Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Premier semestre - Analyse - Chapitres 10 à 15.

Table des matières

Chapitre 10

Calcul intégral

« - What if she ends up with a toddler who doesn't know if he should use an integral or a differential to solve for the area under a curve ?
- I'm sure she'll still love him.
- I wouldn't. »

The Big Bang Theory.

Vrai ou faux ?

1. La valeur absolue n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
2. Si f est continue, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto f(x) - f(a)$.
3. Une primitive de la fonction constante égale à 1 est $x \mapsto x - 2023$.
4. La fonction inverse n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}^{-*}$.
5. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ alors $G : x \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $G'(x) = f(3x) - f(2x)$.

10.1 Divers

Exercice 1 - Autour de la valeur absolue : ✪ Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^n \sum_{k=0}^n |x-k|\,\mathrm{d}x\,.$
2. ✪✪ $I_2 = \displaystyle\int_{-2}^5 \frac{|x+1|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x\,.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$ Donner sans calcul la valeur de $I_4 = \displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\,\mathrm{d}x\,.$

Exercices 2 - Fonctions composées : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes (on donnera des primitives sans s'intéresser aux domaines de définition ou de primitivation) :

1. $f : x \mapsto xe^{-x^2}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.
6. $f : x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.
7. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)^2$.
8. $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{\mathrm{Arcsin}(x)}{1-x^2}}$.
9. $f : x \mapsto \cos^3(x)\sin^4(x)$.
10. $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}(x)}{1+x^2}$.
11. $f : x \mapsto \dfrac{\tan(\ln(x))}{x}$.
12. $f : x \mapsto e^{e^x+x}$.
13. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.
14. $f : x \mapsto e^x\sin(e^x)$.
15. $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{a+b\cos(x)}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 - Polynômes de Bernoulli : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer qu'il existe une unique fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$g' = f \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

2. On peut donc définir par récurrence la suite de fonctions polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

- $B_0 = 1$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, {B_n}' = n \times B_{n-1}$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^1 B_n(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Ainsi, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie : les fonctions polynômes B_n sont appelés polynômes de Bernoulli.

(a) Expliciter B_1, B_2 et B_3.

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2, B_n(1) - B_n(0) = 0$.

10.2 Fonctions rationnelles

Exercice 4 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+4x+7}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+9}$.
5. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+1}$.

Exercice 5 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_3^4 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$.
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)(t-2)}$.
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{2t+3}\,\mathrm{d}t$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{9t^2+6t+5}$.
5. $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t-2}$.
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{2t+5}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$.
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{4}{t(t^2-4)}\,\mathrm{d}t$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{6t^2+t+5}{2t+1}\,\mathrm{d}t$.
9. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6 : ✪✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes là où elles sont définies :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2+x^4}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)(x+2)^2}$.

10.3 Trigonométrie sans changement de variable

Exercice 7 - Linéarisation : ✪

1. Donner une primitive de la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\sin(2x)\sin(3x)$.
2. **Remake :** Donner une primitive de $f : x \mapsto \sin(x)^2\cos(2x)$.

Exercice 8 : ✪ Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. Calculer (en différenciant les cas) l'intégrale

$$I_{n,k} = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 9 - Primitives (presque) usuelles : ✪

1. Déterminer des primitives des fonctions :

(a) $f : x \mapsto \tan(x)$.

(b) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan(x)}$.

(c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2(x)}$.

(d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)}$.

2. ✪✪ Montrer que $x \mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin(x)}$ sur $]\,0\,;\pi\,[$. En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.

10.4 Autour du théorème fondamental de l'analyse

Exercice 10 : ✪ Pour tout réel x civilisé, on pose

$$f(x)=\int_{1/x}^{x}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Etudier la dérivabilité de f.
3. Donner la valeur de $f(x)$.
4. **Remake :** Donner la valeur de $g(x)=\displaystyle\int_{1/x}^{x}\frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 : ✪ Étudier les variations (sans les limites aux bornes) de $F : x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

Exercice 12 : ✪ Soit $T \in \mathbb{R}$. Montrer que la réciproque du résultat vu en classe est vraie, c'est-à-dire que si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_{x}^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante, alors f est T-périodique.

Exercice 13 : ✪ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Donner

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 14 : ✪

1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est la fonction nulle.
2. **Remake :** Soit f continue sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est une fonction impaire.

Exercice 15 : ✪✪ Montrer que

$$f : x \mapsto \int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}\left(\sqrt{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

est constante et donner sa valeur.

10.5 Fonctions complexes

Exercice 16 : ✪ Soit $\lambda = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $b \neq 0$. Donner une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\lambda}$.

Exercice 17 : ✪ Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{7x}\cos(4x)$ et $x \mapsto e^{6x}\sin(2x)$.

Exercice 18 : ✪ Donner une primitive de $\operatorname{sh} \times \sin$:

1. À l'aide de l'exponentielle complexe.
2. À l'aide d'une IPP.

Exercice 19 : ✪✪ Calculer une primitive de $x \mapsto x^2 e^x \sin(x)$.

10.6 Calculs en vrac

10.6.1 Intégrations par parties

Exercice 20 : ✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$
2. $x \mapsto \operatorname{Arcsin}(x)$
3. $x \mapsto \operatorname{Arccos}(x)$
4. $x \mapsto \sin \circ \ln$
5. $x \mapsto x^n \ln(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.
6. $x \mapsto \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$
7. $x \mapsto x \tan^2(x)$
8. $x \mapsto \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$
9. $x \mapsto x \times (\operatorname{Arctan}(x))^2$
10. $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$

Exercice 21 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^x \,\mathrm{d}x\,.$
2. $\displaystyle\int_1^2 x\ln(x)\,\mathrm{d}x\,.$
3. $\displaystyle\int_1^e (x-e)\ln(x)\,\mathrm{d}x\,.$
4. $\displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$
5. $\displaystyle\int_0^2 (2-x)e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$
6. $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x\,.$
7. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{e^{1/x}}{x^3}\,\mathrm{d}x\,.$
8. $\displaystyle\int_0^{1/2} (\operatorname{Arcsin}(t))^2\,\mathrm{d}t\,.$
9. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$

Exercice 22 : ✪ Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$ et en déduire $J = \displaystyle\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$

10.6.2 Changements de variables

Exercice 23 : ✪ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\,.$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+2\sqrt{t}}.$
3. $\displaystyle\int_1^2 e^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\,.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+e^t}}.$
5. $\displaystyle\int_{\sqrt[3]{2}}^{\sqrt[3]{3}} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}\,\mathrm{d}x\,.$
6. $\displaystyle\int_8^{27} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^3}}.$
7. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,.$
8. $\displaystyle\int_4^3 \frac{t}{\sqrt{t-2}}\,\mathrm{d}t\,.$
9. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t)}.$
10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{1+\tan(x)^3+\tan(x)^5}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 24 : ✪✪ Donner une primitive des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$
2. $x \mapsto \dfrac{2e^{3x}}{1+e^{2x}}$
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x+x\ln(x)}$

Exercice 25 - Utilisation des règles de Bioche : ✪✪✪

1. Donner une primitive des fonctions suivantes :

   (a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\tan(x)}.$

   (b) $f : x \mapsto \dfrac{\tan(x)}{3+\sin(x)}.$

   (c) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)+\sin(2x)}.$

   (d) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(2x)}{\cos(3x)}.$

   (e) $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\cos(2x)}.$

2. On pose

$$I = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2(t)}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

   Calculer $I-J$ et $I+J$. En déduire I et J.

Exercice 26 : ✪✪✪✪ Soient $a < b$ deux réels. Calculer $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$ et interpréter géométriquement.

10.7 Applications classiques

Exercice 27 : ✪ Dans cet exercice, on fait semblant de ne pas connaître la fonction ln. On définit sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction L par :

$$L : x \mapsto \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

Montrer que pour tous x et y strictement positifs, $L(xy) = L(x) + L(y)$.

Exercice 28 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n e^x}{n!}\,\mathrm{d}x$$

1. Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. On admet que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

Remarque : On montrera dans le chapitre sur les suites (plus précisément dans le paragraphe des suites adjacentes) que la limite de cette somme était irrationnelle (sans donner sa valeur). Ainsi, e est irrationnel. On peut même montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ pour tout rationnel non nul r.

Exercice 29 : ✪✪ On définit les deux intégrales

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}} \qquad J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1+2\sin t\cos t}}$$

Calculer $I+J$ puis montrer que $I = J$. En déduire la valeur de ces intégrales.

Exercice 30 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]\,, f(a+b-x) = f(x)$.

1. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$

Exercice 31 : ✪✪ Soient $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On pose $I(p,q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (t-1)^p(t+1)^q\,\mathrm{d}t$

1. Donner la valeur de $I(p,q)$.
2. **Remake :** Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. À l'aide de l'intégrale $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t\,$, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

Exercice 32 - Intégrale de Poisson (stage one) : ✪✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$. On pose

$$I(x) = \int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que $I(x)$ est bien définie.
2. Montrer que $I(-x) = I(x)$.
3. En calculant $I(x) + I(-x)$, prouver que $I(x) = \dfrac{I\left(x^2\right)}{2}$.
4. On admet que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Prouver que si $|x| < 1$, alors $I(x) = 0$.
5. Exprimer $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en fonction de $I(x)$. En déduire la valeur de $I(x)$ si $|x| > 1$.

Remarque : Nous redonnerons la valeur de $I(x)$ avec des sommes de Riemann (et nous en profiterons pour démontrer que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) dans le chapitre 22.

Exercice 33 - Inégalité de Young (stage one) : ✪✪✪ Soit $a > 0$, $f : [\,0\,;a\,] \to \mathbb{R}$ strictement croissante, continue et telle que $f(0) = 0$. La fonction f est donc une bijection de $[\,0\,;a\,]$ dans $[\,0\,;f(a)\,]$ et on note $g : [\,0\,;f(a)\,] \to [\,0\,;a\,]$ sa bijection réciproque. On pose pour $x \in [\,0\,;a\,]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \;+\; \int_0^{f(x)} g(t)\,\mathrm{d}t \;-\; xf(x)$$

1. On suppose f dérivable. Montrer que F est dérivable et calculer F'.
2. Que vaut $F(0)$ et que peut-on en déduire ? Donner une interprétation graphique de ce résultat.
3. Montrer que pour tout $\alpha \in [\,0\,;a\,]$ et tout $\beta \in [\,0\,;f(a)\,]$ on a :

$$\alpha\beta \leq \int_0^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_0^\beta g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. **Application :** Soient p et q strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que :

$$\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Exercice 34 - Moments d'ordre pair de la loi semi-circulaire : ✪✪✪ On rappelle (cf. exercice 31 du chapitre 3) que les nombres de Catalan sont définis pour tout $n \geq 0$ par $C_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

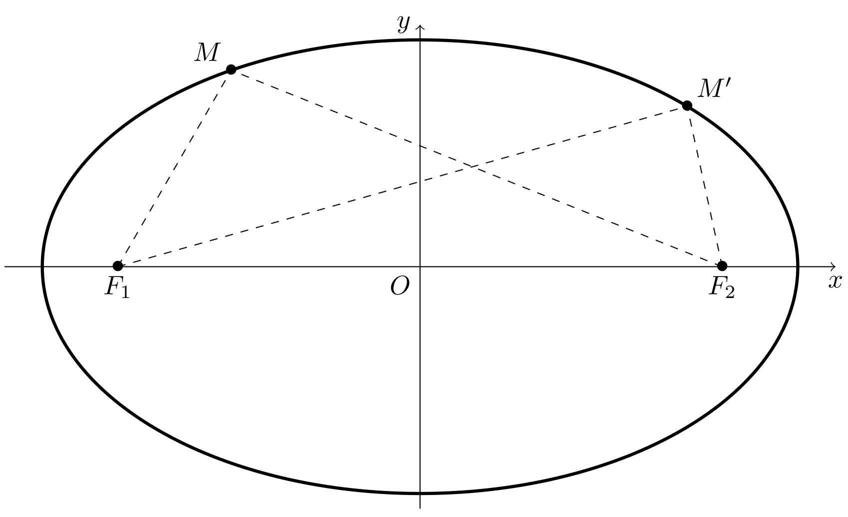
$$m_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{2} x^n \sqrt{4 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que si n est impair, $m_n = 0$.
2. Donner la valeur de m_0. Dans la suite, on suppose que n est pair supérieur ou égal à 2 et on note $n = 2k$.
3. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+1}}{\pi} \displaystyle\int_{-1}^{1} u^{2k}\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$.
4. Montrer que $m_{2k} = \dfrac{2^{2k+2}}{\pi}\,(W_{2k} - W_{2k+2})$ où $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des intégrales de Wallis (cf. cours).
5. En déduire, à l'aide de l'expression des intégrales de Wallis vue en classe, que $m_{2k} = C_k$.

Exercice 35 - L'aire d'une ellipse : ✪✪✪ Soient a et b non nuls. L'ellipse (centrée en 0) de paramètres a et b est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le but de l'exercice est de donner l'aire de cette ellipse. Comme il n'y a que leur carré qui intervient, on peut supposer que a et b sont tous les deux strictement positifs. Un cercle est bien sûr une ellipse particulière avec $a = b = R$ le rayon du cercle. Une ellipse générale est dessinée ci-dessous (ici $a = 5$ et $b = 3$) :



1. Donner les coordonnées des points d'intersection de l'ellipse avec les axes.
2. Écrire l'aire de l'ellipse comme la différence de deux intégrales que l'on précisera. Montrer que l'aire est égale à

$$4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

3. En déduire que l'aire d'une ellipse de paramètres a et b vaut πab.

Remarque : On peut montrer que le périmètre d'une ellipse de paramètres a et b vaut

$$P = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t)+b^2\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle une intégrale elliptique, et on ne sait pas en donner une valeur exacte (sauf dans le cas où $a = b$...). Il existe cependant des méthodes assez efficaces pour en donner une valeur approchée.

