Chapitre 5

Fonctions circulaires/Trigonométrie.

On se place dans ce chapitre dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et on se contentera parfois de définitions intuitives, certaines définitions rigoureuses étant hors de notre portée (par exemple : qu'est-ce qu'un angle ?), ou de considérations géométriques pour démontrer certains résultats.

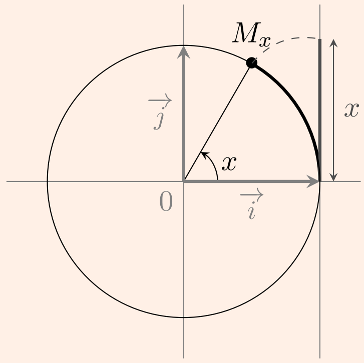
I Les fonctions trigonométriques

I.1 Sinus et cosinus d'un réel

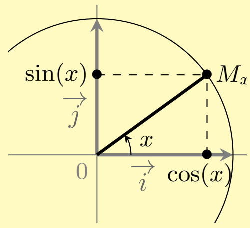
I.1.a Définition et premières propriétés

Définition (cercle trigonométrique).

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1. À tout réel x, on associe un point M_x du cercle trigonométrique en parcourant le cercle sur une distance x dans le sens trigonométrique (i.e le sens inverse des aiguilles d'une montre) à partir du point de coordonnées $(1, 0)$. Le réel x est alors appelé mesure (en radian) de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM_x})$.



On parle de distance au sens algébrique du terme : si $x < 0$, on parcourt le cercle dans le sens anti-trigonométrique (i.e le sens des aiguilles d'une montre) sur une distance $-x$.



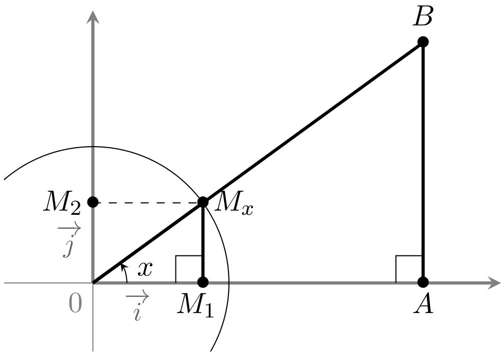
Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- L'abscisse du point M_x est appelée cosinus de x et notée $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point M_x est appelée sinus de x et notée $\sin(x)$.

Remarque : Cette définition généralise celle vue au collège. Plus précisément, si $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et si on se donne un triangle rectangle dont l'un des angles est égal à x, alors on a encore

$$\cos(x) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

Soit en effet OAB un triangle rectangle en A et d'angle $\widehat{AOB}$ égal à x :



On peut travailler sans perte de généralité avec un triangle rectangle dont l'angle valant x est en O, un triangle rectangle quelconque (avec un angle valant x) se ramène à ce cas de figure par translation, rotation ou symétrie, ce qui ne change pas les longueurs.

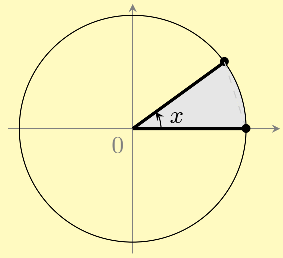
Les droites (AB) et (M_1M_x) étant parallèles (car toutes les deux perpendiculaires à l'axe des abscisses) et les points O, M_1, A et O, M_2, B alignés dans cet ordre, d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{OM_1}{OA} = \frac{OM_x}{OB}$$

et puisque $OM_1 = \cos(x)$ et $OM_x = 1$, on obtient $\cos(x) = \dfrac{OA}{OB}$ ce qui est le résultat voulu, et c'est la même chose pour le sinus.

Remarque : On rappelle que le périmètre ou la longueur d'un cercle de rayon $R > 0$ vaut $2\pi R$ et que l'aire d'un disque de rayon R vaut πR^2. Par conséquent, une simple règle de proportionnalité donne le résultat suivant :

En effet, l'aire est proportionnelle à l'angle (penser à une part de tarte), et un angle de 2π donne une aire de πR^2.



Proposition. Soit $x \in [\,0\,;2\pi\,]$. Soit $R > 0$.

- La longueur d'un arc de cercle de rayon R délimité par un angle égal à x vaut $x \times R$.
- L'aire d'une portion de disque de rayon R d'angle x est $\dfrac{xR^2}{2}$.

Proposition.

- (**identité fondamentale**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du fait que, si un point du plan de coordonnées (a, b) est sur le cercle centré en l'origine et de rayon 1, alors $a^2 + b^2 = 1$. Ensuite $a^2 \leqslant a^2 + b^2 = 1$ donc $|a| \leqslant 1$. De même $|b| \leqslant 1$.

Remarque : Nous prouverons dans le paragraphe I.2.d que la réciproque est vraie , c'est-à-dire que si a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(x)$ et $b = \sin(x)$. De plus, x est unique si on se place sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π. On en déduit une paramétrisation du cercle trigonométrique : si on le note C, alors $C = \{(\cos(x), \sin(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire que C est exactement l'ensemble des points de coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$ quand $x \in \mathbb{R}$. Ce résultat sera utile dans le chapitre 7.

Cela se voit bien intuitivement : en enroulant la droite autour du cercle, on recouvre le cercle donc tout point du cercle a des coordonnées du type $(\cos(x), \sin(x))$.

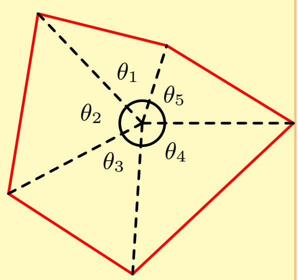
On rappelle que, la longueur d'un cercle de rayon 1 est égale à 2π. Ainsi, lorsqu'on ajoute ou enlève 2π (ou $2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$), on fait un tour complet (ou plusieurs) donc le point correspondant sur le cercle est le même :

Proposition. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \qquad \text{et} \qquad \sin(x + 2k\pi) = \sin(x).$$

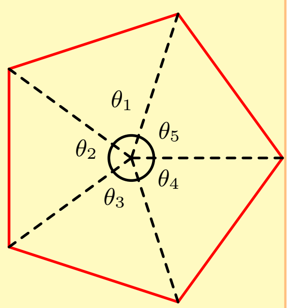
De plus, cela signifie qu'à un tour entier (dans le sens positif) correspond un angle de 2π. Par exemple, cela implique que la somme des angles intérieurs d'un polygone convexe vaut 2π. De plus, si le polygone est régulier et a n côtés (avec $n \geqslant 2$), alors les angles sont tous égaux à $2\pi/n$. Ci-contre un polygone non régulier et un polygone régulier dans le cas $n = 5$.

Polygone quelconque :



$\theta_1 + \cdots + \theta_5 = 2\pi$

Polygone régulier :

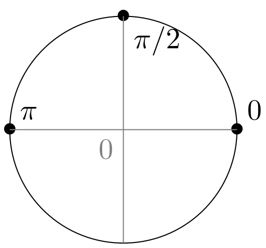


$\theta_1 = \cdots = \theta_5 = 2\pi/5$

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

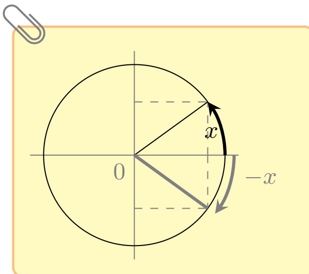
Démonstration. Les valeurs en 0, $\pi/2$ et π s'obtiennent en plaçant les points correspondants sur le cercle trigo (le périmètre du cercle valant 2π, on se trouve en $\pi/2$ après un quart de tour, dans le sens positif, et on se trouve en π après un demi-tour) :



Pour $\pi/4$, on calcule le sinus et le cosinus en se plaçant dans un triangle rectangle isocèle (et en appliquant le théorème de Pythagore). Enfin, pour $\pi/3$ et $\pi/6$, on se place dans un triangle équilatéral qu'on découpe en deux triangles rectangles d'angles (non droits) $\pi/3$ et $\pi/6$ à l'aide d'une médiatrice-bissectrice-hauteur-médiane (le triangle étant équilatéral, ces droites sont confondues) et là aussi on calcule les sinus et cosinus à l'aide du théorème de Pythagore : $\rightsquigarrow$ Exercice.

I.1.b Formules de trigonométrie

Lemme. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. En d'autres termes, la fonction cos est paire et la fonction sin est impaire (cf. paragraphe I.2).

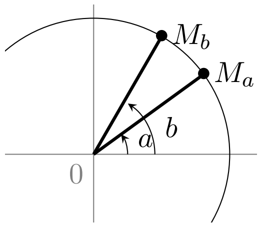


Démonstration. Le point M_{-x} est obtenu en parcourant le cercle en sens inverse par rapport au sens choisi pour M_x. En particulier, M_{-x} est le symétrique de M_x par rapport à l'axe des abscisses : il en découle que ces deux points ont même abscisse mais des ordonnées opposées.

Proposition (formules d'addition). Soient a et b deux réels.

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Démonstration. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Notons $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{OM_a}$ et $\overrightarrow{OM_b}$ c'est-à-dire que $\overrightarrow{u}$ est le vecteur de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ et que $\overrightarrow{v}$ est de coordonnées $(\cos(b), \sin(b))$.



