Corrigé DM n°19

Exercice - Préliminaires

1.(a) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right) \\ &= \frac{x^{5/2}}{12} + \mathrm{o}(x^{5/2}) \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f(x) \sim \frac{x^{5/2}}{12} \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

1.(b) Comme en TD, notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur. On a $h(x) \sim x \times x \times -x^2 = -x^4$ et

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - \left(1 - \frac{(x^2)^2}{2} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\ &\sim \frac{x^4}{2} \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{f(x) \sim -\frac{1}{2} \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}}$$

1.(c) Idem $h(x) \sim -\sqrt{x}$ et

$$g(x) = 1 + 5\sqrt{x} + \mathrm{o}(\sqrt{x}) - 1$$

donc $g(x) \sim 5\sqrt{x}$. Finalement :

$$\boxed{f(x) \sim -5 \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} -5}$$

1.(d) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \times \tan(x + \mathrm{o}(x)) \\ &= \ln(x) \times (x + \mathrm{o}(x)) \end{aligned}$$

si bien que

$$\boxed{f(x) \sim x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

1.(e) Comme d'habitude, posons $x = 1 + h$, $h = x - 1$ (et donc on pose $g(x)$ le numérateur et $u(x)$ le dénominateur).

$$\begin{aligned} g(x) &= (1+h)^{12} - 1 \\ &= 1 + 12h + \mathrm{o}(h) - 1 \end{aligned}$$

si bien que $g(x) \sim 12h$ et on trouve de même que $u(x) \sim 33h$ et donc

$$\boxed{f(x) \sim 12/33 \xrightarrow[x \to 1]{} 12/33}$$

1.(f) Notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur.

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x\left(1+\frac{1}{8x^3}\right)^{1/3} - 2x \\ &= 2x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{8x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - 2x \end{aligned}$$

et donc $g(x) \sim 1/12x^2$. On trouve de même que $h(x) \sim 1/3x^2$. En conclusion :

$$\boxed{f(x) \sim \frac{1}{4} \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{4}}$$

1.(g) Tout d'abord, $h(x) = \ln(x^2) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + \ln(1+x^2) \sim 2\ln(x)$. Passons au numérateur :

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(x)} - x \\ &= e^{\ln(x)+\frac{\ln(x)}{x}} - x \\ &= x \times e^{\ln(x)/x} - x \\ &= x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) - x \end{aligned}$$

Dès lors, $g(x) \sin \ln(x)$. On en déduit que

$$\boxed{f(x) \sim 1/2 \text{ donc } f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1/2}$$

2.(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}(x^4)\right)\times\left(1-\frac{(2x)^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)\right) \\ &= x - 2x^3 - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = x - \frac{13x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)}$$

2.(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1+1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\right)^{1/2} \\ &= \left(2-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}(x^4)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}+\mathrm{o}(x^4)\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\frac{x^4}{48}\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{4}\right)^2+\mathrm{o}(x^4)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+\frac{x^4}{96}-\frac{x^4}{128}+\mathrm{o}(x^2)\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}x^2}{8} + \frac{\sqrt{2}x^4}{384} + \mathrm{o}(x^4)}$$

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{2(1+x/4)^{1/2}} \\
&= e^{2\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{x}{4}-\frac{1}{8}\times\left(\frac{x}{4}\right)^2+\mathrm{o}(x^2)\right)} \\
&= e^{2\left(1+\frac{x}{8}-\frac{x^2}{128}+\mathrm{o}(x^2)\right)} \\
&= e^2 \times e^{\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\mathrm{o}(x^2)} \\
&= e^2\left(1+\frac{x}{4}-\frac{x^2}{64}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right)^2+\mathrm{o}(x^2)\right)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) = e^2 + \frac{e^2 x}{4} + \frac{e^2 x^2}{64} + \mathrm{o}(x^2)}$$

