Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Analyse - Chapitres 22 à 27.

Table des matières

Chapitre 22

Intégration sur un segment

« Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près. »

Stendhal, Vie de Henry Brulard

Sauf indication contraire, I est un intervalle d'intérieur non vide, et a et b sont deux réels avec $a < b$.

22.1 Linéarité, positivité, théorème de majoration :

Exercice 1 : ✪ Prouver que

$$\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{3}\ln(2)$$

Exercice 2 : ✪ Donner le domaine de définition des fonctions

$$f : x \mapsto \int_{x}^{x^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_{x}^{x^2} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

ainsi que leur signe sur leur domaine de définition.

Exercice 3 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soient $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Justifier l'existence de α et β et prouver que

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq -\alpha\beta$$

Exercice 4 : ✪ Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n^2 x e^{-nx}\right)\mathrm{d}x$$

Exercice 5 : ✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 : ✪✪ Si $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. En calculant $I_n + I_{n+1}$, prouver que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2)$$

Exercice 7 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$ avec $a<b$ telle que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^4(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est constante sur $[\,a\,;b\,]$. On pourra calculer l'intégrale de $(f^2-f)^2$.

Exercice 8 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $c\in[\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = 3\int_0^1 f(t)t^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : ✪✪ Soit $f:[\,0\,;1\,]\to\mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10 : ✪✪ Soit f une fonction continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$. Domaines de définition et de continuité de la fonction $\varphi : x\mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 : ✪✪ Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f\in\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R}), f(0)=f(1)=1 \right\}$$

admet une borne inférieure, que celle-ci est nulle et qu'elle n'est pas atteinte.

Exercice 12 - Le lemme de Gronwall : ✪✪ Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, soit $a\in I$. Soient f,g continues sur I avec g à valeurs positives. Soit $A\in\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x\in I$,

$$f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On définit les fonctions y et z sur I par

$$y(x) = A + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad z(x) = y(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   Donner les variations de z sur I.
2. Démontrer le lemme de Gronwall :

$$\forall x\in I, x\geq a, \qquad f(x)\leq A\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

3. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0)=0$. On suppose qu'il existe $\alpha\in\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x\geq 0$, $\varphi'(x)\leq\alpha\varphi(x)$. Montrer que φ est la fonction nulle.

Exercice 13 - Parce qu'il faudra bien savoir le faire un jour : ✪✪ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k\ln k}\right) - \ln(\ln(n))$$

1. Montrer que pour tout $p\geq 2$:

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leq \int_p^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{p\ln p}$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Exercice 14 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g par

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
2. ✪✪ La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si f est périodique de période 1, alors g est constante.

Exercice 15 : ✪✪ Donner la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \, \mathrm{d}t$$

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 - Formule de la moyenne : ✪✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit f continue au voisinage de 0.

   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 18 : ✪✪✪ Montrer les résultats suivants, sans chercher à calculer explicitement les intégrales correspondantes :

$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \sin^2(t)\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 19 - Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : ✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

   si et seulement si f est de signe constant.
2. ✪✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

   si et seulement si f a un argument constant (là où elle ne s'annule pas).

Exercice 20 : ✪✪✪ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer une expression simple de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right)\right|^2 \,\mathrm{d}t$$

   en fonction des coefficients de P.
2. (a) On suppose que P est non nul, à coefficients entiers, et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|P(u)| < \sqrt{2}$. Montrer que P n'a qu'un seul coefficient non nul.

   (b) Montrer que ce résultat est encore vrai avec une inégalité large.

Exercice 21 : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue (avec $a < b$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_a^b |f(t)|^n\,\mathrm{d}t$ et on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

1. Montrer que f ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ ou 1.
2. En déduire que f est constante égale à $-1, 0$ ou 1.

Exercice 22 : ✪✪✪ Les deux questions sont indépendantes, mais les méthodes sont analogues.

1. Soit f continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Exercice 23 : ✪✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. On pose $g = f' - f$.
   (a) En remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y' - y = g$, prouver que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$:
   $$f(x) = \int_0^x g(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que
   $$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{e}$$
2. Montrer que la constante $1/e$ est optimale à l'aide de la suite de fonctions (f_n) définie par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\,0\,;1\,], f_n(x) = \frac{e^x - e^{-nx}}{e - e^{-n}}$$

22.2 Fonctions en escalier et continues par morceaux

Exercice 24 - Trois intégrales de fonctions continues par morceaux : ✪

1. Soient $0 < a < b$ deux entiers naturels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.
3. ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25 - Fonctions Riemann intégrables : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. Reprenons les notations du cours :

$$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \,|\, \varphi \leq f\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \,|\, f \leq \psi\}$$

ainsi que

$$I^-(f) = \left\{\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \mid \varphi \in \mathscr{E}^-(f)\right\} \qquad \text{et} \qquad I^+(f) = \left\{\int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \mid \psi \in \mathscr{E}^-(f)\right\}$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann si $I^-(f)$ et $I^+(f)$ ont respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, et si celles-ci sont égales [1]. Montrer que l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

1. Ainsi, d'après le cours, une fonction continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann, mais on peut montrer que la réciproque est fausse : il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas continues par morceaux.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour toute fonction $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier,

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t \;= 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 28 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ qui échange les deux premières décimales (c'est-à-dire $f(0, a_1a_2a_3\dots) = 0, a_2a_1a_3\dots$). Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 29 - Généralisation du lemme de Riemann-Lebesgue : ✪✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Montrer que si g est une fonction continue T-périodique (avec $T > 0$) définie sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Déterminer : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$. Nous prouverons ce résultat d'une autre manière dans l'exercice 40.

22.3 Sommes de Riemann :

Exercice 30 : ✪ Soit $\alpha > 0$. Montrer de deux façons différentes que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

Exercice 31 : ✪ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t$ sans calculer de primitive.

Exercice 32 : ✪ Donner les limites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

1. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n+k}}$
3. ✪✪✪ $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}\left(n^2+k^2\right)^{1/n}$

Exercice 33 - Phénomène de Gibbs : ✪✪

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

- f est impaire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$.

1. Donner la valeur de $f(0)$, ainsi que les limites à droite et à gauche en 0. f est-elle continue ? Tracer sans justification le graphe de f sur $[\,-3\pi\,;3\pi\,]$. Pouvait-on se passer de l'hypothèse d'imparité ?
2. Pour tout $n \geq 1$ on pose :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Justifier l'existence de $b_n(f)$ et donner sa valeur en fonction de n.

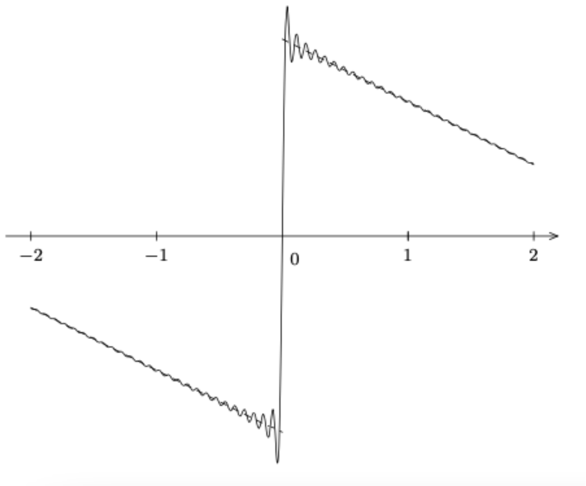
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction S_N par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad S_N(t) = \sum_{k=1}^N b_k(f)\sin(kt)$$

Montrer qu'il existe une fonction φ continue sur $[\,0\,;1\,]$ que l'on explicitera telle que :

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Le phénomène de Gibbs est un phénomène mathématique qui se produit lorsqu'on calcule la série de Fourier de certaines fonctions discontinues : il y a « des effets de bords ». Demandez à votre professeur de physique préféré !



Exercice 34 - Un avant-goût de la deuxième année : ✪✪

1. Montrer qu'il existe f que l'on explicitera telle que

$$u_n = \left(\frac{1^1 2^2 \dots n^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)^{1/n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^1 f(t)dt$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 35 : ✪✪ Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Exercice 36 : ✪✪

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$.
2. En déduire la valeur de $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x - e^{it}}$ où x est un réel différent de ± 1.

Exercice 37 : ✪✪✪ Calculer la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

Exercice 38 - Intégrale de Poisson, le retour : ✪✪✪

1. Décomposer le polynôme $X^{2n} - 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire, pour $|x| \neq 1$, la valeur de

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(t) + x^2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 39 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite des expressions suivantes :

1. $A_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
2. $B_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k<l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.
3. $C_n = \displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.

Exercice 40 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;\pi\,] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![\,0\,;n-1\,]\!]$:

$$\exists c_k \in \left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right],\ \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = f(c_k)\times\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

2. À l'aide du résultat concernant les sommes de Riemann générales, montrer que :

$$\int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 41 : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer qu'il existe une unique subdivision $\left({x_k}^{(n)}\right)_{0\leq k\leq n}$ telle que :

$$\forall k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!],\ \int_{{x_{k-1}}^{(n)}}^{{x_k}^{(n)}} f(t)\,\mathrm{d}t\ = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 42 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Notons x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. Montrer que

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

après avoir correctement défini cette intégrale puis justifié son existence.

Chapitre 23

Formules de Taylor

« Un enfant ne serait pas tombé dans un piège si grossier ! Bon sang ! je vous apprendrai à réfléchir ! Et si je n'y arrive pas, je me servirai de vos carcasses pour calfeutrer les fuites d'une vanne. »

Robert Jordan, La roue du temps

Exercice 1 : ✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}$$

Exercice 2 : ✪ Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a l'encadrement

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Exercice 3 : ✪✪ Trouver une approximation rationnelle à 10^{-4} près de $\sqrt{e}$.

Exercice 4 : ✪✪ Refaire l'exercice 20 du chapitre 2, en supposant f de classe $\mathscr{C}^2$, f'' bornée par un réel M_2 et en démontrant cette fois les inégalités de l'énoncé. Que vient-on de montrer ?

Exercice 5 : ✪✪ Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}$$

Exercice 6 - Égalité de Taylor-Lagrange : ✪✪ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide, non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable $n+1$ fois sur I. On se donne dans la suite $a \neq b$ deux éléments de I.

1. Montrer qu'il existe un A que l'on explicitera tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{A(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 7 : ✪✪ Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f^{[n]}$ dérivable n fois telle dont la dérivée n-ième est égale à f (une primitive n-ième de f, si on veut) dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0.
2. Prouver que

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive n-ième de f.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas la fonction nulle. On suppose qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que, pour tout n, $f^{(n)}(a) = 0$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{e}{\|f\|_\infty}$$

où la norme infinie est prise sur $[\,0\,;1\,]$, c'est-à-dire que si g est bornée, $\|g\|_\infty = \sup_{[\,0\,;1\,]} |g|$. On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e$$

Exercice 9 - Somme de Riemann Canada Dry : ✪✪

1. Donner la limite (dont on précisera le signe) de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n^2}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $|\mathrm{Arctan}(x) - x| \leq x^2$. En déduire la limite de la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \mathrm{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 10 : ✪✪ En s'inspirant de l'exercice précédent, donner la limite de la suite de terme général

$$w_n = n \int_0^\pi \sin\left(\frac{1}{n}\sin(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 11 : ✪✪ Donner la limite en 0^+ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, nulle en 0. Donner la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Exercice 13 : ✪✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à $x \mapsto \ln(1+x)$, trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Exercice 14 : ✪✪✪

1. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x et pour tout entier n, $|f^{(n)}(x)| \leq |x^{2023}+1|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on remplace x^{2023} par x^{2024} ?
2. **(Remake)** Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair telle que pour tout réel x et pour tout entier n, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on ne suppose plus le degré de P impair ?

Exercice 15 : ✪✪✪ Soient $\lambda > 0$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n! \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0$$

Montrer que f est nulle sur $\left]\,\frac{-1}{\lambda}\,;\frac{1}{\lambda}\,\right[$, puis sur $\left]\,\frac{-1}{2\lambda}\,;\frac{3}{2\lambda}\,\right[$, et enfin que f est la fonction nulle.

Chapitre 24

Analyse asymptotique et Développements Limités

« I won't say that all senior citizens who can't master technology should be publicly flogged, but if we made an example of one or two, it might give the others incentive to try harder. »

The Big Bang Theory

Vrai ou Faux ?

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors $u_{n+1} \sim u_n$.
2. $(n+1)! \sim n!$
3. Au voisinage de $0, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
4. Au voisinage de $+\infty, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
5. Au voisinage de $0, 1/x^2 = \mathrm{o}\left(1/x\right)$.
6. Si $u_n \sim v_n$ alors $2u_n \sim 2v_n$.
7. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) = \mathrm{o}\left(2x\right)$ alors $f(x) = \mathrm{o}\left(x\right)$.
8. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
9. Au voisinage de 0, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
10. Si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) est décroissante alors (v_n) est décroissante.
11. Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n \leq u_n$ alors $w_n \leq v_n$.
12. Si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et si $0 \leq w_n \leq u_n$ alors $w_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$.
13. Si $f(x) + \mathrm{o}\left(x\right) = g(x) + \mathrm{o}\left(x\right)$ alors $f(x) = g(x)$.
14. $x \times \mathrm{o}\left(x\right) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
15. $1/2n^2 = \mathrm{o}\left(1/n\right)$
16. $1/2n^2 \sim 1/n^2$.
17. $\sin(2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
18. $\ln(1+2ne^{-n}) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
19. $\ln(1+2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.

