Corrigé du DM n°16

Problème

Partie I. Du classique

1 cf cours.

$$\boxed{{\mathrm{J}_n}^2 = n\mathrm{J}_n}$$

2.(a) On a

$$\boxed{\mathrm{M}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

2.(b) D'après la question précédente,

$$\boxed{\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_5 + \mathrm{J}_5}$$

2.(c) Les matrices I_5 et J_5 commutent (car l'identité commute avec toutes les matrices). Dès lors, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\left(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}\right)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} {\mathrm{J}_5}^k {\mathrm{I}_5}^{n-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} {\mathrm{J}_5}^k$$

Or, ${\mathrm{J}_5}^2 = 5\mathrm{J}_5$ d'après la question 1. Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $k \geqslant 1, {\mathrm{J}_5}^k = 5^{k-1}\mathrm{J}_5$. De plus, ${\mathrm{J}_5}^0 = \mathrm{I}_5$. Par conséquent,

$$\left(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}\right)^p = \mathrm{I}_5 + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 5^{k-1}\right) \mathrm{J}_5$$

Posons u_p la somme qui est en facteur de J_5. D'après la formule du binôme de Newton,

$$u_p = \frac{1}{5}\left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 5^k - 1\right) = \frac{1}{5}\left((5+1)^p - 1\right) = \frac{1}{5}\left(6^p - 1\right)$$

Finalement

$$\boxed{\left(\mathrm{M}^2 + \mathrm{M}\right)^p = \begin{pmatrix} 1+u_p & u_p & u_p & u_p & u_p \\ u_p & 1+u_p & u_p & u_p & u_p \\ u_p & u_p & 1+u_p & u_p & u_p \\ u_p & u_p & u_p & 1+u_p & u_p \\ u_p & u_p & u_p & u_p & 1+u_p \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad u_p = \frac{1}{5}\left(6^p - 1\right)}$$

> Il ne coûte pas très cher de vérifier que pour $p = 1$ on retrouve le résultat de la question 2.(b).
> On aurait pu être tenté d'appliquer la formule du binôme de Newton à M et M^2 (qui commutent), le problème est qu'on ne connaît pas les puissances de M ni, par conséquent, celles de M^2.

3.(a) Résolvons la première équation (on appelle à chaque fois les coordonnées du vecteur recherché x, y, z).

$$\mathrm{SX} = 2\mathrm{X} \iff \begin{cases} 3x - y = 2x \\ -x + 3y = 2y \\ 3z = 6z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{En prenant } x = 1 \text{ il vient que } \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est solution.}}$$

Ensuite

$$\mathrm{SY} = 4\mathrm{Y} \iff \begin{cases} 3x - y = 4x \\ -x + 3y = 4y \\ 3z = 4z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{En prenant } x = 1 \text{ il vient que } \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est solution.}}$$

Enfin

$$\mathrm{SZ} = 3\mathrm{Z} \iff \begin{cases} 3x - y = 3x \\ -x + 3y = 3y \\ 3z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = z \end{cases}$$

$$\boxed{\text{En prenant } z = 1 \text{ il vient que } \mathrm{Z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est solution.}}$$

3.(b) Par définition de la norme d'un vecteur, on a

$$\boxed{||\mathrm{X}|| = ||\mathrm{Y}|| = \sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad ||\mathrm{Z}|| = 1}$$

3.(c) D'après la question précédente,

$$\mathrm{X}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Y}' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \mathrm{Z}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où (après calculs) $\boxed{\mathrm{P}^\top \mathrm{P} = \mathrm{I}_3 : \text{P est orthogonale.}}$

Puisqu'il existe une matrice Q telle que $\mathrm{QP} = \mathrm{I}_3$, P est inversible et $\mathrm{Q} = \mathrm{P}^{-1}$. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{P est inversible et } \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}^\top = \mathrm{P}}$$

3.(d) Après calculs,

$$\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Ainsi, D est inversible car matrice diagonale dont les coefficients sont tous non nuls. Puisque $\mathrm{S} = \mathrm{PDP}^{-1}$, S est un produit de matrices inversibles. Finalement,

$$\boxed{\text{S est inversible.}}$$

3.(e) On a

$$\mathrm{S}^2 = \mathrm{PDP}^{-1} \times \mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PDI}_3\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1}$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathrm{S}^k = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$. Or d'après le cours,

