Correction du DS n°7

Sujet groupe A

$\boxed{2}$ cf. sujet B.

$\boxed{3}$ La suite $\left(1/\sqrt{n-1}\right)_{n\geqslant 2}$ (définie à partir du rang 2, donc) est décroissante vers 0 donc, d'après le critère des séries alternées, la série $\sum(-1)^n/\sqrt{n-1}$ converge, sa somme est du signe du premier terme, c'est-à-dire pour $n = 2$, donc la somme est positive, et elle est majorée par la valeur absolue du premier terme, c'est-à-dire par 1.

$$\boxed{\text{La série converge, sa somme est positive et majorée par 1.}}$$

$\boxed{4}$ cf. sujet B.

$\boxed{5}$ cf. sujet B.

$\boxed{6}$ cf. sujet B.

$\boxed{7}$ On peut modéliser cette expérience aléatoire en prenant

$$\boxed{\Omega = [\![1\,;\,6]\!]^n,\ \text{muni de } \mathscr{P}(\Omega) \text{ et de l'équiprobabilité.}}$$

$\boxed{8}$ Notons A : « la boîte est abîmée » et D : « la boîte contient au moins une clé défectueuse ». D'après l'énoncé, $\mathrm{P(A)} = 5/100$, $\mathrm{P_A(D)} = 60/100$ et $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\overline{\mathrm{D}}) = 98/100$. On cherche $\mathrm{P_D(A)}$. D'après la formule de Bayes,

$$\mathrm{P_D(A)} = \frac{\mathrm{P_A(D)} \times \mathrm{P(A)}}{\mathrm{P(D)}}$$

Il manque P(D). Les événements A et $\overline{\mathrm{A}}$ formant un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathrm{P(D)} &= \mathrm{P_A(D)P(A)} + \mathrm{P}_{\overline{\mathrm{A}}}(\mathrm{D})\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) \\ &= \frac{60}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{2}{100} \times \frac{95}{100} \\ &= \frac{490}{10000}\end{aligned}$$

En conclusion
$$\boxed{\mathrm{P_D(A)} = \frac{\dfrac{60}{100} \times \dfrac{5}{100}}{\dfrac{490}{10000}} = \frac{300}{490} = \frac{30}{49}}$$

$\boxed{9}$ Si $i \geqslant 1$, notons B_i l'événement : « au i-ième tirage, on coche une case ». L'événement $[\mathrm{Z}_n = n]$ peut s'écrire

$$[\mathrm{Z}_n = n] = \mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_n$$

D'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = n) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1}(\mathrm{B}_2)\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1\cap\mathrm{B}_2}(\mathrm{B}_3)\ldots\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1\cap\cdots\cap\mathrm{B}_{n-1}}(\mathrm{B}_n)$$

Soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, et supposons $\mathrm{B}_1 \cap \cdots \cap \mathrm{B}_{k-1}$ réalisé, c'est-à-dire que lors des $k-1$ premiers tirages, on a coché $k-1$ cases, alors on coche une case au k-ième tirage si l'on tire une des cases avec l'un des $r-(k-1)$ numéros restants : un numéro parmi les r numéros du carton, auxquels on a enlevé ceux déjà cochés. En d'autres termes

$$\mathrm{P}_{\mathrm{B}_1\cap\cdots\cap\mathrm{B}_{k-1}}(\mathrm{B}_k) = \frac{r-(k-1)}{10}$$

Ainsi
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = n) &= \frac{r}{10} \times \frac{r-1}{10} \times \cdots \times \frac{r-(n-1)}{10} \\ &= \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{10^n} \times \frac{(r-n)\times(r-n-1)\times\cdots\times 1}{(r-n)\times(r-n-1)\times\cdots\times 1}\end{aligned}$$

D'où $$\boxed{\mathrm{P}(\mathrm{Z}_n = n) = \frac{r!}{10^n(r-n)!}}$$

11 On peut tirer une boule blanche aux tirages $1, 2, 3$ (dans le pire des cas, on épuise les deux boules noires avant de tirer une boule blanche), c'est-à-dire que $\mathrm{X}(\Omega) = [\![1 \,;\, 3]\!]$. Notons B_1 : tirer une boule blanche au premier tirage, etc. On a $\mathrm{P}(\mathrm{X}=1) = \mathrm{P}(\mathrm{B}_1) = 6/8 = 3/4$. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{X}=2) &= \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{B}_2) \\
&= \mathrm{P}(\mathrm{N}_1) \times \mathrm{P}_{\mathrm{N}_1}(\mathrm{B}_2) && \text{Probas composées} \\
&= \frac{2}{8} \times \frac{6}{7} && \text{Même raisonnement qu'avant} \\
&= \frac{3}{14}
\end{aligned}$$

