilisé ces lettres que dans l'optique d'utiliser le lemme du paragraphe précédent.

Démonstration. f étant continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$, elle est bornée (une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée, mais n'atteint pas forcément ses bornes : cf. paragraphe II.2). Notons m et M respectivement un majorant et un minorant de f. Il en découle que φ_m, la fonction constante égale à m, et ψ_M, la fonction constante égale à M appartiennent respectivement à $\mathscr{E}^-(f)$ et à $\mathscr{E}^+(f)$. En effet, elles sont constantes donc en escalier et, par définition de m et M, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$ donc $\varphi_m(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi_M(x)$. En particulier,

$$\int_a^b \varphi_m(t)\,\mathrm{d}t \in I^-(f) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi_M(t)\,\mathrm{d}t \in I^+(f)$$

et donc $I^-(f)$ et $I^+(f)$ sont non vides.

Soient $I \in I^-(f)$ et $J \in I^+(f)$. Il existe donc $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ telles que $I = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ et $I = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Or, $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ donc $\varphi \leqslant \psi$: par croissance de l'intégrale,

$$I = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t = J$$

En d'autres termes, $I^-(f)$ est majoré par J donc $\sup(I^-(f)) \leqslant J$. On en déduit également que $\sup(I^-(f))$ est un minorant de $I^+(f)$ si bien que $\sup(I^-(f)) \leqslant \inf(I^+(f))$. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'inégalité soit stricte. Soit

$$\varepsilon = \frac{\inf(I^+(f)) - \sup(I^-(f))}{2(b-a)} > 0$$

L'idée est simple : si les deux bornes ne sont pas égales, il y a « une marge » entre les deux, ce qui n'est pas possible car on peut trouver deux fonctions en escalier vérifiant $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ aussi proches qu'on veut l'une de l'autre. On va donc prendre deux fonctions en escalier, l'une dans $\mathscr{E}^-(f)$ et l'autre dans $\mathscr{E}^+(f)$, et on va les choisir pour que l'écart entre leurs intégrales soit inférieur à l'écart supposé entre la borne supérieure et la borne inférieure.

D'après le lemme du paragraphe précédent, il existe $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ telles que $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$ et donc telles que $\psi \leqslant \varphi + \varepsilon$. Par croissance puis par linéarité de l'intégrale (pour les fonctions en escalier, $\varphi + \varepsilon$ étant aussi en escalier) :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_a^b (\varphi(t) + \varepsilon)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b \varepsilon \\
&= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \varepsilon \times (b-a) \\
&= \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \frac{\inf(I^+(f)) - \sup(I^-(f))}{2}
\end{aligned}$$

Or, par définition d'une borne inférieure et d'une borne supérieure,

$$\inf(E^+(f)) \leqslant \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sup(I^-(f))$$

si bien que

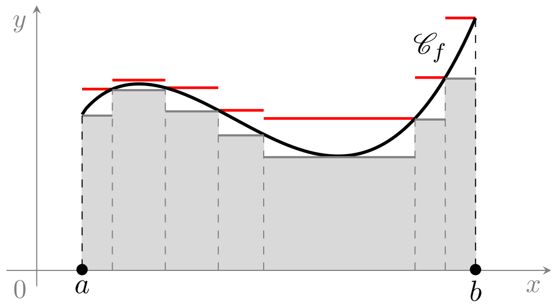
$$\inf(E^+(f)) \leqslant \sup(I^-(f)) + \frac{\inf(I^+(f)) - \sup(I^-(f))}{2}$$

et donc

$$\inf(E^+(f)) - \sup(I^-(f)) \leqslant \frac{\inf(I^+(f)) - \sup(I^-(f))}{2} \qquad \square$$

Or, $\inf(\dots) - \sup(\dots) > 0$ donc, en simplifiant (sans changer le sens des inégalités) : $1 \leqslant 1/2$, ce qui est absurde.

Remarque : Ainsi, par définition, l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ est la borne supérieure des intégrales des fonctions en escalier inférieures à f, et également la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier supérieures à f.



Lorsque f est elle-même en escalier, les deux définitions coïncident (c'est pour cela qu'on les note de la même façon). Supposons en effet f en escalier, et notons I l'intégrale ancienne version (i.e. la définition du paragraphe III.1) et B l'intégrale nouvelle version, définie ci-dessus (i.e. la borne commune). Puisque f est en escalier inférieure à f, alors $f \in \mathscr{E}^-(f)$ donc $I \in I^-(f)$ si bien que $I \leqslant B$. De même, f étant en escalier et supérieure à f donc $f \in \mathscr{E}^-(f)$ si bien que $I \in I^+(f)$ et donc $I \geqslant B$: on a bien $I = B$.

Proposition. Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux qui sont égales sauf en un nombre fini de points, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

En d'autres termes, les valeurs prises par une fonction continue par morceaux en des points isolés ne changent pas la valeur de l'intégrale.

Démonstration. Il suffit de prouver que $I^-(f) = I^-(g)$: ces deux ensembles ont donc même borne supérieure, ce qui est le résultat voulu.

Soit $I \in I^-(f)$. Il existe alors $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ (i.e. en escalier avec $\varphi \leqslant f$) telle que $I = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. f étant bornée car continue par morceaux, soit m un minorant de g. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à φ, f et g (en particulier, $f = g$ sauf éventuellement en les points de σ) et soit ψ égale à φ sur chaque intervalle du type $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$, et égale à m en tous les a_i. Alors $\psi \in \mathscr{E}^-(g)$. En effet, si x est un des a_i, alors $\psi(x) = m \leqslant g(x)$, et sinon, $\psi(x) = \varphi(x) \leqslant f(x) = g(x)$. Il en découle que $\psi \in \mathscr{E}^-(g)$ donc $\displaystyle\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \in I^-(g)$. Or, $\varphi = \psi$ sauf en un nombre fini de points donc leurs intégrales sont les mêmes. Finalement, $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \in I^-(g)$: $I^-(f) \subset I^-(g)$ et par symétrie des rôles on a l'inégalité inverse.

Attention, φ n'a aucune raison d'être inférieure à g, par exemple si g prend des valeurs très grandes en ses points isolés. Mais cela ne changera pas la valeur de l'intégrale.

Corollaire. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. Si f est nulle sauf en un nombre fini de points, alors f est en escalier et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

IV.3 Opérations sur les intégrales

En clair : tous les résultats du paragraphe III.2 sont encore vrais en remplaçant « en escalier » par « continue par morceaux ».

IV.3.a Relation de Chasles

Théorème (Relation de Chasles). Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et soit $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Alors f est continue par morceaux sur $[\,a\,;c\,]$ et sur $[\,c\,;b\,]$, et :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Le fait que f soit continue par morceaux sur $[\,a\,;c\,]$ et sur $[\,c\,;b\,]$ est laissé en exercice. Prouvons l'égalité voulue. Soit φ une fonction en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ inférieure à f. Dès lors, $\varphi \leqslant f$ sur $[\,a\,;c\,]$ et sur $[\,c\,;b\,]$ donc, par définition de $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (ce sont les bornes supérieures des intégrales des fonctions en escalier inférieures à f, respectivement sur $[\,a\,;c\,]$ et $[\,c\,;b\,]$) :

$$\int_a^c \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_c^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Par somme :

$$\int_a^c \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles (pour les fonctions en escalier) :

$$\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

En d'autres termes, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est un majorant de $I^-(f)$ donc, par définition de la borne supérieure (c'est le plus petit des majorants) :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

□

On montre de façon analogue (avec une fonction ψ continue par morceaux supérieure à f sur $[\,a\,;b\,]$) l'autre inégalité, d'où l'égalité voulue.