$\boxed{\textbf{2.(d)}}$ On va diviser par x : faisons un DL à l'ordre 5. On peut même se contenter d'un DL à l'ordre 4 au dénominateur (voir pourquoi dans la suite du calcul) :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\left(1-\dfrac{(2x)^2}{2}+\dfrac{(2x)^4}{24}\right)+\mathrm{o}(x^5)}{x-\dfrac{x^3}{6}-\left(2x-\dfrac{(2x)^3}{6}\right)+\mathrm{o}(x^4)} \\
&= \frac{\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{5x^4}{8}+\mathrm{o}(x^5)}{-x+\dfrac{7x^3}{6}+\mathrm{o}(x^4)} \\
&= \left(\frac{3x}{2}-\frac{5x^3}{8}+\mathrm{o}(x^4)\right)\times\frac{1}{-1+\dfrac{7x^2}{6}+\mathrm{o}(x^3)} \\
&= \left(\frac{3x}{2}-\frac{5x^3}{8}+\mathrm{o}(x^4)\right)\times\frac{-1}{1-\dfrac{7x^2}{6}+\mathrm{o}(x^3)} \\
&= \left(\frac{3x}{2}-\frac{5x^3}{8}+\mathrm{o}(x^4)\right)\times-\left(1+\frac{7x^2}{6}+\mathrm{o}(x^3)\right) \\
&= -\frac{3x}{2}+\frac{5x^3}{8}-\frac{7x^3}{4}+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{f(x) = -\frac{3x}{2}-\frac{9x^3}{8}+\mathrm{o}(x^3)}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ Posons $x = 1/2 + h$, $h = x - 1/2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2}+h\right)\left(\frac{1}{2}-h\right)\right)\\
&= \cos\left(\pi\left(\frac{1}{4}-h^2\right)\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}-\pi h^2\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi h^2)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi h^2)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{o}(h^2))+\frac{\sqrt{2}}{2}(\pi h^2+\mathrm{o}(h^2))\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi h^2+\mathrm{o}(h^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

Problème - Le problème des anniversaires

Partie I. Simple, basique

1 L'équivalent passant au produit et au quotient, donc on peut appliquer la formule de Stirling au numérateur et au dénominateur (on peut le faire au dénominateur puisque $n = \mathrm{o}(\mathrm{N})$ donc $\mathrm{N}-n \sim \mathrm{N} \to +\infty$) :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}\mathrm{N}^{\mathrm{N}+\frac{1}{2}}e^{-\mathrm{N}}}{\mathrm{N}^n \times \sqrt{2\pi}(\mathrm{N}-n)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}}e^{-(\mathrm{N}-n)}}$$

D'où le résultat voulu
$$\boxed{\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) \sim e^{-n}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}}}$$

2 Utilisons donc le développement plus précis donné par l'énoncé, ce qui donne :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) = e^{-n}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}} \times \frac{1+\dfrac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}}\right)}{1+\dfrac{1}{12(\mathrm{N}-n)}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}-n}\right)}$$

Or, on a déjà vu que $\mathrm{N}-n \sim \mathrm{N}$. L'équivalent passant au quotient, on en déduit que

$$\frac{1}{12(\mathrm{N}-n)} \sim \frac{1}{12\mathrm{N}} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}-n}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$$

Puisqu'on ne peut pas sommer les équivalents, écrivons l'équivalent ci-dessus sous la forme :

$$\frac{1}{12(\mathrm{N}-n)} = \frac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$$

On en déduit que :

$$1+\frac{1}{12(\mathrm{N}-n)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}-n}\right) = 1+\frac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) = 1+\frac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$$

Dès lors
$$\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) = e^{-n}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}} \times \frac{1+\dfrac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}}\right)}{1+\dfrac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}}\right)}$$

Attention à ne pas dire que la fraction ci-dessus vaut 1 : cf. cours (penser à « truc »), on ne peut pas simplifier les o ! Cependant, en faisant un DL ($1/(1+u)$ avec $u = 1/12\mathrm{N}+\mathrm{o}(1/\mathrm{N})$ qui tend bien vers 0) :

$$\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) = e^{-n}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}} \times \left(1+\frac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right) \times \left(1-\frac{1}{12\mathrm{N}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right)$$

En développant, les $1/12\mathrm{N}$ se simplifient, ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\mathrm{Q}(\mathrm{N},n) = e^{-n}\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right)^{\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}} \times \left(1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right)}$$

