Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Épilogue - Chapitres 35 à 37.

Table des matières

Chapitre 35

Familles sommables

« Je vous ordonne de vous taire !
Et j'adresse un défi collectif au parterre !
J'inscris les noms ! Approchez-vous, jeunes héros !
Chacun son tour ! Je vais donner des numéros !
Allons, quel est celui qui veut ouvrir la liste ?
Vous, Monsieur ? Non ! Vous ? Non ! Le premier duelliste,
Je l'expédie avec les honneurs qu'on lui doit !
Que tous ceux qui veulent mourir lèvent le doigt.
La pudeur vous défend de voir ma lame nue ?
Pas un nom ? Pas un doigt ? C'est bien. Je continue. »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac

La fonction ζ jouant un rôle dans plusieurs exercices de cette feuille, on rappelle que :

- la fonction ζ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ par $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$.
- $\zeta(2)=\pi^2/6$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12}$.

On admettra également que $\zeta(4)=\pi^4/90$. Enfin, on rappelle que lorsque les termes sommés ne sont pas positifs, il est indispensable de justifier l'existence des sommes infinies.

35.1 Produits de Cauchy

Exercice 1 : ✪ Soit $x\in\,]-1\,;1\,[$. On rappelle (cf. cours) que :

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

Écrire de même $1/(1-x)^3$ sous forme de série.

Correction : Les séries $\sum(n+1)x^n$ et $\sum x^n$ convergent absolument donc, par produit de Cauchy :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{(1-x)^2}\times\frac{1}{1-x}\\ &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n\right)\times\left(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\right)\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_n\end{aligned}$$

où, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{p+q=n} (p+1)x^p \times x^q \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^k \times x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (k+1)x^n \\
&= x^n \sum_{k=1}^{n+1} k \\
&= x^n \times \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \times x^n$$

En particulier :

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \times x^{n-1}$$

c'est-à-dire qu'on peut dériver terme à terme l'égalité de l'énoncé : vous généraliserez ça l'année prochaine !

Exercice 2 : ✪ Soient a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que, si $a \neq b$:

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

Correction : Les deux complexes étant de module strictement inférieur à 1, les deux séries $\sum a^n$ et $\sum b^n$ convergent absolument et

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b^n\right)$$

Puisqu'il y a convergence absolue, on peut effectuer un produit de Cauchy :

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{p+q=n} a^p b^q \\
&= \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \\
&= b^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k \\
&= b^n \times \frac{1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{a}{b}} \qquad (\text{car } a/b \neq 1) \\
&= b^n \times \frac{\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{b^{n+1}}}{\dfrac{a-b}{b}} \\
&= b^n \times \frac{\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{b^n}}{a-b} \\
&= \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}
\end{aligned}$$

Exercice 3 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Correction : On reconnaît le terme général du produit de Cauchy

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Ici, aucun problème pour les sommes infinies car les termes sommés sont positifs. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la famille $(1/n^\alpha)$ est sommable, si et seulement si la série $\sum 1/n^\alpha$ converge (absolument mais elle est à termes positifs) si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 4 : ✪✪ Pour tout $n \geq 1$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

le n-ième nombre harmonique. Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

Correction : Tout d'abord, la série $\sum (-1)^{n-1}/(n \times n!)$ converge absolument (attention, appliquer le CSA prouve certes la convergence, mais ne suffit pas pour la suite car, pour effectuer un produit de Cauchy, la famille doit être sommable donc série doit converger absolument) car, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

et on conclut à l'aide du théorème de comparaison pour les séries à termes positifs. De plus,

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Par produit de Cauchy (les séries convergent absolument), si on note A le membre de gauche :

$$\begin{aligned} A &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \times n!}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \end{aligned}$$

où, pour tout $n \geq 1$:

$$c_n = \sum_{p+q=n} \frac{1}{q!} \times \frac{(-1)^{p-1}}{p \times p!}$$

Attention, q peut être nul mais $p \geq 1$ donc :

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n-p)!} \times \frac{(-1)^{p-1}}{p \times p!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{(-1)^{p-1}}{p \times p!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \binom{n}{p} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \binom{n}{p} = H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

Montrons ce résultat par récurrence sur n. Pour $n = 1$, la somme de gauche contient un seul terme (d'indice $p = 1$) et on a donc :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \binom{n}{p} &= \frac{(-1)^{1-1}}{1} \binom{1}{1} \\ &= 1 \\ &= H_1 \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est encore vrai au rang $n + 1$. D'après la formule de Pascal :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\binom{n+1}{p} & = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\binom{n}{p} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\binom{n}{p-1} \\
& = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p}\binom{n}{p} + \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n}{n+1} + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \times \frac{n!}{(p-1)!(n+1-p)!} \\
& = H_n + 0 + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} \qquad \text{(HR)} \\
& = H_n + \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} (-1)^{p-1} \times \binom{n+1}{p} \\
& = H_n - \frac{1}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} (-1)^{p} \times \binom{n+1}{p} \\
& = H_n + \frac{(-1)^n}{n+1} - \frac{1}{n+1}\left((1+(-1))^{n+1} - 1\right) \\
& = H_n + \frac{1}{n+1} \\
& = H_{n+1}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 5 - Série génératrice des nombres de Catalan : ✪✪✪ On rappelle que les nombres de Catalan $(C_n)_{n\geq 0}$ sont définis par :

$$\forall n \geq 0, \qquad C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

et que la suite (C_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-1-k}$$

Pour tout z réel « convenable », on pose $C(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$.

1. Donner le domaine de définition de C.
2. On admet que C est continue sur son domaine de définition (vous pourrez le prouver l'année prochaine). Prouver que, pour tout $z \neq 0$ appartenant au domaine de définition de C :

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

Correction :

1. On prouve à l'aide de la formule de Stirling (cf. exercice 43 du chapitre 25 pour un calcul détaillé) que

$$\binom{n}{2n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$$

et donc (le quotient est une opération légale, et on n'oublie pas que $n+1 \sim n$, ne faisons pas comme Picsou et ne gardons pas le $+1$ qui n'apporterait rien) :

$$C_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi} \times n^{3/2}}$$

Soit $z \in \mathbb{R}$. C est défini en z si et seulement si la série $\sum C_k z^k$ converge (attention : converge, pas absolument, et donc pas de sommabilité ici, ou en tout cas c'est suffisant, car c'est équivalent à la convergence absolue qui implique la convergence, mais pas nécessaire). On a donc :

$$C_k z^k \sim \frac{(4z)^k}{\sqrt{\pi} k^{3/2}}$$

Attention, a priori, on n'a pas un signe constant donc le critère d'équivalence n'est pas applicable en l'état. Faisons une disjonction de cas :

- Si $|z| > 1/4$ alors $|4z| > 1$ donc, par croissances comparées, $|C_k z^k| \xrightarrow[k\to+\infty]{}$ et donc $(C_k z^k)$ ne tend pas vers 0 (elle ne tend pas forcément vers $+\infty$ car cela dépend du signe de z) : la série diverge grossièrement.
- Si $|z| < 1$ alors, toujours par croissances comparées :

$$k^2 C_k z^k \sim \sqrt{k} \times \frac{(4z)^k}{\sqrt{\pi}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

puisque $|4z| < 1$: on en déduit que $C_k z^k = \mathrm{o}\left(1/k^2\right)$ et cela implique (car $1/k^2 > 0$) que la série converge absolument et donc converge.
- si $z = 1/4$ alors $C_k z^k \sim 1/\sqrt{\pi} k^{3/2}$ et $3/2 > 1$: on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature, la série converge.
- si $z = -1/4$, $C_k z^k \sim (-1)^k/\sqrt{\pi} k^{3/2}$. Attention, l'équivalence ne permet pas de conclure quand le signe est variable. Il suffit d'étudier la convergence absolue : $|C_k z^k| \sim 1/\sqrt{\pi} k^{3/2}$, terme général d'une série convergente, donc la série $\sum C_k z^k$ converge absolument, et donc converge.

En conclusion, C est définie sur $[-1/4\,;1/4]$.

2. Soit donc z dans cet intervalle. On va utiliser la relation de récurrence vérifiée par (C_n) : on met donc à part $C_0 = 1$ car la relation est vérifiée à partir du rang $n \geq 1$.

$$\begin{aligned} C(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} z^n \end{aligned}$$

On va faire apparaître un produit de Cauchy : on « casse » donc z^n en plusieurs morceaux pour que les indices et les puissances coïncident : et puisque $i + (n-1-i) = n-1$, il manque une puissance de z, qu'on peut sortir de la somme, c'est-à-dire :

$$C(z) = 1 + z \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} C_i z^i C_{n-1-i} z^{n-1-i}$$

On reconnaît le produit de Cauchy de $C(z)$ par elle-même, si bien que $C(z) = 1 + zC(z)^2$ et donc $zC(z)^2 - C(z) + 1 = 0$. On a une équation du second degré (d'inconnue $C(z)$ avec $a = z, b = -1, c = 1$) et donc $\Delta = 1 - 4z \geq 0$ par choix de z, et donc :

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Il ne reste qu'à exclure le signe + : utilisons pour cela la continuité de C. Si

$$C(z) = \frac{1 + \sqrt{1-4z}}{2z}$$

alors, au voisinage de 0, en utilisant le fait que $\sqrt{1-4z} = (1-4z)^{1/2} = 1 - 2z + \mathrm{o}(z)$, on trouve que

$$C(z) = \frac{1 + 1 - 2z + \mathrm{o}(z)}{2z} \sim \frac{1}{z}$$

(un DL à l'ordre 0 aurait suffit) et donc $C(z) \xrightarrow[z\to 0^+]{} +\infty$ ce qui est absurde puisque C est continue en 0 et donc $C(z) \xrightarrow[z\to 0^+]{} C(0)$ (qui vaut 1 mais la valeur exacte est sans importance). Le résultat en découle.

Exercice 6 : ✪✪✪ On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensembles des familles sommables $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$. Pour tout $(u,v) \in \ell^1(\mathbb{Z})^2$, on note $u * v = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \times v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$(u * v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

1. Montrer que la famille $u * v$ est bien définie et qu'elle est sommable. Montrer enfin que :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(u*v)_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right) \times \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right)$$

2. Montrer que la loi $*$ ainsi définie est commutative, associative et possède un élément neutre.
3. $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ est-il un groupe ?

Correction :

1. Découle du théorème de regroupement par paquets (attention, on ne parle de produit de Cauchy en général que pour des séries, c'est-à-dire des familles indexées par $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$) : en effet, la famille $(u_p v_q)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est sommable puisque (somme bien définie, éventuellement égale à $+\infty$ car somme de termes positifs) :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} |u_p v_q| = \left(\sum_{p\in\mathbb{Z}} |u_p|\right) \times \left(\sum_{q\in\mathbb{Z}} |v_q|\right) < +\infty$$

Dès lors, d'après le théorème de regroupement par paquets (paquets diagonaux mais attention, on est sur $\mathbb{Z}$, donc les diagonales ne s'arrêtent pas aux axes, elles poursuivent indéfiniment leur chemin dans les deux directions), la famille $u * v$ est sommable et

$$\begin{aligned}\sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} u_p v_q &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p+q=n} u_p v_q \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (u*v)_n\end{aligned}$$

2.
   - Soit $n \in \mathbb{Z}$. En effectuant le changement d'indice $p = n - k$ (la famille $(u_k \times v_{n-k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est sommable car sous-famille d'une famille sommable, donc est invariante par permutation des termes : on peut effectuer des changements d'indices) :

$$\begin{aligned}(u*v)_n &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_{n-p} \times v_p \\ &= \sum_{p\in\mathbb{Z}} v_p \times u_{n-p} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \times u_{n-k} \\ &= (v*u)_n\end{aligned}$$

   et donc $u * v = v * u$: la loi est commutative.
   - Soit $w \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Les familles $u * v$ et w étant sommable, en appliquant le résultat de la première question avec $u * v$ et w, on en déduit que la famille $(u * v) * w$ est sommable. De même, $v * w$ puis $u * (v * w)$ sont sommables. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
((u*v)*w)_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}(u*v)_k\times w_{n-k}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{n-k}\times\sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p\times v_{k-p}\\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p\times\sum_{k\in\mathbb{Z}} w_{n-k}\times v_{k-p}\\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p\times\sum_{q\in\mathbb{Z}} v_q\times w_{n-p-q}\qquad (q=k-p,k=p+q)\\
&= \sum_{p\in\mathbb{Z}} u_p\times (v*w)_{n-p}\\
&= (u*(v*w))_n
\end{aligned}
$$

et ceci étant valable pour tout n, $(u*v)*w = u*(v*w)$: la loi est associative.

- Notons ε la suite (indexée par $\mathbb{Z}$) dont tous les éléments sont nuls sauf $\varepsilon_0 = 1$. Alors ε est bien dans $\ell^1(\mathbb{Z})$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls) : montrons que ε est bien un élément neutre. Puisque la loi est commutative, il suffit de prouver que ε est un élément neutre à droite, c'est-à-dire que $u*\varepsilon = u$ (u est un élément quelconque de $\ell^1(\mathbb{Z})$). Pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$
\begin{aligned}
(u*\varepsilon)_n &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k\times\varepsilon_{n-k}\\
&= u_n\times\varepsilon_0
\end{aligned}
$$

En effet, si $k\neq n$, alors $\varepsilon_{n-k}=0$ donc il ne reste que le terme d'indice $k=n$ dans la somme, et puisque $\varepsilon_0=1$, on trouve que $(u*\varepsilon)_n = u_n$ donc $u*\varepsilon = u$: ε est bien un élément neutre.

3. Cependant, $\ell^1(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe car la suite nulle n'a pas d'inverse, car si u est la suite nulle, il n'existe pas de suite v telle que $u*v=\varepsilon$ car il n'existe pas de suite v telle que :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k\times v_{0-k} = \varepsilon_0 = 1$$

Plus généralement, si u est sommable de somme nulle, u n'a pas d'inverse car il n'existe pas de suite v telle que $u*v=\varepsilon$ car il n'existe pas de suite v telle que

$$1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\varepsilon_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

puisque la somme de u est nulle.