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Après calculs (en se souvenant que $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}$, cf question 3.(c)), on obtient finalement

$$\boxed{\mathrm{S}^p = \begin{pmatrix} (2^p + 4^p)/2 & (2^p - 4^p)/2 & 0 \\ (2^p - 4^p)/2 & (2^p + 4^p)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^p \end{pmatrix}}$$

> Encore une fois, vérifier la cohérence de la formule pour $p = 1$ permet d'aborder la suite avec sérénité...

Partie II. Le groupe orthogonal.

1 Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Par définition d'une matrice orthogonale, $\mathrm{M}^\top \mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. Ainsi, M est inversible et $\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{M}^\top$. D'où

$$\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

Pour montrer que cette inclusion est stricte, il suffit d'exhiber une matrice inversible non orthogonale. La matrice $2\mathrm{I}_n$ convient.

$$\boxed{\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est inclus strictement dans } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})}$$

2 La matrice I_n est orthogonale donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est non vide. Soient P et Q deux matrices orthogonales. Alors

$$(\mathrm{PQ})^\top (\mathrm{PQ}) = \mathrm{Q}^\top \left(\mathrm{P}^\top \mathrm{P}\right) \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^\top \mathrm{I}_n \mathrm{Q} = \mathrm{Q}^\top \mathrm{Q} = \mathrm{I}_n$$

En d'autres termes, $\mathrm{PQ} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit. De plus (on rappelle que la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée et qu'on change l'ordre d'un produit quand on passe à l'inverse),

$$^t\left(\mathrm{P}^{-1}\right) \mathrm{P}^{-1} = \left(\mathrm{P}^\top\right)^{-1} \mathrm{P}^{-1} = \left(\mathrm{P} \times \mathrm{P}^\top\right)^{-1} = {\mathrm{I}_n}^{-1} = \mathrm{I}_n$$

En conclusion $\boxed{\mathrm{P}^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \text{ est stable par inverse, c'est un sous-groupe de } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$

Partie III. Valeurs propres de J_n

1 Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$. Puisque $\mathrm{J}_n \mathrm{X} = \lambda \mathrm{X}$, les coordonnées se trouvant à la i^e ligne de ces deux vecteurs colonnes sont égales. Puisque tous les coefficients de J_n valent 1, le terme à la i^e ligne de $\mathrm{J}_n \mathrm{X}$ est la somme des coefficients de X, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\forall i \in [\![1 \,;\, n]\!], \qquad \mathrm{S}_n = \lambda x_i}$$

2 Sommons l'égalité obtenue à la question précédente, pour i allant de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^n \lambda x_i$$

Le terme S_n étant indépendant de l'indice de sommation, le terme de gauche est égal à $n\mathrm{S}_n$, et par linéarité de la somme, celui de droite à $\lambda \mathrm{S}_n$ (l'indice de sommation étant une variable muette, qu'on l'appelle i ou j ne change rien).

$$\boxed{n\mathrm{S}_n = \lambda \mathrm{S}_n}$$

3 Si $\mathrm{S}_n \neq 0$, on peut simplifier par S_n dans la question précédente, pour obtenir

$$\boxed{\lambda = n}$$

Par conséquent, d'après la question 1, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!], x_i = \mathrm{S}_n / n$.

$$\boxed{\text{Toutes les coordonnées de X sont égales.}}$$

4.(a) X étant non nul, au moins une de ses coordonnées n'est pas nulle.

$$\boxed{\text{Il existe } i_0 \in [\![1\,;\, n]\!] \text{ tel que } x_{i_0} \neq 0}$$

$\boxed{\textbf{4.(b)}}$ D'après la question 1, $\lambda x_{i_0} = \mathrm{S}_n = 0$. Puisque $x_{i_0} \neq 0$

$$\boxed{\lambda = 0}$$

Partie IV. Théorème spectral

$\boxed{\textbf{1}}$ Par définition de f,

$$\boxed{f(\mathrm{S}) = (-1)^2 + (-1)^2 = 2}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ Calculons ${}^t\mathrm{B}$:

$${}^t\mathrm{B} = {}^t\left(\mathrm{P_0}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P_0}\right) = {}^t\mathrm{P_0}{}^t\mathrm{A}{}^t\left(\mathrm{P_0}^{-1}\right)$$

