Correction du DS n°4

Sujet groupe A

$\boxed{3}$ On a une suite arithmético-géométrique d'équation caractéristique : $x = 4x - 2 \iff 3x = 2 \iff x = 2/3$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} & = & 4u_n & -2 \\ 2/3 & = & 4 \times 2/3 & -2 \end{array}$$

Par différence, $u_{n+1} - 2/3 = 4(u_n - 2/3)$ c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n - 2/3$ est géométrique de raison 4 donc $u_n - 2/3 = 4^n(u_0 - 2/3) = 4^n \times 4/3$. Finalement :

$$\boxed{u_n = \frac{4^{n+1} + 2}{3}}$$

$\boxed{4}$ On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est : $x^2 = 7x - 12 \iff x^2 - 7x + 12 = 0$ dont les solutions sont 3 et 4. Dès lors, il existe λ et μ (uniques) tels que, pour tout n, $u_n = \lambda \times 3^n + \mu \times 4^n$. Pour $n = 0$, cela donne $-3 = \lambda + \mu$ donc $\lambda = -3 - \mu$ et, pour $n = 1$, on trouve :

$$\begin{aligned} -7 &= 3\lambda + 4\mu \\ &= 3(-3 - \mu) + 4\mu \\ &= -9 + \mu \end{aligned}$$

si bien que $\mu = 2$ et donc $\lambda = -5$. En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -5 \times 3^n + 2 \times 4^n}$$

> Encore une fois, il ne coûte pas très cher de vérifier que, pour $n = 0$ et $n = 1$, on retombe sur les bonnes valeurs de u_0 et u_1.

$\boxed{5}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout d'abord, $u_n = (8/e^3)^n$ et $e > 2$ donc $e^3 > 8$ donc $8/e^3 < 1$: on a une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 (et positive) donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Pour v_n, mettons en facteur le terme prépondérant, c'est-à-dire 3^n.

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{3^n \left(\dfrac{e^n}{3^n} - \dfrac{n^2 \times 2^n}{3^n} + 1 \right)}{3^n \left(\dfrac{e^n}{3^n} + \dfrac{n^2 \times 2^n}{3^n} - 1 \right)} \\ &= \frac{(e/3)^n - n^2 \times (2/3)^n + 1}{(e/3)^n + n^2 \times (2/3)^n - 1} \end{aligned}$$

Or, $e < 3$ si bien que (suite géométrique de raison < 1) $(e/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $2/3 < 1$ donc (croissances comparées) $n^2 \times (2/3)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Dès lors, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers -1 si bien que

$$\boxed{v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1}$$

> Si on se trompe de terme prépondérant et qu'on pense que c'est (par exemple) e^n, alors cela donne de même après simplification :
>
> $$v_n = \frac{1 - (n^2 \times 2^n/e^n) + (3/e)^n}{1 + (n^2 \times 2^n/e^n) - (3/e)^n}$$

> et là on ne peut pas conclure car $3 > e$ donc $(3/e)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et on a une forme indéterminée du type $+\infty/+\infty$: si on ne repère pas du premier coup d'oeil le terme prépondérant, on s'en rend compte tout de même !

6.(a) $k! = k \times \cdots \times 2$ (multiplier ou non par 1 ne change pas la valeur d'un produit) donc $k!$ est un produit de $k-1$ termes supérieurs ou égaux à 2 donc (on peut multiplier des inégalités positives) $k! \geqslant 2^{k-1}$ et on conclut par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Si } k \geqslant 1,\ \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}}$$

6.(b) En sommant la question précédente pour k allant de 1 à n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$

En ajoutant le terme d'indice $k = 0$ qui vaut 1, il vient :

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_n &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \\ &\leqslant 1 + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2^j} \\ &\leqslant 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \\ &\leqslant 1 + \frac{1-(1/2)^n}{1/2} \\ &\leqslant 1 + 2 \times (1-(1/2)^n) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{S}_n \leqslant 1 + 2 = 3$ et $\mathrm{S}_{n+1} - \mathrm{S}_n = 1/(n+1)! > 0$ donc la suite est croissante majorée donc converge.

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{S}_n) \text{ converge.}}$$

> Attention, la majoration $\mathrm{S}_n \leqslant 1 + 2 \times (1-(1/2)^n)$ ne suffit pas car, pour appliquer le théorème de convergence monotone, il faut majorer par une CONSTANTE !

7 Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition de la partie entière, $a - 1 < \lfloor a \rfloor \leqslant a$ pour tout réel a donc :

$$\frac{10^n\pi - 1}{10^n} = \pi - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant \frac{10^n \pi}{10^n} = \pi$$

D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi}$

8 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f \text{ est définie en } x &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad \ln(x) \neq 0 \\ &\iff x > 0 \quad \text{et} \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

On en déduit que f est définie sur $]\,0\,;1\,[\cup]\,1\,;+\infty\,[$. Or, $\ln(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} -\infty$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$: f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. Cependant, $\ln(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} 0^+$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to1^+]{} +\infty$: f n'admet pas de limite finie en 1 donc n'est pas prolongeable par continuité en 1.

