Devoir Maison n° 15

Problème - Autour des polynômes de Tchebychev

On rappelle que les polynômes de Tchebychev sont les polynômes définis par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \qquad T_1 = X \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \end{cases}$$

Enfin, on rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.

Partie 0 - Préliminaires

1. Donner le degré et le coefficient dominant de T_n pour tout $n \geq 1$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$, prouver que :

$$T_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \left(X^2 - 1\right)^k X^{n-2k}$$

   (b) À l'aide de cette expression, retrouver le résultat de la question 1.
3. Montrer que pour tous n et p, $T_n \circ T_p = T_p \circ T_n = T_{np}$.

Partie I - Factorisation des polynômes de Tchebychev

1. Soit $x \in [-1\,;1]$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in [0\,;\pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
   (b) Montrer que x est une racine de T_n si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ tel que $x = \cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$. On justifiera bien pourquoi $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$.
   (c) Montrer que les n racines de T_n trouvées à la question précédente sont toutes distinctes.
   (d) Montrer que T_n n'a aucune racine en dehors de $[-1\,;1]$ (bien sûr, il ne viendrait à l'esprit de personne de dire une ânerie du genre : « un cosinus est compris entre -1 et 1 donc toutes les racines de T_n sont dans $[-1\,;1]$ [1] »). En déduire la factorisation de T_n sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Donner $T_n(1)$ et $T_n(-1)$. Pour cette question et la question 2.(c), vous pourrez vérifier la cohérence de vos résultats à l'aide des graphes des T_n se trouvant dans le cours.
   (b) On rappelle que $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. Donner la valeur de :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

   À titre d'information, on attend une rédaction du type : « Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ (pourquoi ?).

$$\begin{aligned} \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} &= \cdots \\ &= \cdots \\ &\xrightarrow[\theta\to 0]{} \cdots \qquad \text{car} \ldots \text{ »} \end{aligned}$$

1. Pourquoi est-ce une ânerie ?

(c) En déduire la valeur de ${T_n}'(1)$.

Encore à titre d'information, on attend une rédaction du type : « Soit $\theta \in \ldots$ (débrouillez-vous !). Posons $\varphi(\theta) = \ldots$ Alors φ est dérivable car $\ldots$ et $\varphi'(\theta) = \ldots$ De plus, par définition des polynômes de Tchebychev, on a également $\varphi(\theta) = \ldots$ donc $\varphi'(\theta) = \ldots$ ce qui implique que $\ldots$ D'une part, d'après la question précédente, $\ldots \xrightarrow[\theta \to 0]{} \ldots$ et d'autre part $\ldots \xrightarrow[\theta \to 0]{} \ldots$ par continuité de la fonction $\ldots$ Finalement, par unicité de la limite, on a ${T_n}'(1) = \ldots$ »

Je vous invite à comparer ceci avec ce que vous auriez eu envie d'écrire, à chercher les différences, les erreurs éventuelles si vous ne trouvez pas le même résultat, et enfin à comprendre la nécessité de chaque argument !

Partie II - $\zeta(2)$, stage one.

Le but de cette partie est de calculer la limite de la suite (S_n) de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. (a) À l'aide d'une décomposition en éléments simples, donner la limite de la suite de terme général $R_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$.

   (b) Montrer que pour tout $n \geq 2, S_n \leq 1 + R_n$ et en déduire que la suite (S_n) converge. On notera sa limite L, et le but de cette partie est de calculer L.

2. Soit $n \geq 1$. On pose ${S_n}' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

   (a) Exprimer S_{2n} en fonction de S_n et ${S_n}'$.

   (b) Montrer que la suite $({S_n}')$ converge vers une limite qu'on appellera L', et exprimer L' en fonction de L.

3. On note, pour $i \in [\![1 ; n]\!], x_i = \cos\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{2n}\right)$ les racines de T_n le n^e polynôme de Tchebychev.

