Semaine 13 – Programme 8 – Séries entières

Cours - Groupe A

1) Lemme d'Abel (démo)

$Soit\ z_0 \in \mathbb{C}^*.$

$$\boxed{(a_n z_0^n)_n\ est\ bornée \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C}\ tq\ |z| < |z_0|, \sum_n a_n z^n\ CVA}$$

<u>Démo</u>

$(a_n z_0^n)\ bornée \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| \leq M$

$Soit\ z \in \mathbb{C}\ tq\ |z| < |z_0|.$

$$\forall n, |a_n z^n| = \left|a_n z_0^n \left(\frac{z}{z_0}\right)^n\right| \leq M \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$$

$or\ \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1\ donc\ \sum_n \left|\frac{z}{z_0}\right|^n\ CV\ donc\ \sum_n |a_n z^n|\ CV : OK$

2) Définitions du rayon + définitions équivalentes

Rayon de convergence $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:

$$\boxed{\mathcal{R} = \sup \left\{ \begin{array}{c} \{|z| \mid (a_n z^n)_n\ est\ bornée\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid (a_n x^n)_n\ est\ bornée\} \\ \{|z| \mid a_n z^n \to 0\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid a_n x^n \to 0\} \\ \{|z| \mid \sum_n a_n z^n\ CV\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_n a_n x^n\ CV\} \\ \{|z| \mid \sum_n a_n z^n\ CVA\} \\ \{x \in \mathbb{R}_+ \mid \sum_n a_n x^n\ CVA\} \end{array} \right.}$$

3) Convergence normale d'une série entière sur les segments inclus dans $]-R, R[$ (démo)

Proposition :

$$\boxed{\forall [a;b] \subset]-\mathcal{R},\mathcal{R}[, \sum_n a_n x^n \; CVN \; sur \; [a;b]}$$

Démo :

$On\ note\ I = [a;b], c = \max(|a|,|b|)\ et\ pour\ tout\ n, f_n : x \mapsto a_n x^n sur\ I.$

$\forall x \in I, |f_n(x)| \leq |a_n| c^n = |a_n c^n|$

$donc\ f_n\ est\ bornée\ sur\ I\ et\ \|f_n\|_\infty^I < |a_n c^n|\ qui\ est\ le\ terme\ général\ d'une$

$série\ convergente\ car\ |c| < \mathcal{R}$

$$d'où \sum_n \|f_n\|_\infty^I\ CV : OK$$

4) Règle de d'Alembert pour les séries entières (démo à partir de la règle pour les séries numériques)

Théorème (Règle de d'Alembert) :

$$\boxed{\left[\exists \ell \in \mathbb{R}_+, \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \ell\right] \Rightarrow \left[\mathcal{R} = \frac{1}{\ell} \in \mathcal{R}_+ \cup \{+\infty\}\right]}$$

Démo

$Pour\ tout\ z \in \mathbb{C}^*, on\ note\ u_n = |a_n z^n| \in \mathbb{R}_+^*.$

$$Alors\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot \left|\frac{z^{n+1}}{z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell \cdot |z|$$

$Donc, d'après\ la\ règle\ de\ D'Alembert\ pour\ les\ séries\ numériques :$

- $Si\ |z| < \frac{1}{\ell}, \ell \cdot z < 1\ donc\ \sum_n u_n\ CV\ donc\ \sum_n a_n z^n\ CVA$
- $Si\ |z| > \frac{1}{\ell}, \ell \cdot z > 1\ donc\ \sum_n u_n\ DV\ donc\ \sum_n |a_n z^n|\ DV$

$$D'où\ \mathcal{R} = \frac{1}{\ell}.$$

5) Continuité d'une fonction définie par une SE sur $]-R,R[$ (démo)

Exercices – Groupe A

Exercice 1 : (Mines télécom MP 2023)
Soit la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{1}{(1+x)(2-x)}$
1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.