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[\text{ et est prolongeable par continuité en 0 mais pas en 1.}}$$

> Attention, f n'a pas de limite en 1 puisque la limite en 1^+ vaut $+\infty$ et celle en 1^- vaut $-\infty$, attention de ne pas dire que $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$!

9 Soit

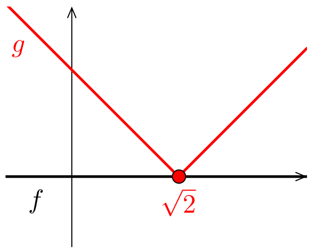
$$\varphi : \begin{cases} [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto f(x) - 2024g(x) \end{cases}$$

φ est continue car f et g le sont, $\varphi(0) = 0 - 2024 \times 1 = -2024$ et $\varphi(1) = 1 - 2024 \times 0 = 1$ donc, d'après le TVI,

$$\boxed{\text{Il existe } x_0 \in [\,0\,;1\,] \text{ tel que } f(x_0) = 2024g(x_0).}$$

10 Soit $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (x_n) à valeurs dans $\mathbb{Q}$ qui converge vers x. Par hypothèse, pour tout n, $f(x_n) < g(x_n)$. Par continuité de f et g, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. L'inégalité LARGE passe à la limite donc $f(x) \leqslant g(x)$.

$$\boxed{\text{On a } f \leqslant g.}$$

> Cependant, on peut avoir $f(x) = g(x)$ en certains points : par exemple, si f est la fonction nulle, et si $g(x) = |x - \sqrt{2}|$ (voir graphe ci-dessous), alors $f(x) < g(x)$ si $x \neq \sqrt{2}$ donc en particulier si $x \in \mathbb{Q}$, f et g sont continues mais $f(\sqrt{2}) = g(\sqrt{2}) = 0$.
>
> 
>

11.(a) Par croissances comparées,

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0}$$

11.(b) Découle du fait que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{Il existe A} > 0 \text{ tel que, pour tout } x \geqslant \text{A}, |f(x)| \leqslant 1.}$$

11.(c) De même, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ donc il existe B < 0 tel que, pour tout $x \leqslant$ B, $|f(x)| \leqslant 1$. Or, f est continue sur le segment $[\,\text{B}\,;\text{A}\,]$ donc est bornée (et atteint ses bornes). En particulier, il existe M tel que $|f(x)| \leqslant$ M pour tout $x \in [\,\text{B}\,;\text{A}\,]$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \max(1, \text{M})$ donc

$$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

12 Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Posons $g(x) = \sin(2x)$. Alors $g'(x) = 2\cos(2x)$.
- Posons $h(x) = e^{\sin(2x)} = e^{g(x)}$ donc $h'(x) = g'(x)e^{g(x)} = 2\cos(2x)e^{\sin(2x)}$.
- Posons $u(x) = 3 + \cos\left(e^{\sin(2x)}\right) = 3 + \cos(h(x))$ si bien que

$$u'(x) = -h'(x)\sin(h(x)) = -2\cos(2x)e^{\sin(2x)}\sin\left(e^{\sin(2x)}\right)$$

- Posons $v(x) = \ln\left(3 + \cos\left(e^{\sin(2x)}\right)\right) = \ln(u(x))$ si bien que

$$v'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2\cos(2x)e^{\sin(2x)}\sin\left(e^{\sin(2x)}\right)}{3 + \cos\left(e^{\sin(2x)}\right)}$$

- Enfin, $f(x) = \text{Arctan}\,(v(x))$ donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{v'(x)}{1+v(x)^2} = \frac{-2\cos(2x)e^{\sin(2x)}\sin\left(e^{\sin(2x)}\right)}{3+\cos\left(e^{\sin(2x)}\right)} \times \frac{1}{1+\ln\left(3+\cos\left(e^{\sin(2x)}\right)\right)^2}}$$

13 f est tout d'abord dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}^*$. Soit $x \neq 0$. Alors $-1 \leqslant \sin(1/x) \leqslant 1$ et $x^2 \geqslant 0$ donc $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$. D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$: on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. f est à présent continue sur $\mathbb{R}$, il suffit donc de prouver qu'elle est dérivable en 0. Pour cela, étudions son taux d'accroissement :

$$\tau_0(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x\sin(1/x)$$

puisqu'on rappelle que $f(0) = 0$. Attention de ne pas dire que $-x \leqslant \tau_0(x) \leqslant x$ car on ne connaît pas le signe de x !