IV.3.b Linéarité de l'intégrale

Théorème (Linéarité de l'intégrale). Soient $f_1, f_2 : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\,\mathrm{d}t = \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que l'intégrale est linéaire.

Démonstration. Supposons (raisonnements analogues dans les autres cas) que $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le lemme du paragraphe IV.1, il existe $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ telles que $\varphi_1 \leqslant f_1 \leqslant \psi_1, \varphi_2 \leqslant f_2 \leqslant \psi_2, \psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$ et $\psi_2 - \varphi_2 \leqslant \varepsilon$. Dès lors, toujours par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux (borne supérieure, borne inférieure etc.) :

$$\int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b \psi_1(t)\,\mathrm{d}t$$

et idem avec φ_2, f_2, ψ_2. Par conséquent, λ_1 étant positif et λ_2 négatif,

$$\lambda_1 \int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_1 \int_a^b \psi_1(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 \int_a^b \psi_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_2 \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t$$

Par somme, et par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$\int_a^b (\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\psi_2(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b (\lambda_1\psi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t))\,\mathrm{d}t$$

Or, toujours puisque $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$:

$$\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\psi_2 \leqslant \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \leqslant \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\varphi_2$$

Toujours par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux :

$$\int_a^b (\lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\psi_2(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b (\lambda_1\psi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t))\,\mathrm{d}t$$

Notons I_G l'intégrale de gauche et I_D celle de droite. Toujours par linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$I_D - I_G = \int_a^b \lambda_1(\psi_1(t) - \varphi_1(t)) + \lambda_2(\varphi_2(t) - \psi_2(t))\,\mathrm{d}t$$

Or, $\psi_1 - \varphi_1 \leqslant \varepsilon$ et $\varphi_2 - \psi_2 \geqslant -\varepsilon$. Toujours parce que $\lambda_1 \geqslant 0$ et $\lambda_2 \leqslant 0$,

$$\lambda_1(\psi_1 - \varphi_1) + \lambda_2(\varphi_2 - \psi_2) \leqslant \lambda_1\varepsilon - \lambda_2\varepsilon$$

Par croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier :

$$I_D - I_G \leqslant \int_a^b (\lambda_1\varepsilon - \lambda_2\varepsilon)\,\mathrm{d}t = (\lambda_1\varepsilon - \lambda_2\varepsilon) \times (b-a)$$

Puisque $\displaystyle\int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t$ sont comprises entre I_G et I_D, leur écart est inférieur à $I_D - I_G$. particulier,

$$\left|\int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\,\mathrm{d}t - \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,\mathrm{d}t - \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant (\lambda_1\varepsilon - \lambda_2\varepsilon) \times (b-a) \qquad \square$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, la quantité dans la valeur absolue est nulle, ce qui est le résultat voulu.

Corollaire. Soient $f_1, \dots, f_n : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Par récurrence : $\rightsquigarrow$ Exercice.

IV.3.c Positivité et croissance de l'intégrale

Théorème. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Si f est positive, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

On rappelle que $a \leqslant b$!

Démonstration. f étant positive, si on note g la fonction nulle, alors $g \in \mathscr{E}^-(f)$ donc l'intégrale de g, qui est nulle, est inférieure à l'intégrale de la fonction f.

Corollaire (Croissance de l'intégrale). Soient f et $g : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Identique à celle du paragraphe III.2.c.

Remarque : ⚠ Le cas d'égalité pour la positivité de l'intégrale que nous verrons dans le paragraphe V.2 n'est vrai que pour les fonctions continues, pas pour les fonctions continues par morceaux ! On en reparle.

IV.3.d Inégalité triangulaire

Théorème (Inégalité Triangulaire). Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Comme l'inégalité triangulaire pour les sommes, celle-ci doit devenir un nouveau réflexe de calcul.

Démonstration. Identique à celle du paragraphe III.2.d.

Activité : Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrons que :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

Soit $\lambda > 0$ (on cherche la limite en $+\infty$). Supposons f de classe $\mathscr{C}^1$ et faisons une IPP.

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(a)\cos(\lambda a) - f(b)\cos(\lambda b)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \frac{|f(a)\cos(\lambda a)| + |f(b)\cos(\lambda b)|}{\lambda} + \left|\frac{1}{\lambda}\int_a^b f'(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)\cos(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Quand on veut encadrer un terme dont on ne connaît pas le signe pour prouver qu'il tend vers 0, on peut se contenter d'étudier sa valeur absolue : une majoration suffit, et il n'est pas nécessaire de s'embêter avec le signe. Méthode à retenir !

Le terme de droite tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$ ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement. Ce résultat est connu sous le nom de lemme de Riemann-Lebesgue.

Montrons que le lemme de Riemann-Lebesgue est encore valable si f est simplement continue par morceaux. Commençons par prouver le résultat si f est constante. Si f est constante égale à c :

$$\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{c\cos(\lambda a) - c\cos(\lambda b)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$$

puisqu'un cosinus est borné. Le résultat est donc prouvé si f est constante. Supposons à présent f en escalier et soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f et, pour tout i, soit c_i la valeur de f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Alors :

On aurait encore pu prendre la valeur absolue, appliquer l'inégalité triangulaire et majorer le cosinus par 1.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{c_i\cos(\lambda a_i)-c_i\cos(\lambda a_{i+1})}{\lambda}\\ &\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

car somme finie (et au nombre de termes fixe) de termes qui tendent vers 0. Prouvons maintenant le lemme de Riemann-Lebesgue dans le cas général i.e. dans le cas où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon>0$. Par densité des fonctions en escalier, il existe g en escalier telle que $|f-g|\leqslant\varepsilon$. Or, d'après ce qui précède, il existe A tel que, pour tout $\lambda\geqslant A$,

$$\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon$$

Soit donc $\lambda\geqslant A$. On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left|\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \left|\int_a^b (f(t)-g(t))\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t\right|+\varepsilon\\ &\leqslant \int_a^b |f(t)-g(t)|\times|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon\\ &\leqslant \int_a^b \varepsilon\times 1\,\mathrm{d}t+\varepsilon\\ &\leqslant \varepsilon(b-a+1)\end{aligned}$$

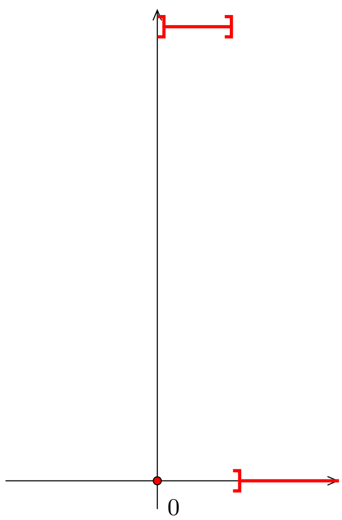
ce qui permet de conclure.

IV.3.e Deux opérations interdites sur les intégrales

On ne peut pas passer à la limite dans une intégrale, on ne peut pas intervertir une limite et une intégrale. Par exemple, si $f_n(t)\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $t\in[\,a\,;b\,]$, on n'a pas forcément :

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par exemple, pour tout n, posons $f_n = n\times \mathbb{1}_{]\,0\,;1/n\,]}$:



Pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t\, = n \times \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Donnons un autre exemple pour illustrer le danger de ce genre de question.

Exemple : Si $n \in \mathbb{N}$, notons :

cf. exercice 28 du chapitre 10.

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^x(1-x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x$$

Prouvons que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Comme dit ci-dessus, il ne suffit pas de dire que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,]\,, \frac{e^x(1-x)^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

pour conclure. La méthode est toujours la même (en attendant l'année prochaine) : encadrer ou majorer par une fonction simple à calculer mais dont l'intégrale va toujours tendre vers 0. Ici, il suffit de voir que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$:

$$0 \leqslant \frac{e^x(1-x)^n}{n!} \leqslant \frac{e}{n!}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{e}{n!}\,\mathrm{d}x\, = \frac{e}{n!}$$

et on conclut à l'aide du théorème d'encadrement.

