Chapitre 1

Différents types de raisonnements

Dans ce chapitre A et B désignent des assertions.

I Raisonnements simples, basiques

I.1 Raisonnement « direct »

Principe du raisonnement « direct » : Si on veut prouver une implication $A \Rightarrow B$, on suppose que A est vraie et on montre B.

Exemple : Soient $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. Montrons que si r_1 et r_2 sont rationnels, alors $r_1 + r_2$ est rationnel.

Supposons r_1 et r_2 rationnels. Il existe donc $(p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $(q_1, q_2) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tels que $r_1 = \dfrac{p_1}{q_1}$ et $r_2 = \dfrac{p_2}{q_2}$ donc $r_1 + r_2 = \dfrac{p_1q_2 + p_2q_1}{q_1q_2}$. Comme $p_1q_2 + p_2q_1 \in \mathbb{Z}$ et $q_1q_2 \in \mathbb{Z}^*$, on en déduit que $r_1 + r_2 \in \mathbb{Q}$.

Remarque : On montrerait de même qu'une différence, qu'un produit de rationnels est un rationnel, et qu'un quotient de rationnels (celui au dénominateur étant non nul) est également un rationnel (et donc, en particulier, l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel) : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Nous dirons dans le chapitre 18 que $\mathbb{Q}$ est un corps : nous parlerons du corps des rationnels, tout comme nous parlerons du corps des réels ou du corps des complexes.

I.2 Raisonnement par double implication

Principe du raisonnement par double implication : Si on veut prouver une équivalence $A \Leftrightarrow B$, on prouve les deux implications $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.

En général, c'est de cette manière qu'on prouve les équivalences car on ne peut pas toujours raisonner par équivalences, et même quand on peut, un raisonnement par double implication est aussi possible.

Remarque : On peut prouver ces deux implications par un raisonnement direct ou par un autre type de raisonnement (absurde, contraposée etc.). On se ramène donc aux autres parties de ce chapitre.

Remarque : Nous avons déjà vu ce raisonnement dans le chapitre 0. Insistons sur la rédaction : il faut impérativement expliciter ce que l'on suppose. Le correcteur ne doit pas confondre l'hypothèse avec ce que l'on veut prouver, et les deux étapes doivent être bien visibles ! La rédaction doit donc ressembler à :

- Supposons que ...
- Réciproquement, supposons que ...

I.3 Raisonnement par équivalences

Principe du raisonnement par équivalences : On travaille par équivalences successives.

Exemple : Montrons qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si elle est croissante et décroissante.

On reverra ces notions dans le chapitre 12.

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et décroissante} &\iff \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n \\ \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n \end{cases} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \\
&\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante}
\end{aligned}$$

Remarque : Comme dit plus haut, même quand on peut raisonner par équivalences, un raisonnement par double implication est toujours possible : il suffit de reprendre l'exemple précédent en raisonnant par double implication pour s'en convaincre. Ce n'est qu'avec de l'expérience qu'on arrivera à repérer du premier coup d'oeil les cas où un raisonnement par équivalences (plus rapide) est possible. Dans le doute : travailler par double implication.

Cependant, on rencontre parfois (rarement, il est vrai, mais alors le raisonnement par équivalences est d'une grande aide) le cas de figure suivant : on ne sait pas du tout si une affirmation est vraie. On raisonne alors par équivalences, et on se ramène à une affirmation dont on sait si elle est vraie ou non, ce qui permet de répondre quant à la véracité de la première : cf exercice 17 du chapitre 3 et exercice 49 du chapitre 2.

I.4 Raisonnement « existence - unicité »

Principe du raisonnement « existence - unicité » : Quand on veut prouver l'existence et l'unicité d'un objet, on prouve d'abord l'existence (en général en exhibant un objet qui convient), puis l'unicité (en général en supposant qu'il existe un objet qui convient, puis en montrant qu'il est égal au premier).

On verra de nombreuses applications de ce raisonnement dans les chapitre suivants (existence et unicité de la partie entière, cf. chapitre 2, division euclidienne d'un polynôme, cf. chapitre 19, etc.).

Attention de ne pas conclure le raisonnement d'unicité ci-dessous par « Absurde ». En effet, nous n'avons pas supposé que P et Q sont distincts ! On peut parfois supposer qu'ils sont distincts et faire un raisonnement par l'absurde (voir partie suivante), mais attention à ne pas conclure à l'absurdité si rien n'a été supposé. En clair, attention de ne pas confondre un raisonnement par l'absurde avec un raisonnement absurde...

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(k) = k^n$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.

- **Existence.** Le polynôme $P = X^n$ convient. D'où l'existence.
- **Unicité.** Soit Q un polynôme qui convient. Alors P et Q coïncident en tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$ donc en $n+1$ points. Or, ils sont de degré inférieur ou égal à n donc sont égaux. D'où l'unicité.

L'exemple ci-contre utilise des résultats sur les polynômes (cf. chapitre 19). Encore une fois, on peut donc retenir le principe du raisonnement mais passer les arguments mathématiques en première lecture.

II Raisonnement par l'absurde

Principe du raisonnement par l'absurde : On suppose faux le résultat que l'on veut prouver, et on aboutit à une absurdité.

Exemples :

- Montrons qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas est de signe constant.

  Raisonnons par l'absurde et supposons que f change de signe. Alors il existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x_1) > 0$ et $f(x_2) < 0$. Puisque f est continue, alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (cf. chapitre 13), il existe $x_3 \in [\,x_1\,;x_2\,]$ tel que $f(x_3) = 0$ ce qui est absurde car f ne s'annule pas. f est donc de signe constant.