Alors (cf. cours de première, mais nous généraliserons la notion de produit scalaire cette année) $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est l'angle (orienté) formé par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est-à-dire en allant de $\overrightarrow{u}$ vers $\overrightarrow{v}$. En d'autres termes, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étant de norme 1, il vient : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \cos(a-b)$. Or, d'après l'expression du produit scalaire dans un repère orthonormal, il vient :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \cos(a) \times \cos(b) + \sin(a) \times \sin(b)$$

et la deuxième formule est démontrée.

On obtient la première en appliquant cette formule à a et $-b$ et en utilisant le fait que le cos est une fonction paire et le sin une fonction impaire :

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a-(-b)) \\ &= \cos(a)\cos(-b) + \sin(a)\sin(-b) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \end{aligned}$$

Parité du cos, imparité du sin.

et la première formule est démontrée.

En appliquant la deuxième formule avec $a = \pi/2$, il vient : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin(b)$. En appliquant ce résultat à $\frac{\pi}{2} - b$, il vient : $\cos(b) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$. Finalement :

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a+b\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos(b)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin(b)\\
&= \sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a) \qquad \square
\end{aligned}$$

et la troisième formule est démontrée. La quatrième s'en déduit en l'appliquant à a et $-b$ et en utilisant la parité du cos et l'imparité du sin.

Corollaire. Soient a et b deux réels.

Formules de l'angle double.

$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

$$\begin{aligned}
\cos(2a) &= \cos^2(a)-\sin^2(a)\\
&= 2\cos^2(a)-1\\
&= 1-2\sin^2(a)
\end{aligned}$$

Formules de l'angle triple.

$\sin(3a) = 3\sin(a)-4\sin^3(a)$

$\cos(3a) = 4\cos^3(a)-3\cos(a)$

Formules de décalage.

- $\cos(a+\pi) = -\cos(a)$
- $\sin(a+\pi) = -\sin(a)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \cos(a+n\pi) = (-1)^n\cos(a)$
- $\forall n \in \mathbb{Z}, \sin(a+n\pi) = (-1)^n\sin(a)$
- $\cos(\pi-a) = -\cos(a)$
- $\sin(\pi-a) = \sin(a)$
- $\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(a)$
- $\sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(a)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \sin(a)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right) = \cos(a)$

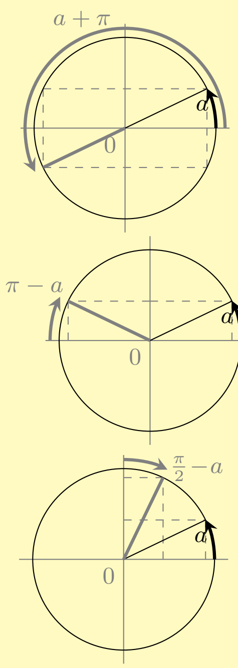
Formules de linéarisation.

- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)$
- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right)$
- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$
- $\cos^2(a) = \dfrac{1+\cos(2a)}{2}$ et $\sin^2(a) = \dfrac{1-\cos(2a)}{2}$

Formules de factorisation.

- $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Celles-ci peuvent se retrouver facilement à l'aide d'un dessin :



etc. Conseil : prendre a petit (on a pris $a = \pi/7$ sur le dessin) et non pas a proche de $\pi/4$ (le milieu de l'arc), sinon on risque de confondre sinus et cosinus (car ils sont égaux !).

DÉMONSTRATION.
- Les formules de l'angle double découlent de la proposition précédente en prenant $a = b$.
- Pour les formules de l'angle triple :

$$\begin{array}{rcl} \cos(3a) & = & \cos(2a+a) \\ & = & \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a) \\ & & \\ & = & (2\cos^2(a)-1)\cos(a) - 2\sin(a)\cos(a)\sin(a) \\ & = & 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)\sin^2(a) \end{array}$$

□

Proposition précédente.

Formule de l'angle double.

Il suffit d'utiliser le fait que $\sin^2(a) = 1 - \cos^2(a)$ pour conclure. Idem pour $\sin(3a)$.
- Les formules de décalage découlent de la proposition précédente avec des valeurs particulières ($b = \pi$ pour $\sin(a+\pi)$ etc.). Pour celles dépendant de n, il suffit de prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(a \pm \pi) = (-1)^n \cos(a)$ et idem pour le sinus.
- Pour les formules de linéarisation, on part du membre de droite et on appliquer la proposition précédente.
- Enfin, les formules de factorisation découlent des formules de linéarisation appliquées à $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$.

Remarque : Moyen mnémotechnique pour les formules de factorisation :
- Il y a un 2 devant.
- Il y a un signe $-$ devant $\cos(a) - \cos(b)$.
- Il y a à chaque fois $\dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{a-b}{2}$.
- « coco sisi sico cosi ».

I.1.c Congruences et équations trigonométriques

Définition. Soient a, b et m des réels avec m non nul. On dit que a est congru à b modulo m si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$. On note alors $a \equiv b\,[m]$

En d'autres termes : a est congru à b modulo m lorsque a et b diffèrent d'un multiple de m, ou encore lorsque m divise $a - b$.

Exemples :
- Un nombre entier est pair si et seulement s'il est congru à 0 modulo 2. Plus généralement, si m est un nombre non nul, alors un nombre est un multiple de m si et seulement s'il est congru à 0 modulo m.
- Un nombre entier est impair si et seulement s'il est congru à 1 modulo 2.
- $\dfrac{10\pi}{3} \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[\pi]$ puisque $\dfrac{10\pi}{3} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{9\pi}{3} = 3\pi$.
- $4 \equiv 100\,[6]$ puisque $4 = 100 - 16 \times 6$.
- $\dfrac{3\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $3\pi \equiv \pi\,[\pi]$. Géométriquement, un réel est congru à un autre modulo 2π lorsqu'ils correspondent au même point sur le cercle trigonométrique (on passe de l'un à l'autre en faisant un nombre entier de tours du cercle trigo). De même, un réel est congru à un autre modulo π lorsqu'ils correspondent au même point ou à deux points opposés du cercle : on passe de l'un à l'autre en faisant un nombre entier de demi-tours (pour un nombre pair, ce sont les mêmes points, pour un nombre impair, les points sont opposés).

Les congruences d'entiers vérifient des propriétés que ne vérifient pas les congruences de réels quelconques. Nous en reparlerons dans le chapitre 6.

On note parfois $b + m\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels congrus à b modulo m. Par exemple, l'ensemble des réels congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π est parfois noté $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

Proposition. Soient a, b, c, d et m des réels, avec c et m non nul.
1. Si $a \equiv b\,[m]$ alors $b \equiv a\,[m]$ (symétrie).
2. Si $a \equiv b\,[m]$ et $b \equiv c\,[m]$ alors $a \equiv c\,[m]$ (transitivité).
3. $a \equiv b\,[m]$ si et seulement si $(a+c) \equiv (b+c)\,[m]$.
4. Si $a \equiv b\,[m]$ et $c \equiv d\,[m]$, alors $a + c \equiv b + d\,[m]$.

Nous dirons dans le chapitre 16 que la congruence modulo m est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION. 1. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$ donc $b = a + (-k) \times m$. Or, $-k \in \mathbb{Z}$ donc $b \equiv a\,[m]$. On dit alors que a et b sont congrus ou sont congrus l'un à l'autre modulo m.

2. Il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + k_1 m$ et $b = c + k_2 m$, si bien que $a = c + (k_1 + k_2)m$. Or, $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat.
3. Si $a \equiv b\,[m]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$ donc $a + c = b + c + km$, si bien que $a + c \equiv b + c\,[m]$. Les réels a, b, c étant quelconques, on peut appliquer ce résultat à $a + c, b + c$ et $-c$, ce qui donne la réciproque.
4. Il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a = b + k_1 m$ et $c = d + k_2 m$, si bien que $a + c = b + d + (k_1 + k_2)m$. Or, $k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$, d'où le résultat.

Remarque : ⚠ En général, $ac \not\equiv bd\,[m]$! Par exemple, $3\pi \equiv \pi\,[2\pi]$, $\dfrac{3\pi}{2} \equiv -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ mais $\dfrac{9\pi^2}{2} \not\equiv -\dfrac{\pi^2}{2}\,[2\pi]$. Cependant, pour le produit, on a le résultat fondamental suivant :

Cependant, ce résultat est juste si a, b, c, d et m sont des entiers : cf. chapitre 6.

Proposition. Soient a, b, c et m des réels, avec c et m non nuls. Alors :

$$a \equiv b\,[m] \iff ac \equiv bc\,[mc]\,.$$

⚠ Il ne faut pas oublier de multiplier par c dans la congruence !

DÉMONSTRATION. Si $a \equiv b\,[m]$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + km$ donc $ac = bc + k \times mc$ donc $ac \equiv bc\,[mc]$. Les réels a, b, c étant quelconques (avec c non nul), on peut appliquer ce résultat aux réels ac, bc et $1/c$, ce qui donne la réciproque.

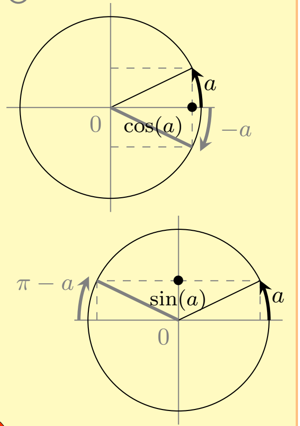
Remarque : Les résultats précédents nous permettent de travailler avec des congruences comme avec des égalités et de résoudre des équations avec des congruences de la même façon que des équations ordinaires, à la condition de ne pas oublier de multiplier ou de diviser par c également dans la congruence le cas échéant.

