Correction du DS n°1

Préliminaires

3 Par analyse-synthèse.

Analyse : Si g et h conviennent. Puisque $f = g + h$, alors en particulier $f(0) = g(0) + h(0)$. Or, h est nulle en 0 donc $f(0) = g(0)$. g étant constante, g est alors égale à $f(0)$ et $h = f - g$ si bien que h est la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$.

Synthèse : Soient g constante égale à $f(0)$, et $h : x \mapsto f(x) - f(0)$. Alors $h(0) = f(0) - f(0) = 0$, g est constante par définition, et on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}, g(x) + h(x) = f(x)$.

En conclusion $\boxed{g \text{ et } h \text{ existent et sont uniques.}}$

4 On met un « s » lorsqu'un verbe attend un COD (on craint quelqu'un) et on ne met rien quand un verbe attend un COI (on plaît ou on déplaît « à » quelqu'un) et idem pour les autres.

$\boxed{\text{Que d'hommes se sont craints, déplu, détestés, nui, haïs, succédé.}}$

Exercice 1

1.(a) Cette assertion signifie que tout élève admet un professeur.

$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$

1.(b) Cette assertion signifie que tout élève du lycée admet un professeur de physique. Mais il y a des élèves du lycée qui ne prennent pas l'option physique, ou des élèves de prépa littéraire qui n'ont pas de physique.

$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$

1.(c) Cette assertion signifie que, si un élève x admet deux professeurs de physique y et z, alors $y = z$. En d'autres termes, un élève ne peut pas avoir deux professeurs de physique différents. Ainsi :

$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$

1.(d) Cette assertion signifie que, si un élève x admet deux professeurs y et z, alors $y = z$. En d'autres termes, un élève ne peut pas avoir deux professeurs différents. Ainsi,

$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$

1.(e) Cette assertion signifie que, si un professeur de physique z admet deux élèves x et y, alors $x = y$. En d'autres termes, un professeur ne peut pas avoir deux élèves différents. Dès lors :

$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$

1.(f) Cette assertion signifie qu'il existe un élève qui est l'élève de tous les professeurs de physique du lycée, et donc :

$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$

2.(a) Soit $x \in \mathbb{N}$. Alors $y = x$ vérifie $x \leqslant y$:

$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$

2.(b) La négation est : $\exists x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, x \leqslant y$, c'est-à-dire qu'il existe un élément de x inférieur ou égal à tous les autres, ce qui est vrai car 0 convient. La négation est vraie donc :

$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$

2.(c) Soit $x \in \mathbb{N}$. En posant $y = x - 1 \in \mathbb{Z}$ (y peut être négatif, par exemple si $x = 0$), on a bien $x > y$.

$$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$$

2.(d) En prenant $y = -1$, on a bien : $\forall x \in \mathbb{N}, x > y$.

$$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$$

2.(e) Cette assertion signifie que $\mathbb{N}$ est majoré (par un entier y), ce qui est faux. Si on veut faire comme ci-dessus et prouver que la négation est fausse : la négation est : $\forall y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, x > y$. Soit donc $y \in \mathbb{N}$ et soit $x = y + 1$ qui vérifie bien $x > y$. La négation est vraie donc

$$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$$

2.(f) Cette assertion est fausse car il suffit de prendre $b = a$. Plus précisément, la négation de cette assertion est : $\forall a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}, a = b$. Soit $a \in \mathbb{N}$. Alors $b = a$ vérifie bien $a = b$ donc la négation de l'assertion est vraie.

$$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$$

2.(g) Soit $a \in \mathbb{N}$. En posant $b = a^2$, on a bien $b = a^2$.
Cette assertion est vraie.

2.(h) Cette assertion signifie juste que, si on prend deux entiers u et v, alors $u \leqslant v$ ou $u > v$ ce qui est immédiat.

$$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$$

2.(i) Cette assertion est vraie car deux nombres **de même signe** qui ont le même carré sont égaux. Or, deux entiers naturels sont forcément positifs donc, s'ils ont le même carré, ils sont égaux.

$$\boxed{\text{Cette assertion est vraie.}}$$

2.(j) Cette assertion est fausse car $2^2 = (-2)^2$ mais on n'a pas $2 \neq -2$. On a donc prouvé qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x^2 = y^2$ et $x \neq y$: la négation de cette assertion est juste donc

$$\boxed{\text{Cette assertion est fausse.}}$$

3 On a :

$$\boxed{\exists (x, y) \in \mathbb{Z}^2, x^2 = y^2 \quad \text{et} \quad x \neq y}$$

