Corrigé du DM n°19

Problème - Le côté obscur des séries de Fourier (snif)

Partie I. Les questions fantômes

1 Les coefficients de Fourier de f sont des intégrales de fonctions continues sur des segments.

$$\boxed{\text{Les coefficients de Fourier de } f \text{ sont bien définis.}}$$

> Les coefficients a_n et b_n ne sortent pas de nulle part : si
>
> $$\mathrm{P} : x \mapsto \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} c_n \cos(nx) + d_n \sin(nx)$$
>
> est ce qu'on appelle un polynôme trigonométrique (cf. par exemple DS n° 4 B de l'an dernier), alors les coefficients de Fourier de P sont les c_n et les d_n. Pour un polynôme trigonométrique, les coefficients de Fourier... sont les coefficients du « polynôme ». Fourier a donc généralisé sans état d'âme : pour une fonction f 2π-périodique, on définit les coefficients de Fourier de la même façon et il pensait qu'on avait alors automatiquement f égale à sa série de Fourier : comme on le verra, ce ne sera pas toujours le cas, il faut des hypothèses supplémentaires sur f.

2 b_0 serait l'intégrale de la fonction nulle (car $\sin(0) = 0$) donc serait égal à 0.

$$\boxed{\text{Il est inutile de définir } b_0.}$$

3 Supposons f paire (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $n \geqslant 1$. f étant paire et le sinus impair, la fonction $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire. Or, l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0 est nulle.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est paire (respectivement impaire), les coefficients } b_n \text{ (respectivement } a_n\text{) de } f \text{ sont nuls.}}$$

> La réciproque est vraie, mais c'est plus difficile à prouver, il faut utiliser un théorème difficile appelé théorème de Parseval (cf. Will Hunting par exemple...).

4 Notons

$$g : x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

La fonction intégrée étant continue, g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (dérivée d'une intégrale aux bornes variables, cf. chapitre 10),

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\pi}(1 \times f(x+2\pi)\cos(n(x+2\pi)) - 1 \times f(x)\cos(nx)) \\ &= 0 \qquad\qquad (f \text{ et } \cos \text{ sont } 2\pi\text{-périodiques}) \end{aligned}$$

En d'autres termes, g est constante donc, pour tout x, $g(x) = g(-\pi) = a_n$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, a_n = \frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t}$$

Partie II. L'attaque des coefficients clonés

1 Cette fonction est continue car composée de fonctions continues. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \left|\sin\left(\frac{x+2\pi}{2}\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(\frac{x}{2}+\pi\right)\right| \\ &= \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{f \text{ est continue et } 2\pi\text{-périodique.}}$

2 La restriction de f à $[0\,;2\pi]$ est la fonction $x \mapsto \sin(x/2)$ (car le sinus est positif sur $[0\,;\pi]$) qui est dérivable donc f est dérivable à droite et $f_d'(0) = 1/2$. De même, la restriction de f à $[-2\pi\,;0]$ est la fonction $x \mapsto -\sin(x/2)$ donc f est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0) = -1/2 \neq f_d'(0)$:

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche et à droite mais n'est pas dérivable en } 0.}$$

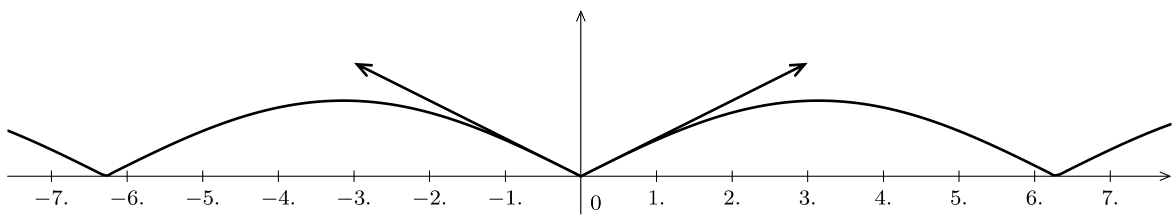
3 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left|\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right| \\ &= \left|-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &= \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Ainsi, f est paire mais n'est pas impaire car $f(\pi) = 1 \neq -f(-\pi) = 1$ (ou alors on dit que la seule fonction paire et impaire est la fonction nulle, différente de f). En conclusion

$$\boxed{f \text{ est paire et n'est pas impaire.}}$$

4 Ci-dessous le graphe de f, avec les deux demi-tangentes en 0 :



5 f étant paire, les b_n sont nuls d'après la partie I. Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction intégrée dans l'expression de a_n est paire, et on intègre sur un intervalle symétrique par rapport à 0 donc :

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in [0\,;\pi]$, $f(t) = \sin(t/2)$ et d'après les formules de trigo

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)t\right)}{n-\frac{1}{2}}\right]_0^\pi \end{aligned}$$

Or $$\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = \cos\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

De même $$\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 0$$

D'où $$\boxed{a_n(f) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{-4}{\pi\left(4n^2-1\right)} \text{ et } b_n(f) = 0}$$

6 Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, et puisqu'un cosinus est majoré par 1 en valeur absolue :

$$|a_n(f)\cos(nx)| \leqslant \frac{4}{\pi(4n^2-1)} \sim \frac{1}{\pi n^2}$$

Or, la série de terme général $1/n^2$ converge (c'est une série de Riemann). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature, donc la série de terme général $\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$ converge. Ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum|a_n(f)\cos(nx)|$ converge. Par conséquent, la série en question converge absolument, et donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } x\text{, la série } \sum a_n(f)\cos(nx) \text{ converge.}}$$

7 Comme d'habitude, revenons à la définition et calculons la limite des sommes partielles (les cos valent 1 puisqu'on évalue en 1). Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$. Une rapide décomposition en éléments simples donne :

$$\forall n \geqslant 1, \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

Dès lors (en utilisant le fait que $a_0 = 4/\pi$) :

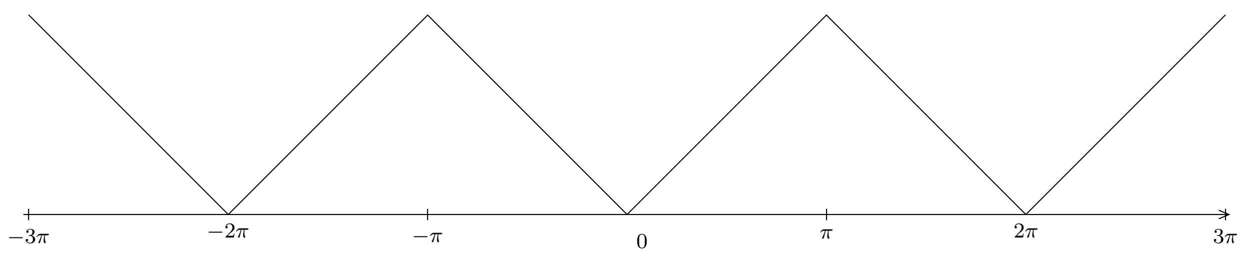
$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{-4}{\pi(4n^2-1)} \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{-2}{\pi}\left(1 - \frac{1}{2\mathrm{N}+1}\right) && \text{(somme télescopique)} \end{aligned}$$

