Chapitre 35

Familles sommables

Dans tout le chapitre, on se donne $I, J, K \dots$ des ensembles non vides (K est un ensemble quelconque, qui ne doit pas être confondu avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ que nous avons manipulé en algèbre et que nous ne manipulerons pas dans ce chapitre). Enfin, on note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

I Introduction : nécessité d'une définition plus générale de la somme

Pour l'instant, on sait sommer une famille finie de réels ou de complexes, ou une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels ou de complexes si la série associée converge.

On sait également sommer une famille finie d'éléments d'un espace vectoriel E, mais ça s'arrête là.

On aimerait pouvoir sommer des éléments indicés par un ensemble plus général, comme un tableau infini :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & u_{5,0} & u_{5,1} & u_{5,2} & u_{5,3} & u_{5,4} & u_{5,5} & \cdots \\
 & u_{4,0} & u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} & u_{4,5} & \cdots \\
 & u_{3,0} & u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} & u_{3,5} & \cdots \\
 & u_{2,0} & u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} & u_{2,5} & \cdots \\
 & u_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} & u_{1,5} & \cdots \\
 & u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & u_{0,3} & u_{0,4} & u_{0,5} & \cdots
\end{array}$$

Le problème est que, contrairement à une somme finie où les termes n'ont pas d'importance, et contrairement à une somme de série où il y a un ordre naturel (d'abord u_0, puis u_1, puis etc. et on cherche la limite), il n'y a pas d'ordre naturel dans lequel sommer (d'abord la première colonne, puis la deuxième etc. ou d'abord la première ligne puis la deuxième etc.) et selon l'ordre dans lequel on somme, on peut avoir des surprises.

Cela peut sembler contre-intuitif mais, même si nous n'avons pas insisté là-dessus, la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ peut parfois réserver de ces surprises. Plus précisément : même si une série converge, si on change l'ordre des termes dans la somme d'une série convergente, on peut changer l'ordre de la somme elle-même.

Exemple : On a montré plusieurs fois (cf. par exemple exercice 13 du chapitre 23) que

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \cdots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2)$$

En d'autres termes, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. Permutons à présent les termes de la somme.

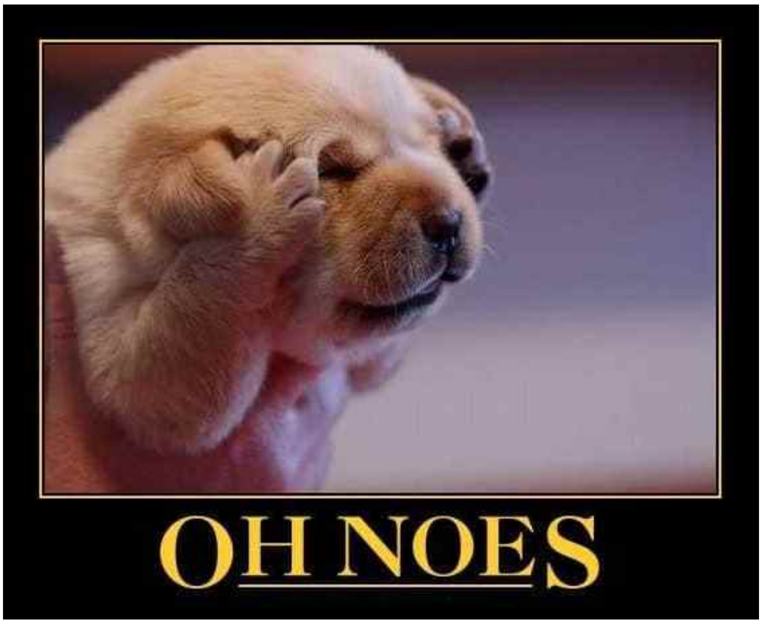
Soit $N \geqslant 0$ et notons $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} (a_{4n+1} + a_{4n+3} + a_{2n+2})$, où l'on a posé $a_n = (-1)^{n+1}/n$ c'est-à-dire que

$$S_N = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4N+1} + \frac{1}{4N+3} - \frac{1}{2N+2}\right)$$

On s'attend à avoir $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2)$. Cependant,

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N} \left(a_{4n+1} + a_{4n+3} + a_{2n+2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+3} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{4N+3} \frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{2p} \\
&= \sum_{n=1}^{4N+3} \frac{1}{n} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{4N+3} \frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{2p} \\
&= \sum_{n=1}^{4N+3} \frac{1}{n} - \sum_{p=1}^{2N+1} \frac{1}{2p} - \sum_{p=1}^{N+1} \frac{1}{2p} \\
&= \sum_{n=1}^{4N+3} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2N+1} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

En se souvenant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}\left(1\right)$, on montre finalement (exo) que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \dfrac{3\ln(2)}{2}$.



On peut même montrer un résultat plus fort, appelé théorème de réarrangement de... Riemann (cf. exercice 42 du chapitre 25) :

Théorème (Théorème de réarrangement de Riemann). Soit $\sum a_n$ une série convergente mais qui ne converge pas absolument. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Alors il existe une permutation σ de $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) telle que

$$\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \alpha$$

Ce résultat est totalement hors programme et n'est donné qu'à titre culturel.

En d'autres termes, quand on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, en réarrangeant les termes, on peut faire tendre ses sommes partielles vers absolument tout et n'importe quoi, y compris $+\infty$ et $-\infty$!

Il est donc nécessaire de se donner une définition plus générale de somme que l'on pourra utiliser pour sommer des familles plus générales que des familles finies ou des suites, et où la notion d'ordre n'aura aucune importance. En effet, l'année prochaine, vous définirez l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ ou plus généralement un ensemble dénombrable dans lequel il n'y a pas forcément d'ordre privilégié (il n'existe pas d'ordre plus naturel que les autres sur $\mathbb{Q}$ par exemple) : il est donc indispensable, pour garder l'interprétation intuitive de l'espérance comme valeur moyenne, que l'ordre dans lequel les termes sont sommés n'ait aucune importance !

Il est évident que si on dit qu'un dé donne $1, 2, 3, 4, 5, 6$ avec probabilité $1/6$ ou $6, 5, 4, 3, 2, 1$ avec probabilité $1/6$, alors l'espérance ne change pas et reste égale à $7/2$: pour rester conforme à l'intuition, il faudra que ce soit encore vrai pour des variables générales plus générales !

II L'infini « réhabilité » : $+\infty$, une quantité positive comme les autres

II.1 L'ensemble $[\,0\,;+\infty\,]$: relation d'ordre et calcul

Dans le chapitre 12, on avait introduit l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, et on avait prolongé l'ordre usuel et (partiellement) l'addition usuels sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$. Nous allons procéder de même dans ce paragraphe en adjoignant un élément noté $+\infty$ à $\mathbb{R}_+$, ce qui donne l'ensemble $[\,0\,;+\infty\,]$ (qu'on note parfois $\overline{\mathbb{R}_+}$, mais nous utiliserons exclusivement la notation $[\,0\,;+\infty\,]$).

On avait fait à peu près la même chose dans les chapitres 19 et 20 en adjoignant, respectivement, $-\infty$ à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$.

Définition. On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $[\,0\,;+\infty\,]$ en posant :

$$\forall x \in [\,0\,;+\infty\,], x \leqslant +\infty$$

avec égalité si et seulement si $x = +\infty$.

Remarques :

- En particulier, $+\infty$ est un majorant de toute partie non vide A de $[\,0\,;+\infty\,]$. Ainsi, pour désigner la propriété :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leqslant M$$

on dira que A est majorée au sens usuel, ou majorée par un réel.
- On se trouve dans ce chapitre dans un cadre vraiment très particulier... Dans un exercice qui ne porte pas sur les familles sommables, « majoré » reprend son sens habituel, ne vous en faites pas trop.
- On prouve alors aisément que $\leqslant$ ainsi prolongée est encore une relation d'ordre total sur $[\,0\,;+\infty\,]$.
- On peut définir une notion de borne supérieure comme dans le chapitre 16, à savoir le plus petit des majorants, ce qui donne :

Proposition. Tout partie non vide A de $[\,0\,;+\infty\,]$ admet une borne supérieure dans $[\,0\,;+\infty\,]$.

- Si A est majorée par un réel, alors cette borne supérieure coïncide avec celle obtenue dans les chapitres antérieurs.

- Sinon, $\sup(A) = +\infty$.

Démonstration. Soit A une partie non vide de $[\,0\,;+\infty\,]$. $+\infty$ est un majorant de A, et si A n'est pas majorée par un réel, c'est le seul, donc le plus petit, si bien que $\sup(A) = +\infty$.

