Devoir Maison n° 24

Exercice - Mais c'est quoi ça ? De l'algèbre ? De l'analyse ?

On va supposer que f est $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \geq 2$ fixé. On suppose enfin que f et $f^{(n)}$ sont bornées et on va montrer que $f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ sont également bornées. On notera

$$M_0 = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad M_n = \sup_{\mathbb{R}} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ et on écrit $f(x_0 + k)$ à l'aide de $f(x_0)$:

$$f(x_0 + k) = f(x_0) + kf'(x_0) + \frac{k^2 f''(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{k^{n-1} f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + R_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{k^i f^{(i)}(x_0)}{i!} + R_k$$

1. A l'aide de la formule de Taylor reste intégral ou de l'inégalité de Taylor-Lagrange (au choix), majorer $|R_k|$ à l'aide de M_n, n et k (les deux formules ne donnent pas la même majoration, mais comme on ne veut pas une majoration optimale, ce n'est pas important). Dans la suite on note :

$$y_i = \frac{f^{(i-1)}(x_0)}{(i-1)!} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & n & n^2 & \ldots & n^{n-1} \end{pmatrix} \quad Z = AY = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

2. Donner la valeur de z_1 et majorer $|z_1|$ à l'aide de M_0, M_n et n. Même chose avec z_2 (attention aux indices/ordres des dérivées).
3. Conclure (on admettra que A est inversible, cf cours, et on pourra inverser A et majorer les coordonnées de Y à la louche).

Problème - D'après Centrale PC 2015 (même pas peur)

Dans ce problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul. Pour tout endomorphisme f de E on définit la suite $\left(f^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \mathrm{Id}_E \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \qquad \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par un endomorphisme f si, pour tout $x \in F, f(x) \in F$.

Partie A :

Dans cette partie, f est un endomorphisme de E.

1. Soit F une droite de E engendrée par un vecteur u (non nul). Montrer que F est stable par f si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(u) = \lambda u$ (on dit que u est un vecteur propre et que λ est une valeur propre).
2. (a) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces vectoriels de E stables par f.

   (b) Dans cette question uniquement, on suppose que f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice

   $$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   À l'aide d'un dessin, caractériser géométriquement l'application f, puis expliquer rapidement pourquoi elle n'admet que les deux sous-espaces stables donnés à la question précédente.

   (c) Montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont stables par f.

(d) On suppose dans cette question uniquement que f est non nulle et non injective, et que E est de dimension finie impaire. Montrer que f admet au moins quatre sous-espaces stables.

3. (a) Montrer que si F est engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$ vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (cf définition dans la première question), alors F est stable par f.

   (b) Que peut-on dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

4. On suppose que E est de dimension finie et admet une base de vecteurs propres $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire dans E stable par f. On pourra partir d'une base de F et utiliser le théorème de la base incomplète.

Partie B :

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2 et f est un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p éléments de $\mathbb{K}$ distincts tels que

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_k$$

où, pour tout $k \in [\![1\,;\, p]\!], E_k = \{x \in E \mid f(x) = \lambda_k x\}$, c'est-à-dire que tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des E_k (vous verrez les sommes directes de plus de deux espaces vectoriels l'an prochain). Le but de cette partie est de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si

$$F = \bigoplus_{k=1}^{p} (F \cap E_k)$$

c'est-à-dire si et seulement si tout élément de F s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des $F \cap E_k$.

1. Montrer que si F vérifie cette condition, alors il est stable par f.

2. On veut à présent montrer la réciproque : soit F un sous-espace de E stable par f et soit $x \in F$ non nul. Montrer l'existence et l'unicité de $x_1, \ldots, x_p \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tels que

$$x = \sum_{k=1}^{p} x_k$$

3. Puisque x est non nul, les x_i sont non tous nuls. Soit r le nombre de x_i non nuls. Quitte à renuméroter les x_i, on suppose que les r premiers exactement sont non nuls, c'est-à-dire que

$$x = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

   avec $x_1, \ldots, x_r$ non nuls. On note $V_x = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_r)$. Montrer que $B_x = (x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.

4. Montrer que pour tout $j \in [\![1\,;\, r]\!], f^{j-1}(x) \in V_x$ et donner la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1 \leq j \leq r}$, écrits dans la base B_x.

5. Montrer que cette matrice est inversible (on utilisera sans démonstration l'exemple du cours). En déduire que $\left(f^{j-1}(x)\right)_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x.

