Devoir Surveillé n°8 - Sujet groupe A

1. (Question de cours) Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions (méthode au choix) et la signature de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x+5y = z-t\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, 2x+5y = z^2-t\}$$

   Si oui, en donner une base.

3. Les vecteurs suivants forment-ils une famille libre ?
   (a) $x_1 = (1,2,1), x_2 = (2,1,-1), x_3 = (1,-1,-2)$.
   (b) $x_1 = (1,-1,1), x_2 = (2,-1,3), x_3 = (-1,1,1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille de fonctions $\left(x \mapsto \sin^k(x)\right)_{k \in [\![0\,;\,n]\!]}$ est une famille libre.

5. Expliciter $\mathrm{Vect}((1,2,1,2),(1,0,1,-1),(-1,4,-1,7))$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations.

6. Montrer que $E_1 = \left\{ f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ et E_2, l'ensemble des fonctions constantes, sont supplémentaires dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2, ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

7. Même question dans $\mathbb{R}^3$ avec $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y+3z = 0\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(1,1,1)$.

8. Soit

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (-4x+2y-2z, -6x+4y-6z, -x+y-3z) \end{cases}$$

   Montrer que f est linéaire et donner A, la matrice canoniquement associée à f.

9. Donner une base de l'image et du noyau de

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z, y-x, z+y, x+y+2z) \end{cases}$$

   Il n'est pas demandé de prouver que f est effectivement linéaire.

10. Montrer que $F = \{x \mapsto (ax^4+bx^3+cx^2+dx+e) \times \cos(x) \,|\, (a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5\}$ est un espace vectoriel, en donner une base et donner sa dimension.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(0) = P(1)\}$ est un espace vectoriel, donner sa dimension, et en donner une base.

12. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\ker(g \circ f)) \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g))$$

13. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que f est une symétrie et donner ses éléments caractéristiques.

14. Soit

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x, y+z, 0) \end{cases}$$

Montrer que f est un projecteur et donner ses éléments caractéristiques.

15. Montrer que

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P + XP' \end{cases}$$

est un isomorphisme.

16. Soit $F = \mathrm{Vect}(\cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ et on note D l'opérateur dérivation sur F. Montrer que $B = (\cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ est une base de F, montrer que F est stable par D et donner la matrice de D dans la base B.

17. On note B la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et C la base formée des vecteurs $(2,6,1), (1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ (il n'est pas demandé de prouver que C est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$). Donner la matrice de f, la fonction de la question 8, dans la base C.

18. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, donner le rang de $A - \lambda I_3$ où A est la matrice trouvée à la question 8.

19. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & j & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables (on rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$).

20. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension n et que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\dim(F \cap G) \geq \dim(F) + \dim(G) - n$.