Correction du DS n°8

Sujet groupe A

$\boxed{1}$ cf. préliminaires du sujet B.

$\boxed{2}$ G n'est pas un espace vectoriel car n'est pas stable par multiplication par un scalaire (il n'est pas non plus stable par somme). En effet, $(1,1,3,2) \in \mathrm{G}$ mais $2.(1,1,3,2) = (2,2,6,4) \notin \mathrm{G}$.

$$\boxed{\text{G n'est pas un espace vectoriel.}}$$

Montrons cependant que F est un espace vectoriel. Le vecteur nul appartient à F donc F est non vide. Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1, t_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2, t_2)$ dans F et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Tout d'abord :

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2, \lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 5(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= \lambda_1(2x_1 + 5y_1) + \lambda_2(2x_2 + 5y_2) \\ &= \lambda_1(z_1 - t_1) + \lambda_2(z_2 - t_2) \qquad \text{car } u_1 \text{ et } u_2 \in \mathrm{F} \\ &= (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) - (\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathrm{F}$: F est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sev de $\mathbb{R}^4$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier :

$$\boxed{\text{F est un espace vectoriel.}}$$

Donnons une base de F. Commençons par en donner une famille génératrice, c'est-à-dire l'écrire sous forme de Vect. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in \mathrm{F} &\iff 2x + 5y = z - t \\ &\iff z = 2x + 5y + t \end{aligned}$$

On aurait évidemment pu exprimer chaque variable en fonction des trois autres. Dès lors :

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \{(x, y, 2x + 5y - t) \,|\, (x,y,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \{x(1,0,2,0) + y(0,1,5,0) + t(0,0,-1,1) \,|\, (x,y,t) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((1,0,2,0), (0,1,5,0), (0,0,-1,1)\right) \end{aligned}$$

En d'autres termes, ces trois vecteurs forment une famille génératrice de F (ce n'est pas très compliqué de vérifier qu'ils sont effectivement dans F, au moins au brouillon, pour se rassurer). Montrons qu'ils sont libres : soient a, b, c trois réels tels que

$$a(1,0,2,0) + b(0,1,5,0) + c(0,0,-1,1) = 0$$

On trouve aisément (première coordonnée pour a, deuxième pour b, quatrième pour c) que $a = b = c = 0$ donc la famille est libre : c'est une base de F.

$$\boxed{(1,0,2,0), (0,1,5,0), (0,0,-1,1) \text{ forment une base de F.}}$$

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$ Attention, on demande s'ils sont libres, pas de montrer qu'ils le sont. On travaille donc par équivalences. Soient a, b, c trois réels.

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & b & - & c & = & 0 \\ a & - & b & - & 2c & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ & - & 3b & - & 3c & = & 0 \\ & - & 3b & - & 3c & = & 0 \end{array} \right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -b \\ b & = & -c \end{array} \right. \end{aligned}$$

Dès lors, $a=1, b=-1$ et $c=1$ conviennent : la famille est liée.

$$\boxed{\text{La famille est liée.}}$$

3.(b) Soient a, b, c trois réels.

$$ax_1+bx_2+cx_3=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ -a & - & b & + & c & = & 0 \\ a & + & 3b & + & c & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & 2b & - & c & = & 0 \\ & & b & & & = & 0 \\ & & b & + & 2c & = & 0 \end{array}\right. \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1$$

On en déduit que $b=c$ puis que $c=0$ et $a=0$:

$$\boxed{\text{La famille est libre.}}$$

4 Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_0 \sin^0+\cdots+\lambda_n \sin^n=0$ c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \textstyle\sum_{k=0}^n \lambda_k \sin^k(x)=0$$

Notons $\mathrm{P}=\lambda_n \mathrm{X}^n+\cdots+\lambda_1 \mathrm{X}+\lambda_0$. Il en découle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(\sin(x))=0$. On en déduit que, pour tout x, $\sin(x)$ est racine de P donc P s'annule (au moins) sur $[-1\,;1]$ qui est infini donc P est le polynôme nul, c'est-à-dire que tous les λ_i sont nuls :

$$\boxed{\text{La famille est libre.}}$$

5 Faisons comme en classe. Soit $u=(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Notons cet espace F.

$$u \in \mathrm{F} \iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, u=a(1,2,1,2)+b(1,0,1,-1)+c(-1,4,-1,7)$$

$$\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & - & c & = & x \\ 2a & & & + & 4c & = & y \\ a & + & b & - & c & = & z \\ 2a & - & b & + & 7c & = & t \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & - & c & = & x & \\ & - & 2b & + & 6c & = & y-2x & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2-2\mathrm{L}_1 \\ & & & & 0 & = & z-x & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3-\mathrm{L}_1 \\ & - & 3b & + & 9c & = & t-2x & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4-2\mathrm{L}_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & - & c & = & x & \\ & & b & - & 3c & = & -y/2+x & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2/-2 \\ & & & & 0 & = & z-x & \\ & - & 3b & + & 9c & = & t-2x & \end{array}\right.$$

$$\iff \exists(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcll} a & + & b & - & c & = & x & \\ & & b & - & 3c & = & -y/2+x & \\ & & & & 0 & = & z-x & \\ & & & & 0 & = & t+x-3y/2 & \mathrm{L}_4 \leftarrow \mathrm{L}_4+3\mathrm{L}_2 \end{array}\right.$$

Or, les deux premières lignes sont toujours vraies : prendre $c=0, b=-y/2+c$ et prendre le a qu'il faut... En d'autres termes :

$$\boxed{u \in \mathrm{F} \text{ si et seulement si } z-x=0 \text{ et } 2x-3y+2t=0.}$$

6 Travaillons par analyse synthèse. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $f_1 \in \mathrm{E}_1$ et $f_2 \in \mathrm{E}_2$ uniques telles que $f=f_1+f_2$.

