Chapitre 28

Espaces vectoriels

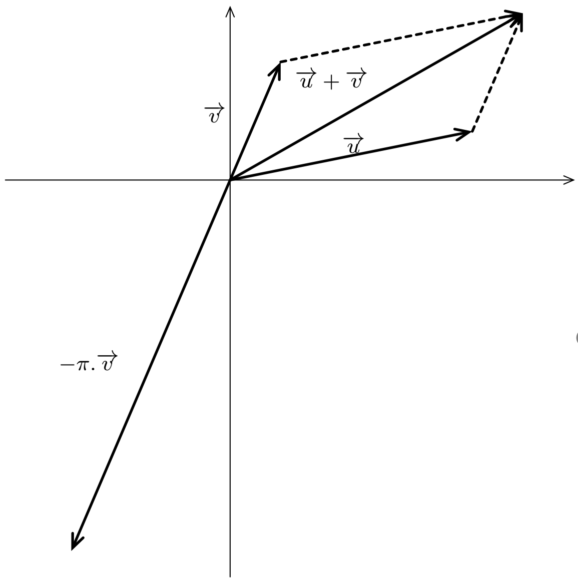
Dans ce chapitre, conformément au programme, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais tous les résultats seront encore valables sur un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

I Structure d'espace vectoriel

I.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de vecteur. On va pour cela s'intéresser aux propriétés vérifiées par les vecteurs, et on appellera ensuite vecteur tout élément vérifiant ces propriétés. On verra que cela concerne des types d'objets a priori très différents, cela permettra de montrer des résultats généraux qu'on pourra appliquer aussi bien à des vecteurs classiques qu'à des polynômes, des fonctions, des suites... Faisons un panorama de tout ce qu'on sait faire avec des vecteurs du plan ou de l'espace :

- On sait sommer des vecteurs, et la somme de vecteurs est commutative et associative.
- On dispose d'un vecteur nul $\overrightarrow{0}$ qui est l'élément neutre de l'addition de vecteurs.
- Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ admet un vecteur opposé, c'est-à-dire un vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.
- On peut mutiplier les vecteurs par des réels c'est-à-dire écrire écrire $\lambda.\overrightarrow{u}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, et on a les propriétés suivantes : pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$,
  1. $\lambda.(\mu.\overrightarrow{u}) = (\lambda \times \mu).\overrightarrow{u}$.
  2. $(\lambda + \mu).\overrightarrow{u} = \lambda.\overrightarrow{u} + \mu.\overrightarrow{u}$.
  3. $1.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$.
  4. $\lambda.(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda.\overrightarrow{u} + \lambda.\overrightarrow{v}$.



C'est là la grande nouveauté par rapport au chapitre 18 : on a une opération qui « mélange » vecteurs et réels : ce n'est pas une loi de composition interne car on l'applique à deux objets de types différents.

Comme dit plus haut, on va en fait adopter le point de vue inverse et appeler vecteur tout objet qui vérifie ces propriétés, et en parler en tant que vecteurs nous permettra de visualiser géométriquement tous ces objets, qui seront très variés (polynômes, matrices etc.). Il sera très important de savoir se représenter géométriquement les espaces vectoriels, même les plus « abstraits » (grrrrrr) comme des mondes géométriques semblables au plan ou à l'espace.

I.2 Loi externe

On se donne dans ce paragraphe un ensemble non vide E.

Définition. Une loi externe de $\mathbb{K}$ sur E est une application φ de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Remarque : En clair, une loi externe prend un élément de $\mathbb{K}$ et un élément de E et renvoie un élément de E.

Notation : De même qu'une LCI dans le chapitre 18, une loi externe sera plutôt notée de façon opérationnelle plutôt que fonctionnelle. Dans ce chapitre (voir le paragraphe suivant), nous noterons en général les lois externes avec un point $(\lambda.x)$ ou avec une absence de symbole (λx).

Exemples :

- La multiplication par un réel pour les vecteurs du plan ou de l'espace.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $\mathbb{K}^n$ une loi externe . par :

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda.u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n)$$

  En clair, pour cette loi externe, on multiplie toutes les coordonnées par λ.

Ci-contre, les u_i et λ sont des éléments de $\mathbb{K}$: les λu_i sont donc simplement des multiplications entre éléments de $\mathbb{K}$.

- Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On définit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une loi externe . par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda.M = (\lambda M_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

  En clair, pour cette loi externe, on multiplie tous les coefficients par λ.

- On définit sur $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ une loi externe . par :

$$\forall f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases}$$

  En clair, pour cette loi externe, on multiplie toutes les images par λ.

Dans les deux exemples ci-contre, on prend $\lambda \in \mathbb{R}$ et non pas dans $\mathbb{K}$ car si on prend un λ complexe, la loi externe n'est pas forcément à valeurs dans le même ensemble E.

- Plus généralement, si D est une partie de $\mathbb{R}$, on définit sur $\mathbb{R}^D$ une loi externe . par :

$$\forall f \in \mathbb{R}^D, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda f : \begin{cases} D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases}$$

- Encore plus généralement, si X est un ensemble quelconque (pas forcément une partie de $\mathbb{R}$), on définit sur $\mathbb{K}^X$ une loi externe . par :

$$\forall f \in \mathbb{K}^X, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases}$$

- On peut généraliser au cas où E est lui-même muni d'une loi externe . : on définit une loi externe sur E^X une loi externe consistant à appliquer la loi externe sur E à toutes les images :

$$\forall f \in E^X, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda.f : \begin{cases} X \longrightarrow E \\ x \longmapsto \lambda.f(x) \end{cases}$$

Dans les exemples ci-contre, on multiplie les images par λ : seules comptent les images, on ne touche pas aux antécédents. C'est la raison pour laquelle, dans le paragraphe I.4.b, seul comptera le fait que l'ensemble d'arrivée soit un espace vectoriel.

- Cas particulier : on définit sur $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ une loi externe . par :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda.(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

  c'est-à-dire que λu est la suite de terme général λu_n : on multiplie tous les termes de la suite par λ.

- Cas particulier du cas particulier : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite presque nulle, alors $\lambda.(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est encore une suite presque nulle. Cela permet de définir une loi externe sur $\mathbb{K}[X]$ (d'ailleurs, on l'avait fait : cf. chapitre 19). On aurait aussi pu passer par la notation classique, i.e. :

$$\forall P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}^\mathbb{N}, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \lambda.P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

I.3 Structure d'espace vectoriel

Définition. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est un ensemble E muni d'une loi interne $+$ et d'une loi externe $.$ de $\mathbb{K}$ sur E vérifiant les propriétés suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien.
- La loi interne $+$ et la loi externe $.$ vérifient les quatre propriétés suivantes :
  - ⋆ $(C_1) : \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\times\mu).x$.
  - ⋆ $(C_2) : \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall x\in E, (\lambda+\mu).x = \lambda.x+\mu.x$.
  - ⋆ $(C_3) : \forall x\in E, 1.x = x$.
  - ⋆ $(C_4) : \forall \lambda\in K, \forall(x,y)\in E^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x+\lambda.y$.

Les éléments de E sont appelés vecteurs, les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, la loi interne $+$ est appelée addition, et la loi externe $.$ est appelée multiplication (ou produit) par un scalaire.

(C_1) est appelée propriété d'associativité externe ou pseudo-associativité, (C_2) est appelée distributivité de $.$ sur la loi interne, (C_3) est appelée compatibilité du neutre multiplicatif de $\mathbb{K}$, et (C_4) distributivité de $.$ sur la somme de $\mathbb{K}$.

Remarques :

- Bon... cette définition fait un peu peur, mais elle est nécessaire pour pouvoir travailler « normalement ». Voir le paragraphe suivant : les quatre propriétés sont nécessaires pour établir des propriétés intuitives qu'on pourra utiliser librement dans la suite. Bref, on en reparle.
- Encore une fois, cette définition fait un peu peur, mais elle est en fait totalement naturelle tant cette structure est présente PARTOUT en mathématiques : nous allons voir qu'elle est présente autant chez les n-uplets que chez des matrices, en passant par les suites, les fonctions, les polynômes etc. Comme dit dans l'introduction, parler de vecteurs pour tous ces objets nous permettra de parfois mieux les visualiser géométriquement, ce qui nous permettra de deviner certains résultats, et cela nous permettra également d'englober une multitude d'objets quand nous prouverons un résultat pour des vecteurs.
- Dorénavant, un vecteur n'est plus « une flèche » ou « un objet (lequel, on ne sait pas) défini par une norme, un sens et une direction » (bonjour la rigueur !) mais un élément d'un espace vectoriel, dont la définition est tout à fait rigoureuse !

« Un vecteur, c'est un truc qui appartient à un espace vectoriel ». On pourrait munir l'ensemble {chou; banane; carotte} d'une structure d'espace vectoriel, ce qui ferait d'un chou, d'une banane et d'une carotte, des vecteurs !

- Un scalaire est un élément du corps sur lequel est défini l'espace vectoriel, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{K}$. En général, il n'y a aucune ambiguïté, il suffit de garder en tête que le produit d'un vecteur et d'un scalaire doit être un élément de E. Par exemple, si on est sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les scalaires doivent être des réels sinon on peut sortir de l'ensemble, il est donc sous-entendu dans cet exemple qu'on parle d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (cf. paragraphe I.4.b.).
- Cependant, parfois, « qui peut le plus peut le moins » : si on est par exemple sur $\mathbb{C}^n$, on pourra parfois prendre les scalaires réels, ce qui n'est pas gênant car on reste dans l'ensemble. Nous en reparlerons dans le paragraphe I.4.b.
- De la même façon qu'un groupe est un couple $(G,*)$ avec G un ensemble et $*$ une loi interne (vérifiant évidemment certaines propriétés), un espace vectoriel est un triplet $(E,+,.)$ avec E un ensemble, $+$ une loi interne et $.$ une loi externe (vérifiant évidemment certaines propriétés). C'est même encore plus simple que pour un groupe car la loi $+$ étant commutative, elle sera toujours notée additivement, et la loi $.$ sera toujours notée de la même façon : on pourra donc parler plus simplement d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (ou d'un espace vectoriel E si le corps $\mathbb{K}$ est sous-entendu) plutôt que de $(E,+,.)$.
- ⚠ La multiplication par un scalaire est notée par un point $(\lambda.x)$ ou par une absence de symbole (λf) mais pas par une multiplication $(\lambda\times x)$, notation qu'on réserve plutôt à une loi interne notée multiplicativement (par exemple le produit de deux matrices carrées de taille n). D'ailleurs, tant qu'on en parle : IL N'Y A PAS DE NOTION DE PRODUIT DE VECTEURS ! Par exemple, le produit de deux matrices de taille

2×3 n'est pas défini. C'est pour cela qu'on parle de produit (ou multiplication) par un scalaire et pas de produit tout court : il ne faudra donc pas oublier de dire « par un scalaire ».

- De plus, on multiplie par un scalaire, on ne divise pas par un scalaire. On notera donc $\frac{1}{2}.x$ plutôt que $\frac{x}{2}$.
- Un espace vectoriel étant en particulier un groupe, il est non vide car contient un élément neutre. Plus précisément :

Dans certains cas, il y a un produit (par exemple sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$) : si on a à la fois une structure d'anneau, une structure d'espace vectoriel et si « les deux se comportent bien l'une par rapport à l'autre », on dit qu'on a une structure d'algèbre, mais c'est HP.

Définition. L'élément neutre de $(E,+)$ est noté 0_E ou 0 si aucune ambiguïté n'est possible, et est appelé le vecteur nul.

Nous allons souvent jouer au jeu du « de quel zéro parle-t-on ? ».

I.4 Premiers exemples et espaces vectoriels de référence

I.4.a Rappels sur quelques lois internes

Tout cela a été démontré aux chapitres 18 et 21.

- Si $n\geqslant 1$, on munit $\mathbb{K}^n$ d'une loi interne $+$ définie par :

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n,\forall y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{K}^n, x+y=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

En d'autres termes, on fait la somme coordonnée par coordonnée. Cette loi interne fait de $(\mathbb{K}^n,+)$ un groupe abélien.

- Si n et p sont supérieurs ou égaux à 1, on munit $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ d'une loi interne définie par :

$$\forall (A,B)\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2, A+B=(A_{i,j}+B_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$$

En d'autres termes, on fait la somme coefficient par coefficient. Cette loi interne fait de $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+)$ un groupe abélien.

- Si X un ensemble, on munit $\mathbb{K}^X$ de la loi interne définie par :

$$\forall (f,g)\in\left(\mathbb{K}^X\right)^2,\qquad f+g\colon\begin{cases}X\longrightarrow \mathbb{K}\\ x\longmapsto f(x)+g(x)\end{cases}$$

Cette loi interne fait de $(\mathbb{K}^X,+)$ un groupe abélien.

- En particulier $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}},+)$ muni de la somme définie par

$$\forall (u,v)\in\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)^2,\qquad u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

c'est-à-dire qu'on somme terme à terme, est un groupe abélien.

On généralise aisément à E^X où $(E,+)$ est un groupe abélien, donc en particulier lorsque E est un espace vectoriel. On a par exemple prouvé que si A est un anneau alors $(A^X,+,\times)$ est aussi un anneau.

I.4.b Premiers exemples et espaces vectoriels de référence

Proposition (Espaces vectoriels Hall of Fame). Pour les lois internes rappelées au paragraphe précédent et les lois externes définies au paragraphe I.2 :

- pour tout $n\geqslant 1$, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- pour tous n et p supérieurs ou égaux à 1, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}=\mathscr{F}(\mathbb{K},\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Plus généralement, si X est un ensemble quelconque, $\mathbb{K}^X=\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Les lois internes sont toutes notées $+$ et les lois externes .. On aurait pu écrire (mais on ne l'a pas fait pour des raisons de simplicité) que $(\mathbb{K}^n,+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, etc.

- En particulier, si D est une partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}^D$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- En particulier, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- En particulier, si $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ est un espace probabilisé fini, $\mathbb{K}^\Omega$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Plus généralement, si E est un espace vectoriel et X un ensemble quelconque, alors $E^X = \mathscr{F}(X, E)$ est un espace vectoriel : l'ensemble des fonctions d'un ensemble quelconque dans un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Par exemple, $\mathbb{R}^{[0\,;1]} = \mathscr{F}([0\,;1], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. On le prouve pour $\mathbb{K}^X$ et E^X (avec X un ensemble quelconque et E un espace vectoriel), les autres cas étant tout à fait analogues. On sait déjà que $(\mathbb{K}^X, +)$ (avec $+$ la loi interne rappelée dans le paragraphe précédent) est un groupe abélien. Il suffit donc de prouver que les quatre conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont vérifiées. Soient donc f et g dans $\mathbb{K}^X$ et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. D'une part,

- La fonction μf (on omettra souvent le point pour la loi externe) est la fonction

$$\mu f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \mu f(x) \end{cases}$$

donc la fonction $\lambda(\mu f)$ est la fonction

$$\lambda(\mu f) : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda(\mu f(x)) \end{cases}$$

Or, le produit est associatif sur $\mathbb{K}$ donc, pour tout x, $\lambda(\mu f(x)) = (\lambda \times \mu) f(x)$, c'est-à-dire que $\lambda(\mu f)$ est la fonction

$$\lambda(\mu f) : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (\lambda \times \mu) f(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\lambda(\mu f) = (\lambda \times \mu) f$: (C_1) est vérifiée.

- La fonction $\lambda f + \mu f$ est la fonction

$$\lambda f + \mu f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda f(x) + \mu f(x) \end{cases}$$

Or, sur $\mathbb{K}$, le produit est distributif par rapport à la somme donc, pour tout x, $\lambda f(x) + \mu f(x) = (\lambda + \mu) f(x)$, c'est-à-dire que $\lambda f + \mu f$ est la fonction

$$\lambda f + \mu f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto (\lambda + \mu) f(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\lambda f + \mu f = (\lambda + \mu) f$: (C_2) est vérifiée.

- D'après ce qui précède, $1.f$ est la fonction

$$1.f : \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto 1 \times f(x) = f(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $1.f = f$: (C_3) est vraie.

- Enfin, $\lambda f + \lambda g$ est la fonction

$$\lambda f + \lambda g \colon \begin{cases} X \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda f(x) + \lambda g(x) \end{cases}$$

Or, sur $\mathbb{K}$, le produit est distributif par rapport à la somme donc, pour tout x, $\lambda f(x) + \lambda g(x) = \lambda(f(x) + g(x)) = \lambda(f+g)(x)$, c'est-à-dire que $\lambda f + \lambda g$ est la fonction

$$\lambda f + \lambda g \colon \begin{cases} X \longrightarrow & K \\ x \longmapsto \lambda(f+g)(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\lambda f + \lambda g = \lambda.(f+g)$: (C_4) est vérifiée.

En conclusion, $(\mathbb{K}^X, +, .)$ est bien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Intéressons-nous à présent à E^X. On va voir que seul compte le fait que l'ensemble d'arrivée soit un espace vectoriel, les propriétés des lois externe et interne sur E^X héritant des propriétés de celles sur E. Soient donc f et g dans E^X et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$. D'une part,

- La fonction $\mu.f$ est la fonction

$$\mu.f \colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto \mu.f(x) \end{cases}$$

donc la fonction $\lambda.(\mu.f)$ est la fonction

$$\lambda.(\mu.f) \colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto \lambda.(\mu.f(x)) \end{cases}$$

Or, E est un espace vectoriel donc les lois interne et externe de E vérifient (C_1) : par conséquent, pour tout x, $\lambda.(\mu.f(x)) = (\lambda \times \mu).f(x)$, c'est-à-dire que $\lambda.(\mu.f)$ est la fonction

$$\lambda.(\mu.f) \colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto (\lambda \times \mu).f(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\lambda.(\mu.f) = (\lambda \times \mu).f$: (C_1) est vérifiée.

- La fonction $\lambda.f + \mu.f$ est la fonction

$$\lambda.f + \mu.f \colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto \lambda.f(x) + \mu.f(x) \end{cases}$$

Or, E est un espace vectoriel donc vérifie (C_2) : pour tout x, $\lambda.f(x) + \mu.f(x) = (\lambda + \mu).f(x)$, c'est-à-dire que $\lambda.f + \mu.f$ est la fonction

$$\lambda.f + \mu.f \colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto (\lambda + \mu).f(x) \end{cases} \qquad \square$$

c'est-à-dire que $\lambda.f + \mu.f = (\lambda + \mu).f$: (C_2) est vérifiée.