24.1 Analyse asymptotique sans DL :

Exercice 1 : ✪ Donner un équivalent simple de u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2024)(3n^2+7n-14)}$
2. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$
3. $u_n = 3^n \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$
8. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$
10. $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{1/n}\right)}{1-\cos\left(\sqrt{2/n}\right)}$
11. $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
12. $u_n = \sin\left(n^2+1\right) - \sqrt{n}$
13. $u_n = \ln(2024n)$
14. $u_n = \ln\left(n^2+n+1\right)$
15. $u_n = e^{n^2+n+1}$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sin(1/n)} - \ln(n)$
17. $u_n = n^2 + n - \ln\left(n^3+n\right)$
18. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n-\dfrac{1}{2}\right)^4 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n+\dfrac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
19. $u_n = \mathrm{Arctan}\left(n^2-n\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
20. $u_n = \dfrac{\lfloor e^n \rfloor - e^n + \sqrt{n^2+n+1}}{\ln(n) - n^{1/3} + \pi}$

Exercice 2 : ✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner un équivalent de $\dbinom{p+n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 3 : ✪ Donner dans chaque cas un équivalent de $f(x)$ (quand $x \to 0$ puis quand $x \to +\infty$) ou de u_n :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$
3. $f(x) = x + \mathrm{o}(x) + x^2\ln(x) + \mathrm{o}\left(x^2\ln(x)\right) + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$
5. $u_n = n + \mathrm{o}(n) + \sqrt{n} + \mathrm{o}(\sqrt{n}) + \dfrac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + \mathrm{o}(n\ln(n)) + \sqrt{2\pi} + \mathrm{o}(1)$.

Exercice 4 : ✪ Soient a et b strictement supérieurs à 1. Montrer que $n^n = \mathrm{o}\left(a^{b^n}\right)$.

Exercice 5 : ✪ Soient $q > 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Donner un équivalent de :

$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$$

Exercice 6 : ✪✪ Trouver une fonction f telle que, pour tout n, au voisinage de $+\infty$, $\ln^n(x) = \mathrm{o}(f(x))$ et $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{1/n}\right)$.

Exercice 7 : ✪✪

1. Donner le domaine de définition de

$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Donner un équivalent en 0^+ puis en 1^- de f. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. f ainsi prolongée est-elle dérivable en 1 ?

2. Mêmes questions au voisinage de 0^+ avec

$$f : x \mapsto 2x \times \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor - \frac{1}{\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor}$$

Exercice 8 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+2}\,dx$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $u_{n+2} + u_n$. En déduire la limite de la suite (u_n) et un équivalent de u_n.

Exercice 9 : ✪✪

1. Soit (x_n) une suite décroissante de limite nulle telle que $x_n + x_{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$. Montrer que $x_n \sim \dfrac{1}{2n}$.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si (x_n) n'est pas décroissante.

Exercice 10 - Équivalents et sommes de Riemann : ✪✪

1. Donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$
2. **Remake :** Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.
3. **Remake :** Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$.

Exercice 11 : ✪✪ Donner deux fonctions bijectives équivalentes en $+\infty$ dont les réciproques ne sont pas équivalentes.

Exercice 12 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (on pourra comparer à une intégrale) et montrer finalement que

$$\left(\prod_{k=1}^{n} (a+kb)\right)^{1/n} \sim b(n!)^{1/n}$$

Exercice 13 : ✪✪✪ Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que $u_n \sim \dfrac{n}{2}$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soit (a_n) une suite arithmétique de raison non nulle. Donner, avec le moins de calculs possibles, la limite de la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_k a_{k+1}}{{a_{2n+2}}^4}$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, généraliser avec la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_{k+p}}{{a_{2n-3}}^{p+2}}$$

On pourra utiliser la question 2 de l'exercice 10.

Exercice 15 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor a\lfloor na\rfloor\rfloor - \lfloor na\rfloor = n - 1$$

1. Donner l'unique valeur possible de a. On désire maintenant montrer que cette valeur convient effectivement.
2. En remarquant que a est irrationnel, montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor na\rfloor}{a} \right\rfloor = n - 1$$

3. Conclure (on pourra exprimer $1/a$ en fonction de a et 1).

Exercice 16 : ✪✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n}$$

On se donne enfin un réel λ strictement positif dans tout l'exercice.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > n$ tel que $f_n(x_n) = \lambda$.
2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que la suite de terme général $f_n(\alpha n)$ converge vers une limite que l'on explicitera.
3. Montrer finalement que :

$$x_n \sim \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \times n$$

Exercice 17 : ✪✪✪✪ On pose $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3$ etc. Donner un équivalent de u_n.

24.2 Et le calcul fut - Et l'Homo Bestialus maîtrisa le calcul

24.2.1 DL

Exercice 18 : ✪ Donner les DL des fonctions suivantes en 0 aux ordres indiqués (il n'est pas interdit de réfléchir aux ordres avant de se lancer dans des calculs infernaux) et on fera attention aux multiples produits.

1. $f : x \mapsto \ln(1-x)\cos(x)$ à l'ordre 3.
2. $f : x \mapsto \cos(x)\ln(1-x^2)$ à l'ordre 5.
3. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 4.
4. $f : x \mapsto \sin(x^2)\cos(x)$ à l'ordre 4.
5. $f : x \mapsto (\sqrt{1-x} - 1)\cos(x)$ à l'ordre 3.
6. $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 8.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 3.
8. $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 4.
9. $f : x \mapsto e^{x-x^2}$ à l'ordre 3.

10. $f : x \mapsto \sin(x + x^2)$ à l'ordre 4.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}}$ à l'ordre 6.
12. $f : x \mapsto \sin^2(x)$ à l'ordre 6.
13. $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 5.
14. $f : x \mapsto e^{-x}/\cos(4x)$ à l'ordre 3.
15. $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+\mathrm{Arctan}^2(x)}$ à l'ordre 5.
16. $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x+x^2}\right)$ à l'ordre 3.
17. $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$ à l'ordre 6.
18. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 5.
19. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 6.

Exercice 19 : ✪✪ Même chose que l'exercice précédent.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \tan(\pi e^x)$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x+x^2+x^3}$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(1+x-x^3)}{\sqrt{1-x+2x^2}}$ à l'ordre 4.
5. $x \mapsto (\cos(x))^x$ à l'ordre 5.
6. $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$ à l'ordre 7.
7. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \ln\left(3e^x - e^{-x}\right)$ à l'ordre 3.
9. $x \mapsto e^{-1/x^2}$ à l'ordre 2024.
10. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}\right)$ à l'ordre 5.
11. ✪✪✪ $x \mapsto \ln^3(1+x)$ à l'ordre 7.

Exercice 20 - Ailleurs qu'en 0 **: ✪✪** Donner les DL des fonctions suivantes en x_0 aux ordres indiqués

1. $x \mapsto \ln(\tan(x))$, $x_0 = \pi/4$, ordre 3.
2. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, $x_0 = 1$, ordre 3.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$, $x_0 = 1$, ordre 2.
4. $x \mapsto e^{\sin(x)}$, $x_0 = \pi/6$, ordre 3.
5. $x \mapsto \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0 = 1$, ordre 2024.

24.2.2 Limites et prolongements

Exercice 21 : ✪✪ Soient $0 < a < b$.

1. Donner les limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction
$$f : x \mapsto \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$$
2. **Remake :** Soient $0 < a < b < c$. Mêmes questions avec $x \mapsto \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$.

Exercice 22 : ✪✪ Déterminer la limite des quantités suivantes en x_0 :

1. $(\ln(e+x))^{1/x}$, $x_0 = 0$.
2. $\dfrac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1}$, $x_0 = 0$.
3. $\dfrac{\sin(x)^{\sin(x)} - 1}{\tan(x)^{\tan(x)} - 1}$, $x_0 = 0$.
4. $\dfrac{1}{xe^x(x+1)} - \dfrac{1}{x\cos(x)}$, $x_0 = 0$.
5. $\dfrac{(1+x)^{\ln(x)/x} - x}{x\,(x^x-1)}$, $x_0 = 0$.
6. $\dfrac{\mathrm{sh}(x)+\sin(x)-2x}{x\,(\mathrm{ch}(x)+\cos(x)-2)}$, $x_0 = 0$.
7. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{1/3}-2^{1/3}}$, $x_0 = 2$.
8. $x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0 = +\infty$.
9. $\dfrac{\sin(x)(\tan(x)-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$, $x_0 = 0$.
10. $\dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{1-x+\ln(1+x)-\cos(x)}$, $x_0 = 0$.
11. $\dfrac{\sin^{p+q}(x)-1}{(\sin^p(x)-1)\,(\sin^q(x)-1)}$, $x_0 = \pi/2$.
12. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$, $x_0 = 1$.
13. $\tan(x)^{\sin(x)}$, $x_0 = 0^+$.

Exercice 23 : ✪✪ Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 et que les prolongements sont de classe $\mathscr{C}^1$:

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\mathrm{Arctan(t)}}$

24.2.3 Équivalents

Exercice 24 : ✪✪ Donner un équivalent simple de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(n)$.
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{\sin(1/n) + \sin(2/n)}{e^{1/n} - e^{2/n}}$
5. $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $u_n = \exp(\sin(e^{-n})) - 1$
7. $u_n = \dfrac{\sqrt{1+e^{-n}} - 1}{\ln(1+1/2n)}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} - 2}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^3 - 1}}$
9. $u_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n/2} - 1$
10. $u_n = n\tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$
11. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
12. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$
13. $u_n = \left(\ln\left(1 + e^{-n^2}\right)\right)^{1/n}$
14. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15. $u_n = n\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$
16. $u_n = \left(n^3\left(e^{1/n} - e^{-1/n}\right)\right)^n$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ où $\alpha > 0$.
18. $u_n = 3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$.
19. $u_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \times \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.
20. $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{1/n}$
21. $u_n = \ln(n) - \dfrac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}}$.
22. $u_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - e^{1/n}\right)$
23. $u_n = 1 - \sqrt[9]{1 + \dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1 + \sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}$.
24. $u_n = \dfrac{n\sin(1/\sqrt{n})\mathrm{Arctan}(n!)}{\sqrt[4]{n^6+n^5} - n\sqrt{n}}$.

Exercice 25 : ✪✪ Donner un équivalent simple en x_0 des quantités suivantes :

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$, $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \sin(3x) - \tan(x)$, $x_0 = 0$.
3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$, $x_0 = +\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
5. $f(x) = \ln\left(4x^4 - 2\cos(x) + 3\right)$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{x\mathrm{Arctan}(2x)\left(\sqrt[5]{1+3x} - 1\right)}{1 + x^2 - \cos\left(\sqrt{x}\right)}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3}$, $x_0 = 0$.
8. $f(x) = (8+x)^{1/3} - 2$, $x_0 = 0$.
9. $f(x) = \ln(\mathrm{sh}(x)/x)$, $x_0 = +\infty$.
10. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$, $x_0 = +\infty$.
11. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right) - \ln(3)$, $x_0 = 0$.
12. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x})$, $x_0 = +\infty$.
13. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) - 2\ln(2)$, $x_0 = 0$.
14. $f(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}$, $x_0 = +\infty$.
15. $f(x) = x^{x^{1/x}}$, $x_0 = +\infty$.
16. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \pi$.
17. $f(x) = 1 + \cos(x)$, $x_0 = \pi$.
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x_0 = -1$.
19. $f(x) = x^x - 4$, $x_0 = 2$.
20. $f(x) = x^x - x$, $x_0 = 1$.
21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$, $x_0 = 0$.
22. $f(x) = e^x - x^e$, $x_0 = e$.

24.3 DL en pratique

Exercice 26 : ✪ La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 27 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 2f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{-1}{n}\right)$$

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$, que $f'(0) = 0 \neq f''(0)$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 28 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -\sigma^2$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\sigma^2 t^2/2}$$

Exercice 29 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^3$. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3h) - 3f(2h) + 3f(h) - f(0)}{h^3}$$

Exercice 30 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si et seulement si $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$.

Exercice 31 : ✪

1. Soit $f : x \mapsto \sin(x) \times \operatorname{ch}(\operatorname{Arctan}(x))$. Donner les dérivées de f en 0 jusqu'à l'ordre 6.
2. **Remake :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 15 secondes.

Exercice 32 : ✪ Montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 33 : ✪ Soit (u_n) une suite à valeurs dans $]-1\,;+\infty[$ telle que $u_n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$. Montrer que $\left(1 + \dfrac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.

Exercice 34 : ✪✪ Déterminer les ordres maximaux auxquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1. $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $x \mapsto x^{13/3}$.
3. $x \mapsto |x|^n$ (où $n \geq 1$).

Exercice 35 : ✪✪

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right)$. Montrer que f admet un DL à tout ordre que l'on explicitera alors qu'elle n'est pas dérivable deux fois en 0.
2. Deux fonctions admettant un DL à tout ordre dont les DL ont les mêmes coefficients sont-elles égales, au moins sur un voisinage de 0 ?

Exercice 36 - DL d'Arcsin : ✪✪

1. Montrer que le DL en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est :
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
2. En déduire le DL d'Arcsin à l'ordre $2n+1$.
3. Donner le DL d'Arcsin à l'ordre 5.

Exercice 37 - « Dérivation d'un développement limité » : ✪✪

1. Donner un exemple de fonction f admettant un DL à l'ordre 2 tel que f' n'admette pas de DL à l'ordre 1.
2. Soit $n \geq 1$. Supposons que f admette un DL à l'ordre n donné par :
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
On suppose également que f' admette un DL à l'ordre $n-1$. Montrer que ce DL est :
$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$
Comment expliquer le paradoxe entre les deux questions ?

Exercice 38 : ✪✪ Donner un développement asymptotique à cinq termes en 0 de

$$f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

On pourra s'intéresser (après l'avoir correctement définie et après avoir justifié son existence) à l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \, \mathrm{d}t$$

qu'on ne cherchera pas à calculer !

