# Corrigé DM n°15

# Problème :

## Partie 0. Préliminaires

**1** Faisons un raisonnement par récurrence.

- Si $n \geqslant 0$, soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{T}_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1} \text{ »}$$

- Par définition des polynômes de Tchebychev, $\mathrm{H}_0$ et $\mathrm{H}_1$ sont vraies.
- Soit $n$ quelconque $\geqslant 0$ tel que $\mathrm{H}_n$ et $\mathrm{H}_{n+1}$ soient vraies et montrons que $\mathrm{H}_{n+2}$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, $2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n+1}$ est de degré $n+2$ et de coefficient dominant $2^{n+1}$ et $\mathrm{T}_n$ est de degré $n$. Les deux degrés étant distincts, d'après le cours, la somme a pour degré le plus grand des deux, soit $n+2$, et son coefficient dominant est $2^{n+1}$, c'est-à-dire que $\mathrm{H}_{n+2}$ est vraie.
- D'après le principe de récurrence, $\mathrm{H}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$ :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ \mathrm{T}_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1}.}$$

**2.(a)** D'après la formule de Moivre, $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$. Or, d'après le binôme de Newton :

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x)$$

Or, $i^2 = -1$ donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $i^{2p} = (-1)^p$ et $i^{2p+1} = (-1)^p \times i$. Finalement :

$$\cos(nx) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x)\right)$$

Or, les termes pour $k$ impair sont imaginaires purs.

$$= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x)$$

$$= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} i^{2p} \times \sin^{2p}(x) \times \cos^{n-2p}(x) \qquad \text{On aurait aussi pu écrire } \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}$$

$$= \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (-1)^p \times \sin^{2p}(x) \times \cos^{n-2p}(x)$$

Par conséquent :

$$\cos(nx) = \textstyle\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (-1)^p \times (1-\cos^2(x))^p \times \cos^{n-2p}(x)$$

Notons
$$\mathrm{P}_n = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (\mathrm{X}^2-1)^p \times \mathrm{X}^{n-2p}$$

si bien que $\mathrm{P}_n(\cos(x)) = \cos(nx)$. Or, $\cos(nx) = \mathrm{T}_n(\cos(x))$, cela permet de conclure par unicité des polynômes de Tchebychev (si on veut la redémontrer : $\mathrm{P}_n$ et $\mathrm{T}_n$ coïncident en tout réel de la forme $\cos(\theta)$ donc sur $[-1\,;1]$ qui est infini donc sont égaux).

$$\boxed{\mathrm{T}_n = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} (\mathrm{X}^2-1)^p \times \mathrm{X}^{n-2p}}$$

**2.(b)** $\mathrm{T}_n$ est une somme de polynômes qui sont tous de degré $n$. Le terme d'indice $k$ de la somme a pour coefficient dominant $\binom{n}{2k}$, donc le coefficient devant $\mathrm{X}^n$ vaut

$$\mathrm{S}_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}$$

D'une part, $\mathrm{S}_n > 0$ donc $\mathrm{T}_n$ est de degré $n$, et d'autre part, on trouve comme dans le chapitre 4 (somme et différence avec la somme des termes impairs) que $\mathrm{S}_n = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 0,\ \mathrm{T}_n \text{ est de degré } n \text{ et son coefficient dominant est } 2^{n-1}.}$$

**3** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition des polynômes de Tchebychev.

$$\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_p(\cos\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(p\theta)) = \cos(np\theta)$$

et

$$\mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_n(\cos\theta) = \mathrm{T}_p(\cos(n\theta)) = \cos(pn\theta)$$

Ainsi

$$\boxed{\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_p(\cos\theta) = \mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_n(\cos\theta)}$$

De la même façon que dans le cours, $\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_p$, $\mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_n$ et $\mathrm{T}_{np}$ coïncident sur l'intervalle $[-1\,;1]$ qui est infini. Il en découle qu'ils sont égaux

$$\boxed{\mathrm{T}_n \circ \mathrm{T}_p = \mathrm{T}_p \circ \mathrm{T}_n}$$

## Partie I. Factorisation des polynômes de Tchebychev

**1.(a)** La fonction cos est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$. D'après le théorème de la bijection (ou le corollaire du TVI),

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \theta \in [0\,;\pi] \text{ tel que } x = \cos(\theta).}$$

**1.(b)** Travaillons par équivalences.

$$\begin{aligned}
x \text{ est racine de } \mathrm{T}_n &\iff \mathrm{T}_n(\cos\theta) = 0\\
&\iff \cos(n\theta) = 0\\
&\iff n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]\\
&\iff \theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]\\
x \text{ est racine de } \mathrm{T}_n &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}
\end{aligned}$$

