Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Analyse - Chapitres 22 à 27.

Table des matières

Chapitre 22

Intégration sur un segment

« Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à-peu-près. »

Stendhal, Vie de Henry Brulard

Sauf indication contraire, I est un intervalle d'intérieur non vide, et a et b sont deux réels avec $a < b$.

22.1 Linéarité, positivité, théorème de majoration :

Exercice 1 : ✪ Prouver que

$$\frac{\ln(2)}{\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\tan(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \sqrt{3}\ln(2)$$

Correction : La tangente est croissante sur $\left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\right]$ donc, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}\,;\frac{\pi}{3}\right]$,

$$\tan(\pi/6) = \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \tan(x) \leq \tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

En multipliant par $1/x$, positif (donc on ne change pas le sens de l'inégalité) :

$$\frac{1}{x\sqrt{3}} \leq \frac{\tan(x)}{x} \leq \frac{\sqrt{3}}{x}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3}} \leq \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\tan(x)}{x}\,\mathrm{d}x \leq \int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\sqrt{3}}{x}\,\mathrm{d}x$$

Il suffit de voir que

$$\begin{aligned}\int_{\pi/3}^{\pi/6} \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln(\pi/3) - \ln(\pi/6)\\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

pour conclure.

Exercice 2 : ✪ Donner le domaine de définition des fonctions

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

ainsi que leur signe sur leur domaine de définition.

Correction : Attention à bien vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant si on applique le théorème de positivité de l'intégrale ! De plus, rappelons qu'une intégrale existe si et seulement si la fonction intégrée est continue (ou continue par morceaux) sur le segment formé par les bornes.

Pour f : si $x \in \mathbb{R}$, f est continue en x si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Or, cette fonction est continue sur $\mathbb{R}_+^*$: il en découle que f est définie en x si et seulement si $\left[\,x\,;x^2\,\right] \subset \mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $x > 0$. En d'autres termes, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit donc à présent $x > 0$ et donnons le signe de la fonction intégrée sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Tout dépend de si $x \geq 1$ ou $x \leq 1$. Si $x \geq 1$, alors $x^2 \geq 1$ et $t \mapsto \ln(t)/t$ est positive sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. De plus, les bornes sont dans l'ordre croissant donc $f(x) \geq 0$. Supposons à présent $x \leq 1$. Alors $x^2 \leq 1$ donc $t \mapsto \ln(t)/t$ est négative sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$ mais les bornes sont dans l'ordre décroissant, donc $f(x) \geq 0$. Finalement, f est toujours positive.

Pour g : si $x \in \mathbb{R}$, g est continue en x si et seulement si la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ est continue sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. Or, cette fonction est continue sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$: il en découle que f est définie en x si et seulement si $\left[\,x\,;x^2\,\right] \subset\,]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$ si et seulement si $x > 0$ et $x \neq 1$ (car x et x^2 sont toujours « du même côté par rapport à 1 »). En d'autres termes, f est définie sur $]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$. Soit donc à présent $x \in\,]\,0\,;1\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$ et donnons le signe de la fonction intégrée sur $\left[\,x\,;x^2\,\right]$. De même, g est positive sur son domaine de définition.

Exercice 3 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Soient $\alpha = \min f$ et $\beta = \max f$. Justifier l'existence de α et β et prouver que

$$\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \leq -\alpha\beta$$

Correction : L'existence de α et β découle du théorème des bornes atteintes puisque f est continue sur un segment. La fonction $(f-\alpha)(\beta - f)$ est positive donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (f(t)-\alpha)(\beta - f(t))\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 (-\alpha\beta)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(t)(\alpha+\beta)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Le fait que l'intégrale de f soit nulle permet de conclure.

Exercice 4 : ✪ Comparer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx}\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} n^2 x e^{-nx}\right)\mathrm{d}x$$

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec une IPP :

$$\begin{aligned}
n^2\int_0^1 xe^{-nx}\,\mathrm{d}x &= n^2\left(\left[\frac{xe^{-nx}}{-n}\right]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 e^{-nx}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= n^2\left(\frac{-e^{-n}}{n} + \frac{1}{n}\left[\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^1\right)\\
&= n^2\left(\frac{-e^{-n}}{n} - \frac{e^{-n}}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\\
&= -ne^{-n} - e^{-n} + 1\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1
\end{aligned}$$

(par croissances comparées) donc la première quantité est égale à 1. Cependant, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$n^2 xe^{-nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(par croissances comparées pour $x > 0$, et car cette quantité est nulle si $x = 0$). La deuxième quantité est donc l'intégrale de la fonction nulle donc est égale à 0. Morale de l'histoire : on ne peut pas passer à la limite dans une intégrale !

Exercice 5 : ✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$.
3. Déterminer de même $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \sin(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t$.

Correction : Comme dit en cours et dans l'exercice précédent, dire que pour tout $t\in[\,0\,;1\,[$

$$\frac{t^n}{1+t}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

ne suffit pas !

1. Pour tout $t\in[\,0\,;1\,]$,

$$0\le\frac{t^n}{1+t}\le t^n$$

On conclut par croissance de l'intégrale.
2. Cette limite est nulle d'après la question précédente et le théorème d'encadrement.
3. Le sinus étant positif sur $[\,0\,;\pi/2\,]$:

$$\forall t\in\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right], 0\le\sin(t)e^{-nt}\le e^{-nt}$$

Par croissance de l'intégrale, pour tout $n\ge1$:

$$0\le\int_0^{\pi/2}\sin(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t\le\int_0^{\pi/2}e^{-nt}\,\mathrm{d}t=\frac{1-e^{-n\pi/2}}{n}$$

On conclut de même que la limite demandée est nulle.

Exercice 6 : ✪✪ Si $n\ge0$, on pose

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que $I_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
2. En calculant I_n+I_{n+1}, prouver que

$$\sum_{k=0}^N\frac{(-1)^k}{k+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}\ln(2)$$

Correction :

1. Déjà fait dans l'exercice précédent.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}I_n+I_{n+1}&=\int_0^1\frac{x^n+x^{n+1}}{1+x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1x^n\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Soit donc $N\ge0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^N\frac{(-1)^k}{k+1}&=\sum_{k=0}^N(-1)^k(I_k+I_{k+1})\\&=\sum_{k=0}^N((-1)^kI_k-(-1)^{k+1}I_{k+1})\\&=(-1)^0I_0+(-1)^{N+1}I_{N+1}\end{aligned}$$

par télescopage. Or, $I_0 = \ln(2)$ et (I_N) tend vers 0 et la suite de terme général $(-1)^N$ est bornée donc $(-1)^{N+1}I_{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ si bien que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} I_0 = \ln(2)$$

Exercice 7 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$ avec $a < b$ telle que

$$\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f^4(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est constante sur $[\,a\,;b\,]$. On pourra calculer l'intégrale de $(f^2 - f)^2$.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à

$$I = \int_a^b (f^2 - f)^2$$

Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b f^4 - 2\int_a^b f^3 + \int_a^b f^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

par hypothèse sur f. Or, I est l'intégrale d'une fonction positive (il y a un carré), continue (f est continue) et $a < b$ donc la fonction intégrée est nulle, c'est-à-dire que $(f^2 - f)^2 = 0$ donc $f^2 = f$: il en découle que, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Attention : pour certains x, on pourrait avoir $f(x) = 0$ et pour d'autres, $f(x) = 1$! Cependant, si f n'est pas constante, c'est-à-dire si f prend la valeur 0 et la valeur 1 alors, d'après le TVI (f est continue), f prend la valeur $1/2$ ce qui est impossible. Il en découle que f est constante égale à 0 ou constante égale à 1 (ce qui est même plus fort que le résultat demandé).

Exercice 8 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $c \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = 3\int_0^1 f(t)t^2\,\mathrm{d}t$$

Correction : f étant continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, elle est continue et atteint ses bornes : il existe x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = \min f$ et $f(x_1) = \max f$. Notons $M = f(x_1)$ et $f(x_0) = m$. Pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $3mt^2 \leq 3f(t)t^2 \leq 3Mt^2$ donc, par croissance de l'intégrale :

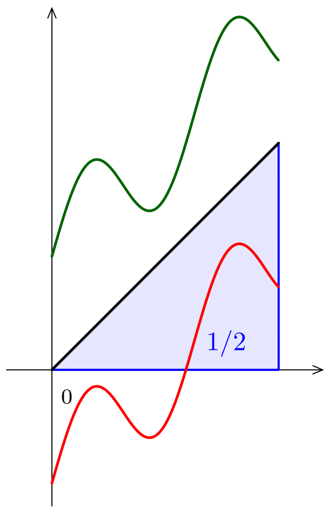
$$\int_0^1 3mt^2\,\mathrm{d}t = m = f(x_0) \leq \int_0^1 3f(t)t^2\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 3Mt^2\,\mathrm{d}t = M = f(x_1)$$

D'après le TVI (f est continue), il existe $c \in [\,x_0\,;x_1\,]$ tel que

$$f(c) = \int_0^1 3f(t)t^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Correction : Géométriquement, le résultat est très simple :
Si f n'a pas de point fixe alors (par continuité) le graphe de f est toujours au-dessus ou au-dessous de la première bissectrice, donc l'aire sous la courbe est soit strictement supérieure à $1/2$ soit strictement inférieure.



Prouvons cela rigoureusement. Supposons que f n'admette pas de point fixe. Alors, pour tout x, $g(x) = f(x) - x \neq 0$. f étant continue, g l'est aussi donc est de signe constant (à savoir faire absolument !). Si g est strictement positive, alors (g est continue), son intégrale est strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$ (les bornes sont dans l'ordre croissant), et son intégrale est strictement négative si g est strictement négative. Dans les deux cas, c'est absurde car :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Exercice 10 : ✪✪ Soit f une fonction continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$. Domaines de définition et de continuité de la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme dans l'exercice 2, φ est définie en x si et seulement si $t \mapsto f(t)\sin(xt)$ est continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$, ce qui est toujours le cas puisque f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ et la fonction sin est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, φ est définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale puis par inégalité triangulaire :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = \left|\int_a^b f(t)(\sin(xt) - \sin(x_0t))\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)| \times |\sin(xt) - \sin(x_0t)|\,\mathrm{d}t$$

La fonction $|\sin'| = |\cos|$ étant bornée par 1, d'après l'IAF, pour tout t, $|\sin(xt) - \sin(x_0t)| \leq |xt - x_0t|$. En multipliant par $|f(t)|$ (positif) et par croissance de l'intégrale :

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \int_a^b |f(t)| \times |(x - x_0)t|\,\mathrm{d}t = |x - x_0| \int_a^b |f(t)t|\,\mathrm{d}t$$

D'après le théorème d'encadrement, $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ donc $\varphi(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \varphi(x_0)$: φ est continue en x_0 donc sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : ✪✪ Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \;\middle|\; f \in \mathscr{C}\left([\,0\,;1\,], \mathbb{R}\right), f(0) = f(1) = 1 \right\}$$

admet une borne inférieure, que celle-ci est nulle et qu'elle n'est pas atteinte.

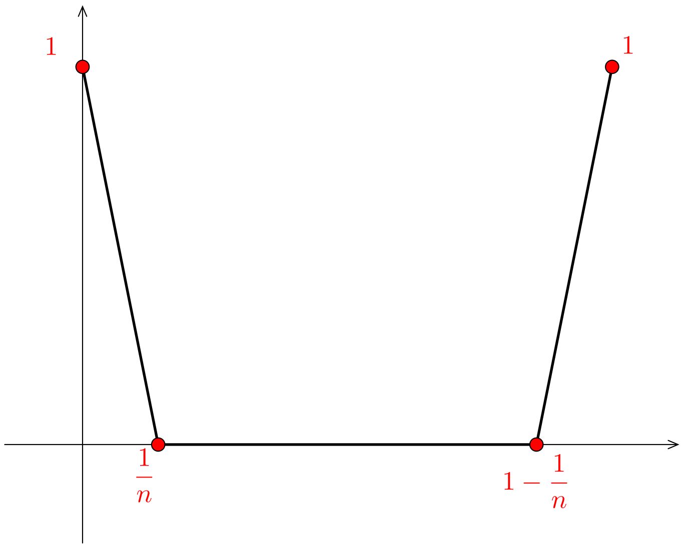
Correction : E est non vide car contient

$$1 = \int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t$$

(la fonction constante égale à 1 est en effet continue et vaut 1 en 0 et en 1) et minoré par 0 donc admet une borne inférieure $\alpha \geq 0$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, 0 étant un minorant de E, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de E qui converge vers 0. Pour tout $n \geq 1$, on définit sur $[\,0\,;1\,]$ la fonction f_n par :

- f_n continue sur $[\,0\,;1\,]$.

- f_n nulle sur $\left[\frac{1}{n}\,;1-\frac{1}{n}\right]$.
- $f_n(0) = f_n(1) = 1$.
- f_n affine sur $\left[0\,;\frac{1}{n}\right]$ et sur $\left[1-\frac{1}{n}\,;1\right]$.



Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t \in E$$

On pourrait expliciter f_n et calculer l'intégrale de ${f_n}^2$, mais on peut faire plus simple. Tout d'abord :

$$\int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t + \int_{1-1/n}^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

Or, $0 \leq f_n \leq 1$ donc $0 \leq {f_n}^2 \leq 1$. Par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{1/n} 1 \,\mathrm{d}t + \int_{1-1/n}^1 1 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 f_n(t)^2 \,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme dit ci-dessus, par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, on en déduit que $\alpha = 0$. Si α est atteinte, alors il existe f continue sur $[\,0\,;1\,]$ telle que $f(0) = f(1) = 1$ et telle que

$$\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

Or, f^2 est positive, continue, non identiquement nulle (car vaut 1 en 0 et en 1) donc son intégrale est strictement positive, ce qui est absurde.

Exercice 12 - Le lemme de Gronwall : ✪✪ Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point, soit $a \in I$. Soient f, g continues sur I avec g à valeurs positives. Soit $A \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$,

$$f(x) \leq A + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On définit les fonctions y et z sur I par

$$y(x) = A + \int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad z(x) = y(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

   Donner les variations de z sur I.

2. Démontrer le lemme de Gronwall :

$$\forall x \in I, x \geq a, \qquad f(x) \leq A \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

3. Soit φ une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ avec $\varphi(0) = 0$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $x \geq 0$, $\varphi'(x) \leq \alpha\varphi(x)$. Montrer que φ est la fonction nulle.

Correction :

1. y est dérivable (même $\mathscr{C}^1$) sur I et z l'est également car produit de fonctions dérivables. Soit $x \in I$. On a $y'(x) = f(x)g(x)$ et

$$\begin{aligned} z'(x) &= (y'(x) - y(x)g(x)) \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= g(x)\,(f(x) - y(x)) \exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \end{aligned}$$

Or, g est positive et $f - y$ est négative par hypothèse, et une exponentielle est toujours strictement positive. Par conséquent, z' est négative : z est décroissante sur I.

2. D'après la question précédente, z est décroissante sur I et $z(a) = y(a) = A$ donc pour tout $x \in I, x \geq a, z(x) \leq A$. Dès lors,

$$y(x) \leq A \times \exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Il suffit de se souvenir que $f \leq y$ pour conclure.

3. Par croissance de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (on rappelle que $\varphi(0) = 0$) :

$$\int_0^x \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(x) - \varphi(0) = \varphi(x) \leq \int_0^x a\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Appliquons le lemme de Gronwall avec $A = 0, f = \varphi$ et g égale à la fonction constante égale à a qui est bien positive. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ (on rappelle que φ est positive) :

$$0 \leq \varphi(x) \leq 0 \times \exp\left(\int_0^x a\,\mathrm{d}t\right) = 0e^{ax} = 0$$

c'est-à-dire que φ est la fonction nulle.

Exercice 13 - Parce qu'il faudra bien savoir le faire un jour : ✪✪ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k\ln k}\right) - \ln(\ln(n))$$

1. Montrer que pour tout $p \geq 2$:

$$\frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leq \int_p^{p+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{p\ln p}$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.

Correction :

1. Même dessin et même méthode qu'en cours, en utilisant le fait que $t \mapsto 1/t\ln(t)$ est décroissante.

2. Sommons les inégalités précédents pour p allant de 2 à $n-1$, et avec la relation de Chasles :

$$\sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{(p+1)\ln(p+1)} \leq \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)}$$

Dès lors :

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p\ln(p)} \leq \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)}$$

si bien que

$$\sum_{p=3}^{n} \frac{1}{p\ln(p)} - \ln(\ln(n)) \leq -\ln(\ln(2)) \leq \sum_{p=2}^{n-1} \frac{1}{p\ln(p)} - \ln(\ln(n))$$

En d'autres termes :

$$u_n \leq \frac{1}{2\ln(2)} - \ln(\ln(2)) \qquad \text{et} \qquad -\ln(\ln(2)) \leq \frac{1}{n\ln(n)} - \ln(\ln(2)) \leq u_n$$

La suite (u_n) est donc bornée. Pour conclure, il suffit de prouver qu'elle est monotone. Or,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln(\ln(n+1)) + \ln(\ln(n)) \\ &= \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

La suite (u_n) est décroissante minorée donc converge.

Exercice 14 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. On définit sur $\mathbb{R}^+$ la fonction g par

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
2. ✪✪ La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer que si f est périodique de période 1, alors g est constante.

Correction :

1. Là aussi, epsilonons. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition d'une limite :

   $$\exists A > 0, \forall t \geq A \qquad L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon$$

   Ainsi, par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geq A$, intégrons ces inégalités sur l'intervalle $[\,x\,;x+1\,]$:

   $$\int_x^{x+1} L - \varepsilon \,\mathrm{d}t = L - \varepsilon \leq \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) \leq \int_x^{x+1} L + \varepsilon \,\mathrm{d}t = L + \varepsilon$$

   ce qui permet de conclure.
2. La réciproque est fausse. Illustrons ce résultat lorsque $L = 0$. Il suffit de prendre une fonction périodique de période 1 dont l'intégrale sur une période vaut 0, par exemple $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$. On prouve comme dans le chapitre 13 (faites-le !) que f n'a pas de limite en $+\infty$, mais la fonction g associée est nulle donc tend vers 0.
3. Fait en classe : si on a une fonction T-périodique, alors l'intégrale de f sur une période est constante. À savoir faire ! Refaisons-le ici : f étant continue, la fonction

   $$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

   est une primitive de f. Or, pour tout x, $g(x) = F(x+1) - F(x)$ donc g est dérivable et $g'(x) = f(x+1) - f(x) = 0$ puisque f est périodique de période 1 donc g est constante.

Exercice 15 : ✪✪ Donner la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n \,\mathrm{d}t$$

Correction : Ici, comme dans l'exercice suivant, la méthode de simple majoration ne suffit plus. Il faut epsiloner : si on fixe $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $(\ln(e-\varepsilon))^n \leq \varepsilon$. Soit donc $n \geq n_0$. Coupons l'intégrale en $e - \varepsilon$:

$$I_n = \int_1^{e-\varepsilon} \ln(t)^n \,\mathrm{d}t + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(t)^n \,\mathrm{d}t$$

Or, la fonction ln est croissante, ainsi que $x \mapsto x^n$ (sur $\mathbb{R}_+$). Par croissance de l'intégrale, et en se souvenant que, par choix de n, $(\ln(e-\varepsilon))^n \leq \varepsilon$:

$$I_n \leq \int_1^{e-\varepsilon} \ln(e-\varepsilon)^n \,\mathrm{d}t + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(t)^n \,\mathrm{d}t \leq (e-\varepsilon-1)\times \ln(e-\varepsilon) + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(t)^n \,\mathrm{d}t \leq (e-1)\times\varepsilon + \int_{e-\varepsilon}^{e} \ln(t)^n \,\mathrm{d}t$$

Le morceau restant est majoré par ε (intégrale d'une fonction inférieure à 1 sur un intervalle de longueur ε) si bien que $I_n \leq (e-1)\varepsilon + \varepsilon = e\times\varepsilon$, et $I_n \geq 0$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq I_n \leq e\times\varepsilon$, c'est-à-dire que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Ici, comme dans l'exercice précédent, la méthode de simple majoration ne suffit plus. Il faut epsiloner. Prouvons que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [\,0\,;\eta\,]$, $|f(x)-f(0)| \leq \varepsilon$. Attention, t^n ne finit pas par être inférieur à η pour tout t puisqu'il y a 1 dans l'intervalle : il faut couper avant 1. Plus précisément : $(1-\varepsilon)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $(1-\varepsilon)^n \leq \eta$. Soit $n \geq n_0$. Pour tout $t \in [\,0\,;1-\varepsilon\,]$, $0 \leq t^n \leq (1-\varepsilon)^n \leq \eta$ si bien que $|f(t^n)-f(0)| \leq \varepsilon$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
|I_n - f(0)| &= \left|\int_0^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_0^{1-\varepsilon} f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t + \int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \left|\int_0^{1-\varepsilon} f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_{1-\varepsilon}^1 f(t^n)-f(0)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^{1-\varepsilon} |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t + \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t \\
&\leq (1-\varepsilon)\times\varepsilon + \int_{1-\varepsilon}^1 |f(t^n)-f(0)|\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M = \max|f|$, si bien que pour tout t, $|f(t^n)-f(0)| \leq |f(t^n)| + |f(0)| \leq 2M$. Finalement :

$$|I_n - f(0)| \leq (1-\varepsilon)\varepsilon + 2M\varepsilon \leq (2M+1)\varepsilon$$

ce qui permet de conclure (rappelons qu'on peut prendre certaines « libertés » avec l'écriture d'une limite, cf. chapitres 12 et 13).

Exercice 17 - Formule de la moyenne : ✪✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit f continue au voisinage de 0.

   (a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et croissante, soit $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Correction :

1. Le raisonnement est analogue à celui de l'exercice 8 : f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : il existe x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = \min f$ et $f(x_1) = \max f$. Notons $m = f(x_0)$ et $M = f(x_1)$. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$, $m \leq f(t) \leq M$ et $g(t) \geq 0$ donc $mg(t) \leq f(t)g(t) \leq Mg(t)$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b mg(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0)\times\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b Mg(t)\,\mathrm{d}t = f(x_1)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Deux possibilités : soit g est nulle sur $[\,a\,;b\,]$, et alors les deux intégrales

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

sont nulles, et alors tout $c\in[\,a\,;b\,]$ convient, soit g est non nulle sur $[\,a\,;b\,]$, ce qu'on suppose dans la suite. g étant continue et positive (et non nulle), son intégrale est strictement positive : on peut donc diviser les inégalité ci-dessus sans changer le sens des inégalités, ce qui donne :

$$f(x_0)\leq \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}\leq f(x_1)$$

D'après le TVI (f est continue), il existe c tel que

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} = f(c)$$

ce qui est le résultat voulu.

2. (a) Soit $x>0$ (on cherche la limite en 0^+). Appliquons la questions précédente avec $g : t\mapsto t$ qui est bien continue et positive sur $[\,0\,;x\,]$ (car $x>0$) : il existe $c\in[\,0\,;x\,]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t &= f(c)\int_0^x t\,\mathrm{d}t\\ &= f(c)\times\frac{x^2}{2}\end{aligned}$$

si bien que

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(c)}{2}$$

Attention, c dépend de x (on aurait pu le noter c_x pour expliciter la dépendance en x) ! On a : $0\leq c\leq x$ donc $c\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ d'après le théorème d'encadrement, et f est continue donc

$$\frac{1}{x^2}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{f(0)}{2}$$

(b) Soit $x>0$. De même, appliquons la première question avec $g : t\mapsto 1/t$ qui est bien continue positive sur $[\,x\,;2x\,]$: il existe $c\in[\,x\,;2x\,]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= f(c)\times\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= f(c)\times(\ln(2x)-\ln(x))\\ &= f(c)\times\ln(2)\end{aligned}$$

De même (théorème d'encadrement) $c\xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et f est continue en 0 donc

$$\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} f(0)\ln(2)$$

3. f est de classe $\mathscr{C}^1$: on pense à une IPP. Notons

$$G : x\mapsto\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

Alors G est une primitive de g et est $\mathscr{C}^1$ car g est continue : en effectuant une IPP (en dérivant f et en intégrant g) :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, $G(a)=0$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Appliquons la première question avec G à la place de f et f' à la place de g (qui est bien continue positive puisque f est croissante). Dès lors, il existe c tel que

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t &= G(c)\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t \times (f(b)-f(a))\end{aligned}$$

En réinjectant ci-dessus :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t &= f(b)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t \times (f(b)-f(a)) \\ &= f(a)\int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t + f(b)\times\left(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^c g(t)\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure à l'aide de la relation de Chasles.

Exercice 18 : ✪✪✪ Montrer les résultats suivants, sans chercher à calculer explicitement les intégrales correspondantes :

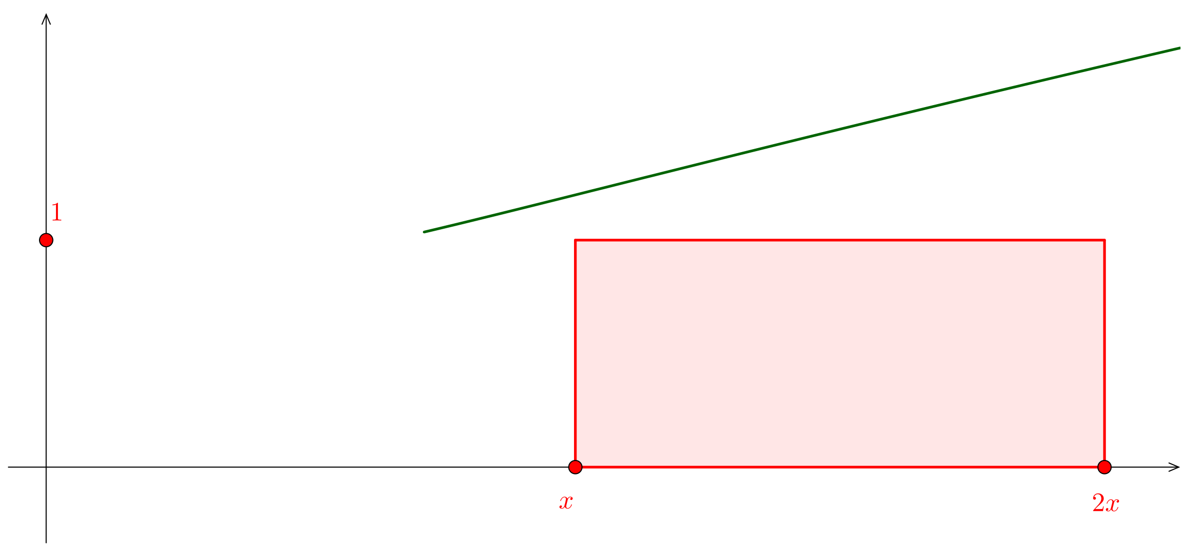
$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_0^x \sin^2(t)\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Correction : L'idée est d'à chaque fois minorer l'intégrale par l'aire d'un rectangle (ou d'une suite de rectangles) dont l'aire tend vers $+\infty$.

Pour la première intégrale : on sait que, par croissances comparées, $t/\ln(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ donc il existe $A>0$ tel que, pour tout $t\geq A$, $t/\ln(t)\geq 1$. Par croissance de l'intégrale, pour tout $t\geq A$,

$$\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t \geq \int_x^{2x} \mathrm{d}t = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et on conclut à l'aide du théorème de minoration.



Pour la deuxième intégrale, l'idée est la même, mais la fonction s'annule infiniment souvent donc il faut en fait ajouter l'aire de nombreux rectangles. L'idée est de se placer là où le sinus vaut 1. Plus précisément : pour tout $n \geq 0$,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq \text{Arctan}(\pi/2) > \text{Arctan}(\pi/4) = 1$$

Cependant, on cherche un rectangle donc il faut se placer sur tout un intervalle (de longueur non nulle). La fonction $\sin^2$ étant continue, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2} - \eta\,;\frac{\pi}{2} + \eta\right]$, $\sin^2(x) \geq 1/2$ (on pourrait même être plus précis car on sait quand le sinus vaut $1/\sqrt{2}$ mais il est inutile d'être aussi précis). Par 2π-périodicité, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi - \eta\,;\frac{\pi}{2} + 2n\pi + \eta\right]$, $\sin^2(x) \geq 1/2$. Finalement, sur cet intervalle :

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq (1-\varepsilon)\text{Arctan}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \geq (1-\varepsilon)\text{Arctan}(\pi/2) > 1/2 \times \text{Arctan}(\pi/4) = 1/2$$

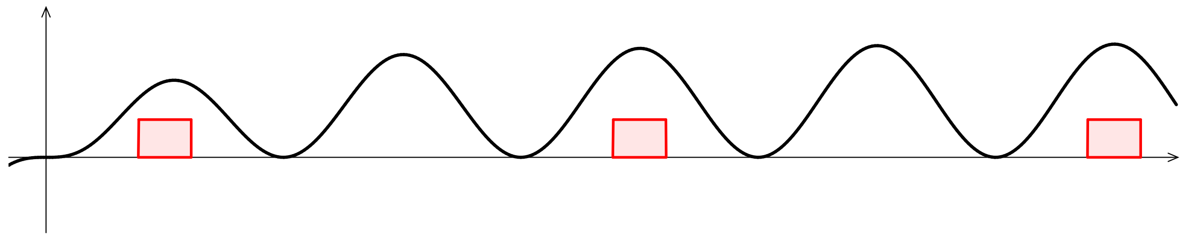
La fonction intégrée étant positive, pour tout x,

$$\int_0^x \sin^2(t)\text{Arctan}(t)\,\text{d}t \;\geq \sum_{k=0}^n \int_{\pi/2+2k\pi-\eta}^{\pi/2+2k\pi+\eta} (1-\varepsilon)\,\text{d}t \;= (n+1) \times 2\eta \times 1/2$$

avec n le plus grand entier tel que $\pi/2 + 2n\pi + \eta \leq x$ donc

$$n = \left\lfloor \frac{x - \eta - \pi/2}{2n} \right\rfloor \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

et on conclut comme précédemment avec le théorème de minoration.



Exercice 19 - Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire : ✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\text{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\text{d}t$$

si et seulement si f est de signe constant.

2. ✪✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{C}$ continue. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\text{d}t\right| = \int_a^b |f(t)|\,\text{d}t$$

si et seulement si f a un argument constant (là où elle ne s'annule pas).

Correction :

1. Supposons qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire. On cherche à prouver que $|f| = \pm f$. Par hypothèse,

$$\int_a^b |f(t)|\,\text{d}t \;= \pm\int_a^b f(t)\,\text{d}t$$

Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que

$$\int_a^b |f(t)|\,\text{d}t \;= \int_a^b f(t)\,\text{d}t$$

Alors

$$\int_a^b |f(t)| - f(t)\,\text{d}t \;= 0$$

La fonction $|f| - f$ est positive, continue et d'intégrale nulle donc est la fonction nulle : $|f| = f$ donc f est positive, en particulier f est de signe constant. La réciproque est évidente puisque si f est de signe constant alors $|f| = f$ ou $|f| = -f$: dans les deux cas, on a le résultat voulu.

2. Supposons qu'il y ait égalité. Si les deux intégrales sont nulles, alors il n'y a rien à prouver. Supposons que ces deux intégrales (égales) soient non nulles. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ si bien que

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times e^{-i\theta}$$

Or, de même qu'en cours :

$$\begin{aligned}
\int_a^b |f(t)e^{-i\theta}|\,\mathrm{d}t &= \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \\
&= \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \mathrm{Re}\left(\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times e^{-i\theta}\right) \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\left(f(t)e^{-i\theta}\right)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

De même que dans la question précédente, on prouve que $|f(t)e^{-i\theta}| = \mathrm{Re}(f(t)e^{-i\theta})$ ce qui n'est possible que si $f(t)e^{-i\theta}$ est un réel positif (le module d'un complexe est égal à sa partie réelle si et seulement si ce complexe est un réel positif) donc son propre module : $f(t)e^{-i\theta} = |f(t)|$ donc $f(t) = |f(t)|e^{i\theta}$: θ est un argument de f (là où f ne s'annule pas). Là aussi, la réciproque est immédiate.

Exercice 20 : ✪✪✪ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer une expression simple de

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right)\right|^2\,\mathrm{d}t$$

en fonction des coefficients de P.

2. (a) On suppose que P est non nul, à coefficients entiers, et que, pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|P(u)| < \sqrt{2}$. Montrer que P n'a qu'un seul coefficient non nul.

   (b) Montrer que ce résultat est encore vrai avec une inégalité large.

Correction :

1. Notons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$ (P n'est pas forcément de degré n, P peut par exemple être le polynôme nul). Notons I l'intégrale de l'énoncé.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{it}) \times \overline{P(e^{it})}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^n a_k e^{ikt}\right) \times \left(\sum_{p=0}^n \overline{a_p} e^{-ipt}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^n\sum_{p=0}^n a_k\overline{a_p}e^{i(k-p)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^n\sum_{p=0}^n a_k\overline{a_p}\int_0^{2\pi} e^{i(k-p)t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or, si $q \in \mathbb{Z}$, un calcul simple (différencier les cas selon que $q = 0$ ou non puisqu'on divise par q en intégrant !) donne

$$\int_0^{2\pi} e^{iqt}\,\mathrm{d}t = \delta_{0,q} 2\pi$$

Ainsi, dans la somme double ci-dessus, l'intégrale est nulle sauf si $k-p=0$ donc si $k=p$ et alors elle vaut 2π, si bien que seul le terme d'indice $p=k$ reste. Finalement :

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_k}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_k}\times 2\pi \\ &= \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \end{aligned}$$

En conclusion, I est la somme des module des coefficients de P au carré.

2. (a) Puisque $|e^{it}|=1$ pour tout t, alors, par croissance de l'intégrale (la fonction intégrée est continue et l'intervalle n'est pas réduit à un point donc l'inégalité est stricte)

$$I < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{d}t = 2$$

D'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 < 2$$

Or, c'est une somme non nulle (car P est non nul) d'entiers positifs donc un seul coefficient vaut 1 et les autres valent 0 : P est de la forme $\pm X^k$.

(b) Supposons que l'inégalité soit large. Le même raisonnement que ci-dessus donne

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \leq 2$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que le résultat ne soit pas vrai, donc que P admette au moins deux coefficients non nuls. On a alors l'inégalité

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 \geq 2$$

car cette somme contient au moins deux entiers supérieurs ou égaux à 1, et donc

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 = 2$$

Dès lors, on se trouve dans le cas d'égalité de la croissance de l'intégrale (cf. cours) : puisque $0<2\pi$ et que les fonctions intégrées sont continues, alors on a $f=g$ (en reprenant les notations du théorème) c'est-à-dire $|P(e^{it})|=\sqrt{2}$ pour tout $t\in[\,0\,;2\pi\,]$. En particulier, $|P(1)|=\sqrt{2}$ ce qui est absurde car P est à coefficients entiers donc $P(1)\in\mathbb{Z}$.

Exercice 21 : ✪✪✪ Soit $f:[\,a\,;b\,]\to\mathbb{R}$ continue (avec $a<b$). Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\int_a^b |f(t)|^n\,\mathrm{d}t$ et on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes.

1. Montrer que f ne peut prendre que les valeurs $-1,0$ ou 1.
2. En déduire que f est constante égale à $-1,0$ ou 1.

Correction :

1. Il faut donc montrer que $|f|$ ne peut pas prendre de valeur strictement supérieure à 1, ni dans l'intervalle $]\,0\,;1\,[$. Supposons dans un premier temps qu'il existe x_0 tel que $|f(x_0)|>1$. f étant continue, sur un voisinage de x_0, $|f(x_0)|>1$. Plus précisément :

$$\exists \eta>0, \forall t\in[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,], |f(t)|\geq m$$

où $m = \dfrac{|f(x_0)|+1}{2} > 1$. Par relation de Chasles puis croissance et positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (l'idée est de minorer l'intégrale de f par le rectangle de hauteur m de largeur l'intervalle $[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$, le dessin étant analogue à ceux de l'exercice 18 et laissé à votre charge) :

$$u_n = \int_a^{x_0-\eta} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t + \int_{x_0+\eta}^{b} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t \geq 0 + \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} m^n \,\mathrm{d}t + 0 = m^n \times 2\eta$$

Or, $m > 1$ donc $m^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si bien que, d'après le théorème de minoration, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque (u_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs et en particulier est bornée. En d'autres termes, $|f(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$.

Première méthode : À présent, raisonnons encore par l'absurde et supposons qu'il existe x_0 tel que $|f(x_0)| \in \,]\,0\,;1\,[$. Là encore, il existe un $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$, $0 < |f(x)| < 1$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une part ($|f|$ étant majorée par 1), $|f|^{n+1} \leq |f|^n$ donc :

$$\int_a^{x_0-\eta} |f(t)|^{n+1} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{x_0+\eta}^{b} |f(t)|^{n+1} \,\mathrm{d}t \leq \int_0^{x_0-\eta} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t$$

De plus (cas d'égalité de la croissance de l'intégrale), $|f(t)|^{n+1} < |f(t)|^n$, $x_0 - \eta < x_0 + \eta$ et $|f|$ est continue donc :

$$\int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^{n+1} \,\mathrm{d}t < \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} |f(t)|^n \,\mathrm{d}t$$

En conclusion, $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante donc, en particulier, prend une infinité de valeurs, ce qui est encore absurde. On a bien le résultat voulu.

Deuxième méthode : Prouvons d'une manière plus simple que $|f|$ ne peut pas prendre de valeurs dans $]\,0\,;1\,[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \int_a^b |f^n(t)|(|f(t)|-1) \,\mathrm{d}t \leq 1$$

par positivité de l'intégrale (car on a prouvé que $|f|-1 \leq 0$). Si $|f|$ prend des valeurs dans $]\,0\,;1\,[$, alors $|f|^n \times (|f|-1)$ n'est pas la fonction nulle, est continue et négative donc $u_{n+1} - u_n < 0$ c'est-à-dire que (u_n) est strictement décroissante, ce qui est encore une fois absurde.

2. Si f prend au moins deux valeurs, disons 0 et 1 alors, f étant continue, d'après le TVI, il existe x tel que $f(x) = 1/2$ ce qui est absurde.

Exercice 22 : ✪✪✪ Les deux questions sont indépendantes, mais les méthodes sont analogues.

1. Soit f continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ vérifiant $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que f s'annule au moins deux fois.
2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f s'annule au moins $n+1$ fois.

Correction :

1. Tout d'abord, f s'annule au moins une fois. En effet, si f ne s'annule pas, alors f est de signe constant puisqu'elle est continue (à savoir faire en claquant des doigts !). et donc $f \times \sin$ est de signe constant, non identiquement nulle, et continue, ce qui contredit le fait que son intégrale sur $[\,0\,;\pi\,]$ soit nulle. Par conséquent, f s'annule au moins une fois. Plus fort : f s'annule et change de signe. Raisonnons par l'absurde et supposons que f s'annule exactement une fois, en un réel noté $\alpha \in [\,0\,;\pi\,]$. f s'annule et change de signe en α donc est positive puis négative, ou le contraire évidemment. Or, la fonction $x \mapsto \sin(x-\alpha)$ s'annule également en changeant de signe en α, si bien que $x \mapsto f(x)\sin(x-\alpha)$ est de signe constant. Or :

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-\alpha)\,\mathrm{d}x = \cos(\alpha)\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \sin(\alpha)\int_0^\pi f(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

ce qui est absurde puisque l'intégrale d'une fonction continue, de signe constant, qui n'est pas la fonction nulle, n'est pas nulle. Finalement, f s'annule au moins deux fois.

2. Si f est la fonction nulle, le résultat est évident. Supposons que f ne soit pas la fonction nulle. Montrons un résultat plus fort : montrons que f s'annule au moins $n+1$ fois en changeant de signe. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'ensemble des points en lesquels f s'annule en changeant de signe soit de cardinal $k \leq n$: notons $x_1 < \cdots < x_k$ les points en lesquels f s'annule en changeant de signe. Puisque $g : x \mapsto (x-x_1)\cdots(x-x_k)$ s'annule aussi en changeant de signe en tous les x_i, $f \times g$ est de signe constant. Or, g est polynomiale de degré $k \geq n$ ce qui implique que l'intégrale de $f \times g$ est nulle. En effet, d'après l'hypothèse de l'énoncé, par combinaison linéaire, l'intégrale de f multipliée par n'importe quelle fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n est nulle. Par conséquent (fonction continue de signe constant), $f \times g$ est nulle sur $[\,a\,;b\,]$. Or, g est nulle uniquement en les x_i donc f est nulle sauf en les x_i donc est nulle partout par continuité, ce qui est absurde.

Exercice 23 : ✪✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. On pose $g = f' - f$.
   (a) En remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y'-y=g$, prouver que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$:
   $$f(x) = \int_0^x g(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que
   $$\int_0^1 |f'(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{e}$$
2. Montrer que la constante $1/e$ est optimale à l'aide de la suite de fonctions (f_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [\,0\,;1\,], f_n(x) = \frac{e^x - e^{-nx}}{e-e^{-n}}$$

Correction :

1. (a) Résolvons l'équation différentielle $y'-y=g$. Tout d'abord, on résout l'équation homogène associée $(H) : y'-y=0$:
   $$S_H = \{x \mapsto \lambda e^x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$
   Cherchons à présent une solution particulière grâce à la méthode de variation de la constante. Soit $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x)e^x$. Alors y_0 est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   $${y_0}'(x) - y_0(x) = \lambda'(x)e^x$$
   donc y_0 est solution particulière si et seulement si $\lambda'(x) = g(x)e^{-x}$ si et seulement si λ est une primitive de $t \mapsto g(t)e^{-t}$. Finalement :
   $$y_0 : x \mapsto \int_0^x g(t)e^{x-t}\,\mathrm{d}t$$
   est une solution particulière de l'équation différentielle $y'-y=g$. En conclusion, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est
   $$S_E = \left\{x \mapsto \lambda e^x + \int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
   f étant solution de cette équation différentielle, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda e^x + \int_0^x e^{x-t}g(t)\,\mathrm{d}t$$
   Or, $f(0)=0$ et $f(0)=\lambda$ donc $\lambda = 0$ ce qui permet de conclure.
   (b) $f(1)=1$ donc
   $$\int_0^1 g(t)e^{1-t}\,\mathrm{d}t = 1$$
   si bien que
   $$\int_0^1 g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e}$$
   Tout d'abord :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in [\,0\,;1\,]$, $e^{-t} \leq 1$ donc $e^{-t}|g(t)| \leq |g(t)|$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \int_0^1 |g(t)e^{-t}|\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité triangulaire :

$$\int_0^1 |f'(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \geq \left|\int_0^1 g(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{e}$$

2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = 1$. De plus, f_n est dérivable et :

$$\begin{aligned} f_n{}'(x) - f_n(x) &= \frac{e^x + ne^{-nx}}{e - e^{-n}} - \frac{e^x - e^{-nx}}{e - e^{-n}} \\ &= \frac{(n+1)e^{-nx}}{e - e^{-n}} \end{aligned}$$

Cette quantité étant positive, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left|f_n{}'(t) - f_n(t)\right|\,\mathrm{d}t &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \int_0^1 e^{-nt}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \left[\frac{e^{-nt}}{-n}\right]_0^1 \\ &= \frac{(n+1)}{e - e^{-n}} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-n}}{n}\right) \\ &= \frac{1}{e - e^{-n}} \times \left(\frac{n+1}{n} - \frac{(n+1)e^{-n}}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Par conséquent, il ne peut pas exister de constante $k > 1/e$ pour laquelle l'inégalité de la question précédente soit vraie avec k à la place de $1/e$ car l'inégalité large passe à la limite, et donc, en passant à la limite, cette limite serait supérieure ou égale à k ce qui est absurde comme on vient de le voir. La constante $1/e$ est donc la meilleure possible (rappelons qu'une minoration est d'autant plus intéressante qu'elle est grande, et on vient de voir que $1/e$ est la constante la plus grande possible).

22.2 Fonctions en escalier et continues par morceaux

Exercice 24 - Trois intégrales de fonctions continues par morceaux : ✪

1. Soient $0 < a < b$ deux entiers naturels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}x$.
3. ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t$.

Correction : Comme en classe, on calcule l'intégrale d'une fonction continue par morceaux en cassant en chaque point de discontinuité et en remplaçant par l'expression de la fonction entre deux telles valeurs.

1.
$$\begin{aligned}
\int_a^b \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} \int_k^{k+1} k \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=a}^{b-1} k \\
&= \sum_{k=1}^{b-1} k - \sum_{k=1}^{a-1} k \\
&= \frac{b(b-1)}{2} - \frac{a(a-1)}{2}
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_3^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sin\left(0 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \sin\left(1 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_2^3 \sin\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x + \int_3^\pi \sin\left(3 \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 0 \,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \,\mathrm{d}x + \int_2^3 1 \,\mathrm{d}x + \int_3^\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (1 + \pi - 3) + 1 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \times (\pi - 2) + 1
\end{aligned}$$

3. Il faut couper en chaque $1/k$:
$$\begin{aligned}
\int_{1/n}^1 \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor \mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} k \,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k \times \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}
\end{aligned}$$

Exercice 25 - Fonctions Riemann intégrables : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$. Reprenons les notations du cours :

$$\mathscr{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \mid \varphi \le f\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{E}^+(f) = \{\psi \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R}) \mid f \le \psi\}$$

ainsi que

$$I^-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \mid \varphi \in \mathscr{E}^-(f) \right\} \qquad \text{et} \qquad I^+(f) = \left\{ \int_a^b \psi(t)\,\mathrm{d}t \mid \psi \in \mathscr{E}^-(f) \right\}$$

On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a\,;b]$ si $I^-(f)$ et $I^+(f)$ ont respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, et si celles-ci sont égales [1]. Montrer que l'indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a\,;b]$.

Correction : Notons donc f l'indicatrice de $\mathbb{Q}$. Soit $I \in I^-(f)$: il existe donc $\varphi \in \mathscr{E}^-(f)$ telle que $I = \displaystyle\int_a^b \varphi$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à φ (qui est donc en escalier par définition). Soit $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ et notons λ_i la valeur de φ sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Par densité de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un irrationnel x dans $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ donc $f(x) = 0 \geq \varphi(x) = \lambda_i$ ($\varphi \leq f$ par définition de $\mathscr{E}^-(f)$). Dès lors, par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(a_{i+1} - a_i) \leq 0$$

Il en découle que $I^-(f)$ est majoré par 0. Or, la fonction nulle appartient à $\mathscr{E}^-(f)$ donc son intégrale appartient à $I^-(f)$. En d'autres termes, $0 \in I^-(f)$ donc 0 est le maximum de $I^-(f)$. On en déduit que $I^-(f)$ admet une borne supérieure $\alpha = 0$.

Soit $I \in I^+(f)$: il existe donc $\psi \in \mathscr{E}^+(f)$ telle que $I = \displaystyle\int_a^b \psi$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ (pas la même que pour φ) adaptée à ψ. Soit $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ et notons λ_i la valeur de ψ sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel x dans $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ donc $f(x) = 1 \leq \psi(x) = \lambda_i$ ($\psi \geq f$ par définition de $\mathscr{E}^+(f)$). Dès lors, par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier :

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i(a_{i+1} - a_i) \geq \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = a_n - a_0 = b - a$$

Il en découle que $I^+(f)$ est minoré par $b-a$. Or, la fonction constante égale à 1 appartient à $\mathscr{E}^+(f)$ donc son intégrale appartient à $I^+(f)$. En d'autres termes, $b - a \in I^+(f)$ donc $b-a$ est le minimum de $I^+(f)$. On en déduit que $I^+(f)$ admet une borne inférieure $\beta = b - a$.

$I^-(f)$ et $I^+(f)$ admettent respectivement une borne sup et une borne inf, mais celles-ci ne sont pas égales : f n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ en escalier. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ continue telle que

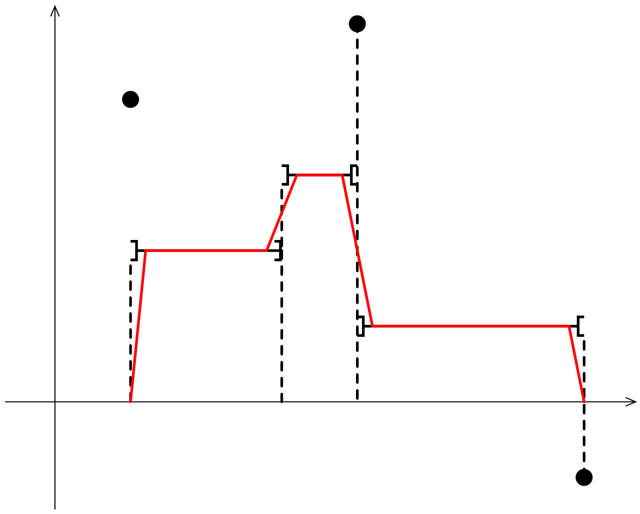
$$\int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon$$

Correction : Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. Quitte à prendre un ε plus petit, on peut supposer que $2\varepsilon < a_{i+1} - a_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. f étant en escalier, elle prend un nombre fini de valeurs donc est bornée (et atteint ses bornes). Notons $M = \max |f|$. Soit g la fonction définie sur $[a\,;b]$ par :

- g continue sur $[a\,;b]$.
- $g(a) = g(b) = 0$.
- g coïncide avec f sur chaque intervalle du type $[a_i + \varepsilon\,; a_{i+1} - \varepsilon]$.
- g est affine par morceaux.

En clair, g est la fonction qui affine par morceaux qui coïncide avec f à peu près partout, on se garde une marge de ε au début et à la fin de chaque intervalle pour lui laisser le temps d'aller d'un plateau à un autre. Voici l'allure du graphe de g :

1. Ainsi, d'après le cours, une fonction continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann, mais on peut montrer que la réciproque est fausse : il existe des fonctions intégrables au sens de Riemann qui ne sont pas continues par morceaux.



Puisque $f = g$ sur tous les intervalles du type $[\, a_i + \varepsilon \,;a_{i+1} - \varepsilon\,]$, $|f-g| = 0$ sur ces intervalles si bien qu'il ne reste que les autres contributions dans l'intervalle, les intervalles sur lesquels les deux fonctions ne coïncident pas. Plus précisément :

$$\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\, = \int_a^{a+\varepsilon} |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\, + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i-\varepsilon}^{a_i+\varepsilon} |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\, + \int_{b-\varepsilon}^{b} |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, sur chacun de ces intervalles, d'après l'inégalité triangulaire, $|f(t)-g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)| \leq 2M$. En effet, par définition de M, $|f| \leq M$, et c'est aussi vrai pour g car g est affine et relie à chaque fois deux valeurs prises par f donc est bornée par M également (une fonction affine est comprise entre les deux valeurs qu'elle relie). Par conséquent, par croissance de l'intégrale, et en n'oubliant pas que l'intégrale d'une constante est la valeur de la constante multipliée par la longueur de l'intervalle :

$$\int_a^b |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t\, \leq \varepsilon \times M + \sum_{i=1}^{n-1} 2M\varepsilon + M\varepsilon = 2nM\varepsilon$$

Quitte à remplacer ε par $\varepsilon/2nM$ au début de l'exercice, on a le résultat voulu.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour toute fonction $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ en escalier,

$$\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t\, = 0$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Correction : L'idée est que si g est en escalier très proche de f, alors $f \times g$ est proche de f^2 et si l'intégrale de $f \times g$ est nulle, alors l'intégrale de f^2 est nulle donc f est nulle. Prouvons-le rigoureusement. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours, il existe g en escalier telle que $|f-g| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left| \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\, - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^b f(t)(f(t)-g(t))\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \times |f(t)-g(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes : notons $M = \max |f|$ si bien que

$$\left| \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\, - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b M \times \varepsilon\,\mathrm{d}t\, = M\varepsilon(b-a)$$

ε étant quelconque strictement positif, on en déduit que

$$\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\, - \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\, = 0$$

Or, g est en escalier donc $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\, = 0$ donc $\displaystyle\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t\, = 0$. f^2 étant positive, continue, d'intégrale nulle, c'est la fonction nulle, donc f est nulle.

Exercice 28 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ qui échange les deux premières décimales (c'est-à-dire $f(0,a_1a_2a_3\dots) = 0,a_2a_1a_3\dots$). Montrer que f est continue par morceaux et calculer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\,$.

Correction : Donnons une expression explicite de f. Si $x \in [\,0\,;1\,[$ (la valeur en 1 ne modifie pas la valeur de l'intégrale, car les valeurs ponctuelles n'interviennent pas dans le calcul de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux). Alors $10x = a_1, a_2a_3\dots$ (avec les notations de l'énoncé) donc $a_1 = \lfloor 10x \rfloor$ puis

$$100x - 10a_1 = a_2, a_3\dots$$

si bien que $a_2 = \lfloor 100x - 10a_1 \rfloor = \lfloor 100x \rfloor - 10a_1$ puisque a_1 est un entier (nous remplacerons a_1 par sa valeur à la fin). Enfin :

$$\begin{aligned} 0, a_2a_1a_3\dots &= \frac{a_2a_1, a_3\dots}{100} \\ &= \frac{10a_2 + a_1 + 0, a_3\dots}{100} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0, a_3\dots &= a_1a_2, a_3\dots - a_1a_2 \\ &= 100x - 10a_1 - a_2 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{10a_2 + a_1 + 100x - 10a_1 - a_2}{100} \\ &= \frac{9a_2 - 9a_1 + 100x}{100} \\ &= \frac{9\lfloor 100x \rfloor - 90a_1 - 9a_1 + 100x}{100} \\ &= \frac{9\lfloor 100x \rfloor - 99a_1 + 100x}{100} \\ &= \frac{100x - 99\lfloor 10x \rfloor + 9\lfloor 100x \rfloor}{100} \end{aligned}$$

ce qui prouve que f est continue par morceaux (plus précisément, f est continue sur chaque intervalle du type $]\,k/100\,;(k+1)/100$
L'intégrale de x de 0 à 1 vaut $1/2$. Il suffit de calculer l'intégrale de $\lfloor 10x \rfloor$ et celle de $\lfloor 100x \rfloor$ pour conclure (grâce à la linéarité de l'intégrale). De même que dans l'exercice 24 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lfloor 10x \rfloor \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{9} \int_{k/10}^{(k+1)/10} k \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{9} \frac{k}{10} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

De même on trouve que

$$\int_0^1 \lfloor 100x \rfloor \,\mathrm{d}x = \frac{99}{2}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x - \frac{99}{100}\int_0^1 \lfloor 10x \rfloor \,\mathrm{d}x + \frac{9}{100}\int_0^1 \lfloor 100x \rfloor \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} - \frac{99}{100} \times \frac{9}{2} + \frac{9}{100} \times \frac{99}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On retrouve l'intégrale de l'identité, ce qui n'est pas très surprenant : on garde les mêmes images, on ne fait que les intervertir, l'aire sous la courbe reste la même. Bien sûr, cela n'est en rien une démonstration...

Exercice 29 - Généralisation du lemme de Riemann-Lebesgue : ✪✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Montrer que si g est une fonction continue T-périodique (avec $T > 0$) définie sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Déterminer : $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t$. Nous prouverons ce résultat d'une autre manière dans l'exercice 40.

Correction :

1. g étant continue, la fonction

$$G : x \mapsto \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de g d'après le théorème fondamental de l'analyse. Là aussi, commençons par prouver le résultat lorsque f est constante. Supposons donc f constante égale à c et soit $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t &= c\int_a^b g(\lambda t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{cG(\lambda b) - G(\lambda a)}{\lambda}\\ &= \frac{c}{\lambda}\times\left(\int_0^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\lambda a} g(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{c}{\lambda}\times\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

On aurait pu aussi effectuer le changement de variable $u = \lambda t$ à la première ligne. L'idée est de séparer l'intervalle $[\,\lambda a\,;\lambda b\,]$ en intervalles de longueur T, intervalles sur lesquels l'intégrale de g est constante par périodicité. On cherche le nombre d'intervalles de longueur T dans l'intervalle $[\,\lambda a\,;\lambda b\,]$. Plus précisément, on cherche le plus grand k tel que $\lambda a + kT \leq \lambda b$ donc le plus grand entier k tel que $kT \leq \lambda(b-a)$: on trouve donc $k = \left\lfloor \dfrac{\lambda(b-a)}{T}\right\rfloor$, et on note k cette quantité dans la suite. Par définition de k, $\lambda a + kT \leq b < a + (k+1)T$. Par conséquent :

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1}\int_{\lambda a + iT}^{\lambda a+(i+1)T} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t$$

La somme contient k intégrales de g, fonction T-périodique, sur des intervalles de longueur T. D'après le chapitre 10 (et on l'a redémontré dans le cas d'une fonction périodique de période 1 dans l'exercice 14), toutes ces intégrales ont la même valeur et sont égales à $\displaystyle\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t$. En d'autres termes :

$$\begin{aligned}\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t &= k\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left\lfloor\frac{\lambda(b-a)}{T}\right\rfloor\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, la dernière intégrale est une quantité bornée. Plus précisément :

$$\left|\int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} |g(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_{\lambda a+kT}^{\lambda a+(k+1)T} |g(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^T |g(t)|\,\mathrm{d}t$$

En particulier :

$$\frac{1}{\lambda}\int_{\lambda a+kT}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

et

$$\frac{1}{\lambda} \times \left(\frac{\lambda(b-a)}{T} - 1\right) < \frac{1}{\lambda}\left\lfloor \frac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor \leq \frac{1}{\lambda} \times \frac{\lambda(b-a)}{T}$$

D'après le théorème d'encadrement :

$$\frac{1}{\lambda}\left\lfloor \frac{\lambda(b-a)}{T} \right\rfloor \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{(b-a)}{T}$$

En conclusion :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \frac{c}{\lambda} \times \int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{c(b-a)}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Supposons à présent que f soit en escalier : soit $\sigma = (a_i)_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ une subdivision adaptée à f, et supposons que f soit constante égale à c_i sur chaque intervalle $]\, a_i\,;a_{i+1}\,[$. Par conséquent :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i g(\lambda t)\,\mathrm{d}t$$

D'après ce qui précède (a et b étant quelconques, le résultat précédent est encore valable pour une intégrale sur $[\, a_i\,;a_{i+1}\,]$) :

$$\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} c_i\,\mathrm{d}t\right) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Enfin, revenons au cas général où f est continue par morceaux. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le cours, il existe h en escalier telle que $|f-h| \leq \varepsilon$. D'après ce qui précède, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $\lambda \geq A$,

$$\left|\int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \leq \varepsilon$$

Par conséquent, si on note

$$D = \left|\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right|$$

Alors :

$$\begin{aligned} D \;&=\; \left|\int_a^b f(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right) - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, et d'après l'inégalité triangulaire (celle pour les réels puis l'inégalité triangulaire intégrale) :

$$\begin{aligned} D \;&\leq\; \int_a^b |f(t)-h(t)| \times |g(\lambda t)|\,\mathrm{d}t + \left|\int_a^b h(t)g(\lambda t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| \\ &\quad + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right| \times \int_a^b |h(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Enfin, g étant continue périodique, elle est bornée, disons par M, donc :

$$D \leq \varepsilon M(b-a) + \varepsilon + \left|\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right| \times \varepsilon(b-a)$$

ce qui permet de conclure.

2. La fonction $t \mapsto |\sin(t)|$ est continue et π-périodique puisque, pour tout t, $|\sin(t+\pi)| = |-\sin(t)| = |\sin(t)|$. Par conséquent, d'après la question précédente :

$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\sin(t)|\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

Or, sur $[\,0\,;\pi\,]$, le sinus est positif donc on peut enlever la valeur absolue, et l'intégrale du sinus sur $[\,0\,;\pi\,]$ vaut 2 donc

$$\int_a^b f(t)|\sin(\lambda t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

22.3 Sommes de Riemann :

Exercice 30 : ✪ Soit $\alpha > 0$. Montrer de deux façons différentes que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

Correction : Tout d'abord, à l'aide d'une somme de Riemann. Notons S_n la somme de l'énoncé. Alors

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$$

S_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = x^\alpha$. f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

Deuxième méthode : à l'aide d'une comparaison à une intégrale. Soit $k \geq 1$. La fonction f (toujours la même) étant croissante, pour tout $t \in [\,k\,;k+1\,]$,$k^\alpha \leq t^\alpha$. Par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} k^\alpha\,\mathrm{d}x = k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$$

De même :

$$\int_{k-1}^k t^\alpha\,\mathrm{d}t \leq k^\alpha$$

si bien qu'on a l'encadrement :

$$\int_{k-1}^k t^\alpha\,\mathrm{d}t \leq k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$$

Le dessin est laissé à votre charge. Si on somme de k allant de 1 à n, à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_0^n t^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^n k^\alpha \leq \int_1^{n+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$$

En divisant par $n^{\alpha+1}$:

$$\frac{1}{\alpha+1} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{n^{\alpha+1}\alpha+1}$$

On conclut à l'aide du théorème d'encadrement.

Exercice 31 : ✪ Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^t\,\mathrm{d}t$ sans calculer de primitive.

Correction : Utilisons les sommes de Riemann : si on note I cette intégrale,

$$I = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

où, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{k/n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (e^{1/n})^k \\
&= \frac{1}{n} \times e^{1/n} \times \frac{1-(e^{1/n})^n}{1-e^{1/n}} \\
&= \frac{1}{n} \times e^{1/n} \times \frac{1-e}{1-e^{1/n}}
\end{aligned}$$

On rappelle que $\dfrac{e^u-1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc

$$\frac{e^{1/n}-1}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
S_n &= e^{1/n} \times (e-1) \times \frac{1/n}{e^{1/n}-1} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1
\end{aligned}$$

Par unicité de la limite, $I = e-1$ ce qui est la valeur qu'on aurait trouvée à l'aide d'un calcul de primitive.

Exercice 32 : ✪ Donner les limites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

1. $u_n = \dfrac{1}{n^3}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
2. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{n+k}}$
3. ✪✪✪ $u_n = \dfrac{1}{n^4}\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} \left(n^2+k^2\right)^{1/n}$

Correction :

1. Soit $n \geq 1$.

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

u_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = x^2\cos(\pi x)$. f étant continue par morceaux,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x^2\cos(\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Notons I cette intégrale. À l'aide de deux IPP, on trouve que $I = -2/\pi^2$.

2. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}\times\sqrt{1+\dfrac{k}{n}}} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{\sqrt{1+k/n}}
\end{aligned}$$

u_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = x/\sqrt{1+x}$. f étant continue par morceaux,

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

Notons I cette intégrale. Avec la méthode du $+1-1$:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{x+1-1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x}\right]_0^1 \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2 \\
&= \frac{4-2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

quantité qui est bien positive (vérifier la cohérence des résultats permet d'éviter des erreurs bêtes).

3. Soit $n \geq 1$. $u_n > 0$: on pense à prendre son ln car cela transformera le produit en somme.

$$
\begin{aligned}
\ln(u_n) &= -4\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(n^2+k^2\right) \\
&= -4\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \left(\ln\left(n^2\right) + \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right) \\
&= -4\ln(n) + \frac{1}{n} \times 2n \times 2\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

Cela ressemble à une somme de Riemann mais on trouve du n et du $2n$. Rappelons que le théorème du cours est (si f est continue par morceaux) :

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
$$

ou plutôt :

$$
\frac{1}{\mathrm{truc}}\sum_{k=1}^{\mathrm{truc}} f\left(\frac{k}{\mathrm{truc}}\right) \xrightarrow[\mathrm{truc}\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
$$

Ici, on a truc $= 2n$: il suffit d'avoir du $2n$ partout. On réécrit donc $\ln(u_n)$ de la façon suivante :

$$
\ln(u_n) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} 2\ln\left(1+4\times\left(\frac{k}{2n}\right)^2\right)
$$

$\ln(u_n)$ est donc la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 2\ln(1+4x^2)$. f étant continue par morceaux,

$$
\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \int_0^1 2\ln\left(1+4x^2\right)\,\mathrm{d}x
$$

À l'aide d'une IPP puis du $+1-1$:

$$\begin{aligned}
I &= \left[2x\ln(1+4x^2)\right]_0^1 - \frac{16x^2}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(5) - 4\int_0^1 \frac{4x^2}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(5) - 4\int_0^1 \frac{4x^2+1-1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\ln(5) - 4\int_0^1 \mathrm{d}x\ + 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+(2x)^2} \\
&= 2\ln(5) - 4 + 4\left[\frac{\mathrm{Arctan}(2x)}{2}\right]_0^1 \\
&= 2\ln(5) - 4 + 2\mathrm{Arctan}(2)
\end{aligned}$$

si bien que $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(25) - 4 + 2\mathrm{Arctan}(2)$ et l'exponentielle est continue donc

$$u_n = e^{\ln(u_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ln(25)-4+2\mathrm{Arctan}(2)} = 25e^{-4+2\mathrm{Arctan}(2)}$$

Exercice 33 - Phénomène de Gibbs : ✪✪

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

- f est impaire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$.

1. Donner la valeur de $f(0)$, ainsi que les limites à droite et à gauche en 0. f est-elle continue ? Tracer sans justification le graphe de f sur $[\,-3\pi\,;3\pi\,]$. Pouvait-on se passer de l'hypothèse d'imparité ?
2. Pour tout $n \geq 1$ on pose :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

Justifier l'existence de $b_n(f)$ et donner sa valeur en fonction de n.

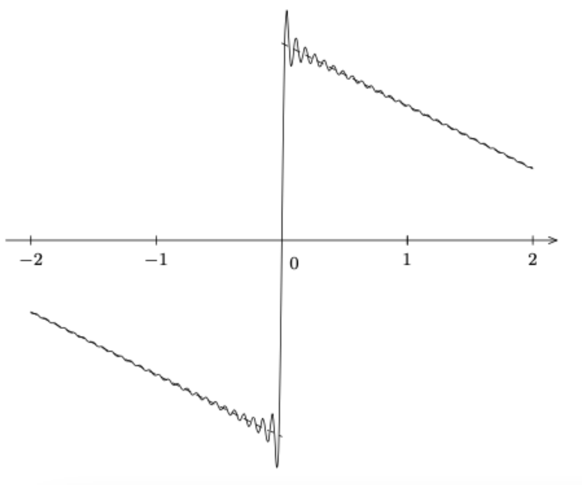
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction S_N par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} b_k(f)\sin(kt)$$

Montrer qu'il existe une fonction φ continue sur $[\,0\,;1\,]$ que l'on explicitera telle que :

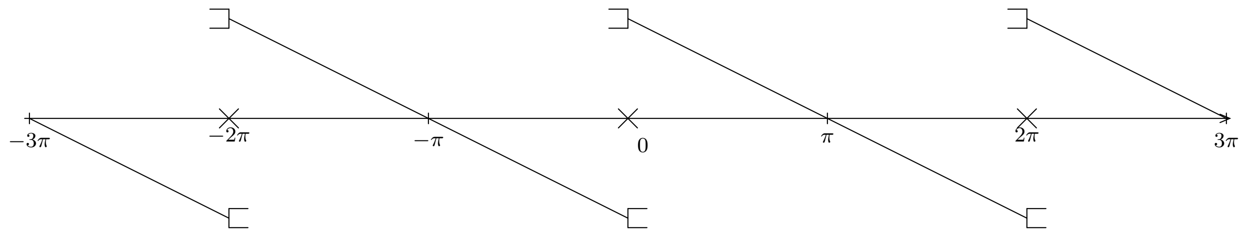
$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Le phénomène de Gibbs est un phénomène mathématique qui se produit lorsqu'on calcule la série de Fourier de certaines fonctions discontinues : il y a « des effets de bords ». Demandez à votre professeur de physique préféré !



Correction :

1. f est impaire donc $f(0)=0$. La limite à droite en 0 vaut $\pi/2$ et, par imparité, la limite à gauche vaut $-\pi/2$. Ci-dessous l'allure du graphe de f. L'imparité est indispensable, sinon on ne connaît pas la valeur en 0 ni celle en tous les $2k\pi$.



2. $b_n(f)$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue par morceaux (f n'est pas continue !) sur un segment. Par définition d'une telle intégrale, et par linéarité,

$$b_n(f)=\frac{1}{\pi}\times\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}t\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right]$$

La première intégrale est nulle par un calcul direct. Pour la deuxième, on pense à faire une intégration par parties. Je ne la rédige pas, il suffit de dériver le t et d'intégrer le sinus (on peut le faire car $n\geq 1$, on n'oublie pas le $-$ devant le cosinus et on n'oublie pas le $-1/2$ devant l'intégrale) ce qui donne :

$$b_n(f)=\frac{-1}{2\pi}\times\left(\left[-t\times\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

Par conséquent, $b_n(f)=\dfrac{1}{n}$.

3. D'après la question précédente, pour tout $N\geq 1$,

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)}{k}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{N}\right)}{\dfrac{k}{N}}$$

On a envie de dire qu'on reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction $x\mapsto\sin(\pi x)/x$, mais le problème est qu'elle n'est a priori pas continue en 0. Cependant, on sait que

$$\frac{\sin(\pi x)}{x}=\pi\times\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\xrightarrow[x\to 0]{}\pi\times 1=\pi$$

Par conséquent, la fonction $\varphi : x\mapsto\sin(\pi x)/x$ (qui est évidemment continue sur $]\,0\,;1\,]$ car quotient de fonctions continues) est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0)=\pi$. φ ainsi prolongée est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ et on peut sortir la phrase rituelle : on reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction φ définie sur $[\,0\,;1\,]$ par

$$\varphi(0)=\pi\qquad\text{et}\qquad\varphi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}\qquad\forall x\in\,]\,0\,;1\,]$$

Finalement, φ étant continue

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\int_0^1\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 3' - Un avant-goût de la deuxième année : ✪✪

1. Montrer qu'il existe f que l'on explicitera telle que

$$u_n=\left(\frac{1^1 2^2\dots n^n}{n^{\frac{n(n+1)}{2}}}\right)^{1/n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_\varepsilon^1 f(t)dt\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_0^1 f(t)dt$. En déduire la limite de la suite (u_n).

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. $u_n > 0$: on pense au ln.

$$\begin{aligned}
\ln(u_n) &= \frac{1}{n^2} \ln\left(\frac{1^1 \times 2^2 \times \cdots \times n^n}{n^{1+2+\cdots+n}}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \ln\left(\frac{1^1 \times 2^2 \times \cdots \times n^n}{n^1 \times n^2 \times \cdots \times n^n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \ln\left(\left(\frac{1}{n}\right)^1 \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \cdots \times \left(\frac{n}{n}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)
\end{aligned}$$

On veut poser $f(x) = x\ln(x)$, mais celle-ci n'est pas définie en 0. Il suffit de la prolonger par continuité en 0. Plus précisément, on définit sur $]\,0\,;1\,]$ la fonction f par $f(x) = x\ln(x)$, et $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ donc on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$. f ainsi prolongée est continue donc continue par morceaux sur $[\,0\,;1\,]$ donc

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

car $\ln(u_n)$ est la somme de Riemann à pas constant associée à f (continue par morceaux).

2. f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$, f admet une primitive notée F. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t = F(1) - F(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} F(1) - F(0) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

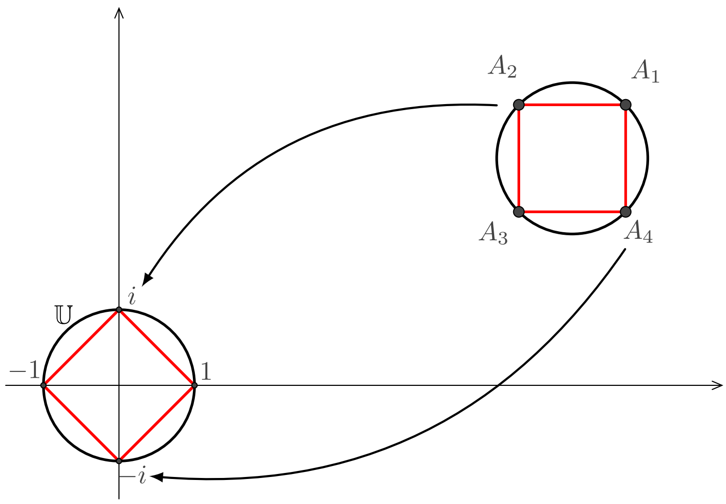
Le passage à la limite est licite puisque F est continue car dérivable (c'est une primitive de f). Par conséquent, pour calculer l'intégrale de f sur $[\,0\,;1\,]$, il suffit de la calculer sur $[\,\varepsilon\,;1\,]$ puis de faire tendre ε vers 0. Or, à l'aide d'une IPP :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_\varepsilon^1 t\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^2\ln(t)}{2}\right]_\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\varepsilon^2\ln(\varepsilon)}{2} - \frac{1}{4} \\
&\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

par croissances comparées. Par unicité de la limite, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{4}$ et l'exponentielle est continue donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1/4}$.

Exercice 35 : ✪✪ Soit $A_1A_2\dots A_n$ un polygone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1. Donner $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} A_1A_k$.

Correction : On pense aux racines n-ièmes de l'unité, qui forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité (cf. chapitre 7). Cependant, le cercle en question n'a aucune raison d'être le cercle unité, mais on peut se ramener au cas où le cercle en question est le cercle unité par une simple translation, et ensuite, par une rotation, on peut « coller » les A_k sur les racines de l'unité.



Par conséquent, quitte à translater ou à tourner (ce qui ne change pas les distances), on peut supposer que le cercle en question est le cercle unité et que les A_k sont les racines n-ièmes de l'unité, c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, A_k est l'image du complexe $z_k = e^{2i(k-1)\pi/n}$ (on décale d'un indice car on note généralement les racines de l'unité pour k allant de 0 à n, et cela simplifiera les calculs). Dès lors, $A_1A_k = |z_1 - z_k| = |1 - e^{2i(k-1)\pi/n}|$ et la somme devient plus simple à calculer ! Tout d'abord, $|z_1 - z_1| = 0$ donc on peut rajouter le terme pour $k = 1$ dans la somme (pour se rapprocher d'une somme de Riemann). Si on note S_n la quantité de l'énoncé :

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|1 - e^{2i(k-1)\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left|1 - e^{2ip\pi/n}\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left|1 - \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right) - i\sin\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right| \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\left(1 - \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{1 + \cos^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right) - 2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{2\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sqrt{\sin^2\left(\frac{p\pi}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $p \in [\![1\,;\, n]\!]$, $p\pi/n \in [\,0\,;\pi\,]$ donc son sinus est positif, si bien que

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} 2\sin\left(\frac{p\pi}{n}\right)$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = 2\sin(\pi x)$. Cette fonction étant continue par morceaux :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 2\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

Exercice 36 : ✪✪

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle $F_n = \dfrac{nX^{n-1}}{X^n-1}$.
2. En déduire la valeur de $I(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}$ où x est un réel différent de ± 1.

Correction :

1. De même que dans l'exercice 5 du chapitre 20 :

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X-e^{2ik\pi/n}}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. D'après la question précédente :

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-e^{2ik\pi/n}} = 2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1}$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;2\pi\,]$ (pas $[\,0\,;1\,]$) par $f(x) = 1/(x-e^{ix})$. Cette fonction est continue par morceaux donc

$$\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x-e^{2ik\pi/n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}}$$

Si $|x|<1$,

$$2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc, par unicité de la limite,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}} = 0$$

Si $|x|>1$, alors

$$2\pi \times \frac{x^{n-1}}{x^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2\pi}{x}$$

donc, par unicité de la limite :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{x-e^{it}} = \frac{2\pi}{x}$$

Exercice 37 : ✪✪✪ Calculer la limite de la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$.

Correction : Soit $n\geq 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}\times\left(1-\frac{k}{n}\right)} \end{aligned}$$

S_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$. f étant continue par morceaux,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)}\,\mathrm{d}x$$

Notons cette intégrale I. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Mettons $x(1-x)$ sous forme canonique :

$$\begin{aligned}
x(1-x) &= -x^2+x \\
&= -(x^2-x) \\
&= -\left(x^2 - 2\times x\times\frac{1}{2}\right) \\
&= -\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) \\
&= -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

On pose $\sin(u) = 2\,(x-1/2)$ (cf. chapitre 10 : on veut faire apparaître du $1-\sin^2$). On pourrait exprimer x en fonction de u mais cela ne va pas être nécessaire. En effet, $\cos(u)\,\mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}x$ donc $\mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u\,/2$ si bien que :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin 2^2(u)} \times \frac{\cos(u)\,\mathrm{d}u}{2}$$

On trouve les bornes en exprimant u en fonction de x ou en se souvenant (cf. chapitre 10) qu'on peut prendre n'importe quelles bornes qui conviennent i.e. qui vérifient $\sin(a) = -1$ et $\sin(b) = 1$ (les valeurs de $2(x-1/2)$ pour $x=0$ et $x=1$) et $-\pi/2$ et $\pi/2$ conviennent donc c'est bon. Par conséquent :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(u)} \times \frac{\cos(u)\,\mathrm{d}u}{2}$$

Attention, pour pouvoir affirmer que $\sqrt{\cos^2} = \cos$, il faut que le cos soit positif, ce qui est le cas ici puisqu'on travaille sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u)\times\cos(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{\sin(2u)}{2}+u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 38 - Intégrale de Poisson, le retour : ✪✪✪

1. Décomposer le polynôme $X^{2n}-1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. En déduire, pour $|x| \neq 1$, la valeur de

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(t)+x^2)\,\mathrm{d}t$$

Correction : Nous avons déjà effectué le calcul de cette intégrale dans l'exercice 32 du chapitre 10.

1. cf. chapitre 19 :

$$X^{2n}-1=(X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}(X^2-2\cos(k\pi/n)X+1)$$

2. Soit $x\neq\pm 1$. D'après la question précédente,

$$x^{2n}-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2\cos(k\pi/n)x+1)$$

On a envie de prendre le ln, mais le terme de gauche (et donc le terme de droite également, car ils sont égaux) peut être négatif. Séparons les cas pour connaître son signe. Supposons dans un premier temps que $|x|<1$. Alors $x^{2n}-1<0$. Il suffit alors de multiplier par -1. Je rappelle (sans commentaire...) que quand on multiplie un produit par -1, il ne faut multiplier qu'un seul terme par -1 et surtout pas tous les termes. Ceci étant rappelé

$$-P(x)=1-x^{2n}=(1-x)(x+1)\prod_{1}^{n-1}\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$$

Tous les termes du produit sont strictement positifs (il suffit de calculer les discriminants des trinômes du membre de droite) donc on peut prendre le ln.

$$\begin{aligned}\ln(1-x^{2n}) &= \ln\left((1-x)(1+x)\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\\ &= \ln\left(1-x^2\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)+\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)+1\right)-\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{n\pi}{n}\right)+1\right)\end{aligned}$$

En d'autres termes (on rajoute des termes pour faire apparaître une somme de Riemann) :

$$\ln(1-x^{2n})=\ln\left(1-x^2\right)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)-\ln\left((x+1)^2\right)$$

Encore une fois, on souhaite faire apparaître une somme de Riemann : il manque le $(b-a)/n$. Il suffit de tout multiplier par π/n. Cela donne :

$$\frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})=\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)+\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)-\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)$$

Faisons à présent tendre n vers $+\infty$ et donnons la limite de chacun des termes. Tout d'abord, de façon évidente

$$\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0\qquad\text{et}\qquad\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ensuite, puisque $|x|<1, x^{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et par continuité du ln, $\ln(1-x^{2n})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, et finalement :

$$\frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Il nous reste à donner la limite de la somme. Tout d'abord, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) &= \frac{\pi}{n}\ln(1-x^{2n})-\frac{\pi}{n}\ln\left(1-x^2\right)+\frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

De plus, cette somme est une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;\pi\,]$ dans l'intégrale (comme quoi, les sommes de Riemann sur autre chose que $[\,0\,;1\,]$, ça existe...). f étant continue par morceaux :

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}I(x)$$

Par unicité de la limite, $I=0$. Supposons à présent que $|x|>1$. On cherche encore les limites des termes précédents. Comme d'habitude, dans un ln, on met en facteur le terme prédominant, on casse ensuite le ln, et normalement ça passe. On rappelle que $x^{2n}=|x|^{2n}$, ce qui évite de prendre le ln en des réels strictement négatifs.

$$\ln\left(x^{2n}-1\right) = \ln\left(x^{2n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right) = 2n\ln(|x|) + \ln\left(1-\frac{1}{x^{2n}}\right)$$

En conclusion, $\dfrac{\ln\left(x^{2n}-1\right)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ln(|x|)$. Inspirons-nous de ce qui précède et prenons le ln (tout est positif sauf éventuellement $(x+1)$ et $x-1$ mais il suffit de les regrouper en x^2-1 qui est positif), en rajoutant le terme manquant et en multipliant par π/n il vient :

$$\frac{\pi}{n}\ln(x^{2n}-1) = \frac{\pi}{n}\ln\left(x^2-1\right) + \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(x^2-2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right) - \frac{\pi}{n}\ln\left((x+1)^2\right)$$

D'après ce qui précède, le membre de gauche tend vers $2\pi\ln(|x|)$, et de même que dans le cas $|x|<1$, en reconnaissant une somme de Riemann (et deux termes qui tendent vers 0), le membre de droite tend vers $I(x)$. Par unicité de la limite, $I(x) = 2\pi\ln(|x|)$.

Exercice 39 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer la limite des expressions suivantes :

1. $A_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.
2. $B_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\le k<l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.
3. $C_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{1\le k\le l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)\times f\left(\frac{l}{n}\right)$.

Correction :

1. Ce n'est pas une somme de Riemann à cause du carré. Intuitivement (nous le prouverons rigoureusement ensuite) : la somme est égale à n images de nombres compris entre $1/n^2$ et $1/n$ donc à peu près égale à $nf(0)$ donc, en divisant par n, A_n va tendre vers $f(0)$ (cette question n'a donc rien à voir avec des sommes de Riemann). Faisons-le rigoureusement. Soit $\varepsilon>0$. f étant continue, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $x\in[\,0\,;\eta\,]$, $|f(x)-f(0)|\le\varepsilon$. Soit n_0 tel que $1/n_0\le\eta$ et soit $n\ge n_0$. Dès lors, pour tout $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, $k/n^2\le 1/n\le\eta$ donc $|f(k/n^2)-f(0)|\le\varepsilon$ c'est-à-dire que $f(0)-\varepsilon\le f(k/n^2)\le f(0)+\varepsilon$. Par somme :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(0)-\varepsilon) = f(0)-\varepsilon \le A_n \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(0)+\varepsilon) = f(0)+\varepsilon$$

En d'autres termes, pour tout $\varepsilon>0$, il existe n_0 tel que pour tout $n\ge n_0$, $|A_n-f(0)|\le\varepsilon$ donc $A_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$.

2. Soit $n\ge1$. Cela nous fait penser à un double produit donc à un carré. Notons

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

la somme de Riemann à pas constant associée à f. f étant continue, donc continue par morceaux :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

De plus (une somme au carré c'est : les carrés et les doubles produits, cf. chapitre 4) :

$$\begin{aligned} {S_n}^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{2}{n^2}\sum_{1\le k<l\le n} f\left(\frac{k}{n}\right)f\left(\frac{l}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2B_n \end{aligned}$$

Or, f^2 est elle-aussi continue donc continue par morceaux : on reconnaît la somme de Riemann associée à f^2 (multipliée par $1/n$, voir la suite) si bien que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et donc, en multipliant par $1/n$:

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Finalement :

$$B_n = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{{S_n}^2}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

3. Il suffit de voir que

$$C_n = B_n + \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

et cette dernière quantité tend vers 0 donc

$$C_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

Exercice 40 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;\pi\,] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$:

$$\exists c_k \in \left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right], \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x = f(c_k) \times \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

2. À l'aide du résultat concernant les sommes de Riemann générales, montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Correction :

1. Soient $n \geq 1$ et $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. Méthode tout à fait analogue à l'exercice 8 : f étant continue sur le segment $\left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. Il existe donc x_0 et x_1 tels que $f(x_0) = \min f$ et $f(x_1) = \max f$ (on parle évidemment du min et du max sur cet intervalle). Pour tout $t \in \left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, $m \leq f(t) \leq M$ donc $m|\sin(nt)| \leq f(t)|\sin(nt)| \leq M|\sin(nt)|$. Par croissance de l'intégrale :

$$f(x_0)\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \leq \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \leq f(x_1)\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

Or, lorsque t décrit l'intervalle $\left[\frac{k\pi}{n}\,;\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$, nt décrit l'intervalle $[\,k\pi\,;(k+1)\pi\,]$, intervalle sur lequel la fonction $|\sin|$ est positive continue non identiquement nulle donc son intégrale est strictement positive. Par conséquent :

$$f(x_0) \leq \frac{\displaystyle\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x} \leq f(x_1)$$

On conclut à l'aide du TVI (f est continue).

2. Rappelons le résultat du cours sur les sommes de Riemann générales : si f est une fonction continue par morceaux sur $[\,a\,;b\,]$, on appelle somme de Riemann de f toute somme de la forme :

$$S(\sigma, f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \times (a_{k+1} - a_k)$$

où $\sigma = (a_k)_{0\leq k\leq n}$ est une subdivision de $[\,a\,;b\,]$ et où, pour tout k, c_k est un élément quelconque de $[\,x_k\,;x_{k+1}\,]$. Alors $S(\sigma, f)$ tend vers l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Notons

$$I_n = \int_0^\pi f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles et la question précédente :

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi/n} f(x)|\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} |\sin(nx)|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Dans chaque intégrale ci-dessus, faisons le changement de variable $u = nx, x = u/n,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u\,/n$ si bien que

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u$$

Or, sur $[\,k\pi\,;(k+1)\pi\,]$, le sinus est du signe de $(-1)^k$ (positif si k pair, négatif sinon) si bien que

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)|\,\mathrm{d}u = (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin(u)\,\mathrm{d}u$$

et dans tous les cas cette intégrale vaut 2. Finalement :

$$I_n = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$$

Si on note $\sigma = (a_k)_{k\in [\![0\,;\,n]\!]}$ la subdivision régulière de $[\,0\,;\pi\,]$ i.e. $a_k = k\pi/n$ pour tout k, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \times (a_{k+1} - a_k) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)$$

est une somme de Riemann associée à f (à pas constant mais on prend un point quelconque de l'intervalle, ce n'est pas une somme de Riemann à pas constant à gauche ou à droite associée à f). Puisque le pas tend vers 0,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^\pi f(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit de voir que $I_n = \dfrac{2}{\pi} S_n$ pour conclure.

Exercice 41 : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer qu'il existe une unique subdivision $\left({x_k}^{(n)}\right)_{0\le k\le n}$ telle que :

$$\forall k \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!], \int_{{x_{k-1}}^{(n)}}^{{x_k}^{(n)}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_a^b t f(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Correction : L'idée est simple : l'aire va croître strictement puisque f est strictement positive, et on coupe des tranches dont l'aire vaut $1/n$ de l'aire totale. Prouvons-le rigoureusement. f étant continue, la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f, et en particulier est continue (car dérivable) strictement croissante (car sa dérivée est f strictement positive). De plus, $F(a) = 0$ et $F(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème de la bijection, il existe une unique subdivision $\left({x_k}^{(n)}\right)_{0\le k\le n}$ telle que, pour tout k,

$$F\left({x_k}^{(n)}\right) = \frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui prouve le résultat (l'écart entre deux valeurs consécutives sera bien égal à $1/n$ multiplié par l'intégrale). Par définition de cette subdivision :

$$\forall k \in [\![0 \,;\, n]\!], {x_k}^{(n)} = F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

La fonction F^{-1} est bien bijective d'après le théorème de la bijection. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

La fonction F étant continue (d'après le théorème de la bijection) donc continue par morceaux, on reconnaît une somme de Riemann à pas constant (associée à la fonction

$$x \mapsto F^{-1}\left(x\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

qui est continue par morceaux car continue, F^{-1} étant continue d'après le théorème de la bijection) donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 F^{-1}\left(x\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$

Notons $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et J l'intégrale ci-dessus, si bien que

$$J = \int_0^1 F^{-1}(xI)\,\mathrm{d}x$$

Avec le changement de variable $u = xI$, $x = u/I$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u\,/I$:

$$J = \frac{\displaystyle\int_0^I F^{-1}(u)\,\mathrm{d}u}{I}$$

Faisons le changement de variable $t = F^{-1}(u)$ (et donc $t = a$ lorsque $u = 0$ et $t = b$ lorsque $u = I$), $u = F(t)$, $\mathrm{d}u = f(t)\,\mathrm{d}t$ qui donne :

$$J = \frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t}{I}$$

En conclusion :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^{(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\displaystyle\int_a^b tf(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

Exercice 42 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$$

Notons x_n le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. Montrer que

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

après avoir correctement défini cette intégrale puis justifié son existence.

Correction : Commençons par prouver l'existence de cette intégrale. La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(\pi t)/t$ est continue sur $]\,0\,;1\,]$ et prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = \pi$ (on le prouve à l'aide d'un taux d'accroissements). φ ainsi prolongée est continue sur un segment donc l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

existe, et c'est elle que par (léger) abus de notation, on note comme celle de l'énoncé. Donnons la valeur explicite de x_n : une condition nécessaire pour que f_n admette un maximum local est que ${f_n}'$ s'annule (si on est en un point intérieur). Commençons par chercher où ${f_n}'$ s'annule. En effet, f_n est dérivable car somme de fonctions dérivables. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$ {f_n}'(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) $$

On trouve comme dans le chapitre 7 (partie réelle d'une somme géométrique etc.) que ${f_n}'(x) = n$ si $x \equiv 0[2\pi]$ et sinon :

$$ {f_n}'(x) = \cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\dfrac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)} $$

La plus petite valeur en laquelle ${f_n}'$ s'annule est $x_n = \pi/(n+1)$. Sur $[\,0\,;x_n\,]$, f_n est croissante car ${f_n}'$ est positive (la valeur dans le cosinus est comprise entre 0 et $\pi/2$, les valeurs dans les sinus sont inférieures à π), et au voisinage de x_n, à droite, ${f_n}'$ est négative (le cosinus est négatif et les deux sinus sont positifs) donc f_n est décroissante : f_n admet un maximum local en x_n donc x_n est bien le plus petit réel strictement positif en lequel f_n admet un maximum local. On cherche donc la limite de

$$ \begin{aligned} f_n(x_n) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{k} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{\dfrac{k}{n+1}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)}{\dfrac{k}{n+1}} \end{aligned} $$

puisque la valeur pour $k = n+1$ est nulle. Comme pour l'exercice 32 où l'on a remplacé n par $2n$ (remplacer par « truc »), ici on a une somme de Riemann à pas constant associée à φ, la seule différence est qu'elle est au rang $n+1$, ce qui donne le résultat voulu car φ est continue donc continue par morceaux.

Chapitre 23

Formules de Taylor

« Un enfant ne serait pas tombé dans un piège si grossier ! Bon sang ! je vous apprendrai à réfléchir ! Et si je n'y arrive pas, je me servirai de vos carcasses pour calfeutrer les fuites d'une vanne. »

Robert Jordan, La roue du temps

Exercice 1 : ✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$, montrer que

$$\int_0^1 \frac{(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(2)}{2}$$

Correction : Appliquons la formule de Taylor reste intégral à $f : x \mapsto \ln(1+x^2)$ avec $a=0$ et $b=1$. Pour trouver n, cela n'est pas forcément évident : on tente une valeur, si cela ne marche pas, on en tente une autre. Tentons avec $n=1$.

$$f(1) = f(0) + f'(0)\times(1-0) + \int_0^1 \frac{f''(t)\times(1-t)^1}{1!}\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout t, $f'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2}$ donc $f'(0)=0$, et

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{2(1+t^2)-2t\times 2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \ln(2) &= 0+0+\int_0^1 \frac{2(1-t^2)(1-t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2(1-t)(1+t)(1-t)}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{2(1+t)(1-t)^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

On en déduit le résultat voulu.

Exercice 2 : ✪ Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a l'encadrement

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9} - \frac{14x^3}{81} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \leq 1 - \frac{x}{3} + \frac{2x^2}{9}$$

Correction : Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{-1/3}$. Soit $x \geq 0$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[\,0\,;x\,]$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n=2$ avec $a=0$ et $b=x$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\times x + f''(0)\times\frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)\times(x-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$f'(t) = -\frac{1}{3}(t+1)^{-4/3}, \quad f''(t) = \frac{-1}{3}\times\frac{-4}{3}(t+1)^{-7/3} \qquad \text{et} \qquad f^{(3)}(t) = \frac{-1}{3}\times\frac{-4}{3}\times\frac{-7}{3}(t+1)^{-10/3}.$$

En particulier, $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/3$, $f''(0) = 4/9$ et $f^{(3)}$ est négative sur $\mathbb{R}_+$. Puisque $0 \leq x$, les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant et donc le reste intégral est négatif. L'inégalité de droite en découle, et on obtient celle de gauche par un raisonnement analogue en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n = 3$ (possible car f est $\mathscr{C}^4$: on pouvait aussi dire directement qu'elle était $\mathscr{C}^\infty$).

Exercice 3 : ✪✪ Trouver une approximation rationnelle à 10^{-4} près de $\sqrt{e}$.

Correction : On a prouvé dans le cours que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{(1+e^x) \times |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par conséquent, pour $x = 1/2$:

$$\left| e^{1/2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k \times k!} \right| \leq \frac{1 + e^{1/2}}{2^{n+1} \times (n+1)!} \leq \frac{4}{2^{n+1} \times (n+1)!} = \frac{1}{2^{n-1}(n+1)!}$$

On a en effet majoré $e^{1/2}$ par 3 : on cherche une approximation de $e^{1/2}$, on ne peut pas l'utiliser dans la majoration. Il suffit donc de s'arrêter quand $2^{n-1} \times (n+1)! \geq 10^4$, et c'est le cas pour $n = 5$ puisque $2^4 \times 6! = 11520$. Par conséquent, une approximation de $\sqrt{e} = e^{1/2}$ à 10^{-4} près est :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \times 2!} + \frac{1}{2^3 \times 3!} + \frac{1}{2^4 \times 4!} + \frac{1}{2^5 \times 5!}$$

Exercice 4 : ✪✪ Refaire l'exercice 20 du chapitre 2, en supposant f de classe $\mathscr{C}^2$, f'' bornée par un réel M_2 et en démontrant cette fois les inégalités de l'énoncé. Que vient-on de montrer ?

Correction : Les inégalités admises découlent de l'inégalité de Taylor-Lagrange (entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$) puisque f'' est bornée par M_2. Pour le reste : voir la correction de l'exercice 20 du chapitre 2. On vient de prouver que si f est $\mathscr{C}^2$ et si f et f'' sont bornées alors f' est bornée. On peut même prouver (nous le ferons peut-être en DM plus tard dans l'année) que si f est $\mathscr{C}^n$ et si f et $f^{(n)}$ sont bornées, alors toutes les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ sont aussi bornées.

Exercice 5 : ✪✪ Montrer que pour tout $x \geq 0, x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$. En déduire que

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sqrt{e}$$

Correction : Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$. f est $\mathscr{C}^3$. Soit $x \geq 0$. Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f à l'ordre $n = 2$ avec $a = 0$ et $b = x$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \int_0^x \frac{f^{(3)}(t)(x-t)^2}{2}\, \mathrm{d}t$$

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = \dfrac{1}{1+t}$, $f''(t) = \dfrac{-1}{(1+t)^2}$ et $f^{(3)}(t) = \dfrac{2}{(1+t)^3}$ si bien que :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \int_0^x \frac{2(x-t)^2}{(1+t)^3}\, \mathrm{d}t$$

La fonction intégrée est positive et les bornes sont dans l'ordre croissant puisque $x \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, cette intégrale est positive donc on a l'inégalité de gauche. On obtient l'inégalité de droite de même en appliquant cette formule à l'ordre $n = 1$ ou tout simplement par concavité du ln.

Soit $n \geq 1$. Notons P_n le produit de l'énoncé. $P_n > 0$ donc on peut appliquer le ln :

$$\ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$$

D'après la première partie de l'exercice :

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4}\right) \leq \ln(P_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

Or :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} &= \frac{n(n+1)}{2n^2}\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On pourrait calculer la somme des $k^2/2n^4$ explicitement, mais utilisons plutôt une méthode qui peut se généraliser à des sommes qu'on ne peut pas calculer explicitement :

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^n \frac{n^2}{2n^4} = \frac{n^3}{2n^4} = \frac{1}{n}$$

donc cette somme tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement. Toujours d'après le théorème d'encadrement, $\ln(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$ donc $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2}$ par continuité de l'exponentielle.

Exercice 6 - Égalité de Taylor-Lagrange : ✪✪ Soient $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle non vide, non réduit à un point, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe dérivable $n+1$ fois sur I. On se donne dans la suite $a \neq b$ deux éléments de I.

1. Montrer qu'il existe un A que l'on explicitera tel que :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{A(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

2. En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Correction :

1. Il suffit de résoudre cette équation d'inconnue A et on trouve que la solution de l'équation est

$$A = \frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}} \times \left[f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!}\right]$$

2. Soit

$$\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^k}{k!} + \frac{A(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Montrons tout d'abord qu'on peut appliquer le théorème de Rolle à φ.
- f étant dérivable $n+1$ fois, $f^{(n)}$ est dérivable donc continue sur $[\,a\,;b\,]$, si bien que φ est continue sur $[\,a\,;b\,]$.
- f étant dérivable $n+1$ fois sur $]\,a\,;b\,[$, φ est dérivable sur $]\,a\,;b\,[$.
- $\varphi(b) = f(b)$ car tous les termes (excepté celui pour $k=0$) sont nuls (on rappelle que $(b-x)^0 = 1$).
- $\varphi(a) = f(b)$ d'après la question précédente.

En d'autres termes, on peut appliquer le théorème de Rolle à φ : il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Calculons la dérivée de φ pour tout $x \in \,]\,a\,;b\,[$:

$$\varphi'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k+1)}(x)(b-x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{kf^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{k!} - \frac{(n+1)A(b-x)^n}{(n+1)!}$$

Or, le terme d'indice $k=0$ de la seconde somme est nul, ainsi cette somme commence en $k=1$. Faisons le changement d'indice $j = k+1, k = j-1$ dans la première somme :

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{f^{(j)}(x)(b-x)^{j-1}}{(j-1)!} - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(x)(b-x)^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{A(b-x)^n}{n!}\\ &= \frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!} - \frac{A(b-x)^n}{n!}\end{aligned}$$

En particulier, puisque $\varphi'(c) = 0$, on trove que $\dfrac{f^{(n+1)}(c)(b-c)^n}{n!} = \dfrac{A(b-c)^n}{n!}$ ce qui implique finalement que $A = f^{(n+1)}(c)$ puisque $b-c \neq 0$ (on rappelle que $c \in \,]\,a\,;b\,[$). Par choix de A, le résultat est démontré.

Exercice 7 : ✪✪ Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction $f^{[n]}$ dérivable n fois telle dont la dérivée n-ième est égale à f (une primitive n-ième de f, si on veut) dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0.
2. Prouver que

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \, \mathrm{d}t$$

est une primitive n-ième de f.