Exercice 39 : ✪✪ Donner le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

Exercice 40 : ✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels. Donner une CNS sur ces réels pour que la fonction f définie (quand c'est possible) par l'expression ci-dessous admette une limite finie en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$$

Exercice 41 - Lemme de l'escalier et générateur automatique d'exercices : ✪✪

1. Montrer que si une suite (u_n) est telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite α non nulle, alors $u_n \sim \alpha n$. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme de l'escalier ». Voici des exercices classiques qui l'utilisent.
2. **Le classique des classiques[1] :** on définit la suite récurrente (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

   (a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

   (b) À l'aide de la suite de terme général

$$v_n = \frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2}$$

   montrer que $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x$. Etudier les cas d'égalité.
4. On définit dans cette question la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

   Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ puis, à l'aide cette fois la suite de terme général

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

   donner un équivalent de u_n.

5. Soient f définie et continue sur $[0\,;1]$ admettant en 0 un DL de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$ avec $a > 0$ et $\alpha > 1$.

   (a) Montrer que pour x assez petit (strictement positif), $0 < f(x) < x$. En déduire que pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0. On suppose u_0 ainsi choisi dans la suite.

   (b) Déterminer la valeur de $b \in \mathbb{R}^*$ pour que la suite de terme général $v_n = {u_{n+1}}^b - {u_n}^b$ admette une limite non nulle.

   (c) Donner un équivalent de u_n.

   (d) Donner un équivalent, lorsque le terme initial est suffisamment proche de 0, de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)\cos(u_n)$.

Exercice 42 : ✪✪✪ Soient f dérivable sur $\mathbb{R}$, (b_n) et (a_n) deux suites, respectivement strictement positive et strictement négative, de limite nulle. Montrer que :

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(0)$$

1. Tellement classique que cet exercice peut être donné sans indication (en particulier, sans donner la suite (v_n) à l'oral).

Exercice 43 : ✪✪✪ On rappelle (cf. exercice 13 du chapitre 15) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ (où I est un intervalle non vide, non réduit à un point) est log-convexe si $\ln \circ f$ est convexe. Montrer que la réciproque de l'exercice 13 du chapitre 15 est vraie, c'est-à-dire que si f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$, alors f est log-convexe.

Exercice 44 : ✪✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque qu'on notera f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Exercice 45 : ✪✪✪ Donner un équivalent de

$$u_n = \left(\text{Arctan}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right)^n$$

Exercice 46 : ✪✪✪ Donner un équivalent de $u_n = \text{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi} \times \text{Arctan}(n^2)\right)$.

Exercice 47 : ✪✪✪ Rappelons le résultat suivant, démontré dans l'exercice 12 du chapitre 13 : si α et β sont deux réels, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) est prolongeable par continuité en 0^+ lorsque

- $\alpha > 0$ (en posant $f(0) = 0$).
- $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ (en posant $f(0) = \sin(1)$).
- $\alpha = 0$ et $\beta > 0$ (en posant $f(0) = 0$).
- $\alpha < 0$ et $\beta = -\alpha$ (en posant $f(0) = 1$).
- $\alpha < 0$ et $\beta > -\alpha$ (en posant $f(0) = 0$).

Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les points de coordonnées (α, β) pour lesquels f ainsi prolongée est dérivable à droite en 0.

Exercice 48 - Une limite difficile à deviner : ✪✪✪ On définit la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$$

Donner la limite de la suite (u_n). On pourra commencer par montrer (en utilisant les formules de trigo à bon escient) que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + \text{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exercice 49 - Involutions : ✪✪✪ Si $n \geq 1$, on note d_n le nombre d'involutions de $[\![1\,;\, n]\!]$ i.e. le nombre d'applications de $[\![1\,;\, n]\!]$ dans lui-même vérifiant $f \circ f = \text{Id}$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $d_n = d_{n-1} + (n-1)d_{n-2}$.
3. On pose, pour tout réel x, $f(x) = e^{x + \frac{x^2}{2}}$.
   (a) Prouver que f admet un DL à tout ordre en 0. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients.
   (b) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que, pour tout n, $d_n = a_n \times n!$.
   (c) Prouver finalement que :
   $$d_n = n! \times \sum_{p+2q=n} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q \times q!}$$

Exercice 50 - Nombres de Bernoulli : ✪✪✪ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f admet un DL à tout ordre en 0. On note la suite de ses coefficients $(a_n)_n$. Donner a_0, a_1, a_2.
2. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x) + \dfrac{x}{2}$, montrer que pour tout $k \geq 1, a_{2k+1} = 0$.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que
   $$\frac{a_2}{(n-1)!} + \frac{a_3}{(n-2)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2!} + \frac{a_n}{1!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$
   En déduire a_3 et a_4.

Remarque : Les nombres $b_n = n! \times a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli. On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$ où B_n est le n-ième polynôme de Bernoulli (cf exercice 3 du chapitre 10). Euler a montré en 1755 que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(2p) = |b_{2p}| \frac{2^{2p-1}}{(2p)!}\pi^{2p}$$

On voit que pour $p = 1$ on retrouve le fameux $\pi^2/6$.

Exercice 51 : ✪✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage V de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que pour tout $x \in V$:

$$\sin\varphi(x) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

Donner un DL de φ à l'ordre 10 en 0.

24.4 Asymptotes :

Exercice 52 : ✪

1. Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$ (on précisera bien sûr les positions relatives) :

   (a) $f : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$

   (b) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

   (c) $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}\operatorname{Arctan}(x)$

   (d) $f : x \mapsto e^{2/x}\sqrt{x^2+x+1}$

   (e) $f : x \mapsto (x+5)e^{-1/x}$

2. ✪✪ Même chose.

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^5 e^{2/x}}{(x-1)^4}$

   (b) $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

   (c) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+1}$

   (d) $f : x \mapsto \left(e^{1/x}-1\right)\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}$

   (e) $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2+9x+1} - x^2e^{\pi/x}$

   (f) $f : x \mapsto e^{1/(x+3)}\sqrt{x^2+5x+4}$

   (g) $f : x \mapsto x^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x^2}\right)$

24.5 Développements asymptotiques

Exercice 53 : ✪ Donner un développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}$ à la précision $\dfrac{1}{x^6}$.

Exercice 54 : ✪

1. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x-1}\right)$ à la précision $1/x^2$.
2. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ à la précision $1/x^2$.

Exercice 55 : ✪

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ réalise une bijection de $[\,e\,;+\infty\,[$ dans lui même.
2. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$: $f^{-1}(x) \sim x\ln(x)$.

Exercice 56 : ✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_0^1 e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt}f(t)\,\mathrm{d}t$ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ (toujours en $+\infty$).

Exercice 57 : ✪✪ Soit $n \geq 5$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-5} \frac{k!}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$
2. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

24.6 Développements asymptotiques copy/paste :

Exercice 58 : ✪✪ Déterminer les deux premiers termes significatifs du développement asymptotique de la réciproque de $f : x \mapsto xe^x$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 59 : ✪✪ Prouver que $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et donner un développement asymptotique à 3 termes de f^{-1} en $+\infty$.

Exercice 60 : ✪✪ Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = \mathrm{o}(x_n)$.
3. Montrer que $x_n \sim n$. Dans la suite on écrit $x_n = n(1+\alpha_n)$ avec $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Justifier que $\alpha_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \mathrm{o}(\ln n)$. Pourquoi n'écrit-on pas $x_n \sim n - \ln(n)$? Dans la suite on écrit $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Montrer que $\beta_n \sim -\dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$
6. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

Exercice 61 : ✪✪ Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$$

Déterminer deux réels a et b tels que

$$u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 62 : ✪

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel x_n strictement positif tel que ${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) = n$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
4. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

Exercice 63 : ✪✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x - n\ln(x) = 0$ admet deux solutions strictement positives $u_n < v_n$.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n) et (v_n).
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).
4. Déterminer un équivalent de (v_n).

Exercice 64 : ✪✪ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que ${u_n}^5 + nu_n - 1 = 0$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 65 : ✪✪✪

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \left[2n\pi\,;2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x_n) = \dfrac{1}{x_n}$.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Exercice 66 - Développement asymptotique de la « fonction inverse d'un polynôme » : ✪✪✪ Soient $n > m$ deux entiers naturels. On se donne P un polynôme unitaire de degré n tel que $P - X^n$ soit de degré m, c'est-à-dire que P s'écrit sous la forme

$$P = X^n + a_m X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k$$

avec $a_m \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que P soit une bijection entre $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ et $[\,P(\alpha)\,;+\infty\,[$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de P^{-1} en $+\infty$.

Exercice 67 : ✪✪✪

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in \left[n\pi\,;n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Illustrer graphiquement.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n\pi$. On note $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}(n)$.
4. Montrer que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
5. Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $1/n^2$.

Exercice 68 : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $x \geq 1$, il existe un unique réel noté $f(x) \geq 1$ tel que

$$f(x) + \sqrt{\ln(f(x))} = x$$

2. Donner un développement asymptotique de f à 3 termes lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(1+t) - 1 \sim t^2$ au voisinage de 0.
4. Donner l'allure du graphe de f.

Exercice 69 : ✪✪✪✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ admet une unique solution positive notée (a_n).
2. Montrer que (a_n) converge vers une limite qu'on notera L et qu'on explicitera.
3. Donner un équivalent de $a_n - L$.

Chapitre 25

Séries numériques

« Beaucoup d'éducateurs disent aux étudiants : "Considérez votre proviseur comme un copain" et bien moi je dis : considérez-moi comme votre juge, votre jury et votre bourreau. »

Buffy contre les vampires

Les séries sont supposées à valeurs réelles.

Vrai ou Faux :

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum q^n$ converge.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
4. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum(u_n+v_n)$ converge.
5. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
6. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent et sont à termes positifs alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.
7. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
8. Si $\sum(u_n+v_n)$ converge et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
9. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ diverge.
10. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ converge.
11. Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $\sum u_n$ diverge.
12. Si $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
13. Si $n^2u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
14. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente alors $\sum {u_n}^2$ converge.

25.1 Séries explicites

Exercice 1 : ✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n}{n^2+1}$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$
3. $\sum \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n-3}$
4. $\sum \frac{2024^{-n}}{n-2}$
5. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
6. $\sum \frac{\ln(n)^2}{n^{5/4}}$
7. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt[n]{5}-1\right)$
8. $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4}$
9. $\sum \frac{1}{\sin\left(n^2\right)+n}$
10. $\sum \frac{a^n}{1+b^n}, a>0, b>0$
11. $\sum \frac{e^n+e^{-n}}{e^{2n}+e^{-2n}}$
12. $\sum \frac{e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2}-\lfloor n^{3/2}\rfloor+n}$
13. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{n-1}}$
14. $\sum \frac{n+\ln(n)+e^{-n}}{(n+\pi)^3}$

15. $\sum \sin(n!)\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)}-1\right) \times \sqrt{\ln(n)}$

16. $\sum \frac{\ln(n)\sqrt{n}+\ln(\ln(n))}{n^2}$

17. $\sum \frac{(-1)^n \cos(n!^n)\ln\left(n^{2024}\right)}{n\sqrt{n}}$

18. $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$

19. $\sum \frac{\text{Arctan}\left(\pi^{-n}\right)\times \text{Arctan}\left(\pi^{n}\right)}{\ln(n)}$

20. $\sum \frac{1}{n^2-\ln(n)}$

21. $\sum \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n\sqrt{n}}-1$

22. $\sum \frac{n^{1789}\ln(n)^{2024}}{e^n}$

23. $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+(1/n)}$

24. $\sum \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$

25. $\sum 2\ln\left(n^3+1\right)-3\ln\left(n^2+1\right)$

26. ✪✪ $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$

27. $\sum \frac{n^2+\pi\sqrt{2}\times n^2\ln(n)-2024n}{n^4+3n^3+18n^2-1}$

28. ✪✪ $\sum n\times \ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$

29. ✪✪ $\sum \frac{(4/3)^n}{n^3}\sin^{2n}(\alpha), \alpha\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 2 : ✪ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\geq 1$ on pose

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. Étudier, suivant les valeurs de α, la convergence de la suite (u_n). En cas de convergence, donner sa limite.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Soit $x\in\,]-1\,;1\,[$. Étudier la nature de la série de terme général $u_n x^n$.

Exercice 3 : ✪ Soit $\alpha\in\,]\,0\,;1\,[$. Donner un équivalent, quand $n\to+\infty$, de

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$

Exercice 4 - Séries Konpadnom : ✪✪ Donner selon les valeurs de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^a(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c}$$

Exercice 5 - Un nombre de Pisot : ✪✪

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
2. En déduire la nature de la série $\sum \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Remarque : On dit que $x\in\mathbb{R}$ est un nombre de Pisot si $x>1$ et s'il existe un polynôme P unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x)=0$ et tel que toutes les autres racines complexes de P aient un module strictement inférieur à 1. Par exemple, $2+\sqrt{3}$ est un nombre de Pisot car est l'unique racine, avec $2-\sqrt{3}$ qui est de module strictement inférieur à 1, du polynôme X^2-4X+1. Le nombre d'or $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ est aussi un nombre de Pisot car annule X^2-X-1, et l'autre racine est $-1/\varphi$ de module strictement inférieur à 1. On peut montrer de la même façon que dans cet exercice (mais c'est un peu plus délicat à rédiger dans le cas général, il faut utiliser les relations coefficients racines) que si x est un nombre de Pisot réel, alors la série $\sum \sin(\pi x^n)$ converge.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $a>0$. Donner la nature de la série $\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Exercice 7 : ✪✪ Soient a et b deux réels, avec $b>0$. En utilisant la concavité du sinus sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, donner la nature de la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{n^a}\int_0^{\pi/n}\sin\left(x^b\right)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 8 - Des petits trous : ✪✪ Pour tout $n\geq 1$, on définit u_n par

$$u_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{si l'écriture décimale de } n \text{ ne contient pas le chiffre 5}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

On notera comme dans le cours $S_N=\sum_{n=1}^{N}u_n$.

