Programme de colle - Semaine n°23

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 24 - Analyse asymptotique et Développements Limités

- cf. semaines 20 et 21.

Chapitre 25 - Séries numériques

- cf. semaines 21 et 22.

Chapitre 26 - Probabilités sur un univers fini

- cf. semaine 22.
- Formule de Bayes.
- Indépendance de deux événements. A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ sont indépendants etc. L'indépendance dépend de la probabilité choisie.
- Indépendance mutuelle de n événements. Cas de trois événements. Deux erreurs à ne pas commettre : l'indépendance deux à deux ne suffit pas, tout comme le fait d'avoir $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors $B_1, \dots, B_n$ le sont aussi où, pour tout i, $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$.

Chapitre 27 - Variables aléatoires sur un univers fini

- Variable aléatoire, univers image. Notation $[X = a], [X \leq a]$ etc. Manipulation (attention, ce sont des parties de Ω). Système complet d'événements associé à une variable aléatoire.
- Loi d'une variable aléatoire. La loi d'une variable aléatoire est entièrement déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$. Une distribution de probabilités définit (de façon non unique) une variable aléatoire. Exemple : somme de deux dés équilibrés, somme de deux dés donnant chaque numéro $k \in [\![1 \,;\, 6]\!]$ avec une probabilité proportionnelle à k. Représentation sous forme d'histogramme.
- Égalité en loi, notation $X \sim Y$. Attention, l'égalité en loi n'implique pas l'égalité ! Lorsque des variables aléatoires ont la même loi, les probabilités de l'une sont égales aux probabilités de l'autre, exemples.
- Transfert d'une variable aléatoire. Si X et Y ont la même loi alors $f(X)$ et $g(Y)$ ont encore la même loi.
- Loi conditionnelle.
- Espérance d'une variable aléatoire. Exemples.
- Interprétation de l'espérance. Une espérance positive indique un jeu favorable, mais attention, ce n'est pas parce que l'espérance est positive que l'on doit être incité à jouer.
- Propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire). Théorème de transfert.
- Variance d'une variable aléatoire. La variance d'une variable aléatoire est positive, cas d'égalité. Écart-type. Formule de König-Huygens. Variance et écart-type de $aX + b$.
- Lois de référence : loi certaine (espérance, variance), loi uniforme sur un ensemble fini, loi de Bernoulli (espérance, variance), loi binomiale (espérance, variance, loi du nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une expérience aléatoire où deux issues sont possibles). Indicatrice d'un événement, l'indicatrice suit une loi de Bernoulli de paramètre la probabilité de l'événement : en particulier, la probabilité est l'espérance de l'indicatrice.

- Loi d'un couple de variables aléatoires, généralisation à plus de deux variables aléatoires. Loi conjointe, loi marginale. On peut donner les marginales connaissant la loi conjointe, mais pas le contraire en général.
- Variables aléatoires indépendantes, généralisation à n variables aléatoires. Exemple : loi d'un maximum ou d'un minimum. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, lemme des coalitions. Somme de lois de Bernoulli indépendantes. Espérance d'un produit de v.a. indépendantes.
- Covariance, variables non corrélées, des variables indépendantes sont non corrélées (réciproque fausse). Variance d'une somme de variables aléatoires, cas particulier où les variables sont deux à deux indépendantes.
- Inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres (HP), cohérence du modèle probabiliste.

Chapitres au programme

Chapitre 24 (exercices uniquement), chapitres 25 et 26 (cours et exercices), chapitre 27 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Définition d'un système complet d'événements.
2. Définition d'une probabilité sur un univers fini. Définition d'une probabilité conditionnelle.
3. Nature des séries de Bertrand lorsque $\alpha \neq 1$ (démonstration).
4. Paradoxe des anniversaires pour n élèves (démonstration).
5. Formule des probabilités composées (sans démonstration).
6. Formule des probabilités totales (les deux versions, sans démonstration).
7. Formule de Bayes (sans démonstration).
8. Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de n événements. Que faut-il prouver pour prouver que trois événements A, B, C sont mutuellement indépendants ?
9. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Théorème de transfert (sans démonstration).
10. L'examinateur demande d'appliquer le théorème de transfert dans un cas explicite simple.
11. Variance d'une variable aléatoire, formule de König-Huygens (démonstration).
12. Définition d'une loi binomiale, espérance et variance (démonstration de l'espérance uniquement).
13. L'examinateur donne un exercice explicite simple faisant intervenir une loi binomiale. Nous avons vu en classe l'exemple suivant : on lance 10000 dés équilibrés, quelle est la probabilité d'obtenir 2024 fois le chiffre 6 ?
14. Définition de 2 variables aléatoires indépendantes, caractérisation à l'aide des singletons (sans démonstration).
15. Définition de la covariance. Variance d'une somme de deux, de n variables aléatoires (sans démonstration). Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes (toujours sans démonstration).
16. Inégalité de Markov (sans démonstration).
17. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (sans démonstration).

Groupes B - C :

1. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \dfrac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$.
2. Règle de d'Alembert (démonstration).
3. Inégalité de Markov (démonstration).
4. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (démonstration).

Groupe C :

1. Encadrement de la fonction ζ et équivalent en 1^+ et en $+\infty$.
2. Si X et Y suivent une loi uniforme sur $[\![1\,;N]\!]$ et sont indépendantes, donner la loi de $M = \max(X, Y)$ et $W = \min(X, Y)$.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Espaces vectoriels.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 27, 31, 35, 37, 42, 43, 44, 45, 47, 49, 52, 54, 56, 62, 64, 66, 67, 68, 69, 70, 72, 73, 78 du chapitre 27.

Cahier de calcul

Rien cette semaine !