Chapitre 13

Limites et Continuité

Le but de ce chapitre est de démontrer tous les résultats concernant les limites d'une fonction et la continuité. Nous allons donc revoir certains résultats que nous avons déjà vus dans le chapitre 2. Sauf indication contraire (dans le paragraphe VI), les fonctions sont définies sur un domaine D, union d'intervalles d'intérieur non vide (par exemple $D = \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} = D_{\tan}$), a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D (par exemple, si $D = \mathbb{R}^*$, alors a peut par exemple être égal à 1, 0 ou $\pm\infty$) et f, g, h sont trois fonctions définies sur D et à valeurs réelles.

I Limites

I.1 Premier cas : $a = +\infty$

On suppose que $a = +\infty$ est un point adhérent à D. Dans ce cas, les définitions sont tout à fait analogues à celles pour les suites.

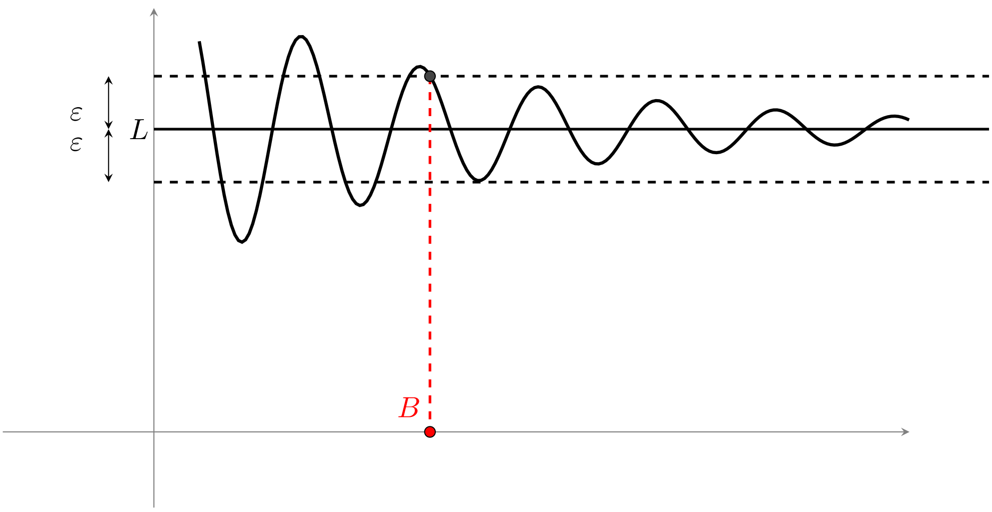
I.1.a Limites finies

Définition. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers L ou admet comme limite L en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \geqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$.

Remarque : La seule différence avec les suites est qu'il ne faut pas oublier de préciser que $x \in D$ sinon $f(x)$ n'est pas défini.



Remarques : Certaines remarques vues pour les suites sont encore valables :

- Plus ε est petit, plus B est grand.
- Dire que $f(x)$ est dans le cylindre dès que x est supérieur ou égal)à B ne signifie pas que $f(x)$ n'est pas dans le cylindre si $x < B$ ni même que B est la plus petite valeur à partir de laquelle on ne sort plus du cylindre.
- Là aussi, on a des formulations équivalentes : on peut majorer par 2ε, par ε^2 etc. La seule contrainte est que la quantité par laquelle on majore puisse être aussi petite qu'on veut. On peut également prendre une inégalité stricte, et on peut prendre $B \in \mathbb{R}$, $B \geqslant 1$ ou $B \geqslant 1000$, tout cela ne change rien, il faut simplement que B puisse être le plus grand possible.

Théorème.

1. Soit $L \in \mathbb{R}$. Si f est constante égale à L alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
2. Soit $\alpha > 0$. Alors $\dfrac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B = 0$. Alors, pour tout $x \geqslant B$, $|f(x) - L| = 0 \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x > 0$. On a :

$$\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \varepsilon \iff x \geqslant \frac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$$

□

Soit $B = 1/\varepsilon^{1/\alpha}$. Nous avons alors, pour tout $x \geqslant B$, $0 < \dfrac{1}{x^\alpha} \leqslant \varepsilon$ et donc $\left|\dfrac{1}{x^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, $\dfrac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Inutile de prendre la partie entière $(+1)$: B n'a pas besoin d'être entier ici !

Remarque : La méthode vue pour donner la limite vue dans le chapitre 12 est encore valable pour les fonctions : majorer $|f(x) - L|$ par des quantités qui tendent vers 0 et, dès qu'on a une majoration simple, on essaye de trouver un B qui convient.

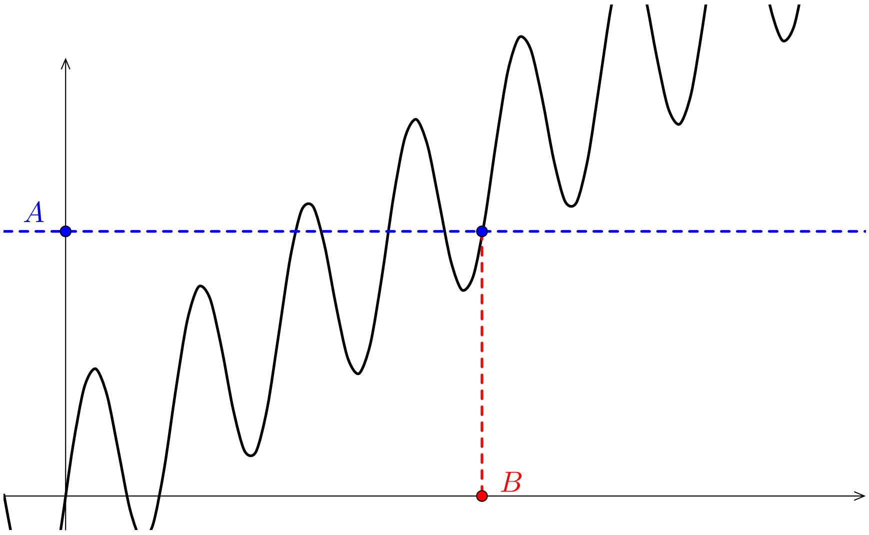
Exemple : S'inspirer du chapitre sur les suites pour prouver que $\dfrac{\sqrt{x}\cos(x)}{x^2+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (on peut prendre $B = 1/\varepsilon$) : $\rightsquigarrow$ Exercice.

I.1.b Limites infinies

Définition. On dit que f tend vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \geqslant 0, \quad \exists B \geqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A.$$

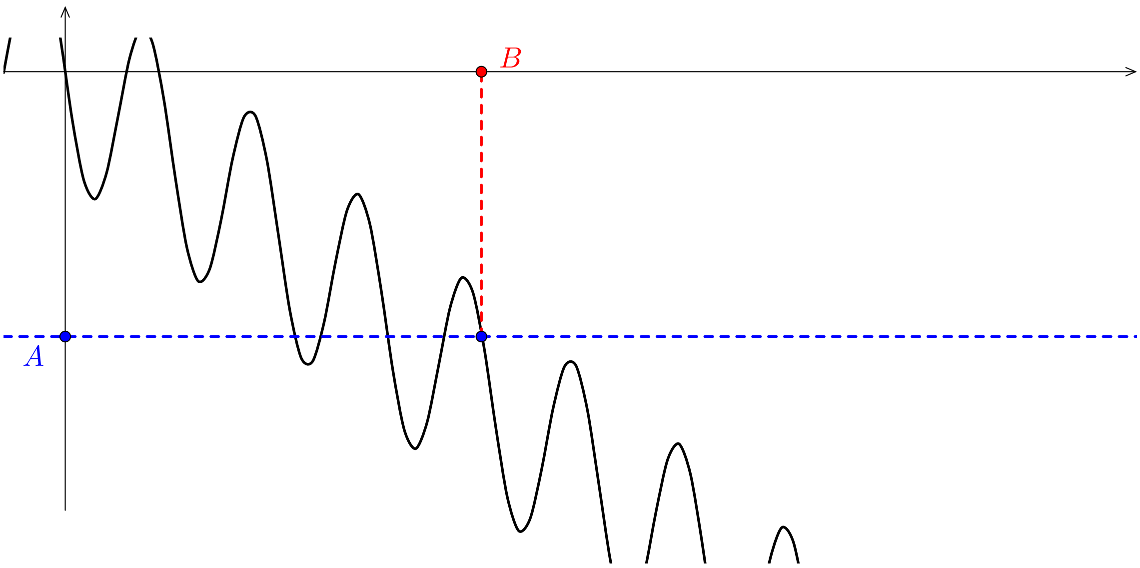
On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.



Définition. On dit que f tend vers $-\infty$ ou admet comme limite $-\infty$ en $+\infty$ si :

$$\forall A \leqslant 0, \quad \exists B \geqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$.



Remarque : Là aussi, on peut facilement adapter les remarques du paragraphe précédent ou du chapitre 12.

Théorème.

1. Soit $\alpha > 0$. Alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration.
1. Soit $A > 0$. Soit $x > 0$. Alors : $x^\alpha \geqslant A \iff x \geqslant A^{1/\alpha}$. Soit $B = A^{1/\alpha}$. Dès lors, pour tout $x \geqslant A^{1/\alpha}$, $x^\alpha \geqslant A$. Ainsi, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Soit $A > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors : $e^x \geqslant A \iff x \geqslant \ln(A)$. Soit $B = \ln(A)$. Si $x \geqslant B$, alors $e^x \geqslant A$: on a bien $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
3. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Cependant, contrairement aux suites, on peut être amené à considérer des limites ailleurs qu'en $+\infty$.

I.2 Deuxième cas : $a = -\infty$

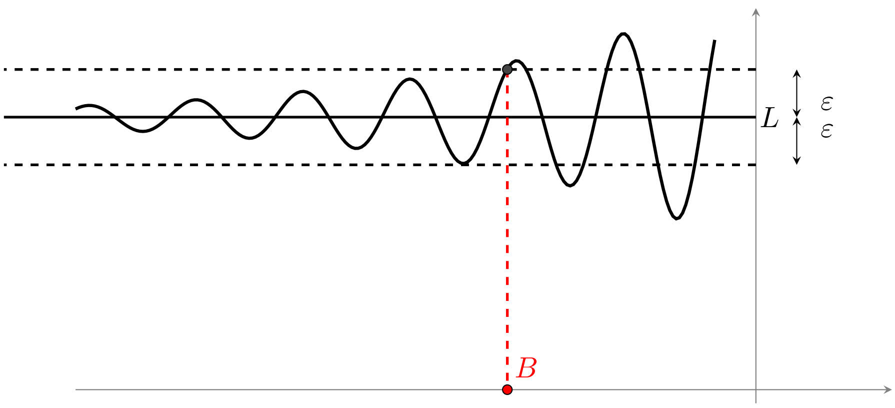
On suppose que $a = -\infty$ est un point adhérent à D.

I.2.a Limites finies

Définition. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers L ou admet comme limite L en $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \leqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} L$.



Théorème.

1. Soit $L \in \mathbb{R}$. Si f est constante égale à L alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Alors $\dfrac{1}{x^n} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.
3. $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

x^α n'est pas défini si α n'est pas entier et si $x \leqslant 0$.

DÉMONSTRATION. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $B = 0$. Alors, pour tout $x \leqslant B$, $|f(x) - L| = 0 \leqslant \varepsilon$ donc $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L$.

2. Soit $n \geqslant 1$. Soit $x < 0$ (on cherche la limite en $-\infty$). Alors $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| = \dfrac{1}{|x|^n}$ si bien que :

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{x^n}\right| \leqslant \varepsilon &\iff \frac{1}{|x|^n} \leqslant \varepsilon \\ &\iff |x| \geqslant \frac{1}{\varepsilon^{1/n}} \end{aligned}$$

$\square$

Posons donc $B = -1/\varepsilon^{1/n}$. Si $x \leqslant B$ alors $|x| \geqslant 1/\varepsilon^{1/n}$ donc $|1/x^n| \leqslant \varepsilon$: on a le résultat voulu.

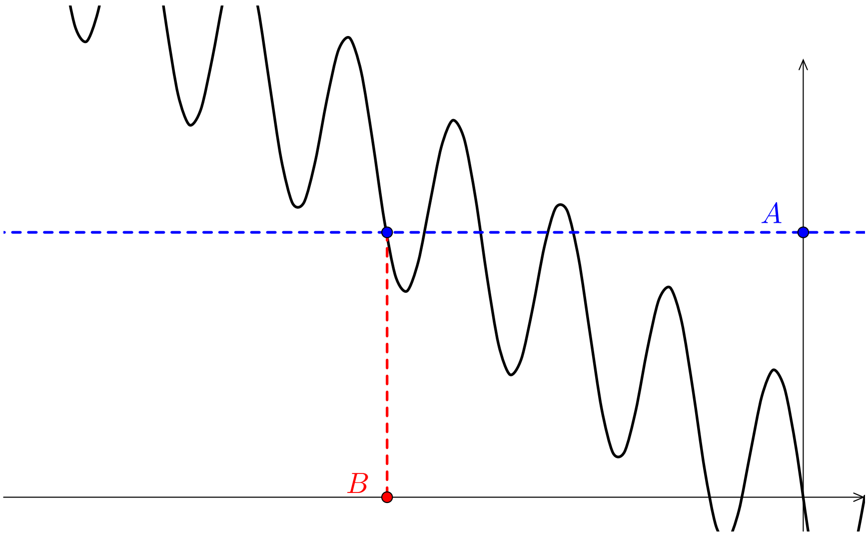
3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $e^x \leqslant \varepsilon \iff x \leqslant \ln(\varepsilon)$. Posons $B = \ln(\varepsilon)$. Il en découle que si $x \leqslant B$ alors $|e^x - 0| = e^x \leqslant \varepsilon$: on a bien le résultat voulu.

I.2.b Limites infinies

Définition. On dit que f tend vers $+\infty$ ou admet comme limite $+\infty$ en $-\infty$ si :

$$\forall A \geqslant 0, \quad \exists B \leqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A.$$

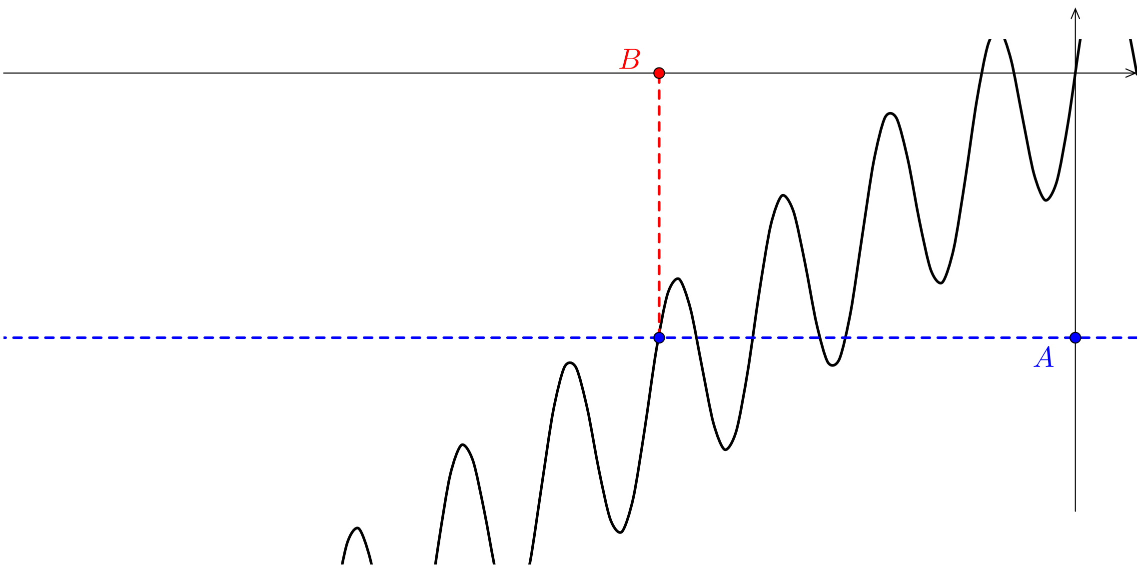
On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$.



Définition. On dit que f tend vers $-\infty$ ou admet comme limite $-\infty$ en $-\infty$ si :

$$\forall A \leqslant 0, \quad \exists B \leqslant 0, \quad \forall x \in D, \quad x \leqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \leqslant A.$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.



Remarque : Là aussi, on peut facilement adapter les remarques du paragraphe précédent ou du chapitre 12.

Théorème. Soit $n \geqslant 1$. Alors $x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ si n est pair et $x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ si n est impair.

Démonstration. Découle du théorème vu dans le paragraphe I.1 et du fait que $x \mapsto x^n$ est paire si n est pair et impaire si n est impair.