Correction :

1. Raisonnons par récurrence.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « pour toute fonction f continue, il existe une fonction $f^{[n]}$ dérivable n fois dont la dérivée n-ième est égale à f et dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0 ».
   - H_1 est vraie puisque si f est continue, alors f admet une primitive nulle en 0. Plus précisément, la seule fonction qui contient est

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t) \, \mathrm{d}t$$

   - Soit $n \geq 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit f une fonction continue. Soit F l'unique primitive de f qui s'annule en 0. F étant elle-même continue (elle est dérivable car c'est une primitive de f), par HR, il existe une fonction $F^{[n]}$ dérivable n fois dont la dérivée n-ième est égale à F et dont les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n-1$ sont nulles en 0. Or, $F' = f$ donc la dérivée n-ième de $F^{[n]}$ est dérivable donc $F^{[n]}$ est dérivable $n+1$ fois, et sa dérivée d'ordre n, F, est nulle en 0, donc toutes les dérivées d'ordre $0, 1, \dots, n$ de $F^{[n]}$ sont nulles en 0, et la dérivée $n+1$-ième de $F^{[n]}$ vaut $F' = f$: H_{n+1} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant la formule de Taylor reste intégral à $f^{[n]}$, la fonction dont on a montré l'existence dans la question précédente, à l'ordre $n-1$ (puisque cette fonction est $\mathscr{C}^n$ puisque dérivable n fois de dérivée n-ième égale à f qui est continue) entre $a = 0$ et $b = x$:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(f^{[n]}\right)^{(k)}(0) x^k}{k!} + \int_0^x \frac{\left(f^{[n]}\right)^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \, \mathrm{d}t$$

La somme est nulle puisque les dérivées successives de $f^{[n]}$, de l'ordre 0 à l'ordre $n-1$, sont nulles en 0. De plus, la dérivée n-ième de $f^{[n]}$ est égale à f. Tout ça pour dire que

$$f^{[n]}(x) = \varphi(x)$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas la fonction nulle. On suppose qu'il existe $a \in [\,0\,;1\,]$ tel que, pour tout n, $f^{(n)}(a) = 0$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{e}{\|f\|_\infty}$$

où la norme infinie est prise sur $[\,0\,;1\,]$, c'est-à-dire que si g est bornée, $\|g\|_\infty = \sup_{[\,0\,;1\,]} |g|$. On rappelle que

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N \to +\infty]{} e$$

Correction : Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ (le résultat est évident si $N = 0$ puisque $1 \leq e$) et soit $n \geq 1$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x à l'ordre $n-1$, et en se souvenant que $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout k :

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} \right| = |f(x)| \leq \max_{c \in [\,a\,;x\,]} \left| f^{(n)}(c) \right| \times \frac{|x-a|^n}{n!} \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$$

puisque x et a appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ donc $|x-a| \leq 1$. On en déduit que $\dfrac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$ est un majorant de $\{|f(x)| \,|\, x \in [\,0\,;1\,]\}$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants :

$$\|f\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty \times 1}{n!}$$

Or, f est non nulle donc $\|f\|_\infty > 0$ et on en déduit que $\|f^{(n)}\|_\infty > 0$. Par conséquent :

$$\frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty \times n!}$$

Cette inégalité est toujours valable pour $n = 0$ (et on a une égalité). Par somme de $n = 0$ à N :

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{\|f^{(n)}\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty} \times \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$$

Or,

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \xrightarrow[N\to+\infty]{} e$$

et la suite de terme général $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ est croissante donc est majorée par sa limite donc est inférieure à e : on en déduit le résultat voulu.

Exercice 9 - Somme de Riemann Canada Dry : ✪✪

1. Donner la limite (dont on précisera le signe) de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n^2}$$

2. Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,], |\text{Arctan}(x) - x| \leq x^2$. En déduire la limite de la suite de terme général

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Correction :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{k}{n}$. On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction $f : x \longmapsto x\sin(x)$ qui est continue sur $[\,0\,;1\,]$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Une intégration par parties dont les détails sont laissés à votre charge donne $I = \sin(1) - \cos(1)$. Cette limite est positive : en effet, $1 \in \left[\frac{\pi}{4}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et, sur cet intervalle, le sinus est supérieur au cosinus.
2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f = \text{Arctan}$ (qui est bien $\mathscr{C}^2$), $n = 1$, $a = 0$ et $b = x$:

$$|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0) - \text{Arctan}(0) \times x| \leq \max_{c\in[\,0\,;x\,]} \left|\text{Arctan}''(c)\right| \times \frac{x^2}{2} \leq \max_{c\in[\,0\,;1\,]} \left|\text{Arctan}''(c)\right| \times \frac{x^2}{2}.$$

Or, $\text{Arctan}(0) = 0$, $\text{Arctan}'(0) = 1$ et, pour tout $c \in [\,0\,;1\,]$, $|\text{Arctan}''(c)| = \dfrac{2c}{(1+c^2)^2} \leq 2$ (le numérateur est inférieur à 2 et le dénominateur supérieur à 1). Ainsi, $|\text{Arctan}(x) - x| \leq x^2$.

Soit $n \geq 1$. D'après l'inégalité triangulaire puis ce qui précède (et sin est bornée par 1),

$$|v_n - u_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right) \times \left(\text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\text{Arctan}\left(\frac{k}{n^2}\right) - \frac{k}{n^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2}\right)^2.$$

Finalement (une somme est inférieure à la somme obtenue en sommant toujours le plus grand terme) :

$$|v_n - u_n| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^4} = \frac{n^2}{n^4} \times n = \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement, $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour conclure, attention à ne pas écrire d'horreur du type $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} u_n$, mais il suffit d'écrire : $v_n = (v_n - u_n) + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(1) - \cos(1)$.

Exercice 10 : ✪✪ En s'inspirant de l'exercice précédent, donner la limite de la suite de terme général

$$w_n = n\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin(t)\right) dt$$

Correction : Posons $u_n = n\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\left(\frac{1}{n}\sin(t)\right) \mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme dans l'exercice précédent, si u est au voisinage de 0, $\sin(u) \approx u$. On se dit donc que « u_n va se comporter en gros comme $n\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ » (bonjour la rigueur). Pour le faire rigoureusement, on fait comme dans l'exercice précédent, on pose $v_n = n\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{n}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule la limite de $(v_n)_{n\geq 1}$ et on montre avec l'inégalité de Taylor-Lagrange que la différence tend vers 0. Donnons les grandes lignes, les détails sont analogues à ceux de l'exercice précédent et laissés à votre charge : on montre que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $|\sin(x)-x| \leq x^2/2$. Ensuite on calcule que $v_n = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. On en déduit que la limite cherchée vaut 2.

Exercice 11 : ✪✪ Donner la limite en 0^+ de la fonction

$$f : x \mapsto \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t^3} dt$$

Correction : Lorsque t est au voisinage de 0, on a $1-\cos(t) \approx t^2/2$. On pose donc, pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{1-\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(x) = \int_x^{3x} \frac{t^2}{2t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(3)}{2}.$$

La formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 à cos (qui est de classe $\mathscr{C}^3$) sur $[\,0\,;t\,]$ donne : $\left|\cos(t) - \left(1-\dfrac{t^2}{2}\right)\right| \leq \dfrac{x^3}{6}$. Pour tout $x > 0$, on majore $|f(x)-g(x)|$ grâce à l'inégalité triangulaire pour les intégrales (les bornes sont dans l'ordre croissant car $x \geq 0$), on montre que $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on conclut que la limite cherchée vaut $\ln(3)/2$.

Exercice 12 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, nulle en 0. Donner la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

Correction : Soit $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à f à l'ordre 1 (puisque f est $\mathscr{C}^2$) entre $a=0$ et $b = k/n^2$:

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - f'(0)\times\frac{k}{n^2}\right| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} |f''(c)| \times \frac{k^2}{2n^4}$$

Or, $f(0) = 0$ et f est $\mathscr{C}^2$ donc f'' est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : soit $M = \max_{[\,0\,;1\,]} |f''|$. Il en découle que

$$\left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\times\frac{k}{n^2}\right| \leq \frac{Mk^2}{2n^4}$$

Soit

$$T_n = f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

Montrons que $S_n - T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$\begin{aligned}
|S_n - T_n| &= \left|\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\times\frac{k}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\times\frac{k}{n^2}\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{Mk^2}{2n^4} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{Mn^2}{2n^4} \\
&\leq \frac{Mn^3}{2n^4} \\
&\leq \frac{M}{2n}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement. Or,

$$T_n = f'(0)\times\frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{f'(0)}{2}$$

donc

$$S_n = S_n - T_n + T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + \frac{f'(0)}{2} = \frac{f'(0)}{2}$$

Exercice 13 : ✪✪ En appliquant la formule de Taylor reste intégral à $x\mapsto\ln(1+x)$, trouver la limite de la suite de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Correction : Notons $f : x\mapsto\ln(1+x)$, de classe $\mathscr{C}^\infty$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Appliquons la formule de Taylor reste intégral à la fonction f à l'ordre n entre $a=0$ et $b=1$ ce qui donne :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{f^{(n+1)}(t)(1-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

Or, on montre facilement par récurrence que pour tout $n\geq 1$ (ce n'est pas valable pour $n=0\,$!) :

$$\forall t\geq 0, f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

En particulier, pour tout $n\geq 1$,

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Puisque $f(0)=0$:

$$\ln(2) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} + \int_0^1 \frac{(-1)^n n!(1-t)^n}{(1+t)^n n!}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\ln(2) = S_n + \int_0^1 \frac{(-1)^n(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\left|(-1)^n\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t\right| = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 (1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

donc l'intégrale tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement. En conclusion, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$.

Exercice 14 : ✪✪✪

1. Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x et pour tout entier $n, |f^{(n)}(x)| \leq |x^{2023}+1|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on remplace x^{2023} par x^{2024} ?
2. **(Remake)** Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un polynôme P de degré impair telle que pour tout réel x et pour tout entier $n, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Montrer que f est la fonction nulle. Est-ce toujours vrai si on ne suppose plus le degré de P impair ?

Correction :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange entre a et x :

$$\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!}\right| \leq \max_{c\in[\,a\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

L'idée est de prendre un a intéressant pour faire « disparaître » la somme. Puisque $|f^{(n)}(a)| \leq |a^{2023}+1|$, on va prendre $a=-1$, si bien que $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Prenons donc $a=-1$ si bien que la somme est nulle :

$$|f(x)| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

On aimerait faire tendre n vers l'infini (et c'est ce qu'on va faire) mais, même si la factorielle l'emporte sur les suites géométriques, et donc $(n+1)!$ l'emporte sur $|x+1|^{n+1}$, il reste le maximum de $f^{(n+1)}$ qui peut être très gros (on a l'habitude de voir apparaître des factorielles dans les dérivées successives). Il suffit de voir que

$$\max_{c\in[\,-1\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} |c^{2023}+1|$$

quantité qui ne dépend plus de n, donc :

$$|f(x)| \leq \max_{c\in[\,-1\,;x\,]} |c^{2023}+1| \times \frac{|x+1|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées, le terme de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc, d'après le théorème d'encadrement, le terme de gauche aussi, mais il ne dépend pas de n donc il est nul. Cela ne marche plus avec x^{2024} à la place de x^{2023} : par exemple, si f est la fonction sinus, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |x^{2024}+1|$$

mais f n'est pas la fonction nulle.

2. Il suffit d'utiliser (cf. exercice 16 du chapitre 19) qu'un polynôme réel de degré impair admet une racine réelle. Si on la note a, le même raisonnement que ci-dessus permet de conclure. Cela marche en fait avec n'importe quel polynôme qui admet une racine réelle. Dans le cas général, ce n'est plus vrai, par exemple avec $P = X^{2024}+1$ comme on vient de le voir.

Exercice 15 : ✪✪✪ Soient $\lambda > 0$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \qquad |f^{(n)}(x)| \leq \lambda^n n! \qquad \text{et} \qquad f^{(n)}(0) = 0$$

Montrer que f est nulle sur $\left]\dfrac{-1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$, puis sur $\left]\dfrac{-1}{2\lambda}\,;\dfrac{3}{2\lambda}\right[$, et enfin que f est la fonction nulle.

Correction : Soit $x \in \left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre $a=0$ et $b=x$: puisque toutes les dérivées n-ièmes de f sont nulles en 0, cela donne simplement :

$$|f(x)| \leq \max_{c\in[\,0\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Or, le maximum est inférieur à $\lambda^n n!$ par hypothèse sur f, et $|x| < 1/\lambda$ si bien que :

$$|f(x)| \leq \lambda^n n! \times \frac{1}{\lambda^{n+1}(n+1)!} = \frac{1}{\lambda(n+1)}$$

D'après le théorème d'encadrement, $f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $|f(x)$ ne dépend pas de n donc $f(x)=0$: f est la fonction nulle sur $\left]-\dfrac{1}{\lambda}\,;\dfrac{1}{\lambda}\right[$. L'idée ensuite est simplement de décaler de $1/2\lambda$: posons $g : x \mapsto f\left(x + \dfrac{1}{2\lambda}\right)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{R}$:

$$|g^{(n)}(x)| = \left|f^{(n)}\left(x + \frac{1}{2\lambda}\right)\right| \leq \lambda^n n! \qquad \text{et} \qquad g^{(n)}(0) = \left|f^{(n)}\left(\frac{1}{2\lambda}\right)\right|$$

La dernière égalité vient du fait que f est la fonction nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}\,;\frac{1}{\lambda}\right[$. Par conséquent, on peut appliquer ce qui précède à g (penser à « truc ») : g est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}\,;\frac{1}{\lambda}\right[$ donc f est nulle sur $\left]-\frac{1}{2\lambda}\,;\frac{1}{3\lambda}\right[$, et ensuite on recommence. Plus précisément, on pose $h : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{\lambda}\right)$, et de même, h est nulle sur $\left]-\frac{1}{\lambda}\,;\frac{1}{\lambda}\right[$ donc f est nulle sur $\left]\frac{1}{\lambda}\,;\frac{2}{\lambda}\right[$. Par une récurrence (immédiate ? pas si sûr, essayez de la faire), pour tout n, en posant $g_n : x \mapsto f\left(x + \frac{n}{2\lambda}\right)$, on prouve que f est nulle sur $\left]\frac{n-2}{2\lambda}\,;\frac{n+2}{2\lambda}\right[$, ce qui implique que f est nulle sur $\mathbb{R}_+$, et de même, f est nulle sur $\mathbb{R}_-$ en rajoutant un $-$ dans les différentes fonctions auxiliaires g.

Chapitre 24

Analyse asymptotique et Développements Limités

« I won't say that all senior citizens who can't master technology should be publicly flogged, but if we made an example of one or two, it might give the others incentive to try harder. »

The Big Bang Theory

Vrai ou Faux ?

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente alors $u_{n+1} \sim u_n$.
2. $(n+1)! \sim n!$
3. Au voisinage de $0, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
4. Au voisinage de $+\infty, x^3 = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
5. Au voisinage de $0, 1/x^2 = \mathrm{o}\left(1/x\right)$.
6. Si $u_n \sim v_n$ alors $2u_n \sim 2v_n$.
7. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) = \mathrm{o}\left(2x\right)$ alors $f(x) = \mathrm{o}\left(x\right)$.
8. Au voisinage de $+\infty$, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
9. Au voisinage de 0, si $f(x) \sim g(x)$ alors $xf(x) \sim (x+1)g(x)$.
10. Si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) est décroissante alors (v_n) est décroissante.
11. Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n \leq u_n$ alors $w_n \leq v_n$.
12. Si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et si $0 \leq w_n \leq u_n$ alors $w_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$.
13. Si $f(x) + \mathrm{o}\left(x\right) = g(x) + \mathrm{o}\left(x\right)$ alors $f(x) = g(x)$.
14. $x \times \mathrm{o}\left(x\right) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$.
15. $1/2n^2 = \mathrm{o}\left(1/n\right)$
16. $1/2n^2 \sim 1/n^2$.
17. $\sin(2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
18. $\ln(1+2ne^{-n}) = \mathrm{O}\left(1\right)$.
19. $\ln(1+2ne^n) = \mathrm{O}\left(1\right)$.

24.1 Analyse asymptotique sans DL :

Exercice 1 : ✪ Donner un équivalent simple de u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{(3n+12)(2n+5)}{(2n+2024)(3n^2+7n-14)}$
2. $u_n = \tan\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$
3. $u_n = 3^n \sin\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n-1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n-1}$
7. $u_n = \dfrac{1}{n} + e^{-n}$
8. $u_n = e^{-n} + e^{-2n}$
9. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}$
10. $u_n = \dfrac{1-\cos\left(\sqrt{1/n}\right)}{1-\cos\left(\sqrt{2/n}\right)}$
11. $u_n = \ln(1+n) \times \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
12. $u_n = \sin\left(n^2+1\right) - \sqrt{n}$
13. $u_n = \ln(2024n)$
14. $u_n = \ln\left(n^2+n+1\right)$
15. $u_n = e^{n^2+n+1}$
16. $u_n = \dfrac{1}{\sin(1/n)} - \ln(n)$
17. $u_n = n^2 + n - \ln\left(n^3+n\right)$
18. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n-\frac{1}{2}\right)^4 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n+\frac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
19. $u_n = \mathrm{Arctan}\left(n^2-n\right) + \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
20. $u_n = \dfrac{\lfloor e^n \rfloor - e^n + \sqrt{n^2+n+1}}{\ln(n) - n^{1/3} + \pi}$

Correction :

1. $u_n \sim \dfrac{3n \times 2n}{2n \times 3n^2} = \dfrac{1}{n}$.
2. $\dfrac{\pi}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim \dfrac{\pi}{2n}$

3. $\dfrac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n \sim 3^n \times \dfrac{1}{2^n} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.
4. $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.
5. $u_n = \dfrac{n-1-n}{n(n-1)} = \dfrac{-1}{n(n-1)} \sim \dfrac{-1}{n^2}$.
6. On pourra faire la même chose mais on va voir une autre méthode. On a deux quantités équivalentes à $\dfrac{1}{n}$ mais on ne peut pas sommer les équivalents : il suffit de les écrire avec un $\mathrm{o}\,()$. En d'autres termes, $\dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{2}{n}$.
7. Les suites géométriques sont négligeables devant $1/n$ donc $u_n \sim 1/n$.
8. $e^{-2n} = \mathrm{o}\left(e^{-n}\right)$ (il suffit de faire le quotient : ce dernier tend vers 0) donc $u_n \sim e^{-n}$.
9. $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ car $\dfrac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (on pourra former le quotient pour s'en convaincre).
10. $\sqrt{1/n}$ et $\sqrt{2/n}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc $1-\cos(\sqrt{1/n}) \sim (\sqrt{1/n})^2/2 = 1/2n$ et $1-\cos(\sqrt{2/n}) \sim (\sqrt{2/n})^2/2 = 1/n$ donc

$$u_n \sim \frac{1/2n}{1/n} = 1/2$$

11. Tout d'abord, $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$. Pour l'autre, il faut mettre en facteur le terme dominant : $\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \sim \ln(n)$ car l'autre terme est négligeable (un terme qui tend vers 0 est négligeable devant un terme qui tend vers $+\infty$). Finalement, $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
12. La fonction sinus est bornée donc est négligeable devant $\sqrt{n}$ et donc $u_n \sim -\sqrt{n}$.
13. $u_n = \ln(2024) + \ln(n) = \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \sim \ln(n)$.
14. Factorisons dans le $\ln(n)$ ce qui donne :

$$u_n = \ln(n^2) + \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 2\ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right) \sim 2\ln(n)$$

15. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de u_n ! Et surtout par e^{n^2} ou e^{n^2+n} puisque le quotient ne tend pas vers 1 !
16. Tout d'abord, $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(1/n) \sim 1/n$ si bien que $1/\sin(1/n) \sim n$. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents ! On écrit $u_n = n + \mathrm{o}\,(n) - \ln(n) \sim n$.
17. Idem, on factorise dans le ln, ce qui donne

$$u_n = n^2 + n - \ln\left(n^3\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = n^2 + n - 3\ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim n^2.$$

18. On sait que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$ donc

$$u_n \sim \frac{\left(5n-\dfrac{1}{2}\right)^4}{\left(4n+\dfrac{1}{3}\right)^3} \sim \frac{5^4 n^4}{4^3 n^3} = \frac{5^4 n}{4^3}$$

19. La fonction sinus tend vers 0 et l'Arctangente vers $\pi/2$: $u_n \sim \pi/2$.
20. On aimerait dire au numérateur que l'exponentielle l'emporte, mais ce n'est pas aussi simple : sa partie entière lui est équivalente, pas négligeable. Cependant, $\lfloor e^n \rfloor - e^n \in \left]-1\,;1\right]$ donc, en particulier, est négligeable devant $\sqrt{n^2+n+1}$. Le numérateur est donc équivalent à $\sqrt{n^2+n+1} \sim \sqrt{n^2} = n$, tandis que le dénominateur est équivalent à $-n^{1/3}$. En conclusion, $u_n \sim -n/n^{1/3} = -n^{2/3}$.

Exercice 2 : ✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Donner un équivalent de $\binom{p+n}{n}$ quand $n \to +\infty$.

Correction : Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \binom{n+p}{n} &= \frac{(n+p)!}{n!p!} \\ &= \frac{(n+p)\cdots(n+1)}{p!} \end{aligned}$$

Chaque terme du numérateur est équivalent à n donc, par produit (l'équivalent passe au produit d'un nombre fini et fixe de termes), puisqu'il y a p termes :

$$\binom{n+p}{p} \sim \frac{n^p}{p!}$$

Exercice 3 : ✪ Donner dans chaque cas un équivalent de $f(x)$ (quand $x \to 0$ puis quand $x \to +\infty$) ou de u_n :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right) + 3 + \dfrac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{2^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{2^n}\right) + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2}$
3. $f(x) = x + \mathrm{o}\,(x) + x^2\ln(x) + \mathrm{o}\left(x^2\ln(x)\right) + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$
4. $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right) + \dfrac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) + \dfrac{1}{n\ln(n)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$
5. $u_n = n + \mathrm{o}\,(n) + \sqrt{n} + \mathrm{o}\,(\sqrt{n}) + \dfrac{n^2}{\ln(n)} + n\ln(n) + \mathrm{o}\,(n\ln(n)) + \sqrt{2\pi} + \mathrm{o}\,(1)$.

Correction :

1. Au voisinage de $+\infty$, tous les termes sont négligeables devant 3 (sauf 3 évidemment) donc $f(x) \sim 3$. Au voisinage de 0, tous les termes sont négligeables devant $1/x^2$ (sauf $1/x^2$) donc $f(x) \sim 1/x^2$.
2. Ici, c'est forcément quand $n \to +\infty$. Tous les termes sont négligeables devant $1/\sqrt{n}$ donc $u_n \sim 1/\sqrt{n}$.
3. Au voisinage de 0, tous les termes sauf x sont négligeables devant x (il suffit de faire le quotient ou de se souvenir que, au voisinage de 0, ce sont les plus petites puissances qui l'emportent) donc $f(x) \sim x$. Au voisinage de $+\infty$, tous les termes sauf $x^2\ln(x)$ sont négligeables devant $x^2\ln(x)$ donc $f(x) \sim x^2\ln(x)$.
4. $u_n \sim \ln(n)/n$.
5. $u_n \sim n^2/\ln(n)$.

Exercice 4 : ✪ Soient a et b strictement supérieurs à 1. Montrer que $n^n = \mathrm{o}\left(a^{b^n}\right)$.

Correction : Ce n'est pas une croissance comparée du cours : il n'y a rien d'autre que la définition. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{n^n}{a^{b^n}} = e^{n\ln(n) - b^n\ln(a)}$$

Or, $b > 1$ et $\ln(a) \neq 0$ donc $n\ln(n) = \mathrm{o}\,(b^n\ln(a))$ si bien que $n\ln(n) - b^n\ln(a) \sim -b^n\ln(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ car $\ln(a) < 0$. On en déduit que

$$\frac{n^n}{a^{b^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 5 : ✪ Soient $q > 0, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Donner un équivalent de :

$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1 + \ln(n)^\beta}$$

Correction : Séparons les cas selon les valeurs de q, α et β. Rappelons que pour donner un équivalent d'une fraction, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur.

- Si $q > 1$ alors $q^n + n^\alpha \sim q^n$ (peu importe α).
- Si $q \leq 1$ et $\alpha > 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim n^\alpha$.
- Si $q = 1$ et $\alpha = 0$ alors $q^n + n^\alpha = 2$ (donc est équivalent à 2).
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim 1$.
- Si $q < 1$ et $\alpha < 0$ alors $q^n + n^\alpha \sim n^\alpha$.

- Si $\beta > 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta \sim \ln(n)^\beta$.
- Si $\beta = 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta = 2$ donc est équivalent à 2.
- Si $\beta < 0$ alors $1 + \ln(n)^\beta \sim 1$.

On en déduit un équivalent de u_n :

- Si $q > 1$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim q^n / \ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim q^n/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim q^n$.
- Si $q \leq 1$ et $\alpha > 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim n^\alpha / \ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim n^\alpha/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim n^\alpha$.
- Si $q = 1$ et $\alpha = 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim 2/ \ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n = 1$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim 2$.
- Si $q = 1$ et $\alpha < 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim 1/ \ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim 1/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim 1$.
- Si $q < 1$ et $\alpha < 0$: si $\beta > 0$ alors $u_n \sim n^\alpha / \ln(n)^\beta$; si $\beta = 0$ alors $u_n \sim n^\alpha/2$ et si $\beta < 0$ alors $u_n \sim n^\alpha$.

Exercice 6 : ✪✪ Trouver une fonction f telle que, pour tout n, au voisinage de $+\infty$, $\ln^n(x) = \mathrm{o}\left(f(x)\right)$ et $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{1/n}\right)$.

Correction : On cherche donc une fonction « comprise entre les logs et les puissances de x ». On cherche une fonction f qui l'emporte sur toutes les fonctions du type $x \mapsto e^{n\ln(\ln(x))}$ mais qui soit négligeable devant toutes les fonctions du type $x \mapsto e^{\ln(x)/n}$. Montrons que $f : x \mapsto e^{\sqrt{\ln(x)}}$ convient. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors

$$n\ln(\ln(x)) - \sqrt{\ln(x)} = n\ln(u) - \sqrt{u} \sim -\sqrt{u} = -\sqrt{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

et

$$\sqrt{\ln(x)} - \frac{\ln(x)}{n} = \sqrt{u} - \frac{u}{n} \sim -\frac{u}{n} = -\frac{\ln(x)}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

ce qui prouve (il suffit de faire le quotient et d'utiliser les limites ci-dessus) que $\ln(x)^n = \mathrm{o}\left(f(x)\right)$ et $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{1/n}\right)$.

Exercice 7 : ✪✪

1. Donner le domaine de définition de
$$f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$
Donner un équivalent en 0^+ puis en 1^- de f. En déduire que f est prolongeable par continuité en 1. f ainsi prolongée est-elle dérivable en 1 ?
2. Mêmes questions au voisinage de 0^+ avec
$$f : x \mapsto 2x \times \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor - \frac{1}{\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor}$$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est définie en x si et seulement si $x > 0$ et $1 - x^2 > 0$, si et seulement si $x > 0$ et $x \in \,]-1\,;1\,[$. Ainsi $D_f = \,]\,0\,;1\,[$. Supposons donc $x \in \,]\,0\,;1\,[$. On a un quotient : on essaye de donner un équivalent du numérateur et un équivalent du dénominateur.
   - Au voisinage de 0, on ne peut pas donner un équivalent plus simple du numérateur (l'équivalent usuel $\ln(1+u) \sim u$ n'est valable que quand u tend vers 0, c'est-à-dire quand ce qu'il y a dans le ln est au voisinage de 1, voir point suivant) et, au voisinage de 0, $\sqrt{1-x^2} \sim 1$, c'est-à-dire que $f(x) \sim \ln(x)$.
   - Au voisinage de 1, ce n'est pas aussi simple. Tout d'abord, on ne peut pas dire que le dénominateur est équivalent à 0 (c'est un interdit absolu). Reconnaissons une identité remarquable : au voisinage de 1,
   $$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} \sim \sqrt{2(1-x)}.$$
   De plus, on est au voisinage de 1, donc $\ln(x) = \ln(1 + (x-1)) \sim (x-1)$ car $x - 1 \xrightarrow[x\to1]{} 0$ et on peut utiliser l'équivalent usuel rappelé ci-dessus. Attention, $x - 1 < 0$ car $x < 1$, donc $x - 1 = -(1-x) = -\sqrt{(1-x)^2}$. Finalement, $f(x) \sim \dfrac{-\sqrt{(1-x)^2}}{\sqrt{2(1-x)}} = -\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} \xrightarrow[x\to1]{} 0$. On peut donc prolonger f par continuité en 1 en posant $f(1) = 0$. De plus, l'équivalent passe au quotient donc :
   $$\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} \sim -\sqrt{\frac{1-x}{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{(1-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2(1-x)}} \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty.$$
   Le taux d'accroissement de f n'admet pas de limite finie en 1 : la fonction n'est pas dérivable en 1 (mais son graphe admet en 1 une tangente verticale, cf. chapitre 14).

2. On a prouvé dans l'exercice 26 du chapitre 2 que f est définie sur $]\,0\,;1\,]$. On rappelle que si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors, au voisinage de a, $\lfloor g(x)\rfloor \sim g(x)$. Or, $1/\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, si bien que

$$\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}}\right\rfloor \sim \frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\lfloor 1/\sqrt{x}\rfloor} \sim \frac{1}{1/\sqrt{x}} = \sqrt{x}$$

Attention, l'équivalent ne passe pas à la somme : il faut écrire ces équivalents avec un o (), d'où :

$$f(x) = 2x \times \left(\frac{1}{\sqrt{2x}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - \left(\sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right)\right) = \sqrt{2x} - \sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right)$$

En conclusion, au voisinage de 0, $f(x) \sim \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{x}$. On en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$. Cependant, si $x>0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc f ainsi prolongée n'est pas dérivable en 0.

Exercice 8 : ✪✪ Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on pose :

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+2}\,dx$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $u_{n+2}+u_n$. En déduire la limite de la suite (u_n) et un équivalent de u_n.

Correction :

1. Quand on ne sait pas par où démarrer pour une suite, on peut toujours s'intéresser à sa monotonie. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1}-u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+3}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+2}(\tan(x)-1)\,\mathrm{d}x$$

Or, pour tout $x\in\left[0\,;\frac{\pi}{4}\right]$, $0\leq \tan(x)\leq 1$: la fonction intégrée est donc négative. Par positivité de l'intégrale, $u_{n+1}-u_n\leq 0$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Elle est évidemment minorée par 0 donc converge.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$u_{n+2}+u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan(x))^{n+2}\left(1+\tan(x)^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\tan(x)^{n+3}}{n+3}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+3}$$

(on a reconnu une fonction du type $f^\alpha\times f'$). Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $u_n\geq u_{n+2}$: on en déduit que $2u_{n+2}\leq u_n+u_{n+2} = \dfrac{1}{n+3}\leq 2u_n$. En particulier, (l'inégalité de droite ci-dessous provient de ce qui précède appliqué à $n-2$ au lieu de n) : $\dfrac{1}{n+3}\leq 2u_n\leq \dfrac{1}{n+1}$ et donc $\dfrac{1}{2(n+3)}\leq u_n\leq\dfrac{1}{2(n+1)}$. On a encadré u_n par deux quantités équivalentes à $\dfrac{1}{2n}$ donc, d'après le cours, $u_n\sim 1/(2n)$ et en particulier $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 9 : ✪✪

1. Soit (x_n) une suite décroissante de limite nulle telle que $x_n+x_{n-1}\sim\dfrac{1}{n}$. Montrer que $x_n\sim\dfrac{1}{2n}$.
2. Montrer que le résultat tombe en défaut si (x_n) n'est pas décroissante.

Correction :

1. La méthode est analogue à celle de l'exercice précédent. Soit $n\geq 1$. La suite (x_n) étant décroissante, $2x_n\leq x_{n-1}+x_n\leq 2x_{n-1}$. Par conséquent :

$$\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\leq x_n\leq\frac{x_{n-1}+x_n}{2}$$

L'inégalité de gauche vient de l'inégalité précédente en l'appliquant à $n+1$ au lieu de n. Par hypothèse :
Or, par hypothèse,

$$\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\sim\frac{1}{2n} \qquad\text{et}\qquad \frac{x_{n+1}+x_n}{2}\sim\frac{1}{2(n+1)}\sim\frac{1}{2n}$$

D'après le théorème d'encadrement, $x_n\sim 1/2n$.

2. Posons $x_n = 1/n^2$ si n est impair et $x_n = 1/n$ si n est pair (non nul). La suite $(x_n/2n)$ n'a pas de limite alors que $\dfrac{x_n + x_{n-1}}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (séparer les termes pairs et les termes impairs).

Exercice 10 - Équivalents et sommes de Riemann : ✪✪

1. Donner un équivalent de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$
2. **Remake :** Soit $\alpha > 0$. Donner un équivalent de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.
3. **Remake :** Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3}$.

Correction :

1. Cela fait penser à une somme de Riemann. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$T_n = \frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

Alors T_n est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \ln(1+x)$. f est continue donc continue par morceaux si bien que

$$T_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable $u = 1+x$, $x = u-1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ donne :

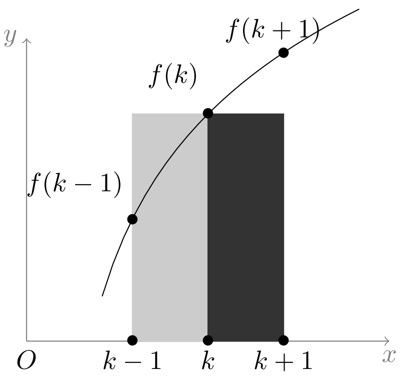
$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \ln(u)\,\mathrm{d}u \\ &= [u\ln(u) - u]_1^2 \\ &= 2\ln(2) - 2 + 1 \\ &= \ln(4) - 1 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $T_n \sim \ln(4) - 1$ donc $S_n \sim n(\ln(4)-1)$.

2. À l'aide d'une somme de Riemann (cf. exercice 29 du chapitre 22) on prouve que

$$T_n = \frac{S_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$$

donc $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. On peut aussi comparer à une intégrale pour obtenir ce résultat :



Prouvons ce résultat pour la fonction $f : x \longmapsto x^\alpha$ qui est bien croissante. Soit $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$. Soit $t \in [\,k\,;k+1\,]$. La fonction f étant croissante, $k^\alpha \leq t^\alpha$ et, par croissance de l'intégrale (on intègre sur l'intervalle sur lequel l'inégalité est vérifiée), $\displaystyle\int_k^{k+1} k^\alpha\,\mathrm{d}t = k^\alpha \leq \int_k^{k+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$. On trouve de même l'inégalité de gauche. Si on somme pour k allant de 1 à n, en utilisant la relation de Chasles, il vient : $\displaystyle\int_0^n t^\alpha\,\mathrm{d}t \leq S_n \leq \int_1^{n+1} t^\alpha\,\mathrm{d}t$. En intégrant, on obtient : $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq S_n \leq \dfrac{(n+1)^{\alpha+1}-1}{\alpha+1}$. S_n est encadrée par deux quantités équivalentes à $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ donc est elle-même équivalente à $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^3}\\
&= \frac{1}{n^2}\times\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^3}\\
&= \frac{1}{n^2}\times S_n
\end{aligned}$$

où

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^3}$$

est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)^3}$. f étant continue par morceaux,

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)^3}\\
&= \left[\frac{-1}{4}\frac{1}{(1+2x)^2}\right]_0^1\\
&= \frac{-1}{36}+\frac{1}{4}\\
&= \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Rappelons qu'une suite qui converge vers une limite non nulle est équivalente à cette limite (évidemment, ça ne marche pas pour 0, cf. cours) donc $S_n \sim 2/9$ si bien que $u_n \sim 2/9n^2$.

Exercice 11 : ✪✪ Donner deux fonctions bijectives équivalentes en $+\infty$ dont les réciproques ne sont pas équivalentes.

Correction : Soit $a \neq 0$ et soient $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto \ln(x) + a$. Alors, au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim g(x)$. Soit $y \in \mathbb{R}$ et soit $x > 0$. $f(x) = y \iff x = e^y$ et $g(x) = y \iff x = e^{x-a}$. En d'autres termes, f et g sont des bijections de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et leurs bijections réciproques sont $f^{-1} : y \mapsto e^y$ et $g^{-1} : y \mapsto e^{y-a}$, qui ne sont pas équivalentes puisque leur quotient vaut $e^{-a} \neq 1$ car $a \neq 0$.

Exercice 12 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln(n)$ (on pourra comparer à une intégrale) et montrer finalement que

$$\left(\prod_{k=1}^{n}(a+kb)\right)^{1/n} \sim b(n!)^{1/n}$$

Correction :

1. Découle de la concavité de $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. L'équivalent a été prouvé dans le chapitre 22. Notons $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n}(a+kb)\right)^{1/n}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\prod_{k=1}^{n}(kb) \times \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{kb}\right)\right)^{1/n} \\ &= \left(b^n n! \times \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{kb}\right)\right)^{1/n} \\ &= b \times (n!)^{1/n} \times \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{kb}\right)^{1/n} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que $v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{a}{kb}\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On va pour cela utiliser la question précédente. $v_n \geq 1$ donc on peut calculer son ln et celui-ci est positif :

$$0 \leq \ln(v_n) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{a}{kb}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{kb}$$

Or,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a}{kb} \sim \frac{a\ln(n)}{bn} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème d'encadrement. L'exponentielle étant continue, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ ce qui permet de conclure.

Exercice 13 : ✪✪✪ Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Montrer que $u_n \sim \frac{n}{2}$.

Correction :

1. Soit $n \geq 1$. Une racine carrée étant positive, $u_n \geq 0$ pour tout n.

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^2 &= u_n + \sum_{k=1}^{n-1} u_k \\ &= u_n + {u_n}^2 \\ &\geq {u_n}^2 \end{aligned}$$

et la racine carrée est croissante donc $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est croissante. Si elle converge vers une limite L alors L est un point fixe de $f : x \mapsto \sqrt{x+x^2}$ puisque f est continue et puisque pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + {u_n}^2}$, c'est-à-dire que $L = \sqrt{L+L^2}$ donc $L^2 = L + L^2$ si bien que $L = 0$ ce qui est absurde puisque $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante. La suite (u_n) est croissante et ne converge pas donc diverge vers $+\infty$.
2. D'après la question précédente, ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = u_n$ donc, tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{u_{n+1}+u_n} \\ &= \frac{1}{1+\frac{u_{n+1}}{u_n}} \end{aligned}$$

De plus :

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^2 = \frac{1}{u_n} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. La racine carrée étant continue, $u_{n+1}/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$. D'après le théorème de Cesàro,

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k) = u_n - u_0 \sim \frac{n}{2}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $u_n - u_0 \sim u_n$ ce qui permet de conclure.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soit (a_n) une suite arithmétique de raison non nulle. Donner, avec le moins de calculs possibles, la limite de la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_k a_{k+1}}{{a_{2n+2}}^4}$$

Si $p \in \mathbb{N}^*$, généraliser avec la suite de terme général

$$b_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \times a_{k+1} \times \cdots \times a_{k+p}}{{a_{2n-3}}^{p+2}}$$

On pourra utiliser la question 2 de l'exercice 10.

Correction :

1. Tout d'abord, il existe $q \neq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nq$. On a un quotient : donnons un équivalent du numérateur et du dénominateur. Puisque $a_{2n+2} = a_0 + (2n+2)q \sim 2nq$, alors le dénominateur est équivalent à $(2nq)^4$ (l'équivalent passe à la puissance fixe). Donnons un équivalent du numérateur, que l'on note T_n. On a tout d'abord :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}(a_0 + (k-1)q) \times (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q)$$

En développant, on obtient une combinaison linéaire de puissances de k, plus précisément de 1 jusque k^3. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents : l'idée est d'utiliser la question précédente et de dire que la seule somme « importante » est la somme des k^3, les autres étant négligeables. Montrons cela rigoureusement. Il existe $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout k (et en particulier les x_i ne dépendent pas de k) :

$$(a_0 + (k-1)q) \times (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) = q^3k^3 + x_2k^2 + x_1k + x_0$$

Le coefficient devant k^3 est q^3 puisque, si on développe, le seul moyen d'avoir k^3 est de multiplier entre eux tous les qk. Puisque les autres termes sont amenés à être négligeables, inutile de les expliciter ! Par somme,

$$T_n = q^3\sum_{k=1}^{n}k^3 + x_2\sum_{k=1}^{n}k^2 + x_1\sum_{k=1}^{n}k + x_0\sum_{k=1}^{n}1$$

La première somme (qui vaut $n^2(n+1)^2/4$) est équivalente à $n^4/4$ et les autres sommes sont toutes négligeables devant n^4. En d'autres termes, $T_n = q^3 \times \left(\dfrac{n^4}{4} + \mathrm{o}\left(n^4\right)\right) + \mathrm{o}\left(n^4\right)$. Finalement, $T_n \sim q^3 \times \dfrac{n^4}{4}$ si bien que $b_n \sim \dfrac{q^3 \times \dfrac{n^4}{4}}{(2nq)^4} = \dfrac{1}{42^4 \times q}$ et donc $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/64q$.

2. Tout d'abord, il existe $q \neq 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 + nq$. On a un quotient : donnons un équivalent du numérateur et du dénominateur. Puisque $a_{2n-3} = a_0 + (2n-3)q \sim 2nq$, alors le dénominateur est équivalent à $(2nq)^{p+2}$ (l'équivalent passe à la puissance fixe). Donnons un équivalent du numérateur, que l'on note T_n. On a tout d'abord :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) \times \cdots \times (a_0 + (k+p)q)$$

Il y a $k+1$ termes dans le produit : en développant, on obtient une combinaison linéaire de puissances de k, plus précisément de 1 jusque k^{p+1}. Attention, on ne peut pas sommer les équivalents : l'idée est d'utiliser la question précédente et de dire que la seule somme « importante » est la somme des k^{p+1}, les autres étant négligeables. Montrons cela rigoureusement. Il existe $(x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ tels que, pour tout k (et en particulier les x_i ne dépendent pas de k) :

$$(a_0 + kq) \times (a_0 + (k+1)q) \times \cdots \times (a_0 + (k+p)q) = q^{p+1}k^{p+1} + x_p k^p + \cdots + x_1 k + x_0$$

Le coefficient devant k^{p+1} est q^{p+1} puisque, si on développe, le seul moyen d'avoir k^{p+1} est de multiplier entre eux tous les qk. Puisque les autres termes sont amenés à être négligeables, inutile de les expliciter ! Par somme,

$$T_n = q^{p+1} \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} + x_p \sum_{k=1}^{n} k^p + \cdots + x_1 \sum_{k=1}^{n} k + x_0 \sum_{k=1}^{n} 1$$

D'après la question 2 de l'exercice 10, la première somme est équivalente à $n^{p+2}/(p+2)$ et les autres sommes sont toutes négligeables devant n^{p+2} (par exemple, la somme de k^p est équivalente à $n^{p+1}/(p+1)$). En d'autres termes, $T_n = q^{p+1} \times \left(\dfrac{n^{p+2}}{p+2} + \mathrm{o}\left(n^{p+2}\right) \right) + \mathrm{o}\left(n^{p+2}\right)$. Finalement, $T_n \sim q^{p+1} \times \dfrac{n^{p+2}}{p+2}$ si bien que $b_n \sim \dfrac{q^{n+1} \times \dfrac{n^{p+2}}{p+2}}{(2nq)^{p+2}} = \dfrac{1}{(p+2)2^{p+2} \times q}$ et donc $b_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{(p+2)2^{p+2} \times q}$.

Exercice 15 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique réel $a > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor - \lfloor na \rfloor = n - 1$$

1. Donner l'unique valeur possible de a. On désire maintenant montrer que cette valeur convient effectivement.
2. En remarquant que a est irrationnel, montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \right\rfloor = n - 1$$

3. Conclure (on pourra exprimer $1/a$ en fonction de a et 1).

Correction :

1. Soit a un réel strictement positif qui convient. Rappelons que si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pm\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$. Par conséquent, $\lfloor na \rfloor \sim na$ et $\lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor \sim a \lfloor na \rfloor \sim na^2$. Cependant, on ne peut pas sommer les équivalents : il suffit de les écrire avec des o. On en déduit que :

$$na^2 - na + \mathrm{o}(n) = n - 1$$

Par conséquent, $n - 1 \sim n(a^2 - a)$. Or, $n - 1 \sim n$ donc $n \sim n(a^2 - a)$ donc $a^2 - a = 1$ (sinon, le quotient ne tend pas vers 1) et donc $a = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ (puisque $a > 0$).

2. Par définition de la partie entière, $na - 1 < \lfloor na \rfloor \leq na$ donc

$$n - 1 < n - \frac{1}{a} < \frac{\lfloor na \rfloor}{a} \leq n$$

L'inégalité de gauche vient du fait que $a > 1$. Or, a est irrationnel donc l'inégalité de droite ne peut pas être une égalité donc est stricte : $\lfloor na \rfloor / a \in \left] n-1 \,; n \right[$ donc sa partie entière est bien égale à $n - 1$.

3. On sait que $a^2 = a + 1$ (cf. première question, et aussi parce qu'on a reconnu le nombre d'or) donc $\dfrac{1}{a} = a - 1$. D'après la question précédente,

$$\lfloor \lfloor na \rfloor (a+1) \rfloor = n - 1$$

Or, on peut sortir les entiers lorsque ce sont des constantes additives donc :

$$\lfloor \lfloor na \rfloor (a+1) \rfloor = \lfloor a \lfloor na \rfloor + \lfloor na \rfloor \rfloor = \lfloor a \lfloor na \rfloor \rfloor + \lfloor na \rfloor$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 16 : ✪✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n}$$

On se donne enfin un réel λ strictement positif dans tout l'exercice.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n > n$ tel que $f_n(x_n) = \lambda$.
2. Soit $\alpha > 1$. Montrer que la suite de terme général $f_n(\alpha n)$ converge vers une limite que l'on explicitera.
3. Montrer finalement que :

$$x_n \sim \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1} \times n$$

Correction :

1. La fonction f_n est dérivable sur son domaine de définition en tant que somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in D_{f_n}$

$$f_n(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-n)^2} < 0$$

Attention, cela ne veut pas dire que f_n est strictement décroissante ! Elle est strictement décroissante **sur tout intervalle composant son domaine de définition**, en particulier sur $]\, n\,; +\infty\, [$, et cela nous suffit. f_n est de plus continue sur cet intervalle. Calculons les limites aux bornes.

- **En n^+ :** Calculons les limites de chacun des termes de la somme.

$$\frac{1}{x-1} \xrightarrow[x \to n^+]{} \frac{1}{n-1} \in \mathbb{R}, \frac{1}{x-2} \xrightarrow[x \to n^+]{} \frac{1}{n-2} \in \mathbb{R} \ldots, \frac{1}{x-n-1} \xrightarrow[x \to n^+]{} 1 \in \mathbb{R}$$

et $\dfrac{1}{x-n} \xrightarrow[x \to n^+]{} +\infty$. Par opérations sur les limites, $f_n(x) \xrightarrow[x \to n^+]{} +\infty$.
- **En** $+\infty$ Tous les termes tendent vers 0 et une somme (finie, et avec un nombre fixe de termes !) de termes tendant vers 0 tend vers 0. Ainsi, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

On peut donc appliquer le théorème de la bijection pour conclure.

2. En utilisant l'écriture de f_n sous forme de somme

$$f_n(n\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\alpha - k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha - \dfrac{k}{n}}$$

On reconnaît une somme de Riemann à pas constant associée à la fonction définie sur $[\,0\,; 1\,]$ par $t \mapsto 1/(\alpha - t)$. Cette fonction étant continue sur $[\,0\,; 1\,]$ (car $\alpha > 1$),

$$f_n(n\alpha) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\alpha - t} = [-\ln(\alpha - t)]_0^1 = \ln(\alpha) - \ln(\alpha - 1) = g(\alpha)$$

où g est la fonction $x \mapsto \ln(x) - \ln(x-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

3. L'idée est que si $g(\alpha) = \lambda$ alors $f_n(n\alpha)$ tend vers λ qui est égal à $f_n(x_n)$ donc x_n va être à peu près égal à $n\alpha$. Cherchons donc la valeur de α pour laquelle $g(\alpha) = \lambda$. On n'oublie pas de travailler par équivalences quand on résout une équation.

$$g(\alpha) = \lambda \iff \frac{\alpha}{\alpha - 1} = e^\lambda \iff \alpha\left(1 - e^\lambda\right) = -e^\lambda \iff \alpha = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question 2 :

$$f_n(n(\alpha + \varepsilon)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(\alpha + \varepsilon) \qquad \text{et} \qquad f_n(n(\alpha - \varepsilon)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(\alpha - \varepsilon)$$

Or, il est facile de prouver que g est strictement décroissante. Par conséquent, $g(\alpha + \varepsilon) < g(\alpha) < g(\alpha - \varepsilon)$ et donc

- Il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0, f_n(n(\alpha+\varepsilon)) < g(\alpha)$.
- Il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1, f_n(n(\alpha-\varepsilon)) > g(\alpha)$.

Prenons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Pour tout $n \geq n_2$:

$$f_n(n(\alpha+\varepsilon)) < g(\alpha) = \lambda < f_n(n(\alpha-\varepsilon))$$

La fonction f_n étant strictement décroissante sur $]\, n\,; +\infty\, [$ (on rappelle que $\lambda = f_n(x_n)$) :

$$\forall n \geq n_2, \qquad n(\alpha+\varepsilon) > x_n > n(\alpha-\varepsilon)$$

On a donc montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_2, \forall n \geq n_2, \qquad \alpha + \varepsilon > \frac{x_n}{n} > \alpha - \varepsilon$$

c'est-à-dire :

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha = \frac{e^\lambda}{e^\lambda - 1}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 17 : ✪✪✪✪ On pose $u_1 = 1, u_2 = u_3 = 2, u_4 = u_5 = u_6 = 3$ etc. Donner un équivalent de u_n.

Correction : Cherchons une expression explicite de u_n en fonction de n. Un terme égal à 1, deux termes égaux à 2, trois termes égaux à 3 etc. On pense à la somme des entiers $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Plus précisément, pour tout n, $u_p = n$ pour tout $p \in [\![\, T_{n-1}+1\,;\, T_n\,]\!]$ c'est-à-dire que :

$$\forall \frac{(n-1)n+2}{2} \leq p \leq \frac{n(n+1)}{2}, u_p = n$$

Raisonnons à l'envers et fixons p : cherchons quelle valeur de n vérifie l'inégalité ci-dessus. L'entier n est l'entier pour lequel $T_{n-1}+1 \leq p \leq T_n$. On cherche donc le plus grand n tel que $T_{n-1}+1 \leq p$ donc tel que $\dfrac{n(n-1)+2}{2} \leq p$ c'est-à-dire $n^2 - n + (2-2p) \leq 0$. Cette inégalité a pour discriminant $8p-7$ donc (n est positif) cette inégalité est valable pour tout $n \leq \dfrac{1+\sqrt{8p-7}}{2}$. Le plus grand entier n vérifiant cette condition est donc

$$n = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{8p-7}}{2} \right\rfloor$$

Puisque, pour tout p vérifiant les deux inégalités ci-dessus, $u_p = n$ et que n est égal à la valeur ci-dessus, cela signifie que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, u_p = \left\lfloor \frac{-1+\sqrt{8p-7}}{2} \right\rfloor$$

En particulier :

$$u_p \sim \frac{\sqrt{8p-7}}{2} \sim \sqrt{2p}$$

24.2 Et le calcul fut - Et l'Homo Bestialus maîtrisa le calcul

24.2.1 DL

Exercice 18 : ✪ Donner les DL des fonctions suivantes en 0 aux ordres indiqués (il n'est pas interdit de réfléchir aux ordres avant de se lancer dans des calculs infernaux) et on fera attention aux multiples produits.

1. $f : x \mapsto \ln(1-x)\cos(x)$ à l'ordre 3.
2. $f : x \mapsto \cos(x)\ln(1-x^2)$ à l'ordre 5.
3. $f : x \mapsto \sin^2(x)\cos(x)$ à l'ordre 4.
4. $f : x \mapsto \sin(x^2)\cos(x)$ à l'ordre 4.
5. $f : x \mapsto (\sqrt{1-x}-1)\cos(x)$ à l'ordre 3.
6. $f : x \mapsto \tan(x)$ à l'ordre 8.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x-x^2}$ à l'ordre 3.
8. $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ à l'ordre 4.
9. $f : x \mapsto e^{x-x^2}$ à l'ordre 3.
10. $f : x \mapsto \sin(x+x^2)$ à l'ordre 4.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{\sqrt[5]{1+3x^2}}$ à l'ordre 6.

12. $f : x \mapsto \sin^2(x)$ à l'ordre 6.
13. $f : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{1-\sin(x)}$ à l'ordre 5.
14. $f : x \mapsto e^{-x}/\cos(4x)$ à l'ordre 3.
15. $f : x \mapsto \sqrt[3]{1+\text{Arctan}^2(x)}$ à l'ordre 5.
16. $f : x \mapsto \cos\left(\sqrt{x+x^2}\right)$ à l'ordre 2.
17. $f : x \mapsto e^{\cos(x)}$ à l'ordre 6.
18. $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 5.
19. $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ à l'ordre 6.

Correction :

1. On fait le DL du ln à l'ordre 3 puisque le premier terme du cos est 1, et on fait le DL du cos à l'ordre 2 puisque le premier terme du ln est x. Tout d'abord,
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathrm{o}\left(u^3\right)$$
donc, avec $u = -x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= -x + \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

2. De même, on donne le cos à l'ordre 3 puisque le premier terme du ln sera à l'ordre 2, et on donne le ln à l'ordre 5 puisque le premier terme du cos est un 1. On applique le DL de $\ln(1+u)$ avec $u = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si bien que
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(-x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= -x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\ &= -x^2 + \mathrm{o}\left(x^5\right) \end{aligned}$$

3. Idem : $\sin^2$ à l'ordre 4 et cos à l'ordre 2 (car on multipliera tout par x^2 puisque $\sin(x)^2 \sim x^2$). De plus, on écrit le DL du sinus à l'ordre 3 : quand on mettra au carré, on aura le double produit $x \times \mathrm{o}\left(x^3\right) = \mathrm{o}\left(x^4\right)$ donc faire un DL du sinus à l'ordre 3 suffit :
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2 \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(x^2 - 2 \times x \times \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x^2 - \frac{5x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

4. Idem : sinus à l'ordre 4 et cos à l'ordre 2. On applique le DL de $\sin(u)$ avec $u = x^2$ qui tend bien vers 0 (et donc seul le premier terme apparaît puisque le terme suivant est du u^3 c'est-à-dire du x^6) :
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x^2 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

5. Le premier terme du cos étant 1, on donne le DL de la quantité entre parenthèses à l'ordre 3. De plus, le premier terme de $(1+u)^\alpha$ étant 1, le premier terme du terme entre parenthèse sera du x donc le DL du cos à l'ordre 2 suffit. Rappelons que

$$(1+u)^\alpha \quad = \quad 1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)u^2}{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)u^3}{6}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

donc, avec $u=-x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ et $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1-x} \quad = \quad 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(1-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= -\frac{x}{2}+\frac{x^3}{4}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= -\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{3x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

6. On connaît le DL à l'ordre 7 : la fonction tangente étant impaire, son coefficient d'ordre 8 est nul, si bien que

$$\tan(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\mathrm{o}\left(x^8\right)$$

7. On applique le DL de $1/(1+u)$ avec $u=x-x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 1-(x-x^2)+(x-x^2)^2-(x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1-x+x^2+(x^2-2x\times x^2)-x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1-x+2x^2-3x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

8. On applique le DL de $\ln(1+u)$ avec $u=x+x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^2}{2}+\frac{(x+x^2)^3}{3}-\frac{(x)^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x+x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+2\times x\times x^2+x^4\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+3x\times x\times x^2\right)-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

9. DL de e^u avec $u=x-x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+(x-x^2)+\frac{(x-x^2)^2}{2}+\frac{(x)^3}{3!}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1+x-x^2+\frac{1}{2}\left(x^2-2x\times x^2\right)+\frac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1+x-\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

10. Idem :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+x^2)-\frac{(x+x^2)^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x+x^2-\frac{1}{6}\left(x^3+3\times x\times x\times x^2\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\ &= x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

11. On écrit $f(x) = \tan(x) \times (1+3x)^{-1/5}$: on va donc utiliser le DL de tangente à l'ordre 6 puisque le premier terme du $(1+u)^\alpha$ est 1, et le DL de $(1+3x)^{-1/5}$ à l'ordre 5 puisque le DL de tan commence par un x (pareil, DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -1/5$ et $u = 3x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left(1 - \frac{3x^2}{5} + \frac{27x^4}{25} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= x - \frac{3x^3}{5} + \frac{27x^5}{25} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x - \frac{4x^3}{15} + \frac{76x^5}{75} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

12. On l'a vu plus haut : on va donner le DL du sinus à l'ordre 5 puisqu'en faisant le double produit $2x\mathrm{o}\left(()\, x^5\right)$ cela donnera du $\mathrm{o}\left(x^6\right)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2 \\ &= \left(x^2 + \frac{x^6}{36}\right) + \left(2x \times \frac{-x^3}{6} + 2x \times \frac{x^5}{120}\right) + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

13. Le premier terme du numérateur va être en x^2 donc il suffit de donner un DL du sinus à l'ordre 3. De plus, le premier terme de $1/(1-\sin(x))$ va être 1 donc il faut donner un DL du cos à l'ordre 5.

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \times \frac{1}{1 - x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \times \frac{1}{1 + \left(-x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \times \left(1 - \left(-x + \frac{x^3}{6}\right) + (-x)^2 - (-x)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \times \left(1 + x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} + \frac{5x^5}{12} - \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{24} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{11x^4}{24} + \frac{3x^5}{8} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

14. Là, il faut aller à l'ordre 3 partout puisque les deux DL commencent par 1 :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-x} \times \frac{1}{1 - \frac{16x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)} \\ &= \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \times \left(1 + 8x^2 + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\ &= 1 + 8x^2 - x - 8x^3 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 - x + \frac{17x^2}{2} - \frac{49x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \end{aligned}$$

15. Tout d'abord (et puisqu'on veut $\mathrm{Arctan}^2 = \mathrm{Arctan} \times \mathrm{Arctan}$ à l'ordre 5, il suffit d'aller à l'ordre 4 dans l'Arctan, puisque tous les termes seront multipliés au moins par x),

$$\text{Arctan}(x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{3} + \text{o}\left(x^4\right)\right)^2 = x^2 - \frac{2x^4}{3} + \text{o}\left(x^5\right)$$

et $(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \text{o}\left(u^2\right)$. D'où :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{2x^4}{3}\right) - \frac{1}{9}\left(x^2\right)^2 + \text{o}\left(x^5\right)$$

Finalement :

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{3} + \text{o}\left(x^5\right)$$

16. Mettons $\sqrt{x}$ en facteur ce qui donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \cos\left(\sqrt{x}(1+x)^{1/2}\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{x}\left(1 + \frac{x}{2} + \text{o}(x)\right)\right) \\
&= \cos\left(\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2} + \text{o}\left(x^{3/2}\right)\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + \frac{x^{3/2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{x}\right)^4 + \text{o}\left(x^2\right) \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(x + 2\sqrt{x} \times \frac{x^{3/2}}{2}\right) + \frac{x^2}{24} + \text{o}\left(x^2\right) \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{11x^2}{24} + \text{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

17. On a :

$$f(x) = e^{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)}$$

Attention, on ne peut pas appliquer directement le DL de l'exponentielle puisque ce qu'il y a dedans ne tend pas vers 0. L'astuce est d'écrire :

$$f(x) = e \times e^{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)}$$

et là tout va bien !

$$\begin{aligned}
f(x) &= e \times \left(1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^3 + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^2}{2} \times \frac{x^4}{24}\right) + \frac{1}{6} \times \frac{-x^6}{8} + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)\right) \\
&= e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} - \frac{31ex^6}{720} + \text{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

18. Notons $g : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ qu'on prolonge en 0 avec $g(0) = 1$. Alors g est continue donc f est une primitive de g : pour exhiber un DL de f à l'ordre 5, il suffit de donner un DL de g à l'ordre 6, ce qui est immédiat (on donne un DL du sinus à l'ordre 7 puisqu'on divise par x).

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{o}\left(x^7\right)}{x} \\
&= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \text{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\ &= x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \mathrm{o}\left(x^7\right) \end{aligned}$$

19. Notons

$$G : x \mapsto \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Alors, pour tout x, $f(x) = G(x^2) - G(x)$. Il suffit donc de donner un DL de G à l'ordre 6, il suffira ensuite de les soustraire. Or, G est l'unique primitive de $g : x \mapsto e^{-x^2/2}$ qui s'annule en 0. Par primitivation des DL, il suffit de donner le DL de g à l'ordre 5, ce qui est immédiat avec le DL de e^u appliqué à $u = -x^2/2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

si bien que

$$\begin{aligned} G(x) &= G(0) + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \\ &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} + \mathrm{o}\left(x^6\right) \end{aligned}$$

En particulier :

$$G(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

En conclusion :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{x^6}{6} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Exercice 19 : ✪✪ Même chose que l'exercice précédent.

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin(x)}$ à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \tan(\pi e^x)$ à l'ordre 4.
3. $x \mapsto \dfrac{\ln(\cos(x))}{x + x^2 + x^3}$ à l'ordre 4.
4. $x \mapsto \dfrac{\ln(1 + x - x^3)}{\sqrt{1 - x + 2x^2}}$ à l'ordre 4.
5. $x \mapsto (\cos(x))^x$ à l'ordre 5.
6. $x \mapsto \dfrac{x^2}{\cos^2(x)}$ à l'ordre 7.
7. $x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
8. $x \mapsto \ln\left(3e^x - e^{-x}\right)$ à l'ordre 3.
9. $x \mapsto e^{-1/x^2}$ à l'ordre 2024.
10. $x \mapsto \ln\left(\dfrac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)}\right)$ à l'ordre 5.
11. ✪✪✪ $x \mapsto \ln^3(1 + x)$ à l'ordre 7.

Correction :

1. On va mettre au même dénominateur, $x\sin(x)$, qui va être équivalent à x^2, donc on va tout simplifier par x^2 : on fait donc un DL du numérateur à l'ordre 5. Après avoir simplifié (on s'en rend compte en faisant le DL, on tâtonne), le premier terme du numérateur sera x donc on donne le DL du dénominateur à l'ordre 4 donc le DL du sinus au dénominateur à l'ordre 3. Mais si on ne le voit pas, on tente et on adapte...

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin(x)-x}{x\sin(x)} \\
&= \frac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)-x}{x\left(x-\dfrac{x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)} \\
&= \frac{-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)}{x^2-\dfrac{x^4}{6}+\mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= \left(-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= \left(-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(1+\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= -\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}-\frac{x^3}{36}+\mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= -\frac{x}{6}-\frac{7x^3}{360}+\mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}
$$

2. Commençons par le DL de l'exponentielle à l'ordre 4 :

$$f(x)=\tan\left(\pi+\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)$$

Par π-périodicité de la tangente :

$$f(x)=\tan\left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)$$

et on peut ensuite faire le DL de $\tan(u)$ à l'ordre 4 :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}\right)+\frac{1}{3}\left(\pi x+\frac{\pi x^2}{2}\right)^3+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= \pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\pi x^3}{6}+\frac{\pi x^4}{24}+\frac{1}{3}\left(\pi^3x^3+3\times\pi x\times\pi x\times\frac{\pi x^2}{2}\right)+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= \pi x+\frac{\pi x^2}{2}+\frac{\left(\pi+2\pi^3\right)x^3}{6}+\frac{\left(\pi+12\pi^3\right)x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

3. Le premier terme du numérateur va être du $\ln(1-x^2/2)$ donc un terme en x^2, qu'on va simplifier par x au dénominateur donc on va faire un DL à l'ordre 5, et on va ensuite faire un DL de $1/(1+u)$ à l'ordre 3 puisqu'on va multiplier ce DL par x.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln\left(1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)}{x+x^2+x^3} \\
&= \frac{\left(-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}\right)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)}{x+x^2+x^3} \\
&= \left(\left(-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{24}\right)-\frac{x^3}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\frac{1}{1+x+x^2} \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-x-x^2+(x^2+2x\times x^2)-x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-x+x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= -\frac{x}{2}-\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}-\frac{x^4}{2}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= -\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}-\frac{5x^4}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

4. On commence par écrire f sous la forme :

$$f(x)=\ln(1+x-x^3)\times(1-x+2x^2)^{-1/2}$$

Le premier terme du ln sera un x donc on fait le DL de $(1+u)^{-1/2}$ à l'ordre 3, c'est-à-dire :

$$(1+u)^{-1/2}=1-\frac{u}{2}+\frac{3u^2}{8}-\frac{5u^3}{16}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

dont le premier terme est 1 donc on fait le DL du ln à l'ordre 4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left((x-x^3)-\frac{1}{2}(x-x^3)^2+\frac{1}{3}(x)^3-\frac{1}{4}(x)^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{2}(-x+2x^2)+\frac{3}{8}(-x+2x^2)^2-\frac{5}{16}(-x)^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(x-x^3-\frac{1}{2}(x^2-2\times x\times x^3)+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-x^2+\frac{3}{8}(x^2-2\times x\times 2x^2)+\frac{5x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \left(x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\times\left(1+\frac{x}{2}-\frac{5x^2}{8}-\frac{19x^3}{16}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= x+\frac{x^2}{2}-\frac{5x^3}{8}-\frac{19x^4}{16}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{4}+\frac{5x^4}{16}-\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{3}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x-\frac{37x^3}{24}-\frac{11x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

5. Puissance variable : notation exponentielle.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(\cos(x))} \\
&= e^{x\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)-\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\dfrac{x^4}{8}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{x\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)} \\
&= e^{-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{12}+\mathrm{o}\left(x^5\right)} \\
&= 1+\left(-\tfrac{x^3}{2}-\tfrac{x^5}{12}\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= 1-\tfrac{x^3}{2}-\tfrac{x^5}{12}+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}
$$

6. On écrit $f(x)=x^2\times(\cos(x))^{-2}$ ce qui permettra d'utiliser le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha=-2$:

$$(1+u)^{-2}=1-2u+3u^2+\mathrm{O}\left(u^3\right)$$

Dès lors :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^{-2} \\
&= x^2\left(1-2\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+3\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2\left(1+x^2-\frac{x^4}{12}+\frac{3x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2\left(1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= x^2+x^4+\frac{2x^6}{3}+\mathrm{o}\left(x^7\right)
\end{aligned}
$$

7. On va commencer par tout simplifier par x donc il faut faire un DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5 :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^5\right)}{x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \mathrm{o}\left(x^5\right)} \\
&= \frac{1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{5} + \mathrm{o}\left(x^4\right)}{1 - \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{x^4}{120} + \mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 - \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(-\frac{x^2}{6}\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{13x^4}{720} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{13x^4}{720} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} + \frac{x^4}{5} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{59x^4}{360} + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

8. On a :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(3 + 3x + \frac{3x^2}{2} + \frac{3x^3}{6} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln\left(2 + 4x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln(2) + \ln\left(1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&= \ln(2) + \left(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{2}\left(2x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}(2x)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= \ln(2) + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\left(4x^2 + 2 \times 2x \times \frac{x^2}{2}\right) + \frac{8x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&= \ln(2) + 2x - \frac{3x^2}{2} - 2x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}
$$

9. On a vu (cf. chapitre 19) que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ dont toutes les dérivées sont nulles en 0. D'après la formule de Taylor-Young, le DL de f à l'ordre 2024 est donc $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{2024}\right)$. On peut aussi voir (mais je pense qu'il faut avoir deviné le résultat avant pour tenter cette approche) que, pour tout n, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x^n} \times e^{-1/x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

On peut le dire directement, mais sinon on pose $y = 1/x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$ et $y^{n/2}e^{-y} \xrightarrow[y \to +\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, on a bien la limite voulue. En d'autres termes, $e^{-1/x^2} = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ pour tout n ce qui donne le même résultat.

10. On commence par casser le ln :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+\tan(x)) - \ln(1-\tan(x)) \\
&= \ln\left(1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) - \ln\left(1 - x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}(x)^4 + \frac{1}{5}(x)^5 \\
&\quad - \left[\left(-x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15}\right) - \frac{1}{2}\left(-x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-x - \frac{x^3}{3}\right)^3 - \frac{1}{4}(-x)^4 + \frac{1}{5}(-x)^5\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \times x \times \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 + 3 \times x \times x \times \frac{x^3}{3}\right) - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \\
&\quad - \left[-x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} - \frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \times -x \times \frac{-x^3}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(-x^3 + 3 \times -x \times -x \times \frac{-x^3}{3}\right) - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \\
&\quad - \left[-x - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{15} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\right] + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \\
&\quad + x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^5\right) \\
&= 2x + \frac{4x^3}{3} + \frac{4x^5}{3} + \mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

11. Celui-ci est assez calculatoire... Pour deviner l'ordre : chaque terme va être multiplié par au moins x^2 (le triple produit $3 \times x \times x \times$ truc) donc on donne le DL du ln à l'ordre 5 :

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^3$$

Rappelons (cf. cours) qu'un cube $(a + b + c + \cdots)$ contient tous les cubes a^3, b^3 etc., tous les triples produit $(3a^2b, 3a^2c, 3b^2c$ etc.) et enfin tous les sextuples produits $6abc$ de termes tous distincts. Ici, il va falloir d'en servir (mais en pratique, il sert très peu). Mettons d'abord les cubes, puis les triples produits, puis les sextuples produits :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x^3 - \frac{x^6}{8}\right) + \left(-3x \times x \times \frac{x^2}{2} + 3x \times x \times \frac{x^3}{3} - 3x \times x \times \frac{x^4}{4} + 3x \times x \times \frac{x^5}{5}\right. \\
&\quad \left. + 3 \times \frac{-x^2}{2} \times \frac{-x^2}{2} \times x + 3 \times \frac{-x^2}{2} \times \frac{-x^2}{2} \times \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^3}{3} \times \frac{x^3}{3} \times x\right) \\
&\quad + \left(6 \times x \times \frac{-x^2}{2} \times \frac{x^3}{3} + 6 \times x \times \frac{-x^2}{2} \times \frac{-x^4}{4}\right) + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\
&= x^3 - \frac{x^6}{8} - \frac{3x^4}{2} + x^5 - \frac{3x^6}{4} + \frac{3x^7}{5} + \frac{3x^5}{4} + \frac{x^7}{4} + \frac{x^7}{3} - x^6 + \frac{3x^7}{4} + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\
&= x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{7x^5}{4} - \frac{15x^6}{8} + \frac{29x^7}{15} + \mathrm{o}\left(x^7\right)
\end{aligned}$$

Exercice 20 - Ailleurs qu'en 0 **: ✪✪** Donner les DL des fonctions suivantes en x_0 aux ordres indiqués

1. $x \mapsto \ln(\tan(x))$, $x_0 = \pi/4$, ordre 3.
2. $x \mapsto \ln(\cos(x))$, $x_0 = 1$, ordre 3.
3. $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\ln(x)}$, $x_0 = 1$, ordre 2.
4. $x \mapsto e^{\sin(x)}$, $x_0 = \pi/6$, ordre 3.
5. $x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, $x_0 = 1$, ordre 2024.

Correction : Comme en cours, une seule méthode : on pose $h = x - x_0$ ou, ce qui revient au même, $x = x_0 + h$ donc $h \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

1. Cela donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\right)\\
&= \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)+\sin(h)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)-\sin(h)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)+\left(h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&\quad - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)-\left(h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\right) - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\right)\\
&= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\ln\left(1+h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\ln\left(1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= \left(h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(h-\frac{h^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(h)^3-\left[\left(-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(-h-\frac{h^2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}(-h)^3\right]+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&= h-\frac{h^2}{2}-\frac{h^3}{6}-\frac{1}{2}\left(h^2-2\times h\times\frac{h^2}{2}\right)+\frac{h^3}{3}-\left[-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}-\frac{1}{2}\left(h^2+2\times h\times\frac{h^2}{2}\right)-\frac{h^3}{3}\right]+\mathrm{o}\left(x^3\right)\\
&= 2h+\frac{4h^3}{3}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&= 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{4}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

2. De même, posons $x = 1 + h$ donc $h = x - 1$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(\cos(1+h)) \\
&= \ln(\cos(1)\cos(h) - \sin(1)\sin(h)) \\
&= \ln\left(\cos(1)\left(\cos(h) - \frac{\sin(1)}{\cos(1)}\sin(h)\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(\cos(h) - \tan(1)\sin(h)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(1 - \frac{h^2}{2} - \tan(1)\left(h - \frac{h^3}{6}\right) + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \ln\left(1 - \tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6} + \mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= \ln(\cos(1)) + \left[-\tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6}\right] - \frac{1}{2}\left[-\tan(1)h - \frac{h^2}{2}\right]^2 + \frac{1}{3}(-\tan(1)h)^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)h - \frac{h^2}{2} + \frac{\tan(1)h^3}{6} - \frac{1}{2}\left[\tan(1)^2h^2 + 2\tan(1)h \times \frac{h^2}{2}\right] - \frac{\tan(1)^3h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)h - \frac{(1+\tan(1)^2)h^2}{2} + \frac{(-\tan(1) - \tan(1)^3)h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right) \\
&= \ln(\cos(1)) - \tan(1)(x-1) - \frac{(1+\tan(1)^2)(x-1)^2}{2} + \frac{(-\tan(1) - \tan(1)^3)(x-1)^3}{3} + \mathrm{o}\left((x-1)^3\right)
\end{aligned}$$

3. Idem :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+h} - 1}{\ln(1+h)} \\
&= \frac{(1+h)^{1/2} - 1}{\ln(1+h)} \\
&= \frac{1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{16} + \mathrm{o}\left(h^3\right) - 1}{h - \frac{h^2}{2} + \dfrac{h^3}{3} + \mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)}{1 - \frac{h}{2} + \dfrac{h^2}{3} + \mathrm{o}\left(h^2\right)} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 - \left(-\frac{h}{2} + \frac{h^2}{3}\right) + \left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{3} + \frac{h^2}{4} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{h}{8} + \frac{h^2}{16} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{12} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{h}{8} - \frac{h^2}{24} + \mathrm{o}\left(h^2\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{(x-1)}{8} - \frac{(x-1)^2}{24} + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right)
\end{aligned}$$

4. Idem, on pose $x = \pi/6 + h$, $h = x - \pi/6$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{\sin(\pi/6+h)} \\
&= e^{\sin(\pi/6)\cos(h)+\sin(h)\cos(\pi/6)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)+\left(h-\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= e^{\frac{1}{2}+\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= e^{1/2}\times e^{\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\mathrm{o}\left(h^3\right)} \\
&= e^{1/2}\left(1+\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}\right)^2+\frac{1}{6}\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}\left(1+\frac{h\sqrt{3}}{2}-\frac{h^2}{4}-\frac{h^3\sqrt{3}}{12}+\frac{1}{2}\left(\frac{3h^2}{4}-2\times\frac{h\sqrt{3}}{2}\times\frac{h^2}{4}\right)+\frac{h^3\sqrt{3}}{16}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}\left(1+\frac{h\sqrt{3}}{2}+\frac{h^2}{8}-\frac{7h^3\sqrt{3}}{48}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right) \\
&= e^{1/2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)e^{1/2}\sqrt{3}}{2}+\frac{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2 e^{1/2}}{8}-\frac{7\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 e^{1/2}\sqrt{3}}{48}+\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3\right)
\end{aligned}
$$

5. Donnons directement le DL à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = 1+h$, $h = x-1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1+x)-\ln(x) \\
&= \ln(2+h)-\ln(1+h) \\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)-\ln(1+h) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\left(\frac{h}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}h^k}{k}+\mathrm{o}\left(h^n\right) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)h^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left(h^n\right)
\end{aligned}
$$

Ainsi, si on prend $n = 2024$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \ln(2)+\sum_{k=1}^{2024}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)h^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left(h^{2024}\right) \\
&= \ln(2)+\sum_{k=1}^{2024}\frac{(-1)^{k-1}\left(1-2^k\right)(x-1)^k}{2^k\times k}+\mathrm{o}\left((x-1)^{2024}\right)
\end{aligned}
$$

24.2.2 Limites et prolongements

Exercice 21 : ✪✪ Soient $0 < a < b$.

1. Donner les limites en $+\infty$ et en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$$

2. **Remake :** Soient $0 < a < b < c$. Mêmes questions avec $x \mapsto \left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$.

Correction :

1. Puissance variable : exponentielle. Soit $x \neq 0$.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{b^x(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\times x\ln(b)+\frac{1}{x}\times\ln\left(\frac{(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \\ &= e^{\ln(b)+\frac{1}{x}\times\ln\left(\frac{(1+(a/b)^x)}{2}\right)} \end{aligned}$$

Or, $a/b<1$ donc $(a/b)^x = e^{x\ln(a/b)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puisque $\ln(a/b)<0$. Par continuité, le ln ci-dessus tend vers $\ln(1/2)$ et on le multiplie par $1/x$ qui tend vers 0, donc la quantité dans l'exponentielle tend vers $\ln(b)$. Par continuité de l'exponentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{\ln(b)} = b$.

Cherchons maintenant la limite en 0. Posons

$$g(x) = \ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)$$

Plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros : on décompose donc en plusieurs petits calculs.

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(\frac{e^{x\ln(a)}+e^{x\ln(b)}}{2}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+x\ln(a)+1+x\ln(b)+\mathrm{o}\,(x)}{2}\right) \\ &= \ln\left(1+x\left(\frac{1}{2}\ln(a)+\frac{1}{2}\ln(b)\right)+\mathrm{o}\,(x)\right) \\ &= \ln(1+x\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}\,(x)) \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\times g(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\times(x\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}(x))} \\ &= e^{\ln(\sqrt{ab})+\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

ce qui tend vers $e^{\ln(\sqrt{ab})} = \sqrt{ab}$ par continuité de l'exponentielle.

2. De même, cette quantité tend vers c en $+\infty$ et vers $\sqrt[3]{abc} = (abc)^{1/3}$ en 0.

Exercice 22 : ✪✪ Déterminer la limite des quantités suivantes en x_0 :

1. $(\ln(e+x))^{1/x}$, $x_0=0$.
2. $\dfrac{\sin(x)^x-1}{x^x-1}$, $x_0=0$.
3. $\dfrac{\sin(x)^{\sin(x)}-1}{\tan(x)^{\tan(x)}-1}$, $x_0=0$.
4. $\dfrac{1}{xe^x(x+1)}-\dfrac{1}{x\cos(x)}$, $x_0=0$.
5. $\dfrac{(1+x)^{\ln(x)/x}-x}{x\,(x^x-1)}$, $x_0=0$.
6. $\dfrac{\mathrm{sh}(x)+\sin(x)-2x}{x\,(\mathrm{ch}(x)+\cos(x)-2)}$, $x_0=0$.
7. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x^{1/3}-2^{1/3}}$, $x_0=2$.
8. $x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, $x_0=+\infty$.
9. $\dfrac{\sin(x)(\tan(x)-x)}{x^2\ln(1+2x^2)}$, $x_0=0$.
10. $\dfrac{\sin(x)-\tan(x)}{1-x+\ln(1+x)-\cos(x)}$, $x_0=0$.
11. $\dfrac{\sin^{p+q}(x)-1}{(\sin^p(x)-1)\,(\sin^q(x)-1)}$, $x_0=\pi/2$.
12. $(2-x)^{\tan(\pi x/2)}$, $x_0=1$.
13. $\tan(x)^{\sin(x)}$, $x_0=0^+$.

Correction : On appelle à chaque fois la fonction f.

1. $$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln(\ln(e+x))} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\ln(e)+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{x}{e}+\mathrm{o}(x)\right)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{e}+\mathrm{o}(x)\right)} \\ &= e^{1/e+\mathrm{o}(1)} \\ &\xrightarrow[x\to 0]{} e^{1/e} = e^{e^{-1}} \end{aligned}$$
par continuité de l'exponentielle (on arrête de le préciser par la suite).
2. Il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros). Attention, donner la limite du numérateur et du dénominateur ne suffit pas car on peut avoir des formes indéterminées. Notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur. Rappelons que si $u \to 0$ alors $e^u - 1 \sim u$.
$$\begin{aligned} g(x) &= e^{x\ln(\sin(x))} - 1 \\ &= e^{x\ln(x+\mathrm{o}(1))} - 1 \\ &= e^{x\ln(x)+x\ln(1+\mathrm{o}(1))} - 1 \\ &= e^{x\ln(x)+x(\mathrm{o}(1))} - 1 \\ &= e^{x\ln(x)+\mathrm{o}(x)} - 1 \\ &\sim x\ln(x) + \mathrm{o}\left(x\right) \\ &\sim x\ln(x) \end{aligned}$$
et on prouve de même (c'est même encore plus simple car il n'y a pas de DL à faire) que $h(x) \sim x\ln(x)$ si bien que $f(x) \sim 1$ donc tend vers 1.
3. Idem, notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur.
$$\begin{aligned} g(x) &= e^{\sin(x)\ln(\sin(x))} - 1 \\ &= e^{(x+\mathrm{o}(x))\ln(x+\mathrm{o}(x))} - 1 \\ &= e^{(x+\mathrm{o}(x))(\ln(x)+\ln(1+\mathrm{o}(1)))} - 1 \\ &= e^{(x+\mathrm{o}(x))(\ln(x)+\mathrm{o}(1))} - 1 \\ &= e^{x\ln(x)+\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x\ln(x))+\mathrm{o}(x)} - 1 \\ &\sim x\ln(x) + \mathrm{o}\left(x\right) + \mathrm{o}\left(x\ln(x)\right) + \mathrm{o}\left(x\right) \\ &\sim x\ln(x) \end{aligned}$$
et idem pour le dénominateur donc on a encore une fois $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
4. Mettons au même dénominateur (on remarque que x est commun aux deux dénominateurs) :
$$f(x) = \frac{\cos(x) - e^x(x+1)}{xe^x(x+1)\cos(x)}$$
Pour le dénominateur, vu que c'est un produit, c'est très simple, il suffit de donner un équivalent de chaque terme, donc on trouve
$$h(x) \sim x \times 1 \times 1 \times 1 = x$$
Donnons à présent un équivalent du numérateur : il suffit de donner un DL à l'ordre 1.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (1+\mathrm{o}(x)) - (1+x+\mathrm{o}(x))(x+1)\\
&= 1+\mathrm{o}(x) - x - 1 - x^2 - x + \mathrm{o}\left(x^2\right) + \mathrm{o}(x)\\
&= -2x + \mathrm{o}(x)\\
&\sim -2x
\end{aligned}
$$

si bien que $f(x) \sim -2x/x = -2$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -2$.

5. Tout d'abord, on prouve comme au 2 que $x^x - 1 \sim x\ln(x)$ donc $h(x) \sim x^2\ln(x)$. De plus (il faut faire un DL à l'ordre 2 dans le ln sinon on n'a pas une précision suffisante, on obtient $e^{\ln(x)+\mathrm{o}(\ln(x))}$ ce qui ne permet pas d'en donner un équivalent) :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= e^{\frac{\ln(x)}{x}\times\ln(1+x)} - x\\
&= e^{\frac{\ln(x)}{x}\times\left(x-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} - x\\
&= e^{\ln(x)-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))} - x\\
&= x\times e^{-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))} - x\\
&= x\times\left(1-\frac{x\ln(x)}{2}+\mathrm{o}(x\ln(x))\right) - x\\
&\sim -\frac{x^2\ln(x)}{2}
\end{aligned}
$$

si bien que $f(x) \sim -1/2$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$.

6. Faisons un DL en 0. À quel ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x + x - 2x + \mathrm{o}(x)\\
&= \mathrm{o}(x)
\end{aligned}
$$

ce qui ne permet pas de donner un équivalent. Il faut pousser le DL à un ordre plus grand. C'est la même chose à l'ordre 2, à l'ordre 3 etc. Il faut pousser le DL à l'ordre 5, mais on peut difficilement le deviner à l'avance... En faisant un DL à l'ordre 5, on trouve que $g(x) \sim x^5/60$. De même, on trouve en poussant à chaque fois le DL plus loin que $h(x) \sim x^5/12$ si bien que $f(x) \sim 12/60$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/5$.

7. Comme pour les DL, posons $x = 2+h$ donc $h = x-2$.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= (2+h)^{1/2} - \sqrt{2}\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{1/2} - \sqrt{2}\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right) - \sqrt{2}\\
&\sim \frac{h\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}
$$

tandis que

$$
\begin{aligned}
h(x) &= (2+h)^{1/3} - 2^{1/3}\\
&= 2^{1/3}\left(1+\frac{h}{2}\right)^{1/3} - 2^{1/3}\\
&= 2^{1/3}\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right) - 2^{1/3}\\
&\sim \frac{h\times 2^{1/3}}{6}
\end{aligned}
$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2^{1/2}/4}{2^{1/3}/6} \\ &= \frac{3\times 2^{1/6}}{2} \\ &\xrightarrow[x\to 2]{} \frac{3}{2^{5/6}} \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} f(x) &= x - x^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x - x + \frac{1}{2} + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

9. $\sin(x) \sim x$, $\tan(x) - x \sim x^3/3$ et $\ln(1+2x^2) \sim 2x^2$ si bien que

$$f(x) \sim \frac{x\times x^3/3}{x^2\times 2x^2} = \frac{1}{6}$$

donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1/6$.

10. À l'aide d'un DL à l'ordre 3, on trouve que $g(x) \sim -x^3/6$ et $h(x) \sim x^3/3$ donc $f(x) \sim -1/18$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -1/18$.

11. Posons $x = \pi/2 + h$, $h = x - \pi/2$. Puisque $\sin(\pi/2+h) = \cos(h)$, pour tout n :

$$\begin{aligned} \sin^n(x) - 1 &= \cos^n(h) - 1 \\ &= \left(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)^n - 1 \\ &\sim \frac{-nh^2}{2} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{\dfrac{-(p+q)h^2}{2}}{\dfrac{-ph^2}{2}\times\dfrac{-qh^2}{2}} \\ &\sim \frac{-2(p+q)}{pqh^2} \\ &\xrightarrow[h\to 0]{} -\infty \end{aligned}$$

12. Posons $x = 1+h$, $h = x-1$. Précisons que $\tan(\pi/2+u) = \sin(\pi/2+u)/\cos(\pi/2+u) = -1/\tan(u)$. Dès lors :

$$f(x) = e^{\tan(\pi/2+h\pi/2)\ln(1-h)}$$

Si on pose $g(x) = \tan(\pi/2+h\pi/2)\ln(2-x)$, il suffit de donner la limite de g donc un équivalent (même si un équivalent de g ne suffit pas à donner un équivalent de f, il suffit à donner sa limite). Dès lors :

$$\begin{aligned} g(x) &= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{h\pi}{2}\right)\ln(1-h) \\ &= -\frac{1}{\tan(h\pi/2)} \times \ln(1-h) \\ &\sim -\frac{-h}{h\pi/2} \\ &\sim \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

et donc, par continuité de l'exponentielle, $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} e^{2/\pi}$.

13. On montre comme dans le 3 que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.

Exercice 23 : ✪✪ Montrer que les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 et que les prolongements sont de classe $\mathscr{C}^1$:

1. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$
2. $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\text{Arctan(t)}}$

Correction : On pose à chaque fois $f(t)$ la quantité étudiée.

1. Mettons au même dénominateur :

$$f(t) = \frac{\sin(t) - t}{t\sin(t)}$$

Donnons un DL de f à l'ordre 1 (on verra pourquoi dans la suite). On trouve que le numérateur est équivalent à $-t^3/6$ et le dénominateur à t^2 donc $f(t) \sim -t/6$ c'est-à-dire :

$$f(t) = -\frac{t}{6} + \text{o}\,(t)$$

f admet un DL à l'ordre 1 : f est prolongeable en une fonction continue en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée est dérivable (car admet un DL à l'ordre 1) avec $f'(0) = -1/6$ (le coefficient devant t dans le DL). Pour prouver que f est $\mathscr{C}^1$, il suffit de prouver que $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/6$. Soit $t \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t^2} - \frac{-\cos(t)}{\sin^2(t)} \\ &= \frac{-\sin^2(t) + t^2\cos(t)}{t^2\sin^2(t)} \end{aligned}$$

Le dénominateur est équivalent à t^4 et un rapide DL du numérateur à l'ordre 4 nous dit que celui-ci est équivalent à $-t^4/6$ si bien que $f'(t) \sim -1/6$ donc tend vers $-1/6 = f'(0)$: f' est continue en 0 donc f est $\mathscr{C}^1$.

2. Mettons au même dénominateur :

$$f(t) = \frac{\text{Arctan}(t) - t}{t\text{Arctan}(t)}$$

Donnons un DL de f à l'ordre 1 (on verra pourquoi dans la suite). On trouve que le numérateur est équivalent à $-t^3/3$ et le dénominateur à t^2 donc $f(t) \sim -t/3$ c'est-à-dire :

$$f(t) = -\frac{t}{3} + \text{o}\,(t)$$

f admet un DL à l'ordre 1 : f est prolongeable en une fonction continue en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée est dérivable (car admet un DL à l'ordre 1) avec $f'(0) = -1/3$ (le coefficient devant t dans le DL). Pour prouver que f est $\mathscr{C}^1$, il suffit de prouver que $f'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -1/3$. Soit $t \neq 0$. On a :

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{-1}{t^2} - \frac{-1}{(1+t^2)\text{Arctan}^2(t)} \\ &= \frac{-(1+t^2)\text{Arctan}(t) + t^2}{t^2\text{Arctan}^2(t)(1+t^2)} \end{aligned}$$

Le dénominateur est équivalent à t^4 et un rapide DL du numérateur à l'ordre 4 nous dit que celui-ci est équivalent à $-t^4/3$ si bien que $f'(t) \sim -1/3$ donc tend vers $-1/3 = f'(0)$: f' est continue en 0 donc f est $\mathscr{C}^1$.

24.2.3 Équivalents

Exercice 24 : ✪✪ Donner un équivalent simple de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
2. $u_n = \dfrac{\pi}{2} - \text{Arctan}(n)$.
3. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$
4. $u_n = \dfrac{\sin(1/n) + \sin(2/n)}{e^{1/n} - e^{2/n}}$
5. $e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

6. $u_n = \exp(\sin(e^{-n})) - 1$
7. $u_n = \dfrac{\sqrt{1+e^{-n}}-1}{\ln(1+1/2n)}$
8. $u_n = \dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}-2}{\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^3}-1}$
9. $u_n = \left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{n/2} - 1$
10. $u_n = n\tan\left(\dfrac{\pi n}{2n+1}\right)$
11. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$
12. $u_n = \dfrac{\ln(n+1)}{n} - \dfrac{\ln(n)}{n+1}$
13. $u_n = \left(\ln\left(1+e^{-n^2}\right)\right)^{1/n}$
14. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
15. $u_n = n\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$
16. $u_n = \left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)^n$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$ où $\alpha > 0$.
18. $u_n = 3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - \sqrt[3]{3+n^3}$.
19. $u_n = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\times\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
20. $u_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^{1/n}$
21. $u_n = \ln(n) - \dfrac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}}$.
22. $u_n = \sin\left(\cos\left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right) - e^{1/n}\right)$
23. $u_n = 1 - \sqrt[9]{1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{n}}\ln\left(1+\sin^2\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right)}$.
24. $u_n = \dfrac{n\sin(1/\sqrt{n})\mathrm{Arctan}(n!)}{\sqrt[4]{n^6+n^5}-n\sqrt{n}}$.

Correction :

1.
$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

2. On se souvient que $u_n = \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Puisqu'on ne peut pas soustraire des équivalents, on fait un DL. Les $1/n$ se compensent donc on fait un DL à l'ordre 3 ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \left(\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \frac{-1}{2n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &\sim \frac{-1}{2n^3} \end{aligned}$$

4. On prouve de même, avec un DL à l'ordre 1, que le numérateur est équivalent à $3/n$, et avec un DL à l'ordre 1, que le dénominateur est équivalent à $-1/n$ donc $u_n \sim -3$.

5.
$$\begin{aligned} u_n &= e - \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - \exp\left(n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= e - \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - e\times\exp\left(-\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e - e\times\left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &\sim \frac{e}{2n} \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} u_n &= e^{e^{-n}+\mathrm{o}\left(e^{-n}\right)} - 1 \\ &= 1 + e^{-n} + \mathrm{o}\left(e^{-n}\right) - 1 \\ &\sim e^{-n} \end{aligned}$$

7. Notons v_n le numérateur et w_n le dénominateur (c'est ce qu'on fera dans la suite quand il y aura une fraction). Alors $w_n \sim 1/2n$ et
$$\begin{aligned} v_n &= \left(1+e^{-n}\right)^{1/2} - 1 \\ &= 1 + \frac{e^{-n}}{2} + \mathrm{o}\left(e^{-n}\right) - 1 \\ &\sim \frac{e^{-n}}{2} \end{aligned}$$
si bien que $u_n \sim ne^{-n}$.

8. Tout d'abord :
$$\begin{aligned} v_n &= 2\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{1/2} - 2 \\ &= 2\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 2 \\ &\sim \frac{1}{4n} \end{aligned}$$
et ensuite
$$\begin{aligned} w_n &= \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3/2} - 1 \\ &= \left(1+\frac{3}{2}\times\frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1 \\ &\sim \frac{3}{4n} \end{aligned}$$
et donc $u_n \sim 1/3$.

9.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{n}{2}\ln(n^2+1)-\frac{n}{2}\ln(n^2-1)}-1\\
&= e^{\frac{n}{2}\ln(n^2)+\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\frac{n}{2}\ln(n^2)-\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}-1\\
&= e^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-\frac{n}{2}\left(-\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}-1\\
&= e^{\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)}-1\\
&= 1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)-1\\
&\sim \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

10. Rappelons que $\tan(\pi/2-x)=1/\tan(x)$.

$$\begin{aligned}
u_n &= n\tan\left(\frac{\pi n}{2n}\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n}}\right)\\
&= n\tan\left(\frac{\pi}{2}\times\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= n\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{n}{\tan(\pi/4n+\mathrm{o}\,(1/n))}\\
&\sim \frac{n}{\pi/4n}\\
&\sim \frac{4n^2}{\pi}
\end{aligned}$$

11. $u_n=e^{n\ln(n+1)-n\ln(2)}$. Comme d'habitude, factorisons par le terme dominant dans le ln et faisons un DL (car $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :

$$u_n=e^{n\ln(n)+n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n\ln(2)}=e^{n\ln(n)+n\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-n\ln(2)}=e^{n\ln\left(\frac{n}{2}\right)+1+\mathrm{o}(1)}=e\times\left(\frac{n}{2}\right)^n\times e^{\mathrm{o}(1)}$$

et puisque $e^{\mathrm{o}(1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, $u_n\sim e\times\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$. Remarquons que u_n n'est pas équivalent à $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ alors que $\dfrac{n+1}{2}\sim\dfrac{n}{2}$: puisqu'on vous dit que l'équivalent ne passe pas à la puissance variable !

12. Les deux termes sont équivalents à $\dfrac{\ln(n)}{n}$ mais cela ne nous avance pas beaucoup : d'une part, on ne peut pas sommer les équivalents, d'autre part, on ne peut pas dire qu'une quantité est équivalente à 0. On fait donc un DL du ln et de $\dfrac{1}{1+x}$ et pour cela on factorise à chaque fois par n (et on utilise le fait que $\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$) :

$$u_n=\frac{\ln(n)+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n}-\frac{\ln(n)}{n}\times\frac{1}{1+1/n}=\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\dfrac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n}-\frac{\ln(n)}{n}\times\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

En développant, il vient : $u_n=\dfrac{\ln(n)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)+\dfrac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\sim\dfrac{\ln(n)}{n^2}$ car tous les autres termes sont négligeables.

13.
$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(1+e^{-n^2}))} \\
&= e^{\frac{1}{n}\ln\left(e^{-n^2}+\mathrm{o}\left(e^{-n^2}\right)\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\times\left(\ln(e^{-n^2})+\ln(1+\mathrm{o}(1))\right)} \\
&= e^{\frac{1}{n}\times(-n^2+\mathrm{o}(1))} \\
&= e^{-n+\mathrm{o}(1/n)} \\
&= e^{-n}\times e^{\mathrm{o}(1/n)}
\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{o}\left(1/n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et l'exponentielle est continue donc son exponentielle tend vers $e^0=1$ si bien que $u_n\sim e^{-n}$.

14. Bien sûr, on n'affirme pas que $u_n\sim\sin(n\pi)=0\dots$ Factorisons par n^2 dans la racine et utilisons le DL de $(1+x)^\alpha$ (possible car $1/n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :

$$u_n=\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right)=\sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(n\pi+x)=(-1)^n\sin(x)$: on a le sinus d'une quantité qui tend alors vers 0 et on utilise l'équivalent usuel $\sin(u)\sim u$ au voisinage de 0 :

$$u_n=(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sim\frac{(-1)^n\pi}{2n}$$

15. Puisque $\sqrt[n]{n}=n^{1/n}$, il vient : $u_n=n\left(e^{\frac{\ln(n)}{n}}-1\right)$. Or, au voisinage de 0, $e^u-1\sim u$ (et $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées) donc $u_n\sim n\times\dfrac{\ln(n)}{n}=\ln(n)$.

16.
$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(n^3\left(1+\frac{1}{n}-1+\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(2n^2+\mathrm{o}\left(n^2\right)\right)} \\
&= e^{n\ln(2n^2)+n\ln(1+\mathrm{o}(1))} \\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+n\mathrm{o}(1)} \\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+\mathrm{o}(n)}
\end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure car on ne connaît pas la limite du $\mathrm{o}\left(n\right)$. Il faut donner un DL à un ordre plus grand, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(n^3\left(e^{1/n}-e^{-1/n}\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(n^3\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(2n^2+\mathrm{o}(n)\right)} \\
&= e^{n\ln(2n^2)+n\ln(1+\mathrm{o}(1/n))} \\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+n\mathrm{o}(1/n)} \\
&= e^{2n\ln(n)+n\ln(2)+\mathrm{o}(1)} \\
&= n^{2n}\times 2^n\times e^{\mathrm{o}(1)}
\end{aligned}$$

et puisque $e^{\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, on peut en déduire que $u_n\sim n^{2n}\times 2^n$.

17. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de ces termes, on ne peut pas faire de DL : la seule chose à faire est de mettre au même dénominateur : $u_n = \dfrac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{n^\alpha (n+1)^\alpha}$. On a un quotient : on donne un équivalent du dénominateur et du numérateur. Le dénominateur est équivalent à $n^\alpha \times n^\alpha = n^{2\alpha}$ car l'équivalent passe au produit et à la puissance fixe. Pour le numérateur, on factorise par le terme dominant et on fait le DL de $(1+x)^\alpha$ avec $x = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$(n+1)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha - n^\alpha = n^\alpha \times \left(1 + \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^\alpha = \alpha n^{\alpha-1} + \mathrm{o}\left(n^{\alpha-1}\right) \sim \alpha n^{\alpha - 1}$$

et finalement $u_n \sim \dfrac{\alpha n^{\alpha-1}}{n^{2\alpha}} = \dfrac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$.

18. $n^{-3/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire un DL du cos, et factorisons par n^3 dans le dernier terme pour nous ramener à $(1+x)^{1/3}$ avec x qui tend vers 0. À quel ordre faire les DL : dans le doute, donnons deux termes à chaque fois, c'est-à-dire faisons un DL du cos à l'ordre 2 et celui de $(1+x)^{1/3}$ à l'ordre 1, nous verrons bien :

$$\begin{aligned} u_n &= 3n - 2n\cos\left(n^{-3/2}\right) - n\sqrt[3]{1 + \frac{3}{n^3}} \\ &= 3n - 2n\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure. Il faut donc faire des DL à des ordres plus grands, ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= 3n - 2n\left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{n^3} + \frac{1}{4!} \times \frac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) - n \times \left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{3}{n^3} - \frac{1}{9} \times \left(\frac{3}{n^3}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) \\ &= \frac{11}{12n^5} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right) \sim \frac{11}{12n^5} \end{aligned}$$

19. Faisons un DL du ln (avec $u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). À quel ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 + \mathrm{o}(1) + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \mathrm{o}(1) - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure. Pourquoi ? Car les deux termes $\mathrm{o}(1)$ et $-1/2n$ tendent vers 0, mais on ne sait pas lequel des deux est prépondérant, ou (ce qui revient au même) lequel est négligeable devant l'autre, et donc, tout ce que l'on peut affirmer est que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Puisque l'on n'a pas assez d'informations, on fait un DL à un ordre plus grand. Essayons à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on ne peut pas conclure pour les mêmes raisons : le $\mathrm{o}(1/n)$ et le $1/4n^2$ sont tous les deux négligeables devant $1/n$ et « on ne sait pas qui gagne » : tout ce que l'on peut affirmer est que $u_n = \mathrm{o}(1/n)$. Rebelote, on augmente l'ordre du DL, on fait un DL à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{6n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned}$$

Donc $u_n \sim -1/12n^2$. En effet, tous les autres termes sont négligeables devant $1/n^2$.

20.
$$\begin{aligned} u_n &= e^{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}-\sqrt{n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\left(\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)} \end{aligned}$$

La quantité dans l'exponentielle tend vers 0 donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_n \sim 1$.

21. Le numérateur de la fraction est équivalent à $5n^2$, et puisque $u = 2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors on peut faire un DL de l'exponentielle à l'ordre 1 ce qui donne

$$1 - e^{2/n} = 1 - \left(1 + \frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{2}{n}$$

D'où

$$\frac{5n^2+3n+1}{1-e^{2/n}} \sim \frac{5n^2}{-\frac{2}{n}} = -\frac{5n^3}{2}$$

Attention, on ne peut pas sommer les équivalents, on écrit donc ceci avec un o () ce qui donne

$$u_n = \ln(n) + \frac{5n^3}{2} + \mathrm{o}\left(n^3\right) \sim \frac{5n^3}{2}$$

22. Notons a_n la quantité dans le sinus (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros).

$$\begin{aligned} a_n &= 1 - \frac{1}{2\ln(n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2\ln(n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln(n)^2}\right) - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\sim -\frac{1}{2\ln(n)^2} \end{aligned}$$

et puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n = \sin(a_n) \sim a_n \sim -1/2\ln(n)^2$.

23. Puisque $u = 1/\sqrt[3]{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

et puisque l'équivalent passe à la puissance fixe,

$$\sin^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \sim \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \frac{1}{n^{2/3}}$$

Cependant, l'équivalent ne passe pas à la fonction continue : on le réécrit avec un o (). On fait ensuite successivement un DL de $\ln(1+u)$ et $(1+u)^{1/9}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} u_n &= 1 - \sqrt[9]{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{n^{2/3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)} \\ &= 1 - \sqrt[9]{1 + \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \times \left(\frac{1}{n^{2/3}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2/3}}\right)\right)} \\ &= 1 - \sqrt[9]{1 + \frac{1}{n^{5/6}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)} \\ &= 1 - \left(1 + \frac{1}{9n^{5/6}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/6}}\right)\right) \end{aligned}$$

En conclusion : $u_n \sim \dfrac{-1}{9n^{5/6}}$.

24. Tout d'abord, puisque $1/\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sin(1/\sqrt{n}) \sim 1/\sqrt{n}$ et puisque $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\mathrm{Arctan}(n!) \sim \pi/2$. Donnons à présent un équivalent du dénominateur, qu'on note v_n.

$$\begin{aligned} v_n &= \sqrt[4]{n^6+n^5} - n\sqrt{n} \\ &= \sqrt[4]{n^6\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\sqrt{n} \\ &= \sqrt[4]{n^6} \times \sqrt[4]{1+\frac{1}{n}} - n\sqrt{n} \\ &= n^{3/2} \times \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/4} - n^{3/2} \\ &= n^{3/2} \times \left(1+\frac{1}{4n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - n^{3/2} \\ &= \frac{n^{1/2}}{4} + \mathrm{o}\left(n^{1/2}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $v_n \sim \sqrt{n}/4$. De cela on en déduit que

$$u_n \sim \frac{n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{\pi}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{4}} = 2\pi$$

Exercice 25 : ✪✪ Donner un équivalent simple en x_0 des quantités suivantes :

1. $f(x) = \ln(\cos(x))$, $x_0 = 0$.
2. $f(x) = \sin(3x) - \tan(x)$, $x_0 = 0$.
3. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2}$, $x_0 = +\infty$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
5. $f(x) = \ln\left(4x^4 - 2\cos(x) + 3\right)$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
6. $f(x) = \dfrac{x\mathrm{Arctan}(2x)\left(\sqrt[5]{1+3x}-1\right)}{1+x^2-\cos\left(\sqrt{x}\right)}$, $x_0 = 0$ puis $x_0 = +\infty$.
7. $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin(x^3)}} - e}{3\tan(x) - 3x - x^3}$, $x_0 = 0$.
8. $f(x) = (8+x)^{1/3} - 2$, $x_0 = 0$.
9. $f(x) = \ln(\mathrm{sh}(x)/x)$, $x_0 = +\infty$.
10. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right)$, $x_0 = +\infty$.
11. $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{4+x}\right) - \ln(3)$, $x_0 = 0$.
12. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x})$, $x_0 = +\infty$.
13. $f(x) = \ln(3e^x + e^{-x}) - 2\ln(2)$, $x_0 = 0$.
14. $f(x) = (x+1)^{1/x} - x^{1/x}$, $x_0 = +\infty$.
15. $f(x) = x^{x^{1/x}}$, $x_0 = +\infty$.
16. $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = \pi$.
17. $f(x) = 1 + \cos(x)$, $x_0 = \pi$.
18. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}$, $x_0 = -1$.
19. $f(x) = x^x - 4$, $x_0 = 2$.
20. $f(x) = x^x - x$, $x_0 = 1$.
21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$, $x_0 = 0$.
22. $f(x) = e^x - x^e$, $x_0 = e$.

Correction :

1. $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \sim -\dfrac{x^2}{2}$.
2. $f(x) = 3x - x + \mathrm{o}(x) \sim 2x$.
3. Chacun des termes étant équivalent à $\sqrt{x}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x} + \mathrm{o}\left(\sqrt{x}\right) \\ &\sim \sqrt{x} \end{aligned}$$

4. Au voisinage de 0, $1/x$ est négligeable devant $1/x^2$ donc $f(x) \sim 1/x^2$, et c'est le contraire en $+\infty$, où $f(x) \sim 1/x$.
5. Au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(4x^4 - 2\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) + 3\right) \\ &= \ln\left(1 + x^2 + 4x^4 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\ &\sim x^2 \end{aligned}$$

et au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(4x^4) + \ln\left(1 - \frac{2\cos(x)}{4x^4} + \frac{3}{4x^4}\right) \\ &= \ln(4) + 4\ln(x) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &\sim 4\ln(x) \end{aligned}$$

6. Là aussi, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur. Notons $g(x)$ le numérateur et $h(x)$ le dénominateur. Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{Arctan}(2x) \sim \pi/2$, $(1+3x)^{1/5} \sim (3x)^{1/5}$ donc

$$(1+3x)^{1/5} - 1 = (3x)^{1/5} + \mathrm{o}\left(x^{1/5}\right) - 1 \sim (3x)^{1/5}$$

Finalement, $g(x) \sim x \times (\pi/2) \times (3x)^{1/5}$ et $h(x) \sim x^2$ (les autres termes sont négligeables) donc

$$f(x) \sim \frac{x(\pi/2)(3x)^{1/5}}{x^2} = \frac{\pi \times 3^{1/5}}{2 \times x^{4/5}}$$

Plaçons-nous à présent au voisinage de 0. $\mathrm{Arctan}(2x) \sim 2x$ et

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{1+3x} - 1 &= (1+3x)^{1/5} - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{5} \times 3x + \mathrm{o}\left(x\right) - 1 \\ &\sim \frac{3x}{5} \end{aligned}$$

donc $g(x) \sim 6x^3/5$. De plus, $h(x) = 1 + x^2 - (1 - x/2 + \mathrm{o}\left(x\right)) \sim x/2$ donc $f(x) \sim 12x^2/5$.

7. Tout d'abord, $h(x) = 3\left(x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) - 3x - x^3 \sim 2x^5/5$. De plus,

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{(1+x^3)^{1/2}} - e \\ &= e^{1+x^3/2+\mathrm{o}\left(x^3\right)} - e \\ &= e \times e^{x^3/2+\mathrm{o}\left(x^3\right)} - e \\ &= e\left(1 + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) - e \\ &\sim \frac{ex^3}{2} \end{aligned}$$

donc $f(x) \sim 5e/4x^2$.

8.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\left(1 + \frac{x}{8}\right)^{1/3} - 2 \\ &= 2\left(1 + \frac{1}{3} \times \frac{x}{8} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) - 2 \\ &\sim \frac{x}{12} \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) - \ln(x) \\ &= \ln(e^x) + \ln(1-e^{-2x}) - \ln(2) - \ln(x) \\ &= x + \ln(1-e^{-2x}) - \ln(2) - \ln(x) \\ &\sim x \end{aligned}$$

10. Au voisinage de $+\infty$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{\sqrt{4+x}}{x}\right) \\ &= \ln(x) + \mathrm{o}\left(1\right) \\ &\sim \ln(x) \end{aligned}$$

11. Au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(1 + x + 2\left(1+\frac{x}{4}\right)^{1/2}\right) - \ln(3) \\ &= \ln\left(1 + x + 2\left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{x}{4} + \mathrm{o}\left(x\right)\right)\right) - \ln(3) \\ &= \ln\left(3 + \frac{5x}{4} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) - \ln(3) \\ &= \ln(3) + \ln\left(1 + \frac{5x}{12} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) - \ln(3) \\ &\sim \frac{5x}{12} \end{aligned}$$

12. Au voisinage de $+\infty$:
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^x) + \ln(3 + e^{-2x}) \\ &= x + \mathrm{o}\left(x\right) \\ &\sim x \end{aligned}$$

13. Au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3(1+x) + 1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)) - \ln(4) \\ &= \ln(4 + 2x + \mathrm{o}\left(x\right)) - \ln(4) \\ &= \ln(4) + \ln\left(1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}\left(x\right)\right) - \ln(4) \\ &\sim \frac{x}{2} \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\left(\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \times e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \\ &= e^{\frac{1}{x}\ln(x)} \times \left[e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} - 1\right] \end{aligned}$$

Or, $\ln(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc la première exponentielle est équivalente à 1, et le crochet est équivalent à

$$\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x^2}$$

si bien que $f(x)\sim 1/x^2$.

15. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^{1/x}\ln(x)} \\ &= e^{e^{\frac{1}{x}\ln(x)}\times\ln(x)} \\ &= e^{\left(1+\frac{\ln(x)}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right)\ln(x)} \\ &= e^{\ln(x)+\mathrm{o}(1)} \\ &\sim x \end{aligned}$$

puisque $e^{\mathrm{o}(1)}\sim 1$.

16. Comme d'habitude, posons $x=\pi+h$, $h=x-\pi$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi+h) \\ &= -\sin(h) \\ &\sim -h \\ &\sim \pi-x \end{aligned}$$

17. Idem :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1+\cos(\pi+h) \\ &= 1-\cos(h) \\ &\sim \frac{h^2}{2} \\ &\sim \frac{(\pi-x)^2}{2} \end{aligned}$$

18. On pose $x=-1+h$, $h=x+1$.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+(-1+h)^3)^{-1/3} \\ &= (1+(-1)^3\times(1-h)^3)^{-1/3} \\ &= (1-(1-3h+\mathrm{o}\,(h)))^{-1/3} \\ &\sim (3h)^{-1/3} \\ &\sim \frac{1}{3^{1/3}(x+1)^{1/3}} \end{aligned}$$

19. On pose $x=2+h$, $h=x-2$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(x)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\ln(2+h)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\times\left(\ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\right)} - 4 \\
&= e^{(2+h)\times\left(\ln(2)+\frac{h}{2}+\mathrm{o}(h)\right)} - 4 \\
&= e^{2\ln(2)+h+h\ln(2)+\mathrm{o}(h)} - 4 \\
&= e^{2\ln(2)} \times e^{h(1+\ln(2))+\mathrm{o}(h)} - 4 \\
&= 4\left(e^{h(1+\ln(2))+\mathrm{o}(h)} - 1\right) \\
&\sim 4h(1+\ln(2)) \\
&\sim 4(x-2)(1+\ln(2)) \\
&\sim (x-2)(4+\ln(16))
\end{aligned}
$$

20. Posons $x = 1+h$, $h = x-1$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\ln(x)} - x \\
&= e^{(1+h)\ln(1+h)} - (1+h) \\
&= e^{(1+h)(h+\mathrm{o}(h))} - (1+h) \\
&= e^{h+h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)} - (1+h) \\
&= \left(1+h+h^2+\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right) - (1+h) \\
&\sim \frac{3h^2}{2} \\
&\sim \frac{3(x-1)^2}{2}
\end{aligned}
$$

21.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{x} - \sqrt{x}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&\sim \frac{x^{5/2}}{12}
\end{aligned}
$$

22. Posons $x = e+h$, $h = x-e$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^x - e^{e\ln(x)} \\
&= e^{e+h} - e^{e\ln(e+h)} \\
&= e^{e+h} - e^{e\ln(e)+e\ln\left(1+\frac{h}{e}\right)} \\
&= e^{e+h} - e^{e+e\left(\frac{h}{e} - \dfrac{h^2}{2e^2} + \mathrm{o}\left(h^2\right)\right)} \\
&= e^{e+h} - e^{e+h-\dfrac{h^2}{2e} + \mathrm{o}\left(h^2\right)} \\
&= e^{e+h}\left(1 - e^{-h^2/2e+\mathrm{o}\left(h^2\right)}\right) \\
&\sim e^{e+h} \times \frac{h^2}{2e} \\
&\sim e^{e-1} \times \frac{h^2}{2} \\
&\sim e^{e-1} \times \frac{(x-e)^2}{2}
\end{aligned}$$

24.3 DL en pratique

Exercice 26 : ✪ La fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Correction : Notons cette fonction f. $u = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{1 - \dfrac{(\sqrt{x})^2}{2} + \mathrm{o}\left((\sqrt{x})^2\right) - 1}{x} \\
&= \frac{-\dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)}{x} \\
&= -\frac{1}{2} + \mathrm{o}(1) \\
&\xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc f est dérivable à droite (puisque f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$) en 0 et $f'(0) = -1/2$.

Exercice 27 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) - 2f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{-1}{n}\right)$$

1. Montrer que (u_n) converge et donner sa limite.
2. On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$, que $f'(0) = 0 \neq f''(0)$. Donner un équivalent de u_n.

Correction :

1. f étant continue, tous les termes dans u_n tendent vers $f(0)$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) - 2f(0) + f(0) = 0$.
2. Rappelons que dire qu'une suite est équivalente à 0 est passible de châtiments corporels. f étant $\mathscr{C}^2$, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 2 donné par :

$$f(x) = f(0) + \frac{f''(0)x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

puisque $f'(0) = 0$. Puisque $1/n, 2N$ et $-1/n$ tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned}
u_n &= f(0)+\frac{f''(0)}{2n^2}-2\times\left(f(0)+\frac{4f''(0)}{2n^2}\right)+f(0)+\frac{f''(0)}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \frac{-3f''(0)}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\sim \frac{-3f''(0)}{n^2}
\end{aligned}$$

Exercice 28 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-\sigma^2$. Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\sigma^2t^2/2}$$

Correction : D'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 2 donné par :

$$f(x)=1-\frac{\sigma^2x^2}{2}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Soit $t\in\mathbb{R}$. $t/\sqrt{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc on peut faire un DL de f (t est fixé, c'est n qui varie) :

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n &= e^{n\ln\left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(1-\frac{\sigma^2t^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= e^{n\left(-\frac{\sigma^2x^2}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= e^{-\frac{\sigma^2x^2}{2}+\mathrm{o}(1)}\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\sigma^2/2}
\end{aligned}$$

par continuité de l'exponentielle.

Exercice 29 : ✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^3$. Calculer

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3h)-3f(2h)+3f(h)-f(0)}{h^3}$$

Correction : f est $\mathscr{C}^3$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre 3 donné par

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{f''(0)u^2}{2}+\frac{f'''(0)u^3}{6}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
f(3h)-3f(2h)+3f(h)-f(0) &= f(0)+3f'(0)h+\frac{f''(0)9h^2}{2}+\frac{f'''(0)27h^3}{6}-3\left(f(0)+2f'(0)h+\frac{f''(0)4h^2}{2}+\frac{f'''(0)8h}{6}\right)\\
&\quad +3\left(f(0)+f'(0)h+\frac{f''(0)h^2}{2}+\frac{f'''(0)h^3}{6}\right)-f(0)+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&= h^3+\mathrm{o}\left(h^3\right)\\
&\sim h^3
\end{aligned}$$

donc la limite cherchée vaut 1.

Exercice 30 : ✪ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x^n}\xrightarrow[x\to0]{}0$ si et seulement si $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n)}(0)$.

Correction : f étant $\mathscr{C}^n$, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\mathrm{o}\left(x^n\right)$$

$f(x)/x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si et seulement si $f(x) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ si et seulement si les coefficients du DL de f sont tous nuls (par unicité du DL) ce qui permet de conclure.

Exercice 31 : ✪

1. Soit $f : x \mapsto \sin(x) \times \mathrm{ch}(\mathrm{Arctan}(x))$. Donner les dérivées de f en 0 jusqu'à l'ordre 6.
2. **Remake :** Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ en moins de 15 secondes.

Correction :

1. Donnons le DL de f à l'ordre 6. Comme d'habitude, donnons le DL du sin à l'ordre 6 et le DL du ch à l'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \mathrm{ch}\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{1}{4!}(x)^4 + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right]\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{1}{2}\left(x^2 - 2\times x \times \frac{x^3}{3}\right)^2 + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right]\\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)\right) \times \left[1 + \frac{x^2}{2} - \frac{7x^4}{24} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right]\\
&= x + \frac{x^3}{3} - \frac{11x^5}{30} + \mathrm{o}\left(x^6\right)
\end{aligned}$$

   Or, f est $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young, et son DL à l'ordre 6 est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{6} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{24} + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{120} + \frac{f^{(6)}(0)x^6}{120} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

   Par unicité du DL : $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f^{(3)}(0)/6 = 1/3$ donc $f^{(3)}(0) = 2$ et $f^{(5)}(0)/120 = -11/30$ donc $f^{(5)}(0) = -44$.

2. $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2k}\right)\right)\\
&= x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots + (-1)^k x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2k+1}\right)
\end{aligned}$$

   f étant $\mathscr{C}^\infty$, de même, son DL est donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)}{6} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

   Par unicité du DL, $f^{(n)}(0) = 0$ si n est pair, et si n est impair, il existe k tel que $n = 2k+1$ si bien que $f^{(n)}(0)/n = f^{(2k+1)}(0)/(2k+1)! = (-1)^k$ donc $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k+1)!$.

Exercice 32 : ✪ Montrer que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction : Soit $n \geq 1$. Notons u_n le membre de gauche. On a :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n^2+3n+2} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} + \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{2}{n^2}}$$

On a deux fractions du type $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u \to 0$: faisons un DL. Question : à quel ordre. On veut du $1/n^2$ à la fin, et on va multiplier par $1/n$ dans le premier cas, et par $1/n^2$ dans le second : il suffit donc d'un $\mathrm{o}\left(1/n\right)$ dans le premier cas, il sera multiplié par $1/n$, et d'un $\mathrm{o}\left(1\right)$ dans le second, il sera multiplié par $1/n^2$. En d'autres termes, on fait un DL à l'ordre 1 dans le premier cas, et à l'ordre 2 dans le second :

$$u_n = \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n^2} \times (1 + \mathrm{o}(1)) = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 33 : ✪ Soit (u_n) une suite à valeurs dans $]-1\,;+\infty[$ telle que $u_n = \mathrm{o}(\sqrt{n})$. Montrer que $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.

Correction : $u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire un DL du ln :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{u_n}{n}\right)} \\
&= e^{n\left(\frac{u_n}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{u_n+\mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n}\right)} \\
&= e^{u_n} \times e^{\mathrm{O}\left(\frac{{u_n}^2}{n}\right)}
\end{aligned}$$

Or, ${u_n}^2/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le $\mathrm{O}\,()$ tend vers 0 (dominée par une suite qui tend vers 0 implique que la suite tend vers 0) donc, par continuité de l'exponentielle, la deuxième exponentielle tend vers 1 ce qui permet de conclure.

Exercice 34 : ✪✪ Déterminer les ordres maximaux auxquels les fonctions suivantes admettent un DL en 0 :

1. $x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $x \mapsto x^{13/3}$.
3. $x \mapsto |x|^n$ (où $n \geq 1$).

Correction :

1. f est continue non dérivable donc admet un DL à l'ordre 0 mais pas à l'ordre 1.
2. $f(x) = \mathrm{o}\left(x^4\right)$ puisque $f(x)/x^4 = x^{1/3} \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc f admet un DL à l'ordre 4. Si f admet un DL à l'ordre 5, alors il existe a_5 tel que $f(x) = a_5x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$ (les coefficients précédents sont nuls) donc $f(x)/x^5 \xrightarrow[x\to0]{} a_5 \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde puisque $f(x)/x^5 = 1/x^{2/3} \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$.
3. Si n est pair alors $f(x) = x^n$ donc f est $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un DL à tout ordre. Supposons n impair. Soit $x > 0$. Alors $f(x) = x^n$ donc $f(x)/x^{n-1} = x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$. De plus, si $x < 0$, $f(x) = -x^n$ car n est impair donc $f(x)/x^{n-1} = -x \xrightarrow[x\to0^-]{} 0$. $x \mapsto f(x)/x^{n-1}$ admet une limite à gauche et à droite en 0 égales à 0 donc $f(x)/x^{n-1} \xrightarrow[x\to0]{} 0$. En d'autres termes, $f(x) = \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$ donc f admet un DL (au moins) à l'ordre $n-1$. Si f admet un DL à l'ordre n, alors il existe a_n tel que $f(x) = a_nx^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$ (les autres coefficients sont nuls d'après ce qui précède) donc $f(x)/x^n \xrightarrow[x\to0]{} a_n$. Cependant, on montre de même que $f(x)/x^n \xrightarrow[x\to0^+]{} 1$ et que $f(x)/x^n \xrightarrow[x\to0^-]{} -1$ donc $x \mapsto f(x)/x^n$ n'a pas de limite en 0 ce qui est absurde. Dès lors, l'ordre maximal auquel f admet un DL en 0 est $n-1$.

Exercice 35 : ✪✪

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right)$. Montrer que f admet un DL à tout ordre que l'on explicitera alors qu'elle n'est pas dérivable deux fois en 0.
2. Deux fonctions admettant un DL à tout ordre dont les DL ont les mêmes coefficients sont-elles égales, au moins sur un voisinage de 0 ?

Correction :

1. Tout d'abord, pour tout n,

$$\left|\frac{f(x)}{x^n}\right| \leq \frac{1}{x^n}e^{-1/x}$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{1}{x^n}e^{-1/x} \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x)/x^n \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ donc $f(x) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$ i.e. f admet un DL à l'ordre n (dont tous les coefficients sont nuls). n étant quelconque, f admet un DL à tout ordre. En particulier, f admet un DL à l'ordre 1 donc est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$ (léger abus de langage : f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et f ainsi prolongée admet un DL à l'ordre 1 donc f ainsi prolongée est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$). Cependant, prouvons que f n'est pas dérivable deux fois en 0. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^2}e^{1/x}e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^2}\sin\left(e^{1/x}\right) \end{aligned}$$

Puisque $f'(0) = 0$, le taux d'accroissement de f' en 0 vaut :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \frac{1}{x^3}e^{-1/x} \times \sin\left(e^{1/x}\right) - \frac{1}{x^3}\cos\left(e^{1/x}\right)$$

quantité qui n'a pas de limite en 0 (idem que dans le chapitre 13 : s'intéresser aux suites de terme général $u_n = 1/\ln(2n\pi)$ et $v_n = 1/\ln(2n\pi + \pi/2)$) donc f n'est pas dérivable deux fois. Comme on l'a dit en classe : l'équivalence entre « admettre un DL à l'ordre n » et « être dérivable n fois » n'est plus valable si $n \geq 2$!

2. Non : la fonction nulle et la fonction f de la question précédente ont le même DL (tous les coefficients sont nuls) mais ne sont pas égales, même sur un voisinage de 0 car, aussi près qu'on soit de 0, il existe x tel que $f(x) \neq 0$ (s'intéresser à la suite de terme général $u_n = 1/\ln(2n\pi + \pi/2)$).

Exercice 36 - DL d'Arcsin : ✪✪

1. Montrer que le DL en 0 à l'ordre n de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

2. En déduire le DL d'Arcsin à l'ordre $2n+1$.
3. Donner le DL d'Arcsin à l'ordre 5.

Correction :

1. En utilisant le DL de $(1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -1/2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2k-1)}{2^k k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \cdots \times (2k-1) \times 2k}{2^k k! 2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2k-2) \times 2k}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^k k! \times 2^k k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. En appliquant la question précédente avec $u = -x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}(-x^2)^k + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \end{aligned}$$

Par primitivation des DL :

$$\begin{aligned} \mathrm{Arcsin}(x) &= \mathrm{Arcsin}(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k \times (2k+1)}\binom{2k}{k}x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k \times (2k+1)}\binom{2k}{k}x^{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

3. En particulier :

$$\text{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \text{o}\left(x^5\right)$$

Exercice 37 - « Dérivation d'un développement limité » : ✪✪

1. Donner un exemple de fonction f admettant un DL à l'ordre 2 tel que f' n'admette pas de DL à l'ordre 1.
2. Soit $n \geq 1$. Supposons que f admette un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \text{o}\left(x^n\right)$$

On suppose également que f' admette un DL à l'ordre $n-1$. Montrer que ce DL est :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \text{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Comment expliquer le paradoxe entre les deux questions ?

Correction :

1. cf. cours : $f : x \mapsto x^3 \sin(1/x)$ prolongée en 0 admet un DL à l'ordre 2 mais f' n'est pas dérivable donc n'admet pas de DL à l'ordre 1.
2. Notons

$$f'(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \text{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Rappelons qu'on peut primitiver les DL (cf. cours) donc le DL de f est :

$$f'(x) = f(0) + b_0 x + \frac{b_1 x^2}{2} + \frac{b_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{b_{n-1} x^n}{n} + \text{o}\left(x^n\right)$$

Par unicité du DL, $b_0 = a_1$, $b_1/2 = a_2$, $b_2/3 = a_3$ et ainsi de suite jusque $b_{n-1}/n = a_n$ ce qui permet de conclure. En fait, on peut dériver les DL, mais uniquement SI ON SAIT DÉJÀ QUE f' ADMET UN DL (par exemple si f est $\mathscr{C}^\infty$ donc f' admet un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young).

Exercice 38 : ✪✪ Donner un développement asymptotique à cinq termes en 0 de

$$f : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t}\,\text{d}t$$

On pourra s'intéresser (après l'avoir correctement définie et après avoir justifié son existence) à l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\,\text{d}t$$

qu'on ne cherchera pas à calculer !

Correction : Soit $x > 0$, posons $g(x) = f(x) - \ln(x)$ si bien que

$$g(x) = \int_1^x \frac{e^t - 1}{t}\,\text{d}t$$

La fonction $h : t \mapsto (e^t - 1)/t$ tend vers 1 en 0 (DL ou taux d'accroissement) donc est prolongeable par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$. Dès lors, l'intégrale de l'énoncé n'est rien d'autre que l'intégrale de h ainsi prolongée sur $[\,0\,;1\,]$ (intégrale qui a du sens car intégrale d'une fonction continue sur un segment). g est une primitive de h (théorème fondamental de l'analyse) si bien que :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \frac{1 + x + x^2/2 + x^3/6 - 1 + \text{o}\left(x^3\right)}{x} \\ &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \text{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$g(x) = g(0) + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

et puisque $g(0) = I$:

$$f(x) = \ln(x) + I + x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{18} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Exercice 39 : ✪✪ Donner le DL à l'ordre $n+1$ en 0 de la fonction

$$f : x \mapsto \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

Correction : Il est intuitif qu'on va « presque » trouver x puisque f est « presque » la composée du ln et de l'exponentielle. f est dérivable sur un voisinage de 0, et si x est au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}}{1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}} \\
&= 1 - \frac{x^n}{n!} \times \frac{1}{1 + \underbrace{x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}}_{=u \xrightarrow[x \to 0]{} 0}} \\
&= 1 - \frac{x^n}{n!} \times (1 + \mathrm{o}(1)) \\
&= 1 - \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}(x^n)
\end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$f(x) = f(0) + x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

et $f(0) = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 40 : ✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n$ n réels. Donner une CNS sur ces réels pour que la fonction f définie (quand c'est possible) par l'expression ci-dessous admette une limite finie en 0 :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\tan(kx)}$$

Correction : Faisons un DL des tangentes. À quelle ordre ? Dans le doute, à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx + \mathrm{o}(x)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \frac{1}{1 + \mathrm{o}(1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times (1 + \mathrm{o}(1)) \quad \text{(DL de } 1/1+u\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Notons $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$. Si $S \neq 0$ alors $f(x) \sim S/x$ (ne pas oublier de préciser que S doit être non nulle car on ne peut pas dire équivalent à 0) et donc f tend vers $\pm\infty$ en 0^+ selon le signe de S, et le contraire en 0^-. En particulier, f n'admet pas de limite finie en 0. Une condition NÉCESSAIRE pour que f admette une limite finie en 0 est donc que $S = 0$. Regardons si c'est suffisant : supposons que $S = 0$ si bien que $f(x) = \mathrm{o}(1/x)$. Or, $1/x$ tend vers $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^- donc une quantité négligeable devant $1/x$ peut tendre vers tout et n'importe quoi, voire même ne pas admettre de limite. On n'a pas assez d'informations pour conclure : on pousse le DL initial plus loin, c'est-à-dire qu'on fait le DL de $\tan(u)$ à l'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx + \frac{k^3x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \frac{1}{1 + \frac{k^2x^2}{3} + \mathrm{o}\left({}^2\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} \times \left(1 - \frac{k^2x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \quad \text{(DL de } 1/1+u\text{)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{kx} - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \times kx}{3} + \mathrm{o}\left(x\right) \\
&= \mathrm{O}\left(x\right)
\end{aligned}$$

puisque $S = 0$ si bien que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. En conclusion, f admet une limite finie en 0 si et seulement si $S = 0$ (et cette limite vaut alors 0).

Exercice 41 - Lemme de l'escalier et générateur automatique d'exercices : ✪✪

1. Montrer que si une suite (u_n) converge est telle que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers une limite α non nulle, alors $u_n \sim \alpha n$. Ce résultat est connu sous le nom de « lemme de l'escalier ». Voici des exercices classiques qui l'utilisent.
2. **Le classique des classiques**[1] **:** on définit la suite récurrente (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right] \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$
   (a) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) À l'aide de la suite de terme général
$$v_n = \frac{1}{{u_{n+1}}^2} - \frac{1}{{u_n}^2}$$
   montrer que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{3}{n}}$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+, \ln(1+x) \leq x$. Etudier les cas d'égalité.
4. On définit dans cette question la suite (u_n) par :
$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$
   Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis, à l'aide cette fois la suite de terme général
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$
   donner un équivalent de u_n.
5. Soient f définie et continue sur $[\,0\,;1\,]$ admettant en 0 un DL de la forme $f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}\left(x^\alpha\right)$ avec $a > 0$ et $\alpha > 1$.
   (a) Montrer que pour x assez petit (strictement positif), $0 < f(x) < x$. En déduire que pour u_0 assez petit, la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers 0. On suppose u_0 ainsi choisi dans la suite.
   (b) Déterminer la valeur de $b \in \mathbb{R}^*$ pour que la suite de terme général $v_n = {u_{n+1}}^b - {u_n}^b$ admette une limite non nulle.
   (c) Donner un équivalent de u_n.
   (d) Donner un équivalent, lorsque le terme initial est suffisamment proche de 0, de la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \mathrm{Arctan}(u_n)\cos(u_n)$.

1. Tellement classique que cet exercice peut être donné sans indication (en particulier, sans donner la suite (v_n) à l'oral).

Correction :

1. D'après le théorème de Cesàro :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

mais on a une somme télescopique donc

$$\frac{u_n-u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$$

Finalement :

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_n-u_0}{n} + \frac{u_0}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + 0$$

ce qui permet de conclure.

2. (a) Fait dans le chapitre 12.

(b) On veut appliquer le lemme de l'escalier à la suite de terme général $1/{u_n}^2$ donc on veut donner la limite de (v_n). Commençons par mettre au même dénominateur :

$$v_n = \frac{{u_n}^2 - {u_{n+1}}^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2}$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire le DL de $u_{n+1} = \sin(u_n)$:

$$v_n = \frac{{u_n}^2 - {u_{n+1}}^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2} = \frac{{u_n}^2 - \left(u_n - {u_n}^3/6 + \mathrm{o}\left({u_n}^3\right)\right)^2}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2} = \frac{{u_n}^4/3 + \mathrm{o}\left({u_n}^4\right)}{{u_n}^2{u_{n+1}}^2}$$

De plus, puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, u_{n+1} = \sin(u_n) \sim u_n$, et l'équivalent passe au carré, ce qui donne l'équivalent suivant :

$$v_n \sim \frac{{u_n}^4}{3{u_n}^4} = \frac{1}{3}$$

D'où : $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$. D'après le lemme de l'escalier :

$$\frac{1}{{u_n}^2} \sim \frac{n}{3}$$

L'équivalent passe à la puissance fixe (ici la puissance $-1/2$) donc

$$u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$$

3. Idem, fait dans le chapitre 12 : 0 est le seul point d'égalité. Il ne fallait pas parler de concavité car la concavité ne permet pas de donner les cas d'égalité !

4. On montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ comme dans le chapitre 12. On montre ensuite de la même façon (mettre au même dénominateur et faire un DL de $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ à l'ordre 2) que

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim \frac{1}{2}$$

Le lemme de l'escalier nous donne que $1/u_n \sim n/2$ donc $u_n \sim 2/n$.

5. (a) Tout d'abord, $f(0) = 0$ car coefficient constant du DL (ou en passant à la limite). De plus, par hypothèse, $f(x) = x - ax^\alpha + \mathrm{o}(x^\alpha)$ c'est-à-dire $f(x) \sim x$. Or, deux quantités équivalentes au voisinage de 0 sont de même signe pour x assez petit. Formellement, il existe $e \in \left]0\,;c\right]$ tel que pour tout $x \in \left]0\,;e\right]$, $f(x) > 0$. De même, puisque $f(x) - x \sim -ax^\alpha < 0$ (car $a > 0$) alors il existe $k \in \left]0\,;c\right]$ tel que pour tout $x \in \left]0\,;k\right], f(x) - x < 0$. Il suffit de prendre $d = \min(e,k)$ pour conclure :

$$\exists d \in \left]0\,;c\right], \forall x \in \left]0\,;d\right] \qquad 0 < f(x) < x$$

Il en découle que $\left]0\,;d\right[$ est stable par f. Une récurrence immédiate prouve que si $u_0 \in \left]0\,;d\right[$ alors $u_n \in \left]0\,;d\right[$ pour tout n. Par conséquent, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$: la suite (u_n) est décroissante minorée par 0 et majorée par d, donc elle converge vers une limite $L \in [0\,;d]$ (puisque l'inégalité large passe à la limite). Or, f étant continue, la limite est un point fixe donc $f(L) = L$. Or, d'après ce qui précède, si $L \in \left]0\,;d\right], f(L) < L$. Il en découle que $L = 0$, soit : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut faire un DL de $f(u_n)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^b - {u_n}^b &= (f(u_n))^b - {u_n}^b \\ &= (u_n - a{u_n}^\alpha + \mathrm{o}({u_n}^\alpha))^b - {u_n}^b \\ &= {u_n}^b\left(1-a{u_n}^{\alpha-1}+\mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right)^b - {u_n}^b \end{aligned}$$

Or, puisque $\alpha>1, {u_n}^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on peut faire un DL de la parenthèse à la puissance b :

$$\begin{aligned} {u_{n+1}}^b - {u_n}^b &= {u_n}^b\left(1-a{u_n}^{\alpha-1}+\mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right)^b - {u_n}^b \\ &= {u_n}^b\left(1-ab{u_n}^{\alpha-1}+\mathrm{o}\left({u_n}^{\alpha-1}\right)\right) - {u_n}^b \\ &= -ab{u_n}^{b+\alpha-1}+\mathrm{o}\left({u_n}^{b+\alpha-1}\right) \end{aligned}$$

En conclusion :

$${u_{n+1}}^b - {u_n}^b \sim -ab{u_n}^{b+\alpha-1}$$

Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, la suite en question admet une limite finie non nulle si et seulement si la puissance est nulle, c'est-à-dire si et seulement si $b+\alpha-1=0$ (en effet, si elle est strictement positive, la suite tend vers 0, tandis que si elle est strictement négative, elle tend vers $\pm\infty$ selon le signe de ab). Par conséquent, la suite $\left({u_{n+1}}^b-{u_n}^b\right)_n$ admet une limite non nulle si et seulement si $b=1-\alpha$.

(c) D'après la question précédente (puisqu'une suite est équivalente à une constante non nulle si et seulement si elle converge vers cette constante, cf cours), cette limite vaut alors $L=-ab=a(\alpha-1)$. Donnons alors un équivalent de u_n. D'après le lemme de l'escalier, ${u_n}^b\sim na(\alpha-1)$. L'équivalent passant à la puissance fixe (ici $1/b$)

$$u_n\sim(na(\alpha-1))^{1/b}=\left(\frac{1}{na(\alpha-1)}\right)^{1/(\alpha-1)}$$

(d) Faisons un DL de la fonction $f:x\mapsto \mathrm{Arctan}(x)\cos(x)$ à l'ordre 3. Après calculs on trouve

$$f(x)=x-\frac{5x^3}{6}+\mathrm{o}\left(x^3\right)$$

D'après ce qui précède, en prenant $\alpha=3, a=5/6$, il vient $b=-2$ et enfin

$$u_n\sim\sqrt{\frac{3}{5n}}$$

Exercice 42 : ✪✪✪ Soient f dérivable sur $\mathbb{R}$, (b_n) et (a_n) deux suites, respectivement strictement positive et strictement négative, de limite nulle. Montrer que :

$$\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(0)$$

Correction : f étant dérivable, elle admet un DL à l'ordre 1 donné par $f(u)=f(0)+f'(0)u+\mathrm{o}(u)$. Puisque (a_n) et (b_n) tendent vers 0 :

$$\begin{aligned} \frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} &= \frac{f(0)+b_nf'(0)+\mathrm{o}(b_n)-f(0)-f'(0)a_n+\mathrm{o}(a_n)}{b_n-a_n} \\ &= \frac{(b_n-a_n)f'(0)+\mathrm{o}(b_n)+\mathrm{o}(a_n)}{b_n-a_n} \\ &= f'(0)+\frac{\mathrm{o}(b_n)+\mathrm{o}(a_n)}{b_n-a_n} \end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas tout rentrer dans les $\mathrm{o}()$. Utilisons le fait que $a_n<0<b_n$. Par conséquent, $0<b_n<b_n-a_n$ donc (rappelons qu'on ne connaît pas le signe d'un $\mathrm{o}()$).

$$\left|\frac{\mathrm{o}(b_n)}{b_n-a_n}\right|\leq\left|\frac{\mathrm{o}(b_n)}{b_n}\right|=|\mathrm{o}(1)|$$

donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{\mathrm{o}\left(b_n\right)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De même, $|b_n - a_n| = |a_n - b_n| > |a_n|$ et on prouve de même que

$$\frac{\mathrm{o}\left(a_n\right)}{b_n - a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 43 : ✪✪✪ On rappelle (cf. exercice 13 du chapitre 15) qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ (où I est un intervalle non vide, non réduit à un point) est log-convexe si $\ln \circ f$ est convexe. Montrer que la réciproque de l'exercice 13 du chapitre 15 est vraie, c'est-à-dire que si f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$, alors f est log-convexe.

Correction : Soient x et y dans I et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Par convexité de f^α :

$$f^\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f^\alpha(x) + (1-\lambda) f^\alpha(y)$$

En utilisant le fait que $f^\alpha = e^{\alpha \ln(f)}$, cela devient

$$\exp\left(\alpha \ln\left(f(\lambda x + (1-\lambda)y)\right)\right) \leq \lambda e^{\alpha \ln(f(x))} + (1-\lambda) e^{\alpha \ln(f(y))}$$

En composant par le ln (qui est croissant, les inégalités restent dans le même sens) et en divisant à gauche et à droite par α.

$$\ln\left(f(\lambda x + (1-\lambda)y)\right) \leq \frac{1}{\alpha} \times \lambda e^{\alpha \ln(f(x))} + \frac{1}{\alpha} \times (1-\lambda) e^{\alpha \ln(f(y))}$$

L'astuce est de se dire que quand α est proche de 0, on compose par une fonction concave (penser à la racine carrée) donc cela a tendance à rendre concave la fonction : or, f^α est convexe pour tout α, donc c'est plus contraignant quand α est proche de 0 : on va donc faire tendre α vers 0. Si on essaye de calculer la limite naïvement, on trouve une forme indéterminée « 0/0 ». Faisons plutôt un DL de g quand $\alpha \to 0^+$. Commençons par les exponentielles, à l'ordre 1 (notons le membre de droite $g(\alpha)$) :

$$\begin{aligned}
g(\alpha) &= \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left[\lambda(1 + \alpha \ln(f(x)) + \mathrm{o}\left(\alpha\right)) + (1-\lambda)(1 + \alpha \ln(f(y)) + \mathrm{o}\left(\alpha\right))\right]\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\ln\left[1 + \alpha(\lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y))) + \mathrm{o}\left(\alpha\right)\right]\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\alpha(\lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) + \mathrm{o}\left(\alpha\right))\right)
\end{aligned}$$

En particulier :

$$g(\alpha) = \lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y)) + \mathrm{o}\left(()\,1\right) \xrightarrow[\alpha\to 0]{} \lambda \ln(f(x)) + (1-\lambda)\ln(f(y))$$

L'inégalité large passant à la limite, d'après ce qui précède :

$$\ln \circ f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \leq \lambda \ln \circ f(x) + (1-\lambda) \ln \circ f(y)$$

c'est-à-dire que f est log-convexe.

Exercice 44 : ✪✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{x^2}$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que sa réciproque qu'on notera f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$.
2. Donner le DL de f^{-1} en 0 à l'ordre 5.

Correction :

1. Le fait que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ découle d'une application immédiate du théorème de la bijection. De plus, f est $\mathscr{C}^\infty$ et f' ne s'annule pas donc (cf. chapitre sur la dérivation) f^{-1} est elle aussi $\mathscr{C}^\infty$.
2. f^{-1} admet donc un DL à tout ordre d'après la formule de Taylor-Young, qu'on note :

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

On sait que $a_0 = f^{-1}(0)$ l'unique antécédent de 0 par f. Or, $f(0) = 0$ donc l'unique antécédent de 0 par f est $f(0)$ donc $a_0 = 0$. On va utiliser la relation $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ c'est-à-dire :

$$f^{-1}(x) e^{f^{-1}(x)} = x$$

Or, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f^{-1}(0) = 0$ car f^{-1} est continue (ou tout simplement car $f^{-1}(x) = \mathrm{O}\left(x\right)$). Dès lors, l'exponentielle étant continue, l'exponentielle ci-dessus tend vers 1 donc $f^{-1}(x) \sim x$: on trouve donc que $a_1 = 1$. On progresse ! Le DL de $f^{-1}(x)$ à l'ordre 2 est donc $f(x) = x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Si on fait un DL à l'ordre 2, cela donne (on ne fait à droite le DL qu'à l'ordre 1 puisqu'on va tout multiplier par x, donc on va augmenter les ordres de 1).

$$\begin{aligned}
x &= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right))e^{(x+\mathrm{o}(x))^2} \\
&= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right))e^{\mathrm{o}(x)} \\
&= (x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)) \times (1 + \mathrm{o}\left(x\right)) \\
&= x + a_2x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Par unicité du DL, $a_2 = 0$. Recommençons avec le DL à l'ordre 3 (idem, on ne fait le membre de droite qu'à l'ordre 2) :

$$\begin{aligned}
x &= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right))e^{(x+\mathrm{o}(x))^2} \\
x &= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right))e^{x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= (x + a_3x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)) \times \left(1 + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= x + x^3\left(1 + a_3\right) + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Toujours par unicité du DL, $a_3 + 1 = 0$ donc $a_3 = -1$. On trouve de même que $a_4 = 0$ et $a_5 = 5/2$ si bien que le DL recherché est :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5x^5}{2} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

On remarque qu'il n'y a que des puissances impaires : c'est normal ! f étant impaire, f^{-1} l'est aussi ! Par conséquent, le terme d'ordre 6 est aussi nul donc on a même gratuitement le DL suivant :

$$f^{-1}(x) = x - x^3 + \frac{5x^5}{2} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Exercice 45 : ✪✪✪ Donner un équivalent de

$$u_n = \left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right)^n$$

Correction : Comme d'habitude, puissance variable donc exponentielle. Attention, on ne peut pas dire que l'arctangente est équivalente à $\pi/2$ car ce qu'il y a dedans tend vers $+\infty$ donc $u_n \sim (\pi/2)^n$ car l'équivalent ne passe pas à la puissance variable.

$$u_n = e^{n\ln\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{n^2}{n+1}\right)\right)}$$

Problème : ce qu'il y a dans l'Arctan ne tend pas vers 0 et donc on ne peut pas faire de DL. On ne peut pas non plus factoriser par le terme dominant car l'Arctan ne « casse » pas les produits comme le ln. Il faut se ramener en 0 et on pense à une formule du chapitre de dérivation : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ (et c'est le cas ici). Dès lors,

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{n+1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right)} \\
&= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Précisons qu'on ne met pas le terme en $1/n^2$ car on fait un DL à l'ordre 1 et donc le $1/n^2$ est aspiré par le trou noir du $\mathrm{o}\left(\right)$. Finalement, on met encore en facteur le terme dominant pour se ramener à du $\ln(1+u)$:

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+n\ln\left(1-\frac{2}{\pi n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)+n\left(-\frac{2}{\pi n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\\
&= e^{n\ln\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{2}{\pi}+\mathrm{o}(1)}\\
&\sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^n\times e^{-\frac{2}{\pi}}
\end{aligned}$$

Exercice 46 : ✪✪✪ Donner un équivalent de $u_n = \text{Arccos}\left(\dfrac{2}{\pi}\times\text{Arctan}(n^2)\right)$.

Correction : La quantité dans l'Arccos tend vers 1 donc (u_n) tend vers 0, mais rappelons qu'il est interdit de dire qu'une suite est équivalente à 0. Donnons un équivalent de Arccos en 1. Pour cela, on fait comme en cours : on pose $h = x-1$, c'est-à-dire qu'on cherche un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \text{Arccos}(1+h)$. Soit $h<0$ (puisque Arccos est définie sur $[\,-1\,;1\,]$, il est impératif que h soit négatif pour que Arccos soit définie en $1+h$). On sait que $\cos(f(x)) = 1+h$. Or, on a déjà dit que $f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc on peut faire un DL du cos, ce qui donne :

$$1-\frac{f(h)^2}{2}+\mathrm{o}\left(f(h)^2\right) = 1+h$$

c'est-à-dire que $h \sim -f(x)^2/2$ donc $f(x)\sim\sqrt{-2h}$ (h est négatif et l'équivalence passe à la puissance fixe). Par conséquent, puisque $h = x-1$, il en découle que :

$$\text{Arccos}(x) \sim_{x\to 1} \sqrt{-2(x-1)} = \sqrt{2(1-x)}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
u_n &= \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2}-\text{Arctan}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \text{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)\\
&= \text{Arccos}\left(1-\frac{2}{\pi n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&\sim \sqrt{\frac{4}{\pi n^2}}\\
&\sim \frac{2}{n\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

Exercice 47 : ✪✪✪ Rappelons le résultat suivant, démontré dans l'exercice 12 du chapitre 13 : si α et β sont deux réels, la fonction $f : x\mapsto x^\alpha\sin\left(x^\beta\right)$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$) est prolongeable par continuité en 0^+ lorsque

- $\alpha>0$ (en posant $f(0)=0$).
- $\alpha=0$ et $\beta=0$ (en posant $f(0)=\sin(1)$).
- $\alpha=0$ et $\beta>0$ (en posant $f(0)=0$).
- $\alpha<0$ et $\beta=-\alpha$ (en posant $f(0)=1$).
- $\alpha<0$ et $\beta>-\alpha$ (en posant $f(0)=0$).

Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les points de coordonnées (α,β) pour lesquels f ainsi prolongée est dérivable à droite en 0.

Correction : Dans chacun des cas de figure, on se demande si

$$\tau : x\mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

admet une limite finie en 0^+. Soit $x>0$. Rappelons à tout hasard que $x\mapsto x^{\text{truc}}$ admet une limite finie en 0^+ ssi truc ≥ 0 (nulle si truc >0 et égale à 1 si truc $=0$).

- Supposons dans un premier temps $\alpha>0$ si bien que $f(0)=0$. Par conséquent, $\tau(x) = x^{\alpha-1}\sin\left(x^\beta\right)$. D'après l'exercice 12 du chapitre 13 (penser à « truc »), cette fonction admet une limite finie en 0^+ lorsque $\alpha-1>0$ (i.e. $\alpha>1$), $\alpha-1=0$ (i.e. $\alpha=1$) et $\beta\geq 0$, ainsi que lorsque $\alpha-1<0$ (i.e. $\alpha\in\,]\,0\,;1\,[$ car on a supposé $\alpha>0$) et $\beta\geq 1-\alpha$.

- Supposons à présent $\alpha = \beta = 0$ et donc f est constante égale à $\sin(1)$ donc est dérivable en 0^+.
- Supposons que $\alpha = 0$ et $\beta > 0$: on a

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{\sin\left(x^\beta\right)}{x} \\ &\sim \frac{x^\beta}{x} \\ &\sim x^{\beta-1}\end{aligned}$$

  puisque $\beta > 0$ donc $\sin(x^\beta) \sim x^\beta$: la fonction τ admet donc une limite finie si et seulement si $\beta \geq 1$.
- Supposons que $\alpha < 0$ et $\beta = -\alpha$ si bien que

$$\tau(x) = \frac{x^\alpha \sin(x^{-\alpha}) - 1}{x}$$

  Or, $-\alpha > 0$ donc on peut faire un DL du sinus : mettons deux termes pour qu'il reste un terme (le 1 va se simplifier).

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{x^\alpha\left(x^{-\alpha} - x^{-3\alpha}/3! + \mathrm{o}\left(x^{-3\alpha}\right)\right) - 1}{x} \\ &\sim \frac{x^{-2\alpha-1}}{3!}\end{aligned}$$

  donc f est dérivable en 0 si et seulement si $-2\alpha - 1 \geq 0$ ssi $\alpha \leq -1/2$.
- Enfin, supposons $\alpha < 0$ et $\beta > -\alpha$, donc $\beta > 0$ et donc on peut refaire un DL du sinus (avec un seul terme car il n'y a plus le 1) ce qui donne :

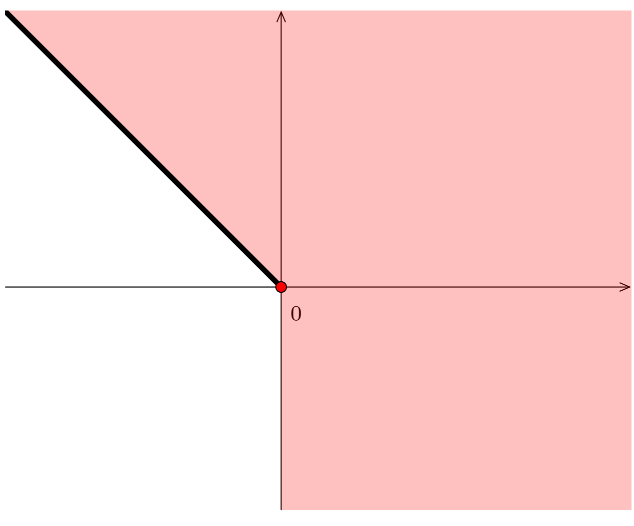
$$\tau(x) \sim x^{\alpha+\beta-1}$$

  f est donc dérivable en 0 si et seulement si $\beta \geq 1 - \alpha$.

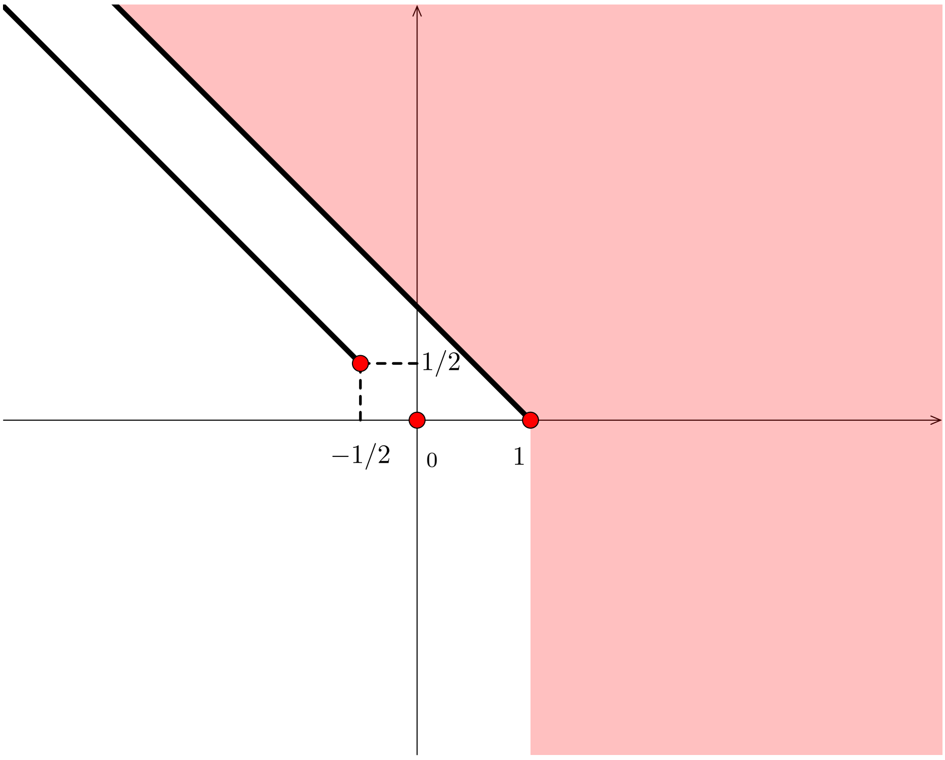
En conclusion, f ainsi prolongée est dérivable en 0 si et seulement si :

- $\alpha > 1$.
- $\alpha = 1$ et $\beta \geq 0$.
- $\alpha \in]\,0\,;1\,[$ et $\beta \geq 1 - \alpha$.
- $\alpha = \beta = 0$.
- $\alpha = 0$ et $\beta \geq 1$.
- $\alpha \leq -1/2$ et $\beta = -\alpha$.
- $\alpha < 0$ et $\beta \geq 1 - \alpha$.

On peut regrouper certaines conditions : la deuxième condition, la troisième, la cinquième et la dernière se regroupent en une seule : $\alpha \leq 1$ et $\beta \geq 1 - \alpha$, i.e. le couple (α, β) est au-dessus (au sens large) de la droite d'équation $y = 1 - x$. L'avant-dernière condition signifie qu'on prend la demi-droite d'équation $y = -x$ constituée uniquement des points d'abscisse $\leq -1/2$. Ci-dessous (à gauche) on a représenté (cf. exercice 12 du chapitre 13) l'ensemble des couples (α, β) pour lesquels f est prolongeable par continuité :



Ci-dessous le sous-ensemble des couples (α, β) pour lesquels f ainsi prolongée est dérivable à droite en 0 (les droites comprises dans la zone sont en gras, les traits non en gras représentent des frontières non comprises dans la zone) :



Exercice 48 - Une limite difficile à deviner : ✪✪✪ On définit la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)^n$$

Donner la limite de la suite (u_n). On pourra commencer par montrer (en utilisant les formules de trigo à bon escient) que

$$\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{18n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Correction : Écrire u_n sous forme exponentielle (puissance variable) n'apporte rien car on aurait une forme indéterminée $0 \times +\infty$ (n multiplié par le ln d'une quantité qui tend vers 1). C'est pour cela qu'il faut être plus fin. Suivons l'indication de l'énoncé et faisons un DL du cos : on a un quotient, on se ramène à $1/(1+u)$ en factorisant par le terme dominant, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) &= \cos\left(\frac{n\pi}{3n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{3n}}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

À l'aide de la formule donnant $\cos(a+b)$ (pourquoi pas $a-b$?) pour se ramener au voisinage de 0 pour utiliser les DL de référence (rappelons qu'on fait un DL à l'ordre 1 donc, dans le cos, seul le 1 sort car le terme suivant est d'ordre 2) :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{-\pi}{9n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat de l'énoncé. On trouve de même que :

$$\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi\sqrt{3}}{72n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Revenons à u_n. Puisque la puissance est variable, passons à l'exponentielle

$$u_n = \exp\left(n\ln\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3n+1}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{6n+1}\right)\right)\right)$$

Utilisons à présent les deux DL que l'on vient d'écrire :

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{18n}+\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{4\pi\sqrt{3}}{72n}-\frac{\pi\sqrt{3}}{72n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\ln\left(1+\frac{\pi\sqrt{3}}{24n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(n\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{24n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{24}+\mathrm{o}(1)\right)
\end{aligned}$$

En conclusion, puisque $\mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par continuité de l'exponentielle :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\pi\sqrt{3}/24}$$

Exercice 49 - Involutions : ✪✪✪ Si $n \geq 1$, on note d_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$ i.e. le nombre d'applications de $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$ dans lui-même vérifiant $f\circ f = \mathrm{Id}$. Par convention, on pose $d_0 = 1$.

1. Calculer d_1, d_2, d_3.
2. Montrer que pour tout $n\geq 2$, $d_n = d_{n-1}+(n-1)d_{n-2}$.
3. On pose, pour tout réel x, $f(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.
   (a) Prouver que f admet un DL à tout ordre en 0. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients.
   (b) Déterminer une relation entre $f'(x)$ et $f(x)$. En déduire que, pour tout n, $d_n = a_n\times n!$.
   (c) Prouver finalement que :

$$d_n = n!\times\sum_{p+2q=n}\frac{1}{p!}\times\frac{1}{2^q\times q!}$$

Correction :

1. Rappelons qu'une involution est forcément bijective : il suffit donc de s'intéresser aux bijections, et il y a $n!$ bijections de $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$ dans lui-même. Il n'y a qu'une application de $\llbracket 1\,;\,1\rrbracket$ dans lui-même, l'identité, qui est évidemment involutive donc $d_1 = 1$. Il y a deux bijections de $\llbracket 1\,;\,2\rrbracket$ dans lui-même : l'identité, et l'application qui échange 1 et 2, et les deux sont involutives, donc $d_2 = 2$. Il y a six bijections de $\llbracket 1\,;\,3\rrbracket$ dans lui-même :

$$\begin{array}{ccc}1&\mapsto&1\\2&\mapsto&2\\3&\mapsto&3\end{array}\qquad
\begin{array}{ccc}1&\mapsto&2\\2&\mapsto&3\\3&\mapsto&1\end{array}\qquad
\begin{array}{ccc}1&\mapsto&3\\2&\mapsto&1\\3&\mapsto&2\end{array}\qquad
\begin{array}{ccc}1&\mapsto&2\\2&\mapsto&1\\3&\mapsto&3\end{array}\qquad
\begin{array}{ccc}1&\mapsto&3\\2&\mapsto&2\\3&\mapsto&1\end{array}\qquad
\begin{array}{ccc}1&\mapsto&1\\2&\mapsto&3\\3&\mapsto&2\end{array}$$

   Parmi celles-ci, seules la première (l'identité) et les trois dernières (qu'on appellera transpositions dans le chapitre 32) sont des involutions, donc $d_3 = 4$.
2. Soit $n\geq 2$. Soit $f:\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\to\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$ une involution. C'est un exercice de dénombrement. Il y a deux cas de figure (cela sent déjà le principe additif à plein nez) : soit $f(1) = 1$, soit $f(1)\neq 1$. Supposons que $f(1) = 1$: alors f est entièrement déterminée par sa restriction à $\llbracket 2\,;\,n\rrbracket$, qui est une involution de $\llbracket 2\,;\,n\rrbracket$ donc il y a d_{n-1} possibilités. Supposons que $f(1)\neq 1$: f est alors entièrement déterminée par $f(1)$ qu'on notera a (il y a $n-1$ possibilités, tous les éléments de $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$ sauf 1) et sa restriction à $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket\backslash\{1;a\}$ qui est une involution de cet ensemble (f étant involutive, $f(a) = 1$), donc il y a d_{n-2} choix possibles. Par principe multiplicatif, il y a $(n-1)d_{n-2}$ choix possibles pour le deuxième cas, et les deux cas étant incompatibles, par principe additif, on a le résultat voulu.
3. (a) f est $\mathscr{C}^\infty$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, f admet un DL à tout ordre en 0.

(b) On a déjà dit que f est $\mathscr{C}^\infty$: soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = (1+x)f(x)$. Par conséquent, f' admet un DL à tout ordre donc en particulier à l'ordre $n-1$ (on pouvait aussi dire que f' est $\mathscr{C}^\infty$) donné par :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)) \\ &= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_2+a_1)x^2 + \cdots + (a_{n-2}+a_{n-1})x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right) \end{aligned}$$

Par primitivation du DL :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + a_0 x + \frac{(a_0+a_1)x^2}{2} + \frac{(a_2+a_1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a_{n-2}+a_{n-1})x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= 1 + a_0 x + \frac{(a_0+a_1)x^2}{2} + \frac{(a_2+a_1)x^3}{3} + \cdots + \frac{(a_{n-2}+a_{n-1})x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

Par unicité du DL, $a_0 = 1$, $a_1 = a_0$ et, pour tout $n \geq 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-2}+a_{n-1}}{n}$. On conclut avec une récurrence (double) et la question 2.

(c) Il suffit de prouver que, pour tout n,

$$a_n = \sum_{p+2q=n} \frac{1}{p!} \times \frac{1}{2^q \times q!}$$

Or, $f(x) = e^x \times e^{x^2/2}$ donc, en appliquant deux fois le DL de l'exponentielle (la deuxième fois avec $u = x^2/2$) :

$$f(x) = \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)\right) \times \left(\sum_{0 \leq 2q \leq n} \frac{x^{2q}}{2^q q!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)\right)$$

En développant, le coefficient devant x^n vaut bien la somme voulue (on prend toutes les façons d'obtenir x^n en multipliant un terme de la forme $x^p/p!$ et $x^{2q}/2^q q!$ donc le coefficient vaut $1/(p!2^q q!)$ et ensuite on somme).

Exercice 50 - Nombres de Bernoulli : ✪✪✪ Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.

1. Montrer que f admet un DL à tout ordre en 0. On note la suite de ses coefficients $(a_n)_n$. Donner a_0, a_1, a_2.
2. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x) + \dfrac{x}{2}$, montrer que pour tout $k \geq 1, a_{2k+1} = 0$.
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\frac{a_2}{(n-1)!} + \frac{a_3}{(n-2)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2!} + \frac{a_n}{1!} = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

En déduire a_3 et a_4.

Remarque : Les nombres $b_n = n! \times a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli. On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, b_n = B_n(0)$ où B_n est le n-ième polynôme de Bernoulli (cf exercice 3 du chapitre 10). Euler a montré en 1755 que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \qquad \zeta(2p) = |b_{2p}| \frac{2^{2p-1}}{(2p)!} \pi^{2p}$$

On voit que pour $p = 1$ on retrouve le fameux $\pi^2/6$.

Correction :

1. Prouver que f est $\mathscr{C}^\infty$ serait trop difficile. On va utiliser le résultat du cours concernant les opérations sur les DL. L'exponentielle admettant un DL à tout ordre, fixons n et donnons un DL de l'exponentielle à l'ordre $n+1$ (on comprendra pourquoi ensuite) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)-1} \\
&= \frac{x}{x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)} \\
&= \frac{1}{1+\dfrac{x}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n}}{(n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{n}\right)} \\
&= \frac{1}{1+u}
\end{aligned}$$

avec $u=\dfrac{x}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{(n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^n\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$. On peut donc faire le DL de $1/(1+u)$ à l'ordre n (substitution), ce qui donnera un DL de f à l'ordre n.

2. Montrons que g est paire. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g(-x) &= \frac{-x}{e^{-x}-1}-\frac{x}{2} \\
&= \frac{-x}{\dfrac{1}{e^x}-1}-\frac{x}{2} \\
&= \frac{-xe^x}{1-e^x}-\frac{x}{2} \\
&= \frac{-2xe^x-x+xe^x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{-xe^x-x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{x(1-e^x)-2x}{2(1-e^x)} \\
&= \frac{x}{2}-\frac{x}{1-e^x} \\
&= \frac{x}{2}+\frac{x}{e^x-1} \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Par conséquent, tous les coefficients d'ordre impair du DL de g sont nuls (g admet un DL à tout ordre puisque f en admet un). Or, à partir du rang 2, les coefficients de g sont les mêmes que ceux de f donc, à partir du rang 3, les coefficients impairs de f sont nuls.

3. On sait que pour tout x, $x=f(x)\times(e^x-1)$. Faisons le DL de la quantité de droite à l'ordre $n+1$ (on y pense vu l'énoncé car on y trouve du n) : on commence donc par donner le DL de f à l'ordre n (puisqu'on va multiplier par une quantité dont le DL commence par x) :

$$f(x)\times(e^x-1) \quad=\quad \left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\mathrm{o}\left(x^n\right)\right)\times\left(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)\right)$$

Le coefficient devant x^{n+1} de ce produit est donc :

$$\frac{a_0}{(n+1)!}+\frac{a_1}{n!}+\frac{a_2}{(n-1)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_n}{1!}$$

Cependant, ce produit est égal à x donc tous les coefficients à partir de l'ordre 2 sont nuls, et en particulier le terme d'ordre $n+1$ (car $n\geq 1$ donc $n+1\geq 2$) :

$$\frac{a_0}{(n+1)!}+\frac{a_1}{n!}+\frac{a_2}{(n-1)!}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2!}+\frac{a_n}{1!}=0$$

Or, $a_0 = f(0) = 1$ et, si on fait le DL de f à l'ordre 1 (voir la première question) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1+\frac{x}{2!}\mathrm{o}\left(x^n\right)} \\ &= 1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}\left(x\right) \end{aligned}$$

ce qui donne $a_1 = -1/2$. Il suffit de mettre les termes $a_0/(n+1)!$ et $a_1/n!$ à droite pour conclure. En prenant $n = 2$, il vient :

$$\frac{a_2}{1!} = \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

donc $a_2 = 1/12$. D'après la question 2, $a_3 = 0$. En prenant $n = 4$, il vient :

$$\frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!} + \frac{a_4}{1!} = \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)$$

et puisque $a_2 = 1/12$ et $a_3 = 0$, on trouve finalement que $a_4 = -1/720$.

Exercice 51 : ✪✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction φ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur un voisinage V de 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et telle que pour tout $x \in V$:

$$\sin\varphi(x) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

Donner un DL de φ à l'ordre 10 en 0.

Correction : φ est $\mathscr{C}^\infty$ donc, en particulier, admet un DL à l'ordre 10. On sait que $\varphi(0) = 0$ donc le terme constant du DL est nul, si bien que $\varphi(x) = \mathrm{O}\left(x\right)$. Par conséquent, $\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (on le savait déjà puisque φ est continue et $\varphi(0) = 0$) donc on peut faire un DL du sinus :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^3\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

et puisque $\varphi(x) = \mathrm{O}\left(x\right)$, cela donne :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(x^3\right) + \mathrm{O}\left(x^5\right) + x^2 = 0$$

Par conséquent :

$$\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^3\right) + \mathrm{O}\left(x^5\right)$$

c'est-à-dire que $\varphi(x) \sim -x^2$ donc $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^3\right)$: on a un DL à l'ordre 2. En particulier, $\varphi(x) = \mathrm{O}\left(x^2\right)$ donc, en réinjectant dans la première égalité avec des O :

$$\varphi(x) + \mathrm{O}\left(x^6\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right) + x^2 = 0$$

si bien que $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{O}\left(x^6\right)$ ou encore $\varphi(x) = -x^2 + \mathrm{o}\left(x^5\right)$: cela donne un DL à l'ordre 5. Notons $\varphi(x) = -x^2 + a_6x^6 + \mathrm{O}\left(x^7\right)$. Si on fait le DL du sinus à l'ordre 3 dans l'expression initiale :

$$\varphi(x) - \frac{\varphi(x)^3}{6} + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^5\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 = 0$$

Or, avec l'expression de $\varphi(x)$ comme DL ci-dessus, il vient (le terme le plus petit après x^6 provient du triple produit) :

$$\varphi(x)^3 = -x^6 + \mathrm{O}\left(x^{10}\right)$$

Dès lors :

$$-x^2 + a_6x^6 + \mathrm{O}\left(x^7\right) + \frac{x^6}{6} + \mathrm{O}\left(x^{10}\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right) + x^2 = 0$$

si bien que

$$a_6x^6 = -\frac{x^6}{6} + \mathrm{O}\left(x^7\right) + \mathrm{O}\left(x^{10}\right) + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

Par unicité du DL, $a_6 = -1/6$ si bien que $\varphi(x) = -x^2 - x^6/6 + \mathrm{O}\left(x^7\right)$. Finalement (cube, triples produits) :

$$\varphi(x)^3 = -x^6 - \frac{x^{10}}{2} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

et

$$\varphi(x)^5 = -x^{10} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

De plus, $\varphi(x)^4 = x^8 + \mathrm{O}\left(x^{12}\right)$ si bien que

$$x\varphi(x)^4 = x^9 + \mathrm{O}\left(x^{13}\right) = x^9 + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$$

Enfin, $\mathrm{O}\left(\varphi(x)^7\right) = \mathrm{O}\left(x^{14}\right) = \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$. Finalement, notons $\varphi(x) = -x^2 - x^6/6 + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)$, on a donc :

$$\begin{aligned}
0 &= \sin(\varphi) + x\varphi(x)^4 + x^2 \\
&= \varphi(x) - \frac{\varphi(x)^3}{6} + \frac{\varphi(x)^5}{120} + \mathrm{O}\left(\varphi(x)^7\right) + x\varphi(x)^4 + x^2 \\
&= -x^2 - \frac{x^6}{6} + a_7x^7 + a_8x^8 + a_9x^9 + a_{10}x^{10} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{12} - \frac{x^{10}}{120} + x^9 + x^2 + \mathrm{O}\left(x^{11}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $a_7 = a_8 = 0$, $a_9 = -1$ et $a_{10} = -9/120 = -3/40$. En conclusion :

$$\varphi(x) = -x^2 - \frac{x^6}{6} - \frac{x^9}{9} - \frac{3x^{10}}{40} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$$

24.4 Asymptotes :

Exercice 52 : ✪

1. Montrer que les fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation en $+\infty$ (on précisera bien sûr les positions relatives) :

   (a) $f : x \mapsto \sqrt{x(x+1)}$

   (b) $f : x \mapsto (x^2+x+1)\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{2}{x}\right)$

   (c) $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}\mathrm{Arctan}(x)$

   (d) $f : x \mapsto e^{2/x}\sqrt{x^2+x+1}$

   (e) $f : x \mapsto (x+5)e^{-1/x}$

2. ✪✪ Même chose.

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)^5e^{2/x}}{(x-1)^4}$

   (b) $f : x \mapsto (x^2-3x+1)\ln\left(1-\dfrac{2}{x}\right)$

   (c) $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+5x+1}$

   (d) $f : x \mapsto \left(e^{1/x}-1\right)\sqrt{x^4+x^3+x^2+1}$

   (e) $f : x \mapsto \sqrt{x^4+x^2+9x+1} - x^2e^{\pi/x}$

   (f) $f : x \mapsto e^{1/(x+3)}\sqrt{x^2+5x+4}$

   (g) $f : x \mapsto x^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{\ln(e^x+e^{-x})}{x^2}\right)$

Correction : Le but du jeu est donc de donner un développement asymptotique à la précision $1/x$ (ou plus si le terme en $1/x$ est nul).

1. (a) Soit $x > 0$ (on cherche une asymptote en $+\infty$, et on a alors $\sqrt{x^2} = x$) :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} \\
&= x\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&= x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Faisons le proprement pour la première, on ira plus vite pour les suivantes : $f(x) - \left(x+\dfrac{1}{2}\right) \sim -\dfrac{1}{8x^2}$. D'une part, cela implique que $f(x) - \left(x+\dfrac{1}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc la droite d'équation $y = x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$, et d'autre part, deux quantités équivalentes en $+\infty$ ayant le même signe au voisinage de $+\infty$, $f(x) - \left(x+\dfrac{1}{2}\right) < 0$ pour x assez grand donc le graphe de f est en dessous de l'asymptote.

(b)

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x^2+x+1)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{(2/x)^3}{3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&= (x^2+x+1)\times\left(\frac{2}{x}-\frac{8}{3x^3}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= 2x-\frac{8}{3x}+2+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= 2x+2-\frac{2}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On conclut de même que la droite d'équation $y = 2x+2$ est asymptote en $+\infty$ et que le graphe de f est sous l'asymptote.

(c) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\
&= \left(x+1+\frac{1}{2x}+1+\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+2+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \frac{\pi x}{2}-1+\pi-\frac{2}{x}+\frac{3\pi}{4x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{\pi x}{2}+\pi-1+\frac{3\pi-8}{4x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit de même que la droite d'équation $y = \dfrac{\pi x}{2}+\pi-1$ est asymptote en $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de l'asymptote (puisque $3\pi > 9 > 8$).

(d) Idem, soit $x > 0$ si bien que $\sqrt{x^2} = x$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{2/x}x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{(2/x)^2}{2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+2+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+\frac{5}{2}+\frac{27}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude que la droite d'équation $y = x+5/2$ est asymptote en $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de l'asymptote.

(e)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+5)\times\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x-1+\frac{1}{2x}+5-\frac{5}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x+4-\frac{9}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

donc la droite d'équation $y = x+4$ est asymptote en $+\infty$, et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

2. (a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5\left(1+\frac{1}{x}\right)^5\times e^{2/x}\times x^{-4}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}\right)^5\times e^{2/x}\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\ &= x\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\ &= \left(x+5+\frac{10}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-4} \\ &= \left(x+2+\frac{2}{x}+5+\frac{10}{x}+\frac{10}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{4}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(x+7+\frac{22}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{4}{x}+\frac{10}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x+4+\frac{10}{x}+7+\frac{28}{x}+\frac{22}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x+11+\frac{60}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

(b)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+1)\times\left(-\frac{2}{x}-\frac{(-2/x)^2}{2}+\frac{(-2/x)^3}{3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= (x^2-3x+1)\times\left(-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{8}{3x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\ &= -2x-2-\frac{8}{3x}+6+\frac{6}{x}-\frac{2}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= -2x+4+\frac{4}{3x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/3} \\ &= x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x\left(1+\frac{2}{3x}+\frac{11}{9x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x+\frac{2}{3}+\frac{11}{9x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\times x^2\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)^{1/2}\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\times\frac{1}{x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{3}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}+\frac{1}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+1+\frac{19}{24x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)^{1/2}-x^2\left(1+\frac{\pi}{x}+\frac{\pi^2}{2x^2}+\frac{\pi^3}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\\
&= x^2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x^2+\frac{1}{2}+\frac{9}{2x}-x^2-\pi x-\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= -\pi x+\frac{1-\pi^2}{2}+\frac{27-\pi^3}{6x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude (le graphe est sous l'asymptote puisque $\pi > 3$ donc $\pi^3 > 3^3 = 27$).

(f)

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2(x+3)^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)^{1/2}$$

Or, $1/2(x+3)^2 \sim 1/2x^2$ donc est égal à $1/2x^2+\mathrm{o}\left(1/x^2\right)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{x}+\frac{4}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{5}{x}\right)^2+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}\times\frac{1}{1+\frac{3}{x}}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}+\frac{2}{x^2}-\frac{25}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}\times\left(1-\frac{3}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\times x\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= \left(x+1-\frac{5}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\times\left(1+\frac{5}{2x}-\frac{9}{8x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\\
&= x+\frac{5}{2}-\frac{9}{8x}+1+\frac{5}{2x}-\frac{5}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\\
&= x+\frac{7}{2}-\frac{9}{8x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(e^x+e^{-x}) \\ &= x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)+\ln(e^x)+\ln(1+e^{-2x}) \\ &= x-\frac{1}{6x}+x+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)+e^{-2x}+\mathrm{o}\left(e^{-2x}\right) \\ &= 2x-\frac{1}{6x}+x+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

puisque e^{-2x} est négligeable devant $1/x$. donc la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe est en-dessous de l'asymptote.

24.5 Développements asymptotiques

Exercice 53 : ✪ Donner un développement asymptotique en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{x}$ à la précision $\dfrac{1}{x^6}$.

Correction : Soit $x > 0$. $\mathrm{Arctan}(x) = \pi/2 - \mathrm{Arctan}(1/x)$. Or, $u = 1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc on peut faire un DL de $\mathrm{Arctan}(1/x)$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{x} &= \frac{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{5x^5}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^5}\right)}{x} \\ &= \frac{\pi}{2x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^4}-\frac{1}{5x^6}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^6}\right) \end{aligned}$$

Exercice 54 : ✪

1. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \ln\left(\sqrt{x-1}\right)$ à la précision $1/x^2$.
2. Donner le développement asymptotique en $+\infty$ de $x \mapsto \sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$ à la précision $1/x^2$.

Correction :

1. Soit $x > 1$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\ln(x-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(x)+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{\ln(x)}{2}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{4x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

2. Rappelons que $\sqrt[3]{x^3} = x$ (même si x est négatif). Soit $x > 0$. On utilise le DL de $(1+u)^{1/3}$ et on fait un DL à l'ordre 3 ce qui donne $1/x^3$ puisqu'on multiplie ensuite par x et qu'on veut du $1/x^2$. Précisons que

$$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\frac{5u^3}{81}+\mathrm{o}\left(u^3\right)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} - x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}} \\
&= x\left(1+\frac{1}{3}x - \frac{1}{9x^2} + \frac{5}{81x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - x\left(1-\frac{1}{3}x - \frac{1}{9x^2} - \frac{5}{81x^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \\
&= x + \frac{1}{3} - \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} - x + \frac{1}{3} + \frac{1}{9x} + \frac{5}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{2}{3} + \frac{10}{81x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 55 : ✪

1. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$ réalise une bijection de $[\, e\,;+\infty\,[$ dans lui même.
2. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$: $f^{-1}(x) \sim x\ln(x)$.

Correction :

1. f est dérivable sur $[\, e\,;+\infty\,[$ car quotient de fonctions dérivables (celle au dénominateur ne s'annulant pas). Soit $x \geq e$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x \times \frac{-1/x}{\ln(x)^2} \\
&= \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}
\end{aligned}$$

Ci-dessous le tableau de variations de f :

x	e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue, strictement croissante (car sa dérivée s'annule en un nombre fini de points), $f(e) = e$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. D'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $[\, e\,;+\infty\,[$ dans lui-même.

2. L'idée est la même que précédemment : tout vient de l'égalité $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$. Tout d'abord, d'après le théorème de la bijection, f^{-1} est aussi strictement croissante et admet le même tableau de variations que f. En particulier, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On sait que f est strictement positive donc $\ln(f(f^{-1}(x))) = \ln(f^{-1}(x)) - \ln(\ln(f^{-1}(x)))$. Or, lorsque $u \to +\infty$, $\ln(u)$ est négligeable devant u. Puisque $\ln(f^{-1}(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ alors $\ln(\ln(f^{-1}(x)))$ est négligeable devant $\ln(f^{-1}(x))$ donc $\ln(f^{-1}(x)) \sim \ln(f(f^{-1}(x))) = \ln(x)$.

Le problème est qu'on ne peut pas passer l'équivalent à l'exponentielle. Il suffit de revenir à l'égalité $f(f^{-1}(x)) = x$ c'est-à-dire :

$$\frac{f^{-1}(x)}{\ln(f^{-1}(x))} = x$$

donc $f^{-1}(x) = x\ln(f^{-1}(x)) \sim x\ln(x)$.

Exercice 56 : ✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\int_0^1 e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Déterminer un développement asymptotique de $\displaystyle\int_0^1 e^{-xt} f(t)\,\mathrm{d}t$ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ (toujours en $+\infty$).

Correction :

1. Soit $x > 0$ (on cherche la limite en $+\infty$). Notons $g(x)$ l'intégrale de l'énoncé.
f étant continue, d'après le théorème des bornes atteintes, $|f|$ est bornée par un réel M. D'après l'inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,
$$|g(x)| \leq \int_0^1 e^{-xt}|f(t)|\,\mathrm{d}t \leq M\int_0^1 e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{M(1-e^{-x})}{x} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right)$$
ce qui permet de conclure.
2. f étant $\mathscr{C}^2$, on peut faire deux IPP, ce qui donne :
$$g(x) = \frac{f(0)-f(1)e^{-x}}{x} + \frac{f'(0)-f'(1)e^{-x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{-xt}f''(t)\,\mathrm{d}t$$
Or, les termes avec des exponentielles sont négligeables donc dominées par $1/x^3$ (que $f(1)$ et $f'(1)$ soient nuls ou non), si bien que :
$$g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{-xt}f''(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
D'après la première question avec f'' à la place de f (f'' étant continue), l'intégrale ci-dessus (celle de $e^{-xt}f''(t)$) est un $\mathrm{O}\left(1/x\right)$ et on obtient finalement :
$$g(x) = \frac{f(0)}{x} + \frac{f'(0)}{x^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

Exercice 57 : ✪✪ Soit $n \geq 5$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$
2. En déduire que $\displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Correction :

1. Soit $k \leq n-5$. Alors
$$\frac{k!}{n!} = \frac{1}{(k+1)\cdots(n-1)n}$$
Or, $k \leq n-5$ donc $k+1 \leq n-4$: parmi tous les entiers de $k+1$ à n, on trouve en particulier les entiers de $n-4$ à n et les termes restants sont supérieurs ou égaux à 1 donc
$$(k+1)\cdots(n-1)n = (k+1)\cdots(n-4)\cdots(n-1)n \geq (n-4)\cdots(n-1)n$$
Par somme :
$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n-5}\frac{1}{(n-4)\cdots(n-1)n} = \frac{n-4}{(n-4)\cdots(n-1)n} = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} \sim \frac{1}{n^4}$$
ce qui permet de conclure : la somme est positive et inférieure à une quantité négligeable devant $\dfrac{1}{n^3}$ donc est elle-même négligeable devant $\dfrac{1}{n^3}$ (on le prouve facilement en divisant par $1/n^3$ et en appliquant le théorème d'encadrement).
2. Utilisons la question précédente et cassons la somme en $n-5$ ce qui donne
$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}k! &= \frac{n!}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!} + \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-3)!}{n!} + \frac{(n-4)!}{n!} + \sum_{k=0}^{n-5}\frac{k!}{n!} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \frac{1}{n(n-1)(n-2)(n-3)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Pour être clair : il faut donner un développement asymptotique de chaque terme à la précision $1/n^3$. On ne touche pas aux deux premiers termes. Pour le troisième :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n(n-1)} &= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n^2} \times \left(1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

Le quatrième terme est équivalent à $1/n^3$ donc est égal à $1/n^3 + \mathrm{o}\left(1/n^3\right)$ et le cinquième terme est équivalent à $1/n^4$ donc est négligeable devant $1/n^3$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

En particulier, $\sum_{k=0}^{n} k! \sim n!$ (pourquoi ?).

24.6 Développements asymptotiques copy/paste :

Exercice 58 : ✪✪ Déterminer les deux premiers termes significatifs du développement asymptotique de la réciproque de $f : x \mapsto xe^x$ au voisinage de $+\infty$.

Correction : f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, si $x \geq 0$, $f'(x) = (x+1)e^x > 0$. On en déduit le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ (on s'intéresse uniquement à ce qui se passe en $+\infty$) :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

f est continue strictement croissante (car f' s'annule en un nombre fini de points) donc, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, et f^{-1} est également strictement croissante avec le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
f^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f^{-1}(x) > 0$ si $x > 0$. Soit donc $x > 0$. $f^{-1}(x) \times e^{f^{-1}(x)} = x > 0$ donc

$$\ln(f^{-1}(x)) + f^{-1}(x) = \ln(x)$$

Or, $f^{-1}(x)$ tend vers $+\infty$ donc, par croissances comparées, $\ln(f^{-1}(x)) = \mathrm{o}\left(f^{-1}(x)\right)$ si bien que le membre de gauche est équivalent à $f^{-1}(x)$ et donc $f^{-1}(x) \sim \ln(x)$. On peut donc écrire : $f^{-1}(x) = \ln(x) \times (1 + g(x))$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on a un ln donc écrire un produit va s'avérer pratique). En réinjectant, cela donne :

$$\ln\left(\ln(x) \times (1+g(x))\right) + \ln(x) \times (1+g(x)) = \ln(x)$$

donc

$$\ln(\ln(x)) + \ln(1+g(x)) + \ln(x) + \ln(x)\times g(x) = \ln(x)$$

Finalement : $\ln(x)\times g(x) = -\ln(\ln(x)) - \ln(1+g(x)) \sim -\ln(\ln(x))$ puisque $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc

$$g(x) \sim \frac{-\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$$

En conclusion, $g(x) = \dfrac{-\ln(\ln(x))}{\ln(x)} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}\right)$ et donc :

$$f^{-1}(x) = \ln(x) - \ln(\ln(x)) + \mathrm{o}\left(\ln(\ln(x))\right)$$

Exercice 59 : ✪✪ Prouver que $f : x \mapsto x + \ln(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et donner un développement asymptotique à 3 termes de f^{-1} en $+\infty$.

Correction : Comme précédemment, la première partie de la question se traite avec le théorème de la bijection. De plus, , f^{-1} a le même tableau de signes que f et en particulier tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Dès lors, $\ln(f^{-1}(x)) = \mathrm{o}\left(f^{-1}(x)\right)$ donc

$$\begin{aligned} x = f(f^{-1}(x)) &= f^{-1}(x) + \ln(f^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}(x) + \mathrm{o}\left(f^{-1}(x)\right) \\ &\sim f^{-1}(x) \end{aligned}$$

si bien que $f^{-1}(x) \sim x$ (évidemment, les o et les équivalents sont tous en $+\infty$) et donc $f^{-1}(x) = x + \mathrm{o}(x)$: écrivons $f^{-1}(x) = x(1+g(x))$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on prend cette écriture là car le ln va casser le produit, mais on pourrait écrire $f^{-1}(x) = x + g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{o}(x)$) ce qui donne :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(x) + \ln(f^{-1}(x)) \\ &= x + xg(x) + \ln(x) + \ln(1+g(x)) \\ &= x + xg(x) + \ln(x) + \mathrm{O}\left(g(x)\right) \end{aligned}$$

Or, $x \to +\infty$ donc $\mathrm{O}(g(x)) = \mathrm{o}(xg(x))$ (une quantité dominée par $g(x)$ est négligeable devant $g(x)$ multipliée par une quantité qui tend vers $+\infty$) si bien que :

$$-\ln(x) = xg(x) + \mathrm{o}\left(xg(x)\right)$$

et donc on trouve $g(x) \sim -\ln(x)/x$. Par conséquent, $f^{-1}(x) = x - \ln(x) + \mathrm{o}(\ln(x))$: on écrit $g(x) = -\dfrac{\ln(x)}{x}(1+h(x))$ avec h qui tend vers 0. Comme d'habitude, partons de la dernière égalité vérifiée, à savoir :

$$\begin{aligned} x &= x + xg(x) + \ln(x) + \ln(1+g(x)) \\ \\ &= x - \ln(x)(1+h(x)) + \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}(1+h(x))\right) \end{aligned}$$

Une fois le ménage fait :

$$\ln(x)h(x) = \ln\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}(1+h(x))\right)$$

On a une quantité de la forme $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0 donc :

$$\ln(x)h(x) \sim -\frac{\ln(x)}{x}(1+h(x)) \sim \frac{-\ln(x)}{x}$$

puisque h tend vers 0 donc $h(x) \sim -1/x$ donc $h(x) = -1/x + \mathrm{o}(1/x)$. En conclusion :

$$\begin{aligned} g(x) &= -\frac{\ln(x)}{x}(1+h(x)) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= -\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right) \end{aligned}$$

et donc en remplaçant dans l'expression $f^{-1}(x) = x(1+g(x))$:

$$f^{-1}(x) = x - \ln(x) + \frac{\ln(x)}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Exercice 60 : ✪✪ Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $x + \ln x = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En déduire que $\ln(x_n) = \mathrm{o}\,(x_n)$.
3. Montrer que $x_n \sim n$. Dans la suite on écrit $x_n = n(1+\alpha_n)$ avec $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. Justifier que $\alpha_n \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \mathrm{o}\,(\ln n)$. Pourquoi n'écrit-on pas $x_n \sim n - \ln(n)$? Dans la suite on écrit $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Montrer que $\beta_n \sim -\dfrac{1}{n}$, c'est-à-dire que $x_n = n - \ln n + \dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$
6. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n - \ln(n) + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)^2}{n^2}\right)$$

Correction : C'est un copier-coller de l'exercice précédent (on est décidément dans la bonne section !).

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$. La fonction f est strictement croissante, tend vers $-\infty$ en 0 et vers $+\infty$ en $+\infty$ (vous, faites un tableau de variations), et est continue. D'après le théorème de la bijection, n admet un unique antécédent par f.
2. Deux méthodes.
   - <u>Première méthode :</u> Le théorème de la bijection appliqué à la question précédente dit en plus que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ et est de même monotonie que f donc strictement croissante. En particulier, $f^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Or, $x_n = f^{-1}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
   - <u>Deuxième méthode :</u> $f(x_n) = n$ et $f(x_{n+1}) = n+1 \geq f(x_n)$. La fonction f étant strictement croissante, $x_{n+1} \geq x_n$: la suite (x_n) est croissante. Si elle converge vers une limite L alors, f étant continue, $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$ ce qui est absurde. La suite (x_n) ne converge pas, et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la deuxième partie de la question est immédiate par croissances comparées.
3. D'après la question précédente, $n = x_n + \ln(x_n) = n + \mathrm{o}\,(x_n) \sim x_n$.
4. Disons un mot sur l'écriture $x_n = n(1+\alpha_n)$. Pourquoi a-t-on le droit d'écrire ça ? Car je rappelle que deux suites sont équivalentes quand le quotient tend vers 1 donc quand le quotient est égal à 1 plus « un truc qui tend vers 0 » (ici : α_n). Cette écriture est pratique car il y a un ln qui va casser les produits. On aurait pu écrire $x_n = n + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$ mais cela aurait été moins pratique car on n'aurait pas pu profiter des propriétés du ln. Comme dit en classe, l'idée est de réinjecter dans la dernière égalité vérifiée par la suite. Ici, on n'a que la définition ce qui donne

$$n(1+\alpha_n) + \ln(n) + \ln(1+\alpha_n) = n$$

   si bien que

$$n\alpha_n + \ln(n) + \ln(1+\alpha_n) = 0$$

   donc $n\alpha_n = -\ln(n) - \ln(1+\alpha_n)$. Or, $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1+\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et en particulier $\ln(1+\alpha_n) = \mathrm{o}\,(\ln(n))$. Par conséquent, $n\alpha_n \sim -\ln(n)$ ce qui donne le résultat voulu. On n'écrit pas $x_n \sim n - \ln(n)$ car un équivalent n'a qu'un seul terme (voir le cours). On réitère l'expérience et on écrit donc $\alpha_n = -\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)$ avec $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Répétons : on réinjecte dans la dernière égalité obtenue, c'est-à-dire l'égalité $n\alpha_n = -\ln(n) - \ln(1+\alpha_n)$, ce qui donne

$$-\ln(n)(1+\beta_n) = -\ln(n) - \ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$$

   donc

$$-\ln(n)\beta_n = -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$$

Or, $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n) \sim -\dfrac{\ln(n)}{n}$, mais comme on ne peut pas composer les équivalents, on écrit plutôt $-\dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n) = -\dfrac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$ donc

$$\begin{aligned} -\ln(n)\beta_n &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

et donc $-\ln(n)\beta_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$ ce qui est le résultat voulu.

6. Tant que je gagne je joue : on écrit $\beta_n = -\dfrac{1}{n}(1+\gamma_n)$ avec $\gamma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on réinjecte dans la dernière égalité obtenue, c'est-à-dire $-\ln(n)\beta_n = -\ln\left(1 - \dfrac{\ln(n)}{n}(1+\beta_n)\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n}\left(1 - \frac{1}{n}(1+\gamma_n)\right)\right) \\ &= -\ln\left(1 - \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Si on fait un DL à l'ordre 1 de $\ln(1+u)$ alors cela donnera

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \end{aligned}$$

car tous les termes restants sont négligeables, et comme le terme de gauche est équivalent à $\ln(n)/n$, on obtient deux termes équivalents à $\ln(n)/n$ qui sont équivalents... en clair : on n'obtient aucune info ! Il faut donc faire un DL à l'ordre 2, donc

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)}{n}(1+\gamma_n) &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2\right) \\ &= \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

On développe et tous les termes négligeables sont aspirés dans le trou noir du $\mathrm{o}\,()$:

$$\begin{aligned} \frac{\ln(n)\gamma_n}{n} &= -\frac{\ln(n)}{n^2} - \frac{\ln(n)\gamma_n}{n^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) + \mathrm{o}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et donc $\gamma_n \sim \dfrac{\ln(n)}{2n}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 61 : ✪✪ Étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 \in \,]\,0\,;1\,[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{n}$$

Déterminer deux réels a et b tels que

$$u_n = 1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Correction : On a envie de dire que (u_n) tend vers 1 car le terme en $\dfrac{u_{n-1}}{n}$ tend vers 0 : le problème est qu'a priori, (u_{n-1}) peut tendre vers $+\infty$ et donc on ne peut rien dire de $\dfrac{u_{n-1}}{n}$. On peut calculer les premiers termes pour se donner une idée : on sait que $u_0 \in \left]0\,;1\right[$ donc $u_0/1 \in \left]0\,;1\right[$ donc $u_1 \in \left]1\,;2\right[$. Dès lors, $u_1/2 \in \left]\dfrac{1}{2}\,;1\right[$ et donc $u_2 \in \left]\dfrac{3}{2}\,;2\right[$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0\,;2\right[$. D'après ce qui précède, c'est vrai pour $n = 0, 1, 2$. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai au rang n et montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Par définition de la suite,

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{n+1}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $u_n \in \left]0\,;2\right[$ donc $u_{n+1} > 0$ et puisque $n \geq 2$ alors $n+1 \geq 3$ donc $u_n/(n+1) \leq 2/3 \leq 1$ donc $u_{n+1} \leq 2$: le résultat est vrai au rang $n+1$ ce qui achève la récurrence. Finalement, pour tout $n \geq 1$,

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'après le théorème d'encadrement. Il en découle que $u_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_{n-1} \sim 1$ et donc $u_{n-1} = 1 + \mathrm{o}\,(1)$. Méthode à retenir : on obtient un terme après l'autre en réinjectant dans la dernière égalité vérifiée par la suite. Pour l'instant, on a uniquement l'égalité de la définition, et donc on a

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1+\mathrm{o}\,(1)}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

On a donc $a = 1$. On veut appliquer cela à u_{n-1} pour remplacer cela dans la définition de u_n. On a

$$u_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Or, $\dfrac{1}{n-1} \sim \dfrac{1}{n}$ si bien que

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{o}\left(\frac{1}{n-1}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc $u_{n-1} = 1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qu'on réinjecte dans la dernière égalité qu'on a : toujours la relation de récurrence de (u_n).

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Exercice 62 : ✪

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique réel x_n strictement positif tel que ${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) = n$.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n^{1/4}$.
4. ✪✪✪ Montrer enfin que

$$x_n = n^{1/4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8n^{1/4}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)$$

Correction :

1. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^4 + 2x^3 + x + \ln(x)$. f étant continue, strictement croissante (car somme de fonctions strictement croissantes, ou simplement parce que sa dérivée est strictement positive), tendant vers $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$, le théorème de la bijection permet de conclure. Ci-dessous le tableau de variations de f :

x	0	x_n	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	n	$+\infty$

2. D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est aussi strictement croissante, ci-dessous son tableau de variations :

x	$-\infty$		$+\infty$
f^{-1}	0	$\nearrow$	$+\infty$

Or, $x_n = f^{-1}(n)$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. Il découle de la question précédente que ${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) \sim {x_n}^4$, les autres termes étant négligeables. Par conséquent, $n \sim {x_n}^4$ donc $x_n \sim n^{1/4}$.

