Chapitre 3

Sommes et produits.

La visée de ce chapitre est essentiellement technique : introduire les notations $\sum$ et $\prod$ et donner leurs principales propriétés. La plupart des preuves sont omises (avec une exception notable : le binôme de Newton, cf I.2.d) : ce sont des récurrences fastidieuses à écrire qui ne nous apporteraient rien du point de vue de la compréhension, il sera plus important de s'entraîner avec les exercices du poly.

I Sommes.

I.1 Notation.

I.1.a Notation « classique ».

Définition. Si m et n sont deux entiers relatifs, avec $m \leqslant n$, et si $a_m, \dots, a_n$ sont des réels, on définit :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = a_m + \cdots + a_n$$

Cette notation se lit « somme des a_k pour k allant de m à n ».

Exemples :

- $3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 = \displaystyle\sum_{k=3}^{10} k^2$
- $-3 - 2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3 = \displaystyle\sum_{k=-3}^{3} k$
- $3^4 + 4^5 + 5^6 + 6^7 + 7^8 = \displaystyle\sum_{k=3}^{7} k^{k+1}$.
- $\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin(\pi) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) + \sin\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) + \sin(2\pi) = \displaystyle\sum_{k=2}^{6} \sin\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$
- $\dfrac{2}{3} + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 + \left(\dfrac{5}{6}\right)^4 + \left(\dfrac{6}{7}\right)^5 + \left(\dfrac{7}{8}\right)^6 + \left(\dfrac{8}{9}\right)^7 + \left(\dfrac{9}{10}\right)^8 = \displaystyle\sum_{k=2}^{9} \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{k-1}$

Pour faire simple : k prend toutes les valeurs **entières** entre m et n, et on somme tous les termes correspondants.

Cette dernière somme pourrait également être écrite $\displaystyle\sum_{k=3}^{10} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k-2}$ ou encore $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k}$: cf I.3.e

Remarques :

- Toutes les sommes de ce chapitre sont finies. Pour parler de somme infinie, il faut faire de l'analyse et il y a des questions de convergence que l'on verra aux chapitres 25 et 35. Ce n'est pas immédiat, si on ne prend pas de gants on peut « montrer » que $0 = 1$...
- Par convention, une somme indexée par l'ensemble vide est nulle. Par exemple $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 0$ si $n = 0$. Attention à ne pas confondre avec ce qui se passe quand on fait un changement d'indice décroissant, cf. I.3.e.
- Cette nouvelle notation est utile car elle facilite grandement les calculs grâce à certaines propriétés très agéables (linéarité, principe de Fubini pour les sommes doubles etc. voir plus loin) et car elle permet de lever certaines ambiguités : par exemple, quand on écrit $1 + 2 + \cdots + 2^n$, est-ce la somme des entiers de 1 à 2^n, ou ne somme-t-on que les puissances de 2 ? La notation $\sum$ fait disparaître cette ambiguité : on notera la première $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} k$, tandis qu'on notera la seconde $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k$.

Tout ce chapitre est encore valable en remplaçant « réels » par « complexes » (cf. chapitre 7). Encore plus généralement : on peut se placer sur tout groupe abélien dont la loi est notée additivement (cf. chapitre 18), et en particulier sur tout espace vectoriel (cf. chapitre 28).

- Cependant, il ne faudra pas hésiter (au moins au brouillon) à écrire la somme « avec des petits points », c'est-à-dire sous la forme $a_m + \cdots + a_n$. On a l'air de tourner en rond, mais c'est parfois utile pour vérifier une expression que l'on veut montrer par récurrence, pour voir les sommes télescopiques, pour voir s'il y a n ou $n+1$ termes, pour voir si l'on peut factoriser, pour expliciter le premier terme, etc. La même remarque vaudra pour le produit (cf II.2.).

Il est d'ailleurs écrit explicitement dans le programme que « dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension ».

I.1.b Notation « généralisée ».

Définition. Si on note $P(k)$ une condition vérifiée par un nombre fini d'entiers k on définit $\sum_{P(k)} a_k$ la somme de tous les a_k pour k vérifiant $P(k)$.

Par exemple, $P(k)$: « k entier pair multiple de 5 compris entre 1000 et 1789 ».

Remarque : Par exemple, on peut écrire $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$ au lieu de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Dans cet exemple particulier, il n'y a pas beaucoup de différence entre les deux formes, mais cette nouvelle définition nous permet de ne pas nous restreindre à des entiers consécutifs. Par exemple, si on pose $S = 1+2+3+4+5+7+8+9+10+11+12+13$, il est plus simple d'écrire $S = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k\neq 6}}^{13} k$ que $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{5} k + \sum_{k=7}^{13} k$, mais on peut donner des exemples qui illustrent encore mieux la grande liberté dont on dispose avec cette notation :

Nous verrons un autre exemple encore plus frappant, et très important, dans le paragraphe I.3.e.

Exemple :

- $\displaystyle\sum_{k \text{ impair}\in[\![0\,;10]\!]} k^2 = 1+9+25+49+81$
- $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k \text{ premier}}} k$
- $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 16\\ k \text{ divisible par } 3}} 2k = 6+12+18+24+30$

Remarque : Encore plus généralement, si $I = \{i_1;\dots;i_p\}$ est un ensemble fini d'indices (typiquement une partie finie de $\mathbb{N}$ ou de $\mathbb{N}^2$, voir plus loin) et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par I, on définit la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ comme la somme des éléments a_i pour $i\in I$ c'est-à-dire

$$\sum_{i\in I} a_i = a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_p}$$

Dans les démonstrations du cours, on écrira ainsi souvent des sommes du type $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i P(X=x_i)$ ou $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i = 0$ quand on calculera des espérances ou quand on cherchera à montrer qu'une famille de vecteurs est libre (cf. chapitres 27 et 28).

Remarque : En clair, i prend toutes les valeurs de I possibles, on attribue à a_i (le terme sommé) la valeur correspondante, et on somme. En fait, on peut sommer (quasiment) ce qu'on veut, la seule contrainte est que ce soit clair et sans ambiguité. Par exemple, la somme

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ x^5-3x-1=0}} x$$

est la somme des réels solutions de l'équation $x^5-3x-1=0$. Remarquons qu'on peut définir une somme alors qu'on ne connaît pas les termes de la somme, ni combien de termes on somme !

Une rapide étude de fonction couplée au corollaire du TVI (exo) prouve que cette somme comporte trois termes car l'équation $x^5-3x-1=0$ a trois solutions. Cependant, on ne les connaît pas, ce qui n'empêche pas de les sommer !

Exemple : Soit E un ensemble fini de cardinal n. On peut montrer à l'aide de l'exemple que l'on verra en en II.4 que :

$$\sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \mathrm{card}(X)\text{ impair}}} \mathrm{card}(X) = \sum_{\substack{X\in\mathscr{P}(E)\\ \mathrm{card}(X)\text{ pair}}} \mathrm{card}(X) = 2^{n-1}$$

Nous reverrons cet exemple dans le chapitre 17. Pour l'instant, on se contente de comprendre (d'admirer ?) ces sommes, leur écriture et leur signification.

I.2 Sommes à connaître.

Les sommes à connaître sont les suivantes. De plus, nous verrons que, grâce à linéarité de la somme (cf I.3.b), connaître ces quelques sommes permet d'en calculer un bien plus grand nombre.

I.2.a Somme d'un terme constant.

Proposition. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $m \leqslant n$ deux entiers relatifs. Alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a = a \times (n - m + 1)$$

Remarques :

- Comme pour une somme « normale », cette somme est obtenue en remplaçant k par toutes les valeurs entières entre m et n puis en sommant (que a ne dépende pas de k ne change rien à l'affaire) :

$$\sum_{k=m}^{n} a = \underbrace{a}_{k=m} + \cdots + \underbrace{a}_{k=n}$$

  Il n'est donc pas nécessaire de retenir cette formule, il suffit de retenir le principe suivant : « somme d'un terme constant = le terme constant × le nombre de termes ».

  Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1492}^{1789} 7 = 7 \times 298$.

- Quand on dit « terme constant », cela signifie : « un terme qui ne dépend pas de l'indice de sommation » (k dans notre exemple), mais il peut dépendre d'autres paramètres externes à la somme. Par exemple, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} n = n^2$, à ne pas confondre (cf paragraphe suivant) avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

- La plupart du temps, on manipulera des sommes de ce type (i.e. avec un indice de sommation, noté $i, j, k\dots$ qui prendra des valeurs entières) mais il faut bien comprendre que cela se généralise aux sommes plus générales dont on a parlé dans le paragraphe ci-dessus : en clair, quand on somme un terme qui ne dépend pas de l'objet « sur lequel porte la somme », on multiplie ce terme constant par le nombre de termes de la somme. Par exemple, pour définir la loi binomiale en probas (cf. chapitre 27), on sera confronté à la somme suivante :

$$P(X = k) = \sum_{\substack{\omega \in \Omega \\ \omega \text{ contient } k \text{ fois le chiffre } 1}} p^k (1-p)^{n-k}$$

  Il faut bien comprendre qu'ici, ce qui varie, c'est ω : k est externe à la somme (ce n'est pas l'indice de sommation, voir plus bas). Par conséquent, le terme sommé est toujours le même. Il ne reste qu'à trouver le nombre de termes de la somme. Or, un tel ω peut être représenter par un chemin dans un arbre binaire, chemin avec k succès lors de n répétitions d'une expérience aléatoire. Il y a donc $\displaystyle\binom{n}{k}$ éventualités ω qui vérifient cette condition, si bien que

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Les deux cas de figure les plus fréquents sont $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}$. Attention, il y a n termes quand on somme de 1 à n mais $n+1$ quand on somme de 0 à n donc (par exemple), $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 7 = 7(n+1)$.

Quand on manipulera des sommes doubles, cf I.4, on verra aussi le cas de figure suivant : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} j = n \times j$.

Nous reverrons les coefficients binomiaux plus bas, sans compter que nous ferons la combinatoire dans le chapitre 17 et les probabilités aux chapitres 26 et 27, sans parler encore du fait que nous ne savons même pas qui est Ω (nous reverrons donc en temps voulu l'exemple ci-contre). Il faut donc juste retenir que, quand on somme un objet constant, c'est-à-dire qui ne dépend pas de l'objet « par rapport auquel on somme », on multiplie le terme sommé par le nombre de termes.

I.2.b Sommes des premiers entiers, des premiers carrés, des premiers cubes.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

En particulier, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k \right)^2$$

Comme quoi, les identités remarquables, ce n'est pas fait pour les chiens.

Démonstration. La première égalité a été prouvée dans le chapitre 1, les deux autres le seront dans l'exercice 6.

Remarque : On trouve aussi parfois (par exemple) l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, qui est exactement la même ! On a simplement rajouté le terme d'indice $k = 0$ dans la somme, terme qui est... nul ! Et donc qui ne change pas la valeur de la somme !

Exemple : Soient $m \leqslant n$ deux entiers naturels. Donner la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=m}^{n} k$.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=m}^{n} k + \sum_{k=1}^{m-1} k - \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m-1)}{2} \end{aligned}$$

On connaît uniquement la somme en partant de 1. Il suffit de rajouter, puis d'enlever la somme de 1 à $m-1$. En effet, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{1}^{n} = \sum_{1}^{m-1} + \sum_{m}^{n}$$

complètement intuitive : par exemple, la somme des termes de 1 à 20 est la somme des termes de 1 à 9 à laquelle on ajoute la somme des termes de 10 à 20. Attention à ne pas écrire (comme pour les intégrales)

$$\sum_{1}^{n} = \sum_{1}^{m} + \sum_{m}^{n}$$

car alors le terme d'indice m serait compté deux fois !