Cherchons parmi ces racines qui sont dans l'intervalle $[0\,;\pi]$. Soit $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0\,;\pi] &\iff 0 \leqslant \frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \leqslant \pi\\
&\iff 0 \leqslant \pi + 2k\pi \leqslant 2n\pi\\
&\iff -\pi \leqslant 2k\pi \leqslant (2n-1)\pi\\
&\iff -\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{2n-1}{2} = n - \frac{1}{2}\\
\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \in [0\,;\pi] &\iff 0 \leqslant k \leqslant n-1
\end{aligned}$$

La dernière équivalence vient du fait que $k$ est un entier. Le résultat en découle.

$$\boxed{\mathrm{T}_n(x) = 0 \iff \exists k \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!], x = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right).}$$

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ Les réels

$$\frac{\pi}{2n}, \frac{3\pi}{2n}, \frac{5\pi}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

sont dans $[\,0\,;\pi\,]$ et la fonction cosinus est strictement décroissante sur cet intervalle. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les racines } \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2n}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right) \text{ sont distinctes.}}$$

$\boxed{\textbf{1.(d)}}$ Il n'y a pas d'autre racine, puisque le polynôme est de degré $n$ et qu'on a $n$ racines distinctes, et celles-ci sont donc toutes simples. Comme le coefficient dominant de $\mathrm{T}_n$ est $2^{n-1}$ on en déduit la factorisation de $\mathrm{T}_n$ sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ :

$$\boxed{\mathrm{T}_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\mathrm{X} - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)}$$

$\boxed{\textbf{2.(a)}}$ Pour tout $x$, $\mathrm{T}_n(\cos(x)) = \cos(nx)$ donc :

$$\boxed{\mathrm{T}_n(1) = \mathrm{T}_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1 \text{ et } \mathrm{T}_n(-1) = \mathrm{T}_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n}$$

$\boxed{\textbf{2.(b)}}$ Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

$$\begin{aligned}\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} &= \frac{\sin(n\theta)}{n\theta} \times \frac{n\theta}{\sin(\theta)} \\ &= n \times \frac{\sin(n\theta)}{n\theta} \times \frac{\theta}{\sin(\theta)}\end{aligned}$$

Or
$$\frac{\sin u}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 1$$

Donc
$$\frac{\sin(n\theta)}{n\theta} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{\theta}{\sin(\theta)} \xrightarrow[\theta \to 0]{} 1$$

En d'autres termes
$$\boxed{\frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \xrightarrow[\theta \to 0]{} n}$$

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$ Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$ (on verra pourquoi dans la suite). Posons $\varphi(\theta) = \mathrm{T}_n(\cos(\theta))$. Alors $\varphi$ est dérivable car composée de fonctions dérivables, et d'après l'énoncé :

$$\varphi'(\theta) = -\sin(\theta) \times {\mathrm{T}_n}'(\cos(\theta))$$

De plus, par définition des polynômes de Tchebychev, on a également $\varphi(\theta) = \cos(n\theta)$ donc $\varphi'(\theta) = -n\sin(n\theta)$ ce qui implique que

$${\mathrm{T}_n}'(\cos(\theta)) = \frac{n\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

et c'est ici que l'hypothèse $\theta \not\equiv 0[\pi]$ est importante (pour ne pas diviser par 0). D'une part, d'après la question précédente,

$${\mathrm{T}_n}'(\cos(\theta)) \xrightarrow[\theta \to 0]{} n^2$$

et d'autre part
$${\mathrm{T}_n}'(\cos(\theta)) \xrightarrow[\theta \to 0]{} {\mathrm{T}_n}'(\cos(0)) = \mathrm{T}_n'(1)$$

par continuité de la fonction ${\mathrm{T}_n}'$ et de la fonction cos. Par unicité de la limite

$$\boxed{{\mathrm{T}_n}'(1) = n^2}$$

## Partie II. $\zeta(2)$, STAGE ONE

**1.(a)** On trouve facilement que

$$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{1}{X-1} - \frac{1}{X}$$

Soit $n \geqslant 2$. D'après ce qui précède,

$$R_n = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n}$$

car c'est une somme télescopique. Il en découle que

$$\boxed{R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

**1.(c)** Soit $n \geqslant 2$. Soit $k \in [\![ 2 \,;\, n ]\!]$. Puisque $k^2 \geqslant k(k-1)$, et puisque la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$$

Par somme

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant R_n$$

D'où

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + R_n = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

La suite $(S_n)$ étant strictement croissante et majorée, elle converge.

$$\boxed{\text{La suite } (S_n) \text{ converge vers une limite } L \leqslant 2.}$$

> On rappelle que pour appliquer le théorème de la limite monotone, il est nécessaire de majorer par une constante, et que dire que $S_n \leqslant 1 + R_n$ est insuffisant. De plus, il est faux de dire que $L = 2$, tout ce qu'on sait c'est que $L \leqslant 2$, et ça tombe bien, car, comme on le voit par la suite, $L \neq 2$ !

