Chapitre 2.2

Généralités sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Dans ce chapitre, E et F sont des parties non vides de $\mathbb{R}$.

I Généralités.

Définition.

- Une application ou une fonction f de E dans F est un objet qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément de F, noté $f(x)$. L'ensemble E est appelé ensemble de définition de f et noté D_f, et l'ensemble F est appelé ensemble d'arrivée de f.
- Une fonction f de E dans F est notée de la façon suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

  Cette notation signifie : f est la fonction qui va de E dans F et qui à x associe $f(x)$. On écrit aussi souvent « soit $f : E \longrightarrow F$ » pour signifier : « soit f une fonction de E dans F ».
- On dit que deux fonctions f et g définies sur E sont égales si, pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.
- On note $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Le but de ce paragraphe est de rappeler les principales définitions et notations d'une fonction. Nous rappelons certains résultats vus dans le chapitre 0, et nous rappellerons et généraliserons tout cela dans le chapitre 4. De plus, nous nous contenterons d'une définition intuitive de fonction. Enfin, il y a en fait une distinction entre fonction et application, distinction que nous ne ferons car elle dépasse le cadre du programme.

Définition. Soit f une application de E dans F. Soit $y \in F$.

- Soit $x \in E$. Si $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x par f et que x est **un** antécédent de y par f.
- Si y admet un antécédent par f (c'est-à-dire s'il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$), on dit que y est atteint par f.

Exemples : Les fonctions carré, inverse et nulle peuvent être notées de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array} \right.$$

Nous reverrons les fonctions de référence dans le chapitre 2.5.

Remarques :

- Quand on écrit que f va de E dans F, cela signifie que f prend ses valeurs dans F, cela ne signifie pas du tout que tous les éléments de F sont atteints. Par exemple, on peut dire que la fonction carré et même la fonction nulle vont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$! Cependant, quand on sait que la fonction f prend ses valeurs dans un ensemble F plus petit que $\mathbb{R}$, on peut être plus précis et la noter

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

  Par exemple, on sait que la fonction carré est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ donc on peut écrire que la fonction carré est la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$$

  Attention, encore une fois, écrire cela ne signifie pas ou ne sous-entend pas que tous les éléments de $\mathbb{R}_+$ sont atteints ! Pour affirmer cela le cas échéant, il faut des arguments supplémentaires (par exemple le TVI pour la fonction carré). Morale de l'histoire : ne pas confondre F (l'ensemble d'arrivée) avec $f(E)$, l'ensemble image (cf. chapitre 4). Parfois, on ne sait pas dans quel ensemble f prend ses valeurs : dans le doute, en attendant plus de précision, on dira que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- ⚠ Un élément de E admet une unique image par définition, mais un élément de F peut très bien admettre plusieurs antécédents (voire même une infinité) ou, au contraire, aucun ! Par exemple,
  - ⋆ Tout réel non nul n'admet aucun antécédent par la fonction nulle, tandis que tout réel est antécédent de 0 : 0 admet donc une infinité d'antécédents par la fonction nulle.
  - ⋆ Si $y < 0$, y n'a aucun antécédent par la fonction carré. Si $y = 0$, y a un unique antécédent par la fonction carré : lui-même. Et enfin, si $y > 0$, y a exactement deux antécédents par la fonction carré : $\pm\sqrt{y}$. Ne pas oublier l'antécédent négatif !
  - ⋆ Si y est un réel non nul, y admet exactement un antécédent par la fonction inverse : $1/y$. Cependant, 0 n'admet aucun antécédent par la fonction inverse.
- Si f est une fonction de E dans F, on dit que l'on évalue f en $x \in E$, lorsque l'on calcule $f(x)$.
- On peut parfois ne pas expliciter E quand il n'y a aucune ambiguïté. Par exemple, quand on parlera de la fonction $x \longmapsto x + \cos(x)$, il sera sous-entendu (sauf indication contraire) qu'elle va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De même, quand on parlera de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x+1}{x-1}$, il sera sous-entendu (encore une fois sauf indication contraire) qu'elle va de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ (son domaine de définition) dans $\mathbb{R}$.
- Dans l'expression $x \longmapsto f(x)$, la variable x est muette : f ne dépend pas de x et on peut donc écrire $t \longmapsto f(t)$ ou truc $\longmapsto f(\text{truc})$, etc. Par exemple, dire « la fonction f est croissante pour tout x » n'a aucun sens : f ne dépend pas de x !

Dans le même ordre d'idée, on écrit au choix :
• (le nombre) $f(x)$ est défini si et seulement si $x \in A$,
• f est définie sur A,
mais pas un mélange des deux phrases (du style « f est définie si et seulement si $x \in A$ »... qu'est-ce que x pour f puisque la variable est muette ?)

- ⚠ Ne pas confondre la fonction f avec l'image $f(x)$! Ces deux objets n'ont pas la même nature et donc ne sauraient être confondus : f est une fonction et $f(x)$ est un réel, cela n'a rien à voir ! On ne parlera donc jamais de la fonction $f(x)$, tout simplement car ce n'est pas une fonction ! On parle plutôt de la fonction f. Si on a affaire à une fonction qui n'a pas de nom, on utilisera la notation avec la flèche vue ci-dessus. Par exemple, on parlera de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ (définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$). Cependant, cela peut vite se révéler assez lourd (surtout si on doit l'écrire plusieurs fois). On définira donc une fois pour toutes une fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$ et on parlera ensuite de la fonction f, ce qui est tout de même plus maniable.
- Dans le vocabulaire des fonctions, on parle souvent de « points » pour désigner les réels. Ainsi, par exemple, deux fonctions sont égales quand elles coïncident **en tout point**.
- ⚠ Si f et g sont deux fonctions définies sur E, la négation de $f = g$ est donc : $\exists x \in E, f(x) \neq g(x)$. En d'autres termes, pour prouver que deux fonctions sont distinctes, il suffit de prouver qu'elles diffèrent **en un point**. Il suffit donc d'exhiber **un point explicite** en lequel elles diffèrent. Par exemple, si on veut prouver que les fonctions $f : x \mapsto e^{x^2}$ et $g : x \mapsto (e^x)^2 = e^{2x}$ (toutes les deux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: comme dit ci-dessus, dans ce genre de cas, l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée sont sous-entendus) sont distinctes, dire que $f(1) = e \neq e^2 = g(1)$ suffit. Cependant, dire : « Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^{2x} \neq e^{x^2}$ donc $f \neq g$ » est faux ! Cela sous-entend que ces deux quantités sont toujours différentes, alors qu'elles coïncident parfois (en 0 et en 2 pour être précis).

II Courbe représentative d'une fonction

Nous munissons le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Rappelons que si M est un point du plan de coordonnées (x, y), on dit que x est l'abscisse de M et y l'ordonnée de M.

Nous identifierons parfois un point à ses coordonnées dans ce repère, de la même façon que nous avons identifié le plan à $\mathbb{R}^2$ dans le chapitre 0.

Définition. Soit C un ensemble de points du plan. Soit (E) une équation à deux inconnues notées x et y (faisant éventuellement intervenir des paramètres notés $a, b \dots$). On dit que (E) est une équation de C si C est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) sont solutions de (E). En d'autres termes :

$$M(x, y) \in C \iff x \text{ et } y \text{ sont solutions de } (E).$$

Encore en d'autres termes, un point appartient à un certain ensemble (une droite, un cercle etc.) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cet ensemble.

Exemples :

- Une droite verticale a une équation du type $x = a$.
- Le cercle de centre $\Omega(x_0, y_0)$ et de rayon $R \geqslant 0$ a pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

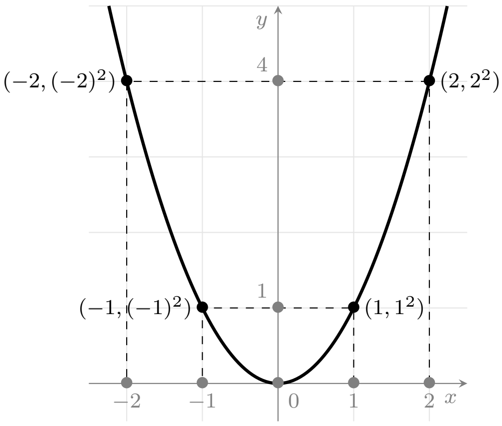
- Une droite non verticale a une équation du type $y = ax + b$.

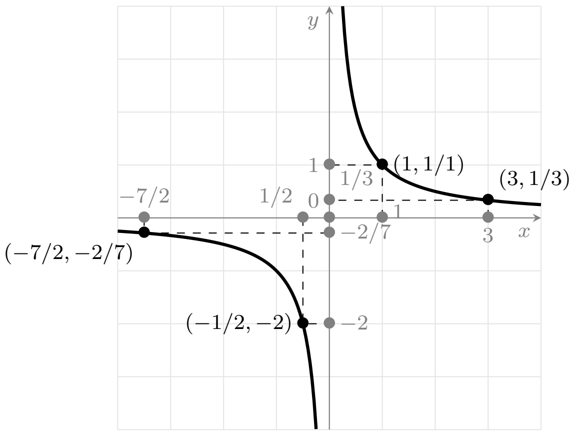
Remarque : ⚠ Attention a ne pas confondre l'ensemble C et l'équation (E). Par exemple, parler de la droite $y = x$ n'a aucun sens ! On parlera de la droite **d'équation** $y = x$.