Méthode classique : si on cherche à calculer une quantité qui « ressemble » à une quantité que l'on connaît, on rajoute ce qu'il faut pour s'y ramener, et on n'oublie pas de le simplifier en même temps, soit en soustrayant (quand on travaille avec des sommes), soit en divisant (quand on travaille avec des produits, cf II.2). Par exemple, si on reprend la somme $S = 1+2+3+4+5+7+8+9+10+11+12+13$ alors on a $S = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{13} k \right) - 6$ ce qui permet de conclure.

I.2.c Sommes géométriques.

Proposition. Soit $q \in \mathbb{R}$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$

Si $q \in \mathbb{R}, q^0 = 1$ (même si $q = 0$: par convention, $0^0 = 1$). Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n$$

En particulier, si $x = 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1$$

Attention à ne pas dire que cette dernière somme est nulle si $x = 0$!

Remarque : Toujours vérifier que q est différent de 1 avant d'appliquer cette formule, quitte à faire deux cas !

Remarque : Cette formule peut être généralisée comme suit.

Proposition. Soient $q \in \mathbb{R}$ et $n_0 \leqslant n_1$ deux entiers relatifs.

$$\sum_{k=n_0}^{n_1} q^k = \begin{cases} \underbrace{n_1 - n_0 + 1}_{\text{nombre de termes}} & \text{si } q = 1 \\ \underbrace{q^{n_0}}_{\text{premier terme}} \times \dfrac{1 - q^{\overbrace{n_1 - n_0 + 1}^{\text{nombre de termes}}}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Remarque : Je vous déconseille un usage systématique de cette formule, je vous conseille de n'utiliser que la première (celle où la somme commence en 0), sauf éventuellement quand $n_0 = 1$ comme ci-dessous. En effet, la formule générale est propice aux erreurs de calcul : tout le monde sait-il calculer le nombre de termes de -217 à 1789 sans calculatrice sans se tromper ? Nous verrons un moyen de toujours se ramener à la première formule dans le I.3.e. Autre avantage : cela permet de n'apprendre qu'une formule !

Exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 \times \frac{1-3^{n-1}}{1-3}$.

I.2.d Formule du binôme de Newton.

Nous donnons tout de suite cette formule car elle fait partie des sommes à connaître, mais nous la démontrerons et en reparlerons dans le paragraphe II.4.

Théorème (Formule du binôme de Newton). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Dans ce chapitre, nous omettons la plupart des preuves, mais la démonstration du binôme de Newton (que nous ferons dans le paragraphe I.3.e) est à connaître sur le bout des doigts : nous verrons des preuves analogues dans d'autres chapitres (par exemple avec la formule de Leibniz dans le chapitre 14) et, plus généralement, c'est un schéma de preuve extrêmement classique.

I.2.e Une identité remarquable.

Théorème. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right)$$

Démonstration. Nous démontrerons cette égalité dans le I.3.e, mais pour s'en convaincre dès à présent, il suffit de développer l'écriture avec des petits points ci-dessous.

Remarques :

- Il est parfois bon (par exemple pour éviter de se planter) d'écrire cette égalité avec des petits points :

$$a^n - b^n = (a-b) \times (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- Ce n'est pas à proprement parler une somme, mais il faut quand même connaître cette égalité sur le bout des doigts. Elle peut être particulièrement utile, par exemple en arithmétique (cf. chapitre 6, quand nous parlerons des nombres de Mersenne et de Fermat) ou quand on manipule des polynômes, cf. chapitre 19.
- Attention de ne pas confondre la somme de droite avec le binôme de Newton ! Dans la formule du binôme de Newton, il y a... des coefficients binomiaux !

I.3 Opérations sur les sommes.

I.3.a Généralisation du chapitre.

Les propriétés vues au chapitre 2 se généralisent facilement à un nombre quelconque de réels. Plus précisément :

Proposition. Soient $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_i)_{i \in I}$ deux familles de réels indexées par un ensemble I.

- **Inégalité triangulaire :** $\displaystyle\left| \sum_{i \in I} a_i \right| \leqslant \sum_{i \in I} |a_i|$.
- **Somme d'inégalités et cas d'égalité :** on peut sommer les inégalités, c'est-à-dire

Attention, ce n'est pas vrai pour le produit, cf II.1.

que si $a_i \leqslant b_i$ pour tout $i \in I$, alors $\sum_{i\in I} a_i \leqslant \sum_{i\in I} b_i$, avec égalité si et seulement si $a_i = b_i$ pour tout $i \in I$.

I.3.b Linéarité de la somme.

Proposition (Linéarité de la somme). Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels indexées par un ensemble I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

On généralise aisément à une somme de trois termes ou plus.

Remarques :

- En clair : « on casse et on sort les constantes ».
- ⚠ Attention, on parle des constantes multiplicatives, pas des constantes additives ! En effet, par linéarité de l'intégrale, on a $\sum_{k=1}^n 2k = 2\sum_{k=1}^n k$ mais on n'a **pas** $\sum_{k=1}^n (k+2) = \left(\sum_{k=1}^n k\right) + 2$.
- La linéarité de la somme permet de calculer un grand nombre de sommes uniquement à l'aide des sommes à connaître du I.2.

Justement, tant qu'on en parle... Il faut impérativement mettre des parenthèses sinon cela peut, au mieux, prêter à confusion, au pire causer des erreurs : si on écrit $\sum_{k=1}^n k+2$, le 2 est-il dans la somme ou en dehors ?

Exemples :

- Soit $n \geqslant 1$. Par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^n \left(2k + \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 2\sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = n(n+1) + \frac{1-(2/3)^{n+1}}{1-(2/3)}$$

- Somme des termes d'une suite arithmétique : soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geqslant 1$.

$$\sum_{k=0}^n (a+kb) = a\sum_{k=0}^n 1 + b\sum_{k=0}^n k = a(n+1) + b \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Cette valeur n'est pas à connaître, contrairement à la somme des termes d'une suite géométrique.

I.3.c Télescopage.

Proposition. Soient $m \leqslant n$ deux entiers relatifs, et $(a_m, \dots, a_{n+1})$ des réels.

$$\sum_{k=m}^n (a_k - a_{k+1}) = a_m - a_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=m}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_m$$

Ces sommes sont appelées sommes télescopiques.

⚠ En clair, une somme est télescopique quand on somme « un terme moins son successeur » (il reste alors « le premier moins le dernier ») ou « un terme moins son prédécesseur » (il reste alors « le dernier moins le premier »). Attention : on parle de successeur quand, en remplaçant k par $k+1$ dans le premier terme, on obtient le deuxième terme. Par exemple, $\sum_{k=1}^n (2k-(2k+1))$ n'est par une somme télescopique, mais $\sum_{k=1}^n (2k-2(k+1))$ oui.

Remarque : Nous démontrerons ce résultat dans le paragraphe I.3.e. Pour l'instant, contentons-nous de remarquer que ce résultat se voit très bien quand on écrit la somme « avec des petits points » (comme dit en I.1.a, il ne faut jamais hésiter à écrire une somme sous cette forme, au moins au brouillon, pour rendre les choses plus claires). Par exemple,

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_0$$

Exemple : Si $k \geqslant 1$, on pose $u_k = \frac{1}{k^2}$ et, si $n \geqslant 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. Soit $n \geqslant 2$. Pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$,

$$u_k \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Par somme (rappelons qu'on peut sommer les inégalités), il vient

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

Dès lors,

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

La dernière somme est une somme télescopique et on obtient enfin :

$$S_n \leqslant 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

L'égalité

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

peut sembler parachutée : cela s'appelle « décomposer en éléments simples ». Nous verrons cela dans le chapitre 9.

Exemple : Soit $n \geqslant 2$. Donner la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \left(k \times 2^{k-1} - (2k+2) \times 2^{k-1} \right)$.

Le télescopage ne saute pas aux yeux : factorisons $2k+2$ par 2 pour obtenir

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(k \times 2^{k-1} - 2(k+1)2^{k-1} \right) = \sum_{k=2}^{n} \left(k \times 2^{k-1} - (k+1)2^{k} \right)$$

On a bien une somme télescopique , ce qui implique que $S_n = 4 - (n+1)2^n$.

On a un terme moins son successeur, il reste donc le premier terme, pour $k = 2$, qui vaut $2 \times 2^1 = 4$, moins le dernier, pour $k = n$.

I.3.d Rôle de l'indice k.

Remarque : La variable d'indice est « muette » (i.e. locale, interne à la somme). On peut la changer comme on veut sans modifier la valeur de la somme :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{k \in I} a_k = \sum_{t \in I} a_t = \sum_{\mu \in I} a_\mu = \dots$$

Remarque : Le résultat final d'une somme ne peut en aucun cas dépendre de l'indice de sommation ! En effet, comme dit plus haut, il est interne à la somme. En d'autres termes, il n'existe pas en dehors de la somme. Ou en des termes encore plus simples : pas de somme, pas d'indice de sommation ! Par exemple, si on calcule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, alors le résultat dépendra de n (variable globale extérieure à la somme), mais pas de k qui est l'indice de sommation. En poussant un peu (mais pas tant que ça), on pourrait même dire que « la somme ne dépend pas de l'indice de sommation ». Cela peut paraître provocateur mais il suffit d'écrire (par exemple)

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

pour se rendre compte qu'il n'y a en fait aucun k dans cette somme et donc encore moins dans sa valeur.

L'exemple ci-dessous utilise des intégrales, que nous verrons dans le chapitre 10. On peut sauter le calcul de l'intégrale en première lecture pour se concentrer sur la conclusion et l'erreur à ne pas faire ci-dessous.

Exemple : Posons

$$I_n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \int_0^{2\pi} \cos((n-k)x) \, \mathrm{d}x$$

Soit $k \in [\![0 \,; 2n]\!]$. Si $k \neq n$,

$$\int_0^{2\pi} \cos((n-k)x) \, \mathrm{d}x = \left[\frac{\sin((n-k)x)}{n-k} \right]_0^{2\pi} = 0$$

tandis que cette intégrale vaut 2π si $k = n$. Par conséquent, le seul terme non nul de la somme est le terme d'indice $k = n$, si bien que $I_n = \displaystyle\binom{2n}{n} \times 2\pi$.

Cependant, écrire : « $I_n = 0$ si $k \neq n$ et $I_n = \displaystyle\binom{2n}{n} \times 2\pi$ si $k = n$ » est une erreur à ne surtout pas commettre ! En effet, I_n ne dépend pas de k, comme on l'a dit plus haut.

I.3.e Changement d'indice.