- De même pour (C_3) et (C_4), tout vient du fait que ces conditions sont vérifiées sur E.

Remarques :

- En particulier (pour $n = 1$), $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Précisons que, dans $\mathbb{K}^n$, $0_E = 0_n$ représente le n-uplet nul ; dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $0_E = 0_{n,p}$ représente la matrice nulle (de taille $n \times p$) ; dans $\mathbb{K}[X]$, 0_E représente le polynôme nul ; dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ ou plus généralement dans tout ensemble de fonctions, 0_E représente la fonction nulle (d'ensemble de départ et d'ensemble d'arrivée ce qu'il faut) ; enfin, dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, 0_E représente la suite nulle.
- Rappelons que lorsqu'on parle de $\mathbb{K}$-espace vectoriel, cela signifie que les scalaires λ appartiennent à $\mathbb{K}$. On peut donc munir $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel : en effet, $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe abélien et on définit une loi externe . par :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad \lambda.z = \lambda \times z$$

c'est-à-dire que la loi externe est tout simplement le produit de λ par z (on a converti le produit, une loi de composition interne, en loi externe) : on a bien une loi externe de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{C}$ car le produit d'un réel et d'un élément de $\mathbb{C}$ est encore un élément de $\mathbb{C}$, et on prouve aisément que les quatre conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont vérifiées, ce qui munit $\mathbb{C}$ d'une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Cependant, $\mathbb{R}$ n'est pas muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel : si on multiplie les éléments de $\mathbb{R}$ par des éléments de $\mathbb{C}$, on peut sortir de $\mathbb{R}$, alors qu'une loi externe de $\mathbb{K}$ sur E est une application à valeurs dans E (quand on multiplie par un scalaire, on doit rester dans l'ensemble).

Nous dirons au chapitre 30, ce qui est intuitif, que $\mathbb{C}$-est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

- On peut généraliser l'exemple précédent (en admettant, ce qui est évident, que les définitions précédentes sont valables avec $\mathbb{K}$ un corps quelconque) : si $\mathbb{K}$ est un sous-corps d'un corps $\mathbb{L}$, alors on peut munir $\mathbb{L}$ d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Par exemple, on peut munir $\mathbb{R}$ d'une structure de $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
- Tous les espaces vectoriels de la proposition doivent être connus sur le bout des doigts (nous les avons d'ailleurs très souvent rencontrés) car nous allons souvent prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel plus gros (de la même façon qu'on prouvait qu'un ensemble était un groupe en prouvant que c'était un sous-groupe d'un groupe plus gros). Pour cela, il est indispensable d'avoir « un stock » d'espaces vectoriels de référence, dont on pourra dire que ce sont des espaces vectoriels sans avoir à le justifier.

I.4.c Espace vectoriel produit

Proposition/Définition. Soient $n \geqslant 1$. Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Alors $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quand on le munit des lois interne et externe suivantes :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \\ \lambda.x & = & (\lambda.x_1, \dots, \lambda.x_n) \end{array} \right.$$

Le vecteur nul 0_E étant alors égal à $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Remarque : En d'autres termes, on somme coordonnée par coordonnée et on multiplie toutes les coordonnées par λ. Il est bien évident que les lois internes, qu'on a toutes notées $+$, et les lois externes, qu'on a toutes notées ., ne sont pas les mêmes : la somme dans $x_1 + y_1$ est la loi interne sur E_1 tandis que la somme dans $x_2 + y_2$ est la somme sur E_2, mais cela serait trop fastidieux de dfférencier les lois et d'écrire

$$x + y = (x_1 +_1 y_1, \dots, x_n +_n y_n)$$

et idem pour les lois externes. En conclusion, pour faire simple : on travaille coordonnée par coordonnée, et les propriétés des E_i vont retomber sur E.

Puisque $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on retrouve le fait que, pour tout n, $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

DÉMONSTRATION. Pour tout i, $(E_i,+)$ est un groupe abélien donc l'ensemble produit $(E_1 \times \cdots \times E_n,+)$ est un groupe (appelé groupe produit) abélien (cf. chapitre 18). On prouve comme ci-dessus que les quatre propriétés $(C_1),(C_2),(C_3)$ et (C_4) sont vérifiées, puisqu'elles le sont sur chaque E_i.

I.5 Premières propriétés

On se donne dans la suite du cours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Le but de cette partie est de démontrer des propriétés qui nous permettront de travailler de façon intuitive, sans nous poser de question. Certaines propriétés sont héritées de la structure de groupe abélien :

Proposition. Tout élément de E est régulier, c'est-à-dire que :

$$\forall (x,y,z) \in E^3, x+y = x+z \Rightarrow y = z$$

Remarque : Ce résultat est toujours valable si $x+y = z+x$ puisque le groupe est abélien. En d'autres termes, on peut simplifier comme sur $\mathbb{R}$.

Proposition. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $x \in E$.

1. $0.x = 0_E$.
2. $\alpha.0_E = 0_E$.
3. $\alpha.x = 0 \iff \alpha = 0$ ou $x = 0_E$.

Remarque : Comme on l'a dit plus haut, on écrira parfois 0 à la place de 0_E pour désigner le vecteur nul. On écrira par exemple : $0.x = 0$ ou $\alpha.x = 0 \iff \alpha = 0$ ou $x = 0$. Il n'y a aucune ambiguïté dans ce qui précède si on réfléchit tant soit peu à la nature des objets qu'on manipule : en effet, quand on écrit une quantité du type $\lambda.x$, la quantité λ (ce qu'il y a avant le point) est un scalaire et x (ce qu'il y a après le point) est un vecteur, et le résultat final est un vecteur. Par conséquent, dans l'égalité $0.x = 0$, le premier zéro est le zéro réel, et le deuxième zéro est le vecteur nul, tandis que dans l'équivalence $\alpha.x = 0 \iff \alpha = 0$ ou $x = 0$, le premier zéro est le vecteur nul, le deuxième zéro est le zéro réel, et le dernier zéro est le vecteur nul.

DÉMONSTRATION.
1. $0.x = (0+0).x$ donc, d'après la propriété (C_2), $0.x = 0.x + 0.x$. Tout élément est régulier donc $0.x = 0_E$.
2. D'après la propriété (C_4), $\alpha.0_E = \alpha.(0_E + 0_E) = \alpha.0_E + \alpha.0_E$.
3. Si $x = 0_E$ ou $\alpha = 0$, alors $\alpha.x = 0_E$ d'après ce qui précède. Réciproquement, supposons que $\alpha.x = 0_E$: supposons $\alpha \neq 0$ et prouvons que $x = 0$. α étant non nul, $(1/\alpha).(\alpha.x) = (1/\alpha).0_E = 0_E$. Or, d'après les propriétés (C_1) et (C_3) :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\alpha}\right).(\alpha.x) &= \left(\frac{1}{\alpha} \times \alpha\right).x \\ &= 1.x \\ &= x \end{aligned}$$

si bien que $x = 0_E$. □

Rappelons que pour montrer A ou B, il suffit de prouver que si A n'est pas réalisé, alors B l'est.

Remarque : Puisque $(E,+)$ est un groupe abélien, tout élément x de E est symétrisable/admet un opposé, qu'on note $-x$. Cette notation pourrait prêter à confusion puisqu'on dispose également de l'élément $(-1).x$, le produit (externe) de x par -1, mais en fait tout va bien puisqu'ils sont égaux :

Proposition. Soit $x \in E$. Alors :

$$\underbrace{-x}_{\text{opposé de } x} = \underbrace{(-1).x}_{\text{produit de } x \text{ par } -1}$$

Démonstration. Rappelons que, par définition, l'opposé de x est le seul élément y de E tel que $x + y = 0_E$ (le vecteur nul i.e. l'élément neutre de la somme). Par conséquent, il suffit de prouver que $(-1).x$ remplit cette condition. Or, en utilisant (C_3) et (C_4), il vient :

$$\begin{aligned} x + (-1).x &= 1.x + (-1).x \\ &= (1 + (-1)).x \\ &= 0.x \\ &= 0_E \end{aligned}$$

□

Remarque : De même, la loi étant associative, on a vu dans le chapitre 18 que la notation $2x$ pouvait désigner $x + x$, mais ici elle désigne surtout le produit (externe) de x par 2. Là aussi, aucun problème :

Proposition. Soit $x \in E$. Alors :

$$x + x = \underbrace{2.x}_{\text{produit de } x \text{ par } 2}$$

Démonstration. D'après (C_3) et (C_2) :

$$\begin{aligned} 2.x &= (1 + 1).x \\ &= 1.x + 1.x \\ &= x + x \end{aligned}$$

□

Remarque : On généralise aisément à $3.x$ (c'est-à-dire que $3.x = x+x+x$, et il est inutile de mettre des parenthèses puisque la loi + est associative puisque $(E, +)$ est un groupe) et à $n.x$ pour tout $n \geqslant 0$, ainsi qu'à nx pour tout $n \in \mathbb{Z}$: si $n < 0$, il suffit de voir que

$$nx = \underbrace{-x - \cdots - x}_{-n \text{ fois}}$$

Par exemple, $(-2).x = -x - x$.

Morale de l'histoire : On peut travailler de façon intuitive, « comme sur $\mathbb{R}$ », et il ne sera plus nécessaire de justifier à l'aide des quatre propriétés $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4), on pourra les utiliser sans y penser.

I.6 Nécessité des conditions $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$

On vient de voir que, grâce aux propriétés $(C_1), (C_2), (C_3), (C_4)$, on pouvait travailler de façon intuitive : c'est tout l'intérêt de ces propriétés et, plus généralement, de la définition d'un espace vectoriel qui peut peut-être passer pour un peu compliquée, mais c'est le prix à payer pour pouvoir travailler efficacement.

On peut se demander si tout est indispensable : certes, on a utilisé ci-dessus les quatre propriétés, mais peut-être qu'on peut en déduire une des trois autres, et dans ce cas on pourrait supprimer la propriété superflue et ne garder que les trois autres, ce qui aurait le mérite de simplifier un peu la définition d'un espace vectoriel.

Montrons que c'est impossible : en effet, les quatre conditions $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont indépendantes c'est-à-dire que trois d'entre elles peuvent être vérifiées sans que la quatrième le soit. Il est donc indispensable d'introduire ces quatre conditions dans la définition d'un espace vectoriel.

Exemple : Étudions les quatre lois externes (folkloriques) suivantes :

- $E = \mathbb{C}^n, \mathbb{K} = \mathbb{C}, \lambda.x = (\mathrm{Re}(\lambda) \times x_1, \dots, \mathrm{Re}(\lambda) \times x_n)$. Alors $(i \times i).x = -1.x = (-x_1, \dots, -x_n)$ et $-i.(-i.x) = 0_E \neq -1.x$ si $x \neq 0_E$. Ainsi, (C_1) n'est pas vérifiée alors que $(C_2), (C_3), (C_4)$ le sont (exo).
- Si on définit la loi externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, x) & \mapsto & x \end{array}$$

  Soit $x = (1, \dots, 1)$. Alors $(1+1).x = x$ tandis que $1.x + 1.x = x + x = (2, \dots, 2) \neq x$. (C_2) n'est pas vérifiée alors que $(C_1), (C_3), (C_4)$ le sont (exo).
- Si on définit la loi externe

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, x) & \mapsto & 0_n = (0, \dots, 0) \end{array}$$

  Alors $1.x \neq x$ si $x \neq 0_n$ donc (C_3) n'est pas vérifiée alors que $(C_1), (C_2), (C_4)$ le sont (exo).

Affectueusement surnommée : la loi externe la moins utile du monde.

- On pose $D = \{(0, z) \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$. On pose $E = \mathbb{C}^2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On pose

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 & \to & \mathbb{C}^2 \\ (\lambda, x) & \mapsto & \begin{cases} (\lambda x_1, \lambda x_2) & \text{si } x \in D \\ (\overline{\lambda} x_1, \overline{\lambda} x_2) & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

  Soient $x = (0, 1)$ et $y = (1, 0)$. Alors $(x + y) = (1, 1) \notin D$ donc $i.(x + y) = (-i, -i)$ tandis que $i.x + i.y = (-i, i)$. Finalement, (C_4) n'est pas vérifiée mais $(C_1), (C_2), (C_3)$ le sont (exo).

II Sous-espaces vectoriels

II.1 Définition

On rappelle qu'on se donne dans la suite du cours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition. Soit F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si F est stable par les lois $+$ et $.$ et si $(F, +, .)$ est un espace vectoriel. En d'autres termes, un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel inclus dans E pour les mêmes lois que E (restreintes à F).

On abrège souvent « sous-espace vectoriel » en « s.e.v ».

Remarque : On retrouve la notion de sous-truc vue au chapitre 18 : si E est muni d'une structure de truc (groupe, anneau, corps, et à présent espace vectoriel), une partie F de E est munie d'une structure de truc si F est stable par toutes les lois qui font de E un truc et si F, muni des mêmes lois et des mêmes neutres que E, a aussi une structure de truc. Ici, comme pour un sous-groupe (mais contrairement à un sous-anneau ou un sous-corps), l'appartenance du neutre ne figure pas dans la définition car elle est automatique :

Proposition (Condition NÉCESSAIRE importante). Si F est un sous-espace vectoriel de E alors $0_E \in F$.

Démonstration. F étant un sous-espace vectoriel de E, $(F,+)$ est un groupe inclus dans E donc F est un sous-groupe de $(E,+)$ donc contient l'élément neutre.

Remarque : La réciproque est fausse ! Voir plus bas pour des exemples. Cette condition est surtout importante grâce à sa contraposée :

Corollaire. Soit F une partie de E. Si le vecteur nul n'appartient pas à F, alors F n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Remarque : Ainsi, quand on voudra savoir si une partie de E est un sous-espace vectoriel de E, on commencera par regarder si le vecteur nul est dedans : si ce n'est pas le cas, on peut affirmer directement que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Proposition (Caractérisation pratique). Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par somme : $\forall (x,y) \in F^2$, $x+y \in F$,
- F est stable par multiplication par un scalaire : $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times F$, $\lambda \cdot x \in F$.

Démonstration. Si F est un sous-espace vectoriel de E alors F est non vide (il contient 0_E), stable par somme et par multiplication par un scalaire par définition. Réciproquement, supposons ces trois conditions vérifiées. F étant non vide et stable par la loi du groupe $(E,+)$, F est un sous-groupe de $(E,+)$ donc en particulier $(F,+)$ est un groupe, abélien puisque la loi est commutative sur E donc sur F. Les propriétés $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$ étant vraies sur E, elles sont vraies sur un ensemble plus petit, ce qui permet de conclure.

Rappelons que les propriétés universelles (celles avec un $\forall$) sont toujours vraies sur un ensemble plus petit (stable) : par exemple, une loi commutative sur un ensemble est associative sur un ensemble plus petit. Reprendre l'exemple des Européens qui peuvent voyager en Europe, cf. chapitre 18.

Remarques :

- Reprenons la remarque ci-dessus : quand on voudra savoir si une partie de E est un sous-espace vectoriel de E, on commencera par regarder si le vecteur nul est dedans : si ce n'est pas le cas, on peut affirmer directement que ce n'est pas un sous-espace vectoriel de E, et si c'est le cas, on peut affirmer que cette partie est non vide, ce qui est la première étape pour prouver que cette partie est un sous-espace vectoriel de E, et on passe ensuite à l'étape suivante. À tous les coups on gagne !
- La notion de sous-espace vectoriel est très importante et surtout très utile en pratique pour prouver qu'un ensemble donné est un espace vectoriel : il suffit de prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un autre pour prouver que c'est un espace vectoriel. La définition d'un espace vectoriel étant assez peu maniable en pratique, on prouvera en général qu'un ensemble est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est beaucoup plus simple car il n'est pas nécessaire de s'intéresser aux propriétés $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$. D'où l'importance d'avoir en stock un grand nombre d'espaces vectoriels de référence (cf. paragraphe I.4.b) !
- On peut parfois les deux dernières conditions en une seule :

Proposition (Caractérisation pratique bis). Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- $F \neq \varnothing$,
- F est stable par combinaison linéaire : $\forall (x,y) \in F^2, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration. Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E. Alors F est non vide d'après ce qui précède. Soient $(x,y) \in F^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. F étant stable par multiplication par un scalaire, λx et μy appartiennent à F, et F étant stable par somme, $\lambda x + \mu y \in F$.

Réciproquement, supposons que F soit non vide et stable par combinaison linéaire. Soient $(x,y)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. $x+y=1.x+1.y$ donc $x+y\in F$ et $\lambda x=\lambda x+0.y\in F$ puisque F est stable par CL donc F est stable par somme et par multiplication par un scalaire : F est un sous-espace vectoriel de E.

On peut bien sûr réitérer autant qu'on veut :

Corollaire. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, pour tout $n\geqslant 1$:

$$\forall (x_1,\dots,x_n)\in F^n, \forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n, \lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n\in F$$

La somme étant associative, on peut se passer de parenthèses, et on peut même écrire cette somme avec le symbole $\sum$.

DÉMONSTRATION. Par récurrence : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarques :

- Ainsi, on ne peut pas sortir d'un sous-espace vectoriel à l'aide des deux lois interne et externe (ce qui est un peu fait pour puisque, par définition, un sous-espace vectoriel est stable par ces deux lois).
- Nous dirons au paragraphe III.1 qu'un sev de E est stable par combinaison linéaire.
- Il existe un critère mixte (dont la démonstration est laissée en exo) que nous n'utiliserons jamais : une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
  - ⋆ $F\neq\varnothing$,
  - ⋆ $\forall(x,y)\in F^2, \forall\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda x+y\in F$.

Mais que vous rencontrerez souvent quand vous évoluerez dans un univers (hostile) extérieur à ma classe.

II.2 Premiers exemples et interprétation géométrique

Définition. Soit $(x,y)\in E^2$.

- On dit que x est colinéaire à y s'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $x=\lambda y$.
- On dit que x et y sont colinéaires si x est colinéaire à y ou si y est colinéaire à x.

Exemple : Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur puisque, pour tout $x\in E$, $0_E=0.x$.

Proposition/Définition.