Définition (courbe représentative). Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. On appelle courbe représentative de f, et on note $\mathscr{C}_f$, l'ensemble $\mathscr{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$. En d'autres termes, c'est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$, pour tout $x \in E$.

En d'autres termes, $\mathscr{C}_f$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont solution de l'équation $y = f(x)$. En clair : $M(x, y) \in \mathscr{C}_f \iff y = f(x)$. $\mathscr{C}_f$ est aussi appelé le graphe de f. Disons encore une fois que $\mathscr{C}_f$ est un ensemble de points du plan, c'est-à-dire (puisque nous avons identifié le plan à $\mathbb{R}^2$ dans le chapitre 0) une partie de $\mathbb{R}^2$. Nous généraliserons cette notion dans le chapitre 4.

Exemples : Ci-dessous à gauche la courbe représentative de la fonction carré et à droite celle de la fonction inverse.



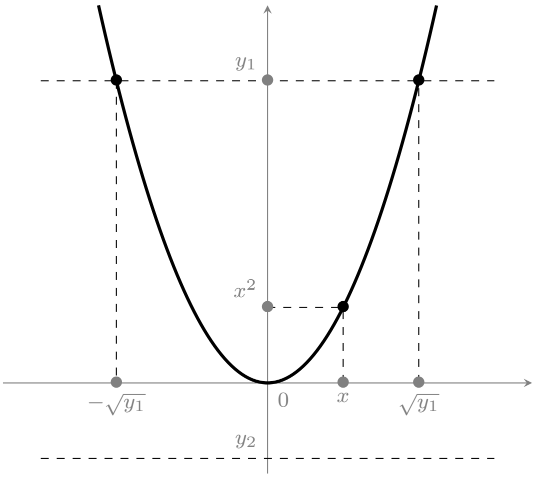


Remarques : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $\mathscr{C}_f$ son graphe.

- Géométriquement, on trouve l'image d'un point $x \in E$ de la façon suivante : on trace la droite verticale d'abscisse x et on regarde en quel point elle coupe le graphe. L'ordonnée du point d'intersection sera $f(x)$. Précisons que, si x appartient bien à D_f, alors cette droite coupera le graphe une unique fois car x admet une unique image. Par exemple, une droite verticale ou un cercle de rayon non nul ne sont pas des courbes représentatives de fonctions car, sinon, certains points auraient plusieurs images (et, par définition, un point a une unique image).
- Géométriquement, on trouve les (éventuels) antécédents par f d'un réel y de la façon suivante : on trace la droite horizontale d'ordonnée y. Les abscisses des éventuels points d'intersection avec le graphe seront les antécédents de y. En particulier, si cette droite n'intersecte pas le graphe, alors y n'admet aucun antécédent par f !

⚠ Attention, un argument géométrique ou graphique n'est jamais une justification ! Cela peut par contre aider à se faire une idée ou deviner un résultat que l'on montrera rigoureusement par la suite.

Exemple : Reprenons le graphe de la fonction carré :



Géométriquement, on retrouve le fait que y_2 (strictement négatif) n'a aucun antécédent par la fonction carré et que y_1 a, lui, deux antécédents, qui sont $\pm\sqrt{y_1}$.

III Opérations sur les fonctions.

III.1 Opérations algébriques.

Définition. Soient $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions suivantes :

- $f+g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \right.$
- $\lambda f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array} \right.$
- $f \times g : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array} \right.$

Supposons que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$. Alors on définit également :

- $\dfrac{1}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{g(x)} \end{array} \right.$
- $\dfrac{f}{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$

Remarque : En d'autres termes :

- $f+g$ est définie sur E par : $\quad \forall x \in E, \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- αf est définie sur E par : $\quad \forall x \in E, \quad (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$.
- fg est définie sur E par : $\quad \forall x \in E, \quad (fg)(x) = f(x) \times g(x)$.

et si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$:

- $\dfrac{1}{g}$ est définie sur E par : $\quad \forall x \in E, \quad \left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.
- $\dfrac{f}{g}$ est définie sur E par : $\quad \forall x \in E, \quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple : Soient $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto x^2$ et $g : x \in \mathbb{R} \longmapsto 1-x$.

- $f+2g$ est la fonction $x \longmapsto x^2+2-2x$.
- $\dfrac{f}{g}$ est la fonction $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \longmapsto \dfrac{x^2}{1-x}$.

En effet $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$.

Remarque : On généralise aisément à un plus grand nombre de fonctions, et on peut « mélanger » ces opérations. Par exemple, si n est un entier supérieur ou égal à 1, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des réels et si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions définies sur E, on définit la fonction suivante :

$$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda_1 \times f_1(x) + \cdots + \lambda_n \times f_n(x) \end{array} \right.$$

Remarque : Pourquoi avait-on besoin d'une définition ? Parce que, jusqu'à présent, nous ne savions sommer que des réels. Cependant, si on prend des objets quelconques, il n'est pas du tout évident qu'on peut les sommer. Par exemple, si l'on prend l'ensemble à deux éléments $\{\text{moi}; \text{le pape}\}$, que vaut la somme moi + le pape ? Que vaut la somme d'une banane et d'une carotte ? Que vaut la somme d'une chaise et d'une table ?

Dans le chapitre 3, on notera cette fonction $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k$. On dit que cette fonction est une combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$. Nous reverrons la notion de combinaison linéaire au chapitre 28.

Quand on manipule des fonctions, c'est possible et même intuitif : la somme de deux fonctions f et g est la fonction qui à tout x associe la somme des images $f(x) + g(x)$. Attention cependant : encore une fois, il ne faut pas confondre les types des éléments qu'on manipule. $f+g$ est une fonction : c'est la fonction définie sur E par $(f+g) : x \mapsto f(x)+g(x)$. Encore une fois, $f(x) + g(x)$ n'est pas une fonction mais un réel.

Pour la plupart des objets que nous avons l'habitude de manipuler (des fonctions, des suites, et plus tard des matrices par exemple), nous pourrons de la même façon définir des opérations analogues à ci-dessus (somme, multiplication par un réel ou un complexe etc.). Munir un ensemble d'une ou de plusieurs lois est la base de l'algèbre. L'étape suivante est de vérifier que ces lois vérifient des propriétés « intéressantes » (commutativité, associativité etc. : cf. chapitre 18), ce que nous ne ferons pas ici : nous n'avons par exemple soulevé aucune difficulté quant à la notation $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$ mais elle présuppose l'associativité de la somme sur les fonctions. Bref, on en reparle.

III.2 Composition.

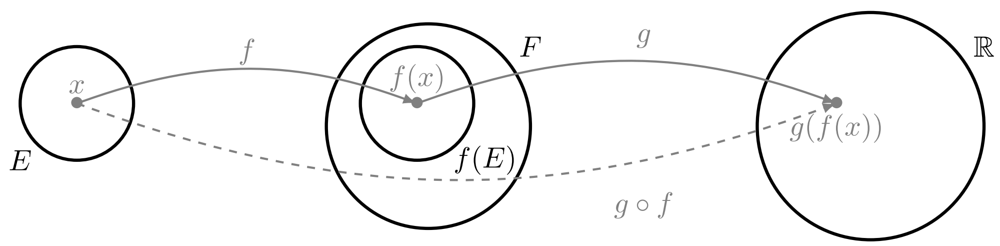
Définition. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit la composée de f par g par :

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array} \right.$$

En d'autres termes, $g \circ f$ est définie sur E par :

$$\forall x \in E, \qquad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Là aussi, on peut aisément généraliser à plus de deux fonctions.



La notation $f(E)$ ci-contre est intuitive : c'est l'ensemble des images des éléments de E par la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble des réels atteints par f. Nous nous contentons de cette définition intuitive, nous verrons la définition précise dans le chapitre 4.

Exemple : Soient $f : x \longmapsto x^2 + 1$ et $g : x \longmapsto 1/x$ (il est sous entendu que f est définie sur $\mathbb{R}$ et g sur $\mathbb{R}^*$). Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$, la fonction $g \circ f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g \circ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Remarque : Il est important de savoir rapidement déterminer le domaine de définition d'une composée. L'important est que toutes les opérations successives soient bien définies. Pour quelles valeurs de x, peut-on considérer $f(x)$ puis $g(f(x))$ puis $h(g(f(x)))$, etc. ? Le cas le plus fréquent est le cas d'une composée de deux fonctions, c'est-à-dire qu'on se demande si la fonction $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est définie et, le cas échéant, où. Il suffit en fait de se poser la question suivante : qui mange quoi ? Par exemple, pour définir $g \circ f$, il faut et il suffit que l'expression $g(f(x))$ ait un sens, et c'est le cas quand :

- $x \in D_f$.
- $f(x) \in D_g$.