Si on veut prouver une implication $A \Rightarrow B$, quand on raisonne par l'absurde, on suppose donc A et non(B) vraie (c'est la négation de $A \Rightarrow B$) et on arrive à une absurdité. Attention à ne pas supposer non(A) ! Ce serait une grave erreur de logique ! Pour un raisonnement par l'absurde, on suppose l'hypothèse vraie, mais pas la conclusion ! Par exemple, ci-contre, on suppose que f est continue, ne s'annule pas mais n'est pas de signe constant. On ne suppose pas que f n'est pas continue, s'annule ou autre joyeuseté...

Remarque : Comme dit dans le chapitre précédent, $[\,x_1\,;x_2\,]$ est l'ensemble des réels compris au sens large entre x_1 et x_2, que x_1 soit inférieur à x_2 ou non.

- Montrons que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

  Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel. Comme $\sqrt{2} > 0$, il existe $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ premiers entre eux (i.e. 1 est le seul entier naturel diviseur de p et de q) tels que $\sqrt{2} = p/q$. Par conséquent, $2q^2 = p^2$. Donnons le dernier chiffre de p^2 (respectivement $2q^2$) en fonction de celui de p (respectivement celui de q). Par exemple, si le dernier chiffre de p est un 8 alors le dernier chiffre de p^2 est un 4.

Dernier chiffre de p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de p^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Dernier chiffre de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dernier chiffre de $2q^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Puisque $2q^2 = p^2$, alors ces deux nombres ont le même chiffre des unités. Or, le seul chiffre commun aux deux lignes p^2 et $2q^2$ est 0 : $2q^2$ et p^2 se terminent par 0, ce qui ne peut arriver (cf. lignes au-dessus) que si p se termine par 0 et q par 0 ou 5 : mais alors p et q sont divisibles par 5, ce qui contredit le fait qu'ils sont premiers entre eux : absurde, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dans le chapitre 6, on parlera de congruence modulo 10.

Remarque : ⚠ Attention, une somme, un produit, un quotient d'irrationnels n'est pas forcément un rationnel. Par exemple, $\sqrt{2} - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ et $\sqrt{2}/\sqrt{2}$ sont des rationnels. On montrera même dans le V qu'on peut avoir x et y irrationnels et x^y rationnel.

Nous montrerons dans le chapitre 6 et dans l'exercice 29 du chapitre 12 que, si n n'est pas un carré parfait, alors $\sqrt{n}$ est un irrationnel. Nous montrerons également dans le chapitre 12 que e est un irrationnel.

Remarque : La définition d'un irrationnel est qu'il n'est pas rationnel. C'est même la seule chose connue à son sujet, on ne peut rien affirmer d'autre (par exemple, on vient de voir qu'une somme d'irrationnels n'est pas forcément un irrationnel) alors qu'on sait beaucoup de choses sur les rationnels (par exemple que la somme de deux rationnels est un rationnel). Cette définition étant la négation d'une propriété, les raisonnements par l'absurde sont particulièrement adaptés pour montrer qu'un nombre est irrationnel.

Exemple : Montrons que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel.

Soit α un irrationnel, et soit r un rationnel. Si $\alpha + r$ est rationnel, alors $\alpha = (\alpha + r) - r$. Par conséquent, α est une différence de rationnels donc est rationnel, ce qui est absurde : $\alpha + r$ est irrationnel.

Remarque : On montrerait de même que le produit ou le quotient d'un irrationnel par un rationnel **non nul** est un irrationnel : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Le fait que ce rationnel soit non nul est évidemment nécessaire pour le quotient mais aussi pour le produit car, si α est rationnel, $0 \times \alpha$ est rationnel...

Remarque : Quand on fait plusieurs raisonnements par l'absurde imbriqués les uns dans les autres et qu'on arrive à une absurdité, ce qui est absurde, c'est la dernière hypothèse faite.

Exemple : Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{Q}^4$ tels que $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$. Montrons que $a = c$ et que $b = d$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $a \neq c$ ou que $b \neq d$. Si $b \neq d$ alors $\sqrt{2} = \dfrac{a-c}{d-b} \in \mathbb{Q}$ car c'est un quotient de rationnels, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi (dernière hypothèse faite), $b = d$. Par conséquent, $a \neq c$. Or, $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ et $b = d$ donc $a = c$ ce qui est absurde : $a = c$ et $b = d$.

Remarque : On généralise aisément ce qui précède avec un irrationnel quelconque : si α est un irrationnel et si (a, b, c, d) sont quatre rationnels tels que $a + b \times \alpha = c + d \times \alpha$ alors $a = c$ et $b = d$. C'est faux si α est rationnel : par exemple, $0 + 3 \times (1/3) = 1 + 0 \times (1/3)$.

Nous dirons au chapitre 28 que 1 et $\sqrt{2}$ sont libres dans $\mathbb{R}$ vu comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

III Raisonnement par contraposée

Rappel du chapitre 0 : Si on a une implication $A \Rightarrow B$, alors sa contraposée est $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$. De plus, une implication et sa contraposée sont équivalentes, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses.

C'est-à-dire une implication et sa contraposée ont même valeur de vérité.

Principe du raisonnement par contraposée : Si on veut montrer qu'une implication est vraie, il suffit de prouver que sa contraposée est vraie.

C'est parfois plus facile. Y penser si on bloque !

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que, si n^2 est pair, alors n est pair.

Il ne semble pas facile de prouver cette implication directement. Prouvons ce résultat par contraposée, c'est-à-dire que si n est impair alors n^2 est impair. Supposons donc n impair : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Ainsi, $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est également impair, d'où le résultat par contraposée.