Exemple : On note (cf. exercice 32 du chapitre 10), pour tout $x \neq \pm 1$:

$$I(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right)\,\mathrm{d}t$$

Montrons que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Là aussi, on ne peut pas passer à la limite dans l'intégrale et dire que

$$I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^\pi \ln(1)\,\mathrm{d}t\, = 0$$

Pour tout $t \in [\,0\,;\pi\,]$, $\cos(t) \in [\,-1\,;1\,]$ si bien que

$$(|x|-1)^2 = 1 - 2|x| + x^2 \leqslant 1 - 2x\cos(t) + x^2 \leqslant 1 + 2|x| + x^2 = (|x|+1)^2$$

Par croissance du ln,

$$\ln\left(|x|-1\right)^2 \leqslant \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2) \leqslant \ln\left(|x|+1\right)^2$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^\pi \ln\left(|x|-1\right)^2\,\mathrm{d}t\, \leqslant I(x) \leqslant \int_0^\pi \ln\left(|x|+1\right)^2\,\mathrm{d}t$$

Or, on intègre des fonctions constantes (la variable d'intégration est t) si bien que :

$$\pi\ln\left(|x|-1\right)^2 \leqslant I(x) \leqslant \pi\ln\left(|x|+1\right)^2$$

et le théorème d'encadrement permet de conclure.

L'autre chose interdite : on ne peut pas dire que l'intégrale est « une fonction continue ou dérivable ». Par exemple, rien ne permet d'affirmer que

Sauf lorsqu'on a une fonction du type

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec f continue : cf. paragraphe V.1.a.

$$x \mapsto \int_0^\pi \sin(xt) \times f(t)\,\mathrm{d}t$$

soit continue ou dérivable. Pour cela, il faut le faire à la main : cf. exercice 10.

Morale de l'histoire : intégrales et limites ne font pas bon ménage !

IV.4 Valeur moyenne

Proposition/Définition. Soit f continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$. Soit

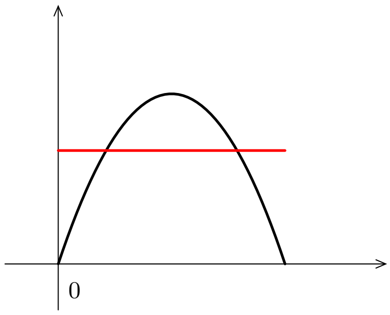
$$\mu = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors

$$\int_a^b \mu\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

μ est appelée la valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$.

Remarque : En d'autres termes, μ est la constante dont l'intégrale est égale à l'intégrale de f :



D'où son nom de valeur moyenne.

Démonstration. Découle de la linéarité de l'intégrale.

IV.5 Extension au cas d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle

On se donne dans la suite un intervalle I d'intérieur non vide.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. f est $\mathscr{C}^{pm}$ sur I si f est $\mathscr{C}^{pm}$ sur tout segment inclus dans I.

Exemple : La partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Attention, elle n'est pas en escalier sur $\mathbb{R}$ car, par définition, une fonction en escalier est définie sur un segment.

On peut définir une fonction en escalier sur un intervalle : une fonction est en escalier sur I s'il existe un segment $[\,a\,;b\,]$ inclus dans I tel que f soit en escalier sur $[\,a\,;b\,]$ et nulle en dehors de $[\,a\,;b\,]$. Mais, dans tous les cas, la partie entière n'est pas en escalier sur $\mathbb{R}$.

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Soit $(a,b) \in I^2$. On pose :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \text{ si } a=b \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \text{ si } a>b$$

Remarques :

- Ainsi, par définition :

$$\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- La relation de Chasles est encore valable avec cette définition généralisée (i.e. il n'est plus nécessaire d'avoir $c \in \,]\,a\,;b\,[$, on peut prendre a,b,c appartenant à I dans un ordre quelconque). Pour le prouver, il suffit d'examiner tous les cas possibles ($a \leqslant b < c, a < b < c, c < a \leqslant b$ etc.) et d'utiliser le fait que c'est vrai lorsqu'on a « $\text{truc}_1 < \text{truc}_2 < \text{truc}_3$ ».

- La linéarité de l'intégrale est toujours valable (si $a \geqslant b$, il suffit de multiplier par -1 et on applique le résultat avec $b \leqslant a$).
- ⚠ La positivité de l'intégrale (et donc aussi la croissance qui en découle) ne sont pas valables si $a \geqslant b$. Par exemple :

$$\int_1^0 2\,\mathrm{d}t = -2 < 0$$

  Par conséquent, pour appliquer la positivité de l'intégrale, on n'oubliera pas de vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant. Bon, quand on intègre de 0 à 1, tout va bien, mais si on intègre de 0 à x, ou de x à x^2, ou de x à $2x$ etc. il faut parfois faire des disjonctions de cas : cf. TD.
- L'inégalité triangulaire n'est également plus valable si $a \geqslant b$. Lorsque $a \geqslant b$, on a l'inégalité suivante :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_b^a |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

  La première égalité vient du fait que deux nombres opposés ont même valeur absolue, et l'inégalité vient de l'inégalité triangulaire puisque $b \leqslant a$.

  En clair, quand on applique l'inégalité triangulaire, on met les bornes dans l'ordre croissant. On trouve parfois l'inégalité triangulaire sous la forme « tout en un » :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \left| \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \right|$$

  Cette version « tout en un » est, selon moi, moins claire : il suffit de retenir qu'on met les bornes dans l'ordre croissant quand on applique l'inégalité triangulaire.

V Cas particulier des fonctions continues

Une fonction continue étant une fonction continue par morceaux, les résultats précédents sont toujours valables pour une fonction continue. Néanmoins, certains résultats (et non des moindres) ne sont valables que pour des fonctions continues. Comme dans le paragraphe précédent, I désigne ici un intervalle d'intérieur non vide.

V.1 Théorème fondamental de l'analyse

V.1.a Théorème proprement dit

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue et soit $a \in I$. Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, elle est $\mathscr{C}^1$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$, et soit $\varepsilon > 0$. f étant continue en x_0 :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $x \in I$ tel que $x \neq x_0$ et $|x - x_0| \leqslant \eta$. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $x > x_0$.

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\times\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right) - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\times\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\times\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0)\times(x-x_0)\right)\right| \\
&= \left|\frac{1}{x-x_0}\times\left(\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\
&= \frac{1}{|x-x_0|}\times\left|\int_{x_0}^x f(t)-f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|
\end{aligned}
$$

Relation de Chasles.

Intégrale d'une fonction constante.

Linéarité de l'intégrale.

Or, $x-x_0 \geqslant 0$ donc on peut enlever la valeur absolue autour de $x-x_0$, et les bornes sont dans l'ordre croissant donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0} |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t
$$

Si $x < x_0$, les seules différences sont que $|x-x_0| = x_0 - x$ et qu'il faut changer les bornes dans l'inégalité triangulaire : exo.

Or, $|x-x_0| \leqslant \eta$ donc, pour tout $t\in[\,x_0\,;x\,]$, $|t-x_0|\leqslant\eta$ si bien que $|f(t)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon$. Par croissance de l'intégrale :

$$
\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leqslant \frac{1}{x-x_0}\int_x^{x_0} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon
$$

On a donc prouvé le résultat suivant :

$$
\forall\varepsilon>0, \exists\eta>0, \forall x\in I, |x-x_0|\leqslant\eta \Rightarrow \left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right|\leqslant\varepsilon
$$

c'est-à-dire que :

$$
\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)
$$

□

ce qui est le résultat voulu.