Analyse : si f_1 et f_2 conviennent. En intégrant l'égalité $f=f_1+f_2$ entre 0 et 3, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^3 f_1(t)+f_2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 f_1(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^3 f_2(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$= \int_0^3 f_2(t)\,\mathrm{d}t$$

En effet, la première intégrale est nulle puisque $f_1 \in \mathrm{E}_1$. Puisque f_2 est constante, alors elle est égale à sa valeur en 0 et donc l'intégrale ci-dessus est égale à $f_2(0) \times 3 = 3f_2(0)$, c'est-à-dire que f_2 est la fonction constante égale à $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$, et donc $f_1 = f - f_2 = f - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Synthèse : soient f_2 la fonction constante égale à $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$, et $f_1 = f - f_2 = f - \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors f_2 est constante par définition, $f = f_1 + f_2$ et on a, en notant λ la valeur de f_2 (plus facile pour calculer la valeur de son intégrale) :

$$\begin{aligned}\int_0^3 f_1(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^3 \lambda\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t - 3\lambda \\ &= 0\end{aligned}$$

si bien que $f_1 \in \mathrm{E}_1$: on en déduit l'existence et l'unicité de f_1 et f_2. Toute fonction s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 donc les deux espaces sont supplémentaires, et cette écriture est $f = f_1 + f_2$ avec :

$$f_1 = f - \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad f_2 = \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t$$

La projection sur E_1 parallèlement à E_2 est donc

$$\boxed{p : f \mapsto f_1 = f - \frac{1}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

et la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 est

$$\boxed{s : f \mapsto f_1 - f_2 = f - \frac{2}{3}\int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

7 On peut raisonner comme dans la question précédente et travailler par analyse-synthèse, mais comme on est dans $\mathbb{R}^3$, on peut aussi travailler par équivalences. Soiet $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $u_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathrm{E}_1$ et $u_2 = (x_2, x_2, z_2) \in \mathrm{E}_2$. Puisque $u_2 \in \mathrm{E}_2$ alors $u_2 = (x_2, x_2, x_2)$. De plus, $u_1 \in \mathrm{E}_1$ donc $u_1 = (-2y_1 - 3z_1, y_1, z_1)$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
u = u_1 + u_1 &\iff \begin{cases} -2y_1 - 3z_1 + x_2 = x \\ y_1 + x_2 = y \\ z_1 + x_2 = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_1 + x_2 = y & \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_2 \\ -2y_1 - 3z_1 + x_2 = x \\ z_1 + x_2 = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_1 + x_2 = y \\ -3z_1 + 3x_2 = x + 2y & \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 + 2\mathrm{L}_1 \\ z_1 + x_2 = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_1 + x_2 = y \\ z_1 + x_2 = z \\ -3z_1 + 3x_2 = x + 2y & \mathrm{L}_2 \leftrightarrow \mathrm{L}_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_1 + x_2 = y \\ z_1 + x_2 = z \\ 6x_2 = x + 2y + 3z & \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 3\mathrm{L}_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

8 cf. question 3.(a) de la partie I du sujet B.

9 Cherchons une base du noyau. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in\mathrm{Ker}\,(f)\iff\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0\\ -x & + & y & & & = & 0\\ & & y & + & z & = & 0\\ x & + & y & + & 2z & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{cccccl} x & & + & z & = & 0\\ & y & + & z & = & 0 \quad \mathrm{L}_2\leftarrow \mathrm{L}_2+\mathrm{L}_1\\ & y & + & z & = & 0\\ & y & + & z & = & 0 \quad \mathrm{L}_4\leftarrow \mathrm{L}_4-\mathrm{L}_1\end{array}\right.$$

$$\iff x=y=-z$$

Par conséquent $$\mathrm{Ker}\,(f)=\{(x,x,-x)\,|\,x\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}\,(1,1,-1)$$

On en déduit que $(1,1,-1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}\,(f)$, et une famille libre (une famille à un élément est libre ssi cet élément est non nul) donc

$$\boxed{(1,1,-1) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\,(f).}$$

Cherchons à présent une base de l'image. L'image d'une famille génératrice étant une famille génératrice de l'image, on sait que $\mathrm{Im}\,(f)$ est engendrée par

$$u(e_1)=(1,-1,0,1),u(e_2)=(0,1,1,1),u(e_3)=(1,0,1,2)$$

On sait déjà qu'ils ne sont pas libres car, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(f))=2$. On peut chercher s'ils sont libres, comme d'habitude, et voir que $u(e_3)=u(e_1)+u(e_2)$, ou on peut le voir directement, et alors

$$\mathrm{Vect}\,(u(e_1),u(e_2),u(e_2))=\mathrm{Vect}\,(u(e_1),u(e_2))$$

mais ce n'est même pas nécessaire : on sait que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2 donc deux vecteurs libres en forment nécessairement une base ! Or, $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont libres car deux vecteurs non proportionnels, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{u(e_1)=(1,-1,0,1) \text{ et } u(e_2)=(0,1,1,1) \text{ forment une base de } \mathrm{Im}\,(u).}$$

10 On peut montrer que F est un espace vectoriel à la main, i.e. il est non vide et stable par CL, mais on peut le faire directement en l'écrivant sous forme de Vect. Par définition de F :

$$\mathrm{F}=\{x\mapsto ax^4\cos(x)+bx^3\cos(x)+cx^2\cos(x)+dx\cos(x)+e\cos(x)\,|\,(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^4\}=\mathrm{Vect}\,(x\mapsto x^k\cos(x))_{k\in[\![0\,;4]\!]}$$

On en déduit donc que la famille $(x\mapsto x^k\cos(x))_{k\in[\![0\,;4]\!]}$ est génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Attention, ce ne sont pas des fonctions polynomiales : on ne peut pas dire qu'elles forment une famille échelonnée en degré ! Soient donc $a,b,c,d,e\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, ax^4\cos(x)+bx^3\cos(x)+cx^2\cos(x)+d\cos(x)+e\cos(x)=0$$

En particulier, pour tout $x\in[\,0\,;\pi/2\,[$, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ donc le polynôme $a\mathrm{X}^4+b\mathrm{X}^3+c\mathrm{X}^2+d\mathrm{X}+e$ admet une infinité de racines donc est le polynôme nul : $a=b=c=d=e=0$ donc la famille est libre, c'est une base, et F admet une base à 5 éléments donc est de dimension 5.

$$\boxed{(x\mapsto x^k\cos(x))_{k\in[\![0\,;4]\!]} \text{ est une base de F qui est donc de dimension 5.}}$$

11 cf. exercice 15 du chapitre 30.