Il est donc indispensable que, pour tout x appartenant au domaine de définition de f, $f(x)$ appartienne au domaine de définition de g, sinon $g(f(x))$ n'est pas bien défini. Encore une fois, il suffit de se demander quand les quantités que l'on manipule existent. Il faut un peu de travail au début, mais avec un peu d'habitude, ça va tout seul. De plus, quand on manipule des fonctions particulières, il suffit de retenir certaines règles et, là encore, ça va tout seul.

Dans le chapitre 4, nous reformulerons ça en : $f(D_f) \subset D_g$ ou, avec les notations de la définition ci-dessus (que l'on retrouve sur le dessin), $f(E) \subset F$.

Exemple : Soit $\varphi : x \longmapsto \pi + \sqrt{\dfrac{1}{x^2} - 1}$. Déterminons D_φ.

À part quand on utilise la fonction tangente (ce qui est assez rare), les trois contraintes pour définir une fonction sont :
• un dénominateur ne peut pas s'annuler.
• une quantité dans un ln doit être strictement positive.
• une quantité dans une racine carrée doit être positive ou nulle.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ est définie en } x \quad &\iff \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} \geqslant 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \leqslant 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \in [-1\,;1] \end{cases} \\
&\iff x \in [-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1]
\end{aligned}$$

Finalement, $D_\varphi = [-1\,;0[\,\cup\,]0\,;1]$.

Certaines équivalences proviennent de résultats que nous verrons plus bas (stricte décroissance de la fonction inverse etc.) Nous verrons plus tard les justifications à fournir.

IV Fonctions majorées, minorées, bornées.

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est majorée sur E si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M$. Le réel M est alors appelé majorant de f sur E.
- On dit que f est minorée sur E si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant m$. Le réel m est alors appelé minorant de f sur E.
- On dit que f est bornée sur E si elle est à la fois majorée et minorée.

f est majorée (respectivement minorée, bornée) si et seulement si la partie $f(E) = \{f(x) \,|\, x \in E\}$ (c'est l'ensemble des images de f, ou encore l'ensemble des valeurs prise ou atteintes par f : cf. chapitre 4) est majorée (respectivement minorée, bornée). Par conséquent, les notions d'ensemble majoré et de fonction majorée sont liées !

Remarque : Attention à l'ordre des quantificateurs ! f est majorée si :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leqslant M.$$

Si on intervertit les quantificateurs, cela donne :

$$\forall x \in E, \exists M \in M, f(x) \leqslant M.$$

Or, cette condition est vérifiée par toute fonction f ! En effet, M étant défini après x, il peut dépendre de x, et donc il suffit de prendre $M = f(x)$! Encore un exemple du fait qu'on ne peut pas en général intervertir les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.

Exemple : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2 + x^2 \geqslant 2$. Par conséquent $0 < 1/(2+x^2) \leqslant 1/2$ (rappelons que, pour majorer une fraction de termes positifs, on majore le numérateur mais surtout on minore le dénominateur). On en déduit que $x \mapsto 1/(2+x^2)$ est minorée par 0 et majorée par $1/2$.

Nous verrons dans le chapitre 2.5 que les tableaux de variations sont des outils puissants pour affirmer l'existence éventuelle de majorants, de minorants et d'extrema.

Remarque : Attention, comme pour les ensembles, il n'y a absolument pas unicité du minorant et du majorant éventuel ! Si f est majorée par M, alors tout nombre supérieur à M est aussi un majorant, et idem pour les minorants : si m est un minorant de f, tout nombre inférieur à m est aussi un minorant de f.

- Si f est majorée par M, alors tout nombre supérieur ou égal à M est aussi un majorant.
- Si f est minorée par m, alors tout nombre inférieur ou égal à m est aussi un minorant.

En particulier, le cas échéant, tout nombre strictement supérieur à M (par exemple $M+1$) n'est pas atteint par f, et tout nombre inférieur strictement à m (par exemple $m-1$) n'est pas atteint par f (cela se voit bien sur les dessins ci-dessous). Là aussi, on peut définir une notion de minimum et de maximum.

Nous dirons dans le chapitre 4 qu'une fonction majorée ou minorée ne peut pas être surjective, cf. exercice 52 du chapitre 4.

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- On dit que f est admet un minimum s'il existe $x_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- On dit que f est admet un maximum s'il existe $x_0 \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- On dit que f est admet un extremum si f admet un minimum ou un maximum.

En d'autres termes, f admet un minimum lorsque f admet un minorant qui est atteint. Là aussi, cette notion de minimum est reliée à la notion de minimum d'un ensemble : f admet un minimum si et seulement si $f(E)$ admet un minimum, et alors les deux minima coïncident, et c'est la même chose pour un maximum.

Exemple : La fonction ci-dessus n'admet pas de minimum (alors qu'elle est minorée) et admet 1 pour maximum. En effet, $f(0) = 1$ et on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 1 = f(0)$.

Remarque : Comme pour les ensembles, on voit que le minimum peut ne pas exister, même si la fonction est minorée. De même, une fonction majorée n'admet pas forcément de maximum. Nous avons besoin de notions intermédiaires : les bornes inférieure et supérieure, cf. chapitres 12 et 13.

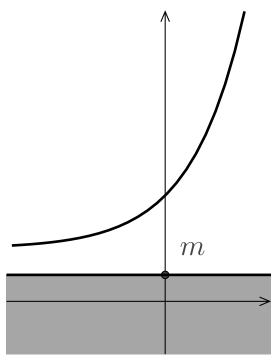
Proposition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée, c'est-à-dire s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$.

Ce résultat est assez utile car il permet de borner une fonction à l'aide d'une seule inégalité

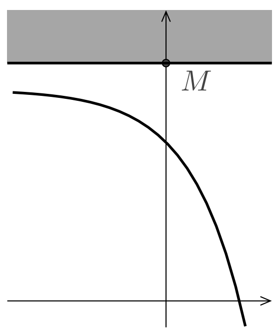
Remarque : Nous démontrerons ce résultat dans le chapitre 2.5, quand nous verrons la valeur absolue.

Remarque : Graphiquement la courbe représentative d'une fonction majorée par M (respectivement minorée par m) se situe en-dessous (respectivement au-dessus) de la droite d'équation $y = M$, et les points situés strictement au-dessus (respectivement en-dessous) de cette droite ne sont pas atteints (zone grisée).

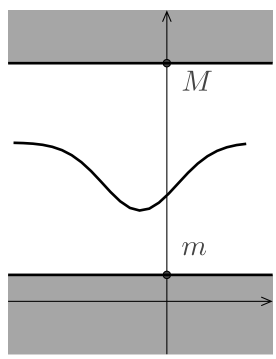
Bien sûr, les dessins ci-contre sont donnés à titre d'exemple, n'allez pas inventer des propriétés de monotonie qui n'existent pas ! De plus, un majorant ou minorant n'est pas forcément « le meilleur possible » : par exemple, la fonction carré est minorée par -1 !



Fonction minorée.



Fonction majorée.



Fonction bornée.

Remarque : Étudions un cas qui se présente très souvent en pratique : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majorée sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Prouvons que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Par hypothèse : il existe $M_1 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant M_1$, et il existe $M_2 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x < 0$, $f(x) \leqslant M_2$. Soit $M = \max(M_1, M_2)$ (rappelons que le maximum d'une famille finie est toujours défini). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant M$. En effet :

- si $x \geqslant 0$, alors $f(x) \leqslant M_1 \leqslant M$.
- si $x < 0$, alors $f(x) \leqslant M_2 \leqslant M$.

Dans tous les cas, $f(x) \leqslant M$: M est un majorant de f sur $\mathbb{R}$, f est bien majorée sur $\mathbb{R}$. On montre de même que si f est minorée par un réel m_1 sur $\mathbb{R}_+$ et par un réel m_2 sur $\mathbb{R}_-^*$, alors f est minorée par $m = \min(m_1, m_2)$ sur $\mathbb{R}$. C'est totalement intuitif ! Par exemple, si toutes les filles font moins 1m90 et tous les garçons font moins d'1m80, alors tous les élèves font moins d'1m90, et si toutes les filles font plus d'1m60 et tous les garçons font plus d'1m50, alors tous les élèves font plus d'1m50.

Les deux majorants n'ont aucune raison d'être égaux, il faut donc les noter différemment !

Nous avons pris $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-^*$ à titre d'exemple, le cas général est analogue : si f est majorée (respectivement minorée) sur E et sur F alors f est majorée (respectivement minorée) sur $E \cup F$.

V Translations, dilatations/contractions, symétries.