Enfin, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) = 1/28$ (ce qu'on aurait aussi pu trouver en écrivant $\mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \mathrm{P}(\mathrm{N}_1 \cap \mathrm{N}_2 \cap \mathrm{B}_3)$ et en appliquant la formule des probas composées). Dès lors :

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 1 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + 2 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + 3 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) = \frac{36}{28} = \frac{9}{7}}$$

D'après la formule de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) &= 1^2 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=1) + 2^2 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=2) + 3^2 \times \mathrm{P}(\mathrm{X}=3) \\
&= \frac{3}{4} + 4 \times \frac{3}{14} + 9 \times \frac{1}{28} \\
&= \frac{54}{28} \\
&= \frac{27}{14}
\end{aligned}$$

D'après la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 \\
&= \frac{27}{14} - \frac{81}{49}
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X}) = \frac{27}{98}}$$

12 On sait que

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X}=k) = \sum_{k=1}^{n} zk = z \times \frac{n(n+1)}{2} = 1$$

donc on doit avoir $z = 2/n(n+1)$. En appliquant la formule des probabilités totales, avec le SCE associé à Y c'est-à-dire $([\mathrm{Y}=k])_{k \in [\![1 \,;\, n]\!]}$, il vient :

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k=1}^{n} P_{Y=k}(X = Y)P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_{Y=k}(X = k)P(Y = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k) && \text{X et Y indépendantes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} z^2 k^2 \\
&= \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{z = \frac{2}{n(n+1)} \qquad \text{et} \qquad P(X = Y) = \frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}}$$

13 D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{2n} P(X = k) \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

D'après le binôme de Newton $$\boxed{E(Y) = \frac{(Ap + 1 - p)^n}{2n}}$$

14 R compte le nombre de succès (obtenir une boule rouge, proba r/N) obtenus lors de n répétitions indépendantes (car il y a remise) d'une expérience aléatoire (tirer une boule). Par conséquent :

$$\boxed{R \sim B(n, r/N) \text{ et donc } E(R) = nr/N \text{ et } V(R) = n \times r/N \times (1 - r/N).}$$

15 On a $(X_1, X_2)(\Omega) = \{0; 1\}^2$. Tout d'abord, $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_1 = 1) \times P_{X_1=1}(X_2 = 0)$. Or, $P(X_1 = 1) = 1/4$ et, si on suppose $[X_1 = 1]$ réalisé, alors on a tiré une boule blanche au premier lancer, et donc il ne reste que des boules noires dans l'urne, donc $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = 1$, si bien que $P(X_1 = 1, X_2 = 0) = 1/4$. De même, $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0$. De plus, $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = P(X_1 = 0)P_{X_1=0}(X_2 = 1)$. Or, $P(X_1 = 0) = 3/4$ et, si on suppose $[X_1 = 0]$ réalisé, alors on a tiré une boule noire au premier tirage, donc l'urne contient ensuite deux boules noires et une boule blanche, donc $P_{X_1=0}(X_2 = 1) = 1/3$ si bien que $P(X_1 = 0, X_2 = 1) = 3/4 \times 1/3 = 1/4$. De même, $P(X_1 = 0, X_2 = 0) = 3/4 \times 2/3 = 1/2$.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

16 cf. exercice 52 du chapitre 27.

17 Non car $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = 0 \neq P(X_1 = 1)P(X_1 = 1)$.

$$\boxed{X_1 \text{ et } X_2 \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

18 cf. cours (chapitre 27, page 36).

19 cf. exercice 68 du chapitre 27.

20 Notons S_n le nombre de Piles lors de ces n lancers. Comme précédemment, $S_n \sim B(n, 1/2)$ (1/2 car la pièce est équilibrée). On cherche n tel que :

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant \frac{95}{100}$$

Notons p la probabilité de gauche. Alors $p = \mathrm{P}(|\mathrm{S}_n - n/2| < n/100) = 1 - \mathrm{P}(|\mathrm{S}_n - n/2| \geqslant n/100)$. Or, $\mathrm{E}(\mathrm{S}_n) = n/2$ donc

$$\mathrm{P}(|\mathrm{S}_n - n/2| \geqslant n/100) = \mathrm{P}(|\mathrm{S}_n - \mathrm{E}(\mathrm{S}_n)| \geqslant n/100) \leqslant \frac{10000\mathrm{V}(\mathrm{S}_n)}{n^2}$$