Dès lors $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} a_n \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} = 0$$

En d'autres termes $$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(n\times 0) = 0 = |\sin(0)/2| = f(0)}$$

Partie III. La revanche de $\zeta(2)$

1 Ci-dessous le graphe de f :



2 f est continue sur $]\,0\,;\pi\,[$ (attention, on exclut 0 et π car ce sont des points de recollement) donc, par parité, l'est aussi sur $]-\pi\,;0\,[$. Par 2π-périodicité, elle l'est sur $\mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$: il suffit donc de prouver que f est continue en 0 et en π, la périodicité de f permettra de conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Tout d'abord, f étant paire, $f(x) = -x$ sur $[-\pi\,;0\,]$ donc $f(x) = |x|$ sur $[-\pi\,;\pi\,]$ donc est continue en 0. Pour la continuité en π, il faut vérifier que la limite à gauche et la limite à droite sont égales (à $f(\pi) = \pi$). Si $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $f(x) = x \xrightarrow[x\to\pi^-]{} \pi = f(\pi)$ donc f est continue à gauche en π. Si $x \in]\,\pi\,;2\pi\,]$ alors, par 2π-périodicité, $f(x) = f(x-2\pi)$. Or, $x - 2\pi \in]-\pi\,;0\,]$ si bien que

$$f(x) = |x-2\pi| = 2\pi - x \xrightarrow[x\to\pi^+]{} \pi = f(\pi)$$

On en déduit que f est continue à droite donc continue en π, ce qui permet de conclure comme dit plus haut.

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

3 f étant paire, d'après la partie I, tous les b_n sont nuls. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par parité de la fonction intégrée sur un intervalle symétrique par rapport à 0,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Or, sur cet intervalle, $f(t) = t$ si bien que

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

On veut faire une IPP et dériver t et intégrer $\cos(nt)$ et pour cela on veut diviser par n : il est donc nécessaire de séparer les cas selon que n est nul ou non. Si $n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,\mathrm{d}t$$

et donc on trouve $a_0 = \pi$. Supposons à présent que $n \geqslant 1$ et faisons une IPP : $u(t) = t, u'(t) = 1, v(t) = \sin(nt)/n, v'(t) = \cos(nt)$. Les fonctions u et v étant $\mathscr{C}1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{t\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{2}{n\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{a_0 = \pi \text{ et, si } n \geqslant 1,\ a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) \text{ et } b_n = 0}$$

4 D'après la question précédente et le théorème de Dirichlet pour $x = 0$:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}$$

En particulier, les seuls termes non nuls de la somme sont les termes impairs :

$$f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{((-1)^n - 1)}{n^2}$$

À l'aide du changement d'indice $n = 2k+1$, et en utilisant le fait que $f(0) = 0$:

$$0 = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-2}{(2k+1)^2}$$

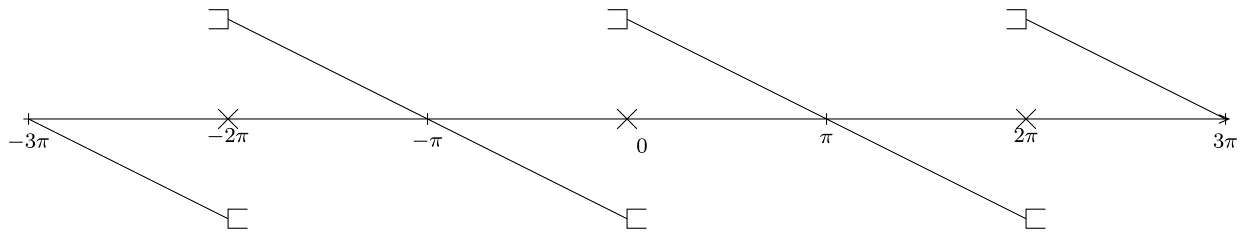
ce qui permet de conclure $$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

5 En faisant comme dans l'exercice 19 du chapitre 25 (mais à l'envers), en séparant termes pairs/impairs :

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}}$$

Partie IV. Un nouveau phénomène : le phénomène de Gibbs

1 f est impaire donc $f(0) = 0$. La limite à droite en 0 vaut $\pi/2$ et, par imparité, la limite à gauche vaut $-\pi/2$. Ci-dessous l'allure du graphe de f. L'imparité est indispensable, sinon on ne connaît pas la valeur en 0 ni celle en tous les $2k\pi$.



2 Rappelons que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

La fonction intégrée étant paire (car f est impaire), on a :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Or, on sait que la valeur d'une intégrale ne change pas si on change la fonction en un nombre fini de points. Dès lors, la valeur en 0 n'a aucune importance, si bien que

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(\frac{\pi - t}{2}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Par définition d'une telle intégrale, et par linéarité,

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \times \left[\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right]$$

La première intégrale est nulle par un calcul direct. Pour la deuxième, on pense à faire une intégration par parties. Je ne la rédige pas, il suffit de dériver le t et d'intégrer le sinus (on peut le faire car $n \geqslant 1$, on n'oublie pas le $-$ devant le cosinus et on n'oublie pas le $-1/2$ devant l'intégrale) ce qui donne :

$$b_n(f) = \frac{-1}{2\pi} \times \left(\left[-t \times \frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Par conséquent

$$\boxed{b_n(f) = \frac{1}{n}}$$

3 f étant impaire, d'après la partie I, tous les a_n sont nuls. Dès lors, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{N} \geqslant 1$:

$$\mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} b_n \sin(nx)$$

D'après la question précédente,

$$\mathrm{S_N}\left(\frac{\pi}{\mathrm{N}}\right) = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\mathrm{N}}\right)}{k}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{\mathrm{N}}\right)}{\frac{k}{\mathrm{N}}}$$

On a envie de dire qu'on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)/x$, mais le problème est qu'elle n'est a priori pas continue en 0. Cependant, on sait que

$$\frac{\sin(\pi x)}{x} = \pi \times \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \xrightarrow[x \to 0]{} \pi \times 1 = \pi$$