Remarque : De même, si n^2 est impair alors n est impair : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Par conséquent, n et n^2 sont de même parité, ce qu'on peut également reformuler de la manière suivante : n est pair si et seulement si n^2 est pair. Utilisons ce résultat pour prouver (encore) que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Reprenons le raisonnement précédent à : $2q^2 = p^2$. Alors p^2

est pair donc, d'après ce qui précède, p est pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k$, si bien que $2q^2 = p^2 = 4k^2$. Ainsi, $q^2 = 2k^2$, q^2 est pair donc q est pair, ce qui est absurde car p et q sont premiers entre eux donc ne peuvent être tous les deux pairs (c'est-à-dire divisibles par 2). En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que si x^2 est irrationnel, alors x est irrationnel. Supposons $x \in \mathbb{Q}$. Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $x = p/q$ donc $x^2 = p^2/q^2 \in \mathbb{Q}$. Par contraposée, on a le résultat voulu.

La réciproque est fausse, comme on le voit avec $x = \sqrt{2}$.

Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer le résultat suivant : $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leqslant \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

Supposons a non nul. En posant $\varepsilon = |a|/2 > 0$, il vient $|a| > \varepsilon$. Par conséquent, on a trouvé un $\varepsilon > 0$ tel que $|a| > \varepsilon$. On a donc prouvé l'implication : $a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| > \varepsilon)$. On a donc prouvé le résultat voulu par contraposée.

Remarque : Attention à ne pas confondre un raisonnement par l'absurde avec un raisonnement par contraposée. Tout d'abord, on peut effectuer un raisonnement par l'absurde, même si l'on ne veut pas prouver une implication (si on veut simplement prouver A vraie, on suppose A fausse et on arrive à une absurdité). De plus, même quand on veut prouver une implication $A \Rightarrow B$, les deux types de raisonnements diffèrent :

- Un raisonnement par l'absurde suppose A et non(B) vraies (ou A vraie et B fausse) pour arriver à une absurdité.
- Un raisonnement par contraposée suppose non(B) vraie pour arriver à non(A) vraie (donc B fausse pour arriver à A fausse), mais ce n'est pas absurde car on ne suppose plus A vraie.

IV Raisonnement par double inclusion

Cf. chapitre 4.

V Raisonnement par disjonction de cas

Principe du raisonnement par disjonction de cas : On prouve le résultat dans tous les cas possibles.

La justification logique de la validité de ce résultat vient du 5 de l'exercice 2 du chapitre 0 : si A et B recouvrent tous les cas possibles, alors les deux assertions équivalentes de cet exemple sont équivalentes à C. En d'autres termes, pour prouver C, il suffit de prouver les deux implications $A \Rightarrow C$ et $B \Rightarrow C$.

Exemple : Posons $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Tout d'abord, $\alpha^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2}\times\sqrt{2})} = \sqrt{2}^2 = 2$ (nous utilisons les opérations sur les puissances que nous verrons dans le chapitre 2). En particulier, $\alpha^{\sqrt{2}}$ est rationnel. On souhaite à présent exhiber deux irrationnels x et y tels que x^y soit un rationnel. L'ennui est qu'on ne sait pas si α est rationnel ou non. Il suffit de distinguer les cas :

- Si α est un irrationnel, $x = \alpha$ et $y = \sqrt{2}$ conviennent.
- Si α est un rationnel, alors $x = y = \sqrt{2}$ conviennent.

Dans tous les cas, on a prouvé l'existence de deux irrationnels x et y tels que x^y soit rationnel.

Remarque : α est en fait irrationnel (et même transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers) : cela découle du magnifique (mais très difficile à prouver !) théorème de Gelfond-Schneider.

Exemple : On prouvera dans le VII que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

La notation $\sum$ sera revue dans le chapitre 3 : nous l'utiliserons parfois dans le présent chapitre, surtout quand nous ferons des récurrences.

Pour l'instant, contentons-nous de vérifier la cohérence de cette égalité, c'est-à-dire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quantité de droite est bien un entier. Raisonnons pour cela par disjonction de cas.

- **Premier cas : si n est pair.**
Alors $n/2$ est un entier donc $n(n+1)/2$ est bien un entier.
- **Deuxième cas : si n est impair.** Alors $n+1$ est pair donc $(n+1)/2$ est un entier, donc $n(n+1)/2$ est aussi un entier.

En conclusion, dans tous les cas, $n(n+1)/2$ est un entier.

⚠ Ne pas faire une disjonction de cas lorsqu'il n'y a pas de raison d'en faire. On n'en fait une que lorsqu'on veut appliquer un résultat du cours qui nécessite de distinguer des cas (comme la parité dans l'exemple précédent). De plus, il faut essayer de faire en sorte de minimiser le nombre de cas, ou même de ne pas examiner les mêmes cas plusieurs fois.

Les raisonnements par disjonction de cas sont particulièrement utiles quand on veut prouver un résultat dépendant de la parité d'un entier n. Ils sont aussi utiles quand on veut différencier les cas selon la congruence d'un entier, ou selon le signe d'un réel.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ x-1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que si $x \neq y$ alors $f(x) \neq f(y)$.

Supposons $x \neq y$. On voit que l'expression de $f(x)$ et de $f(y)$ dépend du signe de x et de y : faisons une disjonction de cas.

- **Premier cas : x et y sont positifs ou nuls.** Alors $f(x) = x+1$ et $f(y) = y+1$, distincts car x et y sont distincts.
- **Deuxième cas : x et y sont strictement négatifs.** Alors $f(x) = x-1$ et $f(y) = y-1$, distincts car x et y sont distincts.
- **Troisième cas : $x < 0 \leqslant y$.** Alors $f(x) = x-1$ et $f(y) = y+1$. Or, $x < 0$ donc $f(x) < 0$ et $y \geqslant 0$ donc $f(y) \geqslant 0$. En particulier, $f(x) \neq f(y)$.

On dira dans le chapitre 4 que f est injective, et nous généraliserons le résultat de cet exemple dans l'exercice 40 de ce même chapitre.