4. Écrivons $x_n = n^{1/4}(1+y_n)$ avec $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Partons de la dernière égalité obtenue, à savoir l'égalité initiale :

$$n(1+y_n)^4 + 2n^{3/4}(1+y_n)^3 + n^{1/4}(1+y_n) + \frac{1}{4}\ln(n) + \ln(1+y_n) = n$$

c'est-à-dire :

$$n(1+y_n)^4 = n - 2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n)$$

Or, le membre de gauche est égal à $n(1+4y_n + \mathrm{o}\,(y_n))$ donc :

$$n + 4ny_n + \mathrm{o}\,(ny_n) = n - 2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n)$$

si bien que

$$4ny_n \sim -2n^{3/4}(1+y_n)^3 - n^{1/4}(1+y_n) - \frac{1}{4}\ln(n) - \ln(1+y_n) \sim -2n^{3/4}$$

Finalement, $y_n \sim -1/2n^{1/4}$ donc $x_n = n^{1/4} - \dfrac{1}{2} + \mathrm{o}\,(1)$. Écrivons à présent $x_n = n^{1/4}\left(1 - \dfrac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)$ avec $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On sait que

$${x_n}^4 + 2{x_n}^3 + x_n + \ln(x_n) = n$$

donc :

$$n\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)^4 + 2n^{3/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)^3 + n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right) + \ln\left(n^{1/4}\left(1 - \frac{1}{2n^{1/4}}(1+z_n)\right)\right) = n$$

Si on développe (allez, on serre les dents) avec le triangle de Pascal :

$$\begin{aligned}
n &= n\left[1 - \frac{4}{2n^{1/4}}(1+z_n) + \frac{6}{4n^{1/2}}(1+z_n)^2 - \frac{4}{8n^{3/4}}(1+z_n)^3 + \frac{1}{16n}(1+z_n)^4\right] \\
&\quad + 2n^{3/4}\left[1 - \frac{3}{2n^{1/4}}(1+z_n) + \frac{3}{4n^{1/2}}(1+z_n)^2 - \frac{1}{8n^{3/4}}(1+z_n)^3\right] \\
&\quad + n^{1/4} - \frac{1}{2} - \frac{z_n}{2} + \mathrm{O}\,(\ln(n)) \\
&= n - 2n^{3/4}(1+z_n) + \frac{3\sqrt{n}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{n^{1/4}}{2}(1+z_n)^3 + \frac{1}{16}(1+z_n)^4 \\
&\quad + 2n^{3/4} - 3\sqrt{n}(1+z_n) + \frac{3n^{1/4}}{2}(1+z_n)^2 - \frac{1}{8}(1+z_n)^3 \\
&\quad + n^{1/4} - \frac{1}{2} - \frac{z_n}{2} + \mathrm{O}\,(\ln(n))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2n^{3/4}z_n &= -2n^{3/4}+\frac{3\sqrt{n}}{2}(1+z_n)^2-\frac{n^{1/4}}{2}(1+z_n)^3+\frac{1}{16}(1+z_n)^4 \\
&\quad +2n^{3/4}-3\sqrt{n}(1+z_n)+\frac{3n^{1/4}}{2}(1+z_n)^2-\frac{1}{8}(1+z_n)^3 \\
&\quad +n^{1/4}-\frac{1}{2}-\frac{z_n}{2}+\mathrm{O}\left(\ln(n)\right) \\
&= \frac{3\sqrt{n}}{2}-3\sqrt{n}+\mathrm{o}\left(\sqrt{n}\right) \\
&\sim -\frac{3\sqrt{n}}{2}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 63 : ✪✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, l'équation $x - n\ln(x) = 0$ admet deux solutions strictement positives $u_n < v_n$.
2. Étudier la monotonie et la limite de (u_n) et (v_n).
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de (u_n).
4. Déterminer un équivalent de (v_n).

Correction :

1. Soit $n \geq 3$. Notons $f_n = x \mapsto x - n\ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$,

$$f_n{}'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

D'où le tableau de variations suivant :

x	0		n		$+\infty$
$f_n{}'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$n - n\ln(n)$	$\nearrow$	$+\infty$

f étant continue strictement décroissante sur $]\,0\,;n\,]$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $f(n) < 0$ (car $n \geq 3$ donc $\ln(n) > 1$), d'après le théorème de la bijection, f s'annule une unique fois en un réel noté u_n sur cet intervalle. De même sur l'autre.

2. On sait que $f_n(1) = 1 > 0$ donc, d'après le tableau de variations de f_n, u_n et v_n sont strictement supérieurs à 1. Par conséquent, u_n et v_n sont les seules solutions de l'équation

$$\frac{x}{\ln(x)} = n$$

sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Notons g la fonction définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ par $g(x) = x/\ln(x)$. g est dérivable et, pour tout $x > 1$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{\ln(x)} + x \times \frac{-1/x}{\ln(x)^2} \\
&= \frac{\ln(x)-1}{\ln(x)^2}
\end{aligned}$$

D'où le tableau de variations de g :

x	1		e		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Précisons qu'on aurait pu utiliser g pour répondre à la question précédente. D'après le tableau de variations de g, sur $]\,0\,;u_n\,[$, g est supérieure à n et, sur $]\,u_n\,;e\,[$, g est inférieure à n. Puisque $g(u_{n+1}) = n+1 > n$, alors $u_{n+1} < u_n$: la suite (u_n) est strictement décroissante. De même, la suite (v_n) est strictement croissante. D'après le théorème de la bijection (g continue strictement décroissante), g (ou plutôt sa restriction à $]\,1\,;e\,]$) est une bijection de $]\,1\,;e\,]$ dans $]\,e\,;+\infty\,[$ et sa réciproque, qu'on note g^{-1} (même si c'est la réciproque de la restriction de g à $]\,1\,;e\,]$), est continue sur $[\,e\,;+\infty\,[$ de même monotonie que g (ou plutôt sa restriction) donc $g^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$:

x	e	$+\infty$
$g^{-1}(x)$	e $\searrow$	1

Or, $u_n = g^{-1}(n)$ (encore une fois, on se restreint à $]\,1\,;e\,]$) donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On prouve de même que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (ou tout simplement car, d'après la question 1, $v_n \geq n$ pour tout n donc on peut conclure à l'aide du théorème de minoration).

3. On sait déjà que $u_n \sim 1$ donc $u_n = 1 + \mathrm{o}\,(1)$: notons $u_n = 1 + v_n$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, qu'on réinjecte dans la dernière égalité, à savoir la seule qu'on ait pour l'instant : $u_n = n\ln(u_n)$. Dès lors :
$$1 + v_n = n\ln(1+v_n) \sim nv_n$$
puisque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $nv_n \sim 1$ si bien que $v_n \sim 1/n$: $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

4. On a : $v_n = n\ln(v_n)$ donc $\ln(v_n) = \ln(n) + \ln(\ln(v_n))$ donc $\ln(n) = \ln(v_n) - \ln(\ln(v_n))$. Or, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(\ln(v_n)) = \mathrm{o}\,(\ln(v_n))$ donc $\ln(n) \sim \ln(v_n)$. Finalement, $v_n = n\ln(v_n) \sim n\ln(n)$.

Exercice 64 : ✪✪ Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique réel u_n tel que ${u_n}^5 + nu_n - 1 = 0$. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Correction : Soit donc $n \geq 1$. Notons $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. L'application f_n est strictement croissante (inutile de dériver : c'est la somme de trois fonctions croissantes dont deux sont strictement croissantes), tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et vers $+\infty$ en $+\infty$. f_n est de plus continue donc le théorème de la bijection permet de conclure. Ci-dessous le tableau de variations de f_n :

x	$-\infty$	u_n	$+\infty$
${f_n}'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Par conséquent, $x < u_n$ si et seulement si $f_n(x) < 0$, et on a aussi une équivalence avec les inégalités dans l'autre sens. Précisons tout de suite que $f_n(0) = -1 < 0$ donc $u_n > 0$, et que $f_n(1) = n > 0$ donc $u_n < 1$: la suite (u_n) est bornée par 0 et 1. Par conséquent, ${u_n}^5 = 1 - nu_n$ donc $0 \leq 1 - nu_n \leq 1$ si bien que $nu_n \in [\,0\,;1\,]$ donc $0 \leq u_n \leq 1/n$. Par conséquent, $u_n = \mathrm{O}\,(1/n)$ donc ${u_n}^5 = \mathrm{O}\left(1/n^5\right)$. Par conséquent, $nu_n = 1 - {u_n}^5 \sim 1$ si bien que $u_n \sim 1/n$. Écrivons
$$u_n = \frac{1}{n}\left(1 + v_n\right)$$
avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Injectons dans la dernière égalité, à savoir $nu_n = 1 - {u_n}^5$:
$$1 + v_n = 1 - \frac{1}{n^5}\left(1+v_n\right)^5$$
si bien que
$$v_n = -\frac{1}{n^5}\left(1+v_n\right)^5 \sim -\frac{1}{n^5}$$
Finalement, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 65 : ✪✪✪

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n \in \left[2n\pi\,;2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x_n) = \dfrac{1}{x_n}$.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de x_n.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit

$$g : \begin{cases} \left[2n\pi\,;2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \sin(x) - \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

g est dérivable et, si $x \in \left[2n\pi\,;2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g'(x) = \cos(x) + \dfrac{1}{x^2} > 0$ (le cosinus est positif sur cet intervalle). g est donc strictement croissante, continue, $g(2n\pi) = -1/2n\pi < 0$ et $g\left(2n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n\pi + \pi/2} > 0$ donc, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution notée x_n.

2. Tout d'abord, $2n\pi \leq x_n \leq 2n\pi + \dfrac{\pi}{2}$. x_n est donc encadré par deux quantités équivalentes à $2n\pi$ donc $x_n \sim 2n\pi$. On note donc $x_n = 2n\pi + y_n$ avec $y_n = \mathrm{o}\,(n)$ (vu qu'on a un sinus et pas un ln ou une puissance, il est plus facile de travailler avec une somme qu'avec un produit). On a, par définition de x_n : $\sin(x_n) = 1/x_n$ donc

$$\sin(2n\pi + y_n) = \frac{1}{2n\pi + y_n}$$

et, par 2π-périodicité du sinus, $\sin(y_n) = 1/(2n\pi + y_n) = 1/x_n$. Or, d'une part, $y_n \in [\,0\,;\pi/2\,]$ donc $\mathrm{Arcsin}(\sin(y_n)) = y_n$ (rappelons que $\mathrm{Arcsin}(\sin(x)) = x$ si $x \in [\,-\pi/2\,;\pi/2\,]$). D'autre part, $1/x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et Arcsin est continue donc $\mathrm{Arcsin}(1/x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Arcsin}(0) = 0$ donc

$$\mathrm{Arcsin}(\sin(y_n)) = y_n = \mathrm{Arcsin}(1/x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En d'autres termes, $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\sin(y_n) \sim y_n$ et $\sin(y_n) = 1/x_n \sim 1/2n\pi$ donc $y_n \sim 1/2n\pi$. Posons enfin $y_n = \dfrac{1}{2n\pi} + z_n$ avec $z_n = \mathrm{o}\,(1/n)$. Partons de l'égalité

$$\sin(y_n) = \frac{1}{2n\pi + y_n}$$

c'est-à-dire

$$\sin\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right) = \frac{1}{2n\pi + \dfrac{1}{2n\pi} + z_n}$$

Faisons un DL à l'ordre 3 : pour le membre de gauche,

$$\sin\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right) = \frac{1}{2n\pi} + z_n - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right)^3 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right)^3\right)$$

Or, $\left(\dfrac{1}{2n\pi} + z_n\right) \sim \dfrac{1}{2n\pi}$ donc $\mathrm{o}\left(\left(\dfrac{1}{2n\pi} + z_n\right)^3\right) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\left(\dfrac{1}{2n\pi} + z_n\right)^3 \sim \dfrac{1}{8n^3\pi^3}$ c'est-à-dire (attention, on ne peut pas sommer des équivalents mais on peut sommer des o) :

$$\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right)^3 = \frac{1}{8n^3\pi^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

En conclusion :

$$\sin\left(\frac{1}{2n\pi} + z_n\right) = \frac{1}{2n\pi} + z_n - \frac{1}{48\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Si on fait pareil pour le membre de droite (quotient : factoriser par le terme dominant pour faire apparaître du $1/(1+u)$) :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2n\pi + \dfrac{1}{2n\pi} + z_n} &= \frac{1}{2n\pi + \dfrac{1}{2n\pi} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)} \\
&= \frac{1}{2n\pi} \times \frac{1}{1 + \dfrac{1}{4n^2\pi^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)} \\
&= \frac{1}{2n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{4n^2\pi^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{8n^3\pi^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

Finalement :

$$
\frac{1}{2n\pi} + z_n - \frac{1}{48\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) = \frac{1}{2n\pi} - \frac{1}{8n^3\pi^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
$$

donc

$$
\begin{aligned}
z_n &= \frac{1}{48\pi^3 n^3} - \frac{1}{8n^3\pi^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{1-6}{48\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \\
&= \frac{-5}{48\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$
x_n = 2n\pi + \frac{1}{2n\pi} - \frac{5}{48\pi^3 n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)
$$

Exercice 66 - Développement asymptotique de la « fonction inverse d'un polynôme » : ✪✪✪ Soient $n > m$ deux entiers naturels. On se donne P un polynôme unitaire de degré n tel que $P - X^n$ soit de degré m, c'est-à-dire que P s'écrit sous la forme

$$
P = X^n + a_m X^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k X^k
$$

avec $a_m \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que P soit une bijection entre $[\,\alpha\,; +\infty\,[$ et $[\,P(\alpha)\,; +\infty\,[$.
2. Donner un développement asymptotique à deux termes de P^{-1} en $+\infty$.

Correction :

1. P est de degré $n \geq 1$ (car $n > m \geq 0$) donc P' n'est pas le polynôme nul. En particulier, P' a un nombre fini de racines (voire aucune) : si on note α la plus grande racine réelle éventuelle de P' (si P', on prend α quelconque, par exemple égal à 0), si bien que P' ne s'annule pas sur $]\,\alpha\,; +\infty\,[$. P' étant continu, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P' ne change pas de signe sur cet intervalle et $P' = nX^{n-1} + \cdots$ donc $P'(x) \sim nx^{n-1}$ en $+\infty$ donc P' est positif au voisinage de $+\infty$ (deux quantités équivalentes en $+\infty$ ont même signe au voisinage de $+\infty$) et comme P' ne change pas de signe sur cet intervalle, on a le tableau de variations suivant :

x	α		$+\infty$
$P'(x)$	0	$+$	
P	$P(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

La limite découle du fait que $P(x) \sim x^n$ en $+\infty$. On conclut avec l'aide du théorème de la bijection (fonction continue strictement croissante). On obtient le tableau de variations suivant pour P^{-1} :

x	$P(\alpha)$	$+\infty$
P^{-1}	α	$+\infty$

En particulier, $P^{-1}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Soit donc $x \geq P(\alpha)$. $P(P^{-1}(x)) = x$ donc :

$$\left(P^{-1}(x)\right)^n + a_m \left(P^{-1}(x)\right)^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k \left(P^{-1}(x)\right)^k = x$$

Le membre de gauche est équivalent à $\left(P^{-1}(x)\right)^n$ puisque P^{-1} tend vers $+\infty$, si bien que $\left(P^{-1}(x)\right)^n \sim x$ et l'équivalent passe à la puissance fixe donc $P^{-1}(x) \sim x^{1/n}$.

On écrit donc $P^{-1}(x) = x^{1/n} \times (1 + f(x))$ avec $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on a des puissances donc écrire un produit va se révéler intéressant). On introduit cette expression dans l'égalité ci-dessus :

$$x\,(1+f(x))^n + a_m x^{m/n}\,(1+f(x))^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k/n}\,(1+f(x))^k = x$$

f tend vers 0 donc on peut faire un DL de $(1+u)^\alpha$:

$$x(1 + nf(x) + \mathrm{o}\,(f(x))) + a_m x^{m/n}(1 + mf(x) + \mathrm{o}\,(f(x))) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k/n}\,(1 + kf(x) + \mathrm{o}\,(f(x))) = x$$

et, en utilisant le fait que $f(x) = \mathrm{o}\,(1)$:

$$nxf(x) + \mathrm{o}\,(xf(x)) + a_m x^{m/n} + \mathrm{o}\left(x^{m/n}\right) = 0$$

On en déduit donc que $nxf(x) + \mathrm{o}\,(xf(x)) = -a_m x^{m/n} + \mathrm{o}\left(x^{m/n}\right)$ donc $nxf(x) \sim -a_m x^{m/n}$ et donc

$$f(x) \sim \frac{-a_m x^{m/n} - 1}{n} = \frac{-a_m}{nx^{1-m/n}}$$

En conclusion :

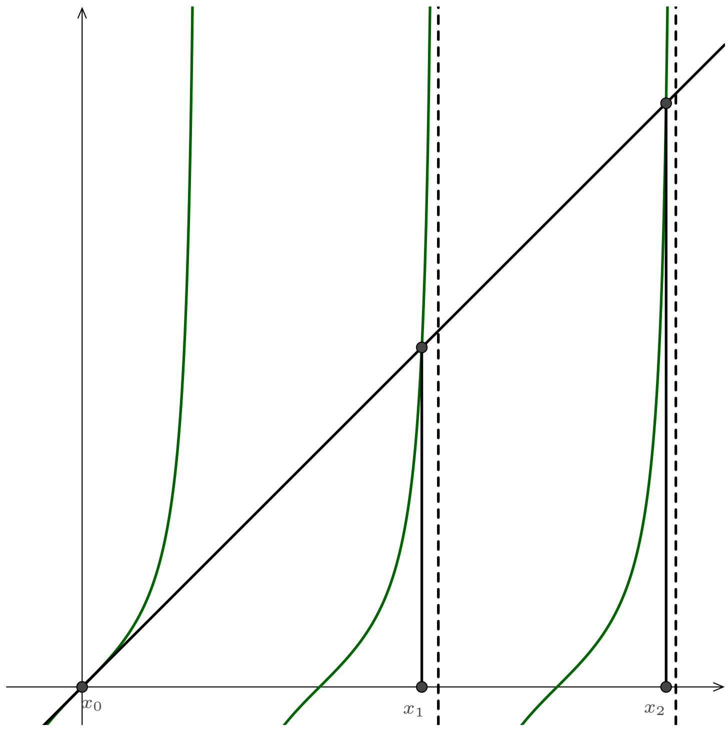
$$P^{-1}(x) = x^{1/n} - \frac{a_m}{nx^{1-\frac{m+1}{n}}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{1-\frac{m+1}{n}}}\right)$$

Exercice 67 : ✪✪✪

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution $x_n \in \left[n\pi\,; n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$. Illustrer graphiquement.
2. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Montrer que $x_n \sim n\pi$. On note $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$.
4. Montrer que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
5. Donner un développement asymptotique de x_n à la précision $1/n^2$.

Correction :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\left[n\pi\,; n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$ la fonction f par $f(x) = \tan(x) - x$. La fonction f est dérivable sur cet intervalle, de dérivée $f' : x \mapsto \tan^2(x)$. Or, f' est positive et ne s'annule qu'en $n\pi$ (attention, f' n'est pas strictement positive) donc en un nombre fini de points : f est strictement croissante, $f(n\pi) = -n\pi \leq 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to n\pi + \frac{\pi}{2}^-]{} +\infty$ et f est continue : on conclut avec le théorème de la bijection. Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous : le graphe de la tangente coupe exactement une fois la première bissectrice sur chaque intervalle $[\,n\pi\,; n\pi + \pi/2\,[$:



2. Par définition, $n\pi \leq x < n\pi + \dfrac{\pi}{2}$: le théorème d'encadrement permet de conclure.
3. On divise par $n\pi$ dans la double inégalité précédente et on fait tendre n vers $+\infty$: d'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{x_n}{n\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $x_n \sim n\pi$.
4. On revient à l'écriture de l'équivalence avec un $\mathrm{o}\,()$: $x_n = n\pi + \alpha_n$ avec $\alpha_n = \mathrm{o}\,(n)$. On revient à la dernière égalité obtenue, ici il n'y en a qu'une : la définition, ce qui donne $\tan(n\pi + \alpha_n) = n\pi + \alpha_n$ et la tangente étant π-périodique, $\tan(\alpha_n) = n\pi + \alpha_n$. Or, $\alpha_n \in \left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ donc $\mathrm{Arctan}(\tan(\alpha_n)) = \alpha_n$ donc

$$\alpha_n = \mathrm{Arctan}(n\pi + \alpha_n)$$

c'est-à-dire $\alpha_n = \mathrm{Arctan}(x_n)$. Or, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\mathrm{Arctan}(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$ ce qui permet de conclure.

5. Recommençons : notons $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2} + \beta_n$ avec $\beta_n = \mathrm{o}\,(1)$. On réinjecte dans la dernière égalité obtenue, ce qui donne

$$\frac{\pi}{2} + \beta_n = \mathrm{Arctan}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \beta_n\right)$$

On a Arctan d'un truc qui tend vers $+\infty$: on se ramène à un truc qui tend vers 0 (pour faire un DL) à l'aide de la formule habituelle : $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x) = \pi/2$ avec $x > 0$, donc

$$\frac{\pi}{2} + \beta_n = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} \beta_n &= -\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n}\right) \\ &\sim -\frac{1}{n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \beta_n} \qquad\qquad (\mathrm{Arctan}(u) \sim u \text{ quand } u \to 0) \\ &\sim -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Il faut recommencer pour avoir une précision en $1/n^2$: on recommence en écrivant $\beta_n = -\dfrac{1}{n\pi} + \gamma_n$ avec $\gamma_n = \mathrm{o}\,(1/n)$. On réinjecte dans la dernière égalité obtenue :

$$-\frac{1}{n\pi}+\gamma_n=-\text{Arctan}\left(\frac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{n\pi}+\gamma_n}\right)$$

Notons u_n le terme dans l'Arctan : on veut faire un DL à l'aide du DL de $\dfrac{1}{1+u}$ et on veut une précision en $1/n^2$ (on rappelle que $\gamma_n=\text{o}\left(1/n\right)$).

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n\pi}\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{2n}+\text{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)} \quad \text{(les autres termes sont négligeables)}\\
&= \frac{1}{n\pi}\left(1-\frac{1}{2n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= \frac{1}{n\pi}-\frac{1}{2\pi n^2}+\text{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On réinjecte dans l'égalité précédente et on fait un DL à l'ordre 1 de $\text{Arctan}(u)$ (le terme suivant est en u^3 donc en $1/n^3$ ce qui est trop grand)

$$-\frac{1}{n\pi}+\gamma_n=\frac{-1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+\text{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on trouve $\gamma_n\sim\dfrac{1}{2\pi n^2}$ et finalement

$$x_n=n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n\pi}+\frac{1}{2\pi n^2}+\text{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 68 : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $x\geq 1$, il existe un unique réel noté $f(x)\geq 1$ tel que
$$f(x)+\sqrt{\ln(f(x))}=x$$
2. Donner un développement asymptotique de f à 3 termes lorsque x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(1+t)-1\sim t^2$ au voisinage de 0.
4. Donner l'allure du graphe de f.

Correction :

1. Soit
$$\varphi\colon\begin{cases}[\,1\,;+\infty\,[& \longrightarrow \quad \mathbb{R}\\ \quad y & \longmapsto y+\sqrt{\ln(y)}\end{cases}$$

Précisons que φ est bien définie car la fonction ln est positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$. φ est somme et composée de fonctions strictement croissantes donc est strictement croissante (attention si on dérive φ : φ n'est pas dérivable en 1, il faut préciser que φ est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$, dérivable sur $]\,1\,;+\infty\,[$ de dérivée strictement positive). On en déduit le tableau de variations de φ :

x	1	$+\infty$
φ	1 $\nearrow$	$+\infty$

Il suffit d'appliquer le théorème de la bijection (fonction continue strictement croissante) pour conclure : tout réel $x\geq 1$ admet un unique antécédent $y\geq 1$, et il suffit de poser $y=f(x)$. Précisons donc que f est en fait la bijection réciproque de φ, donc $f=\varphi^{-1}$ dont voici le tableau de variations (toujours d'après le théorème de la bijection) :

$$\begin{array}{|c|ccc|}
\hline
x & 1 & & +\infty \\
\hline
 & & & +\infty \\
\varphi^{-1} = f & & \nearrow & \\
 & 1 & & \\
\hline
\end{array}$$

$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, par croissances comparées, $\sqrt{\ln(f(x))} = \mathrm{o}\left(f(x)\right)$ donc $f(x)+\sqrt{\ln(f(x))} \sim f(x)$ donc $f(x) \sim x$. Puisqu'il y a un ln, écrivons un produit, c'est-à-dire qu'on note $f(x) = x(1+g(x))$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Dès lors :

$$x + xg(x) + \sqrt{\ln(x(1+g(x)))} = x$$

et donc

$$xg(x) = -\sqrt{\ln(x) + \ln(1+g(x))} \sim -\sqrt{\ln(x)}$$

donc $g(x) \sim -\sqrt{\ln(x)}/x$. Notons enfin $g(x) = -\dfrac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \times (1+h(x))$ avec $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, qu'on réinjecte dans l'égalité ci-dessus (à savoir $xg(x) = \dots$, attention, l'égalité, pas l'équivalent) :

$$-\sqrt{\ln(x)} \times (1+h(x)) = -\sqrt{\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} \times (1+h(x))\right)}$$

Faisons un DL du ln de droite (on a bien $\ln(1+u)$ avec u qui tend vers 0) et utilisons le fait que $h(x) = \mathrm{o}\left(1\right)$:

$$-\sqrt{\ln(x)} \times (1+h(x)) = -\sqrt{\ln(x) - \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}\right)}$$

On veut se ramener à $(1+u)^\alpha$: on factorise donc par $\ln(x)$ dans la racine carrée :

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\ln(x)} \times (1+h(x)) &= -\sqrt{\ln(x)} \times \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\right)\right)^{1/2} \\
&= -\sqrt{\ln(x)} \times \left(1 - \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}\right)\right) \\
&= -\sqrt{\ln(x)} + \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

et donc, en simplifiant par $-\sqrt{\ln(x)}$, on trouve que $h(x) \sim -1/2x\sqrt{\ln(x)}$. On trouve finalement :

$$f(x) = x - \sqrt{\ln(x)} + \frac{1}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. Repartons de l'expression initiale, qu'on évalue en $x = 1+t$ avec $t \to 0$:

$$f(1+t) + \sqrt{\ln(f(1+t))} = 1+t$$

Or, $f(x) \xrightarrow[x\to1]{} f(1) = 1$ car $f = \varphi^{-1}$ est continue et $\varphi^{-1}(1) = 1$. En particulier, on peut écrire $f(1+t) = 1 + u(t)$ avec $u(t) \xrightarrow[t\to0]{} 0$. Par conséquent :

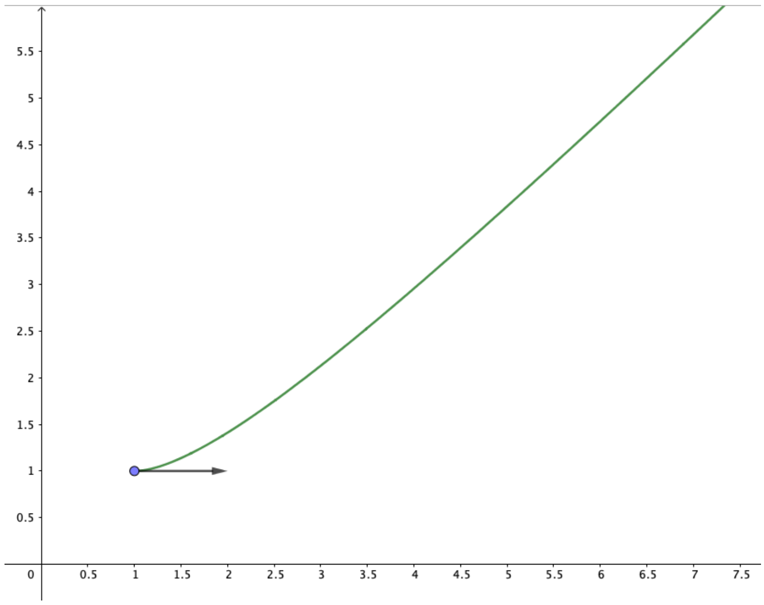
$$1 + u(t) + \sqrt{\ln(1+u(t))} = 1+t$$

et en faisant un DL du ln (et en simplifiant par 1), il vient :

$$u(t) + \sqrt{u(t) + \mathrm{o}\left(u(t)\right)} = t$$

Or, $u(t) \xrightarrow[t\to0]{} 0$ donc $u(t) = \mathrm{o}\left(\sqrt{u(t)}\right)$ si bien que le terme de gauche est équivalent à $\sqrt{u(t)}$, donc $\sqrt{u(t)} \sim t$ ce qui permet de conclure.

3. On a $f(1) = 1$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, f strictement croissante. De l'équivalent de la question précédente, on déduit que « f se comporte comme la fonction carré qu'on ferait partir du point $(1,1)$ et donc f a une tangente horizontale au point de départ, et de l'équivalent $f(x) \sim x$ en $+\infty$, on déduit que f « se comporte comme x en $+\infty$ ». On en déduit le graphe suivant :



Exercice 69 : ✪✪✪✪

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x = 1$ admet une unique solution positive notée (a_n).
2. Montrer que (a_n) converge vers une limite qu'on notera L et qu'on explicitera.
3. Donner un équivalent de $a_n - L$.

Correction :

1. Comme d'habitude, théorème de la bijection appliqué à la fonction $f_n : x \mapsto x^n + \cdots + x$ dont voici le tableau de variations :

x	0	a_n	$+\infty$
${f_n}'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0 ↗	1	$+\infty$

2. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} f_{n+1}(a_n) &= {a_n}^{n+1} + f_n(a_n) \\ &= {a_n}^{n+1} + 1 \\ &> 1 \end{aligned}$$

puisque $a_n > 0$. Dès lors, d'après le tableau de variations de f_{n+1} (analogue à celui de f_n), on en déduit que $a_{n+1} < a_n$: la suite (a_n) est décroissante, minorée par 0 donc converge vers une limite $L \geq 0$ (attention, c'est l'inégalité **large** qui passe à la limite). On sait que, pour tout $n \geq 2$, $f_n(1) = n > 1$ donc $a_n < 1$, si bien que (somme géométrique qui commence en $k = 1$) :

$$f_n(a_n) = \frac{a_n - {a_n}^{n+1}}{1 - a_n} = 1$$

donc $a_n - {a_n}^{n+1} = 1 - a_n$ et donc $2a_n = 1 + {a_n}^{n+1}$. Or, si $n \geq 2$, $f_n(3/4) \geq (3/4)^2 + 3/4 > 1$ si bien que $a_n \leq 3/4$. Par conséquent, $0 \leq {a_n}^{n+1} \leq (3/4)^{n+1}$ donc, d'après le théorème d'encadrement, ${a_n}^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $2a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: on trouve donc que $L = 1/2$ (il n'était même pas nécessaire de prouver au préalable la monotonie et la convergence de la suite puisqu'on trouve la limite avec des opérations sur les limites).

3. Écrivons $a_n = \dfrac{1}{2}(1+b_n)$ avec $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et reprenons à la dernière égalité trouvée, à savoir $2a_n = 1 + {a_n}^{n+1}$:

$$1 + b_n = 1 + \frac{1}{2^{n+1}}\left(1+b_n\right)^{n+1}$$

donc $b_n = \dfrac{1}{2^{n+1}}(1+b_n)^{n+1}$. Par conséquent :

$$\ln(b_n) \quad = \quad -(n+1)\ln(2) + (n+1)\ln(1+b_n)$$

Or, $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(n+1)\ln(1+b_n) = \mathrm{o}\left(n\right)$ et donc $\ln(b_n) \sim -(n+1)\ln(2) \sim -n\ln 2$. Par conséquent, pour n assez grand, $\ln(b_n) \leq -n\ln(2)/2$ si bien que

$$b_n \leq e^{-\frac{n\ln(2)}{2}}$$

On en déduit que $b_n = \mathrm{o}\left(1/n\right)$ donc :

$$\begin{aligned}(1+b_n)^{n+1} &= e^{(n+1)\ln(1+b_n)} \\ &= e^{(n+1)\times \mathrm{o}(1/n)} \\ &= e^{\mathrm{o}(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\end{aligned}$$

et donc $b_n \sim 1/2^{n+1}$. En conclusion,

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)$$

c'est-à-dire que $a_n - \dfrac{1}{2} \sim \dfrac{1}{2^{n+2}}$.

Chapitre 25

Séries numériques

« Beaucoup d'éducateurs disent aux étudiants : "Considérez votre proviseur comme un copain" et bien moi je dis : considérez-moi comme votre juge, votre jury et votre bourreau. »

Buffy contre les vampires

Les séries sont supposées à valeurs réelles.

Vrai ou Faux :

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $\sum q^n$ converge.
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $\sum u_n$ diverge.
4. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum (u_n + v_n)$ converge.
5. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
6. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent et sont à termes positifs alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
7. Si $\sum (u_n + v_n)$ converge alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
8. Si $\sum (u_n + v_n)$ converge et si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
9. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ diverge.
10. Si $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum u_n$ converge.
11. Si $u_n \sim \frac{1}{n}$ alors $\sum u_n$ diverge.
12. Si $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
13. Si $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $\sum u_n$ diverge.
14. Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente alors $\sum {u_n}^2$ converge.

25.1 Séries explicites

Exercice 1 : ✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum \frac{n}{n^2+1}$
2. $\sum \frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$
3. $\sum \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{n-3}$
4. $\sum \frac{2024^{-n}}{n-2}$
5. $\sum e^{-\sqrt{n}}$
6. $\sum \frac{\ln(n)^2}{n^{5/4}}$
7. $\sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\sqrt[n]{5} - 1\right)$
8. $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^4}$
9. $\sum \frac{1}{\sin(n^2) + n}$
10. $\sum \frac{a^n}{1+b^n}, a > 0, b > 0$
11. $\sum \frac{e^n + e^{-n}}{e^{2n} + e^{-2n}}$
12. $\sum \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor + n}$
13. $\sum \frac{(-1)^n}{n^{n-1}}$
14. $\sum \frac{n + \ln(n) + e^{-n}}{(n+\pi)^3}$

15. $\sum \sin(n!)\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)}-1\right)\times\sqrt{\ln(n)}$
16. $\sum \frac{\ln(n)\sqrt{n}+\ln(\ln(n))}{n^2}$
17. $\sum \frac{(-1)^n\cos(n!^n)\ln\left(n^{2024}\right)}{n\sqrt{n}}$
18. $\sum \frac{1}{n\cos^2(n)}$
19. $\sum \frac{\operatorname{Arctan}\left(\pi^{-n}\right)\times\operatorname{Arctan}\left(\pi^{n}\right)}{\ln(n)}$
20. $\sum \frac{1}{n^2-\ln(n)}$
21. $\sum \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n\sqrt{n}}-1$
22. $\sum \frac{n^{1789}\ln(n)^{2024}}{e^n}$
23. $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+(1/n)}$
24. $\sum \left(\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right)^{n^2}$
25. $\sum 2\ln\left(n^3+1\right)-3\ln\left(n^2+1\right)$
26. ✪✪ $\sum \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}$
27. $\sum \frac{n^2+\pi\sqrt{2}\times n^2\ln(n)-2024n}{n^4+3n^3+18n^2-1}$
28. ✪✪ $\sum n\times\ln\left(\frac{n^4+2n^3-2n-1}{n^4+2n^3}\right)$
29. ✪✪ $\sum \frac{(4/3)^n}{n^3}\sin^{2n}(\alpha), \alpha\in\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Correction :

1. Notons u_n le terme général de la série (on fera ça à chaque fois). $u_n \sim \dfrac{1}{n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique, ou car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc les séries sont de même nature. Ainsi, $\sum u_n$ diverge.
2. Mettons au même dénominateur :

$$u_n = \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2}}{\sqrt{n-2}\times\sqrt{n+3}}$$

Le dénominateur est équivalent à n. Notons a_n le numérateur.

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n}\times\left(1+\frac{3}{n}\right)^{1/2}-\sqrt{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n}\left(1+\frac{3}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)-\sqrt{n}\left(1-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{3}{2\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

si bien que $a_n \sim \dfrac{5}{2\sqrt{n}}$ et donc $u_n \sim \dfrac{5}{2n^{3/2}}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc les séries sont de même nature. La série $\sum \dfrac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$) donc la série $\sum u_n$ converge.
3. Puissance variable : on passe à l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{(n-3)\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)} \\ &= e^{(n-3)\left(\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{1/2} \end{aligned}$$

En particulier, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
4. On ne peut pas donner un équivalent plus simple que $2024^{-n}/n$ ce qui n'est pas une série de référence : il faut donc utiliser une autre « partie » du théorème de comparaison, soit négligeable soit inférieur ou égal. Or,

$$u_n \leq 2024^{-n} = \frac{1}{2024^n}$$

pour n assez grand. De plus, $\sum \dfrac{1}{2024^n}$ converge (série géométrique de raison $1/2024 < 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

5. On ne peut pas donner un équivalent plus simple de u_n. On voit une exponentielle, on pense donc à la méthode qui a fait déjà ses preuves : comparer à $1/n^2$. Or,

$$n^2 u_n = n^2 e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. Dès lors, $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

6. On reconnaît une série de Bertrand, mais je rappelle que celles-ci sont HP : on ne peut pas dire que cette série converge car c'est une série de Bertrand avec $\alpha = 5/4 > 1$. Cependant, il faut connaître la méthode : on multiplie par $n^{\frac{\alpha+1}{2}} = n^{\frac{9}{8}}$.

$$n^{\frac{9}{8}} u_n = \frac{\ln(n)^2}{n^{\frac{1}{8}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{9/8}}\right)$. Or, $\sum \dfrac{1}{n^{9/8}}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{9}{8} > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

7. Puissance variable (on n'oublie pas que la racine n-ième est la puissance $1/n$) : on passe à l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(e^{\frac{\ln(5)}{n}} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1 + \frac{\ln(5)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \\ &\sim \frac{\ln(5)}{n^{3/2}} \end{aligned}$$

ce qui est le terme général d'une série convergente (série de Riemann de paramètre $\alpha = \dfrac{3}{2} > 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge.

8. Idem : puissance variable donc on passe à l'exponentielle.

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n^4 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \\ &= e^{n^4 \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \\ &= e^{-\frac{n^2}{2} + \mathrm{o}\left(n^2\right)} \end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas affirmer que $u_n \sim e^{-n^2}$ car on n'a aucune idée de la limite du $\mathrm{o}\left(n^2\right)$: il peut très bien tendre vers $+\infty$. Si on veut donner un équivalent, il faut pousser le DL plus loin jusqu'à obtenir un $\mathrm{o}(1)$ mais cela ne va pas être nécessaire ici : on a une exponentielle donc on pense à comparer à $\dfrac{1}{n^2}$.

$$n^2 u_n = e^{2\ln(n) - n^2 + \mathrm{o}\left(n^2\right)}$$

Or, $2\ln(n) - n^2 + \mathrm{o}\left(n^2\right) \sim -n^2$ (là on a le droit, pourquoi ?) donc en particulier cette quantité tend vers $-\infty$, si bien que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.

9. Bien sûr, il ne viendrait à l'idée de personne de dire que $\sin\left(n^2\right) \sim n^2$ puisque n^2 ne tend pas vers 0. C'est beaucoup plus simple : le sinus étant borné, il est négligeable devant n donc $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ diverge.

10. On veut donner un équivalent de u_n donc du dénominateur. Cela dépend de la valeur de b.
   - Si $b > 1$ alors $1 + b^n \sim b^n$ (car $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$). Dès lors, $u_n \sim \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Or, $\sum \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ est une série géométrique donc converge si et seulement si $\dfrac{a}{b} < 1$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge si et seulement si $a < b$.

- Si $b=1$ alors $u_n = \dfrac{a^n}{2}$. Or, la série $\sum a^n$ est géométrique de raison a donc converge si et seulement si $a<1$. Ici, même pas besoin de théorème de comparaison : $\sum u_n$ converge si et seulement si $a<1$.
- Si $b<1$ alors $b \in \left]0\,;1\right[$ (car $b>0$) donc $u_n \sim a^n$ (car $b^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). De même (séries à termes positifs...) $\sum u_n$ converge si et seulement si $a<1$.
- D'après l'exercice 24 du chapitre 24 (question 5), le numérateur est équivalent à $e/2n$. De plus, puisque pour tout réel x, on a $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$, alors $0 \le x - \lfloor x\rfloor < 1$, si bien que $0 \le n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor < 1$ et donc $n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor = \mathrm{o}\,(n)$: le dénominateur est équivalent à n donc $u_n \sim \dfrac{e}{2n^2}$ et de même que précédemment, $\sum u_n$ converge.

En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si ($b>1$ et $a<b$) ou ($b \le 1$ et $a<1$).

11. De façon immédiate, $u_n \sim \dfrac{e^n}{e^{2n}} = \dfrac{1}{e^n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{e^n}$ est une série géométrique de raison $1/e<1$ donc converge. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge.
12. D'après l'exercice 24 du chapitre 24, le numérateur est équivalent à $e/2n$. De plus, puisque pour tout réel x, on a $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$, alors $0 \le x - \lfloor x\rfloor < 1$, si bien que $0 \le n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor < 1$ et donc $n^{3/2} - \left\lfloor n^{3/2}\right\rfloor = \mathrm{o}\,(n)$: le dénominateur est équivalent à n donc $u_n \sim \dfrac{e}{2n^2}$ et de même que précédemment, $\sum u_n$ converge.
13. Attention, $|u_n| = \dfrac{1}{n^{n-1}}$ n'est pas le terme général d'une série de Riemann car l'exposant d'une série de Riemann doit être FIXE ! Cependant, puisque $n \to +\infty$ alors $n-1 \ge 2$ pour n assez grand, donc
$$|u_n| \le \frac{1}{n^2}$$
pour n assez grand. Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. En d'autres termes, $\sum u_n$ converge absolument donc converge. On pouvait également utiliser le CSA puisque, pour tout n, $n^{n-1} = e^{(n-1)\ln(n)}$ qui est le terme général d'une suite croissante donc $1/n^{n-1}$ est le terme général d'une suite décroissante qui tend vers 0.
14. $u_n \sim \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.
15. Ici, le terme général de la série n'est pas de signe constant et il n'est pas envisageable d'utiliser le CSA à cause du sinus : la série n'est pas forcément alternée, ni décroissante en valeur absolue. Une seule solution : prouver la CVA. Tout d'abord,
$$|u_n| \le \left|\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)} - 1\right| \times \sqrt{\ln(n)}$$
Notons v_n le membre de droite. Or :
$$\begin{aligned}\left|\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)} - 1\right| &= \left|\left(1 - \frac{1}{2n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right)^{1/2} - 1\right| \\ &= \left|1 - \frac{1}{4n^{3/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - 1\right| \\ &\sim \frac{1}{4n^{3/2}}\end{aligned}$$
si bien que $v_n \sim \ln(n)/4n^{3/2}$. De même que d'habitude, on prouver que $v_n = \mathrm{o}\left(1/n^{5/4}\right)$ donc $\sum v_n$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum |u_n|$ converge donc la série $\sum u_n$ converge absolument, et donc converge.
16. $u_n \sim \dfrac{\ln(n)\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$. De la même façon que dans le 6, pas question de déranger Bertrand pour ça.
$$n^{5/4}u_n \sim \frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
c'est-à-dire que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{5/4}}\right)$ et on conclut comme précédemment (car $5/4>1$) : $\sum u_n$ converge.
17. Pas de signe constant : on étudie la convergence absolue (le cos rend impossible l'utilisation du CSA).
$$|u_n| \le \frac{\ln\left(n^{2024}\right)}{n\sqrt{n}} = \frac{2024\ln(n)}{n^{3/2}}$$

et, comme dans l'exemple précédent, $|u_n| = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$ si bien que $\sum |u_n|$ converge. La série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

18. Pas question de faire un DL du cos car ce qu'il y a dedans ne tend pas vers 0. Cependant, puisque $\cos^2(n) \leq 1$ alors

$$u_n \geq \frac{1}{n}$$

Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

19. Au voisinage de 0, $\mathrm{Arctan}(x) \sim x$ tandis qu'au voisinage de $+\infty, \mathrm{Arctan}(x) \sim \frac{\pi}{2}$. Puisque $\pi > 1$ alors $\pi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\pi^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$u_n \sim \frac{\pi^{-n} \times \frac{\pi}{2}}{\ln(n)} = \frac{\pi}{2\ln(n)} \times \pi^{-n} \leq \frac{1}{\pi^n}$$

pour n assez grand. Or, $\sum \frac{1}{\pi^n}$ est une série géométrique de raison $1/\pi < 1$ donc converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

20. $u_n \sim \frac{1}{n^2}$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.

21. Puissance variable : exponentielle.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n\sqrt{n}\left(\ln\left(n^2+1\right)-\ln\left(n^2\right)\right)} - 1 \\
&= e^{n\sqrt{n}\left(\ln\left(n^2\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\ln\left(n^2\right)\right)} - 1 \\
&= e^{n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} - 1 \\
&= e^{\frac{1}{\sqrt{n}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} - 1 \\
&= 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1/2 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ diverge.

22. $n^2 u_n = \frac{n^{1791}\ln(n)^{2024}}{e^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées : $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on conclut comme précédemment : $\sum u_n$ converge.

23. Attention, ce n'est pas une série de Riemann car la puissance est variable ! Encore une fois, on écrit u_n sous forme exponentielle.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times -\ln(n)} \\
&= e^{-\ln(n)-\frac{\ln(n)}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \times e^{-\frac{\ln(n)}{n}}
\end{aligned}$$

Or, $-\frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées donc, l'exponentielle étant continue, $e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ si bien que $u_n \sim \frac{1}{n}$. Or, la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : la série $\sum u_n$ diverge.

24. Puissance variable : notation exponentielle.

$$\begin{aligned}
u_n &= e^{n^2\ln(n)-n^2\ln(n+1)}\\
&= e^{n^2\ln(n)-n^2\ln(n)-n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}\\
&= e^{-n^2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)}\\
&= e^{-n+\frac{1}{2}+\mathrm{o}(1)}
\end{aligned}$$

et de même que d'habitude, $u_n \sim e^{-n+\frac{1}{2}} = e^{-n}\times e^{1/2}$ (attention, u_n n'est pas équivalent à e^{-n} !). On peut dire que $u_n = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ ou que la série $\sum e^{-n}$ est géométrique de raison $1/e < 1$: dans tous les cas, les théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs permettent de conclure que la série $\sum u_n$ converge.

25. Dans un ln, comme d'habitude, on factorise par le terme dominant.

$$\begin{aligned}
u_n &= 2\ln\left(n^3\right)+2\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)-3\ln\left(n^2\right)-3\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\\
&= 6\ln(n)+\frac{2}{n^3}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)-6\ln(n)-\frac{3}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&\sim -\frac{3}{n^2}
\end{aligned}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum u_n$ converge.

26. $u_n = e^{-\ln(n)\ln(\ln(n))} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$ ($a^b = e^{b\ln(a)}$ avec $a = n$ et $b = \ln(\ln(n))$). Or, $\ln(\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(\ln(n)) \geq 2$ pour n assez grand, si bien que $u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour n assez grand, ce qui permet de conclure : $\sum u_n$ converge.

27. $u_n \sim \dfrac{\pi\sqrt{2}n^2\ln(n)}{n^4} = \dfrac{\pi\sqrt{2}\ln(n)}{n^2}$ et on utilise la même méthode que précédemment : $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$ et on en conclut que $\sum u_n$ converge.

28. On a :

$$u_n = n\times\ln\left(1-\frac{2n+1}{n^4+2n^3}\right)$$

et

$$\frac{2n+1}{n^4+2n^3}\sim\frac{2}{n^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

si bien que

$$u_n\sim n\times\frac{-(2n+1)}{n^4+2n^3}\sim n\times\frac{-2}{n^3}=\frac{-2}{n^2}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature, la série $\sum 1/n^2$ converge donc la série $\sum u_n$ converge.

29. On ne peut pas donner un équivalent plus simple. On pourrait majorer le sinus par 1 mais on majorerait alors u_n par une quantité qui tend vers $+\infty$ donc par le terme général d'une série qui diverge grossièrement, ce qui ne permet pas de conclure. Il faut donc être plus malin que ça. On peut déjà se demander la limite de la suite (u_n). Regroupons les termes à la puissance n :

$$u_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{4}{3}\times\sin^2(\alpha)\right)^n$$

On se demande si le terme à la puissance n est supérieur ou inférieur à 1 (précisons que le sinus est positif car $\alpha\in\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$) :

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\times\sin^2(\alpha)\leq 1 &\iff \sin^2(\alpha)\leq\frac{3}{4}\\ &\iff 0\leq\sin(\alpha)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\iff \alpha\in\left[\,0\,;\frac{\pi}{3}\right]\end{aligned}$$

Supposons donc que $\alpha\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$. Alors $u_n\leq\dfrac{1}{n^3}$ et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ converge. Supposons à présent que $\alpha\in\left]\,\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Dès lors, $\dfrac{4}{3}\times\sin^2(\alpha)>1$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ par croissances comparées : la série $\sum u_n$ diverge grossièrement (car le terme général ne tend pas vers 0). En conclusion, la série converge si et seulement si $\alpha\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 2 : ✪ Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Pour tout $n\geq 1$ on pose

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

1. Étudier, suivant les valeurs de α, la convergence de la suite (u_n). En cas de convergence, donner sa limite.
2. Étudier la nature de la série de terme général u_n.
3. Soit $x\in\,]-1\,;1\,[$. Étudier la nature de la série de terme général u_nx^n.

Correction :

1. Soit $n\geq 1$. Cela sent la somme de Riemann à trois kilomètres : on fait donc apparaître $1/n$ devant la somme : on factorise par n dans $(n+k)^\alpha$ ce qui donne

$$u_n=\frac{1}{n^\alpha}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+k/n)^\alpha}=\frac{1}{n^{\alpha-1}}\times\frac{1}{n}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+k/n)^\alpha}.$$

   La somme $S_n=\dfrac{1}{n}\times\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+k/n)^\alpha}$ est la somme (et non la série, ce n'est pas du tout la même chose) de Riemann à pas constant associée à la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^\alpha}$. La fonction f étant continue sur $[\,0\,;1\,]$, $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^\alpha}>0$ (l'inégalité est stricte puisque la fonction est positive et non identiquement nulle). Or, pour tout $n\geq 1$, $u_n=\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\times S_n$ et $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}I>0$. La limite éventuelle de (u_n) dépend donc du signe de $\alpha-1$.
   - Si $\alpha>1$ alors $\alpha-1>0$ donc $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Par opérations sur les limites, $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
   - Si $\alpha<1$ alors $\alpha-1<0$ donc $\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}=n^{1-\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. Par opérations sur les limites, $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.
   - Enfin, si $\alpha=1$ alors $u_n=S_n\xrightarrow[n\to\infty]{}I=\ln(2)$ (pour $\alpha=1$).
2. D'après la question précédente, si $\alpha\leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Supposons $\alpha>1$. Puisque $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}I>0$ alors $S_n\sim I$ (rappelons qu'une suite de limite <u>non nulle</u> est équivalente à sa limite) et donc $u_n\sim I/n^{\alpha-1}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n^{\alpha-1}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $\alpha-1>1$ si et seulement si $\alpha>2$. Finalement, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha>2$.
3. Tout d'abord, puisque l'on ne connaît pas le signe de x, on étudie la convergence absolue (si x est négatif alors le signe alterne donc le terme général de la série n'est pas de signe constant). D'après ce qui précède,

$$|u_nx^n|\sim\frac{I\times|x|^n}{n^{\alpha-1}}=I\times n^{1-\alpha}\times|x|^n.$$

   On ne peut pas donner un équivalent plus simple. On se dit que la série va converger car $|x|^n$ tend vers 0 « vite » : on réutilise donc la même méthode que pour l'exponentielle, on multiplie donc par n^2 ce qui donne

$$n^2u_n|x|^n \sim I\times n^{3-\alpha}|x|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées car $x \in \left]-1\,;1\right[$ (les suites géométriques l'emportent sur les suites polynomiales). Par conséquent, $|u_nx^n| = \text{o}\left(1/n^2\right)$. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_nx^n$ converge absolument et donc converge.

Exercice 3 : ✪ Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$. Donner un équivalent, quand $n\to+\infty$, de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$$

Correction : Tout d'abord, la série de terme général $1/k^\alpha$ diverge puisque $\alpha<1$ (série de Riemann) et cette série est à termes positifs donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En comparant à une intégrale (le dessin est laissé à votre charge, la fonction $t\mapsto 1/t^\alpha$ est décroissante), on obtient pour tout $k\geq 2$ l'encadrement suivant :

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

Par somme, pour k allant de 2 à n :

$$\int_2^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

et en ajoutant 1 (rappelons que $1/t^\alpha = t^{-\alpha}$ ce qui se primitive très facilement) :

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha}-2^{1-\alpha}}{1-\alpha}+1 \leq S_n \leq \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}+1$$

et donc, par obtention d'un équivalent par encadrement :

$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

On redémontre au passage la divergence de la série de terme général $1/k^\alpha$ (mais bon : ce n'est qu'un raffinement de la méthode du cours, puisqu'on donne la nature de la série en comparant à une intégrale et en encadrant).

Exercice 4 - Séries Konpadnom : ✪✪ Donner selon les valeurs de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^a(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c}$$

Correction : Notons u_n le terme général de la série. Effectuons le même raisonnement que pour les séries de Bertrand :

- Si $a<0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a\in\left[0\,;1\right[$, alors

$$n^{\frac{1+a}{2}}\times u_n = \frac{n^{\frac{1-a}{2}}}{(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  Pour n assez grand, $u_n \geq 1/n^{\frac{1+a}{2}}$. Or, $\dfrac{1+a}{2}\leq 1$ donc la série $\sum 1/n^{\frac{1+a}{2}}$ diverge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
- Si $a>1$, alors

$$n^{\frac{1+a}{2}}\times u_n = \frac{n^{\frac{1-a}{2}}}{(\ln(n))^b(\ln(\ln(n)))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  donc $u_n = \text{o}\left(1/n^{\frac{1+a}{2}}\right)$ et $\dfrac{1+a}{2}>1$ donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge.
- Supposons à présent que $a=1$. Séparons les cas selon la valeur de b. Supposons $b<1$. Alors :

$$n\times(\ln(n))^{\frac{b+1}{2}}\times u_n = \frac{\ln(n)^{\frac{1-b}{2}}}{\ln(\ln(n))^c} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  si bien que pour n assez grand,

$$u_n \geq \frac{1}{n(\ln(n))^{\frac{1+b}{2}}}$$

Or, $\dfrac{1+b}{2}<1$ donc on a une série de Bertrand divergente (les séries de Bertrand sont HP mais ici, vu le thème de l'exo, il faut s'en servir) donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ diverge. Si $b>1$, on montre de même que

$$n\times(\ln(n))^{\frac{b+1}{2}}\times u_n=\frac{\ln(n)^{\frac{1-b}{2}}}{\ln(\ln(n))^c}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

si bien que

$$u_n=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n(\ln(n))^{\frac{1+b}{2}}}\right)$$

et puisque $\dfrac{b+1}{2}>1$, la série de Bertrand associée converge donc $\sum u_n$ converge. Supposons enfin que $b=1$. Si $c\leq 0$, alors, pour n assez grand,

$$u_n=\frac{\ln(n)^{-c}}{n\ln(n)}\geq\frac{1}{n\ln(n)}$$

et la série des $1/n\ln(n)$ diverge donc, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ diverge. Supposons donc $c>0$. Introduisons la fonction

$$f:x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))^c}$$

f est dérivable (sur $]\,e\,;+\infty\,[$) et pour tout $x>e$,

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2\ln(x)\ln(\ln(x))^c}-\frac{1/x}{x\times\ln(x)^2\times\ln(\ln(x))^c}+\frac{1}{x\ln(x)}\times\frac{-c\times\dfrac{1}{x}\times\dfrac{1}{\ln(x)}}{\ln(\ln(x))^{c+1}}<0$$

donc f est décroissante. f est positive, continue, décroissante donc $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_N$ sont de même nature. Effectuons encore le changement de variable $u=\ln(t), t=e^u$, $\mathrm{d}t=e^u\,\mathrm{d}u$:

$$\int_3^N\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)\ln(\ln(t))^c}=\int_{\ln(3)}^{\ln(N)}\frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u u\ln(u)^c}=\int_{\ln(3)}^{\ln(N)}\frac{\mathrm{d}u}{u\ln(u)^c}$$

et d'après le cours sur les séries de Bertrand, on sait que cette intégrale converge si et seulement si $c>1$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a>1$ ou ($a=1$ et $b>1$) ou ($a=b=1$ et $c>1$).

Exercice 5 - Un nombre de Pisot : ✪✪

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
2. En déduire la nature de la série $\sum\sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$.

Remarque : On dit que $x\in\mathbb{R}$ est un nombre de Pisot si $x>1$ et s'il existe un polynôme P unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x)=0$ et tel que toutes les autres racines complexes de P aient un module strictement inférieur à 1. Par exemple, $2+\sqrt{3}$ est un nombre de Pisot car est l'unique racine, avec $2-\sqrt{3}$ qui est de module strictement inférieur à 1, du polynôme X^2-4X+1. Le nombre d'or $\varphi=(1+\sqrt{5})/2$ est aussi un nombre de Pisot car annule X^2-X-1, et l'autre racine est $-1/\varphi$ de module strictement inférieur à 1. On peut montrer de la même façon que dans cet exercice (mais c'est un peu plus délicat à rédiger dans le cas général, il faut utiliser les relations coefficients racines) que si x est un nombre de Pisot réel, alors la série $\sum\sin(\pi x^n)$ converge.

Correction :

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$. Appliquons la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\sqrt{3})^k2^{n-k}+\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(-\sqrt{3}\right)^k2^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k\right)2^{n-k}.\end{aligned}$$

Or, si k est impair, alors $(-1)^k=-1$ donc $\left(-\sqrt{3}\right)^k=-\sqrt{3}^k$ si bien que $\sqrt{3}^k+\left(-\sqrt{3}\right)^k=0$. Par conséquent, il ne reste que les termes pairs dans la somme, ce qui donne :

$$a_n=\sum_{k=0,k\text{ pair}}^n\binom{n}{k}\left(\sqrt{3}^k+\sqrt{3}^k\right)2^{n-k}=\sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}\left(\sqrt{3}^{2p}+\sqrt{3}^{2p}\right)2^{n-2p},$$

avec le changement d'indice $k=2p$ (possible puisque l'on ne somme que sur les termes pairs). Ainsi, puisque $\sqrt{3}=3^{1/2}$,

$$a_n = \sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}\left(3^p+3^p\right)2^{n-2p} = 2\sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{2p}3^p2^{n-2p}.$$

En d'autres termes, a_n est un entier multiplié par 2, donc est un entier pair. On peut donc noter $a_n = 2\times p_n$ où p_n est un entier.

2. Notons à présent $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ pour tout $n\geq 1$. On ne peut pas utiliser l'équivalent $\sin(u)\sim u$ car il n'est valable qu'au voisinage de 0. Or, la quantité à l'intérieur du sinus tend vers $+\infty$ (suite géométrique de raison >1). On ne peut pas non plus majorer le sinus en valeur absolue par 1 car ce serait majorer par le terme général d'une série divergente, ce qui ne permet pas de conclure. On est donc bloqué, mais on pense à utiliser la question précédente : $\left(2+\sqrt{3}\right)^n = a_n-\left(2-\sqrt{3}\right)^n = 2p_n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ et donc

$$u_n = \sin\left(2\pi p_n - \pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = \sin\left(-\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right) = -\sin\left(\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n\right)$$

en utilisant successivement la 2π-périodicité et l'imparité du sinus. Or, cette fois, la quantité dans le sinus tend vers 0 : en effet, $\sqrt{1}=1<\sqrt{3}<\sqrt{4}=2$ donc $2-\sqrt{3}\in\,]\,0\,;1\,[$ et donc $\left(2-\sqrt{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n\sim -\pi\left(2-\sqrt{3}\right)^n$. Or, la série $\sum\left(2-\sqrt{3}\right)^n$ converge (série géométrique de raison $2-\sqrt{3}\in\,]-1\,;1\,[$). On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : $\sum u_n$ converge. En particulier, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui n'est pas évident à première vue.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $a>0$. Donner la nature de la série $\sum a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

Correction : Notons u_n le terme général de cette série. On rappelle que

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln(n)+\gamma+\mathrm{o}\left(1\right)$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= a^{\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1)} \\ &= e^{(\ln(n)+\gamma+\mathrm{o}(1))\ln(a)} \\ &= e^{\ln(a)\times\ln(n)}\times e^{\ln(a)\times\gamma}\times e^{\mathrm{o}(1)} \\ &= n^{\ln(a)}\times e^{\ln(a)\times\gamma}\times e^{\mathrm{o}(1)} \end{aligned}$$

et donc $u_n\sim\dfrac{e^{\ln(a)\times\gamma}}{n^{-\ln(a)}}$. Or, la série $\sum e^{\ln(a)\times\gamma}/n^{-\ln(a)}$ est une série de Riemann, donc converge si et seulement si $-\ln(a)>1$, c'est-à-dire si et seulement si $a<e^{-1}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a<e^{-1}$.

Exercice 7 : ✪✪ Soient a et b deux réels, avec $b>0$. En utilisant la concavité du sinus sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^a}\int_0^{\pi/n}\sin\left(x^b\right)\,\mathrm{d}x$$

Correction : Rappelons (cf. chapitre 16) que, pour tout $x\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$, $2x/\pi\leq\sin(x)\leq x$. On veut utiliser l'encadrement de la question précédente, valable sur $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$. Le problème est qu'on ne sait pas si $x^b\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$: par exemple, si b est très grand et si $x>1$ alors x^b peut être strictement supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$. Pour éviter cela, on va supposer $n\geq 4$ ce qui ne change rien à la nature de la série : seul compte ce qui se passe « au voisinage de $+\infty$ ». En effet, si $n\geq 4$ alors $\dfrac{\pi}{n}<1$ donc $x^b\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ pour tout $x\in\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{n}\,\right]$ et donc on peut utiliser l'encadrement de la question précédente :

$$\frac{2x^b}{\pi}\leq\sin\left(x^b\right)\leq x^b$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/n}\frac{2x^b}{\pi}\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/n}\sin\left(x^b\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{\pi/n}x^b\,\mathrm{d}x$$

En divisant par n^a il vient finalement

$$\frac{2\pi^{b+1}}{\pi n^{a+b+1}} \leq u_n \leq \frac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$$

Attention, on ne peut pas dire que u_n est équivalent à $\dfrac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$ ou, pire, à $\dfrac{1}{n^{a+b+1}}$: en effet, le quotient ne tendra pas vers 1 ! Cependant, on se doute que tout va tourner autour de n^{a+b+1} : faisons donc deux cas.

- Premier cas : $a+b+1>1$. Alors la série $\sum \dfrac{\pi^{b+1}}{n^{a+b+1}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = a+b+1>1$ donc converge. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs (« plus petit qu'un truc convergent c'est convergent »), $\sum u_n$ converge.
- Premier cas : $a+b+1 \leq 1$. Alors la série $\sum \dfrac{2\pi^{b+1}}{\pi n^{a+b+1}}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = a+b+1 \leq 1$ donc diverge. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs (« plus grand qu'un truc divergent c'est divergent »), $\sum u_n$ diverge.

En conclusion, $\sum u_n$ converge $\iff a+b+1>1 \iff a+b>0$.

Exercice 8 - Des petits trous : ✪✪ Pour tout $n \geq 1$, on définit u_n par

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si l'écriture décimale de } n \text{ ne contient pas le chiffre 5} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera comme dans le cours $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

1. Montrer que $S_9 \leq 8$.
2. Montrer que $S_{99} \leq 8 + 8 \times \dfrac{9}{10}$.
3. Donner une majoration du même type pour S_{999}.
4. Donner la nature de la série $\sum u_n$.

Correction :

1. $S_9 = \displaystyle\sum_{k=1}^{9} u_k$. Or, tous les termes de cette somme sont inférieurs ou égaux à 1, et il y a 8 termes non nuls car $u_5 = 0$, ce qui permet de conclure.
2. Tout d'abord, $S_{99} = S_9 + \displaystyle\sum_{k=10}^{99} u_k$. D'après la question précédente, $S_9 \leq 8$. Majorons la deuxième somme. Tous les termes sont inférieurs ou égaux à $1/10$. Comptons le nombre de termes non nuls. Il y a 8 dizaines (on enlève la dizaine formée des nombres de 50 à 59) et, dans chaque dizaine restante, il y a 9 termes non nuls (on enlève à chaque fois le terme contenant 5, par exemple 65 dans la dizaine des 60). Il y a donc 8×9 termes non nuls inférieurs à $1/10$, ce qui permet de conclure.
3. De même, $S_{999} = S_{99} + \displaystyle\sum_{k=100}^{999} u_k$. Dans la dernière somme, il y a 8 centaines (toutes sauf celle des 500), dans chaque centaine il y a 9 dizaines (toutes sauf la dizaine qui commence par 5) et dans chaque dizaine il y a 9 termes (tous sauf celui qui se termine par 5), ce qui fait $8 \times 9 \times 9$ termes, tous inférieurs ou égaux à $1/100$. Finalement, $S_{999} \leq 8 + 8 \times \dfrac{9}{10} + 8 \times \left(\dfrac{9}{10}\right)^2$.
4. On montre de même que, pour tout n, $S_{9\ldots 9}$ (où il y a n fois le chiffre 9) est inférieure ou égale à
$$8 + 8 \times \frac{9}{10} + \cdots + 8 \times \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} = 8 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k.$$
Or, $9/10 \in \,]\,0\,;1\,[$ donc la série $\sum (9/10)^k$ converge et sa somme vaut $1/(1-9/10) = 10$. Dès lors,
$$8 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{9}{10}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 80.$$
Or, c'est une série à termes positifs donc la suite de ses sommes partielles est croissante. En particulier, $S_{9\ldots 9} \leq 80$. Soit à présent $N \geq 1$. Il existe $n \geq 1$ tel que $N \leq 9\ldots 9$ (où l'on compte n fois 9) donc (car $(S_N)_{N\geq 1}$ est croissante puisque la série est à termes positifs) $S_N \leq S_{9\ldots 9} \leq 80$. Finalement, la série $\sum u_n$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée : la série converge. Remarquons que l'on ne demandait pas la somme (et heureusement !).

Exercice 9 : ✪✪ Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que

$$\sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geq \sum_{k=1}^{N} k$$

2. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{\sigma(k)}{k^2}$ diverge.

Correction :

1. La fonction σ étant injective, les N entiers $\sigma(N+1), \dots, \sigma(2N)$ sont distincts : si on les range par ordre croissante, cela donne N entiers $1 \leq x_1 < \cdots < x_N$ et, par récurrence (finie) immédiate, $x_k \geq k$ pour tout $k \in [\![1\,;\, N]\!]$ ce qui permet de conclure.
2. Notons comme d'habitude, pour tout $N \geq 1$, S_N la somme partielle d'ordre N de cette série. Pour tout $n \geq 1$, d'après la question précédente,

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=N+1}^{2N} \sigma(k) \geq \frac{1}{4N^2} \sum_{k=1}^{N} k = \frac{1}{4N^2} \times \frac{N(N+1)}{2} \geq \frac{1}{8}$$

Or, si la série converge et si on note S sa somme, alors $S_{2N} - S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S - S = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 10 : ✪✪ À l'aide d'une transformation d'Abel, prouver que si $\alpha > 0$, alors la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(n)}{n^\alpha}$ converge.

Correction : Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k^\alpha} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k)$$

On pose
La méthode pour effectuer une transformation d'Abel est de voir que, pour tout $k \geq 1$, $\sin(k) = T_k - T_{k-1}$: on a alors

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{k^\alpha} - \sum_{k=1}^{n} \frac{T_{k-1}}{k^\alpha} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k}{k^\alpha} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{T_j}{(j+1)^\alpha} \\
&= \frac{T_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) - \frac{T_0}{1^\alpha}
\end{aligned}$$

Or, $T_0 = 0$:

$$S_n = \frac{T_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1} T_k \times \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$$

Montrons que la suite (T_n) est bornée. T_n est la partie imaginaire de

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik}$$

Or, U_N est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i \times 1} \neq 1$ d'où

$$\begin{aligned}
U_N &= \frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i\times 1}}\\
&= \frac{e^{i(n+1)/2}\times\left(e^{-i(n+1)/2}-e^{i(n+1)/2}\right)}{e^{i\times 1/2}\times\left(e^{-i\times 1/2}-e^{i\times 1/2}\right)}\\
&= \frac{e^{i\times n/2}\times -2i\sin\left((n+1)/2\right)}{-2i\sin(1/2)}\\
&= \frac{e^{i\times n/2}\times \sin\left((n+1)/2\right)}{\sin(1/2)}
\end{aligned}$$

Et puisque $T_n = \mathrm{Im}(U_n)$,

$$T_N = \frac{\sin(n/2)\times\sin\left((n+1)/2\right)}{\sin(1/2)}$$

Il suffit de voir que le numérateur est majoré par 1 en valeur absolue pour conclure que (T_n) est bornée, disons par M. Par conséquent,

$$\frac{T_n}{n^\alpha}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De plus, pour tout k,

$$\left|T_k\times\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)\right|\leq M\times\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

On peut retirer la valeur absolue puisque cette quantité est positive. Or, la suite de terme général $1/k^\alpha$ converge (vers 0) donc sa série télescopique associée converge. On majore par le terme général d'une série convergente donc la série

$$\sum T_k\times\left(\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$$

converge absolument et donc converge, si bien que la suite de ses sommes partielles admet une limite finie. Finalement, la suite (S_n) admet une limite finie donc la série converge.

Exercice 11 : ✪✪✪ Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que la série de terme général $\left(n^4+n^2\right)^{1/4} - P(n)^{1/3}$ converge.

Correction : Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Pour tout n, on note $u_n = (n^4+n^2)^{1/4}-P(n)^{1/3}$. Tout d'abord, $(n^4+n^2)^{1/4}\sim n$ (l'équivalent passe à la puissance fixe) donc, si P est le polynôme nul, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. On suppose P non nul dans la suite. Si P est de degré d de coefficient dominant a_d, alors $P(n)^{1/3}\sim {a_d}^{1/3}n^{d_3}$ donc

$$u_n = n+\mathrm{o}\left(n\right) - {a_d}^{1/3}n^{d/3}+\mathrm{o}\left(n^{d/3}\right)$$

Nécessairement, $d=3$ et $a_d=1$: en effet, si $d\neq 3$, alors u_n est équivalent à n ou à ${a_d}^{1/3}n^{d/3}$ selon que $d>3$ ou $d<3$ donc la série diverge grossièrement, et si $d=3$ et ${a_d}^{1/3}\neq 1$, alors $u_n\sim(1-{a_d}^{1/3})\times n$ et la série diverge encore grossièrement. Ainsi, une condition nécessaire pour que la série $\sum u_n$ converge est que P soit unitaire de degré 3, c'est-à-dire qu'il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $P=X^3+aX^2+bX+c$. Rappelons que

$$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{u}{3}-\frac{u^2}{9}+\mathrm{O}\left(u^3\right)$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
u_n &= n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3}\\
&= n\left(1+\frac{1}{3n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}\right)-\frac{1}{9}\left(\frac{a}{n}\right)^2+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= n\left(1+\frac{1}{3n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - n\left(1+\frac{a}{3n}+\frac{b}{3n^2}-\frac{a^2}{9n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{3n}-\frac{a}{3}+\frac{a^2-3b}{9n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= -\frac{a}{3}+\frac{a^2-3b+3}{9n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Si $a \neq 0$, alors $u_n \sim -a/3$ donc la série diverge grossièrement, donc une condition nécessaire pour que la série converge est que a soit nul. Supposons donc $a = 0$. Alors :

$$u_n = \frac{-3b+3}{9n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $b \neq 1$, alors $u_n \sim K/n$ avec $K \neq 0$: on a des séries à termes de signe constant équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n$ diverge donc la série $\sum u_n$ diverge. Dès lors, une condition nécessaire pour que la série converge est d'avoir $b = 1$. Montrons que c'est suffisant : si $a = 0$ et $b = 1$, alors $u_n = \mathrm{O}\left(1/n^2\right)$. Or, la série $\sum 1/n^2$ converge donc la série $\sum u_n$ converge (rappelons que quand on utilise le théorème de comparaison avec un o ou un O, seul compte le fait que la quantité dans le o ou O soit positive, la suite (u_n) n'a pas besoin d'être positive). En conclusion, la série converge si et seulement si P est de la forme $P = X^3 - X + c$ avec c quelconque.

Exercice 12 : ✪✪✪ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. En séparant les cas $p = 1, p \geq 3$ et $p = 2$, donner la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+p)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+p)!}$$

Correction : Supposons dans un premier temps que $p = 1$. Dès lors, pour tout n,

$$u_n = \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+1)!} \geq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

Or, la série $\sum 1/(n+1)$ diverge donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Supposons à présent que $p \geq 3$. Il en découle (en majorant très peu subtilement tous les termes du numérateur par $n!$) que

$$u_n \leq \frac{n \times n!}{(n+3)!} \leq \frac{(n+1)\times n!}{(n+3)!} = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Or,

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} \sim \frac{1}{n^2}$$

et on conclut comme d'habitude que $\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$ est le terme général d'une série convergente donc, par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Supposons enfin que $p = 2$: la majoration ci-dessus ne suffit plus puisqu'on majore alors par $1/(n+2)$ qui est le terme général d'une série divergente, ce qui ne permet pas de conclure. L'astuce est de voir qu'il y a un écart de 3 entre $n-1$ et $n+2$ donc il suffit de mettre le terme en $n!$ à part :

$$
\begin{aligned}
u_n &= \frac{1!+\cdots+(n-1)!}{(n+2)!}+\frac{n!}{(n+2)!}\\
&\leq \frac{(n-1)\times(n-1)!}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\leq \frac{n(n-1)!}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\leq \frac{n!}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\leq +\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\\
&\leq \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}
$$

et on conclut comme précédemment que $\sum u_n$ converge.

Exercice 13 - Ne rien oublier en route : ✪✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n^{a+1/2}}-\frac{1}{n^{3a}+1}$$

Correction : Notons u_n le terme général de cette série. Mettons au même dénominateur :

$$u_n = \frac{n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}}\times(n^{3a}+1)}$$

Puisque l'équivalent passe au quotient et au produit, il faut donner un équivalent de $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}$, de $n^{a+\frac{1}{2}}$ (bon, là il n'y a rien à faire) et de $n^{3a}+1$. Commençons par $n^{3a}+1$: pour en donner un équivalent, faisons une disjonction de cas selon le signe de a.

- Premier cas : $a>0$. Alors $n^{3a}+1\sim n^{3a}$. Donnons à présent un équivalent de $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}$: le 1 est négligeable devant chacune des puissances de n car chacune tend vers $+\infty$, mais on ne sait pas laquelle des deux puissances gagne : c'est la plus grande des deux. Cherchons laquelle est la plus grande : $3a>a+\dfrac{1}{2} \iff a>\dfrac{1}{4}$. Faisons encore une disjonction de cas.
  — Supposons $a>\dfrac{1}{4}$. Alors $3a>a+\dfrac{1}{2}$ donc $n^{3a}+1-n^{a+\frac{1}{2}}\sim n^{3a}$ et donc
  $$u_n \sim \frac{n^{3a}}{n^{a+\frac{1}{2}}\times n^{3a}} = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$$
  On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a+\dfrac{1}{2}>1$ si et seulement si $a>\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, $\sum u_n$ converge si $a>\dfrac{1}{2}$ et diverge si $a\in\left]\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$.
  — Supposons $a=\dfrac{1}{4}$. Alors $3a=a+\dfrac{1}{2}$ donc le numérateur est égal à 1, si bien que
  $$u_n = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}\times(n^{3a}+1)} \sim \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}\times n^{3a}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
  car on rappelle que $a=\dfrac{1}{4}$. Or, $\dfrac{3}{2}>1$ donc on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge.
  — Supposons $a\in\left]0;\dfrac{1}{4}\right[$. Alors $3a<a+\dfrac{1}{2}$ donc le numérateur est équivalent à $-n^{a+\frac{1}{2}}$, d'où
  $$u_n \sim \frac{-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}}\times n^{3a}} = \frac{-1}{n^{3a}}$$
  Or, $3a<\dfrac{3}{4}\leq 1$ donc, par comparaison de séries à termes négatifs, $\sum u_n$ diverge.
- Supposons $a=0$. Alors $u_n=\dfrac{2-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\times 2}\sim -\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Supposons $a < 0$. Alors $n^{3a} + 1 \sim 1$ donc le dénominateur est équivalent à $n^{a+\frac{1}{2}} \times 1 = n^{a+\frac{1}{2}}$. Donnons un équivalent du numérateur $n^{3a} + 1 - n^{a+\frac{1}{2}}$. On sait que $a < 0$ donc $a < \frac{1}{4}$ donc n^{3a} est négligeable devant $n^{a+\frac{1}{2}}$. Cependant, on ne sait pas qui gagne entre 1 et $n^{a+\frac{1}{2}}$: là aussi, il faut distinguer les cas.
  — Si $a > -\dfrac{1}{2}$ alors 1 est négligeable devant $n^{a+\frac{1}{2}}$ donc le numérateur est équivalent à $-n^{a+\frac{1}{2}}$ si bien que
  $$u_n \sim \frac{-n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{a+\frac{1}{2}}} = -1$$
  Dès lors, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
  — Si $a = -\dfrac{1}{2}$ alors $n^{a+\frac{1}{2}} = 1$ et donc le numérateur de u_n est égal à $n^{3a} = n^{-3/2}$ et donc
  $$u_n \sim \frac{n^{-3/2}}{n^{a+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{n^{3/2}}$$
  et on conclut comme d'habitude que $\sum u_n$ converge (car $3/2 > 1$).
  — Supposons enfin que $a < -\dfrac{1}{2}$. Alors $a + \dfrac{1}{2} < 0$ donc le numérateur est équivalent à 1. Finalement,
  $$u_n \sim \frac{1}{n^{a+\frac{1}{2}}} = n^{-a-\frac{1}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
  et là aussi la série diverge grossièrement.

En conclusion, $\sum u_n$ converge si et seulement si $a > \dfrac{1}{2}, a = \dfrac{1}{4}$ ou $a = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Correction : L'idée est d'osciller entre 0 et 1 en faisant des pas de plus en plus petits : on pose $u_0 = 0$ si bien que $S_0 = 0$, puis $u_1 = 1$ si bien que $S_1 = 1$, puis $u_2 = u_3 = -1/2$ si bien que $S_0 = 0$, puis $u_4 = u_5 = u_6 = 1/3$ si bien que $S_6 = 1$ etc. On pourrait donner le terme général de la même façon que dans l'exercice 17 du chapitre précédent, mais ce n'est pas nécessaire : les sommes partielles vont alterner entre 0 et 1 donc ne vont pas admettre de limite mais vont être bornées, donc la série va converger, alors que le terme général tend vers 0. Donnons un autre exemple, peut-être plus simple, mais plus astucieux : on peut poser $u_n = \cos(\ln(n+1)) - \cos(\ln(n))$. Alors, pour tout n, $S_n = \cos(\ln(n+1))$ (il y a télescopage) donc la suite des sommes partielles est bornée. De plus, comme on le montre dans l'exercice 65 du chapitre 14, la suite de terme général $\cos(\ln(n))$ ne converge pas (car ses termes forment une partie dense dans $[-1;1]$). Il reste à prouver que $u_n \to 0$, ce qui découle de l'IAF : la dérivée du cos étant bornée par 1, pour tout n,

$$|\cos(\ln(n+1)) - \cos(\ln(n))| \le 1 \times |\ln(n+1) - \ln(n)|$$

et un simple DL (en mettant le n en facteur dans le premier ln) prouve que la quantité de droite est équivalente à $1/2n$ donc tend vers 0, ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

Exercice 15 - Une identité de Lehmer (1936) : ✪✪✪ On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On rappelle enfin que si on pose

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{et} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

alors pour tout $n \ge 0$

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

1. Montrer que la série $\sum \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{F_{2n+1}}\right)$ converge.

2. Calculer $\varphi \times \psi$.
3. Montrer que ${F_{2n+1}}^2 = F_{2n}F_{2n+2} + 1$.
4. En déduire que

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)$$

5. En déduire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Correction :

1. Puisque $\varphi > 1$ et $|\psi| < 1$, alors $\varphi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\psi^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $F_n \sim \varphi^n/\sqrt{5}$ et donc

$$\frac{1}{F_{2n+1}} \sim \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dès lors

$$\text{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) \sim \frac{1}{F_{2n+1}} \sim \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2n+1}}$$

Or, $1/\varphi^2 < 1$ donc la série géométrique $\sum 1/\varphi^{2n}$ converge. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : la série converge.

2. $\varphi \times \psi = -1$.
3. D'après la question précédente, $\psi^{2n} \times \varphi^{2n} = (-1)^{2n} = 1$ et $\psi^{2n+1} \times \varphi^{2n+1} = (-1)^{2n+2} = -1$. Dès lors :

$$\begin{aligned} F_{2n}F_{2n+2} + 1 &= \left(\frac{\varphi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{\varphi^{2n+2} - \psi^{2n+2}}{\sqrt{5}}\right) + 1 \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} - \varphi^{2n}\psi^{2n+2} - \varphi^{2n+2}\psi^{2n} + \psi^{4n+2}}{5} + 1 \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} - \psi^2 - \varphi^2 + \psi^{4n+2}}{5} + 1 \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} - \psi^2 - \varphi^2 + \psi^{4n+2} + 5}{5} \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \psi^2 &= \frac{1 + 5 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5}}{4} \\ &= 3 \end{aligned}$$

si bien que

$$F_{2n}F_{2n+2} + 1 = \frac{\varphi^{4n+2} + 2 + \psi^{4n+2}}{5}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} {F_{2n+1}}^2 &= \left(\frac{\varphi^{2n+1} - \psi^{2n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} - 2\varphi^{2n+1}\psi^{2n+1} + \psi^{4n+2}}{5} \\ &= \frac{\varphi^{4n+2} + 2 + \psi^{4n+2}}{5} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Souvenirs du chapitre 5... Le membre de gauche appartient à $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$ et le membre de droite également. En effet, la suite (F_n) est croissante et positive donc la suite $(1/F_n)$ est décroissante et positive, si bien que

$$0 \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right) \leq \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) < \frac{\pi}{2}$$

Par conséquent, pour montrer que les deux quantités de l'énoncé sont égales, il suffit de prouver qu'elles ont la même tangente. D'une part :

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right)\right) = \frac{1}{F_{2n+1}}$$

et d'autre part, si on note B le membre de droite de l'énoncé (on se souvient de la formule de trigo $\tan(a+b)$) :

$$\begin{aligned}
\tan(B) &= \frac{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right) - \tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)}{1+\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right)\right)\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{F_{2n}} - \dfrac{1}{F_{2n+2}}}{1+\dfrac{1}{F_{2n}} \times \dfrac{1}{F_{2n+2}}} \\
&= \frac{\dfrac{F_{2n+2}-F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}}}{\dfrac{F_{2n}F_{2n+2}+1}{F_{2n}F_{2n+2}}} \\
&= \frac{F_{2n+2}-F_{2n}}{F_{2n}F_{2n+2}+1}
\end{aligned}$$

Par définition de la suite de Fibonacci, le numérateur est égal à F_{2n+1} et, d'après la question précédente, le dénominateur est égal à ${F_{2n+1}}^2$ si bien que $\tan(B) = 1/F_{2n+1}$ ce qui permet de conclure.

5. Soit $N \geq 1$. D'après la question précédente et par télescopage :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+1}}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2n+2}}\right)\right) \\
&= \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_2}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\
&= \operatorname{Arctan}(1) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \\
&= 1 - \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right)
\end{aligned}$$

Or, $F_{2N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ si bien que $1/F_{2N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ et l'Arctangente étant continue,

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{F_{2N+2}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \operatorname{Arctan}(0) = 0$$

En d'autres termes, la somme partielle de la série tend vers $\pi/4$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 16 - Série des inverses des nombres premiers : ✪✪✪ On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers. Le but de cet exercices est de prouver que la série $\sum 1/p_n$ diverge. On raisonne par l'absurde en supposant qu'elle converge.

1. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que

$$\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} < \frac{1}{2}$$

Dans la suite, un entier naturel n est dit grand s'il admet un diviseur premier supérieur ou égal à p_{k+1}, et il est dit petit dans le cas contraire, c'est-à-dire si tous ses diviseurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_k (en particulier, un nombre premier petit est un nombre premier parmi $p_1, \dots, p_k$). Si $N \geq 2$, on note enfin N_g le nombre de grands entiers appartenant à $\llbracket 2\,;\, N \rrbracket$, et N_p le nombre d'entiers petits appartenant à $\llbracket 2\,;\, N \rrbracket$. On se donne dans la suite un entier $N \geq 2$.

2. Exprimer N en fonction de N_g et N_s.
3. Si $i \in \mathbb{N}^*$, donner le nombre de multiples de p_i inférieurs ou égaux à N. En déduire les deux inégalités suivantes :
$$N_g \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor < \frac{N}{2}$$
4. Soit $n \leq N$ un entier petit. Montrer qu'il existe a_n un entier produit de petits nombres premiers distincts et $b_n \in \mathbb{N}$ tels que $n = a_n \times {b_n}^2$. En déduire que $N_p \leq 2^k \times \sqrt{N}$.
5. Conclure.

Remarque : On vient de redémontrer au passage l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Le résultat de cet exercice découle en fait immédiatement du théorème des nombres premiers (démontré indépendamment par Jacques Hadamard et Charles-Jean de La Vallée Poussin en 1896), qui stipule que $p_n \sim n\ln(n)$, et on sait que la série de terme général $1/n\ln(n)$ diverge (c'est une série de Bertrand)... sauf que ce résultat est incroyablement plus difficile à obtenir !

Correction :

1. Le reste d'une série convergente tend vers 0 donc est strictement inférieur à $1/2$ pour k assez grand.
2. Puisque $\llbracket 2\,;\, N \rrbracket$ est l'union disjointe de l'ensemble des grands entiers et de l'ensemble des petits entiers, on a $N - 1 = N_g + N_p$.
3. Il y a $\lfloor N/pi \rfloor$ multiples de p_i (non nuls) inférieurs ou égaux à N (voir par exemple le chapitre 2.5).

   Prouvons à présent les deux inégalités de l'énoncé. Précisons tout d'abord que la somme est en fait finie puisque la suite des nombres premiers tend vers $+\infty$ donc finit par dépasser (strictement) N et alors la partie entière est nulle.

   Si on note E_g l'ensemble des grands entiers de $\llbracket 2\,;\, N \rrbracket$ (dont le cardinal est N_g), E_g est l'union (non disjointe) des E_i, ensemble des multiples de p_i inférieurs ou égaux à N, et on vient de montrer que son cardinal est égal à $\lfloor N/p_i \rfloor$. La première inégalité vient donc du fait que le cardinal d'une union est inférieur à la somme des cardinaux. De plus, par définition de la partie entière, pour tout i, $\lfloor N/p_i \rfloor \leq N/p_i$ donc
$$\sum_{i=k+1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{N}{p_i} \right\rfloor \leq \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{N}{p_i} = N \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{1}{p_i} < \frac{N}{2}$$
   par choix de k (cf. question 1).
4. Notons $n = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_s}^{\alpha_s}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers (en particulier, les p_i sont des entiers premiers petits distincts). L'idée est de regrouper les $+1$ lorsque les décompositions p-adiques sont impaires : pour tout i, notons $\alpha_i = 2q_i + r_i$ avec $r_i = 0$ ou 1 selon la parité de α_i, si bien que
$$n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_s}^{r_s} \times {p_1}^{2q_1} \times \cdots \times {p_s}^{2q_s}$$
   Il suffit de poser
$$a_n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_s}^{r_s} \qquad \text{et} \qquad b_n = {p_1}^{q_1} \times \cdots \times {p_s}^{q_s}$$
   Quitte à rajouter des nombres premiers avec une puissance nulle (donc des termes égaux à 1), tout élément n petit s'écrit donc sous la forme (rappelons que $p_1, \dots, p_k$ sont les nombres premiers petits) :
$$n = {p_1}^{r_1} \times \cdots \times {p_k}^{r_k} \times {b_n}^2$$
   avec les r_i égaux à 0 ou 1. Un tel entier n est entièrement déterminé par les choix des r_i (2 choix à chaque fois, 0 ou 1, et donc il y a 2^k possibilités par principe multiplicatif) et le choix de b_n : or, ${b_n}^2 \leq n \leq N$ donc $b_n \leq \sqrt{N}$: il y a donc au plus $\sqrt{N}$ possibilités. Par principe multiplicatif, il y a au plus $2^k \times \sqrt{N}$ choix possibles pour un entier petit, d'où le résultat.

5. Pour tout N, il découle des questions précédentes que

$$N = N_g + N_p - 1 < \frac{N}{2} + 2^k \times \sqrt{N} + 1$$

Or, lorsque $N \to +\infty$, $N/2 + 2^k\sqrt{N} + 1 \sim N/2$ (rappelons que k est fixe) ce qui est absurde pour une quantité supérieure ou égale à N : la série des $1/p_n$ diverge.

25.2 Calculs de sommes

Les séries dont on peut calculer la somme sont assez rares. Il y a deux façons de faire : en général, il faut calculer la somme partielle explicitement à l'aide d'un télescopage, et passer à la limite, mais on peut également utiliser des sommes infinies de référence pour calculer la somme infinie demandée.

Exercice 17 : ✪ Prouver la convergence de la série de terme général $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ et calculer sa somme. Même question avec la série de terme général $\sum \frac{1}{(n+1)(n+3)}$.

Correction : Une (simple ?) décomposition en éléments simples donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} 1 \end{aligned}$$

La suite des sommes partielles tend vers 1 : d'une part, on en déduit que la série converge (car la suite des sommes partielles admet une limite finie), et d'autre part, que la somme de la série vaut 1 (la somme de la série est, quand elle existe, la limite des sommes partielles). De même, on trouve aisément que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)}$$

Soit donc $N \geq 0$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{j=2}^{N+2} \frac{1}{j+1} \\ &= \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{2(N+1)} - \frac{1}{2(N+2)} \end{aligned}$$

et puisque $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 3/4$, cela prouve la convergence de la série (car la suite des sommes partielles converge), et donne la valeur de sa somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = \frac{3}{4}$$

Exercice 18 : ✪ Même chose avec la série $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Correction : Soit $N \geq 2$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \sum_{n=2}^{N} \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n^2-1}{n^2}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{n=2}^{N} \frac{n-1}{n} \times \prod_{n=2}^{N} \frac{n+1}{n}\right) \end{aligned}$$

Ces deux produits sont télescopiques et on trouve finalement

$$S_N = \ln\left(\frac{1}{N} \times \frac{N+1}{2}\right)$$

Par continuité de la fonction ln,$S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2)$: la suite des sommes partielles admet une limite finie, donc la série converge (ce qu'on aurait pu montrer directement en utilisant le théorème de comparaison pour les séries négatives, exo) et donc $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2)$. Remarquons que le signe est cohérent.

Exercice 19 : ✪✪ En utilisant la valeur de e comme somme de série, calculer

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} \qquad S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2-2}{n!} \qquad S_3 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n!}}{n!} \qquad \text{et} \qquad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Correction : On rappelle que $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$. En particulier, les séries $\sum \dfrac{1}{n!}, \sum \dfrac{1}{(n-1)!}$ etc. convergent : on peut casser toutes les sommes sans se poser de questions.

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\ &= 2e \end{aligned}$$

De même pour S_2 :

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} - 2e \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - 2e \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} - 2e \\
&= e + e - 2e \\
&= 0
\end{aligned}$$

Enfin, pour S_3, la priorité est de se débarrasser du (-1) : or, on remarque que ce n'est pas $(-1)^n$ (et donc on n'utilisera pas la somme $e^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$) mais $(-1)^{n!}$: il suffit de voir que $n!$ est pair pour $n \geq 2$ donc

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{-1}{0!} - \frac{1}{1!} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} \\
&= -2 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \\
&= -2 + e - 2 \\
&= e - 4
\end{aligned}$$

Enfin, pour S_4 :

$$\begin{aligned}
S_4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+1)^2}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^2+2p+1}{p!} \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{p^2}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2p}{p!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{p}{(p-1)!} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{(p-1)!} + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k+1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k!} + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k!} + e \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} + e + 2e + e \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + e + 2e + e \\
&= 5e
\end{aligned}$$

Exercice 20 : ✪✪ En utilisant la valeur de $\zeta(2)$ calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Correction : Puisque la première somme est celle des termes impairs, on sépare les termes dans $\zeta(2)$ selon leur parité (on peut le faire car la série converge absolument, nous dirons au chapitre 35 que la famille est sommable).

$$\begin{aligned}
\zeta(2) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Effectuons le changement d'indice $n = 2p$ dans la première somme, et $n = 2p+1$ dans la seconde, ce qui donne (et on rappelle que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$) :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{24}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\end{aligned}$$

Il en découle que $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{8}$ (remarquons que le signe est cohérent). Calculons à présent la deuxième somme (on remarque que cette somme est bien définie car la série $\sum\frac{(-1)^n}{n^2}$ converge absolument donc converge). Puisqu'il y a un $(-1)^n$, on pense à recommencer c'est-à-dire à séparer selon la parité de n (et on peut le faire car la série converge absolument, et on dira plus tard que la famille est sommable). Si on note cette somme S,

$$\begin{aligned}S &= \sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\\ &= \sum_{\substack{n=1\\ n\text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{\substack{n=1\\ n\text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\\ &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2}-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}\\ &= \frac{\pi^2}{24}-\frac{\pi^2}{8}\end{aligned}$$

et donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$ (signe cohérent d'après le CSA : le reste est du signe du premier terme négligé).

Exercice 21 : ✪✪

1. Déterminer a et b pour que la série $\sum \ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ converge.
2. Calculer alors sa somme.

Correction :

1. Essayons d'en donner un équivalent. Comme d'habitude dans un ln : on factorise le terme dominant, ce qui donne

$$\begin{aligned}u_n &= \ln(n)+a\ln(n)+a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln(n)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\\ &= (1+a+b)\ln(n)+a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\end{aligned}$$

Si $a+b+1\neq 0$ alors $u_n\sim(a+b+1)\ln(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pm\infty$ selon le signe de $a+b+1$ donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Par conséquent, pour que la série converge, il faut que $a+b+1$ soit nul, ce qu'on suppose dans la suite. La condition $a+b+1$ est donc NÉCESSAIRE pour que la série converge, mais on ne sait pas encore si elle est suffisante. Bien sûr, personne n'aurait osé écrire $u_n\sim(a+b+1)\ln(n)$ sans avoir supposé que $a+b+1\neq 0$ car il est formellement interdit de dire « équivalent à 0 ».

Reprenons le calcul précédent et faisons un DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 1 (les deux quantités dans les ln tendent bien vers 0) :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{n} + \frac{2b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{a+2b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Si $a+2b \neq 0$ alors $u_n \sim \dfrac{a+2b}{n}$. Or, $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique, ou car c'est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1 \leq 1$). On a des séries à termes de signe constant (on ne connaît pas le signe de $a+2b$) équivalents donc les séries sont de même nature : $\sum u_n$ diverge. Par conséquent, pour que la série converge, il faut que $a+2b=0$, ce qu'on suppose dans la suite. Là aussi, c'est une condition NÉCESSAIRE.

Si on en reste au calcul précédent, on a $u_n = \mathrm{o}\,(1/n)$ ce qui ne permet pas de conclure car la série harmonique diverge : il faut faire un DL à un ordre plus grand : poussons le DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 ce qui donne (rappelons que $a+2b=0$)

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{a}{n} - \frac{a}{2n^2} + \frac{2b}{n} - \frac{2b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{-a-4b}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, rappelons qu'on a supposé que $a+b+1=0$ et $a+2b=0$: il en découle que $b=1$ et $a=-2$, si bien que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2-4}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &\sim \frac{-2}{n^2} \end{aligned}$$

On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$) donc la série $\sum u_n$ converge. En conclusion, pour que la série converge, on a vu qu'il était nécessaire que $a+b+1=0$ et $a+2b=0$, mais on vient de voir que c'est également suffisant. Finalement, la série converge si et seulement si $a+b+1=0$ et $a+2b=0$ si et seulement si $a=-2$ et $b=1$.

2. Calculons alors la somme : pour cela, calculons la somme partielle et passons à la limite. Soit $N \geq 1$ (la série est définie à partir du rang 1 car il y a un $\ln(n)$ qui n'est pas défini à partir de $n=0$). Posons $S_N = \sum_{n=1}^N u_n$. Dès lors,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{n=1}^N \ln(n+1) + \sum_{n=1}^N \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{p=2}^{N+1} \ln(p) + \sum_{k=3}^{N+2} \ln(k) \\ &= \sum_{n=1}^N \ln(n) - 2\sum_{n=2}^{N+1} \ln(n) + \sum_{n=3}^{N+2} \ln(n) \\ &= \left(\sum_{n=3}^N \ln(n)\right) \times (1-2+1) + \ln(1) + \ln(2) - 2\ln(2) - 2\ln(N+1) + \ln(N+1) + \ln(N+2) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{N+1}{N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$ et le ln est une fonction continue donc

$$\ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(1) = 0$$

si bien que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} -\ln(2)$. Finalement, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln(2)$. Il y avait une autre méthode :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) + \sum_{n=1}^{N} \ln(n+2) \\ &= \sum_{n=1}^{N} (\ln(n) - \ln(n+1)) + \sum_{n=1}^{N} (\ln(n+2) - \ln(n+1)) \\ &= \ln(1) - \ln(N+1) + \ln(N+2) - \ln(2) \\ &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{N+1}{N+2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut de la même façon.

Exercice 22 - La série des survivants : ✪✪✪ Dans la suite de terme général $1/n$ dont les termes sont écrits ci-dessous :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots$$

on supprime le premier terme, on garde le suivant, on supprime les deux suivants, on garde celui suit, puis on supprime les trois suivants et on garde celui qui suit etc. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite ainsi obtenue. Prouver la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Correction : Cherchons une expression explicite des termes restants. On garde donc le terme $1/2$, puis le terme $1/5$, puis le terme $1/9$, puis le terme $1/14$ etc. Notons n_k le k-ième terme restant : avant n_k, il y a $k-1$ termes restants, puis k « processus d'élimination » c'est-à-dire qu'on a retiré

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

si bien que

$$\begin{aligned} n_k &= \frac{k(k+1)}{2} + k \\ &= \frac{k^2 + 3k}{2} \end{aligned}$$

et donc il ne reste que les termes de la forme $\dfrac{2}{k^2+3k}$, pour $k \geq 1$. Il ne coûte pas très cher de vérifier avec les premières valeurs que la formule est bonne. La série $\sum u_n$ est donc la série $\sum 1/n_k$ c'est-à-dire la série $\sum \dfrac{2}{k(k+3)}$. On trouve à l'aide d'une décomposition en éléments simples que pour tout k,

$$\frac{2}{k(k+3)} = \frac{2}{3k} - \frac{2}{3(k+3)}$$

Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} u_k &= -\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+3} \\ &= \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{2}{3}\sum_{k=4}^{N+3} \frac{1}{k} \\ &= \left(\sum_{k=4}^{N} \frac{1}{k}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \\ &= \frac{2}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{22}{9} \end{aligned}$$

On en déduit que la série converge et que sa somme vaut $22/9$.

