Programme de colle fictif - Semaine n°33

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Célian FORET, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 34 - Espaces préhilbertiens réels

- cf. semaines 31 et 32.

Chapitre 35 - Familles sommables

- Exemple de somme infinie dont la valeur change quand on intervertit les termes. Théorème de réarrangement de Riemann (HP, donné à titre culturel).
- Relation d'ordre et calculs sur $[\,0\,;+\infty\,]$ (on a en particulier $0\times+\infty=0$). Borne supérieure dans $[\,0\,;+\infty\,]$, compatibilité de la relation d'ordre avec les opérations.
- Somme d'une famille d'éléments de $[\,0\,;+\infty\,]$. Lien avec la somme usuelle d'un nombre fini de termes, avec la somme d'une série à termes positifs.
- Théorème de sommation par paquets, partition selon les lignes, les colonnes, les diagonales descendantes. Théorème de Fubini positif. Changement d'indice. Invariance par permutation. Linéarité de la somme, somme d'une sous-famille, sommation des inégalités, familles produits.
- Famille sommables de réels positifs. Une famille finie est toujours sommable, une suite (u_n) de réels positifs est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. Sous-famille d'une famille sommable, domination, somme et multiplication par un scalaire (réel positif). Exemples : les calculs peuvent être effectués sans justification (quand les termes sont positifs), la sommabilité peut être justifiée a posteriori si on obtient un résultat $<+\infty$.
- Familles sommables de nombres complexes, notation $\ell^1(I)$. Une famille finie est sommable, une suite (u_n) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge absolument. Sous-famille d'une famille sommable, domination, combinaison linéaire de familles sommables, $\ell^1(I)$ est un espace vectoriel.
- Somme d'une famille sommable. Théorème de regroupement par paquets, etc. La somme d'une famille sommable peut être approchée à ε près par la somme d'une famille finie. Exemples.
- Retour aux séries : une suite est sommable si et seulement si la série associée converge absolument. On peut alors regrouper par paquets, faire des changement d'indices, permuter les termes. Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes (la convergence ne suffit pas), application à la combinatoire (non traité en classe), cas particulier de la série exponentielle.

Chapitre 36 - Espaces affines

- Définition d'une translation. Notation $S+a$ avec S une partie de E et $a\in E$, écriture avec des quantificateurs. Premières propriétés.
- Sous-espaces affines, direction d'un sous-espace affine (en particulier, celle-ci est unique), sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
- CNS d'égalité de deux sous-espaces affines, intersection de sous-espaces affines. Exemples.
- Notion d'équation linéaire, ensemble des solutions, exemples.

Chapitre 37 - Fonctions de deux variables

- Rappels sur la norme euclidienne canonique de $\mathbb{R}^2$, boule ouverte, boule fermée, sphère. Définition d'une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne canonique (définie à l'aide de boules ouvertes, mais la définition avec des boules fermées est équivalente). Activité : une boule ouverte est un ouvert.

- Définition de la surface représentative d'une fonction de deux variables (à valeurs réelles).
- Limite d'une fonction de deux variables (définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$), continuité, exemples.
- Dérivées partielles (interprétation géométrique : Est/Ouest et Nord/Sud), l'existence de dérivées partielles n'implique pas la continuité, exemples.
- Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, exemples.
- Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction $\mathscr{C}^1$, exemples. Plan tangent.
- Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ (nabla). Propriétés. Dérivées partielles et composées : règle de la chaîne, exemples.
- Dérivée directionnelle selon un vecteur, ligne de niveau, les gradients sont orthogonaux aux lignes de niveau (à savoir pour votre prochaine randonnée).
- Notion d'extremum global, local, de point critique. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur (notion de point col/selle/Pringle), exemples.

Chapitres au programme

Chapitre 33 (exercices uniquement), chapitre 34 (cours et exercices), chapitres 35, 36 et 37 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Expression du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie quand on connaît une BON (sans démonstration).
2. Projeté orthogonal de l'identité sur $\text{Vect}(\cos, \sin)$ quand on se place sur $\mathscr{C}([\,0\,;2\pi\,]\,, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration : on pourra admettre que cos et sin sont de norme $\sqrt{\pi}$ et sont orthogonaux, mais l'examinateur peut demander de le redémontrer).
3. Projeté orthogonal de exp sur F, l'ensemble des fonctions affines, quand on se place sur $\mathscr{C}([\,0\,;1\,]\,, \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration).
4. La famille $(\zeta(n) - 1)_{n \geq 2}$ est sommable et calculer sa somme.
5. Si $z \in \mathbb{C}$, la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si $|z| < 1$ (démonstration). Et la famille $(z^{ij})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$?
6. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$:
$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_1}^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{z_2}^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$$
Démonstration.
7. L'ensemble des $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant
$$M + M^\top = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et donner sa direction (démonstration).
8. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x+y^2}{|y|+x^2}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$ (démonstration).
9. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{3xy}{x^2+y^2}$ n'admet pas de limite en $(0,0)$ (démonstration).
10. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ (démonstration).
11. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, dérivée de $F : t \mapsto f(t^2, \sin(t))$.
12. Si f est $\mathscr{C}^1$, dérivées partielles de $F : (x,y) \mapsto f(x^2+y, xy-y)$.
13. Extrema locaux éventuels de $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$ et $f : (x,y) \mapsto x^2-y^2$.

Groupes B - C :

1. Si $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, alors il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale telle que, pour tout n, P_n soit de degré n et de coefficient dominant 1 (démonstration : attention, l'initialisation a été faite avant l'hérédité dans le cours).

2. Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, définition de $d(x, A)$. Si x et y appartiennent à E, $|d(x,A) - d(y,A)| \leq ||x - y||$ (démonstration).
3. Valeur de
$$m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (t - (a\cos(t) + b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t$$
On pourra utiliser sans démonstration une autre question de cours, à savoir que le projeté orthogonal de l'identité sur $\mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ est $-2\sin$.
4. Pour quelles valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ la famille $\left(\dfrac{pq}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est-elle sommable ? Calculer alors sa somme.
5. Une boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert (démonstration).
6. DL à l'ordre 1 en $(0,0)$ de $f : (x,y) \mapsto e^{x+\ln(2+y)}$ et équation du plan tangent en $(0,0)$.
7. Nature des points critiques de $f : (x,y) \mapsto x \times \left((\ln(x)^2 + y^2\right)$.

Groupe C :

1. Si g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ alors
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{g(x)-g(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y \end{array} \right. \end{array} \right.$$
est continue sur $\mathbb{R}^2$ (démonstration).
2. Nature des points critiques de $f : (x,y) \mapsto x^2 - 3x + xy + y^2$.

Prévisions pour la semaine prochaine

Vacances ! ! ! ! !

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17 et 19 du chapitre 35 et exercices 2, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17 et 18 du chapitre 37.

Cahier de calcul

Chapitre 33.