Nous munissons encore le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On se donne dans ce paragraphe une fonction $f : E \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On note :

- $-E = \{-x \,|\, x \in E\}$. Par exemple, si $E = \mathbb{R}_+$, alors $-E = \mathbb{R}_-$, si $E = \mathbb{R}$ alors $-E = \mathbb{R}$ et si $E =]-1\,;2]$, alors $-E = [-2\,;1[$. On dit que $-E$ est le symétrique de E par rapport à 0.
- $E - a = \{x - a \,|\, x \in E\}$. Par exemple, avec $a = 1$, si $E = \mathbb{R}_+$, alors $E - a = [-1\,;+\infty[$, si $E = \mathbb{R}$ alors $E - a = \mathbb{R}$ et si $E =]-1\,;3]$, alors $E - a =]-2\,;2]$. On dit que $E - a$ est le translaté de E de vecteur $-a.\overrightarrow{i}$.
- $\dfrac{1}{a}.E = \left\{ \dfrac{x}{a} \,\middle|\, x \in E \right\}$. Par exemple, avec $a = 2$, si $E =]-1\,;1[$, alors $\dfrac{1}{a}.E =]-1/2\,;1/2[$, si $E = \mathbb{R}$ alors $\dfrac{1}{a}.E = \mathbb{R}$ et si $E =]4\,;5]$, alors $\dfrac{1}{a}.E =]2\,;5/2]$. Bon, là, cet ensemble n'a pas vraiment de nom. Si $a > 1$, on dit généralement que l'ensemble $\dfrac{1}{a}.E$ est contracté par rapport à E (par exemple, si $a = 2$, on contracte d'un facteur 2) tandis que si $0 < a < 1$, on dit que $\dfrac{1}{a}.E$ est dilaté par rapport à E (par exemple, si $a = 1/2$ alors cet ensemble est $2.E$ donc E est dilaté d'un facteur 2). Et si $a < 0$... Bref, on ne va pas s'embêter avec ça.

Proposition.

- Le graphe de la fonction $-f : E \to \mathbb{R}$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des abscisses.
- Le graphe de la fonction (définie sur $-E$) $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées.
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Le graphe de la fonction (définie sur $E - a$) $x \mapsto f(x + a)$ est obtenu à partir du graphe de f par une translation de vecteur $-a.\overrightarrow{i}$ (donc une translation horizontale).
- Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Le graphe de la fonction (définie sur E) $f + a : x \mapsto f(x) + a$ est obtenu à partir du graphe de f par une translation de vecteur $a.\overrightarrow{j}$ (donc une translation verticale).
- Soit $a > 0$. Le graphe de la fonction (définie sur $\dfrac{1}{a}.E$) $x \mapsto f(ax)$ est obtenu à partir du graphe de f par une contraction (ou dilatation, voir ci-dessous) horizontale de rapport a.
- Soit $a > 0$. Le graphe de la fonction (définie sur E) $x \mapsto af(x)$ est obtenu à partir du graphe de f par une contraction (ou dilatation, voir ci-dessous) verticale de rapport a.

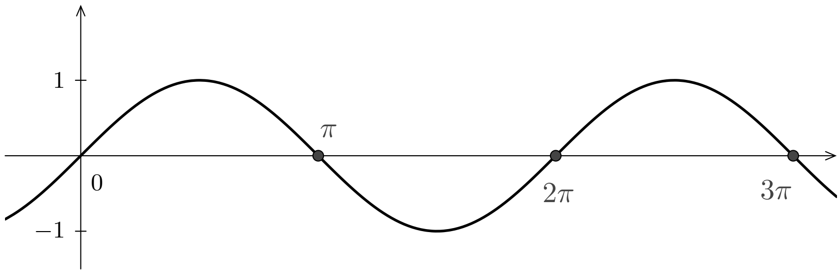
Attention au signe $-$! Voir ci-dessous.

Pas de signe $-$ ici.

Nous ne démontrons pas ce résultat car il sert juste à vous aider à visualiser et à tracer les graphes de telles fonctions. Pour vous en souvenir, des dessins valent mieux que de longs discours : illustrons tout ceci avec $f = \sin$ (nous reverrons les fonctions trigonométriques en détail dans le chapitre 5).

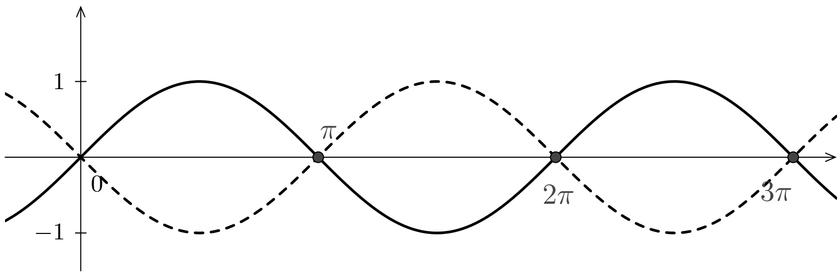
Il n'est d'ailleurs pas nécessaire d'apprendre par coeur les différents domaines de définition qui se retrouvent facilement au cas par cas. Profitez-en, je ne dis pas ça souvent.

- Graphe de $x \mapsto \sin(x)$:



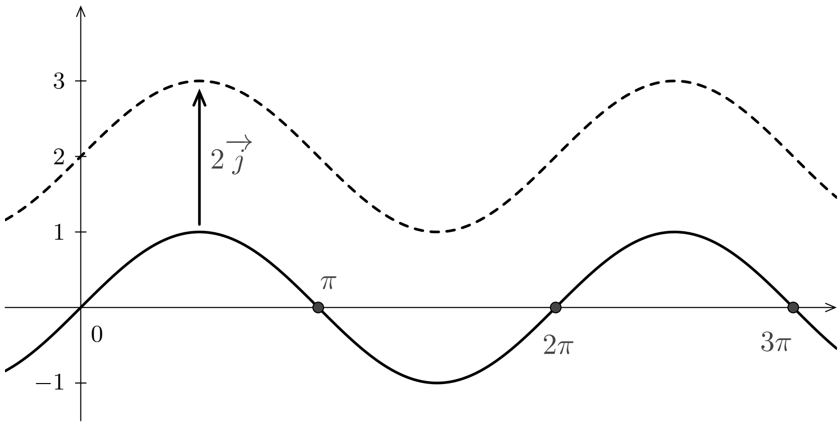
Sur les graphes ci-dessous, nous laisserons le graphe du sinus (en traits pleins) en guise de comparaison, le graphe de l'autre fonction sera en pointillés.

- Graphe de $x \mapsto -\sin(x)$ (en pointillés, donc) :



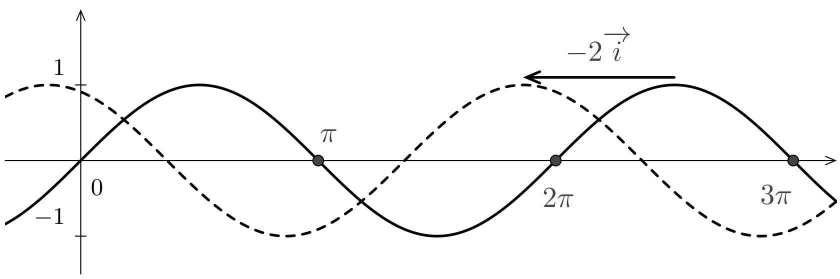
- Graphe de $x \mapsto \sin(x) + 2$:

Évidemment, si on ajoute un réel négatif, on va « vers le bas ».

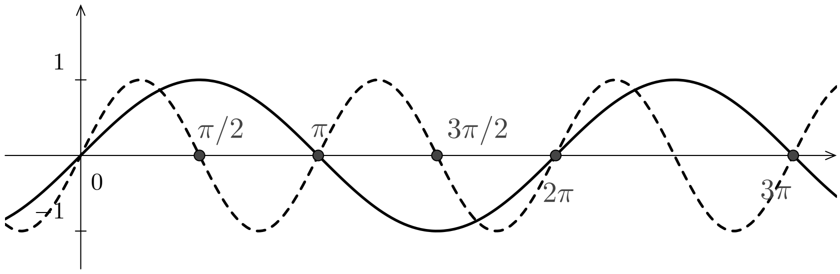


- Graphe de $x \mapsto \sin(x + 2)$:

Attention au signe $-$! La fonction $x \mapsto f(x+a)$ atteint la valeur $f(a)$ en 0, la valeur $f(a+1)$ en 1 etc. Avec les mains, on peut dire qu'elle a une avance de a sur la fonction f, et donc son graphe est aussi « en avance ». Bon, évidemment, si a est négatif, on va « vers la droite »...