A est symétrique donc ${}^t\mathrm{A} = \mathrm{A}$ et $\mathrm{P_0}$ est orthogonale, donc inversible et $\mathrm{P_0}^{-1} = \mathrm{P}_0^\top$ (d'après la question 1 de la partie II). Finalement,

$$\boxed{{}^t\mathrm{B} = \mathrm{P_0}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P_0} = \mathrm{B} : \text{B est symétrique.}}$$

> On peut remarquer la ressemblance entre le résultat de l'énoncé et le théorème du cours concernant les fonctions continues sur un segment. C'est en effet l'analogue de ce théorème pour des fonctions définies sur des espaces vectoriels plus généraux que $\mathbb{R}$. Il faut pour cela définir la notion de fonction continue et de segment sur de tels espaces vectoriels : ce sera fait en deuxième année !

$\boxed{\textbf{3}}$ Un calcul simple donne ${}^t\mathrm{U}(\theta)\mathrm{U}(\theta) = \mathrm{I}_3$ donc

$$\boxed{\mathrm{U}(\theta) \text{ est othogonale.}}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ Puisque $\mathrm{U}(\theta)$ est orthogonale, $\mathrm{U}(\theta)^{-1} = {}^t\mathrm{U}(\theta)$. Après calculs, les vecteurs colonnes de $\mathrm{C}(\theta)$ sont donnés par

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} c_{11}(\theta) \\ b\cos(\theta) - e\sin(\theta) \\ a\cos(\theta)\sin(\theta) - c\sin^2(\theta) + c\cos^2(\theta) - f\sin(\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} b\cos(\theta) - e\sin(\theta) \\ c_{22}(\theta) \\ b\sin(\theta) + e\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{Z} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta)\sin(\theta) - c\sin^2(\theta) + c\cos^2(\theta) - f\sin(\theta)\cos(\theta) \\ b\sin(\theta) + e\cos(\theta) \\ c_{33}(\theta) \end{pmatrix}$$

En d'autres termes

$$\boxed{\mathrm{C}(\theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & \mathrm{Z} \end{pmatrix}}$$

$\boxed{\textbf{5}}$ On souhaite montrer l'existence de $\theta_1 \in \left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que

$$c_{13}(\theta_1) = a\cos(\theta_1)\sin(\theta_1) - c\sin^2(\theta_1) + c\cos^2(\theta_1) - f\sin(\theta_1)\cos(\theta_1) = 0$$

Or, la fonction $\theta \mapsto c_{13}(\theta)$ est continue sur $\left[0\,;\, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $c_{13}(0) = c$ et $c_{13}(\pi/2) = -c$. Ces deux quantités sont de signe opposé donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Il existe } \theta_1 \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } c_{13}(\theta_1) = 0.}$$

$\boxed{\textbf{6}}$ Par choix de θ_1 (les coefficients diagonaux n'ont aucune importance car on cherche $\varphi(\mathrm{C}(\theta_1))$) :

$$\mathrm{C}(\theta_1) = \begin{pmatrix} c_{11}(\theta) & b\cos(\theta_1) - e\sin(\theta_1) & 0 \\ b\cos(\theta_1) - e\sin(\theta_1) & c_{22}(\theta) & b\sin(\theta) + e\cos(\theta) \\ 0 & b\sin(\theta_1) + e\cos(\theta_1) & c_{33}(\theta) \end{pmatrix}$$

Dès lors, $\varphi(\mathrm{C}(\theta_1))$ est simple à calculer :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathrm{C}(\theta_1)) &= 2\left(b\cos(\theta_1) - e\sin(\theta_1)\right)^2 + 2\left(b\sin(\theta_1) + e\cos(\theta_1)\right)^2 \\ &= 2b^2 + 2e^2 \end{aligned}$$