Dans le calcul des sommes on utilise sans arrêt la possibilité de faire des changements d'indice i.e. de renuméroter les termes et de les compter différemment. Par exemple, l'égalité ci-dessous est complètement triviale

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{0+1} + a_{1+1} + a_{2+1} + \cdots + a_{n-1+1}$$

C'est cette égalité parfaitement évidente qui se « cache » derrière l'égalité suivante

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1}$$

Il faut bien comprendre qu'un changement d'indice n'est qu'une façon d'écrire différemment la même somme. Si on a un doute, il faut se demander si les deux sommes contiennent les mêmes termes. Par exemple, les deux sommes ci-dessus sont la somme de $a_1, \dots, a_n$ donc sont bien égales, et les deux sommes ci-contre sont la somme de $a_0, \dots, a_n$ donc sont aussi égales.

qui consiste à faire le changement d'indice $i = j + 1$ (on dit ici qu'on fait un décalage d'indice). Dans un premier temps je vous invite à toujours écrire le changement utilisé et à bien faire attention de changer le domaine de sommation. Au début prenez une nouvelle lettre pour l'indice même si, comme les indices sont muets, on peut toujours revenir à la lettre initiale : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$. Un autre cas de figure qui arrive régulièrement : changer l'ordre de sommation i.e. sommer dans l'ordre inverse. Plus précisément, on a l'égalité triviale ci-dessous :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$$

c'est-à-dire que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j}$. On a effectué le changement d'indice $j = n - i$, ce qui revient à calculer la somme en sens inverse.

Attention, si la somme ne va pas de 0 à n, ce n'est pas le même changement d'indice : voir ci-dessous comment on fait quand on somme de 1 à n. Morale de l'histoire : réfléchir deux minutes et, si besoin, au brouillon, écrire la somme avec des petits points.

Remarque : C'est parfois un peu plus compliqué, mais la méthode est toujours la même :

1. Choisir le nouvel indice (en pratique, le choix s'impose de lui-même, voir ci-dessous et les exercices en fin de chapitre).
2. Exprimer chaque indice par rapport à l'autre, par exemple, si on pose $j = n + 2 - i$, alors $i = n + 2 - j$.
3. Remplacer i par j partout. Attention, ne pas toucher à ce qui ne dépend pas de i dans la somme (en particulier, n) !
4. Changer les bornes : avec le même changement que ci-dessus, si $i = 0$ alors $j = n+2$, et si $i = n$ alors $j = 2$.

On vient de montrer le résultat suivant :

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n+2-i}{}^{n} = \sum_{j=2}^{n+2} a_j{}^{n}$$

L'énoncé théorique justifiant la validité des changements d'indice que nous ferons sera vu dans le chapitre 4, mais il servira uniquement de caution théorique à ce que nous ferons en pratique.

L'indice étant muet, on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n+2-i}{}^{n} = \sum_{i=2}^{n+2} a_i{}^{n}$$

mais je vous conseille de changer de lettre tant que vous n'êtes pas à l'aise, même si le retour au même indice peut rendre de fiers services (voir l'exemple de Gauß),

Exemples : Compléter les sommes suivantes :

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=?}^{?} a_?$ avec $i = j-3$
- $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+12} a_i = \sum_{j=0}^{?} a_?$
- $\displaystyle\sum_{i=14}^{n-3} a_{i+5} = \sum_{j=?}^{?} a_j$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i =$
- $\displaystyle\sum_{i=3}^{n+12} a_i =$
- $\displaystyle\sum_{i=14}^{n-3} a_{i+5} =$

Exemple : Calculons $S = \displaystyle\sum_{\substack{k=1\\k \text{ impair}}}^{2n} k^2$. On écrit les nombres impairs sous la forme $k=2i+1$, on effectue donc ce changement de variable pour le calcul de notre somme : posons $k = 2i+1, i = (k-1)/2$. Comment trouve-t-on les nouvelles bornes ? k prend les valeurs impaires de 1 à $2n$, quelles sont les valeurs extrêmes ? 1 est le plus petit nombre impair entre 1 et $2n$, et quand $k=1, i=0$. De plus, $2n-1$ est le plus grand nombre impair entre 1 et $2n-1$ et quand $k=2n-1, i=n-1$, si bien que

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n-1}(2i+1)^2 \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(4i^2+4i+1) \\ &= 4\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + 4\sum_{i=0}^{n-1} i + \sum_{i=0}^{n-1} 1 \end{aligned}$$

et on est ramené à des choses connues.

Méthode classique : poser $k = 2i+1$ (ou $k=2i-1$, voir ci-dessous) pour une somme de termes impairs et $k=2i$ pour une somme de termes pairs.

On aurait pu faire le changement de variable $k = 2i-1$ mais il faut faire attention, la somme irait alors de 1 à n. Je vous laisse le soin de vérifier qu'on trouve dans les deux cas la même valeur finale (à savoir $(4n^3-n)/3$).

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{j=0\\j \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{j}\sqrt{3}^j 2^{n-j}$. Montrer que $S_n \in \mathbb{N}$.

On a envie de faire comme ci-dessus et de poser $j=2k$ (et c'est précisément ce qu'on va faire). Le problème est qu'on ne connaît pas la parité de n (contrairement à l'exemple précédent où l'on sommait jusqu'à $2n$) donc on ne peut pas faire comme ci-dessus, c'est-à-dire qu'on ne connaît pas le plus grand entier pair inférieur ou égal à n, ce qui peut poser problème pour les bornes. Qu'à cela ne tienne, il suffit d'écrire (toujours en posant $j=2k$ puisque la somme ne porte que sur les entiers pairs) :

$$S_n = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k} = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n}\binom{n}{2k}3^k 2^{n-2k} \in \mathbb{N}$$

Remarque : La somme va en fait de $k=0$ à p où p est le plus grand entier k tel que $2k \leqslant n$ c'est-à-dire que p est le plus grand entier k tel que $k \leqslant n/2$, donc on a :

$$S_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\binom{n}{2k}\sqrt{3}^{2k}2^{n-2k}$$

mais c'est difficile quand on n'en a pas l'habitude. On remarque ici l'intérêt de la notation généralisée $\displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n}$ introduite en I.1.b !

Exemple : Pour avoir la paix et travailler avec une autre classe, l'instituteur de Gauß, M. Büttner, avait demandé aux élèves de la classe de Gauß de calculer la somme des entiers de 1 à 100 puis de mettre le tableau avec le résultat sur le bureau (l'ordre donnant la note : je suis jaloux d'une telle pédagogie). En une minute Gaußrendit son tableau avec la réponse exacte ! En posant $S = 1+2+\cdots+100$ il a écrit $S = 100+99+\cdots+1$ et en ajoutant les deux, $2S = 101+101+\cdots+101 = 100 \times 101$. Donnons la rédaction avec des $\sum$ de cette idée géniale (Gauß avait 7 ans) :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n} (n+1-i) = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k)$$

Ainsi (et on voit bien l'intérêt que présente le retour au même indice, ce qu'on peut faire car l'indice est muet) :

$$2S_n = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n} (n+1) = n(n+1)$$

et on retrouve notre formule bien connue (et sans récurrence !).

Nous posons $i = n+1-k$ ou $k = n+1-i$, ce qui revient à parcourir la somme en sens inverse. Quand $i = 1, k = n$ et quand $i = n, k = 1$ (encore une fois, les bornes sont les mêmes car on parcourt juste les entiers de 1 à n en sens inverse). Nous n'écrivons pas $\sum_{k=n}^{1}$ car nous mettons la borne la plus petite en bas et la plus grande en haut.

Exemple : Calculons $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 + (n-k)^2\right)$.

On pourrait développer le carré et utiliser la linéarité de la somme, mais il y a un moyen beaucoup plus simple : casser et faire un changement d'indice. En effet, la somme des $(n-k)^2$ est juste la somme des k^2 mais comptée en sens inverse. Avec le changement d'indice $i = n-k$, il vient :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 = 2\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

Remarque : Attention, quand on fait un changement d'indice décroissant, on met tout de même la borne la plus grande en haut et la borne la plus petite en bas. Par exemple, $\sum_{k=0}^{n} (n-k)^2 = \sum_{i=0}^{n} i^2$, car, par convention, la somme $\sum_{k=n}^{0} (n-k)^2$ est nulle car c'est une somme indexée par l'ensemble vide.

Remarque : Nous sommes à présent en mesure de prouver le résultat sur les sommes télescopiques (et cela fera un bon exemple de changement de variable). Par linéarité de la somme, et on posant $i = k+1, k = i-1$ dans la seconde somme, il vient :

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m}^{n} a_{k+1} = \sum_{k=m}^{n} a_k - \sum_{k=m+1}^{n+1} a_i = a_m - a_{n+1}$$

et de même pour l'autre somme.

La dernière égalité vient du fait que, dans la première somme, on a tous les termes d'indices de m à n, auxquels on soustrait ceux de la deuxième somme, d'indices de $m+1$ à $n+1$: il ne reste que ceux d'indices m et $n+1$, les autres se compensent.

Remarque : Nous sommes également en mesure de prouver l'identité remarquable c'est-à-dire l'expression de $a^n - b^n$. Tout d'abord,

$$(a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

Dans la première somme, faisons le changement d'indice $i = k+1$, $k = i-1$, ce qui donne

$$(a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = \sum_{i=1}^{n} a^i b^{n-i} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

L'indice étant muet :

$$(a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} a^k b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k}$$

si bien qu'il ne reste que les termes d'indices 0 et n, c'est-à-dire que cette quantité est bien égale à $a^n - b^n$.

Remarque : Pour donner la somme des termes d'une suite géométrique dans le cas général (c'est-à-dire quand la somme ne commence pas forcément en 0), il est inutile d'apprendre la formule donnée en I.2.c (celle avec n_0 et n_1 car elle peut être source d'erreur, même si elle peut faire gagner du temps si $n_0 = 0$ ou 1) il suffit de faire un changement d'indice pour se ramener à une somme qui commence en 0, ce qui permet de ne retenir qu'une formule.

Exemple : Donnons la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=-217}^{1789} 2^{k-5}$.

Essayez d'appliquer la formule donnée en I.2.c et comparez l'efficacité des deux méthodes. Laquelle semble la plus efficace en temps limité et sans calculatrice ?

Ramenons-nous à une somme commençant en 0 : pour cela, faisons le changement d'indice $j = k + 217, k = j - 217$, si bien que

$$S = \sum_{j=0}^{2006} 2^{j-222} = \frac{1}{2^{222}} \sum_{j=0}^{2006} 2^j = \frac{1}{2^{222}} \times \frac{1-2^{2007}}{1-2} = \frac{2^{2007}-1}{2^{222}}$$

I.3.f Regroupement par paquets.

Théorème. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexée par un ensemble I. Soient J et K deux ensembles **disjoints** tels que $I = J \cup K$. Alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{i\in J} x_i + \sum_{i \in K} x_i$$

Rappelons que deux ensembles sont disjoints si leur intersection est vide, c'est-à-dire s'ils n'ont aucun élément en commun. Cette condition est indispensable, en plus d'être intuitive : si J et K ont des éléments en commun, ceux-ci sont comptés deux fois dans le membre de droite ! On peut évidemment généraliser à un plus grand nombre d'ensembles deux à deux disjoints.

Remarque : C'est ce résultat que nous avons utilisé (avec $I = [\![1\,;\, n]\!], J = [\![1\,;\, m-1]\!]$ et $K = [\![m\,;\, n]\!]$)quand nous avons écrit l'égalité suivante (et ça n'a choqué personne) :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{m-1} k + \sum_{k=m}^{n} k$$

À part ce genre d'égalité (parfois appelée relation de Chasles), le cas le plus fréquent de regroupement par paquets est la séparation termes pairs/termes impairs. Il faut savoir le faire dans les deux sens : séparer une somme en deux en séparant les termes pairs et impairs, et également regrouper les termes pairs et impairs en une seule somme. Nous donnons un exemple ci-dessous et un autre utilisant le binôme de Newton dans le paragraphe II.4.

