Chapitre 8

Systèmes linéaires et pivot de Gauß.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une méthode de résolution des systèmes linéaires appelée méthode du pivot de Gauß. Cette méthode est algorithmique et aboutit à tous les coups. Elle doit être employée **systématiquement** pour résoudre un système linéaire.

Les substitutions, c'est fini !

I Généralités.

Définition. Soient n et p des entiers strictement positifs. Un système linéaire de n équations à p inconnues est la donnée d'un système

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{cases}$$

où, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$, $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ et $b_i \in \mathbb{C}$

- $x_1, \dots, x_p$ sont appelées les inconnues de (S).
- Les scalaires $a_{i,j}$, $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$ sont appelés les coefficients de (S).
- Le n-uplet $(b_1, \dots, b_n)$ est appelé le second membre de (S).
- Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note L_i la $i^{\text{ème}}$ ligne du système (S), c'est-à-dire
$$a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i,$$
et on l'appelle $i^{\text{ème}}$ équation du système.
- Si $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$ alors le système (S) est dit homogène.
- Le système homogène associé à (S) est le système obtenu en remplaçant $(b_1, \dots, b_n)$ par $(0, \dots, 0)$. On le note (S_0).
- Un p-uplet $(s_1, \dots, s_p)$ est dit solution de (S) si les n égalités obtenues en remplaçant $(x_1, \dots, x_p)$ par $(s_1, \dots, s_p)$ sont vérifiées.
- Deux systèmes sont dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.
- Le système est dit compatible s'il existe au moins une solution.
- Le système est dit impossible ou incompatible s'il n'admet aucune solution.

On dit parfois un système (n,p).

On pourra généraliser à un corps quelconque dans le chapitre 18.

Un système homogène à p inconnues admet au moins une solution : le p-uplet $(0, \dots 0)$.

Exemple : Les deux systèmes ci-dessous sont équivalents.

$$\begin{cases} x & & & = & 0 & (L_1) \\ x & + & y & = & 1 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x & & & = & 0 & (L_1) \\ & & y & = & 1 & (L_2 - L_1) \end{cases}$$

Prenez l'habitude de tout mettre sous forme de tableau, cela vous facilitera la vie.

On est passé d'un système $(2,2)$ de lignes L_1 et L_2 à un système $(2,2)$ de lignes L_1 et $L_2{}' = L_2 - L_1$. On préférera noter $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, ce qui signifie : « ce qu'on appelle dorénavant L_2 c'est ce qui désignait avant $L_2 - L_1$. » Après cinq opérations de ce type, on parlera donc toujours de L_8 au lieu de $L_8{}'''''$. On s'autorisera trois types d'opérations.

Définition. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes du système (S). On appelle opération élémentaire sur les lignes de (S) l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange des lignes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La multiplication de la ligne $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- L'ajout à la ligne $i \in [\![1\,;\, n]\!]$ de la ligne $j \in [\![1\,;\, n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Prendre $i \neq j$ dans la première opération ou n'est pas indispensable, c'est juste que prendre $i = j$ a un intérêt limité... Cependant, il faut impérativement prendre λ non nul dans la deuxième !

Théorème (admis provisoirement). Si on passe d'un système à un autre par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, alors ces deux systèmes sont équivalents.

On définit de même des opérations élémentaires sur les colonnes (et on le fera quand on parlera du rang d'une matrice), mais on ne le fait pas pour l'instant car nous utiliserons beaucoup l'algorithme du pivot de Gauß pour inverser une matrice, et on ne peut pas mélanger les opérations sur les lignes et sur les colonnes. Bref, on en reparle.

Proposition. Soit (S) un système.

- Si (S) contient une ligne toujours vraie (par exemple $0 = 0$ ou $x = x$), alors (S) est équivalent au système (S) auquel on a retiré cette ligne.
- Si (S) contient une ligne toujours fausse (du type $1 = 0$ ou $x + 1 = x$), alors (S) n'admet aucune solution.