Si A est majorée par un réel, alors A admet une borne supérieure réelle (pour la relation d'ordre usuel sur $\mathbb{R}$) qui est inférieure à $+\infty$ donc cette borne supérieure reste le plus petit des majorants donc est bien la borne supérieure pour la relation d'ordre étendue à $[\,0\,;+\infty\,]$.

Remarques :

- On peut aussi, dans ce cadre élargi, définir la borne supérieure de l'ensemble vide : rappelons qu'un ensemble A est majoré par M si : $\forall a \in A, a \leqslant M$. Si A est vide, alors la proposition « $\forall a \in A$ » est toujours fausse car A ne contient aucun élément donc la proposition « $\forall a \in A, a \leqslant M$ » est vraie quel que soit M. En effet, rappelons qu'une implication $P \Rightarrow Q$ avec P fausse est toujours vraie, et on peut écrire la proposition précédente sous la forme : $\forall a, a \in A \Rightarrow a \leqslant M$. En d'autres termes, tout élément de $[\,0\,;+\infty\,]$ est un majorant du vide et le plus petit est 0, si bien que $\sup(\varnothing) = 0$ (et, sur $\overline{\mathbb{R}}$, on dit parfois que $\sup(\varnothing = -\infty)$.
- Encore une fois, à part dans un exercice qui traite explicitement des familles sommables, le mot « majoré » et les mots « borne supérieure » reprennent leur sens habituel. En particulier (à part quand on parle de famille sommable) quand on demande de prouver qu'une partie admet une borne supérieure, il est sous-entendu « réelle » donc on attend comme démonstration : la partie est non vide majorée donc admet une borne supérieure. Simplement, ici, on peut s'en passer (sauf si on veut une borne supérieure réelle).
- Encore une fois, tout dépend des conventions : le mot majoré étant le plus souvent pris dans le sens naturel, i.e. « majoré par un réel », on dira parfois qu'une partie non vide et non majorée de $[\,0\,;+\infty\,]$ admet comme borne supérieure $+\infty$.
- Ne nous noyons pas dans un verre d'eau pour quelque-chose somme toute très intuitif : personne n'est choqué par l'écriture $\sup(\mathbb{N}) = \sup(\mathbb{Z}) = \sup([\,0\,;+\infty\,[) = +\infty$!

Un moyen simple de ne pas se tromper est de toujours préciser, dans ce chapitre, qu'on prend une borne supérieure ou qu'on majore dans $[\,0\,;+\infty\,]$.

On peut aussi prolonger les règles de calcul de la somme et du produit usuels à $[\,0\,;+\infty\,]$:

Définition. On prolonge la somme et le produit de $[\,0\,;+\infty\,[$ sur $[\,0\,;+\infty\,]$ en posant :

- $\forall x \in [\,0\,;+\infty\,], x + \infty = +\infty + x = +\infty$
- $\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,], x \times (+\infty) = (+\infty) \times x = +\infty$.
- $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = 0$.

Remarques :

- La dernière définition ne remet pas en cause le fait que c'est une forme indéterminée pour des limites, car le 0 ici n'est pas une limite mais une quantité fixée.
- La seule vraie forme indéterminée qui reste indéterminée est $-\infty + \infty$ car ce ne sont pas des nombres mais des limites, et alors on ne saurait vraiment pas quoi faire. Heureusement qu'on travaille sur $[\,0\,;+\infty\,]$! Par conséquent, dans ce paragraphe, on pourra vraiment sommer sans se poser de questions, grâce à la positivité des termes. Ce sera un peu plus difficile dans la partie III.

Proposition. La relation d'ordre $\leqslant$ étendue à $[\,0\,;+\infty\,]$ est compatible avec la somme et le produit, c'est-à-dire que si a et b appartiennent à $[\,0\,;+\infty\,]$ et vérifient $a \leqslant b$, et si $\lambda \in [\,0\,;+\infty\,]$, alors $a + \lambda \leqslant b + \lambda$ et $\lambda a \leqslant \lambda b$.

En clair : on peut manipuler la relation d'ordre sur $[\,0\,;+\infty\,]$ comme sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration. Pour la somme : si $\lambda = +\infty$, alors $a + \lambda = a + \lambda b = +\infty$; si $b = +\infty$ alors $b + \lambda = +\infty$ donc l'inégalité est vérifiée (peu importe a et λ), et si λ et b sont $< +\infty$, alors $a < +\infty$ et dans ce cas, cela découle des propriétés de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

Pour le produit :

- Si $\lambda = 0$ alors $\lambda a = \lambda b = 0$ (que a ou b soit égal à $+\infty$ ou non).
- Si $\lambda > 0$ et $b = +\infty$, alors $\lambda b = +\infty$ donc, peu importe la valeur de a, on a $\lambda a \leqslant \lambda b$.
- Si $\lambda = +\infty$, alors soit $a = 0$ et alors $\lambda a = 0 \leqslant \lambda b$ peu importe la valeur de b, et si $a > 0$ alors $b > 0$ donc $\lambda a = \lambda b = +\infty$.
- Enfin, si $\lambda < +\infty$ et $b < +\infty$, alors cela découle des propriétés de l'ordre usuel sur $\mathbb{R}$.

Quand on écrit que $\lambda > 0$, cela signifie : $\lambda \in]\,0\,;+\infty\,]$.

Proposition. Soit A une partie non vide de $[\,0\,;+\infty\,]$ et soit $\lambda \in [\,0\,;+\infty\,]$. Alors $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$, où on a posé $\lambda A = \{\lambda a \,|\, a \in A\}$.

Ce résultat sera utile dans le paragraphe II.3.c, pour montrer la linéarité de la somme.

Démonstration. Soit $a \in A$. Alors $a \leqslant \sup(A)$ donc $\lambda a \leqslant \lambda \sup(A)$ d'après la proposition précédente donc $\lambda \sup(A)$ est un majorant de λA : par définition de la borne supérieure, $\sup(\lambda A) \leqslant \lambda \sup(A)$.

Réciproquement, prouvons que $\lambda \sup(A) \leqslant \sup(\lambda A)$.

- Si $\sup(A) = 0$ le membre de gauche est nul donc le résultat est évident. Idem si $\lambda = 0$.
- Supposons donc que $\sup(A) > 0$. Alors il existe $a \in A$ tel que $a > 0$. Si $\lambda = +\infty$, alors $\lambda a = +\infty$ donc $\sup(\lambda A) = +\infty$ ce qui prouve l'inégalité voulue.
- Supposons enfin que $\sup(A) > 0$ et $\lambda \in]\,0\,;+\infty\,[$. Alors $a = \dfrac{1}{\lambda}.(\lambda a)$ (que a soit égal à $+\infty$ ou non) et puisque $\lambda a \leqslant \sup(\lambda A)$, d'après la proposition précédente, $a \leqslant \dfrac{1}{\lambda} \times \sup(\lambda A)$: le membre de droite est un majorant de A donc est supérieur à $\sup(A)$ ce qui permet de conclure.

II.2 Somme d'une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$

Comme dit ci-dessus, on ne peut pas prendre une famille finie et passer à la limite (si une telle limite existe évidemment) car, en changeant l'ordre, cela peut donner tout et n'importe quoi puisqu'il n'y a pas forcément d'ordre naturel pour une famille quelconque.

Mais on verra que pour une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$, l'ordre n'a en fait pas d'importance.

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$. On appelle somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$, qu'on note $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$, la borne supérieure (dans $[\,0\,;+\infty\,]$) de l'ensemble des sommes $\displaystyle\sum_{i\in F} u_i$ lorsque F décrit l'ensemble des parties finies de I. En d'autres termes :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sup_{F\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{i\in F} x_i$$

Rappelons qu'on note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I.

Remarque : Il n'y a aucune condition de convergence, de limite ou même d'existence dans la définition précédente. C'est normal ! Puisqu'on travaille dans $+\infty$, la borne supérieure (dans $[\,0\,;+\infty\,]$) existe toujours (et peut valoir $+\infty$). De plus, cette définition en tant que borne supérieure semble impliquer que l'ordre des termes n'a aucune importance, ce qu'on prouvera effectivement dans le paragraphe II.3.b.

Proposition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$.

- Si l'un des x_i vaut $+\infty$, alors $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = +\infty$.
- Si I est un ensemble fini et si les x_i sont des réels positifs, cette nouvelle somme coïncide avec leur somme au sens usuel du terme.
- Si $I=\mathbb{N}$ et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs, alors :
  - ⋆ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ si la série $\sum u_n$ converge, c'est-à-dire que la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est la limite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.
  - ⋆ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = +\infty$ si la série diverge. On notera alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Encore heureux : on les note de la même façon !