Remarque : On suppose que $a \geq b$ et on pose $c = \sqrt{a^2-b^2}$ (si $b \geq a$, l'ellipse est « verticale » et il suffit de tourner la tête). Les points $F_1(-c, 0)$ et $F_2(0, c)$ sont appelés les foyers de l'ellipse. On peut montrer comme sur la figure ci-dessus que tous les rayons lumineux partant de F_1 se réfléchissent et arrivent en F_2. C'est bien sûr la même chose avec les ondes sonores, et puisque les stations de métro parisiennes sont de forme elliptique, c'est la raison pour laquelle, quand on se place à un endroit précis (un des foyers), on entend très bien ce qui est dit de l'autre côté de la voie. Une dernière pour la route : d'après la première loi de Kepler, les planètes du système solaire ont une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Exercice 36 - Formule de sommation d'Euler : ✪✪✪ Si $u \in \mathbb{R}$, on note $\{u\} = u - \lfloor u \rfloor$ la partie fractionnaire du réel u. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,1\,;n\,]$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(f(1)+f(n)) + \int_1^n \left(\{t\}-\frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Chapitre 11

Équations différentielles

« Solal chevauchait et il regardait le soleil face à face. »

Albert Cohen, Solal

Si rien n'est précisé, on cherche les solutions à valeurs réelles.

11.1 Résolution d'équations :

Exercice 1 - Équations du premier ordre : ✪ Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = -7$
2. $(1-x^2)y' + xy = ax$
3. $y' + y = x^2$
4. $xy' - 2y = \dfrac{x^3}{2}$
5. $y'\cos(x) - y\sin(x) = \sin(2x)$

Exercice 2 - Équations du second ordre : ✪ Idem.

1. $y'' - y' - 6y = x^2 - x + 5$
2. $y'' + 9y = 3x^2 + 2$
3. $y'' - y = 3\cos(x)$
4. $y'' - 2y' + y = e^x + \cos(3x)$
5. $y'' + 4y = 3\cos(2x) + \sin(2x)$
6. $y'' + 3y' + 4y = \mathrm{sh}(2x)$
7. ✪✪ $y'' + \omega^2 y = \sin^3(x)$, où $\omega \in \mathbb{R}_+^*$
8. ✪✪✪ $y'' - 2y'\cos(\alpha) + y = e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : ✪ Résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + 9y = x^2 + 1 \\ \\ y(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 - Une équation d'ordre 3 **:** ✪✪ On cherche les solutions (réelles) de l'équation différentielle $(E) : y''' = y$.

1. Donner l'ensemble des solutions réelles sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(F) : y' = y$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable trois fois. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g = f'' + f' + f$ est solution de (F).
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 5 : ✪ Soit ω un réel strictement positif. Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme dirigé suivant l'axe Oz est régi par un système différentiel de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x'' & = & \omega y' \\ \\ y'' & = & -\omega x' \\ \\ z'' & = & 0 \end{array}\right.$$

En considérant la fonction $u = x' + iy'$, résoudre ce système différentiel.

Exercice 6 : ✪✪ On considère l'équation différentielle $(E) : y' + 2xy = 1$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit f une solution de (E). Montrer que $g : x \mapsto -f(-x)$ est aussi solution de (E).

2. En déduire que (E) admet une unique solution impaire.

Exercice 7 : ✪✪ Déterminer les fonctions f et g vérifiant le « système différentiel » :

$$\begin{cases} f'' &= f' + g' - g \\ g'' &= f' + g' - f \end{cases}$$

On pourra s'intéresser aux fonctions $u = f + g$ et $v = f - g$.

11.2 Équations fonctionnelles se ramenant à une équation différentielle :

Exercice 8 : ✪✪ :

1. Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles réelles telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

2. Déterminer les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x)f(y)$$

Exercice 9 : ✪✪✪ :

1. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \cos(x) - x - \int_0^x (x - t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Trouver toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sin(x) + 2\int_0^x e^{x-t}f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10 - Une recherche d'espaces propres en dimension infinie : ✪✪✪✪ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer les fonctions f continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \int_0^1 f(t)\min(x, t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$$

11.3 Quelques équations non linéaires

Exercice 11 : ✪✪ On note (E) l'équation différentielle $-x^2y' + xy = y^2$ sur $I =]\,1\,; +\infty\,[$. En procédant au changement de fonction inconnue $z = 1/y$, déterminer les solutions qui ne s'annulent pas sur I.

Exercice 12 : ✪✪ À l'aide du changement de variable $z = y^2$, résoudre l'équation différentielle $yy' + y^2 = \dfrac{e^{-2x}}{2}$.

11.4 Étude qualitative

Exercice 13 : ✪ Soit $(H) : y'' + ay' + by = 0$ une EDL homogène à coefficients constants, et soit f une solution de (H). Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 14 : ✪✪ Soient $T > 0$ et b et c deux fonctions continues T-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les deux questions sont indépendantes.

1. Résoudre l'équation différentielle $(E) : y' + b(x)y = c(x)$.
2. Montrer qu'une solution y de (E) est T-périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.

Chapitre 12

Suites numériques

« Moi, quand je suis en présence d'un con, d'un vrai, c'est l'émotion et le respect parce qu'enfin on tient une explication et on sait pourquoi. Chuck dit que si je suis tellement ému devant la Connerie, c'est parce que je suis saisi par le sentiment révérenciel de sacré et d'infini. Il dit que je suis étreint par le sentiment d'éternité et il m'a même cité un vers de Victor Hugo, *oui, je viens dans ce temple adorer l'Eternel.* Chuck dit qu'il n'y a pas une seule thèse sur la Connerie à la Sorbonne et que cela explique le déclin de la pensée en Occident. »

Romain Gary (Émile Ajar), L'angoisse du roi Salomon

Sauf indication contraire, les suites sont considérées réelles.

Vrai ou faux ?

1. Une suite convergente est croissante ou décroissante à partir d'un certain rang.
2. Une suite majorée est croissante.
3. Une suite croissante est majorée.
4. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Si $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
7. Si $({u_n}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
8. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
9. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
10. Une suite non majorée tend vers $+\infty$.
11. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
12. Si $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
13. Une suite (u_n) vérifiant « $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{1}{2}\times u_{n+1} + \dfrac{1}{4}\times u_n$ » tend vers 0.
14. La somme de deux suites convergentes est convergentes.
15. La somme de deux suites divergentes est divergente.
16. La somme d'une suite divergente et d'une suite convergente est divergente.
17. Si u admet deux suites extraites distinctes qui convergent vers la même limite avec u converge.
18. Si $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L'$ alors $L = L'$.
19. Une suite géométrique bornée converge.
20. La somme de deux suites minorées est minorée.
21. La différence de deux suites minorées est minorée.
22. Le produit de deux suites minorées est minoré.
23. Le quotient de deux suites convergentes est convergent.
24. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L\in\mathbb{R}$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
25. Si $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
26. Si (u_n) est une suite croissante telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors (u_n) converge.
27. Une suite décroissante minorée par 0 converge vers 0.
28. Si $u_n > 0$ pour tout n et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $L > 0$.
29. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.
30. Si $\left({u_n}^2\right)$ est convergente alors $(|u_n|)$ est convergente.
31. $\left\lfloor -\dfrac{1}{n}\right\rfloor \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lfloor 0\rfloor = 0$.
32. Si (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, et si (u_n) est croissante, alors (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
33. La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.
34. Deux suites bornées dont la différence tend vers 0 convergent vers la même limite.
35. Une suite qui tend vers 1 est positive à partir d'un certain rang.
36. Une suite qui tend vers 0 tend vers 0^+ ou 0^-.
37. Une suite (u_n) croissante telle que (u_{2n}) converge est convergente.
38. $\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

39. $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

40. $e^{-n\times\frac{2i\pi}{5}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

41. $e^{-n+i\times n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

42. $\dfrac{\ln\left(n^2+n\right)}{2\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

43. $n\sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

44. $n\cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

45. La suite $\left(\dfrac{1}{\cos(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

46. La suite $\left(\dfrac{1}{\sin(1/n)}\right)_{n\geq 1}$ est bornée.

47. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{n^k}{(n+1)^k}\right)=\lim\limits_{k\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^k}{(n+1)^k}\right)$.

48. La suite de terme général $u_n=2^{6n+2}-3\times\left(2\sqrt{2}\right)^{4n}$ est géométrique.

49. Si la suite $(\cos(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(\sin(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

12.1 Intervalles

Exercice 1 : ✪✪ Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'intervalles.

1. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est un intervalle (éventuellement vide).
2. Montrer que si $\displaystyle\bigcap_{j\in J} I_j$ est non vide, alors $\displaystyle\bigcup_{j\in J} I_j$ est un intervalle.

12.2 Borne supérieure, borne inférieure :

Exercice 2 : ✪ Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que $\sup A>0$. Montrer que A contient un élément strictement positif.
2. On suppose que $\sup A\geq 0$. Existe-t-il un élément de A positif ?

Exercice 3 - Un minimax : ✪✪ Existence et calcul de $\inf\limits_{t\in\mathbb{R}}\left(\sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]}\left(x^2+tx\right)\right)$.

Exercice 4 : ✪✪ Dans cet exercice, on se donne A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$. On note $A+B=\{a+b\,|\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\}$. On définit de même $A-B$, AB et , si $\lambda\in\mathbb{R}$, λA et $A+\lambda$. Établir les relations suivantes (on montrera bien sûr que les sup et inf existent) :

- $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.
- $\sup(-A)=-\inf(A)$ et $\inf(-A)=-\sup(A)$.
- $\sup(A+\lambda)=\sup(A)+\lambda$.
- Si $\lambda>0$, $\sup(\lambda A)=\lambda\sup(A)$. Que dire lorsque $\lambda<0$ ou $\lambda=0$?
- $\sup(A-B)=\sup(A)-\inf(B)$.
- Si A et B sont incluses dans $\mathbb{R}_+$, alors $\sup(AB)=\sup A\times\sup B$. Le résultat est-il encore valable sans l'hypothèse $A,B\subset\mathbb{R}_+$?
- Si A est incluse dans $\mathbb{R}_+$, $\sup\sqrt{A}=\sqrt{\sup A}$ ($\sqrt{A}$ est défini de façon analogue aux autre ensembles).

On suppose enfin que A et B sont non disjoints. Montrer que $A\cap B$ est majoré et que $\sup(A\cap B)\leq\min(\sup(A),\sup(B))$ et donner un exemple où cette inégalité est stricte. Que dire de $\sup(A\cup B)$ en fonction de $\sup(A)$ et de $\sup(B)$?

Exercice 5 : ✪✪ Soient A et B deux parties non vides de R telle que, pour tout $(a,b)\in A\times B$, $a\leq b$. Montrer que $\sup A\leq\inf B$ (on montrera évidemment qu'ils existent). Montrer que si $A\cup B$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\sup(A)=\inf B$.

Exercice 6 : ✪✪ Soient a et b deux réels. Donner, lorsque c'est possible, les bornes inférieure et supérieure, les plus petit et plus grand éléments des ensembles suivants :

1. $]\,0\,;1\,[$
2. $\{a+bn\mid n\in\mathbb{N}\}$
3. $\{a+(-1)^n b\mid n\in\mathbb{N}\}$
4. $\left\{a+\dfrac{b}{n}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}^*\right\}$
5. $\left\{\dfrac{1}{n}+(-1)^n\;\middle|\;n\in\mathbb{N}^*\right\}$
6. $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{p}\;\middle|\;(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$
7. $\left\{\dfrac{p}{n+p}\;\middle|\;(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$
8. $\left\{\dfrac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}^*\right\}$
9. $\left\{\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^p}{p}\;\middle|\;(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\right\}$

Exercice 7 - Diamètre d'une partie bornée : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A).$$

Exercice 8 - Distance à une partie : ✪✪✪ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on pose $d(x,A) = \inf\limits_{a\in A} |x-a|$: c'est la distance de x à la partie A.

1. Montrer que cette distance est bien définie.
2. On suppose dans cette question que $A = \left]\,0\,;1\,\right[$. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto d(x,A)$.
3. Même question lorsque $A = \left]\,-\infty\,;-1\,\right] \cup \left[\,1\,;+\infty\,\right[$.
4. Donner un exemple de partie A et de réel x tel que :
   - $d(x,A)$ ne soit pas atteinte.
   - $d(x,A)$ soit atteinte en exactement un point de A.
   - $d(x,A)$ soit atteinte en exactement deux points de A.

   Est-il possible que $d(x,A)$ soit atteinte en plus de deux points de A ?
5. Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, |d(x,A) - d(y,A)| \leq |x-y|$.
6. On suppose que A est telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in A$ tel que $d(x,A) = |x-y|$. Montrer que A est un intervalle fermé (mais pas forcément borné).

Remarque Un théorème de Motzkin montre qu'une partie fermée A de $\mathbb{R}^n$ telle que la distance de x à A soit atteinte en un unique point pour tout x est convexe. Il s'agit ici du cas $n=1$.

12.3 Densité

Exercice 9 : ✪ L'ensemble $\pi\mathbb{Z}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

Exercice 10 : ✪ Montrer que $\{q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}_+$. Généraliser à l'ensemble $\{q^n \mid q \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 11 - Caractérisation des rationnels décimaux : ✪✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*$ et on suppose que a et b sont premiers entre eux. Montrer que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{D}$ si et seulement si les facteurs premiers de b appartiennent à l'ensemble $\{2;5\}$.

Exercice 12 - Endomorphismes de corps de $\mathbb{R}$: ✪✪✪ On cherche à déterminer les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ainsi que $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous réels x, y. On se donne dans la suite f une telle application.

1. Donner la valeur de $f(0)$. Montrer que $f(1) \in \{0;1\}$. Que dire de f si $f(1) = 0$? On supposera dans la suite que $f(1) = 1$.
2. Montrer que f est impaire et que pour tout $n \in \mathbb{Z}, f(n) = n$.
3. Montrer que $f(r) = r$ pour tout rationnel r.
4. Montrer que f est croissante.
5. En déduire que f est l'identité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : ✪✪✪

1. Soient $x < y$ deux réels strictement positifs. Montrer que l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left]\,nx\,;ny\,\right[$ contient un intervalle du type $\left]\,a\,;+\infty\,\right[$.
2. Soit A une partie non majorée de $\mathbb{R}_+$. Si $n \geq 1$, on pose $\dfrac{1}{n} \times A = \left\{ \dfrac{a}{n} \,\middle|\, a \in A \right\}$. Montrer que $B = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n} \times A$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites tendant vers $+\infty$ telles que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\{u_n - v_m \mid (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15 : Soient a et b deux réels strictement positifs.

