Corrigé du DM n°23

Exercice 1 :

1.(a) Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{R}^4$ tel que $\alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2+\alpha_3 f_3+\alpha_4 f_4=0$. Par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & & & & & & & = & 0\\ 2\alpha_1 & - & 3000\alpha_2 & & & & & = & 0\\ 3\alpha_1 & + & 1967\alpha_2 & + & 1789\alpha_3 & & & = & 0\\ 4\alpha_1 & + & 800\alpha_2 & + & 1914\alpha_3 & + & 1987^{2013}\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On trouve successivement que $\alpha_1=0$ puis $\alpha_2=0$ etc. Les scalaires sont tous nuls : la famille est libre, on a une famille libre à 4 éléments en dimension 4 :

$$\boxed{\text{La famille est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

1.(b) Soit $b=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$. On veut montrer qu'il existe un unique $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ tel que

$$x_1 g_1+x_2 g_2+x_3 g_3=(b_1,b_2,b_3)$$

c'est-à-dire
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & b_1\\ -2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & b_2\\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & b_3 \end{array}\right.$$

Soit $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\-2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}$. Alors on montre comme d'habitude que A est inversible et $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-5/12&-7/12&1/12\\4/12&8/12&4/12\\7/12&5/12&1/12\end{pmatrix}$.
Par conséquent, (x_1,x_2,x_3) existe et est unique égal à $\mathrm{A}^{-1}b$:

$$\boxed{\text{La famille } (g_1,g_2,g_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

Enfin, si $b=(1,1,1)$, alors

$$x=\begin{pmatrix}-5/12&-7/12&1/12\\4/12&8/12&4/12\\7/12&5/12&1/12\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/12\\16/12\\13/12\end{pmatrix}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{(1,1,1)=\frac{-11}{12}(1,-2,3)+\frac{16}{12}(-1,1,2)+\frac{13}{12}(3,-2,1)}$$

1.(c) Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\in\mathbb{R}^4$. Travaillons par équivalences puisqu'on ne sait pas si cette famille est libre.

$$\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2+\alpha_3 h_3+\alpha_4 h_4=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0\\ 2\alpha_1 & - & \alpha_2 & + & 4\alpha_3 & + & 7\alpha_4 & = & 0\\ -\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & + & \alpha_3 & - & 2\alpha_4 & = & 0\\ -2\alpha_1 & - & 3\alpha_2 & & & + & 5\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0\\ & & 3\alpha_2 & + & 6\alpha_3 & + & 3\alpha_4 & = & 0\\ & & & & & & 0 & = & 0\\ & - & 7\alpha_2 & - & 2\alpha_3 & + & 9\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0\\ & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0\\ & - & 7\alpha_2 & - & 2\alpha_3 & + & 9\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} \alpha_1 & - & 2\alpha_2 & - & \alpha_3 & + & 2\alpha_4 & = & 0\\ & & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & + & \alpha_4 & = & 0\\ & & & & 12\alpha_3 & + & 16\alpha_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

On trouve dès lors :

$$\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2+\alpha_3 h_3+\alpha_4 h_4=0 \iff \left\{\begin{array}{lllll}\alpha_1 & & & = & -2\alpha_4-4\alpha_4/3-2\alpha_4+16\alpha_4/3\\ & \alpha_2 & & = & -\alpha_4+8\alpha_4/3\\ & & \alpha_3 & = & -4\alpha_4/3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllll}\alpha_1 & & & = & 0\\ & \alpha_2 & & = & 5\alpha_4/3\\ & & \alpha_3 & = & -4\alpha_4/3\end{array}\right.$$

En particulier, $\alpha_1=0$ et $\alpha_2=5, \alpha_3=-4$ et $\alpha_4=3$ conviennent : la famille est liée. Puisqu'on a quatre vecteurs non libres en dimension 4, la famille n'est pas génératrice.

$$\boxed{\text{La famille n'est ni libre ni génératrice.}}$$

2.(a) On a cinq vecteurs en dimension 4 :

$$\boxed{\text{La famille est liée.}}$$

Mais de toute façon, on cherche une base de l'espace engendré donc cherchons une combinaison linéaire qui les annule. Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)\in\mathbb{R}^5$.

$$\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\alpha_4 e_4+\alpha_5 e_5=0 \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ -3\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & 2\alpha_3 & - & \alpha_4 & - & 6\alpha_5 & = & 0\\ 2\alpha_1 & + & 3\alpha_2 & + & \alpha_3 & - & \alpha_4 & + & 3\alpha_5 & = & 0\\ 4\alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & + & 9\alpha_4 & + & 3\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ & & 7\alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 49\alpha_4 & + & 21\alpha_5 & = & 0\\ & - & \alpha_2 & + & 7\alpha_3 & + & 31\alpha_4 & - & 15\alpha_5 & = & 0\\ & - & 7\alpha_2 & + & 13\alpha_3 & + & 73\alpha_4 & - & 33\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ & & \alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 31\alpha_4 & + & 15\alpha_5 & = & 0\\ & & 7\alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 49\alpha_4 & + & 21\alpha_5 & = & 0\\ & - & 7\alpha_2 & + & 13\alpha_3 & + & 73\alpha_4 & - & 33\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ & & \alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 31\alpha_4 & + & 15\alpha_5 & = & 0\\ & & & & 42\alpha_3 & + & 168\alpha_4 & - & 84\alpha_5 & = & 0\\ & & & - & 36\alpha_3 & - & 144\alpha_4 & + & 72\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ & & \alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 31\alpha_4 & + & 15\alpha_5 & = & 0\\ & & & & 6\alpha_3 & + & 24\alpha_4 & - & 12\alpha_5 & = & 0\\ & & & - & 6\alpha_3 & - & 24\alpha_4 & + & 12\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}\alpha_1 & + & 2\alpha_2 & - & 3\alpha_3 & - & 16\alpha_4 & + & 9\alpha_5 & = & 0\\ & & \alpha_2 & - & 7\alpha_3 & - & 31\alpha_4 & + & 15\alpha_5 & = & 0\\ & & & & \alpha_3 & + & 4\alpha_4 & - & 2\alpha_5 & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllll}\alpha_1 & & & = & -2\alpha_4-\alpha_5\\ & \alpha_2 & & = & 3\alpha_4-\alpha_5\\ & & \alpha_3 & = & -4\alpha_4+2\alpha_5\end{array}\right.$$