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors f admet une primitive sur I.

Remarque : ⚠ Le théorème fondamental de l'analyse et ses corollaires sont faux pour des fonctions simplement continues par morceaux. Par exemple, il découle du théorème de Darboux (cf. exercice 25 du chapitre 14) que la partie entière n'a pas de primitive sur $\mathbb{R}$. On en déduit, d'une part, qu'une fonction continue par morceaux n'admet pas forcément de primitive, et d'autre part que, si f est continue par morceaux, la fonction

$$
F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t
$$

n'est pas forcément une primitive de f.

Corollaire. Soit $f : I\to\mathbb{R}$ continue et soit F une primitive de f sur I. Alors :

$$
\forall (a,b)\in I^2, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b)-F(a)
$$

La valeur de l'intégrale ne dépend pas de la primitive choisie, cf. chapitre 10. De façon générale, je vous conseille de relire ce chapitre en détail.

Remarque : Revenons à l'opération interdite évoquée dans le paragraphe IV.3.e. Si se donne $f : [\,a\,;b\,]$ continue et si on veut prouver (cf. exercice 10) que

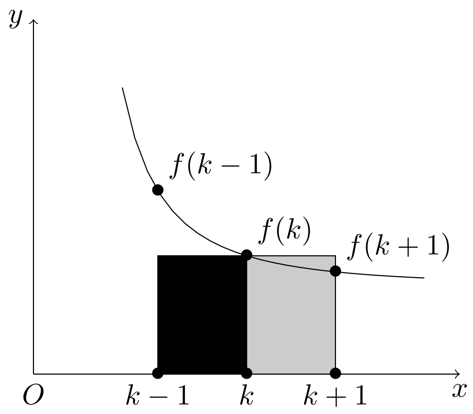
$$\varphi : x \mapsto \int_0^1 \sin(xt)f(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue, il faut revenir à la définition de la continuité, car on n'est pas dans les conditions du théorème fondamental de l'analyse : il suffit par exemple de voir que les bornes sont fixes. φ n'est pas non plus composée de fonctions continues, aucun résultat du cours ne permet de répondre : il n'y a que la définition !

Pire encore : on ne peut pas dire que φ est dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse, toujours car on ne peut pas l'appliquer. Pour dériver une fonction comme cela... rendez-vous l'an prochain !

V.1.b Comparaison à une intégrale

Soit f continue par morceaux décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.



Morale de l'histoire : $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$ est supérieure à la partie noire, qui est égale à la partie grisée, qui est supérieure à $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Cette méthode est valable pour des fonctions continues par morceaux. Néanmoins, nous ne l'appliquerons que pour des fonctions continues, et nous allons calculer des intégrales en primitivant (donc des intégrales de fonctions continues) : d'où la présence de ce paragraphe dans cette partie.

Exemple : La constante d'Euler.

- Montrer que pour tout $n \geqslant 2, \ln(n+1)-\ln(n) \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant \ln(n)-\ln(n-1)$.

  Soit $n \geqslant 2$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, pour tout $t \in [\,n\,;n+1\,]$, $\dfrac{1}{n} \geqslant \dfrac{1}{t}$. Par croissance de l'intégrale,

  $$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{n} \geqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

  c'est-à-dire $\dfrac{1}{n} \geqslant \ln(n+1)-\ln(n)$. De même pour l'autre inégalité.

- Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ converge.

  Soit $n \geqslant 2$.

  $$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \end{aligned}$$

  D'après ce qui précède, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ donc (u_n) est décroissante. Or, pour tout $k \geqslant 2$,

  $$\frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k)$$

Par somme :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(2)$$

donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &= \ln(n+1) - \ln(2) + 1 \\ &\geqslant \ln(n+1) \\ &\geqslant \ln(n) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $u_n \geqslant 0$: (u_n) est minorée par 0 donc converge puisqu'elle est décroissante. Sa limite est notée γ et est appelée constante d'Euler. On a $\gamma \approx 0.577\ldots$

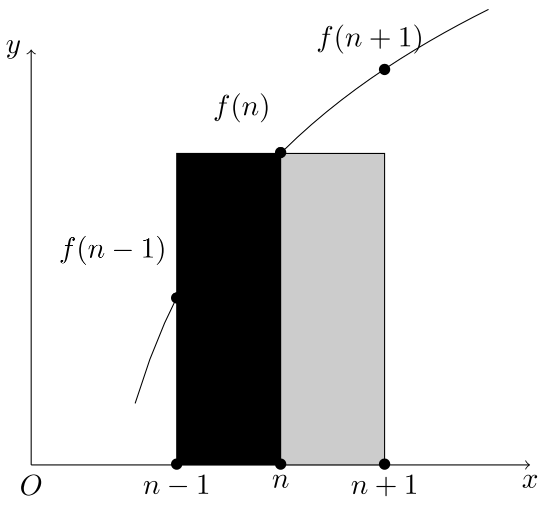
On a en particulier

$$\begin{aligned} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} &= \frac{u_n + \ln(n)}{\ln(n)} \\ &= \frac{u_n}{\ln(n)} + 1 \end{aligned}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque : On peut montrer des résultats analogues pour les fonctions croissantes



Exemple : Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{2}{3}\left(n\sqrt{n} - (n-1)\sqrt{n-1}\right) \leqslant \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{3}\left((n+1)\sqrt{n+1} - n\sqrt{n}\right)$$

puis que $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple : La norme infinie.

On rappelle (cf. chapitre 13) que si f est bornée sur D_f, on appelle norme infinie de f qu'on note $\|f\|_\infty$ le réel

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in D_f\}$$

En d'autres termes, la norme infinie de f est le sup de $|f|$.

Remarques :

- Il est indispensable que f soit bornée sinon le sup n'est pas défini (même si on trouve parfois la convention $\|f\|_\infty = +\infty$ si f n'est pas bornée).
- $\|f\|_\infty$ est la borne sup (quand f est bornée) de $|f|$, pas de f ! Ne pas oublier la valeur absolue ! En particulier, une norme infinie est positive.
- Il peut y avoir ambiguïté sur D : on trouve parfois la notation $\|f\|_{\underset{D}{\infty}}$ pour dire explicitement que la norme infinie est prise sur D.
- Même lorsqu'elle est bien définie (i.e. lorsque f est bornée), la norme infinie n'est pas forcément atteinte : c'est une borne supérieure, pas un un maximum.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}$. Alors f est bornée et $\|f\|_\infty = \pi$.

Activité : Pourquoi ce drôle de nom, la norme infinie ? Si $p \geqslant 1$, on définit (cf. exercice 17 du chapitre 15), pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, la norme p de f par :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

Montrons que $\|f\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|f\|_\infty$, ce qui justifie ce nom de norme infinie.

Soit $\varepsilon > 0$. f étant continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ tel que $|f(x_0)| = \|f\|_\infty$. Notons $M = \|f\|_\infty$. Supposons que $x_0 \in \,]\,a\,;b\,[$. f étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]$, $|f(x)| \geqslant M - \varepsilon$. Soit $p \geqslant 1$. La puissance $1/p$ rendant la somme très délicate, étudions plutôt $\|f\|_p{}^p$.

$$\begin{aligned}
\|f\|_p{}^p &= \int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \\
&= \underbrace{\int_a^{x_0-\eta} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_{x_0+\eta}^{b} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t}_{\geqslant 0} \\
&\geqslant \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \\
&\geqslant \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} (M-\varepsilon)^p \,\mathrm{d}t \\
&\geqslant 2\eta \times (M-\varepsilon)^p
\end{aligned}$$

et la fonction $x \mapsto x^{1/p}$ étant croissante, on en déduit que $\|f\|_p \geqslant (2\eta)^{1/p} \times (M - \varepsilon)$. Or, $(2\eta)^{1/p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ donc $(2\eta)^{1/p} \times (M-\varepsilon) \xrightarrow[p\to+\infty]{} M - \varepsilon$: il existe donc p_0 tel que, pour tout $p \geqslant p_0$, $\|f\|_p \geqslant M - 2\varepsilon$.