Dans tous les cas, $f(x) \neq f(y)$. En effet, il est inutile d'étudier le cas $y < 0 \leqslant x$, car il découle du troisième cas par symétrie des rôles. il n'y a en fait que trois cas : soit les deux sont positifs ou nuls, soit les deux sont strictement négatifs, soit l'un des deux est strictement négatif et l'autre positif ou nul, que l'un soit noté x et l'autre y ou le contraire ne change rien !

VI Raisonnement par analyse-synthèse

Principe du raisonnement par analyse-synthèse : Le raisonnement par analyse-synthèse est utile dans les cas où un raisonnement par équivalences est impossible ou tout simplement difficile.

- Dans une première partie (l'analyse), on suppose l'existence d'une solution, et on en déduit des propriétés, ce qui permet de réduire les possibilités. En clair, pendant l'analyse, on donne les seules solutions **éventuelles**.
- Dans une deuxième partie (la synthèse), on se demande, parmi les solutions **éventuelles** trouvées lors de l'analyse, lesquelles sont **effectivement** solutions du problème initial.

Dans le premier exemple ci-dessous, on pourrait travailler par équivalences en prenant certaines précautions (cf. chapitre 2), mais une erreur de logique n'est jamais loin : le raisonnement par analyse-synthèse permet de travailler l'esprit tranquille.

Remarque : En d'autres termes, l'analyse fournit des conditions **nécessaires** et la synthèse des conditions **suffisantes**. Certains ouvrages, d'ailleurs, ne parlent pas de raisonnement par analyse-synthèse mais de raisonnement par condition nécessaire - condition suffisante.

Remarque : ⚠ Attention à la rédaction ! La frontière est mince entre un candidat qui fait une analyse synthèse (surtout s'il oublie la synthèse) et un candidat qui part de ce qu'il veut montrer (et qui fait donc des erreurs de logique).

Exemple : Résolvons l'équation $x = \sqrt{x^3 + x^2 - x}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

- **Analyse :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x convient alors, en mettant au carré, $x^2 = x^3 + x^2 - x$ donc $x^3 - x = 0$. En factorisant par x, il vient $x\left(x^2-1\right) = x(x-1)(x+1) = 0$ donc $x = 0, x = 1$ ou $x = -1$.

- **Synthèse :** 0 et 1 sont solutions mais -1 ne l'est pas.

En conclusion, les solutions de l'équation sont 0 et 1.

Ne pas oublier la synthèse ! D'une part, si on l'oublie, il y a une faille logique dans le raisonnement : on a un raisonnement du type « si ça marche, alors ça marche. » D'autre part, on voit ci-contre que les solutions éventuelles trouvées lors de l'analyse ne sont pas toutes solutions : on risque donc de donner des solutions qui n'en sont pas !

Exemple : Donnons les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Supposons que f convienne. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la relation vérifiée par f avec x et $y = f(x)$, il vient $f(0) = 2 - x - f(x)$, si bien que $f(x) = 2 - f(0) - x$. En d'autres termes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que f soit de la forme $f : x \mapsto \lambda - x$ (encore en d'autres termes, f est une fonction affine de pente -1).
- **Synthèse :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \lambda - x$. Cherchons pour quelle(s) valeur(s) de λ la fonction f convient. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(y - f(x)) &= f(y - \lambda + x) \\ &= \lambda - y + \lambda - x \\ &= 2\lambda - y - x \end{aligned}$$

  Finalement, λ convient si et seulement si $2\lambda = 2$ si et seulement si $\lambda = 1$.

En conclusion, la seule fonction solution est la fonction $f : x \mapsto 1 - x$.

Exemple : Donnons les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $f(n + m) = f(n) + f(m)$.

- **Analyse :** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Supposons que f convienne. En prenant $n = m = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0) + f(0) \\ &= 2f(0) \end{aligned}$$

  ce qui implique que $f(0) = 0$. En prenant $n = m = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(2) &= f(1) + f(1) \\ &= 2f(1) \end{aligned}$$

  En prenant $n = 2$ et $m = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2) + f(1) \\ &= 2f(1) + f(1) \\ &= 3f(1) \end{aligned}$$

  Par une récurrence immédiate (cf. VII), on obtient que : $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1)$. En d'autres termes, il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que f soit la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par $f : n \mapsto a \times n$.
- **Synthèse :** Soit $a \in \mathbb{N}$ et soit $f : x \mapsto a \times n$. Cherchons pour quelle(s) valeur(s) de a la fonction f convient. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(n + p) &= a \times (n + p) \\ &= a \times n + a \times p \\ &= f(n) + f(p) \end{aligned}$$

  Finalement, tout entier $a \in \mathbb{N}$ convient.

Attention, il ne faut pas écrire : « f est la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par : $n \mapsto n \times f(1)$ » ! La définition de f ne peut pas dépendre d'elle-même !

En conclusion, les solutions du problème sont exactement les fonctions de la forme $f : n \mapsto a \times n$, où $a \in \mathbb{N}$.

Cas particulier important : Quand on veut prouver l'existence et l'unicité d'un objet. Lors de l'analyse, on trouve l'unique solution **éventuelle** du problème, et lors de la synthèse, on vérifie que cet objet convient effectivement.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paire et $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ impaire uniques telles que $f = p + i$.

- **Analyse :** Supposons que p et i conviennent. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $f(x) = p(x) + i(x)$. D'autre part, $f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$ car p est paire et i est impaire. Par somme et par différence,

$$p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

- **Synthèse :** Soient p et i les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$p : x \longmapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \qquad \text{et} \qquad i : x \longmapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

Montrons que

1. p est paire.
2. i est impaire.
3. $f = p + i$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $p(-x) = \dfrac{f(-x)+f(x)}{2} = p(x)$ c'est-à-dire que p est paire. De même, i est impaire. Enfin, $p(x)+i(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$. D'où l'existence et l'unicité.

On peut généraliser facilement à des fonctions définies sur un domaine D symétrique par rapport à 0, cf. chapitre 2.