1. Montrer que $S_9\leq 8$.

2. Montrer que $S_{99} \leq 8 + 8 \times \dfrac{9}{10}$.
3. Donner une majoration du même type pour S_{999}.
4. Donner la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 9 : ✪✪ Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^{N} k$$

2. En déduire que la série $\sum \dfrac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge.

Exercice 10 : ✪✪ À l'aide d'une transformation d'Abel, prouver que si $\alpha > 0$, alors la série $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^\alpha}$ converge.

Exercice 11 : ✪✪✪ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la série de terme général $\left(n^4 + n^2\right)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ converge.

Exercice 12 : ✪✪✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En séparant les cas $p = 1, p \geq 3$ et $p = 2$, donner la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(n+p)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+p)!}$$

Exercice 13 - Ne rien oublier en route : ✪✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^{a+1/2}} - \frac{1}{n^{3a} + 1}$$

Exercice 14 : ✪✪✪ Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 15 - Une identité de Lehmer (1936) : ✪✪✪ On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On rappelle enfin que si on pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

alors pour tout $n \geq 0$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

1. Montrer que la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right)$ converge.
2. Calculer $\varphi \times \psi$.
3. Montrer que ${F_{2n+1}}^2 = F_{2n}F_{2n+2} + 1$.
4. En déduire que

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 16 - Série des inverses des nombres premiers : ✪✪✪ On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Le but de cet exercices est de prouver que la série $\sum 1/p_n$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle converge.

1. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$$

   Dans la suite, un entier naturel n est dit grand s'il admet un diviseur premier supérieur ou égal à p_{k+1}, et il est dit petit dans le cas contraire, c'est-à-dire si tous ses diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_k (en particulier, un nombre premier petit est un nombre premier parmi $p_1, \dots, p_k$). Si $N \geq 2$, on note enfin N_g le nombre de grands entiers appartenant à $[\![2\,;\,N]\!]$, et N_p le nombre d'entiers petits appartenant à $[\![2\,;\,N]\!]$. On se donne dans la suite un entier $N \geq 2$.

2. Exprimer N en fonction de N_g et N_s.
3. Si $i \in \mathbb{N}^*$, donner le nombre de multiples de p_i inférieurs ou égaux à N. En déduire les deux inégalités suivantes :

$$N_g \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}$$

4. Soit $n \leq N$ un entier petit. Montrer qu'il existe a_n un entier produit de petits nombres premiers distincts et $b_n \in \mathbb{N}$ tels que $n = a_n \times {b_n}^2$. En déduire que $N_p \leq 2^k \times \sqrt{N}$.
5. Conclure.

Remarque : On vient de redémontrer au passage l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Le résultat de cet exercice découle en fait immédiatement du théorème des nombres premiers (démontré indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de La Vallée Poussin en 1896), qui stipule que $p_n \sim n\ln(n)$, et on sait que la série de terme général $1/n\ln(n)$ diverge (c'est une série de Bertrand)... sauf que ce résultat est incroyablement plus difficile à obtenir !

25.2 Calculs de sommes

Les séries dont on peut calculer la somme sont assez rares. Il y a deux façons de faire : en général, il faut calculer la somme partielle explicitement à l'aide d'un télescopage, et passer à la limite, mais on peut également utiliser des sommes infinies de référence pour calculer la somme infinie demandée.

Exercice 17 : ✪ Prouver la convergence de la série de terme général $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme. Même question avec la série de terme général $\sum \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

Exercice 18 : ✪ Même chose avec la série $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 19 : ✪✪ En utilisant la valeur de e comme somme de série, calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n!} \qquad \text{et} \qquad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Exercice 20 : ✪✪ En utilisant la valeur de $\zeta(2)$ calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Exercice 21 : ✪✪

1. Déterminer a et b pour que la série $\sum \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ converge.
2. Calculer alors sa somme.

Exercice 22 - La série des survivants : ✪✪✪ Dans la suite de terme général $1/n$ dont les termes sont écrits ci-dessous :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

on supprime le premier terme, on garde le suivant, on supprime les deux suivants, on garde celui suit, puis on supprime les trois suivants et on garde celui qui suit etc. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite ainsi obtenue. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 23 : ✪✪ Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Exercice 24 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $c(n)$ le nombre de chiffres de n en écriture décimale. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{c(n)}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

Exercice 25 : ✪✪✪

1. On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)$$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$. Commenter le signe.

2. **Remake :** Prouver l'existence et donner la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} - \frac{3}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right)$$

25.3 Séries alternées

Exercice 26 : ✪✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
2. $\sum \sin\left(\pi \times \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$.
3. ✪✪✪ $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\sum (-1)^n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$
5. $\sum (-1)^n e^{1/n}$
6. $\sum (-1)^n \sqrt{n} \times \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
7. $\sum \ln(n) \times \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$
8. $\sum \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$
9. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$
10. $\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$
11. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$
12. $\sum \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$

Exercice 27 : ✪✪ Donner la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 28 : ✪✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 29 : ✪✪✪ Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ converge et que sa somme est négative.

Exercice 30 : ✪✪✪✪

1. Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\right) - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

converge.

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n \times \frac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme.

25.4 Séries génériques

Exercice 31 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, et on suppose que $u_n \sim v_n$. Les deux séries sont donc de même nature.

1. ✪✪ Prouver que si les deux séries convergent, alors les restes sont équivalents.
2. ✪✪✪ Prouver que si les deux séries divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes.

Exercice 32 - Une inégalité bien pratique : ✪✪

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs. Donner la nature de $\sum \sqrt{a_n}/n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
4. On pose
$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum {u_n}^2 \ \text{ converge} \right\}$$
   (a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit. En donner un élément dont aucun terme n'est nul.
   (b) $\ell^2(\mathbb{N})$ contient-il des suites constantes non nulles ?
   (c) Si $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
   (d) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, la suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Et sans le mot « absolument » ?
5. ✪✪✪ Montrer que la série $\sum \dfrac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exercice 33 - Produits infinis : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[\,0\,;1\,[$. On lui associe la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \geq 1, \qquad q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k) = (1-u_1)\cdots(1-u_n)$$

1. Montrer que la suite (q_n) est convergente et que sa limite L vérifie $0 \leq L \leq 1$. Dans la suite, si la limite de la suite (q_n) est non nulle, on dit que la suite (q_n) est bien convergente. On note alors $L = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-u_k)$ et on dit que L est un produit infini bien convergent.
2. (a) Expliciter la suite (q_n) et donner sa limite lorsque (u_n) est définie par $u_n = n/(n+1)$.
   (b) Même question si pour tout $n \geq 1, u_n = 1/(n+1)$, puis dans le cas où $u_n = 1/(n+1)^2$.
3. On revient au cas général et on se donne une suite (u_n) quelconque d'éléments de $[\,0\,;1\,[$.
   (a) On suppose que la suite (q_n) est bien convergente. Donner la limite de la suite de terme général q_{n+1}/q_n. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que la suite (q_n) associée est bien convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. On pourra s'intéresser à la suite de terme général $\ln(q_n)$.

Exercice 34 - Contre-exemple au théorème de Brouwer en dimension infinie : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On suppose que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente et que sa somme, notée S_u, est inférieure ou égale à 1. On définit également la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_0 = \sqrt{1-S_u}$ et $v_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum {v_n}^2$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Montrer qu'il existe n tel que $v_n \neq u_n$.

Exercice 35 : ✪✪ Soit $\alpha < 0$ et soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \alpha f(x)$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer qu'il existe A tel que f soit décroissante sur $[\,A\,;+\infty\,[$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

2. En majorant f'/f sur un intervalle bien choisi, montrer que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 36 : ✪✪ Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que

$$u_n{}^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Donner la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de α.

Exercice 37 - Règle de Duhamel et applications : ✪✪ Soient (u_n) une suite strictement positive et λ un réel quelconque tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. (a) On pose $v_n = n^\lambda u_n, w_n = \ln(v_n)$ et enfin $t_n = w_{n+1} - w_n$. Montrer que la série $\sum t_n$ converge.
   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$. Où a-t-on déjà vu une méthode similaire ? En voici trois applications.
2. Soient (a, b) non entiers. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} \times u_n$$

   On suppose que a, b et α sont tels que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive. Donner la nature de $\sum u_n$.
3. Donner la nature de la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sqrt{(n-1)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

4. Pour tous $x > 0$ et $n \geq 0$ on note $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n)$. Soient $a, b, c > 0$. On pose

$$u_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \times \frac{1}{n!}$$

   La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauß*. Étudier sa convergence.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $\sum u_n$ une série convergente. On suppose que (u_n) est décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on pourra s'intéresser à $S_{2n} - S_n$ où, comme d'habitude, on a noté (S_n) la suite des sommes partielles de la série). Contre-exemple si (u_n) n'est pas décroissante ?

Exercice 39 : ✪✪

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de positivité.
2. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série qui converge absolument. Montrer que $\sum u_n{}^2$ converge. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la convergence et pas la convergence absolue.
3. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_1 \cdots u_n$ converge.

Exercice 40 - Il n'y a pas de frontière entre la convergence et la divergence : ✪✪✪ Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On note comme d'habitude (S_n) la suite des sommes partielles et, en cas de convergence, (R_n) la suite des restes.

1. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum \dfrac{u_n}{\sqrt{S_n}}$ diverge. En déduire qu'il existe une série à termes positifs divergente $\sum v_n$ telle que $v_n = \mathrm{o}(u_n)$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum \dfrac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ converge. On pourra justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

   En déduire qu'il existe une série à termes positifs convergente $\sum v_n$ telle que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exercice 41 - Critère de condensation de Cauchy : ✪✪✪✪ Soit (u_n) une suite qui décroît vers 0.

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle preuve de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
3. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum \min\left(u_n, \frac{1}{n}\right)$ diverge également.

Exercice 42 - Théorème de réarrangement de Riemann : ✪✪✪✪ Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = x$$

   En d'autres termes, lorsqu'on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, on peut réarranger les termes pour que sa somme ait une valeur arbitraire ! D'où l'intérêt de la convergence absolue pour définir la sommabilité : cf. chapitre 35.

2. **Remake :** Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

25.5 Formule de Stirling

Exercice 43 : ✪ A l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent des suites suivantes :

1. $u_n = \dbinom{2n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}$
3. $u_n = \ln(n!)$
4. $u_n = (n!)^{1/n}$
5. $u_n = \dfrac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}$
6. ✪✪ $u_n = \dbinom{n^2}{n}$

Exercice 44 : ✪ Donner la nature de la série $\sum \dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $\gamma \in \mathbb{R}$ et de $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 45 : ✪✪✪ Existence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

25.6 Comparaison série-intégrale

Exercice 46 : ✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^a}$$

Chapitre 26

Probabilités sur un univers fini

« Take a good look at me now, 'cos I'll still be standin' here
And you coming back to me is against all odds
It's the chance I've gotta take »

Phil Collins, Against All Odds (Take a Look At Me Now)

Si rien n'est précisé, on se place sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.

Vrai ou Faux :

1. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)$.
2. Si $P(A) + P(B) > 1$ alors $B \cap A \neq \varnothing$.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.
4. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$ alors $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
5. On se donne une urne contenant n boules rouges et n boules noires, et on procède à n tirages sans remise. Pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, notons R_k : « On tire une boule rouge à l'instant k ». Alors $P(R_1 \cap R_2) = 1/4$.
6. Avec les mêmes notations, $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants.
7. Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$.
8. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
9. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
10. Si $P(A) \in \,]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \leq P(B)$.
11. Si $P(A) \in \,]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \geq P(B)$.
12. Un événement de probabilité non nulle n'est pas indépendant de lui-même.
13. Si A et B sont indépendants et B et C sont indépendants, alors A et C sont indépendants.
14. Deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.

26.1 Manipulations de probabilités

Exercice 1 : ✪ Soient A et B deux événements avec $P(A > 0)$. Prouver que $P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$.

Exercice 2 : ✪ Soient A et B deux événements tels que

$$P(A) = \frac{7}{10}, \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

Calculer $P(A \Delta B)$.

Exercice 3 : ✪ On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{12}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}, \qquad p_5 = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad p_6 = \frac{1}{3}$$

1. Justifier qu'on peut munir $([\![1 \,;\, 6]\!], \mathscr{P}([\![1 \,;\, 6]\!]))$ d'une telle probabilité.

2. Décrire chacun des événements suivants comme des parties de $\Omega = [\![1\,;\,6]\!]$ et calculer leurs probabilités :
   (a) « Le chiffre est impair ».
   (b) « Le chiffre est supérieur ou égal à 2 ».
   (c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   (d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Exercice 4 : ✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\Omega = [\![1\,;\,n]\!]$. Soit P une fonction définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}$. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction P définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

Exercice 5 : ✪ Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A exerce une influence positive sur B si $P_A(B) \geq P(B)$. Montrer que A exerce une influence positive sur B si et seulement si B exerce une influence positive sur A.

Exercice 6 : ✪ On a truqué un dé à six faces numérotées de 1 à 6 de sorte que :
- les nombres pairs aient tous la même probabilité.
- les multiples de 3 aient tous la même probabilité.
- les nombres premiers aient tous la même probabilité.
- 1 sorte avec la probabilité $1/5$.

Donner la probabilité de chaque face.