Proposition. Soient a et b des réels. On a

$$\begin{array}{rcccl} \cos(b) = \cos(a) & \iff & b \equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & b \equiv -a\,[2\pi] \\ \sin(b) = \sin(a) & \iff & b \equiv a\,[2\pi] & \text{ou} & b \equiv \pi - a\,[2\pi] \end{array}$$

⚠ Il est donc faux d'écrire : $\cos(a) = \cos(b) \iff a = b$, et même : $\cos(a) = \cos(b) \iff a \equiv b\,[2\pi]$.

DÉMONSTRATION. Immédiat par une considération géométrique.



Exemples :

- Résoudre $4\sin^2(2x) = 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 4\sin^2(2x) = 3 & \iff \sin^2(2x) = \frac{3}{4} \\ & \iff \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pi - \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x \equiv -\dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \\ \text{ou} \\ 2x \equiv \pi + \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi] \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} x \equiv \dfrac{\pi}{6}\,[\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[\pi] \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \equiv -\dfrac{\pi}{6}\,[\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \dfrac{2\pi}{3}\,[\pi] \end{array} \right. \end{aligned}$$

⚠ On n'oublie pas de diviser par 2 y compris dans les crochets.

- Résoudre $\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\cos(x) - \sin(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad & \iff \quad \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sin(x) \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
& \iff \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
& \iff \quad \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
& \iff \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
& \iff \quad x + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{6} \, [2\pi] \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{6} \, [2\pi] \\
& \iff \quad x \equiv \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \, [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \, [2\pi] \\
& \iff \quad x \equiv -\frac{\pi}{12} \, [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{5\pi}{12} \, [2\pi] \, .
\end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions consiste en tous les réels qui s'écrivent sous la forme $-\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{5\pi}{12} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque : La méthode consistant à multiplier par $\sqrt{2}$ et à compenser est en fait très naturelle, et on peut facilement la généraliser.

On pourrait écrire $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ et utiliser la formule $\cos(a) - \cos(b)$, mais on va voir une méthode qui peut se généraliser.

Proposition. Soient a et b deux réels. Alors il existe $(C, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a\cos(x) + b\sin(x) = C\cos(x - \varphi)$$

Une somme de deux signaux sinusoïdaux de période 2π est donc encore un signal sinusoïdal de période 2π : C est appelé amplitude du signal et φ le déphasage.

Démonstration. Si $a = b = 0$ alors $C = 0$ et φ quelconques conviennent. Supposons a et b non tous nuls. Soit $x \in \mathbb{R}$. Méthode à retenir : diviser par $\sqrt{a^2 + b^2}$ (non nul par choix de a et b), ce qui donne :

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \times \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \times \sin(x) \right)$$

Or, $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$ donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned}
a\cos(x) + b\sin(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} \times (\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)) \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} \times \cos(x - \varphi)
\end{aligned}$$

$\square$

Il suffit de poser $C = \sqrt{a^2 + b^2}$ pour conclure.

Tout couple de réels dont la somme des carrés vaut 1 peut être mis sous la forme d'un cosinus et d'un sinus (du même réel), cf. remarque précédente concernant le paramétrage du cercle trigo, et cf. paragraphe I.2.d. C'est pour cela qu'on a divisé par $\sqrt{a^2 + b^2}$: on veut que la somme des carrés fasse 1 donc on divise par la racine de la somme des carrés.

Remarque : On peut bien sûr prouver de la même façon qu'il existe D et ψ tels que, pour tout x, $a\cos(x) + b\sin(x) = D\sin(x - \psi)$: $\rightsquigarrow$ Exercice.

I.2 Les fonctions sinus et cosinus.

I.2.a Propriétés générales.

Proposition. La fonction sin est définie sur $\mathbb{R}$. De plus elle est :

- impaire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
- minorée par -1 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
- strictement positive sur $]\,0\,;\pi\,[$ et strictement négative sur $]-\pi\,;0\,[$.

De plus, si $x \in \mathbb{R}$, alors on a l'équivalence suivante : $\sin(x) = 0 \iff x \equiv 0\,[\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences des résultats du paragraphe I.1.a. Les deux derniers découlent de considérations géométriques.

Remarque : On obtient le signe du sinus sur $\mathbb{R}$ modulo 2π. En particulier :

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\,2k\pi\,;\pi + 2k\pi\,\right[,$$

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \sin(x) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\,k\pi\,;(k+1)\pi\,\right[= \mathbb{R}\backslash(\pi\mathbb{Z}).$$

où l'on rappelle que $\pi\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels congrus à 0 modulo π, c'est-à-dire l'ensemble des multiples de π, c'est-à-dire l'ensemble des nombres de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$. De plus elle est :

- paire et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
- minorée par -1 et majorée par 1 sur $\mathbb{R}$.
- strictement positive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et strictement négative sur $\left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$.

De plus, si $x \in \mathbb{R}$, alors on a les équivalences suivantes : $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$, et $\cos(x) = 1 \iff x \equiv 0\,[2\pi]$.

Démonstration. Les deux premiers points sont des conséquences des résultats du paragraphe I.1.a. Les deux derniers découlent de considérations géométriques. $\square$

Remarque : On obtient les variations et le signe de cosinus sur $\mathbb{R}$ modulo 2π. En particulier :

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \cos(x) > 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[,$$

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, \cos(x) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right[= \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

$\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des réels qui s'écrivent sous la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Corollaire. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$(\cos(a) = \cos(b) \quad \text{et} \quad \sin(a) = \sin(b)) \iff a \equiv b\,[2\pi]$$

Démonstration. Géométriquement, cela se voit très bien car les points ont même abscisse et même ordonnée si et seulement s'ils sont confondus, si et seulement si on passe de l'un à l'autre en faisant un certain nombre (positif ou négatif selon le sens) de tours de cercles, donc en ajoutant un multiple de 2π. Prouvons-le avec les résultats de cette partie. Supposons donc que $\cos(a) = \cos(b)$ et $\sin(a) = \sin(b)$. Alors

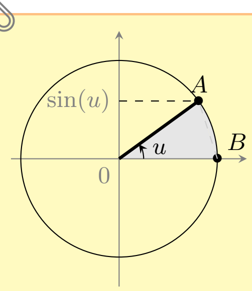
$$\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos^2(a) + \sin^2(a) = 1 \qquad \square$$

Or, $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(a-b)$ si bien que $\cos(a-b) = 1$ et donc $a - b \equiv 0\,[2\pi]$. La réciproque découle de la périodicité du sinus et du cosinus.

I.2.b Régularité.

Lemme. $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$.

Démonstration. Soit $u \in \,]-\pi\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;\pi\,[$. L'aire de la portion de disque unité d'angle u (la zone grisée ci-contre) est égale à $|u|/2$ (rappelons que l'aire d'une portion de disque d'angle $\theta \in \,]\,0\,;2\pi\,[$ de rayon r est $\theta r^2/2$). Cette zone est incluse dans le triangle OBC donc a une aire inférieure, et contient le triangle OAB donc a une aire supérieure. En particulier,



$$\frac{1\times|\sin(u)|}{2} \leqslant \frac{|u|}{2} \leqslant \frac{1\times|\tan(u)|}{2}.$$

Ainsi, en divisant par $|\sin(u)|>0$ puis en utilisant la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient : $|\cos(u)| \leqslant \left|\dfrac{\sin(u)}{u}\right| \leqslant 1$. Or, pour tout $u \in \,]-\pi\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;\pi\,[$, $\sin(u)/u \geqslant 0$ donc $|\cos(u)| \leqslant \dfrac{\sin(u)}{u} \leqslant 1$. Finalement, $\cos(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 1$, et on conclut avec le théorème d'encadrement. $\square$

Théorème.

1. La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$.
2. La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

En particulier, sin et cos sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $h \neq 0$.

1. Tout d'abord, grâce à la formule donnant $\sin(a)-\sin(b)$:
$$\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \frac{2}{h}\cos\left(a+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right).$$
Or, $u = h/2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc, d'après le lemme, $\dfrac{\sin(h/2)}{h/2} = \dfrac{2}{h}\sin\left(\dfrac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} 1$ et cos est continue en a donc $\cos\left(a+\dfrac{h}{2}\right) \xrightarrow[h\to 0]{} \cos(a)$, ce qui permet de conclure.
2. La démonstration est analogue et laissée en exercice. $\square$

Corollaire. Les fonctions cos et sin sont $\mathscr{C}^\infty$.

Démonstration. On montre par récurrence que ces fonctions sont $\mathscr{C}^n$ pour tout n, cf. chapitre 14.

Remarque : On a déduit la dérivabilité du sinus à partir de la limite de $\sin(u)/u$. En pratique, on fait le raisonnement inverse : maintenant qu'on sait que le sinus est dérivable de dérivée égale au cosinus, on peut écrire :

Limite très classique !

$$\frac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

I.2.c Monotonie et convexité.

Proposition.

- Le sinus est une fonction strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right]$.
- Le cosinus est une fonction strictement décroissante sur $[\,0\,;\pi\,]$ et strictement crois-

sante sur $[-\pi\,;0]$.

DÉMONSTRATION. Découle des deux paragraphes précédents : on dérive et on donne le tableau de signes de la dérivée : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : On peut en déduire les variations de ces fonctions sur un intervalle quelconque par périodicité.