Puisque $\varphi(\mathrm{B}) = 2b^2 + 2c^2 + 2e^2$, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\varphi(\mathrm{C}(\theta_1)) = \varphi(\mathrm{B}) - 2c^2}$$

Or $$\mathrm{C}(\theta_1) = \mathrm{U}(\theta_1)^{-1}{\mathrm{P}_0}^{-1}\mathrm{A}\mathrm{P}_0\mathrm{U}(\theta_1) = (\mathrm{P}_0\mathrm{U}(\theta_1))^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{P}_0\mathrm{U}(\theta_1))$$

De plus, d'après la question 3, $\mathrm{U}(\theta_1)$ est orthogonale. Ainsi, $\mathrm{P}_0\mathrm{U}(\theta_1)$ est un produit de matrices orthogonales donc est orthogonale d'après la question 2 de la partie II. Il en découle que si on pose $\mathrm{P} = \mathrm{P}_0\mathrm{U}(\theta_1)$, P est orthogonale et vérifie $\varphi(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) < \varphi(\mathrm{B})$ ce qui est absurde par définition de B. En conclusion,

$$\boxed{\text{B est diagonale.}}$$

> En particulier $\varphi(\mathrm{B}) = 0$.
> On peut facilement généraliser la démonstration au cas des matrices symétriques réelles de taille n (attention, cela n'est plus valable pour une matrice symétrique *complexe*), mais c'est plus technique car il faut manier des sommes doubles et ne pas se perdre dans les indices (on doit donner le terme général d'un produit de trois matrices avec plusieurs cas à étudier). Si on suppose que $b_{rs} \neq 0$ (on a pris dans le devoir $r = 1$ et $s = 3$), il suffit de poser $\mathrm{U}(\theta)$ la matrice de taille n égale à l'identité sauf : $u_{rr}(\theta) = u_{ss}(\theta) = \cos(\theta), u_{sr}(\theta) = -\sin(\theta)$ et $b_{rs}(\theta) = \sin(\theta)$ (je vous laisse l'écrire sous forme de matrice pour bien la visualiser).
> Ce théorème est connu depuis le XIXe siècle, mais la démonstration vue ici est récente et a été publiée par Herb Wilf en 1981.
> Le théorème spectral est un théorème extrêmement important en algèbre, et il est au programme en seconde année.

Partie V. Théorème de Hoffman et Singleton.

1.(a) Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Par définition d'un produit de matrices

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}$$

Or, A est symétrique donc $a_{ki} = a_{ik}$ pour tout k. Ainsi, b_{ii} est la somme des ${a_{ik}}^2$. Or, les coefficients de A sont égaux à 0 ou 1 donc égaux à leur carré, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \qquad b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}}$$

1.(b) Suivons l'indication de l'énoncé et regardons les termes en position (i, i) des différentes matrices de cette égalité. Celui de A^2 est b_{ii}, celui de A est a_{ii} qui est nul par hypothèse sur A, et celui de $(d-1)\mathrm{I}_n$ est $d - 1$, tandis que celui de J_n est 1. Par conséquent, d'après la relation $(*)$, $b_{ii} + 0 - (d - 1) = 1$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{b_{ii} = d}$$

1.(c) D'après les deux questions précédentes, chaque ligne de A contient d fois le nombre 1. Puisque tous les coefficients de U sont égaux à 1, un rapide produit de matrices permet de voir que AU est le vecteur colonne dont tous les coefficients valent d.

$$\boxed{\mathrm{AU} = d\mathrm{U}}$$

Par conséquent, $A^2U = A(AU) = A(dU) = dAU = d^2U$.

$$\boxed{A^2U = d^2U}$$

1.(d) C'est immédiat.

$$\boxed{J_nU = nU}$$

1.(e) D'après la relation $(*)$ qu'on applique au vecteur colonne U

$$(A^2 + A - (d-1)I_n)U = J_nU$$

D'après les deux questions précédentes,

$$(d^2 + d - (d-1))U = nU$$

Puisque U n'est pas le vecteur nul, on a le résultat voulu.

$$\boxed{n = d^2 + 1}$$

2 Il suffit d'appliquer le théorème spectral et de se souvenir (question 1 de la partie II) qu'une matrice orthogonale est inversible.

