Programme de colle - Semaine n°3

Chapitre 2 - Fonctions

- cf. semaines 1 et 2.

Chapitre 3 - Sommes et produits

- Notation Σ (note aux colleurs : les complexes n'ayant pas été vus, on ne somme que des réels, et toujours en nombre fini), sommes de référence : somme d'un terme constant, somme des k, k^2, k^3, somme géométrique (faire deux cas !), binôme de Newton, factorisation de $a^n - b^n$.
- Propriétés : inégalité triangulaire, sommes d'inégalités et cas d'égalité, linéarité de la somme, sommes télescopiques.
- Changement d'indice, regroupement par paquets : cas particulier fréquent termes pairs/termes impairs.
- Sommes doubles, principe de Fubini, cas particulier du produit de deux sommes simples, d'une somme simple au carré.
- Produits, propriétés, produits télescopiques, le ln transforme un produit en somme.
- Factorielle d'un entier naturel. Expression du produit des nombres pairs compris entre 1 et $2n$, du produit des nombres impairs compris entre 1 et $2n+1$.
- Coefficients binomiaux (les coefficients binomiaux sont définis à l'aide de la factorielle, l'interprétation combinatoire a été évoquée mais sera vue dans le chapitre 17), propriétés (symétrie, formule de Pascal), les coefficients binomiaux sont des entiers naturels (et sont non nuls si $p \in [\![0\,;\, n]\!]$). Démonstration de la formule du binôme de Newton.
- Activité de synthèse : écriture avec des $\sum$ et $\prod$ de la dérivée d'un produit de fonctions (dérivables...) $f_1 \times \cdots \times f_n$. Écriture simplifiée de P'/P si P est une fonction polynomiale scindée.

Chapitre 4 - Ensembles et applications

- Différents mode de définition d'un ensemble (extension, compréhension).
- Inclusion, raisonnement par double inclusion.
- Ensemble des parties. Méthode pour donner l'ensemble des parties d'un ensemble fini. En cours ont été traités les exemples $\mathscr{P}(\{0;1\})$, $\mathscr{P}(\{0\})$, $\mathscr{P}(\varnothing)$, $\mathscr{P}(\{\text{machin}\})$ et $\mathscr{P}(\{-1;0;1\})$. Le fait que l'ensemble des parties d'un ensemble de cardinal n est de cardinal 2^n a été dit oralement mais ne figure pas encore dans le cours.
- Généralités sur les applications : notation, applications égales (et négation), composée, fonction identité de E, fonction indicatrice d'un ensemble (deux ensembles sont égaux si et seulement si leurs fonctions indicatrices sont égales), restriction, prolongement.
- Notion de famille, produit cartésien (fini), quelques interprétations géométriques, graphe d'une fonction d'un ensemble E dans un ensemble F.
- Union et intersection de deux ensembles, propriétés : associativité, commutativité, distributivité, élément neutre etc. Intersection et union d'une famille quelconque.

Chapitres au programme

Chapitre 2 (cours et exercices sur tout le chapitre, y compris la partie entière), chapitre 3 (cours et exercices sur tout le chapitre, sauf le binôme de Newton et les coefficients binomiaux), chapitre 4 (cours uniquement).

Questions de cours

1. L'examinateur demande d'étudier la convexité d'une fonction ou de donner les points d'inflexion d'une fonction dans un cas explicite (uniquement pour une fonction dérivable deux fois).
2. Bilan sur les fonctions convexes ou concaves : donner toutes les CNS selon la régularité de f pour que f soit convexe ou concave, avec des jolis dessins (évidemment sans démonstration, tout est admis à ce stade de l'année).
3. Montrer que pour tout $x \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2} \right]$, $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$, et que pour tout $x \in [\,0\,;n\,]\,, e^{-x} \geq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$.

5. Définition des fonctions ch, sh, th et allure des graphes. L'examinateur peut demander de prouver une ou plusieurs propriétés au choix (monotonie, limite, parité, convexité, dérivée etc.). Tout n'a pas été traité en classe : question à préparer, donc.
6. Définition de x^α lorsque $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > 0$. Allure du graphe de $x \mapsto x^\alpha$ selon la valeur de α ($\alpha < 0$, $\alpha > 1$, $0 < \alpha < 1$).
7. Si $\alpha > 0$, $\dfrac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (démonstration).
8. Si $a > 1$, définition du logarithme en base a.
9. L'examinateur demande de donner la forme canonique d'un trinôme dans un cas explicite.
10. Si f vérifie $|f(x) - f(1/2)| \le |x - 1/2|$ pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$ alors f est bornée (démonstration).
11. Existence et unicité de la partie entière d'un réel x (énoncé précis, démonstration). Allure du graphe de la partie entière.
12. Si $n \ge 1$, nombre de chiffres de n en écriture décimale (démonstration).
13. Valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^n k, \sum_{k=1}^n k^2, \sum_{k=1}^n k^3$, de $\displaystyle\sum_{k=0}^n q^k$, binôme de Newton et factorisation de $a^n - b^n$ (tout ça sans démonstration).
14. L'examinateur donne une somme télescopique dans un cas explicite et demande sa valeur.
15. Calcul de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.
16. Prouver que $\displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} \in \mathbb{N}$.
17. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!], \dbinom{n}{p} \in \mathbb{N}^*$ (démonstration).
18. Formule du binôme de Newton (démonstration).
19. L'examinateur donne une somme explicite et demande de donner sa valeur à l'aide du binôme de Newton. Nous avons vu en classe les exemples $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k, \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k}(-1)^k$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^n \binom{n+1}{k} 2^{k+1} 3^{n-k}$.
20. Valeur de $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}$ (démonstration).
21. Produit des nombres impairs entre 1 et $2n+1$ (démonstration).
22. Définition de l'union et de l'intersection d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$. Écriture avec des quantificateurs de : « $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ » et « $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ ».

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des ensembles et des applications.
- Début de la trigonométrie.

Exercices à préparer

Exercices $30, 31, 32, 33, 34, 35, 38, 39, 41, 44, 46$ du chapitre 3.

Cahier de calcul

Chapitre 18 (sauf l'exercice 18.7 qui pourra être fait après le chapitre 9).