I.3 Troisième cas : $a \in \mathbb{R}$

On suppose que a est un réel appartenant à D ou adhérent à D.

I.3.a Limites finies

Ici, la situation est un peu différente de celle rencontrée pour les suites. Intuitivement, f admet une limite L en a si $f(x)$ s'approche autant qu'on veut de L sans plus s'en éloigner quand x s'approche de a donc si, peu importe la précision voulue, notée ε, l'écart entre $f(x)$ et L finit par être plus petit que ε dès que x est assez proche de a. Cela justifie la définition suivante :

Définition. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que f admet L pour limite en a ou tend vers L en a si :

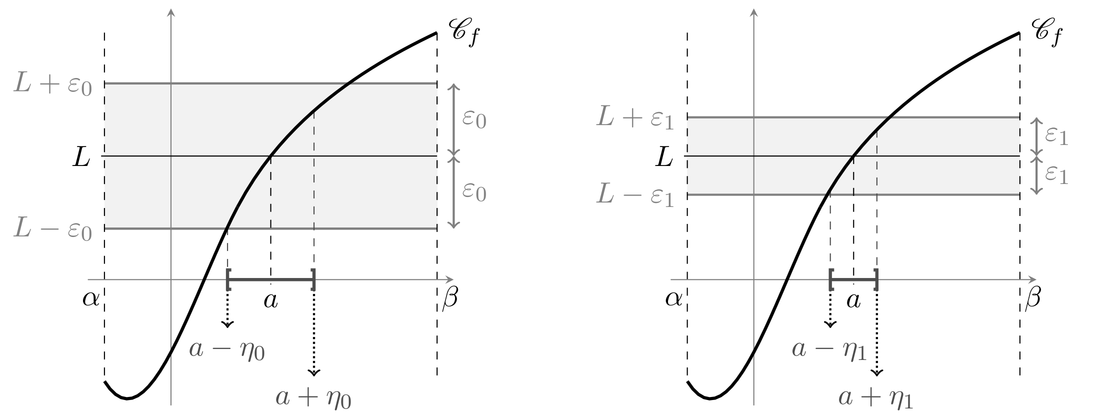
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$.

Remarques :

- Autrement dit, $f(x)$ est aussi proche qu'on veut de L dès que x est suffisamment proche de a.
- Là aussi, remplacer $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ par $|f(x) - L| < \varepsilon$ ou par $|f(x) - L| \leqslant 2\varepsilon$ ou $|x-a| \leqslant \eta$ par $|x-a| < \eta$ dans la définition ne change rien.
- On peut remplacer « $x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ » par « $\forall x \in D \cap [\,a-\eta\,;a+\eta\,], |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ ».
- Comme pour les suites, η dépend de ε : plus ε est petit, meilleure est la précision demandée, et donc plus il faut se rapprocher de a pour l'atteindre. En d'autres termes, plus ε est petit, plus η est aussi petit.

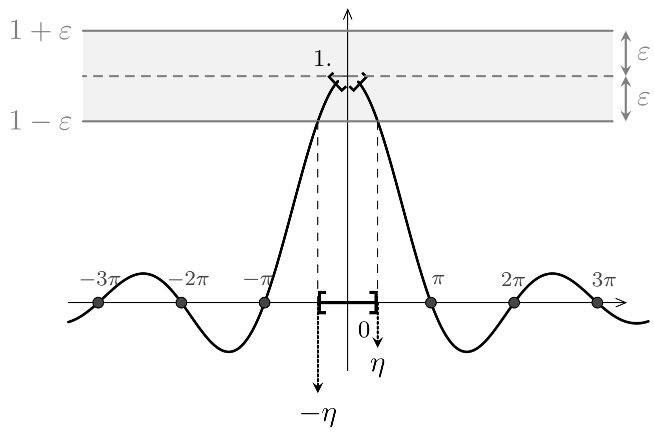
On veut un intervalle centré en a : il ne faut pas prendre « les points d'entrée dans le cylindre à gauche et à droite dans le cylindre » car ils n'ont aucune raison d'être à la même distance de a.



Ci-dessus, à gauche, nous avons une première valeur de ε notée ε_0 et nous avons trouvé $\eta_0 > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,a-\eta_0\,;a+\eta_0\,]$, les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans le cylindre gris (i.e. $[\,L-\varepsilon_0\,;L+\varepsilon_0\,]$). À droite, nous avons choisi une autre valeur de ε notée ε_1 et nous avons trouvé $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,a-\eta_1\,;a+\eta_1\,]$ (un intervalle plus resserré autour de a que dans la figure de gauche), les valeurs de $f(x)$ se retrouvent dans le cylindre gris (i.e. $[\,L-\varepsilon_1\,;L+\varepsilon_1\,]$). Attention : on voit qu'on n'a pas forcément $f(a \pm \eta) = L \pm \varepsilon$! Encore une fois, tout ce qu'on peut affirmer est qu'entre $a-\eta$ et $a+\eta$, $f(x)$ est compris entre $L-\varepsilon$ et $L+\varepsilon$.

Dans les deux exemples ci-contre, l'absence de limite finie en a provient du fait que la courbe de la fonction présente un saut en a. Cela renvoie à l'approche intuitive de la notion de continuité (que l'on verra de façon rigoureuse dans les prochains paragraphes) : « une fonction est continue en a si l'on peut tracer sa courbe au voisinage de a sans lever le crayon. »

On peut également calculer une limite en un point adhérent, même si la fonction n'est pas définie en ce point :



Exemple : Montrons que $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 3]{} \sqrt{3}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{3}| \leqslant \varepsilon \quad & \iff \quad \left| \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3}) \times (\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right| \leqslant \varepsilon \\ & \iff \quad |x-3| \leqslant \varepsilon \times \left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Posons $\eta = \varepsilon\sqrt{3}$. Si $|x-3| \leqslant \eta$ alors $|x-3| \leqslant \varepsilon \times \left(\sqrt{x}+\sqrt{3}\right)$ et donc $|\sqrt{x}-\sqrt{3}| \leqslant \varepsilon$. D'où le résultat.

η peut dépendre de a (ici, 3) mais pas de x !

Remarque : Rappelons que η n'est pas une quelconque valeur optimale dans quelque sens que ce soit. On s'en rend bien compte ci-dessus : η convient si $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ **dès que** $|x-a| \leqslant \eta$: si on trouve une valeur de η qui vérifie cette condition, c'est bon ! Il n'est pas nécessaire qu'elle soit la plus grande possible !

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} |x^n - 0| \leqslant \varepsilon \quad & \iff \quad |x|^n \leqslant \varepsilon \\ & \iff \quad |x| \leqslant \varepsilon^{1/n} \end{aligned}$$

car $u \mapsto u^{1/n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $\eta = \varepsilon^{1/n}$. Si $|x| \leqslant \eta$ alors $|x^n - 0| \leqslant \varepsilon$: c'est le résultat voulu.

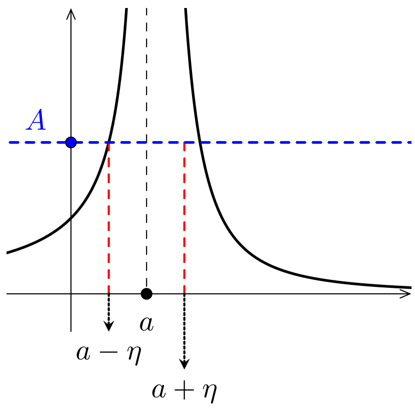
I.3.b Limites infinies

Intuitivement, on dit que f tend vers $+\infty$ en a si $f(x)$ devient aussi grand qu'on veut dès que x est suffisamment proche de a donc si, peu importe A, $f(x)$ finit par être supérieur à A dès que x est suffisamment proche de a. D'où la définition suivante :

Définition. On dit que f admet pour limite $+\infty$ ou tend vers $+\infty$ en a si :

$$\forall A \geqslant 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.



Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est pair alors $\dfrac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.

On peut montrer, à l'aide de la limite à droite et de la limite à gauche, cf. paragraphe II, que, si n est impair, alors cette fonction n'a pas de limite en 0.

DÉMONSTRATION. Soit $A > 0$. Soit $x > 0$.

$$\frac{1}{x^n} \geqslant A \iff x \leqslant \frac{1}{A^{1/n}}$$

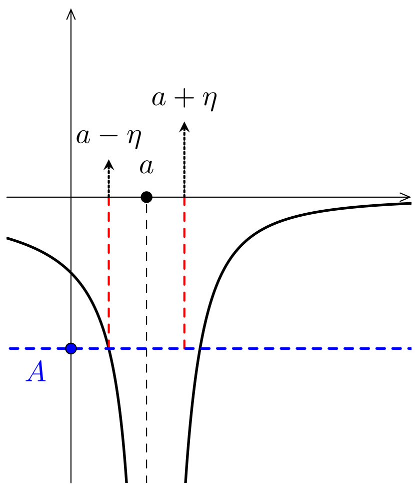
Soit $\eta = 1/A^{1/n}$. Si $x \leqslant \eta$ alors $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| \geqslant A$. n étant pair, la fonction $x \mapsto 1/x^n$ est paire donc cette dernière inégalité est en fait vraie pour tout $x \neq 0$ tel que $|x| \leqslant \eta$ ce qui permet de conclure.

De même :

Définition. On dit que f admet pour limite $-\infty$ ou tend vers $+-\infty$ en a si :

$$\forall A \leqslant 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant A$$

On note alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.



I.4 Vraiment une définition différente ?

Comme pour les suites, les définitions sont en fait toutes les mêmes : si L et a appartiennent à $\overline{\mathbb{R}}$, alors f tend vers L en a si :

$$\forall \begin{matrix}\text{voisinage}\\ V \text{ de } L\end{matrix}, \qquad \exists \begin{matrix}\text{voisinage}\\ W \text{ de } a\end{matrix}, \qquad \forall x \in D, \qquad x \in W \Rightarrow f(x) \in V.$$

I.5 Unicité de la limite

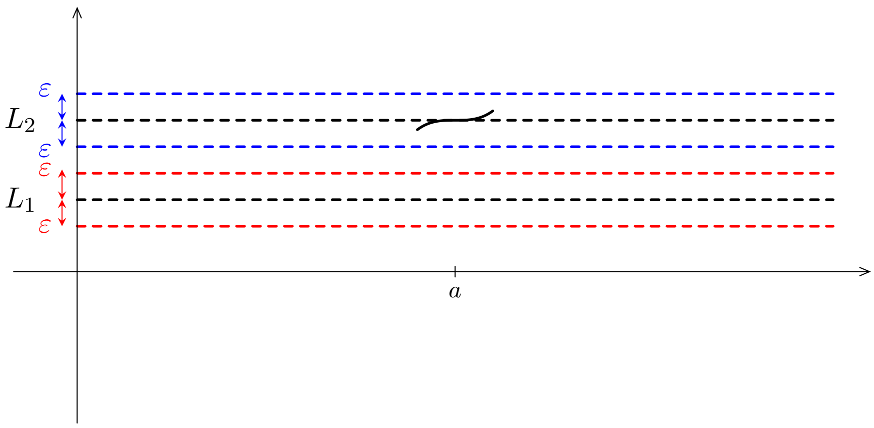
On revient au cas général : a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D.

I.5.a Cas des limites finies

Théorème (Unicité de la limite). Soient L_1 et L_2 deux réels. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$. Alors $L_1 = L_2$.

Démonstration. Supposons $a \in \mathbb{R}$ (raisonnement analogue dans les cas $a = \pm\infty$). Raisonnons par l'absurde et supposons que $L_1 \neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $L_2 > L_1$. Soit donc $\varepsilon = \dfrac{L_2 - L_1}{3} > 0$.

L'idée de la preuve est très simple et est la même que pour les suites : $f(x)$ finit par être très proche de L_1 et très proche de L_2, ce qui n'est pas possible si $L_1 \neq L_2$, car on peut alors construire des cylindres disjoints qui sont censés contenir $f(x)$ pour x suffisamment proche de a, et ce n'est pas possible car ils sont disjoints (voir dessin ci-contre).



Puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$, alors :

$$\exists \eta_1 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$$

η_1 et η_2 n'ont aucune raison d'être égaux !

De même, puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$, alors :

$$\exists \eta_2 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$$

Méthode classique à retenir absolument ! Quelle valeur de η prendre pour que les conditions soient toutes les deux vérifiées ? Dans le cas où $a = +\infty$, on pose $B = \max(B_1, b_2)$ et dans le cas où $a = -\infty$, on prend $B = \min(B_1, B_2)$.

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$. On a alors $|x-a| \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ et $|x - a| \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ donc $|f(x) - L_1| \leqslant \varepsilon$ et $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$ donc :

$$f(x) \leqslant L_1 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad L_2 - \varepsilon \leqslant f(x)$$

En particulier, $L_2 - \varepsilon \leqslant L_1 + \varepsilon$. Or,

$$\begin{aligned} L_1 + \varepsilon - (L_2 - \varepsilon) &= L_1 - L_2 + 2\varepsilon \\ &= L_1 - L_2 + 2 \times \frac{L_2 - L_1}{3} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{3} < 0 \end{aligned}$$

□

ce qui est absurde car $L_2 - \varepsilon \leqslant L_1 + \varepsilon$, donc $L_1 = L_2$.

Remarque : Ainsi, il n'y a qu'une seule limite possible. Dans le cas où $a \in D$, on peut la donner directement.

Proposition. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $a \in D$ et si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ alors $L = f(a)$. En d'autres termes, si f est définie en a et admet une limite en a, cette limite est forcément égale à

$f(a)$, c'est-à-dire que la seule limite **éventuelle** est $f(a)$.

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $A = |f(a)| + 1$. Pour tout $\eta > 0$, $a \in D$, $|a - a| \leqslant \eta$ et $f(a) < A$. On a donc prouvé :

$$\exists A \geqslant 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - a| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad f(a) < A$$

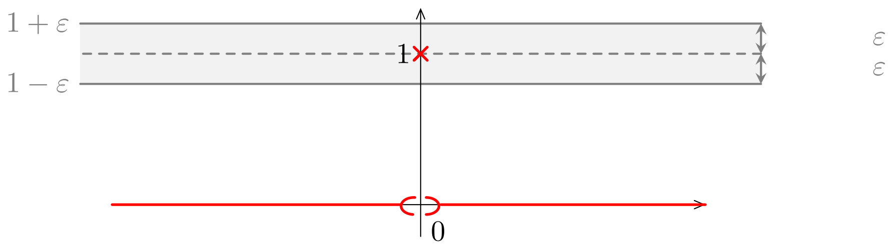
c'est-à-dire que f ne tend pas vers $+\infty$ en a. On montre de même que $L \neq -\infty$: on en déduit que $L \in \mathbb{R}$. Soit donc $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Or, $|a - a| \leqslant \eta$ donc $|f(a) - L| \leqslant \varepsilon$. Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(a) - L = 0$ (cf. chapitre 1) donc $f(a) = L$.

Remarque : On ne vient pas d'écrire que si $a \in D$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$: on vient de prouver que f ne peut pas tendre vers autre chose que $f(a)$, mais f peut ne pas admettre de limite en a !

Exemple : Montrons que $\mathbb{1}_{\{0\}}$ n'admet pas de limite en 0.



D'après ce qui précède, il suffit de prouver que f ne tend pas vers 1, c'est-à-dire :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x - 0| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - 1| > \varepsilon$$

c'est-à-dire qu'il existe un cylindre gris centré en 1 tel qu'il existe des points aussi proches qu'on veut de 0 dont l'image n'est pas dans ce cylindre. Soit $\varepsilon = 1/2$. Soit $\eta > 0$. Soit $x = \eta/2$. Alors $|x - 0| \leqslant \eta$ et $f(x) = 0$ donc $|f(x) - 1| = 1 > \varepsilon$. On a donc prouvé que f ne tend pas vers 1 en 0 donc n'a pas de limite.

I.5.b Cas des limites infinies

Proposition. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque : C'est l'analogue du résultat sur les suites qui dit qu'une suite convergente est bornée. Attention cependant car une fonction qui a une limite finie en a n'est pas forcément bornée sur l'ensemble de son domaine de définition. Par exemple, $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ mais l'exponentielle n'est pas bornée. Cependant, la proposition ci-dessus dit qu'elle est bornée au voisinage de $-\infty$. De même, la tangente est bornée au voisinage de $\pi/4$ mais pas sur son domaine de définition.

Démonstration. On suppose que $a \in \mathbb{R}$ (raisonnement analogue dans les cas $a = \pm\infty$).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Vrai pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant 1 \qquad \square$$

En d'autres termes, pour tout $x \in D \cap [L - \eta ; L + \eta]$, $L - 1 \leqslant f(x) \leqslant L + 1$ c'est-à-dire que f est bornée au voisinage de a.