$$\boxed{\text{C'est bon}}$$

3.(a) Si $Y_i = 0$ alors $X_i = P^{-1}Y_i = 0$ ce qui est exclu.

$$\boxed{Y_i \neq 0}$$

3.(b) On a

$$AY_i = PDP^{-1} \times PX_i = PDX_i$$

où on a noté D la matrice diagonale de l'énoncé. On a $DX_i = \lambda_i X_i$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{AY_i = \lambda_i Y_i}$$

3.(c) De même que précédemment, $A^2Y_i = {\lambda_i}^2 Y_i$. Il suffit d'appliquer la relation $(*)$ à Y_i pour conclure.

$$\boxed{J_nY_i = \left({\lambda_i}^2 + \lambda_i - (d-1)\right) Y_i}$$

3.(d) Y_i est non nul et $J_nY_i = nY_i$. D'après la question 3 de la partie III, toutes les coordonnées de Y_i sont égales, c'est-à-dire

$$\boxed{Y_i \text{ et U sont proportionnels.}}$$

En d'autres termes, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $Y_i = \mu U$. Par conséquent,

$$AY_i = A(\mu U) = \mu AU = \mu dU = d(\mu U) = dY_i$$

Puisque $AY_i = \lambda_i Y_i$ et $Y_i \neq 0$, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\lambda_i = d}$$

3.(e) C'est immédiat.

$$\boxed{\alpha = \frac{-1 + \sqrt{4d-3}}{2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{-1 - \sqrt{4d-3}}{2}}$$

3.(f) D'après la question 3.(c), $J_nY_i = \left({\lambda_i}^2 + \lambda_i - (d-1)\right) Y_i$. D'après la partie III, le réel ${\lambda_i}^2 + \lambda_i - (d-1)$ est donc égal à n (et dans ce cas $\lambda_i = d$ d'après la question 3.(d)) ou à 0, et dans ce cas λ_i est racine du polynôme $X^2 + X - (d-1)$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\lambda_i \in \{\alpha, \beta, d\}}$$

4 Tous les λ_i sont égaux à α, β ou d. Il y a n réels λ_i, dont a qui sont égaux à α, b qui sont égaux à β et un seul qui est égal à d. Par conséquent, $a+b+1=n$ et on conclut à l'aide de la question 1.(e).

$$\boxed{a+b=d^2}$$

5 En remplaçant α et β par leurs valeurs dans l'égalité admise, il vient

$$\frac{-a+a\sqrt{4d-3}}{2}+\frac{-b-b\sqrt{4d-3}}{2}=-d$$

On a donc $-a-b+\sqrt{4d-3}(a-b)=-2d$, et par suite $\sqrt{4d-3}(a-b)=-2d+a+b$ et on conclut à l'aide de la question précédente.

$$\boxed{\sqrt{4d-3}(a-b)=d(d-2)}$$

Démontrons l'égalité admise. Si $\mathrm{M}=(m_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée de taille n, on appelle *trace* de M le réel

$$\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})=\sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

En d'autres termes, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{M})$ est la somme des termes diagonaux de M (la trace est au programme de seconde année). Montrons que si M et N sont deux matrices carrées de taille n (c'est même valable si M et N sont rectangulaires, tant que les deux produits sont bien définis, exo), alors $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MN})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{NM})$. On note $\mathrm{MN}=(c_{ij})$ et $\mathrm{NM}=(d_{ij})$ (attention, $\mathrm{MN}\neq\mathrm{NM}$ en général !). Alors on a successivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MN}) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}n_{ji}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij}n_{ji}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} n_{ji}m_{ij}\\
&= \sum_{j=1}^{n} d_{jj}\\
\mathrm{Tr}\,(\mathrm{MN}) &= \mathrm{Tr}\,(\mathrm{NM})
\end{aligned}$$

Comment peut-on utiliser cet outil dans notre problème ? Les coefficients diagonaux de A (la matrice de l'énoncé) sont tous nuls, donc $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=0$. De plus, $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{PDP}^{-1})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{DP}^{-1}\mathrm{P})$ (par ce qui précède avec $\mathrm{M}=\mathrm{P}$ et $\mathrm{N}=\mathrm{DP}^{-1}$) donc $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})=\mathrm{Tr}\,(\mathrm{D})$ et la trace de D est bien égale à $a\alpha+b\beta+d$.

