Chapitre 6 : Espaces probabilisés

0 – Ensembles dénombrables

Définition :

Un ensemble est dénombrable s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$.

→ un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Propositions :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensemble dénombrables est dénombrable.
- Une union finie ou dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Théorème de Cantor-Bernstein (HP) :

$Soient\ A, B\ deux\ ensembles.$

$S'il\ existe\ \varphi_1 : A \to B\ et\ \varphi_2 : B \to A\ injectives, alors\ il\ existe\ \psi : A \to B\ bijective.$

I – Notion d'espaces probabilisés

Prérequis :

- Univers $\Omega =$ Résultats possibles de l'expérience
- Evènement $=$ partie de Ω, groupement de résultats

Définitions : Soit Ω un ensemble.

$T \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω si :

- $\emptyset \in T$
- $\forall A \in T, \bar{A} \in T$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$

(Ω, T) est un espace probabilisable.

Les éléments de T s'appellent les évènements.

$P : T \to [0\,;1]$ est une probabilité sur un espace probabilisable (Ω, T) si :

- $\forall A \in T, P(A) \in [0\,;1]$
- $P(\Omega) = 1$
- $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T^{\mathbb{N}}$ *deux* à *deux disjoints*, $P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$

(Ω, T, P) est un espace probabilisé.

Propositions : Soient (Ω, T, P) un espace probabilisé et $A, B \in T$.

- $A \cap B \in T$
- $\forall (A_n) \in T^{\mathbb{N}}, (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in T$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

II – Propriétés élémentaires des probabilités

Soit (Ω, T, P) un espace probabilisé.

Propositions :

- Soit $(A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion. ($\forall n, A_n \subset A_{n+1}$)

$$\boxed{P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$$

- *Soit* $(B_n)_n \in T^{\mathbb{N}}$ *décroissante pour l'inclusion.*

$$\boxed{P(B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)}$$

- $Soit\ (A_n) \in T^{\mathbb{N}}.$

$$\boxed{P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)} \qquad (dans\ R_+ \cup \{+\infty\})$$

<u>Définitions :</u>

- A est négligeable si $P(A) = 0$
- A est presque sûr si $P(A) = 1$

<u>Propositions :</u>

$Soit\ (A_n)_n \in T^{\mathbb{N}}.$

- $\forall n, A_n\ est\ négligeable \Rightarrow \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\ est\ négligeable.$
- $\forall n, A_n\ est\ presque\ sûr \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\ est\ presque\ sûre.$

<u>Définition :</u>

$Soit\ (A_i)_{i\in I} \in T^I.$

Les (A_i) forment un système quasi-complet d'évènements si :

$$\begin{cases} \forall i \neq j \in I, A_i \cap A_j = \emptyset \\ P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = 1 \end{cases}$$

$(ie\ les\ (A_i)\ sont\ disjoints\ deux\ à\ deux\ et\ leur\ union\ est\ presque\ sûre)$

III – Probabilités conditionnelles et indépendantes

<u>Définition :</u> Soient $A, B \in T$.

$$Si\ P(B) \neq 0, on\ note\ \boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

<u>Formule des probabilités totales :</u>

Soient $(A_n) \in T^{\mathbb{N}}$ et $B \in T$.

On suppose $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et les A_n deux à deux disjoints (donc forment un système complet).

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B)$$

d'où :

$$\boxed{P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \cdot P_{A_n}(B)}$$

<u>Formule de Bayes :</u>

$Soient\ A, B \in T\ tels\ que\ P(A) > 0\ et\ P(B) > 0.$

Alors :

$$\boxed{P_B(A) = P_A(B) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}}$$

<u>Définitions :</u>

- $A, B \in T\ sont\ indépendants\ si\ P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $Soit\ (A_i) \in T^I.$
  - $Les\ (A_i)\ sont\ mutuellements\ indépendants\ si\ :$
  $$\forall J \subset I\ fini, P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} A_j$$
  - $Les\ (A_i)\ sont\ deux\ à\ deux\ indépendants\ si\ :$
  $$\forall i \neq j \in I, P\left(A_i \cap A_j\right) = P(A_i) \cdot P(A_j)$$

<u>Proposition :</u>

$Soient\ A, B \in T.$

$$A\ et\ B\ sont\ indépendants \Leftrightarrow A\ et\ \overline{B}\ sont\ indépendants$$

IV – Espaces probabilisés discrets

<u>Définitions :</u>

$Soit\ \Omega\ un\ ensemble.$

$Une\ famille\ de\ réels\ positifs\ (P_\omega)_{\omega \in \Omega}\ est\ appelée\ \underline{distribution\ de\ probabilités\ discrète}\ si:$

$$\sum_{\omega \in \Omega} P_\omega = 1$$

$Dans\ ce\ cas, on\ appelle\ support\ de\ cette\ distribution\ l'ensemble:$

$$S = \{\omega \in \Omega \mid P_\omega > 0\}$$

Proposition :

S est fini ou dénombrable donc :

$$\sum_{\omega \in \Omega} P_\omega = \sum_{\omega \in S} P_\omega$$

Théorème :

Soient Ω *un ensemble et* (P_ω) *une distribution de probabilités discrète sur* Ω.

Alors il existe une unique probabilité sur $\big(\Omega, P(\Omega)\big)$ *notée* $\wp$ *telle que* :

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \wp(A) = \sum_{\omega \in A} P_w$$

Proposition :

Si Ω *est fini ou dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités possibles sur* $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.