Exercice 2

1 On a : $2 + 4 + 0 + 0 = 6$ et $(2^2 + 4^2 + 0^2 + 0^2) = 20^2 = 400$, et $6 \times 400 = 2400$ si bien que :

$$\boxed{\text{2400 vérifie aussi cette condition.}}$$

2 Un nombre n a k chiffres lorsqu'il vérifie $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$ (par exemple, un nombre a 4 chiffres lorsqu'il vérifie $1000 \leqslant n < 10000$). On en déduit que $n \geqslant 10^{k-1}$. Or, si on note $a_1, \dots, a_k$ ses chiffres (au nombre de k, donc), on a :

$$n = (a_1 + \dots + a_k) \times \left({a_1}^2 + \dots + {a_k}^2\right)^2$$

Or, tous ces chiffres sont inférieurs ou égaux à 9, et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$, bien que :

$$n \leqslant (\underbrace{9 + \dots + 9}_{k \text{ fois}}) \times (\underbrace{9^2 + \dots + 9^2}_{k \text{ fois}})^2 = k \times 9 \times (k \times 9^2)^2 = k^3 \times 9^5$$

ce qui permet de conclure, à l'aide de l'autre inégalité obtenue.

$$\boxed{10^{k-1} \leqslant k^3 \times 9^5}$$

3

- $10 > 9$ donc, par produit de termes positifs, on a bien $10^8 > 9^8$ (ou alors car la fonction $x \mapsto x^8$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$).

- $10 > 3$ et $10 > 9$ donc, par produit d'inégalités positives, $10 \times 10^7 > 3 \times 9^5$. De plus, $\ln(10) > \ln(e) = 1$ donc $\ln(10) \times 10^8 > 3 \times 9^7$.
- De même, $10^6 > 9^6$ et $10^2 > 6$ donc $10^8 > 6 \times 9^6$, et on conclut encore en disant que $\ln(10)^2 > 1$.
- Idem.

$$\boxed{\text{Ces quatre quantités sont strictement positives.}}$$

4 Introduisons la fonction $f : x \mapsto 10^{x-1} - x^3 \times 9^5 = e^{(x-1)\ln(10)} - x^3 \times 9^5$, qu'on définit sur $[\,1\,;+\infty\,[$. On sait que $f(k) \leqslant 0$. Cherchons les variations de f.

Disons tout de suite que f est $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \geqslant 1$. On a :

$$f'(x) = \ln(10) \times 10^{x-1} - 3x^2 \times 9^5$$

Le problème est qu'on ne peut pas donner directement le signe de cette quantité. On dérive donc une deuxième fois :

$$f'(x) = \ln(10)^2 \times 10^{x-1} - 6x \times 9^5$$

Rebelote : on ne peut pas donner le signe directement : on dérive une troisième fois (ce qui est aussi motivé par la question précédente, avec le $\ln(10)^3$), ce qui donne

$$f^{(3)}(x) = \ln(10)^3 \times 10^{x-1} - 6 \times 9^5$$

Là, on peut donner le signe de la dérivée. Plus précisément, d'après la question précédente, $f^{(3)}(9) > 0$ et $f^{(3)}$ est croissante donc est positive sur $[\,9\,;+\infty\,[$.

> Attention, dire uniquement que $f^{(3)}(9) > 0$ ne permet pas d'affirmer quoi que ce soit ! Il ne faut pas oublier de dire que la fonction est croissante.

On en déduit que f'' est croissante sur ce même intervalle, et on a également (cf. question précédente) $f''(9) > 0$ et f'' croissante donc f'' positive sur cet intervalle. On en déduit de même que f' est positive sur cet intervalle, et encore de même, que f est positive (strictement) sur cet intervalle. Puisque $f(k) \leqslant 0$, on en déduit que k n'appartient pas à cet intervalle, donc que $k < 9$.

$$\boxed{k < 9 \text{ : un nombre vérifiant cette condition a au plus 8 chiffres.}}$$

> En testant tous les entiers entre 1 et $10^8 - 1$, on trouve à l'aide d'un programme que les seules solutions strictement positives sont 1, 2023, 2400, 52215, 615627, 938600 et 1648656.