- Soit on différencie les cas selon le signe de x, c'est-à-dire que si $x > 0$ alors $-x \leqslant \tau_0(x) \leqslant x$ donc, théorème d'encadrement, $\tau_0(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$. De même, si $x < 0$, alors $x \leqslant \tau_0(x) \leqslant -x$ (l'inégalité change de sens car on multiplie par $x < 0$) et on conclut de même que f est dérivable à gauche en 0 de dérivée $f_g'(0) = 0 = f_d'(0)$.
- Soit on utilise la valeur absolue : $|\tau_0(x)| \leqslant |x|$ donc, théorème d'encadrement, $\tau_0(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Dans tous les cas, on en déduit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$:

$$\boxed{f \text{ est donc bien prolongeable en une fonction dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

14 cf. question 3 des préliminaires du devoir groupes B et C.

15 φ est continue sur $[\,0\,;a\,]$, dérivable sur $]\,0\,;a\,[$ (car f est dérivable). Attention, $\varphi(a) = f(a) - f(-a)$ et $\varphi(0) = 0$ qui n'est a priori pas égal à $\varphi(a)$ donc on ne peut pas appliquer le théorème de Rolle mais on peut appliquer l'égalité des accroissements finis : il existe $c \in\,]\,0\,;a\,[$ (et en particulier $c > 0$) tel que

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{a-0}$$

c'est-à-dire que $a \times \varphi'(c) = f(a) - f(-a)$. Il suffit de voir (dérivée d'une composée) que $\varphi'(c) = f(c) + f'(-c)$ et on a le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que } f(a) - f(-a) = a(f'(c) + f'(-c)).}$$

16.(a) Soit

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x/2} - x \end{cases}$$

Même pas besoin de donner son tableau de variations : g est strictement décroissante (car somme de $x \mapsto e^{-x/2}$ et $x \mapsto -x$ qui sont strictement décroissantes), continue (car somme de fonctions continues), $g(0) = 1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection, g s'annule une unique fois, c'est-à-dire qu'il existe un unique réel x tel que $e^{-x/2} = x$.

$$\boxed{f \text{ admet un unique point fixe.}}$$

16.(b) On cherche à appliquer l'IAF (version 2 i.e. avec une valeur absolue). Pour cela, il faut majorer $|f'|$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = -e^{-x}/2$ et $f''(x) = e^{-x}/4$, d'où le tableau de variations de f' (attention, pas de f) :

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
f'	$-1/2$ $\nearrow$	0

On en déduit que $|f'|$ est majorée par $1/2$: d'après l'IAF (rappelons que $u_{n+1} = f(u_n)$ et que $\alpha = f(\alpha)$ car c'est un point fixe) :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha|}$$

16.(c) Par une récurrence immédiate en utilisant la question précédente (on peut dire avec les mains que $(|u_n - \alpha|)$ est « sous-géométrique »), pour tout n, $|u_n - \alpha| \leqslant (1/2)^n \times |u_0 - \alpha|$. Or, $1/2 < 1$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha}$$

17 Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $g(x) = 7x^2 + 5x$ et $h(x) = e^{2x}$. Alors g et h sont dérivables n fois. D'après la formule de Leibniz :

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

Or, g est polynomiale de degré 2 donc $g^{(k)}(x) = 0$ si $k \geqslant 3$: il ne reste donc plus que les termes d'indices $k = 0, 1, 2$ dans la somme. De plus, $h^{(n-k)}(x) = 2^{n-k}e^{2x}$ si bien que :

$$f^{(n)}(x) = \binom{n}{0} g(x) h^{(n)}(x) + \binom{n}{1} g'(x) h^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} g''(x) h^{(n-2)}(x)$$

En conclusion
$$\boxed{f^{(n)}(x) = (7x^2 + 5x) \times 2^n e^{2x} + n(14x + 5) \times 2^{n-1} e^{2x} + \frac{n(n-1)}{2} \times 14 \times 2^{n-2} e^{2x}}$$

19 f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est dérivable deux fois (et même $\mathscr{C}^\infty$). Soit $x > 0$. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} \\ &= 2x\ln(x) + x \end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\ln(x) + 2x \times \frac{1}{x} + 1 \\ &= 2\ln(x) + 3 \end{aligned}$$

Par conséquent, $f''(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -3/2 \iff x \geqslant e^{-3/2}$. Par conséquent, f'' est positive sur $\left[e^{-3/2} ; +\infty \right[$ et négative sur $\left] e^{-3/2} ; +\infty \right]$ (et nulle en $e^{-3/2}$). Finalement :

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } \left[e^{-3/2} ; +\infty \right[\text{ et concave sur } \left] e^{-3/2} ; +\infty \right] \text{ et admet un point d'inflexion en } e^{-3/2}.}$$

20 Appliquons l'inégalité de Jensen à la racine carrée qui est concave (donc elle est dans le sens inverse de celle en cours) avec les λ_i égaux à $1/n$ (on est donc dans le cas particulier) et les x_k égaux à $1, 2, \dots, n$:

$$\frac{\sqrt{1} + \cdots + \sqrt{n}}{n} \leqslant \sqrt{\frac{1 + \cdots + n}{n}}$$

c'est-à-dire
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n}}$$

En multipliant par n, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leqslant n\sqrt{\frac{n+1}{2}}}$$