1. Décomposer en éléments simples + somme d'une suite géométrique (rayon en fonction de la condition de validité du DSE de $\frac{1}{1+x}$.
2. Calculer les 4 premiers termes de la somme

Exercice 2 : (CCINP MP 2017)
On considère la fonction f définie par $f(x) = (\arcsin x)^2$.
1) Justifier qu'elle est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2) Vérifier que f' est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 2$.
3) En déduire son développement en série entière.

1) ?
2) Calculatoire
3) Faire un SE et calculer ses coeffs si elle vérifie l'équa diff + unicité de la solution d'un pb de Cauchy

Exercice 3 : (CCINP MP 2021)
Calculer le rayon de convergence et la somme des séries suivantes, où z est une variable complexe et x est réelle :
a) $\sum (n+1)3^n z^{2n}$
b) $\sum \dfrac{2^{(-1)^n}}{n} x^n$

a) JSP
b) JSP

Exercice 4 : (Mines télécom MP 2021)
Développer en série entière $f : x \mapsto \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Utiliser le DSE de $\ln(1+x)$ j'imagine mais y'a un binôme dcp donc jsp trop MDR

Exercice 5 :
On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour tout entier naturel n : $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n + (-1)^n$.
a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $|a_n| \leq 2^{n+1} - 1$.
b) En déduire que le rayon de convergence, noté R, de la série entière $\sum a_n.z^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.
c) Calculer la somme de cette série entière sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$.
d) En déduire a_n en fonction de n.

a) Récurrence double

b) J'imagine qu'il faut montrer que

$\sum_n a_n \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *CVA avec l'inégalité d'avant mais jsp ça marche pas là*

c) Utiliser la relation sur les a_n pour en trouver une sur $S(x)$.

J'obtiens $S(x) = (2x^2 + x) \cdot S(x) + \frac{x^2}{1+x} + x$ mais pas sûr

d) DES S pour refaire un DSE et trouver les a_n mais vsy la flemme mdr

Exercice 6 :

Montrer que $\int_0^{2\pi} e^{2.\cos(x)} dx = 2\pi . \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k!)^2}$.

DSE de l'exp + bonne chance pr les calculs mdr

Exercices – Groupe B

Exercice 7 : (Mines télécom MP 2022)

Soit $(a_n)_n$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon R_1. Montrer que la série entière $\sum a_n^2 x^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = R_1^2$.

Exercice 8 : (Mines MP 2021)

1) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum a_n$ converge. Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) Soit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \in \mathbb{R}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n x^n}{n!}$ pour les x tels que la série converge. Montrer que $S(x)e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.

Exercice 9 :

Nature de la série de terme général $\sin(2\pi n! e)$.

Exercice 10 : (Centrlale MP 2021)

Soit f la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Calculer, pour $r \in]0; R[$, $\int_0^{2\pi} f(re^{it})\,\mathrm{d}t$.
2. On considère l'égalité suivante :

$$\forall r \in]0; R[\,,\ \forall z \in B(0,r),\ f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} re^{it}\frac{f(re^{it})}{re^{it} - z}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer l'égalité pour $f : z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer l'égalité pour la fonction f définie dans l'introduction.

Exercice 11 :

Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-a,a[$ absolument monotone : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$. On note $S_n(x)$ sa somme de Taylor d'indice n, et $R_n(x)$ le reste intégral de Taylor d'indice n.

1. Montrer que $\forall x \in]0,a[$, $S_n(x)$ est croissante et majorée.
2. En déduire que la suite $(R_n(x))_{n\in\aleph}$ converge.
3. Montrer que $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu)du$.
4. En déduire que pour tout couple (x,y) de $]0,a[$, tel que x<y, on a $\frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$.
5. Montrer que f est développable en série entière sur $]0,a[$.

Exercice 12 : (CCINP MP 2023)

On pose $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on pose

$$I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$$

On note $f\colon x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière définissant f vérifie $R \geq 1$.
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire l'expression de f, la valeur de R et une expression de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.