Devoir Maison n°2

Exercice 1 - Apéritif

Étudier la fonction $x \mapsto x^{(x^3)}$ (domaine de définition, limites, éventuels points fixes, éventuels prolongements par continuité, et on étudiera la dérivabilité des fonctions ainsi prolongées). Donner l'allure du graphe : on fera apparaître les points fixes et les tangentes horizontales (on donne : $e^{-1/3} \approx 0.72$)

Exercice 2 - Entrée

On admet l'existence d'une fonction f impaire, dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f'(x) = 1/(1+x^2)$, vérifiant $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi/2$ (on étudiera cette fonction plus en détail au chapitre 5). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$\varphi_\alpha : x \mapsto \frac{x^2 - \alpha x + 1}{\sqrt{x^2+1}} \times e^{f(x)}$$

1. Justifier brièvement la dérivabilité de φ_α et la dériver.
2. Résoudre l'équation ${\varphi_\alpha}'(x) = 0$. On pensera à distinguer plusieurs cas.
3. Donner les limites de φ_α en $\pm\infty$, ainsi que $\varphi_\alpha(0)$.
4. Donner le tableau de variations de φ_α dans les cas suivants (il n'est pas demandé d'expliciter les valeurs numériques) :
   - $\alpha = 1$
   - $\alpha < 1$
   - $1 < \alpha < 2$
   - $\alpha = 2$
   - $\alpha > 2$
5. Soit $\beta > \alpha$. Donner les positions relatives des graphes de φ_α et φ_β.

Exercice 3 - Plat de résistance

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit la fonction f définie (quand c'est possible) par $f(x) = (x-a)^{ax}$.

1. Donner le domaine de définition de f. On le note D_f dans la suite.
2. Justifier rapidement que f est dérivable sur D_f, et dériver effectivement f.
3. On définit sur D_f la fonction u par

$$u(x) = a\left(\frac{(x-a)\ln(x-a) + x}{(x-a)}\right) = a\left(\ln(x-a) + \frac{x}{x-a}\right)$$

   Donner le tableau de variations de u (on séparera les cas $a > 0$ et $a < 0$). On justifiera soigneusement le calcul des limites.
4. On suppose dans cette question que a est strictement positif.
   (a) Montrer que u est positive sur D_f si et seulement si $a \geq \alpha$, où α est un réel que l'on explicitera.
   (b) Donner le tableau de variations de f quand $a \geq \alpha$.
   (c) On suppose à présent $a < \alpha$. Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet deux uniques solutions qu'on notera $\beta < \gamma$ (et qu'on ne cherchera pas à calculer). En déduire le tableau de variations de f. On exprimera ce tableau en fonction de β et γ, c'est-à-dire qu'on écrira $f(\beta)$ sans chercher à l'exprimer de façon plus précise.
5. On suppose à présent que a est strictement négatif.
   (a) Montrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution, sur D_f, solution qu'on notera δ mais qu'on ne cherchera pas à calculer.
   (b) Donner le tableau de variations de f (on fera intervenir δ).
6. f est-elle prolongeable par continuité ? Si oui, étudier (selon la valeur de a) la dérivabilité de f ainsi prolongée.

Exercice 4 - Dessert (facultatif)

Exercice au choix dans le poly.

Voici des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir. La liste n'est pas exhaustive, mais regroupe une bonne part des dangers de ce devoir, niveau rédaction et présentation. Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Souligner/encadrer les résultats.

   O - N - B.

2. Justifier correctement le domaine de définition des fonctions.

   O - N - B.

3. Tant qu'on en parle... Quand on cherche le domaine de définition de f, ne pas juste écrire « f est définie » mais « f est définie en x ».

   O - N - B.

4. Écrire « Soit $x \in \dots$ » avant de manipuler un réel x.

   O - N - B.

5. Ne pas écrire « la fonction $f(x)$ ».

   O - N - B.

6. Justifier (rapidement) la dérivabilité d'une fonction avant de la dériver.

   O - N - B.

7. Ne pas mettre d'implication à la place de « donc ». À la réflexion, ne pas mettre d'implication du tout.

   O - N - B.

8. Ne pas écrire d'équivalence quand on déroule les calculs, les garder pour une résolution d'(in)équations.

   O - N - B.

9. Citer les hypothèses avant d'appliquer le TVI ou son corollaire.

   O - N - B.

10. Ne pas citer le TVI pour affirmer la non-existence d'un réel (cf. cours : le TVI ne prouve que ce qu'il prouve !).

    O - N - B.

11. Tracer l'allure d'un graphe avec les limites, la monotonie et les points fixes qui apparaissent clairement, et pas un graphe au rasoir avec des valeurs trouvées à la calculatrice sur du papier millimétré.

    O - N - B.

12. Ne pas écrire : « le signe de la dérivée dépend de ».

    O - N - B.

13. Ne pas chercher uniquement où f' s'annule lorsqu'on cherche son signe.

    O - N - B.