Exercice 3 - Récurrons

1 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\binom{2n}{n} \leqslant 4^n$ ».
- D'une part, $\binom{2\times 0}{0} = \binom{0}{0} = 1$ et, d'autre part, $4^0 = 1$: H_0 est vraie (et on a même égalité).
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned} \binom{2(n+1)}{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} \\ &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \\ &= \frac{(2n)! \times (2n+1)(2n+2)}{(n!)^2 \times (n+1)^2} \\ &= \binom{2n}{n} \times \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, $\binom{2n}{n} \leqslant 4^n$. Or, $2n+1 \leqslant 2n+2 = 2(n+1)$ donc, par produit d'inégalités **positives** :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \leqslant 4^n \times \frac{2(n+1) \times 2(n+1)}{(n+1)^2} = 4^n \times 4 = 4^{n+1}$$

En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \binom{2n}{n} \leqslant 4^n}$$

> Comme dit dans l'exercice 43 du chapitre 3, on prouvera au second semestre que $\binom{2n}{n}$ est équivalent à $4^n/\sqrt{n\pi}$ lorsque $n \to +\infty$, c'est-à-dire que :
>
> $$\binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n\pi}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

2.(a) On sait que, par convention, $\binom{x}{y} = 0$ dès que $y > x$. Par conséquent, dès que $k > n-k$, c'est-à-dire dès que $2k > n$ donc dès que $k > n/2$, le coefficient binomial $\binom{n-k}{k}$ est nul.

$$\boxed{\text{Le coefficient binomial } \binom{n-k}{k} \text{ est nul pour } k \text{ assez grand (plus précisément dès que } k > n/2).}$$

2.(b) Raisonnons par récurrence double (c'est souvent le cas quand on manipule la suite de Fibonacci).

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « $F_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k}$ ».
- Prenons $n = 1$. D'une part, $F_2 = 1$. D'autre part, $\binom{1-0}{0} = \binom{1}{0} = 1$ et, si $k \geqslant 1$, alors $k > 1-k$ donc le coefficient binomial associé est nul. Par conséquent, le seul coefficient non nul dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{1-k}{k}$ est celui pour $k = 0$ qui vaut 1, donc cette somme vaut 1, et donc H_1 est vraie.
- Prenons $n = 2$. D'une part, $F_3 = 2$. D'autre part, $\binom{2-0}{0} = \binom{2}{0} = 1$, $\binom{2-1}{1} = \binom{1}{1} = 1$ et, si $k \geqslant 2$, alors $k > 2-k$ donc le coefficient binomial associé est nul. Par conséquent, les seuls coefficients non nuls dans la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2-k}{k}$ sont ceux pour $k = 0$ et $k = 1$ qui valent 1, donc cette somme vaut 2, et donc H_2 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n && \text{Définition de la suite de Fibonacci}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-1-k}{k} && \text{H.R.}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n-j}{j-1} && j = k+1 \text{ (deuxième somme)}\\
&= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} \right) && \text{Indice muet}\\
&= \underbrace{1}_{k=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n+1-k}{k} && \text{Formule du triangle de Pascal}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+1-k}{k}
\end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, F_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n-k}{k}}$$

Nous donnerons une démonstration combinatoire de cette égalité dans l'exercice 31 du chapitre 17.

Problème

Partie I. Équivalent de H_n et constante d'Euler.

1 La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave donc son graphe est en-dessous de ses tangentes, et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0.

$$\boxed{\forall x > -1, \qquad \ln(1+x) \leqslant x}$$

Étudions à présent la monotonie des suites (u_n) et (v_n). D'une part (rappelons que l'entier n est déjà défini dans l'énoncé)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \mathrm{H}_{n+1} - \mathrm{H}_n - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

La dernière égalité vient de l'indication subtile de l'énoncé. D'après ce qui précède (avec $x = -1/(n+1)$), $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. De plus,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Toujours d'après la première partie de la question (avec $x = 1/n$), $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante et la suite } (v_n) \text{ est croissante.}}$$

2 La suite (v_n) est croissante donc $v_n \geqslant v_1 = u_1 - 1 = 0$. La suite (v_n) est donc à valeurs positives, et puisque $u_n \geqslant v_n$:

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est à valeurs positives.}}$$

3 Puisqu'elle est décroissante et minorée par 0,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge.}}$$

Attention, ce n'est pas parce qu'elle est minorée par 0 qu'elle converge vers 0 ! Tout ce qu'on peut affirmer c'est que sa limite est positive ou nulle.