Exercice 7 : ✪ Pour modéliser le tirage aléatoire d'une boule dans une urne contenant 3 boules jaunes et 2 boules vertes (indiscernables au toucher), on a proposé deux univers :

- $\Omega_1 = \{J; V\}$.
- $\Omega_2 = \{j_1; j_2; j_3; v_1; v_2\}$.

1. Pour chaque univers, décrire la probabilité P associée à l'expérience.
2. Selon quel critère peut-on privilégier l'un des univers par rapport à l'autre ?

Exercice 8 : ✪✪ Soit $G \subset \Omega$ tel que $P(G) = 1$. Montrer que pour tout événement A, $P(A \cap G) = P(A)$.

Exercice 9 : ✪✪ Donner une CNS sur x et y appartenant à $\mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité sur $\Omega = [\![1\,;\,3]\!]$ vérifiant $P(\{1;2\}) = x$ et $P(\{2;3\}) = y$.

Exercice 10 : ✪✪✪ Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

26.2 Construction d'espaces probabilisés, combinatoire

Exercice 11 : ✪ On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. un double ?
2. une somme égale à 9 ?
3. un minimum des deux dés égal à 4 ?
4. au moins un 6 ?

Exercice 12 - Problème de Galilée ou du duc de Toscane : ✪ Le duc de Toscane a remarqué que, lorsqu'on faisait la somme de trois dés équilibrés, le 10 semblait sortir plus souvent que le 9, alors qu'il existe autant de manières d'écrire 10 que d'écrire 9 comme somme de 3 entiers entre 1 et 6 :

$$\begin{aligned} 10 &= 6+3+1 \\ &= 5+4+1 \\ &= 6+2+2 \\ &= 5+3+2 \\ &= 4+2+2 \\ &= 4+3+3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9 &= 6+2+1 \\ &= 5+3+1 \\ &= 5+2+2 \\ &= 4+3+2 \\ &= 4+4+1 \\ &= 3+3+3 \end{aligned}$$

Expliquer cet apparent paradoxe.

Exercice 13 - Bienvenue à Gattaca : ✪ Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés A, C, G, T.

1. Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq A ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$?

Exercice 14 : ✪ Quelle est la probabilité que six dés équilibrés donnent chacun un chiffre différent ?

Exercice 15 : ✪✪ Soit N un nombre entier à au plus 100 chiffres choisi au hasard. Quelle est la probabilité que N^3 se termine par 11 ?

Exercice 16 - On peut tromper mille fois mille personnes : ✪✪ Une loterie a lieu chaque semaine. Il y a 100 billets dont 3 sont gagnants. Vaut-il mieux acheter 5 billets en une seule semaine, ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

Exercice 17 : ✪✪ Soit $n \geq 2$. On suppose que n joueurs lancent une pièce équilibrée.

1. Donner un espace probabilisé qui modélise cette expérience.
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne le contraire de tous les autres ?

Exercice 18 : ✪✪ On permute aléatoirement les lettres du mot baobab. Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore baobab ?

Exercice 19 - Autour de la formule du crible : ✪✪✪ Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. La formule du crible est la formule suivante : si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{J \subset [\![1\,;\, n]\!], \operatorname{card}(J)=k} P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right)$$

Voir par exemple l'exercice 38 du chapitre 27 pour une démonstration.

1. Écrire cette formule pour $n = 4$.
2. Application : Soit $n \geq 2$. A l'approche des fêtes de Noël, les n élèves de MP2I ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.
   (a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\operatorname{card}(\Omega)$.
   (b) Pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, introduisons A_j l'événement « Le j-ième élève tire son nom ». Soient $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et J une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ de cardinal k. Montrer que
   $$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$
   (c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est
   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$
   Nous avons vu au chapitre 25 que cette probabilité tend vers $\dfrac{1}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 20 - Puissances de l'imagination : ✪✪✪ Imaginons cette situation totalement impossible : à la fin de l'année, le professeur, un sadique fini, fait passer tous les élèves les uns après les autres, et fait tirer sans remise dans son chapeau magique une question de cours parmi toutes celles de l'année, disons 200. Un élève a impassé 40 questions de cours. Dans sa grande mansuétude, le professeur laisse les élèves décider de l'ordre de passage. Est-il plus avantageux pour cet élève de passer premier, deuxième, . . . , dernier ?

26.3 Divers (indépendance, manipulation d'ensembles etc.)

Exercice 21 : ✪ Soient A, B et C trois événements. Écrire à l'aide de A, B et C les événements : parmi A, B, C,

1. seul A se produit.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. deux événements au plus se réalisent.
4. deux événements ou plus se réalisent.
5. aucun des trois événements ne se produit.
6. un seul des événements se produit.

Exercice 22 : ✪ Deux joueurs A et B s'affrontent à pierre - papier - ciseaux. On suppose que tous les choix sont équiprobables et qu'ils choisissent indépendamment l'un de l'autre. Quelle est la probabilité d'avoir une égalité ? Quelle est la probabilité que A gagne ?

Exercice 23 - Probabilités à paramètres : ✪ On prend $\Omega = \llbracket 1\,;\,8 \rrbracket$. On définit sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ la probabilité P par

- $p_1 = \alpha$
- $p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{7-16\alpha}{24}$
- $p_5 = p_6 = p_7 = \dfrac{1+8\alpha}{24}$
- $p_8 = \dfrac{1}{8}$

où $\alpha \in \left[0\,;\,\dfrac{7}{16}\right]$. On a noté $p_k = P(\{k\})$ pour plus de commodité. On définit ensuite les trois événements A, B, C par

- $A = \{2; 5; 7; 8\}$
- $B = \{3; 5; 6; 8\}$
- $C = \{4; 6; 7; 8\}$

Étudier l'indépendance mutuelle éventuelle des événements A, B, C en fonction de α.

Exercice 24 : ✪ On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose que les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne :

- lorsque les composants sont montés en série ?
- lorsque les composants sont montés en parallèle ?
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle ?

Exercice 25 - Un autre problème des anniversaires : ✪ On a vu en cours que, dans une classe de 23 élèves, il y avait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux élèves soient nés le même jour. Cette fois, de combien d'élèves la classe doit-elle être composée pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins un autre élève partage VOTRE date de naissance ? On suppose pour simplifier que les naissances ont équiréparties et que personne n'est né le 29 février.

Exercice 26 - Les dés non transitifs d'Efron : ✪ On dispose de quatre dés A, B, C, D non pipés (au sens où chaque face sort avec probabilité 1/6) :

- Les faces du dé A sont : $0, 0, 4, 4, 4, 4$.
- Les faces du dé B sont : $3, 3, 3, 3, 3, 3$.
- Les faces du dé C sont : $2, 2, 2, 2, 6, 6$.
- Les faces du dé D sont : $1, 1, 1, 5, 5, 5$.

1. On note A le numéro obtenu par le dé A, B le numéro obtenu par le dé B etc. Calculer $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ et $P(D > A)$.
2. Deux joueurs s'affrontent selon le protocole suivant : le premier joueur choisit le dé qu'il veut, le second joueur choisit le dé qu'il veut parmi les trois dés restants. Le joueur obtenant le plus grand nombre gagne. Vaut-il mieux être le premier ou le second joueur ?

Exercice 27 - L'équiprobabilité entraîne l'indépendance : ✪ On lance deux fois une pièce dont on ignore si elle est équilibrée. On ignore même si les lancers sont indépendants. On sait juste que les quatre éventualités $(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)$ sont équiprobables. Montrer que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants.

Exercice 28 : ✪✪ Combien faut-il vérifier d'égalités pour montrer que n événements notés $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants ?

Exercice 29 : ✪✪ Soient $(A_1, \dots, A_n)$ n événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $e^{-\sum_{i=1}^n P(A_i)}$.

Exercice 30 : ✪✪ Un père propose un prix à son fils, un jeune joueur de tennis, s'il arrive à gagner au moins deux fois de suite dans l'une des deux configurations suivantes : père - entraîneur - père ou entraîneur - père - entraîneur. Sachant que l'entraîneur joue mieux que le père (et que les matchs sont indépendants), quelle configuration le fils doit-il choisir pour avoir le plus de chances de gagner ?

Exercice 31 : ✪✪ Lors d'un procès, deux jurys sont formés : un premier jury avec une seule personne qui a une probabilité p de prendre la bonne décision, et un deuxième jury avec trois personnes. Les deux premières prennent leur rôle au sérieux et prennent la bonne décision avec une probabilité p (de façon indépendante les uns des autres), tandis que le troisième, qui a hâte que cela se termine, tire à pile ou face. Ce jury donne une décision à la majorité. Quel jury a la plus grande probabilité de prendre la bonne décision ?

Exercice 32 - Indépendance accidentelle : ✪✪ On lance n fois une pièce équilibrée. On définit les événements :

- A_n : « on obtient, au cours des n lancers, au moins une fois Pile et au moins une fois Face ».
- B_n : « on obtient, au cours des n lancers, au plus un Pile ».

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Étudier l'indépendance des événements A_2 et B_2, puis des événements A_3 et B_3.
3. Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n dans le cas général.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $n \geq 2$. On considère $\Omega = \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Donner une CNS sur n pour que Ω contienne deux événements indépendants non triviaux (i.e. de probabilité appartenant à $]\,0\,;1\,[$).

Exercice 34 : On lance deux dés et on cherche la probabilité d'avoir une paire.

1. ✪ Montrer que si les deux dés sont équilibrés, la probabilité recherchée vaut $1/6$.
2. ✪✪✪ Montrer que si les deux dés sont pipés de la même façon, la probabilité recherchée est supérieure ou égale à $1/6$.

Exercice 35 : ✪✪ On considère $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2\,;\,n-1 \rrbracket$. On répète n fois une expérience dont l'issue peut être un succès ou un échec. Pour tout $j \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$, on note A_j l'événement « la j-ième expérience est un succès ».

1. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :
   (a) « La k-ième expérience est un échec ».
   (b) « Seule la k-ième expérience est un échec ».
   (c) « Aucune des expériences n'est un succès ».
   (d) « Toutes les expériences à partir de la k-ième sont des succès ».
   (e) « Seules les k dernières expériences sont des succès ».
   (f) « Toutes les expériences sauf une sont des succès ».
   (g) « Toutes les expériences sauf peut-être une sont des succès ».
   (h) « Le premier succès arrive à un instant pair » (on distinguera selon la parité de n).
2. Décrire à l'aide d'une phrase l'événement suivant :

$$\bigcup_{J \subset \llbracket 1\,;\,n \rrbracket, \mathrm{card}(J)=k} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \cup \left(\bigcap_{j \in \overline{J}} \overline{A_j} \right).$$

26.4 Probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes

Exercice 36 : ✪ Prouver l'idée naturelle suivante : « Si, dans chaque département, 57% des habitants adorent les probabilités, alors 57% des Français adorent les probabilités ».

Exercice 37 : ✪ On dispose de trois pièces équilibrées : l'une avec deux faces blanches, l'une avec deux faces noires, et la dernière avec une face de chaque couleur. On prend une pièce au hasard et on lance la pièce choisie (toujours la même).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » au premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » aux n premiers lancers ? Commenter.
3. Sachant que les n premiers lancers sont blancs, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit blanche. Commenter.

Exercice 38 : ✪ On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule. Calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro k (avec $1 \leq k \leq n$). Vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

Exercice 39 : ✪ Un lot de cent dés contient vingt-cinq dés pipés dont la probabilité d'obtenir 6 est 1/2. On lance un dé, on obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 40 : ✪ Il y a fort fort longtemps, dans un pays fort fort lointain (à Paris), un élève de la classe de ECS 1A a le choix entre quatre itinéraires :
- L'itinéraire A, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 14. La probabilité d'arriver en retard est de 1/20. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/3.
- L'itinéraire B, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 7. La probabilité qu'il arrive en retard est de 1/10. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/4.
- L'itinéraire C, où il doit emprunter (entre autres) le RER B. La probabilité qu'il arrive en retard est de 3/4.
- L'itinéraire D, où il doit juste marcher. Dans ce cas là, il n'arrive jamais en retard. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/3.

L'élève arrive en retard (pour changer). Quelle est la probabilité qu'il ait pris le RER B ?

Exercice 41 : ✪ On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![1\,;\,12]\!]$, la k-ième pièce tombe sur FACE avec probabilité $k/12$. On lance une pièce au hasard et on obtient FACE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la douzième pièce ?

Exercice 42 : ✪ On lance n dés équilibrés.

1. Donner la probabilité que le produit des numéros obtenus soit pair.
2. ✪✪ Même question avec la somme.

Exercice 43 : ✪✪ On dispose d'une urne avec $2n$ boules, n blanches et n noires. Soit $k \geq 1$.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.
   (a) Donner la probabilité que les k premières boules soient blanches.
   (b) Donner la probabilité que la k-ième boule soit blanche, sachant que les $k-1$ premières boules tirées sont blanches.
2. Mêmes questions si on suppose que les tirages se font sans remise.

Exercice 44 : ✪✪ Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, un douzième est malade. Parmi les malades, il y a quatre non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 45 : ✪✪

1. Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient (A_1, A_2, A_3) trois événements. Donner $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
2. Trois personnes portant un chapeau vont au théâtre. En partant, chacune d'elles prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

Exercice 46 : ✪✪ On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement E_n : « au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note, pour tout $n \geq 1, P_n$ la probabilité de E_n.

1. Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
2. En déduire que $P_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice 47 - Téléphone arabe : ✪✪ N personnes numérotées $1, 2, \dots, N$ se transmettent dans cet ordre une information reçue correcte par la première personne. Chaque personne transmet l'information qu'il entend avec probabilité $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et la transforme en son contraire avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que la N-ième personne reçoive l'information correcte ?

