# Devoir Surveillé n°3

## Préliminaires

1. (Question de cours) Théorème de Bolzano-Weierstraß (énoncé, démonstration dans le cas complexe en admettant le cas réel).
2. (Question de cours) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (on a donc $D = \mathbb{R}$). Écrire avec des quantificateurs les limites suivantes :

   - $f(x) \xrightarrow[x\to 2023]{} 1$
   - $f(x) \xrightarrow[x\to 2023]{} +\infty$
   - $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} +\infty$

3. Donner une primitive de $1/\mathrm{ch}$.
4. On considère l'équation différentielle $(E) : x^3y'' - 2xy + 3 = 0$, à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans cette question, on cherche les solutions réelles.
   (a) On se donne une fonction $y$ dérivable deux fois sur $\mathbb{R}_+^*$ et on pose $z : x \mapsto xy'(x) + y(x)$. Montrer que $y$ est solution de $(E)$ si et seulement si $z$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre à préciser.
   (b) Déterminer les fonctions $z$ solutions.
   (c) En déduire les solutions de $x^3y'' - 2xy + 3 = 0$.
5. Soient $a$ et $b$ deux complexes, $m$ et $n$ deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que :

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\left(ae^{\frac{2i\pi j}{m}} + b\right)^n = \sum_{\substack{k=0\\ m\mid k}}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

## Exercice 2 - Irrationnalité de $\pi$ (et plus encore !).

On se donne dans cet exercice un rationnel $r = \dfrac{a}{b} \not\equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$ (en particulier non nul, et $\tan(r)$ est bien défini). Puisque la tangente est une fonction impaire, on peut supposer $r > 0$ et donc que $a$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de montrer que $\tan(r)$ est irrationnel et d'en déduire que $\pi$ l'est également. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{(2ax - bx^2)^n}{n!} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{2r} f_n(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Exprimer $I_0$ en fonction de $\sin(r)$ et expliquer pourquoi $I_0 \neq 0$.
2. (a) Calculer les intégrales

$$A = \int_0^{2r} x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad B = \int_0^{2r} x^2\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

   (b) En déduire que $I_1 = (-2a\cos(r) + 2b\sin(r)) \times 2\sin(r)$. On rappelle que $r = a/b$.

   On se donne dans la suite $n \geq 2$.

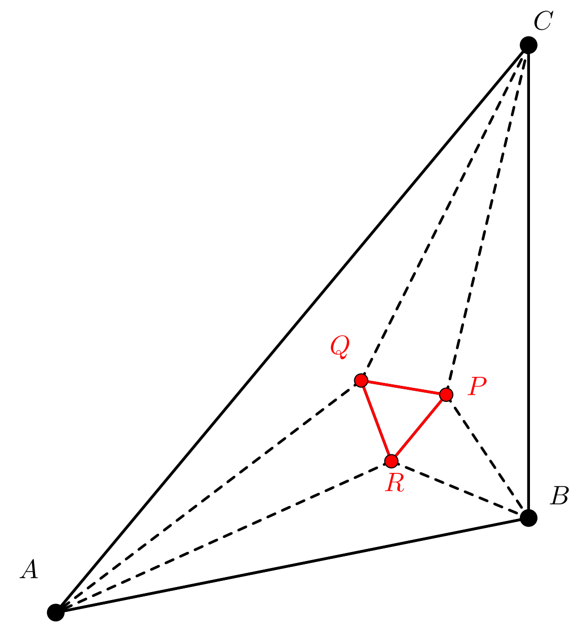
3. (a) Donner les valeurs de $f_n(2r)$ et de ${f_n}'(2r)$.
   (b) En déduire que

$$I_n = -\int_0^{2r} {f_n}''(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$$

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On admet (les sceptiques pourront le vérifier chez eux, cela résulte d'un calcul simple mais un peu long...) que $4a^2f_n(x) - (4n+6)bf_{n+1}(x) = {f_{n+2}}''(x)$. Exprimer $I_{n+2}$ en fonction de $I_{n+1}$ et de $I_n$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $I_n = (a_n\cos(r) + b_n\sin(r)) \times 2\sin(r)$.

5. On suppose à présent que $\tan(r) \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\tan(r) = \dfrac{p}{q}$, et on veut aboutir à une absurdité.
   (a) Rappeler pourquoi $\sin(r)$ et $\cos(r)$ sont non nuls. En déduire que $\sin(2r) \neq 0$.
   (b) À l'aide de la question 4.(b), montrer que $\dfrac{q \times I_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}$.
   (c) Donner le tableau de variations de la fonction $g : x \mapsto 2ax - bx^2$ sur $[\,0\,;2r\,]$.
   (d) On rappelle que si $f$ et $g$ sont continues sur un segment $[\,a\,;b\,]$ avec $f \leq g$, alors :
   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$
   Montrer que, si $f$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$, alors :
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
   Ce résultat est connu sous le nom d'inégalité triangulaire.
   (e) Montrer que $|I_n| \leq \left(\dfrac{a^2}{b}\right)^n \times \dfrac{2r}{n!}$ et en déduire la limite de $I_n$.
   (f) Déduire des questions précédentes qu'il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0, I_n = 0$.
   (g) Montrer que l'ensemble $E = \{n \in \mathbb{N} \mid I_n \neq 0\}$ admet un plus grand élément, qu'on notera $n_1$, et conclure à une absurdité à l'aide de la question 4.(a).
6. Montrer que $\pi$ est irrationnel.