Corollaire. Si f admet une limite finie en a alors f ne tend ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

Démonstration. Montrer qu'une fonction qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée et qu'une fonction qui tend vers $-\infty$ n'est pas minorée au voisinage de a : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : De plus, on ne peut pas tendre à la fois vers $+\infty$ et vers $-\infty$ en a. On en déduit (comme pour les suites) que le théorème d'unicité de la limite est encore valable pour les limites infinies.

II Limites à droite et à gauche

On suppose dans ce paragraphe que a est un **réel** adhérent à D.

Cela n'a pas de sens de parler de la limite à gauche ou à droite en $\pm\infty$.

II.1 Définition

Définition. On dit que f tend vers L à droite ou admet L comme limite à droite en a si $f_{|D\cap]a;+\infty[}$, la restriction de f à $D\cap]a;+\infty[$, tend vers L en a. On note alors : $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} L$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a, x>a]{} L$.

De même :

Définition. On dit que f tend vers L à gauche ou admet L comme limite à gauche en a si $f_{|D\cap]-\infty;a[}$, la restriction de f à $D\cap]-\infty;a[$, tend vers L en a. On note alors : $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} L$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a, x<a]{} L$.

Pour une limite à droite ou à gauche, a est exclu !

Remarque : Pour la limite à droite, avec des quantificateurs, cela donne :

- Dans le cas où $L\in\mathbb{R}$:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\eta>0,\quad \forall x\in D, 0<x-a\leqslant\eta \quad\Longrightarrow\quad |f(x)-L|\leqslant\varepsilon$$

- Dans le cas où $L=+\infty$:

$$\forall A\geqslant 0, \exists\eta>0, \forall x\in D, 0<x-a\leqslant\eta\Rightarrow f(x)\geqslant A$$

- Dans le cas où $L=-\infty$:

$$\forall A\leqslant 0, \exists\eta>0, \forall x\in D, 0<x-a\leqslant\eta\Rightarrow f(x)\leqslant A$$

C'est exactement la même chose pour les limites à gauche en remplaçant « $0<x-a\leqslant\eta$ » par « $0<a-x\leqslant\eta$ ».

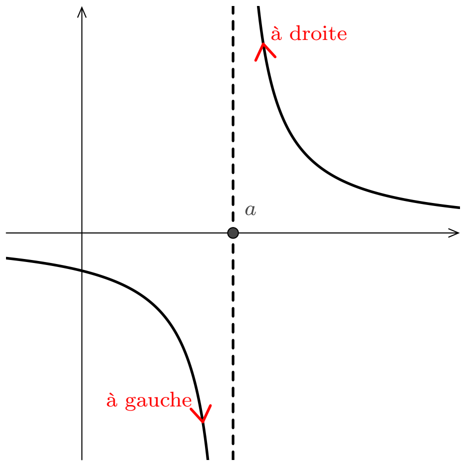
Remarque : La limite à gauche ou à droite, quand elle existe, étant une limite (celle de $f_{|D\cap]-\infty;a[}$ ou celle de $f_{|D\cap]a;+\infty[}$), les résultats valables pour les limites sont toujours valables pour des limites à gauche ou à droite. Par exemple, le théorème de l'unicité de la limite est encore vrai avec des limites à gauche ou à droite.

II.2 Exemples

Exemple : Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrons que $\dfrac{1}{x-a}\xrightarrow[x\to a^-]{}-\infty$. Soit $A<0$. Soit $x<a$. La fonction inverse étant strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ (on est bien sur $\mathbb{R}_-^*$ car $x-a<0$) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a}\leqslant A \quad&\iff\quad x-a\geqslant\frac{1}{A}\\ &\iff\quad 0<a-x\leqslant-\frac{1}{A}\end{aligned}$$

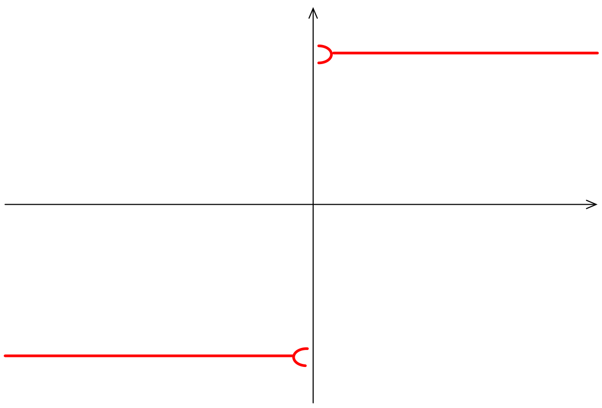
Soit donc $\eta=-1/A>0$. Si $0<a-x\leqslant\eta$ alors $\dfrac{1}{x-a}\leqslant A$ ce qui permet de conclure. On montre de même que $\dfrac{1}{x-a}\xrightarrow[x\to a^+]{}+\infty$. Cela se voit très bien sur le dessin suivant :



Attention, quand on parle de limite à droite, cela signifie qu'on se place à droite du point considéré, pas qu'on se déplace vers la droite ! Quand on évalue la limite à droite, on se déplace vers la gauche.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{Z}$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in [\,n-1\,;n\,[$, $\lfloor x \rfloor = n-1$. Ainsi, en posant $\eta = 1$, pour tout x tel que $0 < n - x \leqslant 1$, $|\lfloor x \rfloor - (n-1)| = 0 \leqslant \varepsilon$. On en déduit que $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to n^-]{} n-1$, ce qu'on voit très bien sur le graphe de la partie entière.

Exemple : $\dfrac{x}{|x|} \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1$ et $\dfrac{x}{|x|} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$ (exo).



II.3 Lien entre limite, limite à droite et limite à gauche

Deux cas de figure se présentent :

Proposition.

1. Si f est définie en a, f admet une limite en a (forcément égale à $f(a)$) si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a égales à $f(a)$.
2. Si f n'est pas définie en a, f admet une limite L (finie ou infinie) en a si et seulement si f admet une limite à droite et une limite à gauche en a égales à L.

Intuitivement, en recollant les intervalles $]-\infty\,;a\,[$ et $]\,a\,;+\infty\,[$, il faut que les courbes représentatives de f sur chacun de ces intervalles se « rejoignent ». Dans le cas où f est définie en a, il faut de plus qu'elle se « rejoignent » en $f(a)$.

Démonstration. 1. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

En particulier, d'une part :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

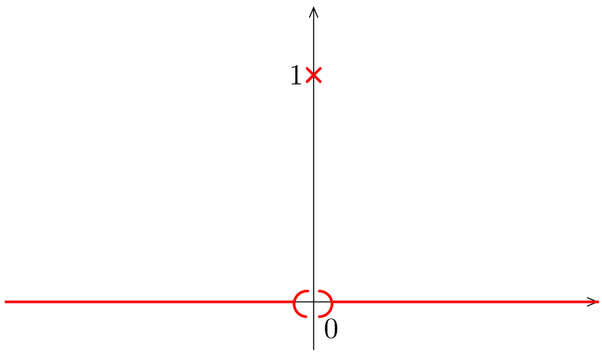
c'est-à-dire que $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$. D'autre part, on montre de même que $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$. Réciproquement, supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} f(a)$. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} \exists \eta_1 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon \\ \\ \text{et} \\ \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon \end{array}\right. \qquad \square$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et soit $x \in D, |x-a| \leqslant \eta$. Si $x > a$, alors $0 < x - a \leqslant \eta \leqslant \eta_1$ donc $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$. Si $a > x$ alors $0 < a - x \leqslant \eta \leqslant \eta_2$ donc $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, et le résultat est encore vrai si $x = a$. Dans tous les cas, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, d'où le résultat.

2. $\rightsquigarrow$ Exercice.

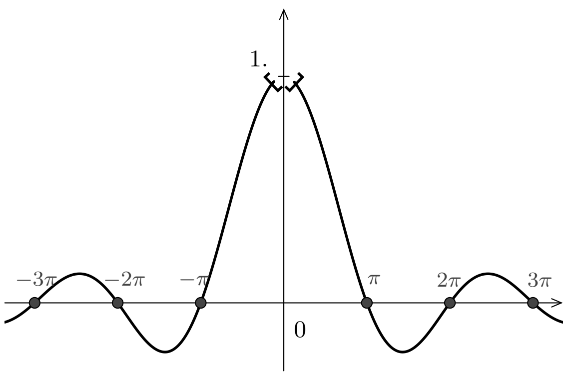
Exemple : Si f est la fonction $\mathbb{1}_{\{0\}}$:



Alors f n'a pas de limite en 0. En effet, f a une limite à gauche et à droite égales mais elles ne sont pas égales à $f(0)$. On voit qu'il est indispensable que les limites à gauche et à droite soient égales à $f(a)$ est indispensable (quand f est définie en a) : ici les courbes à gauche et à droite se « rejoignent » en une valeur commune mais qui n'est pas la valeur en a. Il n'y a pas de limite !

Remarque : Lorsque f admet une limite finie L en a mais n'est pas définie en a, on peut prolonger f par continuité en a en posant $f(a) = L$. Par exemple, ci-dessous, f admet une limite à gauche et une limite à droite égales en 0 donc admet une limite en 0 : on peut alors prolonger f par continuité en 0.

f est alors bien continue en a : cf. paragraphe IV pour la définition.



III Opérations sur les limites

On se donne dans cette partie deux réels L_1 et L_2. a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D, et f et g sont deux fonctions définies sur D.

III.1 Sommes, produits, combinaisons linéaires, quotients

III.1.a Sommes

Proposition.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1+L_2$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
3. Si f et g tendent toutes les deux vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en a alors $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).

En particulier, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f(x)+\lambda \xrightarrow[x\to a]{} L_1+\lambda$: prendre g constante égale à λ.

Démonstration. On suppose que $a \in \mathbb{R}$ (les autres cas se démontrant de façon analogue à ceux pour les suites).

1. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1| \leqslant \varepsilon \\ \text{et} \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |g(x)-L_2| \leqslant \varepsilon \end{cases}$$

Posons encore $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$.

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-(L_1+L_2)| &\leqslant |f(x)-L_1|+|g(x)-L_2| \quad \text{(I.T.)} \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

et on sait que cela permet de conclure (comme pour les suites, c'est une assertion tout à fait équivalente).

2. Supposons que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $A \geqslant 0$.

$$\begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1| \leqslant 1 \\ \text{et} \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow g(x) \geqslant A \end{cases}$$

Posons encore $\eta = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$ et soit $x \in D$ tel que $|x-a| \leqslant \eta$. Alors $f(x) \geqslant L_1 - 1$ donc

$$f(x)+g(x) \geqslant A + L_1 - 1 \qquad \square$$

et on sait que cela permet de conclure (comme pour les suites, c'est une assertion tout à fait équivalente).

3. ⇝ Exercice.

III.1.b Produits, combinaisons linéaires

Proposition. Si f est bornée et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Démonstration. ⇝ Exercice.

Proposition.

1. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1\times L_2$.
2. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1 \neq 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
3. Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $f(x)\times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).

En particulier, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et si $\lambda\in\mathbb{R}$ alors $\lambda f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda L_1$: prendre g constante égale à λ.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Le cas « $0\times\pm\infty$ » est une F.I.

$+\infty\times-\infty$ n'est pas une F.I. !

Remarque : On peut combiner les résultats précédents. Par exemple, si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2$ et si $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$, alors $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda_1 L_1+\lambda_2 L_2$. On peut aisément généraliser à un plus grand nombre (fini et fixe !) de fonctions.

En conclusion : une combinaison linéaire de fonctions converge (vers la même combinaison linéaire des limites).

III.1.c Quotient

Définition. On dit que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (respectivement 0^-) si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si $f(x)>0$ (respectivement $f(x)<0$) au voisinage de a.

Lemme.

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1\neq 0$ alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{L_1}$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (respectivement 0^-) alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ (respectivement 0^-).

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Corollaire.

- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2\neq 0$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{L_1}{L_2}$.
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1\neq 0$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ ou 0^- alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_2\neq 0$ ou $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0^+$ ou 0^-, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (règle des signes).
- Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L_1$ et si$g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

$\dfrac{\pm\infty}{0^\pm}$ n'est pas une F.I.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » sont des formes indéterminées.

Remarque : Puisqu'une limite à gauche ou à droite est une limite (la limite de la restriction de f à $D\cap\,]-\infty\,;a\,[$ ou $D\cap\,]\,a\,;+\infty\,[$ respectivement), tous les résultats précédents sont encore vrais pour des limites à gauche ou à droite.

III.1.d Composition fonction/fonction

Théorème (Composition de limites). Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L_1$ et $g(y) \xrightarrow[y \to L_1]{} L_2$ alors $g(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} L_2$.

Remarque : Une fois n'est pas coutume, donnons les hypothèses du théorème à part :

- f est définie sur un domaine D_f et g sur un domaine D_g, avec D_f et D_g des unions d'intervalles d'intérieur non vide.
- a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D_f, et L_1 est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D_g.
- $L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.
- $f(D_f) \subset D_g$.

En pratique, ces conditions seront toujours vérifiées lorsqu'on voudra utiliser ce théorème.

Démonstration. Supposons que a, L_1 et L_2 soient réels (raisonnements analogues dans les 26 autres cas...). Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \forall y \in D_g, |y - L_1| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |g(y) - L_2| \leqslant \varepsilon \\ \\ \text{et} \\ \\ \exists \eta_2 > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |f(x) - L_1| \leqslant \eta_1 \end{cases} \qquad \square$$

Dès lors, pour tout $x \in D_f$, si $|x - a| \leqslant \eta_2$, alors $|g(f(x)) - L_2| \leqslant \varepsilon$ ce qui permet de conclure.

III.1.e Composition fonction/suite

Encore une fois, a est un point adhérent à D et L est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$ et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans D qui tend vers a, alors $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$.

Démonstration. Plaçons-nous dans le cas où a et L sont réels. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

Or, $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$ donc :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - a| \leqslant \eta \qquad \square$$

Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$, $|f(u_n) - L| \leqslant \eta$ ce qui permet de conclure.

Remarque : On peut se demander si la réciproque est vraie. Oui et non : une suite ne suffit pas, mais on a le résultat capital suivant :

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite). $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui tend vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$.

Remarque : Par exemple, pour montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, il suffit de prouver que $f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, et c'est parfois plus facile car on a des résultats intéressants pour les suites. Avec les mains : on discrétise la limite. Mais attention : prendre **une** suite ne suffit pas : par exemple, prouver que $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ne suffit pas pour prouver que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$!

Démonstration. Le sens direct a été prouvé ci-dessus. Réciproquement, supposons que f ne tende pas vers L. Là aussi, supposons que a et L soient réels (raisonnement analogue dans les huit autres cas) :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D, |x-a| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - L| > \varepsilon$$

Prenons cette valeur de ε. Puisque ce qui suit est vrai pour tout $\eta > 0$, c'est vrai pour tout réel de la forme $1/n$ avec $n \geqslant 1$. Plus précisément :

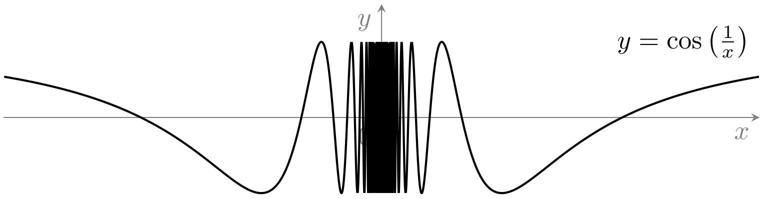
$$\forall n \geqslant 1, \exists x_n \in D, |x_n - a| \leqslant \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad |f(x_n) - L| > \varepsilon$$

L'élément x dépend de n donc on explicite la dépendance en n en l'écrivant x_n, cf. chapitre 12.

Or, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ mais que, pour tout n, $|f(x_n) - L| > \varepsilon$ donc la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers L : il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D de limite a telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers L. D'où la réciproque (par contraposée). □

Remarque : Ce théorème fournit un moyen simple de prouver qu'une fonction f n'admet pas de limite en a : il suffit d'exhiber une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a telle que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas de limite, ou d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limites a telles que les deux suites $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ aient des limites distinctes.

Exemple : Montrons que $f : x \mapsto \cos(1/x)$ n'a pas de limite en 0.



Soient (u_n) et (v_n) les suites de terme général

$$u_n = \frac{1}{2n\pi} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{1}{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$$

Alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais

$$f(u_n) = \cos(2n\pi) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad f(v_n) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

f n'a donc pas de limite en 0.

Exemple : Montrer que $x \mapsto \sin(1/\sqrt{x})$ n'a pas de limite en 0, que le sinus n'a pas de limite en $+\infty$ et que la partie fractionnaire n'a pas de limite en $+\infty$..