D'ailleurs, elle ne converge pas vers 0. Sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler et vaut approximativement $0,577...$. On sait très peu de choses sur cette constante. Par exemple, on ne sait même pas si elle est rationnelle ou irrationnelle !

Partie II. Trois calculs (et demi) de limites.

1 Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma$ et $\ln(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ on a par opérations sur les limites

$$\boxed{\mathrm{H}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$$

De plus, en divisant par $\ln(n)$ il vient

$$\boxed{\frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} = \frac{u_n}{\ln(n)} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1 = 1}$$

2.(a) Soient a et b deux réels. Soit $x \neq 0, 1$. Tout d'abord,

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} = \frac{ax + b(x-1)}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - b}{x(x-1)}$$

Dès lors, a et b conviennent si et seulement si $a+b=0$ et $-b=1$ si et seulement si

$$\boxed{a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = -1}$$

2.(b) Soit $j \in [\![2\,;\, n]\!]$. En mettant au même dénominateur on obtient

$$\frac{1}{j^2} - \frac{1}{j(j-1)} = \frac{j-1-j}{j^2(j-1)} = \frac{-1}{j^2(j-1)} \leqslant 0$$

D'où

$$\boxed{\forall j \in [\![2\,;\, n]\!], \qquad \frac{1}{j^2} \leqslant \frac{1}{j(j-1)}}$$

2.(c) D'après la question précédente, par somme,

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)}$$

En ajoutant 1 et en utilisant la question 2.(a) on obtient

$$\mathrm{A}_n = 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant 1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j(j-1)} = 1 + \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right)$$

Or, la somme de droite est une somme télescopique, si bien que

$$\boxed{\mathrm{A}_n \leqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2}$$

Puisque la suite (A_n) est majorée et qu'elle est évidemment croissante,

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{A}_n) \text{ converge.}}$$

2.(d) D'après la question 2.(a) avec $x = j+1$,

$$\boxed{\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}}$$

Dans l'expression de B_n, remplaçons H_n par sa valeur :

$$\mathrm{B}_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{j(j+1)} \right)$$

Réflexe ! On intervertit les deux sommes, puis on déroule les calculs :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{j(j+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \sum_{j=k}^{n} \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{(j+1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} \right)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{k} \right)$$

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Petite explication de texte :

- On obtient la deuxième égalité avec la première partie de la question.
- On obtient la troisième égalité en remarquant que la somme est télescopique.
- On obtient la dernière égalité par linéarité de la somme.

En conclusion $$\boxed{\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - \frac{\mathrm{H}_n}{n+1}}$$

2.(e) D'après la question 1 et par croissances comparées,

$$\frac{\mathrm{H}_n}{n+1} = \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)} \times \frac{\ln(n)}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 = 0.$$

D'après la question précédente et la question 2.(c),

$$\boxed{\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - \frac{\mathrm{H}_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6} + 0 = \frac{\pi^2}{6}}$$

3.(a) Suivons l'indication de l'énoncé et séparons les entiers selon la parité (ce qui est naturel vu ce qu'on cherche à montrer et puisqu'il y a des puissances de -1) :

$$\mathrm{S}_{2n} = \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$= \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{1}{k}$$

En effet, si k est impair alors k est pair et $(-1)^{k+1} = 1$ et de même dans l'autre cas. Faisons comme d'habitude le changement d'indice $k = 2i - 1$ dans la première somme et le changement d'indice $k = 2i$ dans la seconde, ce qui donne

$$\boxed{\mathrm{S}_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} - \frac{\mathrm{H}_n}{2}}$$

3.(b) On fait exactement la même chose (séparation des termes pairs et impairs et changement d'indice) ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\mathrm{H}_{2n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} + \frac{\mathrm{H}_n}{2}}$$

Dès lors $$\boxed{\mathrm{S}_{2n} = \left(\mathrm{H}_{2n} - \frac{\mathrm{H}_n}{2} \right) - \frac{\mathrm{H}_n}{2} = \mathrm{H}_{2n} - \mathrm{H}_n}$$