35.2 Familles sommables

Exercice 7 : ✪ Les familles suivantes sont-elles sommables ? Le cas échéant, calculer leur somme. On pourra discuter selon les paramètres $z,a,b\in\mathbb{C}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. $\left(\dfrac{(-1)^k}{k^3}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2,1\leq n\leq k}$.
2. $((-1)^p(\zeta(p)-1))_{p\geq 2}$.
3. $\left(\dfrac{\zeta(2p)}{2^{2p}}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$.
4. $\left(\dfrac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
5. $\left(\dfrac{a^pb^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
6. $\left(\dfrac{q^pz^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
7. $\left(\dbinom{p+q}{p}z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
8. $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap\,]\,0\,;+\infty\,[}$.
9. $\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2,1\leq n<k}$.

Correction :

1. Précisons que k est toujours supérieur ou égal à 1 puisqu'on ne prend que les couples (k,n) avec $1\leq n\leq k$. Les sommes sont bien définies (éventuellement infinies) car on manipule des termes positifs.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=1}^{k}\left|\frac{(-1)^k}{k^3}\right| &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{k^3}\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^3}\times k\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{k^2}\\
&= \frac{\pi^2}{6}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc la famille est sommable, et on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{N}^*}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^3} &= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^k}{k^3}\times k\\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}^*}\frac{(-1)^k}{k^2}
\end{aligned}$$

et on prouve comme au chapitre 25 que cette somme vaut $-\pi^2/12$.

2. Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=2}^{+\infty}|(-1)^p(\zeta(p)-1)| &= \sum_{p=2}^{+\infty}(\zeta(p)-1)\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\right)-1\right)\\
&= \sum_{p=2}^{+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} && \text{(Théorème de Fubini)}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^p\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{1-1/n} && \text{(car } 1/n<1\text{)}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-n}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

En effet, la série $\sum 1/(n^2-1)$ converge (équivalent à $1/n^2$ et on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature). On en déduit que la famille est sommable, si bien que :

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p(\zeta(p)-1) &= \sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{n^p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{-1}{n}\right)^p \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\times\frac{1}{1+1/n} \quad (\text{car } |-1/n|<1) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

car somme d'une série télescopique.

3. On a une famille positive : on peut faire les deux en même temps.

$$
\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\zeta(2p)}{2^{2p}} &= \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2p}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2p}n^{2p}} \qquad (\text{Théorème de Fubini}) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4n^2)^p} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}} \qquad (\text{car } 1/4n^2<1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2(n+1)-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

par télescopage. En particulier, on a une somme strictement inférieure à $+\infty$ donc la famille est sommable.

4. Tout d'abord :

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{z^p}{q!}\right| = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \sum_{p=0}^{+\infty} |z|^p$$

Si $|z| \geq 1$ alors :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{z^p}{q!}\right| &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \times (+\infty) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

donc la famille n'est pas sommable. Supposons à présent que $|z| < 1$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{z^p}{q!}\right| &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!} \times \frac{1}{1-|z|} \\ &= \frac{e}{1-|z|} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc la famille est sommable. En conclusion, la famille est sommable si et seulement si $|z| < 1$ et alors un calcul analogue (sans module) prouve que sa somme vaut $\dfrac{e}{1-z}$.

5.
$$\begin{aligned} \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{a^p b^q}{p!q!}\right| &= \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{|b|^q}{q!}\right) \times \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{|a|^p}{p!}\right) \\ &= e^{|b|} \times e^{|a|} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc la famille est sommable, et un calcul analogue (sans module) prouve que sa somme vaut $e^a \times e^b = e^{a+b}$.

6. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\frac{q^p z^q}{p!q!}\right| &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{|z|^q}{q!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{q^p}{p!} \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{|z|^q}{q!} \times e^q \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(e|z|)^q}{q!} \\ &= e^{e|z|} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

donc la famille est sommable, et un calcul analogue (sans module) prouve que sa somme vaut $e^{e\times z}$.

7.

$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \left|\binom{p+q}{p} z^{p+q}\right| & = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n}\binom{p+q}{p}|z|^{p+q} \quad \text{(Regroupement par paquets « en diagonale »)}\\
& = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}|z|^n\\
& = \sum_{n=0}^{+\infty}|z|^n\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\\
& = \sum_{n=0}^{+\infty}|z|^n 2^n\\
& = \sum_{n=0}^{+\infty}(2|z|)^n
\end{aligned}$$

et cette quantité vaut $+\infty$ si $2|z|\geq 1$ donc si $|z|\geq 1/2$ et vaut $\dfrac{1}{2-1-2|z|}$ si $|z|<1/2$. On en déduit que la famille est sommable si et seulement si $|z|<1/2$, et alors un calcul analogue sans module prouve que la somme de cette famille vaut $\dfrac{1}{1-2z}$.

8. La famille $(p^2)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est une sous-famille de cette famille, et n'est pas sommable (car la série $\sum p^2$ diverge grossièrement), donc la famille n'est pas sommable.
9. La famille est positive : on peut faire du deux en un.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha} & = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k-1}{k^\alpha}\\
& = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\frac{1}{k^\alpha}
\end{aligned}$$

Si $\alpha>2$, alors les séries $\sum 1/k^{\alpha-1}$ et $\sum 1/k^\alpha$ convergent donc les familles $(1/k^{\alpha-1})$ et $(1/k^\alpha)$ sont sommables, si bien que la famille est sommable par combinaison linéaire de familles sommables, et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1}\frac{1}{k^\alpha} & = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\\
& = \zeta(\alpha-1)-1-(\zeta(\alpha)-1)\\
& = \zeta(\alpha-1)-\zeta(\alpha)
\end{aligned}$$

Supposons que $\alpha\leq 2$. Alors

$$\frac{k-1}{k^\alpha}\sim\frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

et on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature, et $\sum 1/k^{\alpha-1}$ diverge puisque $\alpha-1\leq 1$: on en déduit que la famille n'est pas sommable. En conclusion, la famille est sommable si et seulement si $\alpha>2$ et alors sa somme vaut $\zeta(\alpha-1)-\zeta(\alpha)$.

Exercice 8 : ✪

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose :

$$v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}2^k u_k$$

Montrer que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la famille $\left(\dfrac{ku_k}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*, 1\leq k\leq n}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la série $\sum u_n$.

Correction :

1. On a (aucun problème pour la somme infinie car c'est une somme de termes positifs, elle est bien définie, même si elle peut valoir $+\infty$) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} |v_n| &\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k|u_k| \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{2^k|u_k|}{2^n} \qquad \text{(Théorème de Fubini)} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k|u_k| \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1-1/2} \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k|u_k| \times \frac{1}{2^k} \times 2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2|u_k| \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

puisque la famille (u_k) est sommable. Ainsi, on en déduit que la famille (v_n) est sommable, donc on peut travailler sans module, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{2^k u_k}{2^n} \qquad \text{(Théorème de Fubini)} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k u_k \times \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1-1/2} \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^k u_k \times \frac{1}{2^k} \times 2 \\
&= 2\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k
\end{aligned}$$

2. Pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, notons

$$v_{n,k} = \frac{ku_k}{n(n+1)}$$

Dès lors (les sommes sont bien définies, éventuellement infinies, car on somme des termes positifs) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} v_{n,k} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{ku_k}{n(n+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{ku_k}{n(n+1)} && \text{(Théorème de Fubini)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k \sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) && \text{(Décomposition en éléments simples)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} ku_k \times \frac{1}{k} && \text{(Somme d'une série télescopique)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} u_k \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

car la série $\sum u_n$ converge. On en déduit que la famille $(v_{n,k})$ est sommable et que sa somme est égale à celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 9 : ✪

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.
2. **Remake :** Soit $r \in [\,0\,;1\,[$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$.

Correction :

1. Puisque $|q| < 1$, alors la famille $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable (et sa somme vaut $1/(1-q)$). On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|q^{|n|}\right| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} |q|^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n<0} |q|^{-n} && \text{(regroupement par paquets)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} |q|^n + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} |q|^p \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

puisque (q^n) est sommable. Ainsi, la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\leq 0} q^{-n} && \text{(regroupement par paquets)} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} q^n + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} q^p \\
&= \frac{1}{1-q} + \frac{q}{1-q} \\
&= \frac{1+q}{1-q}
\end{aligned}$$

2. De même, $\left|re^{\pm i\theta}\right| = r < 1$ donc les familles $(re^{\pm\theta})_{n\in\mathbb{N}}$ sont sommables. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left|r^{|n|}e^{in\theta}\right| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\leq 0} r^{-n} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} r^p \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc la famille est sommable, et :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta} &= \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{in\theta} + \sum_{n\in\mathbb{Z}, n\leq 0} r^{-n}e^{in\theta} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} r^n e^{in\theta} + \sum_{p\in\mathbb{N}^*} r^p e^{-ip\theta} \\
&= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}}
\end{aligned}$$

Exercice 10 : ✪ Prouver que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

Correction : On a une famille positive : on peut faire du deux en un.

$$\begin{aligned}
\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} &= \sum_{q=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1}\right) \\
&= \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q^2} \\
&= \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

et cette famille est bien sommable puisque sa somme est strictement inférieure à $+\infty$.

Exercice 11 : ✪ Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Donner les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sigma(n)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sigma(n)}$$

Correction : On a des familles positives : la somme (éventuellement infinie) ne dépend pas de l'ordre des termes (elle est invariante par permutation). Dès lors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$,

$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}$$

2. Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Correction :

1. Soit $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Alors $p^2+q^2 \leq p^2+q^2+2pq$ car p et q sont positifs, donc $p^2+q^2 \leq (p+q)^2$. De plus,

$$\begin{aligned}
p^2+q^2 - \frac{(p+q)^2}{2} &= \frac{p^2+q^2-2pq}{2} \\
&= \frac{(p-q)^2}{2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

et donc $p^2+q^2 \geq (p+q)^2/2$. On conclut par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. On a des familles positives donc on peut manipuler les sommes sans problèmes (même si elles peuvent être infinies). Notons

$$S = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}}$$

D'après la question précédente, $T \leq S \leq 2T$. On en déduit que la famille de l'énoncé est sommable si et seulement si la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable : en effet, si la famille de l'énoncé est sommable, alors $S<+\infty$ donc $T \leq S < +\infty$ et donc la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, la réciproque est analogue à l'aide de l'autre inégalité. On s'intéresse donc à la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=p+1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}} \qquad n=p+q \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{n^{2\alpha}} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n-1}{n^{2\alpha}}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{n-1}{n^{2\alpha}} \sim \dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}$ et on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : on en déduit que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^{2\alpha}}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable si et seulement si la série $\sum 1/n^{2\alpha-1}$ converge, ce qui est le cas si et seulement si $2\alpha-1>1$ car on a une série de Riemann. En conclusion, la famille de l'énoncé est sommable si et seulement si $\alpha>1$.

Exercice 13 : ✪✪ Généraliser le résultat de la question 8 de l'exercice 7 : si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que la famille $(f(r))_{r\in\mathbb{Q}}$ est sommable si et seulement si f est la fonction nulle.

Correction : Si f est nulle, alors la famille est évidemment sommable. Réciproquement, supposons que f ne soit pas nulle et prouvons que la famille n'est pas sommable. Soit donc $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)\neq 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(x_0)>0$. f étant continue, il existe $\eta>0$ tel que $f(x)\geq f(x_0)/2>0$ sur $[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout n, $r_n\in[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$ et donc $f(r_n)\geq f(x_0)/2$. Par conséquent (sommes de termes positifs donc bien définies)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f(r_n) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{f(x_0)}{2} = +\infty$$

si bien que la famille $(f(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable, et puisque c'est une sous-famille de $(f(r))_{r\in\mathbb{Q}}$, on a le résultat voulu.

Exercice 14 : ✪✪ On rappelle (cf. DM 17) que, pour tout $x\in\,]-1\,;1\,]$, $\ln(1+x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$. Exprimer la

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\frac{\zeta(p)-1}{p}$$

à l'aide de la constante d'Euler.

Correction : Notons S la première somme, bien définie (mais éventuellement égale à $+\infty$) car somme de termes positifs. Dès lors :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{1}{p} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(1/n)^p}{p} && \text{(Théorème de Fubini)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} - \sum_{p=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}(-1/n)^p}{p} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} - \left(\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \left(-\frac{1}{n}\right)\right) && \text{(On n'oublie pas le terme pour } p = 1) \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Le problème est qu'on ne peut pas casser cette somme puisqu'on a des différences (et donc des termes négatifs). Puisque les familles ne sont pas sommables, il faut repasser par les sommes partielles : $S = \lim_{N \to +\infty} S_N$ où

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=2}^{N} \left(\ln(n) - \ln(n-1) - \frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(N) - \ln(1) - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} && \text{(télescopage)} \\
&= \ln(N) - \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) + 1 \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} 1 - \gamma
\end{aligned}$$

puisqu'on rappelle que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \gamma$$

On en déduit que $S = 1 - \gamma$ (notons que le signe est cohérent puisque $\gamma \approx 0.577 < 1$).

Exercice 15 : ✪✪ Justifier que $x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Correction : Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
e^{e^x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nx}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(nx)^p}{n! \times p!}
\end{aligned}$$

On voudrait intervertir les deux sommes : montrons que la famille $\left(\dfrac{(nx)^p}{n!\times p!}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, ce qui est immédiat en faisant le chemin en sens inverse (avec des valeurs absolues) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|\frac{(nx)^p}{n!\times p!}\right| &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(n|x|)^p}{n!\times p!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{n|x|}}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(e^{|x|}\right)^n}{n!}\\
&= e^{e^{|x|}}\\
&< +\infty
\end{aligned}$$

donc la famille est sommable et on peut permuter les deux sommes d'après le théorème de Fubini :

$$e^{e^x} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^p}{n!}\right)\times\frac{x^p}{p!}$$

ce qui est le résultat voulu : en effet, les indices sont muets donc

$$e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{p!}\right)\times\frac{x^n}{n!}$$

et il suffit de poser, pour tout n,

$$a_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{p^n}{p!}$$

pour conclure.