d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Or, $\mathrm{V}(\mathrm{S}_n) = n/4$. Dès lors, il suffit (ce n'est pas équivalent puisque la valeur ci-dessous n'est pas égale à p) de prendre n tel que :

$$\frac{95}{100} \leqslant 1 - \frac{n10000}{4n^2} \iff \frac{2500}{n} \leqslant \frac{5}{100} \iff n \geqslant 50000$$

$$\boxed{\text{Il suffit de prendre } n \geqslant 50000.}$$

Sujet groupe B

2 Montrons que f_1 est linéaire. Soient $x_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2, \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)$$

si bien que

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= (3(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2), \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 - 2(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2), \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \\ &= \lambda_1 (3c_1, a_1 - 2b_1, a_1) + \lambda_2 (3c_2, a_2 - 2b_2, a_2) \\ &= \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{f_1 \text{ est linéaire.}}$$

On a $f_2(0,0,0) = (0,-1,0) \neq (0,0,0)$ et $f_3(1,1,1) = (1,0,0)$ et $f_3(2,2,2) = (4,0,0) \neq 2f_3(1,1,1)$ donc

$$\boxed{f_2 \text{ et } f_3 \text{ ne sont pas linéaires.}}$$

3 Si $n \geqslant 1$, notons $u_n = n^{1/n} - 1$. Alors, étant donné le fait que $\ln(n)/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$:

$$u_n = e^{\frac{\ln(n)}{n}} - 1 = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) - 1 \sim \frac{\ln(n)}{n}$$

Attention, les séries de Bertrand ne sont pas au programme (sans compter le fait qu'ici, on a le cas $\alpha = 1$ donc la méthode habituelle ne marche pas). Il suffit donc de voir que $u_n \geqslant 1/n$ pour n assez grand. Or, la série $\sum 1/n$ diverge donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge. De plus, si on pose $v_n = n^{2024}/2^n$, alors $n^2 v_n = n^{2026}/2^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $v_n = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$. Or, la série $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$) donc, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge.

$$\boxed{\text{La série } \sum \left(n^{1/n} - 1\right) \text{ diverge et la série } \sum \frac{n^{2024}}{2^n} \text{ converge.}}$$

4 Notons u_n le terme général. On peut montrer comme d'habitude que $u_n \sim 1/n^2$ donc la série converge, mais puisqu'on nous demande de calculer la somme, on va faire d'une pierre deux coups. Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{S_N} &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\ &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+3)} && \text{Décomposition en éléments simples} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\mathrm{N}+3} \frac{1}{j} && k = n+1, j = n+3 \\ &= \left(\sum_{k=3}^{\mathrm{N}+1} \frac{1}{k}\right) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{N}+2} - \frac{1}{\mathrm{N}+3}\right) \end{aligned}$$

La première somme est multipliée par 0, et les termes en $1/(\mathrm{N}+\cdots)$ tendent vers 0. On en déduit que $\mathrm{S_N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 3/4$. La suite des sommes partielles admet une limite finie, donc

$$\boxed{\text{La série converge, et sa somme vaut } 3/4.}$$

5 Soit $n \geqslant 0$. Puisque tous les x_i sont supérieurs ou égaux à 2, il en découle que

$$\frac{1}{x_0\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{2\times\cdots\times 2} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Or, la série de terme général $1/2^{n+1}$ est une série géométrique de raison $1/2<1$ donc converge. Par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs,

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{x_0\times\cdots\times x_n} \text{ converge.}}$$

Puisque la suite (x_n) est croissante, le terme général de cette série est inférieur ou égal à $1/{x_0}^{n+1}$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_0\cdots x_n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{{x_0}^{n+1}} = \frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{x_0}\right)^n$$

Or, la série de terme général q^n (avec $q=1/x_0<1$) a pour somme $1/(1-q)$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_0\cdots x_n} \leqslant \frac{1}{x_0}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0-1}}$$

Problème 1

Partie I. Analyse.

1 Par hypothèse,

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{x_0\cdots x_n} = \frac{1}{x_0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_0\cdots x_n} > \frac{1}{x_0}}$$

Or, d'après les préliminaires, on a également $x \leqslant 1/(x_0-1)$. Ainsi, par stricte croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*, x_0 > 1/x \geqslant x_0-1$. Par définition de la partie entière, $x_0-1=\lfloor 1/x\rfloor$, d'où

$$\boxed{x_0 = \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + 1}$$

2 Toujours par hypothèse, on a

$$x = \frac{1}{x_0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_0\cdots x_n} = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_1\cdots x_n}$$