Exercice 23 : ✪✪ Montrer la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum \frac{\lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$$

Correction : Cherchons pour quelles valeurs de n le numérateur est non nul. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le numérateur est non nul si et seulement s'il existe k tel que $\sqrt{n} < k \leq \sqrt{n+1}$ donc tel que $n < k^2 \leq n+1$ si et seulement s'il existe k tel que $n+1 = k^2$ (car il n'est pas possible d'avoir $n < k^2 < n+1$). En d'autres termes, le numérateur est non nul si et seulement si $n+1$ est un carré parfait, et alors le terme vaut $1/n$ puisque les deux parties entières sont distantes de 1. La série de l'énoncé est donc la série des $1/n$ avec $n+1$ carré parfait, donc la série des $1/(k^2-1)$ (pour $k \geq 2$). La série est donc convergence et on trouve comme d'habitude (décomposition en éléments simples et changement d'indice) que la somme vaut $3/4$.

Exercice 24 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $c(n)$ le nombre de chiffres de n en écriture décimale. Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{c(n)}{n(n+1)}$ et calculer sa somme.

Correction : Rappelons (cf. chapitre 2) que pour tout n, $c_n = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1$ si bien que, si on note u_n le terme général, $u_n \sim \ln(n)/n^2$ donc est négligeable devant $1/n^{3/2}$ donc la série converge. Calculons à présent la somme. Puisque la suite des sommes partielles converge, toutes ses suites extraites convergent vers la même limite, donc il suffit de donner la limite de la suite (S_{10^N}) (cela simplifie les calculs). En décomposant en éléments simples avec des changements d'indice, cela donne :

$$\begin{aligned}
S_{10^N} &= \sum_{n=1}^{10^N} c(n) \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n} - \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{10^N} \frac{c(n)}{n} - \sum_{n=2}^{10^N+1} \frac{c(n-1)}{n} \\
&= \sum_{n=2}^{10^N} \frac{c(n)-c(n-1)}{n} + \frac{c(1)}{1} - \frac{c(10^N)}{10^N+1} \\
&= \sum_{n=2}^{10^N} \frac{c(n)-c(n-1)}{n} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1}
\end{aligned}$$

Comme dans l'exercice ci-dessus, le numérateur ci-dessus est non nul si et seulement si n est une puissance de 10 (car n et $n-1$ ont le même nombre de chiffres sauf si n gagne un chiffre supplémentaire i.e. lorsque n est une puissance de 10), et alors il vaut 1. Dès lors,

$$S_{10^N} = \sum_{n=2, n \text{ puissance de } 10}^{10^N} \frac{1}{n} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1}$$

On peut donc faire le changement d'indice $n = 10^p$:

$$\begin{aligned}
S_{10^N} &= \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{10^p} + 1 - \frac{N+1}{10^N+1} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-1/10} - 1 + 1 - 0 = \frac{10}{9}
\end{aligned}$$

Exercice 25 : ✪✪✪

1. On rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Montrer l'existence et donner la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$. Commenter le signe.

2. **Remake :** Prouver l'existence et donner la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)$$

Correction :

1. Notons u_n le terme général. On a $u_n = \dfrac{6}{n(n+1)(2n+1)} \sim \dfrac{6}{2n^3} = \dfrac{3}{n^3}$ et on conclut que la série diverge par théorème de comparaison des séries à termes positifs (on pouvait aussi dire que $u_n \leq 1/n^2$). À l'aide d'une décomposition en éléments simples, on trouve que pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{6}{n}+\frac{6}{n+1}-\frac{24}{2n+1}$$

Le calcul de la somme est difficile car ici on ne va pas s'en tirer avec un simple télescopage. Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned}
S_N = \sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} &= \sum_{n=1}^{N}\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}\\
&= 6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}\\
&= 6\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+6\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}-24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}\\
&= 12\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n}+6+\frac{6}{N+1}-24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}.
\end{aligned}$$

On cherche à utiliser l'indication de l'énoncé sur $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$: il manque le terme pour $n=1$, que l'on rajoute et que l'on enlève pour compenser, ce qui donne :

$$S_N = 12\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-12+6+\frac{6}{N+1}-24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1} = 12\ln(N)+12\gamma-6-24\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}+\mathrm{o}\left(1\right),$$

car $1/N = \mathrm{o}\left(1\right)$. La somme contient tous les nombres impairs de 3 à $2N+1$, on va rajouter tous les nombres pairs de 2 à $2N$ (c'est-à-dire tous les nombres de la forme $2n$ avec n allant de 1 à N) ce qui donnera tous les nombres de 2 à $2N+1$:

$$\begin{aligned}
S_N &= 12\ln(N)+12\gamma-6-24\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\right)+\mathrm{o}\left(1\right)\\
&= 12\ln(N)+12\gamma-6-24\left(\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right)+\mathrm{o}\left(1\right)\\
&= 12\ln(N)+12\gamma-6-24\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}+12\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(1\right).
\end{aligned}$$

On utilise à nouveau le développement asymptotique rappelé dans l'énoncé pour la dernière somme, quant à la précédente, cela donne :

$$\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n}-1 = \ln(2N+1)+\gamma-1+\mathrm{o}\left(1\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
S_N &= 12\ln(N)+12\gamma-6-24(\ln(2N+1)+\gamma-1)+12(\ln(N)+\gamma)+\mathrm{o}\left(1\right)\\
&= 12\ln(N)+12\gamma-6-24\ln(2)-24\ln(N)-24\ln\left(1+\frac{1}{2N}\right)\\
&\qquad -24\gamma+24+12\ln(N)+12\gamma+\mathrm{o}\left(1\right).
\end{aligned}$$

(on a factorisé par $2N$ dans $\ln(1+2N)$) donc $S_N = 18-24\ln(2)+\mathrm{o}\left(1\right)$ donc $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 18-24\ln(2)$ donc, finalement,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2} = 18-24\ln(2).$$

Remarquons que le signe est cohérent : en effet, $\ln(2) \approx 0.693 < 0.7$ donc $18 - 24\ln(2) = 6(3-4\ln(2)) > 0$ car $4\ln(2) < 4 \times 0.7 = 2.8$.

2. Notons encore une fois u_n le terme général. Pour prouver la convergence de la série, on pourrait mettre u_n au même dénominateur et donner un équivalent (c'est long...) ou remarquer que

$$\frac{1}{4n+1} = \frac{1}{4n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et c'est pareil pour $1/(4n+2), 1/(4n+3)$ et $1/(4n+4)$ si bien que

$$u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on conclut comme d'habitude que la série converge. Calculons sa somme. Soit $N \geq 1$.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right) - 4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2} \end{aligned}$$

La première somme contient tous les inverses des entiers (quelle que soit leur congruence modulo 4) entre 1 et $4N+4$, et on reconnaît dans la deuxième (après simplification) la somme des inverses des nombres impairs, si bien que :

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n} - 2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n} - 2\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{4N+4}\frac{1}{n} - 2\left(\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\right) \\ &= \ln(4N+4) + \gamma - 2\left(\ln(2N+1) + \gamma - \frac{1}{2}(\ln(N)+\gamma)\right) + \mathrm{o}(1) \\ &= \ln(N) + \ln\left(4 + \frac{4}{N}\right) + \gamma - 2\ln(N) - 2\ln\left(2 + \frac{1}{N}\right) - 2\gamma + \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}(1) \\ &= \ln\left(4 + \frac{4}{N}\right) - 2\ln\left(2 + \frac{1}{N}\right) + \mathrm{o}(1) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(4) - 2\ln(2) = 0 \end{aligned}$$

Finalement, cette somme est nulle.

25.3 Séries alternées

Exercice 26 : ✪✪ Donner la nature des séries suivantes :

1. $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$
2. $\sum \sin\left(\pi \times \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$.
3. ✪✪✪ $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\sum (-1)^n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right)$
5. $\sum (-1)^n e^{1/n}$
6. $\sum (-1)^n\sqrt{n} \times \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
7. $\sum \ln(n) \times \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
8. $\sum \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$
9. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$
10. $\sum \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$
11. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$
12. $\sum \left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$

Correction : Notons à chaque fois le terme général u_n. La méthode est souvent la même (cf. cours) : on applique le CSA pour les premiers termes et on fait un développement asymptotique jusqu'à obtenir de la convergence absolue.

1.
$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right)\\
&= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= (-1)^n\times sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\
&\sim \frac{(-1)^n\pi}{2n}
\end{aligned}$$

   mais cela ne permet pas de conclure puisque le critère d'équivalence ne permet de conclure que lorsque le terme général est de signe constant : il faut faire un DL à un ordre plus grand. Il suffit en fait d'un O bien placé : le terme suivant étant un $\mathrm{O}\left(1/n^4\right)$, il vient :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\right)\\
&= \sin\left(\pi n\left(1+\frac{1}{2n^2}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)\\
&= \sin\left(\pi n+\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= (-1)^n\times sin\left(\frac{\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^n\pi}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)
\end{aligned}$$

   La série de terme général $(-1)^n\pi/2n$ converge d'après le critère des séries alternées (alternée, décroît en valeur absolue vers 0) et la deuxième (celle dont le terme général est un $\mathrm{O}\left(1/n^3\right)$) converge puisque $\sum 1/n^3$ converge (encore une fois, pour le critère des o ou O, seule le terme général à l'intérieur a besoin d'être positif). Par somme, $\sum u_n$ converge.

2. Effectuons la division euclidienne de n^3+1 par n^2+1, ce qui donne :

$$n^3+1=(n^2+1)\times n-n+1$$

   si bien que

$$\begin{aligned}
u_n &= \sin\left(n\pi+\frac{-n+1}{n^2+1}\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\times\left(1+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)\\
&= (-1)^n\sin\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   et on conclut comme précédemment que la série converge.

3. Soit $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x\ln(x)}$ est du signe du sinus donc est du signe de $(-1)^n$ entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$ (pair si n est pair, impair si n est impair : faire un dessin du cercle trigo) : la série $\sum u_n$ est bien alternée. De plus, $|u_n|$ est l'intégrale obtenue en ajoutant la valeur absolue sur le sinus. Par conséquent, à l'aide du changement de variable $u = x - \pi, x = u + \pi$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ dans la première intégrale :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}| - |u_n| &= \int_{(n+1)\pi}^{(n+2)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(u+\pi)|}{(u+\pi)\ln(u+\pi)}\,\mathrm{d}u - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|-\sin(u)|}{(u+\pi)\ln(u+\pi)}\,\mathrm{d}u - \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(u)| \times \left(\frac{1}{(u+\pi)\ln(u+\pi)} - \frac{1}{u\ln(u)}\right)\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

Or, pour tout $u \in [\,n\pi\,;(n+1)\pi\,]$, $u \leq u+\pi$ et $\ln(u) \leq \ln(u+\pi)$ si bien que la fonction intégrée est négative : par positivité de l'intégrale, $|u_{n+1}| - |u_n| \leq 0$: le terme général de la série décroît en valeur absolue. Il suffit donc de prouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit de voir que

$$|u_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{(n+1)\pi\ln((n+1)\pi)}$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: d'après le CSA, $\sum u_n$ converge.

4. L'équivalent obtenu à l'exercice 24 du chapitre 24, à savoir

$$u_n \sim (-1)^{n+1} \times \frac{e}{2n}$$

ne suffit pas pour les mêmes raisons que précédemment. Il faut donc donner un développement asymptotique avec une plus grande précision.

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
&= e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} \\
&= e^{1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e \times e^{-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= e \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)
\end{aligned}$$

Il en découle que

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}e}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on conclut comme précédemment.

5. Le terme général ne tend pas vers 0 (vers 1 en valeur absolue) donc la série diverge grossièrement.

6.
$$\begin{aligned}
u_n &= (-1)^n\sqrt{n}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

7.

$$\begin{aligned} u_n &= \ln(n) \times \left(\frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, la fonction $x \mapsto \ln(x)/x$ décroît sur $[\, e\, ; +\infty\, [$ vers 0 donc la série de terme général $(-1)^n \ln(n)/n$ décroît (à partir du rang 3 mais les premiers termes n'influent pas sur la nature d'une série) vers 0 si bien que la série de terme général $(-1)^n \ln(n)/n$ converge. De plus, comme d'habitude, on prouve que

$$\mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

ce qui permet de conclure.

8.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/2} - \sqrt{n} \\ &= \sqrt{n}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \sqrt{n} \\ &= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

9.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \times \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude.

10.

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

Or, d'après le CSA, la série $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$ converge, et la série harmonique diverge : la série $\sum u_n$ diverge car somme d'une série convergente et d'une série divergente.

11. Écrivons u_n sous forme exponentielle et utilisons la formule de Stirling sous la forme suivante (indispensable pour appliquer le ln, cf. chapitre 24 : la composition est une opération illégale) :

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}(1 + \mathrm{o}\,(1))$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n e^{-\frac{1}{n}\left(\sqrt{2\pi} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + \ln(1+\mathrm{o}(1))\right)} \\ &= (-1)^n e^{-\ln(n) + 1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\ln(n)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n e}{n} \times e^{-\frac{\sqrt{2\pi}}{n} - \frac{\ln(n)}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n e}{n} \times e^{\mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= \frac{(-1)^n e}{n} \times \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n e}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{aligned}$$

et on conclut comme d'habitude : le premier terme est le terme général d'une série convergente d'après le CSA (de signe alterné, et décroissant en valeur absolue vers 0 à partir du rang $n=3$, comme une étude de la fonction $x \mapsto \ln(x)/x$ le prouve aisément) et le $\mathrm{O}\left(\ln(n)/n^2\right)$ est, comme d'habitude, un $\mathrm{o}\left(1/n^{3/2}\right)$ donc également un terme général de série convergente : par somme, la série $\sum u_n$ converge. Mais on peut également le prouver directement avec le critère des séries alternées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n e^{-\frac{1}{n}\left(\sqrt{2\pi}+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)-n+\ln(1+\mathrm{o}(1))\right)} \\ &= (-1)^n e^{-\ln(n)+1+\mathrm{o}(1)} \\ &\sim \frac{(-1)^n e}{n} \end{aligned}$$

si bien que la suite (u_n) est alternée et tend vers 0. Il faut à présent prouver qu'elle est décroissante en valeur absolue. Or,

$$\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \iff (n!)^{\frac{n+1}{n}} \leq (n+1)! \iff (n!)^{n+1} \leq (n+1)!^n$$

Or, puisque $1 \times 2 \times \cdots \times n = n! \leq (n+1)^n$:

$$\begin{aligned} (n+1)!^n &= n!^n \times (n+1)^n \\ &\geq n!^n \times n! \\ &\geq n!^{n+1} \end{aligned}$$

ce qui permet d'appliquer le CSA : la série converge.

12. À l'aide du DL $(1+u)^{1/2} = 1 + u/2 - u^2/8 + \mathrm{O}\left(u^3\right)$, on prouve comme ci-dessus que

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \frac{1}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente d'après le CSA, et le dernier également, et le second est le terme général d'une série divergente. Convergente + divergente = divergente donc la série diverge.

Exercice 27 : ✪✪ Donner la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Correction : Attention, les théorèmes de comparaison ne sont pas valables puisqu'on n'a pas une série à termes positifs. Comme en cours : donnons un développement asymptotique du terme général.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente d'après le CSA, le deuxième est le terme général d'une série divergente (série harmonique) et le troisième converge (théorème de comparaison : seul compte le fait que le terme dans le O soit positif). On a une somme de deux termes convergents et d'un terme divergent : la série diverge, alors que $u_n \sim (-1)^n/\sqrt{n}$ qui est le terme général d'une série convergente. Quand on vous dit que les théorèmes de comparaison sont pour les séries à termes positifs (ou, au moins, de signe constant).

Exercice 28 : ✪✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Correction : Tout d'abord, $\alpha > 0$ donc

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Rappelons que le théorème de comparaison avec des équivalences ne s'applique pas lorsque les séries ne sont pas de signe constant. Une seule solution : poursuivre le DL jusqu'à obtenir une puissance strictement supérieure à 1 pour appliquer le théorème de comparaison avec des o ou des O. Tout d'abord :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

Si $\alpha > 1/2$ alors $2\alpha > 1$ donc la série $\sum 1/n^{2\alpha}$ converge (série de Riemann de paramètre $2\alpha > 1$). D'après les théorèmes de comparaison (on a juste besoin que la série dont le terme général soit dans le O soit positive, ce qui est le cas ici), le O est le terme général d'une série convergente, et d'après le CSA, la série de terme général $(-1)^n/n^\alpha$ (on a bien une série alternée dont le terme général décroît vers 0). Par somme, la série $\sum u_n$ converge.

Supposons à présent que $\alpha \in]\,0\,;1/2\,]$. Poursuivons le DL jusqu'à avoir une puissance strictement supérieure à 1 : notons p le plus petit entier tel que $p\alpha > 1$ si bien que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^3 + \cdots + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \frac{(-1)^n}{3n^{3\alpha}} + \cdots + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \end{aligned}$$

Les termes d'ordre pair sont du type $-1/2kn^{2k\alpha}$ donc sont des termes généraux de séries divergentes (car les puissances sont inférieures à 1). Attention, une somme de termes généraux de séries divergentes peut converger, mais ce n'est pas possible ici car les termes sont tous de même signe. Par conséquent, les termes pairs donnent une série divergente, et les termes d'ordre impair des séries convergentes d'après le CSA : puisque la somme d'une série convergente et d'une série divergente est une série divergente, la série diverge. En conclusion, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 29 : ✪✪✪ Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$ converge et que sa somme est négative.

Correction : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = 8^n/(2n)!$. On va évidemment chercher à appliquer le critère des séries alternées. Il est immédiat (par croissances comparées : la factorielle l'emporte sur les séries géométriques) que (u_n) tend vers 0. Cherchons si (u_n) est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{8^{n+1}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{8^n} \\ &= \frac{8}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

Si $n = 0$, $u_{n+1}/u_n = 4 > 1$; si $n \geq 1$, $(2n+1)(2n+2) \geq 12$ donc $u_{n+1}/u_n < 1$. On en déduit que la somme est décroissante à partir du rang 1 : la nature d'une série ne dépendant pas de ses premier termes, la série est convergente, et on note S sa somme. De plus, on peut appliquer le critère des séries alternées pour la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

à savoir qu'elle est négative (signe de son premier terme) et majorée en valeur absolue par $8/2! = 4$ et donc

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

et

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}\right| \leq 4$$

On en déduit donc que $S \in [\,-3\,;1\,]$ ce qui ne permet pas de conclure. L'astuce est de recommencer au rang 2 :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 - 4 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

et, toujours d'après le critère des séries alternées, la somme à partir du rang 2 est positive et majorée par $64/4! = 64/24 < 3$ donc

$$S = -3 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

et la somme de droite est inférieure stricte à 3 ce qui permet de conclure.

Exercice 30 : ✪✪✪✪

1. Montrer que la suite de terme général

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}\right) - \frac{\ln(n)^2}{2}$$

converge.

2. Montrer que la série $\sum (-1)^n \times \dfrac{\ln(n)}{n}$ converge et calculer sa somme.

Correction :

1. Première méthode : comparons à une intégrale avec la fonction $f : x \mapsto \ln(t)/t$ (pour faire comme avec la constante d'Euler dans le chapitre 23). Pour savoir quel type de dessin faire, il faut connaître la monotonie de f. Or, on trouve facilement que f est décroissante sur $[\,e\,;+\infty\,[$. On se donne donc $n \geq 3$. Soit $t \in [\,n\,;n+1\,]$. La fonction f étant décroissante sur cet intervalle (car $n \geq 3$), alors $f(t) \geq f(n+1)$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \geq \int_n^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

Soit donc $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\ &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \left(\frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, en reconnaissant dans l'intégrale ci-dessus une fonction du type $f \times f'$ (avec $f = \ln$), une primitive en est $f^2/2$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{[\ln(t)]^2}{2}\right]_n^{n+1} \\ &= \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} - \frac{[\ln(n)]^2}{2} \end{aligned}$$

D'après ce qui précède, il vient donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est décroissante. Pour montrer qu'elle converge, il suffit donc de prouver qu'elle est minorée. De même que précédemment, on montre que pour tout $k \in [\![\, 3\,;\, n\,]\!]$,

$$\frac{\ln(k)}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et par somme

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \sum_{k=3}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_3^{n+1} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\ln(n+1)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$$

La fonction ln étant croissante,

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}$$

En ajoutant les termes d'ordre 1 (nul) et d'ordre 2, il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} \geq \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

En d'autres termes,

$$u_n \geq -\frac{\ln(3)^2}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$$

La suite (u_n) est décroissante minorée donc converge.

Deuxième méthode : montrons que la série télescopique $\sum u_{n+1} - u_n$ converge (pour faire comme avec la constante d'Euler dans le chapitre 24). Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{[\ln(n+1)]^2}{2} + \frac{[\ln(n)]^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{(\ln(n) + \ln(1+1/n))^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)^2}{2} - \frac{2\ln(n)\ln(1+1/n)}{2} - \frac{\ln(1+1/n)^2}{2} + \frac{\ln(n)^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \ln(n)\ln(1+1/n) - \frac{\ln(1+1/n)^2}{2} \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \ln(n)\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Or, la **suite** de terme général $\ln(n)/n$ converge (vers 0) donc la série télescopique associée $\sum \ln(n+1)/(n+1) - \ln(n)/n$ converge. Comme d'habitude, $\ln(n)/n^2 = \mathrm{o}\left(1/n^{3/2}\right)$ donc la série dont le terme général est un $\mathrm{O}\left(\ln(n)/n^2\right)$ est convergente, ainsi que la série dont le terme général est un $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$. Par somme, $\sum u_{n+1} - u_n$ converge : la série télescopique converge, la suite converge.

2. Notons L la limite de la suite (u_n) de la question précédente. La série converge d'après le CSA (la série est alternée et le terme général décroît, à partir du rang 3, vers 0). Calculons donc sa somme. Calculons S_{2n} (cela facilitera les calculs quand on fera un changement d'indice, et puisque la série converge, toutes les suites extraites de (S_n) convergent vers la somme de la série donc on peut choisir la suite extraite qui rend les calculs plus faciles). En séparant les termes pairs et termes impairs, il vient

$$\begin{aligned}
S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{(-1)^k \ln(k)}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}
\end{aligned}$$

puisque $(-1)^k = 1$ si k est pair et $(-1)^k = -1$ si k est impair. Or,

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Par conséquent,

$$S_{2n} = 2\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

Et en faisant le changement d'indice $j = 2k$ dans la première somme,

$$S_{2n} = 2\sum_{j=1}^{n} \frac{\ln(2j)}{2j} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

En cassant le premier ln et en simplifiant par 2, il vient

$$S_{2n} = \ln(2)\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{\ln(k)}{k}$$

On a la somme des $\ln(k)/k$ et on veut faire apparaître u_n : on ajoute donc le terme manquant, et on n'oublie pas de compenser, et on fait la même chose pour u_{2n} :

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \ln(2)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(j)}{j}-\frac{\ln(n)^2}{2}+\frac{\ln(n)^2}{2}-\sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}+\frac{\ln(2n)^2}{2}-\frac{\ln(2n)^2}{2} \\ &= \ln(2)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+u_n+\frac{\ln(n)^2}{2}-u_{2n}-\frac{\ln(2n)^2}{2} \end{aligned}$$

En écrivant que $\ln(2n)=\ln(2)+\ln(n)$ et en développant à l'aide d'une identité remarquable, il vient

$$S_{2n}=\ln(2)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+u_n+\frac{\ln(n)^2}{2}-u_{2n}-\frac{\ln(2)^2+2\ln(2)\ln(n)+\ln(n)^2}{2}$$

Après simplification :

$$S_{2n}=\ln(2)\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+v_n-v_{2n}-\frac{\ln(2)^2}{2}-\ln(2)\ln(n)$$

En mettant $\ln(2)$ en facteur dans la somme et le $\ln(n)$, on obtient

$$S_{2n}=\ln(2)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\ln(n)\right)+u_n-u_{2n}-\frac{\ln(2)^2}{2}$$

Or,

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}-\ln(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\gamma$$

et si on note L la limite de la suite (u_n), on a également $u_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}L$ ce qui fait que

$$S_{2n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln(2)\gamma+L-L-\frac{\ln(2)^2}{2}$$

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}=\gamma\ln(2)-\frac{\ln(2)^2}{2}$$

25.4 Séries génériques

Exercice 31 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, et on suppose que $u_n\sim v_n$. Les deux séries sont donc de même nature.

1. ✪✪ Prouver que si les deux séries convergent, alors les restes sont équivalents.
2. ✪✪✪ Prouver que si les deux séries divergent, alors les sommes partielles sont équivalentes.

Correction : Par hypothèse, $u_n/v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $v_n(1-\varepsilon)\leq u_n\leq v_n(1+\varepsilon)$.

1. Soit $N\geq n_0$. Appelons B_N le reste d'ordre N (donc la somme de $N+1$ à $+\infty$) de u_n et A_n le reste de v_n. Or, pour tout $n\geq N$, $n\geq n_0$ donc $v_n(1-\varepsilon)\leq u_n\leq v_n(1+\varepsilon)$. Par somme (on peut sommer jusque $+\infty$ car les séries convergent)

$$A_N(1-\varepsilon)\leq B_N\leq A_N(1+\varepsilon)$$

c'est-à-dire (tout est strictement positif) que $1-\varepsilon\leq B_N/A_N\leq 1+\varepsilon$ i.e. $A_N/B_N\xrightarrow[N\to+\infty]{}1$: les restes sont bien équivalents.

2. Soit $N \geq n_0$. Si on note S_N la somme partielle des u_n et T_N celle des v_n :

$$S_N = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

donc

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1-\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n \leq S_N \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + (1+\varepsilon)\sum_{n=n_0}^{N} v_n$$

c'est-à-dire

$$S_{n_0-1} + (1-\varepsilon)(T_N - T_{n_0-1}) \leq S_N \leq S_{n_0-1} + (1+\varepsilon)(T_N - T_{n_0-1})$$

et donc

$$(1-\varepsilon)T_N + S_{n_0-1} - (1-\varepsilon)T_{n_0-1} \leq S_N \leq (1+\varepsilon)T_N + S_{n_0-1} - (1+\varepsilon)T_{n_0-1}$$

Or, la série $\sum v_n$ diverge et est à termes positifs donc $T_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$: il en découle qu'il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1$,

$$\frac{S_{n_0-1} - (1+\varepsilon)T_{n_0-1}}{T_N} \leq \varepsilon$$

De même, il existe n_2 tel que pour tout $n \geq n_2$,

$$-\varepsilon \leq \frac{S_{n_0-1} - (1-\varepsilon)T_{n_0-1}}{T_N}$$

Soit $N \geq \max(n_0, n_1, n_2)$. On déduit de ce qui précède que

$$(1-\varepsilon)T_N - \varepsilon T_N \leq S_N \leq (1+\varepsilon)T_N + \varepsilon T_N$$

et donc $1 - 2\varepsilon \leq S_N/T_N \leq 1 + 2\varepsilon$. D'où le résultat voulu.

Exercice 32 - Une inégalité bien pratique : ✪✪

1. Soient x et y deux réels. Montrer que $|xy| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$.
2. Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes positifs. Donner la nature de $\sum \sqrt{a_n}/n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ converge. La réciproque est-elle vraie ?
4. On pose

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum {u_n}^2 \text{ converge} \right\}$$

   (a) Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme et par produit. En donner un élément dont aucun terme n'est nul.
   (b) $\ell^2(\mathbb{N})$ contient-il des suites constantes non nulles ?
   (c) Si $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
   (d) Montrer que si la série $\sum u_n$ converge absolument, la suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Et sans le mot « absolument » ?
5. ✪✪✪ Montrer que la série $\sum \dfrac{e^{-\sqrt{\ln(n)}}}{\sqrt{n}}$ diverge.

Correction :

1. Rappelons que pour montrer une inégalité du type $A \geq |\alpha|$, il suffit de montrer que $A \geq \alpha$ et $A \geq -\alpha$. Méthode pour comparer deux quantités : on fait la différence et on donne le signe.

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) - xy = \frac{\left(x^2 - 2xy + y^2\right)}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geq 0$$

   donc $\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right) \geq xy$. De même,

$$\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)+xy=\frac{\left(x^2+2xy+y^2\right)}{2}=\frac{(x+y)^2}{2}\geq 0$$

donc $\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\geq -xy$. Par conséquent, on a le résultat voulu.

2. D'après la question précédente avec $x=\sqrt{a_n}$ et $y=1/n$, il vient

$$\frac{\sqrt{a_n}}{n}\leq\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{n^2}\right)$$

Or, les deux séries $\sum a_n$ et $\sum\dfrac{1}{n^2}$ convergent donc, par somme et multiplication par un scalaire, $\sum\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum\dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

3. De même avec $x=\sqrt{u_n}$ et $y=\sqrt{u_{n+1}}$, on obtient $\sqrt{u_nu_{n+1}}\leq\dfrac{u_n+u_{n+1}}{2}$ et on conclut de la même façon. La réciproque est fausse comme on le voit avec la suite (u_n) définie par $u_n=1$ si n est pair et 0 si n est impair. En effet, $u_nu_{n+1}=0$ pour tout n (car il y a toujours un terme impair parmi deux entiers consécutifs) donc la série $\sum\sqrt{u_nu_{n+1}}$ converge mais pas la série $\sum u_n$ car celle-ci diverge grossièrement.

4. (a) Soient (u_n) et (v_n) dans $\ell^2(\mathbb{N})$. On veut montrer que $(u_n)+(v_n)=(u_n+v_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$ donc que la série $\sum(u_n+v_n)^2$ converge. Or, pour tout $n,(u_n+v_n)^2={u_n}^2+2u_nv_n+{v_n}^2$. Par hypothèse, les deux séries $\sum{u_n}^2$ et $\sum{v_n}^2$ convergent. De plus, d'après la question 1,

$$|u_nv_n|\leq\frac{1}{2}\left({u_n}^2+{v_n}^2\right)$$

Par somme et multiplication par un scalaire, la série de terme général $\dfrac{1}{2}\left({u_n}^2+{v_n}^2\right)$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum|u_nv_n|$ converge : la série $\sum u_nv_n$ converge donc absolument donc converge. Il en découle que $(u_n+v_n)^2$ est somme de termes généraux de séries convergentes donc est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $(u_n+v_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$: $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme.

Montrons qu'il est stable par produit, c'est-à-dire que $(u_n)\times(v_n)=(u_n\times v_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$ c'est-à-dire que $\sum(u_nv_n)^2$ converge. Or, la série $\sum{v_n}^2$ converge donc ${v_n}^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc ${v_n}^2\leq 1$ pour n assez grand. Par conséquent, pour n assez grand, $(u_nv_n)^2={u_n}^2{v_n}^2\leq{u_n}^2$ et on peut conclure d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Enfin, la suite $\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$ (on ne met pas $1/n$ car les suites commencent a priori au rang 0) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ et n'a aucun terme nul.

(b) Non car si (u_n) est une suite constante non nulle alors $({u_n}^2)$ ne tend pas vers 0 et donc la série $\sum{u_n}^2$ diverge grossièrement.

(c) Pas forcément : par exemple avec $u_n=\dfrac{1}{n+1}$. La suite (u_n) appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ mais la série $\sum u_n$ diverge.

(d) Puisque $\sum|u_n|$ converge alors $|u_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. En particulier, $|u_n|\leq 1$ pour n assez grand donc $0\leq{u_n}^2\leq|u_n|$ (rappelons que $x^2\leq x$ pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$) ce qui permet de conclure à l'aide du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. Le résultat est faux pour une série semi-convergente (c'est-à-dire qui converge mais pas absolument) : prenons par exemple $\sum(-1)^n/\sqrt{n}$. Elle converge d'après le critère des séries alternées, mais quand on met le terme général au carré, on obtient la série $\sum 1/n$ qui diverge. On peut donc avoir $\sum u_n$ qui converge et $\sum{u_n}^2$ qui diverge.

5. Si on applique la question 1 avec $x=e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ et $y=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ alors on majore u_n par le terme général d'une série divergente (il y a du $1/n$) ce qui ne permet pas de conclure. On ne peut pas non plus multiplier par n^2 et conclure par croissances comparées car on se retrouverait avec du $n^2e^{-\sqrt{\ln(n)}}$ et on ne peut pas conclure car on n'est pas dans le champ d'application des croissances comparées : rappelons que les croissances comparées s'appliquent quand ce qu'il y a dans l'exponentielle et en dehors sont de même nature, éventuellement à une puissance différente mais de même nature, ce qui n'est pas le cas ici car on a du ln dans l'exponentielle. On va essayer d'être malin : on fait disparaître le $-$ dans l'exponentielle en la mettant au dénominateur, ce qui donne

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}\times e^{\sqrt{\ln(n)}}}$$

C'est la racine carrée dans l'exponentielle qui nous gêne : on va s'en débarrasser en la mettant au carré avec la question 1. On veut appliquer la question 1 à $\sqrt{\ln(n)}$: il manque le x, on prend donc $x=1$ et $y=\sqrt{\ln(n)}$ ce qui donne

$$\sqrt{\ln(n)} \leq \frac{1+\ln(n)}{2}$$

et donc, l'exponentielle étant une fonction croissante,

$$e^{\sqrt{\ln(n)}} \leq e^{\frac{1+\ln(n)}{2}} = e^{1/2} \times e^{\frac{1}{2} \times \ln(n)} = e^{1/2} \times \sqrt{n}$$

Par conséquent, $\sqrt{n}e^{\sqrt{\ln(n)}} \leq e^{1/2} \times n$ et donc $u_n \geq \dfrac{1}{e^{1/2}n}$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum u_n$ converge (comparaison de séries à termes positifs).

Exercice 33 - Produits infinis : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle à valeurs dans $[\,0\,;1\,[$. On lui associe la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \qquad q_n = \prod_{k=1}^{n}(1-u_k) = (1-u_1)\cdots(1-u_n)$$

1. Montrer que la suite (q_n) est convergente et que sa limite L vérifie $0 \leq L \leq 1$. Dans la suite, si la limite de la suite (q_n) est non nulle, on dit que la suite (q_n) est bien convergente. On note alors $L = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}(1-u_k)$ et on dit que L est un produit infini bien convergent.
2. (a) Expliciter la suite (q_n) et donner sa limite lorsque (u_n) est définie par $u_n = n/(n+1)$.
   (b) Même question si pour tout $n \geq 1, u_n = 1/(n+1)$, puis dans le cas où $u_n = 1/(n+1)^2$.
3. On revient au cas général et on se donne une suite (u_n) quelconque d'éléments de $[\,0\,;1\,[$.
   (a) On suppose que la suite (q_n) est bien convergente. Donner la limite de la suite de terme général q_{n+1}/q_n. En déduire que la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est-elle vraie ?
   (b) Montrer que la suite (q_n) associée est bien convergente si et seulement si la série $\sum u_n$ est convergente. On pourra s'intéresser à la suite de terme général $\ln(q_n)$.

Correction :

1. Comme on n'a aucune indication sur la suite (q_n), on regarde sa monotonie. Puisque (q_n) est à valeurs strictement positives (car $u_n \in [\,0\,;1\,[$ pour tout n) et est définie à partir d'un produit, on évalue le quotient. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 1 - u_{n+1} \leq 1$$

Or, la suite (q_n) est à valeurs strictement positives donc la suite (q_n) est décroissante (j'insiste, ce critère n'est valable que pour les suites à valeurs strictement positives). Or, elle est minorée par 0 donc converge.

2. (a) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} q_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{k+1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(b) Soit $n \geq 1$.

$$q_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1} = \frac{1}{n+1}$$

car c'est un produit télescopique, et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour la deuxième suite : mettons au même dénominateur, et reconnaissons une identité remarquable :

$$
\begin{aligned}
q_n &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)\\
&= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{(k+1-1)(k+1+1)}{(k+1)^2}\right)
\end{aligned}
$$

En se souvenant que $(k+1)^2=(k+1)\times(k+1)$, et en coupant ce produit en deux :

$$
q_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\times\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}
$$

c'est-à-dire que q_n est le produit de deux produits télescopiques :

$$
q_n=\frac{1}{n+1}\times\frac{n+2}{2}=\frac{n+2}{2(n+1)}
$$

En particulier, $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/2$

3. (a) Puisque $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L\neq 0$ alors $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L}{L}=1$. Or, $\dfrac{q_{n+1}}{q_n}=1-u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0. La réciproque est fausse comme on l'a vu avec $u_n=\dfrac{1}{n+1}$: la suite (u_n) converge vers 0 mais la suite (q_n) associée converge vers 0 donc n'est pas bien convergente.

   (b) Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons nous à la suite de terme général $\ln(q_n)$. On a

$$
\ln(q_n)=\sum_{k=1}^{n}\ln(1-u_k)
$$

   Supposons que la suite (q_n) soit bien convergente, et notons $L>0$ sa limite. La fonction ln étant continue, il vient : $\ln(q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L)$: la somme ci-dessus admet donc une limite finie quand $n\to+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum\ln(1-u_k)$ converge. Or, d'après la question précédente, $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ si bien que $\ln(1-u_k)\sim -u_k$. On a des séries à termes négatifs équivalents donc de même nature : la série $\sum -u_k$ converge donc la série $\sum u_k$ converge. Réciproquement, supposons que cette série converge, alors $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1-u_k)\sim -u_k$. De même, la série $\sum\ln(1-u_k)$ converge donc ses sommes partielles convergent, donc la suite $(\ln(q_n))$ admet une limite finie S, et donc $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^S>0$: la suite (q_n) est bien convergente. D'où l'équivalence.

Exercice 34 - Contre-exemple au théorème de Brouwer en dimension infinie : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite. On suppose que la série $\sum {u_n}^2$ est convergente et que sa somme, notée S_u, est inférieure ou égale à 1. On définit également la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par $v_0=\sqrt{1-S_u}$ et $v_n=u_{n-1}$ si $n\geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum {v_n}^2$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Montrer qu'il existe n tel que $v_n\neq u_n$.

Correction :

1. Il suffit de voir que, si on note (S_n) la suite des sommes partielles de ${v_n}^2$ et (T_n) celle de ${u_n}^2$, pour tout $N\geq 1$:

$$
\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^{N}{v_n}^2\\
&= {v_0}^2+\sum_{n=1}^{N}{u_{n-1}}^2\\
&= 1-S_u+\sum_{p=0}^{N-1}{u_p}^2\\
&= 1-S_u+T_{N-1}
\end{aligned}
$$

   Or, par hypothèse, $T_{N-1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} S_u$ si bien que $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$: la série converge et sa somme vaut 1.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout n, $u_n = v_n$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $u_n = u_{n-1}$ c'est-à-dire que la suite (u_n) est constante. Si elle n'est pas constante égale à 0, alors la série $\sum {u_n}^2$ diverge grossièrement, ce qui est absurde. On en déduit que la suite (u_n) est la suite nulle, mais alors $S_u = 0$ donc $v_0 = 1 \neq 0 = u_0$, ce qui est absurde puisqu'on a supposé que $v_0 = u_0$. Il existe donc n tel que $u_n \neq v_n$.

Exercice 35 : ✪✪ Soit $\alpha < 0$ et soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \alpha f(x)$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer qu'il existe A tel que f soit décroissante sur $[\,A\,;+\infty\,[$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.
2. En majorant f'/f sur un intervalle bien choisi, montrer que $\sum f(n)$ converge.

Correction :

1. Deux quantités équivalentes au voisinage de $+\infty$ ont même signe pour x assez grand. Or, $\alpha < 0$ et f est à valeurs strictement positives donc αf est strictement positives. Dès lors, f' est strictement négative pour x assez grand donc f est décroissante au voisinage de $+\infty$, ce qui est le résultat voulu. Ensuite, on raisonne comme au chapitre 14 : f étant décroissante minorée, elle converge vers une limite $L \geq 0$. Supposons par l'absurde que $L > 0$. Alors $f'(x) \sim \alpha L$ en $+\infty$ donc il existe B tel que, pour tout $x \geq B$, $f'(x) \leq \alpha L/2$ (rappelons que $\alpha L < 0$). D'après l'IAF, pour tout $x \geq B$, $f(x) - f(B) \leq \alpha L(x - B)/2$ donc
$$f(x) \leq f(B) + \frac{\alpha L}{2}(x - B)$$
et puisque $\alpha L < 0$, on déduit du théorème de minoration que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde puisque f est strictement positive. On en déduit que $L = 0$.
2. Il existe A tel que, pour tout $x \geq A$, $f'(x)/f(x) \leq \alpha/2$ (rappelons encore que $\alpha < 0$). Dès lors, pour tout $x \geq A$, d'après l'IAF appliquée à $\ln(f)$ entre x et A :
$$\ln(f(x)) - \ln(f(A)) \leq \frac{\alpha}{2}(x - A)$$
donc
$$f(x) \leq f(A) \times e^{\alpha(x-A)/2}$$
et donc, en particulier, $f(n) \leq f(A)e^{\alpha(n-A)}$ donc $f(n) = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude.

Exercice 36 : ✪✪ Soient $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs tels que
$${u_n}^{1/n} = 1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
Donner la nature de $\sum u_n$ selon la valeur de α.

Correction :

$$\begin{aligned} u_n &= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)} \\ &= e^{n\left(-\frac{1}{n^\alpha} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)} \\ &= e^{-n^{1-\alpha} + \mathrm{o}\left(n^{1-\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, alors $u_n = e^{-1+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1} \neq 0$: la série diverge grossièrement.

Si $\alpha > 1$, alors $-n^{1-\alpha} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ si bien que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^0 = 1$: la série diverge grossièrement.

Supposons $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. Attention, on ne peut pas affirmer que $u_n \sim e^{-n^{1-\alpha}}$ car on ne connaît pas le comportement du $\mathrm{o}\,()$ (négligeable devant une quantité qui tend vers $+\infty$ peut tendre vers tout et n'importe quoi). Cependant, on fait comme d'habitude et on force la convergence en comparant à $1/n^2$ i.e. en multipliant par n^2 :
$$n^2 u_n = e^{-n^{1-\alpha} + \mathrm{o}\left(n^{1-\alpha}\right) + 2\ln(n)}$$

La quantité dans l'exponentielle est équivalente à $-n^{1-\alpha}$ donc tend vers $-\infty$ si bien que $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude que la série converge. En conclusion, la série converge si et seulement si $\alpha \in \left]0\,;1\right[$.

Exercice 37 - Règle de Duhamel et applications : ✪✪ Soient (u_n) une suite strictement positive et λ un réel quelconque tels que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. (a) On pose $v_n = n^\lambda u_n, w_n = \ln(v_n)$ et enfin $t_n = w_{n+1} - w_n$. Montrer que la série $\sum t_n$ converge.

   (b) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$. Où a-t-on déjà vu une méthode similaire ? En voici trois applications.

2. Soient (a, b) non entiers. On définit la suite (u_n) par $u_0 = \alpha > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n-a}{n-b} \times u_n$$

   On suppose que a, b et α sont tels que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive. Donner la nature de $\sum u_n$.

3. Donner la nature de la série $\sum u_n$, où

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = \sqrt{(n-1)!} \times \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

4. Pour tous $x > 0$ et $n \geq 0$ on note $(x)_n = x(x+1)\cdots(x+n)$. Soient $a, b, c > 0$. On pose

$$u_n = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \times \frac{1}{n!}$$

   La série $\sum u_n$ est appelée *série hypergéométrique de Gauß*. Étudier sa convergence.

Correction :

1. (a) Soit $n \geq 1$. Puisque $t_n = w_{n+1} - w_n$ alors :

$$\begin{aligned}
t_n &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)^\lambda}{n^\lambda} \times \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \lambda \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \lambda \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \lambda\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{\lambda}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

   Or, $\sum 1/n^2$ converge et est à termes positifs donc $\sum t_n$ converge (seul compte le fait que le terme dans le O soit strictement positif).

   (b) D'après la question précédente, la série télescopique $\sum(w_{n+1} - w_n)$ converge donc la suite $(w_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite L. En d'autres termes, $\ln(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et la fonction exponentielle est continue donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L > 0$.
   Posons $A = e^L$.Dès lors, $n^\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$ donc $u_n \sim \dfrac{A}{n^\lambda}$.

2. On veut appliquer la question précédente : on veut donc donner un développement asymptotique de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à la précision $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ ce qui permettra de donner un équivalent de u_n et donc la nature de la série $\sum u_n$. Soit $n \geq 1$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-a}{n-b} = \frac{1-\dfrac{a}{n}}{1-\dfrac{b}{n}} = \left(1-\frac{a}{n}\right)\times\left(1+\frac{b}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

(DL de $\dfrac{1}{1-u}$). On a donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1-\dfrac{\lambda}{n}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ avec $\lambda = a-b$ (n'oublions pas qu'il y a un $-$ devant le terme λ/n). Ainsi, d'après la question 1, il existe $A>0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^{a-b}}$. On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{n^{a-b}}$ converge. Or, celle-ci est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a-b>1$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a-b>1$.

3. Idem, mettons $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sous la bonne forme. On a

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\sqrt{n!}\times\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\sqrt{(n-1)!}\times\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)} = \sqrt{n}\times\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \sqrt{n}\times\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{6n^{3/2}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{5/2}}\right)\right)\\
&= 1-\frac{1}{6n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et donc, toujours d'après la question 1, il existe $A>0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{n^{1/6}}$ et puisque $1/6\le 1$, le même raisonnement que d'habitude nous permet d'affirmer que $\sum u_n$ diverge.

4. Là aussi, il suffit de donner un DL de u_{n+1}/u_n :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(a)_{n+1}}{(a)_n}\times\frac{(b)_{n+1}}{(b)_n}\times\frac{(c)_n}{(c)_{n+1}}\times\frac{n!}{(n+1)!}\\
&= \frac{(a+n+1)(b+n+1)}{(c+n+1)(n+1)}\\
&= \left(n^2+n(a+b+2)+(a+1)(b+1)\right)\times\frac{1}{n^2+n(c+2)+(c+1)}\\
&= \left(n^2+n(a+b+2)+(a+1)(b+1)\right)\times\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{(c+2)}{n}+\dfrac{(c+1)}{n^2}}\\
&= \left(1+\frac{(a+b+2)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\times\left(1-\frac{(c+2)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= 1-\frac{c+2-(a+b+2)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= 1-\frac{c-(a+b)}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que la série converge si et seulement si $c>a+b+1$.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $\sum u_n$ une série convergente. On suppose que (u_n) est décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (on pourra s'intéresser à $S_{2n}-S_n$ où, comme d'habitude, on a noté (S_n) la suite des sommes partielles de la série). Contre-exemple si (u_n) n'est pas décroissante ?

Correction : Soit $n\ge 1$. $S_{2n}-S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k$. Par décroissance de la suite (u_n),

$$nu_{2n} \le S_{2n}-S_n$$

Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque la série $\sum u_n$ converge, et la suite (u_n) est décroissante donc $u_n\ge 0$ pour tout n. Dès lors, d'après le théorème d'encadrement, $nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $2nu_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. La suite (u_n) étant décroissante, $2nu_{u_{2n+1}} \le 2nu_{2n}$

donc, toujours par encadrement, $2nu_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $(2n+1)u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: les suites extraites d'ordre pair et d'ordre impair tendent toutes les deux vers 0 ce qui permet de conclure. Si la suite (u_n) n'est pas supposée décroissante, le résultat n'est plus valide : il suffit de prendre $u_n = 1/n$ si n est un carré parfait (supérieur ou égal à 1) et 0 sinon, la série converge (et sa somme vaut $\pi^2/6$) mais la suite (nu_n) ne converge pas vers 0 (sa suite extraite $(nu_n)_{n \text{ carré parfait}}$ est constante égale à 1).

Exercice 39 : ✪✪

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum u_n v_n$ converge. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de positivité.
2. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série qui converge absolument. Montrer que $\sum {u_n}^2$ converge. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la convergence et pas la convergence absolue.
3. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série convergente à termes positifs. Montrer que la série $\sum u_1 \cdots u_n$ converge.

Correction :

1. Les séries convergent donc les termes généraux tendent vers 0. Dès lors, pour n assez grand, $0 \leq v_n \leq 1$ donc $0 \leq u_n v_n \leq u_n$: par comparaison pour les séries à termes positifs, on a le résultat voulu. C'est faux sans l'hypothèse de positivité en prenant par exemple $u_n = v_n = (-1)^n/\sqrt{n}$: les deux séries convergent d'après le CSA mais la série $\sum u_n v_n$ est la série harmonique qui diverge.
2. Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq 1$ donc $0 \leq {u_n}^2 \leq u_n$ et on conclut de même. C'est faux sans l'hypothèse de positivité en prenant par exemple $u_n = (-1)^n/\sqrt{n}$.
3. Idem, pour n assez grand, $0 \leq u_n \leq 1$. Plus précisément, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $0 \leq u_n \leq 1$. Dès lors, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq u_1 \cdots u_n \leq u_1 \cdots u_{n_0-1} \times u_n$$

les termes manquants étant majorés par 1. Or, le membre de droite est égal à u_n multiplié par une constante donc est le terme général d'une série convergente, et on conclut comme d'habitude.

Exercice 40 - Il n'y a pas de frontière entre la convergence et la divergence : ✪✪✪ Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On note comme d'habitude (S_n) la suite des sommes partielles et, en cas de convergence, (R_n) la suite des restes.

1. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{\sqrt{S_n}}$ diverge. En déduire qu'il existe une série à termes positifs divergente $\sum v_n$ telle que $v_n = \mathrm{o}\,(u_n)$.
2. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}}$ converge. On pourra justifier que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

En déduire qu'il existe une série à termes positifs convergente $\sum v_n$ telle que $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$.

Correction :

1. Notons (T_n) la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum \frac{u_n}{\sqrt{S_n}}$ (précisons que la suite (S_n) est strictement croissante puisque $\sum u_n$ est à termes strictement positifs). Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{S_k}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{\sqrt{S_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{S_n}} = \sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

puisque $\sum u_n$ est une série divergente à termes positifs donc $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par conséquent, la série diverge. Si on pose $v_n = u_n/\sqrt{S_n}$, d'après ce qui précède, $\sum v_n$ diverge. Or, $\sqrt{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si bien que $v_n = \mathrm{o}\,(u_n)$ ce qui est le résultat voulu.
2. Précisons que la suite $(\sqrt{R_n})$ est décroissante. La fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ étant décroissante, on prouve comme d'habitude (comparaison à une intégrale entre R_n et R_{n-1}) que

$$\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{R_{n-1}}} = \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

Rappelons que

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \qquad \text{et} \qquad R_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

si bien que $R_{n-1} - R_n = u_n$ ce qui donne la majoration voulue. Or, le membre de droite se calcule explicitement (en primitivant $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ en $t \mapsto 2\sqrt{t}$) si bien que

$$\frac{u_n}{\sqrt{R_{n-1}}} \leq 2\sqrt{R_{n-1}} - 2\sqrt{R_n}$$

La série $\sum 2\sqrt{R_{n-1}} - 2\sqrt{R_n}$ est la série télescopique associée à la suite de terme général $2\sqrt{R_n}$ qui converge vers 0, donc cette série converge. Par comparaison de séries à termes positifs, on a le résultat voulu.

Si on pose $v_n = u_n/\sqrt{R_{n-1}}$, d'après ce qui précède, $\sum v_n$ converge. Or, le reste d'une série convergente tend vers 0 donc $\sqrt{R_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 41 - Critère de condensation de Cauchy : ✪✪✪✪ Soit (u_n) une suite qui décroît vers 0.

1. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
2. En déduire une nouvelle preuve de la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$.
3. Montrer que si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \min\left(u_n, \dfrac{1}{n}\right)$ diverge également.

Correction :

1. Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Supposons que la série $\sum u_n$ converge. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) étant décroissante,

$$\begin{aligned} S_{2^n} - S_{2^{n-1}} &= \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \\ &\geq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_{2^n} \\ &\geq 2^{n-1}u_{2^n} \end{aligned}$$

Or, la suite (S_{2^n}) est extraite de (S_n) donc converge vers la même limite, à savoir la somme de la série $\sum u_n$, donc la série télescopique associée converge. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 2^{n-1}u_{2^n}$ converge donc, en multipliant par 2, la série $\sum 2^n u_{2^n}$ converge.

Réciproquement, supposons que la série $\sum u_n$ diverge. Toujours par décroissance de la suite,

$$\begin{aligned} S_{2^n} - S_{2^{n-1}} &= \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_k \\ &\leq \sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} u_{2^{n-1}} \\ &\leq 2^{n-1}u_{2^{n-1}} \end{aligned}$$

et on conclut de la même façon (suite divergente donc série télescopique divergente et ensuite théorème de comparaison pour les séries à termes positifs).

2. Puisque $n \mapsto 1/n\ln(n)$ décroît vers 0, d'après la question précédente, cette série est de même nature que la série de terme général

$$2^n \times \frac{1}{2^n\ln(2^n)} = \frac{1}{n\ln(2)}$$

qui est une série divergente (série harmonique).

3. Posons $v_n = \min(u_n, 1/n)$. On veut utiliser le critère de Cauchy : prouvons que (v_n) décroît vers 0. Or, $v_{n+1} = \min(u_{n+1}, 1/(n+1))$. Si $v_{n+1} = u_{n+1}$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ (puisque (u_n) est décroissante) et $u_{n+1} \leq 1/(n+1) \leq 1/n$. Dans tous les cas, $v_{n+1} \leq v_n$, et le raisonnement est le même si $v_{n+1} = 1/(n+1)$: la suite (v_n) est bien décroissante, et puisque $0 \leq v_n \leq 1/n$, alors elle tend vers 0. On peut donc utiliser le critère de Cauchy : la série $\sum v_n$ et la série $\sum 2^n v_{2^n}$ sont de même nature. Or, pour tout n,

$$2^n v_{2^n} = 2^n \min\left(u_{2^n}, \frac{1}{2^n}\right) = \min\left(2^n u_{2^n}, 1\right)$$

Supposons par l'absurde que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum 2^n v_{2^n}$ converge donc, en particulier, $2^n v_{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il en découle que le minimum ci-dessus est égal à $2^n u_{2^n}$ pour n assez grand donc $2^n v_{2^n} = 2^n u_{2^n}$ pour n assez grand, et par conséquent $\sum 2^n u_{2^n}$ converge donc (critère de Cauchy) $\sum u_n$ converge, ce qui est absurde.

Exercice 42 - Théorème de réarrangement de Riemann : ✪✪✪✪ Soit $\sum u_n$ une série semi-convergente.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = x$$

En d'autres termes, lorsqu'on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, on peut réarranger les termes pour que sa somme ait une valeur arbitraire ! D'où l'intérêt de la convergence absolue pour définir la sommabilité : cf. chapitre 35.

2. **Remake :** Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijective telle que

$$\sum_{n=0}^{N} u_{\varphi(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Correction :

1.
   - Prouvons que la série contient une infinité de termes positifs et négatifs. Si elle ne contient qu'un nombre fini de termes positifs, alors elle est négative à partir d'un certain rang donc $|u_n| = -u_n$ à partir d'un certain rang donc la CVA de la série implique la convergence de la série $\sum u_n$ donc la convergence de la série $\sum u_n$ ce qui est exclu : la série contient donc une infinité de termes positifs, et on montre de même qu'elle contient une infinité de termes négatifs.
   - Notons (y_n) la suite extraite de (x_n) ne contenant que les termes positifs. Montrons que la série des y_n diverge. Reprenons les notations de la démonstration du cours, celle où on prouve que la convergence absolue implique la convergence, c'est-à-dire qu'on pose $v_n = \max(u_n, 0)$ et $w_n = \max(-u_n, 0)$. Il y a convergence absolue donc la série $\sum |u_n|$ converge. Or, $|u_n| = v_n + w_n$: par conséquent, soit les deux séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent, soit elles divergent toutes les deux. Si elles convergent toutes les deux, alors la série $\sum u_n$ converge, ce qui est exclu (puisque, pour tout n, $u_n = v_n - w_n$). Par conséquent, elles divergent toutes les deux. Or, les y_n (i.e. les termes positifs de la suite (u_n)) sont exactement les termes non nuls de (v_n) (avec des termes nuls intercalés, correspondant aux valeurs négatives de (u_n)). Il en découle que la série $\sum y_n$ diverge donc que ses sommes partielles tendent vers $+\infty$ (puisque cette série est à termes positifs). De même on montre que, si on note (z_n) la suite extraite des valeurs négatives de (u_n), la série $\sum z_n$ diverge et ses sommes partielles tendent vers $-\infty$. Par conséquent, si on ne somme que des y_n ou que des z_n, on tend respectivement vers $+\infty$ et $-\infty$. Précisons tout de même que les suites (y_n) et (z_n) étant extraites de (u_n), elles convergent vers la même limite, c'est-à-dire 0 (puisque la série $\sum u_n$ converge absolument).
   - L'idée de la preuve est alors très simple : on part de 0 et à chaque étape, si on est en dessous de α, on ajoute un terme positif i.e. un y_n, et ainsi de suite jusqu'à dépasser α, ce qui finit par se produire d'après ce qui précède, et une fois α dépassé, on ajoute des termes négatifs, i.e. des z_n, jusqu'à passer en dessous de α, ce qui finit par se produire également d'après ce qui précède, et ceci indéfiniment. On va donc osciller autour de α, mais en faisant des oscillations de plus en plus petites puisque les deux suites (y_n) et (z_n) tendent vers 0, donc la série nouvellement ordonnée va bien tendre vers α. Prouvons cela rigoureusement de la même façon qu'on construisait des suites extraites dans le chapitre 12.
   - Notons (n_k) la suite des indices pour lesquels $u_n \geq 0$ (i.e. u_{n_0} est le premier terme positif, u_{n_1} est le second etc.) et (p_k) la suite des indices pour lesquels $u_n < 0$. Notons (T_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum u_{\varphi(n)}$, avec la fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :
     - ⋆ $\varphi(0) = n_0 = \min\{k \,|\, x_k \geq 0\}$ si $\alpha \geq 0$ et $p_0 = \min\{k \,|\, x_k \leq 0\}$ sinon, c'est-à-dire que $u_{\varphi(0)}$ est le premier terme positif de la suite si α est positif (i.e. si on part d'en-dessous de α), et est le premier terme négatif sinon.
     - ⋆ Si $T_0 \leq \alpha$, on pose $\varphi(1) = \min\{k \neq \varphi(0) \,|\, u_k \geq 0\}$ i.e. on prend le premier terme positif qui ne soit pas celui qu'on ait déjà, et si $T_0 > 0$, on pose $\varphi(1) = \min\{k \neq \varphi(0) \,|\, u_k < 0\}$.
     - ⋆ De façon générale, supposons $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ construits. Si $T_n \leq \alpha$, on pose $\varphi(n+1) = \min\{k \neq \varphi(0), \dots, \varphi(n) \,|\, x_k \geq 0\}$, et sinon, on prend $\varphi(n+1) = \min\{k \neq \varphi(0), \dots, \varphi(n) \,|\, x_k < 0\}$.

- Prouvons que φ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Elle est injective par construction puisqu'à chaque étape, on prend un élément distinct des précédents. Supposons que φ ne soit pas surjective : il existe N tel que $\varphi(n)$ ne soit jamais égal à N. Supposons sans perte de généralité que $u_N \geq 0$: puisqu'on prend les termes dans l'ordre croissant, tous les termes positifs que prend la suite réarrangée sont d'indice inférieur à N donc on n'en prend qu'un nombre fini, si bien qu'à partir d'un certain rang, la suite $(u_{\varphi(n)})$ ne prend que des valeurs négatives, c'est-à-dire est égale à (z_n), ce qui n'est pas possible car cela implique que les sommes partielles tendent vers $-\infty$, comme on l'a déjà vu, donc finissent par tomber sous α et alors on ajouterait d'autres termes positifs. La fonction φ est donc bien bijective.
- Prouvons enfin que la série $\sum u_{\varphi(n)}$ converge et soit de somme α. La suite $(u_{\varphi(n)})$ étant extraite de (u_n), elle converge également vers 0 : fixons $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon$. De plus, il y a une infinité d'indices n tel que $u_{\varphi(n)} \geq 0$ et une infinité d'indices n tels que $u_{\varphi(n)} < 0$: il existe donc un indice $N \geq n_0$ tel que $u_{\varphi(N)} < 0$ et $u_{\varphi(N+1)} \geq 0$ (on prend un indice supérieur à n_0 qui a une image négative, ce qui est possible puisqu'il y en a une infinité, et on prend ensuite le minimum des indices ultérieurs qui a une image positive, il y a alors un changement de signe et on a le résultat voulu).
- Soit $n \geq N+1$. Prouvons que $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$ par récurrence sur $n \geq N+1$.
  - ⋆ On passe de T_N à T_{N+1} en ajoutant $u_{\varphi(N+1)}$ inférieur à ε (en valeur absolue) et positif, si bien que $0 \leq u_{\varphi(N+1)} \leq \alpha$. Or, puisque ce terme est positif, c'est que la somme partielle T_N est inférieure à α, donc $T_{N+1} = T_N + u_{\varphi(N+1)} \leq \alpha + \varepsilon$. Supposons que $T_{N+1} < \alpha - \varepsilon$. Puisque $T_{N+1} = T_N + u_{\varphi(N+1)}$ avec $u_{\varphi(N+1)} > 0$, alors $T_N < \alpha - \varepsilon$ également mais $T_{N-1} \geq \alpha$ puisque $u_{\varphi(N)}$ est négatif, et donc $u_{\varphi(N)} > \varepsilon$ ce qui est absurde : on en déduit que $|T_{N+1} - \alpha| \leq \varepsilon$.
  - ⋆ L'hérédité est ensuite immédiate : soit $n \geq N+1$, supposons que $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$. Supposons sans perte de généralité que $T_n \leq \alpha$. Alors $u_{\varphi(n+1)} \geq 0$ mais on sait que $|u_{\varphi(n+1)}| \leq \varepsilon$ donc $T_{n+1} \leq \alpha + \varepsilon$, mais, par hypothèse de récurrence, $\alpha - \varepsilon \leq T_n$ et $u_{\varphi(n+1)} \geq 0$ donc $T_{n+1} \geq \alpha - \varepsilon$ ce qui clôt la récurrence.

  En conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$, $|T_n - \alpha| \leq \varepsilon$: c'est le résultat voulu. PS : j'ai fait tout l'exo avec α à la place de x, flemme de changer.

2. Idem en adaptant un peu la preuve : à chaque étape, on compare non pas à α mais à n, i.e. on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 0, puis on ajoute un terme négatif, puis on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 1, puis un terme négatif, puis on ajoute des termes positifs jusqu'à dépasser 2, puis un terme négatif. On montre alors que la somme partielle obtenue diverge bien vers $+\infty$.

25.5 Formule de Stirling

Exercice 43 : ✪ A l'aide de la formule de Stirling, donner un équivalent des suites suivantes :

1. $u_n = \binom{2n}{n}$
2. $u_n = \dfrac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^3}$
3. $u_n = \ln(n!)$
4. $u_n = (n!)^{1/n}$
5. $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n}$
6. ✪✪ $u_n = \binom{n^2}{n}$

Correction : Rappelons que l'équivalence passe au produit, au quotient, à la puissance fixe, mais pas à la puissance variable.

1. $$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n)!}{n!^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\left(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right)^2} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2\pi n^{2n+1}e^{-2n}} \\ &\sim \frac{2^{2n+1/2}}{\sqrt{2\pi}n^{1/2}} \\ &\sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} \\ &\sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \end{aligned}$$

   En particulier (mais ce n'était pas demandé)

$$\binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

2.

$$\begin{aligned} u_n &\sim \frac{2^{2n+1}\left(\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\right)^4}{2n \times \left(\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\right)^3} \\ &\sim \frac{2^{2n+1}(\sqrt{2\pi})^4 n^{4n+2}e^{-4n}}{2n \times (\sqrt{2\pi})^3 2^{6n+3/2} n^{6n+3/2}e^{-6n}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}n^{2n+1/2}e^{2n}}{n \times 2^{4n+3/2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}n^{2n-1/2}e^{2n}}{2^{4n+1}} \end{aligned}$$

3. Fait en classe : $u_n \sim n\ln(n)$.
4. Comme dans le 11 de l'exercice 26, on trouve que $u_n \sim n/e$.
5. En ajoutant les termes pairs au numérateur pour boucher les trous, on trouve comme d'habitude que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(2n+1)!}{2^{2n}n!^2} \\ &= \frac{2n+1}{4^n} \times \frac{(2n)!}{n!^2} \end{aligned}$$

et comme dans le 1, on trouve donc que

$$u_n \sim \frac{2n}{4^n} \times \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

6. Celui-ci est plus difficile.

$$u_n = \frac{(n^2)!}{n!(n^2-n)!}$$

Puisqu'on a un quotient et un produit, il suffit de donner un équivalent de chaque terme. Commençons par $(n^2)!$:

$$\begin{aligned} (n^2)! &\sim \sqrt{2\pi}(n^2)^{n^2+1/2}e^{-n^2} \\ &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2+1}e^{-n^2} \end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$(n^2-n)! \sim \sqrt{2\pi}(n^2-n)^{n^2-n+1/2}e^{-n^2+n}$$

Le terme le plus délicat est $(n^2-n)^{n^2-n+1/2}$: essayons d'en donner un équivalent simple. Sortons le terme dominant, ce qui donne

$$\begin{aligned} (n^2-n)^{n^2-n+1/2} &= (n^2)^{n^2-n+1/2} \times \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2} \\ &= n^{2n^2-2n+1} \times \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2} \end{aligned}$$

Attention, la puissance est variable : le terme entre parenthèses n'est pas équivalent à 1 ! Une seule solution : la notation exponentielle. Rappelons que pour donner l'équivalent d'une exponentielle, on s'arrête quand on a un $o(1)$ (cf. cours du chapitre 24).

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2-n+1/2} &= e^{(n^2-n+1/2)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}\\ &= e^{(n^2-n+1/2)\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}\\ &= e^{-n-1/2+1+\mathrm{o}(1)}\\ &= e^{-n+1/2}\times e^{\mathrm{o}(1)}\\ &\sim e^{-n+1/2}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}(n^2-n)! &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n+1/2}e^{-n^2+n}\\ &\sim \sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n^2+1/2}\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{\sqrt{2\pi}n^{2n^2+1}e^{-n^2}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}n^{2n^2-2n+1}e^{-n^2+1/2}}\\ &\sim \frac{e^{n-1/2}n^{n-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

Exercice 44 : ✪ Donner la nature de la série $\sum \dfrac{n^{n+\gamma}}{n!a^n}$ en fonction de $\gamma\in\mathbb{R}$ et de $a\in\mathbb{R}_+^*$.

Correction : D'après la formule de Stirling, si on note u_n le terme général de la série :

$$\begin{aligned}u_n &\sim \frac{n^{n+\gamma}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}a^n}\\ &\sim \frac{n^{\gamma-1/2}}{\sqrt{2\pi}}\times\left(\frac{e}{a}\right)^n\end{aligned}$$

Si $a<e$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la série diverge grossièrement. Si $a>e$, on montre comme d'habitude que $n^2u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n=\mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et on conclut comme d'habitude que la série converge. Supposons enfin que $a=e$ si bien que

$$u_n\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}n^{1/2-\gamma}}$$

On conclut comme d'habitude (séries à termes positifs équivalents donc de même nature) que $\sum u_n$ converge si et seulement si $1/2-\gamma>1$ si et seulement si $\gamma<-1/2$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a>e$ ou ($a=e$ et $\gamma<-1/2$).

Exercice 45 : ✪✪✪ Existence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Correction : Tout d'abord, si on note u_n le terme général, alors

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et on montre que la série converge de même que d'habitude. Dès lors, si on note (S_N) la suite des sommes partielles, il suffit de calculer la limite de (S_{2N}). On prouve (cf. exercice 29 du chapitre 3) que

$$S_{2N}=\ln\left(\frac{(2N+1)!\times(2N)!}{2^{4n}\times(n!)^4}\right)$$

Il suffit donc de donner un équivalent de la quantité dans le ln, quantité qu'on note u_N. Utilisons pour cela la formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
u_N &= \frac{(2n+1)\times (2n)!^2}{2^{4n}\times (n!)^4}\\
&\sim \frac{2n\times \left(\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\right)^2}{2^{4n}\times \left(\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\right)^4}\\
&\sim \frac{2n\times \sqrt{2\pi}^2\times 2^{4n+1}n^{4n+1}e^{-4n}}{2^{4n}\times \sqrt{2\pi}^4 n^{4n+2}e^{-4n}}\\
&\sim \frac{4}{2\pi}\\
&\sim \frac{2}{\pi}
\end{aligned}$$

et le ln est continu donc $S_{2N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2/\pi)$ c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

La somme est négative ce qui est cohérent avec le CSA : la somme est du signe du premier terme.

25.6 Comparaison série-intégrale

Exercice 46 : ✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^a}$$

Correction : Comme dans l'exercice 30 du chapitre 22, on trouve que

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} \sim \frac{2k^{3/2}}{3}$$

si bien que

$$u_n \sim \frac{2}{3n^{a-3/2}}$$

On a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n^{a-3/2}$ est une série de Riemann donc converge si et seulement si $a-3/2>1$ si et seulement si $a>5/2$. En conclusion, la série converge si et seulement si $a>5/2$.

Chapitre 26

Probabilités sur un univers fini

« Take a good look at me now, 'cos I'll still be standin' here
And you coming back to me is against all odds
It's the chance I've gotta take »

Phil Collins, Against All Odds (Take a Look At Me Now)

Si rien n'est précisé, on se place sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$.

Vrai ou Faux :

1. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)$.
2. Si $P(A) + P(B) > 1$ alors $B \cap A \neq \varnothing$.
3. Si $P(A) + P(B) = 1$ alors $B = \overline{A}$.
4. Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$ alors $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements.
5. On se donne une urne contenant n boules rouges et n boules noires, et on procède à n tirages sans remise. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, notons R_k : « On tire une boule rouge à l'instant k ». Alors $P(R_1 \cap R_2) = 1/4$.
6. Avec les mêmes notations, $R_1, \dots, R_n$ sont mutuellement indépendants.
7. Si A et B sont indépendants, alors $P_A(B) = P(B)$.
8. Si A et B sont indépendants, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
9. Si A et B sont incompatibles, alors $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.
10. Si $P(A) \in \,]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \leq P(B)$.
11. Si $P(A) \in \,]\,0\,;1\,[$, $P_A(B) \geq P(B)$.
12. Un événement de probabilité non nulle n'est pas indépendant de lui-même.
13. Si A et B sont indépendants et B et C sont indépendants, alors A et C sont indépendants.
14. Deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont pas indépendants.

26.1 Manipulations de probabilités

Exercice 1 : ✪ Soient A et B deux événements avec $P(A > 0)$. Prouver que $P(A \cap B | A \cup B) \leq P(A \cap B | A)$.

Correction : Tout d'abord, $P(A \cup B) \geq P(A) > 0$ donc les deux probabilités conditionnelles sont bien définies. On a d'une part :

$$\begin{aligned} P(A \cap B | A \cup B) &= \frac{P(A \cap B \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} \end{aligned}$$

puisque $A \cap B \subset A \cup B$. On trouve de même que $P(A \cap B | A) = P(A \cap B)/P(A)$ puisque $A \cap B \subset A$, ce qui permet de conclure puisque $P(A \cup B) \geq P(A)$ donc $1/P(A \cup B) \leq 1/P(A)$.

Exercice 2 : ✪ Soient A et B deux événements tels que

$$P(A) = \frac{7}{10}, \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(A \cup B) = \frac{9}{10}$$

Calculer $P(A\Delta B)$.

Correction : En d'autres termes, on cherche la probabilité que seul l'un des deux événements A ou B soit réalisé. Rappelons que $A\Delta B = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$ et puisque $A \cap B \subset A \cup B$, alors $P(A\Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$. Or,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

En conclusion, $P(A\Delta B) = 6/10 = 3/5$.

Exercice 3 : ✪ On jette un dé pipé dont les probabilités d'occurrence de $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement

$$p_1 = \frac{1}{12}, \qquad p_2 = \frac{1}{6}, \qquad p_3 = \frac{1}{12}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}, \qquad p_5 = \frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad p_6 = \frac{1}{3}$$

1. Justifier qu'on peut munir $(\llbracket 1\,;\,6 \rrbracket, \mathscr{P}(\llbracket 1\,;\,6 \rrbracket))$ d'une telle probabilité.
2. Décrire chacun des événements suivants comme des parties de $\Omega = \llbracket 1\,;\,6 \rrbracket$ et calculer leurs probabilités :
   (a) « Le chiffre est impair ».
   (b) « Le chiffre est supérieur ou égal à 2 ».
   (c) « Le chiffre est impair et inférieur à 4 ».
   (d) « Le chiffre est impair ou inférieur à 4 ».

Correction :

1. Les six nombres sont positifs et on trouve facilement (?) que leur somme fait 1.
2. Notons ces événements respectivement, A, B, C, D.
   (a) $A = \{1; 3; 5\} = \{1\} \cup \{3\} \cup \{5\}$ et l'union est disjointe donc $P(A) = p_1 + p_3 + p_5 = 1/3$.
   (b) $B = \overline{\{1\}}$ donc $P(A) = 1 - p_1 = 11/12$.
   (c) $C = \{1\} \cup \{3\}$ et cette union est disjointe donc $P(C) = p_1 + p_3 = 1/6$.
   (d) $D = \{1; 2; 3; 4; 5\} = \overline{\{6\}}$ donc $P(D) = 1 - p_6 = 2/3$.

Exercice 4 : ✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $\Omega = \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$. Soit P une fonction définie sur $\mathscr{P}(\Omega)$ telle que, pour tout $k \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$, $P(\{k\}) = \alpha k \binom{n}{k}$. À quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction P définit-elle une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$?

Correction : P est une probabilité si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{n} P(\{k\}) = 1$$

si et seulement si

$$\alpha = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}}$$

Or, cette somme vaut (calcul classique à savoir faire : cf. exercice 41 du chapitre 4) $n \times 2^{n-1}$ si bien que P est une probabilité si et seulement si $\alpha = 1/n2^{n-1}$.

Exercice 5 : ✪ Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. On dit que A exerce une influence positive sur B si $P_A(B) \geq P(B)$. Montrer que A exerce une influence positive sur B si et seulement si B exerce une influence positive sur A.

Correction : Supposons que A exerce une influence positive sur B. Alors $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq P(B)$ et donc $P(A \cap B) \geq P(A)P(B)$. En divisant par $P(B)$ (strictement positif), il vient :

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq P(A)$$

c'est-à-dire que $P_B(A) \geq P(A)$: B exerce une influence positive sur A. Par symétrie des rôles, on a la réciproque.

Exercice 6 : ✪ On a truqué un dé à six faces numérotées de 1 à 6 de sorte que :
- les nombres pairs aient tous la même probabilité.
- les multiples de 3 aient tous la même probabilité.
- les nombres premiers aient tous la même probabilité.
- 1 sorte avec la probabilité 1/5.

Donner la probabilité de chaque face.

Correction : On se place donc sur $\Omega = [\![1\,;\,6]\!]$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$, et on cherche donc quelle probabilité placer sur cet espace probabilisable. On cherche une probabilité P vérifiant donc :
- $P(\{2\}) = P(\{4\}) = P(\{6\})$.
- $P(\{3\}) = P(\{6\})$.
- $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$.
- $P(\{1\}) = 1/5$.

Des trois premières lignes, on déduit que $P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\})$ et, si on note cette valeur commune p, alors

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) + P(\{4\}) + P(\{5\}) + P(\{6\}) = \frac{1}{5} + 5p = 1$$

et donc on trouve $p = 4/25$.

Exercice 7 : ✪ Pour modéliser le tirage aléatoire d'une boule dans une urne contenant 3 boules jaunes et 2 boules vertes (indiscernables au toucher), on a proposé deux univers :

- $\Omega_1 = \{J; V\}$.
- $\Omega_2 = \{j_1; j_2; j_3; v_1; v_2\}$.

1. Pour chaque univers, décrire la probabilité P associée à l'expérience.
2. Selon quel critère peut-on privilégier l'un des univers par rapport à l'autre ?

Correction :

1. Ω_1 est muni de la probabilité P_1 définie par $P(\{J\}) = 3/5$ et $P(\{V\}) = 2/5$, tandis que Ω_2 est muni de l'équiprobabilité.
2. Ω_1 est plus maniable car il a moins d'éléments, et Ω_2 est plus maniable car on le munit de l'équiprobabilité.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $G \subset \Omega$ tel que $P(G) = 1$. Montrer que pour tout événement A, $P(A \cap G) = P(A)$.

Correction : Soit donc A un événement. On sait que $P(A \cup G) = P(A) + P(G) - P(A \cap G)$. Or, $G \subset A \cup G$ donc $P(G) \leq P(A \cup G)$ si bien que $P(A \cup G) = 1$. Il en découle que $1 = P(A) + 1 - P(A \cap G)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 9 : ✪✪ Donner une CNS sur x et y appartenant à $\mathbb{R}$ pour qu'il existe une probabilité sur $\Omega = [\![1\,;\,3]\!]$ vérifiant $P(\{1; 2\}) = x$ et $P(\{2; 3\}) = y$.

Correction : Travaillons par analyse synthèse. Supposons donc qu'il existe x et y solution du problème. Tout d'abprd, x et y doivent être positifs (au sens large) et inférieurs à 1 (au sens large). De plus, $\Omega = [\![1\,;\,3]\!] = \{1; 2\} \cup \{2; 3\}$ si bien que

$$\begin{aligned} P(\Omega) = 1 \quad &= \quad P(\{1;2\}) + P(\{2;3\}) - P(\{1;2\} \cap \{2;3\}) \\ &= \quad x + y - P(\{2\}) \end{aligned}$$

Par conséquent, $P(\{2\}) = x + y - 1$ donc on doit avoir $x + y \geq 1$. Puisque $\{1; 2\} = \{1\} \cup \{2\}$ et que cette union est disjointe, $P(\{1\}) = x - (x + y - 1) = 1 - y$. De même, $P(\{3\}) = 1 - x$.

Synthèse : supposons donc que $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ et $x + y \geq 1$. Puisque

$$(1 - y) + (x + y - 1) + (1 - x) = 1$$

et que $1 - y, x + y - 1$ et $1 - x$ sont positifs, il existe une probabilité P telle que $P(\{1\}) = 1 - y, P(\{2\}) = x + y - 1$ et $P(\{3\}) = 1 - x$. En conclusion, une telle probabilité existe si et seulement si x et y appartiennent à $[\,0\,;1\,]$ et $x + y \geq 1$ (par exemple si $x = y = 2/3$).

Exercice 10 : ✪✪✪ Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si :

$$P(A \cap B) \times P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(A \cap \overline{B}\right) \times P\left(\overline{A} \cap B\right)$$

Correction : Supposons A et B indépendants. Dès lors, $\overline{A}$ et B sont indépendants, etc. D'une part :

$$P(A\cap B)\times P(\overline{A}\cap B)=P(A)P(B)P(\overline{A})P(\overline{B})$$

et

$$P\left(A\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{A}\cap B\right)=P(A)P(\overline{A})P(\overline{A})P(B)$$

D'où l'égalité. Réciproquement, supposons que

$$P(A\cap B)\times P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(A\cap\overline{B}\right)\times P\left(\overline{A}\cap B\right)$$

et prouvons que A et B sont indépendants. B et $\overline{B}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$ (ou en raisonnant comme ci-dessous, mais à l'envers). De même, $P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
P(A)P(B) &= (P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}))\times P(B\cap A)+P(B\cap\overline{A})\\
&= P(A\cap B)^2+P(A\cap B)P(B\cap\overline{A})+P(A\cap\overline{B})\times P(B\cap A)+P(A\cap\overline{B})P(B\cap\overline{A})\\
&= P(A\cap B)^2+P(A\cap B)P(B\cap\overline{A})+P(A\cap\overline{B})\times P(B\cap A)+P(A\cap B)\times P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)
\end{aligned}$$

par hypothèse. Factorisons par $P(A\cap B)$:

$$P(A)P(B)=P(A\cap B)\left(P(A\cap B)+P(B\cap\overline{A})+P(A\cap\overline{B})+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)\right)$$

Or, B et $\overline{B}$ étant incompatibles, et par distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\begin{aligned}
P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}) &= P((A\cap B)\cup(A\cap\overline{B}))\\
&= P(A\cap(B\cup\overline{B}))\\
&= P(A\cap\Omega)\\
&= P(A)
\end{aligned}$$

On pouvait également reconnaître l'égalité obtenue précédemment à l'aide des probas totales. De même, $P(B\cap\overline{A})+P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P(\overline{A})=1-P(A)$. Finalement, $P(A)P(B)=P(A\cap B)\times 1$: A et B sont indépendants.

26.2 Construction d'espaces probabilisés, combinatoire

Exercice 11 : ✪ On lance deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. un double ?
2. une somme égale à 9 ?
3. un minimum des deux dés égal à 4 ?
4. au moins un 6 ?

Correction : On se place sur $\Omega=[\![\,1\,;\,6\,]\!]^2$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Par conséquent, si A est un événement, alors $P(A)=\text{card}(A)/36$.

1. $A=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(5,5);(6,6)\}$ si bien que $P(A)=1/6$.
2. $A=\{(3,6);(4,5);(5,4);(6,3)\}$ et donc $P(A)=4/36=1/9$.
3. $A=\{(4,4);(4,5);(4,6);(5,4);(6,4)\}$ donc $P(A)=5/36$.
4. $A=\{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1)\}$ donc $P(A)=11/36$.

Exercice 12 - Problème de Galilée ou du duc de Toscane : ✪ Le duc de Toscane a remarqué que, lorsqu'on faisait la somme de trois dés équilibrés, le 10 semblait sortir plus souvent que le 9, alors qu'il existe autant de manières d'écrire 10 que d'écrire 9 comme somme de 3 entiers entre 1 et 6 :

$$\begin{aligned} 10 &= 6+3+1 \\ &= 5+4+1 \\ &= 6+2+2 \\ &= 5+3+2 \\ &= 4+2+2 \\ &= 4+3+3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 9 &= 6+2+1 \\ &= 5+3+1 \\ &= 5+2+2 \\ &= 4+3+2 \\ &= 4+4+1 \\ &= 3+3+3 \end{aligned}$$

Expliquer cet apparent paradoxe.

Correction : L'idée est que toutes ces écritures ne sont pas équiprobables : par exemple, obtenir $3+3+3$ n'est possible que lorsque les trois dés donnent 3, donc il n'y a qu'une façon de l'obtenir, tandis que l'écriture $4+3+3$ peut être obtenue de trois façons (le premier dé donne 4 et les deux autres donnent 3, ou le deuxième dé donne 4 et les deux autres donnent 3, ou le troisième dé donne 4 etc.). Par conséquent, ce n'est pas parce qu'il y a le même nombre de décompositions de 9 et 10 que ces deux nombres sont équiprobables. Pour donner la probabilité de chacun des deux nombres, on se place sur $\Omega = [\![1\,;\,6]\!]^3$ qu'on munit de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité (les trois dés sont équilibrés). Notons A l'événement « obtenir 10 » et B l'événement « obtenir 9 » si bien que :

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \{(6,3,1);(6;1;3);(3,1,6);(3,6,1);(1,3,6);(1,6,3); \\ & (5,4,1);(5;1;4);(4,1,5);(4,5,1);(1,4,5);(1,5,4); \\ & (6,2,2);(2,6,2);(2,2,6); \\ & (5,3,2);(5;2;3);(3,2,5);(3,5,2);(2,3,5);(2,5,3); \\ & (4,2,2);(2,4,2);(2,2,4); \\ & (4,3,3);(3,4,3);(3,3,4)\} \end{aligned}$$

si bien que $P(A) = 27/6^3$ et on trouve de même que $P(B) = 25/6^3$ donc on a bien $P(A) > P(B)$.

Exercice 13 - Bienvenue à Gattaca : ✪ Une séquence d'ADN est une suite de quatre nucléotides dénotés A, C, G, T.

1. Si chaque nucléotide est équiprobable, quelle est la probabilité d'obtenir une séquence de longueur 13 contenant exactement cinq A ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une séquence avec $A, A, A, G, G, G, G, G, T, T, T, T, C$?

Correction :

1. On note $\Omega = \{A; C; T; G\}^{13}$. Son cardinal (nombre total de séquences de longueur 13 formées avec 5 nucléotides) est 4^{13}. L'espace $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ est muni de l'équiprobabilité. On note E l'événement « obtenir une séquence contenant exactement 5 A ». Pour obtenir une telle séquence, on peut d'abord choisir l'emplacement des 5 A (il y a $\binom{13}{5}$ possibilités) puis 8 autres lettres sont quelconques parmi C,G,T (il y a 3^8 possibilités : 3 choix pour la première, 3 choix pour la deuxième, etc.). Ainsi par principe multiplicatif $\text{card}(E) = \binom{13}{5}3^8$ et donc $P(E) = \dfrac{\binom{13}{5}3^8}{4^{13}} \approx 0,126$.
2. Il s'agit de compter le nombre d'anagrammes du mot $AAAGGGGGTTTTC$. Il y $\binom{13}{3}$ possibilités pour placer les A, puis $\binom{10}{5}$ possibilités pour placer les G parmi les 10 positions restantes, puis $\binom{5}{4} = 5$ possibilités pour placer les T parmi les 4 positons restantes. Enfin on place le C là où il reste de la place (une seule possibilité). Par principe multiplicatif, on a donc $\binom{13}{3}\binom{10}{5}\binom{5}{4} = 360360$ séquences possibles. Un telle séquence a donc pour probabilité $\dfrac{360360}{4^{13}} \approx 0.00537$.

Exercice 14 : ✪ Quelle est la probabilité que six dés équilibrés donnent chacun un chiffre différent ?

Correction : On se place sur $[\![1\,;\,6]\!]^6$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Un élément $(x_1, \dots, x_6)$ de Ω (une éventualité) est entièrement déterminé par x_1 (le résultat du premier dé), 6 possibilités, puis x_2 (le deuxième dé), 5 possibilités (toutes sauf la première) etc. On trouve que $\text{card}(A) = 6!$ (où A est l'événement dont on cherche la proba) si bien que $P(A) = 6!/6^6$. On peut aussi voir A comme le nombre de bijections de $[\![1\,;\,6]\!]$ dans lui-même, et diviser par le nombre d'applications, ce qui donne le même résultat ($\approx 0,015$ i.e. 1.5%).

Exercice 15 : ✪✪ Soit N un nombre entier à au plus 100 chiffres choisi au hasard. Quelle est la probabilité que N^3 se termine par 11 ?

Correction : On se place sur $\Omega = [\![0\,;\,10^{100}-1]\!]$ (ne pas oublier le -1 : un nombre à au plus trois chiffres est compris entre 0 et 999). muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Puisque $\text{card}(\Omega) = 10^{100}$, il suffit de trouver le nombre d'éléments N de Ω dont le cube se termine par 11, c'est-à-dire tel que $N^3 \equiv 11[100]$. Il suffit d'examiner toutes les congruences de 0 à 99. Toutes ? Non ! Seulement celles qui ont des chances de marcher. Inutile par exemple de s'intéresser aux congruences paires ou qui se terminent par 5. Et les autres ? Un nombre qui se termine par 3 a un cube qui se termine par 7 (car $3^3 \equiv 7[10]$), et on exclut de même les nombres se terminant par 7 et 9. En d'autres termes, les seules congruences encore possibles sont 1, 11 et ainsi de suite jusque 91 : cela ne fait que 10 possibilités. $1^3 \equiv 1[100]$ donc cela ne convient pas. $11^2 \equiv 21[100]$ car

$11^2 = 121$ et puisque $21 \times 11 = 231$, $11^3 \equiv 31[100]$ donc 11 ne convient pas non plus. On élimine tous les autres à part 71. En d'autres termes, N convient si et seulement si N se termine par 71 : pour chaque chiffre précédent les deux derniers, il y a 10 choix possibles (de 0 à 9, donc on compte aussi ceux qui ont moins de 100 chiffres). Par principe multiplicatif, il y a 10^{98} choix possibles. Finalement, la probabilité recherchée est $10^{98}/10^{100} = 1/100$, ce qui est intuitif, puisqu'il n'y a qu'une chance sur 100 que les deux dernières décimales valent 71.

Exercice 16 - On peut tromper mille fois mille personnes : ✪✪ Une loterie a lieu chaque semaine. Il y a 100 billets dont 3 sont gagnants. Vaut-il mieux acheter 5 billets en une seule semaine, ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

Correction : Notons G : « on gagne au moins une fois ». Supposons dans un premier temps qu'on achète 1 billet par semaine pendant 5 semaines. Pour tout $i \in [\![1\,;\,5]\!]$, notons G_i : « le i-ième billet est gagnant ». Par conséquent, et par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P(G) &= P(G_1 \cup \cdots \cup G_5) \\ &= 1 - P\left(\overline{G_1 \cup \cdots \cup G_5}\right) \\ &= 1 - P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_5}) \\ &= 1 - \left(\frac{97}{100}\right)^5 \end{aligned}$$

Supposons à présent qu'on achète 5 tickets d'un coup, et on note toujours G_i : « le i-ème ticket est gagnant ». On a encore :

$$P(G) = 1 - P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_5})$$

sauf que les événements ne sont plus indépendants : si un billet est gagnant, cela réduit les chances que les autres le soient. On applique donc la formule des probabilités composées.

$$P(\overline{G_1} \cap \cdots \cap \overline{G_5}) = P(\overline{G_1})P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}}(\overline{G_3})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3}}(\overline{G_4})P_{\overline{G_1}\cap\overline{G_2}\cap\overline{G_3}\cap\overline{G_4}}(\overline{G_5})$$

Tout d'abord, $P(\overline{G_1}) = 97/100$. Supposons $\overline{G_1}$ réalisé : il reste 99 billets, dont encore 3 sont gagnants, si bien que $P_{\overline{G_1}}(\overline{G_2}) = 96/99$. On trouve de même les autres probas conditionnelles :

$$\begin{aligned} P(G) &= 1 - \frac{97}{100} \times \frac{96}{99} \times \frac{95}{98} \times \frac{94}{97} \times \frac{93}{96} \\ &= 1 - \frac{95 \times 94 \times 93}{100 \times 99 \times 98} \end{aligned}$$

Dans le premier cas, on trouve $P(G) \approx 0.141$ et dans le second cas, $P(G) \approx 0.144$: il vaut mieux acheter 5 tickets d'un coup.

Exercice 17 : ✪✪ Soit $n \geq 2$. On suppose que n joueurs lancent une pièce équilibrée.

1. Donner un espace probabilisé qui modélise cette expérience.
2. Quelle est la probabilité qu'un joueur obtienne le contraire de tous les autres ?

Correction :

1. Il suffit de prendre $\Omega = \{P; F\}^n$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Un élément de Ω est un n-uplet $\omega = (a_1, \ldots, a_n)$ où, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!], a_i = P$ ou F et est le résultat obtenu par le i-ème joueur.
2. Notons, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!], P_i$: « le i-ème joueur obtient Pile » et F_i : « le i-ème joueur obtient Face ». Notons enfin A : « un joueur obtient le contraire de tous les autres » (et donc on cherche $P(A)$). A est réalisé si et seulement si un joueur obtient Pile et tous les autres Face, ou le contraire, si bien que :

$$\begin{aligned} A &= (P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) \cup \cdots \cup (F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &\quad \cup (F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n) \cup \cdots \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \end{aligned}$$

Les événements entre parenthèses étant deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \cdots \cap F_n) + \cdots + P(F_1 \cap \cdots \cap F_{n-1} \cap P_n) \\ &\quad + P(F_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap \cdots \cap P_n) + \cdots + P(P_1 \cap \cdots \cap P_{n-1} \cap F_n) \end{aligned}$$

Par indépendance des lancers :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1)P(F_2)\cdots P(F_n)+P(F_1)P(P_2)P(F_3)\cdots P(F_n)+\cdots+P(F_1)\cdots P(F_{n-1})P(P_n) \\ &\quad +P(F_1)P(P_2)\cdots P(P_n)+P(P_1)P(F_2)P(P_3)\cdots P(P_n)+\cdots+P(P_1)\cdots P(P_{n-1})P(F_n) \end{aligned}$$

La pièce étant équilibrée, $P(A) = 2n \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 18 : ✪✪ On permute aléatoirement les lettres du mot baobab. Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore baobab ?

Correction : On se place sur l'ensemble des mots obtenus en permutant les lettres i.e. l'ensemble des anagrammes du mot baobab. On prouve comme au chapitre 17 que $\text{card}(\Omega) = 6!/2!3! = 60$. On munit $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. En effet, tous les mots sont équiprobables puisque tout mot est donné par $3! \times 2!$ permutations (à l'intérieur d'un même mot, on peut permuter les trois b et les deux b). Finalement, la probabilité cherchée est $1/60$.

Exercice 19 - Autour de la formule du crible : ✪✪✪ Soit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. La formule du crible est la formule suivante : si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J\subset [\![1\,;\,n]\!], \text{card}(J)=k} P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

Voir par exemple l'exercice 38 du chapitre 27 pour une démonstration.

1. Écrire cette formule pour $n = 4$.
2. Application : Soit $n \geq 2$. A l'approche des fêtes de Noël, les n élèves de MP2I ont décidé de s'offrir des cadeaux selon le protocole suivant : un sac opaque contient les noms de tous les élèves (écrits chacun sur un morceau de papier). Chacun leur tour, les élèves tirent un nom au hasard parmi les noms restants au moment du tirage. Chaque élève devra offrir un cadeau à l'élève dont il a tiré le nom. On cherche à calculer la probabilité qu'aucun élève ne tire son nom.
   (a) Déterminer un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience aléatoire. On donnera $\text{card}(\Omega)$.
   (b) Pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, introduisons A_j l'événement « Le j-ième élève tire son nom ». Soient $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ et J une partie de $[\![1\,;\,n]\!]$ de cardinal k. Montrer que
   $$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{(n-k)!}{n!}$$
   (c) En déduire que la probabilité qu'aucun des élèves de la classe ne tire son nom est
   $$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$
   Nous avons vu au chapitre 25 que cette probabilité tend vers $\dfrac{1}{e}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction :

1. Supposons que $n = 4$. La formule devient

$$\begin{aligned} P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4) &= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_4) \\ &\quad -P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_4)-P(A_3\cap A_4)+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4) \\ &\quad +P(A_1\cap A_3\cap A_4)+P(A_2\cap A_3\cap A_4)-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) \end{aligned}$$

2. Il est sous-entendu (mais non précisé) que n est le nombre d'élèves de la classe.
   (a) Supposons que les élèves de la classe soient numérotés avec des entiers de 1 à n (par exemple rangés par ordre alphabétique). On code le tirage par une n-liste d'éléments distincts de $[\![1\,;\,n]\!]$ de telle sorte que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, l'élève i doit offrir un cadeau à l'élève dont le numéro est le $i^{\text{ième}}$ de la liste. On considère donc Ω l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\,n]\!]$ (dont le cardinal est $n!$) muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité.

(b) Soient $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et J une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$ de cardinal k. On a

$$P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \frac{\operatorname{card}\left(\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j\right)}{\operatorname{card}(\Omega)} = \frac{(n-k)!}{n!},$$

car les éléments de $\displaystyle\bigcap_{j\in J} A_j$ sont les permutations laissant fixe les k éléments de J (que l'on peut voir comme une permutation des $n-k$ éléments n'étant pas dans J).

(c) La formule du crible entraîne alors que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{J\subset [\![1\,;\, n]\!], \operatorname{card}(J)=k} \frac{(n-k)!}{n!} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{(n-k)!}{n!} \sum_{J\subset [\![1\,;\, n]\!], \operatorname{card}(J)=k} 1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{(n-k)!}{n!} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Exercice 20 - Puissances de l'imagination : ✪✪✪ Imaginons cette situation totalement impossible : à la fin de l'année, le professeur, un sadique fini, fait passer tous les élèves les uns après les autres, et fait tirer sans remise dans son chapeau magique une question de cours parmi toutes celles de l'année, disons 200. Un élève a impassé 40 questions de cours. Dans sa grande mansuétude, le professeur laisse les élèves décider de l'ordre de passage. Est-il plus avantageux pour cet élève de passer premier, deuxième, ..., dernier ?

Correction : Cela n'est pas immédiat à première vue : l'élève peut se dire qu'il est avantageux de passer en dernier puisque ses camarades peuvent tomber sur les questions qu'il a impassées, et donc vont diminuer leur nombre, mais s'ils tombent au contraire sur les questions qu'il connaît, la proportion de questions qu'il a impassées augmente !

Notons les questions $1,\dots,200$. On tire 44 questions sans remise (puisqu'il y a 44 élèves) donc les quarante-quatre questions posées sont distinctes et forment une 44-liste d'éléments distincts de $[\![1\,;\, 200]\!]$. On modélise donc cette expérience par l'espace probabilisé suivant : Ω est l'ensemble des 44-listes d'éléments distincts de $[\![1\,;\, 200]\!]$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité puisque tous les tirages sont équiprobables. On sait que $\operatorname{card}(\Omega) = 200!/156!$.

Si $i \in [\![1\,;\, 44]\!]$, notons A_i : « l'élève ne passe pas sur une question impassée s'il passe en position i » et on cherche i pour que cette probabilité soit maximale. Quitte à renuméroter les questions, on suppose que les questions impassées sont les questions $1,\dots,40$. A_i est donc l'ensemble des 44-listes dont l'élément numéro i n'appartient pas à $[\![1\,;\, 40]\!]$. Une telle liste est entièrement déterminée par :

- Le choix de l'élément en i-ème position : 160 choix possibles (toutes les questions non impassées).
- Les autres questions : elles forment une 43-listes d'un ensemble à 199 éléments (toutes les questions sauf celle en i-ème position) : il y a $199!/156!$ choix possibles.

Par principe multiplicatif,

$$\operatorname{card}(A_i) = 160 \times \frac{199!}{156!}$$

si bien que

$$\begin{aligned} P(A_i) &= \frac{160 \times \dfrac{199!}{156!}}{\dfrac{200!}{156!}} \\ &= \frac{160}{200} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

On remarque que cette probabilité ne dépend pas de i : peu importe la position à laquelle passe l'élève ! De toute façon, si on vous laisse le choix, méfiez-vous...

26.3 Divers (indépendance, manipulation d'ensembles etc.)

Exercice 21 : ✪ Soient A, B et C trois événements. Écrire à l'aide de A, B et C les événements : parmi A, B, C,

1. seul A se produit.
2. A et B se réalisent, mais pas C.
3. deux événements au plus se réalisent.
4. deux événements ou plus se réalisent.
5. aucun des trois événements ne se produit.
6. un seul des événements se produit.