Exercice 16 : ✪✪ Soit $z\in\mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1.

1. Montrer que :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^p}{1-z^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{z^{2p-1}}{1-z^{2p-1}}$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}d(n)z^n$$

   où, pour tout n, $d(n)$ est le nombre de diviseurs strictement positifs de n.

3. Justifier que tout entier $n\geq 1$ s'écrit de façon unique sous la forme $n=2^p(2m+1)$, où p et q appartiennent à $\mathbb{N}$. En déduire que :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{z^{2^p}}{1-z^{2^{p+1}}} = \frac{z}{1-z}$$

Correction :

1. Travaillons d'abord sous réserve de sommabilité (sommabilité que nous prouverons dans un second temps) et notons $f(z)$ la somme de gauche (somme dont nous n'avons pas encore montré l'existence).

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2p}} \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \left(z^p \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(z^{2p}\right)^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} z^{p(2n+1)} \qquad\qquad \text{(Encore une fois, sous réserve de sommabilité)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \left(z^{2n+1}\right)^p \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}}
\end{aligned}
$$

et il suffit de poser $p = n+1$, $n = p-1$ pour conclure. Il suffit à présent de prouver la sommabilité de la famille $\left(z^{p(2n+1)}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$. On prend pour cela le module, et maintenant les sommes sont bien définies (éventuellement égales à $+\infty$) car on somme des termes positifs :

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{p=1}^{+\infty} z^p \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(|z|^{2p}\right)^n \\
&= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}
\end{aligned}
$$

En effet, $|z| < 1$ donc la série (d'indice n) $\sum(|z|^{2p})^n$ converge et

$$
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(|z|^{2p}\right)^n = \frac{1}{1-|z|^{2p}}
$$

Or, $|z|^{2p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ si bien que $\dfrac{|z|^p}{1-|z|^{2p}} \sim |z|^p$: on a des séries à termes positifs équivalents donc de même nature : la série $\sum \dfrac{|z|^p}{1-|z|^{2p}}$ converge donc sa somme est strictement inférieure à $+\infty$, ce qui prouve la sommabilité de la famille et permet de conclure.

2. De même, sous réserve de sommabilité, si on note $g(z)$ la somme de gauche :

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} (z^n)^p \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} z^{np}
\end{aligned}
$$

Faisons le changement d'indice $k = np$ dans la deuxième somme : les puissances ne sont alors que des multiples de n, ce qui donne :

$$
g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ multiple de } n}}^{+\infty} z^k
$$

En appliquant le théorème de Fubini (encore une fois, sous réserve de sommabilité) :

$$
g(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ diviseur de } k}}^{+\infty} z^k
$$

Or, la deuxième somme est la somme d'un terme constant (qui ne dépend pas de n, l'indice de sommation) donc est égale à z^k multiplié par le nombre de termes : le nombre de diviseurs de k, ce qui est le résultat voulu. Il suffit pour conclure de prouver la sommabilité de la famille $(z^{np})_{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2}$, ce qu'on fait comme dans la question précédente (en prenant le module).

3. Si p et q existent, alors p est la valuation dyadique (ou 2-adique) de n i.e. la puissance de 2 dans la décomposition de 2 en produit de facteurs premiers, et $2m+1$ est donc le produit des autres termes dans sa décomposition en produit de facteurs premiers, termes impairs car on a enlevé 2, et donc sont uniques. Réciproquement, si on note p la valuation dyadique de n et $2m+1$ le produit restant, alors on a l'égalité voulue, d'où l'existence et l'unicité de p et m.

Toujours sous réserve de sommabilité, si on note $h(z)$ la somme de gauche :

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty}\left(z^{2^p}\times\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^{2^{p+1}}\right)^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^{p+1}n+2^p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} z^{2^p(2n+1)} \end{aligned}$$

Or, d'après la première partie de la question, la somme (double) ci-dessus n'est rien d'autre qu'un regroupement par paquets de $\mathbb{N}^*$: tout entier peut s'écrire d'une façon unique sous la forme vue précédemment, donc

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n=0}^{+\infty}\bigcup_{p=0}^{+\infty}\{2^p(2n+1)\}$$

Dès lors, d'après le théorème de regroupement par paquets (toujours sous réserve de sommabilité) :

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} z^k \\ &= \frac{z}{1-z} \end{aligned}$$

Il suffit pour conclure de prouver la sommabilité de la famille $(z^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, ce qui est immédiat puisque la série $\sum z^k$ converge absolument puisque $|z|<1$.

Exercice 17 - Un peu de théorie des nombres : ✪✪ Pour tout $n\geq 1$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de n, et $\sigma(n)$ leur somme.

1. Montrer que pour tout $\alpha>1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$$

2. Montrer que pour tout $\alpha>2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)\times\zeta(\alpha-1)$$

Correction : Les sommes sont bien définies (éventuellement égales à $+\infty$) car on somme des termes positifs.

1. Notons S la somme de gauche.

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{k=1\\k|n}}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{\substack{n=1\\n \text{ multiple de } k}}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(kp)^\alpha} \qquad\qquad (p=n/k, n=kp)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}\right)\times\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right)\\
&= \zeta(\alpha)^2
\end{aligned}$$

En particulier, la famille est sommable (mais ce n'était pas demandé).

2. Notons T la somme de gauche.

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{\substack{k=1\\k|n}}^{+\infty}\frac{k}{n^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{\substack{n=1\\n \text{ multiple de } k}}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}k\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(kp)^\alpha} \qquad\qquad (p=n/k, n=kp)\\
&= \left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{\alpha-1}}\right)\times\left(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^\alpha}\right)\\
&= \zeta(\alpha)\times\zeta(\alpha-1)
\end{aligned}$$

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $z\in\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ (avec évidemment $-\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls).

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

2. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = e\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Correction :

1. Il existe $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ tels que

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{X+k}$$

Soit $k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]$. En multipliant par $X+k$ et en évaluant en $-k$, il vient :

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{1}{-k(-k+1)\cdots(-k+(k-1))\times(-k+k+1)\cdots(-k+n)} \\
&= \frac{(-1)^k}{k(k-1)\times\cdots\times 1\times 1\times\cdots\times(n-k)} \\
&= \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

En d'autres termes :

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(X+k)(n-k)!}$$

2. D'après la question précédente, sous réserve de sommabilité, si on note $f(z)$ la somme de gauche (sans avoir encore montré son existence) :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(z+k)(n-k)!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p+q=n}\frac{(-1)^p}{p!(z+p)q!}
\end{aligned}$$

On reconnaît un regroupement par paquets « diagonaux » de $\mathbb{N}^2$ (ou, ce qui revient au même, un produit de Cauchy) si bien que (toujours sous réserve de sommabilité) :

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(z+p)}\times\frac{1}{q!} \\
&= \left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(z+p)}\right)\times\left(\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}\right) \\
&= e\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!(z+p)}
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu, sous réserve de sommabilité. Prouvons donc que la famille $\left(\left|\dfrac{(-1)^p}{p!q!(z+p)}\right|\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable (ou, ce qui revient au même si on prend le point de vue produit de Cauchy, que les deux séries $\sum(-1)^p/p!(z+p)$ et $\sum 1/q!$ convergent absolument). Il suffit de voir que (ici, les sommes sont bien définies, et valent éventuellement $+\infty$, car sommes de termes positifs) :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^p}{p!q!(z+p)}\right| = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!|z+p|}\times\sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e}{p!|z+p|}$$

Or,

$$\frac{e}{p!|z+p|} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{p^2}\right)$$

donc (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs) $\sum e/(p!|z+p|)$ converge donc

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{e}{p!|z+p|} < +\infty$$

La famille est sommable, ce qui permet de conclure.

Exercice 19 : ✪✪✪ Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2n^2}$. 2. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m<n} \frac{1}{m^2n^2}$. 3. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m|n} \frac{1}{m^2n^2}$. 4. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$.

Correction :

1. Notons S_1 cette somme (bien définie, mais éventuellement égale à $+\infty$, car on somme des termes positifs).
$$\begin{aligned} S &= \left(\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^2}\right) \times \left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{6} \times \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^4}{36} \end{aligned}$$
En particulier, cette famille est sommable car $S < +\infty$.
2. Notons S_2 cette somme. Tout d'abord (même si ce n'est pas nécessaire car on somme des termes positifs), la famille $(1/m^2n^2)_{m<n}$ est une sous-famille de la famille de la question précédente qui est sommable donc est elle-même sommable. Ce sera la même chose dans la question suivante. L'idée est en fait de partir de S_1. Si on effectue un regroupement par paquets :
$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m<n} \frac{1}{m^2n^2} + \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m=n} \frac{1}{m^2n^2} + \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m>n} \frac{1}{m^2n^2} \\ &= S_2 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} + S_2 \end{aligned}$$
En effet, les indices étant muets :
$$\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m>n} \frac{1}{m^2n^2} = \sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m<n} \frac{1}{m^2n^2} = S_2$$
Dès lors :
$$\frac{\pi^4}{36} = 2S_2 + \frac{\pi^4}{90}$$
et on trouve finalement que
$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{90}\right) \\ &= \frac{\pi^4}{120} \end{aligned}$$
3. De même, la famille est sommable car sous-famille d'une famille sommable (la famille de la première question) et on note sa somme S_3. On a :
$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ multiple de } m}}^{+\infty} \frac{1}{m^2n^2} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2(km)^2} \qquad (k = n/m, n = km) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^4} \times \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{\pi^4}{90} \times \frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^6}{540} \end{aligned}$$

4. La famille est sommable car sa valeur absolue est la famille de la première question, sommable. Notons sa somme S_4. En faisant des regroupements par paquets successifs (la famille est sommable) :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{n^2}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\left(\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{n^2}\right)\right) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m^2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+(-1)^m\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Or, toujours à l'aide d'un regroupement par paquets :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{6} &= \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

et on trouve finalement que :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{+\infty}\frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{3}{4}\times\frac{\pi^2}{6} \\ &= \frac{\pi^2}{8} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}\left(\frac{\pi^2}{24}+\frac{(-1)^m\pi^2}{8}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{24}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2}+\frac{\pi^2}{8}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2} \end{aligned}$$

Or, avec le même regroupement par paquets, on trouve de même que

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}=\frac{-\pi^2}{12}$$

si bien que

$$\begin{aligned} S_4 &= \frac{\pi^2}{24}\times\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{8}\times\frac{-\pi^2}{12} \\ &= -\frac{\pi^4}{288} \end{aligned}$$

Exercice 20 : ✪✪✪✪ Prouver que la famille $\left(\dfrac{1}{m^2n+mn^2+2mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Correction : Soit $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2$. Notons

$$u_{m,n}=\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}$$

Alors (somme bien définie, éventuellement égale à $+\infty$ car somme de termes positifs) :

$$S \quad = \quad \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(m+n+2)}$$

Décomposons en éléments simples la fraction de la deuxième somme, c'est-à-dire qu'on veut décomposer en éléments simples, pour tout $m\geq 1$, la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{X(X+m+2)}$$

On trouve aisément que

$$\frac{1}{X(X+m+2)}=\frac{1}{(m+2)X}-\frac{1}{(m+2)(X+m+2)}$$

Par conséquent :

$$S=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m(m+2)}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+2}\right)\right)$$

On ne peut pas casser la deuxième somme car il y a une soustraction : repassons par les sommes partielles. Soit $N\geq m+3$ (pour simplifier ci-dessous, mais ce n'est pas très grave si on n'y pense pas) :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+2}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+m+2}\\ &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\sum_{k=m+3}^{N+m+2}\frac{1}{k}\\ &= \sum_{n=1}^{m+2}\frac{1}{n}-\sum_{k=N+1}^{N+m+2}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{k=N+1}^{N+m+2}\frac{1}{k}=\frac{1}{N+1}+\cdots+\frac{1}{N+m+2}\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$$

car somme d'un nombre fini et fixe de termes qui tendent vers 0. En conclusion, ces sommes partielles tendent vers $\displaystyle\sum_{n=1}^{m+2}\frac{1}{n}$ si bien que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+2}\right)=\sum_{n=1}^{m+2}\frac{1}{n}$$

Il en découle que :

$$S \quad = \quad \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m(m+2)}\times\sum_{n=1}^{m+2}\frac{1}{n}\right)$$

On aimerait intervertir ces sommes, mais on aurait alors une somme de $m=n-2$ à $+\infty$, il est donc nécessaire de séparer les cas $n=1$ et $n=2$:

$$\begin{aligned}S &= \sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m(m+2)}\times\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{n=3}^{m+2}\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= \frac{3}{2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m(m+2)}+\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{m=n-2}^{+\infty}\frac{1}{m(m+2)}\right)\end{aligned}$$

Or, on prouve assez facilement (idem, décomposition en éléments simples) que, pour tout k,

$$\sum_{m=k}^{+\infty} \frac{1}{m(m+2)} = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2(n-2)} + \frac{1}{2(n-1)}\right) \\ &= \frac{9}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-2)} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} \end{aligned}$$

On prouve enfin que

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} S &= \frac{9}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

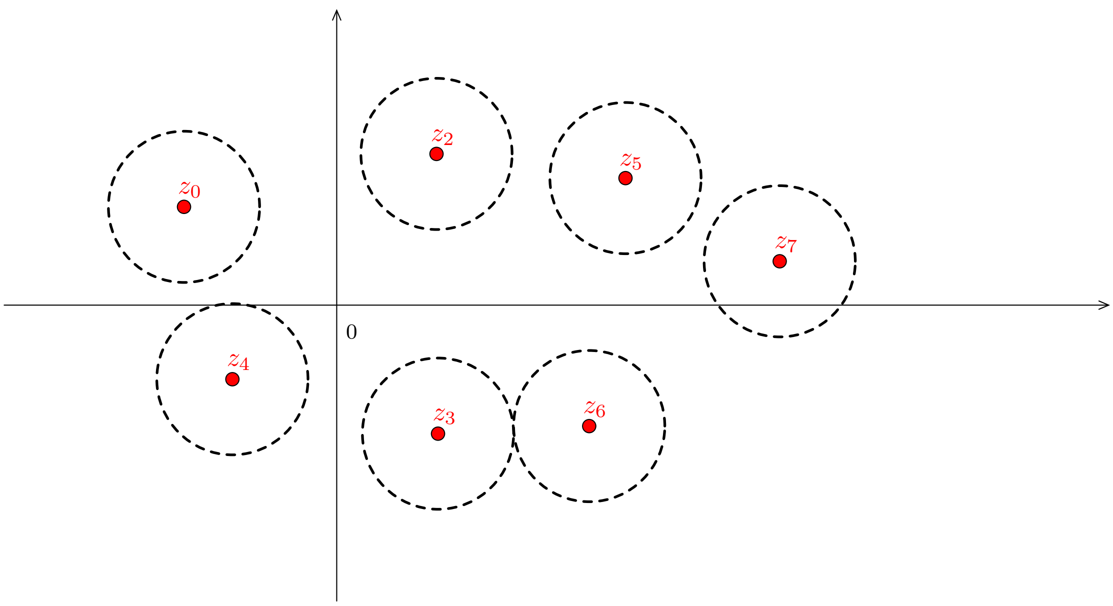
On en déduit que la famille est sommable (sa somme est $< +\infty$) et que sa somme vaut $7/4$.