1. ✪✪ Montrer que l'ensemble $\left\{ a^{\frac{k}{2^n}} \times b^{1-\frac{k}{2^n}} \mid n \in \mathbb{N}^*, k \in [\![\, 0\,;\,2^n \,]\!] \right\}$ est dense dans $[\,a\,;b\,]$.
2. ✪✪✪✪ Soit M une partie bornée de $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que :
$$\forall (a,b) \in M^2, \sqrt{ab} \in M$$
   Montrer que $\left]\,\inf M\,;\sup M\,\right[\cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ est dense dans M.

12.4 Suites explicites

Exercice 16 : ✪ Montrer que la suite de terme général n^2 n'est pas arithmético-géométrique.

Exercice 17 : ✪ Montrer que les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous divergent :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$.
2. $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2-3n+1}{n+2} \times \pi\right)$.

Exercice 18 : ✪ Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence, donner une expression du terme général en fonction de n.

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{e^2} \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = \pi \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 2}{5} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = \dfrac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 4u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 7u_{n+1} \end{cases}$
7. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n^2 \end{cases}$
8. $\begin{cases} u_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$
9. $\begin{cases} u_0 = 2, u_1 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{{u_{n+1}}^4}{{u_n}^3} \end{cases}$
10. $\begin{cases} u_0 > 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln\left(e^{u_n} + 1\right) \end{cases}$
11. $\begin{cases} u_0 = \sqrt{5}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5 \times {u_n}^3 \end{cases}$
12. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2 \times {u_n}^2 \end{cases}$
13. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n + 1} \end{cases}$
14. $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{u_{n+2}} = \dfrac{1}{u_{n+1}} + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Exercice 19 : ✪ Donner à chaque fois la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

1. $u_n = \left(\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\right)^n$ (pour $a \in \mathbb{R}$)
2. $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$
3. $u_n = \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{n}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$
5. $u_n = \dfrac{\sin\left(\exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n!} k!^{k!}\right)\right)}{\sqrt{n}}$
6. $u_n = \dfrac{n^2 - n\ln(n)}{n^2 + n(\ln(n))^2}$
7. $u_n = \dfrac{2+\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+1}$
8. $u_n = \dfrac{\ln\left(n^{2023} + n\right)}{\ln(n)}$
9. $u_n = n \times \sin\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
10. $u_n = n \times \cos\left(\dfrac{1}{n+2}\right)$
11. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$
12. $u_n = n\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2+k}$
13. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$ (pour $x \in \mathbb{R}$)
14. $u_n = 3^n - n^2 2^n$
15. $u_n = \dfrac{n2^{2n} + 5^n}{n2^{2n} - 5^n}$
16. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \left(5n - \frac{1}{2}\right)^3 \right\rfloor}{\left\lfloor \left(4n + \frac{1}{3}\right)^3 \right\rfloor}$
17. $u_n = \dfrac{1}{n^5}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k^3}{2 - \sin k}$
18. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
19. $u_n = \sqrt[n]{n}$
20. $u_n = \dfrac{\left\lfloor \frac{\sqrt{6}}{9} \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \right\rfloor}{2n-1}$

Exercice 20 : ✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par : $u_0 = -2, v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 5u_n + 4v_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = 4u_n + 5v_n$$

1. Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
2. Montrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3. En déduire une expression des termes généraux des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

1. Déterminer α pour que la suite de terme général $s_n = \alpha \times n \times (-1)^n$ vérifie la même relation de récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $v_n = u_n - s_n$. Déterminer v_n en fonction de v_0 et de v_1.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de u_0, u_1 et n pour tout n.

Exercice 22 : ✪✪

1. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0$$

2. Déterminer toutes les suites réelles bornées $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} - 5v_{n+1} + 6v_n = (-1)^n$$

Exercice 23 : ✪✪ Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1/2, u_1 = e/2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1}u_n$$

Exercice 24 : ✪✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Déterminer une constante c strictement positive telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geq c$.
2. En déduire que $H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 25 : ✪✪ En revenant à la définition d'une limite, donner la limite des suites de terme général :

1. $\dfrac{n}{n^2+1}$
2. $\sqrt{n^2-n}$
3. $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n^2-4}$
4. $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$
5. $\dfrac{\sqrt{n+\sin(n)}}{n^2-n}$.

Exercice 26 : ✪✪ Montrer que pour tout $x > 0, \ln(1+x) < x$ puis que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1+e^{-k}\right)$ converge.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $a > 0$. Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et :

$$\forall n \geq 0 \qquad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

Exercice 28 : ✪✪ Donner en fonction des valeurs de $q > 0, \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$, la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{q^n + n^\alpha}{1+\ln(n)^\beta}$$

Exercice 29 : ✪✪

1. Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \geq 0$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel. On rappelle qu'une suite d'entiers converge si et seulement si elle est stationnaire.
3. ✪✪✪ Soit d un entier qui n'est pas un carré parfait. Montrer que $\sqrt{d}$ est irrationnel.

Exercice 30 : ✪✪ Dans tout l'exercice, si $n \geq 1$, on pose u_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Donner la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_n \ln n}{{u_n}^2+1}$$

2. **(Encore d'après projecteuler.net)** On suppose que n a k chiffres et que n est une puissance k-ième, c'est-à-dire qu'il existe p tel que $n = p^k$ (par exemple, 125 a 3 chiffres et $125 = 5^3$, ou encore 262144 a 6 chiffres, et est égal à 8^6). Montrer que $p \in [\![1\,;\,9]\!]$ et que $k \leq 21$.

   Remarque : Avec un algorithme, on peut montrer qu'il existe exactement 49 entiers n vérifiant cette propriété, le plus grand étant 9^{21} (qui a donc 21 chiffres).

Exercice 31 - Fonction de Pringsheim : ✪✪✪ Expliciter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{p\to+\infty}\cos(n!\pi x)^{2p}\right)$$

Exercice 32 : ✪✪✪

1. Vous empruntez un capital C à un taux d'intérêt mensuel t_m et et vous le remboursez en N mensualités constantes. Calculez la valeur M de chaque mensualité. Quel est le coût total du crédit ?
2. Le problème est que les banques et les sociétés de crédit donnent en général le taux annuel t_a et non pas le taux mensuel t_m : pour le taux annuel, il y a un seul versement en un an, et pour le taux mensuel, il y en a 12, et ils sont calculés pour que la somme avec les intérêts à la fin de l'année soit la même (sans mensualité, juste avec la somme initiale). Exprimer t_m en fonction de t_a et en déduire M et le coût total du crédit en fonction de t_a.
3. Vérifiez sur la première publicité de crédit que vous trouverez !
4. **Remake :** Une personne a dépensé tout ce qu'elle avait dans N magasins. Dans chacun, elle a dépensé dix euros de plus que la moitié de ce qu'elle avait en rentrant. Combien avait-elle en poche au départ ?

Exercice 33 : ✪✪✪ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $a_{n+2} \leq \dfrac{a_{n+1}+a_n}{3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 34 - Un calcul d'espérance : ✪✪✪ Soit $\alpha > 0$. Donner la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{\left(1+e^{\alpha/n}\right)^n}{2^n}$$

Exercice 35 : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1 & = & 3 \\ u_{n+1} & = & u_n + \dfrac{\operatorname{sgn}(\sin(u_n))}{2^n} \end{array}\right.$$

où $\operatorname{sgn}(x)$ est le signe de x, c'est-à-dire 1 si x est strictement positif, -1 s'il est strictement négatif[1].

1. En regardant la somme télescopique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(u_{k+1}-u_k)$, montrer que la suite (u_n) est à valeurs dans un intervalle que l'on précisera. En déduire que $\sin(u_n)$ est du même signe que $\pi - u_n$.
2. En déduire u_{n+1} en fonction de u_n selon les cas.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$:
$$\pi - \frac{1}{2^{n-1}} \leq u_n \leq \pi + \frac{1}{2^{n-1}}$$
4. Conclure.

Exercice 36 : ✪✪✪ Montrer que $\dfrac{1}{n!}\times\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k! \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercice 37 - La fonction d'Ackermann : ✪✪✪ On se donne le tableau suivant indexé par $\mathbb{N}^2$:

m \ n	0	1	2	3	4	5	$\dots$
0	1	2	3	4	5	6	$\dots$
1							
2							
3							
4							
5							
$\vdots$							

Le terme dans la case indexée par (m,n) est $f(m,n)$, où f est la fonction d'Ackermann, qui va de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ et qui est définie de la façon suivante :

1. Mais alors... ça veut dire que $\sin(u_n)$ ne va jamais être nul ? ? ? Montrez-le !

$$\begin{cases} \forall n \geq 0, & f(0,n) = n+1 \\ \forall m \geq 1, & f(m,0) = f(m-1,1) \\ \forall m,n \geq 1, & f(m,n) = f(m-1, f(m,n-1)) \end{cases}$$

Donner $f(4,4)$. On utilisera pour cela la notation des puissances itérées, introduite par Donald Knuth en 1976 : si $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$a \uparrow\uparrow n = a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}$$

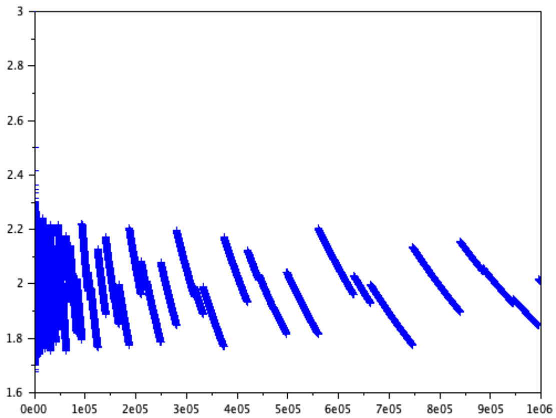
où a apparaît n fois, par exemple $4 \uparrow\uparrow 3 = 4^{4^4}$.

Exercice 38 - « A very slowly convergent sequence » (Erdös et al.) : ✪✪✪ On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = a_{\lfloor n/2 \rfloor} + a_{\lfloor n/3 \rfloor} + a_{\lfloor n/6 \rfloor}.$$

1. Rappeler l'encadrement définissant la partie entière. En déduire un encadrement de $\lfloor x \rfloor$ à l'aide de x. On fera attention aux inégalités larges et strictes.
2. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq n+1$. En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \geq 5$, $a_n \leq 3n$. Où a-t-on besoin de supposer que $n \geq 5$?

Remarque : La suite $(a_n/n)_{n\geq 1}$ est donc à valeurs dans $[\,1\,;3\,]$. On a représenté ci-dessous les « premiers » termes de la suite :



Elle semble osciller indéfiniment, mais on peut montrer (c'est l'objectif du sujet de l'ENS Cachan 1991) qu'elle converge en fait vers $\dfrac{12}{\ln(432)} \approx 1.9774487$: il faut parfois se méfier des évidences numériques !

12.5 Suites génériques

Exercice 39 - Monotonie des moyennes d'une suite monotone : ✪ Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors la suite de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$$

est monotone de même monotonie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 40 : ✪ Montrer qu'une suite u est arithmétique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

Exercice 41 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 42 : ✪

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ \\ u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a+b \end{cases}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et $v_n \xrightarrow[\to+\infty]{} b$.

2. **Remake :** Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0\,;1]$ telles que $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Exercice 43 : ✪ Montrer qu'une suite périodique non constante diverge. Peut-elle diverger vers $\pm\infty$?

Exercice 44 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Que peut-on dire de la convergence éventuelle de la suite de terme général $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas où $L = \pm\infty$? $L \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$? $L \in \mathbb{Z}$?

Exercice 45 : ✪✪ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Montrer que si $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 46 : ✪✪ Soit (u_n) une suite. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \geq 0, L \neq 1$. Que peut-on dire de la suite $({u_n}^n)$? Montrer qu'on ne peut rien dire si $L = 1$. Plus précisément, exhiber trois suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) de limite 1 telles que

- ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2023$
- ${v_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$
- $({w_n}^n)$ diverge.

Exercice 47 : ✪✪ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. Étudier la convergence des suites de terme général $w_n = \max(u_n, v_n)$ et $t_n = \min(u_n, v_n)$:
- en donnant une expression explicite de w_n et de t_n en fonction de u_n et de v_n (sans utiliser de min ou de max, donc).
- en epsilonant.

Exercice 48 - Règle de d'Alembert faible : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs non nulles. On suppose qu'il existe $k \geq 0$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$.
- Montrer que si $k < 1$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Montrer que si $k > 1$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Montrer qu'on ne peut pas conclure dans le cas $k = 1$.

Exercice 49 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que :

$$\forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_n \leq \frac{1}{k} + \frac{k}{n}$$

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 50 - Suites pseudo-décroissantes : ✪✪✪ Une suite réelle (u_n) est dite pseudo-décroissante si on a : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq u_p$.
1. Faire un dessin.
2. Montrer qu'une suite décroissante est pseudo-décroissante. La réciproque est-elle vraie ?
3. Montrer qu'une suite pseudo-décroissante minorée converge.
4. Montrer qu'une suite strictement positive de limite nulle est pseudo-décroissante.
5. Montrer qu'une suite pseudo-croissante et pseudo-décroissante est constante.

Exercice 51 : ✪✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et soit $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite.
1. Montrer que si u converge, alors U est bornée et admet un plus petit ou un plus grand élément.
2. Donner un exemple de suite u convergente pour laquelle U admet un plus petit et pas de plus grand élément, puis un exemple où il y a un plus grand mais pas de plus petit élément.
3. Donner enfin un exemple de suite bornée pour laquelle U n'a ni plus grand, ni plus petit élément.

Exercice 52 - Limite supérieure, limite inférieure et lemme de sous-additivité de Fekete (d'après Mines MP 2018) : ✪✪✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $U_n = \{u_k \mid \ k \geq n\}$. On définit les suites $\underline{u} = (\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u} = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par les formules $\underline{u}_n = \inf U_n$ et $\overline{u}_n = \sup U_n$.
1. Justifier que les suites $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

   Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v \preccurlyeq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leq w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

2. Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preccurlyeq$) qui est croissante et plus petite que u.

   Dans toute la suite, on appelle limite inférieure $\underline{\lim}$ et limite supérieure $\overline{\lim}$ les limites suivantes :

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \underline{u_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{u_n}$$

3. Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.
4. Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

   On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive si, pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a $u_{i+j} \leq u_i + u_j$.