- L'ensemble $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé espace vectoriel nul.
- Si $x\neq 0$, l'ensemble $D=\{\lambda.x\,|\,\lambda\in\mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé droite vectorielle engendrée par x.
- Si x et y sont deux vecteurs non colinéaires, l'ensemble

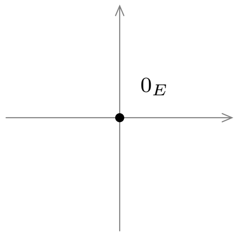
$$P=\{\lambda x+\mu y\,|\,(\lambda x+\mu y)\in\mathbb{K}^2\}$$

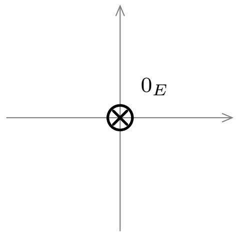
est un sous-espace vectoriel de E appelé plan vectoriel engendré par x et y.

Remarques :

- On parle parfois de sous-espace nul pour qualifier $\{0_E\}$. Géométriquement, on le représente évidemment par l'origine (ou par une flèche en 0) :

ou



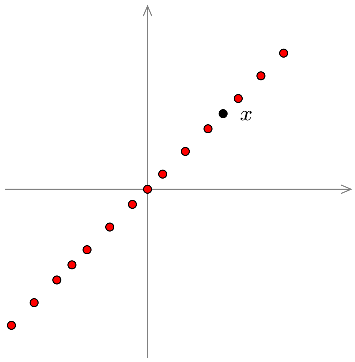


- On généralisera la notion d'espace vectoriel engendré dans le paragraphe III.2.a. En particulier, la droite vectorielle engendrée par x sera notée $\text{Vect}(x)$ et le plan vectoriel engendré par x et y sera noté $\text{Vect}(x, y)$.
- On peut évidemment définir l'ensemble $\{\lambda.x \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ lorsque $x = 0$, mais alors cet ensemble n'est rien d'autre que l'espace vectoriel nul $\{0_E\}$, et alors on ne dit plus que c'est une droite vectorielle.

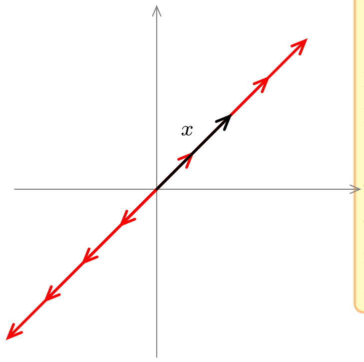
Nous dirons au chapitre 30 qu'une droite vectorielle est un espace vectorielle de dimension 1.

- En effet, D est l'ensemble de tous les vecteurs colinéaires à x : $y \in D$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda x$. Ci-dessous, en noir, x, et en rouge, plusieurs vecteurs colinéaires à x i.e. plusieurs vecteurs de la forme $\lambda.x$ pour différentes valeurs de λ :

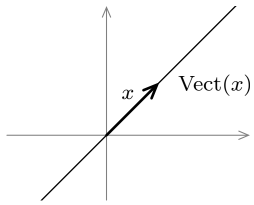
En général, quand on fait un dessin, on représente les vecteurs sous forme de point ou, pour que ce soit plus visible, sous forme de « flèche partant de 0 ». En effet, on identifie un point et le vecteur (ancienne définition) reliant l'origine à ce point.



ou

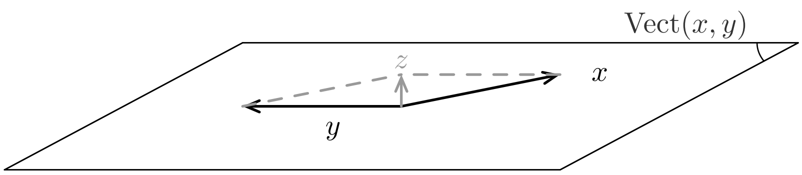


Géométriquement, D est la droite contenant x et passant par 0 :



D'où le nom de « droite vectorielle », contrairement à une « droite affine » (cf. chapitre 36) : une droite vectorielle est une droite qui passe par 0 (ce qui est cohérent puisqu'on sait qu'un sous-espace vectoriel contient le vecteur nul). C'est la raison pour laquelle on demande généralement que x soit non nul même si, comme on l'a déjà dit, on pourrait la définir même avec $x = 0_E$.

- P est l'ensemble de tous les vecteurs pouvant s'écrire comme combinaison linéaire de x et de y. Attention, il ne contient pas que des vecteurs colinéaires à x et à y ! Il contient tous les vecteurs qu'on peut obtenir en effectuant une combinaison linéaire de x et de y. Géométriquement, P est le plan contenant x et y et passant par 0 :



D'où le nom de « plan vectoriel », contrairement à un « plan affine » (cf. chapitre 36) : un plan vectoriel est un plan qui passe par 0 (ce qui est encore cohérent puisqu'on sait qu'un sous-espace vectoriel contient le vecteur nul).

- Là aussi, on pourrait définir l'ensemble $\{\lambda x + \mu y \,|\, (\lambda x + \mu y) \in \mathbb{K}^2\}$ lorsque x et y sont colinéaires, et ce serait encore un sev de E, mais alors on aurait une droite vectorielle (ou l'espace vectoriel nul si x et y sont tous les deux nuls). C'est la raison pour laquelle on demande que x et y soient non colinéaires.

Idem, nous dirons dans le chapitre 30 qu'un plan vectoriel est espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration.

- Le fait que $\{0_E\}$ est immédiat et laissé en exo.
- Soit donc x non nul. Montrons que $D = \{\lambda.x \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
  - ⋆ $0_E = 0.x$ donc $0_E \in D$: D est non vide.
  - ⋆ Soient y_1 et y_2 deux éléments de D. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $y_1 = \lambda_1 x$ et $y_2 = \lambda_2 x$ donc $y_1 + y_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)x \in D$: D est stable par somme.
  - ⋆ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. $\alpha.y_1 = (\alpha\lambda_1)x \in D$: D est stable par multiplication par un scalaire, c'est donc bien un sev de E.

Précisons encore une fois qu'un vecteur y appartient à D si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$. Il serait temps de maîtriser l'écriture avec des quantificateurs d'un tel ensemble !

- Soient donc x et y non colinéaires. Montrons que $P = \{\lambda x + \mu y \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ est un sev de E.
  - ⋆ $0_E = 0.x + 0.y \in P$: P est non vide.
  - ⋆ Soient $(z_1, z_2) \in P^2$ et $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{K}^4$ tel que $z_1 = \lambda_1 x + \mu_1 y$ et $z_2 = \lambda_2 x + \mu_2 y$ donc

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2)x + (\mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2)y \in P \qquad \square$$

  P est donc stable par combinaison linéaire : c'est un sous-espace vectoriel de E.

Précisons encore une fois qu'un vecteur z appartient à P si et seulement s'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ tel que $z = \lambda x + \mu z$.

Nous avons utilisé la caractérisation pratique bis : les deux sont valables, nous utiliserons régulièrement l'une et l'autre.

II.3 Exemples plus généraux

II.3.a Dans $\mathbb{K}^n$

Exemple : L'ensemble $F = \{(x, y) \in \mathbb{K}^2 \,|\, 5y - 3x = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$. En effet :

- $5 \times 0 - 3 \times 0 = 0$ donc $(0, 0) \in F$: F est non vide.
- Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de F. Alors $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} 5(x_2 + y_2) - 3(x_1 + y_1) &= 5x_2 - 3x_1 + 5x_2 - 3y_1 \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  En d'autres termes, $x + y \in F$: F est stable par somme.

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ si bien que :

$$\begin{aligned} 5(\lambda x_2) - 3(\lambda x_1) &= \lambda(5x_2 - 3x_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  En d'autres termes, $\lambda x \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire, F est un sev de $\mathbb{K}^2$.

F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donc est un ensemble de **couples**. Par conséquent, lorsqu'on veut prouver que F est stable par somme, il faut prendre deux éléments de F donc deux couples. De même, si on est dans $\mathbb{K}^3$, il faut prendre deux triplets pour prouver que l'ensemble en question est stable par somme.

Remarque : Les exercices où il faut prouver qu'un ensemble de ce genre est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ (ou $\mathbb{K}^3$ ou $\mathbb{K}^n$) sont légion. Il peut être parfois difficile de se repérer avec les différents noms donnés aux objets : par exemple, dans la définition, x et y sont des éléments de $\mathbb{K}$ alors que dans la preuve qui suit, on a nommé x et y des vecteurs. Dans l'écriture $5y - 3x = 0$, il est important de comprendre qu'il est en fait écrit :

$$5 \times (\text{deuxième coordonnée}) - 3 \times (\text{première coordonnée}) = 0$$

Une fois que c'est bien compris, ce genre d'exercice devient un jeu d'enfant.

Selon les cas, x et y désigneront des vecteurs ou les coordonnées d'un vecteur de $\mathbb{K}^2$. Parfois, x_1 et x_2 désigneront les coordonnées d'un vecteur x alors que, parfois, ils désigneront deux vecteurs. Il ne faut pas se perdre dans les notations et toujours garder en tête la nature des objets que l'on manipule.

Exemple : Montrons que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, 5x + 3y - 10z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

- $5 \times 0 + 3 \times 0 - 10 \times 0 = 0$ donc $(0,0,0) \in F$: F est non vide.
- Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ deux éléments de F, et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$. Dès lors :

$$\begin{aligned} 5(\lambda x_1 + \mu y_1) + 3(\lambda x_2 + \mu y_2) - 10(\lambda x_3 + \mu y_3) &= \lambda(5x_1 + 3x_2 - 10x_3) + \mu(5y_1 + 3y_1 - 10y_3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  si bien que $\lambda x + \mu y \in F$: F est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.

Remarques :

- Là aussi, la condition à vérifier est :

  $$5 \times (\text{première coordonnée}) + 3 \times (\text{deuxième coordonnée}) - 10 \times (\text{troisième coordonnée}) = 0$$

  Ce genre d'exercice doit être fait en claquant des doigts !
- Cela marche aussi avec plusieurs équations (il suffit juste alors de prouver que chaque équation est vérifiée). Par exemple, on montrerait de même que l'ensemble F des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ vérifiant les deux équations

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$.
- Plus généralement, tout ensemble décrit par une (ou plusieurs) équations de ce type (combinaison linéaire des coordonnées $= 0$) est un sous-espace vectoriel de l'espace ambiant :

Proposition. L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sev de $\mathbb{K}^p$.

On rappelle qu'un système homogène est un système dont le second membre est nul.

Remarque : En d'autres termes, pour tout $p \geqslant 1$, pour toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, l'ensemble des $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant les équations

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

est un sev de $\mathbb{K}^p$. On pourra donc répondre directement à ce genre de question !

Exemple : Reprenons l'exemple ci-dessus : prouvons que l'ensemble F des triplets $(x,y,z) \in \mathbb{K}^3$ vérifiant les deux équations

$$\begin{cases} 4x + y - 3z = 0 \\ \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$. Il suffit de dire que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène !

Démonstration. Reprenons les notations de la remarque ci-dessus : soit $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, et prouvons que l'ensemble F des solutions du système

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

est un sev de $\mathbb{K}^p$. Le système étant homogène, le p-uplet nul $(0,\dots,0)$ est solution donc F est non vide. Soient $x = (x_1,\dots,x_p)$ et $y = (y_1,\dots,y_p)$ deux éléments de F, et soient λ et μ deux scalaires. Tout d'abord :

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_p + \mu y_p)$$

donc (toujours se dire : « $a_{i,1}\times$(première coordonnée)$+\cdots$ »), pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\begin{aligned} a_{i,1}(\lambda x_1 + \mu y_1) + \cdots + a_{i,p}(\lambda x_p + \mu y_p) &= \lambda(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,p}x_p) + \mu(a_{i,1}y_1 + \cdots + a_{i,p}y_p) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

En d'autres termes, $\lambda x + \mu y$ est solution de toutes les équations du système donc $\lambda x + \mu y \in F$: F est stable par CL, c'est un sev de $\mathbb{K}^p$.

Remarques :

- Lorsqu'un ensemble n'est pas décrit par une équation de ce type (i.e. CL des coordonnées $= 0$), **en général**, on n'a pas affaire à un sous-espace vectoriel. Par exemple, $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, 5x + 3y - 10z = 1\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ (alors que c'est un sous-espace affine, cf. chapitre 36) car ne contient pas le vecteur nul $(0,0,0)$, et $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x^2 + y - z = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel car n'est pas stable par somme : en effet, $(1,1,2)$ et $(2,0,4)$ appartiennent à H mais pas leur somme. Cependant H contient $(0,0,0)$: contenir $(0,0,0)$ est une condition nécessaire mais pas suffisante !
- Attention, parfois, cela ne saute pas aux yeux : il n'est pas immédiat que

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^3 + x^2y + y^2x + y^3 + x + y = 0\}$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: en effet, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$x^3 + x^2y + y^2x + y^3 + x + y = (x^2 + y^2 + 1)(x + y)$$

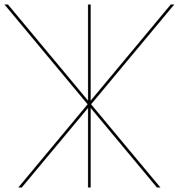
  et puisque $x^2 + y^2 + 1$ n'est jamais nul, $(x,y) \in F \iff x + y = 0$ donc $F = \{(x,y) \,|\, x + y = 0\}$ et là, prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ ne pose plus de difficulté.
- On peut prouver (cf. chapitre 30) que tout espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ s'écrit à l'aide d'une ou de plusieurs équations de cette forme (combinaison linéaire des coordonnées $= 0$). Cependant, comme on vient de le voir, ce n'est pas forcément le cas dès le début, donc attention à ne pas conclure trop vite qu'un ensemble n'est pas un espace vectoriel. De toute façon, on le sait bien : pour prouver qu'une condition n'est pas vérifiée, il faut un contre-exemple EXPLICITE !

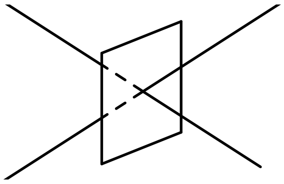
- Dans le premier exemple ci-dessus, F est la droite d'équation $y = 3x/5$, dans le deuxième, F est le plan d'équation $5x + 3y - 10z = 0$, et dans le troisième (celui avec les deux équations), F est une intersection de deux plans donc une droite. On peut en fait prouver que tous les sev de $\mathbb{K}^2$ ou de $\mathbb{K}^3$ sont de ce type :

Théorème (admis provisoirement).

- Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{K}^2$ tout entier.
- Les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{K}^3$ tout entier.

Remarque : Géométriquement, une droite vectorielle est une droite passant par l'origine (on rappelle que 0_E appartient à tous les sous-espaces vectoriels de E, et donc des droites vectorielles sont toujours sécantes en 0) et un plan vectoriel est un plan passant par l'origine. Ci-dessous, trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ (à gauche) et trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ (à droite).





Remarque : Le théorème ci-dessus sera démontré dans le chapitre 30, quand nous parlerons de dimension. Sans rentrer dans les détails, disons juste qu'il est intuitif que $\mathbb{K}^2$ (le plan) est de dimension 2 et que $\mathbb{K}^3$ (l'espace) est de dimension 3. Nous montrerons qu'un sous-espace vectoriel de E a une dimension inférieure à celle de E, et donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$ a soit une dimension nulle (c'est un point donc $\{0\}$), soit une dimension égale à 1 (c'est une droite vectorielle), soit égale à 2 (c'est le plan tout entier). Le résultat concernant $\mathbb{K}^3$ est tout aussi intuitif.

II.3.b Dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème. Si $n \in \mathbb{N}$, alors l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Le polynôme nul appartient à $\mathbb{K}_n[X]$ donc $\mathbb{K}_n[X]$ est non vide.
- Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$ donc $P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$: $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par somme.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. $\deg(\lambda P) \leqslant \deg(P) \leqslant n$ donc $\lambda P \in \mathbb{K}_n[X]$: $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par multiplication par un scalaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors

$$\deg(\lambda P) = \deg(P)$$

et si $\lambda = 0$,

$$\deg(\lambda P) = -\infty \leqslant \deg(P).$$

Remarques :

- C'est la raison pour laquelle on a défini $\mathbb{K}_n[X]$ comme l'ensemble des polynômes de degré **inférieur ou égal à** n et non pas de degré **égal à** n. En effet, l'ensemble des polynômes de degré n n'a que peu d'intérêt en pratique puisque ce n'est pas un espace vectoriel : il n'est ni stable par somme (par exemple, X^n et $-X^n$ sont de degré n mais pas leur somme), ni par multiplication par un scalaire (car si P est de degré n, $0.P_n$ ne l'est pas) !
- Ici, contrairement à $\mathbb{K}^n$, il n'est pas aussi simple de caractériser les espaces vectoriels. En tout cas, les $\mathbb{K}_n[X]$ sont loin d'être les seuls !

Exemples :

- L'ensemble $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P'(2) = P(1)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:
  - ⋆ Le polynôme nul appartient à F (il est nul en 1 et de dérivée nulle en 2) donc F est non vide.
  - ⋆ Soient P et Q deux éléments de F et soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)'(2) &= \lambda P'(2) + \mu Q'(2)\\ &= \lambda P(1) + \mu Q(1)\\ &= (\lambda P + \mu Q)(1)\end{aligned}$$

    donc $\lambda P + \mu Q \in F$: F est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathbb{K}[X]$.

- Notons $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P(0) = 0\}$. Montrons que H est un sev de $\mathbb{K}[X]$.
  - ⋆ Le polynôme nul appartient à H donc H est non vide.
  - ⋆ Soient P et Q deux éléments de H et soient λ et μ dans $\mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}(\lambda P + \mu Q)(0) &= \lambda P(0) + \mu Q(0)\\ &= 0\end{aligned}$$

    donc $\lambda P + \mu Q \in H$: H est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathbb{K}[X]$.

H est l'ensemble des polynômes divisibles par X i.e. ceux dont le terme constant est nul. On l'a appelé H car c'est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$: cf. chapitre 30.

- Plus généralement, donnons-nous B un polynôme et posons $F = \{QB \,|\, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ c'est-à-dire que F est l'ensemble des polynômes multiples de B. Prouvons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
  - ⋆ $0 = 0 \times B$ donc le polynôme nul appartient à F donc F est non vide.
  - ⋆ Soient P_1 et P_2 deux éléments de F et soient λ et μ dans $\mathbb{K}$. Il existe Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $P_1 = Q_1 B$ et $P_2 = Q_2 B$ si bien que :

$$\begin{aligned}\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 &= \lambda_1 Q_1 B + \lambda_2 Q_2 B\\ &= (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) B\end{aligned}$$

    donc $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 \in F$: F est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathbb{K}[X]$.