Correction :

1. $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
2. $A \cap B \cap \overline{C}$.
3. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap P) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$.
4. Précisons que quand on écrit $A \cap B$, C peut se produit ou non. Dès lors, l'événement recherché est :
$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$$
5. $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \overline{A \cup B \cup C}$.
6. $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap P)$.

Exercice 22 : ✪ Deux joueurs A et B s'affrontent à pierre - papier - ciseaux. On suppose que tous les choix sont équiprobables et qu'ils choisissent indépendamment l'un de l'autre. Quelle est la probabilité d'avoir une égalité ? Quelle est la probabilité que A gagne ?

Correction : Notons P_A : « A joue pierre », C_A : « A joue ciseaux » et F_A : « A joue papier (ou feuille) », et de même pour B. Notons E l'événement « il y a égalité », de sorte que

$$E = (F_A \cap F_B) \cup (P_A \cap P_B) \cup (C_A \cap C_B)$$

On a une union d'événements deux à deux incompatibles :

$$P(E) = P(F_A \cap F_B) + P(P_A \cap P_B) + P(C_A \cap C_B)$$

Par indépendance des choix de A et B :

$$\begin{aligned} P(E) &= P(F_A)P(F_B) + P(P_A) + P(P_B) + P(C_A)P(C_B) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On peut prouver de même que la proba que A gagne vaut $2/3$ (en écrivant que l'événement « A gagne » est égal à $(P_A \cap C_B) \cup (C_A \cap F_B) \cup (F_A \cap P_B)$) mais on peut également dire que, si on note A l'événement « A gagne » et B l'événement « B gagne », alors $\Omega = A \cup B \cup E$ donc

$$P(A) + P(B) + P(E) = 1$$

donc $P(A) + P(B) = 2/3$ et, par symétrie des rôles, $P(A) = P(B)$ donc $P(A) = 1/3$. On trouve donc le résultat intuitif suivant : égalité avec proba $1/3$, A gagne avec proba $1/3$ et B gagne avec proba $1/3$.

Exercice 23 - Probabilités à paramètres : ✪ On prend $\Omega = [\![1\,;\,8]\!]$. On définit sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ la probabilité P par

- $p_1 = \alpha$
- $p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{7 - 16\alpha}{24}$
- $p_5 = p_6 = p_7 = \dfrac{1 + 8\alpha}{24}$
- $p_8 = \dfrac{1}{8}$

où $\alpha \in \left[0\,;\, \dfrac{7}{16} \right]$. On a noté $p_k = P(\{k\})$ pour plus de commodité. On définit ensuite les trois événements A, B, C par

- $A = \{2; 5; 7; 8\}$
- $B = \{3; 5; 6; 8\}$
- $C = \{4; 6; 7; 8\}$

Étudier l'indépendance mutuelle éventuelle des événements A, B, C en fonction de α.

Correction : Précisons tout d'abord qu'il est indispensable que α appartienne à $\left[0\,;\dfrac{7}{16}\right]$ pour que les probabilités soient positives. Rappelons que A, B, C sont (mutuellement) indépendants si et seulement si

- $P(A\cap B) = P(A)P(B)$
- $P(A\cap C) = P(A)P(C)$
- $P(B\cap C) = P(B)P(C)$
- $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Calculons donc toutes ces probabilités. Puisque $A = \{2\}\cup\{5\}\cup\{7\}\cup\{8\}$ et que l'union est disjointe, on a

$$\begin{aligned} P(A) &= p_2 + p_5 + p_7 + p_8 \\ &= \frac{7-16\alpha+1+8\alpha+1+8\alpha+3}{24} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(B) = P(C) = 1/2$. De plus, $A\cap B = \{5; 8\}$ si bien que

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= p_5 + p_8 \\ &= \frac{1+8\alpha+3}{24} \\ &= \frac{1+2\alpha}{6} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(A\cap C) = P(B\cap 6) = (1+2\alpha)/6$. Enfin, $A\cap B\cap C = \{8\}$ donc $P(A\cap B\cap C) = 1/8$. Il en découle que l'égalité $P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C)$ est toujours vérifiée. Par conséquent, A, B, C sont indépendants si et seulement si les trois autres égalités sont vérifiées si et seulement si

$$\frac{1+2\alpha}{6} = \frac{1}{4}$$

si et seulement si $4+8\alpha = 6$ si et seulement si $\alpha = 1/4$. Encore une fois (cf. cours), l'indépendance dépend de la probabilité choisie : des événements indépendants pour une proba ne le seront peut-être pas pour une autre, et réciproquement.

Exercice 24 : ✪ On dispose d'un circuit composé de de trois composants électroniques A, B et C dont les probabilités de fonctionnement sont respectivement α, β et γ. On suppose que les composants sont en état de fonctionnement indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que le circuit fonctionne :
- lorsque les composants sont montés en série ?
- lorsque les composants sont montés en parallèle ?
- lorsque A est monté en série avec le sous-circuit constitué de B et C montés en parallèle ?

Correction : Notons A : « le composé A fonctionne » et idem pour B et C, et notons F : « le circuit fonctionne ».

Supposons que les composants soient montés en série. Le circuit fonctionne si et seulement si les trois composés fonctionnent, c'est-à-dire que $F = A\cap B\cap C$, et par indépendance, $P(F) = P(A)P(B)P(C) = \alpha\beta\gamma$.

Supposons que les composants soient montés en parallèle. Alors le circuit fonctionne si et seulement au moins un des composés fonctionne, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} P(F) &= P(A\cup B\cup C) \\ &= 1 - P\left(\overline{A\cup B\cup C}\right) \\ &= 1 - P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \end{aligned}$$

Par indépendance (lorsque des événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont aussi),

$$P(A) = 1-(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$$

Supposons enfin que A soit en parallèle de B et C montés en série. Alors le circuit fonctionne si et seulement si A fonctionne ou le circuit formé par B et C fonctionne, et ceci arrive si et seulement si B et C fonctionne. Dès lors :

$$
\begin{aligned}
P(F) &= P(A \cup (B \cap C)) \\
&= P(A) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\
&= \alpha + \beta\gamma - \alpha\beta\gamma
\end{aligned}
$$

Exercice 25 - Un autre problème des anniversaires : ✪ On a vu en cours que, dans une classe de 23 élèves, il y avait plus d'une chance sur deux qu'au moins deux élèves soient nés le même jour. Cette fois, de combien d'élèves la classe doit-elle être composée pour qu'il y ait plus d'une chance sur deux qu'au moins un autre élève partage VOTRE date de naissance ? On suppose pour simplifier que les naissances ont équiréparties et que personne n'est né le 29 février.

Correction : Soit n le nombre d'éléves de la classe. Soit B l'événement « (au moins) l'un des $n-1$ élèves partage ma date d'anniversaire ». On a $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{364^{n-1}}{365^{n-1}}$. Nous avons

$$
\begin{aligned}
P(B) \geqslant 0.5 \quad \iff \quad \left(\frac{364}{365}\right)^{n-1} \leqslant 0.5 \quad &\iff \quad (n-1)\ln\left(\frac{364}{365}\right) \leqslant -\ln(2) \\
&\iff \quad n-1 \geqslant \frac{\ln(2)}{\ln(365)-\ln(364)},
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire $n \geqslant 253,65$. Ainsi il faut que $n \geqslant 254$.

Exercice 26 - Les dés non transitifs d'Efron : ✪ On dispose de quatre dés A, B, C, D non pipés (au sens où chaque face sort avec probabilité $1/6$) :
- Les faces du dé A sont : $0, 0, 4, 4, 4, 4$.
- Les faces du dé B sont : $3, 3, 3, 3, 3, 3$.
- Les faces du dé C sont : $2, 2, 2, 2, 6, 6$.
- Les faces du dé D sont : $1, 1, 1, 5, 5, 5$.

1. On note A le numéro obtenu par le dé A, B le numéro obtenu par le dé B etc. Calculer $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ et $P(D > A)$.
2. Deux joueurs s'affrontent selon le protocole suivant : le premier joueur choisit le dé qu'il veut, le second joueur choisit le dé qu'il veut parmi les trois dés restants. Le joueur obtenant le plus grand nombre gagne. Vaut-il mieux être le premier ou le second joueur ?

Correction :

1.
   - $A > B \iff A = 4$, si bien que $P(A > C) = 2/3$.
   - $P(B > C) = P(C = 2) = 2/3$.
   - $P(C > D) = P\left[[C = 6] \cup ([D = 1] \cap [C = 2])\right]$. Ces deux événements étant incompatibles :

   $$P(C > D) = P(C = 6) + P([C = 2] \cap [D = 1])$$

   Par indépendance des lancers :

   $$
   \begin{aligned}
   P(C > D) &= P(C = 6) + P(C = 2) \times P(D = 1) \\
   &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
   &= \frac{2}{3}
   \end{aligned}
   $$

   - $P(D > A) = P\left[[D = 5] \cup ([D = 1] \cap [A = 0])\right]$. Ces deux événements étant incompatibles :

   $$P(D > A) = P(D = 5) + P([D = 1] \cap [A = 0])$$

   Par indépendance des lancers :

   $$
   \begin{aligned}
   P(D > A) &= P(D = 5) + P(D = 1) \times P(A = 0) \\
   &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\
   &= \frac{2}{3}
   \end{aligned}
   $$

2. Il vaut évidemment mieux être le deuxième joueur : quel que soit (oui, en trois mots) le choix du premier joueur, le deuxième joueur peut prendre un dé avec lequel il a une probabilité de $2/3 > 1/2$ de gagner.

Exercice 27 - L'équiprobabilité entraîne l'indépendance : ✪ On lance deux fois une pièce dont on ignore si elle est équilibrée. On ignore même si les lancers sont indépendants. On sait juste que les quatre éventualités $(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)$ sont équiprobables. Montrer que la pièce est équilibrée et que les lancers sont indépendants.

Correction : On a donc $P(\{(P, P)\}) = 1/4$, et idem pour les autres. Notons P_1 : « le premier lancer donne Pile » et idem pour les autres. P_2 et F_2 forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probas totales,

$$\begin{aligned} P(P_1) &= P(P_1 \cap P_2) + P(P_1 \cap F_2) \\ &= P(\{(P, P)\}) + P(\{(P, F)\}) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et $P(F_1) = 1 - P(P_1)$: la pièce est équilibrée. Enfin, $P(P_1 \cap P_2) = 1/4 = P(P_1)P(P_2)$ et idem pour les autres donc les lancers sont indépendants.

Exercice 28 : ✪✪ Combien faut-il vérifier d'égalités pour montrer que n événements notés $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants ?

Correction : Il faut vérifier autant d'égalités qu'il y a de parties de l'ensemble $\llbracket 1 \,;\, n \rrbracket$, mais on a vu en classe qu'il était inutile de le vérifier pour le vide et les singletons, il faut donc vérifier autant d'égalités qu'il y a de parties à au moins 2 éléments. Rappelons que le nombre de parties à k éléments d'un ensemble de cardinal n est $\binom{n}{k}$ donc il faut vérifier

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} = 2^n - n - 1$$

égalités. Par exemple, pour 5 événements, il faut vérifier 26 égalités.

Exercice 29 : ✪✪ Soient $(A_1, \ldots, A_n)$ n événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité qu'aucun des A_i ne soit réalisé est au plus égale à $e^{-\sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$.

Correction : Cette probabilité vaut (par indépendance des événements et donc de leurs complémentaires) :

$$\begin{aligned} p &= P(\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}) \\ &= P(\overline{A_1}) \times \cdots \times P(\overline{A_n}) \\ &= (1 - P(A_1)) \times \cdots \times (1 - P(A_n)) \end{aligned}$$

Or, par convexité de l'exponentielle, pour tout $u \in \mathbb{R}, e^u \geq 1 + u$. On applique cette inégalité à $u = -P(A_i)$ pour i allant de 1 à n puis on fait le produit (ce sont bien des termes positifs puisque $1 - P(A_i) \geq 0$ pour tout i, et on sait qu'on peut multiplier des inégalité positives).

Exercice 30 : ✪✪ Un père propose un prix à son fils, un jeune joueur de tennis, s'il arrive à gagner au moins deux fois de suite dans l'une des deux configurations suivantes : père - entraîneur - père ou entraîneur - père - entraîneur. Sachant que l'entraîneur joue mieux que le père (et que les matchs sont indépendants), quelle configuration le fils doit-il choisir pour avoir le plus de chances de gagner ?

Correction : Ce n'est pas évident à première vue : on peut se dire qu'il faut jouer deux fois contre l'adverseraire le plus faible, donc choisir la première configuration, mais pour gagner deux matchs consécutifs, il faut impérativement gagner le match du milieu donc il vaut mieux jouer ce match contre l'adversaire le plus faible.

Notons p la proba que le fils gagne contre le père et q la proba qu'il gagne contre l'entraîneur, et on a donc $q < p$ puisque l'entraîneur joue mieux que le père. Notons G : « le fils gagne » et, pour tout $i \in \llbracket 1 \,;\, 3 \rrbracket$, G_i : « le fils gagne le match numéro i ».

Prenons la première configuration : père - entraîneur - père. On a donc :

$$P(G) = P([G_1 \cap G_2] \cup [G_2 \cap G_3])$$

En effet, le fils peut aussi gagner les trois matchs ! Le problème est que les événements ne sont pas incompatibles. Dès lors :

$$P(G) = P(G_1 \cap G_2) + P(G_2 \cap G_3) - P(G_1 \cap G_2 \cap G_3)$$

puisque $G_2 \cap G_2 = G_2$. On en déduit, par indépendance des matchs :

$$\begin{aligned} P(G) &= pq + qp - pqp \\ &= 2pq - p^2 q \end{aligned}$$

On trouve de même que, dans la deuxième configuration, $P(G) = 2qp - q^2 p$. Or,

$$2pq - p^2 q - (2qp - q^2 p) = pq(q-p) < 0$$

puisque $p > q$. On en déduit que le fils a plus de chances de gagner lors de la deuxième configuration, c'est-à-dire entraîneur - père - entraîneur : il faut qu'il gagne le match du milieu, il est donc plus rentable de le jouer contre l'adversaire le plus faible.

Exercice 31 : ✪✪ Lors d'un procès, deux jurys sont formés : un premier jury avec une seule personne qui a une probabilité p de prendre la bonne décision, et un deuxième jury avec trois personnes. Les deux premières prennent leur rôle au sérieux et prennent la bonne décision avec une probabilité p (de façon indépendante les uns des autres), tandis que le troisième, qui a hâte que cela se termine, tire à pile ou face. Ce jury donne une décision à la majorité. Quel jury a la plus grande probabilité de prendre la bonne décision ?

Correction : Calculons la probabilité qu'a le deuxième jury de prendre la bonne décision. Notons A_i : « la i-ème personne prend la bonne décision », si bien que $P(A_1) = P(A_2) = p$ et $P(A_3) = 1/2$. Notons A : « le deuxième jury prend la bonne décision ». Puisque ce jury prend sa décision à la majorité :

$$P(A) \quad = \quad P([A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}] \cup [A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3] \cup [\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3] \cup [A_1 \cap A_2 \cap A_3])$$

Ces événements étant incompatibles :

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}) + P(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3) + P(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{p(1-p)}{2} + \frac{(1-p)p}{2} + \frac{p^2}{2} \\ &= p \end{aligned}$$

et donc les deux jurys prennent la bonne décision avec la même probabilité.

Exercice 32 - Indépendance accidentelle : ✪✪ On lance n fois une pièce équilibrée. On définit les événements :

- A_n : « on obtient, au cours des n lancers, au moins une fois Pile et au moins une fois Face ».
- B_n : « on obtient, au cours des n lancers, au plus un Pile ».

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Étudier l'indépendance des événements A_2 et B_2, puis des événements A_3 et B_3.
3. Étudier l'indépendance des événements A_n et B_n dans le cas général.

Correction : Comme d'habitude, pour tout k, posons P_k : « on obtient pile au k-ième lancer » et F_k : « on obtient face au k-ième lancer ».

1. Soit donc $n \geq 2$. Le complémentaire de A_n est : « on n'obtient jamais Pile ou on n'obtient jamais Face » (toujours y penser quand on a un « au moins » ou « au plus »). Dès lors :

   $$\overline{A_n} = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cup (P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

   Par incompatibilité :

   $$P(\overline{A_n}) = P(F_1 \cap \cdots F_n) + P(P_1 \cap \cdots \cap P_n)$$

   Par indépendance des lancers :

   $$P(\overline{A_n}) = P(F_1) \times \cdots P(F_n) + P(P_1) \times \cdots \times P(P_n)$$

La pièce étant équilibrée, $P(\overline{A_n}) = 1/2^n + 1/2^n = 1/2^{n-1}$ si bien que

$$P(A_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Pour B_n, le complémentaire ne rend pas la chose plus aisée donc on y va franchement.

$$B_n = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \cup (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_n) \cup \cdots (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Les événements entre parenthèses étant deux à deux incompatibles :

$$P(B_n) = P(F_1 \cap \dots \cap F_n) + P(P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) + P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_n) + \dots + P(F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

Par indépendance des lancers, et la pièce étant équilibrée, on trouve que :

$$P(B_n) = \frac{n+1}{2^n}$$

2. $A_2 \cap B_2$ est l'événement : « on obtient au plus une fois Pile, et au moins une fois Pile et au moins une fois Face en deux lancers », si bien que $A_2 \cap B_2 = (F_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap F_2)$. Idem (incompatibilité des événements puis indépendance des lancers), on trouve que $P(A_2 \cap B_2) = 1/2$. Or, $P(A_2) = 1/2$ et $P(B_2) = 3/4$: $P(A_2) \times P(B_2) = 3/8 \neq 1/2$ donc A_2 et B_2 ne sont pas indépendants.

   De même, $A_3 \cap B_3$ est l'événement : « on obtient au plus une fois Pile, et au moins une fois Pile et au moins une fois Face en deux lancers », c'est-à-dire « on obtient exactement une fois Pile et deux fois Face en trois lancers », si bien que :

$$A_3 \cap B_3 = (P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)$$

   De même que ci-dessus, on trouve que $P(A_3 \cap B_3) = 3/8$ et $P(A_3) = 3/4$ et $P(B_3) = 1/2$: cette fois-ci, on a bien $P(A_3) \times P(B_3) = P(A_3 \cap B_3)$, les deux événements sont indépendants.

3. On trouve de même que ci-dessus que $A_n \cap B_n$ est l'événement « obtenir exactement une fois Pile et $n-1$ fois Face en n lancer » si bien que

$$A_n \cap B_n = (P_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap \dots \cap F_n) \cup \cdots (F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n)$$

   On trouve de même que ci-dessus que $P(A_n \cap B_n) = n/2^n$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
A_n \text{ et } B_n \text{ sont indépendants} \quad & \iff \quad P(A_n)P(B_n) = P(A_n \cap B_n) \\
& \iff \quad \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n} \\
& \iff \quad \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \times (n+1) = n \\
& \iff \quad \frac{(2^{n-1}-1) \times (n+1)}{2^{n-1}} = n \\
& = \quad (2^{n-1}-1) \times (n+1) = n \times 2^{n-1} \\
& = \quad 2^{n-1} - (n+1) = 0 \\
& = \quad n+1 = 2^{n-1}
\end{aligned}$$

   $n = 3$ est solution : prouvons que c'est la seule. Il suffit de prouver que la suite de terme général $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$ est strictement croissante à partir du rang 2 : puisqu'elle est nulle en $n = 3$, les autres termes sont forcément non nuls. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n \quad & = \quad 2^n - (n+2) - 2^{n-1} + (n+1) \\
& = \quad 2^n - 2^{n-1} - 1 \\
& = \quad 2^{n-1}(2-1) - 1 \\
& = \quad 2^{n-1} - 1
\end{aligned}$$

Or, si $n \geq 2$, alors $n-1 \geq 1$ donc $2^{n-1} > 1$ ce qui permet de conclure. En conclusion, A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $n = 3$.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $n \geq 2$. On considère $\Omega = [\![1\,;\,n]\!]$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme. Donner une CNS sur n pour que Ω contienne deux événements indépendants non triviaux (i.e. de probabilité appartenant à $]\,0\,;1\,[$).

Correction : Travaillons par analyse-synthèse. Supposons donc que Ω contienne deux événements indépendants non indépendants non triviaux notés A et B. Par indépendance, $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ et puisque P est l'équiprobabilité, ceci donne :

$$\frac{\text{card}(A\cap B)}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n} \times \frac{\text{card}(B)}{n}$$

et donc $\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$. Puisque A et B sont de probabilité non nulle, $\text{card}(A)\times\text{card}(B) \neq 0$ donc $\text{card}(A\cap B)\neq 0$.

Supposons que n soit premier. Alors n divise $\text{card}(A)\times\text{card}(B)$ donc divise $\text{card}(A)$ ou $\text{card}(B)$ (pas de génération spontanée des nombres premiers, mais c'est un résultat du chapitre 6 : un nombre premier divise un produit si et seulement si p divise l'un des termes du produit), et puisque $\text{card}(A)$ et $\text{card}(B)$ sont non nuls et inférieurs à n, alors $\text{card}(A) = n$ ou $\text{card}(B) = n$ ce qui est exclu puisqu'on a supposé que A et B étaient de probabilité distincte de 1. On en déduit que n n'est pas un nombre premier.

Synthèse : supposons que n ne soit pas un nombre premier, et prouvons qu'il existe deux événements A et B indépendants non triviaux. D'après ce qui précède, une condition nécessaire et suffisante est d'avoir $\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$: construisons donc deux événements de cardinal distinct de 0 et de n vérifiant cette égalité. n n'est pas premier donc on peut écrire $n = ab$ avec $2 \leq a, b \leq n-1$. Mieux : a et b étant des diviseurs stricts de n, on a $a, b \leq n/2$. Prenons donc A de cardinal a et B de cardinal b de telle sorte que $A\cap B$ soit de cardinal 1 (ce qui est possible puisque $a+b\leq n$). On a alors

$$\text{card}(A)\times\text{card}(B) = n\times\text{card}(A\cap B)$$

donc

$$\frac{\text{card}(A\cap B)}{n} = \frac{\text{card}(A)}{n} \times \frac{\text{card}(B)}{n}$$

et donc $P(A\cap B) = P(A)P(B)$: A et B sont indépendants. En conclusion : Ω contient deux événements indépendants non triviaux si et seulement si n n'est pas premier.

Exercice 34 : On lance deux dés et on cherche la probabilité d'avoir une paire.

1. ✪ Montrer que si les deux dés sont équilibrés, la probabilité recherchée vaut $1/6$.
2. ✪✪✪ Montrer que si les deux dés sont pipés de la même façon, la probabilité recherchée est supérieure ou égale à $1/6$.

Correction :

1. Trivial et fait dans l'exercice 11.
2. Notons donc $p_1 = P(\{1\})$ etc. Notons E l'événement : on obtient un double. Notons A_1 (respectivement B_1) : « on obtient 1 au premier lancer » (respectivement au deuxième lancer). De même on définit $A_2,\dots,A_6,B_2,\dots,B_6$. Par conséquent,

$$E = (A_1\cap B_1)\cup\cdots\cup(A_6\cap B_6)$$

Les événements entre parenthèses sont deux à deux indépendants :

$$P(E) = P(A_1\cap B_1)+\cdots+P(A_6\cap B_6)$$

Les lancers étant indépendants :

$$P(E) = {p_1}^2+\cdots+{p_6}^2$$

La fonction carré est convexe, on peut utiliser l'inégalité de Jensen : les p_i étant positifs de somme 1,

$$\left(\frac{p_1+\cdots+p_6}{6}\right)^2 \leq \frac{{p_1}^2+\cdots+{p_6}^2}{6}$$

ce qui permet de conclure puisque $p_1+\cdots+p_6 = 1$.

Exercice 35 : ✪✪ On considère $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient $n \geq 3$ et $k \in [\![2\,;\, n-1]\!]$. On répète n fois une expérience dont l'issue peut être un succès ou un échec. Pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note A_j l'événement « la j-ième expérience est un succès ».

1. En utilisant les opérations ensemblistes, décrire les événements suivants :
   (a) « La k-ième expérience est un échec ».
   (b) « Seule la k-ième expérience est un échec ».
   (c) « Aucune des expériences n'est un succès ».
   (d) « Toutes les expériences à partir de la k-ième sont des succès ».
   (e) « Seules les k dernières expériences sont des succès ».
   (f) « Toutes les expériences sauf une sont des succès ».
   (g) « Toutes les expériences sauf peut-être une sont des succès ».
   (h) « Le premier succès arrive à un instant pair » (on distinguera selon la parité de n).
2. Décrire à l'aide d'une phrase l'événement suivant :

$$\bigcup_{J \subset [\![1\,;\, n]\!], \mathrm{card}(J)=k} \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \cup \left(\bigcap_{j \in \overline{J}} \overline{A_j} \right).$$

Correction :

1. (a) $\overline{A_k}$.
   (b) $A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k} \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (c) $\overline{A_1 \cup \cdots A_n} = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$.
   (d) $A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (e) $\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+1}} \cap A_k \cap A_{k+1} \cap \cdots \cap A_n$.
   (f) $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{A_i} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j \right)$ ou, ce qui au revient au même, mais qui est peut-être plus maniable :

$$(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cdots \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n)$$

   (g) Il suffit de prendre l'union de l'ensemble précédent avec $A_1 \cap \cdots \cap A_n$, c'est-à-dire :

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i \right) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \left(\overline{A_i} \cap \bigcap_{j \neq i} A_j \right)$$

   ou

$$(\overline{A_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) \cup (A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3 \cdots \cap A_n) \cup \cdots \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

   (h) Supposons que n soit pair, donc il existe $k \geq 1$ tel que $n = 2k$. Alors l'événement est :

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(A_{2i} \cap \bigcap_{j=1}^{2i-1} \overline{A_j} \right)$$

   c'est-à-dire :

$$(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}} \cap A_{2k})$$

   Si n est impair, il existe $k \geq 0$ tel que $n = 2k+1$, et la suite est identique :

$$\bigcup_{i=1}^{k} \left(A_{2i} \cap \bigcap_{j=1}^{2i-1} \overline{A_j} \right)$$

   c'est-à-dire :

$$(\overline{A_1} \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap A_4) \cup \cdots \cup (\overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{2k-1}} \cap A_{2k})$$

2. On obtient exactement k succès.

26.4 Probabilités composées, probabilités totales, formule de Bayes

Exercice 36 : ✪ Prouver l'idée naturelle suivante : « Si, dans chaque département, 57% des habitants adorent les probabilités, alors 57% des Français adorent les probabilités ».

Correction : Notons A l'événement : « adorer les probabilités ». Il y a 101 départements en France (de 1 à 95, dont $2A$ et $2B$ à la place de 20 pour la Corse, ce qui fait 96, pour la France métropolitaine, et 5 départements d'outre-mer) et, pour tout $i \in [\![1\,;\,101]\!]$, notons D_i l'événement : « appartenir au département numéro i ». Les D_i forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probas totales :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{101} P_{D_i}(A)P(D_i)$$

Or, par hypothèse, pour tout i, $P_{D_i}(A) = 57/100$ si bien que

$$P(A) = \frac{57}{100}\sum_{i=1}^{101} P(D_i)$$

et les D_i formant un système complet d'événements, la somme de leurs probas vaut 1 ce qui permet de conclure.

Exercice 37 : ✪ On dispose de trois pièces équilibrées : l'une avec deux faces blanches, l'une avec deux faces noires, et la dernière avec une face de chaque couleur. On prend une pièce au hasard et on lance la pièce choisie (toujours la même).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » au premier lancer ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir « blanc » aux n premiers lancers ? Commenter.
3. Sachant que les n premiers lancers sont blancs, quelle est la probabilité que la pièce choisie soit blanche. Commenter.

Correction : Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, notons B_i : « on obtient blanc au i-ième lancer » et, pour tout $i \in [\![1\,;\,3]\!]$, P_i : « on choisit la i-ième pièce ».

1. P_1, P_2, P_3 forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P_{P_1}(B_1)P(P_1) + P_{P_2}(B_1)P(P_2) + P_{P_3}(B_1)P(P_3) \\ &= 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. De même, d'après la formule des probabilités totales, et par indépendance des tirages :

$$\begin{aligned} P(B_1\cap\cdots\cap B_n) &= P_{P_1}(B_1\cap\cdots\cap B_n)P(P_1) + P_{P_2}(B_1\cap\cdots\cap B_n)P(P_2) + P_{P_3}(B_1\cap\cdots\cap B_n)P(P_3) \\ &= P_{P_1}(B_1)\times\cdots\times P_{P_1}(B_n)P(P_1) + P_{P_2}(B_1)\times\cdots\times P_{P_2}(B_n)P(P_2) + P_{P_3}(B_1)\times\cdots\times P_{P_3}(B_n)P(P_3) \\ &= 1\times\cdots\times 1\times\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3} + 0\times\cdots\times 0\times\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n}\times\frac{1}{3} \end{aligned}$$

La probabilité tend vers 1/3 : plus n est grand, plus on se rapproche de la probabilité de tirer la première pièce.

3. On cherche $P_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(P_1)$: d'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_{B_1\cap\cdots\cap B_n}(P_1) &= \frac{P_{P_1}(B_1\cap\cdots\cap B_n)\times P(P_1)}{P(B_1\cap\cdots\cap B_n)} \\ &= \frac{1\times 1/3}{1/3 + 1/2^n\times 1/3} \\ &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{2^n}} \end{aligned}$$

qui tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, ce qui est intuitif : si on lance un grand nombre de fois la pièce, et si on obtient blanc à chaque fois, « on a toutes les chances d'avoir choisi la première pièce ».

Exercice 38 : ✪ On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. L'urne i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard et on y prend une boule. Calculer la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro k (avec $1 \leq k \leq n$). Vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

Correction : Pour $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note A_i : « on tire une boule dans l'urne numéro i », qui est de probabilité $1/n$. Soit E_k l'événement « obtenir une boule portant le numéro k ». Les A_i étant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(E_k) = \sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(E_k) \times P(A_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{A_i}(E_k)$$

Or, si $k > i, P_{A_i}(E_k) = 0$ car l'urne i ne contient que les numéros de 1 à i, tandis que si $i \leq k, P_{A_i}(E_k) = 1/i$. Par conséquent,

$$P(E_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$$

On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{n} P(E_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}1 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times i \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Exercice 39 : ✪ Un lot de cent dés contient vingt-cinq dés pipés dont la probabilité d'obtenir 6 est 1/2. On lance un dé, on obtient 6, quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Correction : Notons P : « le dé est pipé » et S : « on obtient 6 ». On a donc : $P(P) = 1/4$ et $P_P(S) = 1/2$. On cherche $P_S(P)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_S(P) &= \frac{P_P(S)\times P(P)}{P(S)} \\ &= \frac{1/2\times 1/4}{P(S)} \end{aligned}$$

Or, P et $\overline{P}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(S) &= P_P(S)P(P) + P_{\overline{P}}(S)P(\overline{P}) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

puisque $P_{\overline{P}}(S) = 1/6$ (la probabilité d'obtenir 6 avec un dé non truqué est 1/6). On trouve finalement que $P_S(P) = 1/2$.

Exercice 40 : ✪ Il y a fort fort longtemps, dans un pays fort fort lointain (à Paris), un élève de la classe de ECS 1A a le choix entre quatre itinéraires :

- L'itinéraire A, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 14. La probabilité d'arriver en retard est de 1/20. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/3.
- L'itinéraire B, où il doit emprunter (entre autres) la ligne 7. La probabilité qu'il arrive en retard est de 1/10. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/4.
- L'itinéraire C, où il doit emprunter (entre autres) le RER B. La probabilité qu'il arrive en retard est de 3/4.
- L'itinéraire D, où il doit juste marcher. Dans ce cas là, il n'arrive jamais en retard. Il choisit cet itinéraire avec probabilité 1/3.

L'élève arrive en retard (pour changer). Quelle est la probabilité qu'il ait pris le RER B ?

Correction : Notons A : « l'élève choisit l'itinéraire A », et idem pour B, C, D. Notons R : « l'élève arrive en retard ». On cherche donc $P_R(C)$ (attention, prendre le RER B est l'itinéraire C !). D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P_R(C) &= \frac{P_C(R) \times P(C)}{P(R)} \\ &= \frac{3/4 \times P(C)}{P(R)} \end{aligned}$$

Tout d'abord,

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A) - P(B) - P(D) \\ &= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

De plus, A, B, C, D forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(R) &= P_A(R)P(A) + P_B(R)P(B) + P_C(R)P(C) + P_D(R)P(D) \\ &= \frac{1}{20} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{12} + 0 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{60} + \frac{1}{40} + \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Or, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $40 = 2^3 \times 5$ et $16 = 2^4$ si bien que le PPCM de $60, 40, 16$ est $2^4 \times 3 \times 5 = 240$ (tous les facteurs premiers, aux plus grandes puissances). Dès lors :

$$\begin{aligned} P(R) &= \frac{4 + 6 + 15}{240} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} P_R(C) &= \frac{\frac{3}{4} \times \frac{1}{12}}{\frac{5}{48}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Exercice 41 : ✪ On dispose de 12 pièces numérotées de 1 à 12 et on suppose que, pour tout $k \in [\![1\,;\, 12]\!]$, la k-ième pièce tombe sur FACE avec probabilité $k/12$. On lance une pièce au hasard et on obtient FACE. Quelle est la probabilité d'avoir lancé la douzième pièce ?

Correction : Notons F : « obtenir Face » et, pour tout $k \in [\![1\,;\, 12]\!]$, P_k : « lancer la k-ième pièce ». On cherche donc $P_F(P_{12})$. D'après la formule de Bayes,

$$
\begin{aligned}
P_F(P_{12}) &= \frac{P_{P_{12}}(F) \times P_{12}}{P(F)} \\
&= \frac{1 \times 1/12}{P(F)}
\end{aligned}
$$

Les événements $P_1, \dots, P_{12}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$
\begin{aligned}
P(F) &= \sum_{k=1}^{12} P_{P_k}(F) \times P(P_k) \\
&= \sum_{k=1}^{12} \frac{k}{12} \times \frac{1}{12} \\
&= \frac{12 \times 13}{2 \times 12^2} \\
&= \frac{13}{24}
\end{aligned}
$$

En conclusion :

$$
\begin{aligned}
P_F(P_{12}) &= \frac{1}{12} \times \frac{24}{13} \\
&= \frac{2}{13}
\end{aligned}
$$

Exercice 42 : ✪ On lance n dés équilibrés.

1. Donner la probabilité que le produit des numéros obtenus soit pair.
2. ✪✪ Même question avec la somme.

Correction : Notons, pour tout i, P_i : « le i-ème dé donne un résultat pair » et I_i : « le i-ème dé donne un résultat impair ».

1. Notons A : « Le produit est pair ». Alors $\overline{A}$ est l'événement : « le produit est impair » et un produit est impair si et seulement si tous les numéros sont impairs, donc $\overline{A} = I_1 \cap \dots \cap I_n$ et, par indépendance,

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(I_1) \times \dots \times P(I_n) \\
&= \frac{1}{2^n}
\end{aligned}
$$

puisque les dés sont équilibrés.

2. Notons A_n l'événement « la somme des numéros est paire ». L'idée est de se ramener au rang précédent : si on connaît la parité de la somme des $n-1$ premiers dés, le résultat est évident. Plus précisément, $An - 1$ et $\overline{A_{n-1}}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probas totales :

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &= P_{A_{n-1}}(A_n) \times P(A_{n-1}) + P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \times P(\overline{A_{n-1}}) \\
&= P_{A_{n-1}}(A_n) \times P(A_{n-1}) + P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) \times (1 - P(A_{n-1}))
\end{aligned}
$$

Or, $P_{A_{n-1}}(A_n) = 1/2$. En effet, supposons A_{n-1} réalisé, si bien que la somme des $n-1$ premiers dés est paire. Par conséquent, la somme des n dés est paire si et seulement si le dernier dé est pair, ce qui arrive avec proba $1/2$. De même, $P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n) = 1/2$, si bien que

$$
\begin{aligned}
P(A_n) &= \frac{1}{2} \times P(A_{n-1}) + \frac{1}{2}(1 - P(A_{n-1})) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Exercice 43 : ✪✪ On dispose d'une urne avec $2n$ boules, n blanches et n noires. Soit $k \geq 1$.

1. On suppose que les tirages se font avec remise.

   (a) Donner la probabilité que les k premières boules soient blanches.

(b) Donner la probabilité que la k-ième boule soit blanche, sachant que les $k-1$ premières boules tirées sont blanches.

2. Mêmes questions si on suppose que les tirages se font sans remise.

Correction : Dans tout l'exercice, pour tout k, notons B_k : on tire une boule blanche au k-ième tirage et N_k : « on tire une boule noire au k-ième tirage ».

1. Les tirages se font avec remise : les tirages sont donc indépendants. De plus, la composition de l'urne ne change pas donc, pour tout k (même si $k \geq n$), $P(B_k) = P(N_k) = n/2n = 1/2$.

   (a) On cherche $P(B_1 \cap B_k)$. Par indépendance des tirages, cette proba vaut $P(B_1) \times \cdots \times P(B_k) = 1/2^k$.

   (b) On cherche $P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k)$. Par indépendance des tirages, cette probabilité est égale à $P(B_k) = 1/2$: puisque les tirages sont indépendants, cela ne change pas la probabilité, cela n'apporte aucune information !

2. Ici, il n'y a plus indépendance puisque la composition de l'urne dépend des tirages précédents.

   (a) Si $k > n$, cette probabilité est nulle puisqu'on ne peut pas tirer strictement plus de boules blanches qu'il n'y a de boules blanches dans l'urne. Supposons donc $k \in [\![1\,; n]\!]$. On cherche toujours $P(B_1 \cap \cdots \cap B_k)$, mais les événements ne sont plus indépendants : on applique donc la formule des probabilités composées.

$$P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \times P_{B_1 \cap B_2}(B_3) \times \cdots \times P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k)$$

   On a tout d'abord $P(B_1) = 1/2$ car, à l'instant initial, l'urne contient n boules blanches et n boules noires. Supposons à présent B_1 réalisé. L'urne contient alors $n-1$ boules blanches et toujours n boules noires, si bien que

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{n-1}{2n-1}$$

   Supposons $B_1 \cap B_2$ réalisé : on a tiré deux boules blanches, donc l'urne contient $n-2$ boules blanches et toujours n boules noires, donc :

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{n-2}{2n-2}$$

   et ainsi de suite, si bien que :

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap \cdots \cap B_k) &= \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)} \\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1) \times \frac{1}{(2n)(2n-1)\cdots(2n-k+1)} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{(2n-k)!}{(2n)!} \end{aligned}$$

   (b) On a répondu à cette question dans la précédente : si $k > n$, cette proba est nulle, sinon elle vaut

$$P_{B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1}}(B_k) = \frac{n-(k-1)}{2n-(k-1)} = \frac{n-k+1}{2n-k+1}$$

Exercice 44 : ✪✪ Un quart d'une population a été vacciné. Parmi les vaccinés, un douzième est malade. Parmi les malades, il y a quatre non vaccinés pour un vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Correction : Notons V : « être vacciné » et M : « être malade ». D'après l'énoncé : $P(V) = 1/4$, $P_V(M) = 1/12$ et $P_M(V) = 1/5$ (quatre non vaccinés pour un vacciné signifie qu'il y a un cinquième de vaccinés). On cherche $P_{\overline{V}}(M)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} P_{\overline{V}}(M) &= \frac{P_M(\overline{V})P(M)}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{4/5 \times P(M)}{3/4} \end{aligned}$$

V et $\overline{V}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(M) &= P_V(M)P(V) + P_{\overline{V}}(M)P(\overline{V}) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + P_{\overline{V}}(M) \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

On ne connaît pas $P_{\overline{V}}(M)$ puisque c'est la quantité cherchée : il suffit de réinjecter dans l'égalité ci-dessus, et cela nous donnera une équation à une inconnue, c'est-à-dire :

$$P_{\overline{V}}(M) = \frac{\dfrac{4}{5} \times \left(\dfrac{1}{12} \times \dfrac{1}{4} + P_{\overline{V}}(M) \times \dfrac{3}{4} \right)}{\dfrac{3}{4}}$$

donc

$$\frac{3}{4} P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{60} + \frac{3}{5} \times P_{\overline{V}}(M)$$

si bien que

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{5} \right) P_{\overline{V}}(M) = \frac{1}{60}$$

Finalement, $P_{\overline{V}}(M) = 1/9$.

Exercice 45 : ✪✪

1. Soient $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient (A_1, A_2, A_3) trois événements. Donner $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$.
2. Trois personnes portant un chapeau vont au théâtre. En partant, chacune d'elles prend un chapeau au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne reparte avec son chapeau ?

Correction :

1. C'est la formule du crible ou de Poincaré vue en classe :

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

2. Notons A_i : « la i-ième personne repart avec son chapeau ». On cherche donc

$$P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}) = P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}\right) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$

   On a $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$. Attention, les événements ne sont pas indépendants : si la première personne ne repart pas avec son chapeau, il repart avec celui de la deuxième ou de la troisième personne, ce qui diminue leur probabilité de repartir avec leur chapeau. Appliquons donc la formule des probabilités composées :

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) P_{A_1}(A_2)$$

   Supposons A_1 réalisé. Alors il ne reste que les chapeaux 2 et 3 donc la deuxième personne repart avec le sien avec proba $1/2$ donc $P_{A_1}(A_2) = 1/2$, si bien que $P(A_1 \cap A_2) = 1/6$. De même pour $P(A_1 \cap A_3)$ et $P(A_2 \cap A_3)$. Enfin, toujours d'après la formule des probas composées :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 \cap A_2}(A_3)$$

   Supposons $A_1 \cap A_2$ réalisé : il ne reste donc que le troisième chapeau donc $P_{A_1 \cap A_2}(A_3) = 1$, c'est-à-dire que $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 1/6$. En conclusion :

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

   et donc la proba recherchée vaut $1/3$.

   Deuxième démonstration (à faire après le chapitre 32, mais peut-être moins dans l'esprit de l'exercice vue la première question) : on se place sur S_3, l'ensemble des bijections de $[\![1\,;3]\!]$ muni de l'équiprobabilité (la fonction qui à une personne associe le chapeau avec lequel il repart est bijective, et toutes les configurations sont équiprobables). La probabilité recherchée est donc le nombre de bijections sans point fixe divisé par $\mathrm{card}(S_3) = 6$. Or, parmi les six éléments de S_3, seuls les deux 3-cycles $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$ n'ont pas de point fixe, si bien que la probabilité recherchée vaut $2/6 = 1/3$.

Exercice 46 : ✪✪ On lance une pièce de monnaie équilibrée n fois de suite de manière indépendante et on s'intéresse à l'événement E_n : « au cours des n lancers, deux Pile successifs n'apparaissent pas ». On note, pour tout $n \geq 1, P_n$ la probabilité de E_n.

1. Trouver une relation entre P_n, P_{n-1} et P_{n-2}.
2. En déduire que $P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction :

1. Soit $n \geq 3$. Si $k \geq 1$, notons A_k : « Obtenir Pile à l'instant k » et B_k : « Obtenir Face à l'instant k ». L'événement E_n est réalisé si et seulement si on obtient Face à l'instant n et si on n'a pas obtenu deux Pile successifs jusqu'à l'instant $n-1$, ou si on obtient Pile à l'instant n, si on obtient Face à l'instant $n-1$ (car E_n est réalisé si on n'obtient pas deux Pile successifs) et si on n'a pas obtenu deux Pile successifs jusqu'à l'instant $n-2$. En d'autres termes,
$$E_n = (B_n \cap E_{n-1}) \cup (A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2})$$
Par conséquent, $P(E_n) = P((B_n \cap E_{n-1}) \cup (A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2}))$. Or, les deux événements entre parenthèses sont incompatibles donc
$$p_n = P(E_n) = P(B_n \cap E_{n-1}) + P(A_n \cap B_{n-1} \cap E_{n-2})$$
Les lancers sont indépendants donc les événements B_n (qui ne concerne que le n-ième lancer) et E_{n-1} (qui concerne les $n-1$ premiers lancers) sont indépendants. De même, les événements A_n, B_{n-1} et E_{n-2} sont mutuellement indépendants (alors que, par exemple, E_{n-1} et E_{n-2} ne le sont pas) donc
$$p_n = P(B_n) \times P(E_{n-1}) + P(A_n) \times P(B_{n-1}) \times P(E_{n-2}) = \frac{1}{2} \times p_{n-1} + \frac{1}{4} \times p_{n-2}$$
car la pièce est équilibrée.
2. Par conséquent, $(p_n)_{n\geq 1}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :
$$r^2 = \frac{r}{2} + \frac{1}{4} \iff r^2 - \frac{r}{2} - \frac{1}{4} = 0 \iff 4r^2 - 2r - 1 = 0$$
(autant éviter les fractions). Cette équation admet deux solutions simples : $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Ainsi, il existe λ et μ uniques tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$p_n = \lambda \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n + \mu \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n$$
On pourrait donner la valeur de λ et de μ avec les valeurs de p_1 et de p_2 (on trouve facilement $p_1 = 1$ et $p_2 = 3/4$) mais ce n'est même pas la peine : on ne demande pas la valeur explicite de p_n mais juste de prouver que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et pour cela, on n'a même pas besoin de connaître la valeur de λ et de μ ! Il suffit de voir que $4 < 5 < 9$ donc, par stricte croissance de la racine carrée, $2 < \sqrt{5} < 3$ donc $0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < \dfrac{1+3}{4} = 1$.De même on montre que $-1 < \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$. Par conséquent, on a deux suites géométriques de raison appartenant à $]-1\,;1[$. Le résultat en découle.

Exercice 47 - Téléphone arabe : ✪✪✪ N personnes numérotées $1, 2, \dots, N$ se transmettent dans cet ordre une information reçue correcte par la première personne. Chaque personne transmet l'information qu'il entend avec probabilité $p \in\,]0\,;1[$ et la transforme en son contraire avec probabilité $1-p$. Quelle est la probabilité que la N-ième personne reçoive l'information correcte ?

Correction : Attention, si une personne reçoit l'information erronée, elle donne la bonne info avec proba $1-p$!

Pour tout n, notons A_n : « la n-ième personne reçoit l'information correcte » et $u_n = P(A_n)$. Trouvons une relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n), comme dans l'exercice 42. Soit $n \geq 1$. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$u_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$$
Or, si la n-ième personne a la bonne information, il la transmet à la suivante avec proba p, tandis que s'il a la mauvaise, il donne la bonne avec proba $1-p$ (s'il donne l'info contraire à celle qu'il a). Dès lors :
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= pu_n + (1-p)(1-u_n) \\ &= (2p-1)u_n + 1 - p \end{aligned}$$
On reconnaît une suite arithmético-géométrique (et $2p-1 < 1$ puisque $p < 1$) : l'équation caractéristique est
$$x = (2p-1)x + (1-p) \iff x = 1/2$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcccc} u_{n+1} & = & (2p-1)u_n & + & 1-p \\ \dfrac{1}{2} & = & (2p-1)\times\dfrac{1}{2} & + & 1-p \end{array}$$

Par différence :

$$u_{n+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n - 1/2$ est géométrique de raison $2p-1$, si bien que (attention, la suite commence au rang $n=1$!)

$$u_n-\frac{1}{2}=(2p-1)^{n-1}\times\left(u_1-\frac{1}{2}\right)$$

et donc, puisque la première personne a l'information correcte :

$$u_n=\frac{1}{2}+(2p-1)^{n-1}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

En conclusion, la probabilité recherchée est

$$u_N=\frac{1}{2}+\frac{(2p-1)^{n-1}}{2}$$

Exercice 48 : ✪✪ Un fumeur veut arrêter de fumer. S'il réussit à ne pas fumer un jour, alors il reste motivé le lendemain et il a 3 chances sur 4 de ne pas fumer. Par contre, s'il fume un jour, alors le lendemain il fume avec probabilité $\alpha\in\,]\,0\,;1\,[$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note p_n la probabilité qu'il fume le n-ième jour. On suppose que $p_0=1$.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et α.
2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$, une expression de p_n en fonction de n, α et p_0.
3. Déterminer la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle existe. Cette limite éventuelle peut-elle être nulle ? Dans le cas où la limite existe et n'est pas nulle, en donner en une borne inférieure. Cette stratégie vous semble-t-elle judicieuse pour arrêter de fumer ?

Correction : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons F_n l'événement « le fumeur fume le n-ième jour ».

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e $(F_n,\overline{F_n})$:

$$p_{n+1}=P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n)+P_{\overline{F_n}}(F_{n+1})P(\overline{F_n})=\alpha p_n+\frac{1}{4}(1-p_n)=\frac{1}{4}+\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)p_n$$

2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. Posons $x=\dfrac{1}{5-4\alpha}$ de telle sorte que $x=\dfrac{1}{4}+x\left(\alpha-\dfrac{1}{4}\right)$. C'est possible puisque $5-4\alpha\neq 0$.

   Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $r_n=p_n-x$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad r_{n+1}=\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)r_n.$$

   Ainsi

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad r_n=\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)^n r_0$$

   et donc

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad p_n=x+\left(\alpha-\frac{1}{4}\right)^n(p_0-x)=\frac{1}{5-4\alpha}+\frac{4(1-\alpha)}{7-4\alpha}\left(\alpha-\frac{3}{4}\right)^n.$$

3. On a $0<\alpha<1$ donc $-\dfrac{1}{4}<\alpha-\dfrac{1}{4}<\dfrac{3}{4}$. Ainsi $\left(\alpha-\dfrac{1}{4}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et donc $p_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{5-4\alpha}$.

   On a $\inf_{0<\alpha<1}\dfrac{1}{5-4\alpha}=\dfrac{1}{5}>0$. La probabilité limite est minorée par $\dfrac{1}{5}$. Cela signifie que, même si n est très grand, la probabilité de fumer le n-ième jour reste supérieure à $\dfrac{1}{5}$ environ. Cette stratégie est donc très mauvaise pour arrêter de fumer.

Exercice 49 : ✪✪ Une mouche entre dans un studio de deux pièces (une chambre et une salle de bain). Elle se trouve initialement dans la salle de bain. On relève sa position dans le studio toutes les minutes.

- Si elle est dans la salle de bain à la n-ième minute, elle y reste avec probabilité 1/3 ou elle va dans la chambre avec probabilité 2/3.
- Si elle est dans la chambre à la n-ième minute, elle y reste avec probabilité 1/2, elle va dans la salle de bain avec probabilité 1/4 ou elle sort part la fenêtre avec probabilité 1/4 pour ne plus jamais revenir.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons a_n (respectivement b_n et c_n) les probabilités respectives que la mouche soit dehors (respectivement dans la salle de bain et dans la chambre).

1. Calculer a_0, b_0, c_0, a_1, b_1 et c_1.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de b_n et c_n.
3. Étudier les suites $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de a_n, c_n et b_n en fonction de n.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que la mouche est dans la salle de bain à la n-ième minute, quelle est la probabilité qu'elle était déjà dans la salle de bain la minute précédente ?
6. Combien de minutes sont-elles nécessaires pour que la probabilité que la mouche soit dehors soit supérieure à 95% ?

Correction :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

- A_n l'événement « la mouche est dehors à la n-ième minute »,
- B_n l'événement « la mouche est dans la salle de bain à la n-ième minute »,
- A_n l'événement « la mouche est dans la chambre à la n-ième minute ».

On a $P(A_1) = P(A_0) = P(C_0) = 0$, $P(B_0) = 1$, $P(B_1) = \frac{1}{3}$, $P(C_1) = \frac{2}{3}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le s.c.e (A_n, B_n, C_n) :
$$b_{n+1} = P_{A_n}(B_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(B_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(B_{n+1})P(C_n) = 0 + \frac{1}{3}b_n + \frac{1}{4}c_n$$
et
$$c_{n+1} = P_{A_n}(C_{n+1})P(A_n) + P_{B_n}(C_{n+1})P(B_n) + P_{C_n}(C_{n+1})P(C_n) = 0 + \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n.$$

2.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$2b_{n+1} - c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}c_n - \frac{2}{3}b_n - \frac{1}{2}c_n = 0.$$
Ainsi la suite $(2b_n - c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante égale à $2b_1 - c_1 = 2/3 - 2/3 = 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a
$$4b_{n+1} + 3c_{n+1} = \frac{4}{3}b_n + c_n + 2b_n + \frac{3}{2}c_n = -\frac{10}{3}b_n + \frac{5}{2}c_n = \frac{5}{6}(4b_n + 3c_n).$$
Ainsi la suite $(4b_n + 3c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 5/6 et de terme initial $4b_1 + 3c_1 = \frac{10}{3}$. Ainsi :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 4b_n + 3c_n = \frac{10}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 2b_n$ donc $10b_n = \frac{10}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ et donc $b_n = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$. Ensuite $c_n = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ et enfin
$$a_n = 1 - b_n - c_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de Bayes entraîne que
$$P_{B_n}(B_{n-1}) = \frac{P_{B_{n-1}}(B_n)P(B_{n-1})}{P(B_n)} = \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}} = \frac{1/3}{5/6} = \frac{2}{5}.$$

5. On cherche n tel que $P(A_n) \geq 0.95$. C'est le cas si et seulement si $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \geq \frac{95}{100}$ si et seulement si $\frac{5}{100} \geq \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ si et seulement si $\ln(1/20) \geq (n-1)\ln(5/6)$ si et seulement si $\frac{-\ln(20)}{\ln(5/6)} \leq n - 1$ si et seulement si $1 + \frac{-\ln(20)}{\ln(5/6)} \leq n$.

   C'est donc le cas à partir du rang $n = \left\lfloor -\frac{\ln(20)}{\ln(5/6)} \right\rfloor + 2 = 18$.

Exercice 50 : ✪✪ On tire à l'aveugle une allumette dans une boîte en contenant p petites, m moyennes et ℓ longues (où m, p, $\ell \in \mathbb{N}$ et $\ell + p \neq 0$). Si l'on en tire une longue, on gagne ; si l'on en tire une petite, on perd ; et si l'on en tire une moyenne, on la jette en on recommence l'opération. On note $p_{\ell,m,p}$ la probabilité de gagner le jeu.

1. Calculer $p_{\ell,0,p}$.
2. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, exprimer $p_{\ell,m+1,p}$ en fonction de $p_{\ell,m,p}$.
3. En déduire que la probabilité de gagner le jeu est indépendante de m.

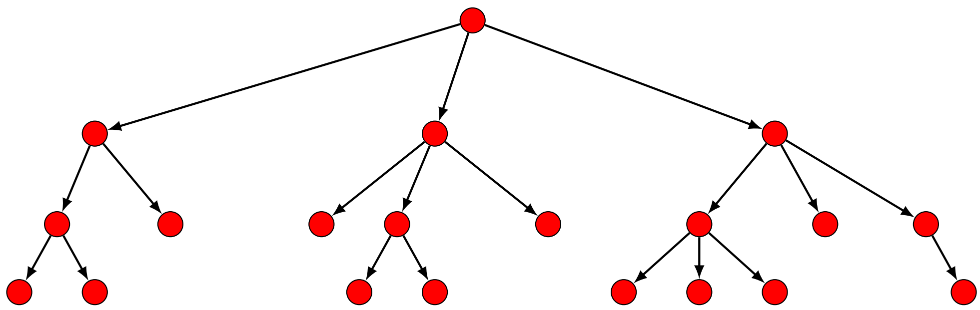
Correction :

1. Il n'y a pas de moyenne : on gagne si et seulement si on tire une longue, donc $p_{\ell,0,p} = \ell/(\ell+p)$.
2. Notons $G_{\ell,m,p}$ la proba de gagner avec les conditions ℓ, m, p. Les trois événements P : « on tire une petite », M : « on tire une moyenne », et L : « on tire une longue » forment un SCE. D'après la formule des probas totales :
$$p_{\ell,m+1,p} = P_P(G_{\ell,m+1,p})P(P) + P_M(G_{\ell,m+1,p})P(M) + P_L(G_{\ell,m+1,p})P(L)$$
La première proba conditionnelle est nulle car si on tire une petite on perd. De même, la troisième proba conditionnelle vaut 1. Enfin, celle du milieu vaut $p_{\ell,m,p}$: si on tire une moyenne, la probabilité de gagner devient $p_{\ell,m,p}$ puisqu'on retire une moyenne. Par conséquent :
$$\begin{aligned} p_{\ell,m+1,p} &= 0 + p_{\ell,m,p} \times \frac{m+1}{m+1+\ell+p} + 1 \times \frac{\ell}{\ell+m+1+p} \\ &= \frac{p_{\ell,m,p} \times (m+1) + \ell}{m+1+\ell+p} \end{aligned}$$
3. Une récurrence immédiate sur m prouve que cette quantité vaut toujours $\ell/(\ell+p)$.

Exercice 51 : ✪✪✪ Un donjon contient N coffres et un dragon. Le chef du donjon a mis, avec probabilité p, le trésor dans un des coffres, tiré au sort (et avec probabilité $1-p$, il l'a confié au dragon). Vous avez ouvert les $N-1$ premiers coffres, sans succès. Quelle est la probabilité pour que le trésor soit dans le dernier coffre ?

Correction : Pour tout $k \in [\![1\,;\,N]\!]$, notons C_k : « le trésor est dans le k-ième coffre » et D : « le trésor est gardé par le dragon ». On cherche $P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}}(C_N)$. D'après la formule de Bayes :
$$P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}}(C_N) = \frac{P_{C_N}\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right) \times P(C_N)}{P\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right)}$$
La probabilité conditionnelle $P_{C_N}\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right)$ vaut 1, car si le trésor est dans le N-ième coffre, alors il n'est pas dans l'un des autres. D et $\overline{D}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$P(C_N) = P_D(C_N)P(D) + P_{\overline{D}}(C_N)P(\overline{D})$$
Or, $P_D(C_N) = 0$ car si le trésor est gardé par le dragon, alors il n'est pas dans le dernier coffre, tandis que $P_{\overline{D}}(C_N) = 1/N$: supposons $\overline{D}$ réalisé, alors le trésor est dans l'un des coffres, et donc dans C_N avec probabilité $1/N$. On en déduit que $P(C_N) = p/N$. De même, toujours d'après la formule des probabilités totales (avec le même SCE) :
$$P\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right) = P_D\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right)P(D) + P_{\overline{D}}\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right)P(\overline{D})$$
La première probabilité conditionnelle vaut 1, car si le trésor est gardé par le dragon, alors il n'est pas dans l'un des $N-1$ premiers coffres, tandis que la deuxième probabilité conditionnelle vaut $1/N$. Supposons en effet $\overline{D}$ réalisé. Dans ce cas, $\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}$ est réalisé si et seulement si le trésor est dans le dernier coffre, ce qui arrive avec proba $1/N$ (puisqu'on sait déjà que le trésor est dans l'un des coffres). Par conséquent :
$$P\left(\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}\right) = 1 \times (1-p) + \frac{1}{N} \times p$$
Finalement, la probabilité recherchée vaut :
$$\begin{aligned} P_{\overline{C_1}\cap\cdots\cap\overline{C_{N-1}}}(C_N) &= \frac{1 \times \dfrac{p}{N}}{1-p+\dfrac{p}{N}} \\ &= \frac{\dfrac{p}{N}}{\dfrac{N-Np+p}{N}} \\ &= \frac{p}{p+N(1-p)} \end{aligned}$$

Exercice 52 - Galton-Watson dans un cas simple : ✪✪✪ On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet 3 descendants avec la probabilité 1/8, 2 descendants avec la probabilité 3/8, 1 descendant avec la probabilité 3/8 et aucun descendant avec la probabilité 1/8, indépendamment de ses congénères. À l'instant initial, on suppose que la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = 1/8$.



1. Déterminer la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération.
2. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n la probabilité pour qu'il n'y ait aucun individu à la n-ième génération. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_{n+1} = \frac{1}{8} \times {x_n}^3 + \frac{3}{8} \times {x_n}^2 + \frac{3}{8} \times x_n + \frac{1}{8}$$
3. Étudier la suite (x_n) et montrer qu'elle converge vers une limite que l'on explicitera. Interpréter ce résultat.

Correction :

1. Notons $A_{1,0}$: « l'individu originel a 0 enfant » et on définit de même $A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$. Notons E_2 : « extinction après la deuxième génération », si bien qu'on cherche $x_2 = P(E_2)$. $A_{1,0}, A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,3}$ forment un SCE donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$x_2 = P_{A_{1,0}}(E_2)P(A_{1,0}) + P_{A_{1,1}}(E_2)P(A_{1,1}) + P_{A_{1,2}}(E_2)P(A_{1,2}) + P_{A_{1,3}}(E_2)P(A_{1,3})$$
La première proba conditionnelle vaut 1 puisque l'espèce est déjà éteinte au bout de la première génération. Supposons A_1 réalisé : alors il n'y a qu'un descendant, qui a une probabilité 1/8 de ne faire aucun descendant, donc $P_{A_1}(E_2) = 1/8$. Supposons A_2 réalisé, si bien qu'il y a deux individus à la deuxième génération. Si on note $B_{1,0}$ l'événement « la première personne n'a pas de descendant » et $B_{2,0}$: « la deuxième personne n'a pas de descendant » (le premier indice est la personne, le deuxième son nombre de descendants), alors E_2 est réalisé si et seulement si $B_{1,0}$ et $B_{2,0}$, c'est-à-dire que $P_{A_{1,2}}(E_2) = P_{A_{1,2}}(B_{1,0} \cap B_{2,0})$. Par indépendance, cette proba vaut $1/8 \times 1/8 = 1/64$. On trouve de même que $P_{A_{1,3}}(E_2) = 1/8^3$ puisqu'il y a extinction si et seulement si les trois branches s'éteignent à la génération suivante. Par conséquent :
$$\begin{aligned} x_2 &= 1 \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8^2} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{8^3} \times \frac{1}{8} \\ &= \frac{8^3 + 3 \times 8^2 + 3 \times 8 + 1}{8^4} \\ &= \frac{729}{4096} \approx 0.17 \end{aligned}$$
2. Le raisonnement est le même, si ce n'est qu'on note E_{n+1} l'événement « l'espèce est éteinte au bout de la $(n+1)$-ième génération ».
$$x_{n+1} = P_{A_{1,0}}(E_{n+1})P(A_{1,0}) + P_{A_{1,1}}(E_{n+1})P(A_{1,1}) + P_{A_{1,2}}(E_{n+1})P(A_{1,2}) + P_{A_{1,3}}(E_{n+1})P(A_{1,3})$$
Supposons $A_{1,2}$ réalisé, si bien qu'il y a deux individus à la deuxième génération. Alors E_{n+1} est réalisé si et seulement si les deux descendants voient chacun leur lignée s'éteindre n générations plus tard, et cela se produit (pour chaque descendant) avec proba x_n, puisque cela revient à une lignée avec un originel qui s'éteint en n générations, et par indépendance, on trouve que la proba conditionnelle $P_{A_{1,2}}(E_{n+1})$ vaut ${x_n}^2$. Si on veut le faire proprement, on note F_n : « la descendance du premier s'éteint en n générations » et G_n : « la descendance du deuxième s'éteint en n générations ». Par conséquent,
$$P_{A_{1,2}}(E_{n+1}) = P_{A_{1,2}}(F_n \cap G_n)$$
Or, F_n et G_n sont indépendants de ce qui se passe à la génération précédente puisque chaque étape est indépendante des autres. On a donc :

$$P_{A_{1,2}}(E_{n+1}) = P(F_n \cap G_n)$$

et F_n et G_n sont indépendants donc la proba recherchée vaut $P(F_n) \times P(G_n) = {x_n}^2$. De même pour les autres probas conditionnelles, ce qui donne le résultat voulu.

3. On se ramène donc à l'étude d'une suite vérifiant définie par $x_1 = 1/8$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec, pour tout x, $f(x) = x^3/8 + 3x^2/8 + 3x/8 + 1/8$. L'étude de ce genre de suite est classique et a été vue en détails au chapitre 12 : on commence par poser $g(x) = f(x) - x$. Puisque 1 est racine évidente de g, on peut diviser g par $x - 1$: $g(x) = \dfrac{1}{8} \times (x^2 + 4x - 1)(x - 1)$, dont les racines sont 1 et

$$\frac{-4 \pm \sqrt{20}}{2} = -2 \pm \sqrt{5}$$

On en déduit que ces trois nombres sont les points fixes de f et que $g(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - 1)/8$, d'où le tableau de signes de g, en notant $a_1 = -2 - \sqrt{5}$ et $a_2 = -2 + \sqrt{5}$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Puisque $x_1 \in [\,a_1\,;a_2\,]$, on se concentre sur cet intervalle : soit $x \in [\,a_1\,;a_2\,]$. f étant croissante, et a_1 et a_2 étant des points fixes, $a_1 = f(a_1) \leq f(x) \leq f(a_2) = a_2$, c'est-à-dire que $f(x) \in [\,a_1\,;a_2\,]$: cet intervalle est stable par f. Par une récurrence immédiate, $x_n \in [\,a_1\,;a_2\,]$ pour tout n. Dès lors, pour tout n, $x_{n+1} - x_n = g(x_n) \geq 0$: la suite (x_n) est croissante, donc elle converge puisqu'elle est majorée par a_2. Or, f est continue donc sa limite est un point fixe de f : a_1, a_2 ou 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite est croissante donc $x_1 \leq x_n \leq a_2$ donc, l'inégalité large passant à la limite, $x_1 \leq L \leq a_2$ donc $a_1 < L$ (puisque $a_1 < 0 \leq x_1$) et $L < 1$ (car $a_2 < 1$) si bien que $L = a_2 = -2 + \sqrt{5}$.

En conclusion, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2 + \sqrt{5}$: la probabilité que l'espèce disparaisse à la n-ième génération tend vers $-2 + \sqrt{5} \approx 0.23$. L'anneau prochaine, avec le théorème de la convergence monotone, vous pourrez montrer que ce résultat signifie que l'espèce a une probabilité égale à $\sqrt{5} - 2$ de disparaître.

Exercice 53 - Le problème de Monty Hall : ✪✪✪ Il s'agit d'un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain *Let's Make a Deal*, présenté pendant treize ans par Monty Hall. Voici son énoncé : un candidat est placé devant trois portes. Derrière une des portes se trouve une voiture, derrière les deux autres se trouve une chèvre. Le candidat choisit une des trois portes sans l'ouvrir. L'animateur (qui sait où se trouve la voiture) ouvre l'une des portes restantes derrière laquelle se trouve une chèvre. Le candidat a alors le choix entre conserver la porte initiale ou changer pour prendre la porte fermée restante. Quel choix doit-il faire ?

Correction : Notons A l'événement « Le joueur gagne la voiture » et B l'événement « Le joueur avait choisi la bonne porte ». On $P(B) = \dfrac{1}{3}$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(B, \overline{B})$ entraîne

$$P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A) = \frac{1}{3}P_B(A) + \frac{2}{3}P_{\overline{B}}(A).$$

- Dans la stratégie qui consiste à conserver la porte initiale, le candidat gagne si et seulement $P_B(A) = 1$ et $P_{\overline{B}}(A) = 0$. Dans ce cas $P(A) = \dfrac{1}{3}$.
- Dans la stratégie qui consiste à changer de porte, le candidat gagne si et seulement $P_B(A) = 0$ et $P_{\overline{B}}(A) = 1$. Dans ce cas $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

Par conséquent, le candidat a tout intérêt à changer de porte : cela double ses chances de gagner la voiture.

Exercice 54 : ✪✪✪ On considère trois urnes :
- l'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges.
- l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges.
- l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

On tire une boule dans U_1 et une boule dans U_2 et on les met dans U_3. On tire une boule dans U_3 : elle est noire. Quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Correction : Notons N_1 : « la boule tirée dans l'urne 1 est noire ». On définit de même N_2, N_3 et R_1, R_2, R_3. On cherche donc $P_{N_3}(R_1)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{N_3}(R_1) = \frac{P_{R_1}(N_3) \times P(R_1)}{P(N_3)}$$

On a évidemment $P(R_1) = 3/5$. Calculons à présent $P_{R_1}(N_3)$. Supposons R_1 réalisé. Alors l'urne 3 contient trois boules noires et 5 boules rouges, avant de tirer une boule dans la deuxième urne. Notons pour plus de simplicité $\tilde{P}$ la probabilité P_{R_1} i.e. la probabilité conditionnelle par rapport à R_1. R_2 et N_2 forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\tilde{P}(N_3) = \tilde{P}_{R_2}(N_3)\tilde{P}(R_2) + \tilde{P}_{N_2}(N_3)\tilde{P}(N_2)$$

Supposons N_2 réalisé : alors l'urne 3 contient 4 boules noires et 5 boules rouges, si bien que $\tilde{P}_{N_2}(N_3) = 4/9$. De même, $\tilde{P}_{R_2}(N_3) = 3/9 = 1/3$. De plus, $\tilde{P}(N_2) = P(N_2) = 1/5$ et $\tilde{P}(R_2) = P(R_2) = 4/5$ puisque ce qui se passe dans l'urne 2 est indépendant de ce qui se passe dans l'urne 1 et donc conditionner par rapport à R_1 ne change pas la proba.

$$\begin{aligned} P_{R_1}(N_3) &= \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{16}{45} \end{aligned}$$

Calculons enfin $P(N_3)$. Les événements $R_1 \cap R_2, R_1 \cap N_2, N_1 \cap R_2, N_2 \cap N_2$ forment un sce et donc on a :

$$P(N_3) = P_{R_1\cap R_2}(N_3)P(R_1 \cap R_2) + P_{R_1\cap N_2}(N_3)P(R_1 \cap N_2) + P_{N_1\cap R_2}(N_3)P(N_1 \cap R_2) + P_{N_1\cap N_2}(N_3)P(N_1 \cap N_2)$$

Supposons $R_1 \cap R_2$ réalisé. Alors l'urne 3 contient trois boules noires et six boules rouges donc $P_{R_1\cap R_2}(N_3) = 3/9 = 1/3$. De plus, par indépendance, $P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)P(R_2) = 3/5 \times 4/5 = 12/25$. Les autres calculs sont analogues, et on trouve finalement :

$$\begin{aligned} P(N_3) &= \frac{1}{3} \times \frac{12}{25} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{25} + \frac{4}{9} \times \frac{8}{25} + \frac{5}{9} \times \frac{2}{25} \\ &= \frac{36+12+32+10}{9 \times 25} \\ &= \frac{90}{9 \times 25} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\begin{aligned} P_{N_3}(R_1) &= \frac{\frac{16}{45} \times \frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{16}{45} \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Exercice 55 - Le problème du scrutin (preuve de Joseph Bertrand) : ✪✪✪ Lors d'une élection opposant deux candidats A et B, A reçoit n voix et B reçoit m voix (avec $m < n$). On suppose équiprobables les différents ordres d'apparition des bulletins lors du dépouillement. On note $P(n, m)$ la probabilité que A soit toujours strictement en tête lors de chaque étape du dépouillement.

1. Déterminer un espace probabilisé représentant cette expérience.
2. Prouver que la probabilité que le dernier bulletin soit pour A est égale à $\dfrac{n}{n+m}$.
3. Montrer finalement que $P(n, m) = \dfrac{n-m}{n+m}$. On pourra raisonner par récurrence sur $n + m$.

Correction :

1. Précisons que les bulletins sont fixés, c'est leur ordre qui est aléatoire. On prend comme Ω l'ensemble des permutations des $n + m$ bulletins de vote (le fait que A soit toujours strictement en tête est un événement i.e. une sous-partie de Ω dont on va déterminer la probabilité), associé de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. Précisons enfin que $\text{card}(\Omega) = (n+m)!$ donc, si E est un événement,

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{(n+m)!}$$

2. Notons E : « le dernier bulletin est pour A ». Alors un élément de E est entièrement déterminé par le choix du bulletin pour A se trouvant en dernière position (n choix possibles) et les bulletins se trouvant auparavant ($(n+m-1)!$ choix possibles : on permute les autres bulletins). Par principe multiplicatif, $\text{card}(E) = n \times (n+m-1)!$ ce qui permet de conclure.
3. E et $\overline{E}$ forment un système complet d'événements : on peut appliquer la formule des probabilités totales. Si on note $A_{n,m}$ l'événement dont on cherche la proba :

$$\begin{aligned} P(A_{n,m}) &= P_E(A_{n,m}) \times P(E) + P_{\overline{E}}(A_{n,m}) \times P(\overline{E}) \\ &= P_E(A_{n,m}) \times \frac{n}{n+m} + P_{\overline{E}}(A_{n,m}) \times \frac{m}{n+m} \end{aligned}$$

Or, supposons E réalisé. $A_{n,m}$ est réalisé si et seulement si, juste avant, A était arrivé en tête tout au long du dépouillement, et on arrivait à $n-1$ bulletins contre m, si bien que cela se produit avec proba $P(n-1,m)$. En d'autres termes, $P_E(A_{n,m}) = P(n-1,m)$.

Supposons $\overline{E}$ réalisé. $A_{n,m}$ est réalisé si et seulement si, juste avant, A était arrivé en tête tout au long du dépouillement, et on arrivait à n bulletins contre $m-1$, si bien que cela se produit avec proba $P(n,m-1)$. En d'autres termes, $P_E(A_{n,m}) = P(n-1,m)$, si bien que

$$P(n,m) = P(n-1,m) \times \frac{n}{n+m} + P(n,m-1) \times \frac{m}{n+m}$$

Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par récurrence sur $n+m$. Plus précisément :

- Si $k \in \mathbb{N}^*$, notons H_k : « si $n+m=k$ alors $P(n,m) = \dfrac{n-m}{n+m}$ ».
- Si $n+m=1$, alors $n=1$ et $m=0$ puisque $n>m$ donc A reçoit une seule voix et B n'en reçoit aucune, donc la probabilité que A soit toujours strictement en tête vaut 1 puisqu'il n'y a qu'un bulletin de vote qui est pour A. D'autre part, $\dfrac{1-0}{1+0} = 1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $k \geq 1$. Supposons H_k vraie et prouvons que H_{k+1} est vraie. Soient donc n et m avec $n>m$ tels que $n+m=k+1$. D'après ce qui précède :

  $$P(n,m) = P(n-1,m) \times \frac{n}{n+m} + P(n,m-1) \times \frac{m}{n+m}$$

  Or, $n+(m-1) = (n-1)+m = k$ donc, par hypothèse de récurrence (qu'on applique à n et $m-1$ ainsi qu'à $n-1$ et m, penser à truc et machin) :

  $$\begin{aligned} P(n,m) &= \frac{n-1-m}{n-1+m} \times \frac{n}{n+m} + \frac{n-(m-1)}{n+m-1} \times \frac{m}{n+m} \\ &= \frac{(n-1-m)n + (n-m+1)m}{(n+m-1)(n+m)} \\ &= \frac{n^2-n-mn+nm-m^2+m}{(n+m-1)(n+m)} \end{aligned}$$

  Or, $(n+m-1)(n-m) = n^2-nm+nm-m^2-n+m$ si bien que

  $$P(n,m) = \frac{(n+m-1)(n-m)}{(n+m-1)(n+m)}$$

  ce qui permet de conclure.

Chapitre 27

Variables aléatoires sur un univers fini

« Conduite en état d'ivresse, excès de vitesse, recel de portefeuilles, dégradation de matériel appartenant à l'État, détention de stupéfiants, et je suis sûr qu'avec un petit test de dépistage on pourrait rajouter consommation de stupéfiants : mais vous êtes nos gros gagnants de la semaine ! »

Quatre garçons pleins d'avenir

Dans ce chapitre, toutes les variables aléatoires sont définies sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Si rien n'est précisé, n est un entier supérieur ou égal à 1 et p un réel appartenant à $]\,0\,;1\,[$.

Vrai ou Faux ?

1. Si $X \sim B(p)$ alors $2X \sim B(2p)$.
2. Si $X \sim B(p)$ alors $1 - X \sim B(1-p)$.
3. Si $X \sim B(p)$ alors $X^2 \sim B\left(p^2\right)$.
4. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$ alors $n - X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$.
5. Si $X \sim B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$ alors $n - X \sim B\left(n, \dfrac{1}{2}\right)$.
6. Si $p \neq \dfrac{1}{2}$ et si $X \sim B(n,p)$ alors $n - X \sim B(n,p)$.
7. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,n \rrbracket)$ alors $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
8. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,4 \rrbracket)$ alors $X/2 \sim U(\llbracket 0\,;\,2 \rrbracket)$.
9. Si $X \sim U(\llbracket 0\,;\,4 \rrbracket)$ alors $X + 2 \sim U(\llbracket 2\,;\,6 \rrbracket)$.
10. Si X est une variable aléatoire réelle alors $[X \leq 0] = \mathbb{R}^-$.
11. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X \leq 1) = P(X = 1)$.
12. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X \leq 2) = P(X = 2)$.
13. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors $P(X = \pi) = P(X = 3)$.
14. Si $X \sim U(\llbracket 1\,;\,5 \rrbracket)$ alors la probabilité que X soit un nombre pair est égale à la probabilité que X soit un nombre impair.
15. Si $E(X) = -1$ alors $E\left(X^2\right) = 1$.
16. $E\left(X^2\right) \geq E(X)^2$.
17. Si $E(X) \geq 0$ alors $P(X \geq 0) = 1$.
18. Si $E(X) = 0$ alors $P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$.
19. Si $P(X \geq 0) = P(X \leq 0)$ alors $E(X) = 0$.

27.1 Variables aléatoires

Exercice 1 : ✪ Soit X une variable aléatoire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $E\left[(X-a)^2\right] \geq V(X)$.

Correction : D'après la formule de König-Huygens puis par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E\left[(X-a)^2\right] - V(X) &= E\left(X^2 - 2aX + a^2\right) - (E(X^2) - E(X)^2) \\ &= E(X^2) - 2aE(X) + a^2 - E(X^2) + E(X)^2 \\ &= (E(X) - a)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. Une petite remarque au passage : $E\left[(X-a)^2\right] = V(X) + (E(X)-a)^2 +$: on peut voir cela comme un théorème de Pythagore, l'espérance de X étant la projection orthogonale sur l'ensemble des fonctions constantes, et donc $(E(X)-a)^2$ étant la distance entre $E(X)$ et a au carré, et $E[(X-a)^2]$ la distance entre a et X, cela ressemble au théorème de Pythagore : $V(X)$ peut donc être vue comme la distance entre X et l'ensemble des fonctions constantes (au carré) et puisqu'on a une projection orthogonale, il est intuitif que ce soit la constante $a = E(X)$ qui minimise la distance. Voir un dessin dans le chapitre 34.

Exercice 2 : ✪ Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Soit X la variable aléatoire finie à valeurs dans $[\![1\,;\, ab]\!]$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1\,;\, ab]\!], \qquad P(X=k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$$

Quelles conditions doivent vérifier a et b pour que X soit bien une variable aléatoire réelle finie ? Calculer $E(X)$ et déterminer a et b afin que $E(X) = 7/2$.

Correction : On définit une v.a. si et seulement si ($1/a - 1/b \geq 0$ et la somme vaut 1). Or :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

Par conséquent, X est bien une variable aléatoire si et seulement si $a \leq b$ et $ab \times \left(\dfrac{b-a}{ab}\right) = 1$ donc si et seulement si $b - a = 1$. Supposons donc cette condition réalisée. X suit alors une loi uniforme sur $[\![1\,;\, ab]\!]$ puisque les probas ne dépendent pas de k. Par conséquent,

$$E(X) = \frac{ab+1}{2}$$

et puisque $b = a+1$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{a(a+1)+1}{2} \\ &= \frac{a^2+a+1}{2} \end{aligned}$$

On cherche donc a tel que $a^2 + a + 1 = 7$ donc tel que $a^2 + a - 6 = 0$, et puisque a est un entier naturel, $a = 2$ donc $b = 3$.

Exercice 3 : ✪ Une urne contient 2 boules blanches et $n-2$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche, et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Donner la loi de X et calculer son espérance.
2. Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.

Correction :

1. Dans le meilleur des cas, on tire une boule blanche au premier tirage, et dans le pire des cas, on tire la première boule blanche une fois que toutes les $n-2$ boules rouges ont été tirées (les tirages sont sans remise) donc au tirage $n-1$. Tous les cas intermédiaires sont possibles, c'est-à-dire que $X(\Omega) = [\![1\,;\, n-1]\!]$. Soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Pour tout i, notons B_i : « tirer une boule blanche au i-ième tirage » et on définit R_i de la même façon, si bien que

$$[X = k] = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$$

Les tirages se font sans remise : les tirages ne sont donc pas indépendants, utilisons la formule des probabilités composées.

$$P(X=k) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3)\cdots P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1})P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k)$$

- Initialement, il y a $n-2$ boules rouges et 2 boules blanches si bien que $P(R_1) = \dfrac{n-2}{n}$.
- Supposons R_1 réalisé. Alors on a tiré une boule rouge, si bien que l'urne contient 2 boules blanches et $n-3$ boules rouges donc $P_{R_1}(R_2) = \dfrac{n-3}{n-1}$.
- De même, $P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{n-3}{n-2}$.
- De même, pour tout $i \leq k-1$, $P_{R_1\cap\cdots\cap R_{i-1}}(R_i) = \dfrac{n-2-(i-1)}{n-(i-1)} = \dfrac{n-1-i}{n-i+1}$.
- Supposons enfin $R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1}$ réalisé. Alors on a retiré $k-1$ boules rouges de l'urne, donc le nombre de boules de l'urne est $n-(k-1) = n-k+1$ et il y a toujours 2 boules blanches donc $P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k) = \dfrac{2}{n-k+1}$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{n-k}{n-k+2} \times \frac{2}{n-k+1} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

puisque les autres termes du produits se simplifient (pour vous rassurer, on prouve facilement, à l'aide du changement d'indice $j = n - k$ qui revient à parcourir la somme en sens inverse, que la somme des probas fait bien 1). Calculons son espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n-1} kP(X=k) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \\
&= \frac{2}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} k - \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{2}{n-1} \times \frac{n(n-1)}{2} - \frac{2}{n(n-1)} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= n - \frac{2n-1}{3} \\
&= \frac{n+1}{3}
\end{aligned}$$

2. Quand on tire la première boule blanche au X-ième tirage, alors on a tiré auparavant $X-1$ boules rouges si bien que $Y = n-2-(X-1) = n-1-X$. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= n-1-E(X) \\
&= n-1-\frac{n+1}{3} \\
&= \frac{2n-2}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4 : ✪ Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue, il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs, tandis que sur la deuxième roue il y a 1 vert et 9 blancs. Les gains sont distribués de la façon suivante :
- 3 euros si les deux roues tombent sur les secteurs rouge et vert.
- 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc.
- 50 centimes si les deux roues tombent sur un secteur blanc.

Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain s'il veut avoir un bénéfice moyen d'au moins 25 centimes par partie. Donner alors la loi du bénéfice.

Correction : Notons R_1 : « la première roue tombe sur un secteur rouge ». On définit de même B_1, V_1, B_2. Notons m la mise du joueur et G le gain (algébrique) du forain. On a $G(\Omega) = \{3-m; 1-m; 1/2-m\}$. De plus :

$$P(G = m-3) = P(R_1 \cap V_2)$$

puisque le joueur gagne trois euros si et seulement si la première roue tombe sur rouge et la deuxième sur vert. Par indépendance,

$$\begin{aligned}
P(G = 3-m) &= P(R_1) \times P(V_2) \\
&= \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{100}
\end{aligned}$$

Ensuite, $P(G = m-1) = P((B_1 \cap V_2) \cup (R_1 \cap B_2))$. Les deux événements entre parenthèses étant incompatibles :

$$P(G = m-1) = P(B_1 \cap V_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

Par indépendance :

$$\begin{aligned} P(G=m-1) &= P(B_1)\times P(V_2)+P(R_1\cap B_2)\\ &= \frac{7}{10}\times\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{9}{10}\\ &= \frac{34}{100}\end{aligned}$$

On trouve $P(G=m-1/2)$ de la même façon en remarquant que $P(G=m-1/2)=P(B_1\cap B_2)$ ou en utilisant le fait que $P(G=m-1/2)=1-P(G=m-3)-P(G=m-1)$ (mais si on a fait une erreur auparavant, cette deuxième méthode ne permet pas de le voir). Bref, dans tous les cas, on trouve $P(G=m-1/2)=63/100$.

On nous parle ensuite de bénéfice moyen : on va donc calculer $E(G)$.

$$\begin{aligned} E(G) &= (m-3)P(G=m-3)+(m-1)P(G=m-1)+(m-1/2)P(G=m-1/2)\\ &= \frac{(m-3)\times 3+(m-1)\times 34}{100}+\frac{2m-1}{2}\times\frac{63}{100}\\ &= \frac{(m-3)\times 6+(m-1)\times 68+(2m-1)\times 63}{200}\\ &= \frac{200m-149}{200}\end{aligned}$$

On cherche donc m tel que $E(G)\geq 1/4$.

$$\begin{aligned} E(G)\geq\frac{1}{4} &\iff \frac{200m-149}{200}\geq 1/4\\ &\iff 200m-149\geq 50\\ &\iff m\geq\frac{199}{200}=0,995\end{aligned}$$

c'est-à-dire $99,5$ centimes. Bref, le forain demandera une mise d'au moins un euros.

Exercice 5 : ✪ Le gérant d'un magasin de téléphones intelligents a un très grand stock de téléphones que l'on peut considérer comme constant. La probabilité qu'un téléphone soit abîmé vaut $\dfrac{49}{1000}$. Un client achète n téléphones. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté au plus un téléphone défectueux ?

Correction : Notons X le nombre de téléphones défectueux achetés par le client. X compte le nombre de téléphones de succès (acheter un téléphone défectueux, proba $49/1000$) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (acheter un téléphone). Par conséquent, $X\sim B(49/1000,n)$ et on cherche $P(X\leq 1)$. On a $P(X\leq 1)=P([X=0]\cup[X=1])$ et ces deux événements sont incompatibles donc

$$\begin{aligned} P(X\leq 1) &= P(X=0)+P(X=1)\\ &= \binom{n}{0}\left(\frac{49}{1000}\right)^0\left(\frac{951}{1000}\right)^n+\binom{n}{1}\left(\frac{49}{1000}\right)^1\left(\frac{951}{1000}\right)^{n-1}\\ &= \left(\frac{951}{1000}\right)^n+n\left(\frac{49}{1000}\right)\left(\frac{951}{1000}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Exercice 6 : ✪ Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Soit $\alpha>0$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $e^{\alpha X/n}$ et donner sa limite quand $n\to+\infty$.

Correction : D'après le théorème de transfert :

$$
\begin{array}{rcl}
E(e^{\alpha X/n}) & = & \sum_{k=0}^{n} e^{\alpha k/n} P(X = 1/2) \\
& = & \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{\alpha/n}\right)^k \\
& = & \left(\frac{e^{\alpha/n}+1}{2}\right)^n \\
& = & e^{n \ln\left(\frac{e^{\alpha/n}+1}{2}\right)} \\
& = & e^{n \ln\left(\frac{1+\alpha/n+\mathrm{o}(1/n)+1}{2}\right)} \\
& = & e^{n \ln(1+\alpha/2n+\mathrm{o}(1/n))} \\
& = & e^{\alpha/2+\mathrm{o}(1)} \\
& \xrightarrow[n\to+\infty]{} & e^{\alpha/2}
\end{array}
$$

Exercice 7 : ✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]\,0\,;1\,[$ et $x \in \mathbb{R}$. On considère une variable aléatoire X de loi $B(n,p)$. Justifier que $Y = \dfrac{1}{1+X}$, $Z = z^X$ et $U = \dfrac{1}{\binom{n}{X}}$ sont des variables aléatoires et calculer (sans expliciter leurs lois) leurs espérances.

Correction : D'après le théorème de transfert :

$$
\begin{array}{rcl}
E(Y) & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} P(X = k) \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^{k-1} (1-p)^{n+1-k} \\
& = & \frac{1}{p(n+1)} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} \\
& = & \frac{1}{p(n+1)} \left[(p+1-p)^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right] \\
& = & \frac{1}{p(n+1)} \left[1 - (1-p)^{n+1}\right]
\end{array}
$$

Toujours d'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=0}^{n} z^k P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (zp+1-p)^n \end{aligned}$$

Toujours d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(U) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P(X=k)}{\binom{n}{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= (1-p)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{p}{1-p}\right)^k \end{aligned}$$

On a une somme géométrique : il faut séparer les cas selon que la raison vaut 1 ou non. Si $p = 1/2$ alors $p/(1-p) = 1$ donc $E(U) = (n+1)(1-p)^n$. Sinon, la raison est différente de 1 donc

$$E(U) = (1-p)^n \times \frac{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{n+1}}{1 - \frac{p}{1-p}}$$

Exercice 8 : ✪ En septembre 1693, Samuel Pepys écrivit à Newton pour lui soumettre le problème suivant : a-t-on le plus de chances d'obtenir (au moins) un 6 en lançant six dés, (au moins) deux 6 en lançant douze dés, ou (au moins) trois 6 en lançant dix-huit dés ? Qu'auriez-vous répondu à Samuel Pepys ?

Correction : Notons X_1 le nombre de six obtenus en lançant six dés. X_1 compte le nombre de succès (obtenir 6, proba $1/6$) obtenus lors de 6 répétitions d'une expérience aléatoire (lancer un dé). Par conséquent, $X_1 \sim B(6, 1/6)$ et on cherche $P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 = 0)$ donc

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 1) &= 1 - \binom{6}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^6 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \end{aligned}$$

De même, si X_2 est le nombre de 6 obtenus en lançant 12 dés, alors $X_2 \sim B(12, 16)$ et on cherche $P(X_2 \geq 2)$ donc $P(X_2 \geq 2) = 1 - P([X_2 = 0] \cup [X_2 = 1])$. Par incompatibilité des événements :

$$\begin{aligned} P(X_2 \geq 2) &= 1 - \binom{12}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{11} \end{aligned}$$

De même, en utilisant le fait que $\binom{18}{2} = 143$:

$$P(X_3 \geq 3) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{18} - 18 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^{17} - 143 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{16}$$

Avec une calculatrice, $P(X_1 \geq 1) \approx 0.665$, $P(X_2 \geq 2) \approx 0,618$ et $P(X_3 \geq 3)0,612$: le plus probable est d'obtenir au moins un 6 en lançant six dés.

Exercice 9 : ✪ Une boîte de bonbons contient 5 bonbons, dont 2 au poivre. Un garnement y pioche des bonbons au hasard et les mange, jusqu'à manger le premier bonbon au poivre. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonbons mangés par le garnement.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

2. Même question pour la variable aléatoire Y donnant le nombre de bonbons restant dans la boîte après le passage du garnement.

Correction :

1. Dans le meilleur (ou pire ?) des cas, le garnement mange dès le début un bonbon au poivre, et alors $X = 1$, et dans le pire (ou meilleur ?) des cas, il mange tous les bonbons normaux avant de manger un bonbon au poivre, et alors $X = 4$. Tous les cas intermédiaires sont possibles donc $X = [\![1\,;\,4]\!]$. Pour tout i, notons N_i : « le garnement mange un bonbon normal au i-ème essai » et P_i : « le garnement mange un bonbon au poivre au i-ème tirage ».
   - $[X = 1] = P_1$ donc $P(X = 1) = 2/5$.
   - $[X = 2] = N_1 \cap P_2$. Puisqu'il n'y a pas remise, les événements ne sont pas indépendants : d'après la formule des probabilités composées, $P(N_1 \cap P_2) = P(N_1)P_{N_1}(P_2)$. Or, $P(N_1) = 3/5$ et $P_{N_1}(P_2) = 1/2$: si le garnement pioche un bonbon normal au premier tirage, il reste ensuite deux bonbons normaux et deux bonbons au poivre, si bien que $P_{N_1}(P_2) = 1/2$. On en déduit que $P(X = 2) = 3/10$.
   - $P(X = 3) = N_1 \cap N_2 \cap P_3$. Toujours d'après la formule des probabilités composées :
   $$P(X = 3) = P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1 \cap N_2}(P_3)$$
   Un raisonnement analogue donc $P(N_1) = 3/5, P_{N_1}(N_2) = 1/2$ et $P_{N_1\cap N_2}(P_3) = 2/3$ donc $P(X = 3) = 1/5$.
   - On trouve $P(X = 4)$ de même, en remarquant que $[X = 4] = N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap P_4$ ou en calculant $1 - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3)$. On trouve dans tous les cas $P(X = 4) = 1/10$.

   On en déduit que :
   $$\begin{aligned} E(X) &= 1P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3) + 4P(X = 4) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{6}{10} + \frac{3}{5} + \frac{4}{10} \\ &= 2 \end{aligned}$$
   De plus, d'après la formule de transfert :
   $$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2P(X = 1) + 2^2P(X = 2) + 3^2P(X = 3) + 4^2P(X = 4) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{12}{10} + \frac{9}{5} + \frac{16}{10} \\ &= \frac{22}{5} \end{aligned}$$
   Enfin, d'après la formule de König-Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2/5$.
2. $Y = 5 - X$. On en déduit que $Y(\Omega) = [\![1\,;\,4]\!]$, et que $P(Y = 1) = P(X = 4) = 1/10, P(Y = 2) = P(X = 3) = 1/5$, $P(Y = 3) = P(X = 2) = 3/10$ et $P(Y = 4) = P(X = 1) = 2/5$. Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = 5 - E(X) = 3$ et $V(Y) = (-1)^2V(X)$ (on utilise la formule donnant $V(aX + b)$ en fonction de $V(X)$) donc $V(Y) = 2/5$.

Exercice 10 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Correction :

1. Dans le meilleur des cas, on tire la boule blanche au premier tirage, et alors $X = 1$. Dans le pire des cas, on tire toutes les autres boules d'abord, si bien qu'il ne reste que la boule blanche dans l'urne, et alors $X = n$. Finalement, $X(\Omega) = [\![1\,;\,n]\!]$. Si $i \geq 1$, notons B_i : « tirer la boule blanche au i-ième tirage ». Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. On a :
   $$[X = k] = \overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k$$
   Les événements ne sont pas indépendants puisqu'il n'y a pas remise : d'après la formule des probas composées :
   $$P(X = k) = P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \cdots P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}})P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)$$
   L'urne contient initialement 1 boule blanche et $n - 1$ autres boules donc $P(\overline{B_1}) = (n - 1)/n$. Supposons $\overline{B_1}$ réalisé : alors l'urne contient $n - 2$ autres boules et une boule blanche donc $P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = (n - 2)/(n - 1)$. De même pour toutes les autres :

$$P(X=k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

En d'autres termes, X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\, n]\!]$.

2. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

C'est intuitif : c'est le milieu entre 1 et n ! D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

et donc, d'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12} \\ &= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12} \end{aligned}$$

Exercice 11 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient 10 boules vertes et 20 boules rouges. On y effectue n tirages avec remise, et on note X le nombre de boules vertes obtenues.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X(X-1)$.

Correction : Il y a remise donc les tirages sont indépendants.

1. X est le nombre de succès (tirer une boule verte, proba $1/3$) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (tirer une boule). Par conséquent, $X \sim B(n, 1/3)$ donc $E(X) = n/3$ et $V(X) = n \times 1/3 \times (1 - 1/3) = 2n/9$.
2. On pourrait appliquer le théorème de transfert, mais cela prendrait du temps. Il suffit de voir que, par linéarité de l'espérance, puis par la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} E(X(X-1)) &= E(X^2) - E(X) \\ &= V(X) + E(X)^2 - E(X) \\ &= \frac{2n}{9} + \frac{n^2}{9} - \frac{n}{3} \end{aligned}$$

Exercice 12 : ✪ Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On tire les boules sans remise jusqu'à tirer la boule blanche, on note X le nombre de tirages effectués. Montrer que X suit une loi uniforme.

Correction : Dans le meilleur des cas, $X = 1$ puisqu'on peut tirer la boule blanche au premier tirage, et dans le pire des cas, $X = n$ lorsqu'on tire la boule blanche après épuisement des autres. Tous les cas intermédiaires sont possibles donc $X(\Omega) = [\![1\,;\, n]\!]$. Si $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, notons B_i : « on tire la boule blanche au i-ème tirage ». Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$.

$$P(X = k) = P(\overline{B_1} \cap \cdots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k)$$

Il n'y a pas indépendance puisque les tirages se font sans remise : on applique la formule des probas composées :

$$P(X = k) = P(\overline{B_1}) \times P_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) \times \cdots \times P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-2}}}(\overline{B_{k-1}}) P_{\overline{B_1}\cap\cdots\cap\overline{B_{k-1}}}(B_k)$$

$P(\overline{B_1}) = (n-1)/n$. Supposons $\overline{B_1}$ réalisé. Alors l'urne contient $n-1$ boules dont une seule boule blanche donc $p_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = (n-2)/(n-1)$ et ainsi de suite :

$$P(X = k) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n-1}{n-2} \times \frac{n-k+1}{n-k+2} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$$

donc X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\, n]\!]$.

Exercice 13 : ✪

1. Soit X qui suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\, 20]\!]$. Donner la loi de $\left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$.
2. **Remake :** Soit X qui suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\, 6n]\!]$. Donner la loi de $\cos(X\pi/3)$.

Correction :

1. Notons $Y = \left\lfloor \sqrt{X} \right\rfloor$. Alors $Y(\Omega) = [\![1\,;\, 4]\!]$.

$$P(Y = 1) = P([X = 1] \cup [X = 2] \cup [X = 3])$$

On a une union d'événements deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= \frac{3}{20} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(Y = 2) = 5/20 = 1/4$, $P(Y = 3) = 7/20$ et $P(Y = 4) = 5/20 = 1/4$.

2. Écrivons $X = 6q + r$ avec $r \in [\![0\,;\, 5]\!]$ c'est-à-dire la division euclidienne de X par 6. On a alors, par 2π-périodicité du cos :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{X\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{6q\pi + r\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(2q\pi + \frac{r\pi}{3}\right) \\ &= \cos\left(\frac{r\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Tout dépend donc de la congruence de X modulo 6.

- Si $r = 0$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(0) = 1$.
- Si $r = 1$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(\pi/3) = 1/2$.
- Si $r = 2$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(2\pi/3) = -1/2$.
- Si $r = 3$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(\pi) = -1$.
- Si $r = 4$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -1/2$.
- Si $r = 5$ alors $\cos(X\pi/3) = \cos(5\pi/3) = 1/2$.

On a donc $X(\Omega) = \{\pm 1/2; \pm 1\}$. Encore une fois, tout dépend de la congruence de X modulo 6.

- $P(X = 1) = P(X \equiv 0[6])$. Or, entre 1 et $6n$, il y a exactement n multiples de 6 donc

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \frac{n}{6n} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

- $P(X=1/2) = P(X \equiv 1,5[6])$. Or, entre 1 et $6n$, il y a $2n$ nombres congrus à 1 ou 5 modulo 6 : 1 et 5, $n+1$ et $n+5$ etc. jusque $6(n-1)+1, 6(n-1)+5$. On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{2n}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

On trouve de même que $P(X=-1/2) = 1/3$ et $P(X=-1) = 1/6$.