De plus, $|f| \leqslant M$ donc, par croissance de l'intégrale, $\|f\|_p \leqslant M(b-a)^{1/p}$ et $(b-a)^{1/p} \xrightarrow[p+\infty]{} M$ donc il existe p_1 tel que, pour tout $p \geqslant p_1$, $\|f\|_p \leqslant M + 2\varepsilon$.

Soit $p_2 = \max(p_0, p_1)$. Alors, pour tout $p \geqslant p_2$,

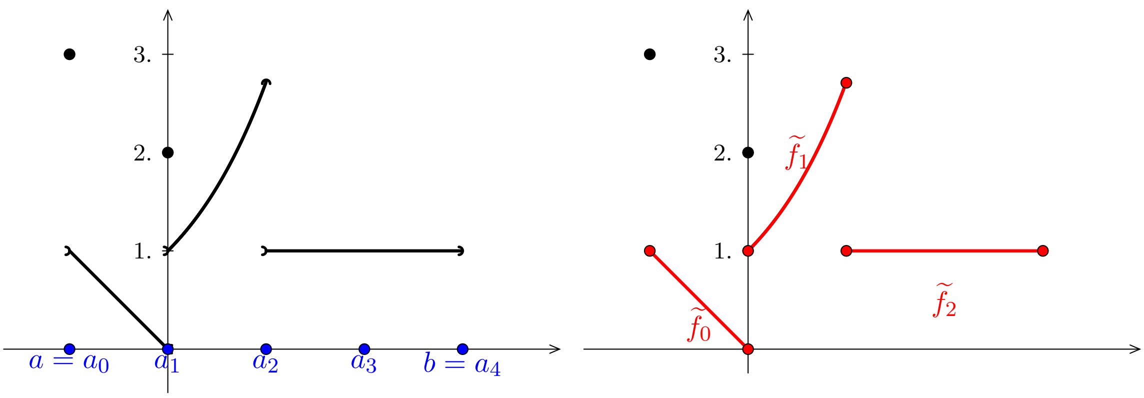
$$M - 2\varepsilon \leqslant \|f\|_p \leqslant M + 2\varepsilon$$

c'est-à-dire que $|\|f\|_p - \|f\|_\infty| \leqslant 2\varepsilon$: c'est le résultat voulu. Les cas $x_0 = a$ et $x_0 = b$ se démontrent de façon analogue, la seule différence étant qu'il faut casser l'intégrale en seulement deux morceaux, les points de cassure étant respectivement $x_0 + \eta = a + \eta$ et $x_0 - \eta = b - \eta$.

V.1.c Application à des calculs d'intégrales de fonctions continues par morceaux

Rappelons (cf. paragraphe II) que si f est une fonction $\mathscr{C}^{pm}$ sur $[\,a\,;b\,]$ et si $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une subdivision adaptée à f alors, pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, la restriction de f à $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ est prolongeable en une fonction continue sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$, notée $\tilde{f}_i$. Ci-dessous, à gauche, le graphe d'une fonction continue par morceaux, et à droite, le graphe avec les $\tilde{f}_i$.

Attention, comme dit dans le paragraphe II, ce n'est pas f qu'on prolonge car elle est déjà définie en les a_i.



Proposition. Soit f continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$ et soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Alors :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \tilde{f}_i(t)dt$$

où, pour tout $i \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, $\tilde{f}_i$ est la fonction continue sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$ qui coïncide avec f sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.

Démonstration. D'après la relation de Chasles :

$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

□

Or, pour tout i, f et $\tilde{f}_i$ sont égales sauf en a_i et a_{i+1} donc en un nombre fini de points donc ont la même intégrale, ce qui permet de conclure.

Remarque : En d'autres termes, quand on a une fonction continue par morceaux, dont la définition n'est pas la même selon l'intervalle sur lequel on se place, on calcule son intégrale en calculant l'intégrale des fonctions continues qui « la composent », sur chaque intervalle formé par les points de la subdivision.

On retrouve le fait que les valeurs des points isolés n'ont aucune incidence sur la valeur de l'intégrale. Par exemple, ci-dessous, les valeurs en -1, et 0 n'interviennent pas.

Exemple : Reprenons l'exemple du paragraphe II :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccl} [\,-1\,;3\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} 3 & \text{si } x = -1 \\ -x & \text{si } x \in \,]\,-1\,;0\,[\\ 2 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in \,]\,0\,;1\,] \\ 1 & \text{si } x \in \,]\,1\,;3\,] \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Alors :

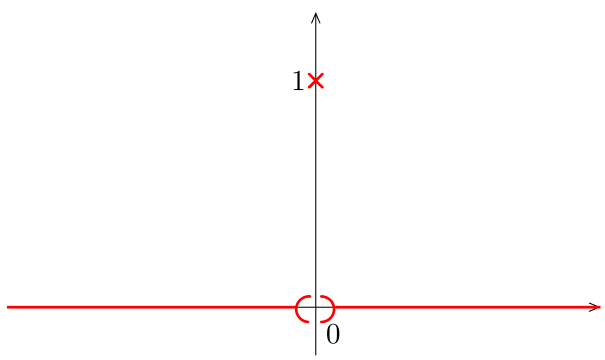
$$\begin{aligned} \int_{-1}^{3} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-1}^{0} -t\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} e^t\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{3} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} + e - 1 + 2 \\ &= e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

V.2 Cas d'égalité de la positivité de l'intégrale

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ **continue** positive. Soient $a < b$ appartenant à I tels que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Alors f est nulle sur $[\,a\,;b\,]$.

Remarques :

- C'est faux si f est simplement continue par morceaux, par exemple l'indicatrice de $\{0\}$ a une intégrale nulle, est positive, mais n'est pas nulle sur $[\,-1\,;1\,]$.



  Dans le cas d'une fonction continue par morceaux, on peut juste conclure qu'elle est nulle là où elle est continue.

- C'est également faux si f n'est pas positive. Par exemple, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
- Il faut également avoir $a < b$. Toujours vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant (et ne sont pas égales, mais ce cas se produit rarement en pratique).

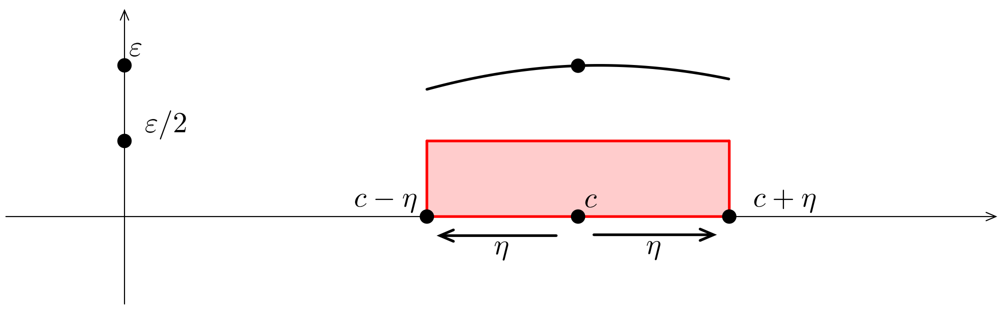
Démonstration. **Première démonstration :** Soit F une primitive de f (f admet des primitives car est continue). f étant positive, F est croissante. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. On a $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$. Or,

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $F(a)=F(b)$. Ainsi, $F(x)=F(a)$ donc F est constante sur $[\,a\,;b\,]$ donc $F'=f$ est nulle sur $[\,a\,;b\,]$.

