Chapitre 11

Équations différentielles

I Introduction

De façon générale, une équation différentielle est une équation fonctionnelle (i.e. dont l'inconnue, notée y en général, et les coefficients sont des fonctions) faisant également intervenir les dérivées successives des fonctions recherchées : par exemple, la tangente est solution de l'équation différentielle (non linéaire) $y' = 1 + y^2$. On ne sait pas en général résoudre une équation différentielle quelconque. Tout ce qu'on sait faire (et encore, sous certaines conditions uniquement) est prouver l'existence et l'unicité éventuelles d'une solution. Nous nous restreindrons ici au cas (simple) des équations linéaires du premier et du second ordre, définies sur un intervalle, et dont les coefficients sont des fonctions continues (pour le premier ordre) ou constantes (pour le second ordre).

On se contente ci-contre d'une définition intuitive d'équation différentielle : la définition exacte étant un peu obscure et, de toute façon, on n'étudiera cette année que des équations différentielles linéaires.

Sauf indication contraire (dans la partie IV), toutes les fonctions considérées sont supposées à valeurs complexes.

II Équations différentielles linéaires du premier ordre

II.1 Définition

Définition. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation (d'inconnue y) de la forme

$$\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$$

où α, β et γ sont trois fonctions définies sur une partie D de $\mathbb{R}$, union d'intervalles non vides, non réduits à un point, et à valeurs complexes.

On parlera parfois d'une équa-diff ou d'une ED pour une équation différentielle, et d'une EDL pour une équation différentielle linéaire.

Remarques :

- Quand on dit qu'on cherche les solutions y d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, cela signifie qu'on cherche les fonctions y dérivables sur D telles que, pour tout $x \in D$, $\alpha(x)y'(x) + \beta(x)y(x) = \gamma(x)$.
- Par convention, l'inconnue est notée y et on n'explicite pas la variable x dans y. Attention, d'une part, il ne faut pas oublier que y est une fonction (dérivable, et dérivable deux fois quand on s'intéresse à des équations du second ordre) et donc il ne faudra parfois pas oublier d'évaluer y en x (voir les démonstrations ci-dessous). D'autre part, noter y l'inconnue n'est qu'une convention, il ne faudra pas hésiter à la la noter z, cf. paragraphe III.2, ou f ou ... lorsque la notation y sera déjà prise.
- On se restreindra dans ce chapitre au cas où les fonctions α, β et γ (et plus tard les fonctions a et b) sont continues.
- Nous parlerons un peu des endroits où α s'annule dans le chapitre 14. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons uniquement aux **intervalles** sur lesquels α ne s'annule pas. Plus précisément :

Définition. On appelle domaine d'intégration d'une équation différentielle linéaire du premier ordre tout **intervalle** sur lequel α ne s'annule pas.

En d'autres termes, un domaine d'intégration est un intervalle sur lequel « la fonction devant y' » ne s'annule pas.

Remarques :

- Par conséquent, la première chose à faire quand on a une équa-diff linéaire du premier ordre est de déterminer les domaines d'intégration puis de diviser par $\alpha(x)$. On se ramène donc à une équation différentielle de la forme

$$y' + a(x)y = b(x)$$

où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{C}$. Il suffit donc de savoir résoudre une équation de ce type, et donc nous n'étudierons que des équations de ce type dans cette partie.

- Dans la suite, on se donne un intervalle I non vide non réduit à un point, et quand nous dirons « soit $y' + a(x)y = b(x)$ une EDL », il sera sous-entendu que a et b sont deux fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Rappelons que, par commodité, nous supposons que les fonctions α, β et γ, et donc les fonctions a et b, sont continues. Cela permet par exemple d'affirmer qu'elles admettent des primitives.

Exemple : Les domaines d'intégration de l'ED $xy' + \left(x^2+1\right)y = x$ sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, et sur chacun des domaines d'intégration, cette équa-diff est équivalente à :

$$y' + \left(x + \frac{1}{x}\right) y = 1$$

II.2 Équation homogène associée

Définition.

- Une EDL $y' + a(x)y = b(x)$ est dite homogène lorsque b est la fonction nulle.
- Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une EDL du premier ordre. On appelle équation homogène associée (EHA) l'équation $y' + a(x)y = 0$.

L'équation homogène associée est donc uniquement la même équation sans second membre. On trouve d'ailleurs l'appellation « équation sans second membre » dans certains ouvrages.

Théorème. Soit $(H) : y' + a(x)y = 0$ une EDL homogène. L'ensemble des solutions de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

où A est une primitive de a.

Rappelons que a est continue donc admet des primitives.

Démonstration. Soit y une fonction dérivable sur I. Soit A une primitive de a. Soit φ la fonction définie sur I par $\varphi(x) = y(x)e^{A(x)}$. Alors φ est dérivable et, pour tout $x \in I$, $\varphi'(x) = \left(y'(x) + a(x)y(x)\right)e^{A(x)}$ puisque A est une primitive de a. Dès lors :

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (H) &\iff \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = 0 \\
&\iff \forall x \in I, \left(y'(x) + a(x)y(x)\right)e^{A(x)} = 0 \\
&\iff \forall x \in I, \varphi'(x) = 0 \\
&\iff \varphi \text{ est constante sur } I \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I, y(x)e^{A(x)} = \lambda \\
&\iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I, y(x) = \lambda e^{-A(x)}
\end{aligned}$$

□

Attention au signe ! Il ne faut pas oublier le $-$ dans l'exponentielle. De plus, il faut se souvenir que cette formule est valable pour les équations du type $y' + a(x)y = 0$. Si on a une équation du type $y' = a(x)y$, il faut commencer par tout mettre du même côté.

Exemple : Résolvons l'équa-diff $(H) : xy' + \left(x^2+1\right)y = 0$. Les domaines d'intégration sont $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et, sur chaque domaine d'intégration, (H) est équivalente à

$$y' + \left(x + \frac{1}{x}\right) y = 0$$

Dans le cas particulier où a est une constante, les solutions de l'EDL $y' + ay = 0$ sont exactement les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{C}$.

Une primitive de $a : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$ est $A : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \ln|x|$. Attention, x peut être négatif si on se place sur $\mathbb{R}_-^*$! Il faut donc séparer les cas selon le domaine d'intégration.

Rappelons que $-\ln(x) = \ln(1/x)$ donc $e^{-\ln(x)} = \dfrac{1}{x}$.