12 Appliquons le théorème du rang à $g_{|\,\mathrm{Im}\,(f)}$:

$$\dim(\mathrm{Im}\,(f))=\dim(\mathrm{Ker}\,(g_{|\,\mathrm{Im}\,(f)}))+\dim(\mathrm{Im}\,(g_{|\,\mathrm{Im}\,(f)}))=\dim(\mathrm{Ker}\,(g)\cap\mathrm{Im}\,(f))+\dim(\mathrm{Im}\,(g\circ f))$$

Or, $\mathrm{Ker}\,(g)\cap\mathrm{Im}\,(f)\subset\mathrm{Ker}\,(g)$ donc $\dim(\mathrm{Im}\,(f))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\,(g))+\dim(\mathrm{Im}\,(g\circ f))$. D'après le théorème du rang appliqué à f et $g\circ f$:

$$\dim(\mathrm{E})-\mathrm{Ker}\,(f)\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\,(g))+\dim(\mathrm{E})-\dim(\mathrm{Ker}\,(g\circ f))$$

ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\dim(\mathrm{Ker}\,(g\circ f))\leqslant\dim(\mathrm{Ker}\,(g))+\dim(\mathrm{Ker}\,(f))}$$

13 On montre aisément que $\mathrm{A}^2=\mathrm{I}_n$ donc

$$\boxed{f \text{ est une symétrie.}}$$

Notons donc $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = (x,y,z)\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, f(x,y,z) = (-x,-y,-z)\}$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Commençons par E_1.

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & + & 4z & = & x \\ -x & - & y & - & 2z & = & y \\ -x & - & 2y & - & z & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & 2y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Les trois lignes sont proportionnelles donc $(x,y,z) \in E_1$ si et seulement si $x+2y+2z=0$: E_1 est donc le plan d'équation $x+2y+2z=0$ (si on veut en donner une base, on peut donner $(-2,1,0)$ et $(-2,0,1)$). Passons à E_2 :

$$(x,y,z) \in E_1 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 4y & + & 4z & = & -x \\ -x & - & y & - & 2z & = & -y \\ -x & - & 2y & - & z & = & -z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 4x & + & 4y & + & 4z & = & 0 \\ -x & & & - & 2z & = & 0 \\ -x & - & 2y & & & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & & & = & -2z \\ x & & & & & = & -2y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & z \\ x & = & -2z \end{array}\right.$$

Par conséquent, E_2 est l'ensemble des (x,y,z) tels que $x=-2z$ et $y=z$ c'est-à-dire $\mathrm{Vect}\,(-2,1,1)$.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

14 f est évidemment linéaire. Pour montrer que $f^2 = f$, on peut le faire matriciellement (exo), ou le faire à la main : soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors :

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= f(x, y+z, 0) \\ &= (x, (y+z)+0, 0) \\ &= f(x,y,z) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est un projecteur. Plus précisément, f est le projecteur sur $\mathrm{Ker}\,(f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}\,(f)$. Or, on montre aisément que $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff x=0$ et $y+z=0$ donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\,(0,1,-1)$, et $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\,((1,0,0),(0,1,0)$ (ou le plan d'équation $z=0$).

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

15 f est évidemment linéaire. Soit $P \in \mathrm{Ker}\,(f)$. Alors $P = -XP'$. Attention, si P n'est pas constant, alors ces deux polynômes ont le même degré donc on ne peut pas conclure aussi facilement. Si $P \neq 0$, notons $d = \deg(P)$ et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant. Alors $P' = da_dX^{d-1} + \cdots$ donc $XP' = da_dX^{d-1} + \cdots$ et puisque ces deux polynômes sont égaux, ils ont même coefficient dominant donc $a_d = -da_d$ et $a_d \neq 0$ donc $d = -1$ ce qui est impossible. Dès lors, $\mathrm{Ker}\,(f) = \{0\}$: f est linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective.

$$\boxed{f \text{ est un isomorphisme.}}$$

16 cf. exercice 4 du chapitre 31.

17 On cherche donc $M_C(f)$. D'après la formule de changement de base, puisque $A = \mathrm{Mat}_B(f)$:

$$\mathrm{Mat}_C(f) = P_{C,B}(f) \times A \times P_{B,C}(f)$$

Or, par définition d'une matrice de changement de base :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B,C}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Un pivot de Gauß simple donne :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{C,B}} = (\mathrm{P}_{\mathrm{C,B}}(f))^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Après calculs
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

18 cf. question 3.(b) de la partie I du sujet B.

19 Notons $\mathrm{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à f. On cherche $\mathrm{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(\varepsilon_1) = f(\varepsilon_3) = 0$ et $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$. Notons $\varepsilon_1 = f(e_1) = (1, j, j^2)$, prenons $\varepsilon_2 = e_1$ si bien qu'on a $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$. Enfin, on cherche ε_3 un autre élément du noyau : il est immédiat que $e_2 - je_1 = (-j, 1, 0)$ est dans $\mathrm{Ker}\,(f)$. On prend donc $\varepsilon_1 = (1, j, j^2), \varepsilon_2 = (1, 0, 0), \varepsilon_3 = (-j, 1, 0)$. On montre aisément que c'est une famille libre et qu'elle convient : A et A′ représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

$$\boxed{\text{A et A}' \text{ sont semblables.}}$$

20 D'après la formule de Graßmann, $\dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) = \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{G}) - \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G})$. Or, $\mathrm{F} + \mathrm{G} \subset \mathrm{E}$ donc $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}) \leqslant n$ ce qui permet de conclure (l'inégalité change de sens à cause du signe $-$).

$$\boxed{\text{Si F et G sont des sev de E alors } \dim(\mathrm{F} \cap \mathrm{G}) \geqslant \dim(\mathrm{F}) + \dim(\mathrm{F}) - n.}$$

Sujet groupe B
Préliminaires

1 Commençons par expliciter σ (attention, encore une fois, on va de la droite vers la gauche) :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 3 & 8 & 2 & 9 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

La décomposition en produit de cycles à supports disjoints est alors immédiate :

$$\boxed{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 4 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 \end{pmatrix}}$$