Remarques :

- Le dernier point est également valable dans le cas où $I=\mathbb{N}^*$ ou $\mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ ou etc. en adaptant un peu ($\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}$ au lieu de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$ etc.).
- ⚠ La réciproque du premier point est fausse, c'est-à-dire qu'une somme peut être égale à $+\infty$ sans que l'un des termes soit égal à $+\infty$. D'après le dernier point, il suffit de prendre une série à termes positifs divergente, par exemple :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

- ⚠ Les deux derniers points ne sont valables que pour des séries à termes POSITIFS ! De toute façon, pour l'instant, on ne sait pas définir $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ quand les x_i ne sont pas des éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$.

Démonstration. Rappelons que la borne supérieure est un majorant (plus précisément le plus petit des majorants). En particulier, pour toute partie finie F de I, on a :

$$\sum_{i\in F} x_i \leqslant \sum_{i\in I} x_i$$

Enfin, rappelons que si $+\infty \leqslant x$, alors $x=+\infty$, et si $x\neq+\infty$, alors $x<+\infty$.

- S'il existe i_0 tel que $x_{i_0}=+\infty$ alors, en prenant $F=\{i_0\}$:

$$\sum_{i\in F} x_i = x_{i_0} = +\infty \leqslant \sum_{i\in I} x_i$$

ce qui donne le résultat voulu.

- Supposons que I soit fini. Puisqu'on cherche précisément à prouver que

$$\underbrace{\sum_{i\in I} x_i}_{\text{ancienne version}} = \underbrace{\sum_{i\in I} x_i}_{\text{nouvelle version}}$$

alors on se retiendra d'utiliser cette notation pour l'objet que l'on vient de définir, et celle-ci ne désignera que la somme usuelle. On veut donc prouver que

$$\underbrace{\sum_{i\in I} x_i}_{\text{ancienne version}} = \sup_{F\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{i\in F} x_i$$

Si F est une partie (forcément finie car I est fini) de I, alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in F} x_i + \underbrace{\sum_{i\in I\setminus F} x_i}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{i\in F} x_i$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$ est un majorant de l'ensemble des $\displaystyle\sum_{i\in F} x_i$ pour $F \in \mathscr{P}_f(I)$. Cependant, I est elle-même une partie finie de I donc appartient à cet ensemble : un majorant qui appartient à l'ensemble est un maximum, et en particulier la borne supérieure, d'où l'égalité cherchée.

- Notons comme d'habitude $(S_N)_N$ la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. La suite (u_n) étant à termes positifs, la suite $(S_N)_N$ est croissante et tend $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ si la série converge, et vers $+\infty$ si elle diverge.
  - ⋆ Supposons que la série converge. Soit F une partie finie de $\mathbb{N}$, soit $N = \max F$. Alors

$$\sum_{n\in F} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n$$

puisque les termes manquants sont positifs. La suite (S_N) étant croissante, elle est majorée par sa limite S si bien que $\displaystyle\sum_{n\in F} u_n \leqslant S$: S est un majorant de l'ensemble des $\displaystyle\sum_{n\in F} x_n$ pour $F \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})$. Cependant, S est aussi la limite d'une suite d'éléments de cet ensemble car

$$\sum_{n\in[\![0\,;N]\!]} x_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$$

Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a le résultat voulu.

  - ⋆ Supposons que la série diverge. Il suffit de prouver que $+\infty$ est le plus grand majorant de cet ensemble. Or, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ donc, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$, il existe N tel que

$$M < S_N = \sum_{n\in[\![0\,;N]\!]} u_n \qquad \square$$

c'est-à-dire qu'aucun réel ne majore l'ensemble ci-dessus, $+\infty$ est son seul majorant donc également sa borne supérieure.

II.3 Propriétés (bien pratiques)

II.3.a Théorème de sommation par paquets

Théorème (Théorème de sommation par paquets (admis)). Si I est réunion disjointe des I_k, pour $k \in K$, et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$, alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k} x_i$$

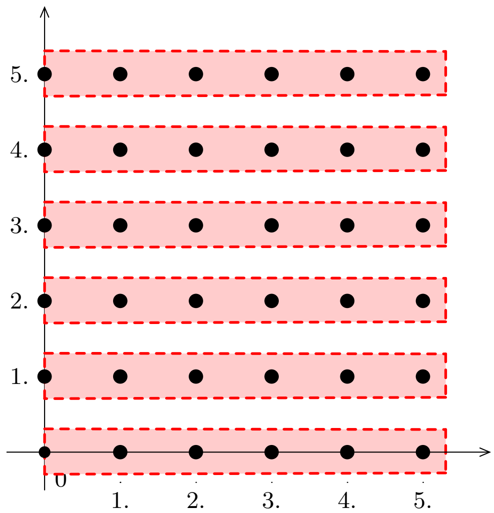
Remarque : Ce théorème (dont la démonstration est HP) a l'air compliqué mais il dit simplement que quand on a des termes dans $[\,0\,;+\infty\,]$ et si on a des paquets disjoints dont l'union vaut l'ensemble des indices, on peut regrouper les termes par paquets pour les sommer. D'une part, c'est complètement intuitif (voir ci-dessous), et d'autre part, on le faisait déjà pour les sommes finies quand on séparait termes pairs et termes impairs, et aussi pour les sommes infinies (en précisant qu'il y avait convergence absolue, cf. III.4.a) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1,\ n \text{ pair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1,\ n \text{ impair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

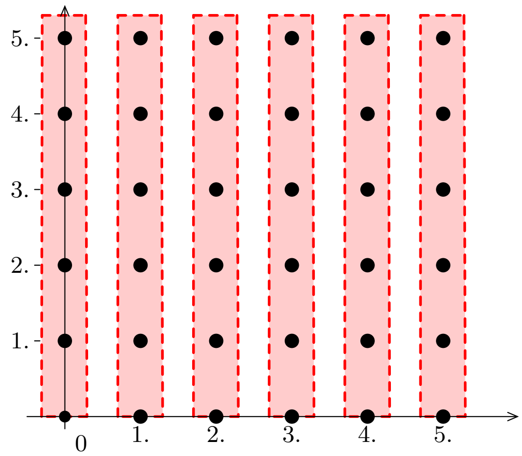
Cela n'avait choqué personne : c'est bien la preuve que ce théorème est très intuitif ! Malgré son apparente complexité, l'idée est évidemment de regrouper les termes par paquets pour faire des sommes simples à calculer, typiquement termes pairs / termes impairs, mais pas que !

Nous calculerons souvent des sommes de termes indexés par $\mathbb{N}^2$ ou par $\mathbb{Z}$, et alors les unions (disjointes) suivantes s'avéreront bien utiles :

- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\{i\} \times \mathbb{N})$: partition en lignes.



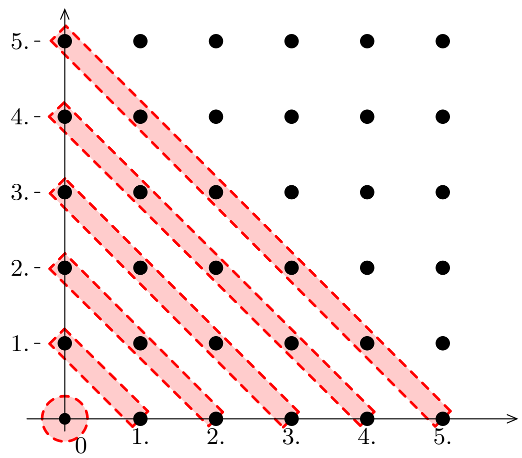
- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (\mathbb{N} \times \{j\})$: partition en colonnes.



- $\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(k, n-k) \mid k \in [\![0 ; n]\!]\}$: partition en lignes obliques de pente -1.

Quand on représente les couples graphiquement, les coordonnées désignent respectivement les lignes et les colonnes (cf. paragraphe I.), ce ne sont pas l'abscisse et l'ordonnée habituelles ! C'est même le contraire : le premier indice, ou la première coordonnée, désigne la ligne (donc l'ordonnée), et le deuxième indice, ou la deuxième coordonnée, la colonne (donc l'abscisse), si bien que $\{i\} \times \mathbb{N} = \{(i,j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ est la i-ième ligne, et $\mathbb{N} \times \{j\} = \{(i,j) \mid i \in \mathbb{N}\}$ est la j-ième colonne.

cf. paragraphe III.4.b.