Exercice 21 : ✪✪✪✪ On se donne une famille de complexes non nuls $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \neq p, |z_n - z_p| \geq 1$. Le but de l'exercice est de prouver que la série $\sum 1/{z_n}^3$ converge.

1. Faire un dessin.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que le disque de centre 0 de rayon N contient au plus $(2N+1)^2$ termes de la suite (z_n).
3. Montrer que l'on peut permuter les termes de la suite (z_n) de manière à obtenir une suite dont les modules forment une suite croissante. Cette nouvelle suite est notée (y_n).
4. Montrer que, pour tout N, $|y_{(2N+1)^2+1}| > N$.
5. En déduire que, pour tout p, $|y_p| > \dfrac{\sqrt{p}-3}{2}$ et conclure.

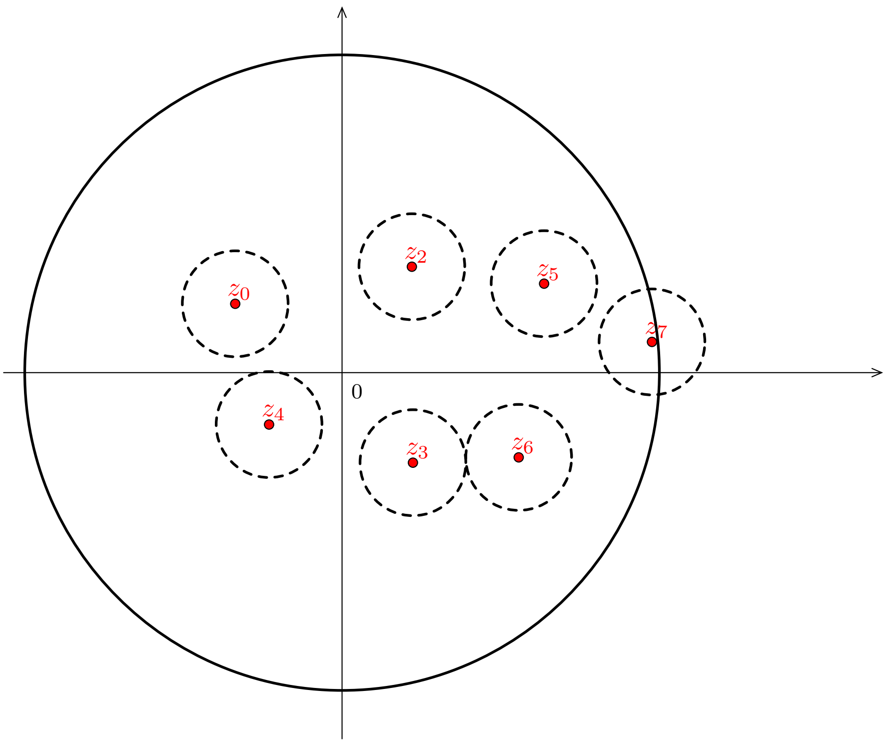
Correction :

1. Les z_k sont distants d'au moins 1 : il y a un « périmètre de sécurité » (on pourrait presque dire qu'ils respectent les gestes barrières) autour d'eux : si on trace un cercle de rayon $1/2$, les disques délimités ne s'intersectent pas (sauf peut-être en un point s'ils sont tangents). On prend des cercles de rayon $1/2$ comme ça deux points distincts sont distants d'au moins 1.

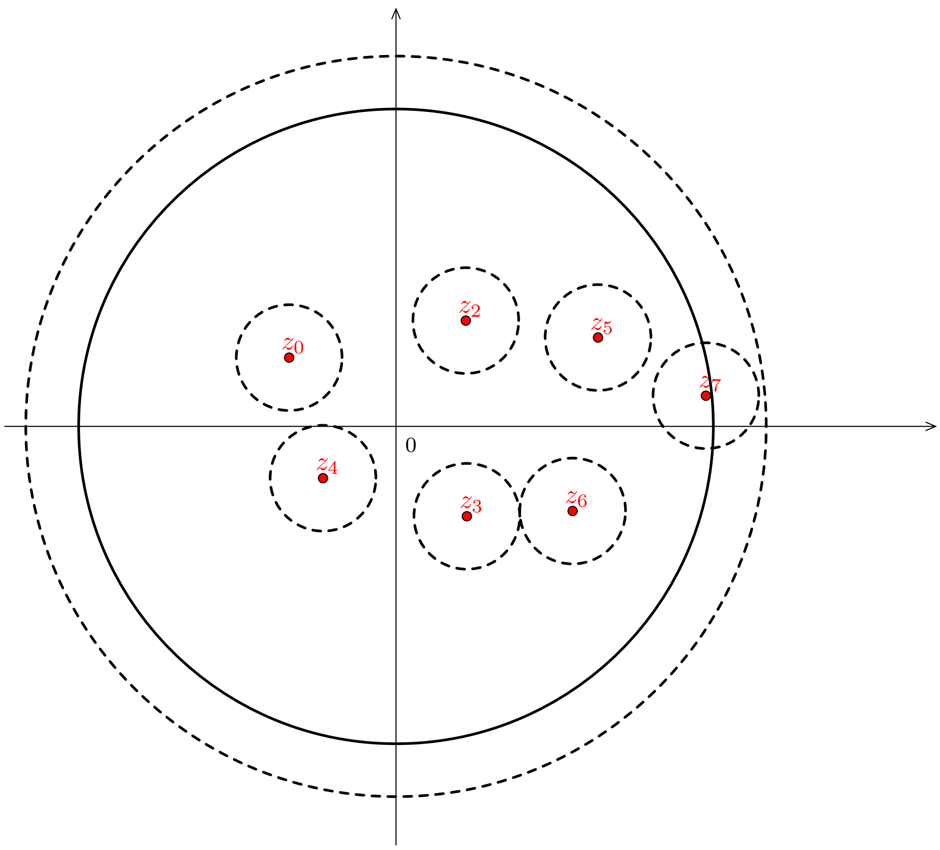


L'idée est simple : cette contrainte va les forcer à s'éloigner de plus en plus de l'origine pour avoir de la place, leur module va augmenter et donc $1/{z_n}^3$ va « vite tendre vers 0 ».

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe k termes de la suite dans ce disque. Alors les k disques associés (i.e. de centre les z_i et de rayon $1/2$) sont forcément disjoints par hypothèse. Cependant, ils ne sont pas forcément inclus dans le disque de centre 0 de rayon N : ils peuvent « déborder », comme sur le dessin ci-dessous.



L'idée est de rajouter « un cylindre de sécurité » autour de ce cercle : notons C le cercle de centre 0 de rayon $N+1/2$:



Or, les k disques de centre 1 sont inclus dans le nouveau disque délimité par C et sont disjoints donc la somme de leurs aires est inférieure à l'aide du disque délimité par C, si bien que

$$k \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \pi \left(N + \frac{1}{2}\right)^2$$

On en déduit que $k \leq (2N+1)^2$.

3. Il suffit de voir que, d'après la question précédente, si on prend un terme z_k quelconque, il n'y a qu'un nombre fini de termes ayant un module inférieur ou égal au sien. On peut donc construire une permutation des termes de la façon suivante :

   (a) Il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite ayant un module inférieur à $|z_0|$ donc l'ensemble des modules admet un minimum : en effet, notons $A = \{|z_k| \,|\, k \in \mathbb{N}\}$. Alors
   $$A = \{|z_k| \,|\, |z_k| \leq |z_0|\} \cup \{|z_k| \,|\, |z_k| > |z_0|\}$$
   Le premier ensemble est fini donc admet un minimum, et le deuxième ensemble ne contient que des termes supérieurs à $|z_0|$ donc au minimum du premier ensemble (qui est inférieur à $|z_0|$) : le minimum du premier ensemble est donc le minimum de A. Il existe donc un terme de module minimal, qu'on note $z_{\sigma(0)}$.

   (b) Parmi les termes restants, on montre de même qu'il existe un terme de module minimal (prenons $i \neq \sigma(0)$: parmi les termes d'indice distinct de $\sigma(0)$, en séparant ceux inférieurs à i et les autres, il y de même un minimum) qu'on note $z_{\sigma(1)}$.

   (c) et on itère le procédé : on prend un terme parmi ceux qui restent, il n'y en a qu'un nombre fini de module inférieur ou égal donc on peut prendre celui de module minimal.

   On a donc construit une permutation de module strictement croissante (c'est injectif par construction car on enlève un terme avant de choisir le suivant, donc deux termes ne peuvent pas être égaux, et tous les éléments sont bien atteints car, pour tout n_0, il n'y a qu'un nombre fini de termes ayant un module minimal donc on finit par tous les épuiser, donc z_{n_0} est à un moment le terme de module minimal donc on finit par le choisir).

4. Découle de la question 1 : si $y_{(2N+1)^2+1} \leq N$ alors (les modules de cette suite formant une suite croissante), $y_1, \dots, y_{(2N+1)^2+1}$ appartiennent au cercle de centre 0 de rayon N, ce qui contredit la premier question.

5. Soit $p \in \mathbb{N}$. L'idée est de minorer p par le plus grand terme de la forme $(2N+1)^2$. Soit donc le plus grand N tel que $(2N+1)^2 < p$. On pourrait prouver que
   $$N = -\left\lfloor \frac{1-\sqrt{p}}{2} \right\rfloor + 1$$
   mais cela ne sera pas nécessaire. On a alors, d'après ce qui précède,
   $$|y_p| \geq |y_{(2N+1)^2+1}| > N$$
   Or, $(2N+1)^2$ est le plus grand entier de cette forme inférieur strict à p, si bien que le suivant est supérieur ou égal à p, si bien que $p \leq (2N+3)^2$ et donc
   $$N \geq \frac{\sqrt{p}-3}{2}$$
   et donc $|y_p| > \dfrac{\sqrt{p}-3}{2}$. Par conséquent, pour p assez grand (pour que $\sqrt{p}-3$ soit positif), par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$ puis par croissance de la fonction cube,
   $$\frac{1}{|y_p|^3} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{p}-3}\right)^3 = \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right)$$
   On conclut comme d'habitude (séries de Riemann, comparaison à termes positifs etc.) que la série $\sum 1/{y_p}^3$ converge absolument donc la famille $(1/{y_p}^3)$ est sommable : par invariance par permutation des termes, la famille $(1/{z_n}^3)$ est sommable donc la série $\sum 1/{z_n}^3$ converge absolument, et donc converge.

Exercice 22 : ✪✪✪✪

1. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :
   $$u_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$
   Justifier l'existence et calculer les quantités suivantes :
   $$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$$
   Conclusion ?

2. Pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose $u_{m,n} = \dfrac{1}{m^2 - n^2}$ si $m \neq n$, et $u_{m,n} = 0$ sinon. Justifier l'existence et calculer la quantité suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n}$$

Montrer sans calcul de somme que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} = -\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}$$

Que peut-on en déduire ?

Correction :

1. Le but du jeu est de prouver que les familles ne sont pas sommables, il est donc illusoire de se dire qu'on va prouver la sommabilité des familles et qu'on va ensuite calculer les sommes comme d'habitude. Commençons par la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2m+1}{m+n+2} - \frac{m}{m+n+1} - \frac{m+1}{m+n+3} \right)$$

où m est un entier fixé. On pourrait donner un équivalent (quand $n \to +\infty$) de $u_{m,n}$ mais puisqu'il faut calculer sa somme, alors revenons à la définition de la somme d'une série convergente, à savoir la limite des sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} u_{m,n} &= \sum_{n=0}^{N} \frac{2m+1}{m+n+2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{m}{m+n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{m+1}{m+n+3} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \frac{2m+1}{m+k+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{m}{m+n+1} - \sum_{p=2}^{N+2} \frac{m+1}{m+p+1} \\
&= \underbrace{\frac{2m+1}{m+2}}_{k=1} + \underbrace{\frac{2m+1}{m+N+2}}_{k=N+1} - \underbrace{\frac{m}{m+1}}_{n=0} - \underbrace{\frac{m}{m+2}}_{n=1} - \underbrace{\frac{2m+1}{m+N+2}}_{p=N+1} - \underbrace{\frac{2m+1}{m+N+3}}_{p=N+2} + \underbrace{\sum_{n=2}^{N} \frac{2m+1-m-(m+1)}{m+n+1}}_{=0} \\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{2m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1} - \frac{m}{m+2}
\end{aligned}$$

D'où l'existence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ et

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} &= \frac{2m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1} - \frac{m}{m+2} \\
&= \frac{m+1}{m+2} - \frac{m}{m+1}
\end{aligned}$$

On a donc le terme général d'une série télescopique dont la suite associée tend vers 1 : la série télescopique associée converge et sa série vaut L : rappelons que, si (u_n) est une suite qui tend vers L, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = L - u_0$$

et donc on trouve que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = 1$$

On trouve de même que, pour tout n,

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

et donc on trouve de même, avec une série télescopique, que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = 0$$

Les deux sommes doubles sont distinctes, on ne peut pas appliquer le théorème de Fubini : la famille n'est pas sommable.

2. Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et soit $N \geq n+1$ (le but du jeu est de faire tendre N vers $+\infty$ donc on peut le supposer supérieur ou égal à $n+1$). On a, en décomposant en éléments simples :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{N} u_{m,n} &= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^2-n^2} + \underbrace{0}_{m=n} + \sum_{m=n+1}^{N} \frac{1}{m^2-n^2} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} \right) + \frac{1}{2n} \sum_{m=n+1}^{N} \left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n} \right) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m-n}}_{k=n-m} - \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m+n}}_{k=m+n} + \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{m=n+1}^{N} \frac{1}{m-n}}_{k=m-n} - \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{m=n+1}^{N} \frac{1}{m+n}}_{k=m+n} \\
&= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{-1}{k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N-n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2n+1}^{N+n+1} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

En regroupant les termes négatifs (la première somme va de 1 à $n-1$ et la deuxième de $n+1$ à $2n-1$ donc cela donne la somme de 1 à $2n-1$, auquel il manque $-1/n$) :

$$\sum_{m=0}^{N} u_{m,n} = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N-n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2n} \sum_{k=2n+1}^{N+n+1} \frac{1}{k}$$

On regroupe à présent la première somme et la dernière : on a la somme de 1 à $N+n+1$ mais il manque le terme d'indice $k = 2n$:

$$\sum_{m=0}^{N} u_{m,n} = \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N+n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{N-n} \frac{1}{k}$$

Les deux sommes restantes se simplifient, et donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{N} u_{m,n} &= \frac{1}{2n} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} \times \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} \times \frac{1}{N+n+1} \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{3}{4n^2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la somme $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$ existe et vaut $3/4n^2$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la somme double

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n}$$

existe et vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Les indices étant muets :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} &= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n,m} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq m}^{+\infty} \frac{1}{n^2-m^2} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1,n\neq m}^{+\infty} \frac{-1}{m^2-n^2} \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} -u_{m,n}
\end{aligned}$$

Or, en passant par les sommes partielles (ou en utilisant la linéarité des sommes infinies de séries convergentes), on trouve que

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} -u_{m,n} = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n}$$

Par conséquent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} = -\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_{m,n} = \frac{-\pi^2}{8}$$

En particulier, ces deux sommes doubles sont distinctes, et donc la famille n'est pas sommable.

Exercice 23 : ✪ On se donne $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ c'est-à-dire que la série $\sum {u_n}^2$ converge. Soient σ une bijection de $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum {v_n}^2$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$?
3. ✪✪✪ Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n|$ lorsque σ parcourt $S_{\mathbb{N}}$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$.

Correction :

1. La famille $({u_n}^2)$ est sommable donc sa somme est invariante par permutation des termes, si bien que la famille $({v_n}^2)$ est sommable, de même somme que $({u_n}^2)$: on en déduit que $\sum {v_n}^2$ converge et que sa somme est la même que celle de $\sum {u_n}^2$.
2. Pour tout n, $|u_n v_n| \leq \dfrac{{u_n}^2 + {v_n}^2}{2}$. Or, les séries $\sum {u_n}^2$ et $\sum {v_n}^2$ convergent donc, par somme, la série $\sum \dfrac{{u_n}^2 + {v_n}^2}{2}$ converge : par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n v_n|$ converge.
3. D'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} {v_n}^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} {u_n}^2$$

puisque la somme des ${v_n}^2$ est égale à la somme des ${u_n}^2$. On en déduit que la somme des ${u_n}^2$ est un majorant, et puisqu'elle est atteinte pour $\sigma = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, c'est la borne supérieure.

Montrons à présent que la borne inférieure est nulle. Fixons $\varepsilon > 0$: puisque 0 est évidemment un minorant de l'ensemble, par caractérisation (pas par caractérisation séquentielle ! Quelle est la différence) de la borne inférieure, il suffit de prouver qu'on peut trouver $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ telle que

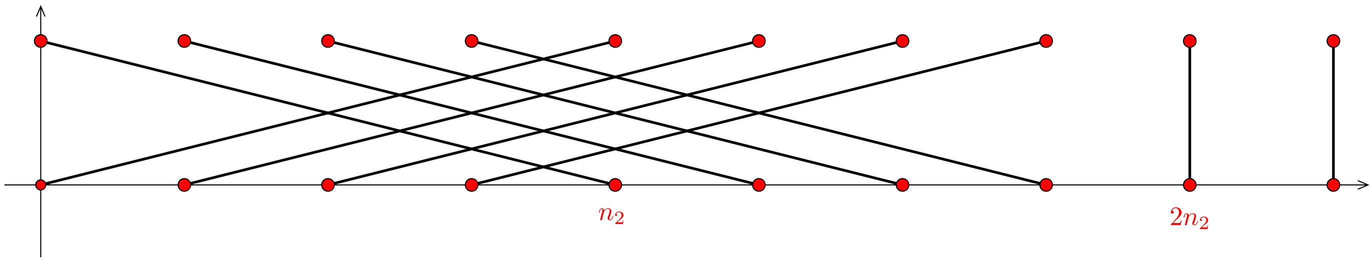
$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n u_{\sigma(n)}| \leq \varepsilon$$

L'idée est d'échanger les premiers termes (qui sont « gros ») et ceux se trouvant « plus loin » (qui sont « petits » : rappelons que, puisque la série $\sum {u_n}^2$ converge, alors ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), avec une espèce (oui, on dit **une** espèce, même si le mot qui suit est masculin, on dit **une** espèce, tout le temps, et en toutes circonstances) de « cylindre de sécurité ».

Puisque $\sum {u_n}^2$ converge, alors la suite de ses restes (qu'on note $(R_N)_{N\in\mathbb{N}}$) tend vers 0 : il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$,

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} {u_n}^2 \leq \varepsilon$$

De plus, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe n_1 tel que, pour tout $n \geq n_1, |u_n| \leq \varepsilon$. L'idée est d'échanger les termes d'indices 0 à $n_1 - 1$ (sur lesquels on n'a aucune information) et les suivants (qui sont inférieurs à ε) et de laisser les autres invariants, ce qui amènera un carré, et on utilisera la majoration de R_N ci-dessus :



Soit $n_2 \in \mathbb{N}$. On aimerait définir σ de la façon suivante :
- Si $n \leq n_2 - 1$, $\sigma(n) = n + n_2$.
- Si $n \in [\![n_2\,;\, 2n_2 - 1]\!], \sigma(n) = n - n_2$.
- Si $n \geq 2n_2, \sigma(n) = n$.

Il n'est pas très difficile de prouver que σ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Notons donc $v_n = u_{\sigma(n)}$ pour tout n. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| &= \sum_{n=0}^{n_2-1} |u_n v_n| + \sum_{n=n_2}^{2n_2-1} |u_n v_n| + \sum_{n=2n_2}^{+\infty} |u_n v_n| \\ &= \sum_{n=0}^{n_2-1} |u_n u_{n+n_2}| + \sum_{n=n_2}^{2n_2-1} |u_n u_{n-n_2}| + \sum_{n=2n_2}^{+\infty} {u_n}^2\end{aligned}$$

On aimerait donc choisir n_2 pour que ces quantités soient toutes « petites ». Il faut évidemment choisir $n_2 \geq N_0$ pour que la dernière somme soit plus petite que ε, et on se dit qu'on va choisir $n_2 \geq n_1$ pour avoir, dans la première somme, $u_{n+n_2} \leq \varepsilon$ et, dans la deuxième, $u_n \leq \varepsilon$. Le problème est que cela donne la majoration

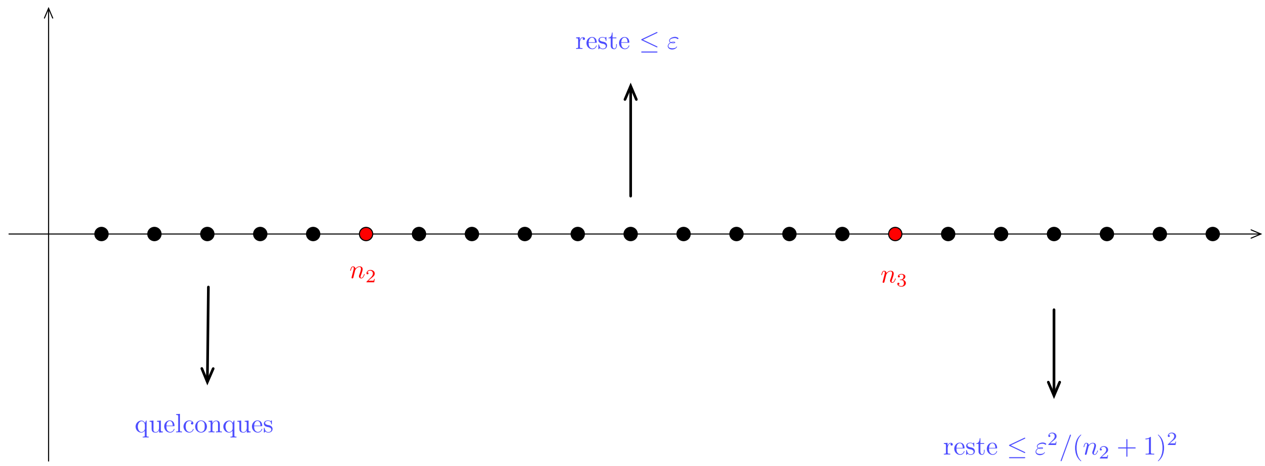
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{n_2-1} |u_n| + \varepsilon \sum_{n=n_2}^{2n_2-1} |u_{n-n_2}| + \sum_{n=2n_2}^{+\infty} {u_n}^2$$

On a donc une majoration faisant intervenir n_2 qui peut être très grand et qui dépend de la suite (on peut s'accorder des libertés, c'est entendu, on peut majorer par $2\varepsilon, 3\varepsilon$ et même $M\varepsilon$ avec M une constante mais celle-ci ne doit pas dépendre de la suite). Cela ne marche pas : il faut donc être plus fin dans la majoration.

On va le faire en 3 temps : on reprend les notations n_0 (rang à partir duquel le reste est inférieur à ε) et n_1 (rang à partir duquel $|u_n| \leq \varepsilon$). Introduisons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. La nouveauté est qu'on va introduire n_3 tel que :

$$\forall N \geq n_3, \sum_{n=N+1}^{+\infty} {u_n}^2 \leq \frac{\varepsilon}{(n_2+1)^2}$$

Récapitulons :
- Entre 0 et $n_2 - 1$, les termes sont quelconques, et à partir de n_2, ils sont $\leq \varepsilon$.
- À partir de n_2, les restes sont également $\leq \varepsilon$.
- À partir de n_3, les restes sont inférieurs à $\varepsilon^2/(n_2+1)^2$.



L'idée est alors d'envoyer les éléments avant n_2, après n_3, d'échanger des éléments après n_3 et de les mettre avant n_2 pour boucher les trous (il faut que ce soit bijectif) et de ne pas toucher aux autres. On définit donc σ de la façon suivante :

- Si $n \leq n_2$, $\sigma(n) = n + n_3 + 1$.
- Si $n \in [\![n_3 + 1\,;\, n_3 + n_2 + 1]\!]$, $\sigma(n) = n - n_3 - 1$.
- Sinon, $\sigma(n) = n$.

On a encore une bijection, et cette fois :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| &= \sum_{n=0}^{n_2} |u_n v_n| + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} |u_n v_n| + \sum_{n=n_3+1}^{n_3+n_2+1} |u_n v_n| + \sum_{n=n_3+n_2+2}^{+\infty} |u_n v_n| \\ &= \sum_{n=0}^{n_2} |u_n u_{n+n_3+1}| + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} {u_n}^2 + \sum_{n=n_3+1}^{n_3+n_2+1} |u_n u_{n-n_3-1}| + \sum_{n=n_3+n_2+2}^{+\infty} {u_n}^2\end{aligned}$$

Or, par choix de n_2 :

$$\sum_{n=n_2+1}^{n_3-1} {u_n}^2 \leq \sum_{n=n_2+1}^{+\infty} {u_n}^2 \leq \varepsilon$$

et idem pour la quatrième somme. Enfin, pour tout $n \geq n_3 + 1$,

$${u_n}^2 \leq \sum_{n=n_3+1}^{+\infty} {u_n}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{(n_2+1)^2}$$

si bien que

$$|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{n_2+1}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{n_2} |u_n u_{n+n_3+1}| \leq \frac{\varepsilon}{n_2+1} \sum_{n=0}^{n_2} |u_n| \leq M\varepsilon$$

où M est un majorant des termes de la suite $(|u_n|)$ (c'est une suite qui converge donc elle est bornée). On prouve de même que la troisième somme est inférieure à $M\varepsilon$ si bien que la somme totale est inférieure à $(2M+2)\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Chapitre 36

Introduction aux espaces affines

« - Couvrez ce sein, que je ne saurais voir :
Par de pareils objets, les âmes sont blessées,
Et cela fait venir de coupables pensées.
- Vous êtes donc bien tendre à la tentation,
Et la chair sur vos sens fait grande impression !
Certes, je ne sais pas quelle chaleur vous monte :
Mais à convoiter, moi, je ne suis point si prompte,
Et je vous verrais nu du haut jusques en bas,
Que toute votre peau ne me tenterait pas. »

Molière, Le Tartuffe

Si rien n'est précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 : ✪ Montrer que

$$\left\{\begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et donner une base de sa direction.