On reverra les fonctions paires et impaires dans le chapitre 2.

VII Raisonnement par récurrence

Cadre : On note H_n une propriété ou hypothèse qui dépend de n, et on cherche à montrer que H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$ (où n_0 est un entier donné). On peut bien sûr parfois montrer cela directement (par exemple si H_n est « n et n^2 ont la même parité » : pas besoin de récurrence pour cela) mais parfois il est plus simple de montrer cela « de proche en proche ».

VII.1 Récurrence simple

Théorème (principe de récurrence). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- H_{n_0} est vraie : c'est « l'initialisation ».
- $\forall n \geqslant n_0, H_n$ vraie $\Rightarrow H_{n+1}$ vraie : c'est « l'hérédité ».

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

On rappelle que pour montrer un résultat qui commence par « $\forall n \geqslant n_0$ », on commence par écrire « Soit $n \geqslant n_0$ ». Écrire « supposons que pour tout $n \geqslant n_0, H_n$ soit vraie » est une erreur grave, voir ci-dessous.

Remarque : On parle du « principe » de récurrence, mais nous le prouverons (à l'aide d'un théorème admis, qui découle peu ou prou de l'axiomatique) dans le chapitre 2.

Rédaction d'un raisonnement par récurrence : Un raisonnement par récurrence comporte quatre étapes :

1. énoncer l'hypothèse.
2. l'initialisation.
3. l'hérédité.
4. la conclusion.

Exemple : Prouvons le résultat dont nous avons affirmé, dans l'avant-dernier exemple du paragraphe précédent, qu'il découlait d'une récurrence immédiate. Plus précisément, reprenons une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, f(n+p) = f(n) + f(p)$ et prouvons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $f(n) = nf(1)$ ».
- On montré précédemment que $f(0) = 0$ donc $f(0) = 0 \times f(1)$: H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse sur la fonction f (avec $p = 1$) : $f(n+1) = f(n) + f(1)$. Or, par hypothèse de récurrence, $f(n) = nf(1)$ si bien que $f(n+1) = nf(1) + f(1)$ donc $f(n+1) = (n+1)f(1)$ c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

On peut voir un raisonnement par récurrence comme une suite infinie de dominos qui tombent : l'initialisation, c'est le premier domino qui tombe, et l'hérédité, c'est chaque domino qui entraîne son successeur dans sa chute. Si les deux conditions sont vérifiées, alors tous les dominos tombent.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

Exemple : Si $n \geqslant 1$, notons $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.
Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ».
- D'une part, $S_1 = 1$, et d'autre part, $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1 = S_1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{array}{rcll} S_{n+1} & = & S_n + (n+1) & \\ & = & \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) & \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ & = & \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} & \\ & = & \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} & \end{array}$$

Réflexe : se ramener au rang précédent pour utiliser l'hypothèse de récurrence.

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Remarque : Plusieurs erreurs à ne surtout pas faire :

- Il ne faut pas écrire H_n : « $\forall n \geqslant n_0, \dots$ », c'est-à-dire écrire « $\forall n$ » **dans** H_n : cela n'a aucun sens ! Il suffit de remplacer n par une valeur explicite pour s'en convaincre : si on écrit H_n : « $\forall n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ », alors H_{1789} est l'hypothèse « $\forall 1789 \geqslant 1, \dots$ », qui n'a aucun sens. Cependant, on peut écrire (presque) tout ce qu'on veut à part ça. Par exemple :
  - ⋆ H_n : « Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, … » (cf. chapitre 3).
  - ⋆ H_n : « Pour tout P de degré inférieur ou égal à n, … » (cf. chapitre 19).
- Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons que, pour tout $n \geqslant n_0$, H_n soit vraie ». Dans ce cas, c'est fini ! On suppose ce qu'on veut prouver !

L'étape d'hérédité commence toujours ainsi : « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons H_n est vraie (et montrons que H_{n+1} est vraie) ».

- Dans l'hérédité, il ne faut pas démarrer par : « Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que H_n soit vraie ». En effet, le n choisi n'est pas alors quelconque alors qu'il faut prouver l'hérédité pour toutes les valeurs de n supérieures ou égales à n_0 : il peut y avoir des trous dans le raisonnement par récurrence ! Si on veut être plus formel, écrire « Supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que » ou « Supposons que H_n soit vraie pour un certain n » sous-entend qu'on veut prouver l'assertion suivante : « $\exists n \geqslant n_0, H_n \Rightarrow H_{n+1}$ », et ce n'est pas ce qui est dans l'énoncé du principe de récurrence. Ce n'est peut-être qu'une histoire de langue française, mais autant éviter de tenter le diable, certains correcteurs sont très chatouilleux !
- Dans l'hérédité, on doit prendre n supérieur ou égal à la dernière valeur pour laquelle on a montré l'initialisation (il faut prouver l'hérédité pour tout $n \geqslant n_0$ et non pas pour tout $n > n_0$, voir l'énoncé du principe de récurrence). Ci-dessus, on a prouvé H_1 donc on suppose $n \geqslant 1$, il ne faut pas supposer $n \geqslant 2$! Si cela ne suffit pas, prouver l'initialisation pour une valeur supplémentaire, cf. exercice 9.

Exemple : Donnons un exemple qui illustre ce qui se passe quand on ne respecte pas cette règle. « Prouvons » par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = n^2$.

Nous verrons deux autres exemples dans l'exercice 7.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $n = n^2$ ».
- $0 = 0^2$ et $1 = 1^2$ donc H_0 et H_1 sont vraies.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $n = n^2$ donc, en multipliant par n, il vient $n^2 = n^3$ donc $n = n^3$, si bien que $n - 1 = n^3 - 1 = (n-1) \times (n^2 + n + 1)$ (cf. chapitre 3). En divisant par $n - 1$ (non nul car $n \geqslant 2$), on obtient $1 = n^2 + n + 1$ et, enfin, $n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Où est l'erreur/l'arnaque ? On a en fait prouvé ce qui suit :

- H_0 et H_1 sont vraies.
- $\forall n \geqslant 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{n+1}$ vraie.

