Correction du DM n°2

Exercice 1 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence, $f(x) = e^{x^3 \ln(x)}$. Par conséquent, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$. f est dérivable (et même $\mathscr{C}^\infty$) car composée de fonctions dérivables (et même $\mathscr{C}^\infty$). Dès lors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(3x^2 \ln(x) + x^3 \times \frac{1}{x}\right) e^{x^3 \ln(x)} \\ &= x^2 \left(3\ln(x) + 1\right) e^{x^3 \ln(x)} \end{aligned}$$

si bien que $f'(x)$ est du signe de $3\ln(x) + 1$. Or :

$$\begin{aligned} 3\ln(x) + 1 \geqslant 0 &\iff \ln(x) \geqslant -1/3 \\ &\iff x \geqslant e^{-1/3} \qquad \text{(exp strictement croissante)} \end{aligned}$$

On en déduit le tableau suivant :

	0		$e^{-1/3}$		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| 1	$\searrow$	$e^{-e^{-1}/3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Justifions la limite en 0 : par croissances comparées, $x^3 \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$ car l'exponentielle est continue. Ainsi, f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Étudions la dérivabilité de f en 0.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{e^{x^3 \ln(x)} - 1}{x} \\ &= \frac{e^{x^3 \ln(x)} - 1}{x^3 \ln(x)} \times x^2 \ln(x) \end{aligned}$$

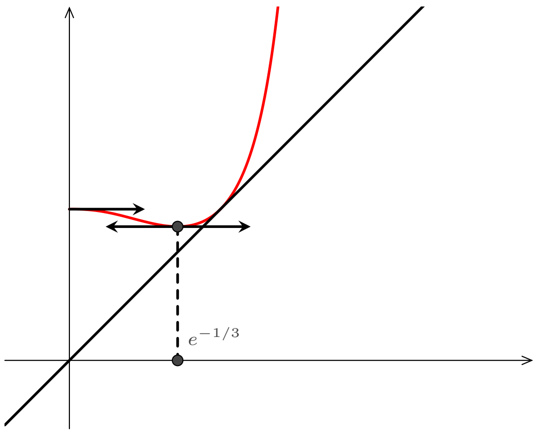
Or, par croissances comparées, $u = x^3 \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\dfrac{e^u - 1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ si bien que

$$\frac{e^{x^3 \ln(x)} - 1}{x^3 \ln(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

et puisque $x^2 \ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, le taux d'accroissement tend vers 0 : f ainsi prolongée est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$: le graphe admet une (demi)-tangente horizontale. Enfin, concernant les points fixes : 0 n'est pas un point fixe puisque $f(0) = 1$. On suppose donc $x > 0$ dans la suite.

$$\begin{aligned} x \text{ est un point fixe de } f &\iff f(x) = x \\ &\iff e^{x^3 \ln(x)} = e^{\ln(x)} \\ &\iff x^3 \ln(x) = \ln(x) \\ &\iff \ln(x) \times \left(x^3 - 1\right) = 0 \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $x = 1$ est l'unique point fixe. Ci-dessous l'allure du graphe de f (on a tracé la première bissectrice pour faire apparaître l'unique point fixe en 1).



Exercice 2 :

1 φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit, composée et quotient de fonctions dérivables. Pour dériver, on écrit φ_α comme le produit de $x \mapsto x^2 - \alpha x + 1$, de $x \mapsto 1/\sqrt{x^2+1}$ et de $x \mapsto e^{f(x)}$, cela simplifiera les choses. Comme il a été dit en classe, inutile de passer par la formule donnant la dérivée de uv, ou d'écrire une formule avec trois fonctions u, v, w : il suffit juste de se souvenir qu'on dérive chaque fonction chacune son tour. On rappelle que la dérivée de e^f est $f'e^f$ et que celle que u^a est $au'u^{a-1}$, et donc la dérivée de $1/\sqrt{u}$ est $-u'/2u^{3/2}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha'(x) &= \frac{2x-\alpha}{\sqrt{x^2+1}}e^{f(x)} - \frac{(x^2-\alpha x+1)\times 2x}{2\left(x^2+1\right)^{3/2}}e^{f(x)} + \frac{x^2-\alpha x+1}{\sqrt{x^2+1}} \times f'(x)e^{f(x)} \\ &= \frac{(2x-\alpha)\left(x^2+1\right) - x(x^2-\alpha x+1) + x^2 - \alpha x + 1}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} \times e^{f(x)}\end{aligned}$$

où on a utilisé la relation de l'énoncé : $f'(x) = 1/(1+x^2)$. On développant il vient

$$\boxed{\varphi_\alpha'(x) = \frac{(x^3+x^2+(1-\alpha)x+(1-\alpha))}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} \times e^{f(x)}}$$

2 L'exponentielle étant strictement positive, $\varphi_\alpha' = 0$ si et seulement si le numérateur est nul. Je répète les trois alternatives quand on doit trouver les racines d'un polynôme de degré 3 :

- Il y a une racine évidente.
- L'énoncé donne une indication.
- Vous vous êtes planté.