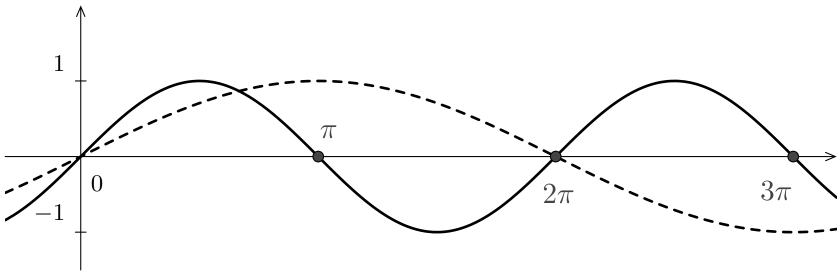


- Graphe de $x \mapsto \sin(2x)$:



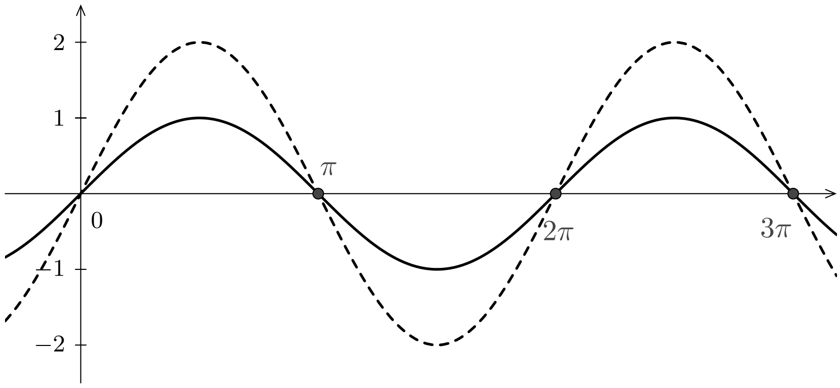
Le graphe est compressé horizontalement d'un facteur 2. On va « deux fois plus vite » : cf. remarque ci-dessous.

- Graphe de $x \mapsto \sin(x/2)$:

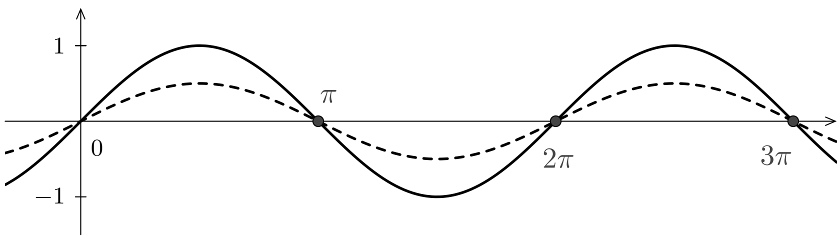


Le graphe est dilaté horizontalement d'un facteur 2. On va « deux fois plus lentement » : cf. remarque ci-dessous.

- Graphe de $x \mapsto 2\sin(x)$:



- Graphe de $x \mapsto \sin(x)/2$:

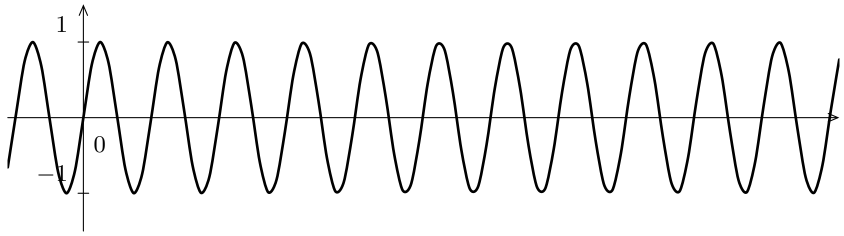


Remarque : Comme on peut le voir sur les deux derniers graphes, si $a > 0$, le graphe de f/a est obtenu à partir de celui de f en divisant l'amplitude par a : si $a > 1$, on a un graphe plus petit donc on parle de contraction, tandis que si $0 < a < 1$, quand on divise par a, on a une quantité plus grande donc on parle plutôt de dilatation (et ce sera la même chose dans la remarque suivante). Moi je dis qu'on fait plutôt mal aux mouches... il suffit de garder les deux exemples ci-dessus en tête.

Remarque : Tant qu'on en parle, disons un mot au sujet des fonctions du type $x \mapsto f(ax)$. Quand on trace ou quand on parcourt le graphe de f c'est-à-dire de la fonction $x \mapsto f(x)$, on prend comme abscisse x, c'est-à-dire qu'on va « à la vitesse x », x est donc « la vitesse de référence ». Quand on trace le graphe de $x \mapsto f(ax)$, on va « à la vitesse ax », « la vitesse est multipliée par a » et donc le graphe est compressé horizontalement avec un facteur a.

Attention, la remarque ci-contre est « avec les mains ».

Par exemple, si on prend $a = 2$, on va deux fois plus vite pour parcourir le graphe, et donc, pour le sinus, on oscille deux fois plus vite. Si on prend $a = 1/2$, on va deux fois plus lentement donc le graphe est « étiré » avec un facteur 2. On peut évidemment prendre un autre facteur : plus a sera grand, plus le graphe sera compressé car on le parcourra plus vite. Par exemple, on trace ci-dessous le graphe de $x \mapsto \sin(nx)$ avec n plus grand :

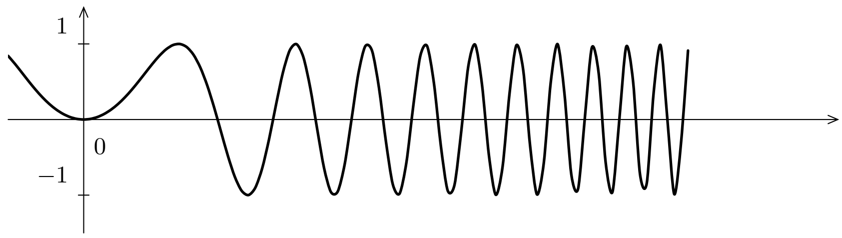


Les « pics » sont plus rapprochés, la période (voir paragraphe suivant) est plus petite : c'est normal ! Si on va plus vite, on effectue une période en moins de temps !

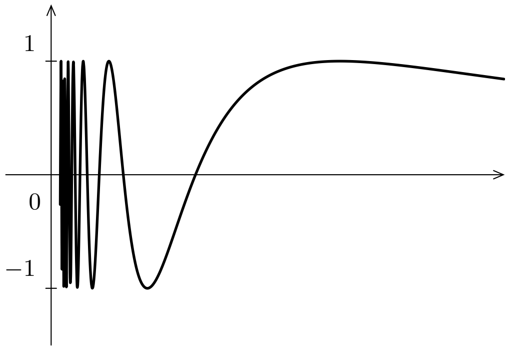
En conclusion, si on parcourt le graphe de $f : x \mapsto f(x)$,on va à vitesse constante, mais si on remplace x par autre chose, le graphe sera d'autant plus resserré que l'abscisse augmente vite. On a vu ci-dessus un graphe deux fois plus resserré avec une vitesse double, mais on peut généraliser cette notion avec une vitesse non linéaire. On dépasse le cadre du programme (sans parler du fait que c'est impossible de le dire rigoureusement car le rapport de contraction/dilatation n'est nulle part le même), mais les deux exemples ci-dessous sont tellement classiques qu'il serait dommage de s'en priver.

Exemples :

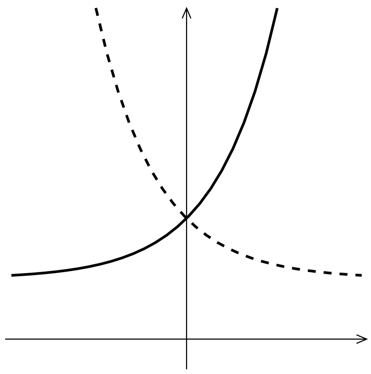
- Le graphe de la fonction $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ est de plus en plus rapproché quand x se rapproche de $+\infty$ car, quand $x \to +\infty$, x^2 tend vers $+\infty$ « beaucoup plus vite que x », tandis qu'il est un peu « dilaté » au voisinage de 0 car, entre 0 et 1, x^2 est inférieur à x : « x^2 va moins vite que x » entre 0 et 1.



- Le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ est de plus en plus rapproché quand x se rapproche de 0 car, quand $x \to 0^+$ (nous reverrons les limites à droite dans le chapitre 13), $1/x$ tend vers $+\infty$ alors que x tend simplement vers 0. Pour faire simple : quand $x \to 0^+$, $1/x \to +\infty$ sans jamais l'atteindre, donc la fonction oscille indéfiniment et de plus en plus vite sans jamais atteindre l'axe des ordonnées.



Enfin, représentons sur le même dessin le graphe d'une fonction f (en traits pleins) et celui de $x \mapsto f(-x)$ (en pointillés) :



Comme on le voit, parcourir le graphe de $x \mapsto f(-x)$ revient à parcourir le graphe de f « en sens inverse » (par exemple, sur notre dessin, de $+\infty$ vers $-\infty$).

VI Quelques types de fonctions remarquables

On se donne encore une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ et on munit encore le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

VI.1 Fonctions périodiques.

