Chapitre 8 – Séries entières

I – Notion de série entière et de rayon de convergence

Définition : On appelle série entière une série de fonctions sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction de la forme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Lemme d'Abel :

$Soit\ z_0 \in \mathbb{C}^*$.

$$\boxed{(a_n z_0^n)_n\ est\ bornée \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ tq\ |z| < |z_0|, \sum_n a_n z^n\ CVA}$$

Définition :

Rayon de convergence $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\boxed{\mathcal{R} = \sup \begin{cases} \{|z| \mid (a_n z^n)_n\ est\ bornée\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_n\ est\ bornée\} \\ \{|z| \mid a_n z^n \to 0\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x^n \to 0\} \\ \{|z| \mid \sum_n a_n z^n\ CV\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_n a_n x^n\ CV\} \\ \{|z| \mid \sum_n a_n z^n\ CVA\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_n a_n x^n\ CVA\} \end{cases}}$$

Propositions :

- $|z| < \mathcal{R} \Rightarrow \sum_n a_n z^n \; CVA$
- $|z| > \mathcal{R} \Rightarrow (a_n z^n)_n \; non\ born\acute{e}e$
- $|z| = \mathcal{R} \Rightarrow ???$

II – Calcul du rayon de convergence

Propositions :

- $\forall a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{C}^*, \mathcal{R}(\sum_n \lambda a_n z^n) = \mathcal{R}(\sum_n a_n z^n)$
- $Soient\ (a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$

$$(\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| < |b_n|) \Rightarrow (\mathcal{R}_a \geq \mathcal{R}_b)$$
$$\big(|a_n| = O(b_n)\big) \Rightarrow (\mathcal{R}_a \geq \mathcal{R}_b)$$
$$\big(|a_n| = o(|b_n|)\big) \Rightarrow (R_a \geq \mathcal{R}_b)$$
$$(|a_n| \sim |b_n|) \Rightarrow (\mathcal{R}_a \geq \mathcal{R}_b)$$

Théorème (Règle de d'Alembert) :

$$\boxed{\left[\exists l \in \mathbb{R}_+, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l\right] \Rightarrow \left[\mathcal{R} = \frac{1}{l} \in \mathcal{R}_+ \cup \{+\infty\}\right]}$$

Proposition :

$$\boxed{\mathcal{R}\left(\sum_n (a_n + b_n) z^n\right) \geq \min(\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b)}$$

avec égalité si $\mathcal{R}_a \neq \mathcal{R}_b$

Proposition (Produit de Cauchy de séries entières) :

Soient $S_a(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $S_b(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}, on\ note$ $\boxed{c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k}$

Alors : $\mathcal{R}_c \geq \min\,(\mathcal{R}_a, \mathcal{R}_b)$ et

$$\forall z\ tq\ |z| < \mathcal{R}_c, \boxed{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n}$$

III – Modes de convergence et continuité

Proposition :

$$\forall [a;b] \subset]-\mathcal{R},\mathcal{R}[, \sum_n a_n x^n \; CVN \; sur \; [a;b]$$

$$\forall K \; compact \; tq \; K \subset \mathcal{B}_o(0,\mathcal{R}), \sum_n a_n z^n \; CVN \; sur \; K$$

Théorème de continuité :

- $sur \; \mathbb{R}, S \; est \; continue \; sur \;]-\mathcal{R};\mathcal{R}[$
- $sur \; \mathbb{C}, S \; est \; continue \; sur \; \mathcal{B}_o(0,\mathcal{R})$

IV – Régularité d'une fonction définie par la somme d'une série entière de variable réelle

Théorème de convergence radiale d'Abel :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathcal{R}^n \; CV \Rightarrow S \; est \; continue \; sur \; [0;\mathcal{R}] \; ie \; S(x) \xrightarrow[x\to\mathcal{R}^-]{} S(\mathcal{R})}$$

Lemme :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{Z}, \mathcal{R}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n x^n\right) = \mathcal{R}}$$

Théorème :

Une fonction définie par une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ouvert de convergence et dérivable terme à terme.

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p}}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}, a_p = \frac{S^{(p)}(0)}{p!}}$$

Proposition :

$S_a, \mathcal{R}_a$ *et* $S_b, \mathcal{R}_b$ *définis comme avant avec* $R_a, R_b \underset{\equiv}{\geq} 0$

$$\boxed{[\forall x \in\,]-\mathcal{R}, \mathcal{R}[, S_a(x) = S_b(x)] \Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n]}$$

(cas particulier : $S_b$la série nulle)

<u>Proposition :</u> Une fonction définie par une série entière CVN sur tout $[a; b] \subset\,]-\mathcal{R}, \mathcal{R}[$ donc on peut l'intégrer terme à terme sur $[a; b]$.

Soit f $\mathcal{C}^1$ *sur* $]-\mathcal{R}, \mathcal{R}[$.

Sur $]-\mathcal{R}, \mathcal{R}[$:

$$\left[f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right] \Rightarrow \boxed{f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}}$$

V – Fonction développable en série entière

<u>Définition :</u>

Soit $f: I \to R$ *une fonction telle que* $0 \in \mathring{I}$.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de 0 si :

$$\exists \alpha > 0, \exists (a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Dans ce cas, f *est* $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha; \alpha[$ et :

$$\forall x \in]-\alpha; \alpha[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

<u>Propositions :</u>

- Il y a unicité du DSE en cas d'existence
- f *non* $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow f$ *non DSE*

<u>DSE usuels :</u>

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}$$

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

$$\boxed{\forall x \in]-1;1[, (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n}$$

VI – Bonus

1) $f\ \mathcal{C}^\infty\ au\ voisinage\ de\ 0 \Rightarrow f\ DSE$?
   $NON\ C'EST\ FAUX$!!!
   Exemple :
   $$f : \begin{matrix} 0 \mapsto 0 \\ x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}\ si\ x \neq 0 \end{matrix}$$
2) Démo du théorème de convergence radiale d'Abel