# Problème - Théorème de Morley




Les trisectrices[1] d'un angle sont les droites qui découpent cet angle en trois angles égaux.

On souhaite dans cet exercice démontrer le théorème de Morley : les trisectrices d'un triangle se coupent en trois points formant un triangle équilatéral.

Le plan est muni d'un repère orthonormé et on identifie $\mathbb{C}$ et ce plan par la bijection habituelle. On se donne trois points $A$, $B$ et $C$ deux à deux distincts, on suppose que $ABC$ est un triangle direct, et on appelle $a$, $b$, $c \in \mathbb{C}$ les affixes de ces trois points.

Les nombres $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont dans $\left]\,0\,;\dfrac{\pi}{3}\,\right[$ et vérifient :

- $3\alpha$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ (c'est-à-dire l'angle orienté allant de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire une mesure de l'angle du sommet $A$ dans le triangle $ABC$).
- $3\beta$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
- $3\gamma$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

On définit $u = e^{2i\alpha}$, $v = e^{2i\beta}$ et $w = e^{2i\gamma}$.

On appelle $R_a$, $R_b$ et $R_c$ les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies, pour $z \in \mathbb{C}$, par :

$$R_a(z) = u(z-a)+a, \quad R_b(z) = v(z-b)+b, \quad R_c(z) = w(z-c)+c$$

1. Calculs préliminaires
   (a) Soient $Z_1$, $Z_2$ et $Z_3$ trois points deux à deux distincts d'affixes $z_1$, $z_2$ et $z_3$ tels que $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$. Mettre sous forme trigonométrique le complexe $\dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2}$.

1. On écrit aussi « trissectrices » mais trisectrice reste la norme... sans pour autant se prononcer « trizectrice ».

(b) En déduire que le triangle $Z_1Z_2Z_3$ est équilatéral.

(c) Montrer que $uv$, $vw$ et $wu$ sont différents de 1 et que $uvw = j$.

(d) Mettre sous forme exponentielle les deux nombres complexes $\dfrac{u(1-v)}{1-uv}$ et $\dfrac{1-u}{1-uv}$. On justifiera bien que la quantité devant l'exponentielle est strictement positive.

2. On considère trois nombres complexes $p$, $q$ et $r$ vérifiant les relations suivantes :

- $(1-v)b + v(1-w)c = p(1-vw)$
- $(1-w)c + w(1-u)a = q(1-wu)$
- $(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$

On pose $E = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p + jq + j^2 r)$.

(a) Justifier qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{C}^3$ que l'on explicitera tels que $E = \lambda a + \mu b + \nu c$. Vérifier en particulier que

$$\lambda = j(1-u)(1-vw)\left[w(1-uv) + j(1-wu)\right]$$

Question longue et calculatoire, certes, mais pas si difficile que cela !

(b) À l'aide de la question 1.(c), justifier que :

$$\lambda = \frac{w}{u} j^2 (1-u)(j^2 u - 1)(1 - ju)$$

(c) Montrer finalement que $\lambda = \dfrac{w}{u} j^2 (u^3 - 1)$. On trouverait de même (et donc on l'admettra) que $\mu = \dfrac{u}{v}(v^3 - 1)$ et que $\nu = \dfrac{v}{w} j (w^3 - 1)$ si bien que :

$$E = \frac{w}{u} j^2 (u^3 - 1) a + \frac{u}{v}(v^3 - 1) b + \frac{v}{w} j (w^3 - 1) c$$

3. Caractériser géométriquement (sans démonstration) les fonctions $R_a, R_b, R_c$.

4. (a) Expliciter la fonction $R_a \circ R_b$.

(b) Montrer que $R_a \circ R_b$ a un unique point fixe $r$ (on appellera $R$ le point d'affixe $r$) et que celui-ci vérifie :

$$(1-u)a + u(1-v)b = r(1-uv)$$

(c) En soustrayant $(1-uv)a$ de chaque côté de la relation précédente, préciser l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AR})$. On prouverait de même (et donc on l'admettra) que l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BR})$ vaut $-\beta$.

(d) Justifier que $R$ est bien le point placé sur la figure ci-dessus. On définit de même $p$, $P$, $q$ et $Q$ à partir de $R_b \circ R_c(p) = p$ et $R_c \circ R_a(q) = q$, et on admet que $P$ et $Q$ sont bien les points sur la figure ci-dessus.

5. (a) On note ${R_c}^3 = R_c \circ R_c \circ R_c$. Montrer que le point d'affixe ${R_c}^3(a)$ est le symétrique de $A$ par rapport à la droite $(BC)$.

(b) Montrer que ${R_a}^3 \circ {R_b}^3 \circ {R_c}^3$ est de la forme $z \mapsto \lambda z + \mu$ avec un $\lambda$ que l'on explicitera. Montrer que $A$ est laissé fixe par cette fonction. Que peut-on en déduire ?

(c) Si $z \in \mathbb{C}$, développer ${R_a}^3 \circ {R_b}^3 \circ {R_c}^3(z)$. En déduire que

$$(1-u^3)a + u^3(1-v^3)b + u^3v^3(1-w^3)c = 0$$

(d) En se souvenant que $j = uvw$, montrer que le complexe $E$ défini à la question 2 (puisqu'on a vu à la question 4 que $p, q, r$ vérifient les relations voulues[2]) est nul.

(e) Montrer que $PQR$ est un triangle équilatéral.

Fin

2. Bon, on ne l'a montré que pour $r$, mais le raisonnement est analogue pour $p$ et $q$.