  Par exemple, il en découle que si $a \in \mathbb{K}$,

$$\{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, P(a) = P'(a) = 0\} = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, (X-a)^2 \text{ divise } P\}$$

  est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ (chose qu'on aurait évidemment pu prouver directement).

C'est une généralisation de l'exemple précédent car l'exemple précédent est tout simplement le cas où $B = X$.

Rappelons que a est racine **au moins** double (i.e. est une racine multiple) de P si et seulement si $P(a) = P'(a) = 0$.

II.3.c Sous-espaces vectoriels de fonctions

Théorème. Si D est une partie de $\mathbb{R}$, alors

- l'ensemble $\mathscr{C}(D, \mathbb{R})$ des applications continues de D dans $\mathbb{R}$,
- l'ensemble $D(D, \mathbb{R})$ des applications dérivables de D dans $\mathbb{R}$,
- l'ensemble $\mathscr{C}^1(D, \mathbb{R})$ des applications de classe $\mathscr{C}^1$ de D dans $\mathbb{R}$

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(D,\mathbb{R}) = \mathbb{R}^D$.

Démonstration. Ces espaces contiennent la fonction nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire d'après les chapitres 13 et 14. $\square$

Donnons d'autres exemples (ou pas).

Exemples :

- L'ensemble des applications décroissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ (alors qu'il contient 0_E, la fonction nulle : comme dit ci-dessus, contenir 0_E est une condition nécessaire non suffisante). En effet si f est la fonction $x \mapsto -x$, alors $-f$ est la fonction $x \mapsto x$ qui n'est pas décroissante : $-f \notin F$, F n'est pas stable par multiplication par un scalaire donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- L'ensemble F des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. En effet la fonction nulle est 2π-périodique donc appartient à F et $F \neq \varnothing$. Ensuite donnons-nous $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in F$ et $g \in F$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme f et g sont 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, on a :

  Ici on pense immédiatement à introduire x et évaluer en $x+2\pi$: c'est la définition d'une fonction 2π-périodique.

$$\begin{aligned}(f+g)(x+2\pi) &= f(x+2\pi)+g(x+2\pi)\\ &= f(x)+g(x)\\ &= (f+g)(x)\end{aligned}$$

  et

$$\begin{aligned}(\lambda f)(x+2\pi) &= \lambda f(x+2\pi)\\ &= \lambda f(x)\\ &= (\lambda f)(x)\end{aligned}$$

  Ainsi $f+g \in F$ et $\lambda f \in F$: F est stable par somme et par multiplication par un scalaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
- L'exemple précédent ne marche que parce que les deux fonctions f et g ont une période commune. L'ensemble des fonctions périodiques tout court n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ car il n'est pas stable par somme : en effet (cf. exercice 19 du chapitre 5), $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \cos\left(x\sqrt{2}\right)$ sont périodiques mais leur somme ne l'est pas.

Remarque : Dans l'exemple de l'ensemble des fonctions décroissantes ci-dessus, il ne fallait pas écrire « Si $f \in F$ alors $-f$ est croissante donc $-f \notin F$ ». En effet, si f est la fonction nulle, alors $f \in F$ mais on a aussi $-f \in F$! Ainsi, pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de E, il faut donner un contre-exemple **explicite** (même si, dans l'exemple en question, on pouvait se contenter de dire que si f est décroissante non constante, alors $-f$ n'est pas décroissante) !

II.3.d Sous-espaces vectoriels de suites

Exemple : L'ensemble C des suites convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$. En effet :

- la suite nulle converge (vers 0) donc appartient à C, qui est donc non vide.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Notons L_1 la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L_2 celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_1+L_2 donc appartient à C : C est stable par somme.

- La suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λL_1 donc appartient à C : F est stable par multiplication par un scalaire : C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : Il peut être assez lourd quand on manipule des suites de toujours écrire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Rappelons qu'on peut également écrire une suite (u_n) ou juste u (ce qui est plus maniable) : la seule notation interdite (car c'est un magnifique échec de type) est de parler de la suite u_n (car ce n'est pas une suite !).

Exemple : Montrons que l'ensemble A des suites arithmétiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Rappelons qu'une suite u est arithmétique lorsqu'il existe $q \in \mathbb{K}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + q$.

On peut aussi utiliser la caractérisation (au lieu de la définition) suivante : u est arithmétique lorsqu'il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an + b$.

- la suite nulle est arithmétique de raison 0 (en effet, si on la note u, alors $u_{n+1} = u_n + 0$ pour tout n) donc est dans A : A est non vide.
- Soient u et v dans A et λ et μ dans $\mathbb{K}$. Il existe donc q et r dans $\mathbb{K}$ tels que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + q$ et $v_{n+1} = v_n + r$. Dès lors, pour tout n,

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1} &= \lambda(u_n + q) + \mu(v_n + r) \\ &= (\lambda u_n + \mu v_n) + (\lambda q + \mu r) \end{aligned}$$

  En d'autres termes, $\lambda u + \mu v$ est arithmétique de raison $\lambda q + \mu r$ donc $\lambda u + \mu v \in A$: A est stable par combinaison linéaire, c'est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Remarque : Cependant, l'ensemble des suites géométriques n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$: cf. TD.

II.3.e Sous-espaces vectoriels de matrices

Théorème. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

- l'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ des matrices diagonales d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,
- l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) d'ordre n et à coefficients dans $\mathbb{K}$,

sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles d'ordre n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car il ne contient pas la matrice nulle.

Démonstration. Ces espaces contiennent la matrice nulle et sont stables par somme et multiplication par un scalaire. □

II.3.f Et si on veut montrer qu'on a un ~~sous-~~espace vectoriel ?

C'est pareil, il n'y a que la conclusion qui change : en effet, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel. Dès lors, si on veut prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, il suffit de prouver que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (cf. paragraphe I.4.b). Il suffit d'adapter la conclusion. Tout dépend de la formulation de la question !

Exemple : Montrer que C, l'ensemble des suites convergentes, est un espace vectoriel.

- la suite nulle converge (vers 0) donc appartient à C, qui est donc non vide.
- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C$. Notons L_1 la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et L_2 celle de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_1 + L_2$ donc appartient à C : C est stable par somme.

- La suite $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λL_1 donc appartient à C : F est stable par multiplication par un scalaire : C est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier, C est un espace vectoriel.

III Familles génératrices, libres, liées et bases

III.1 Combinaison linéaire

III.1.a Combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs

Rappelons la définition (que nous avons déjà utilisée sans le dire, et que nous avons déjà vue dans certains cas particuliers, par exemple pour des matrices dans le chapitre 21) d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs :

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, soit $x \in E$. On dit que x est combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_n)$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tel que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Exemple : $(1, 2, 3) = 2.(1, 1, 1) + (-1).(1, 0, -1)$ donc $(1, 2, 3)$ est combinaison linéaire (CL) des vecteurs $(1, 1, 1)$ et $(1, 0, -1)$.

III.1.b Cas général

Commençons par une définition (analogue à celle pour les polynômes dans le chapitre 19, ou pour les valuations p-adiques dans le chapitre 6) :

Définition. On dit qu'une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ est presque nulle si tous les λ_i sont nuls sauf un nombre fini.

I est un ensemble d'indices quelconque, et ce sera la même chose dans toute la suite du cours.

Remarque : On peut alors faire comme au chapitre 6 et définir le support d'une famille presque nulle comme l'ensemble des indices i pour lesquels $\lambda_i \neq 0$ (on parle alors également de famille à support fini), et si (x_i) est une famille quelconque de vecteurs (pas forcément presque nulle), on définit $\displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ comme la somme contenant uniquement les termes $\lambda_i x_i$ avec λ_i non nul. On montre alors comme dans le chapitre 6 que cette somme (finie) vérifie les mêmes propriétés qu'une somme classique (en particulier la linéarité de la somme). Il n'y a aucun problème de convergence contrairement au chapitre 25 puisque ces sommes sont en réalité toutes finies. On ne définit pas ces sommes de façon rigoureuse comme au chapitre 6 car tout cela est assez intuitif, car c'est tout à fait analogue au chapitre 6, et car on préférera introduire des indices pour les termes non nuls : on notera $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ les scalaires non nuls, et on notera la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}$.

D'ailleurs, qu'est-ce qu'une convergence dans un espace vectoriel ?

Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E, et soit $x \in E$. On dit que x est combinaison linéaire des x_i s'il existe $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ peut être infinie, mais la somme ci-contre est impérativement finie !

Remarque : En d'autres termes, un vecteur x est CL des x_i lorsqu'il est CL d'un nombre fini d'entre eux (mais le nombre n'est pas fixé : il peut être CL de 2 vecteurs comme de 2024 vecteurs).

Exemples :

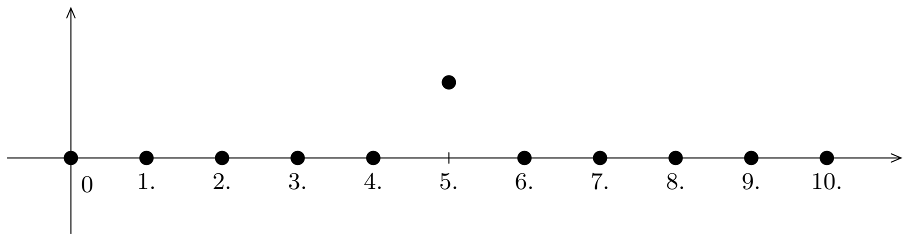
- $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire d'un nombre fini de X^k. Rappelons que la notation

$$P=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

désigne en fait une somme finie.

- Si $k\in\mathbb{N}$, on définit la suite $\left(u_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n{}^{(k)}=0$ si $n\neq k$ et 1 si $n=k$.

La suite $\left(u_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement $u^{(k)}$ a un unique terme, celui d'indice k, qui vaut 1, et les autres qui sont nuls. Ci-contre la suite $\left(u_n{}^{(5)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ou, plus simplement, $u^{(5)}$.



On pourrait se dire que toute suite est combinaison linéaire de suites de ce type, mais il faut bien comprendre qu'une combinaison linéaire n'a qu'un nombre fini de termes : les suites qui sont combinaison linéaire des suites du type $\left(u_n{}^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont exactement les suites presque nulles.

Remarque : On peut alors reformuler le dernier corollaire du paragraphe II.1 en disant simplement qu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire finie, mais puisqu'une combinaison linéaire est finie par définition (même lorsqu'on parle d'une combinaison linéaire d'une famille infinie de vecteurs), alors on peut zapper le mot « finie » et juste dire qu'un sous-espace vectoriel est stable par combinaison linéaire. Plus précisément :

Proposition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F et soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille presque nulle de scalaires. Alors $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i\in F$.

Démonstration. Si on note $\lambda_{i_1},\dots,\lambda_{i_n}$ les scalaires non nuls (nécessairement en nombre fini), alors cette somme s'écrit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda_{i_k}x_{i_k}$ qui appartient à F d'après le paragraphe II.1.

III.2 Familles génératrices

III.2.a Espace vectoriel engendré par une partie

On se donne dans ce paragraphe une partie non vide A de E (pas forcément un sev de E).

Définition. On appelle sous-espace vectoriel engendré par A l'ensemble des éléments de E qui sont combinaison linéaire d'éléments de A. On le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Remarques :

- Par définition, $\mathrm{Vect}(A)$ est l'ensemble des éléments de E qui s'écrivent sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i$ où n est un entier supérieur ou égal à 1 les x_i sont des éléments de A et les λ_i des scalaires. On a donc :

$$\mathrm{Vect}(A)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \,|\, n\in\mathbb{N}^*,(x_1,\dots,x_n)\in A^n,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\right\}$$

Avec des quantificateurs :

Rappelons que lorsqu'on parle de combinaison linéaire d'une famille quelconque, le nombre de vecteurs dans la combinaison linéaire est quelconque (mais fini).

$$x \in \mathrm{Vect}(A) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \in A^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Remarquons (comme dit ci-contre) que le nombre de vecteurs x_i dans la CL est quelconque.

- Si on indice tous les éléments de A par un ensemble I, c'est-à-dire si on peut écrire $A = \{x_i \mid i \in I\}$, $\mathrm{Vect}(A)$ est alors aussi noté $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$.
- ⚠ Cas particulier important : lorsque A est fini, on peut alors écrire $A = \{x_1; \dots; x_n\}$ (avec $n = \mathrm{card}(A)$) et on note alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. Là, le nombre de vecteurs dans la combinaison linéaire est fixe égal à n (même si certains coefficients peuvent être nuls) et les vecteurs eux-mêmes sont fixés (tandis que dans le cas général, on fait varier et le nombre de vecteurs, et les vecteurs eux-mêmes) L'écriture avec des quantificateurs devient alors :

$$x \in \mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

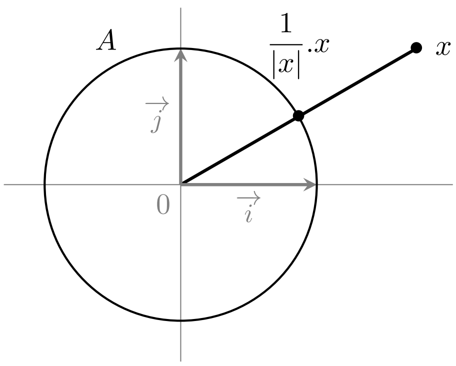
Exemples :

- $\mathrm{Vect}(\{0_E\}) = \{0_E\}$.
- Si $x \neq 0$, $\mathrm{Vect}(x)$ est la droite vectorielle engendrée par x (d'où son nom) : cf. paragraphe II.2.
- Si x et y sont non colinéaires, $\mathrm{Vect}(x, y)$ est le plan vectoriel engendré par x et y : cf. paragraphe II.2.
- $\mathbb{K}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.
- $\mathbb{K}[X] = \mathrm{Vect}(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Plus généralement (cf. paragraphe III.2.b), si B est une base ou plus simplement une famille génératrice de E, alors $E = \mathrm{Vect}(B)$.
- Prouvons que, si A est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^2$. Tout d'abord $0 = 0.(1, 0) \in \mathrm{Vect}(A)$ puisque $(1, 0) \in A$. Soit à présent $x = (a, b) \neq 0$. Notons $|x| = \sqrt{a^2 + b^2}$ la distance à l'origine, si bien que $\dfrac{1}{|x|}.x \in A$ donc

$$x = |x|.\left(\frac{1}{|x|}.x\right)$$

c'est-à-dire que x est combinaison linéaire d'un élément de A : $x \in \mathrm{Vect}(A)$, et donc $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^2$.

On n'a prouvé que l'inclusion $\mathbb{R}^2 \subset \mathrm{Vect}(A)$ mais l'inclusion réciproque est évidente. Précisons qu'il y avait une démonstration plus simple : si $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $x = a.(1, 0) + b(0, 1) \in \mathrm{Vect}(A)$, mais la méthode de diviser par la norme pour obtenir un vecteur de norme 1 sera utile en deuxième année.



- On a vu plus haut que $(1, 2, 3) \in \mathrm{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, -1))$. Notons $x_1 = (1, 1, 1)$ et $x_2 = (1, 0, -1)$. Donnons plus généralement tous les vecteurs de $\mathrm{Vect}(x_1, x_2)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{K}^3$. Travaillons par équivalences :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Vect}(x_1,x_2) &\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2, (x,y,z) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2, (x,y,z) = \lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(1,0,-1) \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2 \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 = y \\ \lambda_1 - \lambda_2 = z \end{cases} \\
&\iff \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2 \begin{cases} \lambda_2 = x-y \\ \lambda_1 = y \\ y - (x-y) = z \end{cases} \\
&\iff x - 2y + z = 0
\end{aligned}
$$

La dernière équivalence vient du fait que les deux premières lignes sont toujours vraies : il existe toujours λ_1 et λ_2 qui valent respectivement y et $x-y$: il suffit de prendre y et $x-y$! On peut donc supprimer ces lignes, et il ne reste que la troisième.

En conclusion, $\mathrm{Vect}(x_1,x_2)$ est le plan d'équation $x-2y+z=0$.

Remarque : On rencontre parfois la situation inverse : étant données une ou plusieurs équations qui définissent un espace vectoriel, peut-on trouver une famille $(x_i)_{i\in I}$ telle que $F = \mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$?

Exemple : Soit F le plan d'équation $x+2y+3z=0$. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{K}^3$. Alors :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in F &\iff x+2y+3z=0 \\
&\iff x = -2y-3z
\end{aligned}
$$

si bien que :

$$
\begin{aligned}
F &= \{(-2y-3z,y,z)\,|\,(y,z)\in\mathbb{K}^2\} \\
&= \{y(-2,1,0)+z(-3,0,1)\,|\,(y,z)\in\mathbb{K}^2\} \\
&= \mathrm{Vect}((-2,1,0),(-3,0,1))
\end{aligned}
$$

Remarque : Rappelons que si $x_1,\dots,x_n$ appartiennent à E,

$$
\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n\,|\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\}
$$

Si on raisonne à l'envers, dès qu'on a un ensemble de la forme ci-dessus (c'est-à-dire un ensemble consistant en tous les ensembles s'écrivant comme une constante multipliée par le premier vecteur + une constante multipliée par le deuxième etc. i.e. une CL des x_i), c'est par définition l'espace engendré par ces vecteurs. C'est bien ce qu'on a ci-dessus. Donnons un autre exemple.

Exemple : Écrivons $F = \{P\in\mathbb{K}_3[X]\,|\,P(1)=0\}$ sous forme de Vect.

Soit $P\in\mathbb{K}_3[X]$. Alors, P étant de degré inférieur ou égal à 3 :

$$
\begin{aligned}
P\in F &\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, P = (X-1)(aX^2+bX+c) \\
&\iff \exists(a,b,c)\in\mathbb{K}^3, P = aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1)
\end{aligned}
$$

Finalement, $F = \{aX^2(X-1)+bX(X-1)+c(X-1)\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{K}^3\} = \mathrm{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), X-1)$.