Deuxième démonstration : Si f n'est pas la fonction nulle sur $[\,a\,;b\,]$, il existe $c\in[\,a\,;b\,]$ tel que $f(c)\neq 0$. f étant positive, $f(c)>0$. Soit $\varepsilon=f(c)$. f étant continue,

$$\exists \eta>0, \forall x\in[\,c-\eta\,;c+\eta\,], f(x)\geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$



L'idée de cette seconde preuve est simple : si f n'est pas nulle, elle est strictement positive en un point, donc sur un voisinage de ce point par continuité, donc il y a un petit rectangle d'aire strictement positive se situant sous la courbe de f, donc l'intégrale de f est strictement positive.

Par croissance de l'intégrale,

$$\int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_{c-\eta}^{c+\eta} \frac{\varepsilon}{2}\,\mathrm{d}t = \varepsilon\times\eta$$

D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^{c-\eta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c-\eta}^{c+\eta} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c+\eta}^b f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\geqslant 0+\varepsilon\times\eta+0 \qquad \text{(par positivité de l'intégrale)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

□

D'où le résultat par contraposée.

Remarque : On a supposé pour simplifier que $c\in\,]\,a\,;b\,[$, mais le résultat se démontre de la même façon si $c=a$ ou $c=b$ (en se plaçant sur, respectivement, $[\,c\,;c+\eta\,]$ ou $[\,c-\eta\,;c\,]$).

Remarque : ⚠ Ainsi, pour montrer qu'une intégrale est strictement positive, il suffit de dire que c'est l'intégrale d'une fonction positive, <u>continue</u>, non identiquement nulle (avec $a<b$). RAISONNEMENT CLASSIQUE !

Exemple : Si $n\in\mathbb{N}$, la n-ième intégrale de Wallis

$$W_n=\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle donc $W_n>0$.

Remarque : En utilisant ce résultat, on montre qu'il y a égalité dans le théorème de croissance de l'intégrale si et seulement si $f=g$ (si $a<b$). Par exemple, dans l'application sur la constante d'Euler, toutes les inégalités sont strictes.

VI Sommes de Riemann

VI.1 Sommes de Riemann à pas constant

Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. La quantité

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

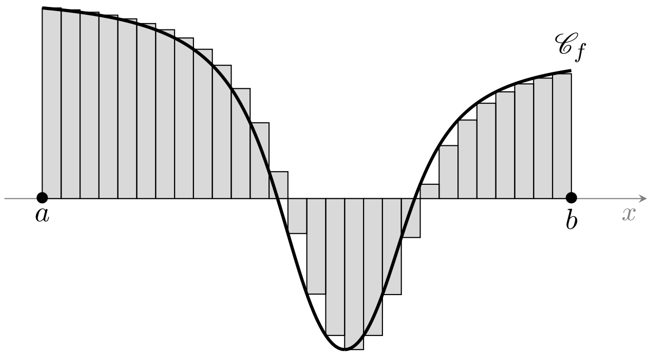
est appelée somme de Riemann à pas constant associée à f.

Remarque : Si on note $\sigma = (a_k)_{k=0\leqslant k\leqslant n}$ la subdivision régulière de $[\,a\,;b\,]$, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \times (a_{k+1} - a_k)$$

D'où le nom de « somme de Riemann à pas constant ».On peut en fait définir des sommes de Riemann pour n'importe quelle subdivision, par forcément la subdivision régulière, et donc des sommes de Riemann qui n'ont pas un pas constant : cf. paragraphe suivant (HP).

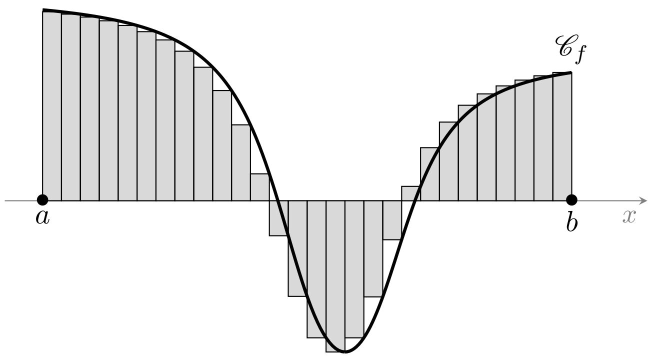
Interprétation géométrique :



La somme de Riemann à gauche est égale à la somme des aires des rectangles gris. Le terme « gauche « vient du fait que le bord supérieur gauche de chacun des rectangles touche la courbe.

Remarque : On trouve parfois aussi l'autre définition :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \times f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$



La première somme est parfois appelée « somme des rectangles à gauche » et la seconde « somme des rectangles à droite ».

Théorème. On reprend les notations de la définition. Si f est continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$ alors :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Seule la démonstration du cas où où f est lipschitzienne est exigible. Nous allons dans un premier temps le démontrer effectivement dans le cas où f est lipschitzienne, puis, dans le paragraphe suivant, dans le cas où f est simplement continue.

Nous ne le démontrerons pas pour une fonction continue par morceaux car on ne l'utilisera en général que pour les fonctions continues car la démonstration est une généralisation simple sur le principe mais un peu technique et n'apporterait rien du point de vue de la démonstration.

Supposons donc f k-lipschitzienne (avec k un réel positif). Soit $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrons que $I - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
|I - S_n| &= \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)(a_{i+1}-a_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - f(a_i)(a_{i+1}-a_i)\right| && \text{(relation de Chasles)} \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t)-f(a_i))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t)-f(a_i))\,\mathrm{d}t\right| && \text{(Inégalité Triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t)-f(a_i)|\,\mathrm{d}t && \text{(I.T. pour les intégrales, car } a_i \leqslant a_{i+1}\text{)}
\end{aligned}$$

Or, f est k-lipschitzienne donc :

$$\forall i \in [\![0\,;\,n-1]\!], \forall t \in [\,a_i\,;a_{i+1}\,], \qquad |f(t)-f(a_i)| \leqslant k|t-a_i| = k(t-a_i)$$

Par croissance de l'intégrale puis par somme :

$$\begin{aligned}
|I - S_n| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} M(t-a_i)\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{M(t-a_i)^2}{2}\right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M(a_{i+1}-a_i)^2}{2} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\frac{M(b-a)^2}{2n^2} \\
&\leqslant \frac{M(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

□

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Remarque : Quand $n \to \infty$, la largeur des rectangles tend vers 0 et donc S_n se rapproche de l'idée intuitive de « l'aire sous la courbe ». On <u>définit</u> donc l'aire sous la courbe de f comme la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, et cette définition coïncide avec l'aire des parties du plan qu'on savait déjà calculer.

Cas particulier important : $a = 0, b = 1$. On a alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \qquad \text{ou} \qquad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Il y a un $1/n$ devant la somme et du k/n dans la somme, et on trouve la fonction f en remplaçant k/n par x. Il faut savoir les reconnaître au premier coup d'oeil !

Exemple : Donner la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Soit $n \geqslant 1$.

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}$$

S_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. f étant continue donc continue par morceaux :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(2)$$

Exemple : Donner la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!\times n^n}\right)^{1/n}$.