6. En déduire que pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!], x_i \in F$ et conclure.

Partie C :

On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme canoniquement associé.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ stable par D. On suppose que F est de dimension finie d non nulle. Soit $(P_1, \ldots, P_d)$ une base de F.

   (a) Soit R un polynôme de cette base de degré maximal, soit n son degré. Montrer que F est inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$.

   (b) Montrer que la famille $\left(D^i(R)\right)_{0 \leq i \leq n}$ est libre dans F.

   (c) En déduire que $F = \mathbb{R}_n[X]$.

3. Soit F un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie stable par D.

   (a) Montrer que pour tout n, F contient un polynôme P de degré supérieur ou égal à n.

(b) En déduire que $F = \mathbb{R}[X]$, puis donner tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par D.

4. Donner un endomorphisme u de $\mathbb{R}[X]$ tel qu'aucun sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie non nulle ne soit stable par u. Existe-t-il un sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ distinct de $\mathbb{R}[X]$ et de $\{0\}$ qui soit stable par u ?
5. On considère dans cette question un endomorphisme f de E de dimension $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
   (a) Déterminer l'ensemble des $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit une base de E.
   (b) Dans le cas où cette condition est vérifiée, donner la matrice de f dans cette base.
   (c) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1}.

Problème (facultatif) - Matrices nilpotentes et tableaux de Young

Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $p \leq n$. Les deux derniers DM nous donne la suite d'inclusions strictes suivantes :

$$\{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \cdots \subsetneq K_{p-1} \subsetneq K_p = \mathbb{R}^n.$$

De plus, on notera pour tout $i, k_i = \dim K_i$ et si $i \geq 1$, $\lambda_i = k_i - k_{i-1}$. D'après le DM précédent, la suite $(\lambda_i)_i$ s'essouffle, c'est-à-dire qu'elle est décroissante, et nulle à partir du rang p.

Partie 0 - Préliminaires

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i$.

Partie 1 - Un exemple en dimension 10

Dans cette partie, on étudie un exemple qui va nous montrer comment cela marche dans le cas général. On suppose que $n = 10$ et qu'on a $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$. u est donc nilpotent d'indice 3.

1. Donner les dimensions de K_1 et K_2.
2. Soit H_2 un supplémentaire de K_2 dans K_3. Soit (e_1, e_2) une base de H_2. Montrer que $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre.
3. Montrer que $(e_1, e_2, u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre.
4. Montrer que $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont dans K_2 mais pas dans K_1.
5. Montrer que $\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) \cap K_1 = \{0\}$.
6. En déduire que l'on peut compléter $(u(e_1), u(e_2))$ avec deux vecteurs (e_3, e_4) de façon à obtenir une base d'un supplémentaire de K_1 dans K_2 (ie une base de H_1 tel que $K_2 = H_1 \oplus K_1$).
7. Montrer que $(e_1, e_2, u(e_1), u(e_2), u^2(e_1), u^2(e_2), e_3, e_4, u(e_3), u(e_4))$ est une base de $\mathbb{R}^{10}$.
8. Donner la matrice de u dans la base $(u^2(e_1), u(e_1), e_1, u^2(e_2), u(e_2), e_2, u(e_3), e_3, u(e_4), e_4)$.

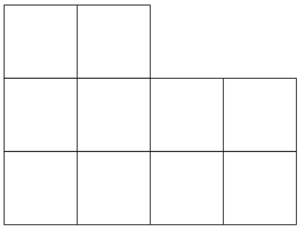
Partie 2 - Tableaux de Young

C'est exactement la même chose dans le cas général (mais c'est un peu plus délicat à rédiger car il y a de nombreux indices) :

- On commence par une base de H_{p-1}, supplémentaire du dernier noyau non nul, disons (comme dans notre exemple) e_1, e_2.
- On compose par u, ce qui donne $u(e_1), u(e_2)$, qui seront dans $K_{p-1} \backslash K_{p-2}$, et qui formeront une famille libre, et qu'on peut compléter pour avoir une base d'un supplémentaire de K_{p-2} : dans notre exemple, cela donne $(u(e_1), u(e_2), e_3, e_4)$.
- On compose encore par u, ce qui donne encore une famille libre de $K_{p-2} \backslash K_{p-3}$ et qu'on complète en base d'un supplémentaire de K_{p-3} (si on n'a pas déjà le bon nombre de vecteurs)
- et on itère le procédé.