- Plaçons-nous sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2} - \ln(x)} = \lambda \frac{e^{-x^2/2}}{x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

- Si on se place sur $\mathbb{R}_-^*$. On a donc :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2} - \ln(-x)} = \lambda \frac{e^{-x^2/2}}{-x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Remarque : Expliquons ici une chose que nous ferons souvent par la suite : sur $\mathbb{R}_-^*$, on a finalement

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{e^{-x^2/2}}{x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

Attention, cela ne veut pas dire que $\lambda = -\lambda$! Cela ne veut pas dire que $\lambda = 0$! Cela signifie simplement que, quand λ décrit $\mathbb{C}$, les deux ensembles sont égaux. Quand λ décrit $\mathbb{C}$, $-\lambda$ décrit également $\mathbb{C}$, et donc les deux ensembles sont les mêmes. Par exemple, quand $\lambda = 1$ dans le premier ensemble, on obtient la fonction $x \mapsto -e^{-x^2/2}/x$, qui appartient au second ensemble, pour $\lambda = -1$. Réciproquement, pour $\lambda = 2$ dans le deuxième ensemble, on obtient $x \mapsto 2e^{-x^2/2}/x$, qui appartient aussi au premier, pour $\lambda = -2$.

Il n'est pas toujours aussi simple d'obtenir une primitive ! Parfois il faudra l'écrire sous la forme

$$\int^x a(t)\,\mathrm{d}t$$

et utiliser les méthodes vues dans le chapitre précédent.

On dit que « -1 est absorbé par le λ » : il suffit en fait de se rendre compte que les deux ensembles sont les mêmes, et on fera ceci constamment dans ce chapitre. On peut évidemment généraliser à n'importe quelle constante. Par exemple :

$$\left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} + \frac{1}{x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda}{x} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

II.3 Ensemble des solutions

Revenons aux EDL « classiques » i.e. avec second membre.

Proposition. Soit $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ une EDL du premier ordre. Soit y_0 une solution particulière. Soit y une fonction dérivable sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si $y - y_0$ est solution de $(H) : y' + a(x)y = 0$, l'équation homogène associée. En d'autres termes :

$$S_E = \{ y + y_0 \,|\, y \in S_H \}$$

Nous dirons au chapitre 36 que l'ensemble des solutions est un espace affine.

Démonstration. Raisonnons par équivalences.

$$\begin{aligned}
y \text{ est solution de } (E) &\iff \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\
&\iff \forall x \in I, y'(x) + a(x)y(x) = {y_0}'(x) + a(x)y_0(x) && (\text{car } y_0 \text{ est solution de } (E)) \\
&\iff \forall x \in I, (y'(x) - {y_0}'(x)) + a(x) \times (y(x) - y_0(x)) = 0 \\
&\iff \forall x \in I, (y - y_0)'(x) + a(x) \times (y - y_0)(x) = 0 && (\text{linéarité de la dérivation}) \\
&\iff y - y_0 \text{ est solution de } (H)
\end{aligned}$$

□

Remarque : Pour faire simple :

$$\text{Solutions de l'EDL} = \text{solution particulière} + \text{solutions de l'EDH associée}$$

Ce genre de raisonnement (on obtient les solutions en additionnant une solution particulière et les solutions d'un problème plus simple) est omniprésent en mathématiques. On le rencontrera plusieurs fois cette année (sous une forme ou une autre) :

- lorsqu'on cherchera le terme général d'une suite arithmético-géométrique dans le chapitre 12.
- lorsqu'on résoudra des systèmes linéaires dans le chapitre 21.
- lorsqu'on a résolu une équation diophantienne du type $au + bv = m$ dans le chapitre 6.
- etc.

L'idée sous-jacente est celle d'espace affine et de résolution d'une équation linéaire : cf. chapitre 36.

II.4 Méthode de variation de la constante

D'après les paragraphes précédents, pour savoir résoudre complètement une EDL du premier ordre, il ne nous reste plus qu'à savoir trouver une solution particulière. Parfois, il y a des solutions évidentes. Par exemple, si a et b sont des constantes avec $a \neq 0$, la fonction constante égale à $-b/a$ est solution évidente de l'équation différentielle $y' + ay = b$. Il faut toujours se demander s'il y a des solutions évidentes, mais si rien ne vient, alors on applique la méthode suivante, appelée méthode de variation de la constante. Celle-ci porte très bien son nom : on résout l'équation homogène associée, on a donc une solution (de (H)) de la forme $x \mapsto \lambda e^{-A(x)}$et ensuite, par analogie, on cherche une solution (de (E)) sous la forme $x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$ (« on rend la constante variable »).

Exemple : Revenons à l'équation différentielle

$$(E) : y' + \left(x + \frac{1}{x}\right) y = 1$$

dont on a vu que les solutions de l'équation homogène associée (qu'on soit sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$) étaient les fonctions de la forme $x \mapsto \lambda \times \dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$. On cherche une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x) \times \dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$. Plus précisément : soit λ dérivable sur $I = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$. et soit $y_0 : x \mapsto \lambda(x) \times \dfrac{e^{-x^2/2}}{x}$. Alors y_0 est dérivable et, pour tout $x \in I$:

$$y_0{}'(x) = \left(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} - \lambda(x)\right) e^{-x^2/2}$$

Les solutions de l'EHA étant les mêmes sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, on ne différencie pas les cas pour trouver une solution particulière. Mais il faut parfois le faire : cf. exercice 66 du chapitre 14.

Dès lors :

$$\begin{aligned}
y_0 \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall x \in I, y_0{}'(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right) y_0(x) = 1 \\
&\iff \forall x \in I, \left(\frac{\lambda'(x)}{x} - \frac{\lambda(x)}{x^2} - \lambda(x)\right) e^{-x^2/2} + \left(x + \frac{1}{x}\right) \times \lambda(x) \times \frac{e^{-x^2/2}}{x} = 1 \\
&\iff \forall x \in I, \frac{\lambda'(x)}{x} \times e^{-x^2/2} = 1 \\
&\iff \forall x \in I, \lambda'(x) = xe^{x^2/2} \\
&\iff \lambda \text{ est une primitive de } x \mapsto xe^{x^2/2}
\end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto xe^{x^2/2}$ étant $x \mapsto e^{x^2/2}$, la fonction

$$y_0 : x \mapsto e^{x^2/2} \times \frac{e^{-x^2/2}}{x} = \frac{1}{x}$$

est solution particulière de (E). On en déduit l'ensemble des solutions de (E) :

$$S_E = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda e^{-x^2/2}}{x} + \frac{1}{x} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

II.5 Principe de superposition

Théorème. Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(E) : y' + a(x)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$ une EDL du premier ordre. Si y_1 est une solution particulière de l'EDL $y' + a(x)y = b_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière de l'EDL $y' + a(x)y = b_2(x)$, alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est une solution particulière de (E).

b_1 et b_2 sont elles aussi des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$. On généralise aisément le résultat ci-contre au cas où le second membre est constitué d'un nombre quelconque (fini) de fonctions (continues).