Remarque : ⚠ Les constantes a,b,c ou, plus généralement, les λ_i, doivent être indépendantes les unes des autres pour conclure ! Par exemple, si on développe l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$
F = \{aX^3+(b-a)X^2+(c-b)X-c\,|\,(a,b,c)\in\mathbb{K}^3\}
$$

alors il serait faux d'écrire $F = \text{Vect}(1, X, X^2, X^3)$ puisque les constantes dépendent les unes des autres ! En effet,

$$\text{Vect}(1, X, X^2, X^3) = \{aX^3 + bX^2 + cX + d \,|\, (a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4\}$$

Vous voyez la différence ?

Proposition. Vect(A) est un sev de E qui contient A.

Cela justifie a posteriori le nom d'espace vectoriel engendré.

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $x = 1.x$ donc x est CL d'éléments de A : $x \in \text{Vect}(A)$. On en déduit que $A \subset \text{Vect}(A)$.

Montrons à présent que Vect(A) est un sev de E.

- Soit $x \in A$ (possible car A est non vide). Alors $0_E = 0.x \in \text{Vect}(A)$: Vect(A) est non vide.
- Soient x et y deux éléments de Vect(A) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$: il existe
  - ⋆ n_1 et n_2 appartenant à $\mathbb{N}^*$;
  - ⋆ $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \dots, \beta_{n_2}$ des éléments de $\mathbb{K}$;
  - ⋆ $x_1, \dots, x_{n_1}, y_1, \dots, y_{n_2}$ des éléments de A ;

  tels que

  $$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n_1} x_{n_1} \qquad \text{et} \qquad y = \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_{n_2} y_{n_2}$$

  si bien que

  $$\lambda x + \mu y = \lambda\alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda\alpha_{n_1} x_{n_1} + \mu\beta_1 y_1 + \cdots + \mu\beta_{n_2} y_{n_2} \qquad \square$$

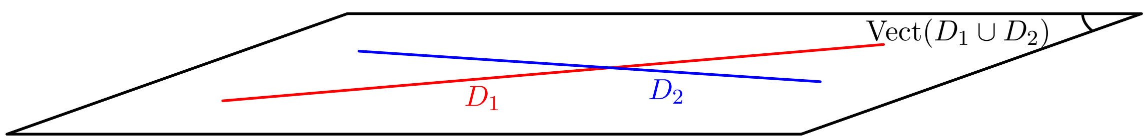
  c'est-à-dire que $\lambda x + \mu y$ est CL d'éléments de A : $\lambda x + \mu y \in \text{Vect}(A)$: Vect(A) est stable par CL donc c'est un sev de E.

Remarque : Par conséquent, pour prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de l'écrire comme un Vect.

Proposition. Vect(A) est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant A, c'est-à-dire que si F est un sous-espace vectoriel de E contenant A, alors Vect$(A) \subset F$.

Exemple : Puisqu'un sev de $\mathbb{R}^2$ est soit $\{0\}$, soit une droite vectorielle, soit $\mathbb{R}^2$ tout entier, il est immédiat que l'espace vectoriel engendré par le cercle unité est $\mathbb{R}^2$ tout entier puisque celui-ci n'est pas inclus dans une droite vectorielle.

Exemple : Idem, les seuls sev de $\mathbb{R}^3$ étant l'espace nul, les droites et plans vectoriels, et $\mathbb{R}^3$ tout entier, si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes, alors Vect$(D_1 \cup D_2)$ est le plan contenant ces deux droites.



Démonstration. Soit F un sev de E contenant A. Soit $x \in \text{Vect}(A)$. Alors il existe $n \geqslant 1$, $(x_1, \dots, x_n) \in A^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Or, $A \subset F$ donc les x_i appartiennent à F, et F est un sev de E donc est stable par CL, si bien que $x \in F$: Vect$(A) \subset F$.

Remarque : Par convention, on dit que Vect$(\varnothing) = \{0_E\}$: cela vient de la proposition précédente : puisque l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, alors le plus petit espace vectoriel qui le contient est le plus petit espace vectoriel de tous, celui qui est inclus dans tous les autres, c'est-à-dire $\{0_E\}$.

III.2.b Familles/Parties génératrices

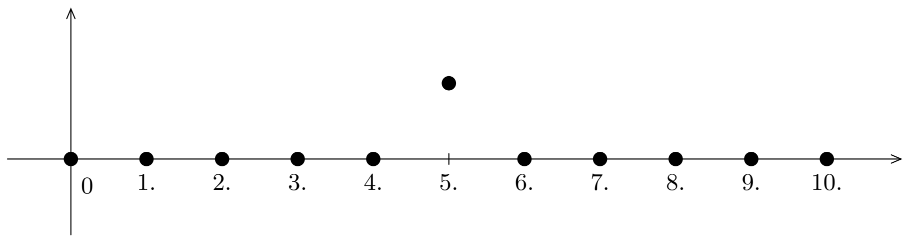
Définition. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. On dit qu'ils forment une famille génératrice de E si tout élément de E est combinaison linéaire des x_i, c'est-à-dire s'il existe une famille presque nulle de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

Remarques :

- Avec des quantificateurs, G est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists n \in \mathbb{N}^*, (x_1, \dots, x_n) \in G^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

- En d'autres termes, $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E si $E = \text{Vect}(x_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire si $(x_i)_{i\in I}$ engendre E.
- Dès lors, par définition, $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de l'espace engendré $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Par conséquent, si on cherche une famille génératrice d'un espace vectoriel, il suffit de l'écrire comme un Vect.
- Rappelons qu'une combinaison linéaire est finie par définition, même lorsque la famille $(x_i)_{i\in I}$ est infinie. Par exemple, on peut se dire que toute suite est CL de suite du type $({u_n}^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$, où l'on rappelle que $({u_n}^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite valant 1 en k et zéro ailleurs :



  On se dit donc que ces suites engendrent $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, mais ce n'est pas le cas puisque les éléments CL de ces suites sont les éléments qui s'obtiennent par combinaison linéaire FINIE de telles suites, c'est-à-dire les suites n'ayant qu'un nombre fini de termes non nuls. Ces suites ne forment donc pas une famille génératrice de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (d'ailleurs, on ne connaît pas de famille génératrice de cet espace vectoriel qui ne contienne pas de vecteur « superflu).
- Cas particulier important : lorsque la famille est finie, c'est-à-dire lorsqu'on a une famille de la forme $(x_1, \dots, x_n)$, le nombre de vecteurs dans la combinaison linéaire est fixe égal à n (même si certains coefficients peuvent être nuls) et les vecteurs eux-mêmes sont fixés (tandis que dans le cas général, on fait varier et le nombre de vecteurs, et les vecteurs eux-mêmes) L'écriture avec des quantificateurs devient alors : $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille génératrice de E si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

- Si $(x_i)_{i\in I}$ est une **famille** génératrice, on dit que $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ est une **partie** génératrice. En d'autres termes, un ensemble est une partie génératrice lorsque la famille formée par ses éléments est une famille génératrice. Par exemple, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ (voir ci-dessous) donc $\{e_1; e_2\}$ est une partie génératrice de $\mathbb{K}^2$. L'avantage de cette notion est qu'elle nous permet d'utiliser les notions ensemblistes d'appartenance, d'inclusion (alors que pour les familles, il faut parler de sous-famille ou de restriction, ainsi que de sur-famille ou de prolongement), d'union et d'intersection de familles.

- Bon, en fait, on confondra souvent les deux, c'est-à-dire qu'on confondra souvent la famille (x_1, x_2, x_3) avec l'ensemble $\{x_1; x_2; x_3\}$, mais cette assimilation a ses limites : rappelons que, dans un ensemble, il n'y a ni notion d'ordre, ni notion de multiplicité. Par exemple, si $x_1 = x_2$, alors $\{x_1; x_2\} = \{x_1\}$ donc est un ensemble à un élément alors que la famille (x_1, x_2) a deux éléments. Cela peut parfois jouer des tours : nous verrons par exemple que si une famille contient deux fois le même élément, elle est automatiquement liée (cf. paragraphe III.3.b), alors que ce n'est tout simplement pas possible pour une partie de contenir deux fois le même élément, et donc ce critère est inutilisable pour des parties. En fait, on manipulera surtout des familles, le concept de partie (génératrice ici, libre ou liée plus tard) nous permettant d'effectuer les opérations ensemblistes dont on a besoin pour se simplifier la vie, et on pourra assimiler familles et parties tout en gardant en tête qu'une famille peut comporter plusieurs fois le même élément.

Idem, on parlera dans le chapitre 33 de base directe ou indirecte, et l'orientation change en échangeant deux vecteurs, chose qui n'a pas de sens dans une partie.

Exemples :

- $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}[X]$ puisque tout polynôme est combinaison linéaire (finie, par définition d'une combinaison linéaire) de X^k, c'est-à-dire que $\mathbb{K}[X] = \text{Vect}(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- Si $n \geqslant 0$, $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^n)$.
- $X^2(X-1), X(X-1), X-1$ forment une famille génératrice de $\{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.
- Si $n \geqslant 1$, notons $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ (ce sont des n-uplets i.e. des vecteurs à n coordonnées). Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que $\mathbb{K}^n = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. En effet, pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

  Par exemple, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ et $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$.

On note de la même façon ces vecteurs peu importe l'espace $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire qu'on note e_1 à la fois le vecteur $(1, 0)$ et le vecteur $(1, 0, 0)$ par exemple, mais en pratique, il n'y a aucune ambiguïté sur la taille des vecteurs que l'on manipule donc cela ne pose aucun problème.

- Il n'y a pas unicité de la famille génératrice : nous verrons au paragraphe IV.4 que $(1, 0)$ et $(1, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ et que $(-1, 0, 1), (1, 1, 0)$ et $(1, 0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^3$.
- Autre exemple : $(1, 0), (1, 1)$ et $(0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ puisque, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,

$$(x, y) = (2x + 3y).(1, 1) + (-x - 3y).(1, 0) + (-2y - 2x).(0, 1)$$

  On peut se dire que le vecteur $(1, 1)$ est superflu : cf. paragraphe III.3.
- Si n et p sont supérieurs ou égaux à 1, les matrices élémentaires (de taille $n \times p$) $E_{i,j}$ (pour $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ et $j \in [\![1 \,;\, p]\!]$) forment une famille génératrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Cela vient de l'écriture suivante, vue dans le chapitre 21 :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} E_{i,j}$$

- Parfois, le fait qu'une famille soit ou non génératrice dépend du corps sur lequel on se place (et alors on écrit $\text{Vect}_{\mathbb{K}}$ pour préciser qu'on se place sur le corps $\mathbb{K}$). Rappelons que lorsqu'on dit qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, cela veut dire en particulier que les scalaires qu'on s'autorise dans les combinaisons linéaires sont des éléments de $\mathbb{K}$. Par exemple, si on considère que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors 1 est une famille génératrice (à un élément) car, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = z.1$ donc z est CL (complexe) de 1, c'est-à-dire que $\text{Vect}_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C}$, tandis que si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors $(1, i)$ est une famille génératrice (à deux éléments) de $\mathbb{C}$ puisque, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z = \underbrace{\text{Re}(z)}_{\in \mathbb{R}}.1 + \underbrace{\text{Im}(z)}_{\in \mathbb{R}}.i$$

donc z est CL (réelle) de 1 et i si bien que $\mathbb{C} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i)$ (alors que $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(1) = \mathbb{R}$).

De façon générale, 1 est une famille génératrice de $\mathbb{K}$ i.e. $\text{Vect}_{\mathbb{K}}(1) = \mathbb{K}$.

Proposition. Soit F une famille de vecteurs de E et soit $y \in E$. Alors $\text{Vect}(F) \subset \text{Vect}(F \cup \{y\})$.

Démonstration. Soit $x \in \text{Vect}(F)$. Il existe une famille finie de vecteurs $(x_1, \dots, x_n) \in F^n$ et une famille finie de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ si bien que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + 0.y \in \text{Vect}(F \cup \{y\}) \qquad \square$$

Avec les mains : quand on ajoute un vecteur, on engendre un vecteur « plus gros ». Il peut y avoir égalité, par exemple lorsque y est CL des $(x_i)_{i \in I}$, cf. paragraphe III.3.c.

Corollaire. Si on ajoute des vecteurs à une famille génératrice, celle-ci reste génératrice.

Démonstration. Si G est génératrice, alors $\text{Vect}(G) = E$ et la proposition précédente permet de conclure.

III.3 Familles/parties libres/liées

III.3.a Cas d'un nombre fini de vecteurs

On a vu dans le paragraphe III.2.b que les vecteurs $(1, 0), (0, 1)$ et $(1, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$, mais on peut se dire que le vecteur $(1, 1)$ est superflu. En effet, $(1, 1) = (0, 1) + (1, 0)$ et donc, si $(x, y) \in \mathbb{K}^2$:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (2x + 3y).(1, 1) + (-x - 3y).(1, 0) + (-2y - 2x).(0, 1) \\ &= (2x + 3y).[(1, 0) + (0, 1)] + (-x - 3y).(1, 0) + (-2y - 2x).(0, 1) \\ &= x.(1, 0) + y.(0, 1) \end{aligned}$$

si bien que $(1, 0)$ et $(0, 1)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{K}^2$ (ce qu'on savait déjà). On cherche à définir rigoureusement le fait qu'un vecteur soit « superflu ».

En fait, n'importe lequel des trois vecteurs est superflu, c'est-à-dire qu'on pourrait de la même façon ne garder que $(1, 0)$ et $(1, 1)$, ou $(0, 1)$ et $(1, 1)$. On préfère ne garder que $(1, 0)$ et $(0, 1)$ car ces vecteurs sont plus simples, mais c'est un choix arbitraire.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On appelle combinaison linéaire triviale la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls, i.e. $0.x_1 + \cdots + 0.x_n$.

On rappelle qu'on se place dans le cadre d'une famille finie de vecteurs dans ce paragraphe.

Remarque : La combinaison linéaire triviale est évidemment nulle (i.e. égale au vecteur nul), mais la réciproque est fausse en général.

Exemple : Si on note $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (0, 1)$ et $x_3 = (1, 1)$, alors $x_1 + x_2 - x_3 = 0$: on a une combinaison linéaire nulle qui n'est pas la combinaison linéaire triviale.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On dit qu'ils sont libres ou linéairement indépendants si la seule combinaison linéaire qui les annule est la combinaison linéaire triviale, i.e. :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

On dit également qu'ils forment une famille libre.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Si les x_i ne sont pas libres, on dit qu'ils sont liés ou linéairement dépendants.

On dit également qu'ils forment une famille liée.

Remarque : En d'autres termes, $(x_1, \dots, x_n)$ forment une famille liée s'il existe $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **non tous nuls** tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$.

Et non pas tous non nuls.

Exemples :

- $(1,1), (0,1)$ et $(1,0)$ forment une famille liée.
  La famille $\big((1,0,1),(1,1,3),(3,-1,0)\big)$ de $\mathbb{K}^3$ est-elle libre ? Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$.

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,3) + \gamma(2,-1,0) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 3\beta & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ & & 2\beta & - & 3\gamma & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

  On en déduit que $\alpha = \beta = \gamma = 0$: la famille est libre.
- La famille $\big((1,0,1),(1,1,3),(2,-1,0)\big)$ de $\mathbb{K}^3$ est-elle libre ? Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$.

$$(0,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,3) + \gamma(2,-1,0) \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 3\beta & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ & & 2\beta & - & 2\gamma & = & 0 \end{array}\right. \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccc} \alpha & = & -3\gamma \\ \beta & = & \gamma \end{array}\right.$$

  En prenant $\gamma = 1$, on voit que le triplet $(-3,1,1)$ est solution i.e. $-3(1,0,1) + (1,1,3) + (2,-1,0) = 0$: la famille est liée.

Remarque : On aurait évidemment pu prendre $\gamma = 0$ et donc on aurait trouvé $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Attention à ne pas conclure trop vite que la famille est libre ! Rappelons que la combinaison linéaire triviale (i.e. avec tous ses coefficients nuls) est TOUJOURS solution ! En d'autres termes, on doit toujours obtenir AU MOINS la solution nulle ! La famille est libre lorsque c'est la seule solution ! Par conséquent, pour prouver qu'une famille est liée, il suffit d'exhiber UNE solution non triviale i.e. avec des scalaires non tous nuls.

On aurait évidemment pu prendre $\gamma = 2024\dots$ mais le but est tout de même de prendre une solution (non nulle) la plus simple possible.

Donnons d'autres exemples.

Exemples :

- Soit $n \geqslant 1$. Montrons que les vecteurs $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)$ forment une famille libre (dans $\mathbb{K}^n$). Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$. Alors $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$ si bien que tous les λ_i sont tous nuls : la famille est libre.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_n X^n + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0 = 0$. Par unicité des coefficients d'un polynôme, $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.

- Soient n et p supérieurs ou égaux à 1. Prouvons que la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ une famille de scalaires telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0_{n,p}$$

  Pour tous i et j, le coefficient d'indice (i,j) du membre de gauche vaut $\lambda_{i,j}$ (car les autres matrices élémentaires ont un coefficient nul à cet endroit) et celui du membre de droite vaut 0 si bien que $\lambda_{i,j} = 0$: la famille est libre.
- Sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, 1 et i forment une famille libre car, si a et b sont deux réels tels que $a.1 + b.i = 0$, par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire, alors $a = b = 0$. Cependant, sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, 1 et i forment une famille liée car, si on note $a = i$ et $b = -1$, on a $a.1 + b.i = 0$ avec a et b non tous nuls.

Remarque : On peut remarquer dans les exemples ci-dessus que nous n'avons pas utilisé d'équivalence pour résoudre le système, mais que nous avons plutôt travaillé par implications. Rappelons qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

La réciproque est évidente et n'est pas écrite en général. Par conséquent, pour prouver qu'une famille est libre, il suffit de prendre des scalaires, de prouver que la CL correspondante est nulle et de prouver que les scalaires sont nuls. L'avantage est que la rédaction est alors un peu moins lourde.

Cependant, si on cherche à savoir si une famille est libre, cela ne suffit pas : imaginons que l'on trouve une famille non nulle, il faudrait effectuer la synthèse et vérifier que cette famille convient effectivement. Par conséquent, si on cherche à savoir si une famille est libre, il faut impérativement travailler par équivalences (ou ne pas oublier la synthèse), sinon il y a une (légère) faille logique si on trouve une solution non nulle.

Mais là, on commence à couper les cheveux en quatre dans le sens de la longueur...