On peut alors montrer que tous les vecteurs obtenus forment une base de E. Il y a un moyen très simple de représenter tout cela : les tableaux de Youg.

On commence par se donner un tableau à plusieurs étages, la première ligne (celle du bas) ayant λ_1 cases, la deuxième λ_2 etc.



Par définition, pour tout i, $\lambda_i = k_{i+1} - k_i$ donc λ_i est la différence $\dim(K_{i+1}) - \dim(K_i)$, donc la dimension de H_i, un supplémentaires de K_i dans K_{i+1}, et on met dans chaque ligne une base de H_i. On raisonne comme ci-dessus :

- On commence par une base de H_{p-1}, supplémentaire de l'avant-dernier noyau non nul, disons (comme dans notre exemple) e_1, e_2, et on écrit ces vecteurs dans la dernière ligne.
- On écrit dans la ligne du dessous les images des vecteurs de la ligne précédente, dans notre exemple $u(e_1), u(e_2)$, qui seront dans H_{p-2}. Si la ligne est remplie, on passe à la ligne encore en dessous, sinon on complète en base avec d'autres vecteurs, e_3 et e_4 dans notre exemple.
- et on itère le procédé.

Ensuite il suffit de remplir la dernière ligne avec les de H_{p-1}, c'est-à-dire le supplémentaire du dernier noyau non nul, ici e_1, e_2. Ensuite, on descend, et on remplit les cases du dessous avec les images, donc ici avec $(u(e_1), u(e_2))$. Si la ligne du dessous est remplie, c'est bon, sinon on complète en une base de H_1, supplémentaire de K_1 dans K_2 et ainsi de suite. Sur notre exemple, cela donne le tableau ci-dessous, appelé **tableau de Young de l'endomorphisme u** :

e_1	e_2			H_2
$u(e_1)$	$u(e_2)$	e_3	e_4	H_1
$u^2(e_1)$	$u^2(e_2)$	$u(e_3)$	$u(e_4)$	H_0

Il est très facile de donner la matrice d'une matrice nilpotente dans une base adaptée connaissant son tableau de Young : la première colonne est formée de $e_1, u(e_1), \dots, u^{k-1}(e_1)$ avec k la hauteur de la première colonne, et donc la matrice de u dans la base $(u^{k-1}(e_1), u^{k-2}(e_1), \dots, u(e_1), e_1)$ est :

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[k]}$$

En mettant bout à bout les familles $(u^{k-1}(e_1), u^{k-2}(e_1), \dots, u(e_1), e_1, u^{p-1}(e_2), u^{p-2}(e_2), \dots, u(e_2), e_2)$, on obtient une matrice « par blocs » dont les blocs sont les différentes matrices J_k, J_p etc. (appelées blocs de Jordan de taille k, p etc.). Avec l'exemple ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_2 \end{pmatrix}$$

Il est donc très facile de donner la matrice d'un endomorphisme nilpotent donné dans une base bien choisie connaissant son tableau de Young et, réciproquement, il est très facile de donner le tableau de Young d'une matrice de cette forme : les colonnes sont les tailles des blocs de Jordan (lorsque les tailles sont rangées dans l'ordre décroissant).

1. Donner sans justification le tableau de Young et la matrice (sous la forme la plus simple possible) d'un autre endomorphisme nilpotent $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{10})$ vérifiant cette fois $\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = \lambda_5 = 1$.

2. Le but de cette question est de montrer que deux matrices nilpotentes sont semblables si et seulement si elles ont même tableau de Young. Les tableaux de Young permettent donc de classifier complètement, à un changement de base près, les matrices nilpotentes ! On se donne E un espace vectoriel de dimension n.
   (a) Montrer que si A et B sont deux matrices semblables, alors $\ker A$ et $\ker B$ ont même dimension.
   (b) En conclure que si N_1 et N_2 sont deux matrices nilpotentes semblables, elles ont mêmes tableaux de Young.
   (c) En se souvenant que la relation « être semblables » est une relation d'équivalence, montrer la réciproque (on pourra se contenter de quelques phrases et illustrer avec l'exemple de la question 1).

3. Donner sans justification toutes les matrices nilpotentes de taille 6 (à changement de base près bien sûr) et les tableaux de Young associés (il y en a 11, en comptant la matrice nulle).