On peut s'aider d'un dessin pour s'en rappeler. Par exemple, lorsqu'on passe de $-\pi/2$ à $\pi/2$, on voit bien que l'ordonnée du point correspondant sur le cercle augmente.

Proposition. Le sinus est concave sur $[0\,;\pi]$.

Elle est aussi convexe sur $[-\pi\,;0]$ mais cela sert moins souvent. On peut en déduire la convexité éventuelle sur un intervalle quelconque par périodicité. Voir le graphe dans le paragraphe suivant.

DÉMONSTRATION. Le sinus est dérivable deux fois (car $\mathscr{C}^\infty$) de dérivée seconde $\sin'' = -\sin$ négative sur $[0\,;\pi]$.

Corollaire. $\forall x \in \mathbb{R}, |\sin(x)| \leqslant |x|$.

Nous redémontrerons ce résultat dans le chapitre 14.

DÉMONSTRATION. Le résultat est immédiat si $|x| > 1$ puisque $|\sin(x)| \leqslant 1$. Sur $[0\,;1]$, le sinus est concave (car il l'est sur $[0\,;\pi]$) donc sa courbe est en-dessous de toutes ses tangentes, et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0. En d'autres termes, $\sin(x) \leqslant x$ et donc $|\sin(x)| \leqslant |x|$ car $\sin(x)$ et x sont positifs. Enfin, si $x \in [-1\,;0]$,

$$\begin{aligned} |\sin(x)| &= |-\sin(x)| \\ &= |\sin(-x)| \\ &\leqslant |-x| \\ &\leqslant |x| \end{aligned}$$

Imparité du sinus.

Car $-x \in [0\,;1]$.

$\square$

I.2.d Paramétrisation du cercle trigonométrique.

Utilisons les résultats précédents pour démontrer la paramétrisation du cercle que nous avons déjà évoquée dans le paragraphe I.1.a.

Proposition. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. Plus précisément, sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π (donc de la forme $[\alpha\,;\alpha + 2\pi[$ ou $]\alpha\,;\alpha + 2\pi]$), il existe un unique θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Si on prend un intervalle ouvert, alors un tel θ n'existe pas forcément, et si on le prend fermé, il n'est plus forcément unique : par exemple, il n'existe pas de réel $\theta \in]-\pi\,;\pi[$ tel que $\sin(\theta) = 0$ et $\cos(\theta) = -1$, et sur $[-\pi\,;\pi]$, π et $-\pi$ conviennent.

DÉMONSTRATION. Commençons par prouver l'existence d'un tel réel θ_0 sur l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.
Puisque $a^2 + b^2 = 1$, alors $0 \leqslant a^2 \leqslant 1$ et $0 \leqslant b^2 \leqslant 1$ donc a et b appartiennent à $[-1\,;1]$. La fonction cos est continue strictement croissante sur $[0\,;\pi]$ avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'après le corollaire du TVI, il existe un unique $x \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= 1 - \cos^2(x) \\ &= 1 - a^2 \\ &= b^2 \end{aligned}$$

Puisque $x \in [0\,;\pi]$, alors $\sin(x) \geqslant 0$ donc $\sin(x) = |b|$. Si $b \geqslant 0$, alors $\theta_0 = x \in [0\,;\pi]$ convient. Si $b < 0$ (et alors $x \neq \pi$ car $\sin(\pi) = 0$), on a $\cos(-x) = \cos(x) = a$ et

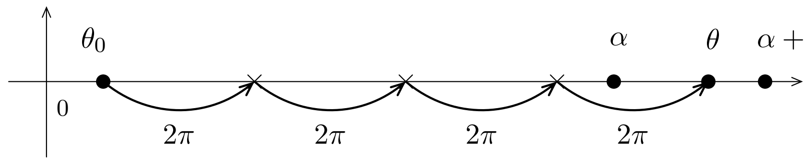
$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin(x) \\ &= -|b| \\ &= b \end{aligned}$$

$\square$

Finalement, $\theta_0 = -x \in \,]-\pi\,;0\,]$ convient. D'où l'existence d'un tel $\theta_0 \in \,]-\pi\,;\pi\,]$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouvons l'existence d'un unique réel $\theta \in [\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$ (le cas $]\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,]$ est analogue et laissé en exo) tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$. Introduisons pour cela une méthode que nous reverrons dans le chapitre 12.

Soit $A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, \theta_0 + 2k\pi < \alpha + 2\pi\}$. Alors A est une partie de $\mathbb{Z}$, majorée par $\dfrac{\alpha + 2\pi - \theta_0}{2\pi}$ et non vide (car $\theta_0 + 2k\pi \xrightarrow[k\to-\infty]{} -\infty$ et donc il existe k tel que $\theta_0 + 2k\pi < \alpha + 2\pi$, cf. chapitre 12). A admet donc un plus grand élément k_0, et posons enfin $\theta = \theta_0 + 2k_0\pi$.

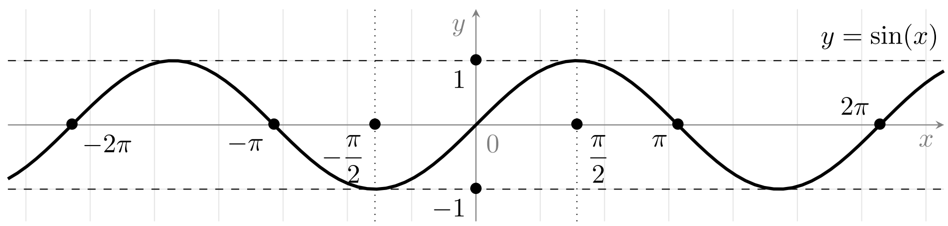
L'idée est de partir de θ_0, d'ajouter (ou de retirer si $\alpha < 0$) 2π autant de fois qu'il faut, et on s'arrête juste avant $\alpha + 2\pi$: le dernier terme appartiendra à l'intervalle $[\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$. Nous reverrons cette méthode dans le chapitre 12, quand nous parlerons de densité.



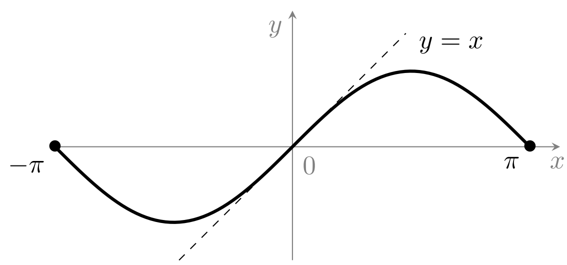
- $\cos(\theta) = \cos(\theta_0) = a$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta_0) = b$ par périodicité.
- $k_0 \in A$ donc $\theta = \theta_0 + 2k_0\pi < \alpha + 2\pi$.
- $k_0 + 1 \notin A$ car $k_0 + 1 > k_0$ donc $\theta + 2\pi = \theta_0 + 2(k_0+1)\pi \geqslant \alpha + 2\pi$ si bien que $\theta \geqslant \alpha$. En d'autres termes, $\theta \in [\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$.
- Enfin, soit $\theta' \in [\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$ tel que $\cos(\theta') = a$ et $\sin(\theta') = b$. Alors $\theta' \equiv \theta\,[2\pi]$ donc θ et θ' diffèrent d'un multiple de 2π donc sont égaux car $|\theta' - \theta| < 2\pi$ (car ils appartiennent tous les deux à $[\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$). D'où l'unicité.

I.2.e Graphes.

Ci-dessous le graphe du sinus :

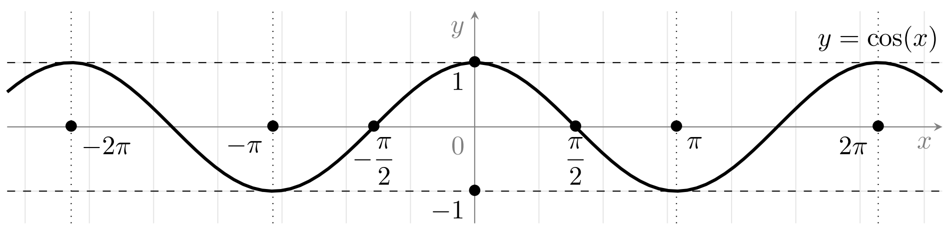


Pour mieux observer la convexité/concavité, on zoome sur l'intervalle $[\,-\pi\,;\pi\,]$ et on représente la droite d'équation $y = x$:

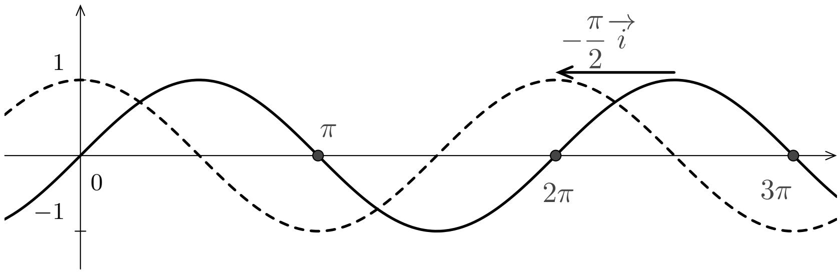


Le graphe est au-dessus de la tangente entre $-\pi$ et 0 et en-dessous entre 0 et π, ce qui est cohérent avec le paragraphe précédent.