**2.(a)** Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{k=1, k \text{ pair}}^{2n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1, k \text{ impair}}^{2n} \frac{1}{k^2} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j)^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)^2} && \text{Avec } k = 2j \text{ et } k = 2i-1 \\ S_{2n} &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2} + S'_n \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{S_{2n} = \frac{1}{4} \times S_n + S'_n}$$

**2.(c)** Puisque $(S_{2n})$ est extraite de $(S_n)$, elle converge vers la même limite L. D'après la question précédente,

$$S_n{}' = S_{2n} - \frac{1}{4} \times S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L - \frac{1}{4} \times L$$

En d'autres termes,

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{S}'_n) \text{ converge vers une limite } \mathrm{L}' \text{ avec } \mathrm{L}' = \frac{3}{4}\mathrm{L}}$$

**3.(a)** Puisque $\mathrm{T}_n = 2^{n-1}\prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - x_i)$, le cours nous dit que la décomposition en éléments simples de ${\mathrm{T}_n}'/\mathrm{T}_n$ est

$$\frac{{\mathrm{T}_n}'}{\mathrm{T}_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\mathrm{X} - x_i}$$

En évaluant l'égalité précédente en 1, et en utilisant les questions 2.(a) et 2.(c) de la partie I, il vient :

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \cos\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{2n}\right)} = n^2}$$

**3.(b)** Soit $\theta \not\equiv 0[\pi]$.

$$\boxed{\frac{1}{\tan^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} - \frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1}$$

**3.(c)** On rappelle la formule $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \cos\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{2n}\right)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\sin^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)}$$

D'après la question 3.(b)

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2}$$

D'après la question précédente

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} - 1\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)}\right) - n$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n}$$

**4.(a)** Découle de la concavité du sinus et de la convexité de la tangente en 0, et du fait que la tangente à ces fonctions en 0 est la droite d'équation $y = x$.

$$\boxed{\forall x \in \left[x\,; \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)}$$

**4.(b)** Notons $\mathrm{A}_n$ la somme avec des sinus et $\mathrm{B}_n$ la somme avec des tangentes pour gagner de la place. Soit $i \in [\![ 1\,; n ]\!]$

$$\frac{\pi}{4n} \leqslant \frac{(2i-1)\pi}{4n} \leqslant \frac{(2n-1)\pi}{4n}$$

D'où

$$0 < \frac{(2i-1)\pi}{4n} < \frac{\pi}{2}$$

et ainsi on peut appliquer la question précédente, en mettant au carré (ce sont des nombres positifs car le sinus et la tangente sont positifs sur $[\,0\,;\pi/2\,[$ et la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$) :

$$\sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right) \leqslant \left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)^2 \leqslant \tan^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)$$

Enfin, la fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ :

$$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)} \geqslant \frac{1}{\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)^2} \geqslant \frac{1}{\tan^2\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)}$$

Par somme
$$\mathrm{B}_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{(2i-1)\pi}{4n}\right)^2} \leqslant \mathrm{A}_n$$

$$2n^2 - n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{16n^2}{(2i-1)^2\pi^2} \leqslant 2n^2$$

$$2n^2 - n \leqslant \frac{16n^2}{\pi^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)^2} \leqslant 2n^2$$

$$\frac{(\pi^2 2n^2 - n)}{16n^2} \leqslant \quad \mathrm{S}'_n \quad \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{2\pi^2 - 1/n}{16} \leqslant \quad \mathrm{S}'_n \quad \leqslant \frac{\pi^2}{8}$$

D'après le théorème d'encadrement, $(\mathrm{S}'_n)$ converge vers $\pi^2/8$. Par unicité de la limite :

$$\boxed{\mathrm{L}' = \frac{\pi^2}{8}}$$

> On pouvait aussi dire que, puisque l'on sait que les trois membres de ces inégalités convergent, on peut passer à la limite, et l'inégalité large passant à la limite, on obtient que $\pi/8 \leqslant \mathrm{L}' \leqslant \pi/8$.