On rappelle que la partie fractionnaire est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$t \mapsto \{t\} = t - \lfloor t \rfloor$$

III.2 Limites et relations d'ordre

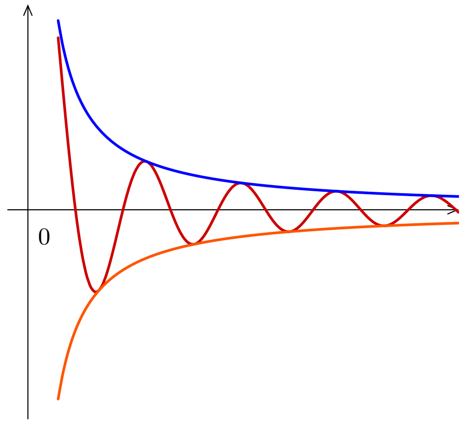
Idem que pour les suites en remplaçant « u_n » par $f(x)$ et « $n \to +\infty$ » par « $x \to a$ » et en adaptant les preuves. Plus précisément :

- Le théorème d'encadrement est encore valable.
- L'inégalité **large** passe encore à la limite, avec les mêmes dangers. En particulier, l'existence des limites doit être justifiée **avant** de passer à la limite.
- Si on a une majoration du type $|f(x) - L| \leqslant g(x)$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on peut encore affirmer que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$.

Exemple : Montrons que $\dfrac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Soit $x > 0$ (licite car on cherche la limite en $+\infty$). Alors $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$ et $x > 0$ donc

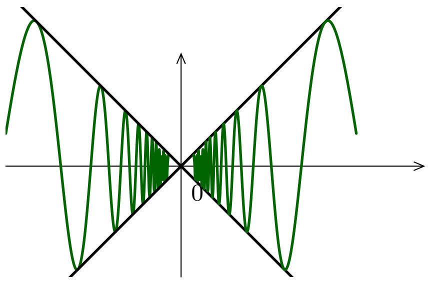
$$\frac{-1}{x} \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{x}$$

Or, $-1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\sin(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Le résultat se voit très bien sur le dessin suivant où l'on a représenté le graphe de $x \mapsto \sin(x)/x$ enveloppé par les hyperboles d'équation $y = \pm 1/x$.



Exemple : Montrons que $x\sin(1/x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Soit $x \neq 0$. Alors $-|x| \leqslant x\sin(1/x) \leqslant |x|$ et, d'après le théorème d'encadrement, on en déduit le résultat voulu. Là aussi, le résultat se voit bien sur le dessin suivant, où l'on a représenté le graphe de $x \mapsto x\sin(1/x)$ enveloppé par les droites d'équation $y = \pm x$.

Attention, on ne peut pas écrire $-x \leqslant x\sin(1/x) \leqslant x$ car on ne connaît pas le signe de x. On peut faire une disjonction de cas et étudier les limites à droite et à gauche, mais il est plus simple de faire une seule étape comme ci-contre.



IV Continuité

Dans cette partie, f et g sont deux fonctions définies sur D et $a \in D$. En particulier, a est un réel.

Cela n'a pas de sens de parler de continuité en $\pm\infty$. Lorsque a est un réel adhérent à D qui n'appartient pas à D, on peut (lorsque f admet une limite finie en a) parler à la limite de prolongement par continuité en a, mais c'est tout.

IV.1 Généralités

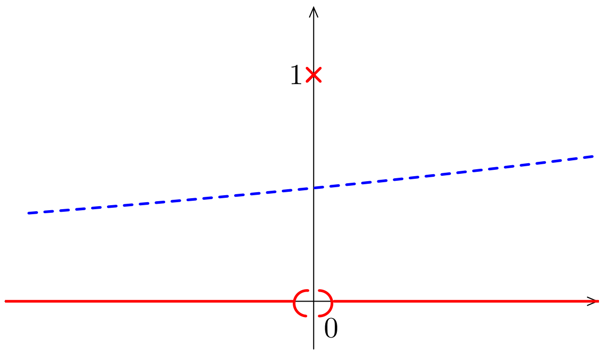
IV.1.a Définitions

On a vu que, si f admet une limite L en a, alors $L = f(a)$. Cela motive la définition suivante :

Définition (continuité en un point). On dit que f est continue en a si f admet une limite en a. Cette limite étant alors nécessairement $f(a)$, f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$. Avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon,$$

Dans le cas contraire on dit que f est discontinue en a ou que a est un point de discontinuité de f.



Une fonction non continue en 0 (en traits pleins) car elle n'admet pas de limite, et une fonction continue (en pointillés) en 0.

Définition. f est continue sur D si f est continue en tout point de D. L'ensemble des fonctions continues sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathscr{C}(D, \mathbb{R})$.

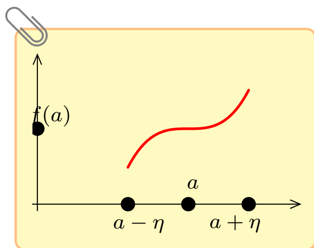
Remarque : En d'autres termes, la continuité est une notion ponctuelle et donc passe à l'union : si f est continue sur une famille $(E_i)_{i \in I}$ de parties de $\mathbb{R}$, alors f est continue sur $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$. Ce ne sera pas le cas avec l'uniforme continuité ou la lipschitzianité (cf. paragraphe V) qui sont, elles, des notions globales.

IV.1.b Quelques propriétés immédiates

On pourra les utiliser directement, mais il est indispensable de savoir les prouver, et encore plus de savoir les écrire avec des quantificateurs.

Proposition. On suppose que f est continue en a.

1. f est bornée au voisinage de a.
2. Si $f(a) > 0$ (respectivement $f(a) < 0$) alors f est strictement positive (respectivement strictement négative) au voisinage de a.
3. Si $f(a) = 1$ alors $1/2 \leqslant f(a) \leqslant 2$ au voisinage de a.
4. etc.



Démonstration. Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

1. Vrai pour $\varepsilon = 1$.

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, |x - a| || e\eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant 1 \qquad \square$$

   En d'autres termes, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in D \cap [\, a - \eta \,; a + \eta \,]$, $f(a) - 1 \leqslant f(x) \leqslant f(a) + 1$: f est bornée au voisinage de a.
2. Exo : prendre $\varepsilon = |f(a)|/2$.
3. Exo : prendre $\varepsilon = 1/2$.

IV.1.c Continuité à droite et à gauche

Définition (continuité à droite ou à gauche en un point). On dit que f est continue à droite (respectivement à gauche) en a si si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$ (respectivement $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$). Avec des quantificateurs, pour la continuité à droite :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, 0 < x - a \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

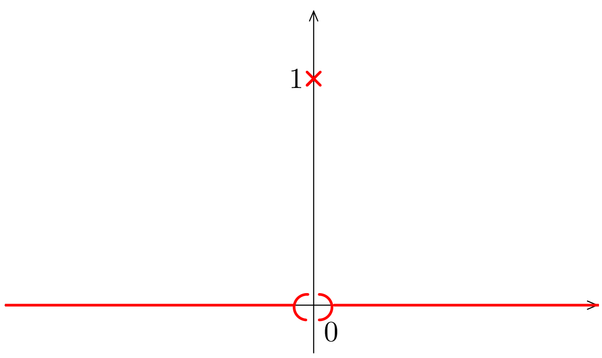
Pour la continuité à gauche :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in D, 0 < a - x \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

- ⚠ Attention, la limite à gauche ou à droite n'est pas forcément égale à $f(a)$ (contrairement à la limite tout court qui, quand elle existe, est forcément égale à $f(a)$). Ainsi, l'existence d'une limite à droite ou à gauche n'implique pas forcément la continuité à droite ou à gauche, il faut que celle-ci soit égale à $f(a)$!
- Comme pour les limites, la continuité à gauche ou à droite de f en a est équivalente à la continuité de $f_{|D \cap]-\infty\,;a]}$ ou $f_{|D \cap [a\,;+\infty[}$ (fermé en a ici !). Les résultats vrais pour les fonctions continues seront donc vrais pour les fonctions continues à gauche ou à droite (sauf la composition, cf. paragraphe IV.2.b).
- Puisque, si $x = a$, on a évidemment $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, on pourra aussi écrire « $0 \leqslant x - a \leqslant \eta$ » et « $0 \leqslant a - x \leqslant \eta$ » dans les écritures avec les quantificateurs.
- On définit de même que ci-dessus une fonction continue à droite ou à gauche sur D tout entier.

Exemple : $\mathbb{1}_{\{0\}}$ admet une limite à gauche et à droite en 0 mais n'est ni continue à droite ni continue à gauche car ces limites ne sont pas égales à la valeur en 0.



Exemple : Montrons que la partie entière est continue à droite sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $n = \lfloor a \rfloor$. Alors $n \leqslant a < n + 1$. Soit $x \in]\,a\,; n+1\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = n \xrightarrow[x \to a^+]{} n = \lfloor a \rfloor$ donc la partie entière est continue à droite en a donc sur $\mathbb{R}$.

Théorème. f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a.

Démonstration. Immédiat en utilisant le fait que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x \to a^+]{} f(a)$ et $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} f(a)$.

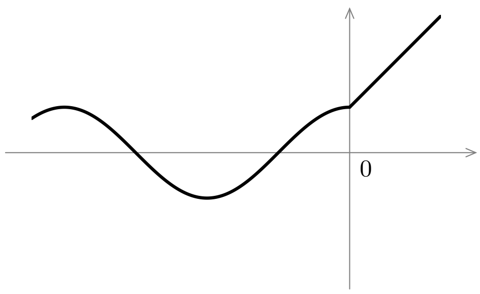
Exemple : Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Soit $n = \lfloor a \rfloor$. Puisque $a \notin \mathbb{Z}$, $n < a$: soit donc $x \in]\,n\,; a\,[$. Alors $\lfloor x \rfloor = n \xrightarrow[x \to a^-]{} n = \lfloor a \rfloor$: la partie entière est continue à gauche en a donc sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Puisqu'elle est également continue à droite, elle est continue sur $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Cependant, on a vu que $\lfloor x \rfloor \xrightarrow[x \to n^-]{} n - 1 \neq \lfloor n \rfloor$ donc la partie entière est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Application aux fonctions définies « par cas » : Donnons un exemple « où tout se passe bien ». Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ \cos(x) & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On utilise la continuité des fonctions de référence que nous verrons dans le IV.2.c.

La fonction $x \mapsto x+1$ et la fonction cos étant continues, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et continue à droite (car l'inégalité est large) en 0 avec $f(0) = 1$. De plus, si $x < 0$, alors $f(x) = \cos(x) \xrightarrow[x \to 0^-]{} \cos(0) = 1 = f(0)$. Ainsi f est continue à gauche donc continue en 0 donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Ci-dessous le graphe de f.

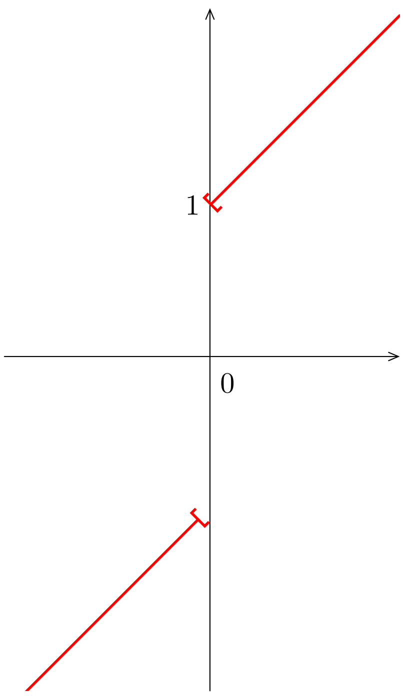


Donnons un cas où cela se passe moins bien. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ x-1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Les fonctions $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont continues donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et f est continue à droite en 0 car l'inégalité est large, avec $f(0) = 1$. Cependant, si $x < 0$, alors $f(x) = x - 1 \xrightarrow[x \to 0^-]{} -1 \neq f(0)$ donc n'est pas continue à gauche en 0.

Attention, dire que f est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto x-1$ sont continues est une erreur grave ! On le voit ci-contre, tout ce que cela implique est la continuité sur $\mathbb{R}^*$ et la continuité à droite en 0 : il faut toujours examiner à part « les points de recollement ».



IV.1.d Lien avec les suites

Théorème. Si f est continue en a et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans D qui tend vers a, alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

La continuité est indispensable (cf. chapitre 12 : par exemple, $-1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\lfloor -1/n \rfloor = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \neq \lfloor 0 \rfloor$.

Démonstration. Découle du paragraphe III.1.e puisque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.

Remarque : Là aussi on a une réciproque :

Théorème (Caractérisation séquentielle de la continuité). f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D qui tend vers a, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Activité : Donner les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui convient.

Démarche classique : d'abord $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$. Nous ferons ce genre de raisonnement très souvent, par exemple dans le chapitre 18 quand nous manipulerons des morphismes de groupes.

- En prenant $x = y = 0$, il vient : $f(0) = 2f(0)$ si bien que $f(0) = 0$.
- En prenant $x = y = 1$, on obtient $f(2) = 2f(1)$. En prenant $x = 2$ et $y = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} f(3) &= f(2+1) \\ &= f(2) + f(1) \\ &= 2f(1) + f(1) \\ &= 3f(1) \end{aligned}$$

  Par une récurrence immédiate, $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit n un entier négatif ou nul. D'une part, $f(n-n) = f(0) = 0$ et d'autre part, $f(n-n) = f(n) + f(-n)$. Il en découle que $f(n) = -f(-n)$. Or, $-n \in \mathbb{N}$ donc, d'après ce qui précède, $f(-n) = -nf(1)$ si bien que $f(n) = -(-nf(1)) = nf(1)$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. Par une récurrence immédiate (faites-la !), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. De plus, si n est un entier négatif, en remarquant que $f(nx - nx) = 0$, on obtient comme ci-dessus que $f(nx) = nf(x)$. Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.
- Soit $r \in \mathbb{Q}$. Il existe donc $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $r = p/q$. D'après ce qui précède (avec $x = 1/q$), $f(r) = pf(1/q)$. Or, $1 = q \times 1/q$ donc $f(1) = q \times f(1/q)$ si bien que $f(1/q) = f(1)/q$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(r) &= p \times f\left(\frac{1}{q}\right) \\ &= p \times \frac{f(1)}{q} \\ &= rf(1) \end{aligned}$$

- Soit enfin $x \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, x est limite d'une suite de rationnels $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \mathbb{Q}$ donc $f(x_n) = x_n \times f(1)$. D'une part, f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et d'autre part, $f(x_n) = x_n \times f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} xf(1)$. Par unicité de la limite, $f(x) = xf(1)$.

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$ c'est-à-dire qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$: f est une application linéaire.

Synthèse : Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto ax$. Alors f est continue (cf. IV.2.c). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) \\ &= ax + ay \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est solution. En conclusion, les fonctions solutions sont exactement les fonctions du type $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On peut généraliser la dernière étape de l'analyse :

Proposition. Soient f et g continues sur D. Si f et g sont égales sur une partie A dense dans D, alors $f = g$.

Par exemple, deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ sont égales.

Démonstration. Soit $x \in D$. A étant dense dans D, x est limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. f et g coïncident sur A donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = g(x_n)$. D'une part, f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et d'autre part, g étant continue, $f(x_n) = g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$. x étant quelconque, $f = g$.

Remarque : C'est bien sûr faux sans la continuité : par exemple, la fonction nulle et $\mathbb{1}_{\{0\}}$ coïncident sur $\mathbb{R}^*$ (dense dans $\mathbb{R}$) mais ne sont pas égales.

IV.2 Opérations sur les fonctions continues

IV.2.a Somme, produit, combinaison linéaire, quotient

Proposition. Si f et g sont continues en a et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, $f \times g$, λf et f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a.

En d'autres termes, une somme, un produit, une combinaison linéaire et un quotient de fonctions continues (celle au dénominateur ne s'annulant pas) sont continues.

Démonstration. f et g étant continues en a, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} g(a)$. Il suffit ensuite d'appliquer les résultats de la partie III.

Remarques :

- On peut généraliser à un nombre quelconque (fini) de fonctions continues.
- Tous ces résultats sont encore vrais pour des fonctions continues à gauche ou à droite.
- La continuité étant une notion ponctuelle, on en déduit le résultat suivant :

Corollaire. Si f et g sont continues sur D et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $f+g$, $f \times g$, λf et f/g (si g ne s'annule pas) sont continues sur D.

IV.2.b Composition

Soient $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ avec $f(D_f) \subset D_g$ et $a \in D_f$.

Proposition. Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.