3 D'après la question précédente (on ne peut pas composer les équivalents mais ça tombe bien, c'est une égalité, et pas un équivalent qu'on a trouvé à la question précédente !) :

$$\begin{aligned}
\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) &= -n + \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{N}-n}\right) + \ln\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right)\\
&= -n - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{\mathrm{N}-n}{\mathrm{N}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\\
&= -n - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{n}{\mathrm{N}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de faire un DL à l'ordre 2 du ln (on a bien $\ln(1+u)$ avec $u=-n/\mathrm{N}$ qui tend bien vers 0 puisque n est négligeable devant N) :

$$\boxed{\ln(\mathrm{Q}(n,\mathrm{N})) = -n - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{n}{\mathrm{N}}-\frac{n^2}{2\mathrm{N}^2}+\mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right)\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)}$$

Partie II. Limite de $(\mathrm{P}(\mathrm{N},n))$ dans un cas particulier

1.(a) La fonction carré étant continue (ou parce que la limite passe au produit), $n^2/\mathrm{N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \alpha^2$. On conclut en disant qu'une suite convergente est bornée (cf. chapitre 12).

$$\boxed{\text{La suite de terme général } n^2/\mathrm{N} \text{ est bornée.}}$$

1.(b) On a tout d'abord :

$$\left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right) = \mathrm{o}\left(\left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right)$$

Or, $\mathrm{N}-n+1/2 \sim \mathrm{N}$ donc : $\quad \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right) = \mathrm{o}\left(\mathrm{N}\times\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}}\right)$

Puisque (n^2/N) est bornée, disons par un réel M, alors on a un $\mathrm{o}(\mathrm{M}) = \mathrm{o}(1)$ (les constantes sont « superflues » dans les o), d'où le résultat.

$$\boxed{\left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right) = \mathrm{o}(1)}$$

1.(c) Par hypothèse, $n\sim\alpha\sqrt{\mathrm{N}}$ donc n est bien négligeable devant N on peut appliquer la première partie, et plus précisément la question 3. En développant, il vient :

$$\ln(\mathrm{Q}(n,\mathrm{N})) = -n - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{n}{\mathrm{N}}\right) - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{n^2}{2\mathrm{N}^2}\right) - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{o}\left(\frac{n^2}{\mathrm{N}^2}\right) - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$$

Puisque $\mathrm{N}-n+1/2\sim\mathrm{N}$, de même que ci-dessus, le dernier terme est un $\mathrm{o}(1)$, tout comme l'avant dernier d'après la question précédente (puisqu'on cherche la limite, un $\mathrm{o}(1)$ est suffisant car tend vers 0, cf. cours), si bien que :

$$\begin{aligned}
\ln(\mathrm{Q}(n,\mathrm{N})) &= -n - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{n}{\mathrm{N}}\right) - \left(\mathrm{N}-n+\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{n^2}{2\mathrm{N}^2}\right) + \mathrm{o}(1)\\
&= -n + n - \frac{n^2}{\mathrm{N}} + \frac{n}{2\mathrm{N}} - \frac{n^2}{2\mathrm{N}} - \frac{n^3}{2\mathrm{N}^2} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{n^2}{\mathrm{N}} + \frac{n}{2\mathrm{N}} + \frac{n^2}{2\mathrm{N}} - \frac{n^3}{2\mathrm{N}^2} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}(1)$$

Le premier terme tend vers $-\alpha^2$, le deuxième vers 0 (n est négligeable devant N), le troisième vers $\alpha^2/2$, le quatrième vers 0 (car $n^3 = \mathrm{O}(\mathrm{N}^{3/2}) = \mathrm{o}(\mathrm{N}^2)$) et le cinquième vers 0 car $n = \mathrm{o}(\mathrm{N})$ donc $n^2 = \mathrm{o}(\mathrm{N}^2)$. On en déduit le résultat voulu :

$$\boxed{\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n)) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} -\frac{\alpha^2}{2}}$$

1.(d) Par continuité de l'exponentielle, $\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n) = e^{\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n))} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} e^{-\alpha^2/2}$ et $\mathrm{P}(\mathrm{N}, n) = 1 - \mathrm{Q}(\mathrm{N}, n)$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{N}, n) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - e^{-\alpha^2/2}}$$