Correction : Notons cet espace A. On commence par donner un élément de A, ce qui est évident :

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in A$$

Soit à présent $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} M \in A & \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, M = \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix} \\ & \iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, M-N = \begin{pmatrix} 2a-b & 0 \\ -a-b & a-b \end{pmatrix} \\ & \iff M-N \in E_1 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} E_1 & = \left\{\begin{pmatrix} 2a-b & 0 \\ -a-b & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = \left\{a\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ & = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

On en déduit que E_1 est un espace vectoriel donc $A = N + E_1$ est un espace affine de direction E_1 et les deux matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ forment une base de E_1 (génératrice par définition, et libre car famille à deux éléments non proportionnels).

Exercice 2 : ✪ Soient $V=a+F$ et $W=b+G$ deux sous-espaces affines de E. Montrer que : $V\cap W\neq\varnothing \iff b-a\in F+G$.

Correction : Supposons que $V\cap W\neq\varnothing$. Soit $x\in V\cap W$. Il existe $f\in F$ et $g\in G$ tels que $x=a+f=b+g$ et donc

$$b-a=f-g=\underbrace{f}_{\in F}+\underbrace{(-g)}_{\in G}\in F+G$$

Réciproquement, supposons que $b-a\in F+G$: il existe $f\in F$ et $g\in G$ tels que $b-a=f+g$ si bien que $b-g=a+f$. Or, $b-g\in b+G=W$ et $a+f\in a+F=V$ donc $b-g=a+f\in V\cap W$ et cette intersection est donc non vide. D'où l'équivalence.

Exercice 3 : ✪ Dans $E=\mathbb{R}^2$, soient D_1 la droite d'équation $x+y=2$ et D_2 la droite d'équation $x-2y=260$. Donner l'expression analytique (dans le repère canonique) de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

Correction : Faisons comme au chapitre 29, à ceci près qu'on a des espaces affines. Soit $M=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrons qu'il existe $M_1=(x_1,y_1)\in D_1$ et $M_2=(x_2,y_2)\in D_2$ uniques tels que $M=M_1+M_2$. Puisque $M_1\in D_1$, alors $x_1=2-y_1$ et $M_2\in D_2$ donc $x_2=260+2y_1$. Puisqu'on est en petite dimension, on peut travailler par équivalences :

$$x=x_1+x_2 \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & x \\ y_1 & + & y_2 & = & y \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} y_1 & + & y_2 & = & y \\ 2-y_1 & + & 260+2y_2 & = & x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} y_1 & + & y_2 & = & y \\ -y_1 & + & 2y_2 & = & x-262 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} y_1 & + & y_2 & = & y \\ & & 3y_2 & = & x+y-262 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y_1 & = & \dfrac{2y-x+262}{3} \\ \\ y_2 & = & \dfrac{x+y-262}{3} \end{array}\right.$$

D'où l'existence et l'unicité de y_1 et de y_2, d'où l'existence et l'unicité de M_1 et de M_2, et la projection sur D_1 parallèlement à D_2 est :

$$p:M(x,y)\mapsto M_1=\left(\frac{x-2y-256}{3},\frac{2y-x+262}{3}\right)$$

Exercice 4 : ✪ Soit $u\in E$ et soit $f\in\mathscr{L}(E)$. Donner une CNS pour que f commute avec la translation de vecteur u.

Correction : Notons t cette translation. On a :

$$\begin{aligned} f \text{ commute avec la translation de vecteur } u &\iff \forall x\in E, f(t(x))=t(f(x)) \\ &\iff \forall x\in E, f(x+u)=f(x)+u \\ &\iff \forall x\in E, f(x)+f(u)=f(x)+u \end{aligned}$$

car f est linéaire. On en déduit que f commute avec t si et seulement si $f(u)=u$.

Chapitre 37

Fonctions de deux variables

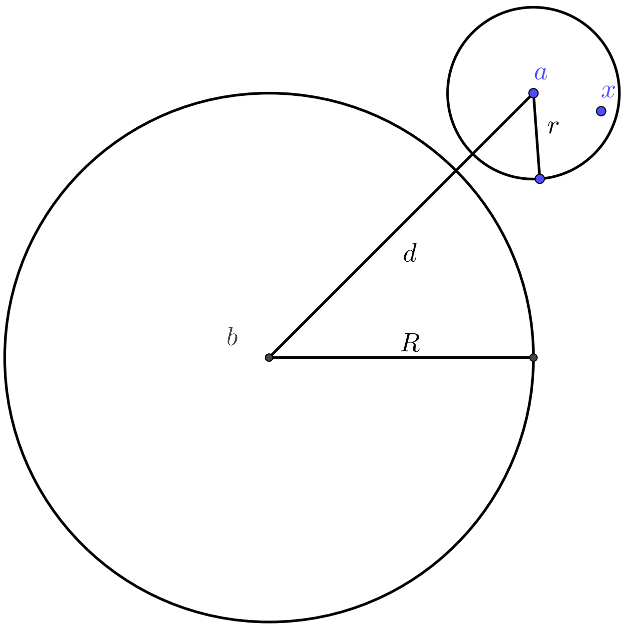
« Today, it's a Chinese food retrieval robot. Tomorrow, it travels back in time and tries to kill Sarah Connor. »

The Big Bang Theory

37.1 Topologie

Exercice 1 : ✪✪ Montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.

Correction : Soit donc $B = B_F(b, R)$ une boule fermée de centre $b \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $R > 0$, et notons U son complémentaire (on évite de mettre une barre horizontale comme en probas, cela représentera autre chose l'année prochaine). Soit $a \in U$. Montrons qu'il existe $r > 0$ tel que $B_O(a, r) \subset U$. Notons $d = \|a - b\| > R$. On cherche donc r tel que $B_O(a, r) \subset U$.



On pense à prendre $r = d - R$. Soit donc $r = d - R$ et soit $x \in B_O(a, r)$ (de sorte que $\|a - x\| < r$), et montrons que $x \notin B$. Par inégalité triangulaire,

$$\|x - b\| = \|x - a + a - b\| \geq \|a - b\| - \|a - x\| > d - r = d - (d - R) = R$$

si bien que $x \notin B$ donc $x \in U$ donc $B(a, r) \subset U$: U est un ouvert.

37.2 Limites et continuité

Exercice 2 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ par $f(x, y) = \dfrac{2xy - x^2}{x^2 + y^2}$. Étudier la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'application $y = mx$ pour $m \in \mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Correction : Soit $x \neq 0$. Si on se restreint à la droite d'équation $y = mx$:

$$\begin{aligned} f(x, mx) &= \frac{2mx^2 - x^2}{x^2 + m^2x^2} \\ &= \frac{2m-1}{1+m^2} \\ &\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{2m-1}{1+m^2} \end{aligned}$$

En particulier, si $m = 0$, donc si on tend vers 0 en suivant l'axe des abscisses, alors $f(x, 0) \xrightarrow[x \to 0]{} -1$, tandis que si $m = 1$, donc si on tend vers 0 selon la première bissectrice, alors $f(x, x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1/2$: on a trouvé deux limites différentes quand on arrive en $(0, 0)$ par deux directions différentes donc f n'a pas de limite en $(0, 0)$.

Exercice 3 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 - 2x^2y + 3y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Étudier la limite quand $(x, y) \to (0, 0)$ de la restriction de f aux droites d'application $y = mx$ pour $m \in \mathbb{R}$.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$.
3. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Correction :

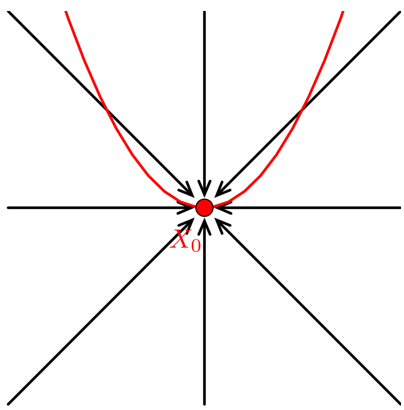
1. Soit $x \neq 0$. Si on se restreint à la droite d'équation $y = mx$:

$$\begin{aligned} f(x, mx) &= \frac{mx^3}{x^4 - 2mx^3 + 3m^2y^2} \\ &= \frac{mx}{x^2 - 2mx + 3m^2} \end{aligned}$$

   Si $m = 0$ alors $f(x, mx) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ tandis que si $m \neq 0$, $f(x, mx) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Ainsi, peu importe m, cette limite est nulle.
2. Soit $x \neq 0$. Si on se restreint donc à cette parabole :

$$\begin{aligned} f(x, x^2) &= \frac{x^4}{x^4 - 2x^4 + 3x^4} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   On en déduit que $f(x, x^2)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand $x \to 0$: f n'est pas continue en 0. On a dit en cours que tendre vers 0 en arrivant de toutes les direction ne suffit pas, on peut arriver en 0 n'importe comment ! On voit que quand on arrive selon la parabole d'équation $y = x^2$, alors $f(x, y)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$!



Exercice 4 : ✪ Pour une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère trois types de limites :

- $(A) \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
- $(B) \displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right)$
- $(C) \displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$

1. Montrer que deux de ces limites peuvent exister et être égales sans que la troisième n'existe.
2. Montrer qu'une de ces limites peut exister sans que les deux autres n'existent.
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

On pourra s'intéresser aux fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{\sin(x)}{y^2} \qquad \text{et} \qquad f_4(x,y) = \frac{\sin(y^2)}{x}$$

1. Montrons que (B) et (C) peuvent exister et être égales sans que A n'existe. Intéressons-nous à f_2. Soit $x \neq 0$.
$$\frac{xy}{x^2+y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$
puis $0 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ donc B existe et vaut 0. De même, en fixant y et en faisant tendre x puis y vers 0, alors C existe et est nulle. Cependant, A n'existe pas : en effet, $f_2(x,x) = 1/2 \xrightarrow[x\to 0]{} 1/2$ et $f(x,-x) = -1/2 \xrightarrow[x\to 0]{} -1/2$ donc (A) n'existe pas.
2. Si on s'intéresse à f_3, alors en fixant $y \neq 0$, $f_3(x,y) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$ donc (C) existe et est nulle. Cependant, si on fixe $x \in \left]0\,;\pi\right[$, alors $y \mapsto f_3(x,y)$ n'a pas de limite (finie) en $+\infty$ donc (B) n'existe pas. Il en découle en particulier que (A) n'existe pas, même s'il suffit d'examiner $f(x,x)$ pour cela. De même avec f_4, (B) existe mais (A) et (C) n'existent pas. Cependant, si (A) existe alors (B) et (C) sont égales (et égales à (A)).
3. On montre aisément que, pour f_1, (B) vaut 1 et (C) vaut -1.

Exercice 5 : ✪✪ Étudier la limite à l'origine de $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Correction : Première preuve : en epsilonant. On sait que $\sin(u)/u \xrightarrow[u\to 0]{} 1$. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in \mathbb{R}^*, |u| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{\sin(u)}{u} - 1\right| \leq \varepsilon$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ donné ci-dessus. Si $\|(x,y)\| \leq \sqrt{\eta}$, alors $|x| \leq \|(x,y)\|$ et idem pour $|y|$ si bien que $|xy| \leq \eta$ et donc

$$|f(x,y) - 1| \leq \varepsilon$$

On en déduit que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 1$.

Deuxième preuve : à l'aide d'une formule de Taylor. On montre aisément, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction sinus entre 0 et u que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u) - u| \leq u^2/2$ (on peut même faire mieux et majorer par $|u|^3/6$). Dès lors, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2$,

$$\left|\frac{\sin(xy)}{xy} - 1\right| = \left|\frac{\sin(xy) - xy}{xy}\right| \leq \frac{|xy|}{2} \leq \frac{\|(x,y)\|^2}{2}$$

Le membre de droite tend vers 0 quand $(x,y) \to (0,0)$ et donc on peut conclure de la même façon.

Exercice 6 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$. Interprétation géométrique ?
2. Montrer cependant que f n'est pas continue en 0. Comment expliquer cet apparent paradoxe ?

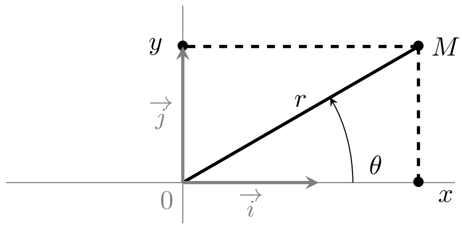
Correction :

1. Soit donc $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $r > 0$.

$$\begin{aligned} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) &= \frac{r^3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^4\sin^4(\theta)} \\ &= \frac{r\cos(\theta)\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta) + r^2\sin^4(\theta)} \end{aligned}$$

   Si $\cos^2(\theta) = 0$ alors $\cos(\theta) = 0$ si bien que $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = 0 \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$. Sinon, $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$, d'où le résultat. Interprétation géométrique : on passe en coordonnées, polaires, ce qui est analogue à la notation exponentielle pour les complexes

   Un point $M = (x, y)$ peut se mettre sous la forme $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$ l'angle formé par la droite (OM) avec l'axe des abcisses (on dit parfois que $(0,0)$ n'a pas de coordonnées polaires, mais on peut dire aussi que tout couple $(0, \theta)$ convient) :



   En clair, étudier $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ revient à étudier la continuité de f en étant sur cette droite.
2. De manière analogue à l'exercice 3, $f(x, \sqrt{x}) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1/2$: si on se restreint à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$, alors f tend vers $1/2 \neq f(0,0)$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 7 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x, y) = \frac{f\left(x^2 + y^2\right) - f(0)}{x^2 + y^2}$$

Montrer que $F(x, y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f'(0)$.

