Programme de colle - Semaine n°27

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 27 - Variables aléatoires sur un univers fini

- cf. semaine 23.

Chapitre 28 - Espaces vectoriels

- cf. semaines 24 et 25.

Chapitre 29 - Applications linéaires

- cf. semaines 25 et 26.

Chapitre 30 - Espaces vectoriels de dimension finie

- cf. semaine 26.
- Exemple d'application du théorème du rang : noyau et image de $P \mapsto P(X) - P(X-1)$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$.
- On ne change pas le rang en composant par un isomorphisme. Lemme : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, noyau et image de $v_{|\mathrm{Im}(u)}$. Conséquence : $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$. Exemple : si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2\dim(\ker(u))$. Plus généralement, s'intéresser à une restriction peut être intéressant quand on manie des composées.
- AL entre deux espaces de même dimension finie. Importance des hypothèses. Application aux polynômes d'interpolation de Lagrange (preuve non constructive). Liberté des polynômes de Lagrange. Se ramener à la dimension finie est classique quand on manie des polynômes, on peut aussi utiliser le fait qu'une application linéaire qui préserve le degré est une bijection. Exemple : bijectivité (deux méthodes) de

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - 2P' \end{cases}$$

- Retour aux équations différentielles : existence d'une solution particulière pour les équations du type $y'' + ay' + by = Q(x)e^{mx}$ (distribué en poly, non traité en classe).

Chapitres au programme

Chapitre 28 (exercices uniquement), chapitre 29 (cours, exercices sur tout le chapitre sauf les projecteurs et les symétries), chapitre 30 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Définition d'un projecteur, d'une symétrie, avec un joli dessin pour chaque (un seul dessin de projecteur et un seul dessin de symétrie, au choix de l'élève, en dimension 2 ou 3).

2. Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, de la dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (sans démonstration). Donner au moins 5 espaces de dimension infinie (sans démonstration).
3. Dimension de $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ (démonstration « avec les mains »).
4. Que peut-on dire du cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie ? Énoncé précis, sans démonstration.
5. Dimension d'un sous-espace vectoriel (énoncé précis, sans démonstration).
6. Formule de Graßmann (sans démonstration).
7. Théorème du rang (sans démonstration).
8. Image et noyau de

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P \longmapsto P(X) - P(X-1) \end{cases}$$

Groupes B - C :

1. Si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent alors $u^n = 0$ (démonstration).
2. Théorème du rang (démonstration).
3. Si E et F sont de dimension finie, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ (démonstration).
4. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts et si $b_1, \dots, b_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ (pas forcément distincts), il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que, pour tout i, $P(a_i) = b_i$ (démonstration).
5. L'application $P \mapsto P - 2P'$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (démonstration, méthode au choix de l'élève).

Groupe C :

1. Si $p \in \mathscr{L}(E)$ et vérifie $p^2 = p$ alors p est un projecteur (démonstration).
2. Dimension de $S_n(\mathbb{K})$ (démonstration propre).
3. Si E est de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E)$ alors $\dim(\ker(u)) \leq \dim(\ker(u^2)) \leq 2 \dim \ker(u)$.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin de la dimension finie.
- Début de la représentation matricielle des applications linéaires.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 28, 39, 40, 43, 44, 45, 47, 48, 49, 55, 57, 60, 63 du chapitre 30.

Cahier de calcul

Rien cette semaine !