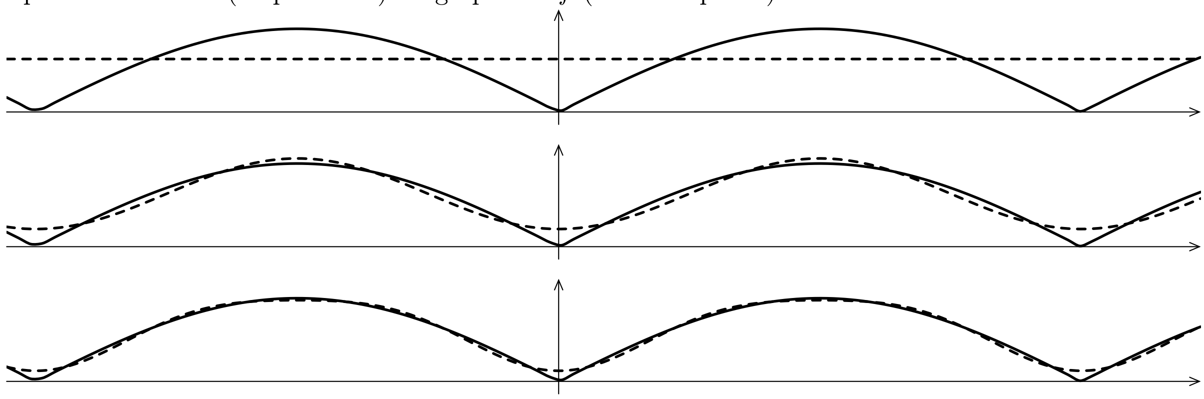
Par conséquent, la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(\pi x)/x$ (qui est évidemment continue sur $]\,0\,;1\,]$ car quotient de fonctions continues) est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \pi$. φ ainsi prolongée est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et on peut sortir la phrase rituelle : on reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction φ définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\varphi(0) = \pi \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x} \qquad \forall x \in \,]\,0\,;1\,]$$

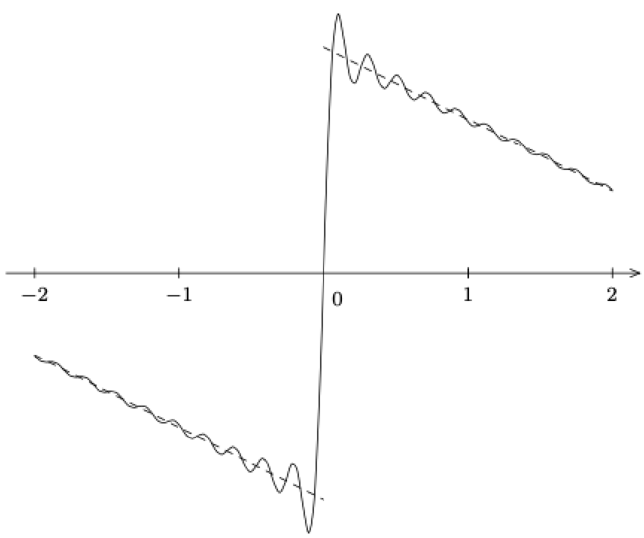
Finalement, φ étant continue donc continue par morceaux :

$$\boxed{\mathrm{S_N}\left(\frac{\pi}{\mathrm{N}}\right) \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t}$$

Un mot sur le phénomène de Gibbs. Avec le théorème de Dirichlet (cf. partie VIII), on peut montrer que pour tout réel $x, \mathrm{S_N}(x) \xrightarrow[\mathrm{N} \to +\infty]{} f(x)$. On s'attend donc à ce que, pour N « grand », le graphe de $\mathrm{S_N}$ soit « proche » de celui de f, et si f est continue (et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, cf. partie V), c'est le cas (c'est un théorème appelé le théorème de convergence normale). Par exemple, si on trace les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction de la partie II pour $\mathrm{N} = 0, \mathrm{N} = 1, \mathrm{N} = 2$, on voit que rien que pour $\mathrm{N} = 2$ (seulement !), on a déjà du mal à discerner le graphe de la somme (en pointillés) du graphe de f (en traits pleins) :

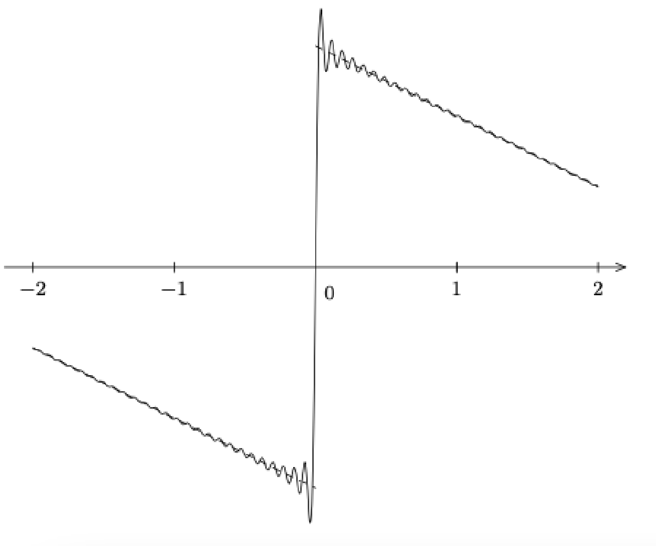


Le problème est que dans notre exemple, f n'est pas continue, donc on ne peut pas appliquer ce théorème. Regardons ce qui se passe pour un indice relativement élevé ($\mathrm{N} = 30$, il faut prendre N plus grand que précédemment car $b_n = 1/n$ et la convergence est assez lente) sur l'intervalle $[\,-2\,;2\,]$. $\mathrm{S_N}$ est représentée en traits pleins et f en pointillés.



On voit que le graphe de $\mathrm{S_N}$ est « proche » de celui de f là où f est continue, mais que cela se gâte au voisinage de 0, c'est-à-dire au voisinage des points de discontinuité. Peut-être que N est trop petit, que la convergence est lente.

Qu'à cela ne tienne, essayons avec $\mathrm{N} = 80$:



C'est beaucoup mieux là où f est continue, on a même du mal à différencier les deux graphes. Par contre, au voisinage de 0, c'est pire qu'avant ! Le problème n'est pas le trait quasiment vertical, il est inévitable puisque la fonction $\mathrm{S_N}$ est continue. Le problème est que les discontinuités sont amplifiées ! Même avec N très grand, le graphe de $\mathrm{S_N}$ est foncièrement différent de celui de f, on dirait qu'il s'en éloigne de plus en plus. Michelson avait le premier observé ce phénomène en l'année 1848 (il avait inventé un appareil qui prenait en entrée un signal, la fonction f, et renvoyait les sommes partielles de sa série de Fourier, c'est-à-dire la fonction $\mathrm{S_N}$), et pensait que cela venait de l'imprécision de l'instrument de mesure, mais Gibbs a justement montré comme nous venons de le faire que le problème est d'origine mathématique (il y a des « effets de bords » » lorsqu'on calcule la transformée de Fourier d'un signal discontinu) : pour info, l'intégrale calculée vaut en effet environ $1,85$, tandis que pour tout $x, |f(x)| \leqslant \pi/2 \approx 1,57$, ce qui signifie en clair que l'écart entre $\mathrm{S_N}$ et f tend vers $0,3$ alors que la fonction $\mathrm{S_N}$ « converge » vers la fonction f. Cet apparent paradoxe peut être grossièrement résumé ainsi : la fonction f n'étant pas continue, il y a (certes) convergence point par point, mais pas partout de la même manière et de la même vitesse.