**4.(c)** D'après la question 2.(c)

$$\boxed{\mathrm{L} = \frac{4}{3} \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}}$$

> Pourquoi ce nom bizarre $\zeta(2)$ ? En fait c'est la valeur d'une certaine fonction en 2, la fonction $\zeta$ de Riemann. On définit la fonction $\zeta$ par
>
> $$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$
>
> à condition, évidemment, que cette limite existe (la notation avec la somme infinie prendra tout son sens au deuxième semestre). On montrera également au deuxième semestre que la fonction $\zeta$ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$. On peut par exemple montrer (on le fera peut-être en DM plus tard dans l'année) que
>
> $$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$
>
> Et ce n'est pas tout ! On peut montrer que si $p \geqslant 1$, il existe $r_p \in \mathbb{Q}$ (que l'on peut calculer, cf exercice 47 du chapitre 24) tel que $\zeta(2p) = r_p \times \pi^{2p}$ (Euler, 1755). Par contre, on ne sait rien ou presque de la limite quand l'exposant est un nombre impair supérieur ou égal à 3 : on sait que $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry, 1978), que parmi $(\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11))$, il y a au moins un irrationnel (Zudilin, 2001) et qu'il y a une infinité d'irrationnels parmi les $\zeta(2p+1)$ (Rivoal, 2000). On conjecture (entre autres) que les $\zeta(2p+1)$ sont tous irrationnels.

## Partie III. Théorème de Block-Thielmann

**1** Notons $n$ et $p$ les degrés de P et Q respectivement, ainsi que $a_n$ et $b_p$ leurs coefficients dominants respectifs (non nuls bien sûr).

$$\boxed{\text{P} \circ \text{Q est de degré } np \text{ et de coefficient dominant } a_n \times {b_p}^n}$$

**2** Les calculs donnent

$$\boxed{\begin{cases} (2\text{X}^2 - 1) \circ (3\text{X} + 1) = 2(3\text{X} + 1)^2 - 1 = 18\text{X}^2 + 12\text{X} + 1 \\ \\ (3\text{X} + 1) \circ (2\text{X}^2 - 1) = 3(2\text{X}^2 - 1) + 1 = 6\text{X}^2 - 2 \end{cases}}$$

**3** On sait déjà que la composition est associative et que le polynôme X est un élément neutre. De plus, la composition est bien interne sur cet ensemble puisque, d'après la question 1, la composée de deux polynômes de degré 1 est aussi de degré 1. Il suffit donc de prouver que tout élément admet un inverse. Soient $\text{U} = a\text{X} + b$ et $\text{V} = c\text{X} + d$ deux polynômes de degré 1 (avec $a$ et $c$ non nul). Alors

$$\text{U} \circ \text{V} = a(c\text{X} + d) + b = ac\text{X} + ad + b$$

Travaillons par équivalences.

$$\text{U} \circ \text{V} = \text{X} \iff \begin{cases} ac = 1 \\ \text{et} \\ ad + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1/a \\ \text{et} \\ d = -d/a \end{cases}$$

Puisque l'on a travaillé par équivalences, il existe un unique V polynôme de degré 1 vérifiant $\text{U} \circ \text{V} = \text{X}$. On vérifie facilement qu'alors $\text{V} \circ \text{U} = \text{X}$ de sorte que V est un inverse de U :

$$\boxed{\text{Cet ensemble est un groupe muni de la composition.}}$$

Cependant, ce groupe n'est pas abélien : par exemple (il faut un contre-exemple explicite), $(2\text{X} + 1) \circ (2\text{X} + 2) = 4\text{X} + 5$ et $(2\text{X} + 2) \circ (2\text{X} + 1) = 4\text{X} + 4$.

$$\boxed{\text{Ce groupe n'est pas abélien.}}$$

**4.(a)** D'après la question 1, si $\text{P} \in \text{C}$, alors $\text{P} \circ (\text{X}^2 + \alpha)$ et de $(\text{X}^2 + \alpha) \circ \text{P}$ ont le même coefficient dominant donc, en notant $a_n$ le coefficient dominant de P :

$$a_n = {a_n}^2$$

Les deux seules solutions de l'équation $x = x^2$ sont 0 et 1, et puisque $a_n$ n'est pas nul (par définition d'un coefficient dominant)

$$\boxed{\text{Si P} \in \text{C, alors P est unitaire.}}$$

**4.(b)** $\text{P}_1$ et $\text{P}_2$ étant unitaires et de même degré, le résultat en découle.

$$\boxed{r < n \qquad \text{et} \qquad \deg(\text{P}_1 + \text{P}_2) = n}$$

**4.(c)** $\text{P}_1$ et $\text{P}_2$ appartenant à C

$$\begin{cases} \text{P}_1 \circ (\text{X}^2 + \alpha) = (\text{X}^2 + \alpha) \circ \text{P}_1 \\ \\ \text{P}_2 \circ (\text{X}^2 + \alpha) = (\text{X}^2 + \alpha) \circ \text{P}_2 \end{cases}$$