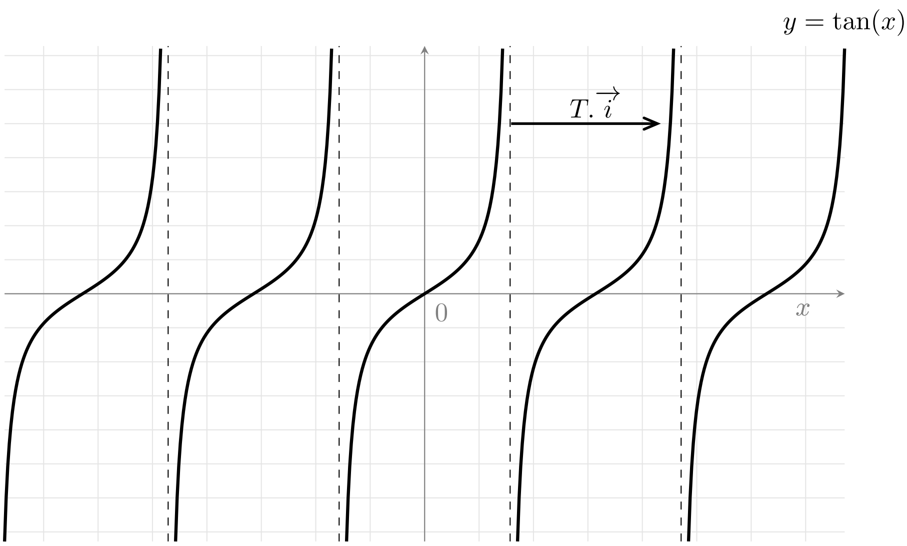
Définition. Soit $T \in \mathbb{R}$. On dit que f est T-périodique sur E si :

- $\forall x \in E, x \pm T \in E$.
- $\forall x \in E, f(x+T) = f(x)$.

On dit alors que T est une période de f.

Bon, évidemment, si $T = 0$, la définition ci-contre a un intérêt limité... C'est pour cela que, dans la définition d'une fonction périodique ci-dessous, on demandera l'existence d'une période **non nulle**. Cependant, mettre 0 dans l'ensemble des périodes nous permettra d'affirmer que l'ensemble des périodes d'une fonction est un groupe (cf. chapitre 18) ce qui nous permettra de démontrer des résultats que l'on aurait du mal à prouver sans cela.

Remarque : En d'autres termes, f est T-périodique si la fonction $x \mapsto f(x+T)$ et la fonction f sont égales. Il faut faire attention à ne pas oublier la première condition ! Avec les notations du paragraphe précédent, on reformule cette condition en : $E = E - T$, c'est-à-dire que les deux fonctions f et $x \mapsto f(x+T)$ ont même domaine de définition, ce qui est la moindre des choses pour que deux fonctions soient égales ! Mais il suffit juste de prendre le réflexe de ne jamais évaluer une fonction en un point qui n'appartient pas à son domaine de définition : comment pourrait-on avoir $f(x) = f(x+T)$ si $x+T$ n'appartient même pas au domaine de définition de f ?



Interprétation géométrique : Soit $T \in \mathbb{R}$. Une fonction f étant T-périodique si les fonctions f et $x \mapsto f(x+T)$ sont égales, une fonction est T-périodique si les graphes de ces fonctions sont les mêmes. Par conséquent, d'après le paragraphe précédent : une fonction est T-périodique si son graphe est invariant par translation de vecteur $T.\overrightarrow{i}$. Ci-dessus le graphe de la tangente, que nous reverrons dans le chapitre 5.

Bon, si on applique bêtement et méchamment le paragraphe précédent, il faudrait plutôt dire que f est T-périodique si son graphe est invariant par translation de vecteur $-T.\overrightarrow{i}$. Mais, si c'est le cas, alors il est aussi invariant par l'opération inverse (c'est intuitif : si on ne change rien en faisant une opération, on ne fait rien non plus en l'annulant, donc en la faisant en sens inverse).

Définition. f est périodique s'il existe $T \neq 0$ tel que f soit T-périodique.

Proposition. Soit $T \in \mathbb{R}$. On suppose que f est T-périodique. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

- $\forall x \in E, x + kT \in E$.
- $\forall x \in E, f(x + kT) = f(x)$.

En d'autres termes, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, f est kT-périodique.

Démonstration. Soit $x \in E$. On montre par deux récurrences immédiates que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $x + nT \in E$ et $f(x + nT) = f(x)$.
- $x - nT \in E$ et $f(x - nT) = f(x)$.

Cela permet de conclure puisqu'on prouve le résultat à la fois pour les entiers positifs et négatifs.

Exemple : Pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$, $\sin(x \pm 2n\pi) = \sin(x)$ et idem pour le cos.

Plus précisément (cf. chapitre 5), le sin et le cos sont $\dots, -4\pi, -2\pi, 2\pi, 4\pi, \dots$ périodiques et, plus généralement, tout multiple pair de 2π est une période de ces deux fonctions.

Remarque : On voit avec ce qui précède qu'une fonction périodique admet une infinité de périodes. Parler de « la » période d'une fonction n'a donc aucun sens, on parlera « d'une » période. On pourrait être tenté de définir la plus petite période strictement positive... sauf que celle-ci n'existe pas forcément ! Par exemple, si f est constante, alors tout réel est une période, donc il n'y a pas de plus petite période strictement positive (car $\mathbb{R}_+^*$ n'a pas de minimum, cf. chapitre 2.1). Donnons un autre exemple avec une fonction non constante. Définissons la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ par :

Nous reverrons les fonctions indicatrices dans le chapitre 4.

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrons que tout rationnel est une période. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par disjonction de cas (puisque $E = \mathbb{R}$, il est immédiat que $x \pm r \in E$: nous n'étudions donc que la deuxième condition de la définition d'une fonction r-périodique, et c'est ce que nous ferons quand nous essayerons de prouver qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est périodique).

Nous utilisons le fait que la somme de deux rationnels est un rationnels, et que la somme d'un rationnel et d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel, cf. chapitre 1.

- Si $x \in \mathbb{Q}$ alors $x + r \in \mathbb{Q}$ donc $f(x + r) = 1 = f(x)$.
- Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x + r \notin \mathbb{Q}$ donc $f(x + r) = 0 = f(x)$.

Dans tous les cas, $f(x + r) = f(x)$: f est r-périodique. Or, il n'y a pas de plus petit rationnel strictement positif (car si un tel rationnel r existe, alors $r/2$ est un rationnel qui vérifie $0 < r/2 < r$ ce qui est absurde) donc il n'y a pas de plus petite période strictement positive.

Remarque : Nous déduisons de la proposition que l'étude d'une fonction T-périodique peut être restreinte à un ensemble plus petit. Plus précisément, elle peut être restreinte à n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur T intersecté avec son domaine de définition E. Intuitivement, c'est très simple : par exemple (pour une fonction définie sur $\mathbb{R}$), en recollant tous les morceaux de la forme $[\,kT\,;(k+1)T\,[$ on obtient $\mathbb{R}$ tout entier.

Plus rigoureusement : si $x \in E$ et si $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [\,a\,;a+T\,[\, \cap E$ (cf. exercice 23), et donc $f(x) = f(x+kT)$: connaître f sur $[\,a\,;a+T\,[\cap E$ permet donc de caractériser totalement la fonction f (c'est-à-dire de donner l'image de tout élément $x \in E$), et idem avec un intervalle ouvert en a et fermé en $a+T$. Par exemple :

- Pour caractériser complètement une fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$, il suffit de l'étudier sur $[\,0\,;2\pi\,[$ ou sur $]\,-\pi\,;\pi\,]$ (par exemple pour définir l'argument d'un complexe non nul, cf. chapitre 7). Il est inutile de fermer les deux bornes car les deux bornes ont la même image par périodicité.
- Pour montrer qu'une fonction périodique de période $1/n$ définie sur $\mathbb{R}$ est nulle, il suffit de montrer qu'elle est nulle sur $\left[\,0\,;\dfrac{1}{n}\,\right[$ (cf. exercice 12 du chapitre 3). Idem, il est inutile de fermer aux deux bornes.
- Si une fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ est 1-périodique et si elle est continue sur $]\,0\,;1\,[$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. De plus, si elle est prolongeable par continuité en 0 alors, par périodicité, elle est prolongeable par continuité sur $\mathbb{Z}$.
- La tangente a une dérivée positive sur $]\,-\pi\,;\pi\,[$ donc, par périodicité, sa dérivée est positive sur son domaine de définition.

Ci-contre, nous manipulons des notions et des fonctions que nous verrons ultérieurement, nous allons juste illustrer le raisonnement ci-contre.