Soit $n \geqslant 1$. $u_n > 0$ d'où

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(2n)!}{n!\times n^n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(n+n)}{\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{n \text{ fois}}}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n}\times\cdots\times\frac{n+n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

$\ln(u_n)$ est donc la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \ln(1+x)$. f étant continue donc continue par morceaux :

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = I$$

Faisons le changement de variable $u = 1+x, x = u-1,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u \\
&= [u\ln(u) - u]_1^2 \\
&= 2\ln(2) - 2 + 1 \\
&= \ln(4) - 1
\end{aligned}$$

L'exponentielle étant continue,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^I = \frac{4}{e}$$

Ce qui est bien avec les sommes de Riemann, c'est que ça donne de jolies limites...

VI.2 Sommes de Riemann générales (HP)

Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. On appelle somme de Riemann de f toute somme de la forme :

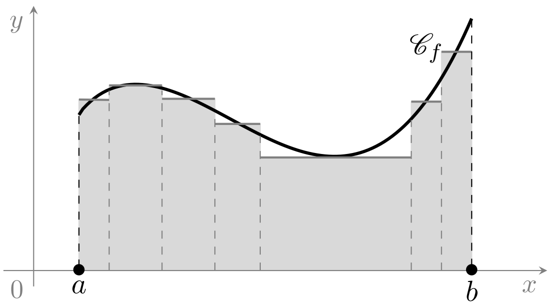
$$S(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \times (a_{k+1} - a_k)$$

où $\sigma = (a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ et où, pour tout k, c_k est un élément quelconque de $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$.

σ n'a aucune raison d'être adaptée à f !

Remarque : En clair, une somme de Riemann générale c'est : on prend n'importe quelle subdivision, on prend n'importe quel point des segments formés par la subdivision et on prend l'aire des rectangles formés par les segments (largeur) et l'image du point choisi (hauteur). Dans l'exemple ci-dessous, on a pris à chaque fois c_k le milieu de $[\,a_k\,;a_{k+1}\,]$:

C'est presque la méthode du point milieu vue ci-dessous, à ceci près que la subdivision n'est pas régulière, le pas n'est pas constant.



Alors les sommes de Riemann tendent vers l'intégrale de f lorsque le pas $p(\sigma)$ tend vers 0. Plus précisément :

Rappelons que $p(\sigma) = \max(a_{i+1} - a_i)$: c'est le plus grand écart entre deux a_i consécutifs.

Théorème. Avec les notations et les hypothèses ci-dessus :

$$S(\sigma, f) \xrightarrow[p(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : En d'autres termes, l'intégrale de f est la limite de n'importe quelle famille de sommes de Riemann, tant que le pas tend vers 0. De façon plus explicite, (la notation $\xrightarrow[p(\sigma)\to 0]{}$ n'étant pas forcément très claire) cela signifie que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que, pour toute subdivision de pas inférieur à η,

$$\left| S(\sigma, f) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Comme dit dans le paragraphe précédent, nous le prouverons uniquement dans le cas où f est continue. Supposons donc f continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$. Alors f est uniformément continue d'après le théorème de Heine. Soit $\varepsilon > 0$. f étant UC :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Prenons donc cette valeur de η, et prenons $\sigma = (a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ une subdivision de pas inférieur ou égal à η. Soit

$$S(\sigma, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i) \times (a_{i+1} - a_i)$$

où, rappelons-le, pour tout i, c_i est un point quelconque de $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$. Le reste de la démonstration est analogue au paragraphe précédent (relation de Chasles, inégalité triangulaire etc.) :

$$\begin{aligned}
|I - S(\sigma, f)| &= \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(a_{+1} - a_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t - f(c_i)(a_{i+1} - a_i)\right| && \text{(relation de Chasles)} \\
&= \left|\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(c_i))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(t) - f(c_i))\,\mathrm{d}t\right| && \text{(Inégalité Triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(t) - f(c_i)|\,\mathrm{d}t && \text{(I.T. pour les intégrales, car } a_i \leqslant a_{i+1})
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$ et tout $t \in [\,a_i\,;a_{i+1}\,]$, t et c_i appartiennent à $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$ avec $a_{i+1} - a_i \leqslant p(\sigma) \leqslant \eta$ si bien que $|t - c_i| \leqslant \eta$ et donc $|f(t) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon/(b-a)$. Par croissance de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
|I - S(\sigma, f)| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

ce qui est le résultat voulu.

VI.3 Méthodes de calcul approché d'intégrales

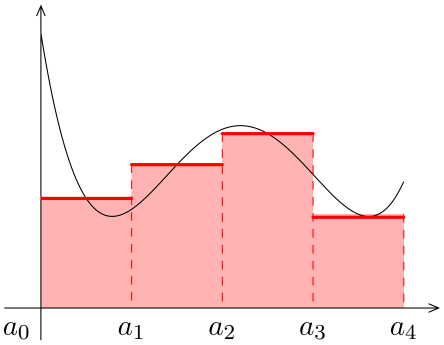
Si f est $\mathscr{C}^1$ alors f' est bornée sur $[\,a\,;b\,]$ d'après le théorème des bornes atteintes donc f est lipschitzienne. Par conséquent, d'après la démonstration du théorème de convergence des sommes de Riemann, on obtient $|I - S_n| \leqslant \dfrac{M(b-a)}{2n}$ où M est un majorant de $|f'|$. Cela donne une méthode pour donner une valeur approchée des intégrales que l'on ne sait pas calculer (par exemple $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2} dt$) : si on veut 8 chiffres après la virgule, il suffit de prendre n tel que

$$\frac{M(b-a)^2}{2n} \leqslant 10^{-8}$$

On peut également se demander si c'est une méthode efficace pour donner une valeur approchée de I. Puisque M, a et b dépendent de f et de l'intervalle, on dira que l'erreur est « de l'ordre de grandeur » de $\dfrac{1}{n}$ (en un sens qui peut être rendu complètement rigoureux, cf chapitre 24), c'est-à-dire que si on veut 8 chiffres après la virgule, c'est-à-dire une précision de 10^{-8}, il faut prendre n « de l'ordre de » 10^8, ce qui est énorme [1]. Il existe des

1. N'oubliez pas qu'on cherchait des valeurs approchées d'intégrales des siècles avant l'invention des ordinateurs, et puis même avec un ordinateur, calculer une somme de 10^8 termes commence à être assez lourd numériquement.

méthodes plus efficaces (hors programme) c'est-à-dire des approximations de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ par des sommes faciles à calculer.



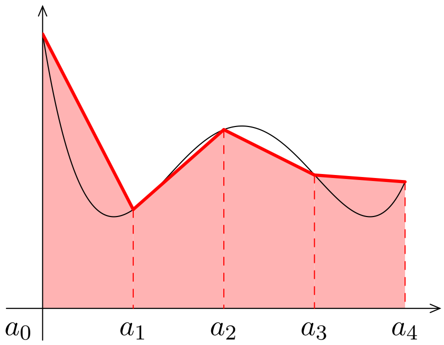
Méthode du point milieu :

On pose

$$M_n = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right) \times (a_{k+1} - a_k)$$

(on rappelle qu'on note $\sigma = (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ la subdivision régulière), c'est-à-dire que c'est la somme des rectangles passant par les milieux des segments définis par les points de la subdivision comme sur le dessin ci-contre.