Correction : Soit $(x, y) \neq (0, 0)$. f étant $\mathscr{C}^1$, elle est dérivable : d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_{x,y} \in \left]\, 0\,; x^2 + y^2 \,\right[$ tel que $F(x, y) = f'(c_{x,y})$. Or, $x^2+y^2 = \|(x, y)^2\|$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $c_{x,y} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$ et f' est continue, d'où le résultat.

Exercice 8 : ✪✪ Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

1. $f(x, y) = \dfrac{\sin(x^2 + y)}{\sqrt{1 + x^2 e^y}}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$
3. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
4. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
5. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
6. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
7. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x| + |y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
8. $f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

Correction :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ par théorèmes généraux (composée, quotient, produit de fonctions continues).

2. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\Delta$ où Δ est la droite d'équation $y=-x$. Soit $X_0=(x_0,-x_0)\in\Delta$. Si $x_0\neq 0$, alors

$$f(x_0+h,-x_0+h)=\frac{(x_0+h)(-x_0+h)}{2h}\xrightarrow[h\to 0^+]{}-\infty$$

car le numérateur tend vers $-{x_0}^2<0$ et le dénominateur vers 0^+, donc f n'est pas continue en X_0. Supposons à présent que $x_0=0$, si bien qu'on s'intéresse à la continuité à l'origine. L'idée est que si y est proche de $-x$ alors xy sera proche de $-x^2$ mais $x+y$ sera presque nul : l'idée est donc de prendre y presque égal à $-x$ avec une erreur négligeable devant x^2. On s'intéresse donc à

$$f(x,-x+x^3)=\frac{x(-x+x^3)}{x^3}\sim-\frac{1}{x}$$

qui ne tend pas vers 0 quand $x\to 0$ donc f n'est pas continue en $(0,0)$. En conclusion, f est continue uniquement sur $\mathbb{R}\backslash\Delta$.

3. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. En se souvenant que $|x|\leq\|(x,y)\|$ et idem pour y, et que $x^2+y^2=\|(x,y)\|^2$, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$|f(x,y)|\leq\frac{\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2}=\|(x,y)\|$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$ (rappelons que $(x,y)\to(0,0)$ est équivalent à $\|(x,y)\|\to 0$).

4. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et pour tout $x\neq 0$,

$$f(x,0)=1\xrightarrow[x\to 0]{}1\qquad\text{et}\qquad f(0,x)=-1\xrightarrow[x\to 0]{}-1$$

donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

5. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ et pour tout $(x,y)\neq(0,0)$:

$$|f(x,y)|\leq\frac{|x|^3+|y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{2\|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2}$$

et on conclut comme au 3 que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

6. f est encore continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. De même, on montre que $|f(x,y)|\leq\|(x,y)\|$ donc f est aussi continue en $(0,0)$.

7. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Soit $\varepsilon>0$ et soit (x,y) tel que $\|(x,y)\|\leq\varepsilon$. Si $x=0$ ou $y=0$ alors $|f(x,y)|\leq\varepsilon$, et sinon

$$|f(x,y)|\leq\frac{|xy|}{|x|}=|y|\leq\|(x,y)\|\leq\varepsilon$$

Dans les deux cas on peut conclure que $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0)$: f est continue en $(0,0)$.

8. f est continue sur $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe des ordonnées. Soit $\varepsilon>0$. Soit $x_0\in\mathbb{R}$ et soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|(x,y)-(x_0,0)\|\leq\varepsilon$. Si $y=0$ alors $f(x,y)=0$ tandis que si $y\neq 0$, alors $|f(x,y)|\leq|y|$. Dans tous les cas,

$$|f(x,y)-f(x_0,0)|\leq|y|$$

Or, $\|(x,y)-(x_0,0)\|=\|(x-x_0,y)\|\geq|y|$ donc $|f(x,y)-f(x_0,0)|\leq\|(x,y)-(x_0,0)\|$. On en déduit que $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(x_0,y)]{}f(x_0,y)=0$: f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

37.3 Calcul de dérivées partielles

Exercice 9 : ✪ Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition) :

1. $f:(x,y)\mapsto x^y$.
2. $f:(x,y)\mapsto\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)$.
3. $f:(x,y)\mapsto\frac{e^{xy}}{x+y}$.

Correction :

1. Sous réserve d'existence, $f(x,y) = e^{y\ln(x)}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ qui est bien un ouvert. f est $\mathscr{C}^1$ par théorème généraux et, si $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} \times x^y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \ln(x) \times x^y$$

2. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ (qui est bien un ouvert) car composée de fonctions $\mathscr{C}^1$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

3. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash D$ avec D la droite d'équation $y = -x$ et $\mathbb{R}^2\backslash D$ est bien un ouvert. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x+y} \times e^{xy} - \frac{e^{xy}}{(x+y)^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x+y} \times e^{xy} - \frac{e^{xy}}{(x+y)^2}$$

Exercice 10 : ✪ Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Correction : φ étant continue, elle admet une primitive Φ, qui est par conséquent $\mathscr{C}^1$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $f(x,y) = \Phi(xy) - \Phi(x^2)$. f est par conséquent $\mathscr{C}^1$ car composée, somme et produit de fonctions $\mathscr{C}^1$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\varphi(xy) - 2x\varphi(x^2) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\varphi(xy)$$

Exercice 11 : ✪ Déterminer de deux façons différentes l'équation du plan tangent en X_0 des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto \ln(y + \sin(xy)), X_0 = (0,1)$.
2. $f : (x,y) \mapsto (1+x)e^{\mathrm{sh}(y)+x}, X_0 = (0,0)$.
3. $f : (x,y) = \sqrt{xy}, X_0 = (1,1)$.
4. ✪✪ $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^3 - x^2 + 2xy}{3 + x - x^2y}, X_0 = (2,1)$.
5. $f : (x,y) \mapsto 1 + x - \sqrt{1+x+y}, X_0 = (0,0)$.
6. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}, X_0 = (0,0)$.

Correction : Nous allons le faire de deux façons : en donnant le DL (rappelons qu'il y a unicité du DL quand il y a existence, et donc, les fonctions étant $\mathscr{C}^1$, la partie principale est à chaque fois l'équation du plan), et également en donnant les dérivées partielles explicitement (f est à chaque fois $\mathscr{C}^1$ au voisinage de X_0). On se donne à chaque fois (x,y) au voisinage de X_0 et on pose $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$ (et donc, quand $(x,y) \to (x_0,y_0)$, $(h,k) \to (0,0)$, et on pourra faire un DL, et on remplacera h par $x - x_0$ à la fin, et k par $y - y_0$).

1. D'une part :

$$\begin{aligned} f(h,1+k) &= \ln(1+k+\sin(h(1+k))) \\ &= \ln(1+k+\sin(h+hk)) \\ &= \ln(1+k+\sin(h+\mathrm{o}(h))) \\ &= \ln(1+k+h+\mathrm{o}(h)) \\ &= h+k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|) \end{aligned}$$

D'autre part, $f(0,1) = 0$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\cos(xy)}{y+\sin(xy)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1+x\cos(xy)}{y+\sin(xy)}$$

On trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 1$$

Dans les deux cas, le plan tangent à f en $X_0 = (0,1)$ est le plan tangent d'équation $z = x + (y-1)$ (rappelons que $x = h$ et $y = 1+k$ donc $h = x$ et $k = y - 1$ comme dit ci-dessus).

2. D'une part (ici, on cherche au voisinage de $(0,0)$, inutile d'introduire h et k) :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (1+x)e^{y+\mathrm{o}(y)+x} \\ &= (1+x)\times(1+x+y+\mathrm{o}(\|(x,y)\|)) \\ &= 1+2x+y+\mathrm{o}(\|(x,y)\|) \end{aligned}$$

D'autre part, $f(0,0)=1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+(1+x))\,e^{\mathrm{sh}(y)+x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1+x)\times \mathrm{ch}(y)e^{\mathrm{sh}(y)+x}$$

On trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$$

Dans les deux cas on trouve que le plan tangeant en $X_0=(0,0)$ est le plan d'équation $z=1+2x+y$.

3. D'une part,

$$\begin{aligned} f(1+h,1+k) &= ((1+h)(1+k))^{1/2} \\ &= (1+h+k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|))^{1/2} \\ &= 1+\frac{h+k}{2}+\mathrm{o}(\|(h,k)\|) \end{aligned}$$

D'autre part, $f(1,1)=1$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

On trouve alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{2}$$

Dans les deux cas, on trouve que le plan tangent en $(1,1)$ admet comme équation $z=1+\dfrac{(x-1)+(y-1)}{2}$.

4. D'une part :

$$\begin{aligned} f(2+h,1+k) &= \frac{(2+h)(1+k)^3-(2+h)^2+2(2+h)(1+k)}{3+(2+h)-(2+h)^2(1+k)} \\ &= \frac{(2+h)(1+3k)-(4+4h)+2(2+h)(1+k)+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)}{3+(2+h)-(4+4h)(1+k)+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)} \quad \text{(On ne garde que les termes d'ordre 1)} \\ &= \frac{(2+h+6k)-(4+4h)+(4+2h+4k)+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)}{3+(2+h)-(4+4h+4k)+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)} \\ &= \frac{2-h+10k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)}{1-3h-4k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)} \\ &= (2-h+10k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|))\times(1+3h+4k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|)) \\ &= 2+5h+18k+\mathrm{o}(\|(h,k)\|) \end{aligned}$$

D'autre part, $f(2,1)=2$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(3xy^2+2x)(3+x-x^2y)-(-x^2)\times(xy^3-x^2+2xy)}{(3+x-x^2y)^2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(y^3-2x+2y)(3+x-x^2y)-(1-2xy)(xy^3-x^2+2xy)}{(3+x-x^2y)^2}$$

On trouve que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 5 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 18$$

donc, dans tous les cas, on trouve qu'une équation du plan tangent en $(2,1)$ est $z = 2 + 5(x-2) + 18(y-1)$.

5. D'une part :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + x - (1+x+y)^{1/2} \\ &= 1 + x - \left(1 + \frac{x+y}{2} + \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right)\right) \\ &= \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right) \end{aligned}$$

D'autre part, $f(0,0) = 0$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x+y}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{1+x+y}}$$

si bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2}$$

Dans tous les cas, le plan tangent en $(0,0)$ est le plan d'équation $z = x/2 - y/2$.

6. D'une part,

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (2 + x + \ln(1+y))^{-1/2} \\ &= (2 + x + y + \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right))^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(1 + \frac{x+y}{2} + \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right)\right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(1 - \frac{x+y}{4} + \mathrm{o}\left(\|(x,y)\|\right)\right) \end{aligned}$$

et d'autre part (en partant de l'expression $f(x,y) = (2 + x + \ln(1+y))^{-1/2}$, il est plus facile de donner les dérivées partielles), $f(0,0) = 1/\sqrt{2}$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{2} \times 1 \times (2 + x + \ln(1+y))^{-3/2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+y} \times (2 + x + \ln(1+y))^{-3/2}$$

si bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -\frac{1}{2 \times 2^{3/2}} = \frac{-1}{4\sqrt{2}}$$

On trouve, peu importe la méthode, que le plan tangent en $(0,0)$ est le plan d'équation $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{4\sqrt{2}} - \dfrac{y}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 12 : ✪✪ On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \times \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Correction :

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par théorèmes généraux. Soit $(x,y)\neq(0,0)$.

$$|f(x,y)|\leq |x|\times|y|\times\frac{|x|^2+|y|^2}{x^2+y^2}=|x|\times|y|\leq \|(x,y)\|\times\|(x,y)\|=\|(x,y)\|^2$$

donc, d'après le théorème d'encadrement, $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0=f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$.

2. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. On veut donc prouver que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y)\neq(0,0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\times\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= y\times\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

Montrons que f admet une dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$. Si $x\in\mathbb{R}$, posons $f_1(x)=f(x,0)$ si bien que f_1 est la fonction nulle donc dérivable en 0 et ${f_1}'(0)=0$ c'est-à-dire que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} y\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\dfrac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

On montre comme dans l'exercice 8 que cette fonction est continue en $(0,0)$ (on majore la valeur absolue par $5\|(x,y)\|$). De même pour la dérivée partielle par rapport à y : si $(x,y)\neq(0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\times\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= x\times\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\frac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

De même, pour tout $y\in\mathbb{R}$, $f(0,y)=0$ donc la fonction $f_2:y\mapsto f(0,y)$ est constante égale à 0 donc est dérivable, de dérivée nulle, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} x\times\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\times\dfrac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

On montre également que cette fonction est continue : les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$, f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 13 : ✪✪ On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
3. Justifier que f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

Correction :

1. Fait dans l'exercice 8.
2. f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ donc admet des dérivées partielles en tout point différent de $(0,0)$, et on montre comme dans l'exercice précédent que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

3. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + xy \times -\frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y(x^2+y^2) - x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ &= \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

si bien que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est la fonction suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas une fonction continue : f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

37.4 Règle de la chaîne

Exercice 14 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f\left(x^2+y, yz\right) = xf(y,z)$$

Dériver cette relation par rapport aux trois variables x, y, z.

Correction : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Si on dérive par rapport à x :

$$2x\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y, yz) = f(y,z)$$

Si on dérive par rapport à y :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^2+y,yz) + z\frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y,yz) = x\frac{\partial f}{\partial x}(y,z)$$

Enfin, en dérivant par rapport à z :

$$y\frac{\partial f}{\partial y}(x^2+y,yz) = x\frac{\partial f}{\partial y}(y,z)$$

Exercice 15 - Une équation aux dérivées partielles : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$.