Cependant, cela ne suffit pas ! Si on veut pousser jusqu'au bout l'analogie avec les dominos, alors les dominos d'ordre 0 et 1 tombent et, si le domino d'ordre $n \geqslant 2$ tombe, alors il entraîne le domino d'ordre $n+1$ à sa suite puis tous les suivants, mais on ne sait pas si le domino d'ordre 2 tombe puisqu'on n'a pas montré $H_1 \Rightarrow H_2$!

Il fallait donc supposer $n \geqslant 1$ dans l'hérédité, mais alors on n'aurait pas pu diviser par $n-1$ car $n-1$ aurait pu être nul ! Encore une fois, si, dans un exercice, on suppose $n \geqslant 1$ (par exemple) et qu'on a besoin de supposer $n \geqslant 2$, alors on revient sur ses pas et on prouve l'initialisation pour une valeur supplémentaire, cf. exercice 9.

Ouf, les maths sont bien faites...

Ceci étant dit, reprenons.

- ⚠ Dans l'initialisation, il ne faut pas écrire « $S_1 = 1(1+1)/2 = 1$ donc H_1 est vraie » ! En effet, on ne sait pas encore que, pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = n(n+1)/2$! C'est ce qu'on veut prouver ! Comme ci-dessus, il faut calculer les deux termes séparément et prouver qu'ils sont égaux.
- ⚠ Une récurrence peut être utile pour prouver une propriété qui, a priori, ne dépend pas de n, mais alors il faut traduire cette propriété de façon à ce qu'elle dépende de n ! En d'autres termes, quand on fait une récurrence, il faut une hypothèse de récurrence qui dépende de n ! Par exemple :
  - ⋆ Si l'on veut prouver qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, poser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » n'est d'aucune utilité car H_n ne dépend même pas de n ! L'indice, dans la suite est muet, on pourrait écrire tout aussi bien H_n : « $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante » ! Si l'on veut prouver qu'une suite est croissante par récurrence, on prouve que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n : « $u_n \leqslant u_{n+1}$ » est vraie (ou que, pour tout $n \geqslant 1$, H_n : « $u_{n-1} \leqslant u_n$ » est vraie), cf. chapitre 12.
  - ⋆ Si l'on veut prouver qu'il existe une infinité d'éléments vérifiant une propriété, il ne faut pas poser, pour tout n, H_n : « il existe une infinité d'éléments vérifiant la propriété » mais H_n : « il existe n éléments qui vérifient la propriété ». En effet, si on arrive à prouver que, pour tout n, il existe n éléments (distincts) vérifiant la propriété, c'est qu'il en existe une infinité ! cf. chapitre 12.

Si l'hypothèse ne dépend pas de n, ce n'est pas faux, mais cela ne sert à rien...

Donnons un exemple où on prouve une propriété dépendant de la parité de l'entier n.

Exemple : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n}$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2$ si n est pair et $x_n = 1/2$ si n est impair.

- Plutôt que de donner une hypothèse qui dépendrait de la parité de n (ce qui serait possible mais compliquerait les raisonnements), posons, pour tout $p \in \mathbb{N}$, H_p : « $x_{2p} = 2$ et $x_{2p+1} = 1/2$ ».
- $x_0 = 2$ et $x_1 = 1/2$ donc H_0 est vraie.
- Soit $p \geqslant 0$. Supposons H_p vraie et prouvons que H_{p+1} est vraie. On a $x_{2p+2} = 1/x_{2p+1}$. Or, $x_{2p+1} = 1/2$ par hypothèse de récurrence donc $x_{2p+2} = 2$. De plus, $x_{2p+3} = 1/x_{2p+2} = 1/2$ d'après ce qui précède. Par conséquent, H_{p+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_p est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

⚠ Raisonnement classique quand on veut montrer un résultat qui dépend de la parité de n.

H_{p+1} est : « $x_{2p+2} = 2$ et $x_{2p+3} = 1/2$ ».

Remarque : Cette année, nous écrirons souvent : « par une récurrence immédiate ». Vous avez aussi le droit de dire cela dans une copie, à deux conditions :

- Vous devez déjà avoir rédigé une récurrence dans votre copie (il ne faut donc pas parler de récurrence immédiate pour la première récurrence du sujet). En effet, le correcteur veut voir si vous savez rédiger. Une fois que vous avez montré patte blanche, vous pouvez aller plus vite sur les suivantes.

Et elles le sont vraiment ! Si vous n'arrivez pas à les faire, venez me voir.

- Que la récurrence soit vraiment immédiate (les correcteurs sont chatouilleux à propos des tentatives d'arnaque). Montrer que le résultat est vrai aux rangs $0, 1, 2, 3$ etc. en faisant apparaître l'argument qui permet de passer du rang 1 au rang 2 (par exemple), en faisant bien comprendre qu'il se généralise, suffit en général à convaincre le correcteur.

Exemple : Reprenons la suite ci-dessus. Tout d'abord, $x_0 = 2 > 0$ donc $x_1 = 1/x_0 > 0$. Par conséquent, $x_2 = 1/x_1 > 0$, d'où, encore une fois, $x_3 = 1/x_2 > 0$. Par une récurrence immédiate, $x_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De façon générale, je vous conseille de rédiger une récurrence si vous n'êtes pas sûr de vous : d'une part, cela vous évitera de vous tromper en affirmant un résultat faux, et d'autre part, si vous-mêmes n'êtes pas convaincus, comment pouvez-vous espérer convaincre le correcteur ? Si la récurrence est vraiment immédiate, la rédiger prendra moins de cinq minutes (ce qui est peu sur une épreuve de quatre heures), et vous serez tranquilles.