Dès lors
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x_1\cdots x_n} = xx_0 - 1}$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1} = (x_{n+1})_{n\geqslant 0}$ est le développement en série de Engel de xx_0-1. D'après la question précédente,

$$\boxed{x_{0+1} = x_1 = \left\lfloor\frac{1}{xx_0-1}\right\rfloor + 1}$$

3 Il suffit d'itérer le procédé. Posons $y = xx_0-1$. De même qu'à la question précédente,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{x_2\cdots x_n} = yx_1 - 1$$

Encore de la même façon, $(x_n)_{n\geqslant 2} = (x_{n+2})_{n\geqslant 0}$ est le développement en série de Engel de $yx_1 - 1$, et donc

$$\boxed{x_{0+2} = x_2 = \left\lfloor \frac{1}{yx_1 - 1} \right\rfloor + 1}$$

Il suffit d'itérer le procédé : si on connaît $x_0, \dots, x_n$ alors x_{n+1} est uniquement déterminé, ce qui implique de proche en proche que

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est unique.}}$$

> On a (c'est le moins que l'on puisse dire) raisonné un peu rapidement et « avec les mains ». Il faudrait raisonner par récurrence, mais ce serait un peu technique et l'idée sous-jacente est la même, cela ne nous apporterait rien au niveau de la compréhension.

Partie II. L'algorithme de Briggs.

1 Par définition, puisque $u_0 = x$, il vient $x_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$. Il suffit donc de montrer que $\lfloor 1/x \rfloor \geqslant 1$, ce qui est immédiat car $1/x \geqslant 1$ par hypothèse et la partie entière est croissante, donc $\lfloor 1/x \rfloor \geqslant \lfloor 1 \rfloor = 1$.

$$\boxed{x_0 \geqslant 2}$$

Montrons le résultat par récurrence.

- Pour tout $n \geqslant 0$, notons H_n : « $u_n > 0$ ».
- Puisque $u_0 = x > 0$, H_0 est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$ quelconque tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$ donc x_n est bien défini. Par définition de la partie entière (rappelée dans l'énoncé), $x_n > 1/u_n$ c'est-à-dire que $x_n u_n > 1$ (on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant par u_n car $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence) et donc $u_{n+1} = x_n u_n - 1 > 0$. Ainsi, H_n est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 0}$$

2 Soit $n \geqslant 0$. Puisque $u_n > 0$ d'après la question précédente, étudions u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = x_n - \frac{1}{u_n} = \left\lfloor \frac{1}{u_n} \right\rfloor + 1 - \frac{1}{u_n}$$

Or, par définition de la partie entière, $1/u_n \geqslant \lfloor 1/u_n \rfloor$ c'est-à-dire que $u_{n+1}/u_n \leqslant 1$. Puisque la suite (u_n) est strictement positive,

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $1/u_{n+1} \geqslant 1/u_n$. La partie entière étant croissante, $\lfloor 1/u_{n+1} \rfloor \geqslant \lfloor 1/u_n \rfloor$. En ajoutant 1 de chaque côté, il vient $x_{n+1} \geqslant x_n$, en d'autres termes

$$\boxed{\text{La suite } (x_n) \text{ est croissante.}}$$

3 Montrons le résultat par récurrence.

- Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n le résultat de l'énoncé.
- Tout d'abord, H_0 est vraie car

$$\frac{1}{x_0} + \frac{u_1}{x_0} = \frac{1}{x_0} + \frac{x_0 u_0 - 1}{x_0} = u_0 = x$$

- Soit n quelconque tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$x = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 x_1} + \cdots + \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{u_{n+1}}{x_0 \cdots x_n}$$

  Or, par définition de la suite (u_n), $u_{n+1} = (1 + u_{n+2})/x_{n+1}$. Ainsi,

$$x = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 x_1} + \cdots + \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{1 + u_{n+2}}{x_0 \cdots x_n x_{n+1}}$$

  ce qui permet de conclure : H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 x_1} + \cdots + \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{u_{n+1}}{x_0 \cdots x_n}}$$

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de montrer que le dernier terme dans l'expression ci-dessus tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Or, la suite (u_n) étant décroissante, elle est majorée par son premier terme, et puisque la suite (x_n) est croissante elle est minorée par son premier terme qui est supérieur ou égal à 2. Il en découle

$$\boxed{0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{x_0 \cdots x_n} \leqslant \frac{u_0}{{x_0}^{n+1}} \leqslant \frac{u_0}{2^{n+1}}}$$

ce qui permet de conclure en utilisant le théorème d'encadrement.

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_0 \cdots x_n}}$$

Partie III. Caractérisation des rationnels.