Démonstration. Découle de la linéarité de la dérivation : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : En d'autres termes, pour résoudre une EDL de la forme

$$(E) : y' + a(x)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$$

(i.e. dont le second membre comporte deux termes, mais, encore une fois, on généralise aisément au cas où il y a plus de termes) :

- on commence comme d'habitude : on résout l'EHA $y' + a(x)y = 0$.
- On trouve ensuite une solution particulière y_1 à l'équa-diff $y' + a(x)y = b_1(x)$ et une solution particulière y_2 à l'équa-diff $y' + a(x)y = b_2(x)$.
- On obtient une solution particulière à l'équation initiale en calculant $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. L'ensemble des solutions de (E) est finalement :

$$S_E = \{ y + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \,|\, y \in S_H \}$$

Remarque : Bon, en fait, ce résultat sert surtout quand on a déjà résolu des équa-diffs, et qu'on cherche une solution « de la combinaison linéaire » : il est inutile alors de refaire tous les calculs. Il sert également beaucoup pour les équations du second ordre (cf. paragraphe III). Mais quand on cherche uniquement les solutions de $(E) : y' + a(x)y = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$, il suffit de faire comme précédemment, on cherche une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante, en traitant $\alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$ comme un seul second membre, c'est-à-dire en résolvant l'EDL $(E') : y' + a(x) = d(x)$ avec $d(x) = \alpha_1 b_1(x) + \alpha_2 b_2(x)$.

Mais on peut parfois le faire pour une EDL du premier ordre : plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros.

II.6 Problème de Cauchy

Remarque : Maintenant qu'on a vu la méthode pour résoudre des équa-diffs, on peut se poser la question de l'existence et de l'unicité des solutions.

Définition. Soit $y' + a(x)y = b(x)$ une EDL. Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. On appelle problème de Cauchy le système (d'inconnue y) suivant :

$$\begin{cases} y' + a(x)y &= b(x) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Ici, y_0 est un réel quelconque ! Rien à voir avec une solution particulière de (E) !

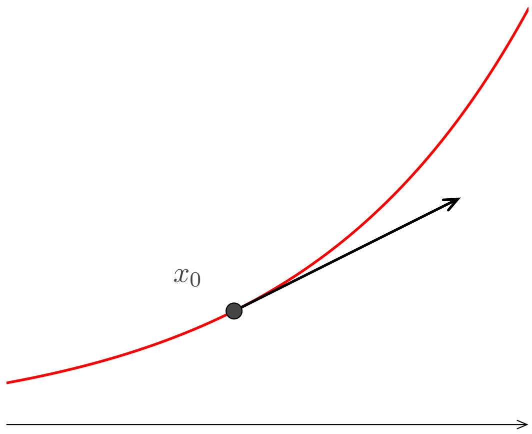
Remarque : En d'autres termes, résoudre un problème de Cauchy consiste à résoudre l'EDL associée avec la contrainte d'une valeur donnée en un point. Encore en d'autres termes, résoudre un problème de Cauchy consiste à se demander si, par un point du plan donné, passe une (ou plusieurs) solution.

Théorème. Soit $y'+a(x)y=b(x)$ une EDL. Soit $(x_0,y_0)\in I\times\mathbb{R}$. Le système de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'+a(x)y & = & b(x) \\ \\ y(x_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $y : I\to\mathbb{R}$ solution de (E) vérifiant $y(x_0)=y_0$.

Remarque : C'est intuitif ! Si $y(x_0)=y_0$ alors $y'(x_0)=b(x_0)-a(x_0)\times y_0$, c'est-à-dire qu'on connaît la pente de y en x_0 (la « direction » de la fonction). On peut donc se dire qu'on « connaît y au voisinage de x_0 ».



Ensuite on recommence : « on connaît y et y' en un autre point pas trop loin de x_0 » etc. si bien qu'on la connaît partout. Bon, c'est avec les mains, mais cela permet de bien visualiser la chose.

Démonstration. Soit

$$A : x\mapsto \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$$

l'unique primitive de a qui s'annule en x_0. Les solutions de l'EHA sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto \lambda e^{-A(x)}$. Appliquons la méthode de variation de la constante et cherchons une solution particulière sous la forme $x\mapsto\lambda(x)e^{-A(x)}$. Soit donc λ dérivable sur I et soit $\varphi_0 : x\mapsto \lambda(x)e^{-A(x)}$. Alors φ_0 est dérivable et, pour tout $x\in I$, ${\varphi_0}'(x)=(\lambda'(x)-\lambda(x)a(x))\,e^{-A(x)}$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\varphi_0 \text{ est solution particulière de } (E) &\iff \forall x\in I, {\varphi_0}'(x)+a(x)\varphi_0(x)=b(x)\\
&\iff \forall x\in I, (\lambda'(x)-\lambda(x)a(x))\,e^{-A(x)}+a(x)\times\lambda(x)\times e^{-A(x)}=b(x)\\
&\iff \forall x\in I, \lambda'(x)e^{-A(x)}=b(x)\\
&\iff \forall x\in I, \lambda'(x)=b(x)e^{A(x)}\\
&\iff \lambda \text{ est une primitive de } x\mapsto b(x)e^{A(x)}
\end{aligned}$$

On pose donc

$$\lambda : x\mapsto \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,\mathrm{d}t$$