6.(a) Puisque $a\neq b$, on peut diviser par $a-b$ (a, b et d sont des entiers) :

$$\boxed{\sqrt{4d-3}=\frac{d(d-2)}{a-b}\in\mathbb{Q}}$$

Dès lors (cf. chapitre 6), $4d-3$ est un carré parfait :

$$\boxed{\text{Il existe } p\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } 4d-3=p^2.}$$

6.(b) Par définition de p, on a $d=\left(p^2+3\right)/4$. En particulier,

$$\boxed{d(d-2)=\frac{\left(p^2+3\right)\times\left(p^2-5\right)}{16}}$$

6.(c) D'après la question 5 et la question précédente, il vient

$$\sqrt{4d-3}(a-b)=\frac{\left(p^2+3\right)\times\left(p^2-5\right)}{16}$$

Or, $\sqrt{4d-3}=p$, d'où $16p(a-b)=\left(p^2+3\right)\times\left(p^2-5\right)$. En développant et en mettant à gauche tous les termes dépendant de p, on obtient

$$16p(a-b)-p^4+2p^2=-15$$

Donc $\left(16(a-b)-p^3+2p\right)\times p=-15$, et $k=-16(a-b)+p^3-2p$ convient.

$$\boxed{\text{Il existe } k\in\mathbb{Z} \text{ tel que } k\times p=15}$$

Par conséquent, p est un diviseur positif (car $p\geqslant 1$) de 15.

$$\boxed{p\in\{1,3,5,15\}}$$

7 Si $a=b$, d'après la question 5, $d(d-2)=0$. Puisque $d\neq 0$,

$$\boxed{d=2}$$

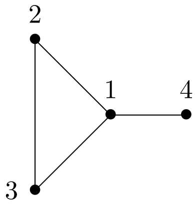
8 Si $a=b$ alors $d=2$, sinon il existe $p\in\{1,3,5,15\}$ tel que $d=\left(p^2+3\right)/4$. En conclusion,

$$\boxed{d\in\{1,2,3,7,57\}}$$

Ce théorème fut démontré par Alan Hoffman et Robert Singleton en 1960. Le moins que l'on puisse dire, c'est que ce théorème n'est pas très impressionnant au premier abord. La preuve encore qu'il ne faut pas juger un livre à sa couverture...

Commençons tout d'abord par donner quelques rudiments de théorie des graphes. Un graphe G est la donnée d'un ensemble S (les *sommets*) et d'un ensemble A (les *arêtes*) constitué de paires d'éléments de S.

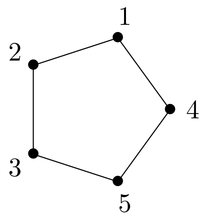
Une représentation d'un graphe G consiste à associer à chaque sommet de G un point du plan et à tracer le segment défini par deux de ces points si, et seulement si, les sommets auxquels sont associés ces points forment une arête de G. Par exemple, le graphe $\mathrm{G}=(\mathrm{S},\mathrm{A})$ où $\mathrm{S}=\{1,2,3,4\}$ et $\mathrm{A}=\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\},\{1,4\}\}$ peut être représenté par la figure suivante



Quel est le rapport avec le calcul matriciel ? Si $\mathrm{G}=(\mathrm{S},\mathrm{A})$ où $\mathrm{S}=\{x_1,\dots,x_n\}$ est un graphe, on définit sa matrice d'adjacence $\mathrm{M}\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ comme ceci : $m_{ij}=1$ si et seulement s'il existe une arête joignant x_i à x_j, et $m_{ij}=0$ sinon (une matrice d'adjacence a donc des coefficients égaux à 0 ou 1). Par exemple, la matrice d'adjacence du graphe ci-dessus est

$$\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

tandis que la matrice M étudiée dans la question 2 de la partie I est la matrice d'adjacence du graphe

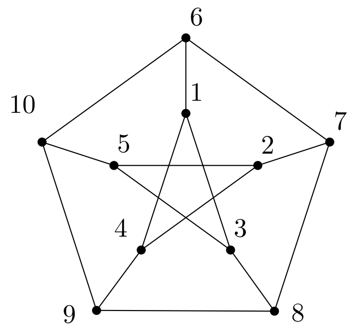


Puisqu'une arête joignant x_i et x_j joint également x_j à x_i, la matrice d'adjacence d'un graphe est symétrique.