On en déduit comme dans la première démonstration du cours une décomposition en produit de transpositions :

$$\boxed{\sigma = (1 \quad 5)(5 \quad 8)(8 \quad 4)(4 \quad 3)(3 \quad 7)(7 \quad 9)(2 \quad 6) \text{ donc } \varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1}$$

> Si on choisit l'autre méthode pour expliciter une décomposition en produit de transpositions, on trouve :
> $$\sigma = (1 \quad 9)(4 \quad 8)(1 \quad 7)(2 \quad 6)(5 \quad 4)(3 \quad 4)(3 \quad 1)$$

Partie I. Préliminaires, premiers exemples

1 On pourrait travailler par double implication, mais ici on peut travailler par équivalences.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } f &\iff \exists x \neq 0, f(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \neq 0, (f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(x) = 0 \\ &\iff \exists x \neq 0, x \in \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \\ &\iff \mathrm{Ker}\,(f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \neq \{0\} \\ &\iff f - \lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas injectif} \end{aligned}$$

Or, E est de dimension finie, et un endomorphisme en dimension finie est injectif si et seulement s'il est bijectif (cf. cours).

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } f \text{ ssi } f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas injectif, ssi } f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas bijectif.}}$$

2 Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ représenté par M. On sait que λ est valeur propre de f si et seulement si λ est valeur propre de f. D'après la question précédente et le cours :

$$\begin{aligned}\lambda \text{ est valeur propre de } f &\iff f-\lambda\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} \text{ n'est pas bijectif}\\ &\iff \mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de M si et seulement si } \mathrm{rg}\,(\mathrm{M}-\lambda\mathrm{I}_n) \neq n.}$$

3.(a) Soient $x_1=(a_1,b_1,c_1)$ et $x_2=(a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^3$ et λ_1 et λ_2 deux réels. Tout d'abord :

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 = (\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2)$$

si bien que

$$\begin{aligned}f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) &= (-4(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2)+2(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2)-2(\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2),\\ &\qquad -6(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2)+4(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2)-6(\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2),\\ &\qquad -(\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2)+(\lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2)-3(\lambda_1 c_1+\lambda_2 c_2))\\ &= \lambda_1(-4a_1+2b_1-2c_1, -6a_1+4b_1-6c_1, -a_1+b_1-3c_1)\\ &\qquad +\lambda_2(-4a_2+2b_2-2c_2, -6a_2+4b_2-6c_2, -a_2+b_2-3c_2)\\ &= \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{f \text{ est linéaire.}}$$

Enfin, en mettant comme d'habitude $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ en haut et e_1, e_2, e_3 à droite (avec e_1, e_2, e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$), on trouve :

$$\boxed{\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$$

3.(b) Soit donc $\lambda \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -4-\lambda & 2 & -2 \\ -6 & 4-\lambda & -6 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3-\lambda \\ -6 & 4-\lambda & -6 \\ -4-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} && \mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_3\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3+\lambda \\ -6 & 4-\lambda & -6 \\ -4-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} && \mathrm{L}_1 \leftarrow -\mathrm{L}_1\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3+\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 12+6\lambda \\ 0 & -2-\lambda & -2+(4+\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix} && \begin{array}{r}\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2+6\mathrm{L}_1\\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3+(4+\lambda)\mathrm{L}_1\end{array}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3+\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 12+6\lambda \\ 0 & -2-\lambda & \lambda^2+7\lambda+10 \end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3+\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 12+6\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda-2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Précisons que $\lambda^2+\lambda-2=0 \iff \lambda=1$ ou $\lambda=-2$ (et, évidemment, $-2-\lambda=0 \iff \lambda=-2$). Il y a donc trois cas de figure.

- Premier cas : $\lambda \neq 1, -2$. Alors $\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda \mathrm{I}_3)=3$.
- Deuxième cas : $\lambda=1$. Alors :

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 4\\ 0 & -3 & 18\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=2$$

- Troisième cas : $\lambda=-2$. Alors :

$$\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=1$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=3 \text{ si } \lambda\neq 1,-2\,;\ \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=2 \text{ si } \lambda=1\,;\ \mathrm{rg}\,(\mathrm{A}-\lambda\mathrm{I}_3)=1 \text{ si } \lambda=-2.}$$

Dès lors $$\boxed{\text{A admet deux valeurs propres : 1 et } -2.}$$

> D'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3))=1$ et $\dim(\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3))=2$. Vous direz l'an prochain que 1 est valeur propre de multiplicité 1 et que -2 est valeur propre de multiplicité 2. De plus, c'est cohérent avec la question suivante (nous trouverons un degré de liberté pour le premier calcul, et deux pour le second calcul).
>
> Précisons que cette matrice est tirée du sujet Maths 2 CCINP MPI 2024 : on demandait (même si c'était formulé différemment) les valeurs propres et les vecteurs propres de A, ainsi que la matrice de passage dans la nouvelle base.

$\boxed{\textbf{3.(c)}}$ On cherche donc à résoudre les équations $\mathrm{AX}=\mathrm{X}$ et $\mathrm{AX}=-2\mathrm{X}$. Soit donc $\mathrm{X}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (on identifie sans scrupule vecteur de $\mathbb{K}^3$ et matrice colonne de taille 3, cf. cours).

$$\mathrm{AX}=\mathrm{X} \iff \begin{cases}-4x+2y-2z=x\\ -6x+4y-6z=y\\ -x+y-3z=z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}-5x+2y-2z=0\\ -6x+3y-6z=0\\ -x+y-4z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x-y+4z=0 & \mathrm{L}_1\leftrightarrow -\mathrm{L}_3\\ -6x+3y-6z=0\\ -5x+2y-2z=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x-y+4z=0\\ -3y+18z=0 & \mathrm{L}_2\leftrightarrow \mathrm{L}_2+6\mathrm{L}_1\\ -3y+18z=0 & \mathrm{L}_3\leftrightarrow \mathrm{L}_3+5\mathrm{L}_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x-y=-4z\\ y=6z\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=2z\\ y=6z\end{cases}$$

En d'autres termes, $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A}-\mathrm{I}_3)=\{(2z,6z,z)\,|\,z\in\mathbb{K}\}=\mathrm{Vect}\,((2,6,1))$. Notons donc $e_1=(2,6,1)$. Recommençons avec $\lambda=-2$.