Or, les membres de droite des égalités sont respectivement égaux à ${\text{P}_1}^2 + \alpha$ et ${\text{P}_2}^2 + \alpha$. En faisant la différence, on obtient

$$(\text{P}_1 - \text{P}_2) \circ (\text{X}^2 + \alpha) = {\text{P}_1}^2 - {\text{P}_2}^2 = (\text{P}_1 - \text{P}_2) \times (\text{P}_1 + \text{P}_2)$$

- D'après la première question, le membre de gauche est de degré $2r$.
- Puisque $\deg(\text{PQ}) = \deg(\text{P}) + \deg(\text{Q})$, le membre de droite est de degré $r + n$.

C'est absurde d'après la question précédente.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{C contient au plus un polynôme de degré } n.}$$

**4.(d)** Soit P un polynôme de degré 3 appartenant à C. D'après la question 4.(a), il est unitaire. Ainsi, il existe trois réels $(a, b, c)$ tels que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$$

Par définition de C

$$(\mathrm{X}^2 + \alpha)^3 + a(\mathrm{X}^2 + \alpha)^2 + b(\mathrm{X}^2 + \alpha) + c = (\mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c)^2 + \alpha$$

En développant et par unicité des coefficients on obtient le système

$$\begin{cases} 0 = 2a \\ 3\alpha = a^2 + 2b \\ 0 = 2c + 2ab \\ 3\alpha^2 + a + 2a\alpha + b = b^2 + 2ac \\ 0 = 2bc \\ \alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c = c^2 + \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a \\ 3\alpha = 2b \\ 0 = c \\ 3\alpha^2 + b = b^2 \\ \alpha^3 + b\alpha = \alpha \end{cases}$$

Finalement

$$\begin{cases} a = c = 0 \\ b = \dfrac{3\alpha}{2} \\ \\ 3\alpha^2 + \dfrac{3\alpha}{2} = \dfrac{9\alpha^2}{4} \\ \\ \alpha^3 + \dfrac{3\alpha^2}{2} = \alpha \end{cases} \iff \begin{cases} a = c = 0 \\ b = \dfrac{3\alpha}{2} \\ \\ 3\alpha\left(\alpha + \dfrac{1}{2} - \dfrac{3\alpha}{4}\right) = 0 \\ \\ \alpha\left(\alpha^2 + \dfrac{3\alpha}{2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

Les deux valeurs de $\alpha$ solutions de ces équations sont $\alpha = 0$ et $\alpha = -2$. En effet, ces équations doivent <u>toutes</u> être vérifiées, et par conséquent, $1/2$, qui n'est solution que de la dernière équation, ne convient pas.

$$\boxed{\text{Si C contient un polynôme de degré 3 alors } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2.}$$

**4.(e)** Si $\alpha = 0$, on cherche les polynômes non constants P tels que $\mathrm{X}^2 \circ \mathrm{P} = \mathrm{P} \circ \mathrm{X}^2$. Or, les polynômes $\mathrm{X}^n$, pour $n \geqslant 1$ conviennent car pour tout $n \geqslant 1$

$$\mathrm{X}^n \circ \mathrm{X}^2 = \left(\mathrm{X}^2\right)^n = \mathrm{X}^{2n} = (\mathrm{X}^n)^2 = \mathrm{X}^2 \circ \mathrm{X}^n$$

Or, d'après la question 4.(c), C ne contient au plus qu'un polynôme de degré $n$. Puisque $\mathrm{X}^n \in \mathrm{C}$, $\mathrm{X}^n$ est le seul polynôme de degré $n$ qui appartient à C, c'est-à-dire que C n'a aucun autre élément.

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 0 \qquad \mathrm{C} = \{\mathrm{X}^n, n \geqslant 1\}}$$

**5** D'après la question 3 de la partie 0, la suite $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est commutante, et on montre de la même façon que dans la question précédente que la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\geqslant 1}$ est commutante.

$$\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1} \text{ et } (\mathrm{X}^n)_{n\geqslant 1} \text{ sont commutantes.}}$$

**6** Notons, pour tout $n \geqslant 1, \mathrm{Q}_n = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{U}^{-1}$. D'après la question1, pour tout $n \geqslant 1, \deg(\mathrm{Q}_n) = \deg(\mathrm{P}_n) = n$ puisque $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite commutante. Soient $n$ et $k$ deux entiers supérieurs ou égaux à 1 quelconques. Par associativité de la composition :