> Les calculs ci-dessus permettent en fait d'écrire que, pour N grand et n de l'ordre de grandeur de $\sqrt{\mathrm{N}}$, on a l'approximation suivante (peu rigoureuse !) de la probabilité $\mathrm{P}(\mathrm{N}, n)$:
>
> $$\mathrm{P}(\mathrm{N}, n) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n^2}{2\mathrm{N}}\right)$$
>
> Pour $\mathrm{N} = 365$ et $n = 23$, on trouve une approximation environ égale à 0.515, légèrement supérieure à la valeur exacte, environ égale à 0.507. Pour $n = 22$, la valeur approchée est environ 0.485 et la valeur exacte environ 0.476. On remarque que le seuil de coïncidence (qui sera l'élément central de la partie suivante) est le même pour les valeurs approchées que pour les valeurs exactes : c'est toujours entre 22 et 23 qu'on dépasse la valeur 1/2.

2.(a) Puisqu'on a des termes strictement positifs, qui s'expriment à l'aide de factorielles et de puissances, on peut penser au critère de monotonie à l'aide du quotient (si (u_n) est **strictement positive**, elle est décroissante si et seulement si $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$ pour tout n). Soit donc $n \in [\![0 ; \mathrm{N} - 1]\!]$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n+1)}{\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n)} &= \frac{\mathrm{N}!}{\mathrm{N}^{n+1} \times (\mathrm{N} - n - 1)!} \times \frac{\mathrm{N}^n \times (\mathrm{N} - n)!}{\mathrm{N}!} \\ &= \frac{\mathrm{N} - n}{\mathrm{N}}\end{aligned}$$

Cette quantité étant inférieure à 1, la famille $(\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n))_{n\in[\![0 ; \mathrm{N}]\!]}$ est décroissante (même strictement), et comme on multiplie par -1 :

$$\boxed{\text{La famille } (\mathrm{P}(\mathrm{N}, n))_{n\in[\![0 ; \mathrm{N}]\!]} \text{ est croissante.}}$$

2.(b) Résolvons l'équation : soit $\alpha > 0$ (on ne fait pas d'erreur de logique : en raisonnant par équivalences, on ne présuppose pas l'existence d'une solution, et le fait de trouver une unique solution à la fin montre à la fois l'existence et l'unicité d'une solution).

$$\begin{aligned}1 - e^{-\alpha^2/2} = 1 - \varepsilon &\iff e^{-\alpha^2/2} = \varepsilon \\ &\iff -\alpha^2/2 = \ln(\varepsilon) \\ &\iff \alpha^2 = -2\ln(\varepsilon) \\ &\iff \alpha = \sqrt{-2\ln(\varepsilon)} \qquad \text{car } \alpha > 0\end{aligned}$$

En effet, $\varepsilon < 1$ donc $\ln(\varepsilon) < 0$ donc la quantité dans la racine carrée est strictement positive, donc la racine est bien définie (et strictement positive), et on exclut la solution $\alpha = -\sqrt{\cdots}$ car $\alpha > 0$). On a donc prouvé l'existence (et même l'unicité).

$$\boxed{\text{Un tel } \alpha \text{ existe bien (et est unique).}}$$

2.(c) Il suffit de voir que $n = \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}} \right\rfloor \sim \alpha\sqrt{\mathrm{N}}$ puisque $\alpha\sqrt{\mathrm{N}} \to +\infty$ (si $u_n \to +\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$, cf. cours) et donc $n/\mathrm{N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \alpha$ donc on peut appliquer la première question.

$$\boxed{\mathrm{P}\left(\mathrm{N}, \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor\right) \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 1 - e^{-\alpha^2/2} = 1-\varepsilon}$$

2.(d) D'après la question précédente :

$$\exists \mathrm{N}_0, \forall \mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_0, \mathrm{P}\left(\mathrm{N}, \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor\right) \geqslant 1 - 2\varepsilon$$