   (a) À l'aide de la décomposition en éléments simples de ${T_n}'/T_n$, prouver que :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - \cos\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{2n}\right)} = n^2$$

   (b) Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Montrer que $\dfrac{1}{\tan^2(\theta)} = \dfrac{1}{\sin^2(\theta)} - 1$.

   (c) En déduire les valeurs des sommes :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)}$$

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$.

   (b) Donner la valeur de L'.

   (c) En déduire que $L = \pi^2/6$.

Partie III (facultative) - Théorème de Block-Thielmann (1951) :

1. Soient P et Q deux polynômes non constants. Donner sans le démontrer le degré de $P \circ Q$, ainsi que son coefficient dominant.
2. Expliciter les polynômes $(2X^2 - 1) \circ (3X + 1)$ et $(3X + 1) \circ (2X^2 - 1)$.
3. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 1 est un groupe muni de la composition. Est-il abélien ? Dans la suite, si U est un polynôme de degré 1, la notation U^{-1} désignera l'inverse de U pour la composition, inverse dont on a prouvé l'existence dans cette question.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $C = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \geq 1, P \circ (X^2 + \alpha) = (X^2 + \alpha) \circ P\right\}$.

   (a) Montrer que tout élément P de C est unitaire. Dans la suite on se donne $n \geq 1$, ainsi que P_1 et P_2 deux éléments distincts de C de degré n

   (b) Soit r le degré de $P_1 - P_2$. Montrer que $r < n$. Donner le degré de $P_1 + P_2$.

(c) En regardant le degré de $(P_1 - P_2) \circ (X^2 + \alpha)$ aboutir à une contradiction. Conclusion ?

(d) Montrer que si C contient un polynôme de degré 3, alors $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$.

(e) Montrer que si $\alpha = 0$, alors $C = \{X^n \mid n \geq 1\}$.

Dans la suite, on dira qu'une suite $(P_n)_{n\geq 1}$ de polynômes est une suite commutante si :

$$\begin{cases} \forall n \geq 1, & \deg(P_n) & = & n \\ \forall (n,k) \geq 1, & P_n \circ P_k & = & P_k \circ P_n \end{cases}$$

5. Citer deux suites commutantes.
6. Montrer que si (P_n) est une suite commutante alors, pour tout polynôme U de degré 1, la suite $\left(U \circ P_n \circ U^{-1}\right)$ est aussi commutante.
7. (a) Soient a, b, c trois scalaires, avec a non nul. On pose $P = aX^2 + bX + c$. Montrer qu'il existe un scalaire α que l'on précisera tel que, si on pose $U = aX + b/2$, alors $U \circ P \circ U^{-1} = X^2 + \alpha$.

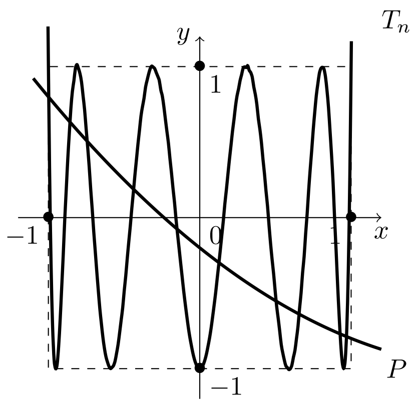
   (b) Trouver un polynôme V de degré 1 tel que $V^{-1} \circ (X^2 - 2) \circ V = T_2$, où $T_2 = 2X^2 - 1$ est le deuxième polynôme de Tchebychev. On pourra composer à gauche par V et à droite par V^{-1}.
8. Soient $V, W \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 et soit $U = W^{-1} \circ V$. Montrer que $U^{-1} = V^{-1} \circ W$. En déduire le (joli) théorème de Block et Thielmann :

> Si $(P_n)_{n\geq 1}$ est une suite commutante, alors il existe $U \in \mathbb{K}[X]$ de degré 1 tel que :
>
> - soit $P_n = U \circ X^n \circ U^{-1}$ pour tout $n \geq 1$.
> - soit $P_n = U \circ T_n \circ U^{-1}$ pour tout $n \geq 1$