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{X} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{U}^{-1}$$

Or, $\mathrm{P}_n \circ \mathrm{X} = \mathrm{P}_n = \mathrm{X} \circ \mathrm{P}_n$. D'où, en utilisant le fait que $(\mathrm{P}_n)$ est une suite commutante :

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{U}^{-1}$$

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{U}^{-1}$$

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{X} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{U}^{-1}$$

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_k \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{U} \circ \mathrm{P}_n \circ \mathrm{U}^{-1}$$

$$\mathrm{Q}_n \circ \mathrm{Q}_k = \mathrm{Q}_k \circ \mathrm{Q}_n$$

Finalement $\boxed{(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant 1} \text{ est une suite commutante.}}$

**7.(a)** Après calculs

$$\boxed{\mathrm{U}\circ\mathrm{P}\circ\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{X}^2+\alpha \text{ avec } \alpha = -\frac{b^2}{4}+ac+\frac{b}{2}}$$

**7.(b)** V convient si et seulement si (en composant à gauche par V et à droite par $\mathrm{V}^{-1}$ et en se souvenant que composer à gauche ou à droite par X ne change pas le polynôme) :

$$\mathrm{V}\circ\mathrm{T}_2\circ\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{X}^2-2$$

D'après la question précédente,

$$\boxed{\mathrm{V} = 2\mathrm{X} \text{ convient.}}$$

**8** La première partie de la question ne pose pas de difficulté

$$\boxed{\text{Soient } \mathrm{V},\mathrm{W}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ de degré 1 et soit } \mathrm{U} = \mathrm{W}^{-1}\circ\mathrm{V}, \text{ alors } \mathrm{U}^{-1} = \mathrm{V}^{-1}\circ\mathrm{W}.}$$

Soit $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite commutante. Par définition d'une telle suite, elle contient un polynôme $\mathrm{P}_3$ de degré 3, et un polynôme $\mathrm{P}_2$ de degré 2. D'après la question 3.(a), il existe $\mathrm{W}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré 1 et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que

$$\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_2\circ\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{X}^2+\alpha$$

D'après la question 2, la suite $\big(\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_n\circ\mathrm{W}^{-1}\big)_{n\geqslant 1}$ est commutante, et contient $\mathrm{X}^2+\alpha$. Or, $\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_3\circ\mathrm{W}^{-1}$ est un polynôme de degré 3, qui commute avec $\mathrm{X}^2+\alpha$. D'après la question 4.(d) de la partie II, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$.

- Si $\alpha = 0$, $\big(\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_n\circ\mathrm{W}^{-1}\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite commutante qui contient $\mathrm{X}^2$. Or, d'après la question 4.(c) de la partie II, il y a unicité d'une telle suite, et la suite $(\mathrm{X}^n)_{n\geqslant 1}$ convient, d'après la question 4.(e) de la partie B. Dès lors

$$\forall n\geqslant 1 \qquad \mathrm{W}\circ\mathrm{P}_n\circ\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{X}^n$$

  Composons à gauche par $\mathrm{W}^{-1}$ et à droite par W. Par suite

$$\forall n\geqslant 1 \qquad \mathrm{P}_n = \mathrm{W}^{-1}\circ\mathrm{X}^n\circ\mathrm{W}$$

  Il suffit de poser $\mathrm{U} = \mathrm{W}^{-1}$ pour conclure.

- Si $\alpha = -2$, il existe V de degré 1 tel que

$$\mathrm{V}^{-1}\circ(\mathrm{X}^2-2)\circ\mathrm{V} = 2\mathrm{X}^2-1$$

  c'est-à-dire $$\mathrm{X}^2-2 = \mathrm{V}\circ(2\mathrm{X}^2-1)\circ\mathrm{V}^{-1}$$

  toujours en composant à gauche par V et à droite par $\mathrm{V}^{-1}$. Or, d'après la question 1, la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite commutante qui contient $\mathrm{T}_2$, ce qui implique (d'après la question 2) que $\big(\mathrm{V}\circ\mathrm{T}_n\circ\mathrm{V}^{-1}\big)_{n\geqslant 1}$ est une suite commutante qui contient $\mathrm{X}^2-2$. D'autre part, la suite $\big(\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_n\circ\mathrm{W}^{-1}\big)_{n\geqslant 1}$ est une autre suite commutante qui contient $\mathrm{X}^2-2$. Toujours par unicité d'une telle suite, il en découle que pour tout $n\geqslant 1$

$$\mathrm{W}\circ\mathrm{P}_n\circ\mathrm{W}^{-1} = \mathrm{V}\circ\mathrm{T}_n\circ\mathrm{V}^{-1}$$