Exercice 48 : ✪✪ Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour. On suppose que $p_0 = 1$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n, α et p_0.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, en donner en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Exercice 49 : ✪✪ Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

- Si elle est dans la salle de bain à la n-ième minute, elle y reste avec probabilité $1/3$ ou elle va dans la chambre avec probabilité $2/3$.
- Si elle est dans la chambre à la n-ième minute, elle y reste avec probabilité $1/2$, elle va dans la salle de bain avec probabilité $1/4$ ou elle sort part la fenêtre avec probabilité $1/4$ pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n (respectivement b_n et c_n) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

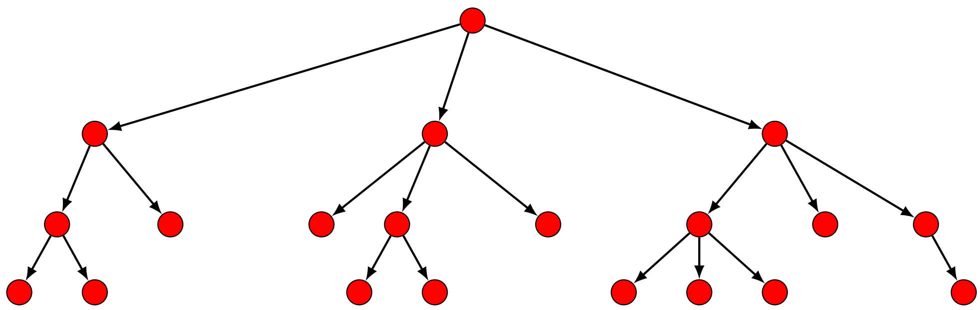
1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
3. Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, c_n et b_n en fonction de n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la n-ième minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
6. Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?

Exercice 50 : ✪✪ On tire à l'aveugle une allumette dans une boîte en contenant p petites, m moyennes et ℓ longues (où m, p, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\ell + p \neq 0$). Si l'on en tire une longue, on gagne ; si l'on en tire une petite, on perd ; et si l'on en tire une moyenne, on la jette en on recommence l'opération. On note $p_{\ell,m,p}$ la probabilité de gagner le jeu.

1. Calculer $p_{\ell,0,p}$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, exprimer $p_{\ell,m+1,p}$ en fonction de $p_{\ell,m,p}$.
3. En déduire que la probabilité de gagner le jeu est indépendante de m.

Exercice 51 : ✪✪✪ Un donjon contient N coffres et un dragon. Le chef du donjon a mis, avec probabilité p, le trésor dans un des coffres, tiré au sort (et avec probabilité $1-p$, il l'a confié au dragon). Vous avez ouvert les $N-1$ premiers coffres, sans succès. Quelle est la probabilité pour que le trésor soit dans le dernier coffre ?

Exercice 52 - Galton-Watson dans un cas simple : ✪✪✪ On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité $1/8$, 2 descendants avec la probabilité $3/8$, 1 descendant avec la probabilité $3/8$ et aucun descendant avec la probabilité $1/8$, indépendamment de ses congénères. À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.



1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8} \times {x_n}^3 + \frac{3}{8} \times {x_n}^2 + \frac{3}{8} \times x_n + \frac{1}{8}$$
3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers une limite que l'on explicitera. Interpréter ce résultat.

Exercice 53 - Le problème de Monty Hall : ✪✪✪ Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Exercice 54 : ✪✪✪ On considère trois urnes :

- l'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges.
- l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges.
- l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et on les met dans U_3. On tire une boule dans U_3 : elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 55 - Le problème du scrutin (preuve de Joseph Bertrand) : ✪✪✪ Lors d'une élection opposant deux candidats A et B, A reçoit n voix et B reçoit m voix (avec $m < n$). On suppose équiprobables les différents ordres d'apparition des bulletins lors du dépouillement. On note $P(n, m)$ la probabilité que A soit toujours strictement en tête lors de chaque étape du dépouillement.

1. Déterminer un espace probabilisé représentant cette expérience.
2. Prouver que la probabilité que le dernier bulletin soit pour A est égale à $\dfrac{n}{n+m}$.
3. Montrer finalement que $P(n, m) = \dfrac{n-m}{n+m}$. On pourra raisonner par récurrence sur $n + m$.

Chapitre 27

Variables aléatoires sur un univers fini

« Conduite en état d'ivresse, excès de vitesse, recel de portefeuilles, dégradation de matériel appartenant à l'État, détention de stupéfiants, et je suis sûr qu'avec un petit test de dépistage on pourrait rajouter consommation de stupéfiants : mais vous êtes nos gros gagnants de la semaine ! »

Quatre garçons pleins d'avenir

Dans ce chapitre, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Si rien n'est précisé, n est un entier supérieur ou égal à 1 et p un réel appartenant à $]\,0\,;1\,[$.

Vrai ou Faux ?

1. Si $X \sim B(p)$ alors $2X \sim B(2p)$.
2. Si $X \sim B(p)$ alors $1 - X \sim B(1-p)$.
3. Si $X \sim B(p)$ alors $X^2 \sim B\left(p^2\right)$.
4. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$ alors $n - X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$.
5. Si $X \sim B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ alors $n - X \sim B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.
6. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$ et si $X \sim B\,(n,p)$ alors $n - X \sim B\,(n,p)$.
7. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$ alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
8. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,4 \rrbracket)$ alors $X/2 \sim U(\llbracket 0\,;\,2 \rrbracket)$.
9. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,4 \rrbracket)$ alors $X + 2 \sim U(\llbracket 2\,;\,6 \rrbracket)$.
10. Si X est une variable aléatoire réelle alors $[X \leq 0] = \mathbb{R}^-$.
11. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X \leq 1) = P(X = 1)$.
12. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X \leq 2) = P(X = 2)$.
13. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X = \pi) = P(X = 3)$.
14. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors la probabilité que X soit un nombre pair est égale à la probabilité que X soit un nombre impair.
15. Si $E(X) = -1$ alors $E\left(X^2\right) = 1$.
16. $E\left(X^2\right) \geq E(X)^2$.
17. Si $E(X) \geq 0$ alors $P(X \geq 0) = 1$.
18. Si $E(X) = 0$ alors $P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$.
19. Si $P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$ alors $E(X) = 0$.

27.1 Variables aléatoires

Exercice 1 : ✪ Soit X une variable aléatoire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $E\left[(X-a)^2\right] \geq V(X)$.

Exercice 2 : ✪ Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $\llbracket 1\,;\,ab \rrbracket$ vérifiant :

$$\forall k \in \llbracket 1\,;\,ab \rrbracket, \qquad P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $E(X)$ et déterminer a et b afin que $E(X) = 7/2$.

Exercice 3 : ✪ Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Donner la loi de X et calculer son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.

Exercice 4 : ✪ Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, tandis que sur la deuxième roue il y a 1 vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante :

- 3 euros si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert.
- 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc.
- 50 centimes si les deux roues tombent sur un secteur blanc.

Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain s'il veut avoir un bénéfice moyen d'au moins 25 centimes par partie. Donner alors la loi du bénéfice.

Exercice 5 : ✪ Le gérant d'un magasin de téléphones intelligents a un très grand stock de téléphones que l'on peut considérer comme constant. La probabilité qu'un téléphone soit abîmé vaut $\dfrac{49}{1000}$. Un client achète n téléphones. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté au plus un téléphone défectueux ?

Exercice 6 : ✪ Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Soit $\alpha > 0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $e^{\alpha X/n}$ et donner sa limite quand $n \to +\infty$.

Exercice 7 : ✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $x \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X de loi $B(n,p)$. Justifier que $Y = \dfrac{1}{1+X}$, $Z = z^X$ et $U = \dfrac{1}{\binom{n}{X}}$ sont des variables aléatoires et calculer (sans expliciter leurs lois) leurs espérances.

Exercice 8 : ✪ En septembre 1693, Samuel Pepys écrivit à Newton pour lui soumettre le problème suivant : a-t-on le plus de chances d'obtenir (au moins) un 6 en lançant six dés, (au moins) deux 6 en lançant douze dés, ou (au moins) trois 6 en lançant dix-huit dés ? Qu'auriez-vous répondu à Samuel Pepys ?

Exercice 9 : ✪ Une boîte de bonbons contient 5 bonbons, dont 2 au poivre. Un garnement y pioche des bonbons au hasard et les mange, jusqu'à manger le premier bonbon au poivre. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonbons mangés par le garnement.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Même question pour la variable aléatoire Y donnant le nombre de bonbons restant dans la boîte après le passage du garnement.

Exercice 10 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 11 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules vertes et 20 boules rouges. On y effectue n tirages avec remise, et on note X le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)$.

Exercice 12 : ✪ Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On tire les boules sans remise jusqu'à tirer la boule blanche, on note X le nombre de tirages effectués. Montrer que X suit une loi uniforme.

Exercice 13 : ✪

1. Soit X qui suit une loi uniforme sur $[\![\,1\,;\,20\,]\!]$. Donner la loi de $\left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$.
2. **Remake :** Soit X qui suit une loi uniforme sur $[\![\,1\,;\,6n\,]\!]$. Donner la loi de $\cos(X\pi/3)$.

Exercice 14 - Inégalité de Jensen : ✪ Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$.

Exercice 15 : ✪ Soient X et Y deux variables aléatoires prenant les mêmes valeurs $x_1, \dots, x_n$. On suppose que, pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, $P(X = x_k) \leq P(Y = x_k)$. Que peut-on dire des lois de X et Y ?

Exercice 16 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![\,0\,;\,n\,]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$$

Exercice 17 : ✪✪ L'élément F d'une machine est source de pannes fréquentes (penser à la photocopieuse du lycée Faidherbe...). Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé. Le coût du dépannage (pièce et main d'oeuvre) s'élève à x euros et la perte de production due à cette panne à y euros. On suppose qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour. On note p_n la probabilité de bon fonctionnement le n-ième jour, la machine étant mise en route le premier jour. Si la machine fonctionne correctement le jour j, la probabilité qu'elle fonctionne correctement le jour $j+1$ est $0,6$, tandis que si elle ne fonctionne pas le jour j, l'élément F est changé et la probabilité qu'elle fonctionne le jour $j+1$ est $0,9$.

1. Donner une relation entre p_{n+1} et p_n. En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 et de n, puis la limite L de la suite p_n. On étudie à présent deux options.
2. La première option consiste à ne pas toucher à la machine tant qu'elle ne tombe pas en panne. On suppose à présent que la machine fonctionne chaque jour indépendamment des précédents avec la probabilité L de la question précédente. On note C_1 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien. Donner la loi de C_1 et en déduire son espérance en fonction de x et y.
3. La deuxième option consiste à effectuer chaque jour un entretien préventif de la machine, consistant à remplacer chaque jour, avant qu'elle ne tombe en panne, la pièce F. Le coût de cet entretien reste égal à x euros. Dans cette option, on interviendra chaque jour une fois ou deux, selon si la machine tombe en panne ou non. En effet, si on change la pièce le matin, elle peut encore tomber en panne et dans ce cas, il y a encore la perte de production de y euros, et il faut la dépanner une nouvelle fois l'après-midi. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne durant la journée est encore égale à $0,9$ puisque la pièce F est neuve. On note C_2 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien. Donner la loi de C_2 et son espérance en fonction de x et y.
4. Quelle option est plus rentable pour l'entreprise ? Représenter graphiquement l'ensemble des couples (x, y) qui conduisent à préférer la première option.

Exercice 18 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $B(n,p)$. On définit la variable Y par

- $Y = 0$ si $X \neq 0$.
- Si $X = 0$, Y suit une loi uniforme sur $[\![0 \,;\, n]\!]$.

Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 19 : ✪✪ Un individu gravit un escalier et dispose d'une pièce équilibrée. Avant chaque pas, il lance la pièce. Il monte une marche s'il obtient « Pile » et monte deux marches d'un coup s'il obtient « Face ». Déterminer le nombre moyen de marches gravies au bout de n pas.

Exercice 20 - Convergence en loi de la loi binomiale vers une loi de Poisson : ✪✪ Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]\,0\,;1\,[$ telle que $p_n \sim \lambda/n$. Pour tout n, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $B(n, p_n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Exercice 21 : ✪✪

1. Prouver de deux façons différentes la « formule des capitaines » :
$$\forall i \in [\![0 \,;\, n]\!], \forall k \leq i, \binom{i}{k} \times \binom{n}{i} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{i-k}$$
2. On lance n fois un dé équilibré et on lance une pièce équilibrée autant de fois qu'on a obtenu 6 avec le dé. Donner la loi du nombre de Face obtenus.
3. **Remake :** On tire au hasard un entier X entre 1 et n puis un entier Y entre 1 et X. Donner la loi de Y et son espérance.

Exercice 22 : ✪✪ Soit $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ une suite croissante d'événements telle que :

$$\forall i \in [\![0 \,;\, n]\!], P(A_i) = \frac{i}{n}$$

On note N la variable aléatoire de comptage associée à cette suite, c'est-à-dire :

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{N} \\ \omega & \mapsto & \mathrm{card}\left(\{i \in [\![1 \,;\, n]\!] \,|\, \omega \in A_i\}\right) \end{array} \right.$$

Donner la loi de N.

Exercice 23 : ✪✪ Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que, pour tout $\varepsilon > 0, P(|X_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais telle que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $(V(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Exercice 24 : ✪✪ L'avion A et l'avion B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité $p \in]\,0\,;1\,[$ de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins (au sens strict) de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de p, quel avion choisissez-vous ?

Exercice 25 : ✪✪ Deux joueurs jouent indépendamment l'un de l'autre n parties de pile ou face. Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent chacun le même nombre de face ? On rappelle (cf. chapitre 17 et exercice 52 du chapitre 14) que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Exercice 26 : ✪✪ Un joueur lance deux pièces supposées équilibrées. S'il n'obtient aucun pile, son gain est nul et la partie s'arrête. Sinon, il lance la pièce autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu. Son gain est alors le nombre de pile obtenus à la seconde étape du jeu.

