Programme de colle - Semaine n°17

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Nathan BISKUPSKI, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 17 - Dénombrement

- cf. semaine 15.

Chapitre 18 - Structures algébriques usuelles

- cf. semaines 15 et 16.
- Morphismes d'anneaux, propriétés (en particulier, le noyau n'est pas un sous-anneau de l'anneau de départ). Exemples : Id_A, injection canonique d'un sous-anneau B d'un anneau A, conjugaison sur $\mathbb{C}$, l'évaluation en a de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$, $k \mapsto \overline{k}$ de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (fait rapidement), $n \mapsto n.1_A$ de $\mathbb{Z}$ dans A (fait rapidement), isomorphisme de Frobenius dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Éléments inversibles d'un anneau : 0_A n'est pas inversible, un diviseur de zéro n'est pas inversible (réciproque fausse), inverse de $1-a$ lorsque a est un élément nilpotent (HP). Groupe des éléments inversibles d'un anneau A (notation $U(A)$ ou $A^\times$, la notation $U(A)$ est privilégiée). Exemples : $U(\mathbb{Z}), U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$. Utilisation d'une fonction auxiliaire : exemple de $\mathbb{Z}[i]$ (l'exemple de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sera traité en TD).
- Corps (note aux colleurs : en MP2I, les corps sont commutatifs). Exemples : $\mathbb{Q}$ (c'est même le plus petit corps contenant 1), $\mathbb{Q}\left[\sqrt{2}\right]$, $\mathbb{Q}[i]$ (non traité en classe). Un corps est un anneau intègre (réciproque fausse), un anneau intègre fini est un corps. Un anneau commutatif est un corps si et seulement si l'ensemble de ses éléments non nuls est un groupe muni de la multiplication. Sous-corps, caractérisation pratique. Morphisme de corps, les seuls morphismes de corps de $\mathbb{C}$ laissant $\mathbb{R}$ invariant sont l'identité et la conjugaison.
- Les éléments suivants sont HP et ont été évoqués très rapidement en classe : construction de $\mathbb{C}$, éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.

Chapitre 19 - Polynômes

Le programme se limite au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Il a été évoqué que la plupart des résultats se généralisent à un corps quelconque, et parfois même à un anneau, mais aucune difficulté ne sera soulevée sur ce point (conformément au programme).

- Définition d'une suite presque nulle (à coefficients dans $\mathbb{K}$), un polynôme est une suite presque nulle. Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients.
- Opérations algébriques sur les polynômes (somme, multiplication par un scalaire, produit, puissance, composition).
- Notations X, X^n. Écriture d'un polynôme comme une (fausse) somme infinie, comme une somme finie. On peut en fait travailler de façon très intuitive.
- Anneau $\mathbb{K}[X]$ (c'est un anneau intègre commutatif). En particulier, tout polynôme non nul est régulier.
- Degré d'un polynôme non nul, coefficient dominant d'un polynôme non nul (un coefficient dominant est non nul par définition), degré du polynôme nul (le polynôme nul n'a pas de coefficient dominant).
- Prolongement de la relation d'ordre $\leq$, de la somme à $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Degré d'un produit, d'une somme, d'une composée (lorsque les deux polynômes sont non constants). Cas d'égalité pour le degré d'une somme, d'une différence. Une somme de polynômes de degrés distincts est de degré égal au maximum des degrés.
- Notation $\mathbb{K}_n[X]$, stabilité par somme, par multiplication par un scalaire, mais pas par produit (sauf si $n=0$).
- Arithmétique élémentaire (i.e. sans division euclidienne) : diviseur, multiple, polynômes inversibles, polynômes associés, transitivité de la divisibilité etc.
- Théorème de la division euclidienne, exemple.