$$\mathrm{AX} = -2\mathrm{X} \iff \begin{cases} -4x + 2y - 2z = -2x \\ -6x + 4y - 6z = -2y \\ -x + y - 3z = -2z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + 2y - 2z = 0 \\ -6x + 6y - 6z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff -x + y - z = 0$$

$$\iff x = y - z$$

Dès lors :

$$\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} + 2\mathrm{I}_3) = \{(y - z, y, z) \,|\, (y, z) \in \mathbb{K}^2\} = \{y(1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \,|\, (y, z) \in \mathbb{K}^2 = \mathrm{Vect}\,((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$$

Notons donc $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (-1, 0, 1)$, et prouvons que $\mathrm{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base. On peut prouver que c'est une famille libre à 3 éléments en dimension 3 donc une base, mais le plus rapide est sans doute de calculer son déterminant. D'après la règle de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 - 6 = -3 \neq 0$$

et donc B' est bien une base (une famille à n éléments en dimension n est une base si et seulement si son déterminant est non nul).

$$\boxed{e_1 = (2, 6, 1), e_2 = (1, 1, 0) \text{ et } e_3 = (-1, 0, 1) \text{ forment une base de vecteurs propres de A.}}$$

3.(d) Première méthode : simplement à l'aide de la définition de la matrice d'un endomorphisme dans une base donnée. En écrivant $f(e_1), f(e_2), f(e_3)$ au-dessus et e_1, e_2, e_3 à droite, on trouve :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Deuxième méthode : avec une matrice de passage. D'après la question précédente :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve comme d'habitude (pivot de Gauß, ou à l'aide de la formule avec les cofacteurs, puisqu'on a déjà le déterminant) que :

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}} = (\mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1/3 & -1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathrm{B}'}(f) = \mathrm{P}_{\mathrm{B}',\mathrm{B}} \times \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \mathrm{P}_{\mathrm{B},\mathrm{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Partie II. Existence d'une valeur propre dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire

1.(a) C'est immédiat :

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{M} = (a) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}), \text{ alors } a \text{ est valeur propre (réelle) de M.}}$$

1(b) Puisque $n = 1$, alors on se place sur $\mathbb{R}$ (ou sur $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ ce qui revient au même). Si on note $\mathrm{A} = (a)$ et $\mathrm{B} = (b)$ et $e_1 = (1)$, alors $\mathrm{A}e_1 = (a) = ae_1$ et $\mathrm{B}e_1 = (b) = be_1$ donc e_1 est un vecteur propre commun à A et B.

$$\boxed{\text{A et B ont un vecteur propre commun.}}$$

> Remarquons que le fait que A et B commutent ne sert à rien. Mais cela sera utile en dimension supérieure.

2.(a) D'après la partie I, λ est valeur propre de M ssi $\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible, si et seulement si $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{M}$ n'est pas inversible (multiplier une matrice par -1 ne change pas son inversibilité), si et seulement si son déterminant est nul.

$$\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de M si et seulement si } \lambda \text{ est racine de son polynôme caractéristique.}}$$

2.(b) χ_{M} étant de degré m impair et unitaire, $\chi_{\mathrm{M}}(x) \sim_{+\infty} x^m \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. De même ($m$ étant impair), $\chi_{\mathrm{M}}(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. χ_{M} étant polynomiale, elle est continue donc, d'après le TVI, χ_{M} s'annule sur $\mathbb{R}$ donc :

$$\boxed{\text{M admet une valeur propre réelle.}}$$

> Attention, on ne pouvait pas utiliser la deuxième solution proposée dans l'exercice 16 du chapitre 19 car celle-ci repose sur la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$, qui découle du théorème de d'Alembert-Gauß qu'on prouve dans ce problème !

3.(a) Découle de la question précédente.

$$\boxed{\text{A admet une valeur propre réelle notée } \lambda.}$$

3.(b) Supposons donc que $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n$. Alors tout vecteur (non nul par définition d'un vecteur propre) est vecteur propre de A (puisque, si $x \neq 0$, alors $\mathrm{A}x = \lambda x$). Toujours d'après la question précédente, B admet une valeur propre μ, et donc un vecteur propre x qui est donc aussi vecteur propre de A (pour λ).

$$\boxed{\text{Si } \mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_n, \text{ alors A et B admettent un vecteur propre commun.}}$$

3.(c) Fait dans l'exercice 7 du chapitre 29 (en remplaçant u par $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f$ et v par g).

$$\boxed{\text{Le noyau et l'image de } \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f \text{ sont stables par } g.}$$

3.(d) Par hypothèse, $f \neq \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ donc $\mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) \neq \mathrm{E}$ et donc $\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) < n$. De plus, λ étant une valeur propre de f, on sait (cf. partie I) que $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f$ n'est pas injectif donc $\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) > 0$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Ker}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) + \dim \mathrm{Im}\,(\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - f) = n$$

Or, la dimension du noyau étant strictement inférieure à n, celle de l'image est strictement positive, et puisque la dimension du noyau est strictement positive, celle de l'image est strictement inférieure à n. Les deux dimension sont donc strictement inférieures à n, et leur somme vaut n, qui est impair, donc l'une des deux est donc impaire.

$$\boxed{\text{L'un de des deux espaces est de dimension impaire strictement inférieure à } n.}$$

Notons F cet espace. D'après la question 3.(c), F est stable par g. De même, F est aussi stable par f. Par conséquent, $g_{|\mathrm{F}}$ et $f_{|\mathrm{F}}$ sont des endomorphismes de F qui est de dimension impaire strictement inférieure à n, et ces deux endomorphismes commutent car f et g commutent. Par hypothèse de récurrence, ils admettent un vecteur propre commun, donc f et g également.

$$\boxed{\text{La récurrence est terminée.}}$$

Partie III. Existence d'une valeur propre dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ Découle de la $\mathbb{R}$-linéarité de la transposition sur $\mathbb{C}$ (attention, elle n'est pas linéaire sur $\mathbb{C}$!). Plus précisément, si M_1 et $M_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tous i et j,

$$\overline{(M_1+M_2)_{i,j}} = \overline{(M_1)_{i,j} + (M_2)_{i,j}} = \overline{(M_1)_{i,j}} + \overline{(M_2)_{i,j}} = (\overline{M_1} + \overline{M_2})_{i,j}$$