Partie IV (facultative) - Limites uniformes de polynômes à coefficients entiers dans le cas où $b - a \geq 4$

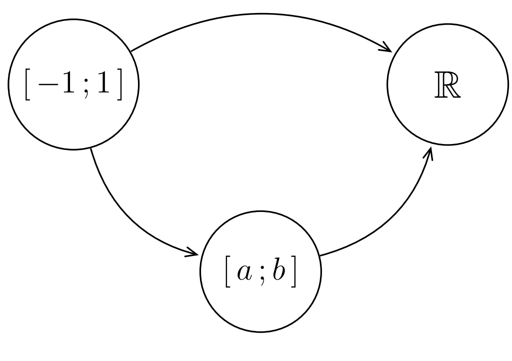
1. Soit $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$. On pose $y_k = \cos(k\pi/n)$. Donner la valeur de $T_n(y_k)$.
2. Justifier que $\displaystyle\sup_{x\in[-1\,;1]} |T_n(x)| = 1$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n.

   (a) Montrer que $\displaystyle\sup_{x\in[-1\,;1]} |P(x)| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. On pourra raisonner par l'absurde et prouver que, pour tout $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$, $\left(2^{n-1}P - T_n\right)(y_k)$ et $\left(2^{n-1}P - T_n\right)(y_{k+1})$ sont de signes opposés.



   (b) Soient $a < b$ deux réels. Prouver que :

$$\sup_{x\in[a\,;b]} |P(x)| \geq 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^n$$



On pourra pour cela s'inspirer du diagramme ci-contre.

On pourra également utiliser le résultat suivant (qui est admis, sa démonstration étant immédiate) : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et toute fonction f bornée sur $[-1\,;1]$, $\sup\limits_{x\in[-1\,;1]} |\lambda f(x)| = |\lambda| \times \sup\limits_{x\in[-1\,;1]} |f(x)|$, c'est-à-dire qu'on peut « sortir les constantes de la borne supérieure » (avec une valeur absolue).

4. On suppose dans cette question que a et b sont deux réels vérifiant $b - a \geq 4$. On se donne une suite de polynômes à coefficients entiers (relatifs) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément (cf. problème facultatif du DM n° 11) vers une fonction $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$. Montrer que f est un polynôme à coefficients entiers. On pourra utiliser la question précédente et s'inspirer de la partie III du DM n° 11.

Voici la plupart des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir sur les polynômes (et d'autres sur lesquels je râle toute l'année...). Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Ne pas écrire « $P(X) = 0 \iff \dots$ » quand on cherche les racines de P.

   O - N - B.

2. Ne pas écrire « $X = 1$ » ou « $X = z$ » ou plus généralement d'égalité entre X et un élément de $\mathbb{K}$.

   O - N - B.

3. Ne jamais écrire d'enchaînement d'égalités de limites du type « $\lim\limits_{x\to 0} \dots = \lim\limits_{x\to 0} \dots = \dots$ » et ne jamais écrire de limite avant d'avoir montré son existence. En cas de doute, suivre la rédaction subtilement conseillée dans la partie I.

   O - N - B.

4. Ne pas écrire « $(T_n(\cos(\theta)))'$ » mais poser (par exemple) $\varphi(\theta) = T_n(\cos(\theta))$ et calculer $\varphi'(\theta)$.

   O - N - B.

5. Vérifier la cohérence des résultats obtenus. Ne pas écrire (par exemple) « ${T_n}'(1) = 0$ » alors que le cours contient un graphe de T_n et qu'il est immédiat que la dérivée en 1 n'est pas nulle...

   O - N - B.

6. Ne pas écrire d'équivalence quand on déroule les calculs, les garder pour une résolution d'(in)équations (comme par exemple le calcul des racines).

   O - N - B.

7. Toujours mentionner le coefficient dominant et la multiplicité des racines avant de factoriser un polynôme :

   O - N - B.

8. Dans une récurrence double, ne jamais utiliser H_{n+1} et H_n sans les avoir supposées toutes les deux vraies.

   O - N - B.