Démonstration. Utiliser le théorème de composition des limites : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Corollaire. Si f est continue sur D_f et g continue sur D_g alors $g \circ f$ est continue sur D_f. En d'autres termes, une composée de fonctions continues est continue.

Remarque : ⚠ Attention, une composée de fonctions continues à droite (respectivement à gauche) n'est pas forcément continue à droite (respectivement à gauche), alors qu'une somme, un produit etc. de fonctions continues à droite est continue à droite par exemple (cf. paragraphe précédent). La raison est qu'une fonction décroissante « change la droite en gauche » : plus précisément, si f est décroissante, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} f(a)^-$ (f transforme les valeurs supérieures à a en valeurs inférieures à $f(a)$) et si g est continue à droite en $f(a)$, on n'a pas forcément $g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} g \circ f(a)$.

Exemple : Soit $g : x \longmapsto \lfloor 1/x \rfloor$. On a $y = 1/x \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1^-$ et $\lfloor y \rfloor \xrightarrow[y\to 1^-]{} 0$, si bien que, par composition, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0 \neq f(1)$: f n'est pas continue à droite en 1, alors que f est composée de deux fonctions continues à droite (la fonction inverse et la partie entière) sur leur ensemble de définition.

IV.2.c Fonctions usuelles

Théorème.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
4. La fonction $x \longmapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
5. Les fonctions cos et sin sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction tan est continue sur $\mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.
6. La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$.
7. Les fonction ch, sh et th sont continues sur $\mathbb{R}$.
8. La fonction ln est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
9. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $\alpha > 0$, on peut la prolonger par continuité en 0 en posant $0^\alpha = 0$.

Les fonctions trigonométriques réciproques sont aussi continues sur leur domaine de définition, cf. chapitre 5.

DÉMONSTRATION.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence sur n que la fonction $f_n : x \longmapsto x^n$ est continue en a.
   - Il est clair que les fonctions $x \longmapsto x^0$ et $x \longmapsto x$ sont continues en a (prendre $\eta = \varepsilon$ dans la définition quantifiée). La propriété est donc vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que la propriété est vraie au rang n, c'est-à-dire f_n est continue en a. Alors la fonction $f_{n+1} = f_n \times f_1$ est continue en a par produit. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

   D'où le résultat par récurrence.
2. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, notons $g_q : x \longmapsto \dfrac{1}{x^q}$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Puisque f_q est continue en a et que $f_q(a) \neq 0$, par quotient, $g_q = 1/f_q$ est continue en a.
3. Par somme de fonctions du type $x \longmapsto \lambda x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ pour les polynômes. Par quotient de deux polynômes (celui du dénominateur ne s'annule pas) pour les fonctions rationnelles.
4. Soient $a \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon$. On a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\forall x \in [\,a - \eta\,; a + \eta\,], \qquad ||x| - |a|| \leqslant |x - a| \leqslant \eta = \varepsilon.$$

   Ainsi $x \longmapsto |x|$ est continue en a.

5. Découle du fait (démontré dans le chapitre 5) que ces fonctions sont dérivables.
6. Découle du fait que exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 14).
7. Découle du point précédent par somme et quotient de fonctions continues (celle au dénominateur ne s'annulant pas).
8. Découle du fait que ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (cf. chapitre14).
9. Montré dans le chapitre 2. $\square$

V Notions plus fortes

V.1 Continuité uniforme

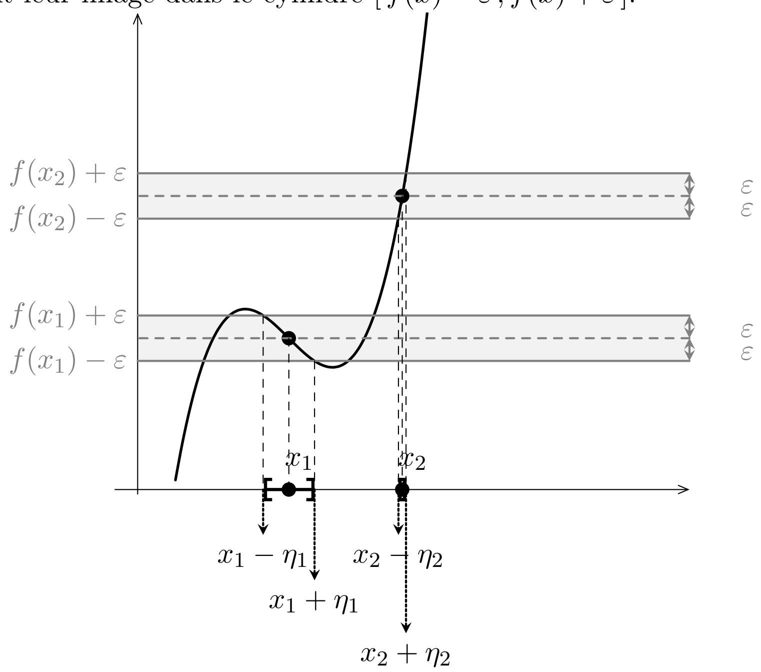
Rappelons qu'une fonction f est continue sur D si elle est continue en tout point de D. Avec des quantificateurs :

$$\forall a \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

ou, de façon équivalente (les variables sont muettes et on peut intervertir deux quantificateurs identiques) :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists \eta > 0, \forall y \in D, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

L'idée est simple : si on fixe $\varepsilon > 0$, pour tout $x \in D$, il existe un intervalle centré en x dont les éléments ont leur image dans le cylindre $[\,f(x) - \varepsilon\,; f(x) + \varepsilon\,]$.



En d'autres termes, à un cylindre vertical correspond un cylindre horizontal, mais il faut bien comprendre que la largeur du cylindre horizontal dépend du point x considéré : le η étant défini après le x, il dépend du x ce qui se voit bien sur le dessin : ce n'est pas le même η pour x_1 et x_2 alors qu'on a pris le même ε. Quand « la pente est plus raide, le cylindre horizontal est plus étroit ». On dit que la fonction est uniformément continue quand « elle est continue partout de la même façon » c'est-à-dire quand le η est le même pour tout x de D. Plus précisément :

Définition. f est uniformément continue sur D si :

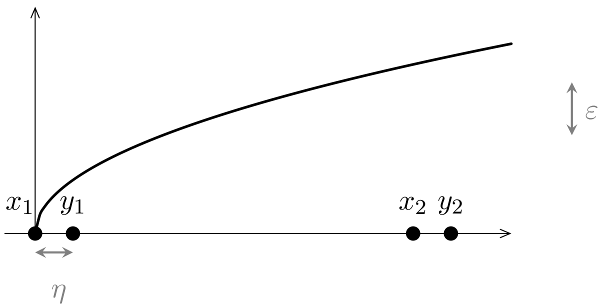
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x,y) \in D^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

- Une fonction uniformément continue est évidemment continue (s'il existe un η qui convient pour tout le monde, alors pour tout x, il existe un η qui convient). Nous verrons plus bas que la réciproque est fausse.

Ce n'est pas la même chose ! Penser à un film préféré : cf. chapitre 0

- Comme on l'a dit, une fonction est uniformément continue (UC) lorsque, à ε fixé, il existe un même η pour tous les $x \in D$, c'est-à-dire que pour tout $x \in D$, il existe un même η tel que tout réel $y \in [x-\eta\,;x+\eta]$ soit envoyé dans le cylindre $[f(x)-\varepsilon\,;f(x)+\varepsilon]$.
- Géométriquement : à ε fixé, il existe un $\eta > 0$ tel qu'en ne faisant que des pas de largeur η horizontalement, on ne peut pas faire des sauts d'amplitude supérieure à ε. Quand une fonction est uniformément continue, on ne peut pas faire des sauts de trop grande amplitude si on ne s'écarte pas trop, et l'écart maximal est le même en tout point de l'intervalle. Voir le graphe ci-dessous : si on fixe $\varepsilon > 0$ (à droite), il existe un $\eta > 0$ (en dessous) tel que pour tous choix de x et de y distants de moins de η, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont distants de moins de ε. Ce qui est nouveau, c'est que cela ne dépend pas de l'endroit où on se place dans l'intervalle !



Raisonnement classique : découper un intervalle en morceaux de η, et à chaque morceau, la fonction ne peut faire que des sauts d'amplitude au maximum ε (et donc, en n morceaux, elle ne peut progresser que de $n\varepsilon$ au maximum) : voir ci-dessous.

Exemple : Montrons qu'une fonction affine est uniformément continue (cela se voit très bien : la pente est toujours la même). Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $f : x \mapsto ax+b$. Soit $\varepsilon > 0$. Si $a = 0$, i.e. si f est constante alors $\eta = 1$ convient : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|x-y| \leqslant 1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$ (puisque $|f(x)-f(y)| = 0$). Supposons à présent $a \neq 0$. Alors $\eta = \varepsilon/|a|$ convient. Soit en effet $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x-y| \leqslant \varepsilon/|a|$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |ax+b-ay-b| \\ &= |a| \times |x-y| \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Dans tous les cas, f est uniformément continue (ce qui se voit très bien sur un dessin).

Remarque : Montrer qu'une fonction donnée est uniformément continue n'est pas facile en général (voir plus bas). Cependant, montrer qu'une fonction n'est pas uniformément continue est plus facile. En effet, la négation de « f est UC » est :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in D^2, |x-y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x)-f(y)| > \varepsilon$$

Méthode : Pour montrer que f n'est pas uniformément continue, il suffit d'exhiber deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telles que :

- $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $(f(x_n)-f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

En effet, supposons que nous ayons deux telles suites. Puisque $(f(x_n)-f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 :

$$\exists \varepsilon, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Soit $\eta > 0$. Puisque $x_n - y_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|x_n - y_n| \leqslant \eta$. Par hypothèse, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$, mais on a aussi $|x_n - y_n| \leqslant \eta$: η étant quelconque, on a prouvé l'existence de deux réels notés x_n et y_n tels qu'on ait à la fois $|x_n - y_n| \leqslant \eta$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ ce qui prouve que f n'est pas uniformément continue.

Il est inutile de retenir la démonstration dans le cas général, mais il faut savoir le prouver dans des cas particuliers (et il est indispensable de connaître la négation de « f est UC »).

Exemples :

- Montrons que la fonction carré n'est pas uniformément continue. Notons f la fonction carré. Soit $n \geqslant 1$. Posons $x_n = n$ et $y_n = n + 1/n$.

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &= \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 \\ &= 2 + \frac{1}{n^2} \\ &> 2 \end{aligned}$$

  Soit $\varepsilon = 2$. Soit $\eta > 0$. Puisque $1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe n tel que $|y_n - x_n| = 1/n < \eta$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > 2$. On a donc prouvé :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in D^2, |x - y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

  f n'est pas uniformément continue.

- Montrons que l'exponentielle n'est pas uniformément continue. Notons f la fonction exponentielle. Soit $n \geqslant 1$. Posons $x_n = n$ et $y_n = n + 1/n$.

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &= e^{n + \frac{1}{n}} - e^n \\ &= e^n \times \left(e^{1/n} - 1\right) \\ &= \frac{e^n}{n} \times \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \end{aligned}$$

  Or, $1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc

$$\frac{e^{1/n} - 1}{1/n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{e^n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

  si bien que $(fy_n) - f(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. Soit $\varepsilon = 1$. Soit $\eta > 0$. Puisque $1/n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe n tel que $|y_n - x_n| = 1/n < \eta$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > 1$. On a donc prouvé :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in D^2, |x - y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

  f n'est pas uniformément continue.

- Montrons que la fonction ln n'est pas uniformément continue. Notons f la fonction ln. Soit $n \geqslant 0$. Posons $x_n = e^{-n}$ et $y_n = e^{-(n+1)}$.

$$\begin{aligned} f(y_n) - f(x_n) &= \ln(e^{-(n+1)}) - \ln(e^{-n}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon = 1/2$. Soit $\eta > 0$. Puisque $e^{-(n+1)} - e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe n tel que $|y_n - x_n| < \eta$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > 1/2$. On a donc prouvé :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in D^2, |x-y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

f n'est pas uniformément continue.

- Attention, contrairement à ce que les exemples précédents peuvent laisser penser, une fonction peut être bornée sans être uniformément continue : prouvons que $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas uniformément continue (la raison est que les pics sont de plus en plus raides). Soit $n \geqslant 0$. Posons $x_n = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ et $y_n = \sqrt{2n\pi + \dfrac{3\pi}{2}}$. Tout d'abord, $f(y_n) - f(x_n) = 2$. De plus :

$$\begin{aligned} y_n - x_n &= \sqrt{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} - \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) - \left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{3\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon = 1$. Soit $\eta > 0$. Puisque $y_n - x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe n tel que $|y_n - x_n| < \eta$ et $|f(y_n) - f(x_n)| > 1$. On a donc prouvé :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in D^2, |x-y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

f n'est pas uniformément continue.

Exemple : Montrons que la racine carrée est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\delta \geqslant 0$. Montrons que $f : x \mapsto \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+\delta}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+\delta}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+\delta}} \\ &\leqslant 0 \end{aligned}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée négative et est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en découle que $f(x) \leqslant f(0)$ pour tout $x \geqslant 0$, c'est-à-dire que $0 \leqslant \sqrt{x+\delta} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{\delta}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et soit $y \geqslant x$. En appliquant ce qui précède avec $\delta = y - x$, il vient :

$$0 \leqslant \sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y-x}$$

Ce résultat est toujours vrai si $y \leqslant x$ en appliquant ce qui précède avec y à la place de x et x à la place de y (penser à truc$_1$ et truc$_2$) on en déduit :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\eta = \varepsilon^2$. Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $|x-y| \leqslant \eta$. D'après l'inégalité ci-dessus,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leqslant \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

On en déduit que la racine carrée est uniformément continue.

Comme on vient de le voir, montrer qu'une fonction est UC est difficile dans le cas général. Heureusement, dans le cas d'une fonction continue sur un segment, le résultat est simple :

Théorème (Théorème de Heine). Une fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Cela se voit bien sur un dessin : il existe forcément un η qui convient pour tout le monde.

DÉMONSTRATION. Soit f continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$ avec $a \leqslant b$. Supposons f non uniformément continue. Dès lors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |x-y| \leqslant \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

Prenons donc cette valeur de ε. Comme précédemment, si un résultat est vrai pour tout $\eta > 0$, alors il est vrai pour tout réel de la forme $1/n$. Plus précisément, pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(x_n, y_n) \in [\,a\,;b\,]^2$ tel que $|x_n - y_n| \leqslant 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente donc il existe une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|x_{n_p} - y_{n_p}| \leqslant 1/n_p$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $x_{n_p} - y_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$. Dès lors :

$$y_{n_p} = x_{n_p} - (x_{n_p} - y_{n_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} x - 0 = x$$

$\square$

Or, f est continue et $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(y_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers x si bien que $|f(x_{n_p}) - f(y_{n_p})| \xrightarrow[q\to+\infty]{}$ $|f(x) - f(x)| = 0$ et donc finit par être inférieur à ε à partir d'un certain rang p_0 : absurde, f est uniformément continue.

Remarque : Comme on l'a dit plus haut, quand une fonction f est uniformément continue, cela signifie que, lorsqu'on s'écarte horizontalement d'au plus η, alors on fait des sauts verticaux d'amplitude au plus ε. Il est classique (voir par exemple les exercices 78 et 80) d'itérer ce raisonnement : montrons que, si on s'écarte d'au plus $k\eta$ (avec $k \in \mathbb{N}$), alors on fait des sauts verticaux d'amplitude maximale $k\varepsilon$.

Plus précisément, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformément continue, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et montrons le résultat suivant par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{R}, |x-y| \leqslant k\eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant k\varepsilon$$

Le résultat est évidemment vrai au rang 0 car, si $|x-y| \leqslant 0 \times \eta$ alors $x = y$ donc on a bien $|f(x) - f(y)| \leqslant 0 \times 0 \times \varepsilon$. Soit à présent $k \in \mathbb{N}$ et supposons le résultat vrai au rang k. Soit donc $y \in [\,x - (k+1)\eta\,; x + (k+1)\eta\,]$.

Tout d'abord, si $y \in [\,x - k\eta\,; x + k\eta\,]$ alors, par hypothèse de récurrence, $|f(x) - f(y)| \leqslant k\varepsilon \leqslant (k+1)\varepsilon$. Supposons à présent que $x + k\eta < y \leqslant x + (k+1)\eta$. Dès lors, $y - \eta \in [\,x - k\eta\,; x + k\eta\,]$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $|f(y-\eta) - f(x)| \leqslant k\varepsilon$. Or, $|y - \eta - y| = \eta \leqslant \eta$ donc, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f(y-\varepsilon)| + |f(y-\varepsilon) - f(x)| \leqslant \varepsilon + k\varepsilon = (k+1)\varepsilon$$

Le cas où $x - (k+1)\eta \leqslant y < x - k\eta$ est analogue et laissé en exo (appliquer l'HR à $y + \eta$), ce qui permet de conclure. Ce genre d'inégalité peut être utile : cela permet par exemple de majorer f par une fonction affine (ce qui donne une autre démonstration du fait que la fonction carré et la fonction exponentielle ne sont pas UC), cf. exercice 80.