Démonstration. Découle du fait que si A et B sont des assertions et si A est toujours vraie, alors (A et B) est vraie si et seulement si B est vraie, tandis que si A est fausse, alors (A et B) est toujours fausse.

Remarque : Dans le premier cas, on pourra « supprimer » les lignes superflues. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \quad \iff x + y = 0$$

II Algorithme du pivot de Gauß.

La première étape consiste à mettre sous forme triangulaire, et personnellement je préfère quand les coefficients diagonaux sont égaux à 1 (ce qui crée des fractions mais on risque moins de s'embrouiller dans les calculs). Plus précisément :

- On s'arrange pour le coefficient devant x_1 soit égal à 1, en général en divisant par le coefficient devant x_1, donc en effectuant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1/a_{1,1}$ si $a_{1,1}$ est non nul. Si $a_{1,1} = 0$, on échange avec une autre ligne.
- On « supprime » tous les x_1 des lignes inférieures, en faisant (pour $i \geqslant 2$), $L_i \leftarrow L_i - a_{i,1}L_1$.
- On s'arrange pour avoir, en deuxième ligne, un coefficient égal à 1 devant x_2, en divisant, sinon en échangeant avec une ligne **inférieure** : ne jamais toucher aux lignes supérieures lors de la mise sous forme triangulaire !
- On supprime tous les x_2 des lignes inférieures à la deuxième.
- etc.

Si tous les coefficients devant x_1 sont nuls, donc si x_1 n'apparaît pas dans le système, on commence avec x_2, et x_1 est alors quelconque : voir un exemple ci-dessous. Mais c'est plutôt rare.

Plusieurs cas peuvent alors se produire.

II.1 Cas où tout se passe bien.

Quand on a de la chance (ce qui arrive tout de même assez souvent), on arrive à un système de la forme suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & c_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & c_{1,i}x_i & + & \cdots & + & c_{1,n}x_n & = & d_1 \\ & & x_2 & + & \cdots & + & c_{2,i}x_i & + & \cdots & + & c_{2,n}x_n & = & d_2 \\ & & & & \ddots & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & & x_i & + & \cdots & + & c_{i,n}x_n & = & d_i \\ & & & & & & & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & & & & & & & & x_n & = & d_n \end{array}\right.$$

Nous verrons ci-dessous que ce genre de système « diagonal » a une unique solution. Nous pourrions en faire une proposition, mais l'objectif de ce chapitre est de savoir résoudre des systèmes explicites, et nous aurons au chapitre 21 des outils nous permettant d'approfondir les résultats théoriques.

Il ne reste alors plus qu'à remonter : on supprime tous les x_n de la dernière colonne (sauf la dernière ligne), puis on supprime tous les x_{n-1} de l'avant-dernière colonne (sauf l'avant dernière ligne) etc. et on arrive finalement à :

$$\begin{cases} x_1 & & & & & = e_1 \\ & x_2 & & & & = e_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & x_i & & = e_i \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & x_n = e_n \end{cases}$$

c'est-à-dire que le système a une unique solution : $(e_1, \dots, e_n)$.

Une condition nécessaire pour que cela arrive est donc que $n = p$, mais nous verrons plus loin que ce n'est pas forcément suffisant.

Exemple : Résolvons le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} y - z + t = 1 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 \\ x + y - 3t = -2 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

Appliquons pour cela la méthode précédente.

On commence par remarquer qu'il n'y a pas de x à la première ligne. On commence par échanger avec une autre ligne.

$$(S) \iff \begin{cases} x + y - z = 2 & L_1 \leftrightarrow L_4 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 \\ x + y - 3t = -2 \\ y - z + t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ -y + 4z - 9t = -5 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ z - 3t = -4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ y - z + t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y - 4z + 9t = 5 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ z - 3t = -4 \\ y - z + t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y - 4z + 9t = 5 \\ z - 3t = -4 \\ 3z - 8t = -4 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y - 4z + 9t = 5 \\ z - 3t = -4 \\ t = 8 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y - z = 2 \\ y - 4z = -67 & L_2 \leftarrow L_2 - 9L_4 \\ z = 20 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = 22 & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ y = 13 & L_2 \leftarrow L_2 + 4L_3 \\ z = 20 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_4 \\ t = 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 9 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y = 13 \\ z = 20 \\ t = 8 \end{cases}$$

Ce système admet donc une seule solution : le quadruplet $(9, 13, 20, 8)$. On peut aussi noter $S = \{(9, 13, 20, 8)\}$ l'ensemble des solutions.

II.2 Cas où $p > n$.

Quand il y a plus d'inconnues que d'équations (nous verrons plus bas que cela peut aussi se produire même quand il y a autant d'inconnues que d'équations, voire plus d'équations que d'inconnues), on peut arriver (ce n'est pas forcément le cas, voir plus bas) à un système de la forme :

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,i}x_i + \cdots + c_{1,n}x_n + \cdots + c_{1,p}x_p = d_1 \\ \qquad x_2 + \cdots + c_{2,i}x_i + \cdots + c_{2,n}x_n + \cdots + c_{2,p}x_p = d_2 \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_i + \cdots + c_{i,n}x_n + \cdots + c_{i,p}x_p = d_i \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n + \cdots + c_{n,p}x_p = d_n \end{cases}$$

On choisit n inconnues qu'on appelle inconnues principales, les inconnues restantes sont appelées inconnues auxiliaires. Ci-dessus, on prend $x_1, \dots, x_n$ comme inconnues principales et $x_{n+1}, \dots, x_p$ comme inconnues auxiliaires. On place les inconnues auxiliaires dans le membre de droite pour se ramener à un système analogue à celui du paragraphe précédent :

$$\begin{cases} x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,i}x_i + \cdots + c_{1,n}x_n = d_1 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} c_{1,k}x_k \\ \qquad x_2 + \cdots + c_{2,i}x_i + \cdots + c_{2,n}x_n = d_2 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} c_{2,k}x_k \\ \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_i + \cdots + c_{i,n}x_n = d_i - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} c_{i,k}x_k \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad x_n = d_n - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} c_{n,k}x_k \end{cases}$$

On fait comme dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire qu'on se ramène à un système diagonal (à gauche) à l'aide de remontées successives (on supprime tous les x_n sauf le dernier etc.), pour arriver à un système du type :

$$\begin{cases} x_1 = e_1 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} f_{1,k}x_k \\ \quad x_2 = e_2 - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} f_{2,k}x_k \\ \qquad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad x_i = e_i - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} f_{i,k}x_k \\ \qquad\quad \ddots \qquad \vdots \\ \qquad\qquad x_n = e_n - \displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} f_{n,k}x_k \end{cases}$$

Pour chaque choix des inconnues auxiliaires, il y a une unique solution pour les inconnues principales. Bref, l'ensemble des solutions est un ensemble dont les éléments dépendent d'un ou de plusieurs paramètres.

Il y a donc une infinité de solution quand on se place sur $\mathbb{R}$, sur $\mathbb{C}$ ou, plus généralement, sur un corps infini, mais le pivot de Gauß est encore valable sur un corps fini (cf. chapitre 18). Prudence dans ce cas (rare).

Exemple :

$$(S) \quad \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y + 3z + 4t = 2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ - y + z + 2t = 0 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y - z - 2t = 0 \qquad L_2 \leftarrow -L_2 \end{cases}$$

On choisit z et t comme inconnues auxiliaires (mais on pourrait prendre y et z par exemple, ou x et y, voir ci-dessous) :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 - z - t \\ y = z + 2t \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z - 3t \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y = z + 2t \end{cases}$$

Finalement, pour chaque choix de z et t, on a un quadruplet solution. Par exemple, pour $z = 0$ et $t = 1$, on a le quadruplet $(-2, 2, 0, 1)$. Plus généralement, l'ensemble des solutions est $S = \{(1 - 2z - 3t, z + 2t, z, t) \mid (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

Les éléments de S dépendent donc de deux paramètres.

Remarque : Comme dit ci-dessus, nous avons choisi les inconnues auxiliaires de façon totalement arbitraire. Nous aurions pu choisir y et z (par exemple) :

$$(S) \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x + t = 1 - y - z \\ t = y/2 - z/2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 3y/2 - z/2 \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ t = y/2 - z/2 \end{cases}$$

et on trouve $S = \{(1 - 3y/2 - z/2, y, z, y/2 - z/2) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$. Même si cela ne saute pas aux yeux, c'est le même ensemble des solutions. Par exemple, il suffit de prendre $y = 2$ et $z = 0$ pour retrouver le quadruplet $(-2, 2, 0, 1)$.

II.3 Cas général.

Dans le cas général (qui peut se produire si $n = p$, $n > p$ ou même $n < p$), en appliquant la méthode du pivot de Gauß, quitte à changer l'ordre des inconnues, on arrive à un système de la forme :

$$\begin{cases}
x_1 + c_{1,2}x_2 + \cdots + c_{1,i}x_i + \cdots + c_{1,r}x_r + \cdots + c_{1,p}x_p = d_1 \\
 x_2 + \cdots + c_{2,i}x_i + \cdots + c_{2,r}x_r + \cdots + c_{2,p}x_p = d_2 \\
\quad \ddots \qquad \vdots \\
\qquad x_i + \cdots + c_{i,r}x_r + \cdots + c_{i,p}x_p = d_i \\
\qquad \ddots \qquad \vdots \\
\qquad\qquad x_r + \cdots + c_{r,p}x_p = d_r \\
\qquad\qquad 0 = d_{r+1} \\
\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad 0 = d_n
\end{cases}$$

avec $1 \leqslant r \leqslant \min(n, p)$.

Si $r < n$, alors les équations $d_{r+1} = 0, \ldots, d_n = 0$ sont appelées conditions de compatibilité du système. Le système admet des solutions si et seulement si elles sont vraies. Plus précisément :

- Si l'une d'entre elles est fausse, alors le système est incompatible : il n'a pas de solution.
- Si $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, alors les conditions de compatibilité du système sont vraies et on peut les omettre. On se retrouve alors dans l'un des deux cas précédents.

Cela se démontre assez facilement : au commencement, on prend une inconnue qui a un coefficient non nul, on l'appelle x_1, on la place en haut à gauche, on divise pour avoir un coefficient égal à 1 et on supprime tous les x_1 en dessous. S'il n'y a plus d'autres inconnues dans les lignes inférieures, on s'arrête. Sinon, on en prend une autre avec un coefficient non nul, on l'appelle x_2, on la met en position $2-2$, on divise pour avoir un coefficient égal à 1 et on supprime tous les x_2 en dessous, et on itère le procédé : s'il n'y a plus d'autres inconnues dans les lignes inférieures, on arrête, sinon on en prend une autre qu'on appelle x_3 etc. On s'arrête quand il ne reste plus d'inconnue dans les lignes inférieures, donc quand les équations des lignes inférieures ne contiennent plus que des constantes, et on finit par s'arrêter car il y a un nombre fini d'équations et d'inconnues.

Exemples :

- **Exemple 1 :** Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & & & + & 4z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & + & z & = & -2 \\ & - & 3y & + & z & = & -2 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & = & 1 & - & z \\ & - & 3y & = & -2 & - & z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & = & 1 & - & z \\ & & y & = & 2/3 & + & z/3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & 1/3 & - & 4z/3 \\ y & = & 2/3 & + & z/3 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_2 \leftarrow -L_2/3 \end{array}$$

L'ensemble des solutions du système est :

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{3}\big(1-4z\big), \frac{1}{3}\big(2+z\big), z \right) \,\middle|\, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

- **Exemple 2 :** Considérons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & & & + & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & + & z & = & -2 \\ & - & 3y & + & z & = & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1 \\ & - & 3y & + & z & = & -2 \\ & & & & 0 & = & 1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Par conséquent, le système n'a pas de solution.

On peut très bien se rendre compte dès la deuxième équivalence qu'il n'y a pas de solution : les deux dernières sont incompatibles, elles ne peuvent pas être vraies en même temps donc il n'existe pas de triplet (x, y, z) vérifiant les deux conditions simultanément, donc il n'y a pas de solution.

Remarque : Attention, ce n'est pas parce qu'il y a plus d'inconnues que d'équations que d'équations qu'on a une infinité de solutions ! Le cas de figure ci-dessus peut très bien se produire quand $p > n$.

Exemple :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ 2x + y + 3z + 4t = 2 \\ 2x + y + 3z + 4t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 & \\ - y + z + 2t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ - y + z + 2t = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z + t = 1 & \\ - y + z + 2t = 0 & \\ 0 = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

et donc ce système n'a pas de solution. On le voyait directement car les deux dernières lignes sont incompatibles, mais je voulais mettre un exemple montrant qu'avec plus d'inconnues que d'équations, il n'y a pas forcément une infinité de solution.

Un dernier pour la route : Comme dit plus haut, dans le cas (rare) où une inconnue n'apparaît pas, alors on commence le pivot de Gauß avec la deuxième inconnue. La première inconnue sera un paramètre indépendant quand on écrira l'ensemble des solutions.

Exemple : Donner l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions du système

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + z = 1 & \\ 2z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + z = 1 & \\ z = -1/2 & L_2 \leftarrow L_2/2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = 3/2 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ z = -1/2 & \end{cases}$$

Finalement, l'ensemble des solutions est $S = \{(x, 3/2, -1/2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$.

Remarque : Pourquoi parler de triplet alors qu'il n'y a que deux inconnues dans le système ? Parce que ce genre de problème peut apparaître dans différents domaines, dans lequel il y a une coordonnée x, même si elle n'apparaît pas dans le système. En effet, certains systèmes peuvent avoir des conséquences géométriques simple : donner les éventuels points d'intersection de droites du plan revient par exemple à résoudre un système à deux inconnues. Par exemple, la résolution du système (d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$)

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x - y = 3 \\ 5x + y = -1 \end{cases}$$

revient à trouver les points d'intersections des droites d'équation $y = -x/2 + 1/2$, $y = 3x - 3$ et $y = -5x - 1$, et ce système n'a pas de solution (exo), donc ces trois droites ne sont pas concourantes. De même, des systèmes à trois inconnues (comme dans l'exemple ci-dessus) peuvent être utilisés pour donner les éventuelles intersections de plans (les plans d'équations $y + z = 0$ et $y + 3z = 0$ dans notre exemple : ce sont bien des équations de plan, même si x n'apparaît pas). Dans ce cas de figure, même si la coordonnée x n'apparaît pas, les points de l'espace ont une abscisse, et ce serait une erreur grave de l'oublier quand on donne les solutions !

Mais si on n'a que deux inconnues, comment savoir si on est dans l'espace ou dans le plan ou dans $\mathbb{R}^4$ ou ... ? Comment savoir si on ne laisse pas une coordonnée de côté si elle n'apparaît pas ? Et bien cela dépend du problème : si on demande une intersection de plans, il y aura trois coordonnées, même s'il n'y a que deux inconnues. Pour faire simple : l'énoncé fera en sorte qu'il n'y ait aucune ambiguïté. Dans l'exemple ci-dessus, il n'y a que deux inconnues mais l'énoncé précise bien qu'on cherche des triplets de solutions (donc avec trois coordonnées).