1 Si la suite (x_n) est constante égale à 1789 alors

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1789^{n+1}} = \frac{1}{1789} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1789^n} = \frac{1}{1789} \times \frac{1}{1 - \dfrac{1}{1789}} = \frac{1}{1788}}$$

Supposons à présent que $x_n = n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient

$$\frac{1}{x_0 \cdots x_n} = \frac{1}{2 \times 3 \times \cdots \times (n+2)} = \frac{1}{(n+2)!}$$

Par conséquent

$$\boxed{x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 2}$$

2 On suppose que la suite (x_n) est stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que (x_n) soit constante à partir du rang N. On a alors

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{1}{x_0 \cdots x_{\mathrm{N}-1}} \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{1}{x_{\mathrm{N}} \cdots x_n} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{1}{x_0 \cdots x_{\mathrm{N}-1}} \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \frac{1}{(x_{\mathrm{N}})^{n-\mathrm{N}+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{1}{x_0 \cdots x_{\mathrm{N}-1}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x_{\mathrm{N}})^{k+1}} \\
x &= \sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{1}{x_0 \cdots x_{\mathrm{N}-1}} \times \frac{1}{x_{\mathrm{N}} - 1}
\end{aligned}$$

La suite (x_n) étant à valeurs entières, x est une somme de rationnels donc

$$\boxed{\text{Si la suite } (x_n) \text{ est stationnaire, } x \text{ est rationnel.}}$$

3 Par récurrence : le résultat est vrai au rang 0 en posant $a_0 = a$. Si le résultat est vrai au rang n, on a $u_{n+1} = x_n u_n - 1$ et donc $u_{n+1} = (x_n a_n - b)/b$. Il suffit de poser $a_{n+1} = x_n a_n - b$ pour conclure : c'est un entier relatif car produit et différence d'entiers, et il est positif car u_{n+1} et b le sont (puisque $a_{n+1} = u_{n+1} \times b$).

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

> Comme je l'ai répété maintes et maintes fois en classe, quand on a déjà rédigé correctement des récurrences, on peut aller plus vite sur les suivantes.

4 Puisque $a_n = u_n \times b$, que b est positif et que la suite (u_n) est décroissante d'après la partie précédente, la suite (a_n) est elle-même décroissante. Puisqu'elle est à valeurs dans $\mathbb{N}$, elle est positive donc minorée par 0 et donc converge. D'après le résultat vu dans le chapitre 12, elle est stationnaire, donc la suite (u_n) également, donc la suite (x_n) également.

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est rationnel, la suite } (x_n) \text{ est stationnaire.}}$$

5 La suite $(n+2)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas stationnaire, le réel x dont c'est le développement en série de Engel est irrationnel par ce qui précède. D'après la question 1, ce réel vaut $e-2$ qui est par conséquent irrationnel. 2 étant rationnel,

$$\boxed{e \text{ est irrationnel.}}$$

Problème 2

Partie I. Premiers exemples

1.(a) Fait dans l'exercice 66 du chapitre 27.

1.(b) D'après la formule de König-Huygens,

$$\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n-\mathrm{X})^2\right) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_n-\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{X}_n-\mathrm{X})^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or, $\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n-\mathrm{X})^2\right) = \mathrm{E}\left(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|^2\right)$: on peut donc appliquer la question précédente (avec $p=2$) :

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{X}_n) \text{ converge en proba vers X.}}$$

1.(c) Fait dans l'exercice 23 du chapitre 27.

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{X}_n) \text{ converge en proba vers 0 mais la suite de terme général } \mathrm{E}(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|) \text{ ne tend pas vers 0.}}$$

> Si $\mathrm{E}\left(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}|^p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on dit qu'il y a convergence L^p. Ainsi, la question 1.(a) dit que la convergence L^p implique la convergence en proba, et la question 1.(c) montre que la réciproque est fausse : on a une suite qui converge en proba vers 0, mais il n'y a pas convergence L^1.

2 Fait dans la démonstration de la loi faible des grands nombres (cf. dernière page du chapitre 27).

3 Puisque $\mathrm{X}(\Omega) = \{0;1\}$ alors $\mathrm{X}_n(\Omega) = \{0;1\}$, donc X_n suit une loi de Bernoulli, et $\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = 1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}=0) = 1/2$ donc X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, c'est-à-dire la même loi que X. Cependant, si $\varepsilon = 1$ alors $|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| = 1$ ($\mathrm{X}_n - \mathrm{X} = 1$ si $\mathrm{X}=0$ et -1 si $\mathrm{X}=1$) donc la suite de terme général $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n-\mathrm{X}| \geqslant 1)$ est constante égale à 1 donc ne tend pas vers 0. On a prouvé qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que la suite de terme général $\mathrm{P}(|\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| \geqslant \varepsilon)$ ne tende pas vers 0, c'est-à-dire que (X_n) ne converge pas en proba vers X.