V.2 Lipschitzianité

Comme on l'a vu, prouver qu'une fonction est uniformément continue dans le cas général est difficile. Un cas simple (mais qui n'arrive pas tout le temps en pratique) est quand les « bonds faits par f » sont (sous-)proportionnels aux « bonds faits par x » : si f monte de façon (sous)-proportionnelle à x quand x augmente, comme pour les fonctions affines, on trouvera un η qui convient pour tout le monde. Cela justifie la définition suivante.

Proposition. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que f est k-lipschitzienne si :

$$\forall (x,y) \in D^2, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$$

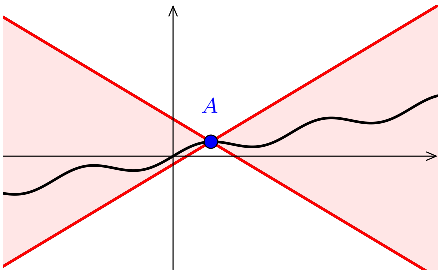
On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne.

On peut avoir du mal, quand on n'en a pas l'habitude, à voir la différence entre une fonction lipschitzienne et une fonction UC. On peut (grossièrement !) retenir ceci au début : une fonction est UC quand les sauts verticaux sont bornés de façon « absolue » (tant que le pas horizontal est inférieur à ε), et une fonction est lipschitzienne quand les sauts verticaux sont bornés de façon « relative » (de façon sous-proportionnelle aux pas horizontaux).

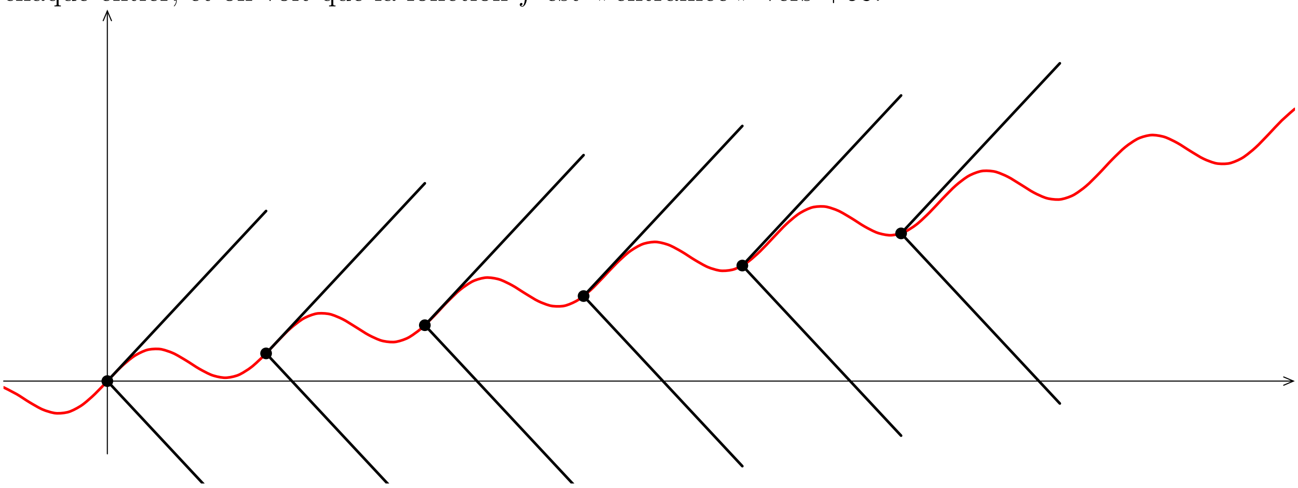
Remarque : Géométriquement, cela signifie que les pentes sont majorées par k. En effet, pour tous $x \neq y$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$ donc

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leqslant k$$

Il en découle en particulier que, pour tout $a \in D$, le graphe de f est situé entre les droites d'équation $y = k(x-a) + f(a)$ et $y = -k(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire entre les deux droites de pente $\pm k$ passant par le point du graphe d'abscisse a (et donc d'ordonnée $f(a)$). En d'autres termes, le graphe de f est compris dans le cylindre formé par ces deux droites.



En effet, si $x \in D$, alors $|f(x) - f(a)| \leqslant k|x-a|$ c'est-à-dire que $-k(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant k(x-a)$ si $x \geqslant a$, et $k(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant -k(x-a)$ si $x \leqslant a$. Dans tous les cas, on a le résultat voulu. Cela permet par exemple de visualiser certains résultats. Nous verrons en TD (cf. exercice 83) que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et si $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, ce qui se voit bien sur un dessin : on trace des cylindres qui partent de chaque entier, et on voit que la fonction f est « entraînée » vers $+\infty$.



Exemples :

- Une fonction constante est 0-lipschitzienne.

- Soit $f : x \mapsto ax+b$ avec $a \neq 0$ une fonction affine non constante. Montrons que f est $|a|$-lipschitzienne. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= |ax+b-ay-b| \\ &= |a| \times |x-y| \\ &\leqslant |a| \times |x-y| \end{aligned}$$

- Montrons que la valeur absolue est 1-lipschitzienne. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On sait que $|x|-|y| \leqslant |x-y|$ et $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$ donc $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$ ce qui permet de conclure.

Proposition. Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

En particulier, une fonction lipschitzienne est continue, mais on vient de voir avec la valeur absolue qu'une fonction lipschitzienne n'est pas forcément dérivable.

Démonstration. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que f soit k-lipschitzienne. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(x,y) \in D^2$. Alors $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|$. Soit $\eta = k/\varepsilon$. Si $|x-y| \leqslant \eta$ alors $|f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$: f est bien uniformément continue.

Remarque : La réciproque est fausse ! Par conséquent, on a les implications « f lipschitzienne $\Rightarrow f$ uniformément continue » et « f uniformément continue $\Rightarrow f$ continue » mais les deux réciproques sont fausses.

Méthode pour montrer qu'une fonction f n'est pas lipschitzienne : Exhiber deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans D telles que

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Il est évidemment indispensable que $x_n \neq y_n$ pour tout n.

En effet, la négation de « f est lipschitzienne » est :

$$\forall k \in \mathbb{R}_+, \exists (x,y) \in D^2, |f(x)-f(y)| > k|x-y|$$

et donc, si de telles suites existent, pour tout $k \geqslant 0$, il existe n tel que

$$\left|\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}\right| > k$$

et donc tel que $|f(y_n)-f(x_n)| > k|y_n-x_n|$ ce qui prouve bien que f n'est pas lipschitzienne. Là encore, il suffit de connaître la méthode générale et de savoir l'appliquer dans un exemple simple.

Si k est fixé par l'énoncé, pour montrer que f n'est pas lipschitzienne, il suffit d'exhiber deux réels x et y tels que

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| > k$$

ce qui est plus facile en général, mais nous verrons ci-dessous un critère simple pour les fonctions dérivables.

Exemple : Montrons que la racine carrée n'est pas lipschitzienne (alors qu'elle est UC : la réciproque de l'implication ci-dessus est donc fausse). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $x_n = 0$ et $y_n = 1/n$ si bien que :

$$\begin{aligned} \left|\frac{\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n}}{y_n-x_n}\right| &= \frac{\sqrt{1/n}}{1/n} \\ &= \frac{1}{1/\sqrt{n}} \\ &= \sqrt{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

Si la racine carrée est lipschitzienne, il existe $k \geqslant 0$ tel que, pour tout n, $|\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}| \leqslant k|y_n - x_n|$ et en particulier la suite de terme général $\left|\dfrac{\sqrt{y_n} - \sqrt{x_n}}{y_n - x_n}\right|$ est majorée, ce qui est absurde.

Remarque : Nous verrons dans le chapitre 14 qu'une fonction **dérivable** est k-lipschitzienne si et seulement si f' est bornée par k, c'est-à-dire si et seulement si $|f'|$ est majorée par k, ce qui se conçoit bien avec l'interprétation géométrique vue plus haut : une fonction est k-lipschitzienne lorsque ses pentes sont inférieures ou égales à k.

Une fonction **dérivable** est lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée. On retrouve par exemple le fait que la fonction racine carrée n'est pas dérivable car a une tangente verticale (et donc une pente infinie) au voisinage de 0. Mais pour d'autres fonctions, cela permet de montrer facilement qu'elles sont lipschitziennes donc UC. Par exemple, la fonction sin et la fonction cos sont 1-lipschitziennes donc uniformément continues, ce qu'on aurait eu du mal à montrer à la main. Mais attention : d'une part, la réciproque de l'implication « lipschitzienne $\Rightarrow$ UC » est fausse, d'autre part, comme on l'a vu, il existe des fonctions lipschitziennes non dérivables. Il faut donc être prudent avec toutes ces notions.

VI Théorème des valeurs intermédiaires

VI.1 Théorème proprement dit

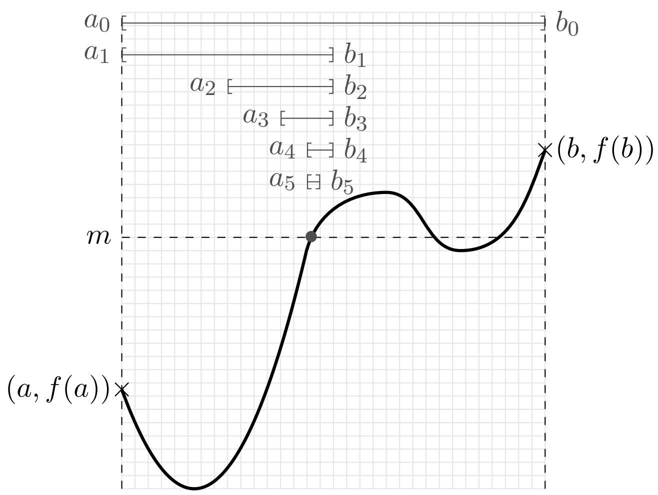
Théorème (des valeurs intermédiaires (TVI)). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[\,a\,;b\,]$. Soit $m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]$. Alors il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$.

On n'a pas forcément $f(a) \leqslant f(b)$. La notation $m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]$ est à prendre au sens de : « m est compris au sens large entre $f(a)$ et $f(b)$ ». Cela évite de faire plusieurs cas.

Démonstration. **Première méthode : par dichotomie.** Si $f(a) = f(b)$, alors $m = f(a)$ donc $c = a$ convient. Supposons à présent $f(a) < f(b)$ (le cas $f(a) > f(b)$ se traite de façon tout à fait analogue).

On définit les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si} \quad f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > m, \\ \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{si} \quad f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant m. \end{cases}$$



Si $f(a) > f(b)$, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont modifiées : on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) \leqslant m$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right) > m$. Le reste de la preuve est analogue, si ce n'est que $f(a_n) \geqslant m \geqslant f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par récurrence (découlant immédiatement de la construction des suites, et en faisant une disjonction de cas, de façon analogue à celle dans la preuve du théorème de Bolzano-Weierstraß), on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

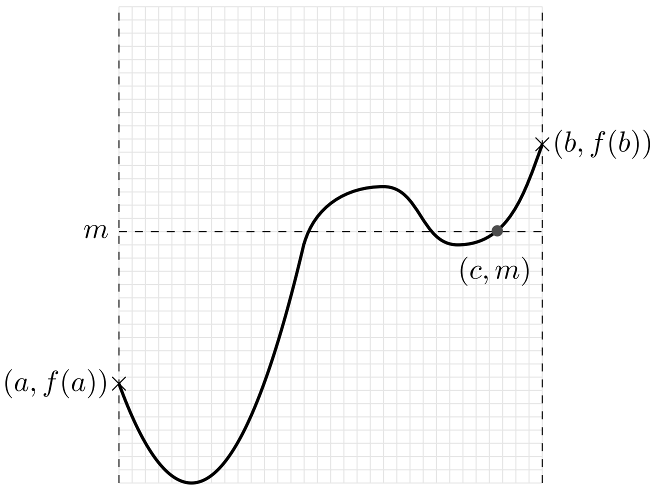
- $a_n \leqslant a_{n+1}$,
- $b_{n+1} \leqslant b_n$,
- $f(a_n) \leqslant m \leqslant f(b_n)$,
- $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$.

En particulier, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 : les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. Par conséquent elles convergent vers une même limite c. De plus $a_0 \leqslant c \leqslant b_0$, c'est-à-dire $c \in [\,a\,;b\,]$. Enfin, puisque f est continue sur $[\,a\,;b\,]$, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Or, $f(a_n) \leqslant m$ et l'inégalité large passe à la limite donc $f(c) \leqslant m$. De même, $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et $f(c) \geqslant m$ donc $f(c) = m$.

Comme on peut le voir sur le dessin ci-dessus, il n'y a pas forcément unicité de c ! Pour avoir l'unicité, il faut une hypothèse de stricte monotonie, cf. paragraphe VI.4.

On vient donc de prouver que, si on part de la cave pour aller au grenier, on passe par le rez-de-chaussée. Que l'on arrête donc de dire que « les maths, c'est abstrait » !

Deuxième méthode : avec la propriété de la borne supérieure. Supposons $f(a) \leqslant f(b)$ (raisonnement analogue dans l'autre cas) et posons $A = \{x \in [\,a\,;b\,] \mid f(x) \leqslant m\}$. Alors A est non vide car $a \in A$ et majorée par b car A est inclus dans $[\,a\,;b\,]$ par définition. A est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure c. Montrons que $f(c) = m$.



$\square$

$c = \sup(A)$ donc il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers c. f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ donc $f(x_n) \leqslant m$. $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et l'inégalité large passe à la limite donc $f(c) \leqslant m$.

Si $c = b$ alors $f(c) \geqslant m$. Sinon, $c < b$ donc $c + 1/n \in [\,a\,;b\,]$ à partir d'un certain rang n_0 et puisque $c = \sup(A)$, $c + 1/n \notin A$ pour tout $n \geqslant n_0$. Il en découle que, pour tout $n \geqslant n_0$, $f(c+1/n) > m$. Toujours par continuité de f, $f(c+1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$ et l'inégalité **large** passe à la limite donc $f(c) \geqslant m$. Dans tous les cas on en déduit que $f(c) = m$.

Remarques :

- La deuxième démonstration est plus courte mais est non constructive : elle prouve l'existence d'un réel c qui convient (plus précisément elle donne l'existence du plus grand c qui convient) mais ne permet pas d'en donner une valeur approchée.
- Introduire une borne supérieure est une méthode efficace pour prouver l'existence d'un objet : cf. exercices 67, 68, 69, 70.
- Attention, le TVI ne prouve que ce qu'il prouve (et c'est déjà pas mal). En particulier, c'est un théorème qui porte bien son nom : il prouve que, si la fonction est continue, elle prend toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$, mais on ne peut rien affirmer au sujet des valeurs qui ne sont pas comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, et certainement pas qu'elles ne sont pas atteintes ! Si $f(a) \geqslant m$ et $f(b) \geqslant m$, on ne peut rien conclure, et surtout pas qu'il n'existe pas de $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$! Par exemple, $\cos(0) = \cos(2\pi) = 1$, mais qui irait sérieusement dire que cos ne s'annule pas sur $[\,0\,;2\pi\,]$ d'après le TVI ?

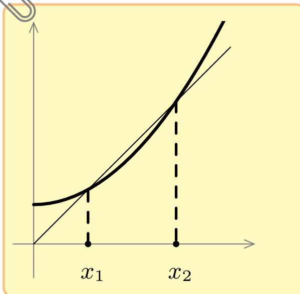
Contrairement à une croyance très (trop) répandue, aucune autre hypothèse que ce soit (et certainement pas de la monotonie) n'est nécessaire pour appliquer le TVI : seule importe la continuité. En clair, le TVI c'est : « à un moment c'est plus grand, à un moment c'est plus petit, c'est continu, alors ça coupe ».

VI.2 Application à la recherche de point fixe

Rappelons qu'un point fixe de $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sur I est un réel $a \in I$ tel que $f(a) = a$. La recherche de point fixe est centrale dans l'étude des suites récurrentes (entre autres).

Interprétation géométrique : a est un point fixe de f si et seulement si le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice) au point d'abscisse a.