   Dans le reste de cet exercice, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

5. Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geq 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que

$$u_m \leq (q-1)u_n + u_{n+r}$$

   et en déduire l'inégalité

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{m-n-r}{m} \times \frac{u_n}{n} + \frac{\max(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1})}{m}$$

6. En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\overline{\lim}_{m\to+\infty} \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n}$$

7. En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 53 - Suites de Cauchy : ✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que cette suite est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, |u_p - u_n| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente est une suite de Cauchy. Redémontrer la divergence de la suite de terme général $(-1)^n$.
2. On souhaite à présent montrer la réciproque : on suppose donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.
   (a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence L.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

12.6 Théorème de Cesàro

Exercice 54 : ✪ Démontrer le théorème de Cesàro dans le cas où la suite (u_n) tend vers $\pm\infty$.

Exercice 55 : ✪✪ Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge vers $L > 0$. Montrer que la suite $(\sqrt[n]{a_n})$ converge aussi vers L. En déduire les limites, quand n tend vers l'infini, des suites de terme général :

$$\binom{n}{p}^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \frac{\sqrt[n]{n(n+1)\ldots(n+n)}}{n}, \qquad \frac{1}{n^2}\sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Exercice 56 : ✪✪ Soient $a, L > 0$. Soit f une fonction définie sur $[\,0\,;a\,]$, strictement positive telle que

$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} L.$$

Donner la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sqrt[n]{n! f(a) f\left(\frac{a}{2}\right) \cdots f\left(\frac{a}{n}\right)}.$$

Exercice 57 - D'après X MP 2012 : ✪✪✪ Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite C-convergente si la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n\geq 0, \qquad v_n=\frac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}$$

est convergente, et la limite de la suite (v_n) est appelée C-limite de la suite (v_n). Le théorème de Cesàro nous dit donc qu'une suite convergente est C-convergente et que la limite de (u_n) est égale à sa C-limite.

1. Donner un exemple de suite C-convergente non convergente.
2. Montrer que si la suite (u_n) est C-convergente alors $\dfrac{u_n}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.
3. Montrer que pour tout $\alpha\in\,]\,0\,;1\,[$, la suite de terme général $a_n=(-1)^n n^\alpha$ est C-convergente.

Exercice 58 : ✪✪✪ *Cet exercice n'a rien à voir avec le théorème de Cesàro mais la démonstration est analogue.* Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}ab$$

12.7 Suites adjacentes

Exercice 59 : ✪✪ Montrer que les suites de terme général

$$u_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}\qquad\text{et}\qquad v_n=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}$$

sont adjacentes.

Exercice 60 : ✪✪ Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $p+q=1$ et $p>q$. Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0<v_0$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad\begin{cases}u_{n+1}=pu_n+qv_n\\[2ex] v_{n+1}=pv_n+qu_n\end{cases}$$

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite que l'on explicitera en fonction de u_0 et v_0.

Exercice 61 - Moyenne arithmético-géométrique : ✪✪ Soient $a<b$ deux réels strictement positifs. On définit les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant $x_0=a$ et $y_0=b$ et :

$$\forall n\in\mathbb{N}, x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\qquad\text{et}\qquad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes. La limite commune de ces deux suites est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,b)$.

12.8 Systèmes dynamiques

Exercice 62 : ✪ Étudier la suite (u_n) de premier terme strictement positif et vérifiant la relation de récurrence suivante, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 63 : ✪ Etudier la suite définie par $u_0=2023$ et pour tout $n\geq 0$

$$u_{n+1}=1805+\sqrt{u_n}$$

Plus précisément, on pourra montrer que :

1. Il existe un unique réel α strictement positif tel que $1805+\sqrt{\alpha}=\alpha$.
2. $I=[\,\alpha\,;+\infty\,[$ est stable par $x\mapsto 1805+\sqrt{x}$ (on rappelle que la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$).
3. Pour tout n, u_n est bien défini et appartient à I.
4. La suite (u_n) est décroissante.
5. $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\alpha$.

Recommencer l'exercice avec $u_0 = 800$.

Exercice 64 : ✪✪

1. Étudier la suite récurrence définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$..
2. Donner toutes les fonctions $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = h(\text{Arctan}(x))$.

Exercice 65 : ✪✪ Étudier la suite récurrence définie par $w_0 < 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \dfrac{w_n + 1}{\sqrt{w_n^2 + 1}} - 1$..

Exercice 66 : ✪ Même chose avec $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$.

Exercice 67 : ✪✪✪ Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{u_n}$.

Exercice 68 : ✪✪✪ Soit u définie par $u_0 \in \left]\,0\,;1\,\right]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = {u_n}^2 \times \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que, si elle n'est pas stationnaire, alors sa limite est nulle.

Terminons par deux exercices tirés de l'arithmétique. Évidemment, ici, on abandonne toute notion de continuité : l'étude de g ne présente donc plus aucun intérêt !

Exercice 69 : ✪✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p(n)$ le produit des chiffres de n écrit en bases 10, et on note $f(n) = n + p(n)$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme de u_n et du produit de ses chiffres en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire. Par exemple, si $u_0 = 7$, alors on a successivement $u_1 = 14, u_2 = 18, u_3 = 26, u_4 = 38, u_5 = 62, u_6 = 74, u_7 = 102, u_8 = 102\dots$

Exercice 70 : ✪✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f(n)$ la somme des carrés des chiffres de n écrits en base 10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$, c'est-à-dire que u_{n+1} est égal à la somme des carrés des chiffre de u_n en base 10. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

12.9 Suites extraites et valeurs d'adhérence

On rappelle qu'une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un ***réel***[2] *qui est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exercice 71 : ✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Parmi les suites suivantes, trouver celles qui sont extraites d'une autre : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3\times 2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 72 : ✪ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

1. Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.
2. Donner un exemple d'une suite u divergente telle que, pour tout $p \geq 2$, la suite $(u_{p\times n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 73 : ✪ Que peut-on dire d'une suite croissante qui admet une sous-suite convergente ? qui admet une sous-suite majorée ?

Exercice 74 : ✪ Montrer que la suite (u_n) n'a pas de limite où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$ pour le premier) :

1. u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n.
2. $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2\pi}{3}\right)$.
3. $u_n = \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor - \dfrac{n}{5}$.

Exercice 75 : ✪✪ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite n'admettant aucune sous-suite bornée. Montrer que $|x_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 76 : ✪✪ Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite de terme général $u_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$.

Exercice 77 : ✪✪

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers naturels qui ne tend pas vers $+\infty$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite constante.
2. Montrer qu'une suite d'entiers naturels deux à deux distincts tend vers $+\infty$.

2. Ou un complexe pour une suite complexe mais en tout cas une quantité finie : $+\infty$ n'est donc pas considéré comme une valeur d'adhérence, même si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une suite extraite qui tend vers $+\infty$.

3. Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs non nuls. On suppose que $(p_n/q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite α irrationnelle. Montrer que $(|q_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$.

Exercice 78 : ✪✪ Donner un exemple de suite complexe $(z_n) = (x_n + iy_n)$ sans valeur d'adhérence mais telle que (x_n) et (y_n) aient des valeurs d'adhérence.

Exercice 79 : ✪✪ Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont les mêmes valeurs d'adhérence.

Exercice 80 : ✪✪ Montrer qu'il n'existe pas de suite donc l'ensemble des valeurs d'adhérence soit $]\,0\,;1\,[$.

Exercice 81 : ✪✪✪

1. Montrer qu'une suite bornée qui possède une unique valeur d'adhérence converge. Montrer que ce résultat est faux si on en enlève l'hypothèse « bornée » ? Ce résultat est fort utile, voici quatre exercices qui l'utilisent.
2. (a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $x_{2n} + 2x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   (b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles et k un entier naturel impair tels que $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ${u_n}^k-{v_n}^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n) ?
   (c) Que dire de deux suites réelles u et v telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $e^{u_n} + e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$?
   (d) ✪✪✪✪ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et tel que les deux suites $\left(e^{iau_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(e^{ibu_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que ce résultat n'est plus valable sans l'hypothèse $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Exercice 82 : ✪✪✪ On admet l'existence d'une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijective (on montrera l'existence d'une telle bijection au chapitre 17). Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(\varphi(n))$ est $\mathbb{R}$ tout entier.

12.10 Suites complexes

Exercice 83 : ✪ Montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\cos(k)}{2^k}$ converge vers une limite que l'on explicitera.

Exercice 84 : ✪✪ On se place sur le plan complexe en bijection avec $\mathbb{C}$ par la bijection habituelle. Soient A et B les points d'affixes respectives i et $-i$. On construit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

- M_0 est un point quelconque du plan.
- M_1 est le milieu du segment $[AM_0]$.
- M_2 est le milieu du segment $[BM_1]$.
- M_3 est le milieu du segment $[AM_2]$.
- M_4 est le milieu du segment $[BM_3]$.
- etc.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, on note z_n l'affixe du point M_n. Exprimer z_n en fonction de n.
2. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

Exercice 85 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de prouver que, si (u_n) est une suite de nombres complexes convergeant vers un complexe L, alors

$$\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L$$

1. Vérifier le résultat si (u_n) est une suite réelle.
2. On suppose que la suite (u_n) est constante égale à L. Pour tout $n \geq 1$, on définit sur $\mathbb{C}$ les deux fonctions P_n et Q_n par :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad P_n(z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!} \qquad \text{et} \qquad Q_n(z) = P_n(z) - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

   (a) Montrer que, pour tout n, Q_n est une fonction polynomiale à coefficients positifs.

(b) En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|Q_n(z)| \leq Q_n(|z|)$ et prouver le résultat dans ce cas particulier. On admettra (on le prouvera au second semestre) que $P_n(z) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. On suppose que $L = 0$. En remarquant que la fonction polynôme $z \mapsto (1+z)^n - 1$ est à coefficients positifs, adapter la démarche de la question précédente pour prouver que

$$\left|\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - 1\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

4. On suppose enfin que $L \neq 0$. Pour tout n, posons $u_n = L(1+v_n)$ avec $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{u_n}{n}\right)^n - \left(1+\frac{L}{n}\right)^n\right| &\leq \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{|L|^k}{n^k}((1+|v_n|)^k - 1)\\ &\leq \left|\left(1+\frac{|L|(1+|v_n|)}{n}\right)^n - \left(1+\frac{|L|}{n}\right)^n\right|\end{aligned}$$

et conclure à l'aide des questions précédentes.

Exercice 86 : ✪✪✪✪ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que ${z_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_{n+1} - z_n| \leq 1$. Montrer que la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 87 : ✪✪

1. Étudier la suite (z_n) définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + \overline{z_n}}{2}$.

2. ✪✪✪✪ Même question avec la suite définie par $z_0 \in \mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.

Chapitre 13

Limites et continuité

« Avec des chants pareils, on se jette sous les roues du char des dieux. »

Henri Michaux, Un barbare en Asie

Vrai ou Faux ?

1. $x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. $\dfrac{1}{x}\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3. $\dfrac{1}{x}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
4. $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
5. Si $\exp\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
6. Si $\ln\circ f$ admet une limite finie en $+\infty$ alors f admet une limite finie en $+\infty$.
7. Le produit d'une fonction qui tend vers 0 en a et d'une fonction bornée tend vers 0 en a.
8. Une fonction monotone admet une limite en tout point intérieur à son domaine de définition.
9. Si $f(x)-g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.
10. Une fonction f strictement monotone réalise une bijection entre un intervalle I et $f(I)$.
11. Si f est continue alors $|f|$ est continue.
12. Si $|f|$ est continue alors f est continue.
13. Si $f(x_0+h)-f(x_0-h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et si f est définie en x_0 alors f est continue en x_0.
14. Si f et g sont discontinues en x_0 alors $f+g$ l'est également.
15. Une fonction définie sur un segment est bornée sur ce segment.
16. Une fonction continue est bornée.
17. Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ni majorée ni minorée est surjective.
18. L'image réciproque d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
19. Une fonction uniformément continue est bornée.
20. Une fonction bornée est uniformément continue.
21. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
22. Si, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f est uniformément continue sur $[\,n\,;n+1\,]$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.
23. Une fonction monotone sur un segment est bornée sur ce segment.
24. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur I. Alors f est bornée sur I.
25. Soit I un intervalle borné et soit f continue sur $\mathbb{R}$. Alors f est bornée sur I.
26. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)^2=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Alors f est constante.
27. Une fonction bornée qui atteint ses bornes sur un segment est continue.
28. Si f est croissante majorée sur $]\,a\,;b\,[$ alors f admet une limite finie en a et b.
29. Soient f et g continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) > \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.
30. ✪✪ Soient f et g continues de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $f(x)>g(x)$. Alors $\sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} f(x) > \sup\limits_{x\in[\,0\,;1\,]} g(x)$.
31. ✪✪ Si $f\left(a+\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors f admet une limite à droite en a égale à L.

13.1 Limites

Exercice 1 : ✪ Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(4x)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x+2|x|}{x}$

Exercice 2 : ✪ Calculer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x - \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$.

Exercice 3 : ✪ Étudier l'existence, et calculer le cas échéant, les limites des fonctions suivantes au point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ indiqué :

1. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
2. $x \mapsto \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
3. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
4. $x \mapsto x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$.
5. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en 0.
6. $x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ en $+\infty$.
7. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en 0.
8. $x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ en $+\infty$.
9. $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ en $+\infty$

Exercice 4 : ✪ Notons $\sin^1 = \sin$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin^{n+1} = \sin \circ \sin^n$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^n(x)}{x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Que dire de f si elle admet une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?

Exercice 6 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x) + \dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ si et seulement si $f(\sin(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
3. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $f\left(\dfrac{1}{\lfloor 1/x \rfloor}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. A-t-on forcément $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$?

Exercice 7 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admettant une limite en 0 telle que $f(x) \times f(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
2. À l'aide de l'indicatrice de l'ensemble des inverses des entiers impairs, montrer que ce résultat est faux si on ne suppose pas que f admet une limite en 0.

Exercice 8 : ✪✪ Soient a et b strictement positifs. Étudier les limites éventuelles en 0 des fonctions

$$f : x \mapsto \frac{x}{a} \times \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \qquad g : x \mapsto \frac{b}{x} \times \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$$

Exercice 9 - Contre-exemple au lemme de Croft : ✪✪ On définit dans cet exercice une fonction $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x = \sqrt{2} + n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^+$?
2. Écrire la propriété « $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ » avec des quantificateurs, ainsi que sa négation. En déduire que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
3. f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $x > 0$.
   (a) Montrer que la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ admet au plus un terme non nul.
   (b) En déduire la limite de cette suite.