(-1) étant racine évidente, il exite a, b, c trois réels tels que pour tout réel x,

$$x^3 + x^2 + (1-\alpha)x + (1-\alpha) = (x+1)(ax^2+bx+c)$$

En développant et en identifiant les coefficients on trouve $a = 1, b = 0$ et $c = 1-\alpha$. Dès lors, pour tout réel x,

$$\varphi_\alpha'(x) = \frac{(x+1)(x^2+(1-\alpha))}{\left(x^2+1\right)^{3/2}} \times e^{f(x)}$$

Il y a donc trois cas (ou plutôt deux cas et demi) selon le signe de $1-\alpha$:

- Premier cas : $1-\alpha > 0$, ie $\alpha < 1$. Dans ce cas, $x^2+1-\alpha > 0$ pour tout réel x donc cette quantité ne s'annule pas.
- Deuxième cas : $1-\alpha = 0$ ie $\alpha = 1$. Dans ce cas, $x^2+1-\alpha = x^2$ qui est nul si et seulement si $x = 0$.
- Troisième cas : $1-\alpha < 0$ ie $\alpha > 1$. Dans ce cas, $x^2+1-\alpha = 0$ si et seulement si $x = \pm\sqrt{\alpha-1}$.

D'où : $$\boxed{\begin{cases} \text{Si } \alpha < 1 & \varphi_\alpha'(x) = 0 \iff x = -1 \\ \text{Si } \alpha = 1 & \varphi_\alpha'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = 0 \\ \text{Si } \alpha > 1 & \varphi_\alpha'(x) = 0 \iff x = -1 \text{ ou } x = \pm\sqrt{\alpha-1} \end{cases}}$$

$\boxed{3}$ Commençons par la limite en $+\infty$. Tout d'abord, d'après l'énoncé et par continuité de l'exponentielle, $e^{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{\pi/2}$. Ensuite, pour la fraction, on fait comme d'habitude, on met en facteur le terme dominant. Soit $x > 0$ (on cherche la limite en $+\infty$ et donc $\sqrt{x^2} = x$) :

$$\frac{x^2-\alpha+1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2\left(1-\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x^2\left(1-\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= x \times \frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, le terme au numérateur et celui au dénominateur tendent vers 1 en $+\infty$. Finalement, par produit de limites,

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}$$

Calculons à présent la limite en $-\infty$. f étant impaire, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\pi/2$. Par conséquent, $e^{f(x)} \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{-\pi/2}$. Pour la fraction, on fait comme précédemment. Soit $x < 0$ (on cherche la limite en $-\infty$ et donc $\sqrt{x^2} = -x$) :

$$\frac{x^2-\alpha+1}{\sqrt{x^2+1}} = -x \times \frac{\left(1-\dfrac{\alpha}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$-x \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, le terme au numérateur et celui au dénominateur tendent vers 1 en $+\infty$. Finalement, par produit de limites,

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty}$$

Enfin $\boxed{f \text{ étant impaire, } f(0) = 0 \text{ et donc } \varphi_\alpha(0) = 1}$

$\boxed{4}$ Donnons les tableaux de signes et les tableaux de variations dans les différents cas, en utilisant la question 2. L'exponentielle et le dénominateur de φ'_α étant strictement positifs, il suffit de donner le signe du numérateur.

- Premier cas : $\alpha = 1$.

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
x^2		$+$			0	$+$	
$\varphi'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
φ_α	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi_\alpha(-1)$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

- Deuxième cas : $\alpha < 1$.

	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\varphi'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	
φ_α	$+\infty$	$\searrow$	$\varphi_\alpha(-1)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Troisième cas : $1 < \alpha < 2$. φ'_α s'annule en -1 et $\pm\sqrt{\alpha-1}$. De plus, $\alpha < 2$ donc, par stricte croissante de la racine carrée, $-1 < -\sqrt{\alpha-1}$. Pour gagner de la place, on note $\mathrm{R} = \sqrt{\alpha-1}$.

	$-\infty$		-1		$-\mathrm{R}$		R		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		$+$		
$x^2+(1-\alpha)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
$\varphi'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	$+\infty$				$\varphi_\alpha(-\mathrm{R})$				$+\infty$
φ_α		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\varphi_\alpha(-1)$				$\varphi_\alpha(\mathrm{R})$		

- Quatrième cas : $\alpha = 2$. Dans ce cas, $-\mathrm{R} = -1$.