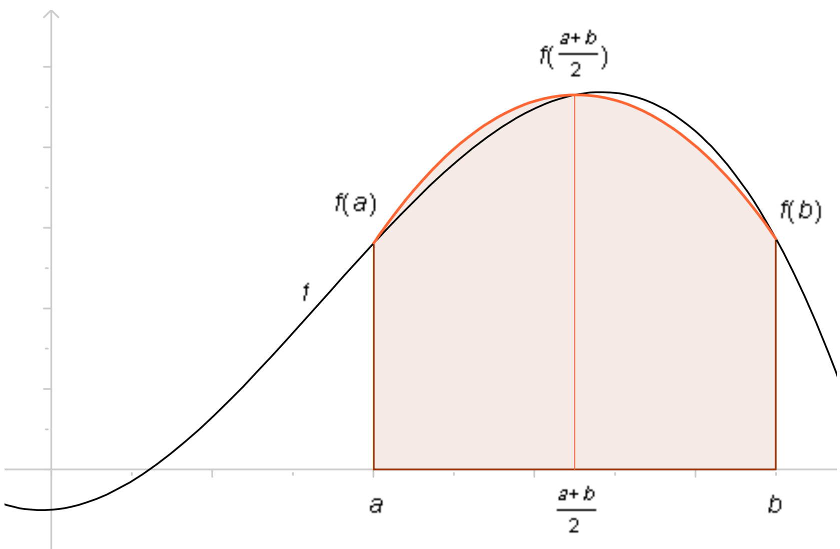
Méthode des trapèzes :



On appelle T_n la somme des aires des trapèzes qui coïncident avec f en les points de la subdivision, comme sur le dessin ci-contre.

On peut montrer que quand $n \to +\infty$, sous certaines hypothèses sur f (il faut que f soit $\mathscr{C}^2$), ces quantités tendent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et que l'erreur commise est « de l'ordre de $\dfrac{1}{n^2}$ (on peut même montrer que l'erreur commise par la méthode du point milieu est deux fois plus petite que celle de la méthode des trapèzes) c'est-à-dire que si on veut 8 chiffres après la virgule, on doit prendre n de l'ordre de 10^4 ce qui est mieux mais pas top. On doit bien pouvoir faire mieux !

Méthode de Simpson : Sur chaque intervalle $[\, a_k \,; a_{k+1}\,]$, on approche C_f par la parabole (c'est-à-dire le polynôme d'interpolation de Lagrange) qui coïncide avec f en a_k, a_{k+1} et $\dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$. Ci-dessous un dessin pour $n = 1$ (merci Wikipedia) :



Là aussi, on peut montrer que si f est de classe $\mathscr{C}^4$, alors l'erreur est de l'ordre de grandeur de $\dfrac{1}{n^4}$ c'est-à-dire que si on veut 8 décimales, il faut prendre n de l'ordre de 100, ce qui est tout de suite beaucoup mieux (on voit que pour $n = 1$, on a déjà une bonne approximation). Ainsi, la méthode de Simpson (qui est la méthode programmée dans la plupart des calculatrices) est beaucoup plus efficace que la méthode des trapèzes et la méthode du point milieu, elles-mêmes beaucoup plus efficaces que la méthode des rectangles à gauche ou à droite.

VII Et pour les fonctions à valeurs complexes ?

Comme pour les suites, la continuité et la dérivabilité, on va définir l'intégrale d'une fonction complexe à l'aide de l'intégrale de sa partie réelle et de l'intégrale de sa partie imaginaire. Tout sera encore valable, à part les résultats faisant intervenir des inégalités (positivité et croissance de l'intégrale) car cela n'a pas de sens sur $\mathbb{C}$.

- On définit une fonction $f : [\,a\,;b\,] \to C$ en escalier de la même façon que pour une fonction à valeurs réelles. Idem pour les fonctions continues par morceaux, et idem pour une fonction continue par morceaux sur I.
- Les fonctions continues en escalier (respectivement continues par morceaux) à valeurs dans $\mathbb{C}$ forment encore un anneau commutatif et sont encore stables par somme et par multiplication par un complexe.
- On relie les fonctions en escalier (respectivement continues par morceaux) complexes aux fonctions en escalier (respectivement continues par morceaux) réelles avec le résultat suivant :

  Proposition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$. f est en escalier (respectivement continue par morceaux) si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

  Démonstration. Prouvons le résultat dans le cas d'une fonction continue par morceaux, le cas des fonctions en escalier est analogue et laissé en exo. Supposons f continue par morceaux et soit $\sigma = (a_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ une subdivision adaptée à f. Alors, pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, f est continue sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ donc $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont aussi, et f admet une limite finie en ${a_i}^+$ et en ${a_{i+1}}^-$ donc $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ aussi (cf. chapitre 13). Ainsi, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont continues par morceaux.

  Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ soient continues par morceaux. Soit σ une subdivision adaptée à $\mathrm{Re}(f)$ et à $\mathrm{Im}(f)$. On prouve de façon analogue que f est continue par morceaux sur σ.

- On définit l'intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux de la façon suivante :

  Définition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On définit l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ par :

  $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

- Il découle directement de la définition le résultat suivant :

  Proposition. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors :

  $$\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

  Par conséquent, lorsqu'on a une intégrale, on peut la « complexifier » pour la calculer (typiquement quand il y a du sinus ou du cosinus) pour la calculer, puis repasser en réels.

Exemple : Soit $I = \int_0^1 e^t \times \sin(t)\,\mathrm{d}t$. Alors :

On aurait aussi pu faire deux IPP (exo).

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{Im}\left(e^{(1+i)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{Im}\left(\int_0^1 e^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\left[\frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right]_0^1\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e^{(1+i)}-1}{1+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{e\cos(1)+ie\sin(1)-1}{1+i}\right) \\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{(e\cos(1)-1+ie\sin(1))(1-i)}{1^2+1^2}\right) \\
&= \frac{-e\cos(1)+1+e\sin(1)}{2}
\end{aligned}$$

- Si f et g sont continues par morceaux et sont égales sauf en un nombre fini de points, leurs intégrales sont encore égales. En effet, leur partie réelle et leur partie imaginaire sont donc aussi égales sauf en un nombre fini de points, donc ont la même intégrale, ce qui permet de conclure.
- La relation de Chasles est encore valable puisqu'elle est valable pour la partie réelle et la partie imaginaire. En effet, soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux et soit $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

D'après la relation de Chasles pour les fonctions réelles :

$$\int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^c \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^c \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^c \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_c^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^c \mathrm{Re}(f(t)) + i\int_a^c \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t + \int_c^b \mathrm{Re}(f(t)) + i\int_c^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

- La linéarité de l'intégrale est toujours valable.
- ⚠ La positivité et la croissance de l'intégrale ne sont plus valable car cela n'a pas de sens de parler de positivité ou d'ordre sur $\mathbb{C}$.

- Cependant, l'inégalité triangulaire est toujours valable (avec la valeur absolue à la place du module). Cela se démontre à l'aide d'une rotation. Si l'intégrale de f est nulle, le résultat est évident, sinon on note θ un argument de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, si bien que

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \times e^{i\theta}$$

On a donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = e^{-i\theta} \times \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le nombre $\displaystyle\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc un réel. Par conséquent :

$$\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Or, la partie réelle d'un complexe est inférieure à son module, donc :

$$\mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} \times f\right) \leqslant |e^{-i\theta} \times f| = |f|$$

Par croissance de l'intégrale (pour les fonctions réelles), on a le résultat voulu.
- Le résultat concernant la valeur moyenne est inchangé.
- On définit de la même façon une intégrale de a à a ou de a à b avec $b \leqslant a$.
- Le théorème fondamental de l'analyse est encore valable sur $\mathbb{C}$, ainsi que ses corollaires.
- Le résultat du paragraphe V.1.c concernant lien entre intégrale d'une fonction continue et intégrale d'une fonction continue par morceaux est encore valable.
- Le résultat concernant les sommes de Riemann est encore valable : on peut soit le démontrer de la même façon, soit utiliser le fait que $S_n(f) = S_n(\mathrm{Re}(f)) + iS_n(\mathrm{Im}(f))$ et d'appliquer le résultat pour les sommes de Riemann des fonctions réelles.