Remarque : Le lemme de Croft est le résultat suivant :

« si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et si pour tout $x > 0$, $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ »

Malgré son apparente simplicité, la démonstration (« Ah bon, il y a quelque-chose à montrer ? ») de ce lemme nécessite des outils assez sophistiqués, loin au-delà du programme des classes préparatoires. On a montré dans cet exercice que le résultat est faux si la fonction f n'est pas supposée continue, ce qui montre déjà que ce lemme n'est pas si simple que cela... Nous démontrerons ce résultat pour les fonctions uniformément continues dans l'exercice 84.

Exercice 10 : ✪✪✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est périodique, que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et que $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

Exercice 11 : ✪✪✪ Soit f définie sur $I = [\,1\,;+\infty\,[$ par

$$f(x) = \frac{x^{\lfloor x\rfloor}}{\lfloor x\rfloor^x}$$

1. Soit $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$. Donner la limite à gauche de f en p. f est-elle continue à gauche en p ?
2. Calculer les limites des suites $(f(u_n))$ dans les trois cas suivants :
   (a) $u_n = n$.
   (b) $u_n = n + \dfrac{1}{2}$.
   (c) $u_n = n + \dfrac{3}{\ln n}$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?
4. Soit $a \in [\,0\,;1\,]$. Donner une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exercice 12 : ✪✪✪

1. Montrer que $f : x \mapsto x^\alpha \sin\left(x^\beta\right)$ n'admet pas de limite finie en 0^+ si $\alpha \leq 0$ et $\beta < 0$.
2. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (α, β) (α et β sont deux réels quelconques, pas forcément négatifs comme dans la question précédente) tels que f soit prolongeable par continuité en 0^+.

13.2 Continuité :

Exercice 13 : ✪ Dire si les fonctions suivantes sont continues ou prolongeables par continuité en 0 :

1. $f : x \mapsto \dfrac{x}{|x|}$
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.
3. $f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$
4. $f : x \mapsto \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

Exercice 14 : ✪ Étudier la continuité des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

1. $x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x - \lfloor x\rfloor}$
2. $x \mapsto \lfloor x\rfloor \sin(\pi x)$
3. $x \mapsto \lfloor x\rfloor \times x$
4. $x \mapsto (-1)^{\lfloor x\rfloor}\left(x - \lfloor x\rfloor - \dfrac{1}{2}\right)$
5. ✪✪ $x \mapsto \left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$
6. ✪✪ $x \mapsto S(x)$ (cf exercice 29 du chapitre 2)
7. ✪✪ $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1}{x} - \left\lfloor\dfrac{1}{x}\right\rfloor}$

Exercice 15 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(1) = f(-1) = 0$ et, pour tout $x \neq \pm 1$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}+1}{x^{2n}-1}$$

Montrer que f est bien définie et étudier la continuité de f.

Exercice 16 : ✪✪ Soit f une fonction continue en 0 et en 1 telle que pour tout $x, f(x^2) = f(x)$.

1. Montrer que f est paire.
2. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. Montrer que la suite $\left(f\left(x^{2^n}\right)\right)$ est constante et donner sa valeur. En déduire que $f(x) = f(0)$.
3. Soit $x \geq 1$. Même question avec la suite $\left(f\left(x^{1/2^n}\right)\right)$, et en déduire que $f(x) = f(1)$.
4. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}^+$.
5. En déduire que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x, f(x) = f(2x)$.

1. Montrer que la fonction f qui vaut 1 sur $\mathbb{Q}$ et 0 sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ vérifie cette condition.
2. On suppose de plus que f est continue en 0. Montrer que f est constante (on pourra s'inspirer de l'exercice précédent).

13.3 Bornes atteintes

Exercice 18 : ✪ Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,]\,, 0 < f(x) < g(x)$$

Montrer qu'il existe un réel $C > 1$ tel que : $\forall x \in [\,0\,;1\,]\,, Cf(x) \leq g(x)$. Donner un contre-exemple si on ne suppose plus les fonctions définies sur un segment.

Exercice 19 : ✪ Montrer qu'une fonction périodique continue sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 20 : ✪ Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est bornée et que g est continue. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées.

Exercice 21 : ✪✪ Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ admettant une limite finie en $+\infty$ est bornée. On pourra commencer par faire un dessin. Atteint-elle ses bornes ?

Exercice 22 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. Étudier la suite de terme général $u_n = \max\limits_{0 \leq k \leq n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

Exercice 23 : ✪✪ Soit f une fonction continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que

$$\sup_{x \in [\,a\,;b\,]} f(x) = \sup_{x \in]\,a\,;b\,[} f(x)$$

Exercice 24 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $]\,0\,;1\,[$?
- une surjection continue de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans lui-même ?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathbb{R}$?
- une surjection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$?

Exercice 25 : ✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs : « f est minorée et atteint sa borne inférieure ».
2. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ tendant vers $+\infty$ en $\pm\infty$. Montrer que f est minorée et atteint sa borne inférieure. On pourra (encore !) commencer par faire un dessin.

Exercice 26 - Version continue du théorème de Cesàro : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(t+1) - f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Si $x \in \mathbb{R}$, on pourra s'intéresser à la somme

$$f(\{x\}) + \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor - 1} \left(f\left(k+1+\{x\}\right) - f(k+\{x\})\right)$$

où on rappelle que $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ est la partie fractionnaire de x.

13.4 Continuité et densité

Exercice 27 : ✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinue en tout point telle que $|f|$ soit continue.

Exercice 28 : ✪ Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que si B est dense dans A alors $f(B)$ est dense dans $f(A)$. Contre-exemple sans l'hypothèse de continuité ?

Exercice 29 : ✪✪ Étudier la continuité de

$$f : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ & \\ 1-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{array} \right.$$

Exercice 30 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $f(0) = f(1) = 0$ et que :

$$\forall (x,y) \in [\,0\,;1\,]^2\,, \qquad f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$$

Que dire de f ?

Exercice 31 : ✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Montrer que f est continue 0 et discontinue en tout autre point.

Exercice 32 : ✪✪ Construire une bijection de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même discontinue en tout point.

Exercice 33 - Fonction de Thomae : ✪✪✪ On définie sur $\mathbb{R}$ la fonction f suivante :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \text{ et si } \dfrac{p}{q} \text{ est l'écriture irréductible de } x \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel. On pourra utiliser l'exercice 77 du chapitre 12.

Remarque : On peut montrer qu'il n'existe aucune fonction continue en tout point rationnel et discontinue en tout point irrationnel.

13.5 Théorème des valeurs intermédiaires :

Exercice 34 : ✪ Une bonne fois pour toutes, montrer qu'une fonction qui est continue sur un intervalle et qui ne s'annule pas est de signe constant. C'est compris ?

Exercice 35 : ✪ Reprendre l'exercice 34.

Exercice 36 : ✪

1. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui prend un nombre fini de valeurs ?
2. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ continue ?
3. Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ continue ?
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$? On pourra s'intéresser à la fonction $x \mapsto f(x) + x$.

Exercice 37 : ✪ Soit f continue sur le segment $[\,0\,;T\,]$ telle que $f(0) = f(T)$. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = f\left(x + \dfrac{T}{2}\right)$.

Exercice 38 : ✪ Vrai ou Faux ?

1. Une fonction $f : [\,a\,;b\,] \to [\,a\,;b\,]$ (avec $a \leq b$) continue admet un point fixe.
2. Une fonction $f : [\,0\,;2\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue admet un point fixe.
3. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;2\,]$ continue admet un point fixe.
4. Une fonction $f :]\,0\,;1\,[\to]\,0\,;1\,[$ continue admet un point fixe.
5. Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue admet un point fixe.
6. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement croissante admet un unique point fixe.
7. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue strictement décroissante admet un unique point fixe.

Exercice 39 : ✪ Soit f une fonction continue décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 40 : ✪ Soient n réels $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \cdots + \frac{1}{x - a_n}$$

Montrer que f s'annule exactement $n - 1$ fois sur son ensemble de définition.

Exercice 41 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|f(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Exercice 42 : ✪ Soit $T > 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et T-périodique. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\left[a\,;a + \frac{T}{2}\right]\right)$$

Exercice 43 : ✪ Soit f définie et continue sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$ non vide (avec a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$) telle que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to b} f(x)$$

les limites étant prises dans $\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 44 : ✪ Soient $(a_1, \dots, a_n)$ dans $[\,0\,;1\,]$. Montrer qu'il existe $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k| = \frac{1}{2}$$

Exercice 45 : ✪ Soient f et g continues sur $[\,0\,;1\,]$ telles que $\sup f = \sup g$. Montrer que les graphes de f et g se croisent.

Exercice 46 : ✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $L < 1$ tel que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 47 : ✪✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ telle que $f(a) = f(b)$. Soient $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max_{[\,a\,;b\,]} f$ (pourquoi existent-ils ?). On suppose que $m < M$. Soit $y \in]\,m\,;M\,[$. Montrer que y a au moins deux antécédents dans $[\,a\,;b\,]$.

Exercice 48 - Un calcul barycentrique : ✪✪ Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ et soient x, y deux réels positifs. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $(x+y)f(c) = xf(a) + yf(b)$.

Exercice 49 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f \circ f$ admette un point fixe. Montrer que f admet un point fixe. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

Exercice 50 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue et soit $(x_1, \dots, x_n) \in [\,0\,;1\,]^n$. Montrer qu'il existe $c \in [\,0\,;1\,]$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Exercice 51 : ✪✪ Un candidat à l'X (peu entraîné...) court le 1000m en 5 minutes. Montrer qu'il existe un intervalle de 2 minutes 30 pendant lequel il a avancé d'exactement 500 mètres.

Exercice 52 - Cordes universelles (Théorème de Lévy, 1934) : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$ avec $f(0) = f(1)$.

1. Soit $n \geq 1$ et on pose $\alpha = 1/n$. On définit sur $[\,0\,;1-\alpha\,]$ la fonction g par

$$g(x) = f(x+\alpha) - f(x)$$

   (a) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

   (b) En déduire qu'il existe $x \in [\,0\,;1-\alpha\,]$ tel que $f(x) = f(x+\alpha)$. On dit que α est une corde universelle.

2. Soit maintenant $\alpha \in]\,0\,;1\,[$ tel que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$. En considérant la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto x - \frac{\sin^2(\pi x/\alpha)}{\sin^2(\pi/\alpha)}$$

   montrer que la propriété précédente est fausse. Où a-t-on utilisé le fait que $1/\alpha \notin \mathbb{N}$?

Exercice 53 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue surjective. Montrer que f s'annule une infinité de fois.

Exercice 54 : ✪✪✪ Soit

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en 0 mais vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall m \in [\,f(a)\,;f(b)\,]\,, \exists c \in [\,a\,;b\,]\,, f(c) = m$$

Exercice 55 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide). Donner l'allure de son graphe.

Exercice 56 : ✪✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$ et soit

$$S = \{x \in [\,0\,;1\,] \mid \exists y > x, f(y) > f(x)\}$$

On suppose qu'il existe $(a,b) \in [\,0\,;1\,]^2$ tels que $]\,a\,;b\,[\subset S$ et $a \notin S, b \notin S$.

1. Montrer que pour tout $x \geq b, f(x) \leq f(b)$.
2. Montrer que $f(a) \geq f(b)$.
3. On suppose que $f(a) > f(b)$. Montrer que l'ensemble $A = \left\{ x \in \,]\,a\,;b\,[\;\middle|\; f(x) = \dfrac{f(a)+f(b)}{2} \right\}$ admet une borne supérieure c.
4. Montrer que $c \notin S$. Que peut-on en déduire ?

13.6 Fonctions monotones :

Exercice 57 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

1. ✪ On suppose la restriction de f à $\mathbb{Q}$ croissante. Montrer que f est croissante.
2. ✪✪ Même question en remplaçant croissante par strictement croissante.

Exercice 58 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère les propriétés suivantes :

1. f est monotone.
2. f est strictement monotone.
3. f est continue.
4. f est injective.
5. $f(\mathbb{R})$ est un intervalle.

Étudier toutes les implications entre ces propriétés. Prouver celles qui sont vraies et donner un contre-exemple à celles qui sont fausses.

Exercice 59 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijective croissante. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 60 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'application

$$x \mapsto \lim_{t\to x^+} f(t)$$

est bien définie et croissante.

Exercice 61 : ✪✪ Existe-t-il

- une bijection continue de $]\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$?
- une bijection continue de $]\,0\,;1\,[$ dans $[\,0\,;1\,]$?

Exercice 62 : ✪✪ Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que la fonction $g : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Montrer que f est continue (on pourra s'intéresser aux limites à droite et à gauche de f et g en x).

Exercice 63 : ✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ croissante, surjective de $[\,a\,;b\,]$ dans $[\,f(a)\,;f(b)\,]$. Montrer que f est continue.

Exercice 64 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f \leq g$.

Exercice 65 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est fini ou dénombrable, c'est-à-dire qu'il existe une injection de l'ensemble des points de discontinuité de f dans $\mathbb{Q}$. Par conséquent, une fonction croissante ne peut pas être « trop » discontinue...

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue. On définie sur $\mathbb{R}_+$ la fonction F par $F(x) = \max\limits_{t\in[\,0\,;x\,]} f(t)$.

1. Montrer que F est bien définie, croissante, continue et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq F(x)$.
2. Soit g une fonction croissante telle que $f \leq g$ (i.e. $f(x) \leq g(x)$ pour tout x). Montrer que $F(x) \leq g(x)$.

13.7 Utilisation de la borne supérieure

Exercice 67 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. On suppose que :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [\,x\,;x+\varepsilon\,]\,, f(x) \leq f(y)$$

Montrer que f est croissante.

2. Même question si on suppose cette fois que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall y \in [\,x\,;x+\varepsilon\,]\,, f(x) \leq f(y)$$

Exercice 68 : ✪✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 69 : ✪✪✪✪ Soit I un intervalle d'intérieur non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Soit J un segment inclus dans $f(I)$. Montrer qu'il existe un segment K inclus dans I tel que $f(K) = J$.

Exercice 70 : ✪✪✪✪

1. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, admettant en tout point un maximum local, c'est-à-dire (cf. chapitre 14) que, pour tout $x_0 \in [\,a\,;b\,]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x_0) \geq f(x)$ pour tout $x \in [\,a\,;b\,] \cap [\,x_0-\varepsilon\,;x_0+\varepsilon\,]$. Montrer que f est constante. On pourra commencer par montrer que

$$I = \{x \in [\,a\,;b\,] \mid \forall t \in [\,a\,;x\,]\,, f(t) \leq f(a)\}$$

est un intervalle fermé non vide et que $\max(I) = b$. Donner un contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.

2. Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue, admettant en tout point un extremum local. Le but de cette question est encore de prouver que f est constante.
   (a) Justifier l'existence de $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et $M = \max_{[\,a\,;b\,]} f$.
   (b) On raisonne ensuite par l'absurde et on suppose que f n'est pas constante, donc que $m < M$ et on se donne $m < y < M$. Justifier que y est atteint par f.
   (c) Soit x un antécédent de y par f. Sans perte de généralité, on peut supposer que f admet en x un maximum local et que M est atteint en un réel x_0 strictement supérieur à x. Prouver l'existence de

$$c = \{t \in [\,x\,;x_0\,] \mid \forall z \in [\,a\,;t\,]\,, f(z) \leq y\}$$

   puis que f admet en c un minimum local.
   (d) Justifier qu'il existe un rationnel q tel que $f(q) = y$ et conclure. On pourra utiliser le fait (cf. chapitre 17 et deuxième année) que $]\,m\,;M\,[$ n'est pas dénombrable, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune injection de $]\,m\,;M\,[$ dans $\mathbb{Q}$.

13.8 Fonctions uniformément continues et lipschitziennes

Exercice 71 : ✪ Soient f et g deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle I.

1. Montrer que $f + g$ est lipschitzienne.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que λf est lipschitzienne.
3. Montrer que si f et g sont bornées alors $f \times g$ est lipschitzienne. Contre-exemple sans l'hypothèse de bornitude ?

Exercice 72 : ✪ Soit f une fonction lipschitzienne définie sur un intervalle I. On note

$$E = \{k \in \mathbb{R}_+ \mid f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$$

1. Montrer que E admet une borne inférieure qu'on notera $\mathrm{Lip}(f)$.
2. Montrer que cette borne inférieure est un minimum, autrement dit que f est $\mathrm{Lip}(f)$-lipschitzienne.
3. Montrer que $E = [\,\mathrm{Lip}(f)\,;+\infty\,[$.
4. Donner une CNS pour que $\mathrm{Lip}(f) = 0$.

Exercice 73 : ✪ Soient f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est uniformément continue et bornée et si g est continue alors $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 74 : ✪ Montrer que $x \mapsto x\ln(x)$ est uniformément continue sur $]\,0\,;1\,]$.

Exercice 75 : ✪✪ Soient f et g deux fonctions uniformément continues sur un intervalle I.

1. Étudier l'uniforme continuité sur I de $f+g$, de $f \times g$ et de $1/f$ lorsque f ne s'annule pas.
2. On suppose que $f(I) \subset I$. La fonction $g \circ f$ est-elle uniformément continue sur I ?
3. On suppose que f est strictement monotone sur I. La fonction f^{-1} est-elle uniformément continue sur $J = f(I)$?

Exercice 76 : ✪✪ Soit f continue sur un segment (d'intérieur non vide) $[\,a\,;b\,]$. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,a\,;b\,]^2, |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \alpha(x-y)^2$$

Exercice 77 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ une fonction 1-lipschitzienne. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).

Exercice 78 : ✪✪ Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$. On suppose que f n'est pas bornée. Montrer que f n'est pas uniformément continue.

Exercice 79 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Étudier si les conditions suivantes sont suffisantes pour dire que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$:

1. Pour toute suite croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
3. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $\left(f\left(\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
4. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
5. f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et la suite $\left(f\left(\sqrt{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Exercice 80 - Les fonctions UC sont sous-affines : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f(x)| \leq ax + b$.

Exercice 81 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie L_1 en $+\infty$ et une limite finie L_2 en $-\infty$. Montrer que f est bornée et uniformément continue. Une fonction bornée et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-elle forcément uniformément continue ?

Exercice 82 : ✪✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Exercice 83 : ✪✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. Même question en remplaçant « lipschitzienne » par « uniformément continue ».
3. Donner un contre-exemple si on suppose simplement la continuité.

Exercice 84 - Lemme de Croft pour les fonctions UC : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ uniformément continue. On suppose que, pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.

Remarque : On peut montrer que ce résultat est toujours vrai si f est simplement continue, mais cela fait appel à un résultat hors programme appelé théorème de Baire. Cependant, si f n'est pas continue, ce résultat n'est plus valable : cf. exercice 9.

Exercice 85 - Recollement : ✪✪✪✪ Soient $a < c$ deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$ et $b \in]\,a\,;c\,[$ (b est donc un réel). Soit $f :]\,a\,;c\,[\to \mathbb{R}$. On suppose que f est uniformément continue sur $]\,a\,;b\,]$ et sur $[\,b\,;c\,[$. Montrer que f est uniformément continue sur $]\,a\,;c\,[$.

Chapitre 14

Dérivation

« - Eh bien, moi, à chaque fois que j'entends ça, je mets Duhamel à la porte.
- Mais comment savez-vous pour savoir que c'est lui ?
- Oh ! Je ne dis pas que c'est toujours lui qui fait la musique ; mais c'est toujours lui que je punis.
- Mais pourquoi ?
- Parce qu'il a une tête à ça.
- Voyons, mon cher collègue, vous plaisantez ?
- Pas le moins du monde.
- Alors, vous avez choisi un bouc émissaire, un pauvre enfant qui paye pour tous les autres ?
- Ah, permettez ! Duhamel, c'est pour la musique seulement. En cas de boules puantes, je punis le jeune Trambouze. Quand ils ont bouché le tuyau du poêle avec un chiffon, c'est Jusserand qui passa à la porte. Et si je trouve un jour de la colle sur ma chaise, ce sera tant pis pour les frères Gisher !
[...]
Et ce n'est pas si injuste que ça peut en avoir l'air ; parce que, voyez-vous, un élève qui a une tête à boucher le tuyau du poêle, il est absolument certain qu'il le bouchera et, neuf fois sur dix, c'est lui qui l'aura bouché.
- Mais la dixième fois ?
- Erreur judiciaire qui renforce mon autorité. »

Marcel Pagnol, Topaze

Si rien n'est précisé, I et J sont deux intervalles non vides, non réduits à un point, et a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Vrai ou Faux ?

1. Si f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ alors $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0)$.
2. Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(0) = 1$. Il existe $a > 0$ tel que f soit strictement croissante sur $[\,-a\,;a\,]$.
3. Si f est dérivable et strictement croissante alors f' est strictement positive.
4. La fonction $x \mapsto x \times |x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
5. Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $\max(f, g)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
6. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors $|f|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est de signe constant.
7. Si f dérivable sur I admet un maximum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$.
8. Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$. Si $f(\alpha) = 0$ alors $|f|$ n'est pas dérivable en α.
9. Si x et y sont inférieurs ou égaux à -1 alors $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leq |x - y|/2$.
10. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone dérivable. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.
11. Si f est dérivable en a alors $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = f(a)$ lorsque h est suffisamment proche de 0.
12. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$ alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f_{|\mathbb{R}_+}$ et $f_{|\mathbb{R}_-}$ sont dérivable alors f est dérivable.
14. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
15. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
16. Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et si f est dérivable alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
17. Il existe $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
18. La fonction Arctan est uniformément continue.

19. La dérivée n-ième du sinus est $x \longmapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.
20. La dérivée n-ième de la fonction $x \longmapsto xe^x$ est $x \longmapsto (x+n)e^x$.
21. La dérivée n-ième de $x \longmapsto e^{-x}$ est elle-même.
22. Si f est croissante et $\mathscr{C}^\infty$ alors, pour tout $n \geq 1$, $f^{(n)}$ est positive.
23. Si f est paire et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes paires.
24. Si f est périodique et $\mathscr{C}^\infty$, alors ses dérivées successives sont toutes périodiques.

14.1 Dérivées.

Exercice 1 : ✪ Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor) \times (x - \lfloor x \rfloor - 1)$
2. $f : x \mapsto \dfrac{\pi}{2} \times e^{-|x|}$
3. $f : x \mapsto |\sin(x)|$

On donnera à chaque fois l'allure du graphe, et on tracera les demi-tangentes en 0.

Exercice 2 : ✪ Déterminer a pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Même question avec $x \mapsto ax^2 + bx + 1$ à la place de $ax^2 + 1$.

Exercice 3 : ✪ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$$

On suppose que pour tout x réel, $|f(x)| \leq |x|$. Montrer que $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.

Exercice 4 : ✪ Montrer que la fonction f ci-dessous est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \operatorname{Arctan}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 5 : ✪ Soit f dérivable sur un intervalle I, soit $x_0 \in I$. Après avoir montré leur existence, donner

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 7h) - f(x_0 - 4h)}{h} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$$

Exercice 6 - Fonctions hölderiennes dans un cas facile : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux réels $A \geq 0$ et $\alpha > 1$ tels que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$

Montrer que f est constante.

Exercice 7 : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f'(a) > 0$ et que $f(a) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) < 0$.

Exercice 8 : ✪ Justifier que $f : x \mapsto x + \cos(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et étudier la dérivabilité de sa réciproque.

Exercice 9 : ✪✪

1. Montrer que

$$f : \begin{cases} [\,-1\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \times \left(1 + \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) \end{cases}$$

est prolongeable en une fonction dérivable sur $[\,-1\,;1\,]$ mais que sa dérivée n'est pas bornée. En déduire que f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

2. Montrer que f admet un minimum global en 0 mais n'est décroissante sur aucun intervalle du type $[-\varepsilon\,;0]$, ni croissante sur aucun intervalle du type $[0\,;\varepsilon]$, pour un certain $\varepsilon > 0$.

Exercice 10 : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \sup\{f'(x)\,|\,x \in [a\,;b]\}$$

Que peut-on dire de f ?

Exercice 11 : ✪✪ Soit $f : [0\,;1] \to [0\,;1]$ dérivable vérifiant $f \circ f = f$.

1. Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un segment (non vide).
2. Montrer que f est soit constante, soit égale à l'identité.

Exercice 12 : ✪✪ Soient $a \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. On se donne f de classe $\mathscr{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(ax+b) = af(x)+b$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f'\left(a^n x + \frac{a^n-1}{a-1}b\right)$$

2. En déduire toutes les fonctions f qui conviennent lorsque $a < 1$.
3. Même question lorsque $a > 1$.

Exercice 13 - Dérivée symétrique : ✪✪ Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Lorsque la limite

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$$

existe (et est finie), on la note ${f_s}'(a)$ et on l'appelle la dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que si f est dérivable à droite et à gauche en a alors ${f_s}'(a)$ existe et donner sa valeur.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Si f est croissante sur I et admet une dérivée symétrique en tout point, montrer que celle-ci est positive sur I.
4. Si ${f_s}'$ est nulle sur I, f est-elle constante sur I ?

Exercice 14 : ✪✪ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = 2f(x)$.

Exercice 15 - La dérivabilité est une notion ponctuelle : ✪✪ Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dérivable en 0 et discontinue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f \times f' \times f'' = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une fonction affine.

1. Supposons que $f''(0) \neq 0$.
   (a) Supposons également que $f'(0) \neq 0$. Qui est nul alors ?
      i. Montrer que f est strictement monotone sur un voisinage de 0.
      ii. Montrer que f'' est nulle sur un voisinage de 0, sauf en 0, et conclure à une absurdité.
   (b) Conclure à une absurdité en supposant à présent que $f'(0) = 0$.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. En étudiant la fonction $g : x \mapsto f(x+x_0)$, montrer que $f''(x_0) = 0$ et conclure.

14.2 Extrema, Rolle et accroissements finis.

Exercice 17 : ✪ Montrer que la dérivée d'une fonction périodique dérivable s'annule une infinité de fois.

Exercice 18 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $x \in]\,0\,;1\,[$ tel que $4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a+b+c$.

Exercice 19 : ✪ À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise en faisant les approximations suivantes :

$$\sqrt{10001} \approx 100 \qquad 0.99^2 \approx 1 \qquad \text{et} \qquad \cos(1) \approx \frac{1}{2}$$

Exercice 20 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, périodique. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 21 - Un résultat bien utile : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $c \in]\,a\,;a+\eta\,]\,, f(c) > f(a)$ (on s'intéressera au taux d'accroissement). En particulier, il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) > f(a)$. Attention, cela ne veut pas dire que f est strictement croissante sur un voisinage de a ! On a en effet vu un contre-exemple dans le cours.
2. Donner un résultat analogue si $f'(a) < 0$, si $f'(b) > 0$ ou si $f'(b) < 0$. Ce genre de résultat peut être très utile. Voici quatre exercices qui l'utilisent.

Exercice 22 : ✪ Soient f et $g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f'(a) > g'(a)$ et $f'(b) > g'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 23 : ✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(a) = f(b) = 0$, que $f'(a) > 0$ et que $f'(b) > 0$. Montrer qu'il existe $c_1 < c_2 < c_3$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

Exercice 24 : ✪ Soit $f\,[\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $f(1) \times f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\,0\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 25 - Théorème de Darboux : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose dans cette question que $f'(a) < 0 < f'(b)$
   (a) Montrer que si f est $\mathscr{C}^1$, alors il existe $c \in]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (b) On suppose à présent uniquement que f est dérivable. Montrer que le résultat de la question précédente est encore vérifié.
2. On ne suppose plus que $f'(a) < 0 < f'(b)$. Montrer que pour tout $m \in [\,f'(a)\,; f'(b)\,]\,$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f'(c) = m$. En d'autres termes, une fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, même si elle n'est pas continue !
3. Montrer que la partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier que la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, prolongée en 0 par $f(0) = 0$, vérifie bien la propriété des valeurs intermédiaires.

Exercice 26 : ✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable deux fois telle que $f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$. Montrer que f'' s'annule sur $]\,-1\,;1\,[$.

Exercice 27 - Deux fois le même : ✪✪ Donner à l'aide de l'IAF puis de l'EAF les deux limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\mathrm{Arctan}(x+3) - \mathrm{Arctan}(x)\right)$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+2)e^{1/(x+2)} - xe^{1/x}$

Exercice 28 : ✪✪ Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ que l'on explicitera telle que pour tout $(t, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$:

$$\left|\sin(t)e^{-{x_1}^2} - \sin(t)e^{-{x_2}^2}\right| \leq C|x_1 - x_2|.$$

Exercice 29 : ✪✪ Soit $f : [\,-1\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]\,-1\,;1\,[$ tel que $f'(c) = 4c+1$.