Ci-dessous le graphe du cosinus :



Enfin, ci-dessous, sur un même dessin, les graphes de ces deux fonctions (sinus en traits pleins, cosinus en pointillés) :



On remarque qu'elles ont le même graphe, décalé de $\pi/2$, ce qui est normal puisque, pour tout x, $\cos(x) = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et donc (cf. chapitre 2), le graphe du cosinus est « en avance » de $\pi/2$ par rapport au graphe du sinus.

Il y a un déphasage de $\pi/2$ entre le sinus et le cosinus.

I.3 La fonction tangente

I.3.a Définition et premières propriétés.

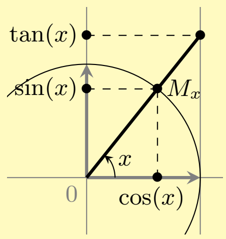
Définition. On définit (quand c'est possible) la fonction tangente, que l'on note tan, par :

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}$$

Interprétation graphique : Pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, la droite (OM_x) admet

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\sin(x) - 0}{\cos(x) - 0}\\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

pour coefficient directeur. On en déduit que $\tan(x)$ est l'ordonnée du point d'abscisse 1 de cette droite.



Là aussi, cette définition généralise celle vue au collège : on a encore

$$\tan(x) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction tan est définie en x si et seulement si $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Démonstration. Découle du fait que : $\cos(x) = 0 \iff x \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Notation : L'ensemble des réels congrus à $\dfrac{\pi}{2}$ modulo π est noté $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Ainsi, la tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Autre notation : si $x \in \mathbb{R}$, $\tan(x)$ est défini si et seulement si $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ ou $x \in \left]-\dfrac{3\pi}{2}\,;-\dfrac{\pi}{2}\right[$ ou $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$ ou ... Ainsi, on a également $D_{\tan} = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}\,;k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$. En conclusion :

$$D_{\tan} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}\,;k\pi + \frac{\pi}{2}\right[= \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$$

Proposition. La fonction tan est impaire et π-périodique. De plus, $\tan(x) \xrightarrow[x\to(-\frac{\pi}{2})^+]{} -\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2})^-]{} +\infty$.

Démonstration. Soit $x \in D_{\tan}$. Alors $-x, x \pm \pi$ appartiennent aussi à $D_{\tan}$.

- La fonction sinus étant impaire et la fonction cosinus paire,

$$\begin{aligned}\tan(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}\\ &= \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}\\ &= -\tan(x)\end{aligned}$$

- On a :

$$\begin{aligned}\tan(x+\pi) &= \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}\\ &= \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)}\\ &= \tan(x)\end{aligned}$$

$\square$

- Enfin, $\sin(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2})^-]{} 1$ et $\cos(x) \xrightarrow[x\to(\frac{\pi}{2})^-]{} 0^+$, d'où la limite en $(\frac{\pi}{2})^-$. L'autre limite s'obtient par imparité.

Si $k \in \mathbb{Z}$, on en déduit les limites en $(k\pi - \frac{\pi}{2})^+$ et $(k\pi + \frac{\pi}{2})^-$ par périodicité.

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

Démonstration. Immédiat.

I.3.b Régularité.

Proposition. La fonction tan est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ et :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Nous donnerons une primitive de la fonction tangente dans le chapitre 10.

Démonstration. La fonction tan est continue et dérivable sur $D_{\tan}$ par quotient de deux fonctions qui le sont et car celle au dénominateur ne s'annule pas. Si $x \in D_{\tan}$, alors

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x) - \cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= 1+\tan^2(x)\end{aligned}$$

On obtient la deuxième expression à partir de la troisième ligne en se rappelant que $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$. $\square$

Remarque : Quand on voudra donner $\tan'$, on donnera systématiquement $1+\tan^2$ (en particulier, la tangente est solution de l'équa-diff non linéaire $y' = 1+y^2$). L'autre expression est surtout utile pour se souvenir d'une expression reliant $\tan^2$ à $\cos^2$ et donc à $\sin^2$ (car $\cos^2 = 1-\sin^2$), ce qui peut être assez utile : cf. paragraphe I.3.e.

Corollaire. La fonction tan est $\mathscr{C}^\infty$ sur $D_{\tan}$.

Démonstration. cf. chapitre 14.

I.3.c Monotonie et convexité.

Proposition. La fonction tan est

- strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- strictement positive sur $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et strictement négative sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right[$.

Enfin, si $x \in D_{\tan}$, alors $\tan(x) = 0 \iff x \equiv 0\,[\pi]$.

On en déduit le signe et les variations de la tangente sur son domaine de définition par périodicité.

Démonstration. Le premier point découle du fait que $\tan' = 1 + \tan^2 > 0$. Le deuxième de la stricte croissance et du fait que $\tan(0) = 0$. Le dernier vient du fait qu'une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul. □

Proposition. La tangente est convexe sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et concave sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;0\right]$. Elle admet donc un point d'inflexion en 0.

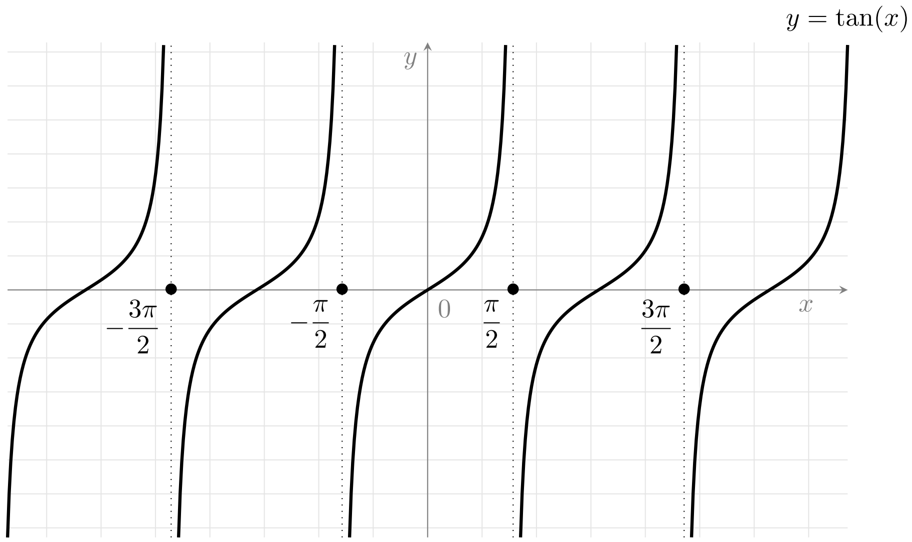
Nous montrerons dans les chapitres 14 et 19 que toutes les dérivées successives de la tangente sont positives sur $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$: on dit que la tangente est absolument monotone, cf. exercice 57 du chapitre 14.

Démonstration. La tangente étant $\mathscr{C}^\infty$, elle est dérivable deux fois : il suffit de donner le signe de sa dérivée seconde : $\rightsquigarrow$ Exercice.

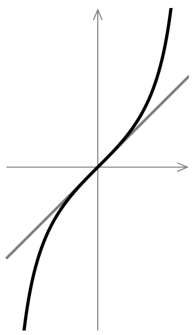
Corollaire. $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[, \tan(x) \geqslant x$.

Démonstration. La tangente étant convexe sur cet intervalle, son graphe est au-dessus de ses tangentes, et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0.

I.3.d Graphes.



Traçons le graphe de la tangente sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, ainsi que la première bissectrice : on voit que le graphe est traversé par la tangente, il y a bien un point d'inflexion en 0.



I.3.e Formules de trigonométrie.

Proposition.

- Soit $x \in D_{\tan}$. Alors $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ et $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$.
- Soient a et b deux réels tels que a, b et $a+b$ n'appartiennent pas à $\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$. Alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

Par imparité de la tangente, on en déduit que, si a, b et $a - b$ ne sont pas congrus à $\pi/2$ modulo π, alors : $\tan(a-b) = \dfrac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

Démonstration. Le premier point découle de la périodicité et de l'imparité de la tangente. Pour le deuxième :

$$\begin{aligned} 1 - \tan(a)\tan(b) &= \frac{\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)} \\ &= \frac{\cos(a+b)}{\cos(a)\cos(b)} \end{aligned}$$

□

Ce terme est non nul car $a + b \not\equiv \pi/2[\pi]$ et donc $\cos(a+b) \neq 0$, donc on peut diviser :

$$\begin{aligned} \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} &= \frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a+b)} \left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)} \right) \\ &= \frac{1}{\cos(a+b)} \left(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \right) \\ &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} \\ &= \tan(a+b) \end{aligned}$$

Proposition. Soit $a \not\equiv 0 \left[\dfrac{\pi}{2}\right]$. Soit $t = \tan\left(\dfrac{a}{2}\right)$. Alors :

$$\tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{et} \qquad \cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Moyen mnémotechnique : le sin et le cos sont définis sur $\mathbb{R}$, donc pas de valeur interdite, et le cos est une fonction paire, et le sin et la tangente sont impaires.

Démonstration. Pour la tangente, il suffit de remarquer que $\tan(a) = \tan\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}\right)$ et d'appliquer la formule ci-dessus. Pour le sinus :

$$\begin{aligned} \sin(a) &= 2\sin(a/2)\cos(a/2) \\ &= 2 \times \tan(a/2) \times \cos^2(a/2) \\ &= 2 \times \tan(a/2) \times \frac{1}{1 + \tan^2(a/2)} \end{aligned}$$

□

Car $\sin = \tan \times \cos$.