Exercice 14 - Inégalité de Jensen : ✪ Soit X une variable aléatoire réelle et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $\varphi(E(X)) \leq E(\varphi(X))$.

Correction : Notons $X = \{x_1; \dots; x_n\}$. D'après la formule de transfert,

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)\varphi(x_i)$$

Les $P(X=x_i)$ étant positifs de somme 1, d'après l'inégalité de Jensen (celle du chapitre sur la convexité) :

$$E(\varphi(X)) \geq \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} P(X=x_i)x_i\right) = \varphi(E(X))$$

cf. cours pour une interprétation graphique du résultat.

Exercice 15 : ✪ Soient X et Y deux variables aléatoires prenant les mêmes valeurs $x_1, \dots, x_n$. On suppose que, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $P(X=x_k) \leq P(Y=x_k)$. Que peut-on dire des lois de X et Y ?

Correction : Par somme :

$$\sum_{k=1}^{n} P(X=x_k) \leq \sum_{k=1}^{n} P(Y=x_k)$$

Or, il y a égalité entre les deux sommes puisque celles-ci valent 1, c'est donc que chaque inégalité est une égalité, c'est-à-dire que $P(X=x_k) = P(Y=x_k)$ pour tout k, c'est-à-dire que X et Y ont la même loi.

Exercice 16 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0 ; n]\!]$. Montrer que

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$$

Correction : Exercice très classique. Puisque X est à valeurs entières, pour tout k, $[X=k] = [X \geq k] \backslash [X \geq k+1]$. Or, $[X \geq k+1]$ est inclus dans $[X \geq k]$ si bien que $P(X=k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} k(P(X \geq k) - P(X \geq k+1)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=0}^{n} kP(X \geq k+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} kP(X \geq k) - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)P(X \geq k) \\ &= 0 \times P(X \geq 0) + \sum_{k=1}^{n} (k-k+1)P(X \geq k) - nP(X \geq n+1) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque $P(X \geq n+1) = 0$ étant donné le fait que X est à valeurs dans $[\![0 ; n]\!]$.

Exercice 17 : ✪✪ L'élément F d'une machine est source de pannes fréquentes (penser à la photocopieuse du lycée Faidherbe...). Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé. Le coût du dépannage (pièce et main d'oeuvre) s'élève à x euros et la perte de production due à cette panne à y euros. On suppose qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour. On note p_n la probabilité de bon fonctionnement le n-ième jour, la machine étant mise en route le premier jour. Si la machine fonctionne correctement le jour j, la probabilité qu'elle fonctionne correctement le jour $j+1$ est $0,6$, tandis que si elle ne fonctionne pas le jour j, l'élément F est changé et la probabilité qu'elle fonctionne le jour $j+1$ est $0,9$.

1. Donner une relation entre p_{n+1} et p_n. En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 et de n, puis la limite L de la suite p_n. On étudie à présent deux options.
2. La première option consiste à ne pas toucher à la machine tant qu'elle ne tombe pas en panne. On suppose à présent que la machine fonctionne chaque jour indépendamment des précédents avec la probabilité L de la question précédente. On note C_1 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien. Donner la loi de C_1 et en déduire son espérance en fonction de x et y.
3. La deuxième option consiste à effectuer chaque jour un entretien préventif de la machine, consistant à remplacer chaque jour, avant qu'elle ne tombe en panne, la pièce F. Le coût de cet entretien reste égal à x euros. Dans cette option, on interviendra chaque jour une fois ou deux, selon si la machine tombe en panne ou non. En effet, si on change la pièce le matin, elle peut encore tomber en panne et dans ce cas, il y a encore la perte de production de y euros, et il faut la dépanner une nouvelle fois l'après-midi. La probabilité que la machine ne tombe pas en panne durant la journée est encore égale à $0,9$ puisque la pièce F est neuve. On note C_2 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien. Donner la loi de C_2 et son espérance en fonction de x et y.
4. Quelle option est plus rentable pour l'entreprise ? Représenter graphiquement l'ensemble des couples (x,y) qui conduisent à préférer la première option.

Correction :

1. Notons A_n : « l'élément fonctionne le n-ième jour », si bien que $p_n = P(A_n)$. A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1})P(A_n) + P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})P(\overline{A_n})$$

Or, par hypothèse, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 6/10$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 9/10$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{6}{10} \times p_n + \frac{9}{10} \times (1-p_n) \\ &= \frac{-3}{10} \times p_n + \frac{9}{10} \end{aligned}$$

On reconnaît donc une suite arithmético-géométrique d'équation caractéristique

$$x = \frac{-3}{10} \times x + \frac{9}{10} \iff x = \frac{9}{13}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{-3}{10} \times p_n &+ \frac{9}{10} \\ \frac{9}{13} &= \frac{-3}{10} \times \frac{9}{13} &+ \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Par différence, $p_{n+1} - 9/13 = -3/10(p_n - 9/13)$: la suite de terme général $p_n - 9/13$ est géométrique de raison $(-3/10)$ donc (on commence à l'instant $n=1$) $p_n - 9/13 = (-3/10)^{n-1}(p_1 - 9/13)$ donc

$$p_n = \frac{9}{13} + \left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} \times \left(p_1 - \frac{9}{13}\right)$$

et puisque $-3/10 \in]-1\,;1[$, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 9/13$ (et donc $L = 9/13$).

2. Si la machine ne tombe pas en panne, on ne fait rien donc $C_1 = 0$. Si la machine tombe en panne, il y a le coût de la main d'oeuvre x et le manque à gagner y donc $C_1 = x+y$. Par conséquent $C_1(\Omega) = \{0; x+y\}$ et puisque la machine fonctionne chaque jour avec proba $9/13$, on a

$$P(C_1 = 0) = \frac{9}{13} \qquad \text{et} \qquad P(C_1 = x+y) = \frac{4}{13}$$

et donc

$$\begin{aligned} E(C_1) &= 0 \times P(C_1 = 0) + (x+y) \times P(C_1 = x+y) \\ &= \frac{4}{13} \times (x+y) \end{aligned}$$

3. Si la machine ne retombe pas en panne, le seul coût est le coût d'entretien du matin donc $C_2 = x$. Si elle retombe en panne, il y a un autre coût d'entretien plus le manque à gagner donc $C_2 = 2x + y$. Dès lors, $C_2(\Omega) = \{x; 2x + y\}$ et

$$P(C_2 = x) = \frac{9}{10} \qquad \text{et} \qquad P(C_2 = 2x + y) = \frac{1}{10}$$

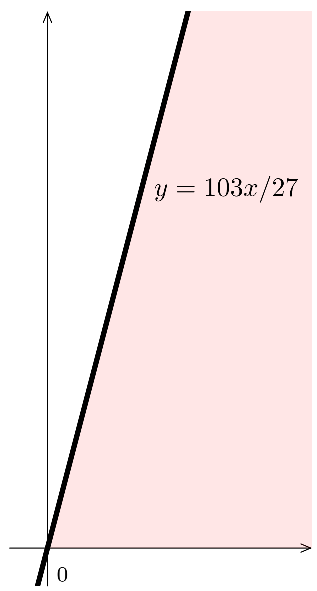
et donc

$$\begin{aligned} E(C_2) &= x \times P(C_2 = x) + (2x + y) \times P(C_2 = 2x + y) \\ &= \frac{9x + (2x + y)}{10} \\ &= \frac{11x + y}{10} \end{aligned}$$

4. On cherche donc quand $E(C_1) \geq E(C_2)$.

$$\begin{aligned} E(C_1) \geq E(C_2) &\iff \frac{4(x + y)}{13} \geq \frac{11x + y}{10} \\ &\iff 40(x + y) \geq 13(11x + y) \\ &\iff 27y \geq 103x \\ &\iff y \geq \frac{103x}{27} \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $y \geq 103x/27$, $E(C_1) \geq E(C_2)$ donc C_2 coûte en moyenne moins cher donc on choisit cette option, tandis que si $y \leq 103x/27$, alors C_1 coûte moins cher en moyenne donc on choisit cette option. Géométriquement, c'est le cas si le point de coordonnées (x, y) est en-dessous de la droite d'équation $y = 103x/27$:



Exercice 18 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $B(n, p)$. On définit la variable Y par

- $Y = 0$ si $X \neq 0$.
- Si $X = 0$, Y suit une loi uniforme sur $[\![0\,;\,n]\!]$.

Donner la loi de Y et son espérance.

Correction : Soit $Y = 0$, soit Y suit une loi uniforme sur $[\![0\,;\,n]\!]$ donc $Y(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$. Par conséquent, $Y(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$. Soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$. 0 joue un rôle différent des autres entiers. Supposons $k = 0$ dans un premier temps. $[X = 0]$ et $[X \neq 0]$ forment un système complet d'événements : d'après la formule des probabilités totales,

$$P(Y = 0) = P_{X=0}(Y = 0)P(X = 0) + P_{X\neq 0}(Y = 0)P(X \neq 0)$$

Supposons $[X = 0]$ réalisé. Alors $Y = 0$, si bien que $P_{X=0}(Y = 0) = 1$. Supposons $[X \neq 0]$ réalisé. Alors Y suit une loi uniforme sur $[\![0\,;\,n]\!]$ si bien que $P_{X\neq 0}(Y = 0) = 1/(n + 1)$. De plus, $X \sim B(n, p)$ donc $P(X = 0) = (1 - p)^n$ et $P(X \neq 0) = 1 - (1 - p)^n$. Finalement,

$$P(Y=0) = (1-p)^n + \frac{1-(1-p)^n}{n+1}$$

Supposons à présent que $k \neq 0$. Alors $P_{X=0}(Y=k) = 0$ et $P_{X\neq 0}(Y=k) = 1/(n+1)$ si bien que

$$P(Y=k) = \frac{1-(1-p)^n}{n+1}$$

On peut vérifier pour se rassurer que $P(Y=0) + \sum_{k=1}^n P(Y=k) = 1$. De plus :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^n kP(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^n kP(Y=k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k(1-(1-p)^n)}{n+1} \\ &= \frac{1-(1-p)^n}{n+1} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(1-(1-p)^n)}{2} \end{aligned}$$

Exercice 19 : ✪✪ Un individu gravit un escalier et dispose d'une pièce équilibrée. Avant chaque pas, il lance la pièce. Il monte une marche s'il obtient « Pile » et monte deux marches d'un coup s'il obtient « Face ». Déterminer le nombre moyen de marches gravies au bout de n pas.

Correction : Notons X le nombre de marches montées au bout de n pas. Notons A le nombre de Pile obtenus en n essais. Alors A compte le nombre de succès (obtenir Pile, proba $1/2$) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer une pièce). Par conséquent, $A \sim B(n, 1/2)$ donc $E(A) = n/2$. Or, on monte une marche si on obtient Pile et 2 si on obtient Face : X est donc égal au nombre de Pile multiplié par 1 plus au nombre de Face multiplié par 2 c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} X &= 1 \times A + (n-A) \times 2 \\ &= 2n - A \end{aligned}$$

Par linéarité de l'espérance, $E(X) = 2n - E(A) = 3n/2$: c'est intuitif ! La pièce étant équilibrée, la moyenne sera au milieu entre le pire des cas (monter une marche à chaque fois) et le meilleur des cas (monter deux marches à chaque fois).

Exercice 20 - Convergence en loi de la loi binomiale vers une loi de Poisson : ✪✪ Soient $\lambda > 0$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]\,0\,;1\,[$ telle que $p_n \sim \lambda/n$. Pour tout n, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $B(n, p_n)$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

Correction : On se donne donc $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$, possible car on cherche la limite de la suite $(P(X_n = k))_n$.

$$\begin{aligned} P(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Or,

- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}$ (exo).
- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (ici, la puissance est fixe).

- Enfin,

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!}\\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\\ &\sim \frac{n^k}{k!}\end{aligned}$$

(l'équivalent étant pris quand $n \to +\infty$). Finalement,

$$P(X_n = k) \sim \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} e^{-\lambda}$$

c'est-à-dire que $P(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^k}{k!} = P(X = k)$.

Exercice 21 : ✪✪

1. Prouver de deux façons différentes la « formule des capitaines » :

$$\forall i \in [\![0 \,;\, n]\!], \forall k \leq i, \binom{i}{k} \times \binom{n}{i} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{i-k}$$

2. On lance n fois un dé équilibré et on lance une pièce équilibrée autant de fois qu'on a obtenu 6 avec le dé. Donner la loi du nombre de Face obtenus.
3. **Remake :** On tire au hasard un entier X entre 1 et n puis un entier Y entre 1 et X. Donner la loi de Y et son espérance.

Correction :

1. On le prouve très facilement à l'aide de l'expression factorielle des coefficients binomiaux, ou à l'aide d'un raisonnement combinatoire : on forme une équipe de i joueurs dans une classe de n joueurs, et dans cette équipe de i joueurs, on en sélectionne k (les capitaines, si l'on veut). On peut soit d'abord choisir les joueurs puis les capitaines :

$$\binom{n}{i} \times \binom{i}{k}$$

choix possibles, soit d'abord choisir les capitaines puis les membres restants de l'équipe :

$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{i-k}$$

choix possibles.

2. Notons S le nombre de 6 obtenus et F le nombre de Face obtenus. S est le nombre de succès (obtenir 6, proba $1/6$) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer un dé). Par conséquent, $S \sim B(n, 1/6)$. Attention, on ne peut pas dire la même chose pour F c'est-à-dire qu'on ne peut pas dire que $F \sim B(S, 1/6)$ car S est aléatoire ! Cependant, si on connaît la valeur de S, alors c'est très simple : on pense donc à appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à S i.e. $([S = i])_{i \in [\![0 \,;\, n]\!]}$. On sait que $F(\Omega) = [\![0 \,;\, n]\!]$ et si $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$:

$$P(F = k) = \sum_{i=0}^{n} P_{S=i}(F = k) \times P(S = i)$$

Soit $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$. Supposons $[S = i]$ réalisé. Alors on lance i fois la pièce : F compte alors le nombre de succès (obtenir Face, proba $1/2$) obtenus lors de i répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer une pièce) donc $F \sim B(i, 1/2)$ (attention, ceci n'est valable que parce qu'on a supposé $[X = i]$ réalisé : on a donné la loi conditionnelle de F sachant l'événement $[X = i]$ réalisé). Par conséquent, si $k > i$, $P_{S=i}(F = k) = 0$ et si $k \leq i$:

$$P_{S=i}(F = k) = \binom{i}{k} \frac{1}{2^k}$$

Dès lors, la somme ci-dessus va en fait de $i = k$ à n (les termes pour $i < k$ sont nuls) et :

$$P(F = k) \quad = \quad \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \frac{1}{2^k} \times \binom{n}{i} \frac{1}{6^i} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{n-i}$$

Or, d'après la formule des capitaines :

$$\forall k \leq i, \binom{i}{k} \times \binom{n}{i} = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{i-k}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
P(F=k) &= \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{6^i} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-i} \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{i-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{1}{6^{j+k}} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-j} \\
&= \binom{n}{k} \frac{1}{12^k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{1}{6^j} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k-j} \\
&= \binom{n}{k} \frac{1}{12^k} \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} \frac{1}{12^k}
\end{aligned}$$

Finalement, $F \sim B(n, 1/12)$.

3. $Y(\Omega) = [\![1\,; n]\!]$. Idem, X suit une loi uniforme mais ce n'est a priori pas le cas de Y : ne pas dire que Y suit une loi uniforme sur $[\![1\,; X]\!]$ puisque X est aléatoire ! Comme précédemment, appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $([X=i])_{i \in [\![1\,; n]\!]}$. Soit $k \in [\![1\,; n]\!]$:

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P_{X=i}(Y=k) \times P(X=i)$$

De même, si on suppose $[X=i]$ réalisé, alors Y suit une loi uniforme sur $[\![1\,; i]\!]$ (encore une loi conditionnelle). Par conséquent, si $k > i$, alors $P_{X=i}(Y=k) = 0$ et si $k \leq i$, cette proba vaut $1/i$. On en déduit que cette somme va de $i = k$ à n et :

$$P(Y=k) \quad = \quad \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{i} \times \frac{1}{n}$$

et on ne peut pas faire mieux ! En particulier, Y ne suit pas une loi uniforme !

Exercice 22 : ✪✪ Soit $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n$ une suite croissante d'événements telle que :

$$\forall i \in [\![0\,; n]\!], P(A_i) = \frac{i}{n}$$

On note N la variable aléatoire de comptage associée à cette suite, c'est-à-dire :

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \mathbb{N} \\ & & \\ \omega & \mapsto & \operatorname{card}\left(\{i \in [\![1\,; n]\!] \,|\, \omega \in A_i\}\right) \end{array} \right.$$

Donner la loi de N.

Correction : Dans le pire des cas, une éventualité ω n'appartient à aucun A_i et alors $N(\omega) = 0$, et dans le meilleur des cas, ω appartient à tous les A_i, et alors $N(\omega) = n$. Tous les cas intermédiaires sont possibles : $N(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$. Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$.

$$P(N=k) = P(\{\omega \,|\, \omega \text{ appartient à } k \text{ ensembles } A_i\})$$

Or, la suite est croissante donc ω appartient à k ensembles A_i si et seulement si $\omega \in A_{n-k+1} \backslash A_{n-k}$. En effet, si une éventualité appartient à un événement A_i, il appartient à tous les A_i suivants. Par conséquent, ω appartient à k événements A_i si et seulement s'il appartient à $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{n-k+1}$ et n'appartient pas aux autres. Cependant, ω appartient à A_{n-k+1} si et seulement s'il appartient à tous les suivants, d'où le résultat. Finalement :

$$P(N=k)=P(A_{n-k+1}\backslash A_{n-k})$$

Or, $A_{n-k}\subset A_{n-k+1}$ si bien que :

$$\begin{aligned} P(N=k) &= P(A_{n-k+1})-P(A_{n-k}) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

mais ceci n'est valable que si $k\geq 1$ car A_{n-k+1} n'est pas défini si $k=0$: on a donc $P(N=0)=0$ puisque $P(N=0)=P(\omega\notin\overline{A_n})=1-P(A_n)=0$. Finalement, N suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$.

Exercice 23 : ✪✪ Déterminer une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, chacune prenant deux valeurs, telle que, pour tout $\varepsilon>0, P(|X_n|\geq\varepsilon)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ mais telle que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1 et la suite $(V(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers $+\infty$.

Correction : On veut que la variable aléatoire se rapproche de 0, que la moyenne pondérée se rapproche de 1 mais que la « distance à l'espérance » tende vers $+\infty$. On pense donc à une variable aléatoire prenant des valeurs tendant vers 0 avec des probas tendant vers 1, et des valeurs très grandes (pour avoir une moyenne qui tend vers 1 et une variance qui explose) avec des probas très petites, qui tendent vers 0. Plus précisément, si $n\geq 1$, on définit X_n une v.a. définie par :

$$P\left(X_n=\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}\qquad\text{et}\qquad P(X_n=n)=\frac{1}{n}$$

La première condition est remplie : pour tout $n\geq 1$, X_n ne prend que deux valeurs. Ensuite,

$$E(X_n)=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E\left({X_n}^2\right) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{n}\right)+n^2\times\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}+n \end{aligned}$$

si bien que $V(X_n)=E\left({X_n}^2\right)-E(X_n)^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

Soit enfin $\varepsilon>0$. On cherche $P(X_n\geq\varepsilon)$. Puisque $\dfrac{1}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et qu'on cherche la limite en $+\infty$, on peut supposer que $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$. Ainsi, $P(X_n\geq\varepsilon)=P(X_n=n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$: la suite (X_n) convient.

Exercice 24 : ✪✪ L'avion A et l'avion B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins (au sens strict) de la moitié de ses moteurs tombe en panne. En fonction de p, quel avion choisissez-vous ?

Correction : Notons X (respectivement Y) la variable aléatoire comptant le nombre de moteurs en panne de l'avion A (respectivement l'avion B). Alors X compte le nombre de « succès » (tomber en panne) lors de 4 (il y a quatre moteurs) répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire où la proba de « succès » est $p\in\,]\,0\,;1\,[$. Ainsi, $X\sim B(4,p)$. La probabilité que A tombe en panne est $P([X=0]\cup[X=1])$. Les deux événements étant incompatibles,

$$\begin{aligned} P([X=0]\cup[X=1]) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= \binom{4}{0}p^0(1-p)^4+\binom{4}{1}p^1(1-p)^3 \\ &= (1-p)^4+4p(1-p)^3 \end{aligned}$$

De même, la probabilité que l'avion B tombe en panne vaut $P(Y=0)=(1-p)^2$. De plus,

$$\begin{aligned}
P([X=0]\cup[X=1])\leq P(Y=0) &\iff (1-p)^4+4p(1-p)^3\leq(1-p)^2\\
&\iff (1-p)^2+4p(1-p)\leq 1\\
&\iff 1-2p+p^2+4p-4p^2\leq 1\\
&\iff 3p^2-2p\geq 0\\
&\iff p(3p-2)\geq 0\\
&\iff p\in\left[0\,;\frac{2}{3}\right]
\end{aligned}$$

et puisque $p>0$ par hypothèse, alors la proba que l'avion A tombe en panne est inférieure à celle que l'avion B tombe en panne, donc personnellement je choisis l'avion A si la proba qu'un moteur tombe en panne appartient à $\left]0\,;\frac{2}{3}\right]$ (ce que j'espère) et je prends l'avion B si $p>2/3$.

Exercice 25 : ✪✪ Deux joueurs jouent indépendamment l'un de l'autre n parties de pile ou face. Quelle est la probabilité qu'ils obtiennent chacun le même nombre de face ? On rappelle (cf. chapitre 17 et exercice 52 du chapitre 14) que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Correction : Notons X_1 le nombre de Face du premier joueur, et X_2 le nombre de Face du second joueur. On cherche donc $P(X_1=X_2)$. X_1 compte le nombre de succès (obtenir Face, proba $1/2$) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer une pièce) donc $X_1\sim B(n,1/2)$. Par symétrie des rôles, $X_2\sim B(n,1/2)$. Les événements $[X_1=i]_{i\in[\![0\,;n]\!]}$ formant un système complet (le système complet associé à la variable aléatoire X_1), d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(X_1=X_2) &= \sum_{k=0}^{n}P_{X_1=k}(X_1=X_2)P(X_1=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}P_{X_1=k}(X_2=k)P(X_1=k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}P(X_2=k)P(X_1=k)
\end{aligned}$$

par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2. Dès lors :

$$\begin{aligned}
P(X_1=X_2) &= \sum_{k=0}^{n}P(X_1=k)^2\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\frac{1}{2^{2n}}
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$$

Finalement, la probabilité recherchée est

$$P(X_1=X_2)=\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

À l'aide de la formule de Stirling, on trouve (mais ce n'était pas demandé) que cette probabilité est équivalente à $1/\sqrt{n\pi}$ et donc tend vers 0 quand $n\to+\infty$ ce qui est intuitif.

Exercice 26 : ✪✪ Un joueur lance deux pièces supposées équilibrées. S'il n'obtient aucun pile, son gain est nul et la partie s'arrête. Sinon, il lance la pièce autant de fois qu'il a obtenu pile à la première phase du jeu. Son gain est alors le nombre de pile obtenus à la seconde étape du jeu.

1. Quelle est la probabilité que le gain soit nul ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu deux piles à la première étape sachant que son gain vaut 1 ?

Correction : Notons N le nombre de Pile à la première étape du jeu, G le gain final.

1. On cherche donc $P(G=0)$. S peut être égal à $0,1,2$ donc $[S=0],[S=1]$ et $[S=2]$ forment un SCE (plus précisément, c'est le SCE associé à la variable aléatoire S). D'après la formule des probas totales :

$$P(G=0)=P_{S=0}(G=0)P(S=0)+P_{S=1}(G=0)P(S=1)+P_{S=2}(G=0)P(S=2)$$

Tout d'abord, pour donner la loi de S, on modélise la première partie de l'expérience de la façon suivante : on se place sur $\Omega=\{P;F\}^2$ muni de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité, si bien que $[S=0]=\{(F,F)\}$, de proba $1/4$, $[S=1]=\{(P,F);(F,P)\}$ de proba $1/2$, et $[S=2]=\{(P,P)\}$ de proba $1/4$. Donnons à présent les probas conditionnelles.

Si $S=0$, le jeu s'arrête et le gain est nul donc $P_{[S=0]}(G=0)=1$. Si $S=1$, alors on relance la pièce une fois et le gain est le nombre de Pile lors de cette étape : on a donc $P_{[S=0]}(G=1)=1/2$. De même, si $S=2$, alors on relance la pièce deux fois et le gain est le nombre de Pile lors de cette étape : on a donc $P_{[S=0]}(G=2)=1/4$ (de même que ci-dessus, les possibilités équiprobables sont $(F,F),(F,P),(P,F),(P,P)$). Finalement :

$$\begin{aligned} P(G=0) &= 1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

2. On cherche donc $P_{[G=1]}(S=2)$. D'après la formule de Bayes,

$$P_{[G=1]}(S=2)=\frac{P_{[S=2]}(G=1)\times P(S=2)}{P(G=1)}$$

Or, on sait déjà que $P(S=2)=1/4$, et on trouve de même que dans la question précédente que $P_{[S=2]}(G=1)=1/2$ (on lance deux fois une pièce, il y a deux possibilités sur quatre pour avoir un seul Pile) et que (à l'aide de la formule des probas totales) $P(G=1)=3/8$. On trouve donc finalement $P_{[G=1]}(S=2)=1/3$.

Exercice 27 - La loi hypergéométrique : ✪✪

1. On dispose d'une urne contenant N boules. Parmi ces N boules, m portent une marque, et on pose $p=m/N$. On effectue n tirages sans remise (avec $n\leq m$ et $n\leq N-m$), et on définit X la variable aléatoire donnant le nombre de boules marquées parmi les n tirées. Donner la loi de X en fonction de p,N et n.
2. Pour tout $k\in [\![0\,;\,n]\!]$, donner la limite de $P(X=k)$ quand $N\to+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

Correction :

1. On suppose $m\geq n$ et $N-m\geq n$. On peut modéliser cette expérience de la façon suivante : on numérote les boules de 1 à N et on suppose que les boules de 1 à m portent une marque. Puisqu'on tire n boules sans remise et que l'ordre ne compte pas, on note Ω l'ensemble des combinaisons ou des parties à n éléments de $[\![1\,;\,N]\!]$, qu'on munit de $\mathscr{P}(\Omega)$ et de l'équiprobabilité. On a donc

$$\mathrm{card}(\Omega)=\binom{N}{n}$$

Or, $X(\Omega)=[\![0\,;\,n]\!]$. Si $k\in[\![0\,;\,n]\!]$, une combinaison de $[X=k]$ est entièrement déterminée par les numéros des k boules marquées tirées, $\binom{m}{k}$ choix possibles, et par les numéros des $n-k$ boules non marquées, $\binom{N-m}{n-k}$ choix possibles. Par principe multiplicatif, on trouve finalement :

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

2. Soit $k\in[\![0\,;\,n]\!]$.

$$P(X=k)=\frac{\dbinom{m}{k}\times\dbinom{N-m}{n-k}}{\dbinom{N}{n}}$$

Rappelons que, quand $b \to +\infty$ et quand a est fixe, $\binom{b}{a} \sim \dfrac{b^a}{a!}$ (cf. exercice 2 du chapitre 24). Attention, n et k sont fixes mais $m = Np \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$. Pour éviter toute ambiguïté, notons $m = Np$. Ainsi, quand $N \to +\infty$:

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\dbinom{Np}{k}\times\dbinom{N-Np}{n-k}}{\dbinom{N}{n}} \\ &\sim \frac{\dfrac{N^kp^k}{k!}\times\dfrac{N^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}{\dfrac{N^n}{n!}} \\ &\sim \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $P(X=k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = P(Y=k)$ où $Y \sim B(n,k)$. C'est intuitif ! Intuitivement, il est clair que si le nombre de boules N est très grand par rapport au nombre de boules tirées m, cela ne change pas grand chose que les tirages se fassent avec remise ou non, et on vient de prouver que lorsque N est très grand, X se comporte « en gros comme une loi binomiale » i.e. comme une v.a. avec remise.

Exercice 28 - Fonctions génératrices : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$. On appelle fonction génératrice de X (respectivement de Y) notée G_X (respectivement G_Y) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G_X(t) = E\left(t^X\right)$ (respectivement $G_Y(t) = E\left(t^Y\right)$).

1. Montrer que G_X est une fonction polynôme et exprimer ses coefficients à l'aide des probabilités $P(X=k)$, pour $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. On a bien sûr une propriété analogue pour G_Y (il n'est pas demandé de le prouver).
2. À l'aide de la question précédente, expliciter G_X dans chacun des cas suivants :
   (a) X suit une loi certaine égale à $k_0 \in [\![0\,;\, n]\!]$.
   (b) $X \sim B(p)$ (avec $p \in]\,0\,;1\,[$).
   (c) $X \sim U([\![0\,;\, n]\!])$.
   (d) $X \sim B(n,p)$ (avec toujours $p \in]\,0\,;1\,[$). Le résultat final ne devra plus comporter de symbole $\sum$.
3. On revient au cas général (ie X est une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$). Montrer les égalités suivantes :
   (a) $G_X(1) = 1$.
   (b) $E(X) = {G_X}'(1)$.
   (c) $E(X(X-1)) = {G_X}''(1)$.
   (d) $V(X) = {G_X}''(1) + {G_X}'(1) - \left[{G_X}'(1)\right]^2$.
4. Montrer que X et Y ont même loi si et seulement si elles ont la même fonction génératrice.

Correction :

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert (puisque X est à valeurs dans $[\![0\,;\, n]\!]$),
$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} P(X=k)t^k$$
c'est-à-dire que G_X est une fonction polynôme, et ses coefficients sont les $P(X=k)$.
2. (a) Dans cette question et les trois suivantes, on utilise la question précédente à l'envi (ce qui évite d'appliquer à chaque fois le théorème de transfert alors qu'on vient de le faire). Si X suit une loi certaine égale à k_0 alors $P(X=k_0) = 1$ et les autres probas sont nulles, si bien que $G_X(t) = t^{k_0}$.
   (b) Par hypothèse, $P(X=0) = 1-p$ et $P(X=1) = p$ donc $G_X(t) = (1-p) + p \times t$.
   (c) Attention, $[\![0\,;\, n]\!]$ comporte $n+1$ éléments, ce qui implique que
$$G_X(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t^k$$

(d) Toujours d'après la question 1,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Finalement, d'après la formule du binôme de Newton, $G_X(t) = (p \times t + 1 - p)^n$.

3. (a) D'après l'expression de G_X donnée à la question 1,

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k) = 1$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. G_X étant une fonction polynôme, elle est dérivable et

$$G_X{}'(t) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k)t^{k-1}$$

En effet, le terme d'indice $k = 0$ est nul. En évaluant en 1, il vient

$$G_X{}'(1) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = E(X)$$

(c) En dérivant deux fois G_X il vient

$$G_X{}''(t) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k)t^{k-2}$$

En effet, le terme d'indice $k = 1$ est également nul. En évaluant en 1, il vient

$$G_X{}''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)P(X = k)$$

et cette somme est bien égale à $E(X(X-1))$ d'après le théorème de transfert.

(d) On a $E(X(X-1)) = E\left(X^2 - X\right) = E\left(X^2\right) - E(X)$ par linéarité de l'espérance, par conséquent

$$\begin{aligned} E\left(X^2\right) &= E(X(X-1)) + E(X) \\ &= G_X{}''(1) + G_X{}'(1) \end{aligned}$$

d'après les questions précédentes. D'après la formule de König-Huygens et en appliquant encore la fonction 3.(b) on obtient le résultat voulu

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = G_X{}''(1) + G_X{}'(1) - \left[G_X{}'(1)\right]^2$$

4. Deux fonctions polynômes sont égales si et seulement si ils ont les mêmes coefficients (car alors la différence est nulle donc a tous ses coefficients nuls) donc $G_X = G_Y$ si et seulement si $P(X = k) = P(Y = k)$ pour tout k donc si et seulement si X et Y ont même loi : on dit que a fonction génératrice caractérise la loi.

Exercice 29 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard une boule dans l'urne. Si le numéro de la boule tirée est $k \in [\![1 \,; n]\!]$, on la remet et on enlève les boules numérotées de $k+1$ à n (bien sûr, on n'enlève rien si $k = n$). On tire une nouvelle boule. On note Y le numéro de la boule obtenue à l'issue du premier tirage et X le numéro de la boule obtenue à l'issue du deuxième tirage.

1. Déterminer la loi de Y puis celle de X. On donnera des résultats exprimés en terme de sommes et on ne cherchera pas à les calculer (il n'y a pas de formule plus simple).
2. Calculer l'espérance et la variance de X. Cette fois on présentera les résultats sous la forme de polynômes en la variable n.

Correction :

1. Y suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$. $X(\Omega) = [\![1\,;\,n]\!]$: dans le meilleur des cas, $Y = n$ et on ne retire rien, et alors X peut prendre toutes les valeurs comprises entre 1 et n, et dans le pire des cas, $Y = 1$ et on retire toutes les boules sauf la boule 1 si bien que $X = 1$. Tous les cas intermédiaires sont possibles. Soit donc $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à Y i.e. $([Y = i])_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$:

$$P(X = k) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} P_{Y=i}(X = k)P(Y = i)$$

Supposons $[Y = i]$ réalisé : alors l'urne contient les numéros de 1 jusque i (on a retiré les boules numérotées de $i + 1$ à n). Dès lors, $P_{Y=i}[X = k] = 0$ si $k > i$ si bien que la somme va en fait de $i = k$ à n, et $P_{Y=i}[X = k] = 1/i$ si $k \leq i$. Par conséquent, et en se souvenant que Y suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$:

$$P(X = k) \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i}$$

2. Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\frac{k}{n} \times \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i \times n}\sum_{k=1}^{i} k \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i \times n} \times \frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(i+1) \\
&= \frac{1}{2n}\left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right)
\end{aligned}$$

Finalement, $E(X) = \dfrac{n+1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{n+3}{4}$. D'après la formule de transfert, on trouve de même :

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i \times n}\sum_{k=1}^{i} k^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i \times n} \times \frac{i(i+1)(2i+1)}{6} \\
&= \frac{1}{6n}\sum_{i=1}^{n}(i+1)(2i+1) \\
&= \frac{1}{6n}\sum_{i=1}^{n}(2i^2 + 3i + 1) \\
&= \frac{1}{6n}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{3n(n+1)}{2} + n\right)
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure d'après la formule de König-Huygens.

Exercice 30 - Une urne de Pòlya : ✪✪ Une urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule de l'urne de la façon suivante : après chaque tirage on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute c boules de la même couleur ($c \in \mathbb{N}$ fixé). Soit X_k la variable aléatoire égale à 1 si la k^e boule tirée est rouge et 0 si elle est blanche.

1. Donner la loi de X_1 et de X_2.
2. On note S_n le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages.
   (a) Calculer $P_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$.
   (b) En déduire que
   $$P(X_{n+1}=1) = \frac{r+cE(S_n)}{r+b+nc}$$
   (c) Donner la loi de X_n pour tout n.

Correction :

1. • Puisque l'urne contient r boules rouges et b boules blanches et puisque le tirage se fait uniformément, on a $P(X_1=1) = \dfrac{r}{r+b}$. Ainsi $X_1 \sim B\left(\dfrac{r}{r+b}\right)$.
   • D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet $([X_1=0],[X_1=1])$ d'événements :
   $$P(X_2=1) = P_{[X_1=1]}(X_2=1)P(X_1=1) + P_{[X_2=0]}(X_2=1)P(X_1=0).$$
   Si on a pioché une boule rouge au premier tirage alors on se retrouve avec $r+c$ boules rouges et b boules blanches avant le deuxième tirage si bien que $P_{[X_1=1]}(X_2=1)P([X_1=1]) = \dfrac{r+c}{r+c+b}$. Si on a pioché une boule blanche au premier tirage alors on se retrouve avec r boules rouges et $b+c$ boules blanches avant le deuxième tirage si bien que $P_{[X_1=0]}(X_2=1) = \dfrac{r}{r+b+c}$. Ainsi
   $$P(X_2=1) = \frac{r+c}{r+b+c} \times \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+c} \times \frac{b}{r+b} = \frac{r}{r+b}.$$
   On a donc $X_2 \sim B\left(\dfrac{r}{r+b}\right)$.

   On remarque que X_1 et X_2 ont la même loi.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Si on a tiré k boules rouges lors des n premiers tirages, alors l'urne contient $r+kc$ boules rouges et $r+b+nc$ en tout. Ainsi
   $$P_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1) = \frac{r+kc}{r+nc}.$$
   (b) En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à S_n, on obtient
   $$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \sum_{k=0}^{n} P_{[S_n=k]}(X_{n+1}=1)P(S_n=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{r+kc}{r+b+nc}P([S_n=k]) \\ &= \frac{1}{r+b+nc}\left(\sum_{k=0}^{n} P(S_n=k) + c\sum_{k=0}^{n} kP(S_n=k)\right) = \frac{r+cE(S_n)}{r+b+nc}. \end{aligned}$$
   (c) On a $S_{n+1}-S_n = 1$ si $X_{n+1}=1$ et 0 si $X_{n+1}=0$. Il s'ensuit que $E(S_{n+1}-S_n) = P(X_{n+1}=1)$ et donc, par linéarité,
   $$E(S_{n+1}) = E(S_n) + P(X_{n+1}=1).$$
3. On a donc
   $$\begin{aligned} P(X_{n+2}=1) = \frac{r+cE(S_{n+1})}{r+b+(n+1)c} &= \frac{r+cE(S_n)+cP(X_n=1)}{r+b+(n+1)c} \\ &= \frac{r+(r+b+cn)P(X_{n+1}=1) - r + cP(X_n=1)}{r+b+(n+1)c} = P(X_{n+1}=1). \end{aligned}$$
   Ainsi la suite $(P(X_{n+1}=1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à ¶$(X_1=1) = \dfrac{r_0}{r_0+b_0}$. On a donc $X_n \sim B\left(\dfrac{r}{r+b}\right)$. On remarque que la probabilité de piocher une boule rouge est la même à chaque étape. En particulier elle ne dépend pas du nombre c de boules ajoutées.

Exercice 31 : ✪✪ Soient $n \geq 1$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Soit X la variable aléatoire à valeurs dans $[\![0\,; n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![0\,; n]\!] \qquad P(X=k) = \frac{\beta}{k+1} \times \binom{n}{k}$$

1. Donner la valeur de β.
2. Calculer $E(X+1)$ et en déduire l'espérance de X.
3. Calculer $E(X(X+1))$ et en déduire la variance de X.

Correction :

1.

$$\begin{aligned} \beta \text{ convient} \quad & \iff \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{\beta}{k+1}\binom{n}{k} = 1 \\ & \iff \quad \beta = \frac{1}{S_n} \end{aligned}$$

où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$. On prouverait comme dans l'exercice 41 du chapitre 3 que $S_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ donc l'unique valeur de β qui convient est $\beta = \dfrac{n+1}{2^{n+1}-1}$.

2. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X+1) &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)P(X=k) \\ &= \beta \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\ &= \beta 2^n \end{aligned}$$

Or, par linéarité de l'espérance, $E(X+1) = E(X) + 1$ donc $E(X) = \beta 2^n - 1$.

3. Toujours d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(X(X+1)) &= \sum_{k=0}^{n} k(k+1)P(X=k) \\ &= \beta \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\ &= \beta \times n2^{n-1} \end{aligned}$$

comme dans l'exercice 41 du chapitre 4. Toujours par linéarité de l'espérance, $E(X(X+1)) = E(X^2) + E(X)$ donc $E(X^2) = E(X(X+1)) - E(X) = \beta \times n2^{n-1} - \beta 2^n + 1$ ce qui permet de conclure d'après la formule de König-Huygens.

Exercice 32 : ✪✪ Un candidat n'ayant absolument pas révisé répond au pifomètre à un QCM comportant 20 questions et k réponses possibles pour chaque question, une seule étant correcte. Le candidat obtient un point par bonne réponse et 0 pour une mauvaise.

1. Donner la loi du nombre de points obtenus.
2. Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, le professeur, dans sa grande mansuétude, lui permet de choisir à nouveau une des $k-1$ réponses restantes, et le candidat obtient $1/2$ point pour chaque nouvelle bonne réponse. On note Y_2 le nombre de bonnes réponses lors du second passage.

   (a) Soit $j \in \mathbb{N}$. Donner la probabilité que l'élève donne j bonnes réponses lors du deuxième passage, sachant qu'il en a donné i lors du premier.

   (b) Si $0 \leq j \leq 20 - i$, montrer que

$$\binom{20}{i}\binom{20-i}{j} = \binom{20}{j}\binom{20-j}{i}$$

(c) En déduire que Y_2 suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

(d) Calculer l'espérance du nombre de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat puisse espérer avoir une note supérieure ou égale à 5.

Correction :

1. Notons N le nombre de points obtenus. N est le nombre de succès (donner une bonne réponse, proba $1/k$) obtenus lors de 20 répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (répondre à une question) donc $N \sim B(20, 1/k)$.

2. (a) Supposons donc $[N = i]$ réalisé. On montre de même que $Y_2 \sim B(20 - i, 1/(k-1))$ car on cherche parmi les $k - 1$ réponses restantes (loi conditionnelle de Y_2 sachant l'événement $[N = i]$ réalisé) donc, si $j > 20 - i$, $P_{N=i}(Y_j = j) = 0$ et si $j \leq 20 - i$,

$$P_{N=i}(Y_2 = j) = \binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j}$$

(b) Évident avec des factorielles, mais on peut aussi utiliser un raisonnement combinatoire comme dans l'exercice 21.

(c) $Y_2(\Omega) = [\![0\,;20]\!]$: en effet, si le candidat a tout bon au premier essai, alors $Y_2 = 0$ mais s'il a tout faux et s'il a beaucoup de chance au deuxième essai, alors on peut avoir $Y_2 = 20$, et tous les cas intermédiaires sont possibles. Soit $j \in [\![0\,;20]\!]$. En appliquant la formule des probas totales avec le système complet d'événements $([N = i])_{i \in [\![0\,;20]\!]}$ i.e. le système complet d'événements associé à la variable aléatoire N :

$$P(Y_2 = j) = \sum_{i=0}^{20} P_{N=i}(Y_2 = j)P(N = i)$$

Or, comme on l'a vu, le terme sommé est nul si $j > 20 - i$ donc si $i > 20 - j$: la somme va donc de 0 à $20 - j$:

$$\begin{aligned}
P(Y_2 = j) &= \sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-i}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j} \times \binom{20}{i}\left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1-\frac{1}{k}\right)^{20-i} \\
&= \sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-j}{i}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j} \times \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1-\frac{1}{k}\right)^{20-i} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-j}{i}\left(1-\frac{1}{k-1}\right)^{20-j-i} \times \left(\frac{1}{k}\right)^i\left(1-\frac{1}{k}\right)^{20-i} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j\sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-j}{i}\left(\frac{k-2}{k-1}\right)^{20-j-i} \times \left(\frac{1}{k}\right)^i\left(\frac{k-1}{k}\right)^{20-i} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k-1}\right)^j(k-1)^j\left(\frac{1}{k}\right)^{20}\sum_{i=0}^{20-j}\binom{20-j}{i}(k-2)^{20-j-i} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k}\right)^{20}(k-2+1)^{20-j} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k}\right)^{20}(k-1)^{20-j} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k}\right)^j\left(\frac{k-1}{k}\right)^{20-j} \\
&= \binom{20}{j}\left(\frac{1}{k}\right)^j\left(1-\frac{1}{k}\right)^{20-j}
\end{aligned}$$

Finalement, $Y_2 \sim B(20, 1/k)$.

(d) Le nombre de points obtenus est donc $N + Y_2$: par linéarité de l'espérance, l'espérance du nombre de points obtenus est $E(N) + E(Y_2) = 20/k + 20/k = 40/k$. Cette espérance est supérieure ou égale à 5 si et seulement si $40/k \geq 5$ si et seulement si $k \leq 8$.

Exercice 33 : ✪✪✪ Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules (avec $n \in [\![1\,;\, N]\!]$). On note X (respectivement Y) le plus petit (respectivement le plus grand) des nombres obtenus.

1. On considère dans cette question que le tirage s'effectue avec remise.
   (a) Soit $x \in [\![1\,;\, N]\!]$. Calculer $P(X \geq x)$. En déduire la loi de X.
   (b) Soit $y \in [\![1\,;\, N]\!]$. Calculer $P(Y \leq y)$. En déduire la loi de Y.
2. Mêmes questions en supposant que le tirage s'effectue sans remise.

Correction : Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, notons N_i le numéro tiré au i-ème tirage.

1. (a) Le minimum est supérieur ou égal à x si et seulement si tous les numéros tirés sont supérieurs ou égaux à x. Dès lors,

$$P(X \geq x) = P([N_1 \geq x] \cap \cdots \cap [N_n \geq x])$$

Les tirages se font avec remise donc les événements sont indépendants :

$$P(X \geq x) = P(N_1 \geq x) \times \cdots \times P(N_n \geq x)$$

Toujours puisqu'il y a remise, toutes les probas $P(N_i \geq x)$ sont égales à $\dfrac{N-x+1}{N}$ (proba de tirer un des numéros $x, x+1, \dots, N$). Par conséquent,

$$P(X \geq x) = \left(\frac{N-x+1}{N}\right)^n$$

On sait que $X(\Omega) = [\![1\,;\, N]\!]$. Si $k \in [\![1\,;\, N]\!]$, $P(X = k) = P([X \geq k] \backslash [X \geq k+1]) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$ puisque $[X \geq k+1] \subset [X \geq k]$ donc, d'après ce qui précède,

$$P(X = k) = \left(\frac{N-k+1}{N}\right)^n - \left(\frac{N-k}{N}\right)^n$$

(b) De même, le maximum est inférieur à y si et seulement si tous les numéros tirés sont inférieurs ou égaux à y donc $P(Y \leq y) = P([N_1 \leq y] \cap \cdots \cap [N_n \leq y])$. On trouve de même que $P(Y \leq y) = \left(\dfrac{y}{N}\right)^n$ puis que, pour tout $k \in [\![1\,;\, N]\!]$, $P(Y = k) = \left(\dfrac{y}{N}\right)^n - \left(\dfrac{y-1}{N}\right)^n$.

2. Supposons donc que le tirage s'effectue sans remise : les événements $[N_i \geq x]$ ne sont plus indépendants. De plus, si $N - x + 1 < n$, $P(X \geq x) = 0$ car on ne peut pas tirer que des boules supérieures ou égales à k, il n'y a pas assez de boules puisqu'on effectue des tirages sans remise. Supposons donc $n \leq N - x + 1$. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(X \geq x) = P(N_1 \geq x) \times P_{N_1 \geq x}(N_2 \geq x) \times P_{[N_1 \geq x] \cap [N_2 \geq x]}(N_3 \geq x) \times \cdots \times P_{[N_1 \geq x] \cap \cdots \cap [N_{n-1} \geq x]}(N_n \geq x)$$

On a toujours $P(N_1 \geq x) = \dfrac{N-x+1}{N}$. Supposons $[N_1 \geq x]$ réalisé. Alors l'urne contient $N-1$ boules dont $N - x$ supérieures ou égales à x donc $P_{N_1 \geq x}(N_2 \geq x) = \dfrac{N-x}{N-1}$, et ainsi de suite.

$$\begin{aligned} P(X \geq x) &= \frac{N-x+1}{N} \times \frac{N-x}{N-1} \times \frac{N-x-1}{N-2} \times \cdots \times \frac{N-x-n+2}{N-n+1} \\ &= \frac{(N-x+1)!}{(N-x-n+1)!} \times \frac{(N-n)!}{N!} \end{aligned}$$

Pour la loi de X, dans le meilleur des cas, on tire les n plus grands numéros à savoir $N, N-1, \dots, N-n+1$ donc $X \leq N - n + 1$. On a donc $X(\Omega) = [\![1\,;\, N-n+1]\!]$. Si $k = N - n + 1$,

$$P(X = k) = P(X \geq k) = \frac{(N-k+1)!}{(N-k-n+1)!} \times \frac{(N-n)!}{N!}$$

Supposons à présent $k \leq N - n$. Alors $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$ si bien que

$$P(X = k) = \frac{(N-k+1)!}{(N-k-n+1)!} \times \frac{(N-n)!}{N!} - \frac{(N-k)!}{(N-k-n)!} \times \frac{(N-n)!}{N!}$$

Pour Y : les tirages s'effectuant sans remise, le plus grand numéro est supérieur ou égal à n donc $P(Y \leq y) = 0$ si $y \leq n-1$. Supposons donc $y \geq n$. On trouve de même :

$$\begin{aligned}
P(Y \leq y) &= P(N_1 \leq y) \times P_{N_1 \leq y}(N_2 \leq y) \times P_{[N_1 \leq y] \cap [N_2 \leq y]}(N_3 \leq y) \times \cdots \times P_{[N_1 \leq y] \cap \cdots \cap [N_{n-1} \leq y]}(N_n \leq y) \\
&= \frac{y}{N} \times \frac{y-1}{N-1} \times \frac{y-2}{N-2} \times \cdots \times \frac{y-n+1}{N-n+1} \\
&= \frac{y!}{(y-n)!}(N-n)!N!
\end{aligned}$$

De même, $Y(\Omega) = [\![n\,;\,N]\!]$. Si $k = n$ alors

$$P(Y = k) = P(Y \leq k) = \frac{n!(N-n)!}{N!}$$

et si $k \geq n+1$, $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$ si bien que

$$P(Y = k) = \frac{k!}{(k-n)!}(N-n)!N! - \frac{(k-1)!}{(k-1-n)!}(N-n)!N!$$

Exercice 34 : ✪✪✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, calculer $I_k = \displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, on pourra commencer par trouver une relation entre I_k et I_{k-1} pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$.
2. Pour p entier naturel non nul, on considère $p+1$ urnes notées $U_0, U_1, \ldots, U_p$. Dans chaque urne il y a p boules indiscernables au toucher telles que, pour tout $i \in [\![0\,;\,p]\!]$, l'urne numéro i contient i boules blanches, les autres boules étant noires. On choisit une urne au hasard et dans l'urne choisie, on effectue n tirages avec remise d'une boule ($n \in \mathbb{N}^*$). On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches ainsi obtenues.
   (a) Déterminer la loi de N_p.
   (b) Montrer que, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$,
   $$P(N_p = k) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \binom{n}{k} \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x$$
   et déduire la valeur de cette limite.

Correction :

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Faisons une IPP avec les fonctions $u : x \longmapsto x^k$ et $v : x \longmapsto -\dfrac{(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;1\,]$. On a $u' : x \longmapsto kx^{k-1}$ et $v' : x \longmapsto (1-x)^{n-k}$ donc

$$\begin{aligned}
I_k = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^k(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right]_0^1 - \int_0^1 kx^{k-1}\left(-\frac{(1-x)^{n-k+1}}{n-k+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 + \frac{k}{n-k+1}\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-(k-1)}\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{k}{n-k+1} I_{k-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$I_k = \frac{k}{n-k+1} I_{k-1} = \frac{k}{n-k+1}\,\frac{k-1}{n-k+2} I_{k-2} = \frac{k}{n-k+1}\,\frac{k-1}{n-k+2}\,\frac{k-2}{n-k+3} I_{k-3}.$$

Par récurrence immédiate,

$$I_k = \frac{k(k-1)(k-2)\ldots 1}{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\ldots n} I_0 = \frac{(n-k)!k!}{n!} I_0.$$

Enfin

$$I_0 = \int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = 0 + \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)}$.

2. (a) Pour tout $i \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$, notons A_i l'événement « choisir l'urne U_i ».

On a $N_p(\Omega) = \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$. Soit $k \in N_p(\Omega)$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(A_i)_{0\leq i\leq p}$:

$$P(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} P(A_i)P_{A_i}(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} P(A_i)P_{A_i}(N_p = k).$$

Pour tout $i \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$, sachant que A_i est réalisé, N_p compte le nombre de succès dans n expériences indépendantes (obtenir noir ou blanc) dont la probabilité de succès est $\dfrac{i}{p}$. Il s'ensuit que N_p suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{i}{p}$. Ainsi

$$P(N_p = k) = \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p+1}\binom{n}{k}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k}.$$

(b) Pour tout $k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$, on a

$$P(N_p = k) = \binom{n}{k}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{i}{p}\right)^k\left(1-\frac{i}{p}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} f\left(\frac{i}{p}\right),$$

avec $f : x \longmapsto x^k(1-x)^{n-k}$ continue sur $[0,1]$. Le théorème de convergence des sommes de Riemann entraîne que

$$P(N_p = k) \xrightarrow[p\to+\infty]{} \binom{n}{k}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

car cette intégrale est égale à $\dfrac{1}{\binom{n}{k}(n+1)}$, d'après la première question.

Exercice 35 - Mines MP 2021 : ✪✪✪ Soit $X \sim B(n,p)$. Montrer que $\max\{P(X_n = k)\,|\,k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket\} = P(X = x_n)$ où $x_n = \lceil np - q\rceil$, $q = 1-p$ et où, pour tout réel x, $\lceil x \rceil = \min\{k \in \mathbb{Z}\,|\,x \leq k\}$.

Correction : Je précise que cette question était donnée telle quelle à l'écrit. Donnons la monotonie de la famille $(P(X_n = k))_{k\in\llbracket 0\,;\,n \rrbracket}$. Soit $k \in \llbracket 0\,;\,n-1 \rrbracket$. Les probas étant toutes strictement positives :

$$\begin{aligned}
\frac{P(X_n = k)}{P(X_n = k+1)} \geq 1 \quad &\iff \quad \frac{\binom{n}{k}p^kq^{n-k}}{\binom{n}{k+1}p^{k+1}q^{n-k-1}} \geq 1 \\
&\iff \quad \frac{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}}{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}p^{k+1}q^{n-k-1}} \geq 1 \\
&\iff \quad \frac{k+1}{n-k}\times\frac{q}{p} \geq 1 \\
&\iff \quad (k+1)q \geq (n-k)p \\
&\iff \quad k(q+p) \geq np - q \\
&\iff \quad k \geq np - q
\end{aligned}$$

puisque $p+q = 1$. En d'autres termes (les probabilités sont strictement positives), $P(X_n = k) \geq P(X_n \geq k+1)$ si et seulement si $k \geq \lceil np-q\rceil$. Dès lors, à partir du rang $\lceil np-q\rceil$, la suite des probabilités décroît, et elle croît jusqu'au rang $\lceil np-q\rceil - 1$ puisque la condition ci-dessus n'est pas vérifiée. En d'autres termes, on a la chaîne d'inégalités suivante (en notant $x_n = \lceil np-q\rceil$) :

$$P(X_n = 0) \leq P(X_n = 1) \leq \cdots \leq P(X_n = x_n - 1) \leq P(X_n = x_n) \geq P(X_n = x_n + 1) \geq \cdots \geq P(X_n = n)$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 36 : ✪✪✪ On dispose de deux dés : l'un est équilibré, et l'autre est tel que la probabilité de chaque numéro est proportionnelle au numéro. On dispose également d'une pièce qui fait sortir pile deux fois plus souvent que face. On lance la pièce une seule fois, au tout début. Si pile sort, on choisit le premier dé, et le second sinon. Ensuite on procède à n lancers de dé avec la règle suivante : on change de dé après un lancer si on a tiré lors de ce lancer un numéro strictement inférieur à

5. Quelle est la probabilité qu'en n lancers, on ne lance qu'une fois le premier dé ?

Correction : Précisons (cf. cours) que le deuxième dé donne le numéro k avec proba $k/21$. Notons, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, X_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu lors du i-ème lancer de dé si on lance le premier dé, et Y_i la variable aléatoire égale au numéro obtenu au i-ème lancer si on lance le deuxième dé. Par exemple, l'événement $[X_1 < 5]$ est l'événement : « on lance le premier dé au premier tirage, et on obtient un numéro inférieur strictement à 5 ». Notons F : « la pièce donne Face » (il n'y a qu'un seul lancer de pièce, inutile donc de préciser quel lancer) et P : « la pièce donne Pile ». Par hypothèse, $P(P) = 2/3$ et $P(F) = 1/3$. Notons enfin A : « en n lancers, on ne lance qu'une fois le premier dé ». P et F forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probas totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P_P(A)P(P) + P_F(A)P(F) \\ &= \frac{2}{3}P_P(A) + \frac{1}{3}P_F(A) \end{aligned}$$

Supposons P réalisé. On commence alors par lancer le premier dé. L'événement A est réalisé si et seulement si on lance ensuite exclusivement le deuxième dé : cela se produit si on obtient un numéro strictement inférieur à 5 au premier lancer, et ensuite on obtient toujours un numéro supérieur ou égal à 5. En d'autres termes :

$$P_P(A) = P_P([X_1 < 5] \cap [Y_2 \geq 5] \cap \cdots \cap [Y_n \geq 5])$$

Or, les lancers sont indépendants et indépendants du lancer de pièce donc :

$$\begin{aligned} P_P(A) &= P(X_1 < 5) \times P(Y_2 \geq 5) \times \cdots \times P(Y_n \geq 5) \\ &= \frac{2}{3} \times \left(\frac{11}{21}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

Supposons à présent F réalisé : on commence donc par le second dé. A est réalisé si et seulement si on lance exactement une fois le premier dé, ce qui peut se produire à n'importe quel instant k entre l'instant 2 et l'instant n : à l'instant $k-1$, cela signifie que le deuxième dé donne un résultat strictement inférieur à 5, pour qu'on change de dé, que le deuxième dé donne aux autres lancers un résultat supérieur ou égal à 5 (sauf au n-ième lancer où le résultat est quelconque), et que le premier dé donne un résultat strictement inférieur à 5 si $k \neq n$, pour qu'on rechange de dé, mais si $k = n$, puisque c'est le dernier lancer, le premier dé peut donner un résultat quelconque. Précisons que le n-ième lancer n'a aucune importance puisqu'on ne change plus de dé car le jeu s'arrête. Par conséquent :

$$\begin{aligned} P_F(A) &= P_P(([Y_1 < 5] \cap [X_2 < 5] \cap [Y_3 \geq 5] \cdots \cap [Y_{n-1} \geq 5]) \\ &\quad \cup([Y_1 \geq 5] \cap [Y_2 < 5] \cap [X_3 < 5] \cap [Y_4 \geq 5] \cdots \cap [Y_{n-1} \geq 5]) \\ &\quad \cup \cdots \cup ([Y_1 \geq 5] \cap \cdots \cap [Y_{p-2} \geq 5] \cap [Y_{p-1} < 5])) \end{aligned}$$

Les événements séparés par des unions sont deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned} P_F(A) &= P_F([Y_1 < 5] \cap [X_2 < 5] \cap [Y_3 \geq 5] \cdots \cap [Y_{n-1} \geq 5]) \\ &\quad +P_F([Y_1 \geq 5] \cap [Y_2 < 5] \cap [X_3 < 5] \cap [Y_4 \geq 5] \cdots \cap [Y_{n-1} \geq 5]) \\ &\quad + \cdots + P_F([Y_1 \geq 5] \cap \cdots \cap [Y_{p-2} \geq 5] \cap [Y_{p-1} < 5]) \end{aligned}$$

Par indépendance des lancers et indépendance par rapport au lancer de pièce initial :

$$\begin{aligned} P_F(A) &= P(Y_1 < 5) \times P(X_2 < 5) \times P(Y_3 \geq 5) \times \cdots \times P(Y_{n-1} \geq 5) \\ &\quad +P(Y_1 \geq 5) \times P(Y_2 < 5) \times P(X_3 < 5) \times P(Y_4 \geq 5) \times \cdots \times P(Y_{n-1} \geq 5) \\ &\quad + \cdots + P(Y_1 \geq 5) \times \cdots \times P(Y_{n-2} \geq 5) \times P(Y_{n-1} < 5) \end{aligned}$$

Le dernier terme contient $n-2$ termes de la forme $P(Y_k \geq 5)$, égaux à $11/21$, et un terme de la forme $P(Y_k < 5)$, égal à $10/21$, donc le dernier terme vaut $(11/21)^{n-2} \times 10/21$. Les autres contiennent tous $n-3$ termes de la forme $P(Y_k \geq 5)$, égaux à $11/21$, un terme égal de la forme $P(Y_k < 5)$, égal à $10/21$, et un terme de la forme $P(X_k < 5)$, égal à $2/3$, donc ces termes sont égaux à $(11/21)^{n-3} \times 10/21 \times 2/3$, et il y a $n-2$ tels termes (tous sauf le dernier). Finalement :

$$P_F(A) = (n-2) \times \left(\frac{11}{21}\right)^{n-3} \times \frac{10}{21} \times \frac{2}{3} + \left(\frac{11}{21}\right)^{n-2} \times \frac{10}{21}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 37 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On lance $6n$ dés équilibrés. Quelle est la probabilité que chaque numéro de $[\![1\,;6]\!]$ apparaisse n fois ? Donner un équivalent de cette probabilité (lorsque n tend vers $+\infty$).

Correction : Pour tout $i \in [\![1\,;6]\!]$, on note X_i la variable aléatoire donnant le nombre de fois où le numéro i est sorti. On cherche la probabilité $P\left(\bigcap_{i=1}^{6}[X_i = n]\right)$, notée p dans la suite. Les événements $[X_i = n]$ n'étant pas indépendants (par exemple, si $[X_1 = n]$ jusque $[X_5 = n]$ sont réalisés, alors $[X_6 = n]$ l'est automatiquement), appliquons la formule des probabilités composées :

$$p = P(X_1 = n) \times P_{[X_1=n]}(X_2 = n) \times P_{[X_1=n]\cap[X_2=n]}(X_3 = n) \times \cdots \times P_{[X_1=n]\cap\cdots\cap[X_5=n]}(X_6 = n)$$

- X_1 compte le nombre de succès (obtenir 1, de probabilité $1/6$) obtenus lors de $6n$ répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer un dé). Par conséquent, $X_1 \sim B(6n, 1/6)$ et donc $P(X_1 = n) = \binom{6n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{5n}$.
- **Supposons** $[X_1 = n]$ **réalisé :** Le nombre de 1 est connu et les dés, lors des $5n$ lancers restants, ne peuvent plus donner que les numéros $2, 3, 4, 5$ et 6. En d'autres termes, **la probabilité que le dé donne** 2 **est de** $1/5$ **!** Ainsi, X_2 compte le nombre de succès (obtenir 2, de probabilité $1/5$) obtenus lors de $5n$ (il ne reste que $5n$ dés puisque n ont déjà donné 1) répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer un dé). Par conséquent, $X_2 \sim B(5n, 1/5)$ (la loi conditionnelle de X_2 sachant que $[X_1 = n]$ est réalisé est une loi binomiale de paramètres $5n$ et $1/5$) et donc $P_{[X_1=n]}(X_2 = n) = \binom{5n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{4n}$.
- **Supposons** $[X_1 = n] \cap [X_2 = n]$ **réalisé :** De même, X_3 suit une loi binomiale de paramètres $4n$ et $1/4$ donc $P_{[X_1=n]\cap[X_2=n]}(X_3 = n) = \binom{4n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{3n}$.
- Et de même pour les trois autres probas, la dernière valant 1 puisque, si $[X_1 = n]\cap\cdots\cap[X_5 = n]$ est réalisé, on connaît le nombre de $1, 2, 3, 4$ et 5 donc le dé ne peut plus donner que 6 en n lancers, donc la probabilité d'obtenir n fois 6 vaut 1.

Dès lors,

$$p = \binom{6n}{n}\left(\frac{1}{6}\right)^n\left(\frac{5}{6}\right)^{5n} \times \binom{5n}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{4n} \times \binom{4n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{3n} \times \binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \times \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times 1$$

ce qui donne après calculs (et simplification des factorielles dans les coefficients binomiaux)

$$p = \frac{(6n)!}{(n!)^6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{6n}$$

En particulier, si $n = 1$, la probabilité d'obtenir 6 chiffres différents lors du lancer de 6 dés est de $6!/6^6 \approx 0,015$, ce qu'on avait déjà trouvé dans l'exercice 14 du chapitre 26. Donnons à présent un équivalent de cette probabilité : utilisons la formule de Stirling.

$$\begin{aligned} p &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(6n)^{6n+1/2}e^{-6n}}{\left(\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\right)^6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{6n} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}6^{6n+1/2}n^{6n+1/2}e^{-6n}}{\sqrt{2\pi}^6 n^{6n+3}e^{-6n}} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{6n} \\ &\sim \frac{\sqrt{6}}{(2\pi)^{5/2}n^{5/2}} \end{aligned}$$

ce qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ce qui est conforme à l'intuition.

Exercice 38 - Formule du crible de Poincaré : ✪✪✪ Soient $A_1, \dots, A_n$ des événements. Le but de l'exercice est de prouver la formule du crible de Poincaré :

$$P\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

1. Montrer que la formule du crible est une conséquence de l'égalité :

$$\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i} - \sum_{i<j}\mathbb{1}_{A_i\cap A_j} + \sum_{i<j<k}\mathbb{1}_{A_i\cap A_j\cap A_k} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_n}$$

On désigne par φ l'application de droite dans l'égalité ci-dessus.

2. On suppose que $x \notin A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Montrer que $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}(x) = \varphi(x)$.
3. On suppose que x appartient à m événements A_i (avec $1 \leq m \leq n$). Quitte à réordonner les A_i, on peut supposer que ces événements sont $A_1, \dots, A_m$. Montrer que :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i=1}^{m} \mathbb{1}_{A_i}(x) - \sum_{1\leq i<j\leq m} \mathbb{1}_{A_i\cap A_j}(x) + \sum_{1\leq i<j<k\leq m} \mathbb{1}_{A_i\cap A_j\cap A_k}(x) + \cdots + (-1)^{m-1}\mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_m}(x) \\ &= \binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m}\end{aligned}$$

4. En calculant $(1-1)^m$, calculer le membre de droite ci-dessus et conclure.

Correction :

1. Supposons donc l'égalité de l'énoncé réalisée. En appliquant l'espérance, et par linéarité de l'espérance :

$$E(\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}) = \sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{A_i}) - \sum_{i<j} E(\mathbb{1}_{A_i\cap A_j}) + \sum_{i<j<k} E(\mathbb{1}_{A_i\cap A_j\cap A_k}) + \cdots + (-1)^{n-1}E(\mathbb{1}_{A_1\cap\cdots\cap A_n})$$

   Il suffit ensuite de se souvenir que l'espérance de l'indicatrice est égale à la probabilité pour conclure.
2. Puisque x n'appartient pas à l'union, alors $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}(x) = 0$. De plus, cela implique que x n'appartient à aucun des A_i donc à aucune des intersections du type $A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}$ qu'on retrouve dans l'expression de φ. Dès lors, toutes les indicatrices qu'on trouve dans l'expression de φ s'annulent en x donc $\varphi(x) = 0$: on a bien l'égalité voulue.
3. Pour tout $k \geq m$, $x \notin A_k$ donc x n'appartient à aucune intersection faisant intervenir A_k. Il en découle que, dans la première somme, on peut s'arrêter à $k = m$ (car x n'appartient pas aux ensembles d'indice strictement supérieur à m) et idem dans les autres sommes. De plus, les sommes comportant au moins $m+1$ indices distincts disparaissent également car, si on a au moins $m+1$ indices distincts, l'un au moins est supérieur ou égal à $m+1$ donc x n'appartient pas au A_i correspondant donc l'indicatrice est nulle. La première égalité en découle.

   De plus, x appartient à toutes les intersections qui apparaissent (car $x \in A_1, \dots, A_m$) donc toutes les indicatrices qui apparaissent valent 1 : il suffit donc de compter le nombre de termes dans chaque somme. Dans la somme k, il y a autant de termes qu'il y a de façons de choisir k indices $i_1 < \cdots < i_k$ donc il y a autant de termes que de parties de $[\![1 \,;\, m]\!]$, à savoir $\binom{m}{k}$.
4. On a tout d'abord

$$(1-1)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{k}{m}(-1)^k$$

   Dès lors :

$$\begin{aligned}\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k-1}\binom{m}{k} \\ &= -\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k \\ &= -\left(\textstyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^k - \binom{m}{0}(-1)^0\right) \\ &= -((1-1)^m - 1) \\ &= 1\end{aligned}$$

   On en déduit que $\varphi(x) = 1$ ce qui est bien égal à $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}(x)$ puisque x appartient à cette union. Ceci étant valable pour tout m, dans tous les cas, $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n}(x) = \varphi(x)$ donc $\mathbb{1}_{A_1\cup\cdots\cup A_n} = \varphi$.

Exercice 39 : ✪✪✪ Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on obtient un numéro supérieur ou égal au numéro précédent. On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Justifier que Y_n est une variable aléatoire réelle finie telle que $Y_n(\Omega) = [\![1 \,;\, n]\!]$.
2. Soit $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$. Justifier qu'il y a $\dbinom{n}{k}n^{n+1-k}$ tirages de $n+1$ boules successivement avec remise dans cette urne tels que les k premières sont dans l'ordre strictement décroissant.

3. Déterminer alors $P(Y_n > k)$ pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$.
4. En déduire que, pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(Y_n = k) = \dfrac{k-1}{n^k}\dbinom{n+1}{k}$.
5. Calculer $E(Y_n)$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n)$.

Correction :

1. Il faut au minimum 2 tirages pour constater que le numéro de la deuxième boule est supérieure ou non à celui de la première. Si Y_n prend une valeur strictement supérieure à $n+1$, cela signifie que l'on peut piocher $n+1$ boules dans un ordre strictement décroissante (de telle sorte que jamais le numéro d'une boule n'est supérieur ou égal au numéro précédent). C'est impossible puisqu'il n'y a que n boules. Ainsi Y_n est une variable aléatoire réelle finie et $Y_n(\Omega) \subset [\![2\,;\,n+1]\!]$.

   Réciproquement si $k \in [\![2\,;\,n+1]\!]$, alors $[Y_n = k]$ est réalisé si par exemple on pioche les boules $k-1, k-2\ldots, 3, 2, 1, 1$. Donc $[\![2\,;\,n+1]\!] \subset Y_n(\Omega)$. D'où l'égalité.
2. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Pour réaliser un tirage de $n+1$ boules successivement avec remise dans cette urne tels que les k premières sont dans l'ordre strictement décroissant, on peut :
   - choisir les k premières boules, nécessairement distinctes, parmi les n boules possibles (il y a $\binom{n}{k}$ possibilités),
   - les ranger dans l'ordre décroissant (il y a une seule possibilités),
   - choisir les $n+1-k$ autres boules sans contraintes d'ordre et de répétition (il y a n^{n+1-k} possibilités).

   Par principe multiplicatif, il y a donc $\binom{n}{k}n^{n+1-k}$ façons.
3. On fait au maximum $n+1$ tirages donc on peut suppose que dans tous les cas on en fait $n+1$ et on note Y_n l'instant ou pour la première fois on tire une boule dont le numéro est supérieur ou égal à celui du précédent. On considère Ω l'ensemble des tirages avec remises de $n+1$ boules. On a $\mathrm{card}(\Omega) = n^{n+1}$. On munit $(\Omega, (\Omega))$ de l'équiprobabilité.

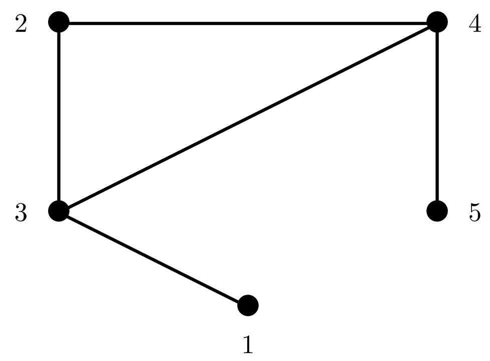
   Si $k \in [\![2\,;\,n]\!]$, l'événement $[Y_n > k]$ est l'événement « les k premiers boules tirées sont dans l'ordre strictement décroissant ». D'après la question précédente, on a donc
$$P(Y_n > k) = \frac{\mathrm{card}([Y_n > k])}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k}n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}.$$
4. Soit $k \in [\![2\,;\,n+1]\!]$. On a $P(Y_n = k) = P(Y_n > k-1) - P(Y_n > k)$. Attention, la formule de la question précédente n'est pas valable si $k = n+1$. Il faudra traiter ce cas séparément :
   - Soit $k \in [\![2\,;\,n]\!]$,
$$\begin{aligned}
P(Y_n = k) &= P(Y_n > k-1) - P(Y_n > k)\\
&= \frac{1}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} - \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}\\
&= \frac{1}{n^k}\left(n\binom{n}{k-1} - \binom{n}{k}\right)\\
&= \frac{1}{n^k}\left(n\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{(n-k)!k!}\right)\\
&= \frac{1}{n^k}\frac{n!}{k!(n+1-k)!}(nk-n-1+k)\\
&= \frac{1}{n^k}\frac{n!}{k!(n+1-k)!}(n+1)(k-1) = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$
   - On a $P(Y_n = n+1) = P(Y_n > n) = \dfrac{1}{n^n}$ donc, si $k = n+1$,
$$\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k} = \frac{n}{n^{n+1}}\binom{n+1}{n+1} = \frac{1}{n^n} = P(Y_n = k).$$
5. On a
$$E(Y_n) = \sum_{k=2}^{n+1} kP(Y_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k(k-1)\frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}.$$
   On utilise la formule du chef deux fois (comme dans le calcul de la variance d'une loi binomiale) : pour tout $k \in [\![2\,;\,n+1]\!]$, on a
$$k(k-1)\binom{n+1}{k} = (k-1)(n+1)\binom{n}{k-1} = (n+1)n\binom{n-1}{k-2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(Y_n) &= n(n+1)\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n-1}{k-2}\frac{1}{n^k} \\
&= n(n+1)\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{n^{j+1}} \qquad = \frac{n(n+1)}{n^2}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\frac{1}{n^j} \\
&= \frac{(n+1)}{n}\left(\frac{1}{n}+1\right)^{n-1},
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme de Newton. Ainsi $E(Y_n) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e.$

Exercice 40 - Graphe aléatoire d'Erdös-Rényi : ✪✪✪✪ Un graphe (simple, fini, sans boucle) est un couple (S, A), où S est un ensemble fini et où A est une partie de $\mathscr{P}_2(S)$, où $\mathscr{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties de S à 2 éléments. Les éléments de S sont représentés par des points et les arêtes par des segments reliant les deux points qui les composent. Ci-dessous on a représenté le graphe (S, A) avec $S = [\![1\,;\,5]\!]$ et $A = \{\{1;3\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};\{4;5\}\}$:



On se donne dans la suite un ensemble fini S. On note $n \geq 1$ le nombre d'éléments de S (donc le nombre de sommets des graphes). On fixe un entier $m \geq 0$ dans la suite et on ne s'intéresse qu'aux graphes d'ensemble de sommets S contenant m arêtes. On note enfin Ω l'ensemble de ces graphes (i.e. des graphes de sommets S possédant m arêtes). On choisit sur Ω la probabilité uniforme notée P.

1. Si $G \in \Omega$, que vaut $P(G)$?
2. Soient i et j deux éléments distincts de S. On note $i \sim j$ l'événement « les deux sommets i et j sont reliés par une arête ». Calculer $P(i \sim j)$.
3. Soient i, j, k trois sommets distincts. Les événements $i \sim j$ et $j \sim k$ sont-ils indépendants ?
4. On appelle triangle d'un graphe un ensemble de trois sommets distincts $\{x; y; z\}$ tel que $x \sim y$, $y \sim z$ et $z \sim x$ (par exemple, le graphe ci-dessus contient un unique triangle, formé par les sommets $2, 3$ et 4). Quelle est l'espérance du nombre de triangles dans un graphe de Ω ?

Correction :

1. Il suffit de donner le cardinal de Ω puisqu'on munit $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité. Puisque l'ensemble des sommets est fixé, il suffit de connaître le nombre d'ensembles A possibles, c'est-à-dire le nombre d'ensembles à m éléments formés d'éléments de $\mathscr{P}_2(S)$. Or, $\mathscr{P}_2(S)$ est un ensemble à $\binom{n}{2}$ éléments (un ensemble à n éléments contient $\binom{n}{2}$ parties à 2 éléments). Par conséquent, on peut former $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ (m parmi 2 parmi n) ensembles d'arêtes à m éléments. En conclusion, la probabilité recherchée est
$$\frac{1}{\binom{\binom{n}{2}}{m}}$$
2. Puisqu'on a muni $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ de l'équiprobabilité, il suffit de calculer le nombre de graphes avec une arête reliant i et j. Un tel graphe est entièrement déterminé par les autres arêtes : $m-1$ arêtes restantes, que l'on choisit parmi les $\binom{n}{2}-1$ éléments de $\mathscr{P}_2(S)$ distincts de $\{i; j\}$. Il y a donc
$$\binom{\binom{n}{2}-1}{m-1}$$
tels graphes, si bien que :

$$\begin{aligned}
P(i \sim j) &= \frac{\binom{\binom{n}{2}-1}{m-1}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{2}-1\right)!}{(m-1)!\left(\binom{n}{2}-m\right)!} \times \frac{m!\left(\binom{n}{2}-m\right)!}{\binom{n}{2}!} \\
&= \frac{m}{\binom{n}{2}}
\end{aligned}$$

3. Intuitivement, on devine qu'il ne le sont pas : si i et j sont reliés, cela fait une arête de moins pour tenter de relier j et k donc j et k ont moins de chances d'être reliés. Prouvons-le rigoureusement. On sait que

$$P(i \sim j)P(j \sim k) = \frac{m^2}{\binom{n}{2}^2}$$

Calculons $P([i \sim j] \cap [j \sim k])$: on cherche donc le nombre de graphes comportant une arête entre i et j et une autre arête entre j et k. Un raisonnement analogue prouve qu'il y a

$$\binom{\binom{n}{2}-2}{m-2}$$

tels graphes, si bien que :

$$\begin{aligned}
P([i \sim j] \cap [j \sim k]) &= \frac{\binom{\binom{n}{2}-2}{m-2}}{\binom{\binom{n}{2}}{m}} \\
&= \frac{\left(\binom{n}{2}-2\right)!}{(m-2)!\left(\binom{n}{2}-m\right)!} \times \frac{m!\left(\binom{n}{2}-m\right)!}{\binom{n}{2}!} \\
&= \frac{m(m-1)}{\binom{n}{2} \times \left(\binom{n}{2}-1\right)} \\
&\neq P(i \sim j)P(j \sim k)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que les événements ne sont pas indépendants.

4. On a envie d'introduire une variable aléatoire qui compte le nombre de triangles (des succès) : le problème est que, d'après la question précédente, les divers essais ne seront pas indépendants donc on ne peut pas introduire une loi binomiale. L'idée est la suivante : même lorsqu'il n'y a pas indépendance, l'espérance est linéaire donc on va introduire une variable aléatoire par triangle donné, et on calculera la somme des espérances.

   Si x, y, z sont trois sommets (distincts) de S, notons $T_{x,y,z}$ la variable aléatoire qui vaut 1 si x, y, z forment un triangle et qui vaut 0 sinon. Alors $T_{x,y,z}$ suit une loi de Bernoulli (dont on ne connaît pas encore le paramètre) puisqu'elle ne prend que les valeurs 0 et 1. Calculons le paramètre de cette loi.

   On trouve de même que précédemment que

$$P(T_{x,y,z} = 1) = P([x \sim y] \cap [y \sim z] \cap [z \sim x]) = \frac{m(m-1)(m-2)}{\binom{n}{2} \times \left(\binom{n}{2}-1\right)\left(\binom{n}{2}-2\right)}$$

   si bien que cette quantité est le paramètre de la loi de Bernoulli ci-dessus. Le nombre total de triangles est la variable aléatoire

$$S = \sum_{\{x;y;z\} \in \mathscr{P}_3(S)} T_{x,y,z}$$

   En effet, quand des quantités ne peuvent valoir que 0 ou 1, le nombre d'éléments qui valent 1 est égal à la somme. On ne peut pas dire que S suit une loi binomiale puisque, encore une fois, les différentes variables aléatoires ne sont pas indépendantes, mais on peut toujours utiliser la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{\{x;y;z\}\in\mathscr{P}_3(S)} E(T_{x,y,z}) \\
&= \sum_{\{x;y;z\}\in\mathscr{P}_3(S)} \frac{m(m-1)(m-2)}{\binom{n}{2}\times\left(\binom{n}{2}-1\right)\left(\binom{n}{2}-2\right)} \\
&= \binom{n}{3}\times\frac{m(m-1)(m-2)}{\binom{n}{2}\times\left(\binom{n}{2}-1\right)\left(\binom{n}{2}-2\right)}
\end{aligned}$$

puisque cette somme contient $\binom{n}{3}$ termes.

27.2 Couples de variables aléatoires

Exercice 41 : ✪ Soient A et B deux événements. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices $\mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_B : \Omega \to \{0;1\}$ sont des variables aléatoires indépendantes.

Correction : Supposons A et B indépendants. Alors $[\mathbb{1}_A = 1] = A$ et $[\mathbb{1}_A = 0] = \overline{A}$, et idem pour B. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
P([\mathbb{1}_A = 1]\cap[\mathbb{1}_B = 1]) &= P(A\cap B) \\
&= P(A)P(B) \qquad \text{(par indépendance de } A \text{ et } B\text{)} \\
&= P(\mathbb{1}_A = 1)P(\mathbb{1}_B = 1)
\end{aligned}$$

De plus, A et $\overline{B}$ sont indépendants donc :

$$\begin{aligned}
P([\mathbb{1}_A = 1]\cap[\mathbb{1}_B = 0]) &= P(A\cap \overline{B}) \\
&= P(A)P(\overline{B}) \\
&= P(\mathbb{1}_A = 1)P(\mathbb{1}_B = 0)
\end{aligned}$$

On montre de même que $P([\mathbb{1}_A = 0]\cap[\mathbb{1}_B = 1]) = P(\mathbb{1}_A = 0)P(\mathbb{1}_B = 1)$ et que $P([\mathbb{1}_A = 0]\cap[\mathbb{1}_B = 0]) = P(\mathbb{1}_A = 0)P(\mathbb{1}_B = 0)$: les variables aléatoires $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ sont indépendantes.

Réciproquement, supposons $\mathbb{1}_A$ et $\mathbb{1}_B$ indépendantes. Alors :

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= P([\mathbb{1}_A = 1]\cap[\mathbb{1}_B = 1]) \\
&= P(\mathbb{1}_A = 1)P(\mathbb{1}_B = 1) \qquad \text{(par indépendance de } \mathbb{1}_A \text{ et } \mathbb{1}_B\text{)} \\
&= P(A)P(B)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que A et B sont indépendants.

Exercice 42 : ✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètre respectif p et q. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X,Y)$.

Correction : $Z(\Omega) = \{0;1\}$ donc Z suit aussi une loi de Bernoulli. Pour en donner le paramètre, il suffit de donner $P(Z = 1)$. Or, $P(Z = 1) = 1 - P(Z = 0)$ et $P(Z = 0) = P([X = 0]\cap[Y = 0])$. Par indépendance de X et Y, $P(Z = 0) = P(X = 0)P(Y = 0) = (1-p)(1-q)$. En conclusion, Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)(1-q) = p+q-pq$.

Exercice 43 : ✪ On se donne n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \dots, X_n$ identiquement distribuées, de loi $U(\llbracket 1\,;\,n\rrbracket)$. On définit $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Calculer $E(Y)$: on pourra utiliser l'exercice 16.

Correction : D'après l'exercice 16, puisque $Y(\Omega) = \llbracket 1\,;\,n\rrbracket \subset \llbracket 0\,;\,n\rrbracket$, alors

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} P(Y\geq k)$$

Or, pour tout $k\geq 1$,

$$[Y\geq k] = [X_1\geq k]\cap\cdots\cap[X_n\geq k]$$

Par indépendance des v.a. :

$$P(Y \geq k) = P(X_1 \geq k) \times \cdots \times P(X_n \geq k)$$

Les variables sont toutes de même loi uniforme donc

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} P(X_1 \geq k)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Exercice 44 : ✪ On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :
- $X = 1$ si on tire un roi, et 0 sinon.
- $Y = 1$ si on tire une dame, et 0 sinon.
- $Z = 1$ si on tire un coeur, et 0 sinon.

1. Déterminer les lois conjointes et les lois marginales des couples (X, Y) et (X, Z).
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? et X et Z ?

Correction :

1. Les lois marginales sont simples à donner : $X(\Omega) = \{0; 1\}$ et $P(X = 1) = 1/8$ donc X suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/8$. Même chose pour Y, tandis que $Z \sim B(1/4)$. Donnons à présent les lois conjointes. $(X, Y)(\Omega) = \{0; 1\}^2$.
   - $P([X = 1], [Y = 1]) = 0$ puisqu'on ne peut pas tirer à la fois une dame et un roi (on ne tire qu'une carte).
   - $P([X = 1], [Y = 0]) = P(X = 1) = 1/8$.
   - $P([X = 0], [Y = 1]) = P(Y = 1) = 1/8$.
   - $P([X = 0], [Y = 0]) = 6/8 = 3/4$ (c'est la probabilité de ne tirer ni un roi ni une dame).

   Pour (X, Z) :
   - $P([X = 1], [Z = 1]) = 1/32$ puisque c'est la probabilité de tirer le roi de coeur.
   - $P([X = 1], [Z = 0]) = 3/32$: c'est la probabilité de tirer un roi qui n'est pas le roi de coeur.
   - $P([X = 0], [Z = 1]) = 7/32$: c'est la probabilité de tirer un coeur qui ne soit pas le roi.
   - $P([X = 0], [Z = 0]) = 21/32$ (c'est la probabilité de ne tirer ni un roi ni un coeur).
2. Intuitivement, on se dit que X et Y ne vont pas être indépendantes mais que X et Z vont l'être.

   $$P([X = 1] \cap [Y = 1]) = 0 \neq P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{64}$$

   donc X et Y ne sont pas indépendantes. Pour X et Z, il vaut étudier tous les cas possibles :

   $$P(X = 1) \times P(Z = 1) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P([X = 1] \cap [Z = 1])$$

   et idem pour les trois autres ($P(X = 0)P(Z = 1), P(X = 1)P(Z = 0)$ et $P(X = 0)P(Z = 0)$), on trouve à chaque fois que le produit des probas est la proba de l'intersection.

Exercice 45 : ✪ N personnes choisissent un fournisseur d'accès à Internet, au hasard et de manière indépendante, parmi n fournisseurs notés de 1 à n, avec $n \geq 2$. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note X_i le nombre de clients ayant opté pour le fournisseur i.

1. Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, déterminer la loi de X_i.
2. Les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. X_i est le nombre de succès (choisir le fournisseur i, proba $1/n$) obtenus lors de N répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (choisir un fournisseur d'accès internet). Par conséquent, $X_n \sim B(N, 1/n)$.
2. Il est intuitif qu'elles ne le sont pas : si on sait que $X_1, \ldots, X_{n-1}$ sont nulles, alors $X_n = N$ car cela signifie que toutes les personnes ont choisi le dernier fournisseur. Rigoureusement, cela donne :

   $$P([X_1 = 0] \cap \cdots \cap [X_n = 0]) = 0 \neq P(X_1 = 0) \times \cdots \times P(X_n = 0) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N \times \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right)^N$$

ce qui prouve que les variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Exercice 46 : ✪ Le produit de deux variables aléatoires indépendantes non identiquement nulles peut-il être identiquement nul ?

Correction : Montrons que la réponse est non. Soient donc X et Y non identiquement nulles (donc $P(X = 0) \neq 1$, et idem pour Y) vérifiant $XY = 0$ presque sûrement, c'est-à-dire que $P(XY = 0) = 1$. Raisonnons par l'absurde et supposons X et Y indépendantes. Alors les événements $[X \neq 0]$ et $[Y \neq 0]$ sont indépendants, si bien que

$$P(XY \neq 0) = P([X \neq 0] \cap [Y \neq 0]) = P(X \neq 0) \times P(Y \neq 0)$$

ce qui est absurde puisque $P(XY \neq 0) = 0$ et $P(X \neq 0) \neq 0, P(Y \neq 0) \neq 0$.

Exercice 47 : ✪✪ Montrer que deux variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli (pas forcément de même paramètre) sont indépendantes si et seulement si elles sont non corrélées.

Correction : Soient donc $X \sim B(p_1)$ et $Y \sim B(p_2)$. D'après le cours, si elles sont indépendantes, alors elles ont non corrélées. En général, la réciproque est fausse (cf. cours), mais prouvons que, dans ce cas particulier (quand on a des variables de Bernoulli), la réciproque est vraie.

On suppose donc qu'elles sont non corrélées. L'astuce est de relier les probas aux espérances : on se souvient (cf. cours) que, puisqu'on a des lois de Bernoulli, $P(X = 1) = E(X)$ et idem pour Y. De plus, X et Y ne prenant que les valeurs 0 ou 1, c'est aussi le cas pour XY donc XY suit une loi de Bernoulli, donc on a également $P(XY = 1) = E(XY)$. Or, $XY = 1$ si et seulement si $X = Y = 1$ donc :

$$\begin{aligned}
P([X = 1] \cap [Y = 1]) &= P(XY = 1) \\
&= E(XY) \\
&= E(X)E(Y) \qquad \text{(v.a. non corrélées)} \\
&= P(X = 1)P(Y = 1)
\end{aligned}$$

si bien que les événements $[X = 1]$ et $[Y = 1]$ sont indépendants. D'après le cours, cela implique que les événements $\overline{[X = 1]} = [X = 0]$ et $[Y = 1]$ sont indépendants, et idem pour les autres : pour tous i et j égaux à 0 ou 1, $[X = i]$ et $[Y = j]$ sont indépendants, donc Y et Y sont indépendantes (pour montrer que deux variables aléatoires sont indépendantes, il suffit de s'intéresser aux singletons, cf. cours).

Exercice 48 - Quand l'univers est trop petit : ✪✪

1. On suppose qu'il existe n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \{0; 1\}$ indépendantes telles que, pour tout i, X_i suive une loi de Bernoulli de paramètre $p_i \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Pour toute partie I de $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on note :

   $$A_I = \{\omega \in \Omega \,|\, \forall i \in I, X_i(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall j \notin I, X_j(\omega) = 0\}$$

   Montrer que les A_I sont deux à deux disjoints et tous de probabilité non nulle.
   (b) En déduire que $\text{card}(\Omega) \geq 2^n$.

2. Soient $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et $\Omega = [\![\,0\,;\,n\,]\!]$. On munit Ω de la probabilité P définie par :

   $$\forall k \in \Omega, P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

   Montrer que Id_Ω suit une loi binomiale de paramètres (n, p). Que peut-on en déduire ?

Correction :

1. (a) Soient donc I et J deux parties distinctes (et pas disjointes) de $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, et le but est donc de prouver que A_I et A_J sont disjoints. Puisque $I \neq J$, il existe $i \in I \backslash J$ ou il existe $i \in J \backslash I$. Sans perte de généralité, supposons qu'on soit dans le premier cas. S'il existe $\omega \in A_I \cap A_J$ alors $X_i(\omega) = 1$ puisque $i \in I$ et $X_i(\omega) = 0$ puisque $i \notin J$ ce qui est évidemment absurde. Il n'existe donc pas de ω dans l'intersection, ce qui est le résultat voulu.

   Il découle de la définition de A_I que :

$$P(A_I) = P\left(\bigcap_{i\in I}[X_i = 1] \cap \bigcap_{j\notin I}[X_j = 0]\right)$$

Par indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ (ci-dessus, on trouve une et une seule fois chacune des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, soit dans I, soit en dehors) :

$$\begin{aligned} P(A_I) &= \prod_{i\in I} P(X_i = 1) \times \prod_{j\notin I} P(X_j = 0) \\ &= \prod_{i\in I} p_i \times \prod_{j\notin I}(1 - p_i) \end{aligned}$$

et cette quantité est non nulle car tous les p_i appartiennent à $]\,0\,;1\,[$.

(b) Il en découle que, pour tout i, A_I est non vide (car le vide est de proba nulle donc, par contraposée, un ensemble de proba non nulle est non vide, réciproque fausse, voir l'exemple du cours sur la proba de Dirac) donc de cardinal supérieur ou égal à 1. Or,

$$\bigcup_{I\subset[\![1\,;\,n]\!]} A_I \subset \Omega$$

et le cardinal d'une union disjointe (cf. question précédente) est la somme des cardinaux donc

$$\sum_{I\subset[\![1\,;\,n]\!]} \mathrm{card}(A_I) \leq \mathrm{card}(\Omega)$$

Les A_I étant tous de cardinal supérieur ou égal à 1, on a finalement

$$\mathrm{card}(\Omega) \geq \sum_{I\subset[\![1\,;\,n]\!]} 1$$

et cette somme contient 2^n éléments (un ensemble à n éléments a 2^n parties), d'où le résultat voulu.

2. On a bien $\mathrm{Id}_\Omega(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$,

$$P(\mathrm{Id}_\Omega = k) = P(\{k\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

Or, $\mathrm{card}(\Omega) = n + 1 < 2^n$ (récurrence immédiate de même que dans l'exercice 9 du chapitre 1, puisque $n \geq 2$) donc, d'après la question 1, il n'existe pas n variables aléatoires indépendantes non constantes suivant une loi de Bernoulli, et si l'une est constante égale à 0 ou 1, alors Id_Ω ne peut pas prendre la valeur 0 ou la valeur n (selon que l'une des variables aléatoires de Bernoulli est constante égale à 1 ou à 0), ce qui n'est pas le cas car $p \in\,]\,0\,;1\,[$ donc $P(\mathrm{Id}_\Omega = 0)$ et $P(\mathrm{Id}_\Omega = n)$ sont non nulles. En conclusion, Id_Ω ne peut pas s'écrire comme somme de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli (constantes ou non). Définir une loi binomiale comme somme de lois de Bernoulli indépendantes serait donc trop restrictif !

Exercice 49 : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Les variables $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Correction : Pas forcément. Par exemple, si X et Y sont à valeurs entières, alors $X + Y$ et $X - Y$ sont de même parité. Supposons que X et Y suivent une loi $B(1/2)$. Alors $P(X + Y = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0])$. Par indépendance, cette proba vaut $P(X = 0)P(Y = 0) = (1-p)^2$. De plus $P(X - Y = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 0]) = p(1-p)$ par indépendance. Cependant, il est impossible d'avoir à la fois $X + Y = 0$ et $X - Y = 1$ donc

$$P([X + Y = 0] \cap [X - Y = 1]) = 0 \neq P(X + Y = 0)P(X - Y = 1)$$

ce qui permet de conclure que les deux variables aléatoires ne sont pas indépendantes.

Exercice 50 : ✪✪ Soient X une v.a. réelle et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Donner une CNS pour que X et $f(X)$ soient indépendantes.

Correction : Notons $X(\Omega) = \{x_1; \ldots; x_n\}$. Quitte à supprimer les termes superflus i.e. tels que $P(X = x) = 0$, on suppose que $P(X = x_i) > 0$ pour tout i. Prouvons que X et $f(X)$ sont indépendantes si et seulement si f est constante sur $X(\Omega)$. Supposons que f soit constante égale à λ sur $X(\Omega)$, donc $f(X)(\Omega) = \{\lambda\}$ si bien que $[f(X) = \lambda] = \Omega$. Dès lors, pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$P[(X=x)\cap(f(X)=\lambda)] = P(X=x) = P(X=x)P(f(X)=\lambda)$$

On en déduit que les deux variables aléatoires sont indépendantes. Réciproquement, supposons que f ne soit pas constante, i.e. qu'il existe $\alpha \neq \beta$ tels que f prenne les valeurs de α et β. Soit x tel que $f(x)=\alpha$. Alors

$$P([X=x]\cap[f(x)=\beta]) = P(\varnothing) = 0$$

mais $P(X=x)\neq 0$ et l'événement $P(f(X)=\beta)\neq 0$: en effet, si y vérifie $f(y)=\beta$ alors l'événement $[X=y]$ est inclus dans $[f(X)=\beta]$ donc $P(f(X)=\beta)\geq P(X=y)>0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 51 - Fonction caractéristique : ✪✪ On considère dans cet exercice des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Pour X une telle variable aléatoire, on note $\varphi_X : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ l'application définie par :

$$\forall u\in\mathbb{R},\ \varphi_X(u) = E\left(e^{iuX}\right)$$

1. Vérifier que φ_X est $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.
2. Calculer $\varphi_X(0)$, $\varphi_X'(0)$ et $\varphi_X''(0)$.
3. Calculer φ_X lorsque $X\sim B(p)$ puis lorsque $X\sim B(n,p)$.
4. Vérifier l'égalité :
$$P(X=k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_X(u)e^{-iuk}\,\mathrm{d}u$$
Que peut-on en déduire si $\varphi_X=\varphi_Y$?
5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Montrer que $\varphi_{X+Y}=\varphi_X\varphi_Y$.

Correction :

1. Soit $u\in\mathbb{R}$. Notons $X(\Omega)=\{x_1;\dots;x_n\}$ avec les x_i des éléments distincts de $\mathbb{Z}$. Par conséquent, d'après le théorème de transfert :
$$\varphi_X(u) = \sum_{k=1}^n e^{iux_k}P(X=x_k)$$
On en déduit que φ_X est bien $\mathscr{C}^\infty$ et
$$\varphi_X(u+2\pi) \quad = \quad \sum_{k=1}^n e^{ix_k(u+2\pi)}P(X=x_k)$$
Or, les x_k sont des entiers donc, pour tout k, $e^{ix_k(u+2\pi)} = e^{ix_ku+2ix_k\pi} = e^{ix_ku}$ par 2π-périodicité de $x\mapsto e^{ix}$. On en déduit que
$$\varphi_X(u+2\pi) = \sum_{k=1}^n e^{ix_ku}P(X=x_k)$$
c'est-à-dire $\varphi_X(u+2\pi)=\varphi_X(u)$: φ_X est 2π-périodique.
2. Attention, rien ne nous permet de dériver dans l'espérance (on peut le faire mais le démontrer revient à faire le calcul qui suit avec la somme). On sait que $\varphi_X(0)=E(e^{i0X})=E(1)=1$. De plus, pour tout u :
$${\varphi_X}'(u) = \sum_{k=1}^n e^{iux_k}ix_kP(X=x_k)$$
Par conséquent :
$${\varphi_X}'(0) = i\sum_{k=1}^n x_kP(X=x_k) = iE(X)$$
On trouve de même que ${\varphi_X}''(0) = -E(X^2)$.
3. Si $X\sim B(p)$:
$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= e^{iu\times 0}P(X=0)+e^{iu\times 1}P(X=1)\\ &= 1-p+e^{iu}\times p\end{aligned}$$

Supposons à présent que X suive une loi binomiale de paramètres n et p :

$$\begin{aligned}\varphi_X(u) &= \sum_{k=0}^{n} e^{iku} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^{iu}\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(pe^{iu}+1-p\right)^n\end{aligned}$$

Ce résultat est un cas particulier de la question 5 : quand on somme des variables aléatoires indépendantes, on prend le produit des fonctions caractéristiques, et on sait qu'une loi binomiale peut s'écrire comme la somme de n variables de Bernoulli indépendantes.

4. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Notons I_k le membre de droite.

$$\varphi_X(u) = P(X=k)e^{iuk} + \sum_{x_p \neq k}^{e} {}^{iux_p} P(X=x_p)$$

Si $k \notin X(\Omega)$, cela ne change rien puisque la proba ci-dessus est alors nulle. Par conséquent :

$$\varphi_X(u)e^{-iuk} = P(X=k) + \sum_{x_p \neq k}^{e} {}^{iu(x_p-k)} P(X=x_p)$$

Il suffit alors d'intégrer entre 0 et 2π d'utiliser la linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{2\pi} \varphi_X(u)e^{-iuk}\,\mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} P(X=k)\,\mathrm{d}u + \sum_{x_p \neq k}^{P} (X=x_p) \int_0^{2\pi} e^{iu(x_p-k)}\,\mathrm{d}u$$

Or, $x_p - k \in \mathbb{Z}^*$ donc toutes les intégrales de droite sont nulles, et la première fait $2\pi P(X=k)$ ce qui permet de conclure. On en déduit que si $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $P(X=k) = P(Y=k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ donc que X et Y ont la même loi : la fonction caractéristique... caractérise la loi (et on peut montrer que c'est toujours le cas même si la variable aléatoire n'est pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$, mais c'est une autre histoire).

5. Soit $u \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(u) &= E\left(e^{iu(X+Y)}\right) \\ &= E\left(e^{iuX} \times e^{iuY}\right)\end{aligned}$$

Or, d'après le cours, X et Y sont indépendantes donc e^{iuX} et e^{iuY} sont indépendantes donc

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(u) &= E\left(e^{iuX}\right) \times E\left(e^{iuY}\right) \\ &= \varphi_X(u) \times \varphi_Y(u)\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout u, on a le résultat voulu.

Exercice 52 : ✪✪ Soient X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1\,;\, n]\!]$ et telles que $P(X=i, Y=j) = \lambda ij$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

1. Que vaut nécessairement la constante λ ?
2. Donner la loi de X et calculer $E(X)$ et $V(X)$. Même question pour la variable Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.
5. Calculer la loi de $U = \max(X, Y)$.

Correction :

1. On doit avoir

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X=i, Y=j) = 1$$

Par conséquent, on doit avoir

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = 1$$

donc

$$\lambda \times \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 = 1$$

Il en découle que $\lambda = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$.

2. On cherche donc les marginales. Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$. Les événements $([Y = j])_{1 \leq j \leq n}$ forment un système complet d'événements (le système complet d'événements associé à la variable aléatoire Y) donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=1}^{n} P([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda ij \\ &= \lambda i \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{2i}{n(n+1)} \end{aligned}$$

à l'aide de la valeur de λ vue plus haut. Dès lors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} iP(X = i) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n+1}{3} \end{aligned}$$

D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} i^2 P(X = i) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^{n} i^3 \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

D'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9} \\ &= \frac{9n^2+9n-4n^2-4n-1}{18} \\ &= \frac{5n^2+5n-1}{18} \end{aligned}$$

X et Y jouent le même rôle : tous les résultats précédents sont encore valables pour Y.

3. Pour tous i et j,

$$P(X=i) \times P(Y=j) = \left(\frac{2}{n(n+1)}\right)^2 \times ij = P([X=i] \cap [Y=j])$$

donc les deux variables aléatoires sont bien indépendantes.

4. Appliquons la formule des probas totales avec le système complet d'événements $([Y=j])_{1 \leq j \leq n}$:

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{j=1}^{n} P_{Y=j}(X=Y)P(Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P_{Y=j}(X=j)P(Y=j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P(X=j)P(Y=j) \qquad \text{(par indépendance des v.a. } X \text{ et } Y\text{)} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \lambda j^2 \\ &= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)} \end{aligned}$$

5. $U(\Omega) = [\![1 ; n]\!]$. Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$.

$$\begin{aligned} P(U \leq k) &= P([X \leq k] \cap [Y \leq k]) \\ &= P(X \leq k) \times P(Y \leq k) \end{aligned}$$

par indépendance, et puisque X et Y ont même loi, alors $P(U \leq k) = P(X \leq k)^2$. Or :

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{k} [X=i]\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(X=i) \qquad \text{(événements deux à deux incompatibles)} \\ &= \sum_{i=1}^{k} \frac{2i}{n(n+1)} \\ &= \frac{k(k+1)}{n(n+1)} \end{aligned}$$

et donc $P(U \leq k) = \dfrac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2}$. Finalement, $P(U \leq 1) = P(U=1) = \dfrac{4}{n^2(n+1)^2}$ et si $k \geq 2$,

$$P(U=k) = P(U \leq k) - P(U \leq k-1) = \frac{k^2(k+1)^2}{n^2(n+1)^2} - \frac{(k-1)^2k^2}{n^2(n+1)^2}$$

Exercice 53 : ✪✪ Soient n_1 et n_2 deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On se donne X_1 une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n_1 et p, et X_2 une v.a. qui suit une loi binomiale de paramètres n_2 et p. On rappelle (cf. cours) que $X_1 + X_2 \sim B(n_1 + n_2, p)$. Soit $n \in [\![0\,;\, n_1 + n_2]\!]$. On suppose enfin que X_1 et X_2 sont indépendantes. Calculer la loi conditionnelle de X_1 sachant que l'événement $[X_1 + X_2 = n]$ est réalisé.

Correction : Supposons donc $[X_1+X_2 = n]$ réalisé. Dans tous les cas, X_1 ne peut pas prendre une valeur qui n'appartient pas à $[\![0\,;\, n_1]\!]$. Soit donc $k \in [\![0\,;\, n_1]\!]$.

$$\begin{aligned} P_{X_1+X_2=n}(X_1 = k) &= \frac{P([X_1 = k] \cap [X_1 + X_2 = n])}{P(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{P([X_1 = k] \cap [X_2 = n-k])}{P(X_1 + X_2 = n)} \\ &= \frac{P(X_1 = k) \times P(X_2 = n-k)}{P(X_1 + X_2 = n)} \end{aligned}$$

par indépendance des deux variables aléatoires. Il y a deux cas de figure : soit $n-k \in [\![0\,;\, n_2]\!]$, c'est-à-dire $0 \leq n-k \leq n_2$ donc $n - n_2 \leq k \leq n$, soit non.

Si c'est le cas, alors

$$\begin{aligned} P_{X_1+X_2=n}(X_1 = k) &= \frac{\binom{n_1}{k}p^k(1-p)^{n_1-k} \times \binom{n_2}{n-k}p^{n-k}(1-p)^{n_2-n+k}}{\binom{n_1+n_2}{n}p^n(1-p)^{n_1+n_2-n}} \\ &= \frac{\binom{n_1}{k} \times \binom{n_2}{n-k}}{\binom{n_1+n_2}{n}} \end{aligned}$$

et si ce n'est pas le cas, alors $P(X_2 = n-k) = 0$ donc la probabilité recherchée est nulle. Cherchons plus précisément dans quelles conditions la probabilité recherchée est non nulle. Elle est non nulle si $0 \leq k \leq n_1$ et si $n - n_2 \leq k \leq n$ donc si $\max(0, n - n_2) \leq k \leq \min(n, n_1)$. Par conséquent, si cela dépend de la position de n par rapport à n_1 et n_2 :

- Si $n \geq n_1$ et $n \geq n_2$ alors les seules valeurs possibles sont pour $n - n_2 \leq k \leq n_1$: par exemple, si $n_1 = 45, n_2 = 5$ et $n = 48$, alors les seules valeurs possibles pour X_1 (conditionnellement à l'événement $[X_1 + X_2] = n$ bien sûr) sont $k = 43, 44$ et 45 : en dessous de 43, ce n'est pas possible puisque X_2 ne peut pas dépasser 5, et au-dessus de 45 ce n'est pas possible car c'est la valeur maximale de X_1.
- Si $n \geq n_1$ et $n \leq n_2$ alors les valeurs possibles sont pour $0 \leq k \leq n_1$: par exemple, si $n_1 = 5$ et $n_2 = 45$ et $n = 10$, alors les valeurs possibles sont toutes les valeurs de 0 à 5.
- Et ainsi de suite.

Exercice 54 : ✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$. Déterminer :

1. la loi du couple (U, V).
2. la covariance de U et V.
3. si U et V sont indépendantes.

Correction :

1. $(U, V)(\Omega) = \{0; 1; 2\} \times \{1; 0; -1\}$. On a successivement, par indépendance des variables aléatoires :
   - $P(U = 0, V = 0) = P(X = 0, Y = 0) = (1-p)^2$.
   - $P(U = 0, V = 1) = 0$.
   - $P(U = 0, V = -1) = 0$.
   - $P(U = 1, V = 0) = 0$.
   - $P(U = 1, V = 1) = P(X = 1, Y = 0) = p(1-p)$.
   - $P(U = 1, V = -1) = P(X = 0, Y = -1) = p(1-p)$.
   - $P(U = 2, V = 0) = P(X = 1, Y = 1) = p^2$.
   - $P(U = 2, V = 1) = 0$.
   - $P(U = 2, V = -1) = 0$.
2. On a :

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - E(U)E(V)$$

   Or, par linéarité de l'espérance, $E(V) = E(X) - E(Y) = p - p = 0$ donc

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U,V) &= E(UV) \\ &= E(X^2 - Y^2) \\ &= E(X^2) - E(Y^2) \end{aligned}$$

Or, X et Y suivent la même loi donc $E(X^2) = E(Y^2)$ (on peut aussi calculer leur valeur commune : $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = p(1-p) + p^2 = p$, on peut aussi dire que $X^2 = X$ donc $E(X^2) = E(X) = p$ et idem pour Y). Tout ça pour dire que $\text{Cov}(U,V) = 0$: U et V sont non corrélées.

3. Cependant, on prouve comme dans l'exercice 49 que U et V ne sont pas indépendantes : encore un exemple qui montre qu'être indépendantes et non corrélées, ce n'est pas la même chose !

Exercice 55 - Espérance conditionnelle : ✪✪ Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. Pour tout événement non négligeable (i.e. de probabilité non nulle) $A \in \mathscr{P}(\Omega)$, on définit l'espérance conditionnelle de X sachant que A est réalisé :

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|A)$$

1. Montrer que l'espérance sachant que A est réalisé est linéaire.
2. Calculer $E(X|A)$ dans le cas où les variables aléatoires X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes.
3. Soit $(A_1, \dots, A_p)$ un système complet d'événements non négligeables. Montrer la formule des espérances totales :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{p} E(X|A_i)P(A_i)$$

4. Application : soit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ une suite de variables aléatoires suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p et soit $N : \Omega \to [\![1\,;\, q]\!]$ une variable aléatoire entière (où q est un entier supérieur ou égal à 1 fixé). On suppose que toutes ces variables sont indépendantes. Calculer l'espérance de la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Correction :

1. L'espérance conditionnelle n'est rien d'autre que l'espérance pour la probabilité P_A donc est linéaire.
2. Lorsque X et $\mathbb{1}_A$ sont indépendantes, pour tout $x \in X(\Omega)$, $P([X = x] \cap [\mathbb{1}_A = 1]) = P(X = x)P(\mathbb{1}_A = 1)$. Or, $P(\mathbb{1}_A = 1) = P(A)$ si bien que A et $[X = x]$ sont indépendants : on peut « supprimer » le conditionnement, c'est-à-dire que

$$E(X|A) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = E(X)$$

3. Par définition,

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Soit $x \in X(\Omega)$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_1, \dots, A_p)$:

$$P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x|A_i)P(A_i)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{i=1}^{p} xP(X = x|A_i)P(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} P(A_i) \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x|A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} E(X|A_i)P(A_i) \end{aligned}$$

4. Notons S cette variable aléatoire. Attention de ne pas dire que l'espérance est linéaire et que
$$E(S)=\sum_{i=1}^{N}E(X_i)$$
puisque N est aléatoire!!!! Une espérance est un nombre déterministe, non aléatoire! Même si parfois, évidemment, elle peut être inconnue ou dépendre d'un paramètre. Appliquons la formule des espérances totales (i.e. la question précédente) au système complet d'événements $([N=i])_{i\in[\![1\,;\,q]\!]}$. Si l'un des A_i est de probabilité nulle, on fait comme pour la formule des probabilités totales, on attribue à $E(X|A_i)$ une valeur arbitraire, ce qui n'est pas très grave puisqu'on multiplie par $P(A_i)=0$. Dès lors :
$$E(S) \quad = \quad \sum_{i=1}^{q}E(S|N=i)P(N=i)$$
Or, pour tout $i\in[\![1\,;\,q]\!]$,
$$\begin{aligned}
E(S|A_i) &= \sum_{x\in X(\Omega)} xP\left(\sum_{k=1}^{N}X_k|N=i\right)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} xP\left(\sum_{k=1}^{i}X_k|N=i\right)\\
&= E\left(\sum_{k=1}^{i}X_k|N=i\right)\\
&= \sum_{k=1}^{i}E(X_k|N=i) && \text{(par linéarité de l'espérance conditionnelle)}\\
&= \sum_{k=1}^{i}E(X_k) && \text{(par indépendance des variables aléatoires)}\\
&= \sum_{k=1}^{i}p && \text{(Les } X_k \text{ suivent une loi de Bernoulli de paramètre } p\text{)}\\
&= i\times p
\end{aligned}$$
Finalement :
$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{i=1}^{q}i\times p\times P(N=i)\\
&= p\sum_{i=1}^{q}iP(N=i)\\
&= pE(N)
\end{aligned}$$

Exercice 56 : ✪✪ On tire successivement et sans remise toutes les boules d'une urne contenant $n-2$ boules rouges et 2 boules bleues (avec $n\in\mathbb{N}\backslash\{0,1\}$). On note X le rang d'apparition de la première boule bleue et Y le rang d'apparition de la seconde.

1. Préciser la loi marginale de X, la loi du couple (X,Y) et en déduire la loi marginale de Y.
2. Soit $k\geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $[Y=k]$ est réalisé.
3. Soit $k\geq 1$. Déterminer la loi conditionnelle de $Y-k$ sachant que $[X=k]$ est réalisé.

Correction :

1. $X(\Omega)=[\![1\,;\,n-1]\!]$. Soit $k\in[\![1\,;\,n-1]\!]$. Notons, pour tout i, R_i : « tirer la boule rouge au i-ème tirage » et B_i : « tirer une boule bleue au i-ème tirage ». Alors
$$P(X=k)=P(R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}\cap B_k)$$

Puisqu'il n'y a pas de remise, les événements ne sont pas indépendants : on applique donc la formule des probabilités composées.

$$P(X=k) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)\cdots P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-2}}(R_{k-1})P_{R_1\cap\cdots\cap R_{k-1}}(B_k)$$

Comme on l'a déjà fait plusieurs fois, il vient :

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times\cdots\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{2}{n-k+1} \\ &= \frac{2(n-k)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Donnons la loi conjointe de (X,Y). Tout d'abord, $(X,Y)(\Omega) = \{(k,p)\,|\,k\in[\![1\,;\,n-1]\!], p\in[\![1\,;\,n]\!], k<p\}$. Soit donc (k,p) avec $k<p$ et calculons $P(X=k,Y=p)$. Les événements ne sont pas indépendants donc, toujours d'après la formule des probas composées :

$$P([X=k]\cap[Y=p]) = P(X=k)P_{X=k}(Y=p)$$

Supposons $[X=k]$ réalisé. Alors on a tiré une boule bleue et $k-1$ boules rouges donc, après le tirage numéro k, l'urne contient une boule bleue et $n-k$ boules (dont $n-k-1$ boules rouges). Dès lors, toujours d'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned} P_{X=k}(Y=p) &= P_{[X=k]}(R_{k+1}\cap\cdots\cap R_{p-1}\cap B_p) \\ &= P_{[X=k]}(R_{k+1})\times P_{[X=k]\cap R_{k+1}}(R_{k+2})\times\cdots\times P_{[X=k]\cap R_{k-1}\cap\cdots R_{p-2}}(R_{p-1})\times P_{[X=k]\cap R_{k-1}\cap\cdots R_{p-1}}(B_p) \\ &= \frac{n-k-1}{n-k}\times\frac{n-k-2}{n-k-1}\times\cdots\times n-k-pn-k-p+1\times\frac{1}{n-k-p} \\ &= \frac{1}{n-k} \end{aligned}$$

Conditionnellement à l'événement $[X=k]$, Y suit une loi uniforme sur $[\![k+1\,;\,n]\!]$. On en déduit que

$$P([X=k]\cap[Y=p]) = \frac{2}{n(n-1)}$$

Puisque $Y(\Omega)=[\![2\,;\,n]\!]$, à l'aide du système complet d'événements $([X=k])_{k\in[\![1\,;\,n-1]\!]}$, pour tout $p\in[\![2\,;\,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(Y=p) &= \sum_{k=1}^{n} P([X=k]\cap[Y=p]) \\ &= \sum_{k=1}^{p-1} P([X=k]\cap[Y=p]) \\ &= \frac{2(p-1)}{n(n-1)} \end{aligned}$$

2. Supposons donc $[Y=k]$ réalisé. Alors $X(\Omega)=[\![1\,;\,k-1]\!]$. Soit $p\in[\![1\,;\,k-1]\!]$.

$$\begin{aligned} P_{Y=k}(X=p) &= \frac{P([X=p]\cap[Y=k])}{P(Y=k)} \\ &= \frac{1}{k-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que X suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,k-1]\!]$ (conditionnellement à $[Y=k]$).

3. Supposons $[X=k]$ réalisé. Alors $Y(\Omega)=[\![k+1\,;\,n]\!]$. On prouve alors comme précédemment que Y suit une loi uniforme sur $[\![k+1\,;\,n]\!]$ donc $Y-k$ suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n-k]\!]$.

Exercice 57 : ✪✪ Soit $n\geq 2$. On dispose de n urnes $\mathcal{U}_1,\ldots,\mathcal{U}_n$. Pout tout $k\in[\![1\,;\,n]\!]$, l'urne $\mathcal{U}_k$ contient k jetons numérotés de 1 à k. On choisit une urne au hasard, puis on tire un jeton dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro du jeton tiré.

1. Déterminer la loi de X. Calculer son espérance.
2. Expliciter la loi conjointe de X et Y.
3. En déduire que pour tout $\ell \in [\![1\,; n]\!]$, $P(Y = \ell) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k}$.
4. Calculer l'espérance de Y.
5. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :

1. X suit une loi uniforme sur $[\![1\,; n]\!]$. On prouve comme dans l'exercice 10 que $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
2. $(X, Y)(\Omega) = [\![1\,; n]\!]^2$. Soit $(k, \ell) \in [\![1\,; n]\!]^2$. Tout d'abord, si $\ell > k$, $P([X = k] \cap [Y = \ell]) = 0$. Supposons donc $\ell \leq k$. Dès lors :

$$\begin{aligned} P([X = k] \cap [Y = \ell]) &= P(X = k)P_{X=k}(Y = \ell) \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   En effet, si $[X = k]$ est réalisé, alors on tire dans l'urne k et donc la proba de tirer le numéro ℓ vaut $1/k$.
3. Analogue à l'exercice 38 du chapitre précédent.
4. On a donc :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y = \ell) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n} \frac{\ell}{k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} \ell \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}(k+1) \\ &= \frac{1}{2n} \times \left(\frac{n(n+1)}{2} + n\right) \\ &= \frac{n+1}{4} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Non car $P([X = 1] \cap [Y = 2]) = 0 \neq P(X = 1) \times P(Y = 2)$.

Exercice 58 : ✪✪ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ et on note u_n la probabilité que S_n soit pair.

1. Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n.
2. Calculer u_1 et u_2 puis trouver une relation de récurrence liant u_n et u_{n+1}, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n, puis la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Correction :

1. D'après le cours, les X_i suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre p et étant indépendantes, $S_n \sim B(n, p)$.
2. $u_1 = P(X_1 = 0) = 1 - p$ et $u_2 = P([S_2 = 0] \cup [S_2 = 2])$. Ces deux événements étant incompatibles,

$$\begin{aligned} u_2 &= P(S_2=0)+P(S_2=2) \\ &= P([X_1=0]\cap[X_2=0])+P([X_1=1]\cap[X_2=1]) \\ &= P(X_1=0)P(X_2=0)+P(X_1=1)P(X_2=1) \qquad \text{(Par indépendance des v.a.)} \\ &= (1-p)^2+p^2 \end{aligned}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $[X_{n+1}=0]$ et $[X_{n+1}=1]$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P_{X_{n+1}=0}(S_{n+1} \text{ est pair})P(X_{n+1}=0)+P_{X_n=1}(S_{n+1} \text{ est pair})P(X_{n+1}=1) \\ &= P_{X_{n+1}=0}(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1}=0)+P_{X_{n+1}=1}(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1}=1) \end{aligned}$$

En effet, si $X_{n+1}=1$, alors $S_{n+1}=S_n+1$ donc S_{n+1} est pair si et seulement si S_n est impair, et c'est la même chose pour l'autre. Or, d'après le lemme des coalitions (S_n est obtenu à l'aide de $X_1,\dots,X_n$), S_n et X_{n+1} sont indépendantes. Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(S_n \text{ est pair})P(X_{n+1}=0)+P(S_n \text{ est impair})P(X_{n+1}=1) \\ &= u_n\times(1-p)+(1-u_n)\times p \\ &= u_n\times(1-2p)+p \end{aligned}$$

3. On reconnaît une suite arithmético-géométrique (et $1-2p<1$ puisque $p>0$, comme il est précisé au début de la feuille d'exercices) : l'équation caractéristique est

$$x=(1-2p)x+p \iff x=1/2$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= (1-2p)u_n &+ \quad p \\ \frac{1}{2} &= (1-2p)\times\frac{1}{2} &+ \quad p \end{aligned}$$

Par différence :

$$u_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2p)\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$$

c'est-à-dire que la suite de terme général $u_n-1/2$ est géométrique de raison $1-2p$, si bien que (attention, la suite commence au rang $n=1$!)

$$u_n-\frac{1}{2}=(1-2p)^{n-1}\times\left(u_1-\frac{1}{2}\right)$$

et donc, puisque $u_1=1-p$:

$$u_n=\frac{1}{2}+(2p-1)^{n-1}\times\left(\frac{1}{2}-p\right)$$

et puisque $p\in\,]\,0\,;1\,[$, $2p-1\in\,]-1\,;1\,[$ si bien que $(2p-1)^{n-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}$.

Exercice 59 : ✪✪ On considère X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires, mutuellement indépendantes, et suivant toutes une loi uniforme sur $\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$. On note Y_1, Y_2, Y_3 les valeurs de X_1, X_2, X_3 réordonnées dans l'ordre croissant. En particulier, $Y_1=\min(X_1,X_2,X_3)$ et $Y_3=\max(X_1,X_2,X_3)$.

1. Pour tout $k\in\llbracket 1\,;\,n\rrbracket$, trouver $P(Y_3\le k)$. En déduire la loi de Y_3.
2. Déterminer la loi de Y_1.
3. On note Z_k la variable aléatoire égale au nombre d'indices $i\in\llbracket 1\,;\,3\rrbracket$ tels que $X_i\le k$.
   (a) Quelle est la loi de Z_k ?
   (b) Comparer $[Z_k\ge 2]$ et $[Y_2\le k]$. En déduire $P(Y_2\le k)$.

Correction :

1. $P(Y_3 \leq k) = P([X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k] \cap [X_3 \leq k])$. Par indépendance des variables aléatoires,
$$P(Y_3 \leq k) = P(X_1 \leq k)P(X_2 \leq k)P(X_3 \leq k)$$
Or, X_1, X_2, X_3 suivent une loi uniforme sur $\llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ donc $P(X_1 \leq k) = P(X_2 \leq k) = P(X_3 \leq k) = k/n$ si bien que $P(Y_3 \leq k) = (k/n)^3$. Tout d'abord, $Y_3(\Omega) = \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$. Si $k = 1$ alors
$$P(Y_3 = 1) = P(Y_3 \leq 1) = \frac{1}{n^3}$$
tandis que si $k \geq 2$:
$$\begin{aligned} P(Y_3 = k) &= P([Y_3 \leq k] \backslash [Y_3 \leq k-1]) \\ &= P(Y_3 \leq k) - P(Y_3 \leq k-1) \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3 \end{aligned}$$
2. On trouve de même que $Y_1(\Omega) = \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$, que $P(Y_1 \geq n) = 1/n^3$ et que, pour tout $k \in \llbracket 1\,;\,n-1 \rrbracket$:
$$\begin{aligned} P(Y_1 = k) &= P([Y_3 \geq k] \backslash [Y_3 \leq k+1]) \\ &= P(Y_3 \geq k) - P(Y_3 \geq k+1) \\ &= \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^3 - \left(\frac{n-k}{n}\right)^3 \end{aligned}$$
3. (a) Z_k est la variable aléatoire égale au nombre de succès ($X_i \leq k$, proba k/n) obtenus lors de trois répétitions indépendantes (car les v.a. sont indépendantes) d'une expérience aléatoire (choisir un nombre uniformément dans $\llbracket 1\,;\,n \rrbracket$). On en déduit que $Z_k \sim B(3, k/n)$.

   (b) $[Z_k \geq 2]$ est l'événement : « au moins deux variables aléatoires parmi X_1, X_2, X_3 sont inférieures ou égales à k » ce qui est équivalent à « $Y_2 \leq k$ » puisque Y_2 est la variable aléatoire « du milieu ». Dès lors, $P(Z_k \geq 2) = P(Y_2 \leq k)$ si bien que
$$\begin{aligned} P(Y_2 \leq k) &= P([Z_k = 2] \cup [Z_k = 3]) \\ &= P(Z_2 = 2) + P(Z_k = 3) \\ &= \binom{3}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(1 - \frac{k}{n}\right)^1 + \binom{3}{3}\left(\frac{k}{n}\right)^3\left(1 - \frac{k}{n}\right)^0 \\ &= \frac{3k^2(n-k)}{n^3} + \left(\frac{k}{n}\right)^3 \end{aligned}$$

Exercice 60 - La loi triangulaire : ✪✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\llbracket 0\,;\,n \rrbracket$. Donner la loi de $Z = X + Y$ et la représenter sous forme d'histogramme pour $n = 5$. Expliquer le nom de cette loi.

Correction : $Z(\Omega) = \llbracket 0\,;\,2n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0\,;\,2n \rrbracket$.

Supposons que $k \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{i \in \llbracket 0\,;\,n \rrbracket}$:
$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{n} P_{X=i}(X + Y = k)P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P_{X=i}(Y = k - i)P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} P(Y = k - i)P(X = i) \end{aligned}$$

par indépendance des variables aléatoires X et Y. Si $k < i$ alors $P(Y = k - i) = 0$ car Y est à valeurs positives donc la somme va de 0 à k :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(Y = k - i)P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{k+1}{n^2} \end{aligned}$$

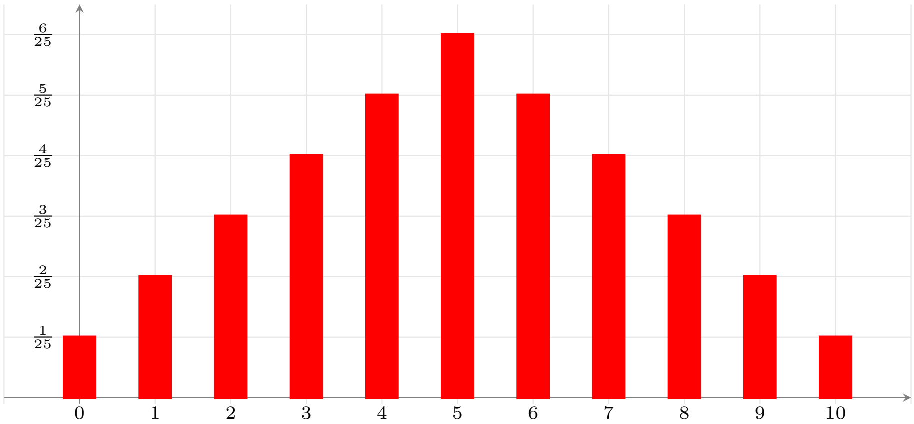
Supposons à présent que $i > n$. Alors $P(Y = k - i) \neq 0$ si et seulement si $0 \leq k - i \leq n$ si et seulement si $k - n \leq i$: la somme va donc de $k - n$ à n (puisque $i \leq n$) :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=k-n}^{n} P(Y = k - i)P(X = i) \\ &= \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{2n - k + 1}{n^2} \end{aligned}$$

Pour $n = 5$, cela donne la loi suivante, qu'on représente sous forme d'histogramme :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

On peut aussi tracer son diagramme en bâtons :



Le nom de cette loi est plutôt clair...

Exercice 61 : ✪✪✪ Le but de cet exercice est de prouver de deux façons différentes qu'il est impossible de truquer deux dés de sorte que la somme des deux dés suive une loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$. Dans les deux cas, on fait un raisonnement par l'absurde et on suppose que c'est possible. On note :

- X_1 la variable aléatoire égale au résultat du premier dé.
- X_2 la variable aléatoire égale au résultat du deuxième dé.
- $S = X_1 + X_2$, et donc $S \sim U([\![2\,;12]\!])$.
- pour tout $k \in [\![1\,;6]\!], p_k = P(X_1 = k)$ et $q_k = P(X_2 = k)$.

1. **Première méthode :** par la force brute.
   (a) Pour tout $k \in [\![2\,;12]\!]$, exprimer $P(S = k)$ en fonction des p_i et q_j. Montrer en particulier que $p_1q_1 = p_6q_6 = 1/11$ et que $p_1q_6 + p_6q_1 \leq 1/11$.
   (b) En déduire que :

$$p_1q_6 + p_6q_1 = \frac{1}{11} \times \frac{{p_1}^2 + {p_6}^2}{p_1p_6}$$

(c) Conclure à une absurdité.

2. **Deuxième méthode :** avec des polynômes. On définit les polynômes $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} p_{k+1} X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} q_{k+1} X^k$.

(a) Exprimer le polynôme $P \times Q$ à l'aide de la variable aléatoire S.

(b) En déduire le degré de P et de Q, puis que P et Q ont chacun au moins une racine réelle.

(c) Donner les racines complexes de $P \times Q$ et en déduire une absurdité.

Correction :

1. (a) Soit $k \in [\![2\,;\,12]\!]$. Les événements $([X_1 = i])_{i \in [\![1\,;\,6]\!]}$ forment un système complet d'événements (c'est le système complet d'événements associé à X_1). D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(S=k) &= \sum_{i=1}^{6} P_{X_1=i}(S=k)P(X_1=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} P_{X_1=i}(X_1+X_2=k)P(X_1=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} P_{X_1=i}(X_2=k-i)P(X_1=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} P(X_2=k-i)P(X_1=i) \\
&= \sum_{i=1}^{6} q_{k-i}p_i
\end{aligned}$$

puisque les variables X_1 et X_2 sont indépendantes. Tout dépend à présent de si $k \leq 6$ ou $k > 6$. Supposons dans un premier temps que $k \leq 6$. Si $i \geq k$ alors $P(X_2 = k - i) = 0$ donc la somme va en fait de 1 à $k - 1$:

$$P(S=k) = \sum_{i=1}^{k-1} q_{k-i}p_i$$

Si on suppose à présent que $k > 6$, $P(X_2 = k-i) \neq 0$ si et seulement si $k - i \leq 6$ si et seulement si $i \geq k - 6$: la somme va donc de $k - 6$ à 6 (puisque $P(X_1 = i) \neq 0$ si $i \leq 6$)

$$P(S=k) = \sum_{i=k-6}^{6} q_{k-i}p_i$$

En particulier, si $k = 2$, la somme va de 1 à 1 donc :

$$P(S=2) = p_1q_1$$

donc on a bien $p_1q_1 = 1/11$ (puisque S suit une loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$ donc $P(S = 2) = 1/11$) et si $k = 12$, on est dans le deuxième cas et la somme va de 6 à 6 donc $P(S = 12) = p_6q_6$ donc on a encore $p_6q_6 = 1/11$. Si on prend cette fois $k = 7$, on est dans le deuxième cas et la somme va de 1 à 6 :

$$P(S=7) = \frac{1}{11} = q_1p_6 + q_2p_5 + q_3p_4 + q_4p_3 + q_5p_2 + q_6p_1$$

Le fait que $q_1p_6 + q_6p_1 \leq 1/11$ ce qui est immédiat puisque la somme ci-dessus est égale à $1/11$ et les autres termes sont positifs.

(b) Il découle de la question précédente que $q_1 = 1/11p_1$ et que $q_6 = 1/11p_6$ donc :

$$p_1q_6 + p_6q_1 = \frac{p_1}{11p_6} + \frac{p_6}{11p_1}$$

Il suffit de mettre au même dénominateur pour conclure.

(c) $p_1p_6 \leq 2p_1p_6 \leq {p_1}^2 + {p_6}^2$ (inégalité classique $2xy \leq x^2+y^2$ qui découle du fait que $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0$). On en déduit que

$$\frac{{p_1}^2 + {p_6}^2}{p_1p_6} \geq 2$$

donc $p_1q_6 + p_6q_1 \geq 2/11$ ce qui contredit la première question : absurde.

2. (a) En développant :

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{10} c_k X^k$$

où, pour tout k,

$$c_k = \sum_{i+1+j+1=k} p_{i+1}q_{j+1}$$

puisqu'on obtient X^k en multipliant un terme de la forme $p_{i+1}X^i$ par un terme $q_{j+1}X^j$: on prend donc tous les produits possibles $p_{i+1}q_{j+1}$ pour $i+j=k$ et on somme. Or, on reconnaît $P(S=k+2)$ car $j = k+1-i = k+2-(i+1)$ et donc

$$c_k = \sum_{i=0}^{6} p_{i+1}q_{k+2-(i+1)}$$

et on reconnaît la valeur de $P(S=k+2)$ vue à la question 1.(a). Dès lors,

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{10} P(S=k+2)X^k$$

(b) Puisque S suit une loi uniforme sur $[\![2\,;\,12]\!]$ alors

$$P \times Q = \frac{1}{11}\sum_{k=0}^{10} X^k$$

Il en découle que $P \times Q$ est de degré 10. Or, $10 = \deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ et P et Q sont de degré au plus 5 donc il y a égalité : $\deg(P) = \deg(Q) = 5$. Ils sont de degré impair donc admettent au moins une racine réelle (cf. exercice 16 du chapitre 19).

(c) D'après la question précédente, $P \times Q$ admet au moins deux racines réelles (avec multiplicité, c'est-à-dire une racine double si P et Q admettent la même). Or,

$$P \times Q = \frac{1}{11} \times \frac{1-X^{11}}{1-X}$$

(aucun problème de valeur interdite : une fraction rationnelle n'est pas une fonction, cf. chapitre 20) c'est-à-dire que les racines de $P \times Q$ sont les racines 11-ièmes de l'unité différentes de 1 : $P \times Q$ n'a aucune racine réelle, ce qui est absurde.

Exercice 62 : ✪✪✪ On considère n variables aléatoires mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_n$ qui suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, on pose $Y_i = X_iX_{i+1}$. On pose enfin : $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Pour tout $i \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, donner la loi de Y_i.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Calculer la variance de Y.

Correction :

1. $Y_i(\Omega) = \{0;1\}$ et $Y_i = 1$ si et seulement si $X_i = X_{i+1} = 1$ donc, par indépendance :

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1) &= P([X_i=1] \cap [X_{i+1}=1]) \\ &= P(X_i=1)P(X_{i+1}=1) \\ &= p^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $Y_i \sim B(p^2)$.

2. Par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(Y_1) + \cdots + E(Y_n)$ et toutes les Y_i sont d'espérance p^2 d'après la question précédente donc $E(Y) = np^2$.
3. Attention, les Y_i ne sont pas indépendantes ! Si $Y_1 = 0$ alors $X_1 = 0$ ou $X_2 = 0$ et cela donne une information supplémentaire pour que Y_2 soit nulle. On appelle la formule générale :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$$

Pour tout i, $V(Y_i) = p^2(1-p^2)$. Si $j \neq i+1$ (rappelons que $i < j$) alors, d'après le lemme des coalitions, $Y_i = X_iX_{i+1}$ et $Y_j = X_jX_{j+1}$ sont indépendantes donc non corrélées donc $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$. Dès lors :

$$V(Y) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) + 2\sum_{i=1}^{n-2} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1})$$

Soit $i \in [\![1\,;\, n-2]\!]$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) \\ &= E(X_i{X_{i+1}}^2X_{i+1}) - p^2 \times p^2 \end{aligned}$$

Or, ${X_{i+1}}^2 = X_{i+1}$ puisque X_{i+1} prend les valeurs 0 et 1 donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) &= E(X_iX_{i+1}X_{i+1}) - p^4 \\ &= E(X_i)E(X_{i+1})E(X_{i+2}) - p^4 \end{aligned}$$

par indépendance, si bien que $\mathrm{Cov}(X_i, X_{i+1}) = p^3 - p^4$. Finalement :

$$\begin{aligned} V(Y) &= \sum_{i=1}^{n-1} p^2(1-p^2) + 2\sum_{i=1}^{n-2}(p^3 - p^4) \\ &= (n-1)(p^2 - p^4) + 2(n-2)(p^3 - p^4) \\ &= (n-1)p^2 + 2(n-2)p^3 - (3n-5)p^4 \end{aligned}$$

Remarquons que $p^2 \geq p^4$ et $p^3 \geq p^4$ donc on a bien une quantité positive.

Exercice 63 : ✪✪✪ Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.

1. On suppose dans cette question que X et Y suivent une loi binomiale de paramètres n et $1/2$. Donner $P(X = Y)$ et en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$. On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

2. On revient au cas général i.e. que X et Y suivent une loi quelconque (mais la même). Notons $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{u_0; \dots; u_n\}$ et, pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$, $p_k = P(X = u_k) = P(Y = u_k)$. Donner les variations de la fonction φ définie sur $[\,0\,;1\,]$ par :

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1-t}{n+1} + tp_k \right)^2$$

En déduire que $P(X = Y) \geq \dfrac{1}{n+1}$. Cas d'égalité ?

Correction :

1. Avec le système complet d'événements $([Y = k])_{k \in [\![0\,;\, n]\!]}$ i.e. le système complet d'événements associé à Y :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} P_{Y=k}(X=Y)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_{Y=k}(X=k)P(Y=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=k) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}\frac{1}{2^n} \\
&= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \\
&= \frac{1}{4^n} \times \binom{2n}{n}
\end{aligned}$$

Remarquons que la formule de Stirling donne $P(X=Y) \sim 1/\sqrt{n\pi}$ (l'équivalent est évidemment pris lorsque $n \to +\infty$) ce qui est cohérent avec la question précédente.

2. $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{u_0; \dots ; u_n\}$ (en particulier contient $n+1$ termes), et on veut prouver que $P(X=Y) \geq 1/(n+1)$. φ est dérivable (c'est une fonction polynôme). Soit $t \in [\,0\,;1\,]$.

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= 2\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{n+1} + p_k \right) \times \left(\frac{1-t}{n+1} + tp_k \right) \\
&= \frac{1-t}{n+1} \times 2\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{n+1} + p_k \right) + 2t\sum_{k=0}^{n} p_k \times \left(\frac{-1}{n+1} + p_k \right)
\end{aligned}$$

Or, la première somme est nulle puisque $p_0 + \cdots + p_n = 1$ et la somme des $-1/(n+1)$ vaut -1. On en déduit que :

$$\varphi'(t) = 2t\sum_{k=0}^{n} p_k \times \left(\frac{-1}{n+1} + p_k \right)$$

En d'autres termes, $\varphi'(0) = 0$. Or, φ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 positive (ou nulle). Soit φ est constante, soit c'est une fonction polynôme du second degré de coefficient dominant strictement positif (elle ne peut pas être affine non constante car alors elle ne serait pas de signe constant, ni polynomiale de degré 2 de coefficient dominant strictement négatif car elle prendrait alors parfois des valeurs strictement négatives). On en déduit alors qu'elle est décroissante puis croissante (au sens large, même si φ est constante), et donc, si φ' s'annule en un point x_0, φ est croissante « après x_0 » (même si φ est constante) et puisque φ' s'annule en 0, φ est croissante sur $[\,0\,;1\,]$. Par conséquent, pour tout $t \in [\,0\,;1\,], \varphi(t) \geq \varphi(0) = 1/(n+1)$. Or, avec le système complet d'événements $([Y=u_k])_{k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]}$, on trouve de même que ci-dessus que :

$$P(X=Y) = \sum_{k=0}^{n} {p_k}^2 = \varphi(1) \geq \frac{1}{n+1}$$

ce qui permet de conclure. On pouvait le montrer directement avec l'inégalité de Jensen (avec les λ_i égaux à $1/(n+1)$ et les x_i égaux aux p_i). Si on note f la fonction carré (convexe sur $\mathbb{R}_+$) :

$$f\left(\frac{p_0 + \cdots + p_n}{n+1} \right) \leq \frac{f(p_0) + \cdots + f(p_n)}{n+1}$$

c'est-à-dire (puisque $p_0 + \cdots + p_n = 1$)

$$\frac{1}{n+1}^2 \leq \frac{{p_0}^2 + \cdots + {p_n}^2}{n+1}$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{n} {p_k}^2 \geq \frac{1}{n+1}$$

ce qui permet aussi de conclure. Le problème est que cela ne permet pas de donner le cas d'égalité : on a égalité si et seulement si φ est constante (car sinon, on a une fonction polynôme du second degré donc est strictement croissante après 0). Par conséquent, il y a égalité si et seulement si φ' est nulle si et seulement si

$$\sum_{k=0}^{n} p_k \left(p_k - \frac{1}{n+1}\right) = 0$$

Or, c'est une somme de termes positifs : elle est donc nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, si et seulement si $p_k = 1/(n+1)$ pour tout n (on suppose les p_k non nuls, sinon on retire de l'univers image l'élément u_k correspondant), donc si et seulement si X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![0\,;\,n]\!]$.

Exercice 64 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de loi conjointe :

$$\forall j \in [\![0\,;\,n]\!], \forall k \in [\![1\,;\,n]\!], P(X = j, Y = k) = \begin{cases} \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k = j \text{ et } j \neq 0 \\ \dfrac{(1-p)^n}{n} & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Donner les lois marginales du couple, et les espérances de X et Y.
2. Soit $j \in [\![0\,;\,n]\!]$. Donner la loi conditionnelle de Y sachant que $[X = j]$ est réalisé.
3. Calculer l'espérance correspondante.
4. Montrer que $P(X = 1, Y = 1) \neq P(X = 1)P(Y = 1)$.
5. Calculer $E(XY) - E(X)E(Y)$. Montrer que cette quantité s'annule pour une valeur de p.
6. Qu'en déduire ?

Correction :

1. $X(\Omega) = [\![0\,;\,n]\!]$ (cela correspond à j). Soit $j \in [\![0\,;\,n]\!]$. Puisque $([Y = k])_{k \in [\![1\,;\,n]\!]}$ est un système complet d'événements (c'est le système complet associé à Y), d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X = j) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} P([X = j] \cap [Y = k])$$

Il semble légitime, selon l'énoncé, de séparer les cas selon que $j = 0$ ou $j \neq 0$. Supposons $j = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{k=1}^{n} P([X = 0] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-p)^n}{n} \\ &= (1-p)^n \end{aligned}$$

Supposons à présent $j \neq 0$. Alors la somme ci-dessus ne comporte qu'un seul terme non nul, celui pour $k = j$ (et alors $k = j$ donc on peut remplacer k par j) si bien que

$$P(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

Cette égalité étant toujours vraie si $j = 0$, on obtient que $X \sim B(n, p)$. On a $Y(\Omega) = [\![1\,;\,n]\!]$. Soit à présent $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = j])_{j \in [\![0\,;\,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{j=0}^{n} P([X=j]\cap[Y=k]) \\
&= P([X=0]\cap[Y=k]) + \sum_{j=1}^{n} P([X=j]\cap[Y=k]) \\
&= \frac{(1-p)^n}{n} + P([X=k]\cap[Y=k]) \\
&= \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

2. Là aussi, séparons les cas selon que $j = 0$ ou non. Supposons dans un premier temps $j = 0$ et supposons que $[X = 0]$ est réalisé. Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}
P_{X=0}(Y=k) &= \frac{P([X=0]\cap[Y=k])}{P(X=0)} \\
&= \frac{\frac{(1-p)^n}{n}}{(1-p)^n} \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la loi conditionnelle cherchée est la loi uniforme sur $[\![1\,;\,n]\!]$. Supposons à présent que $j \in [\![1\,;\,n]\!]$. Alors :

$$P_{X=j}(Y=k) = \frac{P([X=j]\cap[Y=k])}{P(X=j)}$$

Or, le numérateur est nul sauf si $k = j$, et il vaut $\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$ sinon. On en déduit que $P_{[X=j]}(Y = k) = 0$ si $k \neq j$ et vaut 1 si $k = j$. En d'autres termes, la loi conditionnelle recherchée est la loi certaine égale à j.

3. Si $j = 0$, on prouve de même que dans l'exercice 10 que l'espérance de la loi conditionnelle vaut $\frac{n+1}{2}$ et si $j \neq 0$, alors l'espérance vaut j (espérance d'une loi certaine).

4. D'après ce qui précède,

$$P(X=1) = np(1-p)^{n-1}, P(Y=1) = \frac{(1-p)^n}{n} + np(1-p)^{n-1} \qquad \text{et} \qquad P(X=1, Y=1) = np(1-p)n - 1$$

Or, $P(Y = 1) \neq 1$ (car Y prend d'autres valeurs puisque $n \geq 2$) donc il n'y a pas égalité.

5. Puisque $X \sim B(n, p)$ alors $E(X) = np$. Calculons $E(Y)$.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{(1-p)^n}{n} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

La deuxième somme ci-dessus vaut np car on reconnaît l'espérance d'une loi $B(n, p)$ (le fait que la somme commence en 1 ne change rien car le terme d'indice $k = 0$ est nul). Dès lors :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{(1-p)^n}{n}\sum_{k=1}^{n} k + np \\
&= \frac{(1-p)^n \times (n+1)}{2} + np
\end{aligned}$$

Calculons à présent $E(XY)$. Précisons que les deux v.a. X et Y ne sont pas indépendantes d'après la question précédente. On sait que $XY \neq 0$ uniquement lorsque $X = Y$ donc $XY(\Omega) = \{j^2 \,|\, j \in [\![0\,;\,n]\!]\}$ c'est-à-dire que XY prend comme valeurs les carrés parfaits. On sait que, pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\begin{aligned} P(XY=j^2) &= P([X=j]\cap[Y=j]) \\ &= \binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \end{aligned}$$

et $P(XY=0)=1-$ tout le reste (cette valeur n'a aucune importance puisqu'on multiplie par 0 dans le calcul de l'espérance). Dès lors :

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{j=0}^{n} j^2 P(XY=k^2) \\ &= \sum_{j=1}^{n} j^2\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j} \\ &= E(X^2) \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert, c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} E(XY) &= V(X)+E(X)^2 \\ &= np(1-p)+n^2p^2 \\ &= np-np^2+n^2p^2 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} E(XY)-E(X)E(Y) &= np-np^2+n^2p^2-np\times\left(\frac{(1-p)^n\times(n+1)}{2}+np\right) \\ &= np-np^2+n^2p^2-np\times\frac{(1-p)^n\times(n+1)}{2}-n^2p^2 \\ &= np(1-p)-np\times\frac{(1-p)^n\times(n+1)}{2} \\ &= np\left(1-p-\frac{(1-p)^n(n+1)}{2}\right) \\ &= np(1-p)\left(1-\frac{(1-p)^{n-1}(n+1)}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappelons (cf. tout début de la feuille d'exos) que $p\in\,]\,0\,;1\,[$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} E(XY)-E(X)E(Y)=0 &\iff 1-\frac{(1-p)^{n-1}(n+1)}{2}=0 \\ &\iff \frac{(1-p)^{n-1}(n+1)}{2}=1 \\ &\iff (1-p)^{n-1}=\frac{2}{n+1} \\ &\iff 1-p=\sqrt[n-1]{\frac{2}{n+1}} \\ &\iff p=1-\sqrt[n-1]{\frac{2}{n+1}} \end{aligned}$$

Il existe donc bien p tel que $E(XY)-E(X)E(Y)$.

6. Pour cette valeur, X et Y ne sont pas indépendantes (cf. question 4) mais ne sont pas corrélées : encore une fois, ce n'est pas la même chose !

Exercice 65 : ✪✪✪ Soient p et q deux éléments de $[\,0\,;1\,]$.

1. Soient A et B deux événements de probabilités respectives p et q. Donner toutes les probabilités possibles de $P(A\cap B)$.

2. Soient $X \sim B(p)$ et $Y \sim B(q)$. Donner toutes les lois conjointes possibles du couple (X, Y).

Correction :

1. On sait que $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$ donc $P(A \leq B) \leq P(A)$ et $P(A \cap B) \leq P(B)$ donc $P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B)) = \min(p, q)$. Mais, pour autant, tous les réels compris entre 0 et $\min(p, q)$ sont-ils possibles ? Notons $x = P(A \cap B)$. On sait donc que $0 \leq x \leq \min(p, q)$. Pour avoir $x = 0$, il suffit (ce n'est pas équivalent ! proba nulle n'est pas équivalent à vide) d'avoir $A \subset \overline{B}$ mais alors on doit avoir $p \leq 1 - q$. On voit donc que certaines conditions doivent être remplies. De plus,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = p + q - x$$

et donc $p + q - x \leq 1$ si bien que $p + q - 1 \leq x$. Par conséquent, x doit être inférieur à $\min(p, q)$ et être supérieur à 0 et à $p + q - 1$ donc à $\max(p + q - 1, 0)$. Par conséquent, une condition NÉCESSAIRE est :

$$\max(0, p + q - 1) \leq x \leq \min(p, q)$$

Prouvons la réciproque : soit donc x vérifiant ces deux inégalités, et prouvons qu'il est possible de construire deux événements A et B tels que $P(A) = p, P(B) = q$ et $P(A \cap B) = x$. Attention : on doit aussi construire l'espace probabilité $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$ il ne faut pas prouver qu'on peut le faire sur tout espace probabilisable ! Par exemple, sur $[\![1\,;\,6]\!]$ muni de l'équiprobabilité, il n'est pas possible de construire un événement de proba $1/5$! Il suffit de prendre $\Omega = [\![1\,;\,4]\!]$, de poser $A = \{1; 2\}, B = \{1; 3\}$ et de définir une probabilité P par :

$$P(\{1\}) = p - x, P(\{2\}) = x, P(\{3\}) = q - x \qquad \text{et} \qquad P(\{4\}) = 1 - p - q + x$$

Une telle proba existe puisque ces quatre réels sont positifs (par hypothèse sur x) de somme 1, et on a bien $P(A) = p, P(B) = q$ et $P(A \cap B) = x$. En conclusion, $P(A \cap B)$ peut prendre toutes les valeurs comprises entre $\max(0, p + q - 1)$ et $\min(p, q)$.

2. D'après la question précédente, puisque $P(X = 1) = p$ et $P(Y = 1) = q$, il est possible d'avoir $P([X = 1] \cap [Y = 1]) = x$ si et seulement si $\max(0, p + q - 1) \leq x \leq \min(p, q)$. Supposons donc cette condition remplie dans la suite. On doit finir de compléter le tableau ci-dessous :

X \ Y	0	1
0		
1		x

On sait que, d'après la formule des probas totales (qu'on applique avec le système complet d'événements $[Y = 0]$ et $[Y = 1]$),

$$P(X = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 0]) + P([X = 1] \cap [Y = 1])$$

Par conséquent, $P([X = 1] \cap [Y = 0]) = p - x$. On arrive donc au tableau suivant :

X \ Y	0	1
0		
1	$p - x$	x

De même, en appliquant la formule des probas totales avec le système complet d'événements $[X = 0]$ et $[X = 1]$,

$$P(Y = 1) = P([Y = 1] \cap [X = 0]) + P([Y = 1] \cap [X = 1])$$

et puisque $P(Y = 1) = q$, alors $P([Y = 1] \cap [X = 0]) = q - x$. On trouve de même (ou parce que la somme de toutes les probas du tableau vaut 1) que $P([X = 0] \cap [Y = 0]) = 1 - q - (p - x) = 1 - p - q + x$. Finalement, la loi conjointe de (X, Y) est donnée par

X \ Y	0	1
0	$1 - p - q + x$	$q - x$
1	$p - x$	x

avec $\max(0, p + q - 1) \leq x \leq \min(p, q)$, et on a également prouvé que tout tableau de cette forme pouvait être la loi conjointe du couple (X, Y).

27.3 Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev

Exercice 66 - La convergence L^p implique la convergence en proba : ✪ Soit (X_n) une suite de variables aléatoires. On suppose qu'il existe $p \in [\,1\,;+\infty\,[$ tel que $E\left(|X_n - X|^p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Correction : Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On nous donne une information sur une espérance. On pense donc à l'inégalité de Markov. On pourrait l'appliquer à la v.a. $|X - X_n|$ mais on ne fait pas apparaître p et donc on ne peut pas utiliser l'hypothèse. On fait donc comme dans la démonstration de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : la fonction $t \mapsto t^p$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$[|X_n - X| \geq \varepsilon] = [|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p]$$

En particulier, $P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left([|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p]\right)$. Or, la v.a. $|X_n - X|^p$ est positive et $\varepsilon^p > 0$ donc, d'après l'inégalité de Markov,

$$0 \leq P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = P\left(|X_n - X|^p \geq \varepsilon^p\right) \leq \frac{E\left(|X_n - X|^p\right)}{\varepsilon^p}$$

Le théorème d'encadrement nous permet de conclure.

Exercice 67 : ✪ On effectue une suite de n lancers d'une pièce équilibrée ($n \in \mathbb{N}^*$). On note X le nombre de pile obtenus, et $F = \dfrac{X}{n}$ leur fréquence.

1. Expliciter l'espérance et la variance des variables aléatoires X et F.
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une valeur de n pour laquelle on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, que la fréquence des piles obtenus diffère de 1/2 de moins de 5%.

Correction :

1. X est le nombre de succès (obtenir Pile, proba 1/2) obtenus lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire (lancer une pièce). Par conséquent, $X \sim B(n, 1/2)$ donc $E(X) = n/2$. Par linéarité de l'espérance, $E(F) = E(X)/n = 1/2$. De plus, $V(X) = n/4$ (la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p) et $V(F) = V(X)/n^2 = 1/4n$ (rappelons que $V(aX+b) = a^2V(X)$).
2. On cherche donc n tel que

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{5}{100}\right) \geq \frac{10}{100}$$

c'est-à-dire

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{5}{100}\right) \leq \frac{90}{100}$$

Or, $E(F) = 1/2$ donc

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{5}{100}\right) = P\left(|F - E(F)| \geq \frac{5}{100}\right)$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev $(5/100 > 0)$:

$$P\left(\left|F - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{5}{100}\right) \leq \frac{V(F)}{(5/100)^2} = \frac{10000}{25 \times 4n} = \frac{100}{n}$$

et cette quantité est inférieure à 10% si et seulement si $n \geq 10000$.

Exercice 68 : ✪✪ Soient X une v.a. réelle, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, strictement positive et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(f(X))}{f(a)}$

Correction : Supposons que $[X \geq a]$ soit réalisé. Alors $X \geq a$ et f est croissante donc $f(X) \geq f(a)$. En d'autres termes, l'événement $[X \geq a]$ est inclus dans l'événement $[f(X) \geq f(a)]$ (l'inclusion peut être stricte si f n'est pas strictement croissante). Par conséquent, $P(X \geq a) \leq P(f(X) \geq f(a))$. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Markov pour conclure (on peut l'appliquer puisque $f(X)$ est une v.a. positive et $f(a) > 0$).

Exercice 69 - Deux inégalités « type Markov » : ✪✪ Soit X une variable aléatoire. On suppose que X est à valeurs dans $[-b\,;b]$ avec $b>0$. Montrer que pour tout $a \in]0\,;b[$,

$$\frac{E\left(X^2\right)-a^2}{b^2-a^2} \leq P(|X| \geq a) \leq \frac{E\left(X^2\right)}{a^2}$$

Correction : L'inégalité de droite se montre facilement, de la même façon que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : la fonction carré étant strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

$$P(|X| \geq a) = P\left(X^2 \geq a^2\right)$$

D'après l'inégalité de Markov ($|X|^2$ est une v.a. positive et $a^2>0$) :

$$P(|X| \geq a) \leq \frac{E\left(X^2\right)}{a^2}$$

Montrons à présent l'inégalité de gauche. Inspirons-nous de la démonstration de l'inégalité de Markov.

$$\begin{aligned}
P(|X| \geq a) &= P\left(\bigcup_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} [X=x]\right) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} P(X=x) && \text{(événements deux à deux incompatibles)} \\
&= \frac{1}{b^2-a^2} \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} \left(b^2-a^2\right) P(X=x) \\
&\geq \frac{1}{b^2-a^2} \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} \left(x^2-a^2\right) P(X=x) && (X(\Omega) \subset [-b\,;b] \text{ donc } x^2 \leq b^2)
\end{aligned}$$

Or, d'après le théorème de transfert, et puisque la somme des probas vaut 1 :

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right)-a^2 &= \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X=x) - \sum_{x \in X(\Omega)} a^2 P(X=x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(x^2-a^2\right) P(X=x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} \left(x^2-a^2\right) P(X=x) + \sum_{x \in X(\Omega), |x| < a} \left(x^2-a^2\right) P(X=x) \\
&\leq \sum_{x \in X(\Omega), |x| \geq a} \left(x^2-a^2\right) P(X=x)
\end{aligned}$$

car la deuxième somme est négative, ce qui permet de conclure.

Exercice 70 : ✪✪ Soit $X \sim B(n,p)$. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$$

Correction : Il suffit de voir que

$$\left|\frac{X_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon \iff |X_n-np| \geq n\varepsilon$$

Par conséquent :

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|X_n-np| \geq n\varepsilon)$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (qu'on peut appliquer puisque $E(X_n)=np$) donne

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n}-p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{np(1-p)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

Si le nombre de droite est supérieur strictement à 1, sa racine carrée l'est également donc l'inégalité de l'énoncé est triviale, et si ce nombre est inférieur ou égal à 1, alors il est inférieur à sa racine carrée ce qui permet de conclure.

Exercice 71 : ✪✪ Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu \in \mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$. Montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Correction : Soit $\alpha > 0$. Notons p cette probabilité.

$$\begin{aligned} p &= P(-\alpha\sigma < X - \mu < \alpha\sigma) \\ &= P(|X - \mu| < \alpha\sigma) \\ &= P(|X - E(X)| \leq \alpha\sigma) \\ &= 1 - P(|X - E(X)| \geq \alpha\sigma) \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, et en utilisant le fait que $V(X) = \sigma^2$:

$$P(|X - E(X)| \geq \alpha\sigma) \quad \leq \quad \frac{V(X)}{\alpha^2\sigma^2} = \frac{1}{\alpha^2}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 72 - Théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. On note $(B_n)_{n\geq 1}$ la suite de polynômes définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) X^k(1-X)^{n-k}$$

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernstein.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2, |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

2. On se donne dans la suite un tel η, ainsi qu'entier $n \geq 1$ et un réel $x \in [\,0\,;1\,]$, et on note S_n une variable aléatoire suivant une loi $B(n,x)$. Exprimer $E(f(S_n/n))$ à l'aide du polynôme B_n.
3. On note A_n l'événement $\left[\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right]$. Justifier que

$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right) \leq \varepsilon$$

4. Justifier l'existence d'un réel $M = \max_{[\,0\,;1\,]} |f|$ et prouver que

$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{A_n}\right) \leq 2MP(A_n)$$

5. Justifier que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall x \in [\,0\,;1\,], |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

Correction :

1. Vient du fait que f est uniformément continue, puisqu'elle est continue sur un segment (théorème de Heine).
2. D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= B_n(x) \end{aligned}$$

3. Lorsqu'on se place sur $\overline{A_n}$, on a $\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| < \eta$ donc, par choix de η, d'après la question 1,
$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$
et donc (l'indicatrice vaut 1 car on se place sur $\overline{A_n}$) :
$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}} \leq \varepsilon \mathbb{1}_{\overline{A_n}}$$
Cette inégalité est aussi vraie sur A_n puisqu'alors les deux membres valent 0. L'inégalité ci-dessus est donc toujours valable donc, par croissance de l'espérance,
$$E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right) \leq E(\varepsilon \mathbb{1}_{\overline{A_n}}) = \varepsilon P\left(\overline{A_n}\right) \leq \varepsilon$$
4. L'existence de M découle du théorème des bornes atteintes (f continue sur un segment). Par inégalité triangulaire,
$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \leq \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| + |f(x)| \leq 2M$$
En multipliant par $\mathbb{1}_{A_n}$ (qu'on soit sur A_n, et alors l'indicatrice vaut 1, ou sur son complémentaire, et alors l'indicatrice vaut 0, l'inégalité est encore valable) :
$$\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{A_n} \leq 2M \times \mathbb{1}_{A_n}$$
On conclut encore par croissance de l'espérance (et parce que l'espérance de l'indicatrice est égale à la probabilité).
5. Tout d'abord :
$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \eta\right) \\
&= P\left(|S_n - nx| \geq n\eta\right) \\
&= P\left(|S_n - E(S_n)| \geq n\eta\right) \quad (\text{car } S_n \sim B(n,x)) \\
&\leq \frac{V(X_n)}{n^2\eta^2} \qquad \text{(Inégalité de B-T)} \\
&\leq \frac{nx(1-x)}{n^2\eta^2} \\
&\leq \frac{1}{n\eta^2}
\end{aligned}$$
puisque $x(1-x) \leq 1$ (on pourrait même majorer par $1/4$, ce qu'on prouve à l'aide d'une simple étude de fonction, mais la majoration par 1 est immédiate et suffit pour la suite). L'intérêt est que cette majoration ne dépend pas de x. Puisque $1/n\eta^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe n_0 (indépendant de x) tel que, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout x, $1/n\eta^2 \leq \varepsilon$ et donc $P(A_n) \leq \varepsilon$. Enfin :
$$\begin{aligned}
|B_n(x) - f(x)| &= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(x)\right| && \text{(D'après la question 1)} \\
&= \left|E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\
&\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right) && \text{(Inégalité triangulaire)} \\
&\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{A_n} + \left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right) \\
&\leq E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{A_n}\right) + E\left(\left|f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right| \times \mathbb{1}_{\overline{A_n}}\right) && \text{(Linéarité)}
\end{aligned}$$

et cette quantité est bien inférieure à 2ε dès que $n \geq n_0$ (pour tout x) ce qui est le résultat voulu.

Exercice 73 : ✪✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n une variable aléatoire de loi $B(4n, 1/2)$.

1. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \geq n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que la suite $(P(|X_n - 2n| \leq n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
3. Donner un équivalent simple, quand $n \to +\infty$, de $x_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$.

Correction : Précisons que pour tout n, $E(X_n) = 2n$ et $V(X_n) = n$.

1. Soit $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} P(|X_n - 2n| \geq n) &= P(|X_n - E(X_n)| \geq n) \\ &\leq \frac{V(X_n)}{n^2} \qquad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)} \\ &\leq \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Or, une probabilité est positive donc, d'après le théorème d'encadrement, on a le résultat voulu.

2. On sait que

$$[|X - 2n| \leq n] = [|X - 2n| = n] \cup [|X - 2n| < n]$$

et que ces deux événements sont incompatibles. Dès lors,

$$\begin{aligned} P(|X - 2n| \leq n) &= P(|X - 2n| = n) + P(|X - 2n| < n) \\ &= P(|X - 2n| = n) + 1 - P(|X - 2n| \geq n) \end{aligned}$$

Or, $[|X - 2n| = n] = [X = n] \cup [X = 3n]$ et ces deux événements sont incompatibles donc :

$$\begin{aligned} P(|X - 2n| = n) &= P(X = n) + P(X = 3n) \\ &= \binom{4n}{n}\frac{1}{2^{4n}} + \binom{3n}{n}\frac{1}{2^{4n}} \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Stirling :

$$\begin{aligned} \binom{4n}{n} &= \frac{(4n)!}{n!(3n)!} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(4n)^{4n+1/2}e^{-4n}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n} \times \sqrt{2\pi}(3n)^{3n+1/2}e^{-3n}} \\ &\sim \frac{4^{4n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}3^{3n+1/2}} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \binom{4n}{n}\frac{1}{2^{4n}} &\sim \frac{4^{1/2} \times 2^{4n}}{\sqrt{2\pi n}3^{3n+1/2}} \\ &\sim \frac{4^{1/2}}{\sqrt{2\pi n}3^{1/2}} \times \left(\frac{2^4}{3^3}\right)^n \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

puisque $2^4/3^3 = 16/27 < 1$. De même :

$$\begin{aligned}\binom{3n}{n} &= \frac{(3n)!}{n!(2n)!}\\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi}(3n)^{3n+1/2}e^{-3n}}{\sqrt{2\pi}n^{n+1/2}e^{-n}\times\sqrt{2\pi}(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}}\\ &\sim \frac{3^{3n+1/2}}{\sqrt{2\pi n}2^{2n+1/2}}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\binom{3n}{n}\frac{1}{2^{3n}} &\sim \frac{3^{3n+1/2}}{\sqrt{\pi n}\times 2^{6n+1}}\\ &= \frac{3^{1/2}}{2\sqrt{n\pi}}\left(\frac{3^3}{2^6}\right)^n\end{aligned}$$

et on conclut de même puisque $3^3/2^6 = 27/64 < 1$. On en déduit que

$$P(|X_n - 2n| = n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc, d'après la question précédente :

$$P(|X-2n|\leq n) = P(|X-2n| = n) + 1 - P(|X-2n|\geq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0+1-0 = 1$$

3. Tout d'abord :

$$P(|X_n - 2n|\leq n) = P\left(\bigcup_{k=n}^{3n}[X_n = k]\right)$$

et ces événements sont deux à deux incompatibles. Par conséquent :

$$\begin{aligned}P(|X_n-2n|\leq n) &= \sum_{k=n}^{3n}P(X_n=k)\\ &= \sum_{k=n}^{3n}\binom{4n}{k}\times\frac{1}{2^{4n}}\\ &= \frac{x_n}{2^{4n}}\end{aligned}$$

et puisque cette proba tend vers 1 d'après la question précédente, on en déduit que $x_n \sim 2^{4n}$.

Exercice 74 : ✪✪✪ Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu\in\mathbb{R}$ et d'écart-type $\sigma > 0$. À l'aide de la variable aléatoire $Y = (\alpha(X-\mu)+\sigma)^2$, montrer que pour tout $\alpha > 0$:

$$P(X\geq \mu+\alpha\sigma)\leq \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Correction : Soit $\alpha > 0$. Suivons l'indication de l'énoncé et faisons apparaître la variable aléatoire Y :

$$\begin{aligned}P(X\geq\mu+\alpha\sigma) &= P(X-\mu\geq\alpha\sigma)\\ &= P(\alpha(X-\mu)\geq\alpha^2\sigma)\\ &= P(\alpha(X-\mu)+\sigma\geq\alpha^2\sigma+\sigma)\\ &= P(\alpha(X-\mu)+\sigma\geq(\alpha^2+1)\sigma)\end{aligned}$$

Or, si $\alpha(X-\mu)+\sigma\geq(\alpha^2+1)\sigma$ alors, par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $Y^2\geq(\alpha^2+1)\sigma^2$. En d'autres termes :

$$\left[\alpha(X-\mu)+\sigma\geq(\alpha^2+1)\sigma\right]\subset\left[Y\geq(\alpha^2+1)^2\sigma^2\right]$$

donc

$$P\left(\alpha(X-\mu)+\sigma \geq (\alpha^2+1)\sigma\right) \leq P(Y \geq (\alpha^2+1)^2\sigma^2)$$

On pouvait aussi voir que ($a^2 \geq b^2 \iff a \geq b$ ou $a \leq -b$) :

$$P(Y \geq (\alpha^2+1)^2\sigma^2) = P\left(\left[\alpha(X-\mu)+\sigma \geq (\alpha^2+1)\sigma\right] \cup \left[\alpha(X-\mu)+\sigma \leq -(\alpha^2+1)\sigma\right]\right)$$

et cette union est disjointe donc

$$P(Y \geq (\alpha^2+1)^2\sigma^2) = P\left(\alpha(X-\mu)+\sigma \geq (\alpha^2+1)\sigma\right) + P\left(\alpha(X-\mu)+\sigma \leq -(\alpha^2+1)\sigma\right)$$

ce qui donne la même majoration. Ainsi :

$$P(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq P(Y \geq (\alpha^2+1)^2\sigma^2)$$

D'après l'inégalité de Markov : (Y est positive et $(\alpha^2+1)^2\sigma^2 > 0$) :

$$P(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \frac{E(Y)}{(\alpha^2+1)^2\sigma^2}$$

Or :

$$\begin{array}{rcll}
E(Y) & = & E\left[(\alpha(X-\mu)+\alpha)^2\right] & \\
& = & V(\alpha(X-\mu)+\alpha) + E\left[\alpha(X-\mu)+\sigma\right]^2 & \text{(Formule de König-Huygens)} \\
& = & \alpha^2 V(X) + (\alpha E(X) - \alpha\mu + \sigma)^2 & \text{(Linéarité de l'espérance, et } V(aX+b)\text{)} \\
& = & \alpha^2\sigma^2 + (\alpha\mu - \alpha\mu + \sigma)^2 & \\
& = & \alpha^2\sigma^2 + \sigma^2 & \\
& = & (\alpha^2+1)\sigma^2 &
\end{array}$$

ce qui permet de conclure.

27.4 Inégalités de concentration

Exercice 75 : ✪✪ Soient a et b deux réels avec $a \leq b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$.

1. Simplifier la quantité $V(X) + E((b-X)(X-a))$. En déduire l'inégalité de Bathia-Davis :
$$V(X) \leq (b - E(X))(E(X) - a)$$
2. En déduire l'inégalité de Popoviciu :
$$V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$
3. Soit $X \sim B(1/2)$. Calculer $V((b-a)X+a)$. Qu'en déduit-on ?

Correction :

1. En utilisant la formule de König-Huygens et la linéarité de l'espérance :
$$\begin{array}{rcl}
V(X) + E((b-X)(X-a)) & = & E(X^2) - E(X)^2 + E\left(-X^2 + (a+b)X - ab\right) \\
& = & E(X^2) - E(X)^2 - E(X^2) + (a+b)E(X) - ab \\
& = & -E(X)^2 + (a+b)E(X) - ab \\
& = & (b - E(X))(E(X) - a)
\end{array}$$
c'est-à-dire que
$$V(X) - (b - E(X))(E(X) - a) = -E((b-X)(X-a))$$
Or, $a \leq X \leq b$ donc $(b-X)(X-a) \geq 0$: par positivité de l'espérance, $E((b-X)(X-a)) \geq 0$ donc $V(X) - (b - E(X))(E(X) - a) \leq 0$ ce qui est le résultat voulu.

2. Soit

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u \longmapsto (b-u)(u-a) = -u^2 + (a+b)u - ab \end{cases}$$

Alors φ est une fonction polynomiale de degré 2 de coefficient dominant négatif donc admet un maximum en $-(a+b)/(-2) = (a+b)/2$ (parabole tournée vers le bas) et ce maximum vaut

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \left(b - \frac{a+b}{2}\right) \times \left(\frac{a+b}{2} - a\right) \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

et puisque $V(X) \leq \varphi(E(X))$, on a le résultat voulu.

3. Notons $Y = (b-a)X + a$. Alors $Y(\Omega) = \{a; b\}$, $P(Y = a) = P(X = 0) = 1/2$ et $P(Y = b) = P(X = 1) = 1/2$ donc $E(Y) = aP(Y = a) + bP(Y = b) = \dfrac{a+b}{2}$. D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= a^2 P(Y = a) + b^2 P(Y = b) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2} \end{aligned}$$

Dès lors, d'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2a^2 + 2b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{4} \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \end{aligned}$$

Or, Y est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$ donc on peut appliquer l'inégalité de Popoviciu, et on vient de prouver qu'il y a égalité dans ce cas particulier : l'inégalité est optimale, on ne peut pas donner une majoration plus petite dans le cas général (puisqu'il y a parfois égalité).

Exercice 76 : ✪✪✪

1. Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes indépendantes et de même loi. Montrer que $|E(Z_1)|^2 = E\left(Z_1 \times \overline{Z_2}\right)$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi, à valeurs dans un intervalle de longueur $L \leq \pi/2$.
   (a) Montrer que $\left|E\left(e^{iX}\right)\right|^2 = E(\cos(X - Y))$.
   (b) Montrer que $|\cos(x)| \geq \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire que $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| \geq \max\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \cos(L)\right\}$.
   (d) Donner un exemple de variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle de longueur $L \leq \pi/2$ pour laquelle $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction :

1. On sait que Z_1 et Z_2 sont indépendantes donc Z_1 et $\overline{Z_2}$ sont indépendantes (si X et Y sont indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes). On en déduit que

$$E(Z_1 \times \overline{Z_2}) = E(Z_1) \times E\left(\overline{Z_2}\right)$$

Or, Z_1 et Z_2 ont même loi donc $\overline{Z_1}$ et $\overline{Z_2}$ ont même loi (si X et Y ont même loi alors, pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ ont même loi) donc même espérance (réciproque fausse évidemment) donc $E\left(\overline{Z_2}\right) = E\left(\overline{Z_1}\right)$. Par conséquent :

$$E(Z_1 \times \overline{Z_2}) = E(Z_1) \times E\left(\overline{Z_1}\right)$$

Prouvons que $E\left(\overline{Z_1}\right) = \overline{E(Z_1)}$ ce qui permettra de conclure. Notons $X_1 = \mathrm{Re}(Z_1)$ et $Y_1 = \mathrm{Im}(Z_1)$. Par conséquent, $Z_1 = X_1 + iY_1$ donc $\overline{Z_1} = X_1 - iY_1$. Par linéarité de l'espérance (deux fois) :

$$\begin{aligned} E\left(\overline{Z_1}\right) &= E(X_1) - iE(Y_1) \\ &= \overline{E(X_1) + iE(Y_1)} \\ &= \overline{E(Z_1)} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

2. (a) Posons $Z_1 = e^{iX}$ et $Z_2 = e^{iY}$. Puisque X et Y sont indépendantes de même loi (on dit qu'elles sont indépendantes et identiquement distribuées ou i.i.d.), Z_1 et Z_2 le sont également donc on peut appliquer la question précédente :

$$\begin{aligned} \left|E(e^{iX})\right|^2 &= E\left(e^{iX} \times e^{-iY}\right) \\ &= E\left(e^{i(X-Y)}\right) \\ &= E(\cos(X-Y) + i\sin(X-Y)) \\ &= E(\cos(X-Y)) + iE(\sin(X-Y)) \end{aligned}$$

par linéarité de l'espérance. Or, $\left|E(e^{iX})\right|^2 \in \mathbb{R}$ donc sa partie imaginaire est nulle si bien que $E(\sin(X-Y)) = 0$ ce qui est le résultat voulu.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1+\cos(2x)}{2} = \cos^2(x) \leq |\cos(x)|$ puisque $|\cos(x)| \leq 1$ (et si $u \in [\,0\,;1\,]$ alors $u^2 \leq u$).

(c) $|X-Y| \leq L$ puisque X et Y sont à valeurs dans un intervalle de longueur L (donc la distance entre X et Y est inférieure à L, la longueur de l'intervalle) si bien que $|X-Y| \leq L$ donc $X - Y \in [\,-L\,;L\,] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$: le cos étant croissant sur cet intervalle, $\cos(X-Y) \leq \cos(L)$. Par croissance puis linéarité de l'espérance :

$$\left|E(e^{iX})\right|^2 \geq E(\cos(L)) = \cos(L)$$

Or, $L \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(L)$ est positif donc égal à sa valeur absolue. D'une part, on en déduit que $\cos(L) \geq \cos^2(L)$ donc $\left|E(e^{iX})\right|^2 \geq \cos^2(L)$ donc $\left|E(e^{iX})\right| \geq \cos(L)$. D'autre part, il découle de la question précédente que

$$\cos(L) \geq \frac{1+\cos(2L)}{2}$$

Par conséquent :

$$\left|E(e^{iX})\right|^2 \geq \cos(L) \geq \frac{1+\cos(2L)}{2}$$

Si $\cos(2L) \geq 0$, alors $\left|E(e^{iX})\right|^2 \geq 1/2$ si bien que $|E(e^{iX})| \geq 1/\sqrt{2}$, et si $\cos(2L) \leq 0$ alors $2L \in \left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $L \in \left[\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(L) \geq 1/\sqrt{2}$ et puisque $|E(e^{iX})| \geq \cos(L)$, alors on a encore $E(e^{iX})| \geq 1/\sqrt{2}$. Dans tous les cas, $E(e^{iX})|$ est supérieur ou égal à $\cos(L)$ et à $1/\sqrt{2}$ donc à leur maximum.

(d) Posons X une variable aléatoire qui vaut 0 avec proba $1/2$ et $\pi/2$ avec proba $1/2$. Alors X est bien à valeurs dans un intervalle de longueur $L \leq \pi/2$ et, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(e^{iX}) &= e^{i0}P(X=0) + e^{i\pi/2}P(X=\pi/2) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \end{aligned}$$

dont le module vaut $1/\sqrt{2}$.

Exercice 77 - Inégalité de Hoeffding (1963) : ✪✪✪ Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans un segment $[\,a\,;b\,]$ de $\mathbb{R}$, avec $a < b$, et soit $\lambda > 0$.

1. (a) Donner le signe de a et b. A-t-on forcément $a = -b$?

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

(c) En déduire que $e^{\lambda X} \leq Z$ où

$$Z = \frac{b-X}{b-a} \times e^{\lambda a} + \frac{-a+X}{b-a} e^{\lambda b}$$

(d) Montrer que

$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq \frac{b}{b-a} \times e^{\lambda a} - \frac{a}{b-a} \times e^{\lambda b}$$

2. Soit $\alpha \in [\,0\,;1\,]$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ par $\varphi(x) = -\alpha x + \ln\left((1-\alpha) + \alpha e^x\right)$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe A et B que l'on exprimera en fonction de α et de x tels que $\varphi''(x) = AB/(A+B)^2$.

(b) En déduire que $0 \leq \varphi''(x) \leq 1/4$.

3. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g par $g(t) = \ln\left(\dfrac{b}{b-a} \times e^{t\times a} - \dfrac{a}{b-a} \times e^{t\times b}\right)$.

(a) Montrer que $0 \leq g''(\lambda) \leq (b-a)^2/4$.

(b) Donner $g(0)$ et $g'(0)$. En déduire l'inégalité de Hoeffding :

$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right)$$

4. On se donne à présent une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes de même loi que X et on pose comme en cours $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que $P(S_n \geq n\varepsilon) = P\left(e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon} \geq 1\right)$.

(b) À l'aide de l'inégalité de Markov, de l'inégalité de Hoeffding et enfin d'une valeur de λ bien choisie, montrer que :

$$P(S_n \geq n\varepsilon) \leq \exp\left(\frac{-2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

(c) Comparer avec le résultat obtenu en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Correction :

1. (a) La variable aléatoire est centrée donc n'est pas de signe constant (la seule possibilité si elle est de signe constant est qu'elle soit nulle presque sûrement i.e. avec proba 1) donc $a \leq 0 \leq b$. Non, on n'a pas forcément $a = -b$: on peut avoir par exemple $a = -1$ et $b = 2$, si $P(X = a) = 2/3$ et $P(X = b) = 1/3$, alors X est centrée.

(b) Dérivable deux fois et de dérivée seconde positive.

(c) Puisque X est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$, alors $\dfrac{b-X}{b-a}$ et $\dfrac{-a+X}{b-a}$ sont positifs de somme 1. Il suffit ensuite d'appliquer l'inégalité de Jensen : si on note φ la fonction $x \mapsto e^{\lambda x}$, qui est convexe :

$$\varphi\left(\frac{b-X}{b-a} \times a + \frac{-a+X}{b-a} \times b\right) \leq \frac{b-X}{b-a} \times \varphi(a) + \frac{-a+X}{b-a} \times \varphi(b)$$

On conclut en disant que

$$i\left(\frac{b-X}{b-a} \times a + \frac{-a+X}{b-a} \times b\right) = X$$

(d) Par croissance et linéarité de l'espérance :

$$E\left(e^{\lambda X}\right) \leq \frac{b-E(X)-}{b-a} \times e^{\lambda a} + \frac{-a+E(X)}{b-a} e^{\lambda b}$$

On conclut en disant que X est centrée.

2. (a) Commençons par dériver φ deux fois (φ est bien $\mathscr{C}^\infty$). Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\varphi'(x) = -\alpha + \frac{\alpha e^x}{(1-\alpha) + \alpha e^x}$$

donc :

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \frac{\alpha e^x \times ((1-\alpha)+\alpha e^x) - (\alpha e^x)^2}{((1-\alpha)+\alpha e^x)^2} \\ &= \frac{\alpha e^x \times (1-\alpha)}{((1-\alpha)+\alpha e^x)^2} \end{aligned}$$

On a donc le résultat voulu avec $A = 1-\alpha$ et $B = \alpha e^x$.

(b) $\alpha \in [0\,;1]$ donc A et B sont positifs si bien que $\varphi''(x) \geq 0$. De plus,

$$(A+B)^2 - 4AB = A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2 \geq 0$$

si bien que $AB \leq \dfrac{(A+B)^2}{4}$ ce qui permet de conclure.

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. En factorisant par e^{ta} :

$$\begin{aligned} g(t) &= \ln(e^{ta}) + \ln\left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}e^{t(b-a)}\right) \\ &= ta + \ln\left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}e^{t(b-a)}\right) \\ &= \frac{a}{b-a} \times t(b-a) + \ln\left(\frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a}e^{t(b-a)}\right) \\ &= -\alpha \times t(b-a) + \ln\left((1-\alpha)e^{t(b-a)}\right) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{-a}{b-a} \in [0\,;1]$$

(rappelons que $a < 0 < b$ donc $0 < -a < b-a$). En d'autres termes, $g(\lambda) = \varphi((b-a)t)$ donc, en dérivant deux fois, $g''(t) = (b-a)^2\varphi''(t)$ ce qui permet de conclure d'après la question précédente.

(b) $g(0) = \ln(1) = 0$ et

$$\begin{aligned} g'(0) &= (b-a)\varphi'(0) \\ &= (b-a) \times \left(-\alpha + \frac{\alpha}{(1-\alpha)+\alpha}\right) \\ &= (b-a) \times (-\alpha+\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^\lambda g''(t) \leq \int_0^\lambda \frac{(b-a)^2}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{(b-a)^2\lambda}{4}$$

c'est-à-dire que $g'(\lambda) - g'(0) = g'(\lambda) \leq \dfrac{(b-a)^2\lambda}{4}$. Là aussi, en intégrant de 0 à λ (attention, le membre de droite n'est plus constant !) :

$$\int_0^\lambda g'(t) \leq \int_0^\lambda \frac{(b-a)^2 t}{4}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que

$$g(\lambda) - g(0) = g(\lambda) \leq \frac{(b-a)^2\lambda^2}{8}$$

Par conséquent :

$$\ln\left(\frac{b}{b-a} \times e^{\lambda\times a} - \frac{a}{b-a} \times e^{\lambda \times b}\right) \leq \frac{(b-a)^2\lambda^2}{8}$$

Par croissance de l'exponentielle et en utilisant la question 1.(b) :

$$E(e^{\lambda X}) \leq \frac{b}{b-a} \times e^{\lambda \times a} - \frac{a}{b-a} \times e^{\lambda \times b} \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}\right)$$

4. (a) $[S_n \geq n\varepsilon] = [\lambda S_n \geq \lambda\varepsilon] = [\lambda S_n - \lambda n\varepsilon \geq 0]$ (la première égalité vient du fait que $\lambda > 0$). Or, l'exponentielle est strictement croissante donc : $\lambda S_n - \lambda n\varepsilon \geq 0 \iff e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon} \geq e^0 = 1$. Dès lors, les deux événements $[\lambda S_n - \lambda n\varepsilon \geq 0]$ et $[e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon} \geq 1]$ sont égaux et ont donc la même probabilité.

(b) La variable aléatoire $e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon}$ est à valeurs positives et $1 > 0$ donc, d'après l'inégalité de Markov :

$$P(S_n \geq n\varepsilon) \leq \frac{E(e^{\lambda S_n - \lambda n\varepsilon})}{1}$$

donc, par linéarité de l'espérance, $P(S_n \geq n\varepsilon) \leq e^{-\lambda n\varepsilon} E(e^{\lambda S_n})$. La variable aléatoire S_n est centrée (puisque $E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = 0$ car les X_i sont de même loi que X donc sont aussi centrées) à valeurs dans $[\,na\,;nb\,]$: d'après l'inégalité de Hoeffding,

$$E(e^{\lambda S_n}) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2(nb-na)^2}{8}\right) = \exp\left(\frac{\lambda^2 n^2(b-a)^2}{8}\right)$$

Par conséquent :

$$P(S_n \geq n\varepsilon) \leq \exp\left(\frac{\lambda^2 n^2(b-a)^2 - 8\lambda n\varepsilon}{8}\right)$$

Ceci étant valable pour tout λ, on peut prendre celui qui nous arrange. On cherche donc le λ qui minimise la quantité de droite (plus une majoration est petite, meilleure elle est). On a un trinôme du second degré en λ de coefficient dominant strictement positif donc le minimum est atteint en

$$\frac{8n\varepsilon}{2n^2(b-a)^2}$$

qui donne le résultat voulu.

(c) Puisque $E(S_n) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} P(S_n \geq n\varepsilon) &= P(S_n - E(S_n) \geq n\varepsilon) \\ &\leq P(|S_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon) \\ &\leq \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{nV(X)}{n^2\varepsilon^2} \\ &\leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2} \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité vient du fait que la variance d'une somme de v.a. indépendantes est la somme des variances. L'inégalité précédente est bien meilleure que celle obtenue avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev puisque $e^{-2n\varepsilon^2/(b-a)^2} = \mathrm{o}\left(1/n\right)$, et plus une majoration est petite, meilleure elle est.

Exercice 78 - Inégalité de Chernoff : ✪✪✪ On se donne une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher i.e. vérifiant $P(X_n = \pm 1) = 1/2$ pour tout n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $F_n = S_n/n$.

1. Montrer que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit la majoration suivante : $P(|F_{10000}| \geq 1/10) \leq 1/100$.
2. Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $H(t) = \ln\left(E\left(e^{tX}\right)\right)$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X \geq a) \leq e^{\inf_{t\geq 0}(H(t) - a\times t)}$.
3. Lorsque $X = F_n$, prouver que $H(t) = n\ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{t}{n}\right)\right)$.
4. En déduire que $P(|F_{10000}| \geq 1/10) \leq 3,6 \times 10^{-22}$. On pourra utiliser une calculatrice.

Correction :

1. Il est immédiat (et on l'a même fait en classe) que les X_i sont d'espérance nulle et de variance égale à 1. Par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E(F_n) &= \frac{E(X_1)+\cdots+E(X_n)}{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

De plus, les X_i sont indépendantes donc

$$\begin{aligned} V(F_n) &= \frac{V(S_n)}{n^2} \\ &= \frac{V(X_1)+\cdots+V(X_n)}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} P(|F_{10000}| \geq 1/10) &= P(|F_{10000} - E(F_{10000})| \geq 1/10) \\ &\leq \frac{V(F_{10000})}{(1/10)^2} \qquad \text{(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)} \\ &\leq \frac{1/10000}{1/100} \\ &\leq \frac{1}{100} \end{aligned}$$

2. Il suffit de prouver que pour tout $t \geq 0$, $P(X \geq a) \leq e^{H(t)-a\times t}$. Il en découlera l'inégalité voulue. Puisque $t \geq 0$, si $X \geq a$, alors $tX \geq ta$ (ce n'est pas équivalent si $t = 0$) et l'exponentielle est croissante donc $e^{tX} \geq e^{ta}$. En d'autres termes, $[X \geq a] \subset [e^{tX} \geq e^{ta}]$. Or, en appliquant l'inégalité de Markov (e^{tX} est une variable aléatoire positive et $e^{ta} > 0$) :

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &\leq \frac{E(e^{tX})}{e^{ta}} \\ &\leq e^{H(t)-ta} \end{aligned}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. Il suffit de calculer $E(tX)$, on prendra le ln ensuite.

$$\begin{aligned} \ln(H(t)) &= E(e^{tF_n}) \\ &= E(e^{tS_n/n}) \\ &= E(e^{tX_1/n+\cdots+tX_n/n}) \\ &= E(e^{tX_1/n} \times \cdots e^{tX_n/n}) \end{aligned}$$

Or, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires $e^{tX_i/n}$ sont mutuellement indépendantes, donc :

$$\begin{aligned} \ln(H(t)) &= E(e^{tX_1/n}) \times \cdots E(e^{tX_n/n}) \\ &= E(e^{tX_1/n})^n \end{aligned}$$

puisque les X_i ont toutes la même loi. De plus, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(e^{tX_1/n}) &= e^{t/n}P(X_1 = 1) + e^{-t/n}P(X_1 = -1) \\ &= \frac{e^{t/n} + e^{-t/n}}{2} \\ &= \mathrm{ch}(t/n) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Tout d'abord, les $-X_i$ ont même loi que les X_i donc $-F_n$ a même loi que F_n. Dès lors :

$$\begin{aligned} P(|F_{10000}| \geq 1/10) &= P([F_{10000} \geq 1/10] \cup [F_{10000} \leq -1/10]) \\ &= P(F_{10000} \geq 1/10) + P(F_{10000} \leq -1/10) \quad \text{(événements incompatibles)} \\ &= P(F_{10000} \geq 1/10) + P(-F_{10000} \geq 1/10) \\ &= 2P(F_{10000} \geq 1/10) \end{aligned}$$

puisque F_n et $-F_n$ ont la même loi. D'après les deux questions précédentes, en notant $n = 10000$:

$$P(|F_n| \geq 1/10) \leq 2e^{\inf_{t\geq 0} n\ln(\operatorname{ch}(t/n)) - t/10}$$

Posons donc

$$f : t \mapsto n\ln(\operatorname{ch}(t/n)) - t/10 = 10000\ln(\operatorname{ch}(t/10000)) - t/10$$

et donnons la valeur de sa borne inférieure (sur $\mathbb{R}_+$). f est dérivable. Soit $t \geq 0$ (on note encore $n = 10000$).

$$\begin{aligned} f'(t) &= n \times \frac{\frac{1}{n} \times \operatorname{sh}(t/n)}{\operatorname{ch}(t/n)} - \frac{1}{10} \\ &= \operatorname{th}(t/n) - \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Cherchons le signe de f'. La fonction Argth n'étant pas au programme, remplaçons th par sh/ch et sh et ch par leur expression à l'aide de l'exponentielle.

$$\begin{aligned} f'(t) \geq 0 &\iff \frac{e^{t/n} - e^{-t/n}}{e^{t/n} + e^{-t/n}} \geq \frac{1}{10} \\ &\iff e^{t/n} - e^{-t/n} \geq \frac{1}{10}(e^{t/n} + e^{-t/n}) \\ &\iff \frac{9e^{t/n}}{10} - \frac{11e^{t/n}}{10} \geq 0 \\ &\iff 9e^{2t/n} - 11 \geq 0 \\ &\iff e^{2t/n} \geq 11/9 \\ &\iff 2t/n \geq \ln(11/9) \\ &\iff t \geq \frac{n\ln(11/9)}{2} = 5000\ln(11/9) \end{aligned}$$

On en déduit que f est décroissante puis croissante et que son minimum (donc sa borne inférieure) est atteint en $\alpha = 5000\ln(11/9)$. Or, une calculatrice ou un logiciel de calcul donne :

$$\exp\left(1000 \times \operatorname{ch}\left(\frac{5000\ln(11/9)}{10000}\right) - \frac{5000\ln(11/9)}{10}\right) \approx 1.77 \times 10^{-22} \leq 1.8 \times 10^{-22}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 79 - Une inégalité maximale (Centrale MPI 2023) : ✪✪✪ Soient $n \geq 2$ et $Z_1, \dots, Z_n$ des variables aléatoires indépendantes. Pour tout $p \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note $R_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} Z_i$. Le but de l'exercice est de prouver la propriété :

$$\forall x > 0, \qquad P\left(\left\{\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}\right) \leq 3 \max_{1\leq p\leq n} P\left(\{|R_p| \geq x\}\right)$$

On se donne dans la suite un réel $x > 0$. Pour simplifier, notons A l'événement $\left\{\displaystyle\max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$. Ainsi :

$$A = \left\{\omega \in \Omega \mid \max_{1\leq p\leq n} |R_p| \geq 3x\right\}$$

Enfin, on définit les événements

$$A_1 = \{|R_1| \geq 3x\} \qquad \text{et} \qquad A_p = \left\{\max_{1\leq i\leq p-1} |R_i| < 3x\right\} \cap \{|R_p| \geq 3x\}$$

1. Exprimer A à l'aide des événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
2. Montrer que :

$$P(A) \leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^{n} P\left(A_p \cap \{|R_n| < x\}\right)$$

3. Justifier que, pour tout $p \in [\![1\,;\,n]\!]$, on a l'inclusion :

$$A_p \cap \{|R_n| < x\} \subset A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}$$

4. En déduire que :

$$P(A) \leq P(|R_n| \geq x) + \max_{1\leq p\leq n} P\left(\{|R_n - R_p| > 2x\}\right)$$

5. Conclure.

Correction :

1. A est l'union (disjointe) des A_p. En effet, A est réalisé si et seulement si l'un (au moins) des $|R_p|$ est supérieur ou égal à $3x$, et il suffit de voir que l'événement A_p est : « $|R_p| \geq 3x$ et p est le premier indice pour lequel c'est le cas ». A est donc réalisé si et seulement si au moins un des A_p est réalisé, et ils sont deux à deux incompatibles car deux indices distincts ne peuvent pas être le premier indice pour lequel ceci est réalisé. D'où l'égalité

$$A = \bigcup_{p=1}^{n} A_p$$

et cette union est disjointe.

2. Les événements $\{|R_n| \geq x\}$ et $\{|R_n| < x\}$ forment un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(A \cap \{|R_n| \geq x\}) + P(A \cap \{|R_n| < x\})$$

Or, $A \cap \{|R_n| \geq x\}$ est inclus dans $\{|R_n| \geq x\}$ donc a une probabilité inférieure, si bien que :

$$P(A) \leq P(\{|R_n| \geq x\}) + P(A \cap \{|R_n| < x\})$$

De plus, d'après la question précédente,

$$A \cap \{|R_n| < x\} = \left(\bigcup_{p=1}^{n} A_p\right) \cap \{|R_n| < x\}$$

Par distributivité de l'intersection sur l'union :

$$\left(\bigcup_{p=1}^{n} A_p\right) \cap \{|R_n| < x\} = \bigcup_{p=1}^{n} (A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

et la proba d'une union est inférieure à la somme des probas (il y a même égalité car les événements sont deux à deux incompatibles), donc

$$P(A \cap \{|R_n| < x\}) = P\left(\bigcup_{p=1}^{n} (A_p \cap \{|R_n| < x\})\right) \leq \sum_{p=1}^{n} P(A_p \cap \{|R_n| < x\})$$

ce qui permet de conclure.

3. Soit $p \in [\![1\,;\,n]\!]$. Supposons l'événement $A_p \cap \{|R_n| < x\}$ réalisé. Alors A_p est réalisé, et il suffit donc de montrer que l'événement $\{|R_n - R_p| > 2x\}$ est réalisé. Or, A_p est réalisé donc $|R_p| \geq 3x$ et on a également $|R_n| < x$ donc $-|R_n| > -x$ si bien que, d'après l'inégalité triangulaire, $|R_n - R_p| \geq |R_p| - |R_n| > 3x - x = 2x$ ce qui permet de conclure.

4. D'après la question précédente, pour tout p (un ensemble inclus dans un autre a une probabilité inférieure) :

$$P(A_p \cap \{|R_n| < x\}) \leq P(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Or, $R_n - R_p = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} Z_i$ et A_p dépend uniquement de $Z_1, \dots, Z_p$ car dépend uniquement de $R_1, \dots, R_p$ qui s'écrivent comme fonction de $Z_1, \dots, Z_p$. Les Z_i étant indépendantes, d'après le lemme des coalitions, A_p et $R_n - R_p$ sont indépendantes, si bien que

$$P(A_p \cap \{|R_n - R_p| > 2x\}) = P(A_p) \times P(\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq P(A_p) \times \max_{1 \leq p \leq n} P\{|R_n - R_p| > 2x\})$$

Par somme, on a donc, d'après la question 2 :

$$\begin{aligned}
P(A) &\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \sum_{p=1}^{n} P(A_p) \times \max_{1 \leq p \leq n} P\{|R_n - R_p| > 2x\}) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} P\{|R_n - R_p| > 2x\}) \sum_{p=1}^{n} P(A_p) \\
&\leq P(\{|R_n| \geq x\}) + \max_{1 \leq p \leq n} P\{|R_n - R_p| > 2x\}) P(A) \qquad \text{(car } A \text{ est l'union disjointe des } A_p\text{)}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure puisque $P(A) \leq 1$.

5. Il est immédiat que $P(|R_n| \geq x) \leq \displaystyle\max_{1 \leq p \leq n} P(|R_p| \geq x)$. Il suffit donc de prouver que :

$$\max_{1 \leq p \leq n} P\{|R_n - R_p| > 2x\}) \leq 2 \max_{1 \leq p \leq n} P(|R_p| \geq x)$$

Soit $p \in [\![1\,;\, n]\!]$ et supposons l'événements $|R_n - R_p| > 2x$ réalisé. Alors $|R_n| \geq x$ ou $|R_p| \geq x$ est réalisé. En effet, si aucun des deux n'est réalisé, alors, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|R_n - R_p| \leq |R_n| + |R_p| < 2x$$

ce qui est absurde. On en déduit que $|R_n| \geq x$ ou $|R_p| \geq x$ est réalisé. En d'autres termes :

$$|R_n - R_p| > 2x \subset ([|R_n| \geq x] \cup [R_p \geq x])$$

On en déduit que

$$P(|R_n - R_p| > 2x) \leq P([|R_n| \geq x] \cup [R_p \geq x]) \leq P(|R_n| \geq x) + P(|R_p| \geq x) \leq 2 \max_{1 \leq p \leq n} P(|R_p| \geq x)$$

et ceci étant vrai pour tout p, c'est vrai pour le p qui maximise la probabilité de gauche, ce qui permet de conclure.