De plus, si on impose qu'il n'y ait pas d'arête d'un sommet à lui même (c'est-à-dire une boucle), alors les coefficients diagonaux de M sont tous nuls. Ainsi, M vérifie les conditions de l'énoncé (sauf la dernière, on y arrive).

On appelle *degré* d'un sommet le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet (c'est-à-dire plus simplement son nombre de voisins, par exemple, pour le premier graphe ci-dessus, le degré de 4 vaut 1, et celui de 1 vaut 3), et *distance* entre deux sommets la longueur du plus court chemin permettant d'aller de l'un à l'autre (par exemple, dans le graphe pentagonal, la distance entre 2 et 5 est égale à 2). Enfin, on dit qu'un graphe est de *diamètre* 2 si la plus grande distance entre deux sommets est 2. C'est par exemple le cas des deux graphes ci-dessus et du graphe ci-dessous.

On cherche les graphes de diamètre 2 dont tous les sommets ont un degré inférieur ou égal à d. On peut montrer (cf. exercice 14 du chapitre 17) qu'un tel graphe a un nombre n de sommets inférieur ou égal à d^2+1. S'il y a égalité, un tel graphe est appelé *un graphe de Moore de diamètre* 2 (et tous les sommets ont un degré exactement égal à d). Par exemple, le graphe pentagonal ci-dessus est un graphe de Moore de diamètre 2 pour $d=2$: il a 5 sommets et ses sommets ont tous un degré égal à 2 (c'est-à-dire deux « voisins »). Un autre exemple de graphe de Moore de diamètre 2 (pour $d=3$ et donc $n=10$) est le graphe de Petersen ci-dessous (essayez de donner sa matrice d'adjacence) :



On peut montrer que si G est un graphe de Moore de diamètre 2, alors sa matrice d'adjacence M vérifie l'égalité $\mathrm{M}^2+\mathrm{M}-(d-1)\mathrm{I}_n=\mathrm{J}_n$. Ainsi, on peut reformuler le théorème de Hoffman et Singleton de la façon suivante : « Si G est un graphe de Moore de diamètre 2 de degré d à n sommets, alors il a un degré égal à $1,2,3,7$ ou 57 et il a alors respectivement un nombre de sommets égal à $2,5,10,50$ ou 3250. » On écarte le cas $d=1$ car alors $n=2$ et le graphe consiste en deux points joints par un segment, et alors son diamètre vaut 1 et non pas 2. Ainsi, il n'existe au plus que quatre possibilités pour le nombre de sommets d'un graphe de Moore de diamètre 2 ! Le graphe pentagonal ci-dessus correspond au cas $d=2$ et $n=5$, le graphe de Petersen au cas $d=3$ et $n=10$, et Hoffman et Singleton ont construit un graphe de Moore de diamètre 2 de degré 7 à 50 sommets (Wikipédia est votre ami pour voir à quoi il ressemble...). Par contre, on ne sait pas encore s'il existe un graphe de Moore de diamètre 2 de degré 57 à 3250 sommets. Exo...

La définition d'un graphe de Moore peut être facilement généralisée au cas d'un diamètre $k\geqslant 1$ quelconque : c'est un graphe à n sommets de degré d de diamètre $k\geqslant 1$ ayant un nombre maximal de sommets, à savoir $1+d\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}(d-1)^i$ (idem, exo de dénombrement). On connaît presque complètement l'ensemble des graphes de Moore :

