Chapitre 12 – Intégrales à paramètre

I – Version continue du théorème de convergence dominée

Théorème de CVD version continue

$Soient\ I, J \subset \mathbb{R}\ des\ intervalles\ et\ g : I \times J \to \mathbb{R}.$

$Soient\ a \in \bar{I}\ et\ f : x \mapsto \int_J g(x,t)dt.$

$$(H_1)\ \forall x \in I,\ \ t \mapsto g(x,t)\ est\ CPM\ sur\ J$$
$$(H_2)\ \exists h : J \to \mathbb{R}\ CPM\ sur\ J\ telle\ que\ \forall t \in J, g(x,t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} h(t)$$
$$(H_3)\ \exists \varphi : J \to \mathbb{R}\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J\ telle\ que\ \forall (x,t) \in I \times J, |g(x,t)| \le \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ \forall x \in I, t \mapsto g(x,t)\ intégrable\ sur\ J\ et\ h\ intégrable\ sur\ J \\ (C_2) \lim\limits_{x \to a} \int_J g(x,t)dt = \int_J \left(\lim\limits_{x \to a} g(x,t)\right) dt\ \ càd\ f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_J h(t)dt \end{cases}$$

II – Théorème de continuité des intégrales à paramètre

Théorème de continuité des intégrales à paramètre

$Soient\ I, J \subset \mathbb{R}\ des\ intervalles, g : I \times J \to \mathbb{R}\ et\ f : x \mapsto \int_J g(x,t)dt.$

$$(H_1)\ \forall x \in I,\ \ t \mapsto g(x,t)\ est\ CPM\ sur\ J$$
$$(H_2)\ \forall t \in J, x \mapsto g(x,t)\ est\ continue\ sur\ I$$
$$(H_3)\ \exists \varphi : J \to \mathbb{R}\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J\ telle\ que\ \forall (x,t) \in I \times J, |g(x,t)| \le \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ \forall x \in I, t \mapsto g(x,t)\ intégrable\ sur\ J\ (ie\ f\ définie\ sur\ I) \\ (C_2)\ f\ est\ continue\ sur\ I \end{cases}$$

III – Théorèmes de dérivation des intégrales à paramètres

Théorème de Leibniz

$Soient\ I, J \subset \mathbb{R}\ des\ intervalles, g : I \times J \to \mathbb{R}\ et\ f : x \mapsto \int_J g(x,t)dt.$

$$\left.\begin{array}{r}(H_1)\ \forall t \in J, x \mapsto g(x,t)\ est\ dérivable\ sur\ I\\ (H_2)\ \forall t \in J, x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ est\ continue\ sur\ I\end{array}\right\}\ (H_{1\&2})\ \forall t \in J, x \mapsto g(x,t)\ est\ C^1\ sur\ I$$

$$(H_3)\ \forall x \in I, \begin{cases} t \mapsto g(x,t)\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J \\ t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J \end{cases}$$

$(H_4)\ \exists \varphi : J \to \mathbb{R}\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J\ telle\ que\ \forall (x,t) \in I \times J, \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ \forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\ intégrable\ sur\ J \\ (C_2)\ f\ est\ C^1\ sur\ I\ et\ \forall x \in I, f'(x) = \int_J \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)dt \end{cases}$$

Théorème de dérivation des intégrales à paramètre version C^k

$Soient\ I, J \subset \mathbb{R}\ des\ intervalles, g : I \times J \to \mathbb{R}, f : x \mapsto \int_J g(x,t)dt\ \ et\ k \in \mathbb{N}^*.$

$$(H_1)\ \forall t \in J, x \mapsto g(x,t)\ est\ C^k\ sur\ I$$

$$(H_2)\ \begin{cases} a)\ \forall p \in [\![0; k-1]\!], \forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\ est\ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J \\ b)\ \forall x \in I, t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\ est\ CPM\ sur\ J \end{cases}$$

$(H_3)\ \exists \varphi_k : J \to \mathbb{R}\ \ CPM\ et\ intégrable\ sur\ J\ telle\ que\ \forall x \in I, \forall t \in J, \left|\frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \varphi_k(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ f\ C^k\ sur\ I \\ (C_2)\ \forall p \in [\![0; k]\!], \forall x \in I, f^{(p)}(x) = \int_J \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)dt \end{cases}$$

IV – Bonus

Proposition

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)}$$

Démonstration : avec une IPP

Propositions :

$$\boxed{\Gamma \; est \; convexe \; sur \; \mathbb{R}_+^*}$$

$$\boxed{\Gamma \; est \; log - convexe \; sur \; \mathbb{R}_+^*}$$

Démonstrations :

1) On dérive 2 fois
2) On dérive $\ln \Gamma$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz