Programme de colle - Semaine n°29

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 30 - Espaces vectoriels de dimension finie

- cf. semaines 26, 27 et 28.

Chapitre 31 - Représentation matricielle des applications linéaires (Matrix Reloaded pour les intimes)

- cf. semaine 28.
- On ne change pas le rang en multipliant par une matrice inversible, les opérations élémentaires ne changent pas le rang.
- Le rang d'une matrice échelonnée, i.e. de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{2,2} & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & a_{r,r} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

  avec les $a_{i,i}$ tous non nuls, est égal au nombre de lignes non nulles de la matrice. En pratique, on se ramène à une matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires.
- Rang d'une famille de vecteurs, propriétés (en particulier : le rang d'une famille de vecteurs est le cardinal de la plus grande famille libre qu'on peut en extraire), calcul pratique (le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes). Le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée (résultat admis provisoirement). En particulier, le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes. Rang et matrices extraites. Bilan.
- Matrice de passage, exemples.
- Inversibilité et inverse d'une matrice de passage. Formule de changement de base pour un vecteur, pour la matrice d'une AL, pour la matrice d'un endomorphisme.
- Matrice J_r (matrice de taille $n \times p$ dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres coefficients sont nuls). Toute application linéaire de rang r est représentée (dans des bases bien choisies) par J_r.
- Matrices équivalentes (c'est une relation d'équivalence), deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même AL dans des couples de bases différents, deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang, une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.
- Matrices semblables (c'est une relation d'équivalence), deux matrices semblables ont le même rang (réciproque fausse), si A et B sont semblables alors, pour tout k, A^k et B^k sont semblables (mais attention, on peut avoir A^2 et B^2 semblables sans que A et B le soient). Deux matrices sont semblables lorsqu'elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.
- Trace d'une matrice, linéarité, $\text{tr}\,(AB) = \text{tr}\,(BA)$, invariance de la trace par permutation circulaire (attention, on n'a pas en général $\text{tr}\,(ABC) = \text{tr}\,(ACB)$). Activité : donner une base du noyau de la trace.
- Deux matrices semblables ont la même trace (réciproque fausse). Trace d'un endomorphisme, linéarité, $\text{tr}\,(u \circ v) = \text{tr}\,(v \circ u)$. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

- Exemples de matrices semblables ou non.

Chapitres au programme

Chapitre 30 (exercices uniquement, sur tout le chapitre), chapitre 31 (cours, exercices sur tout le chapitre sauf sur la trace et les matrices semblables et équivalentes).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. L'examinateur donne une AL et des bases explicites (pas trop moches, mais cela peut être en dimension n) et demande la matrice associée.
2. Donner (avec démonstration) une base du noyau et de l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
3. CNS d'inversibilité de la matrice de Vandermonde (démonstration).
4. L'examinateur donne une matrice 3×3 ou 4×4 explicite simple (i.e. sans paramètre) et en demande le rang.
5. L'examinateur donne un certain nombre de vecteurs explicites en dimension 3 ou 4 (sans paramètre) et en demande le rang.
6. Formule de changement de base pour des vecteurs, pour des AL, pour des endomorphismes (sans démonstration).
7. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).
8. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).
9. Les matrices
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
sont semblables (démonstration).

Groupes B - C :

1. Si p est un projecteur (en dimension finie évidemment), il existe une base dans laquelle la matrice de P est diagonale avec des 0 ou des 1 sur la diagonale (démonstration).
2. Prouver que la matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ de terme général $\displaystyle\binom{j-1}{i-1}$ est inversible et donner son inverse.
3. Critère d'Hadamard pour les matrices à diagonale strictement dominante (démonstration).
4. Donner une base du noyau de la trace (démonstration).

Groupe C :

1. Si E est de dimension 3 et $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent, donner la matrice de u sous la forme la plus simple possible (démonstration).
2. Soit $k \in [\![2\,;\, n]\!]$. Donner une matrice carrée de taille n nilpotente d'indice de nilpotence k (démonstration).

3. Inversibilité des matrices triangulaires supérieures (démonstration : il n'est pas demandé de prouver que l'inverse est aussi triangulaire supérieure).
4. Si u est une AL de rang r, alors il existe deux bases dans lesquelles la matrice de u est J_r (démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Groupe symétrique.
- Déterminant.

Exercices à préparer

Exercices 35, 36, 38, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 54 du chapitre 31.

Cahier de calcul

Chapitre 27.