C'est ici qu'on utilise l'égalité entre les deux valeurs de $\tan'$: cela sert à relier $\cos^2$ et $\tan^2$.

ce qui est le résultat voulu pour le sinus. Enfin, l'expression de $\cos(a)$ découle des deux précédentes en remarquant que $\cos(a) = \sin(a)/\tan(a)$.

II Fonctions circulaires réciproques.

II.1 Fonction Arctan

II.1.a Définition et premières propriétés.

Lemme. On suppose que I est symétrique par rapport à 0. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est impaire et injective alors f^{-1} est impaire sur $f(I)$.

La fonction f est injective par hypothèse et surjective sur son image (cf. chapitre 4) donc est une bijection de I dans $f(I)$: d'où l'existence de f^{-1}.

DÉMONSTRATION. Soient $y \in f(I)$ et $x = f^{-1}(y)$. Par définition de x, $f(x) = y$. Comme f est impaire, $f(-x) = -f(x) = -y$. On en déduit, d'une part, que $-y \in f(I)$: $f(I)$ est donc symétrique par rapport à 0. D'autre part, on en déduit que $-x = f^{-1}(-y)$ donc $f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$: f^{-1} est donc impaire. □

Remarque : On n'a pas de résultat analogue pour les fonctions paires car une fonction paire n'est jamais injective (sauf si elle est définie uniquement sur $\{0\}$...).

Théorème. La fonction tangente est une bijection strictement croissante de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée Arctan et vérifie les propriétés suivantes :

- Arctan est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et strictement croissante.
- $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$.

Remarque : La fonction Arctan est une nouvelle fonction de référence, qu'il faut connaître aussi bien que exp, ln, sin etc.

DÉMONSTRATION.

- La fonction tan est strictement croissante et continue sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\tan(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$ et $\tan(x) \xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2}^+]{} -\infty$.

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$\tan'(x)$		$+$	
tan	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque, notée Arctan, est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ avec $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$ et $\operatorname{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2}$. Ci-dessous son tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$\operatorname{Arctan}(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$

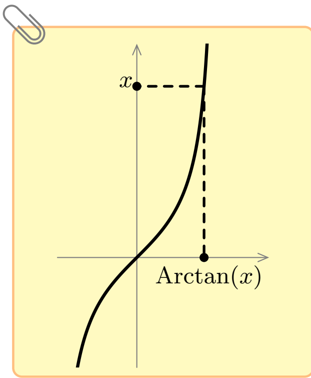
□

- La fonction tan étant impaire, Arctan l'est aussi d'après le lemme.

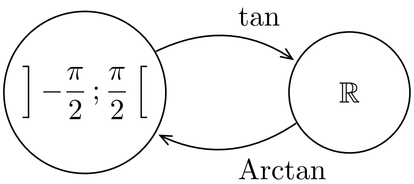
II.1.b Jongler avec la tangente et l'Arctangente.

- La fonction tangente n'est pas injective sur $D_{\tan}$, et donc l'Arctangente n'est pas la réciproque de la fonction tangente : Arctan est la réciproque de $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ qui, elle, est injective, et même bijective de $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.

- Par définition d'une bijection réciproque, si $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(y) = x$ (de la même manière que, si $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}$ est l'unique réel positif qui au carré donne x, ou si $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut x). Par exemple, $\mathrm{Arctan}(2)$ est l'unique réel dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut 2, de même que $\ln(2)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut 2, ou que $\sqrt{2}$ est l'unique réel positif qui au carré donne 2.



- Par définition, Arctan est la réciproque de la tangente sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. En d'autres termes, si $x \in \mathbb{R}$, alors $\mathrm{Arctan}(x)$ est l'unique antécédent de x dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ par la fonction tangente. Ainsi, une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \mathrm{Arctan}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\tan(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
- De manière imagée (toujours avoir ce dessin en tête pour se souvenir du théorème ci-dessous) :



Théorème.

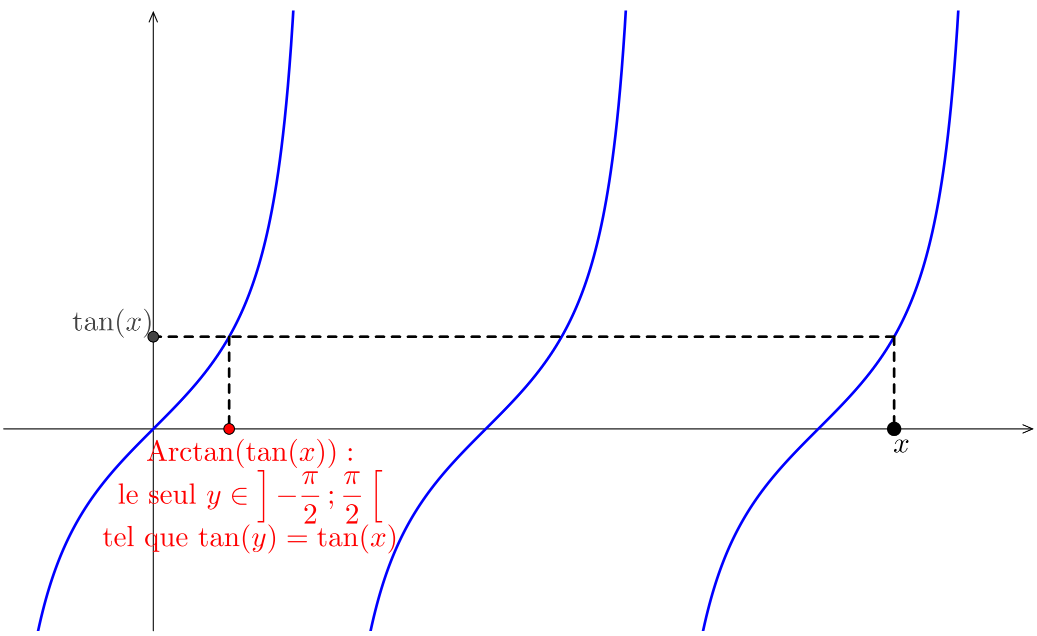
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x$
- Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$

Démonstration. Découle directement de la définition. □

Remarque : ⚠ On n'a pas toujours $\mathrm{Arctan}(\tan(x)) = x$! Moyens mnémotechniques :

- La tangente n'est pas définie sur $\mathbb{R}$.
- Arctan est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

Par exemple, on a $\tan(\pi) = 0$ donc $\mathrm{Arctan}(\tan(\pi)) = \mathrm{Arctan}(0) = 0$ car la tangente est impaire. On n'a pas $\mathrm{Arctan}(\tan(\pi)) = \pi$! Faisons un dessin dans le cas général (cf exercice 37)



II.1.c Régularité.

Proposition. Arctan est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Démonstration. Pour tout $x \in \left] -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$. Par conséquent, Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\text{Arctan}'(x) &= \frac{1}{\tan'(\text{Arctan}(x))} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(x))}\end{aligned}$$

□

Or, par définition, $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ si bien que $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Corollaire. Arctan est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La fonction Arctan est dérivable et sa dérivée est une fonction rationnelle donc $\mathscr{C}^\infty$ (cf. chapitres 2 et 14) donc Arctan est elle-même $\mathscr{C}^\infty$.

II.1.d Monotonie et convexité.

Proposition. La fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, convexe sur $\mathbb{R}_-$ et concave sur $\mathbb{R}_+$.

La fonction Arctan est un exemple de fonction strictement croissante et bornée sur $\mathbb{R}$.

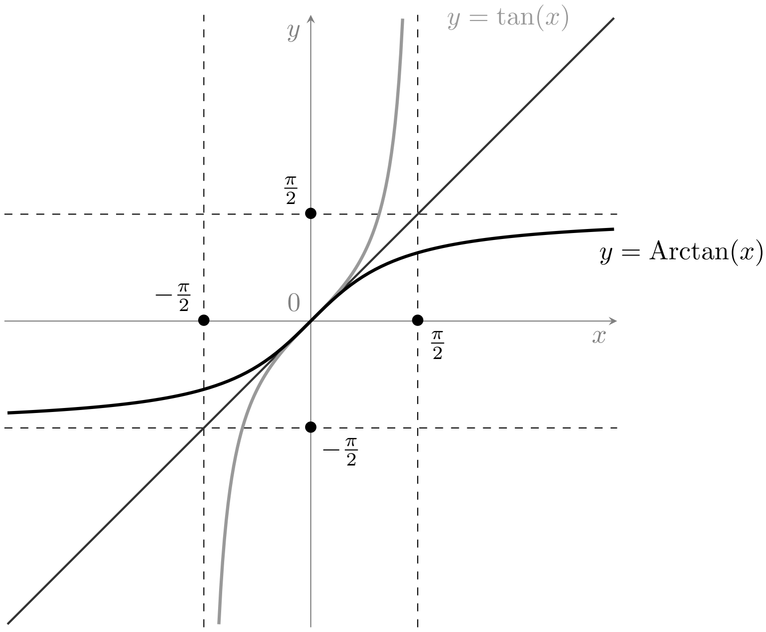
Démonstration. La fonction Arctan est $\mathscr{C}^\infty$ donc en particulier dérivable deux fois. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'une part, $\text{Arctan}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, d'où la monotonie, et $\text{Arctan}''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, d'où la convexité.