Sujet groupes B et C
Préliminaires

3 Soit

$$g : \begin{cases} [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto f(x) + \cos(2\pi x) \end{cases}$$

g est continue sur $[\,0\,;1\,]$ et dérivable sur $]\,0\,;1\,[$ (car f est dérivable) et $g(0) = g(1) = 2$ par hypothèse sur f. D'après le théorème de Rolle, il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $g'(x) = 0$. Or, pour tout x, $g'(x) = f'(x) - 2\pi\sin(2\pi x)$, d'où le résultat.

$$\boxed{\text{Il existe } x \in]\,0\,;1\,[\text{ tel que } f'(x) = 2\pi\sin(2\pi x)}$$

Exercice - Fonctions de Hermite

1 Puisque $f^{(0)} = f$, on a évidemment $h_0 : x \mapsto 1 \times e^{\pi x^2} \times e^{-2\pi x^2} = e^{-\pi x^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. f étant $\mathscr{C}^\infty$, on peut la dériver autant de fois qu'on veut (et donc les h_n sont bien définies, même s'il n'était pas demandé de le justifier) et $f'(x) = -4\pi x e^{-2\pi x^2}$ et $f''(x) = \left(-4\pi + 16\pi^2 x^2\right) e^{-2\pi x^2}$. Ensuite, pour h_1, on multiplie par $-e^{\pi x^2}$ et, pour h_2, par $e^{\pi x^2}/2$. On en déduit h_1 et h_2 :

$$\boxed{h_0 : x \mapsto e^{-\pi x^2}, h_1 : x \mapsto 4\pi x e^{-\pi x^2} \qquad \text{et} \qquad h_2 : x \mapsto \left(-2\pi + 8\pi^2 x^2\right) e^{-\pi x^2}}$$

2 Soient donc $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ et dérivons h_n (qui est évidemment dérivable, toutes les fonctions de cet exercice sont $\mathscr{C}^\infty$) :

$${h_n}'(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \times 2\pi x e^{\pi x^2} \times f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n}{n!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n+1)}(x)$$

Dès lors

$$\begin{aligned} {h_n}'(x) - 2\pi x h_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n+1)}(x) \\ &= -(n+1) \times \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n+1)}(x) \end{aligned}$$

En conclusion

$$\boxed{{h_n}'(x) - 2\pi x h_n(x) = -(n+1)h_{n+1}(x)}$$

3.(a) Posons $g(x) = -4\pi x$ si bien que $\varphi = g \times f$. Appliquons la formule de Leibniz (f et g sont évidemment dérivables b fois car $\mathscr{C}^\infty$) :

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k} g^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)$$

Or, $g^{(k)}(x) = 0$ si $k \geqslant 2$ donc il ne reste que les termes d'indices $k = 0$ et $k = 1$ dans la somme :

$$\varphi^{(n)}(x) = \tbinom{n}{0} g(x) f^{(n)}(x) + \tbinom{n}{1} g'(x) f^{(n-1)}(x)$$

ce qui permet de conclure puisque $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $g'(x) = -4\pi$:

$$\boxed{\varphi^{(n)}(x) = -4\pi x f^{(n)}(x) - 4n\pi f^{(n-1)}(x)}$$

3.(b) Comme dans la question 2 (ici, les $2\pi x$ s'ajoutent et ne se compensent pas) :

$${h_n}'(x) + 2\pi x h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \times 4\pi x e^{\pi x^2} \times f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n}{n!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n+1)}(x)$$

Or, $f^{(n+1)} = (f')^{(n)}$ et $f'(x) = -4\pi x e^{-2\pi x^2} = \varphi(x)$ si bien que $f^{(n+1)}(x) = \varphi^{(n)}(x)$ et donc, d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} {h_n}'(x) + 2\pi x h_n(x) &= \frac{(-1)^n}{n!} \times 4\pi x e^{\pi x^2} \times f^{(n)}(x) + \frac{(-1)^n}{n!} \times e^{\pi x^2} \times (-4\pi x f^{(n)}(x) - 4n\pi f^{(n-1)}(x)) \\ &= -4n\pi \times \frac{(-1)^n}{n!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n-1)}(x) \\ &= 4\pi \times \times \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \times e^{\pi x^2} \times f^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{{h_n}'(x) + 2\pi x h_n(x) = 4\pi h_{n-1}(x)}$$

Problème - Problème de Dyer

Partie I. PRÉLIMINAIRES

$\boxed{2}$ C'est quasiment une question de cours. Si $f-g$ n'est pas de signe constant, il existe x_1 et x_2 appartenant à $[\,0\,;1\,]$ tels que $(f-g)(x_1)>0$ et $(f-g)(x_2)<0$. Les fonctions f et g sont continues donc $f-g$ l'est aussi. D'après le TVI, il existe $x_3 \in [\,x_1\,;x_2\,]$ tel que $(f-g)(x_3)=0$ c'est-à-dire tel que $f(x_3)=g(x_3)$ ce qui est absurde. D'où le résultat.