VII.2 Récurrence forte

Parfois, pour démontrer que H_{n+1} est vraie, supposer H_n vraie ne suffit pas, il faut supposer également que $H_{n-1}, H_{n-2}, \ldots$ sont vraies. On dit qu'on effectue une récurrence forte ou avec prédécesseurs.

Théorème (principe de récurrence forte). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- H_{n_0} est vraie.
- $\forall n \geqslant n_0$, $(H_{n_0}, \ldots, H_n$ vraies$) \Rightarrow H_{n+1}$ est vraie.

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

On ne suppose plus uniquement le résultat vrai au rang précédent, mais à **tous** les rangs précédents.

Exemple : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ et :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad x_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x_0 x_n + x_1 x_{n-1} + \cdots + x_n x_0\right)$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant 0$.

- Si $n \geqslant 0$, notons H_n : « $x_n \geqslant 0$ ».
- H_0 et H_1 sont vraies par hypothèse.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $H_0, \ldots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $x_0 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$. En d'autres termes, x_{n+1} est produit et somme de termes positifs ou nuls donc $x_{n+1} \geqslant 0$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En effet, supposer H_n vraie, i.e. $x_n \geqslant 0$, ne suffit pas pour prouver que x_{n+1} est positif : il faut également supposer que tous les autres termes le sont !

Exemple : Montrons par récurrence que tout entier $n \geqslant 2$ s'écrit comme un produit de facteurs premiers, c'est-à-dire qu'il existe $k \geqslant 1$ et $p_1, \ldots, p_k$ premiers (pas forcément distincts) tels que $n = p_1 \times \cdots \times p_k$ (et donc, en particulier, un nombre premier est produit de facteurs premiers). Rappelons qu'un entier $n \geqslant 2$ est premier quand il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

Nous ne prouvons pas l'unicité (à l'ordre près des termes) ! C'est plus difficile et nous le ferons dans le chapitre 6.

- Si $n \geqslant 2$, notons H_n : « n peut s'écrire comme un produit de facteurs premiers ».
- H_2 est vraie car 2 est premier.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons $H_2, \ldots, H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Si $n+1$ est premier, alors il s'écrit comme un produit (à un terme) de facteurs premiers. Si $n+1$ n'est pas premier, alors il admet un diviseur $a \in [\![2\,;\, n]\!]$. Posons $b = (n+1)/a$. Alors b est aussi un entier (car a divise $n+1$) appartenant à $[\![2\,;\, n]\!]$ ($b \neq 1$ car $a \neq n+1$, et $b \neq n+1$ car $a \neq 1$). En d'autres termes, $n+1 = a \times b$ avec a et b appartenant à $[\![2\,;\, n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, H_a et H_b sont vraies (et c'est là qu'on se rend compte qu'il faut une récurrence forte : supposer H_n vraie ne suffit pas) donc a et b peuvent s'écrire comme un produit de facteurs premiers, et puisque $n+1 = a \times b$, $n+1$ également : H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Remarque : Parfois, il est difficile de savoir à l'avance quand effectuer une récurrence forte. Dans ce cas, commencer comme une récurrence normale et, quand on a besoin d'une hypothèse plus forte, revenir sur ses pas et modifier ce qu'on a écrit.

Exemple : Si $n \geqslant 1$, posons $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

H_n est appelé le n-ième nombre harmonique.

Montrons que pour tout $n \geqslant 2, H_n \notin \mathbb{N}$. On a $H_2 = 3/2, H_3 = 11/6$ et $H_4 = 25/12$. On va en fait montrer un résultat plus fort.

- Si $n \geqslant 2$, notons P_n : « il existe i_n impair et p_n pair tels que $H_n = i_n/p_n$. »
- P_2, P_3, P_4 sont vraies.
- Soit $n \geqslant 4$. ~~Supposons P_n vraie~~ **Supposons** $P_2, \ldots P_n$ **vraies** et prouvons que P_{n+1} est vraie.

Attention, la notation H_n est déjà prise !

On débute comme une récurrence normale, et on se rend compte plus tard que ça ne suffit pas, donc on barre et on corrige. On précisera dans la suite où et comment on se rend compte qu'il faut une récurrence forte. Jouez le jeu, rédigez-la comme une récurrence normale et de corrigez lorsque vous vous rendez compte que ça ne suffit pas.

  - ⋆ Supposons n pair. Alors $n+1$ est impair. De plus, $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, il existe i_n impair et p_n pair tels que $H_n = i_n/p_n$, si bien que
$$H_{n+1} = \frac{i_n \times (n+1) + p_n}{p_n \times (n+1)}$$
Posons $i_{n+1} = i_n \times (n+1) + p_n$ et $p_{n+1} = p_n \times (n+1)$. Alors i_{n+1} est impair et p_{n+1} est pair (car i_n et $n+1$ sont impairs et p_n pair) et $H_{n+1} = i_{n+1}/p_{n+1}$, ce qui est le résultat voulu. Le problème est que cela ne marche plus si n est impair (voir ci-dessous).
  - ⋆ Supposons n impair. Le résultat précédent n'est plus valable car $i_n \times (n+1) + p_n$ est pair. Il faut raisonner autrement. Comme $n+1$ est pair, il existe $q \geqslant 2$ (car $n+1 \geqslant 5 \geqslant 4$) tel que $n+1 = 2q$. Par conséquent,
$$\begin{aligned} H_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1} \\ &= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}_{\text{termes impairs}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right)}_{\text{termes pairs}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \times \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{q}\right)}_{=H_q} \end{aligned}$$
Par hypothèse de récurrence, P_q est vraie : il existe i_q impair et p_q pair tels que $H_q = i_q/p_q$, si bien que
$$H_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2} \times \frac{i_q}{p_q}$$
En mettant tout sur le même dénominateur (sans chercher à être subtil : $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times n$, qui est bien impair, convient), il existe $C \in \mathbb{N}$ quelconque et $D \in \mathbb{N}$ impair tel que
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} = \frac{C}{D}$$
si bien que $H_{n+1} = \frac{C}{D} + \frac{i_q}{2p_q} = \frac{2Cp_q + i_q \times D}{2Dp_q}$, ce qui est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair, ce qui est encore le résultat voulu.