Partie V. Dirichlet contre-attaque

1.(a) Soit $u \in \mathbb{R}$. Alors : φ_n est définie en $u \iff \sin(u/2) \neq 0 \iff u/2 \not\equiv 0[\pi] \iff u \not\equiv 0[2\pi] \iff u \in \mathscr{D}$:

$$\boxed{\varphi_n \text{ est bien définie sur } \mathscr{D}.}$$

et $\boxed{\varphi_n \text{ est continue sur } \mathscr{D} \text{ car quotient de fonctions continues, celle au dénominateur ne s'annulant pas.}}$

Les quantités dans les sinus tendant vers 0 quand $u \to 0$, il vient, au voisinage de 0 :

$$\varphi_n(u) \sim \frac{\left(n + \dfrac{1}{2}\right) u}{2 \times \dfrac{u}{2}} = n + \frac{1}{2}$$

En particulier, $\varphi_n(u) \xrightarrow[u \to 0]{} n + \dfrac{1}{2}$ donc

$$\boxed{\varphi_n \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi_n(0) = n + \frac{1}{2}.}$$

1.(b) Attention, dire que φ_n est 2π-périodique car le sinus l'est ou car c'est un quotient de deux fonctions 2π-périodique est faux ! En effet, on divise u par 2 au dénominateur, ce qui fait que la fonction au dénominateur est 4π-périodique ! Soit $u \in \mathscr{D}$, alors $u + 2\pi \in \mathscr{D}$ et

$$\begin{aligned}
\varphi_n(u+2\pi) &= \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u+2n\pi+\pi\right)}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}+\pi\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u+\pi\right)}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}+\pi\right)} && (\sin\ 2\pi\text{-périodique}) \\
&= \frac{-\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u\right)}{-2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} && (\sin(x+\pi)=\sin(x))
\end{aligned}$$

et donc $\varphi_n(u+2\pi)=\varphi_n(u)$: $\boxed{\varphi_n \text{ est } 2\pi\text{-périodique.}}$

Par conséquent, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\varphi_n(u)=\varphi_n(u-2k\pi) \xrightarrow[u\to 2k\pi]{} \varphi_n(0)=n+\dfrac{1}{2}$

et là encore on peut prolonger φ_n par continuité en $2k\pi$ en posant $\varphi_n(2k\pi)=n+\dfrac{1}{2}$.

$$\boxed{\varphi_n \text{ est prolongeable en une fonction continue en tous les } 2k\pi \text{ donc sur } \mathbb{R}.}$$

2.(a) Soit $u\in\mathbb{R}$. Notons $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(e^{iu}\right)^k$.

- Premier cas : $u\equiv 0[2\pi]$. Alors $e^{iu}=1$ donc $\mathrm{S}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$.

$$\boxed{\text{Si } u\equiv 0[2\pi], \qquad \mathrm{S}_n=n}$$

- Deuxième cas : $u\not\equiv 0[2\pi]$. Alors $e^{iu}\neq 1$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= e^{iu}\times\frac{1-e^{inu}}{1-e^{iu}} && \text{(attention, la somme commence en 1)} \\
&= e^{iu}\times\frac{e^{inu/2}\times\left(e^{-inu/2}-e^{inu/2}\right)}{e^{iu/2}\times\left(e^{-iu/2}-e^{iu/2}\right)} && \text{(arc-moitié)} \\
\mathrm{S}_n &= e^{i(n+1)u/2}\times\frac{-2\sin\left(\dfrac{nu}{2}\right)}{-2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\text{Si } u\not\equiv 0[2\pi], \qquad \mathrm{S}_n=e^{i(n+1)u/2}\times\frac{\sin\left(\dfrac{nu}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}}$$

2.(b) Soit $u\in\mathbb{R}$. Notons $\mathrm{T}_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)$. Alors $\mathrm{T}_n=\mathrm{Re}(\mathrm{S}_n)$ où S_n a été définie à la question précédente. D'après la question précédente, si $u\equiv 0[2\pi]$ alors $\mathrm{S}_n=n$ donc $\mathrm{T}_n=n$. Or, d'après la question 1.(b), $\varphi_n(u)=n+\dfrac{1}{2}$ donc $\mathrm{T}_n=\varphi_n(u)-\dfrac{1}{2}$. Supposons à présent $u\not\equiv 0[2\pi]$. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_n &= \frac{\sin\left(\dfrac{nu}{2}\right)\cos\left(\dfrac{(n+1)u}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\times\left[\sin\left(\dfrac{(2n+1)u}{2}\right)+\sin\left(-\dfrac{u}{2}\right)\right]}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} && (\sin(a)\cos(b)=\cdots) \\
&= \frac{\dfrac{1}{2}\times\left[\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u\right)-\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)\right]}{\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}-\frac{1}{2} \\
\mathrm{T}_n &= \varphi_n(u)-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dans tous les cas $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\cos(ku)=\varphi_n(u)-\frac{1}{2}}$

2.(c) D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^\pi \cos(ku)\,\mathrm{d}u+\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}u}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\sin(ku)}{k}\right]_0^\pi+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

et tous les crochets étant nuls, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\int_0^\pi \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}}$$

Partie VI. Le retour du lemme de Riemann Lebesgue

cf. cours.

VII. Le réveil des fonctions $\mathscr{C}^1$ (par morceaux)

1 Prenons une subdivision adaptée à f comme dans la définition. S'il existe un i tel que $x\in\,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ alors f est $\mathscr{C}^1$ sur cet intervalle, donc en particulier f est continue en x donc continue à gauche donc admet une limite à gauche finie en x. Sinon, x est l'un des a_i et donc, par définition d'une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux, f admet une limite à gauche finie en x.

$$\boxed{f \text{ admet une limite à gauche finie en } x.}$$

2 Notons g la fonction de l'énoncé. De même qu'à la question précédente, si x n'est pas un des a_i, f est dérivable en x donc dérivable à gauche en x, et $f_g(x)=f(x)$ donc

$$g(u)=-\frac{f(x-u)-f(x)}{-u}\xrightarrow[u\to 0^+]{}-f'(x)$$

Supposons à présent que x soit un des a_i, plus précisément a_{i+1}. La fonction g est à présent égale à l'opposé du taux d'accroissement, non pas de f, mais de la restriction de f à $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ prolongée en $x=a_{i+1}$, prolongée en x avec la valeur

$f_g(x)$, et par définition d'une fonction $\mathscr{C}^1$ par morceaux, cette restriction ainsi prolongée est $\mathscr{C}^1$ donc dérivable à gauche en $x = a_{i+1}$, d'où l'existence de la limite (égale à l'opposé de la dérivée à gauche de cette restriction). D'où le résultat dans tous les cas.