Dans chacun de ces trois cas de figure, la somme $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_{i,j}$ est successivement égale à :

- $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j}$: pour chaque i, on somme d'abord les termes de la ligne i, puis on somme les sommes de chaque ligne.
- $\displaystyle\sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,j}$: pour chaque j, on somme d'abord les termes de la colonne j, puis on somme les sommes de chaque colonne.
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in[\![0\,;n]\!]} x_{k,n-k}$: pour chaque n, on somme d'abord les termes de la diagonale descendante joignant $(0,n)$ et $(n,0)$, puis on somme les sommes de chaque diagonale.

Le fait que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{i,j} = \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{i,j}$$

se généralise à un ensemble produit quelconque :

Corollaire (Théorème de Fubini positif). Soient A et B deux ensembles non vides, soit $(x_{a,b})_{(a,b)\in A\times B}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$. Alors :

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} x_{a,b} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} x_{a,b} = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} x_{a,b}$$

Démonstration. Il suffit de voir que

$$A\times B = \bigcup_{a\in A}\{a\}\times B = \bigcup_{b\in B} A\times\{b\}$$

□

et que ces unions sont disjointes : on conclut ensuite avec le théorème de sommation par paquets.

Remarque : En particulier, QUAND ON TRAVAILLE AVEC DES ÉLÉMENTS DE $[\,0\,;+\infty\,]$, on peut toujours intervertir des sommes doubles (même infinies), tout en gardant en tête que ces sommes peuvent être égales à $+\infty$.

II.3.b Changement d'indice

Proposition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ et soit φ une injection de I dans J. Alors :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in\varphi(I)} x_{\varphi^{-1}(j)}$$

Démonstration. Une application injective est une bijection sur son image, si bien que φ est une bijection de I dans $\varphi(I)$, de bijection réciproque $\varphi^{-1} : \varphi(I) \to I$. Dès lors, $I = \bigcup_{j\in J}\{\varphi^{-1}(j)\}$ et cette union est disjointe. On conclut avec le théorème de sommation par paquets.

Remarques :

- En d'autres termes, on peut faire des changements d'indice comme pour les sommes finies... ce qu'on ne s'est pas privé de faire dans le chapitre sur les séries ! Une légère arnaque... qui n'était en fait qu'une simple anticipation de ce chapitre, tout va bien.
- Comme pour les sommes finies, il ne sera pas nécessaire d'expliciter la bijection φ, on pourra faire comme d'habitude, mais il faut tout de même garder dans sa tête que φ doit être bijective, ce qui évite d'écrire des âneries du type

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}$$

après avoir « posé » $p = 2n$ car les deux sommes ne contiennent pas les mêmes termes : à droite, il y a $1 = 1/1!$, alors que ce terme ne se trouve pas à gauche. Il faut écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} = \sum_{p=0,\ p \text{ pair}}^{+\infty} \frac{1}{p!}$$

Corollaire (Invariance d'une somme par permutation). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ et soit $\sigma \in S_I$ une permutation de I (i.e. une bijection de I dans lui-même). Alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$$

Démonstration. Découle de la proposition précédente avec $\varphi = \sigma^{-1}$.

Remarque : En particulier, quand on manipule des éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$, la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les somme, ce qui est presque la raison d'être de ce chapitre. Il ne nous reste plus qu'à l'étendre (si possible) aux réels et aux complexes quelconques, ce que nous ferons dans le paragraphe III.

II.3.c Opérations « élémentaires »

Lemme. Soient F une partie finie de I, $(x_i)_{i\in F}$ une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ et $\lambda \in [\,0\,;+\infty\,]$. Alors :

$$\lambda \sum_{i\in F} x_i = \sum_{i\in I} \lambda x_i$$

Démonstration.

- Si aucun des x_i n'est égal à $+\infty$, alors ce résultat découle de la linéarité de la somme classique.
- Si $\lambda = 0$, alors le membre de gauche est nul (que la somme soit égale ou non à $+\infty$) et tous les λx_i sont nuls donc la somme de droite est aussi nulle.

Rappelons qu'on a posé par convention $0\times(+\infty) = 0$.

- Enfin, si $\lambda \in \,]\,0\,;+\infty\,[$ et s'il existe i_0 tel que $x_{i_0} = +\infty$, alors $\lambda x_{i_0} = +\infty$ donc la somme de droite vaut $+\infty$, et la somme de gauche également donc $\lambda \sum_{i \in F} x_i = +\infty$.

Dans tous les cas, les deux quantités sont égales.

Proposition. Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J}$ des familles d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ et $\lambda \in [\,0\,;+\infty\,]$. Alors on a les propriétés suivantes :

- **(Somme d'une sous-famille)** Si $I' \subset I$ alors $\sum_{i\in I'} x_i \leqslant \sum_{i \in I} x_i$.
- **(Linéarité de la somme)** $\sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$ et $\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.
- **(Sommation des inégalités)** Si, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors $\sum_{i\in I} x_i \leqslant \sum_{i\in I} y_i$.
- **(Familles produits)** $\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j \in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \times b_j$.

Ici, on ne somme pas forcément un nombre fini de termes.

En clair : quand on manipule des éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$, on peut travailler avec des sommes quelconques comme avec des sommes finies sans se poser de question, ni justifier (à part en disant qu'on manipule des éléments positifs).

Démonstration.

- $I = I' \cup (I \backslash I')$ et cette union est disjointe donc, d'après le théorème de regroupement par paquets,

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i \in I'} x_i + \underbrace{\sum_{i\in I\backslash I'} x_i}_{\geqslant 0} \geqslant \sum_{i\in I'} x_i$$

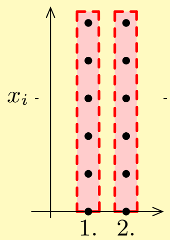
- Notons $(z_{i,j})_{(i,j)\in I\times\{1;2\}}$ indexée par $I \times \{1;2\}$ définie par :

$$\forall i \in I, z_{i,1} = x_i \qquad \text{et} \qquad z_{i,2} = y_i$$

Alors $I\times\{1;2\} = (I\times\{1\})\cup(I\times\{2\})$ et cette union est disjointe : d'après le théorème de sommation par paquets,

$$\sum_{(i,j)\in I\times\{2;2\}} z_{i,j} = \sum_{i\in I} z_{i,1} + \sum_{i \in I} z_{i,2}$$

On peut les représenter en colonne avec à gauche la colonne des x_i et à droite la colonne des y_i.



La première somme est égale à $\sum_{i\in I}(x_i+y_i)$, la deuxième à $\sum_{i\in I} x_i$ et la troisième à $\sum_{i\in I} y_i$, d'où la première égalité.

Pour la deuxième, notons

$$A = \left\{ \sum_{i\in F} x_i \,|\, F \in \mathscr{P}_f(I) \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ \sum_{i\in F} \lambda x_i \,|\, F \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$$

Il s'agit de prouver que $\lambda \sup(A) = \sup(B)$. D'après la partie II.1, $\lambda \sup(A) = \sup(\lambda A)$ où on rappelle que

$$\lambda A = \left\{ \lambda \sum_{i\in F} x_i \,|\, F \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$$

Or, d'après le lemme ci-dessus, $\lambda A = B$ donc ont la même borne supérieure, d'où le résultat.

- Supposons que $x_i \leqslant y_i$ pour tout i. Les sommes finies des x_i sont inférieures aux sommes finies correspondantes de y_i donc à la somme des y_i qui est leur borne supérieure. En d'autres termes, $\displaystyle\sum_{i\in I} y_i$ est un majorant de l'ensemble des $\displaystyle\sum_{i\in F} x_i$ quand $F \in \mathscr{P}_f(I)$ donc est supérieure à sa borne supérieure, c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i$.
- D'après le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j &= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_i b_j \\ &= \sum_{i\in I}\left(a_i \sum_{j\in J} b_j\right) \\ &= \left(\sum_{j\in J} b_j\right)\times\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\end{aligned}$$

□

Linéarité avec $\lambda = a_i$.

Linéarité avec λ la somme des b_j.

Remarques :

- On peut évidemment généraliser la linéarité à une somme ou une combinaison linéaire de plus de deux familles, et le cas des familles produits à un produit de plus de deux familles (mais attention de bien prendre des indices de sommation différents).
- Attention, le cas d'égalité pour la somme d'inégalités « il y a égalité si et seulement si, pour tout i, $x_i = y_i$ » n'est plus valable car il suffit qu'un seul des termes de chaque famille soit égal à $+\infty$ et cela emporte tout sur son passage. On peut également avoir égalité sans que l'un des termes soit égal à $+\infty$: par exemple, on a $1/n < 1/\sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 2$ mais

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$

Le cas d'égalité n'est donc valable que pour les sommes finies ou les sommes infinies de séries **convergentes**.

Rappelons qu'une somme d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ indexée par $\mathbb{N}^*$ est infinie si et seulement si la série diverge.