1. Quelle est la probabilité que le gain soit nul ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu deux piles à la première étape sachant que son gain vaut 1 ?

Exercice 27 - La loi hypergéométrique : ✪✪

1. On dispose d'une urne contenant N boules. Parmi ces N boules, m portent une marque, et on pose $p = m/N$. On effectue n tirages sans remise (avec $n \leq m$ et $n \leq N - m$), et on définit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules marquées parmi les n tirées. Donner la loi de X en fonction de p, N et n.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, donner la limite de $P(X = k)$ quand $N \to +\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Exercice 28 - Fonctions génératrices : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$. On appelle fonction génératrice de X (respectivement de Y) notée G_X (respectivement G_Y) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G_X(t) = E\left(t^X\right)$ (respectivement $G_Y(t) = E\left(t^Y\right)$).

1. Montrer que G_X est une fonction polynôme et exprimer ses coefficients à l'aide des probabilités $P(X = k)$, pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. On a bien sûr une propriété analogue pour G_Y (il n'est pas demandé de le prouver).
2. À l'aide de la question précédente, expliciter G_X dans chacun des cas suivants :
   (a) X suit une loi certaine égale à $k_0 \in [\![0\,;\, n]\!]$.
   (b) $X \hookrightarrow B(p)$ (avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$).
   (c) $X \hookrightarrow U([\![0\,;\, n]\!])$.
   (d) $X \hookrightarrow B(n,p)$ (avec toujours $p \in \,]\,0\,;1\,[$). Le résultat final ne devra plus comporter de symbole $\sum$.
3. On revient au cas général (ie X est une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$). Montrer les égalités suivantes :
   (a) $G_X(1) = 1$.
   (b) $E(X) = {G_X}'(1)$.
   (c) $E(X(X-1)) = {G_X}''(1)$.
   (d) $V(X) = {G_X}''(1) + {G_X}'(1) - \left[{G_X}'(1)\right]^2$.
4. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont la même fonction génératrice.

Exercice 29 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si le numéro de la boule tirée est $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on la remet et on enlève les boules numérotées de $k+1$ à n (bien sûr, on n'enlève rien si $k = n$). On tire une nouvelle boule. On note Y le numéro de la boule obtenue à l'issue du premier tirage et X le numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.

1. Déterminer la loi de Y puis celle de X. On donnera des résultats exprimés en terme de sommes et on ne cherchera pas à les calculer (il n'y a pas de formule plus simple).
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Cette fois on présentera les résultats sous la forme de polynômes en la variable n.

Exercice 30 - Une urne de Pòlya : ✪✪ Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule de l'urne de la façon suivante : après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute c boules de la même couleur ($c \in \mathbb{N}$ fixé). Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k^e boule tirée est rouge et 0 si elle est blanche.

1. Donner la loi de X_1 et de X_2.
2. On note S_n le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
   (a) Calculer $P_{[S_n=k]}(X_{n+1} = 1)$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.

(b) En déduire que

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{r + cE(S_n)}{r + b + nc}$$

(c) Donner la loi de X_n pour tout n.

Exercice 31 : ✪✪ Soient $n \geq 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!] \qquad P(X = k) = \frac{\beta}{k+1} \times \binom{n}{k}$$

1. Donner la valeur de β.
2. Calculer $E(X+1)$ et en déduire l'espérance de X.
3. Calculer $E(X(X+1))$ et en déduire la variance de X.

Exercice 32 : ✪✪ Un candidat n'ayant absolument pas révisé répond au pifomètre à un QCM comportant 20 questions et k réponses possibles pour chaque question, une seule étant correcte. Le candidat obtient un point par bonne réponse et 0 pour une mauvaise.

1. Donner la loi du nombre de points obtenus.
2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, le professeur, dans sa grande mansuétude, lui permet de choisir à nouveau une des $k-1$ réponses restantes, et le candidat obtient $1/2$ point pour chaque nouvelle bonne réponse. On note Y_2 le nombre de bonnes réponses lors du second passage.
   (a) Soit $j \in \mathbb{N}$. Donner la probabilité que l'élève donne j bonnes réponses lors du deuxième passage, sachant qu'il en a donné i lors du premier.
   (b) Si $0 \leq j \leq 20 - i$, montrer que
   $$\binom{20}{i}\binom{20-i}{j} = \binom{20}{j}\binom{20-j}{i}$$
   (c) En déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   (d) Calculer l'espérance du nombre de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat puisse espérer avoir une note supérieure ou égale à 5.

Exercice 33 : ✪✪✪ Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules (avec $n \in [\![1\,;\, N]\!]$). On note X (respectivement Y) le plus petit (respectivement le plus grand) des nombres obtenus.

1. On considère dans cette question que le tirage s'effectue avec remise.
   (a) Soit $x \in [\![1\,;\, N]\!]$. Calculer $P(X \geq x)$. En déduire la loi de X.
   (b) Soit $y \in [\![1\,;\, N]\!]$. Calculer $P(Y \leq y)$. En déduire la loi de Y.
2. Mêmes questions en supposant que le tirage s'effectue sans remise.

Exercice 34 : ✪✪✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, \mathrm{d}x$. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pourra commencer par trouver une relation entre I_k et I_{k-1} pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$.
2. Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \dots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher telles que, pour tout $i \in [\![0\,;\, p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches, les autres boules étant noires. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.
   (a) Déterminer la loi de N_p.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$,
   $$P(N_p = k) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, \mathrm{d}x$$
   et déduire la valeur de cette limite.

Exercice 35 - Mines MP 2021 : ✪✪✪ Soit $X \sim B(n,p)$. Montrer que $\max\{P(X_n = k) \,|\, k \in [\![0 \,;\, n]\!]\} = P(X = x_n)$ où $x_n = \lceil np - q \rceil$, $q = 1 - p$ et où, pour tout réel x, $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq k\}$.

Exercice 36 : ✪✪✪ On dispose de deux dés : l'un est équilibré, et l'autre est tel que la probabilité de chaque numéro est proportionnelle au numéro. On dispose également d'une pièce qui fait sortir pile deux fois plus souvent que face. On lance la pièce une seule fois, au tout début. Si pile sort, on choisit le premier dé, et le second sinon. Ensuite on procède à n lancers de dé avec la règle suivante : on change de dé après un lancer si on a tiré lors de ce lancer un numéro strictement inférieur à 5. Quelle est la probabilité qu'en n lancers, on ne lance qu'une fois le premier dé ?

Exercice 37 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On lance $6n$ dés équilibrés. Quelle est la probabilité que chaque numéro de $[\![1 \,;\, 6]\!]$ apparaisse n fois ? Donner un équivalent de cette probabilité (lorsque n tend vers $+\infty$).

Exercice 38 - Formule du crible de Poincaré : ✪✪✪ Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Le but de l'exercice est de prouver la formule du crible de Poincaré :

$$P\left(A_1 \cup \dots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

1. Montrer que la formule du crible est une conséquence de l'égalité :

$$\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{i<j} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j} + \sum_{i<j<k} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j \cap A_k} + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_n}$$

   On désigne par φ l'application de droite dans l'égalité ci-dessus.
2. On suppose que $x \notin A_1 \cup \dots \cup A_n$. Montrer que $\mathbb{1}_{A_1 \cup \dots \cup A_n}(x) = \varphi(x)$.
3. On suppose que x appartient à m événements A_i (avec $1 \leq m \leq n$). Quitte à réordonner les A_i, on peut supposer que ces événements sont $A_1, \dots, A_m$. Montrer que :

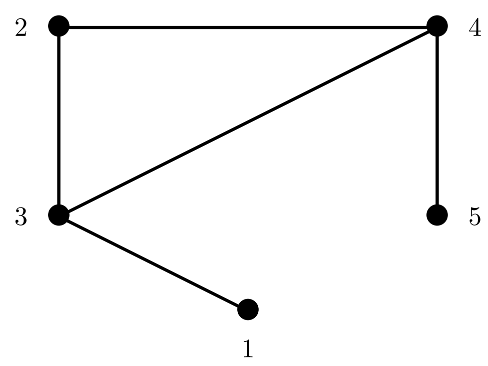
$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x) - \sum_{1 \leq i<j \leq m} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j}(x) + \sum_{1 \leq i<j<k \leq m} \mathbb{1}_{A_i \cap A_j \cap A_k}(x) + \dots + (-1)^{m-1} \mathbb{1}_{A_1 \cap \dots \cap A_m}(x) \\ &= \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots + (-1)^{m-1} \binom{m}{m} \end{aligned}$$

4. En calculant $(1-1)^m$, calculer le membre de droite ci-dessus et conclure.

Exercice 39 : ✪✪✪ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie telle que $Y_n(\Omega) = [\![1 \,;\, n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. Justifier qu'il y a $\displaystyle\binom{n}{k} n^{n+1-k}$ tirages de $n+1$ boules successivement avec remise dans cette urne tels que les k premières sont dans l'ordre strictement décroissant.
3. Déterminer alors $P(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$.
4. En déduire que, pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $P(Y_n = k) = \displaystyle\frac{k-1}{n^k} \binom{n+1}{k}$.
5. Calculer $E(Y_n)$ puis $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(Y_n)$.

Exercice 40 - Graphe aléatoire d'Erdös-Rényi : ✪✪✪✪ Un graphe (simple, fini, sans boucle) est un couple (S, A), où S est un ensemble fini et où A est une partie de $\mathscr{P}_2(S)$, où $\mathscr{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties de S à 2 éléments. Les éléments de S sont représentés par des points et les arêtes par des segments reliant les deux points qui les composent. Ci-dessous on a représenté le graphe (S, A) avec $S = [\![1 \,;\, 5]\!]$ et $A = \{\{1;3\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};\{4;5\}\}$:



On se donne dans la suite un ensemble fini S. On note $n \geq 1$ le nombre d'éléments de S (donc le nombre de sommets des graphes). On fixe un entier $m \geq 0$ dans la suite et on ne s'intéresse qu'aux graphes d'ensemble de sommets S contenant m arêtes. On note enfin Ω l'ensemble de ces graphes (i.e. des graphes de sommets S possédant m arêtes). On choisit sur Ω la probabilité uniforme notée P.

1. Si $G \in \Omega$, que vaut $P(G)$?
2. Soient i et j deux éléments distincts de S. On note $i \sim j$ l'événement « les deux sommets i et j sont reliés par une arête ». Calculer $P(i \sim j)$.
3. Soient i, j, k trois sommets distincts. Les événements $i \sim j$ et $j \sim k$ sont-ils indépendants ?
4. On appelle triangle d'un graphe un ensemble de trois sommets distincts $\{x; y; z\}$ tel que $x \sim y$, $y \sim z$ et $z \sim x$ (par exemple, le graphe ci-dessus contient un unique triangle, formé par les sommets $2, 3$ et 4). Quelle est l'espérance du nombre de triangles dans un graphe de Ω ?

27.2 Couples de variables aléatoires

Exercice 41 : ✪ Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B : \Omega \to \{0; 1\}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 42 : ✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre respectif p et q. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X, Y)$.

Exercice 43 : ✪ On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ identiquement distribuées, de loi $U(\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)$. On définit $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Calculer $E(Y)$. On pourra utiliser l'exercice 16.

Exercice 44 : ✪ On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

- $X = 1$ si on tire un roi, et 0 sinon.
- $Y = 1$ si on tire une dame, et 0 sinon.
- $Z = 1$ si on tire un coeur, et 0 sinon.

1. Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z).
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? et X et Z ?

Exercice 45 : ✪ N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$. Pour tout $i \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$, on note X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.

1. Pour tout $i \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$, déterminer la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 46 : ✪ Le produit de deux variables aléatoires indépendantes non identiquement nulles peut-il être identiquement nul ?

Exercice 47 : ✪✪ Montrer que deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli (pas forcément de même paramètre) sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Exercice 48 - Quand l'univers est trop petit : ✪✪ Soit $n \geq 2$.

1. On suppose qu'il existe n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \{0; 1\}$ indépendantes telles que, pour tout i, X_i suive une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in \,]\,0\,;1\,[$.

(a) Pour toute partie I de $[\![1\,;\,n]\!]$, on note :

$$A_I = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall i \in I, X_i(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin I, X_j(\omega) = 0\}$$

Montrer que les A_I sont deux à deux disjoints et tous de probabilité non nulle.

(b) En déduire que $\text{card}(\Omega) \geq 2^n$.

2. Soient $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\Omega = [\![0\,;\,n]\!]$. On munit Ω de la probabilité P définie par :

$$\forall k \in \Omega, P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Montrer que Id_Ω suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Que peut-on en déduire ?

Exercice 49 : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Les variables $X+Y$ et $X-Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 50 : ✪✪ Soient X une v.a. réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner une CNS pour que X et $f(X)$ soient indépendantes.

Exercice 51 - Fonction caractéristique : ✪✪ On considère dans cet exercice des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour X une telle variable aléatoire, on note $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R},\ \varphi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right)$$

1. Vérifier que φ_X est $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.
2. Calculer $\varphi_X(0)$, $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$.
3. Calculer φ_X lorsque $X \sim B(p)$ puis lorsque $X \sim B(n, p)$.
4. Vérifier l'égalité :
$$P(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_X(u) e^{-iuk}\, \mathrm{d}u$$
Que peut-on en déduire si $\varphi_X = \varphi_Y$?
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Exercice 52 : ✪✪ Soient X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1\,;\,n]\!]$ et telles que $P(X = i, Y = j) = \lambda ij$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

1. Que vaut nécessairement la constante λ ?
2. Donner la loi de X et calculer $E(X)$ et $V(X)$. Même question pour la variable Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X = Y)$.
5. Calculer la loi de $U = \max(X, Y)$.