$$\boxed{\text{Pour tout } n,\ \mathrm{X}_n \sim \mathrm{X} \text{ mais } (\mathrm{X}_n) \text{ ne converge pas en proba vers X.}}$$

> La convergence en proba signifie que, avec grande proba, X_n et X finisse par prendre des valeurs proches en même temps. Cela implique intuitivement que les lois finissent par se ressembler (et c'est le cas : la convergence en proba implique la convergence en loi, notion que vous rencontrerez plus tard si vous faites des probas... ou si vous demandez à des ECG) mais la réciproque est fausse : deux variables aléatoires peuvent avoir la même loi et ne pas forcément prendre des valeurs proches en même temps, et même prendre des valeurs toujours éloignées comme dans cet exemple. Ne pas confondre l'égalité en proba avec l'égalité en loi !

4 Soit $\varepsilon > 0$. f étant uniformément continue :

$$\exists \eta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Prenons ce η dans la suite. Dès lors, si $|X_n - X| < \eta$, alors $|f(X_n) - f(X)| < \varepsilon$. Par contraposée, si $|f(X_n) - f(X)| \geqslant \varepsilon$, alors $|X_n - X| \geqslant \eta$. En d'autres termes, l'événement $[|f(X_n) - f(X)| \geqslant \varepsilon]$ est inclus dans l'événement $[|X_n - X| \geqslant \eta]$ donc a une probabilité inférieure, si bien que :

$$P(|f(X_n) - f(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant P(|X_n - X| \geqslant \eta)$$

Par hypothèse, $P(|X_n - X| \geqslant \eta) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement (une probabilité est positive), $P(|f(X_n) - f(X)| \geqslant$

$$\boxed{(f(X_n)) \text{ converge en proba vers } f(X).}$$

> C'est toujours vrai si f est simplement continue, mais c'est plus difficile à prouver, il faut utiliser le théorème de Heine.

Partie II. « Unicité de la limite »

1.(a) D'après l'inégalité triangulaire,

$$\boxed{|X - Y| = |X - X_n + X_n - Y| \leqslant |X - X_n| + |X_n - Y|}$$

En particulier, si $|X - Y| \geqslant \dfrac{1}{p}$ alors $|X - X_n| + |X_n + Y| \geqslant \dfrac{1}{p}$ donc $|X - X_n| \geqslant \dfrac{1}{2p}$ ou $|Y - X_n| \geqslant \dfrac{1}{2p}$ (par exemple, si $a + b \geqslant 1$ alors au moins l'un des deux est supérieur ou égal à $\dfrac{1}{2}$). On peut le dire directement, mais on peut le prouver par l'absurde (ou par contraposée) si on en ressent le besoin : si $|X - X_n| < \dfrac{1}{2p}$ et $|Y - X_n| < \dfrac{1}{2p}$ alors la somme est strictement inférieure à 1. En d'autres termes, on a l'inclusion suivante :

$$\boxed{\left[|X - Y| \geqslant \frac{1}{p}\right] \subset \left(\left[|X - X_n| \geqslant \frac{1}{2p}\right] \cup \left[|X_n - Y| \geqslant \frac{1}{2p}\right]\right)}$$

1.(b) D'après la question précédente, et puisque la proba d'une union est inférieure à la somme des probas :

$$P\left(|X - Y| \geqslant \frac{1}{p}\right) \leqslant P\left(|X - X_n| \geqslant \frac{1}{2p}\right) + P\left(|X_n - Y| \geqslant \frac{1}{2p}\right)$$

Or, par hypothèse, le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Une proba étant positive, d'après le théorème d'encadrement,

$$P\left(|X - Y| \geqslant \frac{1}{p}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Or, ce terme est indépendant de n donc $\boxed{P\left(|X - Y| \geqslant \dfrac{1}{p}\right) = 0}$

2 Notons A l'union de droite. Rappelons que ce sont des parties de Ω !

- Soit $\omega \in [|X - Y| > 0]$. Alors $|X(\omega) - Y(\omega)| > 0$. Puisque $\dfrac{1}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$, il existe p tel que $|X(\omega) - Y(\omega)| \geqslant \dfrac{1}{p}$ ie tel que $\omega \in \left[|X - Y| \geqslant \dfrac{1}{p}\right]$. Dès lors, $\omega \in A$ donc $[|X - Y| > 0] \subset A$.
- L'inclusion réciproque est immédiate et laissée en exo.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