- Tant qu'on parle de séries convergentes : « Mais alors... il n'y a rien à justifier ? Trop cool ! Pourquoi il nous a em... avec ses convergences de séries alors ? » Parce que cela n'est valable que quand les éléments appartiennent à $[\,0\,;+\infty\,]$ et que les sommes ci-dessus peuvent valoir $+\infty$! Mais c'est vrai que quand on manipulera des sommes infinies de termes positifs, on pourra aller plus vite grâce à ce résultat (cf. paragraphe suivant).

II.4 Familles sommables de réels positifs

Définition. Une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

C'est une famille d'éléments de $\mathbb{R}_+$, pas de $[\,0\,;+\infty\,]$!

Remarques :

- Contrairement à tout ce qu'on a fait précédemment, on prend une famille de **réels** positifs, c'est-à-dire appartenant à $[\,0\,;+\infty\,[$: en effet, si une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$ contient $+\infty$, sa somme vaut $+\infty$ et donc une famille ne peut pas être sommable si l'un de ses éléments vaut $+\infty$! C'est pour cela que les familles sommables sont des familles de réels positifs (pour l'instant).
- Une famille finie de réels positifs est toujours sommable.
- Une suite (u_n) de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge.

Proposition.

- Une sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.
- **(Domination)** Soient $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par I. Si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable et si, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant y_i$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Alors les familles $(x_i+y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda x_i)_{i\in I}$ sont sommables.

$\lambda \neq +\infty$!

Démonstration. Les deux premiers résultats découlent des résultats « somme d'une sous-famille » et « sommation des inégalités » vus au paragraphe précédent. Pour la dernière, il suffit de voir que, par linéarité de la somme :

$$\sum_{i\in I}(x_i+y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i < +\infty \qquad \text{et} \qquad \sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i < +\infty$$

ce qui permet de conclure. □

Remarques :

- Contrairement aux familles sommables générales (cf. paragraphe III), les familles sommables de réels positifs ne forment pas un espace vectoriel car on ne peut pas multiplier par un réel négatif.
- Ci-dessus, il est sous-entendu qu'on parle d'une famille de réels positifs, mais ce résultat sera encore vrai pour une famille quelconque : cf. paragraphe III.
- Le fait qu'une sous-famille d'une famille sommable soit sommable est utile en lui-même, mais également par contraposée : si une famille admet une sous-famille non sommable, alors la famille originelle n'est pas sommable.

  Par exemple, si on a une famille de réels positifs $F = (x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ alors, pour tout i, $(x_{i,j})_{j\in\mathbb{N}}$ est une sous-famille de F (correspondant à la i-ème ligne, voir ci-dessus), et pour tout j, $(x_{i,j})_{i\in\mathbb{N}}$ est aussi une sous-famille de F (correspondant à la j-ième colonne). Par conséquent, d'après le résultat ci-dessus, si l'une de ces sous-familles n'est pas sommables (i.e. si la série associée ne converge pas), alors la famille F n'est pas sommable. Voir un exemple ci-dessous.

II.5 Exemples

Le principe est simple : quand on manipule des réels **positifs**, comme on l'a vu, on peut effectuer toutes les opérations vues au paragraphe II.3, même si les familles ne sont pas sommables (tout en étant conscient que les quantités qu'on manipule peuvent valoir $+\infty$). Si, à la fin, on obtient une quantité strictement inférieure à $+\infty$, c'est que la famille est sommable.

Attention aux soustractions ! Quand il y a un $-$, on ne peut pas appliquer les résultats du paragraphe II.3, il faut faire comme au chapitre 25 et repasser par les sommes partielles.

Exemples :

- Rappelons que la fonction ζ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ par : $\forall s>1, \zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.

  Montrer que la famille $(\zeta(n)-1)_{n\geqslant 2}$ est sommable et calculer sa somme.

  Notons $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(\zeta(n)-1)$. Les termes sont positifs donc S est bien définie (éventuellement infinie) et :

Précisons que lorsqu'on définit S, elle peut a priori valoir $+\infty$ mais le fait que les termes soient positifs justifient tous les calculs, et puisqu'on trouve finalement $S < +\infty$, c'est que la famille est sommable.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^n}-1\right)\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{p^n}\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p^2-p}\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p(p-1)}\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Somme d'une série télescopique.

si bien que la famille est sommable.

- Montrer que la famille $\left(\dfrac{p^q}{e^{2p}\times q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

  Notons S sa somme. Les termes sont positifs donc S est bien définie (éventuellement infinie) et :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p^q}{e^{2p}\times q!}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}e^{-2p}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{p^q}{q!}\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}e^{-2p}\times e^p\\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}e^{-p}\\
&= \frac{1}{1-e^{-1}}
\end{aligned}
$$

Somme d'une série géométrique de raison $e^{-1}\in\,]-1\,;1[$.

  En particulier, $S<+\infty$ donc la famille est sommable.

- Pour quelle valeur de $\alpha\in\mathbb{R}$ la famille $\left(\dfrac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ? Le cas échéant, exprimer sa somme en fonction de la fonction ζ.

  Notons S sa somme. Les termes sont positifs donc S est bien définie (éventuellement infinie).

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{pq}{(p+q)^\alpha} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{p(k-p)}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{k-1} \frac{p(k-p)}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\left(k \times \sum_{p=1}^{k-1} p - \sum_{p=1}^{k-1} p^2\right) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}\left(k \times \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \times \frac{6k^3 - 6k^2 - 4k^3 + 6k^2 + 2k}{12} \\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^{\alpha-3}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)
\end{aligned}$$

$k = p + q$

On a la somme d'une série de terme général $\dfrac{1}{k^{\alpha-3}} - \dfrac{1}{k^{\alpha-1}} \sim \dfrac{1}{k^{\alpha-3}}$: on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. On a une série de Riemann de paramètre $\alpha - 3$: la série converge si et seulement si $\alpha - 3 > 1$ si et seulement si $\alpha > 4$.

Si $\alpha < \beta$, $\dfrac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ et donc :
$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{n^\beta} \sim \frac{1}{n^\alpha}$$

Par conséquent, la somme est inférieure strictement à $+\infty$, et donc la famille est sommable, si et seulement si $\alpha > 4$. Supposons donc que $\alpha > 4$. Les deux séries $\sum 1/k^{\alpha-3}$ et $\sum 1/k^{\alpha-1}$ (car $\alpha - 1 > 3$) convergent donc, par linéarité de la somme (infinie) :

Ici, le chapitre 25 est indispensable : on a une différence, donc on ne peut plus appliquer ce qui précède !

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-3}} - \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}} \\
&= \frac{1}{6}(\zeta(\alpha-3) - 1) - \frac{1}{6}(\zeta(\alpha-3) - 1) \\
&= \frac{\zeta(\alpha-3) - \zeta(\alpha-1)}{6}
\end{aligned}$$

III Familles sommables de nombres complexes

Dans ce paragraphe, on manipule des familles de complexes (distincts, donc, de $+\infty$).

III.1 Familles sommables

Définition. Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de complexes est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$. On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables (complexes) indexées par I.

Remarques :

- Pour l'instant, on ne manipule que des sommes de réels positifs, qui sont donc bien définies d'après le paragraphe précédent.
- Par définition, une famille de complexes $(u_i)_{i\in\mathbb{C}}$ est sommable si et seulement si la famille de ses modules (qui sont des réels positifs donc on se ramène au paragraphe

précédent) est sommable. En d'autres termes : une famille de complexes (respectivement de réels) est sommable si et seulement si elle l'est en module (respectivement en valeur absolue).

- Comme pour les suites, on peut vouloir distinguer les cas selon que les suites sont à valeurs réelles ou à valeurs complexes :

Définition. On note $\ell^1(I, \mathbb{R})$ (respectivement $\ell^1(I, \mathbb{C})$) l'ensemble des familles sommables indexées par I à valeurs réelles (respectivement complexes).

$\ell^1(I)$ est par défaut $\ell^1(I, \mathbb{C})$.

Remarque : Rappelons que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$: ainsi, un résultat vrai pour une famille de $\ell^1(I) = \ell^1(I, \mathbb{C})$ sera toujours vrai pour une famille de $\ell^1(I, \mathbb{R})$.

Proposition.

- Une famille finie est toujours sommable.
- Une suite (u_n) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument.

Dans la suite, sauf indication contraire, quand on parlera de familles ou de suites, il sera sous-entendu : de complexes.