  Dans tous les cas, P_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence à H_q : problème, si on fait une récurrence classique, le résultat n'est pas vrai au rang q car on ne l'a supposé vrai qu'au rang n. C'est ici qu'on se rend compte qu'on fait une récurrence forte (bien sûr, à l'écrit, on ne met que la récurrence forte, inutile de mettre la récurrence classique et d'expliquer pourquoi on a changé d'avis...) : on remonte et on change le début de l'hérédité.

VII.3 Un cas intermédiaire : la récurrence double

Théorème (principe de récurrence double). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :
- H_{n_0} et H_{n_0+1} sont vraies.
- $\forall n \geqslant n_0$, (H_n et H_{n+1} vraies) $\Rightarrow H_{n+2}$ vraie.

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Ici, on suppose l'hypothèse aux deux derniers rangs. Attention, il faut montrer l'initialisation pour deux valeurs !

Remarque : Pour l'hérédité, on peut également prouver :

$$\forall n \geqslant n_0+1, (H_{n-1} \text{ et } H_n) \text{ vraies } \Rightarrow H_{n+1} \text{ vraie.}$$

Encore une fois, le dernier indice pour lequel on suppose le résultat vrai doit être le dernier indice pour lequel on a prouvé l'initialisation (voir remarque dans la marge ci-dessous).

On généralise sans peine à une récurrence triple ou à une récurrence d'ordre k pour $k \geqslant 3$. Attention, il ne faut pas oublier de montrer l'initialisation pour k valeurs !

Exemple : Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geqslant 0$.

- Si $n \geqslant 0$, notons H_n : « $F_n \geqslant 0$ ».
- H_0 et H_1 sont vraies par hypothèse.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons H_n et H_{n+1} vraies, et montrons que H_{n+2} est vraie. Par H.R., $F_n \geqslant 0$ et $F_{n+1} \geqslant 0$ donc $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \geqslant 0$: H_{n+2} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a supposé $n \geqslant 0$. Or, on a montré que H_1 est vraie : pourquoi ne pas supposer $n \geqslant 1$? Car on suppose H_{n+1} vraie. Or, le dernier indice pour lequel on suppose le résultat vrai (ici, $n+1$) doit être supérieur ou égal au dernier rang pour lequel on a montré l'initialisation (ici, 1). On doit donc avoir $n+1 \geqslant 1$ donc $n \geqslant 0$: tout va bien.

Attention, comme dit plus haut, il faut impérativement montrer l'initialisation pour deux valeurs, sinon il y a une faille logique dans le raisonnement. Par exemple, si on définit la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (la suite de Gibonacci ?) par $G_0 = 0$, $G_1 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$$

Alors $G_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on suppose $G_n \geqslant 0$ et $G_{n+1} \geqslant 0$, alors $G_{n+2} \geqslant 0$. Un élève peu attentif pourrait en déduire que $G_n \geqslant 0$ pour tout n... ce qui serait complètement faux car $G_n < 0$ pour tout $n \geqslant 1$!

VII.4 Récurrence finie

Les raisonnements sont les mêmes mais on veut montrer que H_n est vraie uniquement pour un nombre fini de valeurs.

Exemple : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de réels solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & x_1 & = & 1 \\ & & x_2 & = & 2x_1 \\ x_1 & + & x_3 & = & 2x_2 \\ x_2 & + & x_4 & = & 2x_3 \\ & \vdots & & \vdots & \\ x_{n-2} & + & x_n & = & 2x_{n-1} \end{array}\right.$$

Donner la valeur de $x_1, \dots, x_n$. On ne nous donne pas la réponse : calculons les premiers termes pour deviner une formule que l'on prouvera ensuite par récurrence. On trouve immédiatement $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$ et $x_4 = 4$. Cela justifie le raisonnement par récurrence (finie) suivant.

Méthode classique ! Y penser si la réponse n'est pas donnée !

Attention, l'indice n est déjà pris !

- Si $k \in [\![0\,;n]\!]$, notons H_k : « $x_k = k$. »
- H_1, H_2, H_3, H_4 sont vraies.
- Soit $k \in [\![4\,;n-1]\!]$. Supposons H_{k-1} et H_k vraies et prouvons que H_{k+1} est vraie. Par définition des réels $x_1, \dots, x_n$, on a : $x_{k+1} + x_{k-1} = 2x_k$ donc $x_{k+1} = 2x_k - x_{k-1}$. D'où, par hypothèse de récurrence, $x_{k+1} = 2 \times k - (k-1) = k+1$ donc H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$.

Il faut supposer que $k \leqslant n-1$ sinon H_{k+1} n'est pas définie. De plus, il est immédiat, avec la définition des réels $x_1, \dots, x_n$, qu'il faut faire une récurrence double.

Remarque : Il existe d'autres types de récurrences (nous verrons par exemple le principe de récurrence de Cauchy dans l'exercice 14 du chapitre 2). La plus connue est la récurrence descendante : par exemple, pour prouver que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}_-$, alors il suffit de prouver que H_0 est vraie puis que, pour tout $n \leqslant 0$, H_n vraie implique H_{n-1} vraie. Cependant, nous n'utiliserons pas ce principe de récurrence : d'une part, il n'est pas au programme, et d'autre part, il est parfaitement inutile. En effet, il suffit de montrer (par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le résultat est vrai au rang $-n$! Nous reverrons un autre exemple dans l'exercice 22.