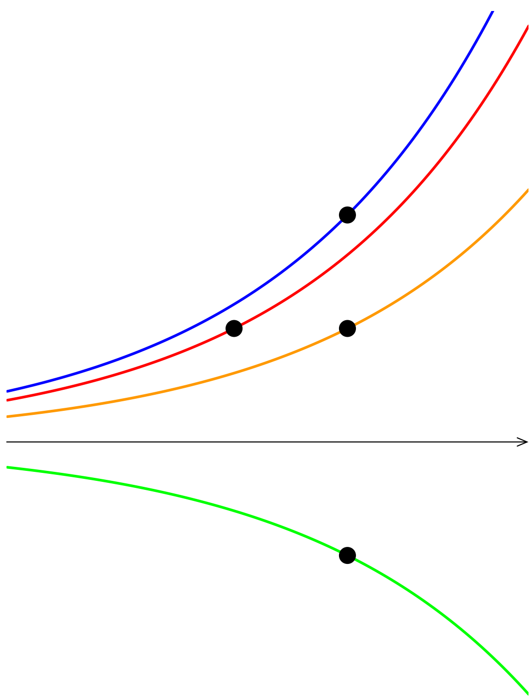
l'unique primitive de $x\mapsto b(x)e^{A(x)}$ qui s'annule en x_0 et $\varphi_0 : x\mapsto\lambda(x)e^{-A(x)}$ si bien que $\varphi_0(x_0)=0$. Enfin, soit $\lambda_0\in\mathbb{C}$ et soit $y : x\mapsto \lambda_0e^{-A(x)}+\varphi_0(x)$ une solution de l'EDL. Alors :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution du problème de Cauchy} &\iff y(x_0) = y_0 \\ &\iff \lambda_0 e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \lambda_0 = y_0 \qquad \square \end{aligned}$$

puisque $A(x_0) = 0$ et donc $e^{-A(x_0)} = 1$. Il y a un unique λ_0 qui convient donc une unique solution y qui convient : d'où l'existence et l'unicité.

Interprétation géométrique : Par un point du plan d'abscisse appartenant à I et d'ordonnée quelconque passe une et une seule solution. Les graphes des solutions recouvrent donc le plan (enfin, plus précisément, la partie du plan, le « rectangle » infini, formé de tous les points d'abscisse appartenant à I) et deux graphes de solutions distinctes ne se coupent jamais.

Les graphes des solutions forment donc une partition du plan (enfin, de la partie du plan formée de tous les points d'abscisse appartenant à I).



Remarque : Puisqu'on sait résoudre totalement les EDL du premier ordre, ce résultat est surtout utile pour gagner du temps, dans des raisonnements du type : « on a deux solutions au problème de Cauchy donc elles sont égales », ou dans des raisonnements qualitatifs avec des fonctions « générales ». Cela permet parfois d'éviter de calculer une primitive, ce qui peut prendre du temps, ou d'introduire une intégrale lorsqu'il n'est pas possible d'en calculer une explicitement. Ce sera la même chose avec le problème de Cauchy pour une EDL du second ordre à coefficients constants (cf. paragraphe III.5).

Exemple : Soit p une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ et f une solution réelle non nulle (i.e. différente de la fonction nulle) de l'équation différentielle $(E) : y' + py = 0$. Montrer que f est de signe constant.

Réponse : Supposons que f ne soit pas de signe constant. Alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $f(x_1) < 0 < f(x_2)$ (rappelons que f est à valeurs réelles). f étant continue (car dérivable car solution de (E)), d'après le TVI, il existe x_0 tel que $f(x_0) = 0$. Or, la fonction nulle est solution de (E) et vaut 0 en x_0. Par unicité au problème de Cauchy, f est la fonction nulle ce qui est absurde. Donc f est de signe constant.

On pourrait aussi répondre de la façon suivante : soit P une primitive de p. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (car f est non nulle et à valeurs réelles) tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda e^{-P(x)}$: f est du signe de λ ce qui permet de conclure.

III Équation différentielles du second ordre à coefficients constants

III.1 Définition

Définition. On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants toute équation (d'inconnue y) de la forme

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

où f est une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$, union d'intervalles non vides, non réduits à un point, et à valeurs complexes.

Remarques :

- Quand on dit qu'on cherche les solutions y d'une équation différentielle linéaire du second ordre, cela signifie qu'on cherche les fonctions y dérivables **deux fois** sur D telles que, pour tout $x \in D$, $y'' + ay' + by = f(x)$.
- On se restreindra dans ce chapitre au cas où f est continue.
- Comme précédemment, on se placera sur un intervalle. Ainsi, dans la suite, on se donne un intervalle I non vide non réduit à un point, et quand nous dirons « soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une EDL du second ordre à coefficients constants », il sera sous-entendu que a et b sont deux complexes et f une fonction continue de I dans $\mathbb{C}$.

Parfois, nous ne dirons même pas que les coefficients sont constants, cela sera sous-entendu.

Exemple : $y'' + y' + y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

III.2 Équation homogène associée

Définition.

- Une EDL $y'' + ay' + by = f(x)$ est dite homogène lorsque f est la fonction nulle.
- Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une EDL du second ordre à coefficients constants. On appelle équation homogène associée (EHA) l'équation $y'' + ay' + by = 0$.

L'équation homogène associée est donc uniquement la même équation sans second membre.

Définition. Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène. L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique de (H).

Théorème. Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène. Notons $(C) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (H).

- Si (C) admet deux solutions simples r_1 et r_2 (c'est-à-dire si $\Delta = a^2 - 4b \neq 0$) alors l'ensemble des solutions de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

- Si (C) admet une solution double r_0 (c'est-à-dire si $\Delta = a^2 - 4b = 0$) alors l'ensemble des solutions de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x) e^{r_0 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Dans le cas d'une EDL d'ordre 2, il y a deux constantes à choisir, l'ensemble des solutions est engendré par deux fonctions. On dira au chapitre 30 que S_H est un espace vectoriel de dimension 2 (et de dimension 1 pour une EDL du premier ordre).

Remarque : ⚠ Sur $\mathbb{C}$, il n'y a que deux cas : $\Delta = 0$ et $\Delta \neq 0$, parler du signe de Δ n'a de sens que sur $\mathbb{R}$, cf. paragraphe IV.1.