Démonstration. Découle du fait qu'une famille est sommable si et seulement si elle est sommable en module :

- une famille finie de réels positifs est toujours sommable, donc si $(u_i)_{i\in F}$ est finie, $(|u_i|)_{i\in F}$ est finie donc sommable et donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.
- une suite positive est sommable si seulement si la série associée converge, donc si (u_n) est une suite, (u_n) est sommable si et seulement si $(|u_n|)$ est sommable, si et seulement si $\sum |u_n|$ converge, si e seulement si $\sum u_n$ CVA.

Remarques :

- On notera donc
$$\ell^1(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge absolument} \right\}$$
On peut rapprocher cette notation de la notation $\ell^2(\mathbb{N})$ vue aux chapitres 25, 28 et 34. On définit plus généralement (mais ce n'est pas au programme, seuls $\ell^1(\mathbb{N})$ et plus généralement $\ell^1(I)$ sont explicitement au programme), pour tout $p \in [\![1\,;+\infty [\![$:

p n'est pas forcément un entier.
$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum |u_n|^p \text{ converge} \right\}$$
À titre culturel, on définit aussi l'ensemble $\ell^\infty(\mathbb{N})$, qui est l'ensemble des suites bornées.
- Attention à ne pas oublier le « absolument » ! Par exemple, si (u_n) est la suite de terme général $(-1)^n/n$, alors la série $\sum u_n$ converge mais

Critère des séries alternées, ou on le fait à la main et on calcule sa somme.
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \\ &= +\infty \end{aligned}$$
si bien que la suite de terme général $((-1)^n/n)$ n'est pas sommable.

Proposition.

- Une sous-famille d'une famille sommable est encore sommable.

- **(Domination)** Soient $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexées par I. Si $(y_i)_{i\in I}$ est sommable et si, pour tout $i \in I$, $|x_i| \leqslant y_i$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les familles $(x_i + y_i)_{i\in I}$ et $(\lambda x_i)_{i\in I}$ sont sommables.

On manipule des complexes : attention à ne pas oublier le module (ou la valeur absolue si on manipule des réels pas forcément positifs) !

Démonstration.
- Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable alors, par définition, $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable, et si $I' \subset I$ alors (cf. paragraphe II.3) $(|x_i|)_{i\in I'}$ est sommable donc $(x_i)_{i\in I'}$ est sommable : une sous-famille d'une famille sommable est sommable.
- Le résultat concernant la domination se démontre également à l'aide du résultat éponyme du paragraphe II.3 : $\rightsquigarrow$ Exercice.
- Enfin, pour tout i, par inégalité triangulaire, $|x_i + y_i| \leqslant |x_i| + |y_i|$. Or, d'après le paragraphe II.3, les familles $(|x_i|)$ et $(|y_i|)$ sont sommables donc $(|x_i| + |y_i|)$ est sommable donc, par domination, $(|x_i + y_i|)$ est sommable, c'est-à-dire que $(x_i + y_i)$ est sommable. Le cas de (λx_i) est analogue.

Rappelons que, par définition, une famille est sommable si et seulement si elle l'est en module (ou en valeur absolue pour les réels).

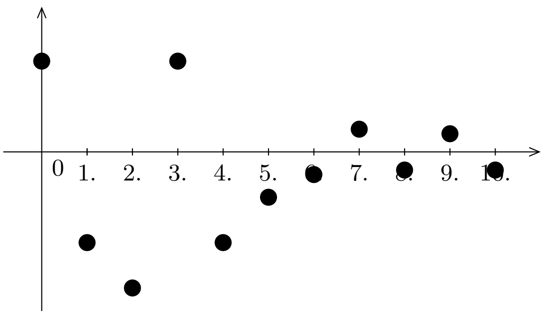
Corollaire. $\ell^1(I)$ est un espace vectoriel. En particulier, une combinaison linéaire de familles sommables est encore sommable.

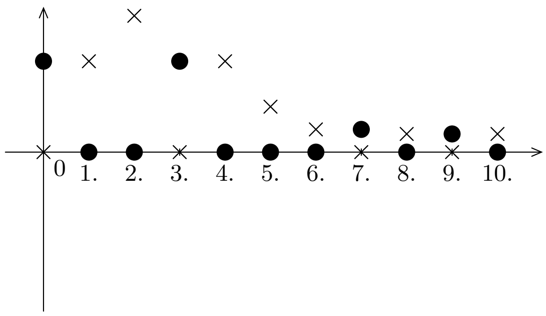
III.2 Somme d'une famille sommable

III.2.a Passage par les réels positifs

Proposition/Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$. Alors x^+ et x^- sont des réels positifs, et $x = x^+ - x^-$, et $|x| = x^+ + x^-$.

Remarque : Pour être clair : quand $x \geqslant 0$, alors $x^+ = x$ et $x^- = 0$, tandis que si $x \leqslant 0$, alors $x^+ = 0$ et $x^- = 0$. Faisons un dessin : ci-dessous, à gauche, on a représenté une suite (x_n), et à droite, les suites $({x_n}^+)$ (avec des ronds) et la suite $({x_n}^-)$ (avec des croix).





Démonstration. Déjà faite au chapitre 25, dans le paragraphe de la convergence absolue.

Proposition.
- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de réels. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux familles $({x_i}^+)_{i\in I}$ et $({x_i}^-)_{i\in I}$ le sont.
- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux familles $(\mathrm{Re}(x_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(x_i))_{i\in I}$ le sont.

Démonstration. Pour les réels : si (x_i) est sommable, alors, pour tout i, $|x_i| \geqslant {x_i}^+$ donc, par domination, $({x_i}^+)$ est sommable, et idem pour $({x_i}^-)$. Réciproquement, si $({x_i}^+)_{i\in I}$ et $({x_i}^-)_{i\in I}$ sont sommables alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable car, pour tout i, $x_i = {x_i}^+ - {x_i}^-$ et on sait qu'une combinaison linéaire de familles sommables est sommable. Le cas complexe est analogue.

III.2.b Définition

Définition.

- Soit $(x_i) \in \ell^1(I, \mathbb{R})$. On définit la somme de la famille $(x_i)_{i\in I}$ par :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} {x_i}^+ - \sum_{i\in I} {x_i}^-$$

- Soit $(x_j) \in \ell^1(J, \mathbb{C})$. On définit la somme de la famille $(x_j)_{j\in J}$ par :

$$\sum_{j\in I} x_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(x_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(x_j)$$

On a pris l'ensemble J et on a noté l'indice de sommation i pour qu'il n'y ait aucune confusion avec le i complexe, mais les cas où le complexe i apparaîtra seront rares et on reprendra donc les notations habituelles par la suite (et il faut être vicieux pour confondre l'indice j avec le complexe j...).

Remarque : La famille $(x_i)_{i\in I}$ étant sommable, les familles $({x_i}^+)_{i\in I}$ et $({x_i}^-)_{i\in I}$ (quand on a une famille réelle) et $(\mathrm{Re}(x_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(x_i))_{i\in I}$ (quand on a une famille complexe) sont sommables, si bien que les sommes sont bien définies et appartiennent à $\mathbb{R}$ (quand on a une famille réelle) ou à $\mathbb{C}$ (quand on a une famille complexe). Cependant, attention : il n'y a pas d'infini sur $\mathbb{C}$, et il y en a plusieurs sur $\mathbb{R}$, donc, contrairement aux familles d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$, une somme de réels ou de complexes n'est pas définie si la famille n'est pas sommable. Cela n'a aucun sens de parler de la somme d'une famille non sommable (à part dans le cas où les éléments sont positifs). Ici, il va falloir justifier ! Même si on peut parfois justifier a posteriori, voir la suite.

III.2.c Propriétés (bien pratiques) héritées des familles positives

L'expression d'une somme de réels (lorsque la famille est sommable bien entendu) comme différence de sommes de réels positifs, puis l'expression d'une somme de complexes comme CL de sommes de réels permet d'obtenir directement pour ces sommes des propriétés vraies jusque là pour des sommes de termes positifs :

Théorème.

- **(Théorème de sommation par paquets (admis))** Si I est réunion disjointe des I_k, pour $k \in K$, et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille sommable, alors la famille $\left(\displaystyle\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K} \sum_{i\in I_k} x_i$$

- **(Théorème de Fubini)** Soient A et B deux ensembles non vides, soit $(x_{a,b})_{(a,b)\in A\times B}$ une famille sommable. Alors :

$$\sum_{(a,b)\in A\times B} x_{a,b} = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} x_{a,b} = \sum_{b\in B}\sum_{a\in A} x_{a,b}$$

- **(Changement d'indice)** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable et soit φ une injection de I dans J. Alors $(x_{\varphi^{-1}(j)})_{j\in J}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{j\in\varphi(I)} x_{\varphi^{-1}(j)}$$

- **(Invariance d'une somme par permutation)** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille sommable et soit $\sigma \in S_I$ une permutation de I (i.e. une bijection de I dans lui-même). Alors $(x_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable et :

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)}$$

- Soient $(x_i)_{i\in I}, (y_i)_{i\in I}, (a_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J}$ des familles sommables et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors on a les propriétés suivantes :

  ⋆ **(Linéarité de la somme)** $\displaystyle\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda x_i = \lambda \sum_{i\in I} x_i$.