3 D'après la question 1.(b), la somme de droite est nulle donc $P(|X - Y| > 0) = 0$. Or, $X \neq Y$ si et seulement si $|X - Y| > 0$ donc $P(X \neq Y) = 0$ donc, par passage au complémentaire,

$$\boxed{P(X = Y) = 1.}$$

4 On va s'inspirer des questions précédentes. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que $P(|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|X_n + Y_n - X - Y| \leqslant |X_n - X| + |Y_n - Y|$$

Par conséquent, si $|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant \varepsilon$ alors $|X_n - X| + |Y_n - Y| \geqslant \varepsilon$ et donc

$$|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ou} \qquad |Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

En d'autres termes, $$[|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant \varepsilon] \subset \left[|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right] \cup \left[|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right]$$

si bien que $$0 \leqslant P\left(|X_n + Y_n - X - Y| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant P\left(|X_n - X| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + P\left(|Y_n - Y| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Or, le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$ car (X_n) converge en proba vers X et (Y_n) vers Y. Le théorème d'encadrement permet de conclure.

$$\boxed{\text{La convergence en proba passe à la somme.}}$$

Partie III. Convergence en proba dans un jeu de Pile ou Face

1.(a) e_{n-1} étant à valeurs dans $\{0;1\}$, $[e_{n-1} = 0]$ et $[e_{n-1} = 1]$ forment un système complet d'événements. D'après la formule des probas totales,

$$P(e_n = 1) = P_{[e_{n-1}=0]}(e_n = 1)P(e_{n-1} = 0) + P_{[e_{n-1}=1]}(e_n = 1)P(e_{n-1} = 1)$$

Supposons $[e_{n-1} = 0]$ réalisé. Alors il y a eu un nombre impair de Pile lors des $n - 1$ premiers lancers. Dès lors, $e_n = 1$ si et seulement si le n-ième lancer est un Pile (pour obtenir un nombre pair), ce qui arrive avec proba 1/2. On en déduit que $P_{[e_{n-1}=0]}(e_n = 1) = 1/2$. De même, $P_{[e_{n-1}=1]}(e_n = 1) = 1/2$. Finalement :

$$\boxed{P(e_n = 1) = \frac{1}{2} \times P(e_{n-1} = 0) + \frac{1}{2} \times P(e_{n-1} = 1)}$$

1.(b) Tout d'abord, $e_1(\Omega) = \{0;1\}$ donc e_1 suit une loi de Bernoulli. Or, au premier lancer, on a Pile ou Face donc on obtient un nombre pair de lancers si et seulement si on obtient Face au premier lancer, ce qui arrive avec proba 1/2. En d'autres termes, $P(e_1 = 1) = 1/2$ donc $e_1 \sim B(1/2)$.

On pourrait ensuite raisonner par récurrence, mais il suffit de voir que, si $n \geqslant 2$, $P(e_{n-1} = 0) + P(e_{n-1} = 1) = 1$ donc $P(e_n = 1) = 1/2$, et puisque $e_n(\Omega) = \{0;1\}$, alors $e_n \sim B(1/2)$.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ e_n \sim B(1/2).}$$

> Notons, ce qui est un peu contre-intuitif, que cela ne dépend pas de la parité de n.

2.(a) L'événement de gauche est réalisé si et seulement si les $n-1$ premiers événements de droite sont réalisés et si $X_n = 0$ car le fait que $en - 1 = 1$ et $e_n = 1$ signifie que $e_{n-1} = 1$, c'est-à-dire qu'on a un nombre pair de Pile lors des $n - 1$ premiers lancers, et que $e_n = 1$, c'est-à-dire qu'on a toujours un nombre pair de Pile lors des n premiers lancers, et donc que le n-ième lancer donne Face, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{On a l'égalité ensembliste voulue.}}$$

Or, X_n est indépendantes de $e_1, \dots, e_{n-1}$ car celles-ci ne dépendent que des $n - 1$ premiers lancers. Dès lors :

$$P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1, e_n = 1) = P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1) \times P(X_n = 0)$$

Or, $P(X_n = 0) = 1/2 = P(e_n = 1)$ d'après la question précédente, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1, e_n = 1) = P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1) \times P(e_n = 1)}$$

2.(b) On peut itérer le résultat de la question précédente (penser à « truc ») :

$$\mathrm{P}(e_1 = x_1, \ldots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = x_{n-1}, e_n = x_n) = \mathrm{P}(e_1 = x_1, \ldots, e_{n-2} = x_{n-2})\mathrm{P}(e_{n-1} = x_{n-1})\mathrm{P}(e_n = x_n)$$

et ainsi de suite jusqu'à obtenir :

$$\mathrm{P}(e_1 = x_1, \ldots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = x_{n-1}, e_n = x_n) = \mathrm{P}(e_1 = x_1)\cdots\mathrm{P}(e_{n-2} = x_{n-2})\mathrm{P}(e_{n-1} = x_{n-1})\mathrm{P}(e_n = x_n)$$