Or, par hypothèse, $n/\sqrt{\mathrm{N}} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} +\infty$ donc, pour N assez grand, $n/\sqrt{\mathrm{N}} \geqslant \alpha$ donc $n \geqslant \alpha\sqrt{\mathrm{N}} \geqslant \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor$. Plus précisément, il existe N_1 tel que, pour tout $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_1$, $n \geqslant \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor$. Notons donc $\mathrm{N}_2 = \max(\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1)$ et supposons $\mathrm{N} \geqslant \mathrm{N}_2$. D'après ce qui précède,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{N}, \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor\right) \geqslant 1 - 2\varepsilon$$

Or, d'après la question 2.(a), puisque $n \geqslant \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor$, $\mathrm{P}(\mathrm{N}, n) \geqslant \mathrm{P}\left(\mathrm{N}, \left\lfloor \alpha\sqrt{\mathrm{N}}\right\rfloor\right)$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\exists \mathrm{N}_2, \forall n \geqslant \mathrm{N}_2, \mathrm{P}(\mathrm{N}, n) \geqslant 1 - 2\varepsilon}$$

Partie III. Seuil de coïncidence

1 Suivons l'indication de l'énoncé et supposons que la suite $(x_\mathrm{N})_\mathrm{N}$ ne soit pas bornée. Puisqu'elle est positive, elle admet une sous-suite qui diverge vers $+\infty$. On peut l'affirmer directement, mais prouvons-le pour nous replonger dans le chapitre 12.

- Posons $n_0 = 0$.
- Posons $n_1 = \min\{p > n_0 \,|\, x_p \geqslant 1\}$. Si l'ensemble $\{p > n_0 \,|\, x_p \geqslant 1\}$ est vide, alors $x_p < 1$ pour tout $p > n_0$, et avant il n'y a qu'un nombre fini de termes, donc la suite (x_N) est bornée ce qui est absurde. Cet ensemble est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet bien un minimum.
- On pose $n_2 = \min\{p > n_1 \,|\, x_p \geqslant 2\}$ qui existe pour les mêmes raisons.
- Soit $p \geqslant 3$ et supposons $n_0, \dots, n_{p-1}$ construits. On définit $n_p = \min\{p > n_{p-1} \,|\, x_p \geqslant p\}$ qui est bien défini pour les mêmes raisons.

On a donc construit une suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, si bien que $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de (x_N), et pour tout p, $x_{n_p} \geqslant p$ donc, d'après le théorème de minoration, cette suite extraite tend bien vers $+\infty$. Or, d'après la partie précédente, $\mathrm{P}(\mathrm{N}_p, n_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$ ce qui contredit le fait que $\mathrm{P}(\mathrm{N}_p, n_p) = 1/2$.

$$\boxed{\text{La suite } (x_\mathrm{N}) \text{ est bornée.}}$$

2 Puisque (x_N) est bornée et $\sqrt{\mathrm{N}} \to +\infty$, alors $x_\mathrm{N}/\sqrt{\mathrm{N}} = n/\mathrm{N} \to 0$.

$$\boxed{n = \mathrm{o}(\mathrm{N})}$$

3 Reprenons donc les calculs donnés dans la question 1.(c) de la partie II :

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n)) &= -\frac{n^2}{\mathrm{N}} + \frac{n}{2\mathrm{N}} + \frac{n^2}{2\mathrm{N}} - \frac{n^3}{2\mathrm{N}^2} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}(1) \\ &= -\frac{n^2}{2\mathrm{N}} + \frac{n}{2\mathrm{N}} - \frac{n^3}{2\mathrm{N}^2} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}(1)\end{aligned}$$

Le premier terme est égal à $-{x_\mathrm{N}}^2/2$ et les autres termes sont des o(1), comme on l'a déjà vu. Par conséquent,

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n)) = -\frac{{x_\mathrm{N}}^2}{2} + \mathrm{o}(1)$$

Or, par hypothèse, $\mathrm{Q}(\mathrm{N}, n) = 1/2$ donc ${x_\mathrm{N}}^2 = -2\ln(1/2) + \mathrm{o}(1) = \ln(4) + \mathrm{o}(1)$ ce qui donne la limite voulue.

$$\boxed{x_\mathrm{N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} \ln(4) \text{ si bien que } n \sim \sqrt{\mathrm{N}\ln(4)}.}$$

> Évidemment, personne n'a osé sortir le ln(4) de la racine carrée et le transformer en ln(2)...