Exercice 30 : ✪✪ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 31 : ✪✪ Redémontrer (nous l'avons en effet déjà fait dans le chapitre 13) que $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas lipschitzienne. En déduire que cette fonction n'est pas périodique.

Exercice 32 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. Donner une CNS pour que la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[\,0\,;\dfrac{1}{2}\,\right] \\ \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

soit dérivable sur $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 33 - Théorème de Rolle généralisé : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$, dérivable sur $]\,a\,;+\infty\,[$, et tendant vers $f(a)$ en $+\infty$. Montrer qu'il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$:

1. en appliquant le théorème de Rolle à f sur un segment bien choisi (après avoir fait un dessin, comme une personne civilisée).
2. en appliquant le théorème de Rolle à la fonction F définie sur $\left[\,\mathrm{Arctan}(a)\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$ par

$$x \mapsto \begin{cases} f(\tan x) & \text{si } x \neq \dfrac{\pi}{2} \\ f(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

3. **Remake :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f$. Montrer que f' s'annule.

Exercice 34 - Accroissements finis généralisés et règle de l'Hôpital : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels. Soient f et g deux fonctions continues sur $[\,a\,;b\,]$ et dérivables sur $]\,a\,;b\,[$. Enfin, on suppose que g' ne s'annule pas sur $]\,a\,;b\,[$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \,]\,a\,;b\,]$, $g(x) \neq g(a)$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

   Pourquoi appelle-t-on ce résultat le théorème des AF généralisés ?
3. On suppose que f'/g' admet une limite finie L en a^+. Montrer que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \xrightarrow[x \to a^+]{} L$$

   Ce résultat est connu sous le nom de règle de l'Hôpital.
4. Montrer les résultats suivants :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{x-\sin(x)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

Exercice 35 : ✪✪ Soit $n \geq 1$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, 2π-périodique, s'annulant n fois sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,[$. Montrer que f' s'annule au moins n fois sur $[\,0\,;2\pi\,[$.

Exercice 36 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^2$ bornée. On veut montrer que f'' s'annule. Pour cela, on va raisonner par l'absurde.

1. Montrer que f'' est de signe constant. On suppose dans la suite qu'elle est strictement positive.
2. Montrer que f' admet une limite L_1 en $+\infty$ et une limite L_2 en $-\infty$, avec $L_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.
3. Montrer que $L_1 = L_2 = 0$ et conclure.

Exercice 37 : ✪✪ Soit f continue sur $[\,0\,;1\,]$, dérivable sur $]\,0\,;1\,[$, vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe des éléments distincts $0 < x_0 < \cdots < x_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k) = n$.
2. **✪✪✪** En tronçonnant les y plutôt que les x, montrer qu'il existe $0 < y_0 < \cdots < y_{n-1} < 1$ tels que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{f'(y_k)} = n$.

Exercice 38 : ✪✪

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \left(\frac{1+x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$$

2. En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

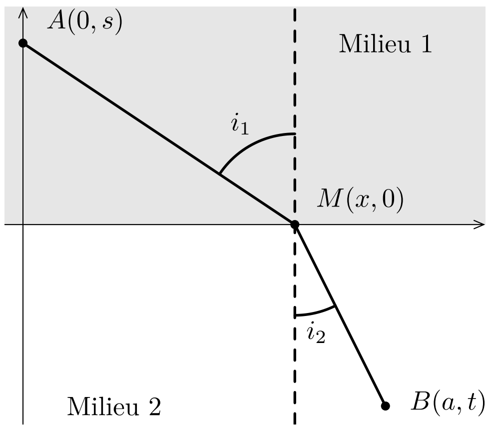
Exercice 39 : ✪✪

1. Soit f une fonction dérivable de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$, avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(1) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par l'origine.
2. **Remake :** Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [\,a\,;b\,]$ dérivable avec $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que, pour tout $x \notin [\,a\,;b\,]$, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que la tangente à la courbe de f en c passe par le point $(x,0)$.

Exercice 40 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ bornée et deux fois dérivable. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha f \leq f''$. Montrer que f est décroissante et que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.

Exercice 41 - Réfraction d'un rayon lumineux et loi de Snell-Descartes : ✪✪✪ Deux milieux homogènes (c'est-à-dire que, dans chaque milieu, la vitesse de la lumière ne dépend pas de la position) sont séparés par une frontière plane. La vitesse de la lumière vaut v_1 dans le premier milieu et v_2 dans le deuxième. Un rayon lumineux va du point A situé dans le premier milieu au point B situé dans le deuxième. Le point, noté M, où il change de milieu est déterminé par le principe de Fermat : il est tel que le temps de parcours soit minimal.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme sur la figure. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,s)$ et (a,t) avec s et a strictement positifs et t strictement négatif. Le point M a pour coordonnées $(x,0)$ avec $x \in [\,0\,;a\,]$. On désigne par i_1 et i_2 les angles géométriques (donc positifs) entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{j}$ d'une part, entre $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{j}$ d'autre part (voir la figure).



1. Exprimer le temps de parcours en fonction de x. Montrer que cela définit une fonction T de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;x\,]$.
2. Montrer que T admet un minimum en un point x_0, et que pour cette valeur x_0, on a $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$, où les indices $n_1 = c/v_1$ et $n_2 = c/v_2$ sont appelés les indices de réfraction.
3. On suppose que $n_2 < n_1$. Montrer que si l'angle d'incidence α est supérieur à un certain seuil, il n'y a pas de rayon réfracté.

Exercice 42 - Lemme de Sard, cas réel : ✪✪✪ Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note C l'ensemble des points critiques de f. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que, si $|x-y| \leq \dfrac{b-a}{n}$, alors $|f'(x) - f'(y)| \leq \dfrac{\varepsilon}{b-a}$.
2. Soit $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$. On suppose que

$$I_k = \left[a + k \times \frac{b-a}{n}\,; a + (k+1) \times \frac{b-a}{n}\right]$$

contient un point critique de f. Justifier que $f(I_k)$ est un intervalle de longueur inférieure ou égale à $\dfrac{\varepsilon}{n}$.
3. Prouver le lemme de Sard : $f(C)$ est de mesure nulle, c'est-à-dire qu'il peut être recouvert par une famille finie ou une suite d'intervalles dont la somme des longueurs soit arbitrairement petite.

Exercice 43 : ✪✪✪ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \leq x + e^{x^2}$.

Exercice 44 : ✪✪✪ Soit $f :]\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ dérivable. Chercher toutes les implications vraies entre les assertions suivantes :

1. $|f(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
2. $|f'(x)| \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$
3. f' n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$
4. f n'est pas bornée sur $]\,0\,;1\,]$

14.3 Suites récurrentes.

Exercice 45 : ✪✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Comment obtenir une valeur approchée de sa limite à 10^{-3} près ?

Exercice 46 : ✪ On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 47 : ✪✪ Soit f la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$.

1. Montrer que $[\,0\,;1\,]$ est stable par f.
2. Montrer que f admet un unique point fixe (dans $[\,0\,;1\,]$ donc puisque c'est le domaine de définition de f) qu'on notera α et qu'on ne cherchera pas à calculer (on pourra dériver deux fois f).
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [\,0\,;1\,]$ et pour tout $n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2e}{9}\right)^n \times |u_0 - \alpha|$$

et en déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Exercice 48 - Points fixes attractifs et répulsifs : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| < 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k \in [\,0\,;1\,[$ et d'un voisinage V de c tel que f soit k-lipschitzienne sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$.
2. Soit $c \in I$ un point fixe de f tel que $|f'(c)| > 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $k > 1$ et d'un voisinage V de c tel que $|f'| \geq k$ sur $I \cap V$.
   (b) On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \in V\backslash\{c\}$. Montrer qu'il existe $n \geq n_0$ tel que $u_n \notin V$. En d'autres termes, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par sortir, par « être expulsée » du voisinage.

14.4 Dérivées successives.

Exercice 49 : ✪ Soit $n \geq 2$. Donner la dérivée n-ième de $x \mapsto (x^2+2)e^{2x}$.

Exercice 50 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}^+$ bornée telle qu'il existe $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telle que $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $L = 0$.

Exercice 51 : ✪ Soit f dérivable n fois sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ tels que $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_{n+1})$. Montrer qu'il existe $\alpha \in]\,a_1\,; a_{n+1}\,[$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0$.

Exercice 52 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 53 : ✪✪ Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ les fonctions $\varphi_n : x \mapsto x^n \ln(x)$ et $f_n : x \mapsto x^n$ et on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que φ_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer ${\varphi_{n+1}}'$ en fonction de φ_n et de f_n.
3. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x > 0$, ${\varphi_n}^{(n)}(x) = n! \times (\ln(x) + H_n)$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Exercice 54 : ✪✪ Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,|\, \forall k \in \mathbb{N}, f^{(k)}(0) = 0\}$. Montrer que E et $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})\backslash E$ sont stables par produit.

Exercice 55 : ✪✪ Soit f une fonction $\mathscr{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de réels positifs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \geq 0, f^{(n)}(x_n) = 0$. On pourra utiliser l'exercice 33.

Exercice 56 : ✪✪ Soient $x \not\equiv \pi/2[\pi]$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $a_n = \dfrac{\tan^{(n)}(x)}{n!}$. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \qquad (n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

En déduire les valeurs de $a_0, \dots, a_7$ lorsque $x = 0$.

Exercice 57 - Fonctions absolument et complètement monotones : ✪✪✪ Toutes les fonctions de cet exercice sont $\mathscr{C}^\infty$. Une fonction f définie sur I est dite

- absolument monotone (en abrégé : AM) si $f^{(k)}$ est positive (au sens large) pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- complètement monotone (en abrégé : CM) si $(-1)^k f^{(k)}$ est positive (au sens large), c'est-à-dire si $f^{(k)}$ est du signe de $(-1)^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la fonction exponentielle est AM sur $\mathbb{R}$ et que la fonction inverse est CM sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. On suppose dans cette question que $I = \mathbb{R}^{+*}$, que $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit sur I la fonction f par $f(x) = x^\alpha$. Montrer que f est AM sur I si et seulement si $\alpha \in \mathbb{N}$, puis donner toutes les valeurs de α pour que f soit CM sur I.
3. Montrer, à l'aide de l'exercice 56 que la tangente est AM sur $\left[0\,; \dfrac{\pi}{2} \right[$.
4. Montrer que l'ensemble des fonctions AM sur I est stable par somme.
5. Montrer que le produit de deux fonctions AM est AM. Et le produit de deux fonctions CM ? On se donne dans la suite de cet exercice une fonction AM sur I, notée f.
6. (a) Montrer que f est positive et monotone. Et si f est CM ?
   (b) Donner une fonction $\mathscr{C}^\infty$, positive, croissante, mais non AM.
   (c) On suppose dans cette question uniquement que $I = \left]\, a\,; b \,\right[$. Montrer que f admet une limite finie en a. En déduire que f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\, a\,; b \,\right[$. Le résultat est-il aussi valable en b ?
7. On suppose que I est symétrique par rapport à 0 et on définit sur I la fonction g par $g(x) = f(-x)$.
   (a) Montrer que f est AM si et seulement si g est CM.
   (b) En déduire toutes les fonctions paires AM sur I.
8. Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions AM. Montrer que $g \circ f$ est AM.

Exercice 58 : ✪✪

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\varphi(x)$ tel que $\displaystyle\int_x^{\varphi(x)} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$.
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 59 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la classe de la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} \left(1 - x^2\right)^n & \text{si } x \in [-1\,; 1] \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 60 : ✪✪✪ Trouver toutes les fonctions f dérivables n fois sur $\mathbb{R}$ telles que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$.

Exercice 61 - Pour les amateurs de calculs et de sommes : ✪✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$, et soit $g : x \mapsto f(1/x)$. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^n$ et que pour $x > 0, n \geq 1$:

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-p)}{x^{2n-p}} \binom{n}{p} f^{(n-p)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

14.5 Fonctions à valeurs complexes.

Exercice 62 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la dérivée n-ième de $\sin^5$.

Exercice 63 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Redémontrer le fait que la dérivée n-ième du sinus est $x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

Exercice 64 : ✪ Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable. Montrer que $\overline{f}$ est dérivable sur I, et que $|f|$ est dérivable en tout point en lequel f ne s'annule pas.

Exercice 65 : ✪✪✪

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\{e^{if(n)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans le cercle unité.
2. Montrer que $\{\sin(\sqrt{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\cos(\ln(n)) \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ sont denses dans $[-1\,;1]$.

14.6 Recollement de solutions d'équations différentielles

Exercice 66 : ✪✪ Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = |x| + 1$ (on étudiera l'existence éventuelle de solutions sur $\mathbb{R}$ tout entier).

Chapitre 15

Fonctions convexes

« - J'ai des faims d'ogre !
- Eh bien !... Tu croques le marmot !
- Toujours le mot, la pointe !
- Oui, la pointe, le mot !
Et je voudrais mourir, un soir sous un ciel rose,
En faisant un bon mot, pour une belle cause !
Oh, frappé par la seule arme noble qui soit,
Et par un ennemi qu'on sait digne de soi,
Sur un gazon de gloire et loin d'un lit de fièvres,
Tomber la pointe au cœur en même temps qu'aux lèvres ! »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac.

Si rien n'est précisé, comme en cours, I est un intervalle non vide, non réduit à un point.

Vrai ou Faux :

1. Si f est convexe sur $\mathbb{R}$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que f soit décroissante sur $]-\infty\,;x_0]$ et croissante sur $[x_0\,;+\infty[$.
2. Une fonction convexe est dérivable deux fois.
3. Une fonction convexe est continue.
4. Une fonction convexe est dérivable.
5. Une fonction convexe n'est pas concave.
6. La fonction $f : x \longmapsto x^5$ a un point d'inflexion en 0.
7. La fonction $f : x \longmapsto x^4$ a un point d'inflexion en 0.
8. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est convexe.
9. Si f est convexe, alors $x \mapsto f(x) - 2024x$ est convexe.
10. Une fonction dérivable deux fois est convexe ou concave.
11. Le produit d'une fonction convexe et d'une fonction concave est concave.
12. Le produit de deux fonctions convexes positives est convexe.
13. Si f est convexe, alors f ne peut pas tendre vers $-\infty$ en $+\infty$.

