Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 21

Exercice 1 - À Pile ou Face.

On se donne dans cet exercice un entier $n \geq 2$. Un joueur lance successivement n fois une pièce équilibrée.

1. Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience. Donner le cardinal de Ω (cette question est indépendante du reste de l'exercice).

   Dans la suite, on note :
   - X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où deux résultats successifs ont été différents (ou, ce qui revient au même, au nombre de changements au cours des n lancers).
   - pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, P_k : « Pile au k-ième lancer ».
   - pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, F_k : « Face au k-ième lancer ».

   Par exemple, si $n = 9$ et si les lancers obtenus sont, dans l'ordre :

   Pile - Pile - Face - Pile - Face - Face - Face - Pile - Pile

   alors l'événement $[X_9 = 4]$ est réalisé, car il y a quatre changements : aux 3-ième, 4-ième, 5-ième et 8-ième lancers.

2. Déterminer $X_n(\Omega)$.
3. On suppose uniquement dans cette question que $n = 2$.
   (a) Écrire l'événement $[X_2 = 1]$ à l'aide d'événements du type P_k et F_k.
   (b) Justifier que X_2 suit une loi de référence que l'on explicitera.
   (c) Donner sans démonstration l'espérance et la variance de X_2.
4. On suppose uniquement dans cette question que $n = 3$.
   (a) Écrire les événements $[X_3 = 0]$ et $[X_3 = 2]$ à l'aide d'événements du type P_k et F_k.
   (b) Donner la loi de X_3.
   (c) Calculer l'espérance et la variance de X_3.

   On suppose dans la suite que $n \geq 4$.

5. Montrer les trois égalités suivantes :

   (a) $P(X_n = 0) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ (b) $P(X_n = n-1) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ (c) $P(X_n = 1) = 2(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

   Si $k \in [\![2 ; n-1]\!]$, on peut dire que X_k est la variable aléatoire égale au nombre de fois où, lors des k premiers lancers, deux résultat successifs ont été différents. Puisque la question précédente est vraie pour un n quelconque, alors

   $$P(X_k = 0) = P(X_k = k-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{et} \qquad P(X_k = 1) = (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

   Ensuite, on pose $Y_1 = X_2$ et, pour tout $k \in [\![2 ; n-1]\!], Y_k = X_{k+1} - X_k$.

6. Soit $k \in [\![2 ; n-1]\!]$.
   (a) Donner $Y_k(\Omega)$.
   (b) Justifier que, pour tout $j \in [\![0 ; k-1]\!], P_{[X_k=j]}(Y_k = 0) = 1/2$.
   (c) Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.
   (d) Rappeler la définition de deux événements A et B indépendants. En déduire que pour tous $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $j \in [\![0 ; k-1]\!]$, les événements $[Y_k = \varepsilon]$ et $[X_k = j]$ sont indépendants.

7. Soient $k \in [\![2 ; n-1]\!]$ et $j \in [\![1 ; k-1]\!]$.
   (a) Justifier les deux égalités suivantes :
   $$P_{[Y_k=0]}(X_{k+1}=j) = P_{[Y_k=0]}(X_k=j) = P(X_k=j)$$
   (b) Justifier de même que $P_{[Y_k=1]}(X_{k+1}=j) = P(X_k=j-1)$.
   (c) En déduire que
   $$P(X_{k+1}=j) = \frac{1}{2}P(X_k=j) + \frac{1}{2}P(X_k=j-1)$$
8. À l'aide de la question précédente, montrer par récurrence sur k que :
   $$\forall k \in [\![2 ; n]\!], \forall j \in [\![0 ; k-1]\!], \qquad P(X_k=j) = \binom{k-1}{j} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$
9. En déduire que X_k suit une loi de référence que l'on explicitera, et donner sans calcul $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

Exercice 2 - Inégalité maximale de Kolmogorov

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles centrées indépendantes. Pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, on pose :

$$\sigma_k = \sigma(X_k), S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \qquad \text{et} \qquad A_k = \{|S_k| \geq x\} \bigcap_{1 \leq i < k} \{|S_i| < x\}$$