Puisque c'est vrai pour tous i et j, cela signifie que $\overline{M_1 + M_2} = \overline{M_1} + \overline{M_2}$. De même, $\overline{\lambda M_1} = \lambda \overline{M_1}$:

$$\boxed{\text{C'est bien un endomorphisme de } \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \text{ vu comme un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ Soient $M_1, M_2 \in \Lambda_n$ et λ_1, λ_2 deux réels. On a alors :

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2}\right)^\top &= \left(\lambda_1 \overline{M_1} + \lambda_2 \overline{M_2}\right)^\top && \text{Question précédente}\\
&= \lambda_1 (\overline{M_1})^\top + \lambda_2 (\overline{M_2})^\top && \text{Linéarité de la transposition}\\
&= -\lambda_1 M_1 - \lambda_2 M_2 && \text{car } M_1 \text{ et } M_2 \in \Lambda_n
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in \Lambda_n$: Λ_n est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier :

$$\boxed{\Lambda_n \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$$

Λ_n n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car n'est pas stable par multiplication par un scalaire complexe (alors qu'il contient la matrice nulle et est stable par somme). Plus précisément (il faut un contre-exemple explicite !), $M = iI_n \in \Lambda_n$ (puisque $\overline{i} = -i$) mais $iM = -I_n \notin \Lambda_n$.

$$\boxed{\Lambda_n \text{ n'est pas un } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel.}}$$

$\boxed{\textbf{2}}$ Soit $M = A + iB \in \Lambda_n$ (avec des notations évidentes : A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$). Alors $\overline{M} = A - iB$ (car A et B sont réelles donc ne changent pas quand on conjugue) donc $\overline{M}^\top = A^\top - iB^\top$ (linéarité de la transposition). Or, $M \in \Lambda_n$ donc $\overline{M}^\top = -M = -A - iB$. Par unicité de la partie réelle et de la partie imaginaire (c'est le cas sur $\mathbb{R}$ donc coefficient par coefficient donc toujours vrai pour des matrices), $A^\top = -A$ et $-iB^\top = -iB$ donc A est antisymétrique et B est symétrique, et la réciproque est évidente. En d'autres termes :

$$\Lambda_n = A_n(\mathbb{R}) + iS_n(\mathbb{R})$$

Or, cette somme est directe (on montre aisément que l'intersection est nulle) donc $\dim(\Lambda_n) = \dim(A_n(\mathbb{R})) + \dim(iS_n(\mathbb{R}))$ et la dimension de $iS_n(\mathbb{R})$ est égale à celle de $S_n(\mathbb{R})$ (on obtient une base à partir d'une base de $S_n(\mathbb{R})$ ou l'application $M \mapsto iM$ est un isomorphisme entre ces deux espaces) donc $\dim \Lambda_n = n(n-1)/2 + n(n+1)/2 = n^2$ (on obtient ces deux dimensions avec les mains comme en cours).

$$\boxed{\Lambda_n \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension } n^2 \text{ impair car } n \text{ est impair.}}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ Il est évident qu'on considère encore Λ_n comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, puisque ce n'est même pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

- La linéarité de f et g est évidente (et ne découle même pas de la question 1.(a) ou de la linéarité de la transposition puisque c'est à A et à B qu'on applique ces résultats). Prouvons-la tout de même : soient B_1 et $B_2 \in \Lambda_n$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) &= \frac{1}{2}\left(A(\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) + (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2)\left(\overline{A}\right)^\top\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda_1 AB_1 + \lambda_2 AB_2 + \lambda_1 B_1 \left(\overline{A}\right)^\top + \lambda_2 B_2 \left(\overline{A}\right)^\top\right)\\
&= \lambda_1 \left(\frac{1}{2}\left(AB_1 + B_1\left(\overline{A}\right)^\top\right)\right) + \lambda_2 \left(\frac{1}{2}\left(AB_2 + B_2\left(\overline{A}\right)^\top\right)\right)\\
&= \lambda_1 f(B_1) + \lambda_2 f(B_2)
\end{aligned}$$

  c'est-à-dire que f est linéaire, et idem pour g.

- Il faut également prouver que f et g sont à valeurs dans Λ_n. Soit donc $\mathrm{B} \in \Lambda_n$.

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{f(\mathrm{B})}\right)^{\top} &= \left(\overline{\left(\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB}+\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)\right)}\right)^{\top} \\
&= \left(\frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{B}}\left(\overline{\overline{\mathrm{A}}}\right)^{\top}\right)\right)^{\top} && \mathbb{R}\text{-linéarité de la conjugaison} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\overline{\mathrm{AB}}\right)^{\top}+\left(\overline{\mathrm{B}}\left(\overline{\overline{\mathrm{A}}}\right)^{\top}\right)^{\top}\right) && \mathbb{R}\text{-Linéarité de la transposition} \\
&= \frac{1}{2}\left(\overline{\mathrm{B}}^{\top}\overline{\mathrm{A}}^{\top}+\overline{\overline{\mathrm{A}}}\,\overline{\mathrm{B}}^{\top}\right) && \text{Transposée d'un produit} \\
&= \frac{1}{2}\left(-\mathrm{B}\overline{\mathrm{A}}^{\top}-\mathrm{AB}\right) && \mathrm{B}\in\Lambda_n \text{ et } \overline{\overline{\mathrm{A}}}=\mathrm{A} \\
&= -f(\mathrm{B})
\end{aligned}
$$

donc $f(\mathrm{B}) \in \Lambda_n$: f est un endomorphisme de Λ_n, et idem pour g.