Remarque : ⚠ Attention à ne pas conclure tout et n'importe quoi en utilisant la périodicité ! Les propriétés préservées par périodicité sont les notions ponctuelles, comme le signe par exemple. Pour les notions locales ou globales, i.e. valables sur un voisinage (on en reparle), comme la monotonie, il faut faire attention aux points de recollement, et par exemple prouver que la fonction est continue pour conclure (cf. par exemple chapitre 13). Par exemple, la tangente est croissante sur $\left]\,-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right[$ mais il serait complètement faux de dire qu'elle est croissante sur son domaine de définition ! De même, une fonction 1-périodique qui serait continue ou affine sur $[\,0\,;1\,[$ n'est pas forcément continue ou affine sur $\mathbb{R}$ (voir l'exemple de la partie fractionnaire dans le chapitre 2.5) car il peut y avoir des problèmes de « recollement ».

⚠ La propriété reliant signe de la dérivée et monotonie n'est valable que sur un intervalle, cf. 2.4

Morale de l'histoire : faire preuve de bon sens et, au besoin, faire un dessin au brouillon pour affirmer qu'on ne dit pas d'ânerie.

VI.2 Fonctions paires et impaires

Définition. On suppose que E est symétrique par rapport à 0, i.e. : $\forall x \in E, -x \in E$.

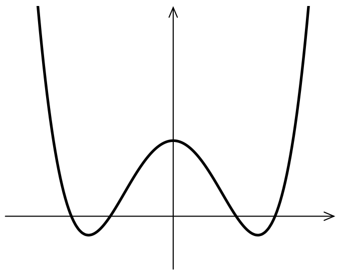
- f est paire sur E si : $\forall x \in E, f(-x) = f(x)$.
- f est impaire sur E si : $\forall x \in E, f(-x) = -f(x)$.

Par exemple, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^*$, $]\,-2\,;2\,[$, et $]\,-\infty\,;-1\,[\ \cup\ ]\,1\,;+\infty\,[$ sont symétriques par rapport à 0.

Exemples : La fonction carré est paire sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \longmapsto x^3$ est impaire sur $\mathbb{R}$. La fonction inverse est impaire sur $\mathbb{R}^*$. Nous verrons d'autres exemples dans le chapitre 2.5.

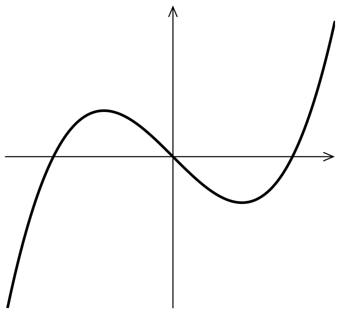
Remarque : En d'autres termes, f est paire si la fonction $x \mapsto f(-x)$ et la fonction f sont égales, tandis que f est impaire si ces deux fonctions sont opposées. Là aussi, il faut faire attention à ne pas oublier la première condition ! De même que dans le paragraphe précédent, elle signifie que f et $x \mapsto f(-x)$ ont même domaine de définition, ce qui est la moindre des choses pour que deux fonctions soient égales ou opposées.

Interprétation géométrique : On sait que le graphe de $x \mapsto f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'axe des ordonnées. Une fonction f étant paire si les fonctions f et $x \mapsto f(-x)$ sont égales, une fonction est paire si les graphes de ces deux fonctions sont les mêmes. Par conséquent, une fonction est paire si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :

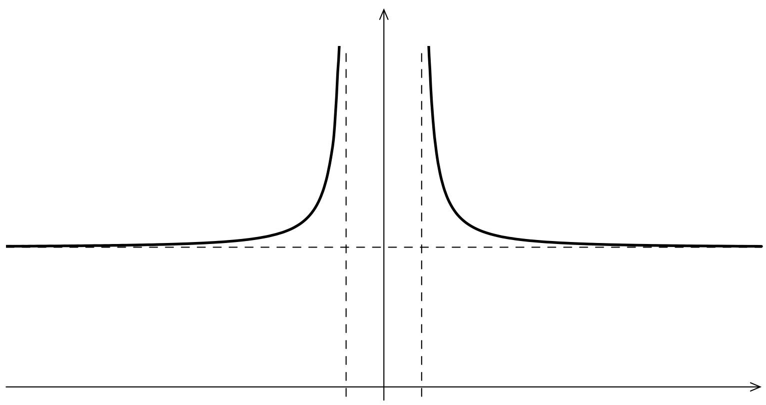


De plus, si on multiplie en plus par -1, alors on fait en plus une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Finalement, le graphe de $x \mapsto -f(-x)$ est obtenu à partir du graphe de f en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puis une symétrie par rapport à l'axe des abscisses. Finalement, le graphe de $x \mapsto -f(-x)$ est le symétrique du graphe de f par rapport à l'origine, donc f est impaire lorsque son graphe est égal au graphe de $x \mapsto -f(-x)$ donc lorsque son graphe est symétrique par rapport à l'origine.

Si une fonction impaire **est définie en** 0, alors elle nulle en 0. En effet, si f est impaire et définie en 0, alors $f(-0) = -f(0)$ donc $2f(0) = 0$ donc $f(0) = 0$. Attention, une fonction impaire n'est pas forcément définie en 0, par exemple la fonction inverse. Pour les fonctions paires, on ne peut rien affirmer, une fonction paire prend des valeurs quelconques en 0.



Remarque : De même que pour les fonctions périodiques, si f est paire ou impaire, on peut se contenter d'étudier f sur $\mathbb{R}_+ \cap E$ ou sur $\mathbb{R}_- \cap E$. Mais, encore une fois, attention à ne pas conclure tout et n'importe quoi (si on a un doute, faire un dessin au brouillon permet d'éviter d'écrire une ânerie). Par exemple, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est paire et nulle sur $\mathbb{R}_+$, alors f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ci-dessous, le graphe d'une fonction paire sur $]-\infty\,; -1\,[\cup]\,1\,; +\infty\,[$, décroissante sur $]\,1\,; +\infty\,[$: elle est alors croissante sur $]-\infty\,; -1\,[$ (cf. chapitre 2.6).



VII Fonctions (strictement) monotones

VII.1 Définitions.

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- f est croissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- f est décroissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.
- f est strictement croissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f est strictement décroissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- f est constante si : $\forall (x,y) \in E^2, f(x) = f(y)$.

En d'autres termes, une fonction croissante est une fonction qui préserve les inégalités, et une fonction décroissante est une fonction qui les inverse.

Remarque : Puisque $f(x) \leqslant f(y)$ et $f(x) \geqslant f(y)$ si $x = y$, on trouve parfois les définitions suivantes :

- f est croissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$.
- f est décroissante si : $\forall (x,y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)$.

Bon, en fait, cela reste très marginal. Il faut cependant bien garder cela en tête car, parfois, pour montrer qu'une fonction est croissante ou décroissante (même non strictement), on prend $x < y$ car il n'y a rien à montrer si $x = y$.

Cela permet de se rendre compte du fait suivant : même si les inégalités de départ sont strictes, une fonction monotone (non strictement) donne des inégalités larges ! Pour avoir des inégalités strictes, il faut une fonction strictement monotone ! Et ce sera la même chose si l'on veut une équivalence, même avec des inégalités larges (voir plus bas).

Remarque : Une fonction est à la fois croissante et décroissante si et seulement si elle est constante. De plus, f est constante si et seulement si elle ne prend qu'une seule valeur (cf. exercice 11 du chapitre 0) i.e. f est constante si et seulement si : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda$. Cette écriture permet de mieux visualiser une fonction constante à l'aide de son graphe (une droite horizontale) et est parfois plus pratique, par exemple pour donner sa limite.

Définition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On dit que f est (strictement) monotone si f est (strictement) croissante ou décroissante.

Remarque : Une fonction peut très bien n'être ni croissante, ni décroissante ! En effet, la négation de « f est croissante » est :

$$\exists (x,y) \in E^2, x \leqslant y \text{ et } f(x) > f(y)$$

tandis que la négation de « f est décroissante » est :

$$\exists (x,y) \in E^2, x \leqslant y \text{ et } f(x) < f(y)$$

On voit que la négation de « f est croissante » n'est pas « f est décroissante » ! Ainsi, pour prouver qu'une fonction n'est pas croissante, il suffit d'exhiber deux réels x et y explicites tels que $x \leqslant y$ et $f(x) > f(y)$. En effet, une fonction est croissante quand elle préserve les inégalités : pour montrer qu'une fonction n'est pas croissante, il suffit d'exhiber deux réels « dont l'ordre a été changé par la fonction f ».

Exemple : La fonction cos n'est pas monotone. En effet, $1 = \cos(0) > \cos(\pi/2) = 0$ donc la fonction cos n'est pas croissante, et $0 = \cos(-\pi/2) < \cos(0) = 1$ donc la fonction cos n'est pas décroissante. On montre de même que la fonction sin n'est pas décroissante : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Nous reverrons les fonctions sin et cos dans le chapitre 5.

Remarque : Attention, la définition d'une fonction croissante n'est pas « f est croissante ssi f' est positive ». Cela n'est valable que pour les fonctions dérivables, et sur un intervalle uniquement ! Par exemple, la fonction partie entière (cf. chapitre 12) est croissante mais non continue (et donc non dérivable). Cette équivalence (très pratique, on ne va pas se mentir) n'est donc utilisable que quand on manipule des fonctions dérivables : il faut donc connaître la définition pour le cas où l'on est confronté à une fonction non dérivable.