Encore une fois, il faut savoir faire le raisonnement inverse, c'est-a-dire regrouper les termes pairs et impairs en une seule somme, cf. II.4.

Exemple : Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$. Réflexe à prendre : séparer les indices selon leur parité, pour simplifier les puissances de -1.

$$S_n = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k k + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k k = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ pair}}} k - \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant 2n \\ k \text{ impair}}} k$$

Rappelons en effet que $(-1)^k = 1$ si k est pair, et $(-1)^k = -1$ si k est impair. On s'en servira également dans l'exemple du paragraphe II.4.

En faisant les changement d'indices $k = 2i$ dans la première somme, et $k = 2i+1$ dans la seconde, il vient

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=0}^{n-1} (2i+1) \\ &= \underbrace{2n}_{i=n} + \sum_{i=1}^{n-1} 2i - \underbrace{1}_{i=0} - \sum_{i=1}^{n-1} (2i+1) \\ &= 2n - 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (2i - 2i - 1) \\ &= 2n - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} 1 \\ &= n \end{aligned}$$

Remarque : Nous avons dit que, la plupart du temps, nous utiliserons le principe du regroupement par paquets quand nous séparerons les termes pairs et impairs, mais, évidemment, nous l'utiliserons parfois dans d'autres circonstances, il ne faut pas perdre de vue l'idée très simple de ce principe. Par exemple, l'inégalité de Markov (cf. chapitre 27) repose sur l'égalité totalement évidente ci-dessous :

$$\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x) = \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x<a}} xP(X=x) + \sum_{\substack{x\in X(\Omega)\\ x\geqslant a}} xP(X=x)$$

Inutile de savoir ce que représentent $X, X(\Omega)$ et a pour comprendre cette égalité.

I.4 Sommes doubles, principe de Fubini.

I.4.a Somme double indexée par une partie finie de $\mathbb{N}^2$.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ peut être représenté par un quadrillage infini :

Nous avons, dans le même ordre d'idée, représenté un produit cartésien d'ensembles $E\times F$ par un tableau dans le chapitre 4.

$$\begin{array}{cccccc}
(5,0) & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) \\
(4,0) & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) \\
(3,0) & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) \\
(0,0) & (0,1) & (0,2) & (0,3) & (0,4) & (0,5)
\end{array}$$

Par conséquent, si on a une famille de réels $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ indexée par une partie finie A de $\mathbb{N}^2$, on pourra l'écrire en tableau de la même façon, la première coordonnée servant d'abscisse et la seconde d'ordonnée, comme ci-dessus. Si on a une famille finie indexée par $\mathbb{N}^*$, on peut la représenter « dans l'autre sens », comme ci-dessous (note pour plus tard : sous forme de matrice), le premier indice étant le numéro de la ligne et le second indice le numéro de la colonne (par exemple, $a_{2,3}$ se trouve en deuxième ligne et troisième colonne). Ci-dessous nous représentons trois familles de réels :

- $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$.

On prend ici $A = \llbracket 1\,;\,n\rrbracket \times \llbracket 1\,;\,p\rrbracket$.

- $(a_{i,j})_{(i,j)\in K} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

Où $K = \{(i,j) \in \llbracket 1\,;\,n\rrbracket^2 \mid i \geqslant j\}$. Ce type de somme est appelée « somme triangulaire ».

- $(a_{i,j})_{(i,j)\in A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,3} & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & \\ a_{3,1} & a_{3,2} & & \\ & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & & & a_{5,4} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & \end{pmatrix}$

Où A est la partie de $\mathbb{N}^2$ formée des couples $(1,1),(1,3),(2,1)\dots$: on peut vraiment manipuler des parties finies de $\mathbb{N}^2$ quelconques !

Puisque nous avons un nombre fini de termes... nous pouvons les sommer !

Définition. Soit A une partie finie de $\mathbb{N}^2$. Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille de réels indexée par A. On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille. On dit qu'il s'agit d'une somme double.

I.4.b Principe de Fubini (ou presque) et premiers exemples.

Pour faire simple : le principe de Fubini dit que, quand on veut calculer une somme double $\displaystyle\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ (où A est une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et où les $a_{i,j}$ ont été écrits sous forme de tableau comme ci-dessus), alors on peut soit sommer selon les lignes puis selon les colonnes, soit sommer selon les colonnes puis selon les lignes, et on obtient le même résultat (ce qui est complètement intuitif !).

Nous nous contentons dans ce paragraphe d'une version intuitive du principe de Fubini. Nous donnons la version formelle (et assez opaque...) dans le paragraphe I.4.d.

Exemple : Calculons $S = \displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]} a_{i,j}$ (c'est-à-dire la somme des termes de la première famille de réels ci-dessus). Si on somme selon les lignes, on obtient

$$\begin{aligned}
S &= (a_{1,1}+a_{1,2}+\cdots+a_{1,p})+(a_{2,1}+a_{2,2}+\cdots+a_{2,p})+\cdots+\\
&\quad (a_{n,1}+a_{n,2}+\cdots+a_{n,p})\\
&= \sum_{j=1}^{p} a_{1,j}+\sum_{j=1}^{p} a_{2,j}+\cdots+\sum_{j=1}^{p} a_{n,j}\\
S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}
\end{aligned}$$

Tandis que si on somme selon les colonnes, on obtient

$$\begin{aligned}
S &= (a_{1,1}+a_{2,1}+\cdots+a_{n,1})+(a_{1,2}+a_{2,2}+\cdots+a_{n,2})+\cdots+\\
&\quad (a_{1,p}+a_{2,p}+\cdots+a_{n,p})\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}+\sum_{i=1}^{n} a_{i2,}+\cdots+\sum_{i=1}^{n} a_{i,p}\\
S &= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}
\end{aligned}$$

Finalement, on a $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$.

Attention, évidemment, quand on a deux sommes imbriquées l'une dans l'autre, il faut évidemment utiliser deux indices ! Par exemple, écrire

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{p} a_{ii}\right)\right)$$

n'a aucun sens ! Cependant, si les sommes sont « disjointes », on peut évidemment garder le même indice, par exemple écrire

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

ou

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$

même si cette dernière écriture peut être source d'erreurs, voir la fin du paragraphe.

Exemple : Calculons $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j}$ (c'est-à-dire la somme des termes de la deuxième famille de réels ci-dessus). Si on somme selon les lignes, on obtient

$$\begin{aligned}
S &= (a_{1,1})+(a_{2,1}+a_{2,2})+(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3})+\cdots+(a_{n,1}+a_{n,2}+\cdots+a_{n,n})\\
&= \sum_{j=1}^{1} a_{1,j}+\sum_{j=1}^{2} a_{2,j}+\cdots+\sum_{j=1}^{n} a_{n,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}
\end{aligned}$$

Tandis que si on somme selon les colonnes, on obtient

$$\begin{aligned}
S &= (a_{1,1}+a_{2,1}+\cdots+a_{n,1})+(a_{2,2}+\cdots+a_{n,2})+\cdots+(a_{n,n})\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,1}+\sum_{i=2}^{n} a_{i,2}+\sum_{i=3}^{n} a_{i,3}+\cdots+\sum_{i=n}^{n} a_{i,p}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}
\end{aligned}$$

Nous ne calculerons pas somme de la troisième famille de réels ci-dessus, trop anecdotique et atypique pour pouvoir être exprimée à l'aide d'une formule close et pour pouvoir être calculée autrement qu'à la main.

En conclusion, $S = \displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}$.

I.4.c Et en pratique ?

Comme on l'a vu ci-dessus, la plupart des sommes doubles peuvent être exprimées très simplement à l'aide de deux sommes simples.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons la somme double $S_n = \displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]^2} \min(i,j)$ qu'on peut aussi écrire $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)$. On peut l'écrire à l'aide de deux sommes simples : $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \min(i,j)$. Le problème est qu'on ne peut pas écrire directement qui entre i et j est le plus petit. Fixons j. Si $i \leqslant j$, alors $\min(i,j) = i$, tandis que si $i \geqslant j+1$, c'est le contraire. Il suffit de couper la seconde somme en j pour donner facilement le minimum à chaque fois, ce qui va nous permettre de conclure :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} i + \sum_{i=j+1}^{n} j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2} + j(n-j)\right) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{n} j \end{aligned}$$

Dans les sommes entre parenthèses, l'indice de sommation est i, j est une constante ! Et rappelons que la somme d'un terme constant est égale au terme constant multiplié par le nombre de termes (cela vaut pour $\displaystyle\sum_{i=j+1}^{n} j$).

et cela ne pose plus de difficulté.

Remarque : Comme on l'a déjà dit et déjà vu, une somme double peut souvent être exprimée à l'aide de deux sommes simples. Le principe de Fubini dit alors qu'on peut intervertir les deux sommes, et cela peut parfois simplifier les calculs. Dans l'exemple précédent, on a donc $S = S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$. Dans ce cas particulier, il n'y a pas vraiment d'avantage car i et j jouent le même rôle, et donc les deux expressions mènent à des calculs de difficulté équivalente. De plus, il n'y a aucune difficulté pour intervertir les deux sommes car aucun des deux indices ne dépend de l'autre, mais ce n'est pas toujours aussi simple.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons la somme double $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$. Commençons par écrire T_n comme deux sommes simples.

Méthode : En pratique, pas besoin d'écrire les a_{ij} sous forme de tableau. Il suffit d'avoir les bons réflexes, et cela devient mécanique :

1. Choisir l'indice qu'on met en premier, disons i.
2. Ensuite, se demander les valeurs extrêmes que peut prendre i (sans s'occuper de j) : ici, i peut prendre toutes les valeurs entre 1 et $n-1$ (puisque $i < n$).
3. Enfin, si i est fixé, se demander quelles valeurs peut prendre j. Ici, puisque j est supérieur strictement à i, j peut prendre toutes les valeurs entre $i+1$ et n.

On en déduit que $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} ij$. L'indice de sommation de la seconde somme est j donc i est une constante, que l'on peut sortir par linéarité, si bien que $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=i+1}^{n} j$.
On veut calculer la seconde somme, qui nous fait penser à la somme des premiers entiers.

Problème : elle commence en $i+1$ et non pas en 1. On a vu en I.2.b comment comment contourner cette difficulté : on rajoute les termes manquants, ici de 1 à j, ce qui donne :

$$T_n = \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j \right) = \sum_{i=1}^{n-1} i \left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} \right)$$

En développant puis en utilisant la linéarité de la somme, il vient :

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i^3 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$$

et on est ramené à des choses connues. Appliquons le principe de Fubini et intervertissons les deux sommes. On applique la méthode ci-dessus mais en mettant d'abord l'indice j, ce qui donne :

$$T_n = \sum_{j=2}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} ij \right) = \sum_{j=2}^{n} j \left(\sum_{i=1}^{j-1} i \right) = \sum_{j=2}^{n} j \times \frac{(j-1)j}{2}$$

On remarque que, pour $j=1$, le terme sommé est nul, si bien que

$$T_n = \sum_{j=1}^{n} j \times \frac{(j-1)j}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{n} j^3 - \sum_{j=1}^{n} j^2 \right)$$

et là aussi on est ramené à des sommes connues. On remarque que, dans cet exemple, intervertir les sommes permet de simplifier les calculs. Il est parfois difficile de voir quel sens de sommation donne les calculs les plus simples, mais je vous conseille d'intervertir les sommes dès que vous rencontrez une somme double : en général, cela permettra, au moins, d'obtenir des relations entre les sommes et, au mieux, d'en déduire leur valeur, cf exercice 10.