Exercice 53 : ✪✪ Soient n_1 et n_2 deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On se donne X_1 une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n_1 et p, et X_2 une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n_2 et p. On rappelle (cf. cours) que $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$. Soit $n \in [\![0\,;\,n_1+n_2]\!]$. On suppose enfin que X_1 et X_2 sont indépendantes. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant que l'événement $[X_1 + X_2 = n]$ est réalisé.

Exercice 54 : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

1. la loi du couple (U, V).
2. la covariance de U et V.
3. si U et V sont indépendantes.

Exercice 55 - Espérance conditionnelle : ✪✪ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Pour tout événement non négligeable (i.e. de probabilité non nulle) $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant que A est réalisé :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|A)$$

1. Montrer que l'espérance sachant que A est réalisé est linéaire.
2. Calculer $E(X|A)$ dans le cas où les variables aléatoires X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes.
3. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements non négligeables. Montrer la formule des espérances totales :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{p} E(X|A_i)P(A_i)$$

4. Application : soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p et soit $N : \Omega \to [\![1\,;\, q]\!]$ une variable aléatoire entière (où q est un entier supérieur ou égal à 1 fixé). On suppose que toutes ces variables sont indépendantes. Calculer l'espérance de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Exercice 56 : ✪✪ On tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 boules bleues (avec $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$). On note X le rang d'apparition de la première boule bleue et Y le rang d'apparition de la seconde.

1. Préciser la loi marginale de X, la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi marginale de Y.
2. Soit $k \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $[Y = k]$ est réalisé.
3. Soit $k \geq 1$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y - k$ sachant que $[X = k]$ est réalisé.

Exercice 57 : ✪✪ Soit $n \geq 2$. On dispose de n urnes $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$. Pout tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire un jeton dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance.
2. Expliciter la loi conjointe de X et Y.
3. En déduire que pour tout $\ell \in [\![1\,;\, n]\!]$, $P(Y = \ell) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{k}$.
4. Calculer l'espérance de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 58 : ✪✪ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note u_n la probabilité que S_n soit pair.

1. Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
2. Calculer u_1 et u_2 puis trouver une relation de récurrence liant u_n et u_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 59 : ✪✪ On considère X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant toutes une loi uniforme sur $[\![1\,;\, n]\!]$. On note Y_1, Y_2, Y_3 les valeurs de X_1, X_2, X_3 réordonnées dans l'ordre croissant. En particulier, $Y_1 = \min(X_1, X_2, X_3)$ et $Y_3 = \max(X_1, X_2, X_3)$.

1. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, trouver $P(Y_3 \leq k)$. En déduire la loi de Y_3.
2. Déterminer la loi de Y_1.
3. On note Z_k la variable aléatoire égale au nombre d'indices $i \in [\![1\,;\, 3]\!]$ tels que $X_i \leq k$.
   (a) Quelle est la loi de Z_k ?
   (b) Comparer $[Z_k \geq 2]$ et $[Y_2 \leq k]$. En déduire $P(Y_2 \leq k)$.

Exercice 60 - La loi triangulaire : ✪✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[\![0\,;\, n]\!]$. Donner la loi de $Z = X+Y$ et la représenter sous forme d'histogramme pour $n = 5$. Expliquer le nom de cette loi.

Exercice 61 : ✪✪✪ Le but de cet exercice est de prouver de deux façons différentes qu'il est impossible de truquer deux dés de sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme sur $[\![2\,;\, 12]\!]$. Dans les deux cas, on fait un raisonnement par l'absurde et on suppose que c'est possible. On note :

- X_1 la variable aléatoire égale au résultat du premier dé.
- X_2 la variable aléatoire égale au résultat du deuxième dé.
- $S = X_1 + X_2$, et donc $S \sim U([\![2\,;\, 12]\!])$.
- pour tout $k \in [\![1\,;\, 6]\!], p_k = P(X_1 = k)$ et $q_k = P(X_2 = k)$.

1. **Première méthode :** par la force brute.
   (a) Pour tout $k \in [\![2\,;\,12]\!]$, exprimer $P(S=k)$ en fonction des p_i et q_j. Montrer en particulier que $p_1q_1 = p_6q_6 = 1/11$ et que $p_1q_6 + p_6q_1 \leq 1/11$.
   (b) En déduire que :
   $$p_1q_6 + p_6q_1 = \frac{1}{11} \times \frac{{p_1}^2 + {p_6}^2}{p_1p_6}$$
   (c) Conclure à une absurdité.
2. **Deuxième méthode :** avec des polynômes. On définit les polynômes $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} p_{k+1}X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} q_{k+1}X^k$.
   (a) Exprimer le polynôme $P \times Q$ à l'aide de la variable aléatoire S.
   (b) En déduire le degré de P et de Q, puis que P et Q ont chacun au moins une racine réelle.
   (c) Donner les racines complexes de $P \times Q$ et en déduire une absurdité.

Exercice 62 : ✪✪✪ On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, on pose $Y_i = X_iX_{i+1}$. On pose enfin : $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, donner la loi de Y_i.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Calculer la variance de Y.

Exercice 63 : ✪✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.

1. On suppose dans cette question que X et Y suivent une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Donner $P(X=Y)$ et en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$. On pourra utiliser le fait que
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
2. On revient au cas général i.e. que X et Y suivent une loi quelconque (mais la même). Notons $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{u_0; \dots ; u_n\}$ et, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, $p_k = P(X=u_k) = P(Y=u_k)$. Donner les variations de la fonction φ définie sur $[\,0\,;1\,]$ par :
   $$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-t}{n+1} + tp_k \right)^2$$
   En déduire que $P(X=Y) \geq \dfrac{1}{n+1}$. Cas d'égalité ?

Exercice 64 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$. On considère un couple (X,Y) de variables aléatoires de loi conjointe :

$$\forall j \in [\![0\,;\,n]\!], \forall k \in [\![1\,;\,n]\!], P(X=j, Y=k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k=j \text{ et } j \neq 0 \\[2ex] \dfrac{(1-p)^n}{n} & \text{si } j=0 \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner les lois marginales du couple, et les espérances de X et Y.
2. Soit $j \in [\![0\,;\,n]\!]$. Donner la loi conditionnelle de Y sachant que $[X=j]$ est réalisé.
3. Calculer l'espérance correspondante.
4. Montrer que $P(X=1, Y=1) \neq P(X=1)P(Y=1)$.
5. Calculer $E(XY) - E(X)E(Y)$. Montrer que cette quantité s'annule pour une valeur de p.
6. Qu'en déduire ?

Exercice 65 : ✪✪✪ Soient p et q deux éléments de $[\,0\,;1\,]$.

1. Soient A et B deux événements de probabilités respectives p et q. Donner toutes les probabilités possibles de $P(A \cap B)$.
2. Soient $X \sim B(p)$ et $Y \sim B(q)$. Donner toutes les lois conjointes possibles du couple (X,Y).

27.3 Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 66 - La convergence L^p implique la convergence en proba : ✪ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe $p \in [\,1\,;+\infty\,[$ tel que $E\left(|X_n - X|^p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 67 : ✪ On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$). On note X le nombre de pile obtenus, et $F = \dfrac{X}{n}$ leur fréquence.

1. Expliciter l'espérance et la variance des variables aléatoires X et F.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, que la fréquence des piles obtenus diffère de 1/2 de moins de 5%.

Exercice 68 : ✪✪ Soient X une v.a. réelle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, strictement positive et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{f(a)}$$

Exercice 69 - Deux inégalités « type Markov » : ✪✪ Soit X une variable aléatoire. On suppose que X est à valeurs dans $[\,-b\,;b\,]$ avec $b > 0$. Montrer que pour tout $a \in \,]\,0\,;b\,[$,

$$\frac{E\left(X^2\right) - a^2}{b^2 - a^2} \leq P(|X| \geq a) \leq \frac{E\left(X^2\right)}{a^2}$$

Exercice 70 : ✪✪ Soit $X \sim B(n,p)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Exercice 71 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Exercice 72 - Théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. On note $(B_n)_{n\geq 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :
$$\forall (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2, |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$
2. On se donne dans la suite un tel η, ainsi qu'entier $n \geq 1$ et un réel $x \in [\,0\,;1\,]$, et on note S_n une variable aléatoire suivant une loi $B(n,x)$. Exprimer $E(f(S_n/n))$ à l'aide du polynôme B_n.
3. On note A_n l'événement $\left[\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right]$. Justifier que
$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right) \leq \varepsilon$$
4. Justifier l'existence d'un réel $M = \max_{[\,0\,;1\,]} |f|$ et prouver que
$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{A_n}\right) \leq 2MP(A_n)$$
5. Justifier que :
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [\,0\,;1\,], |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Exercice 73 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $B(4n, 1/2)$.

1. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \geq n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \leq n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

3. Donner un équivalent simple, quand $n \to +\infty$, de $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$.

Exercice 74 : ✪✪✪ Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$. À l'aide de la variable aléatoire $Y = (\alpha(X-\mu)+\sigma)^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{1}{1+\alpha^2}$$

27.4 Inégalités de concentration

Exercice 75 : ✪✪ Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$.

1. Simplifier la quantité $V(X) + E((b-X)(X-a))$. En déduire l'inégalité de Bathia-Davis :

$$V(X) \leq (b - E(X))(E(X) - a)$$

2. En déduire l'inégalité de Popoviciu :

$$V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

3. Soit $X \sim B(1/2)$. Calculer $V((b-a)X + a)$. Qu'en déduit-on ?

Exercice 76 : ✪✪✪

1. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes indépendantes et de même loi. Montrer que $|E(Z_1)|^2 = E\left(Z_1 \times \overline{Z_2}\right)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, à valeurs dans un intervalle de longueur $L \leq \pi/2$.
   (a) Montrer que $\left|E\left(e^{iX}\right)\right|^2 = E(\cos(X-Y))$.
   (b) Montrer que $|\cos(x)| \geq \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| \geq \max\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \cos(t)\right\}$.
   (d) Donner un exemple de variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle de longueur $L \leq \pi/2$ pour laquelle $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice 77 - Inégalité de Hoeffding (1963) : ✪✪✪ Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans un segment $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et soit $\lambda > 0$.

1. (a) Donner le signe de a et b. A-t-on forcément $a = -b$?
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $e^{\lambda X} \leq Z$ où

$$Z = \frac{b-X}{b-a} \times e^{\lambda a} + \frac{-a+X}{b-a} e^{\lambda b}$$

   (d) Montrer que

$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq \frac{b}{b-a} \times e^{\lambda a} - \frac{a}{b-a} \times e^{\lambda b}$$

2. Soit $\alpha \in [\,0\,;1\,]$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = -\alpha x + \ln\left((1-\alpha) + \alpha e^x\right)$.
   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A et B que l'on exprimera en fonction de α et de x tels que $\varphi''(x) = AB/(A+B)^2$.
   (b) En déduire que $0 \leq \varphi''(x) \leq 1/4$.
3. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(t) = \ln\left(\dfrac{b}{b-a} \times e^{t\times a} - \dfrac{a}{b-a} \times e^{t \times b}\right)$.
   (a) Montrer que $0 \leq g''(\lambda) \leq (b-a)^2/4$.
   (b) Donner $g(0)$ et $g'(0)$. En déduire l'inégalité de Hoeffding :

$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right)$$

4. On se donne à présent une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi que X et on pose comme en cours $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Montrer que $P(S_n \geq n\varepsilon) = P\left(e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon} \geq 1\right)$.
   (b) À l'aide de l'inégalité de Markov, de l'inégalité de Hoeffding et enfin d'une valeur de λ bien choisie, montrer que :
   $$P(S_n \geq n\varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$
   (c) Comparer avec le résultat obtenu en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 78 - Inégalité de Chernoff : ✪✪✪ On se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher i.e. vérifiant $P(X_n = \pm 1) = 1/2$ pour tout n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $F_n = S_n/n$.

1. Montrer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit la majoration suivante : $P(|F_{10000}| \geq 1/10) \leq 1/100$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $H(t) = \ln\left(E\left(e^{tX}\right)\right)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X \geq a) \leq e^{\inf_{t\geq 0}(H(t) - a\times t)}$.
3. Lorsque $X = F_n$, prouver que $H(t) = n\ln\left(\operatorname{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)$.
4. En déduire que $P(|F_{10000}| \geq 1/10) \leq 3,6 \times 10^{-22}$. On pourra utiliser une calculatrice.

Exercice 79 - Une inégalité maximale (Centrale MPI 2023) : ✪✪✪ Soient $n \geq 2$ et $Z_1, \ldots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout $p \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note $R_p = \sum_{i=1}^{p} Z_i$. Le but de l'exercice est de prouver la propriété :

$$\forall x > 0, \qquad P\left(\left\{\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}\right) \leq 3 \max_{1\leq p\leq n} P\left(\{|R_p| \geq x\}\right)$$

On se donne dans la suite un réel $x > 0$. Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$. Ainsi :

$$A = \left\{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$$

Enfin, on définit les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geq 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \left\{\max_{1\leq i\leq p-1} |R_i| < 3x\right\} \cap \{|R_p| \geq 3x\}$$

1. Exprimer A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. Montrer que :
   $$P(A) \leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^{n} P\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right)$$
3. Justifier que, pour tout $p \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a l'inclusion :
   $$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$$
4. En déduire que :
   $$P(A) \leq P(|R_n| \geq x) + \max_{1\leq p\leq n} P\left(\{|R_n - R_p| > 2x\}\right)$$
5. Conclure.