DÉMONSTRATION. Soit $r \in \mathbb{C}$. Cherchons quand $g : x \mapsto e^{rx}$ est solution de (H). g est dérivable deux fois (et même $\mathscr{C}^\infty$) et, pour tout $x \in I$, $g'(x) = re^{rx}$ et $g''(x) = r^2 e^{rx}$. Dès lors :

$$\begin{aligned} g \text{ est solution de } (H) & \iff \forall x \in I, g''(x) + ag'(x) + bg(x) = 0 \\ & \iff \forall x \in I, \left(r^2 + ar + b\right) \times e^{rx} = 0 \\ & \iff r^2 + ar + b = 0 \end{aligned}$$

puisque l'exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$. Il en découle que g est solution de (H) si et seulement si r est solution de l'équation caractéristique (C). On se donne dans la suite une solution r de (C), une fonction y dérivable deux fois sur I et on définit sur I la fonction $\varphi : x \mapsto y(x)e^{-rx}$. Alors φ est dérivable deux fois sur I et, pour tout $x \in I$, $y(x) = \varphi(x)e^{rx}$ si bien que :

$$y'(x) = \left(\varphi'(x) + r\varphi(x)\right) e^{rx} \qquad \text{et} \qquad y''(x) = \left(\varphi''(x) + 2r\varphi'(x) + r^2\varphi(x)\right) e^{rx}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (H) & \iff \forall x \in I, y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \\ & \iff \forall x \in I, \left(\varphi''(x) + 2r\varphi'(x) + r^2\varphi(x) + a\varphi'(x) + ar\varphi(x) + b\varphi(x)\right) e^{rx} = 0 \\ & \iff \varphi''(x) + (2r+a)\varphi'(x) + \underbrace{(r^2 + ar + b)}_{=0}\varphi(x) = 0 \\ & \iff \varphi''(x) + (2r+a)\varphi'(x) = 0 \\ & \iff \varphi' \text{ est solution de l'EDL du premier ordre } z' + (2r+a)z = 0 \\ & \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in I, \varphi'(x) = \lambda e^{-(2r+a)x} \end{aligned}$$

Il y a alors deux cas, selon que $2r + a$ est nul ou non. Rappelons que les racines de (C) (éventuellement égales) sont :

La notation $\sqrt{\Delta}$ est interdite sur $\mathbb{C}$!

$$\frac{-a \pm \delta}{2}$$

où δ est un complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta = a^2 - 4b$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} 2r + a = 0 & \iff r = -\frac{a}{2} \\ & \iff \delta = 0 \\ & \iff \Delta = 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $2r + a = 0$ et seulement si (C) admet une solution double.

- Premier cas : $2r + a \neq 0$, c'est-à-dire (d'après ce qui précède) que (C) admet deux solutions simples, l'une étant r et l'autre étant notée r'. Or, on sait que la somme des racines vaut $-a$ donc

$$\begin{aligned} 2r + a & = 2r + (-r - r') \\ & = r - r' \end{aligned}$$

Reprenons nos équivalences :

$$y \text{ est solution de } (H) \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2, \forall x\in I, \varphi(x) = \frac{\lambda}{-2r+a}\times e^{-(2r+a)x}+\mu$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in I, y(x)e^{-rx} = \lambda e^{-(r-r')x}+\mu$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in I, y(x) = \lambda e^{r'x}+\mu e^{rx}$$

Précisons que la deuxième équivalence ne signifie pas que $\lambda = \dfrac{\lambda}{-2r+a}$, simplement qu'on « rentre » le $-(2r+a)$ dans le λ, comme dans le paragraphe II.2, c'est-à-dire que lorsque λ parcourt $\mathbb{C}$, $\dfrac{\lambda}{-2r+a}$ parcourt $\mathbb{C}$ également, et donc on a le même ensemble de fonctions. En termes plus formels, la première et la deuxième ligne sont équivalentes, ce qu'on a précisément utilisé.

- Deuxième cas : $2r+a=0$, c'est-à-dire (d'après ce qui précède) que (C) admet r comme solution double. Reprenons nos équivalences :

$$y \text{ est solution de } (H) \iff \exists\lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in I, \varphi'(x) = \lambda$$

$$\iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2, \forall x\in I, \varphi(x) = \lambda x+\mu$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in I, y(x)e^{-rx} = \lambda x+\mu$$

$$\iff \exists\lambda\in\mathbb{C}, \forall x\in I, y(x) = (\lambda x+\mu)e^{rx}$$

□

Exemples :

- L'équation caractéristique de $(H) : y''+y'+y=0$ est $(C) : r^2+r+1=0$ dont les solutions sont j et j^2, si bien que :

$$S_H = \left\{ x\mapsto \lambda e^{jx}+\mu e^{j^2x} \,\middle|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

- L'équation caractéristique de $(H) : y''+y=0$ est $(C) : r^2+1=0$ dont les solutions sont $\pm i$, si bien que l'ensemble des solutions **complexes** de (H) sont :

$$S_H = \left\{ x\mapsto \lambda e^{ix}+\mu e^{-ix} \,\middle|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

cf. paragraphe IV.1 pour les solutions réelles.

- L'équation caractéristique de $(H) : y''+2y'+y=0$ est $(C) : r^2+2r+1=0$ dont l'unique solution est -1, si bien que :

$$S_H = \left\{ x\mapsto (\lambda+\mu x)e^{-x} \,\middle|\, (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2 \right\}$$

III.3 Ensemble des solutions

Revenons aux EDL « classiques » i.e. avec second membre.

Proposition. Soit $(E) : y''+ay'+by=f(x)$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Soit y_0 une solution particulière. Soit y une fonction dérivable deux fois sur I. Alors y est solution de (E) si et seulement si $y-y_0$ est solution de $(H) : y''+ay'+by=0$, l'équation homogène associée. En d'autres termes :

$$S_E = \{y+y_0 \,|\, y\in S_H\}$$

Démonstration. Raisonnons par équivalences.

$$y \text{ est solution de } (E) \iff \forall x\in I, y''(x)+ay'(x)+by(x) = f(x)r$$

$$\iff \forall x\in I, y''(x)+ay'(x)+by(x) = y_0''(x)+ay_0'(x)+by_0(x)$$
(car y_0 est solution de (E))

$$\iff \forall x\in I, (y-y_0)''(x)+a\times(y-y_0)'(x)+b\times(y-y_0)(x) = 0$$
(linéarité de la dérivation)

□

Finalement : y est solution de $(E) \iff y-y_0$ est solution de (H).

Remarque : Pour faire simple, comme pour les EDL du premier ordre :

$$\text{Solutions de l'EDL} = \text{solution particulière} + \text{solutions de l'EDH associée}$$

III.4 Principe de superposition

Théorème. Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$ et $(E) : y'' + ay' + by = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Si y_1 est une solution particulière de l'EDL $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et si y_2 est une solution particulière de l'EDL $y'' + ay' + by = f_2(x)$, alors $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ est une solution particulière de (E).

f_1 et f_2 sont elles aussi des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$. On généralise aisément le résultat ci-contre au cas où le second membre est constitué d'un nombre quelconque (fini) de fonctions (continues).