Corollaire. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \text{Arctan}(x) \leqslant x$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

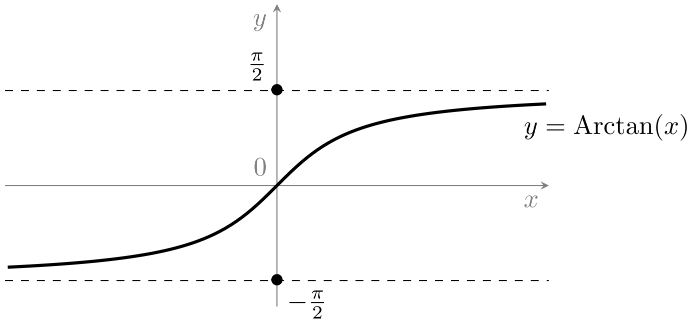
II.1.e Graphes.

Ci-dessous les graphes de la tangente sur $\left] -\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2} \right[$, de l'Arctangente sur $\mathbb{R}$ et la première bissectrice :



On voit que les graphes sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice, et on voit que la première bissectrice est au-dessus du graphe de l'Arctangente sur $\mathbb{R}_+$ et en-dessous sur $\mathbb{R}_-$, ce qui est cohérent avec le paragraphe précédent. Enfin, puisque $\text{Arctan}(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\pi/2$, les droites d'équation $y = \pi/2$ et $y = -\pi/2$ sont respectivement asymptotes horizontales en $+\infty$ et en $-\infty$.

Sans la fonction tan ni la première bissectrice :



II.1.f Égalités remarquables.

Proposition (valeurs remarquables).

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\text{Arctan}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Démonstration. $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. De même pour les autres.

Proposition.

- Pour tout $x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- Pour tout $x < 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Au chapitre 24, nous aurons une très bonne approximation de la fonction Arctan au voisinage de 0 : cette proposition nous permettra de transposer cette approximation au voisinage de $\pm\infty$.

Démonstration. Considérons

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

La fonction g est dérivable en tant que somme et composée de fonctions dérivables. Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, g est constante sur chaque intervalle qui compose son ensemble de définition, ie g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Or

$$\begin{aligned} g(1) &= \text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(1) \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

En d'autres termes, g est constante égale à $\dfrac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. g étant impaire, elle est constante égale à $\dfrac{-\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}_-^*$. $\square$

g n'est pas constante : son domaine de définition n'est pas un intervalle !

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\text{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Démonstration. On a $\tan(\text{Arctan}(x)) = x$ donc $\tan^2(\text{Arctan}(x)) = x^2$, si bien que

$$\cos^2(\text{Arctan}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

On utilise là aussi la relation reliant $\tan^2$ et $\cos^2$, à savoir : $1+\tan^2 = 1/\cos^2$.

Attention, pour affirmer que deux nombres ayant même carré sont égaux, ils faut prouver qu'ils ont le même signe (car ils peuvent aussi être opposés). Or, $\text{Arctan}(x) \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel le cos est positif, si bien que $\cos(\text{Arctan}(x)) \geqslant 0$. En d'autres termes, $\cos(\text{Arctan}(x))$ et $1/\sqrt{1+x^2}$ ont même carré et sont de même signe donc sont égaux. De plus,

$$\begin{aligned}\sin^2(\text{Arctan}(x)) &= 1-\cos^2(\text{Arctan}(x)) \\ &= \frac{x^2}{1+x^2}\end{aligned}$$

$\square$

Là aussi, prouvons que $\sin(\text{Arctan}(x))$ et $x/\sqrt{1+x^2}$ ont le même signe. Si $x \geqslant 0$, alors $\text{Arctan}(x) \in [\,0\,;\pi/2\,[$, intervalle sur lequel le sinus est positif, donc $\sin(\text{Arctan}(x)) \geqslant 0$. Par imparité, $\sin(\text{Arctan}(x)) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$. En conclusion, dans tous les cas, $\sin(\text{Arctan}(x))$ et $x/\sqrt{1+x^2}$ ont même carré et sont de même signe donc sont égaux.

Les résultats suivants ne sont pas à connaître et ne sont là qu'à titre d'entraînement à la manipulation de la fonction Arctan.

Exemple : Soit $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$. Donner $\text{Arctan}(\tan(x))$.

Nous généraliserons ce résultat dans l'exercice 37.

Rappel : Si $A \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}(A)$ est l'unique $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = A$. On cherche donc l'unique $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(\alpha) = \tan(x)$. On a envie de dire x, mais $x \in \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{3\pi}{2}\right[$. Il suffit alors de voir que :

- $x-\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$
- $\tan(x-\pi) = \tan(x)$ par périodicité.

Ainsi, $\text{Arctan}(\tan(x)) = x-\pi$.

Exemple : Soient x, y deux réels avec $xy \neq 1$. Montrer que

$$\text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+k\pi$$

Nous utiliserons ce résultat pour démontrer la formule de Machin, cf. exercice 33.

où :

- $k=0$ si $xy<1$.
- $k=1$ si $xy>1$ et $x,y>0$.
- $k=-1$ si $xy>1$ et $x,y<0$.

Notons $A = \text{Arctan}(x)+\text{Arctan}(y)$ et $B = \text{Arctan}\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$. D'une part,

$$\tan(B) = \frac{x+y}{1-xy}$$

et, d'autre part, en utilisant la formule donnant $\tan(a+b)$:

$$\begin{aligned}\tan(A) &= \frac{\tan(\text{Arctan}(x)) + \tan(\text{Arctan}(y))}{1 - \tan(\text{Arctan}(x))\tan(\text{Arctan}(y))} \\ &= \frac{x+y}{1-xy}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\tan(A) = \tan(B)$. Attention, la tangente n'est pas (du tout) injective (elle est périodique !). Si deux éléments ont la même tangente, tout ce qu'on peut dire est qu'ils diffèrent d'un multiple de π (i.e. qu'ils sont congrus l'un à l'autre modulo π). Si on veut affirmer qu'ils sont égaux, il faut qu'ils soient dans le même intervalle $\left] k\pi - \frac{\pi}{2} \,; k\pi + \frac{\pi}{2} \right[$ (toujours visualiser le graphe de la tangente dans ces cas-là). Or, $B \in \left] -\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right[$. Encadrons A selon les cas.

- Supposons que $xy < 1$. Si $x > 0$, alors $y < \text{Arctan}(1/x)$ donc, par croissance de l'Arctangente,

$$A < \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

car $x > 0$. De plus, $\text{Arctan}(x) > 0$ donc $A > \text{Arctan}(y) > -\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $A \in \left] -\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right[$. Si $x < 0$, alors $y > \text{Arctan}(1/x)$ si bien que

$$A > \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

car $x < 0$. De plus, $\text{Arctan}(x) < 0$ donc $A < \text{Arctan}(y) < \frac{\pi}{2}$. Là encore, $A \in \left] -\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right[$, et c'est évidemment encore le cas si $x = 0$ car alors $A = \text{Arctan}(y)$. En conclusion, $\tan(A) = \tan(B)$ et A et B appartiennent tous les deux à $\left] -\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right[$ donc sont égaux.

- Supposons à présent que $xy > 1$ et que x et y sont strictement positifs. Par conséquent, $y > 1/x$ et, de même,

$$A > \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

De plus, $\text{Arctan}(x)$ et $\text{Arctan}(y)$ sont strictement inférieurs à $\pi/2$ donc $A < \pi < 3\pi/2$, c'est-à-dire que $A \in \left] \frac{\pi}{2} \,; \frac{3\pi}{2} \right[$. En particulier, $A - \pi \in \left] -\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right[$ et $\tan(A - \pi) = \tan(A) = \tan(B)$ donc $A - \pi = B$ donc $A = B + \pi$.

- Le troisième cas est analogue et laissé en exo.

II.2 Fonctions Arccos et Arcsin.

II.2.a Fonction Arcsin.

Théorème. La fonction sinus est une bijection strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2} \,; \frac{\pi}{2} \right]$ dans $[-1\,;1]$. Sa bijection réciproque est notée Arcsin et vérifie les propriétés suivantes :

- Arcsin est définie sur $[-1\,;1]$
- Arcsin est impaire, continue et strictement croissante.

Démonstration.
- La fonction sin est strictement croissante et continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

x	$-\pi/2$		$\pi/2$
$\sin'(x)$	0	$+$	0
$\sin$	-1	$\nearrow$	1

D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1\,;1]$ et sa bijection réciproque, notée Arcsin, est continue et strictement croissante de $[-1\,;1]$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ avec $\text{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}$ et $\text{Arcsin}(1)=\frac{\pi}{2}$. Ci-dessous son tableau de variations.

x	-1		1
$\text{Arcsin}(x)$	$-\pi/2$	$\nearrow$	$\pi/2$

□

- La fonction sin étant impaire, Arcsin l'est aussi d'après le lemme du paragraphe II.1.a.

Lemme. $\forall x\in[-1\,;1]\,,\cos(\text{Arcsin}(x))=\sqrt{1-x^2}$.

Démonstration. Soit $x\in[-1\,;1]$. Par définition de Arcsin, $\sin(\text{Arcsin}(x))=x$ donc $\cos^2(\text{Arcsin}(x))=1-x^2$. Or, $\text{Arcsin}(x)\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(\text{Arcsin}(x))\geqslant 0$ et on conclut comme précédemment.

Proposition. Arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ et pour tout $x\in\,]-1\,;1[$,

$$\text{Arcsin}'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De plus, Arcsin est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$, n'est pas dérivable en ±1 et sa courbe admet une tangente verticale en ces points.