Enfin, on pose

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {\sigma_i}^2}$$

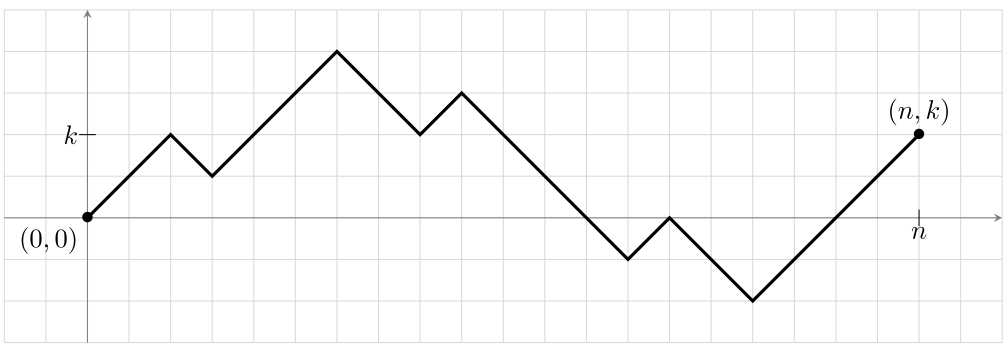
Soit $x > 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $P(|S_k| \geq x) \leq \sigma^2/x^2$.
2. Exprimer l'événement $\{\max(|S_1|, \ldots, |S_n|) \geq x\}$ en fonction de $A_1, \ldots, A_n$.
3. Montrer que
   $$\sum_{k=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2\right) \leq \sigma^2$$
4. Montrer que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $E\left(\mathbb{1}_{A_k} {S_k}^2\right) \leq E\left(\mathbb{1}_{A_k} {S_n}^2\right)$.
5. En déduire l'inégalité maximale de Kolmogorov :
   $$P\left(\max(|S_1|, \ldots, |S_n|) \geq x\right) \leq \frac{\sigma^2}{x^2}$$

Problème - Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$, le retour

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés probabilistes des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$. Comme dans le DM 13, on munit le plan d'un repère orthonormé direct. Soient a, b, c, d des entiers tels que $a < c$. On appelle chemin allant de (a, b) à (c, d) une ligne polygonale dans le plan joignant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) en ne faisant que des montées (déplacement selon le vecteur $(1, 1)$) et des descentes (déplacement selon le vecteur $(1, -1)$). Le chemin est constitué alors de $n = c - a$ pas.

Ci-dessous un exemple d'un chemin allant de $(0, 0)$ à (n, k) avec $n = 20$ et $k = 2$. Il est constitué de deux montées successives, puis d'une descente, puis de trois montées successives, puis de deux descentes successives, etc.



On peut donc représenter une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ comme un chemin : par exemple, le chemin représenté ci-dessus représente la marche aléatoire partant de 0 et effectuant dans l'ordre les déplacements :

$$(1,1,-1,1,1,1,-1-1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1,1)$$

Partie I - Valeur moyenne du nombre de passages en 0 (d'après Capes 2012)

On fait de plus les hypothèses suivantes :

- Chaque saut est indépendant du précédent, et les montées et descentes sont effectuées avec la même probabilité $1/2$.
- La particule se trouve en 0 à l'instant $t = 0$.
- Pour tous $k \geq 0$ et $n \geq 1$, on note O_k la variable aléatoire égale à 1 si la particule est à l'origine à l'instant $t = k$ et 0 sinon, et U_n la variable aléatoire égale au nombre de passages en 0 de la particule entre les instants 1 et $2n$.

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 1$.

1. Exprimer la variable U_n en fonction des variables O_k.
2. Pour tout $k \geq 1$, montrer que :
$$P(O_{2k+1} = 1) = 0 \qquad \text{et} \qquad P(O_{2k} = 1) = \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$$
3. Justifier que :
$$E(U_n) = \frac{2n+1}{4^n} \times \binom{2n}{n} - 1$$
4. En déduire un équivalent de $E(U_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II (facultative) - Loi du premier retour en 0 (d'après[1] Centrale PC 2021)

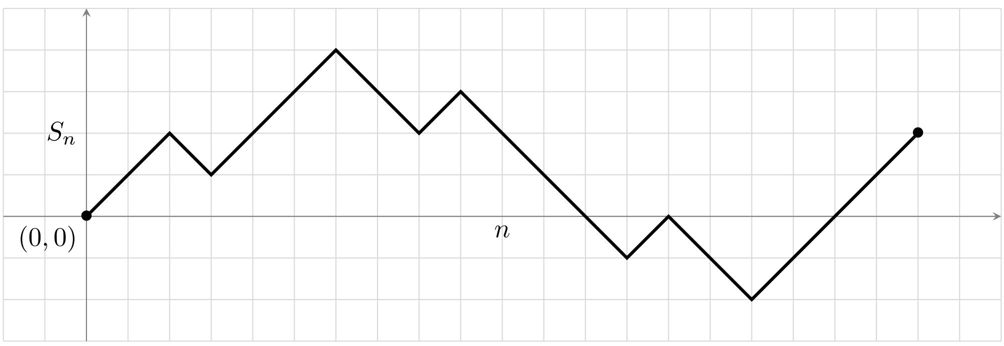
On se donne dans cette partie et la suivante un réel $p \in \,]\,0\,;1\,[$, une suite[2] $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{\pm 1\}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X_n = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_n = -1) = 1 - p$$

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Comme dans la partie précédente, la suite (S_n) modélise la trajectoire aléatoire dans $\mathbb{Z}$ d'une particule située en $S_0 = 0$ à l'instant initial $n = 0$, et faisant à chaque instant $n \in \mathbb{N}$ un saut de $+1$ avec une probabilité p et de -1 avec une probabilité $1-p$ (attention, contrairement à la partie précédente, on ne suppose donc pas que $p = 1/2$), les sauts étant indépendants.