Démonstration. Découle de la linéarité de la dérivation : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : En d'autres termes, pour résoudre une EDL de la forme

$$(E) : y'' + ay' + by = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$$

(i.e. dont le second membre comporte deux termes, mais, encore une fois, on généralise aisément au cas où il y a plus de termes) :

- On commence comme d'habitude : on résout l'EHA $y'' + ay' + by = 0$.
- On trouve ensuite une solution particulière y_0 à l'équa-diff $y'' + ay' + by = f_1(x)$ et une solution particulière y_1 à l'équa-diff $y'' + ay' + by = f_2(x)$.
- On obtient une solution particulière à l'équation initiale en calculant $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. L'ensemble des solutions de (E) est finalement :

$$S_E = \{y + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \mid y \in S_H\}$$

Remarque : Là, par contre, ce résultat est très utile puisqu'il n'y a pas de méthode de variation de la constante pour une EDL du second ordre (bon, il y a une méthode analogue, la méthode de variation des constantes, mais elle est HP). On sait trouver une solution particulière dans certains cas particuliers (cf. paragraphe III.6) et donc, dans le cas où le second membre est combinaison linéaire de telles fonctions, on sait trouver une solution particulière.

III.5 Problème de Cauchy

Définition. Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$. On appelle problème de Cauchy le système (d'inconnue y) suivant :

$$\begin{cases} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{cases}$$

Ici, y_0 et y_1 sont des réels quelconques ! Rien à voir avec des solutions particulières de (E) !

Remarque : En d'autres termes, résoudre un problème de Cauchy consiste cette fois à résoudre l'EDL associée avec la contrainte d'une valeur donnée en un point ainsi que la contrainte d'une valeur donnée de la dérivée en ce même point : il y a deux contraintes pour une équa-diff d'ordre deux ! Encore en d'autres termes, résoudre un problème de Cauchy consiste à se demander si, par un point du plan donné avec une pente donnée, passe une (ou plusieurs) solutions.

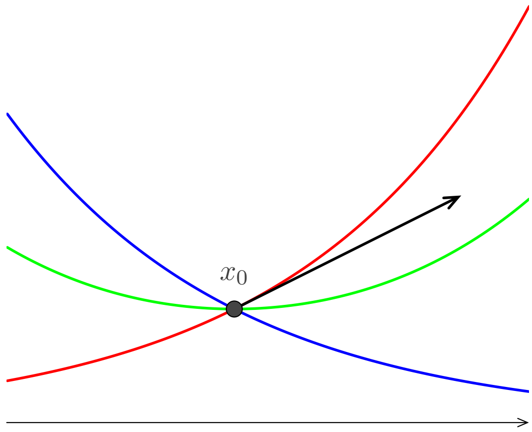
Théorème (admis). Soit $y'' + ay' + by = f(x)$ une EDL à coefficients constants. Soit $(x_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{R}^2$. Le système de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + ay' + by & = & f(x) \\ y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \end{array} \right.$$

admet une unique solution, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction $y : I \to \mathbb{R}$ solution de (E) vérifiant $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$.

Le fait qu'il faille deux contraintes pour caractériser une solution est intuitif puisque l'ensemble des solutions de l'EHA est engendré par deux fonctions, ou encore puisqu'il faut choisir deux constantes pour caractériser une solution.

Remarque : Attention, l'interprétation géométrique vue pour les équa-diffs d'ordre un n'est plus valide : ici, il faut rajouter la contrainte de la pente, c'est-à-dire que par un point passent une infinité de solutions, mais une seule ayant une pente donnée.



Remarque : Comme pour les EDL du premier ordre, ce théorème sert beaucoup quand on veut identifier deux solutions, et surtout dans le cas général (et même dans un cas explicite, cela peut éviter de calculer des racines et de résoudre un système). Mais attention, il ne faut pas oublier que, pour une EDL du second ordre, il faut aussi une condition sur la dérivée.

Exemple : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et soit f une solution non nulle (i.e. différente de la fonction nulle) de $y''+ay'+by = 0$. On suppose que f s'annule en un réel x_0. Montrer que $f'(x_0) \neq 0$.

Réponse : La solution nulle est solution de (E) et vérifie $y(x_0) = y'(x_0) = 0$. Si $f'(x_0) = 0$ alors, par unicité au problème de Cauchy, f est la fonction nulle ce qui est absurde.

Ne jamais oublier que la fonction nulle est toujours solution d'une équation **homogène**, que ce soit du premier ou du second ordre.

III.6 Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomial ou exponentiel

La résolution générale (i.e. avec un second membre quelconque) des EDL du second ordre à coefficients constants n'est pas au programme. Le programme se limite aux cas où le second membre est polynomial ou de la forme $x \mapsto Ae^{mx}$ avec $(A, m) \in \mathbb{C}^2$. Le théorème suivant permet de ne retenir qu'un seul résultat pour ces deux cas de figure.

Théorème (admis provisoirement). Soit $m \in \mathbb{C}$ et soit P une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{C}$. Soit $(E) : y'' + ay' + by = P(x)e^{mx}$ une EDL du second ordre à coefficients constants. Alors (E) admet une solution particulière de la forme $x \mapsto Q(x)e^{mx}$

Nous le démontrerons au chapitre 30.

où Q est une fonction polynomiale :

- avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si m n'est pas solution de (C).
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si m est solution simple de (C).
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si m est solution double de (C).

(C) étant l'équation caractéristique de l'EHA associée à (E) à savoir $r^2 + ar + b = 0$.

Corollaire. Soit $m \in \mathbb{C}$. L'EDL $y'' + ay' + by = e^{mx}$ admet une solution particulière

- de la forme $x \mapsto Ae^{mx}$, avec $A \in \mathbb{C}$, si m n'est pas solution de (C).
- de la forme $x \mapsto (Ax + B)e^{mx}$, avec $(A, B) \in \mathbb{C}^2$, si m est solution simple de (C).
- de la forme $x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^{mx}$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$, si m est solution double de (C).

Corollaire. Soit $P : I \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. L'EDL $y'' + ay' + by = P(x)$ admet une solution particulière Q polynomiale

- avec $\deg(Q) = \deg(P)$ si 0 n'est pas solution de (C) i.e. si $b \neq 0$.
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 1$ si 0 est solution simple de (C) i.e. si $b = 0 \neq a$.
- avec $\deg(Q) = \deg(P) + 2$ si 0 est solution double de (C) i.e. si $a = b = 0$.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'EDL $(E) : y'' + 2y' + y = \operatorname{sh}(x)$.