$$\boxed{\text{Dans tous les cas, cette fonction admet une limite finie en } 0^+.}$$

Partie VIII. Les derniers arguments

1 On a :

$$\boxed{\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b)) \qquad \text{et} \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))}$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}(x) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(0\times t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\cos(nx) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\sin(nx)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\times\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\cos(nt)\cos(nx)+\sin(nt)\sin(nx)\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En utilisant les formules de trigo précédentes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\times\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\frac{1}{2}(\cos(n(x+t))+\cos(n(x-t)))+\frac{1}{2}(\cos(n(x-t))-\cos(n(x-t)))\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\times\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\mathrm{N}}\cos(n(x-t))\right)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi_{\mathrm{N}}(x-t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = x - t, t = x - u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)(-\,\mathrm{d}u)\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

En se souvenant (cf. partie I) que l'intégrale d'une fonction 2π-périodique est la même sur tout intervalle de longueur 2π (même si elle n'est que continue par morceaux), on obtient le résultat voulu :

$$\boxed{\mathrm{S_N}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u}$$

> On dit que $\mathrm{S_N}$ est le produit de convolution de f et de φ_{N}.

2 Coupons l'intégrale en 0 à l'aide de la relation de Chasles et effectuons le changement de variable $v = -u$, $u = -v$ et $\mathrm{d}u = -\,\mathrm{d}v$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N}(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(x+v)\varphi_{\mathrm{N}}(-v)(-\,\mathrm{d}v) + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+v)\varphi_{\mathrm{N}}(-v)\,\mathrm{d}v + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\varphi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Il suffit d'utiliser le fait que φ_{N} est paire et que la variable d'intégration est muette pour conclure.

$$\boxed{\mathrm{S_N}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+v) + f(x-v)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v}$$

3 D'après la dernière question de la partie V :

$$\begin{aligned}\mathrm{S_N}(x) - \frac{f_g(x)+f_d(x)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+v)+f(x-v)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v - \frac{1}{\pi}\times(f_g(x)+f_d(x))\times\frac{\pi}{2}\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+v)+f(x-v)\varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v - \frac{1}{\pi}\times(f_g(x)+f_d(x))\times\int_0^\pi \varphi_{\mathrm{N}}(v)\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a le résultat voulu :

$$\boxed{\mathrm{S_N}(x) - \frac{f_g(x)+f_d(x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+v) - f_d(x) + f(x-v) - f_g(x))\varphi_{\mathrm{N}}(x)\,\mathrm{d}v}$$

4 Au voisinage de 0^+, $\sin(v/2)\sim v/2$ si bien que

$$\frac{f(x+v)-f_d(x)}{2\sin(v/2)} \sim \frac{f(x+v)-f_d(x)}{u}$$

et cette quantité admet une limite finie en 0^+ d'après la partie VII. De même pour le reste, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0^+.}$$

5 Par définition de φ_{N} et d'après la question 3 :

$$\begin{aligned}\mathrm{S_N}(x) - \frac{f_g(x)+f_d(x)}{2} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(x+v)-f_d(x)+f(x-v)-f_g(x)}{2\sin(x/2)}\times\sin\left(\left(\mathrm{N}+\frac{1}{2}\right)v\right)\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(v)\times\sin\left(\left(\mathrm{N}+\frac{1}{2}\right)v\right)\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

avec g la fonction de la question précédente, qui est bien continue par morceaux. Puisque $\lambda = \mathrm{N}+1/2 \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ et puisque g est continue par morceaux, le lemme de Riemann-Lebesgue assure que :

$$\mathrm{S_N}(x) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \frac{f_g(x)+f_d(x)}{2}$$

Par définition de la convergence d'une série et de sa somme (la série converge lorsque la suite de ses sommes partielles converge, et sa somme est alors la limite), la série de Fourier de f converge vers $(f_g(x)+f_d(x))/2$:

$$\boxed{\text{Le théorème de Dirichlet est démontré.}}$$

Calculer une série de Fourier d'une fonction 2π-périodique consiste à sommer des sinus et des cosinus avec les bons coefficients : voir les trois premières sommes partielles dans la remarque à la fin de la partie IV. La question qu'il est naturel de se poser (et à laquelle Fourier répondait par l'affirmative sans se poser de question) est de se demander si on converge et, si c'est le cas, vers f.

On vient de montrer qu'il n'y a pas forcément convergence vers $f(x)$: c'était le cas dans les parties II et III puisque la fonction f était continue, et aussi dans la partie IV (même si on ne s'en est pas servi) puisque, pour tout x, $f(x) = \dfrac{f_g(x)+f_d(x)}{2}$ (les seuls points de discontinuité sont les multiples de π, et en ces points, f est nulle, la limite à gauche vaut $-\pi/2$ et la limite à droite $\pi/2$).

On voit par ailleurs que les valeurs ponctuelles n'ont aucune importance : seules comptent les limites à droite et à gauche. En particulier, on peut les changer sans changer la série de Fourier (ce qui est évident puisqu'en changeant des valeurs ponctuelles, on ne change pas la valeur des intégrales).

Par conséquent, si f et g ont les mêmes coefficients de Fourier, elles ne sont pas forcément égales, mais c'est le cas si elles sont continues et $\mathscr{C}^1$ par morceaux, car alors elles ont même développement en série de Fourier, donc sont égales.

L'hypothèse $\mathscr{C}^1$ par morceaux est indispensable : si f n'est que continue par morceaux ou que continue, la série de Fourier de f peut diverger.

Enfin, on peut montrer (cela découle d'un théorème appelé théorème de Féjer) que, si f est continue (pas continue par morceaux) et si la série de Fourier de f converge, alors elle converge forcément vers $f(x)$. En particulier, si deux fonctions continues ont les mêmes coefficients de Fourier, alors elles sont égales.

Enfin, si on a une fonction f périodique de période $\mathrm{T} \neq 0$, la fonction $x \mapsto f(2\pi x/\mathrm{T})$ est alors 2π-périodique et on peut appliquer tout ce qui précède : en particulier, si f est continue et $\mathscr{C}^1$ par morceaux (sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$, alors pour tout x :

$$\frac{f_g(x)+f_d(x)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{\mathrm{T}}\right)$$

où $$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\cos\left(\frac{2\pi n t}{\mathrm{T}}\right)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\sin\left(\frac{2\pi n t}{\mathrm{T}}\right)\,\mathrm{d}t$$

Partie IX. L'ascension du théorème de Fejér

1 f étant continue sur le segment $[\,-\pi\,;3\pi\,]$, d'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue.