  Composons à gauche par $\mathrm{W}^{-1}$ et à droite par W. Il en découle

$$\mathrm{P}_n = \big(\mathrm{W}^{-1}\circ\mathrm{V}\big)\circ\mathrm{T}_n\circ\big(\mathrm{V}^{-1}\circ\mathrm{W}\big)$$

  et si on pose $\mathrm{U} = \mathrm{W}^{-1}\circ\mathrm{V}$, alors $\mathrm{U}^{-1} = \mathrm{V}^{-1}\circ\mathrm{W}$, c'est-à-dire

$$\mathrm{P}_n = \mathrm{U}\circ\mathrm{T}_n\circ\mathrm{U}^{-1}$$

Si $(\mathrm{P}_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite commutante, alors il existe $\mathrm{U}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré 1 tel que

- soit $\mathrm{P}_n = \mathrm{U}\circ\mathrm{X}^n\circ\mathrm{U}^{-1}$ pour tout $n\geqslant 1$.
- soit $\mathrm{P}_n = \mathrm{U}\circ\mathrm{T}_n\circ\mathrm{U}^{-1}$ pour tout $n\geqslant 1$

## Partie IV. Limites uniformes de polynômes à coefficients entiers dans le cas où $b - a \geqslant 4$

**1** On a :

$$\mathrm{T}_n(y_k) = \mathrm{T}_n(\cos(k\pi/n))$$

$$= \cos(nk\pi/n)$$

d'après la propriété des polynômes de Tchebychev. On en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{T}_n(y_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k}$$

**2** Tout d'abord, $\mathrm{T}_n(1) = \mathrm{T}_n(\cos(0)) = \cos(n \times 0) = 1$ : il reste donc à prouver que $|\mathrm{T}_n| \leqslant 1$ sur $[-1\,;1]$ (1 sera un majorant et il est atteint donc sera le maximum, donc la borne supérieure). Soit $x \in [-1\,;1]$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ si bien que $|\mathrm{T}_n(x)| = |\mathrm{T}_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leqslant 1$.

$$\boxed{\sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{T}_n(x)| = 1}$$

**3.(a)** Suivons l'indication de l'énoncé et supposons que $\sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{P}(x)| < 1/2^{n-1}$. En particulier, pour tout $x \in [-1\,;1]\,, 2^{n-1}|\mathrm{P}($
Posons $\mathrm{D}_n = 2^{n-1}\mathrm{P}_n - \mathrm{T}_n$. $\mathrm{D}_n$ est la différence de deux polynômes de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{n-1}$ (puisque P est unitaire). On en déduit que $\deg(\mathrm{D}_n) \leqslant n-1$.

Fixons $k \in [\![ 0\,;\, n ]\!]$. Alors :

$$\mathrm{D}_n(y_k) = 2^{n-1}\mathrm{P}(y_k) - (-1)^k$$

Supposons $k$ pair. Alors $\mathrm{D}_n(y_k) = 2^{n-1}\mathrm{P}(y_k) - 1 < 0$ puisque $2^{n-1}\mathrm{P}(y_k) \leqslant 2^{n-1}|\mathrm{P}(y_k)| < 1$. De même, si $k$ est impair, alors $\mathrm{D}_n(y_k) > 0$. En particulier, pour tout $k \in [\![ 0\,;\, n-1 ]\!], \mathrm{D}(y_k)$ et $\mathrm{D}(y_{k+1})$ sont de signe opposés. Puisque $\mathrm{D}_n$ est continu (c'est un polynôme), d'après le TVI, il s'annule (au moins une fois) entre $y_k$ et $y_{k+1}$ : $\mathrm{D}_n$ admet au moins $n$ racines distinctes, et est de degré inférieur ou égal à $n-1$ donc $\mathrm{D}_n$ est le polynôme nul, c'est-à-dire que $2^{n-1}\mathrm{P} = \mathrm{T}_n$ donc $\mathrm{P} = \mathrm{T}_n/2^{n-1}$, mais alors, d'après la question précédente, $\sup|\mathrm{P}| = 1/2^{n-1}$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

$$\boxed{\sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{P}(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}}$$

> En multipliant par $2^{n-1}$, il vient : $\sup_{x \in [-1\,;1]} |2^{n-1} \times \mathrm{P}(x)| \geqslant 1$. Or, $\mathrm{T}_n$ est de degré $n$ et de coefficient dominant $2^{n-1}$ et on a : $\sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{T}_n(x)| = 1$. En particulier, les polynômes de Tchebychev sont les polynômes (sur $[-1\,;1]$) qui ont la norme infinie minimale, parmi les polynômes de même degré et de même coefficient dominant. On peut montrer (mais c'est plus difficile) que si $\sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{P}(x)| = 1/2^{n-1}$, alors $\mathrm{P} = \mathrm{T}_n/2^{n-1}$, c'est-à-dire que les polynômes de Tchebychev sont les seuls à avoir cette norme infinie minimale (parmi ceux de même degré et de même coefficient dominant).