Proposition.
- Soit $x \in E$. La famille à un élément (x) est libre si et seulement si x est non nul.
- Soit $(x_1, x_2) \in E^2$. x_1 et x_2 sont libres si et seulement si x_1 et x_2 ne sont pas colinéaires.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Attention, ce n'est plus vrai si on a au moins trois vecteurs ! Une famille dont tous les vecteurs sont deux à deux non colinéaires n'est pas forcément libre, voir ci-dessous. À partir de trois vecteurs, il n'y a rien d'autre que la définition pour montrer qu'une famille est libre.

Exemple : La famille $\big((1,0,1),(1,1,3),(2,-1,0)\big)$ est liée alors que ses vecteurs sont deux à deux non colinéaires.

III.3.b Cas général

Définition. On dit qu'une famille quelconque d'éléments de E est libre si toute sous-famille finie est libre. Elle est dite liée dans le cas contraire.

Remarques :
- Par conséquent, quand on veut commencer par prouver qu'une famille infinie est libre, on commence par se donner une sous-famille finie quelconque. On commence donc par écrire : soit $(x_1, \dots, x_n)$ une sous-famille finie. Montrons qu'elle est libre.

- Souvent, la famille infinie en question sera indicée par un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$ (par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}$ tout entier), et donc muni d'un ordre naturel. On commencera donc par écrire : soient $i_1 < \cdots < i_n$, montrons que $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ forment une famille libre. Cela permet de s'assurer que les indices sont distincts, et permet d'utiliser facilement des propriétés analytiques (voir exemples dans la suite).
- Par contraposée, une famille quelconque est liée si elle contient une sous-famille finie liée. Mais si une famille contient une sous-famille (pas forcément finie) qui est liée, c'est que la sous-famille contient une sous-famille finie liée, c'est donc aussi le cas de la famille originelle, qui est par conséquent liée. Dans tous les cas (que la sous-famille soit finie ou non), on a donc le résultat suivant :

Proposition. Si une famille contient une sous-famille liée, alors cette famille est elle-même liée.

On dira parfois qu'une « sur-famille » (terme pas franchement officiel) d'une famille liée est elle-même liée.

Par contraposée :

Corollaire. Une sous-famille d'une famille libre est libre.

Remarque : Attention, une famille dont toutes les sous-familles strictes sont libres peut être liée ! Par exemple, on peut avoir (x_1, x_2, x_3) liée mais (x_1, x_2) libre, ainsi que (x_1, x_3) et (x_2, x_3), voir le dernier exemple du paragraphe précédent. Cependant, puisqu'une famille à un élément est liée si cet élément est nul, et qu'une famille à deux éléments est liée si ces éléments sont colinéaires, on en déduit le résultat suivant.

Corollaire. Une famille de vecteurs contenant deux vecteurs colinéaires est automatiquement liée. En particulier, si une famille contient le vecteur nul, elle est automatiquement liée.

Comme on vient de le voir, réciproque fausse !

Proposition (Unicité des coordonnées sur une famille libre). Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille libre. On suppose qu'il existe deux familles presque nulles $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ telles que

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I} \beta_i x_i$$

Alors, pour tout $i \in I$, $\alpha_i = \beta_i$.

DÉMONSTRATION. On a

$$\sum_{i\in I} (\alpha_i - \beta_i) x_i$$

□

et la famille est libre donc, pour tout i, $\alpha_i - \beta_i = 0$ ce qui permet de conclure.

III.3.c Ajout/suppression de vecteurs

Proposition. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs est colinéaires des autres, c'est-à-dire s'il existe $j \in I$ tel que x_j soit CL des $(x_i)_{i\neq j}$.

DÉMONSTRATION. Supposons que la famille $(x_i)_{i\in I}$ soit liée. Il existe alors une sous-famille finie $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ liée, c'est-à-dire qu'il existe une famille de scalaires $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k} = 0$$

Les scalaire étant non tous nuls, il existe un indice noté j tel que λ_j soit non nul, si bien que

$$x_j = \frac{-1}{\lambda_j} \sum_{\substack{k=1 \\ i_k \neq j}}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}$$

c'est-à-dire que x_j est CL des autres éléments de la famille.

Réciproquement, supposons qu'il existe j tel que x_j soit CL des $(x_i)_{i \neq j}$. Il existe alors une sous-famille finie $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ avec des indices tous distincts de j et une famille de scalaires $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \in \mathbb{K}^n$ tels que

Rappelons que, par définition, une CL est à support fini.

$$x_j = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k} - x_j = 0$$

□

La famille de vecteurs $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}, x_j)$ est donc une famille liée puisque la famille de scalaires $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}, -1)$ est constituée de scalaires non tous nuls. Puisqu'elle admet une sous-famille liée, la famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée.

Proposition. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. S'il existe $j \in I$ tel que x_j soit CL des $(x_i)_{i \neq j}$, alors $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = \text{Vect}(x_i)_{i \neq j}$.

En d'autres termes, si un élément est CL des autres, il est « superflu », on peut le retirer et la famille engendre toujours le même espace. Ainsi, une famille libre est une famille ne contenant aucun vecteur « superflu ».

Démonstration. On sait déjà (cf. paragraphe III.2.b : quand on ajoute un vecteur à une famille, l'espace engendré « grossit ») que $\text{Vect}(x_i)_{i \neq j} \subset \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit donc $x \in \text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Il existe donc une famille finie de vecteurs $(x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$ et une famille finie de scalaires $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ telles que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{i_k} x_{i_k}$$

Si j n'est pas l'un des indices i_k, alors $x \in \text{Vect}(x_i)_{i \neq j}$. Supposons à présent que j soit l'un de ces indices. Sans perte de généralité, on suppose que $j = i_n$. De plus, x_j étant CL des $(x_i)_{i \neq j}$, il existe encore une famille finie de vecteurs $(x_{a_1}, \dots, x_{a_p})$ d'indices tous distincts de j et une famille finie de scalaires $(\mu_{a_1}, \dots, \mu_{a_p})$ telles que

$$x_j = \sum_{k=1}^{p} \mu_{a_k} x_{a_k}$$

et donc, finalement,

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k} x_{i_k} + \lambda_{i_n} \sum_{k=1}^{p} \mu_{a_k} x_{a_k}$$

□

En d'autres termes, x est CL de vecteurs de la famille $(x_i)_{i \neq j}$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Remarque : Comme pour les familles/parties génératrices, on dit que $A = \{x_i \,|\, i \in I\}$ est une partie libre (respectivement liée) si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre (respectivement liée). En pratique, on fait rarement la distinction et on confondra parties et familles libres, même s'il faut parfois faire attention : comme dit plus haut, un ensemble n'a pas de notion de multiplicité, un élément ne peut pas appartenir deux fois à un ensemble alors qu'il peut se trouver deux fois dans une famille (ce qui en fait alors une famille liée).

Proposition. Soit L une famille libre, et soit $y \in E$. Si $y \notin \mathrm{Vect}(L)$, alors $L \cup \{y\}$ est encore libre.

Démonstration. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une sous-famille finie de $L \cup \{y\}$. Si y ne fait pas partie de cette famille, celle-ci est libre par hypothèse. Supposons à présent que cette famille contient y : sans perte de généralité, on suppose donc que $x_n = y$, si bien que $x_1, \dots, x_{n-1}$ sont des vecteurs de la famille L. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$.

Si $\lambda_n \neq 0$, alors :

$$x_n = y = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-\lambda_k}{\lambda_n}.x_k$$

□

c'est-à-dire que y est CL de vecteurs de la famille L, ce qui est absurde. Dès lors, $\lambda_n = 0$, et donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k = 0$: on a une CL nulle de vecteurs de la famille L qui est une famille libre donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ si bien que les λ_k sont tous nuls : la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, toute sous-famille finie est libre, ce qui permet de conclure.

III.3.d Cas particulier important : familles de polynômes échelonnées en degré

Définition.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Une famille $(P_0, \dots, P_n)$ est échelonnée en degré si $P_0 \neq 0$ et si, pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.
- Une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degré si $P_0 \neq 0$ et si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$.

Remarque : En d'autres termes, une famille (finie ou infinie) échelonnée en degré est une famille de polynômes **non nuls** dont les degrés forment une suite strictement croissante.

Proposition. Une famille échelonnée en degré est libre.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille échelonnée en degré. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons les λ_i non tous nuls et posons $k = \max\{i \,|\, \lambda_i \neq 0\}$. Précisons que k existe car une partie non vide (puisque les λ_i sont non tous nuls par hypothèse) majorée (par n) de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément. Par conséquent (les λ_i pour $i > k$ sont nuls), $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_k P_k = 0$ donc

$$P_k = \frac{-\lambda_0}{\lambda_k} P_0 + \cdots + \frac{-\lambda_{k-1}}{\lambda_k} P_{k-1}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\deg(P_k) &\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} \deg\left(\frac{-\lambda_i}{\lambda_k} P_i\right) \\
&\leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant k-1} \deg(P_i) \\
&\leqslant \deg(P_{k-1}) \\
&< \deg(P_k)
\end{aligned}$$

□

En d'autres termes, k est le plus grand indice pour lequel le coefficient λ_i est non nul. Définir un tel indice k est classique, surtout quand il y a quelque part une notion de taille (degré, limites etc.). Voir d'autres exemples dans la suite.

$\deg(\alpha P) \leqslant \deg(P)$.

La famille est échelonnée en degré.

ce qui est absurde : on en déduit que les λ_i sont tous nuls, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

Si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degré, toute sous-famille finie l'est aussi donc est libre d'après ce qui précède : on en déduit que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degré.

Exemple : La famille $(2, X+1, 5X^2-2, X^4+3X^2+1)$ est libre car échelonnée en degré.

Remarque : La liberté d'une famille ne dépendant pas de l'ordre des vecteurs (car la somme est commutative), on dit parfois d'une famille de polynômes **non nuls** de degrés tous distincts est échelonnée en degré.

Remarque : ⚠ Réciproque fausse ! Une famille libre n'est pas forcément échelonnée en degré !

Exemple : Soient $a \neq b$ deux éléments de $\mathbb{K}$. Prouvons que la famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ où, pour tout $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$, $P_k = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$, est une famille libre.

Alors qu'elle n'est pas échelonnée en degré puisque, pour tout k, $\deg(P_k) = n$.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$. Supposons les λ_i non tous nuls et posons $k = \max\{i \,|\, \lambda_i \neq 0\}$, si bien que

$$\lambda_0(X-b)^n + \lambda_1(X-a)(X-b)^{n-1} + \cdots + \lambda_{k-1}(X-a)^{k-1}(X-b)^{n-k+1} + \lambda_k(X-a)^k(X-b)^{n-k} = 0$$

En simplifiant par $(X-b)^{n-k}$:

$$\lambda_0(X-b)^k + \lambda_1(X-a)(X-b)^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}(X-a)^{k-1}(X-b) + \lambda_k(X-a)^k = 0$$

Si on évalue en b, il vient : $\lambda_k(b-a)^k = 0$, ce qui est absurde puisque $\lambda_k \neq 0$ et $b \neq a$. On en déduit que tous les λ_i sont nuls, la famille est libre.

III.3.e Dans des espaces de fonctions ou de suites

Il faut bien faire attention et ne pas oublier que, dans l'égalité

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

les x_i sont des éléments de E et $0 = 0_E$ est le zéro de E i.e. le vecteur nul, le neutre de l'addition. Par exemple, si $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, 0 est la fonction nulle et les x_i sont des fonctions qu'on notera donc plutôt f_i (toujours choisir des noms adaptés : penser à Médor). Il en découle qu'une égalité du type

$$\lambda_i f_i + \cdots + \lambda_n f_n = \underbrace{0}_{\text{fonction nulle}}$$

se traduit par :

Ce sera pareil pour les suites : il ne faut pas oublier le « $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}}_{\text{Ne pas l'oublier !}} \quad , \qquad \lambda_i f_i(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = \underbrace{0}_{\text{zéro réel}}$$

Exemple : Montrer que la famille sin, exp, cos est libre (dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$).

Avec les fonctions, on s'en tire en général en utilisant des considérations de limites, de dérivées, ou en évaluant en des valeurs particulières, même si, évidemment, il y a encore d'autres méthodes, et qu'il n'y a pas unicité de la méthode justement.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \lambda_3 e^x = 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En divisant par e^x non nul, on obtient :

$$\lambda_3 = \frac{-\lambda_1 \cos(x) - \lambda_2 \sin(x)}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

puisqu'on divise une fonction bornée par une fonction qui tend vers $+\infty$. Or, $\lambda_3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda_3$ donc, par unicité de la limite, $\lambda_3 = 0$ (on pouvait aussi dire que λ_3 est constant donc tend vers 0 si et seulement si $\lambda_3 = 0$). Dès lors, l'égalité devient : $\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) = 0$. En évaluant en $\pi/2$, on obtient $\lambda_2 = 0$, et en évaluant en 0, on obtient $\lambda_1 = 0$: la famille est libre.

Remarque : Comme on vient de le voir, lorsqu'une quantité est prédominante par rapport aux autres, on peut diviser par cette quantité et passer à la limite pour prouver que le coefficient correspondant est nul. Donnons d'autres exemples de cette méthode.

Exemple : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, notons f_λ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Montrons que la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.

L'idée est simple : les f_λ tendent d'autant plus vite vers $+\infty$ que λ est grand donc, si les scalaires sont non tous nuls, cela ne peut pas être la fonction nulle car la puissance la plus grande va l'emporter.

Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ des réels (distincts) et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons les λ_i non tous nuls et posons $k = \max\{i \,|\, \lambda_i \neq 0\}$ si bien que

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_k e^{\lambda_k x} = 0$$

Dès lors :

$$\alpha_k = -\alpha_1 e^{(\lambda_1-\lambda_k)x} - \cdots - \alpha_{k-1} e^{(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x}$$

Or, pour tout $i \leqslant k-1$, $\lambda_i - \lambda_k < 0$ si bien que $e^{(\lambda_i-\lambda_k)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Par conséquent, $\lambda_k \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, ce qui est absurde car cette quantité est constante égale à $\lambda_k \neq 0$. On en déduit que la famille $(f_{\lambda_1},\dots,f_{\lambda_n})$ est libre : toute sous-famille finie est libre, donc la famille $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ est libre.

Exemple : Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on note φ_λ l'élément de $\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ défini par $\varphi(x) = x^\lambda$. Montrer que $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est une famille libre de $\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.

C'est la première question du sujet Mines MP 2009.

Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ des réels positifs (distincts). Prouvons que $(\varphi_{\lambda_1},\dots,\varphi_{\lambda_n})$ est libre. Soit $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \alpha_1 x^{\lambda_1} + \cdots + \alpha_n x^{\lambda_n} = 0$$

Ici, on va prendre la limite en 0, et on sait qu'une puissance est d'autant plus grande lorsque l'exposant est petit : c'est pour cela qu'on prend le minimum ici et pas le maximum comme précédemment.

Supposons les α_i non tous nuls et posons $k = \min\{i \,|\, \alpha_i \neq 0\}$. Par conséquent, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$\alpha_k x^{\lambda_k} + \cdots + \alpha_n x^{\lambda_n} = 0$$

En particulier, si $x > 0$, en divisant par x^{λ_k} :

$$\alpha_k = -\alpha_{k+1} x^{\lambda_{k+1}-\lambda_k} - \cdots - \alpha_n x^{\lambda_n-\lambda_k} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

puisque, par hypothèse, toutes les puissances sont strictement positives, et on conclut comme précédemment à une absurdité. La famille $(\varphi_{\lambda_1},\dots,\varphi_{\lambda_n})$ est libre, donc toute sous-famille finie est libre : la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geqslant 0}$ est libre.

Remarque : Parfois, les fonctions n'ont pas de limite, il faut donc raisonner autrement.

Exemple : Montrer que la famille $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda\geqslant 0}$ est libre.

Ici, la méthode précédente ne marche plus. L'idée est de dériver pour faire disparaître les termes un par un. Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ des réels positifs (distincts) et $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \alpha_1 \cos(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_n \cos(\lambda_n x) = 0 \qquad (1)$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Dérivons cette égalité pour obtenir :

$$-\lambda_1\alpha_1 \cos(\lambda_1 x) - \cdots - \lambda_n\alpha_n \cos(\lambda_n x) = 0$$

Recommençons :

$${\lambda_1}^2\alpha_1 \cos(\lambda_1 x) + \cdots + {\lambda_n}^2\alpha_n \cos(\lambda_n x) = 0 \qquad (2)$$

En faisant ${\lambda_n}^2 \times (1) - (2)$, il vient :

$$\left({\lambda_1}^2 - {\lambda_n}^2\right)\alpha_1 \cos(\lambda_1 x) + \cdots + \left({\lambda_{n-1}}^2 - {\lambda_n}^2\right)\alpha_{n-1} \cos(\lambda_{n-1} x) = 0$$

On se ramène à une combinaison linéaire avec une fonction de moins : on pense donc à faire une récurrence.

On peut commencer directement par la récurrence si on est à l'aise ou si on a fait le travail ci-contre au brouillon.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « Pour tous $0 \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, la famille $x \mapsto \cos(\lambda_1 x), \ldots, x \mapsto \cos(\lambda_n x)$ est libre ».
- Soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \cos(\lambda_1 x)$ n'est pas la fonction nulle (elle vaut 1 en 0) donc est une famille libre à un élément : H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_{n-1} vraie et prouvons que H_n est vraie. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left({\lambda_1}^2 - {\lambda_n}^2\right) \alpha_1 \cos(\lambda_1 x) + \cdots + \left({\lambda_{n-1}}^2 - {\lambda_n}^2\right) \alpha_{n-1} \cos(\lambda_{n-1} x) = 0$$

  Par hypothèse de récurrence, la famille $x \mapsto \cos(\lambda_1 x), \ldots, x \mapsto \cos(\lambda_{n-1} x)$ est libre donc les coefficients $\left({\lambda_1}^2 - {\lambda_n}^2\right) \alpha_1, \ldots, \left({\lambda_1}^2 - {\lambda_{n-1}}^2\right) \alpha_{n-1}$ sont tous nuls. Or, pour tout $i \leqslant n-1$, λ_i et λ_n sont positifs distincts donc n'ont pas le même carré, si bien que ${\lambda_i}^2 - {\lambda_n}^2 \neq 0$: par conséquent, $\alpha_i = 0$, c'est-à-dire que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \alpha_n \cos(\lambda_n x) = 0$: en évaluant en $x = 0$, il vient $\alpha_n = 0$, c'est-à-dire que la famille $x \mapsto \cos(\lambda_1 x), \ldots, x \mapsto \cos(\lambda_n x)$ est libre.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Toute sous-famille finie est libre : on en déduit que la famille $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \geqslant 0}$ est libre.