On représente encore une fois la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées $(n, S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on représente le même exemple que précédemment, à savoir une marche aléatoire qui commence par deux montées, puis une descente, puis trois montées etc. :



1. Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de valeurs de $k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ telles que $X_k = 1$.

1. Seule cette partie est tirée du sujet de Centrale. Le sujet Maths 2 Centrale PSI 2023 abordait aussi ce thème d'une manière un peu différente. On a juste tiré de ce dernier sujet une question au sujet du principe de réflexion dans la partie II du DM 13.
2. Bon... Si on veut couper les cheveux en quatre dans le sens de la longueur, ce n'est pas possible de le faire en première année parce qu'il faut en général un univers Ω infini pour qu'une telle suite existe. Mais puisque, de toute façon, on explicite très rarement Ω, on peut sans problème accepter l'existence d'une telle suite, et on ne soulèvera d'ailleurs aucune difficulté sur ce point.

(a) Quelle est la loi de Y_n ? En déduire son espérance et sa variance.

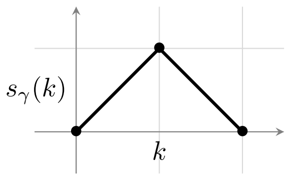
(b) Quelle relation a-t-on entre S_n et Y_n ? En déduire l'espérance et la variance de S_n. Justifier que n et S_n ont la même parité.

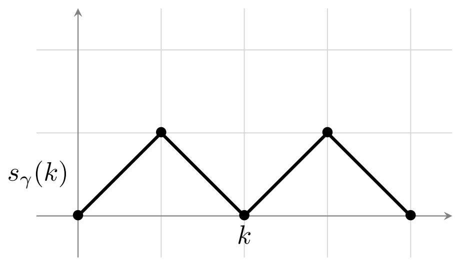
Dans la suite de cette partie, pour $m \in \mathbb{N}^*$, on appelle chemin de longueur m tout m-uplet $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ tel que : $\forall i \in [\![1\,; m]\!], \gamma_i \in \{-1; 1\}$. On pose alors $s_\gamma(0) = 0$ et, pour tout $k \in [\![1\,; m]\!], s_\gamma(k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \gamma_i$. On représente le chemin γ par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées $(k, s_\gamma(k))_{k \in [\![0\,; m]\!]}$.

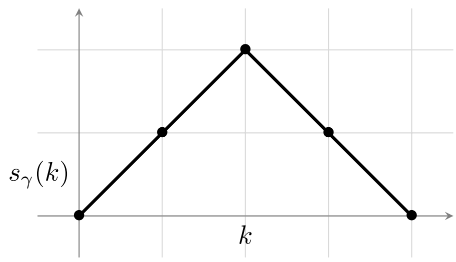
Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- on appelle chemin de Dyck de longueur $2n$ tout chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ de longueur $2n$ tel que $s_\gamma(2n) = 0$ et : $\forall k \in [\![0\,; 2n]\!], s_\gamma(k) \geq 0$;
- on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$.

On convient de plus que $C_0 = 1$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que $C_1 = 1$ et $C_2 = 2$:







2. Donner sans démonstration la valeur de C_3 et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$ un chemin de Dyck de longueur $2n + 2$. Soit $r = \max\{i \in [\![0\,; n]\!] \mid s_\gamma(2i) = 0\}$. On suppose $0 < r < n$ et on considère les chemins $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$ et $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$.

3. (a) Justifier à l'aide d'une figure [3] que $\gamma_{2r+1} = 1, \gamma_{2n+2} = -1$ et que γ et β sont des chemins de Dyck.

   (b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = \sum_{r=0}^{n} C_r C_{n-r}$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un chemin de longueur m. Pour $t \in \mathbb{N}$, on note $A_{t,\gamma}$ l'événement : « pour tout $k \in [\![1\,; m]\!], X_{t+k} = \gamma_k$ ».; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^{m} (X_{t+k} = \gamma_k)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ un chemin de Dyck de longueur $2n$. Pour $t \in \mathbb{N}$, exprimer $P(A_{t,\gamma})$ en fonction de n et p.
5. Soit T la variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine. Montrer que T prend des valeurs paires et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(T = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1}(1 - p)^{n+1}$.
6. On admet [4] que, pour tout n,

$$C_n = \frac{1}{n+1} \times \binom{2n}{n}$$

Montrer que $\sum (2n + 2) \times P(T = 2n + 2)$ converge si et seulement si $p \neq 1/2$. Cela signifie (cours de deuxième année) que T a une espérance finie si et seulement si $p \neq 1/2$: ainsi, si $p = 1/2$, il va falloir attendre en moyenne une infinité de pas pour qu'elle revienne en 0...