$\boxed{\text{L'existence de } \alpha \text{ est prouvée.}}$

2 Par définition (cf. partie V), pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_k(x) = \frac{\sin\left(\left(k+\dfrac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}$$

si bien que $$\psi_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{2(\mathrm{N}+1)\sin(x/2)}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right)$$

Comme d'habitude, en prenant la partie imaginaire d'une suite géométrique (sans oublier de préciser que $e^{ix} \neq 1$ puisque $x \not\equiv 0[2\pi]$), puis la technique de l'angle moitié, on trouve que :

$$\psi_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{2(\mathrm{N}+1)\sin(x/2)} \times \frac{\sin\left(\left(\dfrac{\mathrm{N}+1}{2}\right)x\right)^2}{\sin(x/2)}$$

Le résultat en découle en prenant la valeur absolue, en majorant le numérateur par 1, et en disant que $\sin^2(x/2) \geqslant \sin^2(\alpha/2)$ par choix de x (le sinus est croissant sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc cette égalité est vraie si $x \geqslant 0$, et elle est aussi vraie si $x \leqslant 0$ par imparité du sinus).

$$\boxed{|\psi_{\mathrm{N}}(x)| \leqslant \frac{1}{2(\mathrm{N}+1)\sin^2(\alpha/2)}}$$

3 Découle de la question 1 de la partie précédente et de la linéarité de l'intégrale. En effet, si $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_{\mathrm{N}}(x) &= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{S}_k(x) \\
&= \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_k(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u) \times \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \varphi_k(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{Linéarité de l'intégrale}
\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\forall x \in \mathbb{N}, \mathrm{C}_{\mathrm{N}}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\psi_{\mathrm{N}}(u)\,\mathrm{d}u}$$

De plus, par linéarité de l'intégrale, et d'après la dernière question de la partie V, on trouve que

$$\int_0^\pi \psi_N(u)\,\mathrm{d}u = \frac{(N+1)\pi}{(N+1)2} = \frac{\pi}{2}$$

Par parité (les φ_k sont paires donc ψ_N l'est également) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_N(u)\,\mathrm{d}u = \pi$$

On en déduit finalement que : $$\boxed{f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\psi_N(u)\,\mathrm{d}u}$$

$\boxed{4}$ f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes.

$$\boxed{\text{M existe.}}$$

$\boxed{5}$ D'après la question 3 :

$$\begin{aligned}
|f(x) - C_N(x)| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\psi_N(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\psi_N(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{-\alpha} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u\right. \\
&\qquad \left. + \int_{\alpha}^{\pi} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u\right| \quad \text{(Relation de Chasles)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left|\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant\pi} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\alpha}^{\alpha} (f(x)-f(x-u))\psi_N(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant\pi} |f(x)-f(x-u)|\psi_N(u)\,\mathrm{d}u + \int_{-\alpha}^{\alpha} |f(x)-f(x-u)|\psi_N(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{I.T.}
\end{aligned}$$

On peut sortir ψ_N de la valeur absolue puisqu'elle est positive (voir ci-dessus). Il suffit de voir que, par inégalité triangulaire, $|f(x) - f(x-u)| \leqslant |f(x)| + |f(x-u)| \leqslant 2M$ pour la première intégrale, et $|u| \leqslant \alpha$ dans la seconde intégrale donc, d'après la question 1, $|f(x) - f(x-u)| \leqslant \varepsilon$ pour conclure (puisque $x \in [\,0\,;2\pi\,]$ et $|u| \leqslant \pi$, alors $x - u \in [\,-\pi\,;3\pi\,]$ donc on peut bien utiliser les questions 1 et 4).

$$\boxed{\text{On a la majoration voulue.}}$$

$\boxed{6}$ On a déjà vu que l'intégrale de ψ_N de $-\pi$ à π vaut π et ψ_N est positive donc

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \psi_N(u)\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \psi_N(u)\,\mathrm{d}u$$

De plus, d'après la question 2, on a aussi la majoration suivante :

$$|f(x) - C_N(x)| \leqslant \frac{2M}{\pi} \times \frac{1}{\pi}\int_{\alpha\leqslant|t|\leqslant\pi} \frac{1}{2(N+1)\sin^2(\alpha/2)}\,\mathrm{d}u + \varepsilon$$

c'est-à-dire $$|f(x) - C_N(x)| \leqslant \frac{2M}{2(N+1)\sin^2(\alpha/2)} + \varepsilon$$

Le membre de droite tend vers ε donc est inférieur à 2ε pour N assez grand, ce qui est le résultat voulu. De plus, celle majoration est vraie sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

$$\boxed{\text{Le théorème de Fejér est démontré.}}$$

> Ce théorème n'est pas en rapport direct avec le théorème de Dirichlet mais il est tout de même très important quand on fait des séries de Fourier :

- Il affirme que toute fonction continue 2π-périodique est limite uniforme (cf. cours de l'an prochain) de polynômes trigonométriques.
- Il permet de conclure la démonstration du critère de Weyl (cf. DM n° 17).
- Il nécessite des hypothèses à la fois plus forte (continuité partout) et moins forte (pas besoin d'être $\mathscr{C}^1$ par morceaux).

Cependant, il ne fait pas tout et ne remplace pas le théorème de Dirichlet (chacun a son champ d'action) : le problème est que f est limite de (C_N) et pas de (S_N), c'est-à-dire que f n'est pas forcément somme de sa série de Fourier ! Cependant, il permet tout de même d'affirmer un résultat intéressant : si la série de Fourier de f (S_N) converge, alors (théorème de Cesàro), la suite (C_N) converge vers la même limite donc, par unicité de la limite, cette limite vaut f : on vient de prouver que, si la série de Fourier de f converge (ce qui n'est pas automatique si f n'est pas $\mathscr{C}^1$ par morceaux), alors elle ne peut converger que vers f.

Partie X. Le nouvel ordre de $\zeta(2p)$

$\boxed{1}$ Par définition, $B_1{}' = 1 \times B_0 = 1$ donc il existe λ_1 tel que $B_1 = X + \lambda_1$. Or, l'intégrale de B_1 sur $[0;1]$ est nulle, ce qui donne

$$\int_0^1 t + \lambda_1 \, dt = \frac{1}{2} + \lambda_1 = 0$$

et il en découle que $\lambda_1 = -1/2$. De même, $B_2{}' = 2B_1 = 2X - 1$ donc il existe λ_2 tel que $B_2 = X^2 - X + \lambda_2$. De même que précédemment on trouve $\lambda_2 = 1/6$. La même méthode donne $B_3 = X^3 - (3X^2/2) + (X/2) + \lambda_3$ et $\lambda_3 = 0$. Or, en évaluant en 0, il vient à chaque fois $b_i = \lambda_i$ (c'est logique : le terme constant est la valeur en 0). En conclusion,

$$\boxed{B_1 = X - \frac{1}{2}, B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, B_3 = X^3 - \frac{3X^2}{2} + \frac{X}{2}, b_1 = -\frac{1}{2}, b_2 = \frac{1}{6}, b_3 = 0}$$