$$\boxed{f-g \text{ est de signe constant.}}$$

$\boxed{3}$ Là aussi, c'est quasiment une question de cours. La fonction $f-g$ est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $(f-g)(x_0)=\min f-g$. Puisque $f-g$ est strictement positive alors $(f-g)(x_0)>0$. Posons $\alpha=(f-g)(x_0)$. Alors, par définition d'un minimum, pour tout $u \in [\,0\,;1\,], (f-g)(u) \geqslant \alpha$ c'est-à-dire $f(u) \geqslant g(u)+\alpha$.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

$\boxed{4}$ Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. En appliquant ce qui précède à $u=f(x)$ (qui appartient à $[\,0\,;1\,]$) il vient

$$f(f(x)) \geqslant g(f(x))+\alpha$$

Or, f et g commutent donc $g(f(x))=f(g(x))$ si bien que $f(f(x)) \geqslant f(g(x))+\alpha$. En appliquant de nouveau la question précédente à $u=g(x)$, il vient $f(g(x)) \geqslant g(g(x))+\alpha$. En combinant les deux inégalités précédentes on obtient le résultat voulu.

$$\boxed{f \circ f(x)) \geqslant g \circ g(x)+2\alpha}$$

$\boxed{\textbf{5.(a)}}$ Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, on note H_n : « $f^n \circ g = g \circ f^n$ ».
- H_1 est vraie par hypothèse.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. On a

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g &= f^n \circ f \circ g \\ &= f^n \circ g \circ f && \text{(car } f \text{ et } g \text{ commutent)} \\ &= g \circ f^n \circ f && \text{(par H.R.)} \\ f^{n+1} \circ g &= g \circ f^{n+1} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1, f^n \text{ et } g \text{ commutent.}}$$

$\boxed{\textbf{5.(b)}}$ Raisonnons encore une fois par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, on note H_n : « $\forall x \in [\,0\,;1\,], f^n(x) \geqslant g^n(x)+n\alpha$ ».
- H_1 et H_2 sont vraies d'après les questions précédentes.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. D'après la question 2 avec $u=f^n(x)$:

$$f^{n+1}(x)=f(f^n(x)) \geqslant g(f^n(x))+\alpha$$

  Or, f^n et g commutent d'après la question précédente, donc $g(f^n(x))=f^n(g(x))$. Par hypothèse de récurrence, $f^n(g(x)) \geqslant g^n(g(x))+n\alpha = g^{n+1}(x)+n\alpha$ et donc

$$f^{n+1}(x) \geqslant g^{n+1}(\alpha)+n\alpha+\alpha = g^{n+1}(\alpha)+(n+1)\alpha$$

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\alpha}$$

6 f étant à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ et g étant à valeurs positives, d'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$1 \geqslant f^n(x) \geqslant g^n(x) + n\alpha \geqslant n\alpha$$

En particulier, $1 \geqslant n\alpha$ pour tout n ce qui est absurde car $n\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $\alpha > 0$ et donc $n\alpha$ finit par être strictement supérieur à 1. On pouvait également utiliser le théorème de minoration pour dire que $f^n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde pour la même raison.

$$\boxed{\text{Il existe donc } x \text{ tel que } f(x) = g(x).}$$

7 Il faut donc montrer que $g(x)$ est un point fixe de f, c'est-à-dire que $f(g(x)) = g(x)$. Or, f et g commutent donc $f(g(x)) = g(f(x))$ et $f(x) = x$ car x est un point fixe donc $g(f(x)) = g(x)$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Fix}(f) \text{ est stable par } g.}$$

8.(a) Fix(h) est non vide d'après la question 1 (h est continue) et majoré par 1 car inclus dans $[\,0\,;1\,]$ (le domaine de définition de h). On a une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc elle admet une borne supérieure. C'est également une partie non vide minorée (par 0) de $\mathbb{R}$ donc admet une borne inférieure.

$$\boxed{\text{Fix}(h) \text{ admet une borne supérieure et une borne inférieure.}}$$

8.(b) Pour tout n, x_n est un point fixe de h donc $h(x_n) = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{L}$. Or, h est continue donc $h(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(\text{L})$. Par unicité de la limite, $h(\text{L}) = \text{L}$ c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{L} \in \text{Fix}(h)}$$

8.(c) Notons α la borne supérieure de Fix(h) (qui existe d'après la question 8.(a)). Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de Fix(h) qui converge vers α donc, d'après la question précédente, $\alpha \in \text{Fix}(h)$ donc c'est un maximum. De même, la borne inférieure est un minimum.

$$\boxed{\text{Fix}(h) \text{ admet un minimum et un maximum.}}$$

Partie II. Cas monotone (et autres cas faciles)