  ⋆ **(Familles produits)** $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et :

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right) \times \left(\sum_{j\in J} b_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i \times b_j$$

Ainsi, la somme d'une famille sommable ne dépend pas de l'ordre dans lequel on somme les termes, ce qui n'est pas forcément le cas pour une série convergente.

On sait déjà que $(x_i + y_i)$ et (λx_i) sont sommables.

On généralise sans peine à un produit d'un nombre quelconque (fini) de familles sommables.

Démonstration.
- Le théorème de Fubini, comme pour le cas positif, découle du théorème de sommation par paquets.
- On sait (cf. paragraphe II.3) que

$$\sum_{i\in I} |x_i| = \sum_{j\in \varphi(I)} |x_{\varphi^{-1}(j)}|$$

La famille (x_i) est sommable donc ces sommes ne sont pas égales à $+\infty$, si bien que la famille $(x_{\varphi^{-1}(j)})_{j\in J}$ est sommable. De plus, si la famille est réelle :

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I} x_i &= \sum_{i\in I} {x_i}^+ - \sum_{i\in I} {x_i}^- \\ &= \textstyle\sum_{j\in I} {x_{\varphi^{-1}(j)}}^+ - \sum_{i\in I} {x_{\varphi^{-1}(j)}}^+ \\ &= \displaystyle\sum_{j\in\varphi(I)} x_{\varphi^{-1}(j)}\end{aligned}$$

cf. paragraphe II.3 : les familles sont positives.

c'est-à-dire que le résultat est prouvé pour les familles réelles. On le prouve ensuite pour les familles complexes à l'aide de la partie réelle et de la partie imaginaire.
- Comme pour le cas positif, l'invariance de la sommabilité et de la somme par permutation découle du résultat précédent avec $\varphi = \sigma^{-1}$.
- Comme ci-dessus : la linéarité de la somme est valable pour les familles positives d'après le paragraphe II.3 donc, en passant par ${x_i}^+$ et ${x_i}^-$, on l'obtient pour les familles réelles, et on passe aux complexes grâce à la partie réelle et la partie imaginaire.
- D'après le paragraphe II.3 :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} |a_i \times b_j| = \left(\sum_{i\in I} |a_i|\right) \times \left(\sum_{j\in J} |b_j|\right) < +\infty$$

□

donc la famille $(a_i b_j)$ est sommable. Comme dans le paragraphe II.3, le résultat découle ensuite du théorème de Fubini et de la linéarité.

III.2.d R.I.P. borne supérieure

Il n'y a pas d'ordre naturel sur $\mathbb{C}$, la définition de somme comme borne supérieure des sommes finies n'est donc plus valide. Cependant, il existe un résultat analogue, disant que les sommes finies s'approchent aussi près qu'on veut de la somme d'une famille sommable :

Proposition. Soit $(x_i) \in \ell^1(I)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie F de I telle que :

$$\left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in F} x_i\right| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Supposons dans un premier temps la famille $(x_i)_{i\in I}$ réelle. Alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in I} {x_i}^+ - \sum_{i\in I} {x_i}^-$$

Il suffit d'approcher les deux sommes de droite (qu'on note S^+ et S^- dans la suite et qui sont des sommes de termes positifs) à $\varepsilon/2$ près : par définition,

$$S^+ = \sup\left\{\sum_{i\in F} {x_i}^+ \mid F \in \mathscr{P}_f(I)\right\}$$

donc (par caractérisation de la borne supérieure), il existe $F^+ \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que

$$\left|S^+ - \sum_{i\in F^+} {x_i}^+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe $F^- \in \mathscr{P}_f(I)$ telle que

$$\left|S^- - \sum_{i\in F^-} {x_i}^+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons enfin $F = F^+ \cup F^-$. Puisque $F^+ \subset F$ et qu'on a des sommes positives (somme d'une sous-famille, cf. paragraphe II.3) :

$$\sum_{i\in F^+} {x_i}^+ \leqslant \sum_{i\in F} {x_i}^+ \leqslant S^+$$

si bien que

$$\left|S^+ - \sum_{i\in F} {x_i}^+\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

et de même pour S^-. Finalement :

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in I} x_i - \sum_{i\in F} x_i\right| &= \left|S^+ - \sum_{i\in F} {x_i}^+ - S^- + \sum_{i\in F} {x_i}^-\right| \\
&\leqslant \left|S^+ - \sum_{i\in F} {x_i}^+\right| + \left|S^- + \sum_{i\in F} {x_i}^-\right| \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

□

ce qui prouve le cas réel. On procède de même pour le cas complexe : ⇝ Exercice.

III.3 Exemples

On fait presque comme au paragraphe précédent, à ceci près qu'il faut d'abord montrer la sommabilité. Pour cela, on ajoute des valeurs absolues (ou des modules quand on a des complexes) : on a alors des sommes de termes positifs, on peut appliquer les résultats du paragraphe II.3 et si on trouve une somme inférieure strictement à $+\infty$, la famille est sommable, et on peut enlever les valeurs absolues et appliquer les opérations du paragraphe III.

On oeut aussi travailler « sous réserve de sommabilité », c'est-à-dire qu'on fait tous les calculs sans se poser de question, juste pour voir si on va dans la bonne direction (cf. exercice 16) puis on montre la sommabilité. Attention à ne pas oublier la dernière étape lorsque les sommes ne sont pas à termes positifs !

Exemples :

- Montrer que la famille $\left(\dfrac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.

  Soit $S = \displaystyle\sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{|\sin(p+q)|}{p^2q^2}$. S est une somme de termes positifs donc est bien définie (éventuellement infinie). De plus :

$$\begin{aligned} S &\leqslant \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)} \frac{1}{p^2q^2} \\ &\leqslant \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} \\ &\leqslant \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2}\right) \times \left(\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2}\right) \\ &< +\infty \end{aligned}$$

  et donc la famille est sommable.

- Montrer que la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$.

  Soit $S = \displaystyle\sum_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2} |z|^{ij}$. S est une somme de termes positifs donc est bien définie (éventuellement infinie). De plus :

$$S = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} |z|^{ij}$$

  Si $|z| \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} S &\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} 1 \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{+\infty} +\infty \\ &\geqslant +\infty \end{aligned}$$

  donc la famille n'est pas sommable. Supposons à présent que $|z| < +\infty$. Par conséquent, pour tout i, $|z|^i < 1$ donc :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} \left(|z|^i\right)^j \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1-|z|^i} \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|z|^i}{1-|z|} \\ &\leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc la famille est sommable. Attention, la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ n'est pas sommable car la sous-famille $(z^{0\times j})_{j\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable car constante égale à 1 et donc la série associée diverge grossièrement.

Si on la représente sous forme de tableau comme au paragraphe II.3.a, alors la première ligne n'est pas sommable et, de même, la première colonne $(z^{i\times 0})_{i\in\mathbb{N}}$ non plus. Cependant, si on les enlève, alors on obtient une famille sommable.

- Montrer que la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*, k\geqslant n}$ est sommable et calculer sa somme.

Soit $S = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*, k\geqslant n} \left|\frac{(-1)^n}{nk(k+1)}\right|$. S est une somme de termes positifs donc est bien définie (éventuellement infinie). De plus :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc la famille est sommable, et si on note T sa somme :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{12} \end{aligned}$$

cf. exercice 20 du chapitre 25.

III.4 Retour aux séries

III.4.a Traduction de certains des résultats précédents

⚠ Rappelons qu'une suite complexe (u_n) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument. Par conséquent :

On avait dit (sans le démontrer) au chapitre 25 que la série devait converger ABSOLUMENT : on sait pourquoi, à présent.

- lorsqu'une série converge absolument, on peut casser une somme infinie en plusieurs morceaux, faire des regroupements par paquets... ce qu'on ne s'était pas privé de faire dans le chapitre 25, par exemple en écrivant :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1,\ n \text{ pair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1,\ n \text{ impair}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

- lorsqu'une série converge absolument, on peut faire des changements d'indice sans se poser de question (idem, on ne s'était pas privé de le faire).
- ⚠ lorsqu'une série converge **absolument**, sa somme est invariante par permutation des termes. Attention, c'est faux (cf. paragraphe I) pour une série qui converge mais pas absolument !
- lorsque deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q$$

III.4.b Produit de Cauchy de deux séries qui convergent absolument

Théorème (Produit de Cauchy). Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries qui convergent **absolument**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Alors la série $\sum c_n$ converge absolument, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$. La série $\sum c_n$ est appelée produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

On a déjà vu ce résultat pour des sommes finies dans les chapitres 3 et 17, ce qui nous a été utile pour la formule de Vandermonde. On peut donc la généraliser pour des séries qui convergent **absolument**.