3. Sic... Bon, vous pouvez glisser un mot ou deux dans la réponse quand même.

4. On l'a prouvé dans le chapitre 17, mais le sujet demandait de le prouver à l'aide d'arguments au programme de deuxième année. Cette question est donc encore une question du sujet originel, si ce n'est que le calcul de C_n a été sauté.

Il reste à calculer $P(T=0)$, c'est-à-dire calculer la probabilité que la particule ne revienne jamais en 0 : le sujet calculait cette probabilité à l'aide d'outils au programme de deuxième année, et on montrait que :

$$P(T=0) = \sqrt{1-4p(1-p)}$$

En particulier, $P(T=0)=0$ si et seulement si $p=1/2$. En d'autres termes :

- si $p=1/2$, presque sûrement, la particule revient en 0. À partir de cet instant, tout se passe comme si on recommençait la marche au début et donc il existe $n_2 > n_1$ tel que S_{2n_2} prend la valeur 0 et ainsi de suite. On peut montrer que la marche va revenir presque sûrement une infinité de fois en 0. ce qui est tout de même surprenant si on se souvient (voir ci-dessus) que le temps moyen du premier retour est infini !
- si $p \neq 1/2$ alors il y a une probabilité non nulle que la particule ne revienne jamais en 0. On peut en déduire (à l'aide d'un résultat HP mais classique de deuxième année appelé lemme de Borel-Cantelli) que la particule ne revient qu'un nombre fini de fois en 0.

Bref, les marches aléatoires, c'est trop bien !

Partie III (facultative) - Calcul de $P(T=0)$ dans le cas symétrique

Encore une fois, dans le sujet de Centrale, on donne $P(T=0)$ avec du programme de deuxième année donc nous nous contenterons dans cette partie[5] de prouver que $P(T=0)=0$ dans le cas $p=1/2$ (et donc on suppose que $p=1/2$ dans cette partie).

1. (a) Soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$. Généraliser le résultat de la question 4 de la partie précédente au cas d'un chemin $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$ qui n'est pas un chemin de Dyck mais qui contient $n+k$ montées et $n-k$ descentes.

   (b) À l'aide de la partie II du DM 13, prouver que :

$$P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{2n-1}[S_j>0]\right)\cap[S_{2n}=2k]\right) = \frac{1}{4^n}\times\left(\binom{2n-1}{n+k-1}-\binom{2n-1}{n+k}\right)$$

2. (a) Montrer que :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[S_j>0]\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(\left(\bigcap_{j=1}^{2n-1}[S_j>0]\right)\cap[S_{2n}=2k]\right)$$

   (b) En déduire que :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[S_j>0]\right) = \frac{1}{4^n}\times\binom{2n-1}{n}$$

   (c) Montrer finalement que :

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[S_j\neq 0]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

3. Un résultat (intuitif !) au programme de deuxième année nous permet d'affirmer que

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{2n}[S_j\neq 0]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty}[S_j\neq 0]\right)$$

   Conclure que $P(T=0)=0$.

5. Et donc c'est ici que nous nous séparons du sujet originel, snif.

Voici des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir de probabilités (et d'autres sur lesquels je râle toute l'année). Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Faire attention aux échecs de type (ne pas écrire « la suite u_n » ou « la fonction $f(x)$ » par exemple).

   O - N - B.

2. Faire attention à l'ensemble dans lequel on prend n lors de l'hérédité d'une récurrence finie.

   O - N - B.

3. Rédiger correctement pour affirmer qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale.

   O - N - B.

4. Écrire « Bernoulli » sans faire de faute.

   O - N - B.

5. Ne pas écrire d'équivalence quand on déroule les calculs, les garder pour une résolution d'(in)équations.

   O - N - B.

6. Préciser le système complet d'événements quand on applique la formule des probabilités totales.

   O - N - B.

7. Préciser (le cas échéant) quels événements sont deux à deux incompatibles, et lesquels sont indépendants, et ne pas écrire : « par incompatibilité puis/et par indépendance ».

   O - N - B.

8. Rédiger correctement le calcul d'une probabilité conditionnelle.

   O - N - B.

9. Ne pas confondre opérations sur les réels et opérations ensemblistes (par exemple, ne pas faire des sommes d'ensembles, ou des unions de probabilités).

   O - N - B.