Comme dit ci-contre, quand on rencontre deux sommes simples, on prend le réflexe de les intervertir. Quand les indices ne dépendent pas les uns des autres, cela ne présente aucune difficulté. Par exemple, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{n}$$

Cependant, il faut parfois faire attention : en effet, l'indice de la seconde somme peut dépendre de l'indice de la première. Ainsi, dans l'exemple ci-contre, écrire

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} = \sum_{j=i+1}^{n} \sum_{i=1}^{n-1}$$

N'A AUCUN SENS ! Dans la première somme de la double somme de droite (vous avez suivi ?) l'indice j n'est pas défini ! En effet, il se trouve en dehors de la somme dont il est l'indice de sommation, et on rappelle que l'indice de sommation est interne à la somme (voir plus haut : l'indice de sommation n'existe pas en dehors de la somme). Il faut donc prendre des gants, mais un peu de bon sens suffit la plupart du temps. En pratique, on fait comme expliqué dans la méthode ci-dessus.

I.4.d Cas particulier : produit de deux sommes finies.

Attention, il ne faut pas faire dire à Fubini ce qu'il n'a pas dit : l'égalité suivante est complètement fausse !

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right)$$

Il suffit de voir que $(a_1+a_2) \times (b_1+b_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_2 + a_2b_1 \neq a_1b_1 + a_2b_2$ pour se convaincre que ces deux quantités sont distinctes. Réflexe à prendre : dans le doute, regarder un exemple simple au brouillon. Dans la somme de gauche, dans chaque produit, les indices de a et b sont égaux, tandis que dans celle de droite, quand on développe, on a tous les produits $a_i \times b_j$ possibles et imaginables, et on n'a pas forcément $i=j$. Ces deux sommes ne sont donc pas (du tout) égales.

Par contre, on peut quand même écrire ce produit comme une seule somme (mais double, ce qui est logique car il y a quand même deux sommes au départ). Ainsi (et là par contre deux indices distincts peuvent être utiles pour s'en souvenir, car avec deux fois le même indice on peut être tenté d'écrire l'horreur ci-dessus) :

On prendra donc l'habitude de prendre deux indices distincts quand on voudra effectuer le produit de deux sommes.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \times \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_i \times b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i \times b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_i \times b_j$$

En d'autres termes, le produit de ces deux sommes est la somme de tous les produits a_ib_j possibles, ce qui est évident, puisqu'on prend tous les a_i et qu'on les multiplie par tous les b_j. Ci-dessous le calcul pour $n=3$:

$(a_1+a_2+a_3)\times(b_1+b_2+b_3) = a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3+a_3b_1+a_3b_2+a_3b_3$

Remarque : On peut évidemment généraliser au cas où les sommes n'ont pas le même ensemble d'indices :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_i\times b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i\times b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i\times b_j$$

Exemple : Soit $(a_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de réels, et posons $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$. Calculons ${S_n}^2$.

$$\begin{aligned} {S_n}^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\times\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\times a_j \end{aligned}$$

Cependant, on a envie de retrouver les identités remarquables (chèrement) apprises au collège : on met donc les carrés à part, qui correspondent aux cas où $i=j$:

$${S_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_i\times a_j$$

Cependant, on ne retrouve toujours pas le double produit : il suffit de voir que, dans la somme double ci-dessus, tous les termes sont en double ! Par exemple, on a a_1a_2 ($i=1$ et $j=2$) et a_2a_1 ($i=2$ et $j=1$). On va regrouper les termes égaux (on dit qu'on « symétrise » la somme) :

$${S_n}^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + 2\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i<j}} a_i\times a_j$$

Par conséquent, nous ne compterons pas a_2a_1, nous ne compterons que a_1a_2, que nous multiplierons par 2, cela revient donc au même ! En conclusion :

Théorème. Soit $(a_i)_{i\in[\![1\,;n]\!]}$ une famille de réels.

$$\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}} a_i\times a_j = 2\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i<j}} a_i\times a_j$$

En particulier :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2 + 2\sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i<j}} a_i\times a_j$$

Remarque : En d'autres termes, on retrouve les identités remarquables du collège. Une somme au carré, c'est : tous les termes au carré, et tous les doubles produits possibles. Encore une fois, si on a un doute (prend-on $i<j$ ou $i\neq j$?), on regarde avec un exemple et une petite valeur de n (typiquement $n=2$).

Cela se voit très bien si on écrit cette somme double sous la forme d'un tableau :

$$\begin{pmatrix} {a_1}^2 & a_1a_2 & a_1a_3\\ a_2a_1 & {a_2}^2 & a_2a_3\\ a_3a_1 & a_3a_2 & {a_3}^2 \end{pmatrix}$$

La somme des éléments du tableau est la somme des ${a_i}^2$ (les éléments diagonaux) et la somme des autres termes (les a_ia_j pour $i\neq j$). Quand on symétrise la somme (le tableau est en effet symétrique par rapport à la diagonale), cela donne la somme des ${a_i}^2$ (toujours la diagonale) et deux fois la somme des termes au-dessus de la diagonale (les a_ia_j avec $i<j$). On pourrait évidemment prendre les termes en-dessous (les a_ia_j avec $i>j$).

I.4.e Principe de Fubini (pour de vrai) et deux exemples moins automatiques.

Proposition (Principe de Fubini). Soient I et J deux ensembles finis, $K \subset I \times J$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in K}$ une famille de réels indexée par K. Pour tout $i \in I$ on pose $L_i = \{j \in J \mid (i,j) \in K\}$ et pour tout $j \in J$ on pose $C_j = \{i \in I \mid (i,j) \in K\}$. Alors

$$\sum_{(i,j)\in K} a_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in L_i} a_{ij} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in C_j} a_{ij}.$$

Cette formule paraissant compliquée dit juste que si on veut sommer tous les éléments du tableau ci-dessous, on peut soit sommer toutes les lignes, soit toutes les colonnes, et on obtient le même résultat, qui est la somme de tous les éléments du tableau.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & \\ & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple : Soit $n \geqslant 1$ et soit $m \in [\![0 ; n]\!]$. Notons P_m l'ensemble des parties de $[\![1 ; n]\!]$ à m éléments. Soient enfin $x_1, \dots, x_n$ des réels. Soit $1 \leqslant i \leqslant n$ un entier naturel. Montrer que

$$\sum_{A\in P_m}\sum_{i\in A} x_i = \binom{n-1}{m-1}\sum_{i=1}^n x_i$$

On pourra utiliser le résultat suivant (que nous montrerons au chapitre 17) : si $k \leqslant p$ sont des entiers naturels, alors un ensemble à p éléments contient $\binom{p}{k}$ parties à k éléments.

Réponse : Notons $S = \displaystyle\sum_{A\in P_m}\sum_{i\in A} x_i$. Tout d'abord, $S = \displaystyle\sum_{A\in P_m}\sum_{\substack{i=1\\ i\in A}}^n x_i$. On peut intervertir les deux sommes, ce qui donne $S = \displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A\in P_m \\ A \text{ contenant } i}} x_i$. Or, dans la seconde somme, on somme sur les parties A (en poussant un peu, on pourrait dire que A est l'indice de sommation) : x_i est indépendant de A, on peut donc le considérer comme un terme constant, et on sait que la somme d'un terme constant est le terme constant multiplié par le nombre de termes, si bien que

$$\sum_{\substack{A\in P_m \\ A \text{ contenant } i}} x_i = x_i \times \operatorname{card}\left(A \in P_m | i \in A\right) = x_i \times \binom{n-1}{m-1}$$

En effet, une partie A de P_m contenant i est entièrement déterminée par les $m-1$ (rappelons que A a m éléments) autres éléments de A, choisis parmi les $n-1$ éléments de $[\![1 ; n]\!]$ distincts de i. Il y a $\binom{n-1}{m-1}$ choix donc il y a $\binom{n-1}{m-1}$ parties de A de cardinal m contenant i, ce qui permet de conclure.

Représentons les entiers $i \in [\![1 ; n]\!]$ et les parties $A \in P_m$ sous forme d'un tableau comme ci-dessus :

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \end{matrix} & \begin{pmatrix} X & & \dots \\ & & \dots \\ X & X & \dots \\ & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array}$$

où l'on a mis une croix si i appartient à la partie A écrite à gauche. Le principe de Fubini dit que nous pouvons sommer indifféremment selon les lignes ou les colonnes. Si nous sommons selon les lignes, pour chaque partie $A \in P_m$, nous sommons sur les entiers i appartenant à A, tandis que si nous sommons les colonnes, pour chaque entier $i \in [\![1 ; n]\!]$, nous sommons sur les parties A auxquelles i appartient. D'où l'égalité

$$\sum_{A\in P_m}\sum_{i\in A} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{A\in P_m \\ A \text{ contenant } i}}$$

Remarque : Ce genre de technique s'appelle « double comptage » (double counting en anglais) et est fréquente en combinatoire. Nous reverrons cette technique au chapitre 17 (ainsi que dans l'exercice 15) quand nous ferons du dénombrement, pour l'instant on se concentre uniquement sur les interversions de sommes doubles.

Exemple : Si $j \geqslant 1$, notons $t(j)$ le nombre de diviseurs entiers de n (par exemple, $t(1) = 1$ et $t(8) = 4$). Soit $n \geqslant 1$ et fixons $\tilde{t}(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n t(j)$.

1. Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$. À l'aide de la partie entière, donner le nombre de multiples de i inférieurs ou égaux à n.
2. En déduire que $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}\right) - 1 < \tilde{t}(n) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$.

Réponse :

1. Le nombre de multiples de i inférieurs ou égaux à n est le plus grand entier p tel que $p \times i \leqslant n$ donc le plus grand entier $p \leqslant n/i$, si bien que le nombre de multiples de i inférieurs ou égaux à n est $\lfloor n/i \rfloor$.

2. Pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!], t(j)$ est le nombre de diviseurs entiers de j donc on a

$$t(j) = \sum_{i \text{ divise } j} 1$$

si bien que $\tilde{t}(n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i \text{ divise } j} 1$. D'après le principe de Fubini (voir ci-contre) et la question précédente (précisons aussi que, si i divise j, alors on a automatiquement $i \in [\![1\,;\, n]\!]$),

$$\tilde{t}(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i \text{ divise } j} 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \text{ multiple de } i}}^{n} 1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Il suffit ensuite de se souvenir que, pour tout $x \in \mathbb{R}, x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$, pour conclure.

Représentons les entiers $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ (en lignes) et les entiers $j \in [\![1\,;\, n]\!]$ (en colonnes) sous forme d'un tableau comme ci-dessus :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \text{X} & & & \\ \text{X} & \text{X} & & \\ \text{X} & & \text{X} & \\ \text{X} & \text{X} & & \text{X} \end{pmatrix} \end{array}$$

où l'on a mis une croix si l'entier i (en haut) divise l'entier j (à gauche). Si nous sommons selon les lignes, pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, nous sommons sur les entiers i divisant j, tandis que si nous sommons les colonnes, pour chaque entier $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, nous sommons sur les entiers j qu'il divise, c'est-à-dire sur les multiples de i. D'où l'égalité des sommes doubles ci-contre.

I.4.f Sommes triples et Cie.