3.(c) D'après la question précédente et par définition de la suite (u_n),

$$\mathrm{S}_{2n} = u_{2n} + \ln(2n) - u_n - \ln(n) = u_{2n} - u_n + \ln(2)$$

En conclusion, puisque (u_{2n}) et (u_n) convergent vers γ, on obtient

$$\boxed{\mathrm{S}_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma - \gamma + \ln(2) = \ln(2)}$$

Partie III. Définition et équivalent de a_n

1 Soit $x \in]\,0\,;1\,[$. Par définition de P_n (tous les termes du produit sont bien strictement positifs),

$$\ln(\mathrm{P}_n(x)) = \ln\left(x \times \prod_{k=1}^{n}(k-x)\right) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\ln(k-x)$$

Il suffit de dériver pour conclure (la dérivée de $\ln(u)$ est u'/u).

$$\boxed{\forall x \in]\,0\,;1\,[, \qquad \frac{{\mathrm{P}_n}'(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{k-x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x-k}}$$

2 La fonction ${\mathrm{P}_n}'/\mathrm{P}_n$ est dérivable sur $]\,0\,;1\,[$. Soit $x \in]\,0\,;1\,[$. On a

$$\left(\frac{{\mathrm{P}_n}'}{\mathrm{P}_n}\right)'(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{-1}{(x-k)^2} < 0$$

Il en découle que ${\mathrm{P}_n}'/\mathrm{P}_n$ est strictement décroissante. Calculons à présent les limites aux bornes.

- Pour la limite en 0, il suffit d'écrire

$$\frac{{\mathrm{P}_n}'(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-k}$$

Puisque $1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et que la somme de droite converge vers une limite finie (car 0 n'en est pas valeur interdite), on obtient

$$\frac{{\mathrm{P}_n}'(x)}{\mathrm{P}_n(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

- À présent, pour la limite en 1, il suffit d'écrire

$$\frac{{\mathrm{P}_n}'(x)}{\mathrm{P}_n(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{x-k}$$

Le premier terme tend vers 1 quand $x \to 1^-$, le deuxième terme vers $-\infty$ et le troisième vers une limite finie. Le résultat en découle :

$$\frac{{\mathrm{P}_n}'(x)}{\mathrm{P}_n(x)} \xrightarrow[x\to 1^-]{} -\infty$$

$$\boxed{\text{Flemme de faire un tableau de variations en \LaTeX.}}$$

3 La fonction ${\mathrm{P}_n}'/\mathrm{P}_n$ est continue, strictement décroissante sur $]\,0\,;1\,[$, tend vers $+\infty$ en 0 et vers $-\infty$ en 1. D'après le corollaire du TVI, cette fonction s'annule en un unique $a_n \in]\,0\,;1\,[$. Or, une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul, donc

$$\boxed{{\mathrm{P}_n}' \text{ s'annule en un unique } a_n \in]\,0\,;1\,[.}$$

4 Par définition de a_n,

$$\frac{{\mathrm{P}_n}'(a_n)}{\mathrm{P}_n(a_n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{a_n-k} = 0$$

donc

$$\boxed{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} = -\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_n-k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-a_n}}$$

5 Puisque $a_n \in]\,0\,;1\,[$ alors pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, $k-1 \leqslant k-a_n \leqslant k$. La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k-a_n} \leqslant \frac{1}{k-1}$$

Par somme $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-a_n} \leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}$$

Il suffit d'effectuer le changement d'indice $j = k-1$ dans la somme de droite et de remplacer la somme du milieu par la valeur trouvée dans la question précédente pour conclure.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} \leqslant \sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}}$$

6 D'après la question précédente,

$$\mathrm{H}_n - 1 \leqslant \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} \leqslant \mathrm{H}_{n-1}$$

c'est-à-dire $$u_n + \ln(n) - 1 \leqslant \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} \leqslant u_{n-1} + \ln(n-1)$$

Or, la suite (u_n) est décroissante. Ainsi, $u_{n-1} \leqslant u_1 = 1$ et puisque cette suite est positive, $u_n \geqslant 0$. Enfin, puisque $\ln(n-1) \leqslant \ln(n)$, le résultat en découle

$$\boxed{\ln(n) - 1 \leqslant \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} \leqslant \ln(n-1) + 1 \leqslant \ln(n) + 1}$$

7 Puisque $a_n \in \,]\,0\,;1\,[\,, a_n - 1 \leqslant 0$ donc

$$\boxed{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_n-1} \leqslant \frac{1}{a_n}}$$