Exercice 1 : ✪ Donner les éventuels points d'inflexion de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exercice 2 - La convexité ne passe pas à l'union : ✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ mais non convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer cependant que si f est dérivable, convexe sur $\mathbb{R}^-$ et sur $\mathbb{R}^+$ alors f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : ✪ Soit $f : [0\,;2\pi] \to \mathbb{R}$ convexe de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$$

Exercice 4 - Moyennes arithmétique, géométrique et harmonique, ou pourquoi vos professeurs sont vraiment très gentils : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer à l'aide de la concavité de la fonction ln que
$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}}$$
2. Montrer que si $x_1, \dots, x_n$ sont des nombres strictement positifs,
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$
3. Montrer que $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$

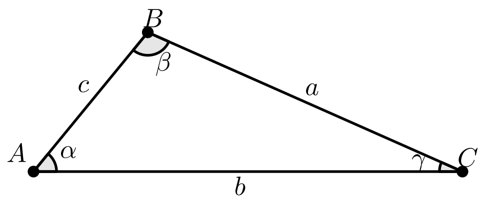
Exercice 5 - Fonctions $\mathbb{Q}$-convexes : ✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f est $\mathbb{Q}$-convexe, c'est-à-dire :
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,] \cap \mathbb{Q}, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
Montrer que f est convexe.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $(a,b,x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$. Montrer que :
$$x \ln\left(\frac{x}{a}\right) + y \ln\left(\frac{y}{b}\right) \geq (x+y) \ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right)$$

Exercice 7 - Une définition équivalente de la convexité : ✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que l'épigraphe de f est l'ensemble $\text{épi}(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \,|\, y \geq f(x)\}$. Montrer que f est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe.

Remarque : La définition d'une partie du plan convexe se généralise facilement (à $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ et plus généralement, cf. chapitre 28, à tout espace vectoriel) : une partie est convexe si, pour tous points dans cette partie, le segment joignant ces deux points est inclus dans cette partie. Sur $\mathbb{R}$, cela devient : une partie non vide est convexe si et seulement si, pour tous a, b appartenant à I, $[\,a\,;b\,] \subset I$. On a montré dans le chapitre 12 que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles. C'est d'ailleurs comme cela qu'on les définit parfois.

Exercice 8 - Inégalité de Weitzenböck : ✪✪ On se place dans tout l'exercice dans un triangle ABC non aplati quelconque. Pour alléger les notations, on notera $a = BC, b = AC, \alpha = \widehat{CAB} \dots$ comme sur le dessin ci-dessous :



Enfin, on note S l'aire du triangle ABC.

1. (a) Montrer que $S = \dfrac{1}{2} \times bc \times \sin(\alpha)$. Par symétrie, on a également les égalités suivantes (il n'est pas demandé de les montrer) : $S = \dfrac{1}{2} \times ab \times \sin(\gamma)$ et $S = \dfrac{1}{2} \times ac \times \sin(\beta)$.
   (b) En déduire une expression de $ab + ac + bc$ en fonction de $S, \sin(\alpha), \sin(\beta)$ et $\sin(\gamma)$.
2. (a) Étudier la convexité de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sin(x)}$ sur $]\,0\,;\pi\,[$. Donner également son tableau de variations et l'allure de son graphe.
   (b) En déduire que $\dfrac{ab+ac+bc}{3} \geq \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.
3. Montrer l'inégalité de Weitzenböck : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$.

Exercice 9 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que
$$g : x \mapsto \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, \mathrm{d}t$$
est convexe.

Exercice 10 - Sup de fonctions convexes : ✪✪ Soit A un ensemble non vide. Soit $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ une famille de fonctions convexes indexée par A. On suppose que, pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f_\alpha(x) \,|\, \alpha \in A\}$ est majoré. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sup\{f_\alpha(x) \,|\, \alpha \in A\}$ est convexe. Illustrer par un dessin dans le cas où les f_α sont affines.

Exercice 11 : ✪✪

1. Montrer que le sinus est concave sur $[\,0\,;\pi\,]$.
2. Calculer $\sup(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ où α, β, γ sont trois angles d'un triangle.
3. Soit $n \geq 3$. Quel est le périmètre maximal d'un polygone convexe à n côtés inclus dans le cercle unité ?

Exercice 12 : ✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tous réels $a_1, \dots, a_n$ positifs

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$$

En déduire que pour tout $x > 1$ on a

$$\sqrt{x^{2n}-1} \geq \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \times \frac{x^n - 1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 13 - Fonctions log-convexes : ✪✪

1. Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. On suppose que g est croissante et que $\varphi(I)$ est inclus dans J. Montrer que $g \circ \varphi$ est convexe. Donner un contre-exemple si g n'est pas croissante.

   Dans la suite de l'exercice, on dira qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}^{+*}$ est *logarithmiquement convexe* (en abrégé : *log-convexe*) si $\ln \circ f$ est convexe.

2. À l'aide de la question précédente, montrer qu'une fonction log-convexe est convexe. La réciproque est-elle vraie ?
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que si f est log-convexe alors f^α est convexe pour tout réel $\alpha > 0$. La réciproque est vraie : cf. exercice 43 du chapitre 24.
4. Montrer qu'un produit de fonctions log-convexes est encore log-convexe.
5. On s'intéresse à présent à la somme de fonctions log-convexes. On se donne dans la suite deux fonctions f et $g : I \to \mathbb{R}^{+*}$ dérivables deux fois.
   (a) Montrer que f est log-convexe si et seulement si f'/f est croissante.
   (b) Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f \times f'' - f'^2$ est positive.
   (c) On suppose que A et A' sont deux réels strictement positifs. Montrer que si $AC - B^2 > 0$ et $A'C' - B'^2 > 0$ alors

   $$(A + A')(C + C') - (B + B')^2 > 0$$

   Étendre ce résultat au cas où les inégalités sont larges (on pourra introduire des trinômes du second degré dont ces quantités sont les opposés des discriminants).
   (d) En déduire que si f et g sont log-convexes, alors $f + g$ est encore log-convexe.

Remarque : Ce résultat est toujours vrai, même si les deux fonctions ne sont pas dérivables deux fois, mais c'est un peu plus difficile à montrer, et la démonstration proposée ici est particulièrement élégante.

Exercice 14 - Réciproque d'une fonction convexe : ✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe injective. Étudier la convexité de f^{-1}.

Exercice 15 : ✪✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$. Montrer que si f est concave, alors f admet un unique point fixe.

Exercice 16 - Fonctions quasi-concaves : ✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est quasi-concave si

$$\forall (x,y) \in I^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,]\,, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(f(x), f(y))$$

1. Montrer qu'une fonction concave sur I est quasi-concave sur I.
2. Montrer qu'une fonction monotone sur I est quasi-concave. La réciproque de la question précédente est-elle vraie ?
3. On suppose que $I = [\,a\,;b\,]$ avec $a < b$. Soient $c \in \,]\,a\,;b\,[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue, croissante sur $[\,a\,;c\,]$ et décroissante sur $[\,b\,;c\,]$. Montrer que f est quasi-concave.

Exercice 17 - Inégalités de Young (stage two), de Hölder et de Minkowski : ✪✪

1. Montrer à l'aide de la concavité de la fonction ln que pour tous $\alpha \in [\,0\,;1\,]$ et $x, y \geq 0$, on a :

$$x^\alpha y^{1-\alpha} \leq \alpha x + (1-\alpha) y$$

On fera bien attention à ne jamais évaluer le ln en une quantité nulle. Cette inégalité est appelée *inégalité de Young* (cf. exercice 33 du chapitre 10). On se donne dans la suite de cet exercice deux réels p, q strictement supérieurs à 1 tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f et g continues sur I. On note alors

$$||f||_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \,\mathrm{d}t \right)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad ||g||_q = \left(\int_a^b |g(t)|^q \,\mathrm{d}t \right)^{1/q}$$

2. Le but de cette question est de montrer *l'inégalité de Hölder* :

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \,\mathrm{d}t \leq ||f||_p ||g||_q$$

   (a) Montrer que $||f||_p \geq 0$ et $||g||_q \geq 0$. Démontrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $||f||_p = 0$ (respectivement $||g||_q = 0$). On admet (nous verrons cela dans le chapitre 22) que f (respectivement g) est alors nulle sur $[\,a\,;b\,]$. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

   (b) En appliquant l'inégalité de Young avec des valeurs de x, y et α que l'on explicitera, montrer que pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$,

$$\frac{|f(t)g(t)|}{||f||_p ||g||_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(t)|^p}{||f||_p{}^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(t)|^q}{||g||_q{}^q}$$

   (c) En déduire l'inégalité de Hölder.

3. On suppose maintenant que p est un réel supérieur ou égal à 1. On cherche à présent à montrer *l'inégalité de Minkowski* (appelée aussi inégalité triangulaire pour la norme $||.||_p$) :

$$||f+g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$$

où $||f+g||_p$ et $||g||_p$ sont définies de la même façon que $||f||_p$ (dont la définition est étendue au cas $p = 1$).

   (a) Montrer l'inégalité de Minkowski dans le cas où $p = 1$. On suppose à présent que $p > 1$.

   (b) Montrer que $|f+g|^p \leq |f| \times |f+g|^{p-1} + |g| \times |f+g|^{p-1}$.

   (c) À l'aide de l'inégalité de Hölder, prouver l'inégalité de Minkowski.

Exercice 18 : ✪✪ Soient $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in [\,0\,;\pi\,]$ de somme π. Montrer que

$$\sin(\theta_1) \times \sin(\theta_2) \times \sin(\theta_3) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

En déduire $\sup(AB \times AC \times BC)$ lorsque A, B, C sont trois points du cercle trigonométrique.

Exercice 19 - Extrema des fonctions convexes : ✪✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Les questions sont indépendantes.

1. On suppose que f admet un minimum local en x_0. Montrer que c'est en fait un minimum global.
2. On suppose que f est dérivable. Soit $x_0 \in I$. Montrer que f admet un minimum global en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
3. Montrer que si f admet un maximum global, alors elle est constante.
4. On note $m(f)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points en lesquels f admet un minimum global.

   (a) Montrer que $m(f)$ est un intervalle (éventuellement vide).

   (b) Montrer que si $m(f)$ est non vide et majoré (respectivement minoré) alors il contient sa borne supérieure (respectivement supérieure).

   (c) Montrer que $m(f)$ peut être vide.

   (d) Dans le cas où $I = \mathbb{R}$, montrer avec un exemple graphique que $m(f)$ peut être n'importe quel intervalle de la forme $[\,a\,;b\,]$, $[\,a\,;+\infty\,[$ ou $]\,-\infty\,;a\,]$.

Exercice 20 - Fonctions convexes majorées : ✪✪

1. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ convexe majorée. Montrer que f est constante.
2. Donner une fonction convexe non constante bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer cependant qu'une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

Exercice 21 - Fonctions mid-convexes : ✪✪✪ On suppose que I est un intervalle ouvert. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Montrer que f est convexe.

Exercice 22 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$.
2. Montrer que, si $L \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x) - Lx$ admet une limite $L' \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ en $+\infty$.
3. Montrer avec des exemples explicites qu'on peut avoir $L = +\infty$ et $L' = -\infty$.

Exercice 23 - Suites convexes : ✪✪✪ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convexe si pour tout $n \geq 1$ on a $2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$.

1. Interpréter géométriquement le fait qu'une suite soit convexe.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que la suite de terme général $f(n)$ est convexe.
3. Dans chacun des cas suivants, dire si la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est convexe ou non (on le démontrera à partir de la définition d'une suite convexe, on n'utilisera pas la question précédente) :

   (a) $u_n = n^2$ (b) $u_n = 2^n$ (c) $u_n = \sqrt{n}$ (d) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

   Illustrer par un dessin.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que (u_n) est convexe si et seulement si (v_n) est croissante.
5. On suppose dans cette question que (u_n) est une suite convexe quelconque bornée. Montrer que la suite (v_n) définie à la question précédente converge vers 0. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente.
6. On se donne cette fois $\alpha \geq 2$ et on suppose dans cette question uniquement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $\lfloor n^\alpha \rfloor$. On définit enfin sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ la fonction g par $g(x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha$.

   (a) En dérivant deux fois g, montrer que pour tout $x \geq 0, g'(x) \geq 2$, et en déduire que $g(n) - g(n-1) \geq 2$ pour tout $n \geq 1$.

   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convexe.

Exercice 24 - Théorème de Bohr [1]-Mollerup (1922) : ✪✪✪ La fonction Γ est une fonction définie à partir d'une intégrale que vous verrez sans doute l'année prochaine. Cette fonction va de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même et vérifie les trois conditions suivantes :

- $\Gamma(1) = 1$.
- Γ est log-convexe (cf. exercice 13).
- $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Le but de cet exercice est de montrer que Γ est l'unique fonction qui vérifie ces conditions. Soit $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ qui vérifie ces trois conditions. Le but de cet exercice est donc de prouver que $F = \Gamma$. Soit $x \in]\,0\,;1\,]$ et soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer à l'aide du théorème des trois pentes que

$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq \ln F(n+1) - \ln F(n).$$

2. Calculer $F(n)$ puis encadrer $F(n+x)$ à l'aide de $(n-1)^x(n-1)!$ et $n^x(n-1)!$.
3. Exprimer, pour $p \geq 1$, $F(x+p)$ en fonction de $F(x), x$ et p.

1. Du nom du mathématicien danois Harald Bohr, le frère du physicien Niels Bohr. Il a participé aux Jeux Olympiques de Londres en 1908 et a infligé à l'équipe de France de football avec le Danemark la plus lourde défaite de son histoire : 17-1 !

4. En déduire que

$$\frac{n}{x+n}F(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq F(x)$$

5. En déduire que $F(x) = \Gamma(x)$.
6. Conclure que $F = \Gamma$.

Exercice 25 : ✪✪✪ Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \exists \lambda \in \,]\,0\,;1\,[\,, f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

1. Soit $(a,b) \in I^2$ tel que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que f est négative sur $[\,a\,;b\,]$.
2. Montrer que f est convexe.
3. Utiliser ce résultat pour refaire l'exercice 21.

Exercice 26 : ✪✪✪ Prouver la convexité de la fonction $x \mapsto \ln(1+e^x)$. Montrer que pour tous $n \geq 1$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{1/n}$$

En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ réels positifs on a

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n}$$

Exercice 27 : ✪✪✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe dérivable.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Que représente géométriquement le nombre $f(a) - af'(a)$?
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto f(x) - xf'(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.