1.(a) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ (attention, la notation g est déjà prise) est alors strictement décroissante (somme d'une fonction décroissante, f, et d'une fonction strictement décroissante, $x \mapsto -x$, et il suffit que l'une des deux soit strictement décroissante) et continue. De plus, $h(0) = f(0) \geqslant 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ (car f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$). D'après le corollaire du TVI, h s'annule une unique fois donc :

$$\boxed{f \text{ admet un unique point fixe.}}$$

1.(b) Soit α l'unique point fixe de f. D'après le lemme-clef, $g(\alpha)$ est un point fixe de f. Or, l'unique point fixe de f est α donc $g(\alpha) = \alpha$: α est un point fixe de g.

$$\boxed{f \text{ et } g \text{ ont un point fixe commun lorsque } f \text{ est décroissante.}}$$

2 Notons $\text{Fix}(f) = [\,a\,;b\,]$. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. D'après le lemme-clef, $g(x)$ est un point fixe de f donc $g(x) \in [\,a\,;b\,]$: en d'autres termes, g est une fonction continue de $[\,a\,;b\,]$ dans lui-même si bien que, comme d'habitude, on montre que g admet un point fixe dans cet intervalle, qui est donc un point fixe commun à f et g.

$$\boxed{\text{Si Fix}(f) \text{ est un intervalle, } f \text{ et } g \text{ ont un point fixe commun.}}$$

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$ Montrons par récurrence que, pour tout n, $f^{n+1}(x) \leqslant f^n(x)$. Le résultat est vrai au rang $n = 0$ par hypothèse. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que le résultat soit vrai au rang n. Par croissance de f, en composant cette inégalité par f (et donc l'inégalité ne change pas de sens), $f^{n+2}(x) \leqslant f^{n+1}(x)$ ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ f^{n+1} \leqslant f^n(x) : \text{la suite est donc décroissante.}}$$

On montre de même que la suite est croissante si $f(x) > x$. Puisque cette suite est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$, elle est monotone et bornée donc converge.

$$\boxed{\text{Cette suite converge.}}$$

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$ Par symétrie des rôles, $\text{Fix}(g)$ est stable par f d'après le lemme-clef donc, pour tout n, $f^n(x_0) \in \text{Fix}(g)$. Par hypothèse, cette suite converge vers une limite L donc, d'après la question 8.(b), L est un point fixe de g. Il suffit donc de prouver que c'est un point fixe de f. Or, pour tout n, $f\left(f^n(x_0)\right) = f^{n+1}(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \text{L}$. De plus, f étant continue, $f\left(f^n(x_0)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\text{L})$ donc, avec le même raisonnement que d'habitude (unicité de la limite), $\text{L} = f(\text{L})$ donc L est un point fixe de f.

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est croissante, } f \text{ et } g \text{ ont un point fixe commun.}}$$

Partie III. Le cas acyclique

$\boxed{\textbf{1}}$ Cette suite est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée : on conclut avec le théorème de Bolzano-Weierstraß.

$$\boxed{\text{Pour tout } x, \text{ la suite } (f^n(x)) \text{ admet une sous-suite convergente.}}$$

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$ Découle du principe des tiroirs : il y a une infinité d'entiers et la suite prend uniquement un nombre fini de valeurs donc une infinité de ces termes sont égaux, et donc en particulier deux.

$$\boxed{\text{Il existe } p < q \text{ tels que } f^p(x_0) = f^q(x_0).}$$

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$ D'après le lemme-clef, $\text{Fix}(g)$ est stable par f donc $f^p(x_0)$ est un point fixe de g. Or, d'après la question précédente, $f^{q-p}(f^p(x_0)) = f^q(x_0) = f^p(x_0)$ c'est-à-dire que $f^p(x_0)$ est un point périodique de f donc un point fixe de f (par hypothèse sur f : les points périodiques sont exactement les points fixes).

$$\boxed{f^p(x_0) \text{ est un point fixe commun à } f \text{ et } g.}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Par hypothèse, il existe une suite extraite de $(f^n(\alpha))$, qu'on note $(f^{n_p}(\alpha))_p$ qui converge vers α. Dès lors, par continuité de f^k :

$$f^k\left(f^{n_p}(\alpha)\right) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f^k(\alpha)$$

On en déduit que $f^k(\alpha)$ est limite de la suite $\left(f^{k+n_p}(\alpha)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ qui est extraite de $(f^n(\alpha))$ donc que $f^k(\alpha)$ est valeur d'adhérence de cette suite : par hypothèse sur α (c'est la plus petite des valeurs d'adhérence de cette suite), on a le résultat voulu.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, f^k(\alpha) \geqslant \alpha}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ On suppose donc que α est un point périodique de f, si bien que c'est un point fixe de f. Or, il existe une sous-suite de $(f^n(x_0))$ qui converge vers α. D'après le lemme clef, cette suite est à valeurs dans $\text{Fix}(g)$ donc sa suite extraite également, donc sa limite aussi d'après la question 8.(b) de la partie I, c'est-à-dire que α est un point fixe de g.