On peut évidemment généraliser ce qui précède à des sommes triples ou plus encore. Par exemple :

$$\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} i \times 2^{j+k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} i \times 2^{j+k}$$

Là plupart du temps, on a (comme ci-dessus) une somme que l'on peut écrire comme une succession de sommes simples, et donc que l'on peut calculer assez facilement. Cependant, parfois, nous verrons des sommes un peu plus compliquées qu'il ne faudra surtout pas essayer de calculer explicitement (sauf pour de petites valeurs de n). Il suffira de comprendre ce qu'elles représentent et ce qu'on somme. Quasiment le seul exemple que nous verrons cette année sera l'exemple des fonctions symétriques élémentaires (cf. chapitre 19 et cf. exercice 14). Donnons pour l'instant un exemple (difficile) pour nous familiariser avec cette notion.

Exemple : Produit de polynômes (en attendant les séries entières).

Commençons par un exemple simple et explicitons le produit $P_1 \times P_2$ où

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad \text{et} \qquad P_2 = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$$

La notation X sera vue dans le chapitre 19. Pour l'instant, on se concentre sur les sommes.

c'est-à-dire que $P_1 = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ et $P_2 = b_m X^m + \cdots + b_1 X + b_0$. On a alors :

$$\begin{aligned} P_1 \times P_2 &= (a_n \times b_m)X^{n+m} + (a_n \times b_{m-1} + a_{n-1} \times b_m)X^{n+m-1} \\ &\quad + (a_n \times b_{m-2} + a_{n-1} \times b_{m-1} + a_{n-2} \times b_m)X^{n+m-2} + \cdots \end{aligned}$$

On veut écrire cela sous forme d'une somme. Il suffit de se poser les questions suivantes :

- Quelle puissance maximale peut-on obtenir ?
- Comment peut-on obtenir un terme en X^{n+m} ?
- Comment peut-on obtenir un terme en X^{n+m-1} ?
- etc.

De façon condensée : $P_1 \times P_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0\,;\, n+m]\!]$,

$$c_k = \sum_{p+q=k} a_p b_q = \sum_{p=0}^{k} a_p b_{k-p} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

C'est en fait très simple : X^k est obtenu par le produit d'un terme de P_1 et d'un terme de P_2. Si on note p et q les puissances de ces termes, on a $p+q=k$, et on multiplie les coefficients $aP-$ et b_q correspondants. Il suffit ensuite de sommer tous les coefficients obtenus ainsi.

avec la convention $a_p = 0$ si $p \notin [\![0\,;\, n]\!]$ et $b_q = 0$ si $q \notin [\![0\,;\, m]\!]$ (par exemple, pour obtenir c_{n+m-2} ci-dessus, on a fait le produit de tous les termes $a_p \times b_q$ tels que $p+q = n+m-2$ et on a ensuite sommé).

De même, si on pose

$$P_1 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{2k} \qquad \text{et} \qquad P_2 = \sum_{k=0}^{m} b_k X^{3k}$$

alors

$$P_1 \times P_2 = \sum_{k=0}^{2n+3m} c_k X^k$$

où, pour tout $k \in [\![0\,;\, 2n+3m]\!], c_k = \displaystyle\sum_{2p+3q=k} a_p b_q$. C'est la même chose : on prend tous coefficients des produits $a_p X^{2p} \times b_q X^{3q}$ dont la somme des puissances de X vaut k, et on somme.

Enfin, si on pose

$$P_1 = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^{2k}, \qquad \text{et} \qquad P_2 = \sum_{k=0}^{n} b_k X^{3k} \qquad \text{et} \qquad P_3 = \sum_{k=0}^{m} c_k X^{5k}$$

alors

$$P_1 \times P_2 = \sum_{k=0}^{2\ell+3n+5m} d_k X^k$$

où, pour tout $k \in [\![0\,;\, 2\ell+3n+5m]\!], d_k = \displaystyle\sum_{2p+3q+5r=k} a_p b_q c_r$: pour obtenir un terme X^k, il faut multiplier un terme de la forme $a_p X^{2p}$, un autre de la forme $b_q X^{3q}$ et un dernier de la forme $c_r X^{5r}$, et le coefficient correspondant sera égal à $a_p b_q c_r$. Il suffit de prendre tous les cas possibles (avec, donc, $2p+3q+5r = k$, c'est-à-dire tels qu'il y ait égalité des puissances) et de sommer tous les cas possibles.

II Produits.

II.1 Généralités.

Définition.
Si m et n sont deux entiers relatifs, avec $m \leqslant n$, et si $a_m, \dots, a_n$ sont des réels, on définit

$$\prod_{k=m}^{n} a_k = a_m \times \cdots \times a_n$$

Cette notation se lit « produit des a_k pour k allant de m à n ». De même que pour les sommes, nous pourrons généraliser cette notation aux complexes. Même si c'est plus rare, nous pourrons également la généraliser aux éléments d'un groupe abélien noté multiplicativement ou d'un anneau commutatif (cf. chapitre 18). Exception importante : nous ne pourrons par nous en servir pour les matrices (cf. chapitre 21) car l'anneau des matrices n'est pas commutatif !

Exemples :

- $3^2 \times 4^2 \times 5^2 \times 6^2 \times 7^2 \times 8^2 \times 9^2 \times 10^2 = \displaystyle\prod_{k=3}^{10} k^2$
- $3^4 \times 4^5 \times 5^6 \times 6^7 \times 7^8 = \displaystyle\prod_{k=3}^{7} k^{k+1}$

Remarques :

- De même qu'une somme vide est par convention égale à 0, un produit vide est par convention égal à 1. Par exemple, $\displaystyle\prod_{k=1}^{0} k = 1$.

- De même qu'on ne change pas la valeur d'une somme en ajoutant un terme nul, on ne change pas la valeur d'un produit en divisant ou en multipliant par 1. Par exemple, $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k = n!$.
- Les produits sont plus difficiles à utiliser et moins intuitifs que les sommes. On n'hésitera pas (au moins au brouillon) à les écrire avec des petits points pour s'en faire une meilleure idée : cf II.2 pour un exemple.

Ici encore, la lettre k est appelée indice et est une variable muette. La plupart des commentaires relatifs aux sommes s'adaptent immédiatement (changement d'indice, le résultat final de doit pas dépendre de l'indice, comment faire un changement d'indice, principe de Fubini etc.) Il ne faut bien sûr pas oublier les propriétés de base, par exemple que $n^{a+b} = n^a \times n^b$. On en déduit par exemple la très belle égalité suivante : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{n(n+1)/2}$

Remarque : On peut définir une notation « généralisée » de la même façon que pour les sommes.

Exemple :

- $\displaystyle(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)(x-8)(x-9) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 6}}^{9} (x-k)$.
- $\displaystyle 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k$.

Exemple : Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction L_k par

$$L_k : x \mapsto \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$$

Justifier que L_k est bien définie. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!], L_k(a_i) = 0$ si $i \neq k$. Combien vaut $L_k(a_k)$?

Réponse : L_k est bien définie car tous les dénominateurs sont non nuls (les a_k sont deux à deux distincts). Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!], i \neq k$.

$$L_k(a_i) = \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{a_i - a_j}{a_k - a_j}$$

Or, $i \neq k$ donc, parmi les a_j avec $j \neq k$ se trouve a_i, si bien qu'un terme du produit est égal à $a_i - a_i = 0$. Or, un produit comportant un terme nul est nul, si bien que $L_k(a_i) = 0$. Enfin,

$$L_k(a_k) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1$$

Attention à ne pas confondre le $i \neq k$ de l'énoncé avec i, l'indice du produit ! Par exemple, écrire

$$L_k(a_i) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{a_i - a_i}{a_k - a_i}$$

est faux ! Tous les termes du produit $L_k(a_i)$ ne sont pas nuls (un seul est nul, comme on le dit ci-contre), alors que c'est ce que dit l'écriture (fausse) ci-dessus ! Il faut donc changer d'indice de produit (et on peut car il est muet) pour ne pas avoir un même indice qui désigne deux choses différentes.

Remarque : Attention, contrairement aux sommes (qu'on peut sommer sans se poser de question), on ne peut multiplier que les inégalités **positives** ! En d'autres termes, ce n'est pas parce qu'on a $a_k \leqslant b_k$ pour tout k qu'on a $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} b_k$. Prendre par exemple $a_1 = a_2 = -1$ et $b_1 = b_2 = 0$... Par contre, c'est vrai si les a_k (et donc les b_k puisque $a_k \leqslant b_k$ pour tout k) sont **positifs**.

Remarque : Le produit n'est pas linéaire ! On ne peut rien faire avec une somme à l'intérieur d'un produit, par exemple avec $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} (2k+1)$, et on ne peut pas sortir directement les constantes : par exemple, l'égalité $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+14} (3k) = 3 \prod_{k=2}^{n+14} k$ est complètement fausse ! Cependant, on a tout de même le résultat suivant :

Proposition. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \leqslant n$ deux entiers relatifs et $(a_m, \dots, a_n)$ des réels. Alors :

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k$$

Remarque : Ce produit est obtenu en remplaçant k par toutes les valeurs entières entre m et n puis en multipliant :

$$\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda a_m \times \cdots \times \lambda a_n$$

Il suffit de retenir le principe suivant : les constantes multiplicatives « sortent » élevées à la puissance le nombre de termes.

Exemple : $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+14} (3k) = 3^{n+13} \times \prod_{k=2}^{n+14} k$.

Attention, comme dit ci-dessus, on ne peut rien faire avec les constantes additives. Par exemple, on ne peut pas simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$. On peut l'écrire plus simplement avec des factorielles (voir ci-dessous), mais c'est tout.

Théorème. Soient $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels indexées par un ensemble I. Alors $\displaystyle\prod_{i\in I}(a_i \times b_i) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right) \times \left(\prod_{i\in I} b_i\right)$.

Corollaire. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels indexée par un ensemble I. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\prod_{i\in I} ({a_i}^n) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^n$.

En particulier, on a : $\displaystyle\prod_{i\in I} ({a_i}^2) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^2$.

On peut généraliser à une puissance non entière dans le cas où les a_i sont strictement positifs (c'est donc une généralisation du chapitre 2) :

Proposition. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs indexée par un ensemble I. Alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\prod_{i\in I} ({a_i}^\alpha) = \left(\prod_{i\in I} a_i\right)^\alpha$.

Proposition. Soient $m \leqslant n$ deux entiers relatifs, et $(a_m, \dots, a_{n+1})$ des réels **tous non nuls**.

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{a_m}{a_{n+1}} \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

Ces produits sont appelées produits télescopiques.

De même que pour les sommes, un produit est télescopique quand on multiplie « un terme sur son successeur » (il reste alors « le premier sur le dernier ») ou « un terme sur son prédécesseur » (il reste alors « le dernier sur le premier »). Là aussi, on parle de successeur quand, en remplaçant k par $k+1$ dans le premier terme, on obtient le deuxième terme. Par exemple, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ n'est pas un produit télescopique, mais $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2(k+1)}$ oui.

Remarque : La démonstration est analogue à celle pour les sommes. Contentons-nous de remarquer que le résultat se voit très bien quand on écrit le produit

$$\prod_{k=m}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{m+1}}{a_m} \times \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} \times \cdots \times \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

Exemple : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k+2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{2}{n+2}$.