**3.(b)** Soit :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [a\,;b] \\ x \longmapsto \dfrac{b-a}{2}(x-1) + b \end{cases}$$

En particulier, $\varphi$ (ou plutôt sa restriction à $[-1\,;1]$) est une bijection de $[-1\,;1]$ dans $[a\,;b]$. Il découle de la partie I que :

$$\sup_{x \in [a\,;b]} |\mathrm{P}(x)| = \sup_{x \in [-1\,;1]} |\mathrm{P}(\varphi(x))|$$

Or, $\varphi$ est affine donc $\mathrm{P} \circ \varphi$ est aussi de degré $n$, et son coefficient dominant est $((b-a)/2)^n$. En effet, si on note $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots$, alors, pour tout $x$ :

$$\mathrm{P}(\varphi(x)) = \left(\frac{b-a}{2}(x-1) + b\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b-a}{2}(x-1) + b\right)^{n-1} + \cdots$$

si bien que $\mathrm{P} \circ \varphi$ est de degré $n$ de coefficient dominant $((b-a)/2)^n$. En particulier, $\mathrm{Q}_n = (2^n/(b-a)^n) \times \mathrm{P} \circ \varphi$ est unitaire de degré $n$ donc, d'après la question précédente :

$$\sup_{x\in[\,-1\,;1\,]} |\mathrm{Q}_n(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

D'après l'énoncé, on peut sortir la constante $2^n/(b-a)^n$ de la borne supérieure, c'est-à-dire :

$$\frac{2^n}{(b-a)^n} \times \sup_{x\in[\,-1\,;1\,]} |\mathrm{P}\circ\varphi(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} |\mathrm{P}(x)| = \sup_{x\in[\,-1\,;1\,]} |\mathrm{P}\circ\varphi(x)| \geqslant \frac{(b-a)^n}{2^n\times 2^{n-1}} = 2\times\left(\frac{b-a}{4}\right)^n}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ De même que dans la partie III du DM 11, il existe $n_0$ tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $|\mathrm{P}_n(x)-f(x)|\leqslant 1/2$ et donc, par inégalité triangulaire, pour tout $n\geqslant n_0$, $|\mathrm{P}_n(x)-\mathrm{P}_{n_0}(x)|\leqslant 1$. Or, si $\mathrm{P}_n-\mathrm{P}-n_0$ est de degré $d\geqslant 1$ et de coefficient dominant $a_d$, la question précédente donne (précisons que la question précédente est valable pour des polynômes unitaires, il ne faut donc pas oublier de multiplier par $|a_d|$) :

$$\sup_{x\in[\,a\,;b\,]} |\mathrm{P}_n(x)-\mathrm{P}_{n_0}(x)| \geqslant 2|a_d|\times\left(\frac{b-a}{4}\right)^n \geqslant 2$$

puisque $b-a\geqslant 4$ et $a_d$ est un entier non nul (par définition d'un coefficient dominant) donc supérieur ou égal à 1 en valeur absolue, ce qui est absurde. Il en découle que $\mathrm{P}_n-\mathrm{P}_{n_0}$ est constant pour tout $n\geqslant n_0$.

Raisonnons ensuite comme dans la partie III du DM n° 11 : notons, pour tout $n$, $\alpha_n=\mathrm{P}_n-\mathrm{P}_{n_0}$ ($\alpha_n$ est donc constant). Si $k$ est un entier dans $[\,a\,;b\,]$ (un tel $k$ existe puisque $b-a\geqslant 4$), alors $\alpha_n=\mathrm{P}_n(k)-\mathrm{P}_{n_0}(k)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(k)-\mathrm{P}_{n_0}(k)$ : la suite $(\alpha_n)$ converge, mais puisque c'est une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, alors elle est stationnaire. Il en découle que $(\mathrm{P}_n)$ est stationnaire, donc $f$ (la limite de la suite stationnaire) est un polynôme à coefficients entiers.

$$\boxed{\text{Si } b-a\geqslant 4\text{, alors une limite uniforme de polynômes à coefficients entiers est un polynôme à coefficients entiers.}}$$