On sait déjà que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Cherchons une solution particulière. D'après le principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulières aux équations $(E_1) : y'' + 2y + y = e^x$ et $(E_2) : y'' + 2y' + y = e^{-x}$. Dans le premier cas, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_1 : x \mapsto Ae^x$ puisque 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$. Soient donc $A \in \mathbb{C}$ et $y_1 : x \mapsto Ae^x$. Alors y_1 est dérivable deux fois. Soit $x \in I$.

$$y1''(x) + 2{y_1}'(x) + y_1(x) = (A + 2A + A)e^x$$

Alors y_1 est solution particulière de (E_1) si et seulement si $4A = 1$ si et seulement si $A = 1/4$. En d'autres termes, $y_1 : x \mapsto e^x/4$ est solution particulière de (E_1). Cherchons à présent une solution particulière de (E_2). -1 est solution double de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_2 : x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$, avec $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$. Soient donc $(A, B, C) \in \mathbb{C}^3$ et $y_2 : x \mapsto (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$. y_2 est dérivable deux fois. Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} {y_2}'(x) &= \left(2Ax + B - Ax^2 - Bx - C\right) e^{-x} \\ &= \left(-Ax^2 + (2A - B)x + B - C\right) e^{-x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {y_2}''(x) &= \left(-2Ax + (2A - B) + Ax^2 - (2A - B)x - B + C\right) e^{-x} \\ &= \left(Ax^2 + (B - 4A)x + 2A - 2B + C\right) e^{-x} \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned} {y_2}''(x) + 2{y_2}'(x) + y_2(x) &= \left[(A - 2A + A)x^2 + (B - 4A + 4A - 2B + B)x + (2A - 2B + C + 2B - 2C + C)\right) e^{-x} \\ &= 2Ae^{-x} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que y_2 est solution si et seulement si $A = 1/2$. Dès lors, $y_2 : x \mapsto x^2 e^{-x}/2$ est solution particulière D'après le principe de superposition,

On cherche UNE solution particulière : la seule contrainte est d'avoir $A = 1/2$, les coefficients B et C sont quelconques, on les prend les plus simples possibles, donc on les prend nuls.

$$y_0 = \frac{y_1 - y_2}{2} : x \mapsto \frac{e^x - 2x^2 e^{-x}}{8}$$

est solution particulière de (E) si bien que l'ensemble des solutions de (E) est :

$$S_E = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} + \frac{e^x - 2x^2 e^{-x}}{8} \;\middle|\; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

IV Et sur $\mathbb{R}$?

Dans les parties précédentes, on recherchait les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ solution d'une équation différentielle. Cependant, si les fonctions a et b (dans le cas d'une EDL du premier ordre) ou si les constantes a et b (dans le cas d'une EDL du second ordre à coefficients constants) sont réelles, on peut se demander quelles sont les solutions à valeurs réelles (en particulier, en physique). De même, si on a des solutions complexes, on peut se demander si « les solutions passent à la partie réelle ou à la partie imaginaire ».

IV.1 Cas particulier des équations homogènes

Théorème.

- (Cas des EDH du premier ordre) Soit $a : I \to \mathbb{R}$ continue. L'ensemble des solutions réelles de $(H) : y' + a(x)y = 0$ est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-A(x)} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

  où A est une primitive de a.
- (Cas des EDL du second ordre à coefficients constants) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit (H) : $y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène à coefficients constants. Notons $(C) : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (H). Cette fois-ci il y a trois cas :
  - ⋆ Si (C) admet deux solutions simples r_1 et r_2 (c'est-à-dire si $\Delta = a^2 - 4b > 0$) alors l'ensemble des solutions réelles de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

  - ⋆ Si (C) admet une solution double r_0 (c'est-à-dire si $\Delta = a^2 - 4b = 0$) alors l'ensemble des solutions réelles de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

  - ⋆ Si (C) admet deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$ (c'est-à-dire si $\Delta = a^2 - 4b < 0$) alors l'ensemble des solutions réelles de H est :

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} \times (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque : La seule différence notable concerne les EDL du second ordre à coefficients constants dans le cas $\Delta < 0$. Les autres cas sont analogues au cas complexe, la seule différence est que les scalaires λ et μ sont pris réels.

Démonstration. Les cas d'une EDL du premier ordre et d'une EDL du second ordre avec $\Delta \geqslant 0$ se démontrent comme dans le cas complexe. Intéressons-nous à présent aux EDL du second ordre à coefficients constants. Supposons que $\Delta < 0$. Soient $\alpha \pm i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique (C). D'après le paragraphe III.2,

$$S = \left\{ x \mapsto Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} \,\middle|\, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Prouvons que :

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{\alpha x} \times (\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

par double inclusion.

- Soit $y \in S_H$. Alors $y \in S$ donc il existe $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & Ae^{(\alpha+i\beta)x} + Be^{(\alpha-i\beta)x} \\ & = & (\mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A)) \times e^{\alpha x} \times (\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ & & +(\mathrm{Re}(B) + i\,\mathrm{Im}(B)) \times e^{\alpha x} \times (\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \end{array}$$

En évaluant en $x = 0$ et en se souvenant que y est à valeurs réelles :

$$y(0) = \mathrm{Re}(A) + \mathrm{Re}(B) + i(\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)) \in \mathbb{R}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(B) = -\mathrm{Im}(A)$. Or, les racines de (C) ne sont pas réelles puisque $\Delta < 0$ si bien que $\beta \neq 0$. Cette fois, en évaluant en $\pi/2\beta$, il vient :

$$\begin{array}{rcl} y\left(\dfrac{\pi}{2\beta}\right) & = & (\mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A)) \times e^{-\alpha\pi/2\beta} \times i + (\mathrm{Re}(B) + i\,\mathrm{Im}(B)) \times e^{-\alpha\pi/2\beta} \times i \\ & = & e^{-\alpha\pi/2\beta} \times (-\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B) + i(\mathrm{Re}(A) - \mathrm{Re}(B))) \in \mathbb{R} \end{array}$$

si bien que $\mathrm{Re}(A) = \mathrm{Re}(B)$. En d'autres termes, A et B sont conjugués donc, pour tout x :

$$\begin{array}{rcl} y(x) & = & Ae^{\alpha x} \times e^{i\beta x} + Be^{\alpha x} \times e^{-i\beta x} \\ & = & (\mathrm{Re}(A) + i\,\mathrm{Im}(A)) \times e^{\alpha x} \times (\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)) \\ & & +(\mathrm{Re}(A) - i\,\mathrm{Im}(A)) \times e^{\alpha x} \times (\cos(\beta x) - i\sin(\beta x)) \\ & = & e^{\alpha x} \times (2\,\mathrm{Re}(A)\cos(\beta x) - 2\,\mathrm{Im}(A)\sin(\beta x)) \end{array}$$

En posant $\lambda = 2\,\mathrm{Re}(A)$ et $\mu = -2\,\mathrm{Im}(A)$, on a la première inclusion.