Exemple : Soit $n \geqslant 2$. Posons $\displaystyle C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. Tout d'abord,

$$C_n = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}$$

c'est-à-dire que C_n est le produit de deux produits télescopiques, si bien que $C_n = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{n+1}{2} = \dfrac{n+1}{2n}$.

Proposition. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels strictement positifs indexée par un ensemble I.

$$\ln\left(\prod_{i\in I} a_i\right) = \sum_{i\in I} \ln(a_i)$$

Puisque les sommes sont plus faciles à manier que les produits, quand on manipulera un produit de termes strictement positifs, on pourra lui appliquer le ln pour travailler plus facilement.

II.2 Factorielle.

Définition.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle « factorielle n », et on note $n!$, le produit des entiers de 1 à n, c'est-à-dire :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$$

- Par convention, on pose $0! = 1$.

On verra au chapitre 17 qu'il y a $n!$ permutations d'un ensemble à n éléments, c'est-à-dire qu'il y a $n!$ façons d'ordonner n éléments. Quand on n'a aucun élément, on a envie de dire qu'il n'y a qu'une façon de faire : ne rien faire ! Et donc poser $0! = 1$ est naturel. De plus, cela permet d'étendre à $n = 0$ la propriété $(n+1)! = n! \times (n+1)$.

Remarque : ⚠ Attention, la factorielle n'est défini qu'en les entiers positifs ou nuls ! Par exemple, $\pi!$ ou $(-1)!$ ne sont pas définis ! Ainsi, on n'écrira jamais $x!$, sauf quand x est un entier naturel, mais dans ce cas on préféra l'appeler n et donc parler de $n!$.

Exemple : Les premières valeurs de la factorielle sont, en plus de $0! = 1$:

$$1! = 1, \qquad 2! = 2, \qquad 3! = 6, \qquad 4! = 24, \qquad 5! = 120 \qquad \text{et} \qquad 6! = 720$$

Ces valeurs sont à connaître : en effet, elles peuvent être très utiles quand on cherche un résultat qu'on veut prouver par récurrence. Par exemple, si on note f la fonction inverse, alors f est dérivable une infinité de fois et ses premières dérivées sont définies sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f' : x \mapsto \frac{-1}{x^2}, \qquad f'' : x \mapsto \frac{2}{x^3}, \qquad f^{(3)} : x \mapsto \frac{-6}{x^4} \qquad \text{et} \qquad f^{(4)} : x \mapsto \frac{24}{x^5}$$

Par conséquent, si on cherche les dérivées successives de f, connaître les premières valeurs de la factorielle est indispensable pour avoir l'idée de prouver par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} : x \mapsto (-1)^n n!/x^{n+1}$.

Proposition.

- $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = n! \times (n+1)$.
- $\forall n \geqslant 1, n! = n \times (n-1)!$
- $\forall n \geqslant 2, n! = n(n-1) \times (n-2)!$.
- etc.

⚠ Attention, la relation $n! = n \times (n-1)!$ n'est pas valable pour $n = 0$, et, en particulier, on ne peut pas écrire que $n/n! = 1/(n-1)!$ pour $n = 0$ (car on ne peut pas simplifier par 0). Il faut donc être vigilant quand on procède à ce genre de simplification, voir l'exemple avec P_n ci-dessous.

Remarque : Ces relations découlent immédiatement de la définition et doivent devenir des nouveaux réflexes de calcul. L'exemple suivant est aussi un classique, qu'il ne faut pas forcément connaître par coeur mais qu'il est bon de savoir retrouver très rapidement car on le retrouve sous de multiples formes dans de nombreux calculs (cf exercice 24) : méthode à connaître !

Exemple : Soient $p < n$ deux entiers naturels. Donner, avec des factorielles, la valeur de $(p+1) \times (p+2) \times \cdots \times n$.
On a un produit d'entiers consécutifs : on pense donc à de la factorielle. Problème : le produit ne commence pas en 1. On fait comme souvent dans ce chapitre : on rajoute

les termes manquants pour se ramener à quelque-chose de connu, et on n'oublie pas de compenser, cette fois-ci en divisant. Il manque les entiers de 1 à p, que l'on « rajoute » donc au numérateur et au dénominateur :

$$(p+1)\times(p+2)\times\cdots\times n = \frac{1\times 2\times\cdots\times p\times(p+1)\times\cdots\times n}{1\times 2\times\cdots\times p} = \frac{n!}{p!}$$

Quand on a par exemple le produit des entiers de 10 à 20, il manque les entiers de 1 à 9.

Remarque : À part celles-ci dessus, il n'y a aucune formule pour simplifier les sommes, produits, quotients... de factorielles ! En particulier, **on n'a pas** (sauf peut-être dans des cas triviaux : $n = p = 1$, $n = p = 0$, $n = 0$ et $p = 1$ etc.) $n! + p! = (n+p)!$, $n!\times p! = (n\times p)!$, $n!/p! = (n-p)!$ ou autres joyeusetés du même genre (on trouve facilement des contre-exemples, par exemple avec $n = p = 2$). De toute façon, si on a un doute, on regarde avec des petites valeurs de n et p, mais le lecteur n'a qu'à retenir que **rien ne marche avec les factorielles**. Par exemple,

$$(2n)! = 1\times 2\times\cdots\times n\times(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(2n) = n!\times(n+1)\times(n+2)\times\cdots\times(2n)$$

donc $(2n)!$ est BEAUCOUP plus gros que $2\times n!$. On ne saurait donc trop insister sur l'importance des parenthèses : $2n!$ est-il égal à $(2n)!$ ou à $(2\times n!)$?

Donnons d'autres exemples (divers et variés) d'utilisation des factorielles.

Exemple : Si $n\in\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $P_n : x\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$. Soit $n\geqslant 1$. Justifier rapidement que P_n est dérivable et exprimer ${P_n}'$ en fonction de P_{n-1}.

Réponse : P_n est ce qu'on appelle un polynôme, et donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$${P_n}'(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k\times x^{k-1}}{k!}$$

Or, le terme pour $k = 0$ est nul : on peut donc le supprimer de la somme (rappelons qu'on ne change pas la valeur d'une somme en ajoutant ou en enlevant un terme nul), ce qui donne :

$${P_n}'(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k\times x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

En particulier (à l'aide du changement d'indice $j = k-1$), ${P_n}'(x) = P_{n-1}(x)$, et x est quelconque donc ${P_n}' = P_{n-1}$.

Il est ici indispensable de supprimer le terme nul d'indice $k = 0$, sinon on risque d'écrire des choses fausse ! Si on écrit

$${P_n}'(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

alors le premier terme de la somme vaut $x^{-1}/(-1)!$, mais la factorielle n'est pas définie en -1 ! L'erreur vient du fait que nous avons écrit $k/k! = 1/(k-1)!$ donc que nous avons simplifié par k pour $k = 0$: nous avons donc divisé par 0 ! Il faut donc toujours se poser la question, avant de simplifier, si on ne simplifie pas par 0.

Exemple : Soit $n\geqslant 1$. Calculons $P_n = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n} k$, le produit des entiers pairs entre 1 et $2n$.

On a, à l'aide du changement d'indice $k = 2j$, $P_n = \displaystyle\prod_{j=1}^{n}(2j) = 2^n\prod_{j=1}^{n} j = 2^n\times n!$.

Exemple : Calculons à présent le produit des entiers impairs entre 1 et $2n+1$. On le note

$$Q_n = \prod_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k = \prod_{j=0}^{n}(2j+1)$$

Cet exemple est très classique ! On y retrouve de plus une méthode à maîtriser absolument : cf exercice 24.

On ne peut pas casser les sommes dans les produits (encore une fois, le produit n'est pas linéaire) donc on est bloqué. Écrivons ce produit avec des petits points, on ne sait jamais, cela pourrait nous donner des idées :

$$Q_n = 1\times 3\times 5\times 7\times\cdots\times(2n-1)\times(2n+1)$$

On a un produit qui commence en 1 et qui finit en $2n+1$. On pense donc à $(2n+1)!$. Problème : ce n'est pas égal à $(2n+1)!$, puisqu'il n'y a pas tous les entiers entre 1 et $2n+1$ dans ce produit. Il suffit de rajouter ceux qui manquent !

$$Q_n = \frac{1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times\cdots\times(2n-1)\times(2n)\times(2n+1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times(2n-2)\times(2n)}$$

Le numérateur est égal à $(2n+1)!$ (c'est un peu fait pour). Calculons à présent le dénominateur. On peut soit reconnaître le produit P_n que l'on vient de calculer, soit le recalculer. On voit que tous les nombres au dénominateur sont pairs, on peut donc à chaque fois mettre 2 en facteur :

$$Q_n = \frac{(2n+1)!}{(2\times 1)\times(2\times 2)\times(2\times 3)\times\cdots\times(2\times(n-1))\times(2\times n)}$$

Regroupons les 2 présents dans chaque parenthèse : il y en a n, donc cela donne 2^n, et finalement

$$Q_n = \frac{(2n+1)!}{2^n\times 1\times 2\times 3\times\cdots\times(n-1)\times n} = \frac{(2n+1)!}{2^n\times n!}$$

Remarque : Soit $n\in\mathbb{N}$. $\ln(n!) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(k)$ (rappelons que, par convention, un produit vide vaut 1 et une somme vide vaut 0 : le résultat est donc valable même si $n=0$).

Le ln « transforme le produit en somme ».

Remarque : On peut évidemment définir de la même façon les produits doubles.

Nous en verrons pendant l'année, par exemple avec le déterminant de Vandermonde, cf. chapitre 33.

Exemple : Soit $n\geqslant 1$. Calculer $P_n = \prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(ij^2)$.

$$\begin{aligned}
P_n &= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\times\prod_{j=1}^{n} j^2\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\times\left(\prod_{j=1}^{n} j\right)^2\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(i^n\times(n!)^2\right)\\
&= (n!)^{2n}\times\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^n\\
&= (n!)^{3n}
\end{aligned}$$

II.3 Coefficients binomiaux.

Définition. Si $n\in\mathbb{N}$ et $p\in[\![0\,;\,n]\!]$, alors $\dbinom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$. Si p est un entier strictement négatif ou strictement supérieur à n, on pose par convention $\dbinom{n}{p}=0$. Les nombres de la forme $\dbinom{n}{p}$ sont appelés coefficients binomiaux.

Remarque : Nous faisons le raisonnement inverse de celui fait en terminale : nous **définissons** les coefficients binomiaux à l'aide des factorielles, et nous prouverons ensuite (au chapitre 17) qu'ils comptent le nombre de chemins avec un certains nombre de succès, le nombre de parties avec un certain nombre d'éléments etc.

Nous avons d'ailleurs utilisé ces résultats plus haut. On en reparle au chapitre 17 !

Théorème.
Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

- $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.
- Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$.
- Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, alors $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.
- Formule de Pascal : si $p \in [\![1\,;\,n-1]\!]$, alors $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

La formule de Pascal justifie l'écriture ci-dessous des coefficients binomiaux sous forme de triangle (le triangle de Pascal) :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Chaque terme est la somme du coefficient directement au-dessus de lui et de celui au-dessus à gauche. Par exemple, le 6 est obtenu en faisant $3+3$. Cela peut être utile pour appliquer le binôme de Newton pour de petites valeurs de n.

DÉMONSTRATION.

- $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{0!n!} = 1$ et $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$.
- $\binom{n}{1} = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$ et $\binom{n}{n-1} = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} = n$.
- $\binom{n}{2} = \dfrac{n!}{2!(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$.
- $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \dfrac{(n-1)!}{p!(n-p)!}(p+(n-p)) = \binom{n}{p}$.