On aurait pu effectuer le même raisonnement avec les exponentielles : exo !

Remarque : Par exemple, l'unicité des coefficients sur une famille libre permet d'affirmer que si on a pour tout x

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cos(kx)$$

alors, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\alpha_k = \beta_k$.

Terminons avec un exemple de suite : là aussi, il ne faut pas oublier le « $\forall n \in \mathbb{N}$ ».

Exemple : Pour tout $q \in \mathbb{R}_+^*$, on note u_q la suite de terme général q^n. Montrer que la famille $(u_q)_{q \in \mathbb{R}_+^*}$ est une famille libre.

Soient donc $0 < q_1 < \cdots < q_p$ des réels distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels tels que :

Le n va être utilisé dans la suite : on manipule des suites !

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_1 {q_1}^n + \cdots + \lambda_p {q_p}^n = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Idem, supposons les λ_i non tous nuls et posons $k = \max\{i \,|\, \lambda_i \neq 0\}$ si bien que pour

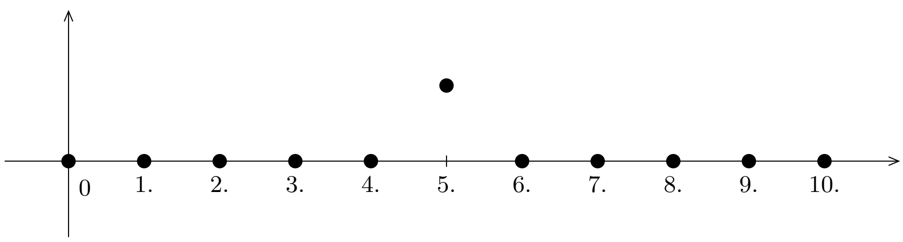
$$\lambda_1 {q_1}^n + \cdots + \lambda_k {q_k}^n = 0$$

En divisant par ${q_k}^n \neq 0$, il vient :

$$\lambda_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\left(\frac{q_1}{q_k}\right)^n + \cdots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\left(\frac{q_{k-1}}{q_k}\right)^n$$

Or, les suites de droites sont toutes géométriques de raison appartenant à $]\,0\,;1\,[$ donc tendent vers 0 et on conclut à une absurdité comme précédemment.

Exemple : Montrons que les suites de la forme $({u_n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment une famille libre, où l'on rappelle que $({u_n}^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite valant 1 en k et zéro ailleurs :



On pourrait faire comme précédemment, mais il suffit de voir qu'aucune suite n'est CL des autres : si $k \in \mathbb{N}$ et si $i_1, \dots, i_n$ sont distincts de k, alors $u^{(k)}$ ne peut pas être CL de $u^{(i_1)}, \dots, u^{(i_n)}$ puisque toutes ces suites sont nulles en k donc aucune CL de ces suites ne peut donner $u^{(k)}$. On en déduit que ces suites forment une famille libre.

III.4 Bases

Quand une famille est génératrice, on engendre tous les vecteurs de l'espace, mais certains vecteurs peuvent être superflus, tandis que lorsqu'une famille est libre, aucun vecteur n'est superflu, mais on n'est pas assuré d'engendrer tous les vecteurs de l'espace. L'idéal serait d'avoir les deux. D'où la définition suivante.

Définition. Une base est une famille à la fois libre et génératrice.

Exemples :

- Si $n \geqslant 1$, dans $\mathbb{K}^n$, la famille $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Si $n \geqslant 1$, la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Plus généralement, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- Si n et p sont supérieurs ou égaux à 1, la famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Sur $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, 1 est une base à lui tout seul, tandis que si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, 1 et i forment une base.
- Par convention, $\varnothing$ est une base de $\{0_E\}$.

Ce sont à chaque fois des familles libres et génératrices, comme on l'a montré dans les paragraphes précédents.

Remarque : Que signifie l'appellation « base canonique » ? Tout simplement que c'est la base qu'on utilise le plus souvent, ni plus, ni moins. Il y a une infinité de bases à chaque fois (sauf pour l'espace nul), mais il y en a une qui est universellement reconnue comme étant la plus simple, et on l'appelle donc base canonique pour la distinguer entre toutes. Pour faire simple : c'est à moi de vous dire si une base est considérée comme canonique ou non, vous n'avez pas le super pouvoir de décider qu'une base est canonique !

Théorème (Existence et unicité de la décomposition selon une base). Soit $B = (e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E. Alors B est une base si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires presque nulle $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $x = \displaystyle\sum_{i\in I} \alpha_i e_i$.

Remarques :

- En d'autres termes, une famille est une base si et seulement si tout élément de l'espace s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille. Avec les notations du théorème, les α_i sont appelés les coordonnées de x dans la base B.
- ⚠ Attention, un autre choix de base donne un autre choix de coordonnées ! Par exemple, les coordonnées de $(2, 3)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont 2 et 3 puisque $(2, 3) = 2.(1, 0) + 3.(0, 1)$, mais ses coordonnées dans la base (exo) $(2, 0), (0, 3)$ sont 1 et 1 puisque $(2, 3) = 1.(2, 0) + 1.(0, 3)$.
- Dans certains exercices, les coordonées de x sont notées $(x_i)_{i\in I}$ (par exemple on note parfois (x_1, x_2, x_3) un vecteur de $\mathbb{K}^3$) et, dans d'autres, $(x_i)_{i\in I}$ désigne une famille de vecteurs. Il faut donc être vigilant, car selon les cas certaines notations peuvent désigner des vecteurs ou des scalaires.

Démonstration. Supposons que B soit une base. Soit $x \in E$. L'existence d'une telle décomposition découle du caractère générateur de B, et l'unicité découle de l'unicité d'une telle écriture sur une famille libre (cf. paragraphe III.3.b).

Réciproquement, supposons que tout élément $x \in E$ admette une unique décomposition sous cette forme. L'existence d'une telle écriture prouve que B est génératrice. De plus, soit $(e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$ une sous-famille finie, et soit $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n})$ une famille de scalaire telle que $\lambda_{i_1} e_{i_1} + \cdots + \lambda_{i_1} e_{i_1} = 0$. Or, $0.e_{i_1} + \cdots + 0.e_{i_n} = 0$ donc, par unicité, les λ sont tous nuls : la famille est libre car toute sous-famille finie est libre, on a donc bien une base.

Remarque : Ce théorème est utile dans un cadre théorique et général, mais aussi dans un cadre pratique lorsqu'on travaille dans des espaces vectoriels « simples » (du type $\mathbb{K}^n$). Un exemple vaut mieux qu'un long discours.

Exemple : Montrer que la famille $(1,1,1), (1,2,3), (2,1,1)$ est une base et donner les coordonnées de $(1,-1,1)$ dans cette base.

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$. Il suffit de prouver qu'il existe α, β, γ uniques tels que

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,2,3) + \gamma(2,1,1)$$

c'est-à-dire que le système

$$\begin{cases} \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & x_1 \\ \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & x_2 \\ \alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & x_3 \end{cases}$$

admet une unique solution, ce qu'on peut faire à la main ou en montrant que la matrice associée au système, à savoir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible, donc le système est de Cramer, et l'unique solution est

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dans tous les cas (en passant par les matrices, ou en résolvant le système à la main), on trouve que le système admet une unique solution, à savoir

$$\alpha = -x_1 + 5x_2 - 3x_3, \qquad \beta = -x_2 + x_3 \qquad \text{et} \qquad \gamma = x_1 - 2x_2 + x_3$$

On en déduit que la famille est bien une base, et que les solutions ci-dessus sont les coordonnées. En particulier, les coordonnées de $(1,-1,1)$ sont $-9, 2$ et 4, c'est-à-dire que

$$(1,-1,1) = -9(1,1,1) + 2(1,2,3) + 4(2,1,1)$$

IV Opérations sur les espaces vectoriels

IV.1 Intersection de sous-espaces vectoriels

IV.1.a Cas général

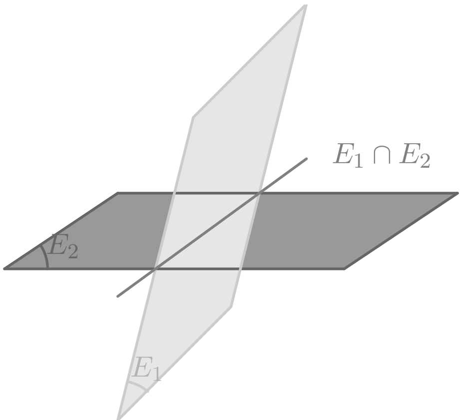
Proposition. Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E, et notons $F = \displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$. Montrons que c'est un sev de E.

Rappelons (il serait temps de le savoir) qu'un élément x de E appartient à F si et seulement si $x \in E_i$ pour tout $i \in I$.

- Pour tout i, E_i est un sev de E donc contient 0_E. En d'autres termes, $0_E \in E_i$ pour tout i donc appartient à F : F est non vide.
- Soit $(x, y) \in F^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Soit $i \in I$. Puisque x et y appartiennent à F, alors x et y appartiennent à E_i qui est un sev de E donc est stable par CL si bien que $\lambda x + \mu y \in E_i$: ceci étant vrai pour tout i, $\lambda x + \mu y \in F$: F est stable par CL, F est un sev de E.

Exemple : Dans $\mathbb{K}^3$, une intersection de plans vectoriels (distincts) est une droite vectoriel, donc encore un sev de $\mathbb{K}^3$.



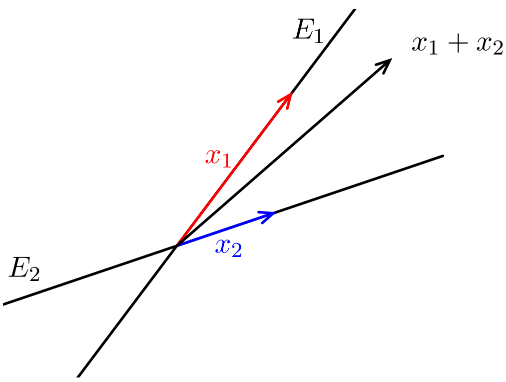
Remarque : ⚠ En général, une union de sev de E n'est pas un sous-groupe de E. C'est en fait très rarement le cas : montrons que si E_1 et E_2 sont deux sev de E, alors $E_1 \cup E_2$ est un sev de E si et seulement si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$, c'est-à-dire si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre.

C'est un cas particulier du résultat prouvé dans le chapitre 18 : une union de sous-groupes est un sous-groupe si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre, et puisqu'un sous-espace vectoriel est en particulier un sous-groupe (pour la loi +), ce résultat est encore valable pour des sous-espaces vectoriels.

Si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 \cup E_2 = E_2$ qui est un sev de E. De même si $E_2 \subset E_1$.

Réciproquement, supposons que $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$ et montrons que $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sev de E. Par hypothèse, il existe $x_1 \in E_1 \backslash E_2$ et $x_2 \in E_2 \backslash E_1$. En particulier, x_1 et x_2 appartiennent à $E_1 \cup E_2$. Supposons que $x_1 + x_2 \in E_1 \cup E_2$. Alors $x_1 + x_2 \in E_1$ ou $x_1 + x_2 \in E_2$.

Si $x_1 + x_2 \in E_1$ alors, $x_2 = (x_1 + x_2) - x_1 \in E_1$ puisque E_1 est un sev de E donc est stable par somme, ce qui est absurde. On montre de même que $x_1 \in E_2$ si $x_1 + x_2 \in E_2$ ce qui est tout aussi absurde : $x_1 + x_2$ n'appartient pas à $E_1 \cup E_2$ qui n'est donc pas stable par somme : ce n'est pas un sev de E.



Remarque : Il faut bien comprendre que, dans l'exemple précédent, $E_1 \cup E_2$ n'est que l'union des deux droites, et non pas le plan engendré par ces deux droites : $E_1 \cup E_2$ n'est donc pas un sev du plan, car on a vu que les seuls sev de $\mathbb{R}^2$ étaient $\{0\}$ et les droites et plans vectoriels. On peut cependant être amené à s'intéresser à l'espace vectoriel engendré par l'union dans certaines situations très simples : d'où la nécessité de définir la somme de deux sev dans le paragraphe IV.2.

Utilisons ce résultat pour donner une expression explicite de l'espace engendré par une partie.

Proposition. Soit A une partie non vide de E. Alors :

$$\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$$

En d'autres termes, $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sev de E qui contiennent A.

DÉMONSTRATION. Notons I l'intersection ci-dessus.

- I étant une intersection de sev de E, I est elle-même un sev de E. De plus, A est incluse dans tous les éléments qui composent l'intersection I donc $A \subset I$: I est un sev de E contenant A donc $\mathrm{Vect}(A) \subset I$.
- Réciproquement, $\mathrm{Vect}(A)$ est un sev de E contenant A donc est un élément de l'intersection donc $I \subset \mathrm{Vect}(A)$.

Une intersection est incluse dans les ensembles intersectés.

Par double inclusion, on a le résultat voulu.

IV.2 Somme de deux sous-espaces vectoriels

On se donne dans ce paragraphe E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition. On appelle somme de E_1 et E_2 l'ensemble noté $E_1 + E_2$ défini par :

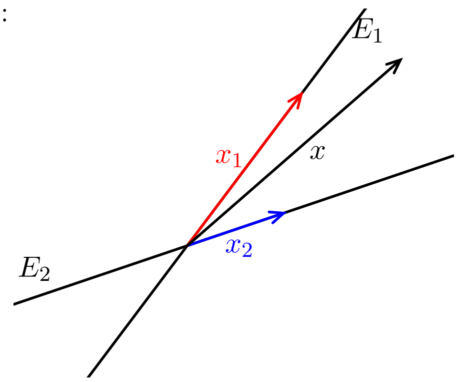
$$E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$$

L'addition étant commutative sur E, la somme d'espaces vectoriels est une loi commutative c'est-à-dire que $E_1 + E_2 = E_2 + E_1$.

Remarque : C'est l'ensemble des éléments x de E qui peuvent s'écrire sous la forme d'une somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. Avec des quantificateurs :

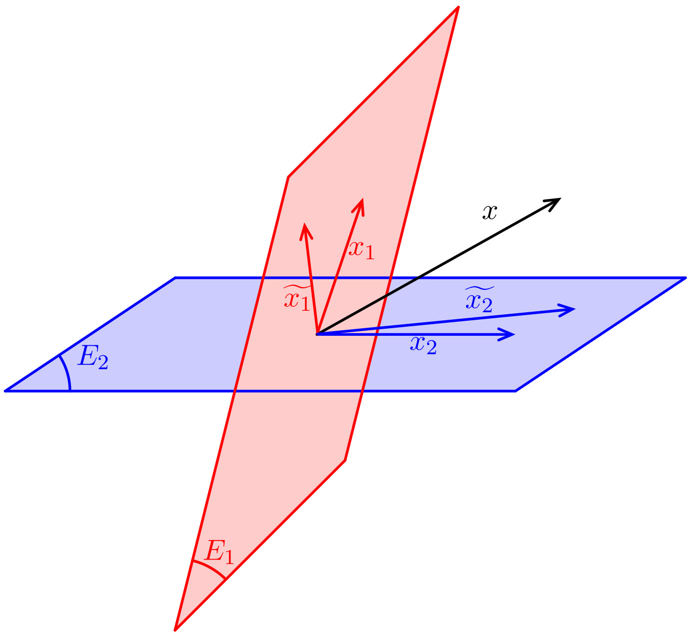
$$x \in E_1 + E_2 \iff \exists x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, x = x_1 + x_2$$

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^2$:

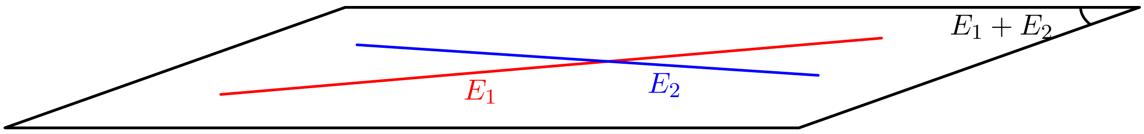


Dans cet exemple, $E = E_1 + E_2$ et il y a unicité de x_1 et de x_2, mais ce n'est pas toujours le cas.

Exemple : Dans $E = \mathbb{R}^3$, si E_1 et E_2 sont deux plans vectoriels distincts, on a encore $E = E_1 + E_2$ mais il n'y a plus unicité de x_1 et de x_2.



En effet, sur le dessin ci-dessus, on a $x = x_1 + x_2$ mais aussi $x = \widetilde{x_1} + \widetilde{x_2}$.
Enfin, on n'a pas forcément $E = E_1 + E_2$, par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, si E_1 et E_2 sont deux droites vectorielles distinctes :



Proposition. $E_1 + E_2$ est un sev de E qui contient E_1 et E_2.

Démonstration.

- E_1 et E_2 sont deux sev de E donc contiennent 0_E (qu'on notera plus simplement 0 dans cette partie). Ainsi :

$$0 = \underbrace{0}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2} \in E_1 + E_2$$

Dès lors, $E_1 + E_2$ est non vide.

- Soient $(x, y) \in (E_1 + E_2)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(x_1, y_1) \in {E_1}^2, (x_2, y_2) \in {E_2}^2$ tels que

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad y = y_1 + y_2$$

D'où :

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= \lambda x_1 + \lambda x_2 + \mu y_1 + \mu y_2 \\ &= \underbrace{\lambda x_1 + \mu y_1}_{\in E_1 \text{ car } E_1 \text{ est un sev de } E} + \underbrace{\lambda x_2 + \mu y_2}_{\in E_2} \end{aligned}$$

Par conséquent, $\lambda x + \mu y \in E_1 + E_2$: $E_1 + E_2$ es stable par combinaison linéaire donc est un sev de E.

- Soit $x \in E_1$. Alors

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2}$$

$\square$

Ainsi, $x \in E_1 + E_2$: $E_1 \subset E_1 + E_2$. De même, $E_2 \in E_1 + E_2$.