D'après le cours, cela signifie que les variables aléatoires sont indépendantes.

$$\boxed{\text{La suite } (e_n)_{n\geqslant 1} \text{ est une suite de variables aléatoires indépendantes.}}$$

2.(c) On a une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. D'après la question 3 de la partie I :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} \text{ converge en loi vers } \frac{1}{2}.}$$

3.(a) Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(e_i e_{i+1})$$

Or, d'après la question précédente, e_i et e_{i+1} sont indépendantes donc $\mathrm{E}(e_i e_{i+1}) = \mathrm{E}(e_i)\mathrm{E}(e_{i+1})$ et les e_k suivent une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ donc sont d'espérance $1/2$. Dès lors, $\mathrm{E}(e_i e_{i+1}) = 1/4$ ce qui permet de conclure.

$$\mathrm{E}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{4}$$

3.(b) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. e_i et e_{i+1} étant à valeurs dans $\{0;1\}$, $e_i e_{i+1}$ également donc suit une loi de Bernoulli. De plus,

$$\mathrm{P}(e_i e_{i+1} = 1) = \mathrm{P}([e_i = 1] \cap [e_{i+1} = 1])$$

Par indépendance, $\mathrm{P}(e_i e_{i+1} = 1) = \mathrm{P}(e_i = 1) \times \mathrm{P}(e_{i+1} = 1) = 1/4$. En d'autres termes, $e_i e_{i+1} \sim \mathrm{B}(1/4)$ donc :

$$\boxed{\mathrm{V}(e_i e_{i+1}) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}}$$

3.(c) Le problème est que les $e_i e_{i+1}$ ne sont pas deux à deux indépendantes (par exemple, $e_1 e_2$ et $e_2 e_3$ ne sont pas indépendantes). Il faut donc utiliser la formule donnant la variance d'une somme dans le cas général (sans oublier le $1/n^2$ qui sort car, quand on a une constante multiplicative dans une variance, elle sort mise au carré).

$$\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(e_i e_{i+1}) + 2\sum_{i<j}\mathrm{Cov}(e_i e_{i+1}, e_j e_{j+1})\right)$$

Pour tout i, $\mathrm{V}(e_i e_{i+1}) = 3/16$. Si $j \neq i+1$, c'est-à-dire si $j \geqslant i+2$ (rappelons que $i < j$) alors, d'après le lemme des coalitions, $e_i e_{i+1}$ et $e_j e_{j+1}$ sont indépendantes donc non corrélées donc $\mathrm{Cov}(e_i e_{i+1}, e_j e_{j+1}) = 0$. Dès lors :

$$\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{3}{16} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{Cov}(e_i e_{i+1}, e_j e_{j+1})\right)$$

Soit $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(e_i e_{i+1}, e_{i+1} e_{i+2}) &= \mathrm{E}(e_i {e_{i+1}}^2 e_{i+1}) - \mathrm{E}(e_i e_{i+1})\mathrm{E}(e_{i+1} e_{i+2}) \\
&= \mathrm{E}(e_i {e_{i+1}}^2 e_{i+2}) - \mathrm{E}(e_i)\mathrm{E}(e_{i+1})\mathrm{E}(e_{i+1})\mathrm{E}(e_{i+2}) && \text{Indépendance} \\
&= \mathrm{E}(e_i {e_{i+1}}^2 e_{i+2}) - \frac{1}{16} && \mathrm{E}(e_i) = 1/2 \text{ pour tout } i \\
&= \mathrm{E}(e_i e_{i+1} e_{i+2}) - \frac{1}{16} && e_{i+1} = 0 \text{ ou } 1 \text{ donc } {e_{i+1}}^2 = e_i \\
&= \mathrm{E}(e_i)\mathrm{E}(e_{i+1})\mathrm{E}(e_{i+2}) - \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{T}_n) = \frac{3n + 2(n-1)}{16n^2} = \frac{5}{16n} - \frac{1}{8n^2}}$$

3.(d) Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(\mathrm{T}_n - 1/4) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et, d'après ce qui précède (et le résultat du cours donnant $\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b)$), $\mathrm{V}(\mathrm{T}_n - 1/4) = \mathrm{V}(\mathrm{T}_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après la question 1.(b) de la partie I :

$$\boxed{(\mathrm{T}_n) \text{ converge en loi vers } 1/4.}$$