On en déduit qu'en prenant $\alpha_5=0, \alpha_4=1, \alpha_1=-2, \alpha_2=3$ et $\alpha_3=-4$, alors on a une combinaison linéaire non triviale qui est nulle donc la famille est liée, ce qu'on savait déjà, mais on obtient de plus que

$$e_4=2e_1-3e_2+4e_3$$

donc e_4 est CL de e_1,e_2,e_3. Avec $\alpha_5=1, \alpha_4=0$ et $\alpha_1=-1, \alpha_2=-1$ et $\alpha_3=2$, on trouve de même que e_5 est CL de (e_1,e_2,e_3) si bien que

$$\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5)=\operatorname{Vect}(e_1,e_2,e_3)$$

donc ces vecteurs engendrent un espace de dimension au plus 3.

$$\boxed{\text{La famille n'est pas génératrice.}}$$

2.(b) On montre aisément que e_1, e_2, e_3 sont libres donc forment une base de $\text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3) = \text{Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

$$\boxed{\text{Une base de Vect}\,(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5) \text{ est donnée par } (e_1, e_2, e_3).}$$

Exercice 2 :

1 Si on dessine deux plans, leur intersection est une droite, et on est bien dans les conditions du théorème car $2+2 > 3(2-1)$ tandis qu'on peut avoir trois plans dont l'intersection est nulle, par exemple en prenant trois plans orthogonaux dans l'espace (regardez la base d'un mur de chez vous). On constate que c'est parce que les conditions de l'exercice ne sont pas vérifiées, car $2+2+2 \leqslant 3(3-1)$. En d'autres termes

$$\boxed{\text{Les maths, c'est cool.}}$$

2 Soient $x = (x_1, \dots, x_k)$ et $y = (y_1, \dots, y_k)$ deux éléments de $\mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_k$ et soient deux scalaires λ et μ. Alors

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + \mu y) &= \varphi\left(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \dots, , \lambda x_k + \mu y_k\right) \\
&= \left(\lambda x_2 + \mu y_2 - \lambda x_1 - \mu y_1, \lambda x_3 + \mu y_3 - \lambda x_1 - \mu y_1, \dots, \lambda x_k + \mu y_k - \lambda x_1 - \mu y_1\right) \\
&= \lambda\left(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1\right) + \mu\left(y_2 - y_1, y_3 - y_1, \dots, y_k - y_1\right) \\
\varphi(\lambda x + \mu y) &= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y)
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$$

3 Travaillons par équivalences.

$$\begin{aligned}
x = (x_1, \dots, x_k) \in \text{Ker}\ \varphi &\iff \forall i \in [\![1\,;\,k]\!] \quad x_k \in \mathrm{F}_k \qquad \text{et} \qquad x_k - x_1 = 0 \\
&\iff \forall i \in [\![1\,;\,k]\!] \quad x_k \in \mathrm{F}_k \qquad \text{et} \qquad x_k = x_1 \\
x = (x_1, \dots, x_k) \in \text{Ker}\ \varphi &\iff \exists x_1 \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i \qquad x = (x_1, \dots, x_k)
\end{aligned}$$

Le résultat en découle.

$$\boxed{\text{Ker}\ \varphi = \left\{(x_1, x_1, \dots, x_1) | x_1 \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i\right\}}$$

4 L'application

$$u\colon \begin{cases} \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i \longrightarrow \text{Ker}\ \varphi \\ \quad x_1 \quad \longmapsto (x_1, \dots, x_1) \end{cases}$$

est évidemment linéaire. D'après la question précédente, elle est surjective. Soit enfin $x_1 \in \text{Ker}\,(\varphi)$. Alors $(x_1, \dots, x_1) = (0, \dots, 0)$ donc $x_1 = 0$: φ est injective. C'est donc un isomorphisme.

$$\boxed{\text{Ker}\ \varphi \text{ et } \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i \text{ sont isomorphes.}}$$

En particulier ils ont la même dimension. Appliquons enfin le théorème du rang à φ :

$$\dim\left(\mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_k\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{F}_i = \dim \text{Ker}\ \varphi + \dim \text{Im}\ \varphi = \dim \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i + \dim \text{Im}\ \varphi$$

Or

$$\text{Im}\ \varphi \subset \mathrm{E}^{k-1}$$

d'où
$$\dim \operatorname{Im} \varphi \leqslant \dim \mathrm{E}^{k-1} = (k-1) \dim \mathrm{E} = n(k-1)$$

D'après l'hypothèse faite en début d'exercice
$$\sum_{i=1}^{k} \dim \mathrm{F}_i < n(k-1)$$

ce qui implique que
$$\dim \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i > 0$$

C'est le résultat voulu :
$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{F}_i \neq \{0\}}$$