4 Comme indiqué, partons de la question 2 de la partie I et faisons cette fois (c'est le ${x_{\mathrm{N}}}^3$ qui nous y fait penser) un DL à l'ordre 3 au lieu de l'ordre 2 fait dans la partie I :

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = \ln(\mathrm{Q}(n,\mathrm{N})) = -n - \left(\mathrm{N} - n + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{n}{\mathrm{N}} - \frac{n^2}{2\mathrm{N}^2} - \frac{n^3}{3\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^3}\right)\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right)$$

Tout d'abord, $1/\mathrm{N} = \mathrm{o}\left(1/\sqrt{\mathrm{N}}\right)$ donc cette égalité se réécrit :

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = \ln(\mathrm{Q}(n,\mathrm{N})) = -n - \left(\mathrm{N} - n + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{n}{\mathrm{N}} - \frac{n^2}{2\mathrm{N}^2} - \frac{n^3}{3\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^3}\right)\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

Développons encore cette égalité :

$$\begin{aligned}\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) &= -n + n + \frac{n^2}{2\mathrm{N}} + \frac{n^3}{3\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^2}\right) - \frac{n^2}{\mathrm{N}} - \frac{n^3}{2\mathrm{N}^2} - \frac{n^4}{3\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^4}{\mathrm{N}^3}\right) + \frac{n}{2\mathrm{N}} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \frac{n^3}{6\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)\\ &= -\frac{n^2}{2\mathrm{N}} - \frac{n^3}{6\mathrm{N}^2} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^2}\right) - \frac{n^4}{3\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^4}{\mathrm{N}^3}\right) + \frac{n}{2\mathrm{N}} + \frac{n^2}{4\mathrm{N}^2} + \frac{n^3}{6\mathrm{N}^3} + \mathrm{o}\left(\frac{n^3}{\mathrm{N}^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)\end{aligned}$$

Rappelons que $x_{\mathrm{N}} = n/\sqrt{\mathrm{N}}$, donc ${x_{\mathrm{N}}}^2 = n^2/\mathrm{N}$, ${x_{\mathrm{N}}}^3 = n^3/\mathrm{N}^{3/2}$ et enfin ${x_{\mathrm{N}}}^4 = n^4/\mathrm{N}^2$ si bien que :

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = -\frac{{x_{\mathrm{N}}}^2}{2} - \frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) - \frac{{x_{\mathrm{N}}}^4}{3\mathrm{N}} + \mathrm{o}\left(\frac{{x_{\mathrm{N}}}^4}{\mathrm{N}}\right) + \frac{x_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{{x_{\mathrm{N}}}^2}{4\mathrm{N}} + \frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{6\mathrm{N}^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{\mathrm{N}^{3/2}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

D'après la question précédente, la suite (x_{N}) est bornée (car convergente) donc $x_{\mathrm{N}} = \mathrm{O}(1)$, et idem pour toutes ses puissances, et une suite négligeable devant $x_{\mathrm{N}}/\mathrm{N}$ est négligeable devant $1/\mathrm{N}$ car $x_{\mathrm{N}} \sim \sqrt{\ln(4)}/\mathrm{N}$, et idem pour les termes analogues, avec des puissances différentes, si bien que :

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = -\frac{{x_{\mathrm{N}}}^2}{2} - \frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) + \frac{x_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^{3/2}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^{3/2}}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

Or, tous les termes en $\mathrm{O}(1/\mathrm{N})$ sont des $\mathrm{o}(1/\sqrt{\mathrm{N}})$, et idem pour le $\mathrm{O}(1/\mathrm{N}^{3/2})$, si bien que :

$$\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = -\frac{{x_{\mathrm{N}}}^2}{2} - \frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{x_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

Or, $\ln(\mathrm{Q}(\mathrm{N},n)) = \ln(1/2) = -\ln(2)$ donc on a le résultat voulu en multipliant par -1.

$$\boxed{\ln(2) = \frac{{x_{\mathrm{N}}}^2}{2} + \frac{{x_{\mathrm{N}}}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} - \frac{x_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)}$$