$\boxed{2}$ Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\boxed{B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n{}'(t) \, dt = \int_0^1 nB_{n-1}(t) \, dt = n\int_0^1 B_{n-1}(t) \, dt = 0}$$

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$ Soient n et $k \geqslant 0$. La valeur de $a_n(k)$ ne dépend pas de l'intervalle de longueur 2π sur lequel on se place (dernière question de la partie I). Dès lors :

$$a_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_k(x)\cos(nx) \, dx$$

Or, φ_k et $x \mapsto B_{2k}(x/2\pi)$ sont égales sur $[0;2\pi[$ et on sait que les valeurs ponctuelles (en des points isolés, donc) n'influent pas sur la valeur de l'intégrale (donc peu importe la valeur en 2π), d'où le résultat voulu.

$$a_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)\cos(nx) \, dx$$

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$ Soit $x \in [0;1]$.

$$\begin{aligned} B_2(1-x) &= (1-x)^2 - (1-x) + \frac{1}{6} \\ &= 1 - 2x + x^2 - 1 + x + \frac{1}{6} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

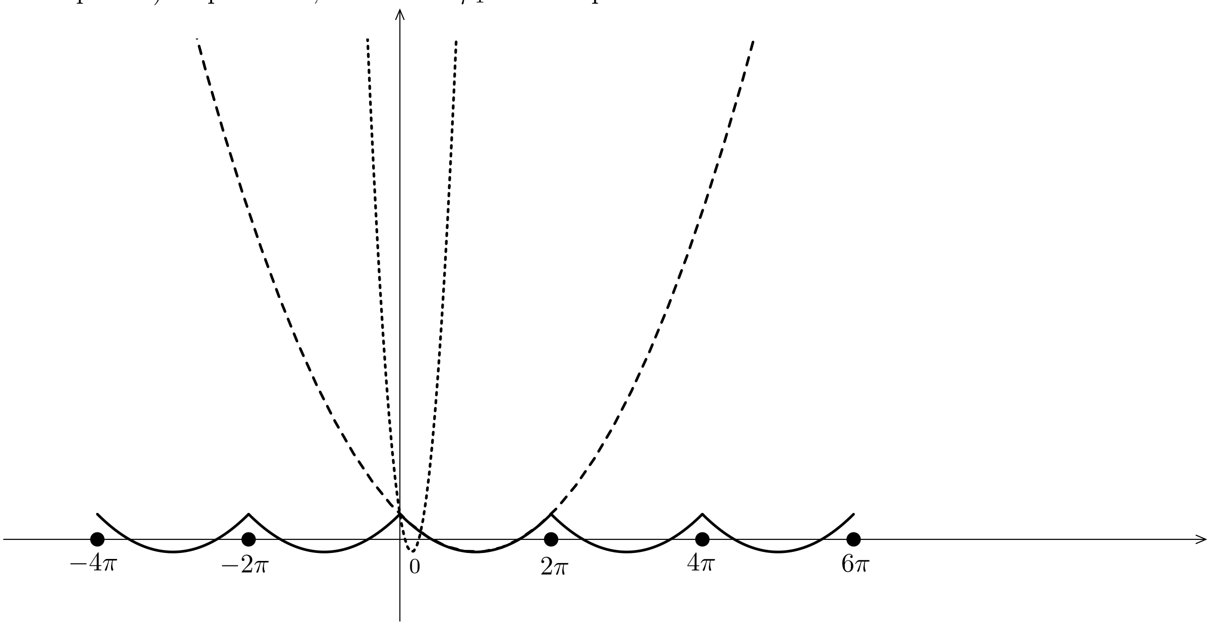
D'où $\boxed{B_2(1-x) = B_2(x)}$

Soit $x \in]0;2\pi[$. φ_k étant 2π-périodique, $\varphi_k(2\pi - x) = \varphi(-x)$. Or, $-x \in]-2\pi;0[$ donc $2\pi - x \in]0;2\pi[$ et donc

$$\begin{aligned}
\varphi_1(-x) &= \varphi_1(2\pi - x)\\
&= \mathrm{B}_2\left(\frac{2\pi - x}{2\pi}\right)\\
&= \mathrm{B}_2\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\\
&= \mathrm{B}_2\left(\frac{x}{2\pi}\right)\\
&= \varphi_1(x)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\varphi_1 \text{ est paire.}}$

Ci-dessous le graphe B_2, en points, celui de $x \mapsto \mathrm{B}_2(x/2\pi)$ (qui est celui de B_2 dilaté horizontalement d'un facteur 2π, cf. chapitre 2) en pointillés, et celui de φ_1 en trait plein :



3.(c) Soient $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 2$. Il suffit de faire deux IPP en dérivant à chaque fois $t \mapsto \mathrm{B}_{2k}(t/2\pi)$, d'utiliser donc la relation de récurrence ${\mathrm{B}_n}' = n\mathrm{B}_{n-1}$, et le fait que $\mathrm{B}_n(1) = \mathrm{B}_n(0)$ pour tout $n \geqslant 2$. Allons-y !

$$\begin{aligned}
b_n(k) &= \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{B}_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \times \frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2\pi^2 n}\int_0^{2\pi} \mathrm{B}'_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi n}(\mathrm{B}_{2k}(1) - \mathrm{B}_{2k}(0)) + \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} 2k\mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi} \times \frac{k}{\pi n}\int_0^{2\pi} \mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{\pi} \times \frac{k}{\pi n}\left[\mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right) \times \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi} \times \frac{k}{\pi n} \times \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} \mathrm{B}'_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{k}{\pi n} \times \frac{1}{2\pi n} \times \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (2k-1)\mathrm{B}_{2k-2}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{k}{\pi n} \times \frac{2k-1}{2\pi n} \times \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{B}_{2k-2}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

si bien que $$\boxed{b_n(k) = -\frac{k(2k-1)b_n(k-1)}{2\pi^2 n^2}}$$

3.(d) D'après la question 3.(b), la fonction φ_1 est paire donc tous les $b_n(1)$ sont nuls. D'après la question précédente, cela implique que tous les $b_n(k)$ sont nuls pour tout $k \geqslant 1$. Dès lors, d'après le théorème de Dirichlet (φ_k est bien de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux), pour tout réel x et tout entier $k \geqslant 1$,

$$\varphi_k(x) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)\cos(nx)$$

Il suffit de prendre $x = 0$ pour conclure (puisque $\varphi(0) = \mathrm{B}_{2k}(0/2\pi) = \mathrm{B}_{2k}(0)$) :

$$\mathrm{B}_{2k}(0) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)$$

4.(a) Pour tout $k \geqslant 1$

$$a_0(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{B}_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(0\times t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{B}_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = t/2\pi, t = 2\pi u, u \mapsto 2\pi u$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$, et on a $\mathrm{d}t = 2\pi\,\mathrm{d}u$.