Proposition. $E_1 + E_2 = \text{Vect}(E_1 \cup E_2)$.

Remarque : Ainsi, $E_1 + E_2$ est donc le plus petit sev de E (au sens de l'inclusion) qui contient $E_1 \cup E_2$. Cela se voit particulièrement bien sur le dernier dessin ci-dessus, celui des deux droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

Démonstration.
- Puisque $\text{Vect}(E_1 \cup E_2)$ est inclus dans tous les sev qui contiennent $E_1 \cup E_2$, il est inclus dans $E_1 + E_2$ d'après la proposition précédente.
- Réciproquement, soit $x \in E_1 + E_2$. Alors il existe $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Or, $x_1 \in E_1$ donc $x_1 \in E_1 \cup E_2$. De même, $x_2 \in E_1 \cup E_2$. Il en découle que

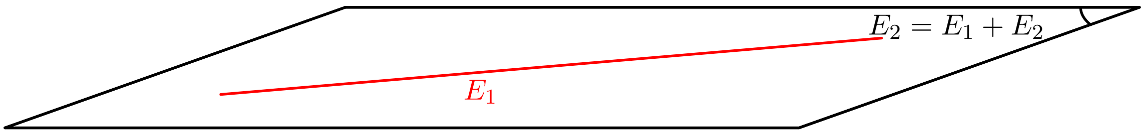
$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \\ &= 1.x_1 + 1.x_2 \in \text{Vect}(E_1 \cup E_2) \end{aligned}$$

$\square$

D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

Proposition. Si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 + E_2 = E_2$.

Réciproque vraie (exo).



Démonstration. L'inclusion $E_2 \subset E_1 + E_2$ a été prouvée plus haut. Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc $x \in E_1 + E_2$: il existe alors $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Or, $E_1 \subset E_2$ donc $x_1 \in E_2$ et E_2 est un sev de E donc est stable par somme donc $x = x_1 + x_2 \in E_2$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

IV.3 Somme directe de deux sous-espaces vectoriels

On se redonne dans ce paragraphe E_1 et E_2 deux sev de E.

Définition. On dit que E_1 et E_2 sont en somme directe si tout élément de $E_1 + E_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. La somme est alors notée $E_1 \oplus E_2$.

Voir ci-dessous pour des exemples.

Remarques :

- Avec des quantificateurs, la somme est directe si et seulement si :

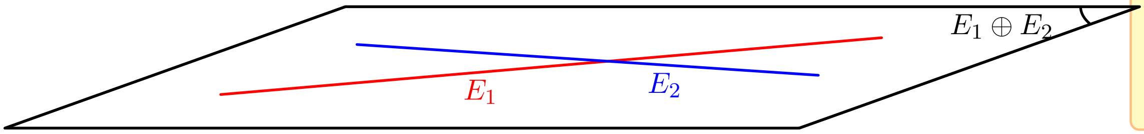
$$\forall x \in E_1 + E_2, \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2, x = x_1 + x_2$$

- D'un point de vue ensembliste, $E_1 \oplus E_2 = E_1 + E_2$, c'est-à-dire que $E_1 \oplus E_2$ est le même ensemble que $E_1 + E_2$: c'est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. La seule différence est que, quand la somme est directe, une telle écriture est unique.

Proposition. E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

L'année prochaine, vous définirez une somme directe pour un nombre quelconque (fini) de sous-espaces vectoriels de E. La CNS ci-contre ne sera plus valide, elle n'est valable que pour **deux** sev !

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$:



Démonstration. Supposons E_1 et E_2 en somme directe. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On peut écrire

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2} = \underbrace{0}_{\in E_1} + \underbrace{x}_{\in E_2}$$

Par unicité de l'écriture, $x = 0$. Ainsi, $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Réciproquement, supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et montrons que E_1 et E_2 sont en somme directe. Soit $x \in E_1 + E_2$. Soient $(x_1, \widetilde{x_1}) \in {E_1}^2, (x_2, \widetilde{x_2}) \in {E_2}^2$ tels que $x = x_1 + x_2 = \widetilde{x_1} + \widetilde{x_2}$. Alors

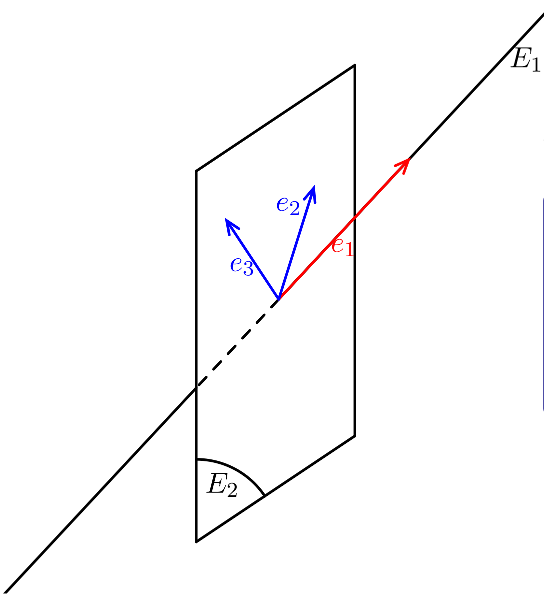
$$\underbrace{x_1 - \widetilde{x_1}}_{\in E_1} = \underbrace{x_2 - \widetilde{x_2}}_{\in E_2}$$

(car E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E). Puisque $x_1 - \widetilde{x_1}$ est égal à un élément de E_2, il appartient à E_2 donc $x_1 - \widetilde{x_1} \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Dès lors, $x_1 - \widetilde{x_1} = 0$ donc $x_1 = \widetilde{x_1}$. De même, $x_2 = \widetilde{x_2}$. D'où l'unicité : la somme est directe. □

Raisonnement fréquent ! Si un élément y appartient à un ensemble F et est égal à un élément z qui appartient à un ensemble G, alors y et z (qui sont égaux) appartiennent à $F \cap G$.

Remarque : Dans la première partie de la démonstration, on n'a en fait montré que l'inclusion $E_1 \cap E_2 \subset \{0\}$. Cependant, l'inclusion réciproque est toujours vérifiée donc est omise en pratique. En effet, E_1 et E_2 sont des sev de E donc $E_1 \cap E_2$ également donc $0 \in E_1 \cap E_2$ c'est-à-dire que $\{0\} \subset E_1 \cap E_2$.

Définition. On suppose que E_1 et E_2 sont en somme directe. Soit B une base de $E_1 \oplus E_2$. On dit que cette base est adaptée à cette somme directe si cette base est la concaténation (c'est-à-dire la « mise bout à bout ») d'une base de E_1 et d'une base de E_2.



Exemple : Sur le dessin ci-contre, e_1 est une base de E_1, (e_2, e_3) est une base de E_2 et (e_1, e_2, e_3) est une base de $E_1 \oplus E_2$ (ils sont bien en somme directe puisque leur intersection est nulle).

Théorème (Théorème de concaténation des bases). Soient B_1 et B_2 des bases respectivement de E_1 et E_2. E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si la concaténation de B_1 et B_2 est une base de $E_1 + E_2$.

Démonstration. Notons B la concaténation de B_1 et B_2. Supposons que E_1 et E_2 soient en somme directe. Soit $x \in E_1 + E_2$: il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. B_1 et B_2 étant génératrices de E_1 et E_2 respectivement, x_1 est CL d'éléments de B_1 et x_2 est CL d'éléments de B_2 donc x est CL d'éléments de B : B est génératrice. Prouvons que c'est une famille libre : soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille finie d'éléments de B et soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$. Séparons cette somme en deux sommes (finies) selon que $x_i \in B_1$ ou B_2 :

Nous n'avons pas utilisé le fait que E_1 et E_2 sont en somme directe pour prouver que B est génératrice de $E_1 + E_2$: en effet, on prouve de même que, dans tous les cas, la concaténation d'une famille génératrice de E_1 et d'une famille génératrice de E_2 est une famille génératrice de $E_1 + E_2$, même lorsque la somme n'est pas directe.

$$\sum_{x_i \in B_1} \lambda_i x_i + \sum_{x_i \in B_2} \lambda_i x_i = 0$$

si bien que

$$\underbrace{\sum_{x_i \in B_1} \lambda_i x_i}_{\in E_1} = -\underbrace{\sum_{x_i \in B_2} \lambda_i x_i}_{\in E_2}$$

Par conséquent, ces deux éléments appartiennent à $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ puisque E_1 et E_2 sont en somme directe, donc ces deux sommes sont nulles. B_1 et B_2 étant libres, tous les λ_i sont nuls : toute sous-famille finie est libre, B est une famille libre, c'est une base de $E_1 + E_2$.

Réciproquement, supposons que B soit une base de $E_1 + E_2$. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. x s'écrit donc comme combinaison linéaire d'éléments de B_1 et comme combinaison linéaire d'éléments de B_2 : il existe une sous-famille finie de B_1 notée $(x_1, \dots, x_n)$, une sous-famille finie de B_2 notée $(y_1, \dots, y_p)$ et des familles de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ telles que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j$$

si bien que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j = 0$$

□

Or, la première somme est indexée par une sous-famille de B_1 et la deuxième par une sous-famille de B_2, qui sont donc disjointes dans la concaténation B : on a donc une CL nulle d'éléments de B qui est une famille libre donc les coefficients λ_i et μ_j sont tous nuls, si bien que $x = 0$: $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et la somme est directe.

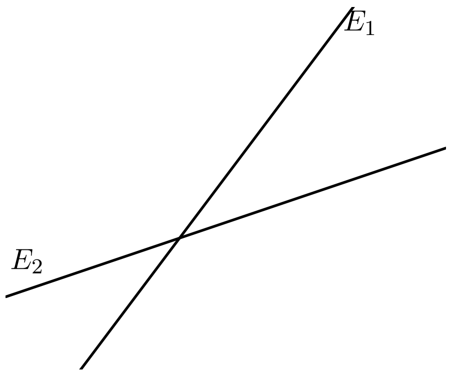
IV.4 Sous-espaces supplémentaires

Définition. E_1 et E_2 sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2$ ie si tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

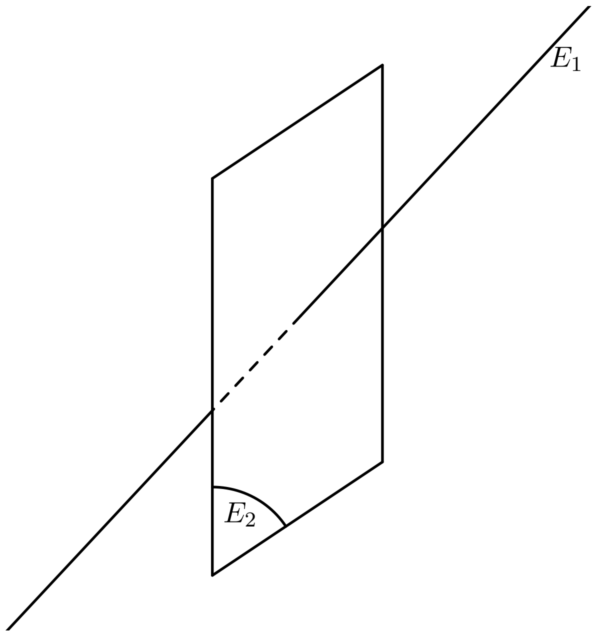
Corollaire. E_1 et E_2 sont supplémentaires si et seulement si $E = E_1 + E_2$ et $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Exemples :

- Dans $E = \mathbb{R}^2$:



- Dans $E = \mathbb{R}^3$:



- $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (cf chapitre 21).
- $\mathbb{R}^\mathbb{R} = P \oplus I$ où P est l'ensemble des fonctions paires, et I l'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$ (cf chapitre 1).
- Soient $E_1 = \text{Vect}((-1,0,1))$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x - y - z = 0\}$. Montrons que $\mathbb{K}^3 = E_1 \oplus E_2$. Soient $x = (a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $x_1 = (a_1, b_1, c_1) \in E_1$ et $x_2 = (a_2, b_2, c_2) \in E_2$. Dès lors, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_1 = (-\lambda, 0, \lambda)$ et $a_2 = b_2 + c_2$ (car x_1 et x_2 appartiennent à E_1 et E_2 respectivement). Travaillons par équivalences.

Comme on le redira plus bas (et comme on l'a déjà vu dans des chapitres antérieurs), travailler par équivalences peut parfois être un bon moyen de montrer l'existence et l'unicité d'un ou de plusieurs objets.

$$x = x_1 + x_2 \iff \begin{cases} -\lambda + b_2 + c_2 = a \\ b_2 = b \\ \lambda + c_2 = c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda + b_2 + c_2 = a \\ b_2 = b \\ b + 2c_2 = c + a \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = \dfrac{-a+b+c}{2} \\ b_2 = b \\ c_2 = \dfrac{c+a-b}{2} \end{cases}$$

Il y a existence et unicité de λ et de b_2 et de c_2, donc de x_1 et de x_2 : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires.

Remarques :

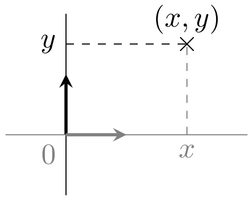
- Comme on l'a vu dans les exemples des matrices et des fonctions, l'analyse synthèse est un moyen efficace de prouver que deux espaces vectoriels sont supplémentaires lorsqu'on travaille avec des espaces vectoriels peu maniables ou juste « gros », par exemple des espaces de matrices, des espaces de fonctions etc.
- Comme on le voit dans le dernier exemple, lorsque les équivalences sont simples (typiquement lorsqu'on travaille dans des espaces simples comme $\mathbb{K}^n$), on peut également prouver l'existence et l'unicité de l'écriture $x = x_1 + x_2$, et donc que les deux espaces sont supplémentaires, en résolvant un système par équivalences. Mais cela ne marche pas toujours, donc si on a un doute : analyse-synthèse.
- Prouver que leur somme est égale à E et que leur intersection est nulle est moins efficace en pratique puisque prouver que la somme est égale à E revient peu ou prou à trouver l'unique décomposition comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2, donc revient à effectuer sans le dire l'analyse synthèse ci-dessus, ou encore une fois à raisonner par équivalences lorsque celles-ci sont simples. Là où cela peut s'avérer intéressant est lorsqu'il existe une telle décomposition évidente (voir les exemples de $\mathbb{K}^2$ ci-dessous) : on a alors automatiquement $E_1 + E_2 = E$, et alors prouver que l'intersection est nulle permet en effet d'éviter une analyse-synthèse. Mais c'est plutôt rare (dans le chapitre 30, nous verrons un moyen d'éviter une analyse synthèse en dimension finie).
- E et $\{0\}$ sont supplémentaires, et dans ce cas particulier, il y a unicité (i.e. E est l'unique supplémentaire de $\{0\}$ et réciproquement) mais, en général, il n'y a pas unicité du supplémentaire. Si E_1 et E_2 sont supplémentaires, on dit que E_2 est **un** supplémentaire de E_1.

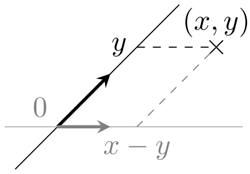
Nous montrerons même dans l'exercice 40 du chapitre 30 que, sous certaines conditions de dimension, un sous-espace vectoriel de E admet une infinité de supplémentaires.

Exemples :

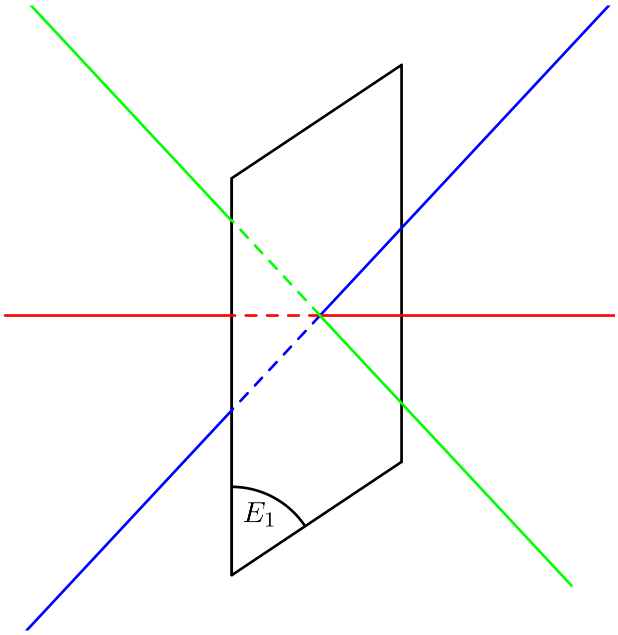
- $F = \text{Vect}((1,0))$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^2$. On a
  - ⋆ $\mathbb{K}^2 = F \oplus G$ avec $G = \text{Vect}((0,1))$ puisque $F \cap G = \{(0,0)\}$ et :
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad (x,y) = \underbrace{x(1,0)}_{\in F} + \underbrace{y(0,1)}_{\in G}.$$
  - ⋆ $\mathbb{K}^2 = F \oplus H$ avec $H = \text{Vect}((1,1))$ puisque $F \cap H = \{(0,0)\}$ et
  $$\forall (x,y) \in \mathbb{K}^2, \qquad (x,y) = \underbrace{(x-y)(1,0)}_{\in F} + \underbrace{y(1,1)}_{\in H}.$$

  Pourtant G et H sont distincts.





- Dans $\mathbb{R}^3$, toutes les droites ci-dessous sont des supplémentaires de E_1. Plus généralement, dans cet exemple uniquement, toute droite vectorielle non incluse dans E_1 est un supplémentaire de E_1.



Remarque : On ne confondra pas **un** supplémentaire avec **le** complémentaire. En effet :

- Deux sous-espaces vectoriels supplémentaires ne sont jamais disjoints (ils contiennent 0).
- le complémentaire d'un sev de E n'est pas un sev de E car ne contient pas 0 alors qu'un supplémentaire est par définition un sev de E.

Remarque : Attention de ne pas confondre « deux espaces vectoriels sont en somme directe » et « deux espaces vectoriels sont supplémentaires ». En effet, deux espaces vectoriels supplémentaires sont en somme directe, mais la réciproque est fausse ! Il faut une condition supplémentaire : que leur somme (directe) soit égale à l'espace tout entier. Par exemple, deux droites distinctes dans $\mathbb{R}^3$ sont en somme directe mais ne sont pas supplémentaires car n'engendrent pas tout l'espace !