Exemple : Supposons E symétrique par rapport à 0 et $f : E \to \mathbb{R}$ paire. Montrons que si f est décroissante sur $E \cap \mathbb{R}_+$, alors f est croissante sur $E \cap \mathbb{R}_-$.

Soit $(x,y) \in E \cap \mathbb{R}_-$ avec $x \leqslant y$. Alors $-x \geqslant -y$. Or, $-x$ et $-y$ appartiennent à $E \cap \mathbb{R}_+$ et f est décroissante sur cet ensemble donc $f(-x) \geqslant f(-y)$. f étant paire, $f(x) \geqslant f(y)$ ce qui permet de conclure.

On montrerait de même que si f est impaire et décroissante sur $E \cap \mathbb{R}_+$, alors f est décroissante sur $E \cap \mathbb{R}_-$.

Remarque : Attention, contrairement aux suites, avoir $f(x+1) > f(x)$ pour tout x n'implique pas forcément que f est strictement croissante ni même croissante !

Bon, par contre, si on a $f(x+1) > f(x)$ pour tout x ou seulement pour un certain x, on peut en déduire que f n'est pas décroissante, mais ça s'arrête là.

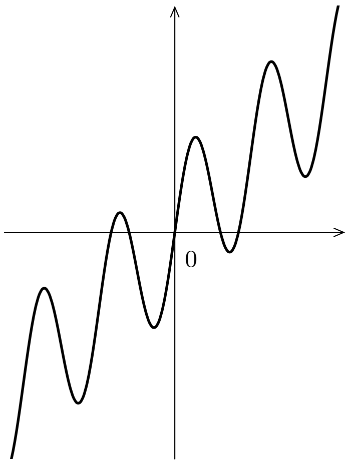
Exemple : Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + \sin(2\pi x) \end{array} \right.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$
\begin{array}{rcll}
f(x+1) & = & x+1+\sin(2\pi(x+1)) & \\
& = & x+1+\sin(2\pi x+2\pi) & \\
& = & x+1+\sin(2\pi x) & \text{(la fonction sin est } 2\pi\text{-périodique)} \\
& = & f(x)+1 & \\
& > & f(x) &
\end{array}
$$

Cependant, f n'est pas croissante car $f(0)=0>-\dfrac{1}{4}=f\left(\dfrac{3}{4}\right)$. Ci-dessous le graphe de f.



Remarque : La négation de « f est constante » est : $\exists(x,y)\in I^2, f(x)\neq f(y)$. En d'autres termes, une fonction n'est pas constante quand elle prend au moins deux valeurs. Cela peut être utile, par exemple dans un raisonnement par l'absurde.

VII.2 Opérations sur les fonctions monotones.

Proposition. Soient $f : E\to\mathbb{R}$ et $g : E\to\mathbb{R}$. Si f et g sont croissantes (respectivement décroissantes) alors $f+g$ est croissante (respectivement décroissante). De plus, si l'une d'elles est strictement croissante (respectivement décroissante), alors $f+g$ est strictement croissante (respectivement décroissante).

Démonstration. Supposons f et g croissantes (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $(x,y)\in E^2$ et supposons $x\leqslant y$. f et g sont croissantes donc $f(x)\leqslant f(y)$ et $g(x)\leqslant g(y)$. Par somme :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\leqslant f(y)+g(y)=(f+g)(y) \qquad \square$$

En d'autres termes, $f+g$ est croissante. Supposons que l'une des deux soit strictement croissante. Sans perte de généralité, on suppose que c'est f. Supposons à présent $x<y$. Alors $f(x)<f(y)$ et $g(x)\leqslant g(y)$. Par somme, $(f+g)(x)<(f+g)(y)$ i.e. $f+g$ est strictement croissante.

Proposition. Soit $f : I\to\mathbb{R}$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

- Si f est (strictement) croissante et si $\lambda>0$ (respectivement $\lambda<0$), alors λf est (strictement) croissante (respectivement décroissante).
- Si f est (strictement) décroissante et si $\lambda>0$ (respectivement $\lambda<0$), alors λf est (strictement) décroissante (respectivement croissante).

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Si une fonction f est (dé)croissante sur A et sur B, f n'est pas forcément (dé)croissante sur $A\cup B$! Par exemple, la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas décroissante car, si on la note f, $f(-1)<f(1)$! Si on veut « passer à l'union », il faut d'autres conditions (par exemple la continuité en les points de recollement le cas échéant), mais il vaut mieux regarder au cas par cas.

En d'autres termes, une somme de fonctions croissantes est croissante. Cela peut être pratique si f et g sont non dérivables ou ont une dérivée compliquée à calculer. Ou tout simplement si on veut aller vite : par exemple, cela permet d'affirmer directement que $x\mapsto x+\ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$! Cependant, attention, on ne peut rien dire concernant la somme de deux fonctions de monotonies différentes. De plus, on ne peut rien affirmer concernant le produit de deux fonctions monotones (même de même monotonie). Exo : trouver une somme de fonctions monotones qui ne soit pas monotone, et un produit de fonctions croissantes qui ne soit pas croissant.

Proposition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$.

- Si f et g sont (strictement) monotones de même monotonie alors $g \circ f$ est (strictement) croissante.
- Si f et g sont (strictement) monotones de monotonies contraires alors $g \circ f$ est (strictement) décroissante.

Remarque : Pour la somme, il suffit que l'une des deux soit strictement monotone pour que la somme le soit, mais pour la composition, il est nécessaire que les deux le soient. Par exemple, si f est constante, alors $g \circ f$ est constante donc n'est pas strictement monotone, même si g l'est.

DÉMONSTRATION. Supposons f strictement croissante et g strictement décroissante (raisonnements analogues dans les autres cas). Soit $(x, y) \in E^2$ et supposons $x < y$. f est strictement croissante donc $f(x) < f(y)$ et g est strictement décroissante donc $g(f(x)) > g(f(y))$. En d'autres termes, $g \circ f(x) > g \circ f(y)$: $g \circ f$ est strictement décroissante.

Proposition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$.

- Si f est **strictement** croissante, alors : $\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y)$.
- Si f est **strictement** décroissante, alors : $\forall (x, y) \in E^2, x \leqslant y \iff f(x) \geqslant f(y)$.

DÉMONSTRATION. Supposons f strictement croissante (l'autre cas est analogue et laissé en exercice). Soit $(x, y) \in E^2$. L'implication $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ découle du fait que f est croissante. Réciproquement, supposons $x > y$. f étant strictement croissante, $f(x) > f(y)$. D'où la réciproque (par contraposée).

Remarque : Même si les inégalités sont larges, la stricte monotonie est indispensable pour avoir l'équivalence (si la monotonie n'est pas stricte, seul le sens direct est vrai). Par exemple, si f est la fonction nulle, alors $f(2) \leqslant f(1)$ mais on n'a pas $2 \leqslant 1$. Par conséquent, quand on résoudra une inéquation et qu'on veut travailler par équivalences, il ne faudra pas oublier de préciser que la monotonie est stricte ! Typiquement, quand on manipulera des carrés ou des racines carrées, des exponentielles ou des ln ou quand nous manipulerons la fonction inverse. Voir l'exemple dans le III.2 où nous avons donné le domaine de définition de la fonction φ. Nous verrons d'autres exemples en TD.

Proposition. Soient $f : E \to \mathbb{F}$ et $g : F \to \mathbb{R}$.

- Si g est strictement croissante, alors f et $g \circ f$ ont les mêmes variations.
- Si g est strictement décroissante, alors f et $g \circ f$ ont des variations opposées.

C'est décidé, on ne dira jamais « les variations de $g \circ f$ dépendent des variations de f » quand on voudra dire que f et $g \circ f$ ont les mêmes variations. Il suffit de savoir parler français pour comprendre que ce n'est pas la même chose !

DÉMONSTRATION. Supposons g strictement croissante (raisonnement analogue dans l'autre cas).

- Supposons f strictement décroissante. Alors $g \circ f$ est strictement décroissante car composée de fonctions strictement monotones de monotonies contraires.
- Supposons $g \circ f$ strictement décroissante. Soit $(x, y) \in E^2$ tels que $x < y$. Alors $g(f(x)) > g(f(y))$. Or, g est strictement croissante donc $f(x) > f(y)$: f est strictement décroissante.
- De même pour tous les autres cas.

Remarque : La proposition précédente permet de se faciliter la vie quand on veut étudier une composée de fonctions dont l'une est strictement monotone. Par exemple, si on veut étudier la fonction $f : x \mapsto e^{x \ln(x)}$, il suffit d'étudier la fonction $u : x \mapsto x \ln(x)$. En effet, les variations de u et de f sont les mêmes puisque l'exponentielle est strictement croissante. Cela permet d'avoir des calculs de dérivées plus simples !