	$-\infty$		-1		R		$+\infty$
$x+1$		$-$	0		$+$		
$x^2+(1-\alpha)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi'_\alpha(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
	$+\infty$						$+\infty$
		$\searrow$					
			$\varphi_\alpha(-1)$			$\nearrow$	
φ_α				$\searrow$			
					$\varphi_\alpha(\mathrm{R})$		

- Cinquième cas : $\alpha > 2$. C'est la même chose que dans le troisième cas, sauf que cette fois $-\mathrm{R} < -1$.

	$-\infty$		$-\mathrm{R}$		-1		R		$+\infty$
$x+1$		$-$			0		$+$		
$x^2+(1-\alpha)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$\varphi'_\alpha(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
	$+\infty$				$\varphi_\alpha(-1)$				$+\infty$
φ_α		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			$\varphi_\alpha(-\mathrm{R})$				$\varphi_\alpha(\mathrm{R})$		

5 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x) = e^{f(x)} \times \frac{x(\beta-\alpha)}{\sqrt{x^2+1}}$$

En d'autres termes, puisque $\beta > \alpha$, il en découle que $\varphi_\alpha(x) - \varphi_\beta(x) > 0$ si et seulement si $x > 0$. En conclusion :

$$\boxed{\text{Le graphe de } \varphi_\alpha \text{ est au-dessus de celui de } \varphi_\beta \text{ si } x > 0, \text{ et en-dessous si } x < 0.}$$

Exercice 3 :

1 Sous réserve d'existence, $f(x) = e^{ax\times\ln(x-a)}$. Le ln étant défini sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]\,a\,;+\infty\,[.}$$

2 f est dérivable en tant que composée de fonction dérivables. Rappelons que la dérivée de e^u est $u' \times e^u$ et que celle de $\ln(u)$ est u'/u. Dès lors, pour tout $x > a$

$$\boxed{f'(x) = \left(a \times \ln(x-a) + \frac{ax}{x-a}\right) e^{ax\times\ln(x-a)}}$$

3 La fonction u est dérivable sur D_f en tant que somme et quotient de fonctions dérivables, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x > a$

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{a}{x-a} + \frac{a}{x-a} - \frac{ax}{(x-a)^2} \\ &= \frac{2a}{x-a} - \frac{ax}{(x-a)^2} \\ &= \frac{ax-2a^2}{(x-a)^2} \\ u'(x) &= \frac{a(x-2a)}{(x-a)^2} \end{aligned}$$

> Disons le tout de suite (sinon je vais oublier) : la fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est du même signe que la fonction u. Ainsi, pour donner le tableau de variations de la fonction f, il suffit de donner le tableau de signes de la fonction u. C'est pour cela qu'on étudie la fonction u dans tout ce qui suit.

- Premier cas : $a > 0$. Alors $a(x-2a)$ est du signe de $x-2a$, c'est-à-dire que u' est du signe de $(x-2a)$. D'où le tableau suivant :

	a		$2a$		$+\infty$
$u'(x)$	$\|$	$-$	0	$+$	
u	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$a\,(\ln(a)+2)$	$\nearrow$	$+\infty$

  Justifions les calculs de limites.

  – Tout d'abord la limite en a^+. Réécrivons $u(x)$:

  $$u(x) = \frac{a(x-a)\ln(x-a) + ax}{(x-a)}$$

  Par croissances comparées,

  $$(x-a)\ln(x-a) \xrightarrow[x\to a^+]{} 0$$

  (en effet, $y = x-a \xrightarrow[x\to a^+]{} 0$ et $y\ln(y) \xrightarrow[y\to 0^+]{} 0$, cf cours). De plus, $ax \xrightarrow[x\to a]{} a^2$ et $(x-a) \xrightarrow[x\to a^+]{} 0^+$. Le numérateur tend donc vers $a^2 > 0$ et le dénominateur vers 0^+. La limite en a^+ en découle.

  – Pour la limite en $+\infty$, il vaut mieux utiliser l'autre expression de $u(x)$:

  $$u(x) = a\ln(x-a) + \frac{ax}{x-a}$$

  Le premier terme tend vers $+\infty$ en $+\infty$ (car $a > 0$). Le second est une forme indéterminée classique (à savoir faire en claquant des doigts, et on peut même donner le résultat directement) :

  $$\frac{ax}{x-a} = \frac{a}{1-\dfrac{a}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$$

  On en déduit la limite de u en $+\infty$.