$$\boxed{\alpha \text{ est un point fixe commun à } f \text{ et } g.}$$

$\boxed{\textbf{5.(a)}}$ Par hypothèse, il existe une suite extraite de $(f^n(\alpha))$ qui converge vers α, et celle-ci ne prend que des valeurs strictement plus grandes que α, donc il existe p tel que $\alpha < f^p(\alpha) \leqslant \alpha + 1/n$. Si tous les termes postérieurs à p sont supérieurs ou égaux à $f^p(\alpha)$, alors la limite de cette suite extraite sera aussi supérieurs ou égale à $f^p(\alpha)$ (l'inégalité large passe à la limite), ce qui est absurde car cette limite vaut α. On pouvait aussi dire qu'il existe une infinité de termes de la suite dans $]\,\alpha\,; f^p(\alpha)\,[$ (toujours car une suite extraite converge vers α) donc au moins un terme postérieur à $f^p(\alpha)$. Il existe donc un terme postérieur à $f^p(\alpha)$, que l'on note $f^{p+q}(\alpha)$, tel que $\alpha < f^{p+q}(\alpha) < f^p(\alpha)$.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

5.(b) f étant continue, f^q est aussi continue car composée de fonctions continues, donc φ est continue par somme. De plus, d'après la question précédente, $\varphi(f^p(\alpha)) = f^{p+q}(\alpha) - f^p(\alpha) < 0$ et $\varphi(\alpha) = f^q(\alpha) - \alpha > 0$ par hypothèse. D'après le TVI, il existe c_n sur cet intervalle tel que $\varphi(c_n) = 0$ c'est-à-dire $f^p(c_n) = c_n$: c_n est donc un point périodique.

$$\boxed{\text{Il existe un point périodique dans } [\,\alpha\,;f^p(\alpha)\,].}$$

5.(c) Découle du théorème d'encadrement puisque, pour tout n, $\alpha \leqslant c_n \leqslant f^p(\alpha) \leqslant \alpha + 1/n$.

$$\boxed{c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha}$$

6 D'après la question précédente, pour tout n, c_n est un point périodique de f donc un point fixe de f donc la limite de (c_n) aussi (toujours question 8.(b), partie I) donc α est un point fixe de f. Or, de même que dans la question 4, α est limite d'une sous-suite de $(f^n(x_0))$ donc d'une suite d'éléments de $\mathrm{Fix}(g)$ donc α est un point fixe de g.

$$\boxed{\alpha \text{ est un point fixe commun à } f \text{ et } g.}$$

Partie IV. Théorème de Cano

1.(a) Soit $\varepsilon > 0$. On cherche un $\eta > 0$ (indépendant de n) tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;1\,], |x| \leqslant \eta \Rightarrow |x^n| \leqslant \varepsilon$$

Puisque $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant, le η initial (pour $n = 0$) conviendra aussi pour les suivants. Plus précisément, prenons $\eta = \varepsilon$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et soit $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que $|x| \leqslant \eta$. Alors $|x|^n \leqslant |x| \leqslant \eta = \varepsilon$. On a donc bien la majoration voulue.

$$\boxed{\text{P est équicontinu en 0.}}$$

1.(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction ln étant strictement croissante,

$$(1-\eta)^n < 1/2 \iff n\ln(1-\eta) < -\ln(2) \iff n > -\ln(2)/\ln(1-\eta)$$

(car $\ln(1-\eta) < 0$). Dès lors :

$$\boxed{n_0 = \left\lfloor -\frac{\ln(2)}{\ln(1-\eta)} \right\rfloor + 1 \text{ convient.}}$$

Pour montrer que P n'est pas équicontinu en 1, commençons par donner la négation de « P est équicontinu en 1 » :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [\,0\,;1\,], |x-1| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |x^n - 1| > \varepsilon$$

Or, on vient de prouver qu'il existe $\varepsilon = 1/2 > 0$ tel que, pour tout $\eta > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $x = 1 - \eta$ tel que $|x-1| \leqslant \eta$ et $|x^{n_0} - 1| > 1/2$: la négation est vérifiée, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{P n'est pas équicontinue en 1.}}$$

2 $\mathrm{Fix}(f)$ n'étant pas un intervalle, « il y a un trou », c'est-à-dire (caractérisation des intervalles, cf. chapitre 12) qu'il existe deux points fixes $x_1 < x_2$ tels que $[\,x_1\,;x_2\,]$ ne soit pas inclus dans $\mathrm{Fix}(f)$, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [\,x_1\,;x_2\,]$ tels que $f(c) \neq c$. En raisonnant comme dans la question 8.(c) de la partie III, on en déduit que l'ensemble des points fixes de f inférieurs à c admettent un maximum (strictement inférieur à c car c n'est pas un point fixe) qu'on note a, et l'ensemble des points fixes supérieurs à c admettent un minimum b. Enfin, φ ne s'annule pas sur $]\,a\,;b\,[$ (car il n'y a aucun point fixe sur cet intervalle) donc est de signe constant (déjà fait).