$$\boxed{a_0(k) = 2\int_0^1 \mathrm{B}_{2k}(u)\,\mathrm{d}u = 0}$$

4.(b) On part de B_{2k} et on veut faire apparaître B_{2k-1} et B_{2k-2}. Pour cela, on cherche à dériver B_{2k} : on fait une IPP. On dérive B_{2k} et on intègre le cosinus (on n'oublie pas le $1/\pi$ devant l'intégrale).

$$u(t) = \mathrm{B}_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right), u'(t) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{B}_{2k}{}'\left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{k}{\pi}\mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

et $v(t) = \sin(nt)/n, v'(t) = \cos(nt)$. u et v sont bien $\mathscr{C}^1$. D'où :

$$a_n(k) = \frac{1}{\pi}\left(\left[\mathrm{B}_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\times\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \frac{k}{n\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Le crochet étant nul, $a_n(k) = \dfrac{-k}{n\pi^2}\displaystyle\int_0^1 \mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$. Faisons une autre IPP, toujours en dérivant le polynôme de Bernoulli et en intégrant le sinus :

$$a_n(k) = \frac{-k}{n\pi^2}\left(\left[\mathrm{B}_{2k-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\times\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \frac{2k-1}{2n\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2k-2}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

On développe :

$$a_n(k) = \frac{k}{n^2\pi^2}\left(\mathrm{B}_{2k-1}(1) - \mathrm{B}_{2k-1}(0)\right) - \frac{2k(2k-1)}{4n^2\pi^2}\times\frac{1}{\pi}\int_0^1 \mathrm{B}_{2k-2}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

D'où $$\boxed{a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\left(\mathrm{B}_{2k-1}(1) - \mathrm{B}_{2k-1}(0)\right) - \frac{2k(2k-1)}{(2n\pi)^2}\times a_n(k-1)}$$

4.(c) D'après la question précédente, pour $n \geqslant 1$ et $k = 1$:

$$a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}\left(\mathrm{B}_1(1) - \mathrm{B}_1(0)\right) - \frac{2}{(2n\pi)^2}\times a_n(0)$$

Or, un calcul simple nous dit que $a_n(0) = 0$. Attention à ne pas dire que $a_n(1)$ est nul car $\mathrm{B}_1(1) = \mathrm{B}_1(0)$! En effet, dans la question 2, on a supposé $n \geqslant 2$. Une seule solution : calculer $\mathrm{B}_1(1)$ et $\mathrm{B}_1(0)$ à la main. D'après la question 1, $\mathrm{B}_1(1) = -\mathrm{B}_1(0) = 1/2$. En conclusion,

$$\boxed{a_n(1) = \frac{1}{(n\pi)^2}}$$

4.(d) Si $k \geqslant 2$ alors $2k-1 \geqslant 3$ et $B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0) = 0$. En d'autres termes,

$$a_n(k) = -\frac{2k(2k-1)}{(2n\pi)^2} \times a_n(k-1)$$

et une récurrence immédiate nous permet de conclure.

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \qquad a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}}$$

4 Soit $k \geqslant 1$ fixé. Quand $n \to +\infty$, le terme ci-dessus est le terme général d'une série convergente : c'est une constante (par rapport à n, puisque k est fixé) multiplié par $1/n^{2k}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Ainsi, on peut sommer l'égalité de la question précédente pour n allant de 1 à $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \times \zeta(2k)$$

En effet, on peut sortir les termes $(-1)^{k-1}, (2k)!, \dots$ de la somme car ce sont des termes indépendants de l'indice de sommation. Il ne nous reste plus qu'à calculer la somme de gauche. Or, d'après la question 3.(d) :

$$B_{2k}\left(\frac{0}{2\pi}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)$$

car $a_0(k) = 0$ d'après la question 4.(a). Finalement,

$$\boxed{\zeta(2k) = \frac{b_{2k} \times 2^{2k-1} \times (-1)^{k-1}}{(2k)!} \times \pi^{2k}}$$

Puisque $b_2 = 1/6$ d'après la question 1, il vient le très célèbre

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{(1/6) \times 2^1 \times (-1)^0}{2!} \times \pi^2 = \frac{\pi^2}{6}}$$

6 D'après le cours (mais ce n'est pas à savoir), $\zeta(2k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 1$, on obtient l'équivalent suivant :

$$b_{2k} \sim \frac{(2k)! \times (-1)^{k-1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$$

Appliquons enfin la formule de Stirling : $(2k)! \sim \sqrt{2\pi}(2k)^{2k+(1/2)}e^{-2k}$ ce qui donne le résultat voulu après avoir simplifié les puissances de 2 et les puissances de π :

$$\boxed{b_{2k} \sim (-1)^{k-1} \times 4\sqrt{k\pi}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}}$$

> En particulier, $|b_{2k}| \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$, ce qui n'est pas évident à première vue. Ce n'est pas le cas des b_{2k+1} puisqu'on peut montrer que pour tout $k \geqslant 1, b_{2k+1} = 0$.

7.(a) Puisque ${B_n}'$ est une primitive de nB_{n-1}, une récurrence immédiate nous dit que pour tout n, B_n est de degré n. Ainsi, d'après la formule de Taylor pour les polynômes,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{{B_n}^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

Or, par définition, ${B_n}' = nB_{n-1}$, donc ${B_n}'' = n{B_{n-1}}' = n(n-1)B_{n-2}$. Par une récurrence (finie) immédiate sur $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, pour tout k dans cet ensemble,

$${B_n}^{(k)} = n(n-1) \times \cdots \times (n-k+1)B_{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}$$

Dès lors

$$\boxed{B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \times \frac{n!}{(n-k)!}B_{n-k}(0)X^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k}$$

7.(b) Par hypothèse sur B_n et par linéarité de l'Intégrale :

$$\int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} b_{n-k} \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} b_{n-k} \times \frac{1}{k+1} = 0$$

Finalement

$$\boxed{b_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{b_{n-k}}{k+1}}$$

7.(c) D'après la question 3, $b_0 = 1, b_1 = -1/2, b_2 = 1/6$ et $b_3 = 0$. D'après la question précédente,

$$b_4 = -\left(\binom{4}{1} \times \frac{b_3}{2} + \binom{4}{2} \times \frac{b_2}{3} + \binom{4}{3} \times \frac{b_1}{4} + \binom{4}{4} \times \frac{b_0}{5}\right)$$

Tous calculs faits, on trouve $b_4 = -1/30$. D'après la question 5,

$$\zeta(4) = \frac{(-1/30) \times 2^3 \times (-1)^{2-1}}{4!} \times \pi^4$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

De même, on trouve $b_5 = 0$ et $b_6 = 1/42$ ce qui donne finalement

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}}$$

> Encore une fois, on ne sait quasiment rien sur les valeurs de ζ en les entiers impairs. Pour un tour d'horizon à ce propos, je vous renvoie au corrigé du DM n° 15.