1. Montrer que si f est homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont aussi homogènes.
2. Montrer que si f est homogène de degré α, alors :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Correction :

1. Supposons donc f homogène de degré α. Soient donc $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda>0$. Dès lors, $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$. En dérivant par rapport à x cette égalité (si deux fonctions g et h sont égales pour tous x et y alors leurs dérivées partielles sont égales, ce n'est pas vrai si l'égalité n'est que ponctuelle, c'est la même chose que pour les fonctions d'une variable, cf. chapitre 2) :
$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
et $\lambda\neq 0$ donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$
et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est homogène de degré $\alpha-1$. Idem pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
2. Supposons donc f homogène de degré α. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En dérivant par rapport à λ l'égalité $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y)$:
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x,\lambda y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x,\lambda y)=\alpha\lambda^{\alpha-1}f(x,y)$$
D'après la question précédente, cela donne :
$$x\lambda^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\lambda^{\alpha-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\alpha\lambda^{\alpha-1}f(x,y)$$
Il suffit de simplifier par $\lambda^{\alpha-1}$ non nul pour conclure.

Exercice 16 : ✪ Soit $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.

1. On définit
$$\varphi:\begin{cases}\mathbb{R}^* & \longrightarrow \quad \mathbb{R}\\ t & \longmapsto f\left(e^t,t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}$$
Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer sa dérivée à l'aide des dérivées partielles de f.
2. On définit
$$\psi:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}\\ (u,v) & \longmapsto f\left(u+v,uv\right)\end{cases}$$
Montrer que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

Correction :

1. Les fonctions $t\mapsto e^t$ et $t\mapsto t+1/t$ sont $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc, d'après la règle de la chaîne, φ est $\mathscr{C}^1$ et :
$$\forall t\in\mathbb{R}^*,\varphi'(t)=e^t\times\frac{\partial f}{\partial x}\left(e^t,t+\frac{1}{t}\right)+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\times\frac{\partial f}{\partial y}\left(e^t,t+\frac{1}{t}\right)$$
2. Les fonctions $g:(u,v)\mapsto u+v$ et $h:(u,v)\mapsto uv$ sont $\mathscr{C}^1$. Dès lors, ψ est $\mathscr{C}^1$. Soit $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Tout d'abord :
$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))+\frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\\ &= 1\times\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv)+v\times\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv)\end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v),h(u,v))+\frac{\partial h}{\partial v}(u,v)\times\frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v),h(u,v))\\ &= 1\times\frac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv)+u\times\frac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv)\end{aligned}$$
si bien que

$$\nabla\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv) + v \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(u+v,uv) + u \times \dfrac{\partial f}{\partial y}(u+v,uv) \end{pmatrix}$$

Exercice 17 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Calculer la dérivée de $g : x \mapsto f(x, f(x,x))$.
2. Calculer les dérivées partielles de $h_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$ et $h_2 : (x,y) \mapsto f(x, f(x,y))$.

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $\psi : x \mapsto f(x,x)$. D'après la règle de la chaîne, ψ est dérivable et :

$$\psi'(x) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$$

Dès lors, si on pose $\varphi : x \mapsto x$, alors, toujours d'après la règle de la chaîne :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \varphi'(x) \times \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \psi'(x) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x) \right) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,x)) \end{aligned}$$

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial h_1}{\partial x}(x,y) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial y}(y,x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h_1}{\partial y}(x,y) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$$

Enfin :

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(x,y) = 1 \times \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,y)) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial h_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x,y))$$

37.5 Recherche d'extrema

Exercice 18 : ✪✪ Étudier l'existence d'éventuels extrema locaux et globaux des fonctions suivantes.

1. $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.
2. $f : (x,y) \mapsto e^{x\sin(y)}$.
3. $f : (x,y) \mapsto 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$.
4. $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

Correction : Les quatre fonctions sont à chaque fois $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-y) + 3(x+y)^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2(x-y) + 3(x+y)^2$$

Alors

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(x-y)+3(x+y)^2 &=& 0 \\[2mm] -2(x-y)+3(x+y)^2 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(x-y) &=& -3(x+y)^2 \\[2mm] 2(x-y) &=& 3(x+y)^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2(x-y) &=& -2(x-y) \\[2mm] 2(x-y) &=& 3(x+y)^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& 0 \\[2mm] 0 &=& 3(x+y)^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\[2mm] 0 &=& 12x^2 \end{array}\right. \\
&\iff x=y=0
\end{aligned}
$$

On en déduit que $(0,0)$ est l'unique point critique. Or, $f(x,x) = 8x^3$ qui change de signe donc f prend des valeurs positives et négatives au voisinage de 0 : f n'admet pas d'extremum local en 0.

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(y)e^{x\sin(y)} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\cos(y)e^{x\sin(y)}
$$

Alors

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique} &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \sin(y)e^{x\sin(y)} &=& 0 \\[2mm] -x\cos(y)e^{x\sin(y)} &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} \sin(y) &=& 0 \\[2mm] x &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

puisque, si $\sin(y)=0$, alors $\cos(y)\neq 0$. On en déduit que l'ensemble des points critiques est l'ensemble des $(0,y)$ avec $y \equiv 0[\pi]$. Soit $y_0 \equiv 0[\pi]$. Si (x,y) est un point au voisinage de $(0,y_0)$, alors $x\sin(y)$ peut prendre des valeurs positives comme des valeurs négatives : en effet, si x est au voisinage de 0^+, alors x est positif et $\sin(y)$ change de signe selon que y soit au voisinage de ${y_0}^+$ ou de ${y_0}^-$ (si $y_0 = k\pi$ avec k pair, alors $\sin(y) > 0$ si y est au voisinage de ${y_0}^+$ et $\sin(y) < 0$ si y est au voisinage de ${y_0}^-$, et c'est le contraire si k est impair) donc, au voisinage de $(0,y_0)$, il y aura des points (x,y) aussi proche de $(0,y_0)$ qu'on veut vérifiant $x\sin(y) > 0$ ou $x\sin(y) < 0$, donc avec une image plus grande et d'autres avec une image plus petite que $f(0,y_0) = 1$, donc ce n'est pas un extremum local. En conclusion, f n'a aucun extremum, local ou global.

3. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 10x - 4y - 6 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4x + 2y + 2
$$

Dès lors :

$$(x,y) \text{ est un point critique} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 4y - 6 &= 0 \\ -4x + 2y + 2 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff x = y = 1$$

On en déduit que $(1,1)$ est l'unique point critique de f. On a $f(1,1) = -2$. Rien ne paraît évident : étudions $f(1+h, 1+k)$ avec $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ (pas forcément au voisinage de $(0,0)$). Alors (l'idée va être de faire apparaître des doubles produits et des identités remarquables) :

$$\begin{aligned} f(1+h,1+k) &= 5(1+h)^2 - 4(1+h)(1+k) + (1+k)^2 - 6(1+h) + 2(1+k) \\ &= 5 + 10h + 5h^2 - 4 - 4h - 4k - 4hk + 1 + 2k + k^2 - 6 - 6h + 2 + 2k \\ &= -2 + 5h^2 - 4hk + k^2 \\ &= -2 + (k-2h)^2 + h^2 \\ &\geq -2 = f(1,1) \end{aligned}$$

donc f admet en $(1,1)$ un minimum global.

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y + y^3 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 2x + 3xy^2$$

Dès lors :

$$
\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique} &\iff \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x+2y &= -y^3 \\ 2x+2y &= -3xy^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x+2y &= -y^3 \\ -y^3 &= -3xy^2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x+2y = -y^3 \\ y=0 \quad \text{ou} \quad y=3x \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=0 \quad \text{et} \quad 2x+2y=-y^3 \\ \text{ou} \\ y=3x \quad \text{et} \quad 2x+2y=-y^3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=y=0 \\ \text{ou} \\ y=3x \quad \text{et} \quad 8x=-27x^3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=y=0 \\ \text{ou} \\ y=3x \quad \text{et} \quad x^2=-8/27 \end{cases} \\
&\iff x=y=0
\end{aligned}
$$

On en déduit que $(0,0)$ est l'unique point critique, avec $f(0,0)=0$. Or, $f(x,0)=x^2>0$ si $x\neq 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un maximum local, tandis que $f(-x,x)=-x^4<0$ si $x\neq 0$ donc $(0,0)$ n'est pas un minimum local : ce n'est pas un extremum local.

Exercice 19 : ✪✪✪ Soit f la fonction définie sur $D=(\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x,y)=e^{x^2+y^2}-\ln(x)-\ln(y)$$

1. Justifier que l'équation $te^t=1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et montrer que cette solution appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet sur D un unique point critique $A=(a,b)$ et que $a=b$ (il n'est pas demandé d'expliciter a).
3. En étudiant la convexité sur chaque direction partant de A, montrer que f admet en A un minimum global.

Correction :

1. Soit $f:t\mapsto te^t$ définie sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=(t+1)e^t$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$+\infty$

Cette équation n'admet pas de solution sur $]-\infty\,;-1]$. De plus, f est continue, strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$, $f(-1)<1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $t \geq -1$ tel que $f(t)=1$, et comme il n'y a aucune solution inférieure à -1, il y a une unique solution sur $\mathbb{R}$, qu'on note α dans la suite. Enfin, $\alpha>0$ puisque $f(0)=0<1$.

2. f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur D. Soit $(x,y)\in D$. Alors :

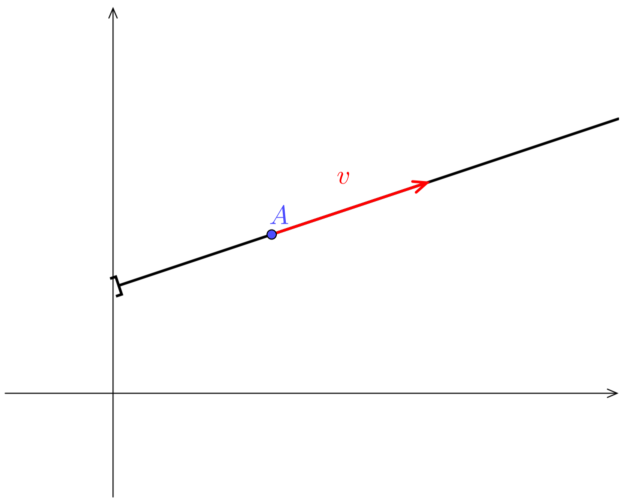
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^{x^2+y^2} - \frac{1}{y}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique} \quad & \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2xe^{x^2+y^2} - \dfrac{1}{x} & = & 0 \\ 2ye^{x^2+y^2} - \dfrac{1}{y} & = & 0 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2e^{x^2+y^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ 2e^{x^2+y^2} & = & \dfrac{1}{y^2} \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2e^{x^2+y^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y^2 & = & x^2 \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2e^{x^2+y^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y & = & x \end{array}\right. \qquad \text{(car } x \text{ et } y \text{ sont positifs)} \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2e^{2x^2} & = & \dfrac{1}{x^2} \\ y & = & x \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x^2e^{2x^2} - 1 & = & 0 \\ y & = & x \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x^2 & = & \alpha \\ y & = & x \end{array}\right. \\
& \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \sqrt{\alpha/2} \\ y & = & x \end{array}\right.
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

3. Soit $v=(h,k)\neq(0,0)$ et étudions la fonction $\varphi : t \mapsto f(A+tv)$ (définie sur un ensemble I qui dépend de v et qu'on ne cherchera pas à expliciter). En d'autres termes, φ est la restriction de f à la droite passant par A de direction v, et I est l'ensemble des t tels que $A+tv\in D$ i.e. tels que $A+tv$ ne sorte pas du quart de plan (ouvert) $(\mathbb{R}_+^*)^2$:



Alors, par composition, φ est $\mathscr{C}^1$. Soit $t \in I$. Alors

$$\begin{array}{rcl} \varphi(t) & = & f(a+th, a+tk) \\ & = & e^{(a+th)^2+(a+tk)^2} - \ln(a+th) - \ln(a+tk) \\ & = & e^{2a^2+2ta(h+k)+t^2(h^2+k^2)} - \ln(a+th) - \ln(a+tk) \end{array}$$

On en déduit que φ est dérivable deux fois et :

$$\varphi'(t) = (2a(h+k) + 2t(h^2+k^2))e^{a^2+2ta(h+k)+t^2(h^2+k^2)} - \frac{h}{a+th} - \frac{k}{a+tk}$$

et

$$\varphi'(t) = (2a(h+k)+2t(h^2+k^2))^2 e^{2a^2+2ta(h+k)+t^2(h^2+k^2)} + 2(h^2+k^2)e^{2a^2+2ta(h+k)+t^2(h^2+k^2)} + \frac{h^2}{(a+th)^2} + \frac{k^2}{(a+tk)^2} > 0$$

c'est-à-dire que φ est convexe. Par conséquent, le graphe de φ est au-dessus de ses tangentes, et $\varphi'(0) = 0$. En effet :

$$\begin{array}{rcl} \varphi'(0) & = & 2a(h+k)e^{2a^2} - \dfrac{h}{a} - \dfrac{k}{a} \\ & & \\ & = & \dfrac{(h+k) \times (2a^2e^{2a^2} - 1)}{a} \end{array}$$

ce qui vaut 0 car on a vu que $2a^2e^{2a^2} - 1 = 0$ (rappelons que a est la valeur commune de l'abscisse et de l'ordonnée de A). Dès lors, la tangente en a est horizontale et a donc pour équation $y = \varphi(a) = f(a,a) = f(A)$. On en déduit que pour tout t, $\varphi(t) \geq f(A)$. Finalement, pour tout $X = (x,y) \in D$, il existe v tel que X soit sur la droite dirigée par v (partant de A) si bien qu'il existe t et v tels que $f(X) = \varphi(t)$ donc, d'après ce qui précède, $f(X) \geq f(A)$: f admet bien en A un minimum global.