En particulier, d'après la question précédente,

$$\ln(n) - 1 \leqslant \frac{1}{a_n}$$

Le membre de gauche tend vers $+\infty$ donc, d'après le théorème d'encadrement, il vient : $1/a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En conclusion,

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

8 Puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$$\boxed{\frac{1}{a_n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1}$$

D'après la question 6,

$$\ln(n) - 1 - \frac{1}{a_n-1} \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \ln(n) + 1 - \frac{1}{a_n-1}$$

En divisant par $\ln(n)$, on obtient

$$1 - \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{1}{(a_n-1)} \leqslant \frac{1}{a_n \times \ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)} \times \frac{1}{a_n-1}$$

Puisque le membre de gauche et le membre de droite tendent vers 1, celui du milieu aussi d'après le théorème d'encadrement, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{a_n \times \ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

Partie IV. Un dernier équivalent.

1 Soit $x \in [-1/2\,;0]$. D'après la question 1 de la partie I (avec $-x$ à la place de x), $\ln(1-x) \leqslant -x$ donc $\ln(1-x)+x \leqslant 0$, d'où l'inégalité de droite. Prouvons l'inégalité de gauche : définissons sur $[-1/2\,;0]$ la fonction f par $f(x) = \ln(1-x)+x+2x^2$. f est dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{1-x} + 1 + 4x \\ &= \frac{3x-4x^2}{1-x} \\ &= \frac{x(3-4x)}{1-x} \end{aligned}$$

Puisque $x \leqslant 0$, alors $x(3-4x) \leqslant 0$ et le dénominateur est positif donc $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi, f est décroissante, et $f(0) = 0$ donc f est positive (faites un tableau de variations). D'où le résultat.

$$\boxed{\forall x \in [-1/2\,;0]\,, -2x^2 \leqslant \ln(1-x)+x \leqslant 0}$$

2 On a

$$\mathrm{T}_n + a_n \times \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{a_n}{k}\right) + a_n \times \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1-\frac{a_n}{k}\right)+\frac{a_n}{k}\right)$$

Or, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, d'après la double inégalité donnée dans l'énoncé avec $x = a_n/k$ (qui appartient bien à $[-1/2\,;0]$ pour n assez grand),

$$-2 \times \frac{{a_n}^2}{k^2} \leqslant \ln\left(1-\frac{a_n}{k}\right) + \frac{a_n}{k} \leqslant 0$$

Par somme on a le résultat voulu.

$$\boxed{-2a_n \times \mathrm{A}_n \leqslant \mathrm{T}_n + a_n \times \mathrm{H}_n \leqslant 0}$$

Or, d'après la partie III, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et d'après la partie II, $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi^2/6$. Ainsi, le membre de gauche tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\mathrm{T}_n + a_n \times \mathrm{H}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Or,
$$\mathrm{T}_n = (\mathrm{T}_n + a_n \times \mathrm{H}_n) - a_n \times \mathrm{H}_n = (\mathrm{T}_n + a_n \times \mathrm{H}_n) - (a_n \times \ln(n)) \times \frac{\mathrm{H}_n}{\ln(n)}$$

D'après ce qui précède, la question 8 de la partie III et la question 1 de la partie II,

$$\boxed{\mathrm{T}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1}$$

3 Posons $w_n = \dfrac{\ln(n) \times \mathrm{P}_n(a_n)}{n!}$ pour plus de commodité. Suivons l'indication de l'énoncé et commençons par remplacer $n!$ par le produit de l'énoncé, et P_n par sa définition :

$$w_n = \ln(n) \times \frac{a_n \times \prod\limits_{k=1}^{n}(k-a_n)}{\prod\limits_{k=1}^{n} k}$$

On rentre les deux produits dans le même, ce qui donne

$$\begin{aligned} w_n &= \ln(n) \times a_n \times \prod_{k=1}^{n} \frac{k-a_n}{k} \\ &= \ln(n) \times a_n \times \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_n}{k}\right) \\ w_n &= \ln(n) \times a_n \times e^{\mathrm{T}_n} \end{aligned}$$

avec T_n est la somme définie au début de cette partie. Or, d'après la question 8 de la partie III, $\ln(n) \times a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et d'après la question précédente, $\mathrm{T}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. La fonction exponentielle étant continue, $e^{\mathrm{T}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}$. En conclusion,

$$\boxed{\frac{\ln(n) \times \mathrm{P}_n(a_n)}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}}$$