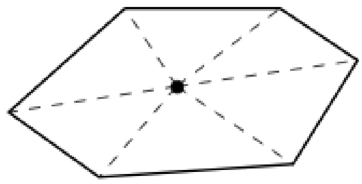
- Les graphes de diamètre $k=1$ sont appelés graphes complets, tous les sommets sont reliés par des arêtes (par exemple un carré dont on a tracé les diagonales) et sont tous des graphes de Moore.
- Le graphe pentagonal, le graphe de Petersen et le graphe de Hoffman-Singleton sont des graphes de Moore de diamètre $k=2$ et Hoffman et Singleton ont montré dans la foulée en 1960 qu'il n'y en avait pas d'autre (quitte à renommer les sommets et bouger un peu les arêtes, mais on peut rendre ceci rigoureux), sauf éventuellement un graphe à 3250 sommets et de degré 57, et également qu'il n'y a aucun graphe de Moore de diamètre $k=3$.
- On peut montrer que les seuls graphes de Moore de degré 2 sont les polygones à $n=2d+1$ côtés (comme le pentagone ci-dessus) et ils sont alors de diamètre $k=(n-1)/2$.
- Enfin, Eiichi Bannai et Tatsuro Ito ont démontré en 1973 qu'il n'y a aucun graphe de Moore de degré $k\geqslant 4$ de degré $d>2$.

En conclusion, tous les graphes de Moore sont connus (ou presque) : ce sont les graphes complets, les trois graphes ci-dessus et les polygones ayant un nombre impair de côtés, et éventuellement (encore une fois, on n'a encore montré ni l'existence, ni l'unicité) des graphes de diamètre 2, de degré 57 et à 3250 sommets.

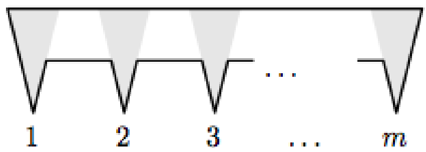
La théorie des graphes est un domaine très important des mathématiques, avec des applications dans des domaines aussi variés qu'étonnants. Citons trois résultats qu'on démontre grâce à la théorie des graphes :

- **Le théorème de Facebook :** On suppose que dans un ensemble de personnes, deux personnes quelconques ont toujours exactement un ami en commun. Alors il existe une personne qui est amie avec tout le monde (cela donne un graphe du type « moulin à vent »). Ce résultat a été démontré par Paul Erdös, Alfred Rényi et Vera Sós en 1966.

- **Le théorème des quatre couleurs :** Sur une carte, quatre couleurs suffisent pour que deux pays ayant une frontière commune soient coloriés d'une couleur différente (et en regardant la France, la Belgique, le Luxembourg et l'Allemagne, on voit qu'on ne peut pas descendre à 3 couleurs). Ce théorème a été conjecturé au XIXe siècle et une démonstration a été donnée en 1879. Manque de chance, cette démonstration était fausse et il a fallu attendre 1976 pour qu'il soit démontré par Kenneth Appel et Wolfgang Haken. La démonstration est extrêmement ardue et nécessite l'aide d'un ordinateur, mais il existe une preuve très simple du résultat si on se contente de 5 couleurs.
- **Comment garder un musée :** Puisque surveiller un musée est fatigant, les gardiens sont constamment assis sur leur chaise et ne bougent jamais. On peut par contre supposer qu'ils voient tout ce qui se passe autour d'eux, même derrière eux, quitte à se retourner. On cherche le nombre de gardiens nécessaires pour que tout le musée soit sous surveillance. Si le musée est convexe, un seul gardien suffit :

  Cependant, il faut bien reconnaître que c'est rarement le cas. Ainsi, Vašek Chvátal en 1975 à l'aide d'arguments combinatoires, et Steve Fisk en 1978 grâce à de la théorie des graphes ont montré que si un musée avait n murs, alors on peut surveiller le musée avec $\lfloor n/3 \rfloor$ gardiens. De plus, cette borne est la meilleure possible (c'est-à-dire qu'un nombre inférieur de gardiens ne suffit pas dans le cas général), car il faut exactement m gardiens pour surveiller le musée ci-dessous.

  En effet, un gardien ne peut voir ce qui se passe dans les coins que lorsqu'il est dans la zone grisée correspondante. Il faut donc au moins m gardiens (un à la base de chaque triangle grisé, ce qui fait qu'ils peuvent aussi surveiller les zones blanches), et il y a $3m$ murs.

Bref, la théorie des graphes, c'est trop bien !