5 On fait comme d'habitude dans les développements asymptotiques copy/paste (mais ici il y a un o) : on écrit x_{N} sous la forme $x_{\mathrm{N}} = \sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}}$ avec $y_{\mathrm{N}} = \mathrm{o}(1)$ et on remplace. D'habitude, on remplace dans la dernière égalité obtenue (sans équivalent, sans o), mais ici, on va partir de la question précédente (qui n'est sans doute pas là par hasard) :

$$\ln(2) = \frac{(\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}})^2}{2} + \frac{(\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}})^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} - \frac{\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

Le but du jeu est de donner un équivalent de y_{N}. Puisque $y_{\mathrm{N}} \to 0$, ${y_{\mathrm{N}}}^2$ et ${y_{\mathrm{N}}}^3$ sont négligeables devant y_{N}, si bien qu'en développant à l'aide du triangle de Pascal (ou en factorisant par $\sqrt{\ln(4)}$ puis en appliquant le DL de $(1+u)^\alpha$, ce qui revient au même) :

$$(\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}})^2 = \ln(4) + 2\sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}}) \qquad \text{et} \qquad (\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}})^3 = \sqrt{\ln(4)}^3 + 3\ln(4)y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}})$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}\ln(2) &= \frac{\ln(4) + 2\sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}})}{2} + \frac{\sqrt{\ln(4)}^3 + 3\ln(4)y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}})}{6\sqrt{\mathrm{N}}} - \frac{\sqrt{\ln(4)} + y_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)\\ &= \ln(2) + \sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}}) + \frac{\sqrt{\ln(4)}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{3\ln(4)y_{\mathrm{N}}}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{y_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) - \frac{\sqrt{\ln(4)}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{y_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)\end{aligned}$$

En simplifiant par $\ln(2)$, et en regroupant d'un côté les y_{N} et de l'autres les termes ne dépendant pas de y_{N}, il vient :

$$\sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}}) + \frac{3\ln(4)y_{\mathrm{N}}}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{y_{\mathrm{N}}}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right) + \frac{y_{\mathrm{N}}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} = -\frac{\sqrt{\ln(4)}^3}{6\sqrt{\mathrm{N}}} + \frac{\sqrt{\ln(4)}}{2\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

Or, $y_{\mathrm{N}}/\sqrt{\mathrm{N}} = \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}})$ si bien que tous les termes sont négligeables devant y_{N} sauf le premier, et donc :

$$\sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} + \mathrm{o}(y_{\mathrm{N}}) = \left(-\frac{\sqrt{\ln(4)}^3}{6} + \frac{\sqrt{\ln(4)}}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

si bien que
$$\sqrt{\ln(4)}y_{\mathrm{N}} \sim \left(-\frac{\sqrt{\ln(4)}^3}{6} + \frac{\sqrt{\ln(4)}}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}$$

> Attention de garder les deux constantes dans la parenthèse de droite (oui, un équivalent n'a qu'un terme, mais aucun n'est négligeable devant l'autre, donc on garde les deux constantes, c'est comme si on avait $3 - 2$, on garde les deux constantes).

Ainsi
$$y_{\mathrm{N}} \sim \left(-\frac{\sqrt{\ln(4)}^2}{6} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} = \left(-\frac{\ln(4)}{6} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}$$

D'où :
$$x_{\mathrm{N}} = \sqrt{\ln(4)} + \left(-\frac{2\ln(2)}{6} + \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{N}}}\right)$$

On obtient le résultat voulu en se souvenant que $n = x_{\mathrm{N}} \times \sqrt{\mathrm{N}}$:

$$\boxed{n = \sqrt{\mathrm{N}\ln(4)} + \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{3} + \mathrm{o}\,(1)}$$

> Avec $\mathrm{N} = 365$, cela donne environ 22.763, ce qui est une très bonne approximation puisqu'on trouve que, pour $n = 22$, la proba est inférieure à $1/2$, et qu'elle est supérieure à $1/2$ pour $n = 23$. Avec le prolongement continu de la factorielle dont on a parlé dans l'énoncé, la probabilité pour $n = 22.763$ vaut 0.4998523728, et donc on est vraiment très proche de $1/2$.