- Prouvons à présent que f et g commutent. D'une part,

$$
\begin{aligned}
f(g(\mathrm{B})) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}g(\mathrm{B})+g(\mathrm{B})\overline{\mathrm{A}}^{\top}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathrm{A}\times\frac{1}{2i}\left(\mathrm{AB}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)+\frac{1}{2i}\left(\mathrm{AB}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)\times\overline{\mathrm{A}}^{\top}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}-\mathrm{AB}\overline{\mathrm{A}}^{\top}+\mathrm{AB}\overline{\mathrm{A}}^{\top}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}^{\top}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}^{\top}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
g(f(\mathrm{B})) &= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{A}f(\mathrm{B})-f(\mathrm{B})\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\mathrm{A}\times\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB}+\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)-\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB}+\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)\times\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}+\mathrm{AB}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}-\mathrm{AB}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}-\mathrm{B}\left(\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^{\top}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{4i}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}^{\top}\right)^2\right) \\
&= f(g(\mathrm{B}))
\end{aligned}
$$

En conclusion $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont deux endomorphismes de } \Lambda_n \text{ qui commutent.}}$

4 Découle de la partie précédente : on a deux endomorphismes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire (d'après les questions 1.(b) et 2) qui commutent (d'après la question précédente) donc admettent un vecteur propre commun. Or, ce sont des endomorphismes de Λ_n donc le vecteur propre (non nul par définition d'un vecteur propre) est dans Λ_n, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{B}\in\Lambda_n \text{ non nulle et } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels tels que } f(\mathrm{B})=\lambda\mathrm{B} \text{ et } g(\mathrm{B})=\mu\mathrm{B}.}$$

5 On sait donc que :

$$\frac{1}{2}\left(\mathrm{AB}+\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^\top\right)=\lambda\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{2i}\left(\mathrm{AB}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^\top\right)=\mu\mathrm{B}$$

D'où
$$\mathrm{AB}+\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^\top=2\lambda\mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{AB}-\mathrm{B}\left(\overline{\mathrm{A}}\right)^\top=2i\mu\mathrm{B}$$

Par somme
$$2\mathrm{AB}=(2\lambda+2i\mu)\mathrm{B}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{AB}=(\lambda+i\mu)\mathrm{B}}$$

Si on note $\mathrm{C}_1,\dots,\mathrm{C}_n$ les vecteurs colonnes de B, alors :

$$\mathrm{A}(\mathrm{C}_1|\cdots|\mathrm{C}_n)=(\lambda+i\mu)(\mathrm{C}_1|\cdots|\mathrm{C}_n)$$

En d'autres termes, pour tout $j\in[\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{AC}_j=(\lambda+i\mu)\mathrm{C}_j$. C'est en particulier le cas si C_j est non nul, ce qui donne donc un vecteur propre :

$$\boxed{\text{Tout vecteur colonne non nul de B est vecteur propre de B.}}$$

B étant non nulle, elle admet au moins un vecteur colonne non nul, et donc A admet au moins un vecteur propre. A étant quelconque (et pas forcément antihermitienne) :

$$\boxed{\text{Toute matrice de taille } n \text{ admet au moins un vecteur propre et donc une valeur propre.}}$$

Partie IV. Cas général

$\boxed{1}$ Fait (de deux façons différentes) dans le DS n° 2 : par récurrence forte sur n ou par analyse synthèse, en utilisant la décomposition de n en produit de facteurs premiers.

$$\boxed{\text{Tout entier } n\geqslant 1 \text{ s'écrit de façon unique sous la forme } n=2^a\times b \text{ avec } b \text{ impair.}}$$

$\boxed{2}$ On a déjà prouvé le résultat si n est impair donc si n s'écrit sous la forme $n=2^0\times b$ avec b impair : c'est ce qu'on a prouvé dans la partie précédente. On a prouvé le résultat pour des matrices, et on a vu (cf. intro du devoir) qu'on pouvait confondre matrices et endomorphismes.

$$\boxed{\text{L'initialisation a déjà été prouvée.}}$$

$\boxed{3}$ Rappelons (cf. cours ou cf. partie III, ce résultat étant encore valable sur $\mathbb{C}$ si $\mathbb{C}$ est le corps de base) que $\mathrm{A}_n(\mathbb{C})$ est de dimension $n(n-1)/2$. Il suffit de prouver que $n(n-1)/2$ peut s'écrire sous la forme $2^c\times d$ avec d impair et $c<a$. Or, $n=2^a\times b$ donc

$$\frac{n(n-1)}{2}=2^{a-1}\times b\times(2^a\times b-1)$$

Or, b est impair et $2^a\times b-1$ est impair donc $b\times(2^a\times b-1)$ est impair si bien que, par unicité, $c=a-1$ et $d=b(2^a\times b-1)$. En particulier, $c<a$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à } \mathrm{A}_n(\mathbb{C}).}$$

$\boxed{4}$ Il suffit de prouver que f et g sont des endomorphismes de $\mathrm{A}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'ils sont à valeurs dans $\mathrm{A}_n(\mathbb{C})$, et qu'ils commutent : on pourra ensuite, comme on vient de le voir, appliquer l'hypothèse de récurrence, et f et g admettront un vecteur propre commun, ce qui est précisément le résultat recherché. Rappelons que A est une matrice quelconque, pas forcément antisymétrique. Soit $\mathrm{B}\in\mathrm{A}_n(\mathbb{C})$. Tout est analogue à la question 3 de la partie précédente :

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{B})^\top &= \left(\mathrm{AB}+\mathrm{BA}^\top\right)^\top \\
&= (\mathrm{AB})^\top+\left(\mathrm{BA}^\top\right)^\top && \text{Linéarité de la transposition} \\
&= \mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top+\mathrm{AB}^\top && \text{Transposée d'un produit} \\
&= -\mathrm{BA}^\top-\mathrm{AB} && \text{B est antisymétrique}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f(\mathrm{B})^\top=-f(\mathrm{B})$: $f(\mathrm{B})$ est antisymétrique, donc f est bien un endomorphisme de $f(\mathrm{B})$, et idem pour g. Enfin, on prouve aisément que f et g commutent puisque :

$$f(g(\mathrm{B})) = g(f(\mathrm{B})) = \mathrm{A}^2\mathrm{BA}^\top + \mathrm{AB}\left(\mathrm{A}^\top\right)^2$$

ce qui permet de conclure, comme on l'a écrit ci-dessus.

$$\boxed{\text{Il existe B antisymétrique non nulle et } \lambda \text{ et } \mu \in \mathbb{C} \text{ tels que } f(\mathrm{B}) = \lambda\mathrm{B} \text{ et } g(\mathrm{B}) = \mu\mathrm{B}.}$$