> *Par exemple, sur le premier dessin dans la marge, f admet deux points fixes x_1 et x_2.*

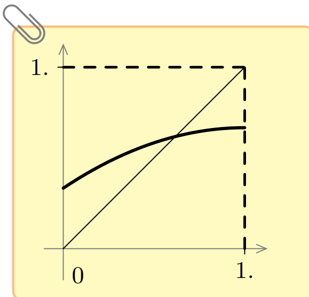


Exemple : Soit $f : [\,0\,;1\,] \longrightarrow [\,0\,;1\,]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

On ne peut pas appliquer le TVI directement à f pour prouver l'existence d'un point fixe ! En effet, le TVI ne peut pas (tel quel) prouver l'existence d'un x tel que $f(x) = x$: il ne permet de trouver un antécédent que pour une quantité **fixée** (à droite du signe =). D'où l'intérêt de l'introduction de la fonction g auxiliaire définie ci-dessous : on va utiliser le TVI pour prouver que 0 admet un antécédent par g, et pour cela, il n'y a aucun problème !

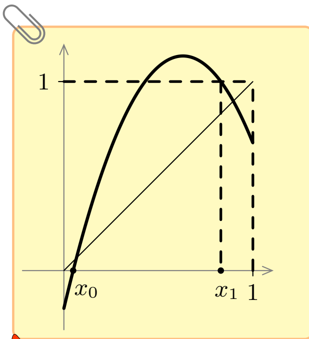
Méthode : on définit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$



Attention, g n'est pas nécessairement à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Alors x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$. Ainsi, prouver l'existence d'un point fixe de f revient à prouver que g s'annule.
Or, $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car f est à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$. Comme g est continue (en tant que somme de fonctions qui le sont), d'après le TVI, il existe $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que $g(x) = 0$, donc tel que $f(x) = x$: f admet un point fixe.

Exemple : Soit $f : [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $[\,0\,;1\,]$ soit inclus dans $f([\,0\,;1\,])$. Montrer que f admet un point fixe.



Ici, on ne suppose plus f à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$, on suppose que tous les éléments de $[\,0\,;1\,]$ sont atteints par f (voir le dessin ci-contre). On introduit encore une fois la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$

Le problème ici est que l'on ne peut pas donner le signe de $g(0)$ et de $g(1)$: on peut avoir $g(0) < 0$ et $g(1) < 0$ comme sur le dessin et donc on ne peut pas conclure directement (attention, comme dit plus haut, cela ne signifie pas du tout que g ne s'annule pas sur $[\,0\,;1\,]$!).

Cependant, par hypothèse, il existe x_0 et x_1 dans $[\,0\,;1\,]$ tels que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$. Dès lors, $g(x_0) = -x_1 \leqslant 0$ et $g(x_0) = 1 - x_1 \geqslant x_1$. De même que ci-dessus, on en déduit que f admet un point fixe.

Comme expliqué ci-dessus, il serait complètement faux d'écrire : « Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0 \leqslant x$ et il existe x_1 tel que $f(x_1) = 1 \geqslant x$ donc, d'après le TVI, il existe x tel que $f(x) = x$ », car le TVI ne permet de trouver des antécédents que pour des quantités **fixées**. À la limite, le TVI prouve qu'il existe un réel m tel que $f(m) = x$, mais puisqu'il n'y a aucune raison pour que $m = x$, cela est d'un intérêt limité...

VI.3 Autres versions du TVI

Théorème (TVI – version 2). Soit f une fonction continue sur I et à valeurs réelles. Notons

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} \sup\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m = \left\{ \begin{array}{ll} \inf\limits_{x \in I} f(x) & \text{si } f \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Alors pour tout $t \in \,]\,m\,;M\,[$, il existe $c \in I$ tel que $f(c) = t$. Autrement dit, $]\,m\,;M\,[\,\subset f(I)$.

Remarque : Nous avons supposé sans le dire que f n'est pas constante, sinon l'intervalle $]\,m\,;M\,[$ est vide.

Démonstration. Soit $t \in]\, m\,; M\, [$. Par caractérisation de la borne supérieure/inférieure, il existe $a \in I$ tel que $f(a) < t$ et il existe $b \in I$ tel $f(b) > t$. On a donc $t \in [\, f(a)\,; f(b)\,]$ et le TVI (f est continue) entraîne qu'il existe $c \in [\, a\,; b\,]$ tel que $f(c) = t$. Comme $c \in I$, on en déduit que $t \in f(I)$. Ainsi $]\, m\,; M\, [\subset f(I)$. □

Exemple : $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. L'exponentielle est continue donc, d'après le TVI (version 2), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $e^c = 2$. Le réel c est même unique et est noté $\ln(2)$: cf. paragraphe VI.4.b.

Théorème (TVI – version 3). L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (c'est-à-dire si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle).

> L'image d'un intervalle par une fonction continue n'est pas forcément un intervalle de même nature (caractère ouvert/fermé/semi-ouvert/borné). Par exemple la fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert non borné) mais $\cos(\mathbb{R}) = [\,-1\,;1\,]$ (intervalle fermé borné). Par contre l'image d'un segment par une fonction continue est un segment, comme nous allons le voir dans la partie suivante.

Démonstration. Utilisons la caractérisation des intervalles vue dans le chapitre 12. Soient $(A, B) \in f(I)^2$. Il existe donc $(a, b) \in I^2$ tels que $A = f(a)$ et $B = f(b)$. Soit $m \in [\, A\,; B\,]$. Alors $m \in [\, f(a)\,; f(b)\,]$. Or, f est continue sur I donc sur $[\, a\,; b\,]$ (car $[\, a\,; b\,]$ est inclus dans I puisque I est un intervalle). D'après le TVI, il existe $c \in [\, a\,; b\,]$ (et donc $c \in I$) tel que $f(c) = m$, si bien que $m \in f(I)$. En d'autres termes, $[\, A\,; B\,]$ est inclus dans $f(I)$ donc $f(I)$ est un intervalle. □

VI.4 Corollaire du TVI et théorème de la bijection

VI.4.a Corollaire du TVI

Corollaire. Avec les mêmes hypothèses que dans le TVI et en supposant de plus f strictement monotone, alors c est unique.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait (cf. chapitre 4) qu'une fonction strictement monotone est injective. □

VI.4.b Théorème de la bijection

Théorème (de la bijection). Soit f continue strictement monotone sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors $f(I)$ est un intervalle, f est une bijection de I dans $f(I)$ et sa bijection réciproque f^{-1} est continue sur $f(I)$ de même monotonie que f.

> Quand on dispose d'une fonction continue strictement monotone, quand utiliser le corollaire du TVI et quand utiliser le théorème de la bijection ? C'est simple :
>
> - Si on veut montrer qu'une fonction est une bijection ou si on veut montrer des propriétés sur f^{-1}, alors on utilise le théorème de la bijection.
> - Si on veut prouver qu'une équation du type $f(x) = c$ admet une unique solution, alors les deux permettent de répondre. Le théorème de la bijection donne beaucoup d'autres résultats, mais il permet également de répondre à ce genre de question.
>
> On peut donc n'utiliser que le théorème de la bijection.

Démonstration. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f est strictement croissante.

- Comme f est continue, d'après le TVI (version 3), $f(I)$ est un intervalle. Par définition de $f(I)$, la fonction f est surjective de I sur $f(I)$. Elle est de plus injective car elle est strictement monotone donc est bijective de I dans $f(I)$.
- Soit $(s, t) \in f(I)^2$. Si $f^{-1}(s) \geqslant f^{-1}(t)$, alors la croissance de f entraîne que $s = f(f^{-1}(s)) \geqslant f(f^{-1}(t)) = t$. Par contraposée, si $s < t$, alors $f^{-1}(s) < f^{-1}(t)$. Ainsi f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.
- Soient $\varepsilon > 0$ et $s_0 \in f(I)$. Posons $x_0 = f^{-1}(s_0)$. Nous voulons montrer l'existence de $\eta > 0$ tel que

$$\forall s \in f(I) \cap [s_0 - \eta, s_0 + \eta], \qquad |f^{-1}(s) - f^{-1}(s_0)| \leqslant \varepsilon.$$

  ⋆ Si x_0 n'est pas une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que l'intervalle $]\, x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha\, [$ est inclus dans I. Notons $\varepsilon' = \min(\varepsilon, \alpha)$. La croissance de f sur I nous garantit que, pour tout $s \in f(I)$,

$$\begin{aligned} |f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \quad &\iff \quad x_0 - \varepsilon' \leqslant f^{-1}(s) \leqslant x_0 + \varepsilon' \\ &\iff \quad f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon'). \end{aligned}$$

  Le réel $\eta = \min\big(f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon'), f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0)\big)$ est strictement positif puisque $\varepsilon' > 0$ et f est strictement croissante. Si $s \in [\, s_0 - \eta\,; s_0 + \eta\,]$, alors

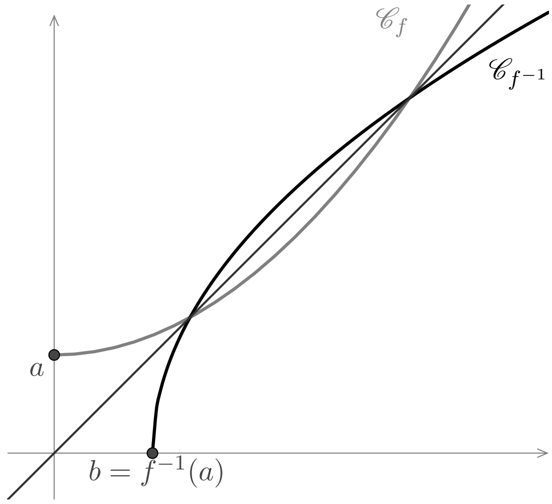
— $s \geqslant s_0 - \eta \geqslant f(x_0) - (f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon')) = f(x_0 - \varepsilon')$.
— $s \leqslant s_0 + \eta \leqslant f(x_0) + f(x_0 + \varepsilon') - f(x_0) = f(x_0 + \varepsilon')$.

Ainsi $f(x_0 - \varepsilon') \leqslant s \leqslant f(x_0 + \varepsilon')$ et donc $|f^{-1}(s) - x_0| \leqslant \varepsilon' \leqslant \varepsilon$. Cela prouve la continuité de f^{-1} en s_0.

⋆ Si x_0 est une éventuelle extrémité de I, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $]\, x_0 - \alpha \,;\, x_0 \,[$ ou $]\, x_0 \,;\, x_0 + \alpha \,[$ est inclus dans I. En adaptant la preuve précédente, nous montrons que f^{-1} est aussi continue en s_0. □

La fonction exponentielle est continue strictement croissante avec $e^x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ et $e^x \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$. D'après le théorème de la bijection, c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons ln sa bijection réciproque, qui est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous renvoyons au chapitre pour une étude approfondie du ln, mais on voit que la continuité est donnée directement par le théorème de la bijection.

Remarque : Dans un repère orthonormal, la courbe de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la première bissectrice (c'est-à-dire la droite d'équation $y = x$).



Remarque : Comme rappelé ci-dessus, une fonction strictement monotone est injective. Quid de la réciproque ?

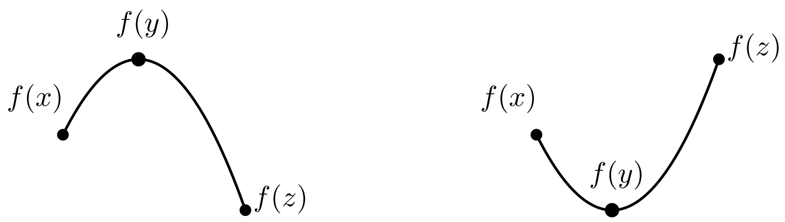
Exemple : La fonction

$$f : \begin{cases} [\,0\,;1\,] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad \begin{cases} x+1 & \text{si } x \in \left[\,0\,; \dfrac{1}{2}\,\right[\\ x - \dfrac{1}{2} & \text{si } x \in \left[\,\dfrac{1}{2}\,;1\,\right] \end{cases} \end{cases}$$

est injective mais non monotone. Si on veut obtenir la monotonie de f à partir de son injectivité, il faut une hypothèse supplémentaire.

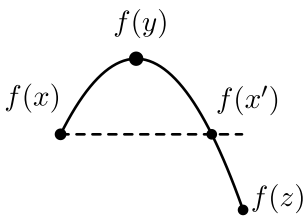
Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue injective. Alors f est strictement monotone.

Démonstration. Supposons par l'absurde f injective mais non strictement monotone. Il existe alors $x < y < z$ tels que $f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z)$ ou tels que $f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z)$.

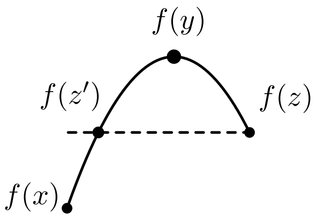


Sans perte de généralité, plaçons-nous dans le premier cas.

Supposons $f(x) \geqslant f(z)$. f est continue sur $[\,y\,;z\,]$ avec $f(y) > f(x) \geqslant f(z)$: d'après le TVI, il existe $x' \in \,]\,y\,;z\,]$ tel que $f(x') = f(x)$. Or, $x' \neq x$ ce qui est absurde car f est injective.



Le cas $f(x) \leqslant f(z)$ se traite de façon analogue : on montre alors qu'il existe $z' < y$ tel que $f(z') = f(z)$.



VI.4.c Comment obtenir $f(I)$?

Proposition. Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Le tableau suivant donne la forme de $f(I)$ lorsque f est continue et strictement croissante sur l'intervalle I :

I	$[\,a\,;b\,]$	$]\,a\,;b\,]$	$[\,a\,;b\,[$	$]\,a\,;b\,[$
$f(I)$	$[\,f(a)\,;f(b)\,]$	$\left]\,\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$	$\left[f(a)\,;\lim\limits_b f\right[$	$\left]\,\lim\limits_a f\,;\lim\limits_b f\right[$

Dans le cas où f est strictement décroissante :

I	$[\,a\,;b\,]$	$]\,a\,;b\,]$	$[\,a\,;b\,[$	$]\,a\,;b\,[$
$f(I)$	$[\,f(b)\,;f(a)\,]$	$\left[f(b)\,;\lim\limits_a f\right[$	$\left]\,\lim\limits_b f\,;f(a)\right]$	$\left]\,\lim\limits_b f\,;\lim\limits_a f\right[$

En particulier l'intervalle $f(I)$ est du même type (ouvert, fermé ou semi-ouvert) que l'intervalle I.

Comme dit dans le paragraphe I.1, quand nous savons que $f(b)$ est inférieur à $f(a)$, nous écrivons évidemment $[\,f(b)\,;f(a)\,]$.

En pratique, plutôt que de s'embarrasser de 8 cas de figure que l'on risque de confondre le jour J, si on donne les hypothèses de continuité et de stricte monotonie, on peut se contenter de « lire » $f(I)$ sur le tableau de variations (et le théorème ci-contre nous autorise à le faire) : cf. exercice 57 du chapitre 4, par exemple.

Démonstration. Nous le démontrerons dans le paragraphe VIII.

VII Théorème des bornes atteintes

VII.1 Théorème proprement dit

Théorème. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. Soit f une fonction continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$ avec $a \leqslant b$. D'après le TVI, $f([\,a\,;b\,])$ est un intervalle. Notons $s = \sup(f([\,a\,;b\,]))$, le sup étant pris dans $\overline{\mathbb{R}}$ c'est-à-dire qu'on pose $s = +\infty$ si $f([\,a\,;b\,])$ n'est pas majoré. Il existe alors une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $f([\,a\,;b\,])$ de limite s. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in f([\,a\,;b\,])$ donc il existe $x_n \in [\,a\,;b\,]$ tel que $y_n = f(x_n)$. Or, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$: c'est donc une suite bornée, et le théorème de Bolzano-Weierstraß entraîne qu'elle admet une sous-suite $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un réel x. Puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a \leqslant x_{n_p} \leqslant b$, l'inégalité large passant à la limite, on en déduit que $x \in [\,a\,;b\,]$.

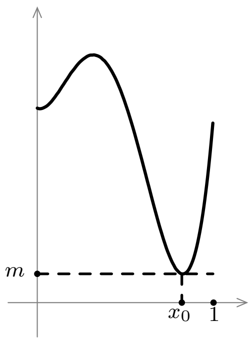
D'une part, $(y_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers s donc tend aussi vers s. D'autre part, $x_{n_p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} x \in [\,a\,;b\,]$ et f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ donc $y_{n_p} = f(x_{n_p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(x)$. Par unicité de la limite, $s = f(x)$. On en déduit, d'une part, que $s\in\mathbb{R}$ donc $f([\,a\,;b\,])$ est majoré, et d'autre part, que $s \in f([\,a\,;b\,])$ donc $f([\,a\,;b\,])$ contient sa borne supérieure. On montre de même que $f([\,a\,;b\,])$ est minoré est contient sa borne inférieure.