- Réciproquement, on sait que $y_1 : x \mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}$ et $y_2 : x \mapsto e^{(\alpha+i\beta)x}$ sont solutions de (H). D'après le principe de superposition,

$$\frac{y_1 + y_2}{2} : x \mapsto \left(\frac{e^{i\beta x} + e^{i\beta x}}{2}\right) e^{\alpha x} = \cos(\beta x)e^{\alpha x}$$

est solution de (H). De même,

$$\frac{y_1 - y_2}{2i} : x \mapsto \left(\frac{e^{i\beta x} - e^{i\beta x}}{2i}\right) e^{\alpha x} = \sin(\beta x)e^{\alpha x}$$

□

est aussi solution de (H) et, toujours d'après le principe de superposition, toute combinaison linéaire réelle est solution réelle de (H) ce qui permet de conclure.

Exemples : Reprenons les trois exemples vus en III.2 :

- L'équation caractéristique de $(H) : y'' + 2y' + y = 0$ est $(C) : r^2 + 2r + 1 = 0$ dont l'unique solution est -1, si bien que :

$$S_H = \left\{ x \mapsto (\lambda + \mu x)e^{-x} \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ici, rien ne change si ce n'est que les scalaires sont pris réels.

- L'équation caractéristique de $(H) : y'' + y' + y = 0$ est $(C) : r^2 + r + 1 = 0$ dont les solutions sont j et j^2, c'est-à-dire $-\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ si bien que les solutions **réelles** de (H) sont :

Ici, $\alpha = -1/2$.

$$S_H = \left\{ x \mapsto e^{-x/2} \times \left(\lambda \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + \mu \sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right), \,\middle|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- L'équation caractéristique de $(H) : y'' + y = 0$ est $(C) : r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont $\pm i$, si bien que l'ensemble des solutions **réelles** de (H) sont :

Ici, $\alpha = 0$.

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Remarque : Comme on l'a vu dans le chapitre 5, dans le cas où $\Delta < 0$, les solutions peuvent aussi être mises sous la forme

$$y : x \mapsto e^{\alpha x} \times (C \cos(\beta x - \varphi)) \qquad \text{ou} \qquad e^{\alpha x} \times (C \sin(\beta x - \varphi))$$

où C et φ sont deux réels.

IV.2 Recherche de solutions particulières pour un second membre trigonométrique

Citons un résultat général.

Théorème (Admis provisoirement).

Nous le démontrerons dans le chapitre 14.

- (Cas des EDL du premier ordre) Soient a et b deux fonctions continues sur I. On suppose que a est à valeurs réelles. Notons :

$$(E') : y' + a(x)y = b(x) \qquad \text{et} \qquad (E) : y' + a(x)y = \mathrm{Re}(b(x))$$

Alors, si y_0 est une solution de (E') alors $\mathrm{Re}(y_0)$ est une solution de (E).

- (Cas des EDL du second ordre à coefficients constants) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Notons :

$$(E') : y'' + ay' + by = f(x) \qquad \text{et} \qquad (E) : y'' + ay' + by = \mathrm{Re}(f(x))$$

Alors, si y_0 est une solution de (E') alors $\mathrm{Re}(y_0)$ est une solution de (E).

Remarque : Ce résultat est encore valable en remplaçant « partie réelle » par « partie imaginaire ». Par conséquent, si on veut résoudre une équation différentielle, on peut « passer sur $\mathbb{C}$ » puis prendre la partie réelle ou la partie imaginaire. Ce résultat est particulièrement utile avec quand on manipule des cosinus et des sinus : on les voit comme la partie réelle ou la partie imaginaire d'une exponentielle complexe, on résout sur $\mathbb{C}$ en appliquant la partie précédente, et ensuite on prend la partie réelle ou la partie imaginaire. Donnons un exemple d'application de ce résultat.

Un peu comme quand on calculait des sommes de cosinus ou de sinus dans le chapitre 7.

Lorsqu'on résout une EDL du second ordre à coefficients constants **réels** $y'' + ay' + by = B\cos(\omega x)$ ou $y'' + ay' + by = B\sin(\omega x)$ avec $(B, \omega) \in \mathbb{R}^2$, on résout l'équation homogène à l'aide du paragraphe précédent, puis on cherche une solution particulière de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = Be^{i\omega x}$ à l'aide du paragraphe III.6, et enfin on prend la partie réelle (dans le cas d'un cosinus) ou la partie imaginaire (dans le cas d'un sinus).

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E) : y'' + y = 2\sin(x)$.

- Résolution de l'équation différentielle homogène associée $(H) : y'' + y = 0$ dont l'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.

$$S_H = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- Recherche d'une solution particulière de l'équation « complexifiée » $(E') : y'' + y = 2e^{ix}$. Or, i est solution simple de (C) donc on cherche une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto (Ax + B)e^{ix}$. Soit $(A, B) \in \mathbb{C}^2$ et soit $y : x \mapsto (Ax + B)e^{ix}$. Alors y est dérivable deux fois. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y'(x) = (A + iAx + iB)\, e^{ix} \qquad \text{et} \qquad y''(x) = (iA + iA - Ax - B)\, e^{ix}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= (2iA - Ax - B + Ax + B)\, e^{ix} \\ &= 2iAe^{ix} \end{aligned}$$

Ainsi, y est solution si et seulement si $2iA = 2$ si et seulement si $A = 1/i = -i$. Ainsi, $y : x \mapsto -ixe^{ix} = -ix\cos(x) + x\sin(x)$ est solution particulière et donc $\mathrm{Im}(y) : x \mapsto -x\cos(x)$ est solution particulière.

$$S_E = \left\{ x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x) - x\cos(x) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$