En d'autres termes, $\mathrm{AB} + \mathrm{BA}^\top = \lambda\mathrm{B}$ et $\mathrm{ABA}^\top = \mu\mathrm{B}$. En multipliant la première égalité par A à gauche, on obtient $\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mathrm{ABA}^\top = \lambda\mathrm{AB}$. Or, on a également $\mathrm{ABA}^\top = \mu\mathrm{B}$ donc $\mathrm{A}^2\mathrm{B} + \mu\mathrm{B} = \lambda\mathrm{AB}$ ce qui permet de conclure en mettant tout à gauche (attention de ne pas factoriser par B en écrivant $(\mathrm{A}^2 - \lambda\mathrm{A} + \mu)\mathrm{B}$: additionner des matrices et des scalaires n'a aucun sens !).

$$\boxed{(\mathrm{A}^2 - \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0}$$

5 $\mathrm{A}^2 - \lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{I}_n = (\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)$, donc on a l'égalité $(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{B} = 0$. Si on écrit $\mathrm{B} = (\mathrm{C}_1|\cdots|\mathrm{C}_n)$ comme ci-dessus (avec les C_j les vecteurs colonnes de B), on obtient :

$$(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)(\mathrm{C}_1|\cdots|\mathrm{C}_n) = ((\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{C}_1|\cdots|(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{C}_n) = (0|\cdots|0)$$

où les 0 représentent évidemment la matrice colonne nulle. En d'autres termes, pour tout j, $(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{C}_j = 0$ et c'est en particulier vrai pour les vecteurs colonnes qui sont non nuls.

$$\boxed{\text{Pour tout Y vecteur colonne non nul de B, } (\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{Y} = 0.}$$

6 Si $(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)\mathrm{Y} = 0$ alors $\mathrm{Y} \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - s\mathrm{I}_n)$, c'est-à-dire que Y est vecteur propre (car non nul) de A (pour la valeur propre s). Sinon, alors $(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)(\mathrm{AY} - s\mathrm{Y}) = 0$ c'est-à-dire que $\mathrm{AY} - s\mathrm{Y}$ est un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{A} - r\mathrm{I}_n)$, donc un vecteur propre (car non nul) de A pour la valeur propre r. Dans tous les cas :

$$\boxed{\text{A admet un vecteur propre.}}$$

7.(a) Supposons donc que f soit une homothétie. D'après le premier point de l'hérédité, g admet une valeur propre, donc aussi un vecteur propre noté x, qui est aussi propre pour f (car tout vecteur non nul est vecteur propre de f) donc :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est une homothétie, alors } f \text{ et } g \text{ admettent un vecteur propre commun.}}$$

7.(b) Le fait que f admet une valeur propre découle du premier point de l'hérédité que nous avons prouvé dans la question 6. De même que dans la question 3.(d), ces deux espaces sont non triviaux. Notons la dimension du noyau sous la forme $2^c \times d$ et celle de l'image $2^k \times m$ avec d et m impairs. Si c et k sont strictement supérieurs à a alors, d'après le théorème du rang, $n = 2^c \times d + 2^k \times m$ est divisible par 2^{a+1} ce qui est absurde : l'un des deux a donc une dimension qui est de la bonne forme.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

7.(c) Cet ensemble est non vide d'après la question précédente (les deux espaces, le noyau et l'image, étant stables par f et par g, on le montrerait comme précédemment). C'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc elle admet un plus petit élément (inutile de minorer quand on est sur $\mathbb{N}$!).

$$\boxed{\text{D admet un plus petit élément.}}$$

7.(d) Supposons que $r_0 = a$. Si la restriction de f à E_0 n'est pas une homothétie, alors, comme précédemment, f admet une valeur propre μ et on obtient de même un sous-espace de E_0 non trivial (différent de $\{0\}$ et de E_0) vérifiant toutes les conditions, et le fait que cet espace soit strictement inclus dans E_0 contredit la minimalité de n_0 : la restriction de f à E_0 est alors une homothétie, et E_0 étant stable par g, la restriction de g à E_0 admet un vecteur propre, qui est encore une fois aussi un vecteur propre pour la restriction de f à E_0, ce qui permet de conclure.

> Ce cas ne peut en fait pas se produire : si on note x un vecteur propre commun (dont nous venons de prouver l'existence), alors $\mathrm{Vect}\,(x)$ vérifie toutes les conditions voulues donc $n_0 = 1$ par minimalité de n_0, ce qui contredit le fait que $n_0 = 2^a \times b$ avec a non nul.

7.(e) Supposons enfin que $r_0 < a$. E_0 est stable par f et g donc les restrictions de f et g à E_0 sont des endomorphismes de E_0 et puisque $r_0 < a$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : les deux restrictions admettent un vecteur propre commun, et donc f et g également, ce qui clôt la récurrence.

$\boxed{\text{Le deuxième point est démontré.}}$

Partie V. Théorème de d'Alembert-Gauss

1 cf. exercice 21 du chapitre 33.

2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, qu'on note $P = b_n X^n + \cdots + b_0$ avec $n = \deg(P) \geqslant 1$ (car P non constant) et $b_n \neq 0$. Notons $Q = P/b_n$ (possible car $a_n \neq 0$) qui est donc unitaire et qu'on note $Q = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ (on a donc $b_i = a_i/a_n$ pour tout i). D'après la question précédente, si on note C la matrice de la question précédente (avec les a_i les coefficients de Q), alors $\chi_C(X) = \det(XI_n - C) = Q$. Or, d'après la partie précédente, C admet une valeur propre donc, d'après la question 2.(a) de la partie II, cette valeur propre est racine de $\chi_C = Q$ donc de P car $P = a_n \times Q$. En particulier, P admet une racine complexe.

$\boxed{\text{Le théorème de d'Alembert-Gauß est démontré.}}$

> Ce n'est vraiiiiiiiiment pas la démonstration la plus courte ni même la plus intuitive ou la plus simple, mais celle-ci a l'avantage d'être accessible en première année. Vous verrez sans doute une ou deux preuves plus courtes l'an prochain (aucune preuve n'est au programme mais ce sont des applications classiques de résultats de deuxième année).