En conclusion, $f([\,a\,;b\,])$ est un intervalle borné et ses bornes inférieure et supérieure lui appartiennent : c'est donc un segment.

De la démonstration ci-dessus on déduit le théorème suivant :

Théorème (des bornes atteintes). Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Exemple : Soit f continue strictement positive sur $[\,0\,;1\,]$. Alors il existe $m>0$ tel que, pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f(x)\geqslant m$



En effet, comme f est continue sur le segment $[\,0\,;1\,]$, elle est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle atteint sa borne inférieure : il existe $x_0\in[\,0\,;1\,]$ tel que, pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f(x)\geqslant f(x_0)$. Or, $f(x_0)>0$ par hypothèse, d'où le résultat en posant $m=f(x_0)$.

Il faut impérativement savoir traduire et quantifier le théorème des bornes atteintes : si f est continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$, alors f est bornée et atteint sa borne inférieure et sa borne supérieure, c'est-à-dire que f admet un maximum et un minimum, c'est-à-dire qu'il existe $(x_0,x_1)\in[\,a\,;b\,]^2$ tels que, pour tout $x\in[\,a\,;b\,]$, $f(x_0)\geqslant f(x)$ et $f(x_1)\leqslant f(x)$.

⚠ Attention, le résultat est faux si on ne se place pas sur un segment. En effet, « être minorée par une constante strictement positive » est une condition beaucoup plus forte que « être strictement positive ». En effet, une fonction strictement positive peut parfois être aussi proche que l'on veut de 0, tandis que si on minore une fonction par une constante strictement positive, il y a une espèce de « cylindre de sécurité » (voir le dessin ci-dessus) entre la fonction et 0. Par exemple, la fonction inverse est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est minorée par aucune constante strictement positive (je vous invite à vous convaincre en traçant le graphe de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$). D'où l'importance de se placer sur un segment !

VII.2 Norme infinie sur un intervalle quelconque et cas particulier des segments (deuxième année)

Définition. Soit f bornée sur D. On appelle norme infinie de f qu'on note $\|f\|_\infty$ le réel

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\,|\,x\in D\}$$

En d'autres termes, la norme infinie de f est le sup de $|f|$.

Remarques :

- Il est indispensable que f soit bornée sinon le sup n'est pas défini (même si on trouve parfois la convention $\|f\|_\infty=+\infty$ si f n'est pas bornée).
- ⚠ $\|f\|_\infty$ est la borne sup (quand f est bornée) de $|f|$, pas de f ! Ne pas oublier la valeur absolue ! En particulier, une norme infinie est positive.
- Il peut y avoir ambiguïté sur D : on trouve parfois la notation $\|f\|_{\underset{D}{\infty}}$ pour dire explicitement que la norme infinie est prise sur D.

- Même lorsqu'elle est bien définie (i.e. lorsque f est bornée), la norme infinie n'est pas forcément atteinte : c'est une borne supérieure, pas un un maximum.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \text{Arctan}(x) - \dfrac{\pi}{2}$. Alors f est bornée et $\|f\|_\infty = \pi$.

Quand on manipule une fonction continue sur un segment, le théorème des bornes atteintes nous dit que la norme infinie existe forcément, et que c'est un maximum (et pas seulement une borne supérieure). On a alors les propriétés suivantes (qui justifient l'appellation de norme, cf. programme de deuxième année).

Proposition. Soient $a \leqslant b$ deux réels. Soient f et g appartenant à $\mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$.

1. (Séparation) $\|f\|_\infty \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si f est la fonction nulle (sur $[\,a\,;b\,]$).
2. (Homogénéïté) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \times \|f\|_\infty$.
3. (Inégalité triangulaire) $\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Ci-contre, les normes infinies sont évidemment prises sur $[\,a\,;b\,]$. Les résultats ci-contre sont encore vrais pour des fonctions définies (pas forcément continues) sur un domaine D (pas forcément un segment) si les normes infinies existent, ce qui n'est pas forcément le cas.

Démonstration.

1. $\|f\|_\infty$ est évidemment positive car borne supérieur d'un ensemble de réels positifs (à cause de la valeur absolue). Étudions le cas d'égalité.

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = 0 \quad &\iff \quad \sup\{|f(x)|\,|\,x \in [\,a\,;b\,]\} = 0\\ &\iff \quad \forall x \in [\,a\,;b\,]\,, |f(x)| = 0\\ &\iff \quad \forall x \in [\,a\,;b\,]\,, f(x) = 0\\ &\iff \quad f = 0\end{aligned}$$

2. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $|\lambda f(x)| = |\lambda| \times |f(x)| \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$. En d'autres termes, $|\lambda| \times \|f\|_\infty$ est un majorant de $|\lambda f|$. Par définition de la borne supérieure (c'est le plus petit des majorants), $\|\lambda f\|_\infty \leqslant |\lambda| \times \|f\|_\infty$. Si $\lambda = 0$, on a égalité. Supposons λ non nul. Alors,

$$f(x) = \frac{1}{|\lambda|} \times |\lambda f(x)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \times \|\lambda f\|_\infty$$

De même, par définition de la borne supérieure :

$$\|f\|_\infty \leqslant \frac{1}{|\lambda|} \times \|\lambda f\|_\infty \qquad \square$$

On en déduit que $|\lambda| \times \|f\|_\infty \leqslant \|\lambda f\|_\infty$ ce qui permet de conclure.

3. Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. D'après l'inégalité triangulaire, $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ ce qui permet de conclure, toujours d'après la définition d'une borne supérieure.

Il n'y a pas forcément égalité ! Par exemple, si $f = \text{Id}_{[\,0\,;1\,]}$ et $g = -\text{Id}_{[\,0\,;1\,]}$, $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ mais $f+g$ est la fonction nulle donc $\|f+g\|_\infty = 0$.

Remarque : On justifiera le nom de norme infinie dans le chapitre 22.

VIII Théorème de la limite monotone

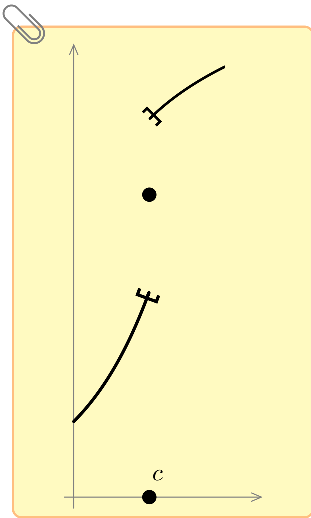
Théorème (de la limite monotone - cas croissant). Soit f une fonction croissante sur $]\,a\,;b\,[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1. Si f est majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f admet une limite finie en b et cette limite est $\displaystyle\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} +\infty$.

2. Si f est minorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f admet une limite finie en a et cette limite est $\inf_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.
3. Pour tout $c \in]\,a\,;b\,[$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite. De plus, $\lim_{x\to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$ avec égalité si et seulement si f est continue en c.

Théorème (de la limite monotone - cas décroissant). Soit f une fonction décroissante sur $]\,a\,;b\,[$, avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

1. Si f est minorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f admet une limite finie en b et cette limite est $\inf_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to b]{} -\infty$.
2. Si f est majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors f admet une limite finie en a et cette limite est $\sup_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x)$. Sinon $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
3. Pour tout $c \in]\,a\,;b\,[$, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite. De plus, $\lim_{x\to c^-} f(x) \geqslant f(c) \geqslant \lim_{x\to c^+} f(x)$ avec égalité si et seulement si f est continue en c.



Remarques :

- Ainsi toute fonction monotone sur $]\,a\,;b\,[$ admet des limites (éventuellement infinies) en a^+ et b^-.
- Dans le cas où on se place sur un intervalle non ouvert, par exemple $[\,a\,;b\,]$, nous pouvons appliquer le théorème sur $]\,a\,;b\,[$: f admet une limite à gauche en b et une limite à droite en a (finies car f est définie en a et b donc f est majorée par $f(b)$ et minorée par $f(a)$). De plus, f admet une limite à gauche et à droite finies en tout $c \in]\,a\,;b\,[$. En d'autres termes : **une fonction monotone admet une limite à gauche et une limite à droite finies en tout point intérieur.**
- Ce dernier résultat (l'existence d'une limite à gauche et d'une limite à droite finies en tout point intérieur) est le plus important. Les autres sont analogues à ceux pour les suites et peuvent être retrouvés facilement.

Démonstration. Démontrons le résultat uniquement dans le cas croissant.

1. Supposons que f est majorée sur $I =]\,a\,;b\,[$ et notons L la borne supérieure de $f(]\,a\,;b\,[)$. Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de L, il existe $y \in]\,a\,;b\,[$ tel que $L - \varepsilon \leqslant f(y)$. Si $x \in [\,y\,;b\,[$ alors, par croissance de f, on a
$$L - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) \leqslant L \leqslant L + \varepsilon.$$
D'où $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$.
   - Si $b = +\infty$, on pose $B = y$ et on a, pour tout $x \in I \cap [\,B\,;+\infty\,[= [\,y\,;b\,[$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} L$.
   - Si $b \in \mathbb{R}$, on pose $\eta = b - y > 0$ et on a, pour tout $x \in D \cap [\,b-\eta\,;b\,[= [\,y\,;b\,[$, $|f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} L$. □

   Supposons que f ne soit pas majorée sur $]\,a\,;b\,[$. Pour tout $A > 0$, il existe alors $y \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f(y) > A$. Si $x \in [\,y\,;b\,[$ alors, par croissance de f, on a $f(x) > A$. Comme précédemment, on conclut alors que f admet pour limite $+\infty$ en b.
2. Le cas de la limite en a est analogue et laissé en exo.
3. Si $c \in]\,a\,;b\,[$, alors f est croissante et majorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]\,a\,;c\,[$. Ainsi f admet une limite à gauche en c inférieure ou égale à $f(c)$. De plus f est croissante et minorée par $f(c)$ sur l'intervalle $]\,c\,;b\,[$. Ainsi f admet une limite à droite en c supérieure ou égale à $f(c)$. D'où l'inégalité annoncée. Le cas d'égalité découle des liens entre limites et limites à gauche et droite.

Remarque : Démontrons le théorème du paragraphe VI.4.c. Traitons par exemple le cas où f est croissante et $I =]\,a\,;b\,]$ (les autres cas se traitent de manière analogue). Si $y \in f(]\,a\,;b\,])$, alors il existe $x \in]\,a\,;b\,]$ tel que $y = f(x)$. Puisque la fonction f est strictement croissante, on a $y = f(x) \leqslant f(b)$. De plus le théorème de la limite monotone nous assure l'existence de $\lim\limits_a f$ et on a $y = f(x) \in \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$. Ainsi $f(I) \subset \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$. Réciproquement, si $y \in \left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right]$, alors le TVI (version 2) entraîne qu'il existe $x \in I$ tel que $y = f(x) \in f(I)$. Ainsi $\left]\lim\limits_a f\,;f(b)\right] \subset f(I)$. D'où l'égalité.

IX Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes

On se donne dans cette partie une fonction $f : D \to \mathbb{C}$. Attention, même si on considère des fonctions à valeurs complexes, la variable est toujours supposée réelle. Le reste du cours est tout à fait analogue, mais il faut faire attention qu'il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$: écrire par exemple $L - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant L + \varepsilon$ ou $f(x) \geqslant A$ n'a aucun sens si on ne manipule pas des réels. Pour cette raison, certaines définitions vont devoir être adaptées et certaines n'auront juste aucun sens sur $\mathbb{C}$: tant pis ! Rapide tour d'horizon :

- On définit de la même façon les limites finies en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ point adhérent à D, à ceci près qu'on utilise le module et non plus la valeur absolue. Plus précisément, dans le cas où $a \in \mathbb{R}$:

  Définition. Soit $L \in \mathbb{C}$. On dit que f admet comme limite L ou tend vers L quand x tend vers a si :

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

  On note alors : $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$.

  On définit de même $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$ lorsque $a = \pm\infty$.

- Nous avons le résultat très important suivant, reliant limites complexes et limites réelles :

  Théorème. Soit $L \in \mathbb{C}$. Alors :

  $$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L \iff \mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(L) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(L)$$

  En d'autres termes, pour étudier la limite d'une fonction à valeurs complexes, il suffit d'étudier deux fonctions réelles.

  Démonstration. On travaille encore dans le cas où $a \in \mathbb{R}$ (raisonnement analogue dans les autres cas). Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} L$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in D, |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant \eta$,

  $$|\,\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(L)| = |\,\mathrm{Re}(f(x) - L)| \leqslant |f(x) - L| \leqslant \varepsilon$$

  i.e. $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(L)$. De même pour l'autre.

  Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Re}(L)$ et $\mathrm{Im}(f(x)) \xrightarrow[x \to a]{} \mathrm{Im}(L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in D, |x - a| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |\,\mathrm{Re}(f(x)) - \mathrm{Re}(L)| \leqslant \varepsilon$ et il existe $\eta_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in D, |x - a| \leqslant \eta_2 \Rightarrow |\,\mathrm{Im}(f(x)) - \mathrm{Im}(L)| \leqslant \varepsilon$. Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et soit $x \in D$ tel que $|x - a| \leqslant D$.

$$
\begin{aligned}
|f(x)-L| &= |\operatorname{Re}(f(x)-L)+i\operatorname{Im}(f(x)-L)| \\
&\leqslant |\operatorname{Re}(f(x)-L)|+|\operatorname{Im}(f(x)-L)| \\
&\leqslant |\operatorname{Re}(f(x))-\operatorname{Re}(L)|+|\operatorname{Im}(f(x))-\operatorname{Im}(L)| \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}
\qquad \square
$$

ce qui permet de conclure.

- Il y a encore unicité de la limite sur $\mathbb{C}$ grâce au théorème précédent.
- Une fonction ayant une limite finie en a est encore bornée (au sens du module) au voisinage de a.
- Cela n'a plus de sens de parler de fonction qui tend vers $\pm\infty$: où sont $\pm\infty$ sur $\mathbb{C}$? Tout ce qu'on peut faire à la limite est de parler de fonction qui tend vers $+\infty$ en module.
- Cependant, puisque la variable est réelle, on peut encore parler de limite à droite ou à gauche, et le lien entre limite, limite à droite et limite à gauche est encore valable. Il faut bien comprendre que lorsqu'on parle de limite à gauche ou à droite, on se place à gauche ou à droite de a, ce qui a encore du sens car $a \in \mathbb{R}$, on ne se place pas à gauche ou à droite de L, ce qui n'en aurait plus sur $\mathbb{C}$! Cependant, puisqu'on ne peut plus tracer le graphe (puisque l'image est complexe), on pourra avoir du mal à visualiser cette notion et on préférera dire qu'on tend vers L quand x tend vers a par valeurs inférieures ou supérieures, et là il n'y a aucun problème !
- Les opérations sur les limites sont encore valables sur $\mathbb{C}$ (quand les limites ont un sens).
- La caractérisation séquentielle de la limite est encore valable sur $\mathbb{C}$ (quand les limites ont un sens).
- Cela n'a plus de sens de dire que l'inégalité large passe à la limite, ou de parler d'encadrement.
- La définition d'une fonction continue est la même quand la fonction est à valeurs complexes. L'écriture avec des quantificateurs reste inchangée, mais attention : écrire $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$ a un sens, écrire $f(a)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(a)+\varepsilon$ n'en a pas. L'interprétation géométrique de $|f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$ est : $f(x)$ est dans la boule de centre $f(a)$ de rayon ε.
- Le résultat ci-dessus reliant limite d'une fonction et limite de sa partie réelle ou imaginaire se reformule ainsi :

  Théorème. Soit $a \in D$. Alors f est continue en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues en a.

  Par exemple, la fonction (de la variable réelle !) $x \mapsto e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les résultats concernant la continuité à droite ou à gauche sont inchangés (encore une fois, car la variable est réelle).
- Les résultats concernant les opérations sur les fonctions continues sont encore valables.
- La définition de la continuité uniforme et de la lipschitzianité sont inchangées. Le théorème de Heine est encore valable.
- ⚠ Le TVI n'est plus valable sur $\mathbb{C}$! On peut « contourner » l'obstacle ! On peut passer de 1 à -1 sans passer par 0, il suffit de faire le tour ! Par exemple, $x \mapsto e^{ix}$ est continue, vaut 1 en 0 et -1 en π mais ne s'annule pas !

- Évidemment, cela n'a donc pas de sens de parler de théorème de la bijection sur $\mathbb{C}$ (car cela n'a pas de sens de parler de fonction monotone : on oublie donc également le théorème de la limite monotone).
- Cela n'a pas de sens de parler de segment sur $\mathbb{C}$: on oublie donc le théorème des bornes atteintes (mais il a un analogue complexe que vous verrez en deuxième année).