Démonstration. Découle du théorème de sommation par paquets : on a vu que $\mathbb{N}^2$ était l'union disjointe, pour $n \in \mathbb{N}$, des ensembles $D_k = \{(k, n-k) \,|\, k \in [\![0\,;\, n]\!]\}$. D'après le théorème de sommation par paquets, la famille est sommable et :

Les diagonales descendantes, cf. paragraphe II.3.a.

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} a_p b_q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

□

et on conclut en disant que la somme de gauche est le produit des sommes des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$.

Remarques :

- Ce résultat est intuitif en écrivant les premiers termes :

$$(a_0+a_1+a_2+\cdots)\times(b_0+b_1+b_2+\cdots) = \underbrace{a_0b_0}_{p+q=0} + \underbrace{a_0b_1 + a_1b_0}_{p+q=1} + \underbrace{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_2}_{p+q=2} + \cdots$$

Pour chaque indice n, on prend toutes les façons d'obtenir le fait que la somme des indices fasse n, et on somme.

- On peut bien sûr adapter au cas de séries définies à partir du rang 1 :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}\right)$$

Si on a un doute (n ou $n-1$?), toujours revenir à la somme $\displaystyle\sum_{p+q=n}$.

- On peut aisément généraliser à un produit de plus de deux séries : par exemple,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q+r=n} a_p b_q c_r\right)$$

Il suffit de retenir qu'on prend toutes les façons d'obtenir que la somme des indices fasse n et on somme.

Même si cela sert rarement, à part dans quelques exercices de combinatoire (voir ci-dessous).

- La convergence absolue est indispensable ! En effet, si on pose, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = b_n = (-1)^n/\sqrt{n}$, alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergente (critère des séries alternées). Cependant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{p+q=n} \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}} \times \frac{(-1)^q}{\sqrt{q}} \\ &= (-1)^n \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \end{aligned}$$

Or, une rapide étude de fonction prouve que pour tout $x \in [\,0\,;n\,]\,, x(n-x) \leqslant n^2/4$ donc :

$$\begin{aligned} |c_n| &\geqslant \sum_{p=1}^{n-1} \frac{2}{n} \\ &\geqslant 2 \end{aligned}$$

si bien que (c_n) ne tend pas vers 0 : la série $\sum c_n$ diverge grossièrement !

Exemple : Soit $x \in \,]-1\,;1\,[$. La série $\sum x^n$ CVA car $|x| < 1$ donc on peut faire un produit de Cauchy :

L'année prochaine, vous vous contenterez de dériver terme à terme la série entière.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^p\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} x^q\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} x^p x^q\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n \end{aligned}$$

Remarque : Comme on vient de le voir, dans le cas de séries (absolument convergentes) de la forme $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$, le terme général du produit de Cauchy sera

$$\sum_{p+q=n} a_p x^p b_q x^q = \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) x^n$$

Ainsi, pour gagner du temps, on pourra écrire directement :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec $c_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Cela évite de faire des erreurs de calcul dans les puissances de x. Vous verrez ça l'année prochaine quand vous manipulerez des séries entières.

III.4.c Application à la combinatoire

Il faut bien comprendre que dans l'égalité

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) x^n$$

alors il n'est pas vraiment écrit p et q mais truc et machin :

$$\left(\sum_{\text{truc}=0}^{+\infty} a_{\text{truc}} x^{\text{truc}}\right) \times \left(\sum_{\text{machin}=0}^{+\infty} b_{\text{machin}} x^{\text{machin}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{\text{truc}+\text{machin}=n} a_{\text{truc}} b_{\text{machin}}\right) x^n$$

On prend toutes les façons possibles d'avoir truc + machin $= n$ et on somme les coefficients devant les puissances de x correspondantes. Par exemple, cela donne directement l'égalité suivante :

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p x^{2p}\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q x^{3q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{2p+3q=n} a_p b_q\right) x^n$$

Un cas particulier qui se produit régulièrement : le cas où les coefficients a_p et b_q sont égaux à 1. Alors la somme $\displaystyle\sum_{2p+3q=n} a_p b_q$ est alors une somme de termes égaux à 1, qui est donc égal au nombre d'éléments de la somme. En d'autres termes :

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} x^{2p}\right) \times \left(\sum_{q=0}^{+\infty} x^{3q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$$

où α_n est le cardinal de l'ensemble $\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \,|\, 2p+3q=n\}$, c'est-à-dire le nombre façons d'avoir $2p+3q=n$, ou encore le nombre de solutions entières positives de l'équation $2p+3q=n$! Si on sait calculer les coefficients de cette somme (par exemple en calculant explicitement les deux sommes de gauche), on pourra donc connaitre le nombre de solutions de cette équation.

On peut évidemment généraliser à un produit de plus de deux termes : si $n_1, \dots, n_k$ sont des entiers, alors, pour tout $x \in \,]-1\,;1\,[$:

$$\frac{1}{1-x^{n_1}} \times \cdots \times \frac{1}{1-x^{n_k}} \quad = \quad \left(\sum_{x_1=0}^{+\infty} x^{n_1 x_1}\right) \times \cdots \times \left(\sum_{x_k=0}^{+\infty} x^{n_k x_k}\right)$$

et, par produit de Cauchy, ce produit est égal à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n x^n$ où

$$\alpha_n = \sum_{n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = n} 1$$

i.e. α_n est le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $n_1 x_1 + \cdots + n_k x_k = n$. C'est un exercice de deuxième année (classique mais difficile) de partir de cette égalité pour donner un équivalent de α_n quand $n \to +\infty$ (quand les n_i sont premiers entre eux dans leur ensemble).

III.4.d Cas particulier de la série exponentielle

Rappel (cf. chapitre 25) : pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n/n!$ converge absolument. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = e^{iy}$$

c'est-à-dire que la somme de la série $\sum z^n/n!$ est égale à e^z sur $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$. On en déduit que, pour tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\right)$$

Pour prouver que la somme de la série $\sum z^n/n!$ est égale à e^z sur $\mathbb{C}$ tout entier, il reste donc à prouver que la somme de droite est égale à $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Montrons plus généralement le résultat suivant :

Proposition. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_1}^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_2}^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$

Démonstration. Notons P le membre de gauche. Les séries associées convergent absolument donc, en effectuant un produit de Cauchy :

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{{z_1}^k}{k!} \times \frac{{z_2}^{n-k}}{(n-k)!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \times \binom{n}{k} {z_1}^k {z_2}^{n-k}\right) \end{aligned}$$

$\square$

et on conclut à l'aide du binôme de Newton.

Remarque : On en déduit donc que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

chose qu'on avait admise au chapitre 25.

En particulier, l'exponentielle est un morphisme de groupes de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

On en déduit donc une expression explicite de l'exponentielle sur $\mathbb{C}$. On peut à présent prendre le chemin inverse : on peut **définir** l'exponentielle comme la somme de cette série, ce qui donne des définitions beaucoup plus naturelles au lieu de définitions sorties d'on ne sait où : le fait que $e^{i\theta}$ soit, par définition, égal à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$$

donne, par une simple application du théorème de sommation par paquets, en séparant les termes pairs/impairs :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

c'est-à-dire que $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$: c'est tout de même plus naturel que de définir $e^{i\theta}$ de cette façon alors qu'on ne connaît alors que l'exponentielle réelle... De plus, puisque cette fonction est un morphisme, on a alors automatiquement l'égalité $e^{x+iy} = e^x \times e^{iy}$, alors qu'on a pris cette égalité comme définition dans le chapitre 7.

On peut même se servir de cette définition pour définir π comme le double du premier zéro positif de $\mathrm{Re}(e^{ix})$.

On le voit, cette définition de l'exponentielle a l'avantage de présenter un front unifié à tous les domaines dans lesquels elle apparaît, c'est-à-dire qu'en partant de cette définition (et grâce à un produit de Cauchy), on obtient tous les résultats soit admis, soit qu'on prenait comme définition (en se demandant d'où ils venaient), ce qui est beaucoup plus naturel et satisfaisant.

Il reste à montrer, pour boucler la boucle, que

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

est dérivable, égale à sa dérivée, et vaut 1 en 0 (bon, ça, ça va), ce que vous ferez l'année prochaine.