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

3 Par équicontinuité de P en a, en prenant $\varepsilon = (b-a)/2$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;1\,], |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f^n(x) - f^n(a)| \leqslant (b-a)/2$$

a étant un point fixe de f, c'est un point fixe de f^n pour tout n donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [\,0\,;1\,], |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f^n(x) - a| \leqslant (b-a)/2$$

On peut intervertir deux quantificateurs $\forall$ donc :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \forall n \in \mathbb{N}, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f^n(x)-a| \leqslant (b-a)/2$$

En particulier, il existe un réel x_0 qui vérifie les hypothèses de l'énoncé.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

Dès lors, pour tout n, $f^n(x_0)-a \leqslant (b-a)/2$ donc $f^n(x_0) \leqslant a+(b-a)/2 = (a+b)/2 < b$ donc cette suite ne peut pas tendre vers b.

$$\boxed{\text{Cette suite ne converge pas vers } b.}$$

> Attention, cela ne veut pas dire qu'elle converge vers autre chose : elle peut très bien ne pas admettre de limite !

4 Soit $x \in\,]\,a\,;b\,[$. Par hypothèse faite dans la question 2, $f(x)-x>0$ donc $f(x)>x>a$ et on a supposé que $f(x)<b$ donc $f(x) \in\,]\,a\,;b\,[$:

$$\boxed{]\,a\,;b\,[\text{ est stable par } f.}$$

Il en découle, par une récurrence immédiate, que $f^n(x_0) \in\,]\,a\,;b\,[$ pour tout n. Or, $f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) > f^n(x_0)$ (toujours l'hypothèse faite dans la question 2, car $f^n(x_0) \in\,]\,a\,;b\,[$). En d'autres termes :

$$\boxed{\text{La suite } (f^n(x_0)) \text{ est croissante.}}$$

Elle est également à valeurs dans $]\,a\,;b\,[$ donc est majorée par b donc elle converge vers une limite L. Or, si on la note (u_n), on a $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue donc (cf. cours) sa limite est un point fixe. Or, elle est à valeurs dans $]\,a\,;b\,[$ et l'inégalité large passe à la limite donc $\mathrm{L} \in [\,a\,;b\,]$ donc $\mathrm{L} = a$ ou b puisqu'il n'y a aucun autre point fixe sur cet intervalle. La suite étant strictement croissante, $\mathrm{L} > u_n > a$ donc $\mathrm{L} = b$ ce qui contredit la question 3.

$$\boxed{\text{Absurde : il existe } x \in\,]\,a\,;b\,[\text{ tel que } f(x) \geqslant b.}$$

5.(a) Découle du TVI : $f(a) = a < b$ et il existe $x \in\,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(x) \geqslant b$, et f est évidemment continue.

$$\boxed{\text{Il existe } z_1 \in\,]\,a\,;b\,[\text{ tel que } f(z_1) = b.}$$

5.(b) Idem, découle du TVI car $f(a) = a < z_1$ et $f(z_1) = b > z_1$.

$$\boxed{\text{Il existe } z_2 \in\,]\,a\,;z_1\,[\text{ tel que } f(z_2) = z_1.}$$

6 On a une suite strictement décroissante minorée par a donc

$$\boxed{\text{La suite } (z_k) \text{ converge vers une limite L.}}$$

7 Attention, ici , on n'a pas une relation de récurrence de la forme $z_{n+1} = f(z_n)$ mais le contraire ! On ne peut donc pas appliquer le résultat du cours, mais la démonstration est analogue. Pour tout n, $f(z_{n+1}) = z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{L}$ et $f(z_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\mathrm{L})$ car f est continue donc, par unicité de la limite, $f(\mathrm{L}) = \mathrm{L}$:

$$\boxed{\mathrm{L} \text{ est un point fixe de } f.}$$

Or, l'inégalité large passant à la limite, $a \leqslant \mathrm{L}$ et $\mathrm{L} < z_1 < b$ car la suite est strictement décroissante, donc le seul point fixe possible est a.

$$\boxed{\mathrm{L} = a}$$

8 Découle de l'équicontinuité de P en a en prenant $\varepsilon = (b-a)/2$ et du fait que a est un point fixe de f donc $f^n(a) = a$ pour tout n.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

9 (z_k) converge vers a donc il existe k tel que $|z_k - a| \leqslant \eta$ si bien que (le résultat précédent étant valable pour tout n, il est valable pour k) $|f^k(z_k) - a| \leqslant (b-a)/2$. Or, $f^k(z_k) = b$ donc $b-a \leqslant (b-a)/$ ce qui est absurde (car $b-a>0$).

$$\boxed{\text{Ouf !}}$$