Programme de colle - Semaine n°28

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 29 - Applications linéaires

- cf. semaines 25 et 26.

Chapitre 30 - Espaces vectoriels de dimension finie

- cf. semaines 26 et 27.
- En dimension n, les hyperplans sont exactement les sev de dimension $n-1$ (attention, les hyperplans existent aussi en dimension infinie). Intersection de 2 hyperplans distincts, intersection de m hyperplans (en dimension finie). Réciproquement, tout sev de dimension $n-m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans.

Chapitre 31 - Représentation matricielle des applications linéaires (Matrix Reloaded pour les intimes)

- Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base (on se place en dimension finie dans tout le chapitre), notation X_{B_E}, X lorsqu'aucune confusion n'est possible. $x \mapsto X$ est un isomorphisme, on pourra identifier x et X.
- Matrice des coordonnées d'une famille de vecteurs matrice canoniquement associée. Exemples.
- Matrices et applications linéaires, matrice canoniquement associée, exemples.
- Écriture matricielle de $y = u(x)$, l'évaluation par une AL se traduit matriciellement par un produit.
- Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ lorsqu'une base est fixée. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$, de $\mathscr{L}(E)$, de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$.
- Noyau, image d'une matrice. Les vecteurs colonnes engendrent l'image, les vecteurs lignes donnent un système d'équations du noyau. L'image (respectivement le noyau) d'une matrice est isomorphe à l'image (respectivement le noyau) de n'importe quelle AL représentée par cette matrice. Théorème du rang pour une matrice.
- Matrice d'une composée : la composition d'AL se traduit matriciellement par un produit (démonstration).
- Cas particulier des matrices carrées et endomorphismes. Notation $\mathrm{Mat}_{B_E}(u)$. La matrice d'une homothétie est la même dans toutes les bases (attention, ce n'est plus vrai si les bases de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes). Isomorphisme d'anneaux entre $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, matrice de u^2, u^k. u est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Mat}(u)$ est nilpotente, et alors ils ont le même indice de nilpotence.
- De l'art de bien choisir ses bases : la matrice d'un projecteur s'écrit dans une base bien choisie sous forme diagonale, idem pour la matrice d'une symétrie, mais cela ne marche pas toujours (exemple des matrices nilpotentes non nulles). Activité : classification des matrices nilpotentes en dimension 3. Une matrice triangulaire supérieure stricte est nilpotente (réciproque fausse), exemple de matrice nilpotente d'indice de nilpotence donnée, une matrice nilpotente en dimension n vérifie $N^n = 0$.
- Une matrice est inversible si et seulement si elle représente une AL bijective, si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base de $\mathbb{K}^n$, si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base de $\mathbb{K}^n$.
- De l'art de bien choisir ses espaces : démonstration de la CNS d'inversibilité des matrices triangulaires. Activité : CNS d'inversibilité de la matrice de Vandermonde (le déterminant de Vandermonde sera vu au chapitre 33).
- Critère du noyau. Activité : critère d'Hadamard pour les matrices à diagonale strictement dominante.
- Rang d'une matrice (défini comme le rang de toute AL représentée par cette matrice). Premières propriétés.

Chapitres au programme

Chapitre 29 (exercices uniquement, sur tout le chapitre), chapitre 30 (cours et exercices, sauf sur les formes linéaires et hyperplans), chapitre 31 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Image et noyau de
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P(X) - P(X-1) \end{cases}$$
2. L'examinateur donne une AL et des bases explicites (pas trop moches, mais cela peut être en dimension n) et demande la matrice associée.
3. Donner (avec démonstration) une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
4. CNS d'inversibilité de la matrice de Vandermonde (démonstration).

Groupes B - C :

1. Si E et F sont de dimension finie, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ (démonstration).
2. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts et si $b_1, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ (pas forcément distincts), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout i, $P(a_i) = b_i$ (démonstration).
3. L'application $P \mapsto P - 2P'$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (démonstration, méthode au choix de l'élève).
4. Si p est un projecteur (en dimension finie évidemment), il existe une base dans laquelle la matrice de P est diagonale avec des 0 ou des 1 sur la diagonale (démonstration).
5. Prouver que la matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de terme général $\displaystyle\binom{j-1}{i-1}$ est inversible et donner son inverse.
6. Critère d'Hadamard pour les matrices à diagonale strictement dominante (démonstration).

Groupe C :

1. Si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2 \dim \ker(u)$.
2. Si E est de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, donner la matrice de u sous la forme la plus simple possible (démonstration).
3. Soit $k \in [\![2\,;\, n]\!]$. Donner une matrice carrée de taille n nilpotente d'indice de nilpotence k (démonstration).
4. Inversibilité des matrices triangulaires supérieures (démonstration : il n'est pas demandé de prouver que l'inverse est aussi triangulaire supérieure).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin de la représentation matricielle des applications linéaires.
- Début du groupe symétrique ?

Exercices à préparer

Exercices 15, 34, 47, 49 du chapitre 30 et exercices 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 63, 64, 65 du chapitre 31.

Cahier de calcul

Rien cette semaine !