- Deuxième cas : $a < 0$. Rappelons que puisque $a < 0$, alors $2a < a$ et donc u' ne s'annule pas sur D_f. De plus, ceci implique également que $u'(x)$ et $x-2a$ sont de signe opposé.

	a		$+\infty$
$x-2a$	$\|$	$+$	
$u'(x)$	$\|$	$-$	
u	$\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

  Les limites sont obtenues de la même façon qu'au premier cas, en n'oubliant pas que a est strictement négatif.

4.(a) D'après la question précédente, u atteint son minimum en $2a$ et ce minimum vaut $a(\ln(a)+2)$. u est par conséquent positive sur D_f si et seulement si ce minimum est positif, si et seulement si $\ln(a)+2 \geqslant 0$ (puisque $a>0$), si et seulement si $\ln(a) \geqslant -2$, c'est-à-dire, puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{u \text{ est positive sur } \mathrm{D}_f \text{ si et seulement si } a \geqslant e^{-2}.}$$

| Il était inutile d'appliquer le TVI dans cette question.

4.(b) Si $a > e^{-2}$, u est strictement positive sur D_f. Puisque f' et u sont de même signe, il en découle que f est strictement croissante sur D_f. D'où :

	a		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$

C'est la même chose dans le cas où $a = e^{-2}$:

	a		$2a$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$f(2a)$	$\nearrow$	$+\infty$

| Je ne fais pas le calcul de limites ici, il ne pose pas de difficultés puisqu'il n'y a même pas de forme indéterminée

4.(c) La fonction f étant continue et strictement monotone sur $]\,a\,;2a\,]$, avec

$$u(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty \qquad \text{et} \qquad u(2a) = a(\ln(a)+2) < 0$$

alors, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, ou le théorème de la bijection, il existe un unique $\beta \in\,]\,a\,;2a\,]$ tel que $u(\beta)=0$. De la même façon, il existe un unique $\gamma \in\,]\,2a\,;+\infty\,[$ tel que $u(\gamma)=0$. En particulier, $\beta < 2a < \gamma$ ce qui donne le résultat voulu :

$$\boxed{\text{L'équation } u(x)=0 \text{ admet deux uniques solutions } \beta<\gamma.}$$

On en déduit le tableau de signes de u et le tableau de variations de f.

	a		β		γ		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	$f(\gamma)$	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites sont évidemment les mêmes qu'à la question précédente, il est donc inutile et chronophage de les recalculer.

5.(a) De même qu'à la question précédente,

$$\boxed{\text{L'équation } u(x)=0 \text{ admet une unique solution } \delta\in \mathrm{D}_f.}$$

5.(b) Le tableau de variations de f en découle :

x	a		δ		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	$\nearrow$	$f(\delta)$	$\searrow$	0

> Là-aussi, les limites sont laissées en exercice puisque ce ne sont pas des formes indéterminées. Attention, il ne faut pas oublier que a est strictement négatif.

6.(a) D'après les questions précédentes, dans tous les cas, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ par continuité en } a \text{ en posant } f(0) = 0.}$$

Soit $x > a$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{f(x)}{x-a}\\ &= \frac{e^{ax\times\ln(x-a)}}{e^{\ln(x-a)}}\\ &= e^{ax\times\ln(x-a)-\ln(x-a)}\\ &= e^{\ln(x-a)\times(ax-1)}\end{aligned}$$

Calculons la limite de ce qu'il y a dans l'exponentielle, il suffira ensuite d'appliquer le théorème de composition des limites. Tout d'abord

$$\ln(x-a) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty \qquad \text{et} \qquad ax-1 \xrightarrow[x\to a^+]{} a^2-1$$

Tout dépend de la valeur de a^2-1.

- Si $|a|>1$, alors $a^2-1>0$ et $\ln(x-a)\times(ax-1) \xrightarrow[x\to a^+]{} -\infty$.
- Si $|a|<1$, alors $a^2-1<0$ et $\ln(x-a)\times(ax-1) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty$.
- Si $a=1$ alors $\ln(x-a)\times(ax-1) = \ln(x-1)\times(x-1) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$ (par croissances comparées).
- Si $a=-1$ alors on a de même

$$\ln(x-a)\times(ax-1) = \ln(x+1)\times(-x-1) = -\ln(x+1)\times(x+1) \xrightarrow[x\to -1^+]{} 0$$

Dès lors, par composition de limites :

$$\begin{cases}\text{Si } |a|>1 & g(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} 0\\ \text{Si } |a|<1 & g(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} +\infty\\ \text{Si } |a|=1 & g(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} 1\end{cases}$$

En particulier :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } a \text{ si et seulement si } |a|\geqslant 1, \text{ et alors } f'(a)=0 \text{ si } |a|>1, \text{ tandis que } f'(a)=1 \text{ si } |a|=1.}$$