Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 23

Exercice 1 :

1. (a) Soit $E=\mathbb{R}^4$. On définit $f_1=(1,2,3,4), f_2=(0,-3000,1967,800), f_3=(0,0,1789,1914)$ et $f_4=(0,0,0,1987^{2013})$. Montrer que la famille (f_1,f_2,f_3,f_4) est une base de E.
   (b) Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $g_1=(1,-2,3), g_2=(-1,1,2), g_3=(3,-2,1)$. Montrer que la famille (g_1,g_2,g_3,g_4) est une base de E. Décomposer explicitement le vecteur $(1,1,1)$ dans cette base.
   (c) On se place à nouveau dans $E=\mathbb{R}^4$ et on considère les quatre vecteurs : $h_1=(1,2,-1,-2), h_2=(-2,-1,2,-3), h_3=(-1,4,1,0)$ et $h_4=(2,7,-2,5)$. Les h_i forment-ils une famille libre ? génératrice ?
2. Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère les cinq vecteurs $e_1=(1,-3,2,4), e_2=(2,1,3,1), e_3=(-3,2,1,1), e_4=(-16,-1,-1,9), e_5=(9,-6,3,3)$.
   (a) Ces vecteurs forment-ils une famille libre ? génératrice ?
   (b) Donner une base de $\mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)$.

Exercice 2 :

Soit E un espace vectoriel de dimension n et soient $F_1,\dots,F_k$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que

$$\sum_{i=1}^{k}\dim(F_i)>n(k-1)$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}F_i\neq\{0\}$.

1. Faire un dessin pour s'en convaincre dans le cas où $n=3, k=2$ et où F_1 et F_2 sont deux plans, puis dans le cas où $k=3$ et où F_1,F_2 et F_3 sont trois plans. On commentera selon le fait qu'on est dans les conditions de l'exercice ou non. Constater que les maths sont bien faites.
2. Retour au cas général. Soit φ l'application suivante

$$\varphi:\begin{cases}F_1\times\cdots\times F_k\to E^{k-1}\\ (x_1,\dots,x_k)\mapsto(x_2-x_1,x_3-x_1\dots,x_k-x_1)\end{cases}$$

   Montrer que φ est linéaire.
3. Montrer que $\ker\varphi=\left\{(x_1,x_1,\dots,x_1)\;\middle|\;x_1\in\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}F_i\right\}$.
4. Montrer que $\ker\varphi$ et $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}F_i$ sont isomorphes. Conclure.