Démonstration. Pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x)=\cos(x)$, donc $\sin'(x)=0\iff x=\pm\pi/2$. Par conséquent, Arcsin est dérivable sur $[-1\,;1]\backslash\{\sin(\pm\pi/2)\}=\,]-1\,;1[$. Soit $x\in\,]-1\,;1[$. Alors :

On rappelle que f^{-1} est dérivable sauf en l'image des points (par f) où f' s'annule.

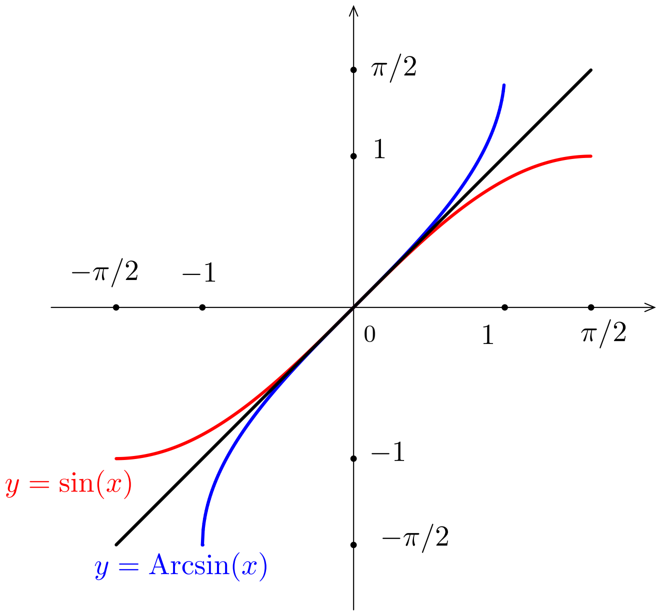
$$\begin{aligned}\text{Arcsin}'(x)&=\frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))}\\&=\frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))}\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

□

Puisque Arcsin est dérivable et Arcsin$'$ est $\mathscr{C}^\infty$ (car composée de fonctions qui le sont), Arcsin est $\mathscr{C}^\infty$. Enfin, Arcsin n'est pas dérivable en ± 1 et admet une tangente verticale en ces points puisque $\sin'(\pm\pi/2) = 0$ (cf. chapitres 4 et 14).

Ci-dessous le graphe du sinus, de Arcsin, et de la première bissectrice.

Il y a une tangente verticale en ± 1, d'où la non dérivabilité.



II.2.b Fonction Arccos.

Théorème. La fonction cosinus est une bijection strictement décroissante de $[\,0\,;\pi\,]$ dans $[\,-1\,;1\,]$. Sa bijection réciproque est notée Arccos et vérifie les propriétés suivantes :

- Arccos est définie sur $[\,-1\,;1\,]$.
- Arccos est continue et strictement décroissante.

La fonction Arccos n'est ni paire ni impaire !

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Ci-dessous le tableau de variations de Arccos :

x	-1		1
$\text{Arccos}(x)$	π	$\searrow$	0

Lemme. $\forall x \in [\,-1\,;1\,], \sin(\text{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

DÉMONSTRATION. Soit $x \in [\,-1\,;1\,]$. Par définition de Arccos, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$ donc $\sin^2(\text{Arccos}(x)) = 1 - x^2$. Or, $\text{Arccos}(x) \in [\,0\,;\pi\,]$ donc $\sin(\text{Arccos}(x)) \geqslant 0$ et on conclut comme précédemment.

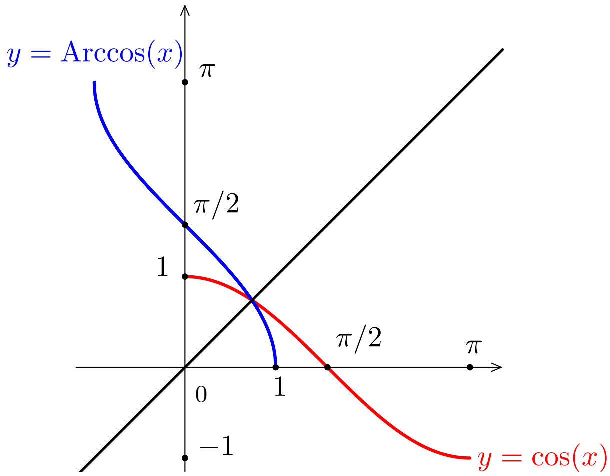
Proposition. Arccos est dérivable sur $]\,-1\,;1\,[$ et pour tout $x \in\,]\,-1\,;1\,[$,

$$\text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

De plus, Arccos est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,-1\,;1\,[$, n'est pas dérivable en ± 1 et sa courbe admet une tangente verticale en ces points.

Il y a une tangente verticale en ± 1, d'où la non dérivabilité.

Ci-dessous le graphe de l'Arccos, du cos, et la première bissectrice.



II.3 Jongler entre $\sin, \text{Arcsin}, \cos$ et Arccos.

On peut adapter les remarques du paragraphe II.1.f :

- Les fonctions sin et cos ne sont pas injectives sur $\mathbb{R}$, et donc les fonctions Arcsin et Arccos ne sont pas les réciproques du sinus ou du cosinus mais, respectivement, de la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et de la restriction du cosinus à $[\,0\,;\pi\,]$.
- Par définition d'une bijection réciproque, si $x \in [-1\,;1\,]$, $\text{Arcsin}(x)$ est l'unique $y \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(y) = x$.
- Par définition, Arcsin est la réciproque du sinus sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. En d'autres termes, si $x \in [-1\,;1\,]$, alors $\text{Arcsin}(x)$ est l'unique antécédent de x dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par la fonction sinus. Ainsi, une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \text{Arcsin}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\sin(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
- Par définition d'une bijection réciproque, si $x \in [-1\,;1\,]$, $\text{Arccos}(x)$ est l'unique $y \in [\,0\,;\pi\,]$ tel que $\cos(y) = x$.
- Par définition, Arccos est la réciproque du cosinus sur $[\,0\,;\pi\,]$. En d'autres termes, si $x \in [-1\,;1\,]$, alors $\text{Arccos}(x)$ est l'unique antécédent de x dans $[\,0\,;\pi\,]$ par la fonction cosinus. Ainsi, une méthode simple (mais efficace !) pour montrer une égalité du type $\alpha = \text{Arccos}(A)$ consiste à :
  - ⋆ montrer que $\cos(\alpha) = A$
  - ⋆ puis montrer que $\alpha \in [\,0\,;\pi\,]$.

Proposition (valeurs remarquables).

x	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\text{Arccos}(x)$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

- De manière imagée (toujours avoir ces dessins en tête pour se souvenir du théorème ci-dessous) :

$$\begin{tikzcd} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \arrow[r, bend left, "\sin"] & {[-1\,;1]} \arrow[l, bend left, "\text{Arcsin}"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {[0\,;\pi]} \arrow[r, bend left, "\cos"] & {[-1\,;1]} \arrow[l, bend left, "\text{Arccos}"] \end{tikzcd}$$

Théorème.

- Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$
- Pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{Arcsin}(\sin(x)) = x$
- Pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\text{Arccos}(x)) = x$
- Pour tout $x \in [0\,;\pi]$, $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$

Démonstration. Découle directement de la définition. □

Remarque : On n'a pas toujours $\text{Arccos}(\cos(x)) = x$ ou autre. Par exemple :

$$\text{Arccos}(\cos(2\pi)) = \text{Arccos}(1) = 0$$

Morale de l'histoire : faire systématiquement les dessins avec les flèches ci-dessus.

Activité : Montrons de deux façons différentes que :

$$\forall x \in [-1\,;1], \qquad \text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \frac{\pi}{2}$$

Première méthode : Soit f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x)$. Alors f est dérivable sur $]-1\,;1[$ car somme de fonctions qui le sont. Soit $x \in]-1\,;1[$. Alors

Attention, Arcsin et Arccos ne sont pas dérivables en ± 1 !

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il en découle que f est constante sur $]-1\,;1[$. Or, $f(0) = \text{Arcsin}(0) + \text{Arccos}(0) = 0 + \frac{\pi}{2}$: f est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $]-1\,;1[$, et comme elle est continue, elle est constante égale à $\frac{\pi}{2}$ sur $[-1\,;1]$.

On peut directement dire que f est continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$, c'est-à-dire sur son intérieur, donc f est constante sur $[-1\,;1]$: cf. chapitres 2 et 14.

Deuxième méthode : Soit $x \in [-1\,;1]$. Alors

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = \sin(\text{Arcsin}(x))$$

Or, $x \in [-1\,;1]$ donc $\sin(\text{Arcsin}(x)) = x$ si bien que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x)\right) = x$. Or, $\text{Arccos}(x)$ est l'unique $y \in [0\,;\pi]$ tel que $\cos(y) = x$ et $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) \in [0\,;\pi]$. Finalement, $\frac{\pi}{2} - \text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(x)$, ce qui est le résultat voulu.

Remarque : Il ne faut quand même pas rêver :

$$\text{Arctan}(x) \neq \frac{\text{Arcsin}(x)}{\text{Arccos}(x)}$$

Cela n'a tellement aucun sens que je ne sais même pas par où commencer. Déjà, les domaines de définition ne sont pas les mêmes, ensuite il y a des valeurs interdites à droite (par exemple, 1). Enfin, même en -1 où tout a un sens, ce n'est pas égal : $\text{Arctan}(-1) = -\pi/4$ et $\text{Arcsin}(-1)/\text{Arccos}(-1) = -1/2$.