Théorème. Les coefficients binomiaux sont des entiers naturels i.e. :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \binom{n}{p} \in \mathbb{N}$$

De plus, si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\binom{n}{p} \neq 0$.

En d'autres termes, à part les cas particuliers (et rares) où $p < 0$ ou $p > n$, les coefficients binomiaux sont des entiers supérieurs ou égaux à 1, ce qui est intuitif quand on sait que, si $p \in [\![0\,;\,n]\!]$, $\binom{n}{p}$ est le nombre de chemins avec p succès parmi n répétitions d'une expérience comportant deux issues (succès ou échec). En effet, un nombre de chemins est un entier, et il est non nul car il existe au moins un tel chemin (le chemin, par exemple, commençant par p succès et enchaînant avec $n-p$ échecs).

DÉMONSTRATION. Puisque $\binom{n}{p} = 0$ si $p < 0$ ou si $p > n$, il suffit de prouver le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![0\,;\,n]\!], \binom{n}{p} \in \mathbb{N}^*$$

Prouvons ce résultat par récurrence sur n.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $\forall p \in [\![0\,;\,n]\!], \binom{n}{p} \in \mathbb{N}^*$ ».
- $\binom{0}{0} = 1$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Tout d'abord, $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Soit à présent $p \in [\![1\,;\,n]\!]$. D'après la formule de Pascal,

$$\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$$

Or, $p \in [\![1\,;\,n]\!]$ donc p et $p-1$ appartiennent à $[\![0\,;\,n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, $\binom{n}{p}$ et $\binom{n}{p-1}$ appartiennent à $\mathbb{N}^*$ donc $\binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}^*$. En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.

□

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.4 Retour au binôme de Newton.

Théorème (Formule du binôme de Newton). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $n \in \mathbb{N}$ on note H_n : « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».
- D'une part, $(a+b)^0 = 1$, et d'autre part,

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$$

  c'est-à-dire que H_0 est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \times (a+b) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \times (a+b) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} a^i b^{n+1-i} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence.

On pose $i = k+1, k = i-1$ dans la première somme.

L'indice est muet.

car $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$

Formule de Pascal et car $\binom{n+1}{n+1} = 1$ et $\binom{n+1}{0} = 1$

□

  c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Remarque : Redonnons le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}$$

Les termes du triangle de Pascal sont les coefficients binomiaux. Plus précisément, les coefficients de la ligne commençant par 1 $n\dots$ sont les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ donc les coefficients quand on développe $(a+b)^n$. Ainsi, pour des petites valeurs de n, on peut s'en servir pour développer sans repasser par les factorielles. Par exemple, si a et b sont des réels, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, ce qui est tout de même plus rapide !

Donnons à présent des exemples d'utilisation de cette formule.

Exemples : Soit $n \geqslant 1$. Calculer les sommes suivantes.

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

  On a envie d'appliquer la formule du binôme de Newton. Problème : il manque a et b ! Méthode à retenir : quand a ou b manque, c'est qu'il faut 1 ! En effet, on a $1^k = 1^{n-k} = 1$ pour tout k, et donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n \\ &= 2^n \end{aligned}$$

  En pratique, on pourra se passer de l'étape intermédiaire (comme dans l'exemple ci-dessous) et écrire directement $S_n = (1+1)^n = 2^n$.

- $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.

  Comme ci-dessus, b n'apparaît pas : c'est qu'il vaut 1 ! Ainsi, $T_n = (1-1)^n = 0$.

- $U_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k$ (dans cet exemple, on suppose $n \geqslant 2$).

  On veut faire comme précédemment. Problème : la somme ne commence pas en 0 et ne finit pas en n. On fait donc comme dans le paragraphe I.2.b, on rajoute les termes manquants (sans oublier de compenser).

$$\begin{aligned} U_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k - \binom{n}{0}(-1)^0 - \binom{n}{1}(-1)^1 - \binom{n}{n}(-1)^n \\ &= 0 - 1 + n - (-1)^n \end{aligned}$$

- Soit $n \geqslant 2$. Par linéarité de la somme puis par utilisation du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}2^{k+1}3^{n-k} &= \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}\binom{n+1}{k}2^{k}3^{n+1-k}\\ &= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}2^{k}3^{n+1-k}-\binom{n+1}{0}3^{n+1}\right.\\ &\quad\left.-\binom{n+1}{1}2\times 3^{n}-\binom{n+1}{n+1}2^{n+1}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left((2+3)^{n+1}-3^{n+1}-2(n+1)3^{n}-2^{n+1}\right)\\ &= \frac{2}{3}\times 5^{n+1}-2\times 3^{n}-4(n+1)3^{n-1}-\frac{2^{n+2}}{3}\end{aligned}$$

Le binôme de Newton donne : $(a+b)^p=\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}a^kb^{p-k}$. Seulement, comment trouver p lorsque l'on n'a pas exactement cette forme ? C'est simple : p est le coefficient « au-dessus » dans le coefficient binomial, ici $n+1$, ce qui explique qu'on fasse apparaître 2^k3^{n+1-k} puis qu'on ajoute les termes d'indices $k=0, k=1$ et $k=n+1$, manquants.

Donnons un dernier exemple un peu plus difficile.

Cet exemple permettra, quand nous aurons vu l'interprétation combinatoire des coefficients binomiaux, de prouver le résultat vu dans le paragraphe I.1.b.

Exemple : Soit $n \geqslant 1$.Posons $A_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ et $B_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$. Calculer A_n+B_n et A_n-B_n et en déduire les valeurs de A_n et B_n.
On a

$$A_n=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\binom{2n}{4}+\cdots++\binom{2n}{2n-2}+\binom{2n}{2n}$$

$$\text{et}\qquad B_n=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\binom{2n}{5}+\cdots+\binom{2n}{2n-3}+\binom{2n}{2n-1}$$

En d'autres termes, avec les changements d'indices $j=2k$ dans A_n et $j=2k+1$ dans B_n, il vient :

$$A_n=\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{j}\qquad\text{et}\qquad B_n=\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{j}$$

Attention à ne pas écrire

$$A_n=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}$$

Ces deux sommes ne sont pas égales : par exemple, celle de droite contient $\binom{2n}{3}$ contrairement à celle de gauche. La raison profonde est qu'un changement de variable doit être bijectif (cf. chapitre 4), et que la fonction $k\mapsto 2k$ n'est pas une bijection entre $[\![0\,;n]\!]$ et $[\![0\,;2n]\!]$: par exemple 3 n'est pas atteint. Mais il est inutile d'être aussi subtil : il suffit de voir que la somme de droite contient des termes qui ne sont pas dans la somme de gauche, alors que, lorsqu'on fait un changement d'indice, les deux sommes doivent contenir les mêmes termes, puisqu'elles sont égales !

Par conséquent, $A_n+B_n=\displaystyle\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}=(1+1)^{2n}=2^{2n}$ d'après la formule du binôme de Newton. De plus,

$$\begin{aligned}A_n-B_n &= \sum_{\substack{j=0\\ j \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{j}-\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{j}\\ &= \sum_{\substack{j=0\\ j \text{ pair}}}^{2n}\binom{2n}{j}(-1)^j+\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ impair}}}^{2n}\binom{2n}{j}(-1)^j\\ &= \sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}(-1)^j\end{aligned}$$

D'après la formule du binôme de Newton, $A_n-B_n=(1-1)^{2n}=0$. On trouve avec ces deux égalités $A_n=B_n=2^{2n-1}$.

III Activité de synthèse.

Rappel : si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$. Il est parfaitement inutile d'apprendre cette formule par coeur : il suffit de retenir qu'on dérive chaque fonction l'une après l'autre et qu'on somme ensuite. Une fois qu'on a compris cela, il est très simple de dériver un produit d'un nombre quelconque (fini) de fonctions dérivables : on les dérive l'une après l'autre, et on somme. Par exemple, si u, v, w sont dérivables, alors $u \times v \times w$ est dérivable et

Encore pire : l'apprendre par coeur avec un schéma avec des flèches !

$$(u \times v \times w)' = u' \times v \times w + u \times v' \times w + u \times v \times w'$$

Exemple : Soient $f_1, \dots f_n$ des fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors $f_1 \times f_2 \times f_3$ est dérivable et

Attention à prendre des indices différents pour la somme et le produit !

$$(f_1 \times f_2 \times f_3)' = {f_1}' \times f_2 \times f_3 + f_1 \times {f_2}' \times f_3 + f_1 \times f_2 \times {f_3}' = \sum_{i=1}^{3} {f_i}' \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{3} f_j$$

Généralisons à la dérivée de $f_1 \times \cdots \times f_n$:

Comme dit plus haut : on dérive chaque fonction chacune son tour, et on somme le tout.

$$\begin{aligned}
(f_1 \times \cdots \times f_n)' &= {f_1}' \times f_2 \times f_3 \times \cdots \times f_n + f_1 \times {f_2}' \times f_3 \times \cdots \times f_n \\
&\qquad + \cdots + f_1 \times f_2 \times \cdots \times f_{n-1} \times {f_n}' \\
&= \sum_{i=1}^{n} {f_i}' \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} f_j
\end{aligned}$$

Exemple : Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Donner la dérivée de la fonction $P : x \mapsto a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.
De même que précédemment, en remarquant que, pour tout i, la dérivée de $x \mapsto x - a_i$ est la fonction constante égale à 1, il vient :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) &= a_n(x - a_2) \cdots (x - a_n) + a_n(x - a_1)(x - a_3) \cdots (x - a_n) \\
&\qquad + \cdots + a_n(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-1}) \\
&= a_n \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (x - a_j) \right)
\end{aligned}$$

Exemple : Plus généralement, donner la dérivée de $P : x \mapsto a_n(x-x_1)^{n_1}(x-x_2)^{n_2} \cdots (x-x_p)^{n_p}$. En déduire une expression de $P'(x)/P(x)$ quand $x \neq x_1, \dots, x_p$.
On fait comme ci-dessus. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
P'(x) &= a_n \times n_1(x - a_1)^{n_1 - 1}(x - a_2)^{n_2} \cdots (x - a_p)^{n_p} \\
&\quad + a_n(x - a_1)^{n_1} \times n_2(x - a_2)^{n_2 - 1}(x - a_3)^{n_3} \cdots (x - a_p)^{n_p} \\
&\quad + \cdots + a_n(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \cdots (x - a_{p-1})^{n_{p-1}} \times n_p(x - a_p)^{n_p} \\
&= a_n \sum_{i=1}^{p} n_i(x - a_i)^{n_i - 1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (x - a_j)^{n_j} \right)
\end{aligned}$$

En particulier, si $x \neq a_1, \dots, a_p$,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{a_n \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i(x - a_i)^{n_i - 1} \times \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} (x - a_j)^{n_j}}{a_n \displaystyle\prod_{j=1}^{p} (x - a_j)^{n_j}}$$

d'où :

Nous reverrons ce résultat dans le chapitre 20.

$$\begin{aligned}
\frac{P'(x)}{P(x)} &= \sum_{i=1}^{p} n_i(x-a_i)^{n_i-1} \times \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(x-a_j)^{n_j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(x-a_j)^{n_j}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i(x-a_i)^{n_i-1}}{(x-a_i)^{n_i}} \\
&= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{x-a_i}
\end{aligned}$$