Chapitre 4 : Réduction des endomorphismes

Sommaire :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I – Outils

II – Eléments propres

$Soit\ u \in L(E)$

<u>Définition :</u>

Soit $x \in E$. x est vecteur propre de u si :

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x \end{cases}$$

λ *est alors appelé valeur propre de* u *associée au vecteur propre* x.

On note :

- $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.
- $Sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} | E_\lambda(u) \neq \{0\}\}$ l'ensemble des valeurs propres de u.

<u>Propositions :</u>

- $Vect(x_0)$ *est stable par* $u \Leftrightarrow x_0$ *est vecteur propre de* u.
- Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont toujours en somme directe.
- Des vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes forment une famille libre.
- Si E est de dimension finie, $Card\ (Sp\ u) \leq \dim E$
- Si deux endomorphismes commutent, le noyau, l'image et les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- $A \sim B \Rightarrow Sp\ A = Sp\ B$

III – Polynôme caractéristique

On suppose E de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

Définition :

On note $\chi_u(X) = Det(X.Id - u)$ le polynôme caractéristique de u.

Propositions :

- $A \sim B \Rightarrow \chi_A = \chi_B$
- Si $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\chi_A(X) = X^n - tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n det(A)$
- $Sp\ A = Rac\ \chi_A$
- $\lambda \in Sp\ u \Leftrightarrow E_\lambda(u) \neq \{0\} \Leftrightarrow 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$
- Soit $F \subset E$. Alors $\chi_{u_{|F}} / \chi_u$.

IV – Diagonalisation

On suppose E de dimension finie.

Définition :

$$u \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists B \text{ base de } E, Mat_B(u) \text{ est diagonale} \\ \exists B \text{ base de } E \text{ constituée de vecteurs propres de } u \\ E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \end{cases}$$

Théorème :

$$u \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in Sp(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Corollaire :

$$\chi_u \text{ scindé simple} \Rightarrow u \text{ diagonalisable}$$

V – Trigonalisation

On suppose E de dimension finie.

Définition :

A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème :

$$u\ est\ trigonalisable \Leftrightarrow \chi_u\ est\ scindé$$

VI – Endomorphisme nilpotent

Définition :

$$u\ est\ nilpotent \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{N}^*, u^p = 0$$

Propositions :

- L'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à la dimension de E.

VII – Polynômes d'endomorphismes

Définition :

$$P\ est\ annulateur\ de\ u\ si\ P(u) = 0$$

Le polynôme minimal Π_u est $l'\boldsymbol{unique}\ polynôme\ unitaire\ de\ degté\ minimal\ annulateur\ de\ u.$

Propositions :

- $\Pi_u\ divise\ P \Leftrightarrow P(u) = 0$
- En notant $d = \deg \Pi_u$, on a $\mathbb{K}[u] = Vect(u^k)_{k\in\mathbb{N}} = Vect(Id, u, \dots, u^{d-1})$
- $\forall P \in \mathbb{K}[X]\ tq\ P(u) = 0, Sp(u) \subset Rac(P)$
- $Sp(u) = Rac(\Pi_u)$
- $F \subset E\ SEV\ :\ \Pi_{u_{|F}} / \Pi_u$
- $u\ est\ diagonalisable\ \Rightarrow u_{|F}\ est\ diagonalisable$

Lemme de décomposition des noyaux :

$$On\ suppose\ E\ de\ dimension\ finie.$$
$$Soient\ P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]\ premiers\ entre\ eux\ deux\ à\ deux.$$
$$Soit\ Q = P_1 \times \dots \times P_r$$
$$Alors\ \ker Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u)$$

Théorème :

- $u\ est\ diagonalisable \Leftrightarrow \Pi_u\ est\ scindé\ simple$

- $u \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \exists\, P \text{ scindé simple}, P(u) = 0$

- $u \text{ est trigonalisable} \Leftrightarrow \Pi_u \text{ est scindé}$
- $u \text{ est trigonalisable} \Leftrightarrow \exists\, P \text{ scindé}, P(u) = 0$

VIII – Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème :

$$\text{On suppose } E \text{ de dimension finie. Soit } u \in L(E).$$
$$\begin{cases} \chi_u(u) = 0 \\ \Pi_u / \chi_u \end{cases}$$

Proposition :

Si χ_u est scindé,

$$\boxed{E = \ker \chi_u(u) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} \ker(u - \lambda Id)^{m_\lambda}}$$

Théorème de Dunford :

On suppose χ_u scindé.

$$\exists!\,(d, n) \in L(E)^2, \begin{cases} d \text{ est diagonal} \\ n \text{ est nilpotent} \\ don = nod \\ u = d + n \end{cases}$$