- PGCDs de deux polynômes. Algorithme d'Euclide. Lien entre les différents PGCD de deux polynômes, notation $A \wedge B$, polynômes premiers entre eux. Exemple : si $\lambda \neq \mu$, $(X-\lambda)^n$ et $(X-\mu)^m$ sont premiers entre eux. Algorithme d'Euclide étendu, théorème de Bézout, théorème de Gauß.
- PPCMs de deux polynômes. Lien entre les différents PPCM de deux polynômes, notation $A \vee B$.
- PGCDs de n polynômes.
- Polynômes irréductibles, décomposition en produit de facteurs irréductibles, lien avec les PGCD et les PPCM.
- Fonction polynomiale associée à un polynôme. On peut identifier (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un polynôme et sa fonction polynomiale associée.
- Racine d'un polynôme, lien entre degré et nombre de racines (cas particulier important : si un polynôme admet une infinité de racines, alors c'est le polynôme nul). Condition d'égalité de deux polynômes (cas particulier important : deux polynômes qui coïncident en une infinité de points sont égaux). Application : un polynôme périodique est constant.
- Multiplicité d'une racine. Nombre de racines comptées avec multiplicité.
- Dérivée formelle d'un polynôme, opérations sur les polynômes dérivés, formule de Leibniz, degré du polynôme dérivé (attention, il y a deux cas), $P^{(n+1)} = 0$ si et seulement si $\deg(P) \leq n$, formule de Taylor pour les polynômes, caractérisation de la multiplicité par les dérivées successives, caractérisation des racines simples et interprétation géométrique (dans le cas d'un polynôme réel).
- Polynômes scindés, caractérisation par le nombre de racines (comptées avec multiplicité), le fait qu'un polynôme soit scindé ou non dépend du corps sur lequel on se place.
- Relations coefficients racines : fonctions symétriques élémentaires, formules de Viète. Les formules donnant la somme et le produit des racines d'un polynôme scindé doivent être sues sur le bout des doigts !

Chapitres au programme

Chapitre 17 (exercices uniquement, note aux colleurs : l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme), chapitre 18 (cours et exercices), chapitre 19 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Si $n \geq 1$, $(\mathbb{U}_n, \times)$ est un groupe (démonstration).
2. Définition d'un morphisme de groupes, d'un isomorphisme de groupes.
3. Définition du noyau d'un morphisme de groupes. CNS d'injectivité (sans démonstration). Donner un exemple de morphisme injectif et un exemple de morphisme non injectif (on donnera le noyau à chaque fois).
4. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe (énoncé précis, sans démonstration).
5. Définition d'un anneau, d'un anneau intègre, avec les deux écritures avec des quantificateurs.
6. Binôme de Newton dans un anneau (sans démonstration).
7. Définition d'un élément nilpotent dans un anneau A.
8. $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$ (démonstration, avec un joli dessin de $\mathbb{Z}[i]$).
9. Définition d'un corps. Donner un anneau intègre qui n'est pas un corps.
10. Degré d'une somme, d'une différence de polynômes, et cas d'égalité (sans démonstration).
11. Théorème de division euclidienne (sans démonstration). L'examinateur demande d'effectuer une division euclidienne dans un cas explicite.
12. Définition d'un PGCD de deux polynômes non tous nuls. Lien entre les différents PGCD, notation $A \wedge B$ (sans démonstration).
13. Définition de la multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives (sans démonstration puisque ce résultat est admis provisoirement).
14. Formule de Taylor pour les polynômes (sans démonstration puisque ce résultat est admis provisoirement).
15. Valeur de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé (sans démonstration).

Groupes B - C :

1. Le centre d'un groupe est un sous-groupe (démonstration).
2. L'union de deux sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un est inclus dans l'autre (démonstration).
3. L'image directe ou réciproque d'un sous-groupe par un morphisme est un sous-groupe (énoncé précis, démonstration uniquement pour l'image directe).

4. Définition du noyau d'un morphisme de groupes. CNS d'injectivité (démonstration). Donner un exemple de morphisme injectif et un exemple de morphisme non injectif (on donnera le noyau à chaque fois).
5. Une somme de deux éléments nilpotents qui commutent est encore un élément nilpotent (démonstration).
6. Définition d'un morphisme d'anneaux.
7. Donner un anneau intègre qui n'est pas un corps. Un anneau intègre fini est un corps (démonstration).
8. Un polynôme réel périodique est constant (démonstration).

Groupe C :

1. Sous-groupes de $\mathbb{Z}$ (démonstration).
2. Théorème de division euclidienne (démonstration).
3. Fonctions symétriques élémentaires, formules de Viète (démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des polynômes.
- Fractions rationnelles.
- Début des matrices.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 29, 31, 34, 48, 49, 50, 53, 57, 62, 66, 67, 68, 70, 71, 75, 79 du chapitre 19.

Cahier de calcul

Chapitre 24.