Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Algèbre - Chapitres 28 à 34.

Table des matières

Chapitre 28

Espaces vectoriels

« The original title was "A Rederivation of Maxwell's Equations Regarding Electromagnetism". I dumbed it down because some of the more religious people in town were starting to say I was a witch. »

The Big Bang Theory

On se donne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et on pourra au besoin identifier familles libres (respectivement génératrices) et parties libres (respectivement génératrices).

Vrai ou Faux ?

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Le complémentaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices non inversibles de taille n) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Si trois vecteurs forment une famille liée, alors deux d'entre eux (au moins) sont proportionnels.
5. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille libre et si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires tous non nuls, alors $(\lambda_i e_i)_{i \in I}$ est une famille libre.
6. Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice et si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires tous non nuls, alors $(\lambda_i e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice.
7. Si (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont deux familles libres, alors (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.
8. Si (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont deux familles génératrices, alors (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille génératrice.
9. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre alors, pour tout $x \in E$, $(e_1 + x, \dots, e_n + x)$ est une famille libre.
10. Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont des familles libres alors $(e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n)$ est une famille libre.
11. Tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i \in I}$ est combinaison linéaire de n de ces vecteurs.
12. La famille $(1, X+1, X^2+X+1)$ est libre.
13. La famille (X^2, X^2+X, X^2+X+1) est libre.
14. La famille $(X^2, X^2+X, X^2+X+1, X^2+2X+2)$ est libre
15. Une famille de vecteurs est soit libre soit génératrice.
16. La suite constante égale à 1 appartient à l'espace engendré par les suite $(\delta_{k,n})_n$ pour $k \in \mathbb{N}$.
17. Si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 + E_3 \subset E_2 + E_3$.
18. Si $E_1 + E_3 \subset E_2 + E_3$ alors $E_1 \subset E_2$.
19. Si $E_1 + E_3 = E_2 + E_3$ alors $E_1 = E_2$.
20. Si $E_1 + E_2 = E_1$ alors $E_1 = E_2$.
21. Si F_1 et F_2 sont deux supplémentaires de F_3 alors $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$.
22. Deux espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si ils sont disjoints.
23. Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si F est un sev de E alors $F = (E_1 \cap F) \oplus (E_2 \cap F)$.

28.1 Autour de la définition d'espace vectoriel

Exercice 1 : ✪✪

1. On définit une loi interne $+$ et une loi externe $.$ sur $E = \mathbb{R}^2$ par :
   - $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, x + y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda.x = (\lambda x_1, 0)$.

   Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?
2. On définit une loi interne $+$ et une loi externe $.$ sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :
   - $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, x + y = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \lambda.x = ({x_1}^\lambda, \lambda x_2)$.

   Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Correction :

1. La loi externe ne vérifie pas (C_3) puisque $1.(2,3) = (2,0) \neq (2,3)$: $(\mathbb{R}^2, +, .)$ n'est donc pas un espace vectoriel. Cependant, les autres propriétés sont vérifiées : $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien (c'est la structure de groupe produit héritée de la structure de groupe de $(\mathbb{R}, +)$) et $(C_1), (C_2)$ et (C_4) sont vérifiées. Encore une illustration du fait qu'on ne peut pas se contenter de trois des conditions parmi $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) et qu'il faut bien les quatre !
2. Montrons que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   - Montrons que $(E, +)$ est un groupe abélien.
     - ⋆ La loi $+$ est évidemment une loi interne (car un produit de réels strictement positifs est un réel strictement positif) commutative.
     - ⋆ Soient $x = (x_1, x_2), y = (x_1, x_2)$ et $z = (z_1, z_2)$ trois éléments de E. D'une part :

       $$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2) + (y_1 z_1, y_2 + z_2) \\ &= (x_1 y_1 z_1, x_2 + y_2 + z_2) \end{aligned}$$

       et d'autre part :

       $$\begin{aligned} (x + y) + z &= (x_1 y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) \\ &= (x_1 y_1 z_1, x_2 + y_2 + z_2) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

       donc la loi est bien associative.
     - ⋆ Il est immédiat que $(1, 0)$ est l'élément neutre de la loi $+$.
     - ⋆ Enfin, si $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ alors $x + (1/x_1, -x_2) = (1, 0)$ donc $(1/x_1, -x_2)$ est l'inverse de (x_1, x_2) pour la loi $+$: tout élément admet un symétrique, $(E, +)$ est bien un groupe abélien.

   Prouvons à présent que $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont vérifiées. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de E.
     - ⋆ $\mu.x = ({x_1}^\mu, \mu x_2)$ donc

       $$\begin{aligned} \lambda.(\mu.x) &= \left(({x_1}^\mu)^\lambda, \lambda(\mu x_2)\right) \\ &= \left({x_1}^{\lambda \times \mu}, (\lambda \times \mu) x_2\right) \\ &= (\lambda \times \mu).x \end{aligned}$$

       c'est-à-dire que (C_1) est vérifiée.
     - ⋆ $\mu.x = ({x_1}^\mu, \mu x_2)$ et $\lambda.x = ({x_1}^\lambda, \lambda x_2)$ donc

       $$\begin{aligned} \lambda.x + \mu.x &= ({x_1}^\lambda, \lambda x_2) + ({x_1}^\mu, \mu x_2) \\ &= \left({x_1}^\lambda \times {x_1}^\mu, \lambda x_2 + \mu x_2\right) \\ &= \left({x_1}^{\lambda + \mu}, (\lambda + \mu) x_2\right) \\ &= (\lambda + \mu).x \end{aligned}$$

       c'est-à-dire que (C_2) est vérifiée.

$\star$ C'est immédiat :

$$\begin{aligned} 1.x &= 1.(x_1, x_2) \\ &= ({x_1}^1, 1.x_1) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= x \end{aligned}$$

donc (C_3) est vérifiée.

$\star$ Enfin, $\lambda.x = ({x_1}^\lambda, \lambda x_2)$ et $\lambda.y = ({y_1}^\lambda, \lambda y_2)$ donc :

$$\begin{aligned} \lambda.x + \lambda.y &= ({x_1}^\lambda, \lambda x_2) + ({y_1}^\lambda, \lambda y_2) \\ &= \left({x_1}^\lambda \times {y_1}^\lambda, \lambda x_2 + \lambda y_2\right) \\ &= \left((x_1 y_1)^\lambda, \lambda(x_2 + y_2)\right) \\ &= \lambda.(x_1 y_1, x_2 + y_2) \\ &= \lambda.(x + y) \end{aligned}$$

donc (C_4) est vérifiée.

Exercice 2 - Complexifié d'un espace vectoriel réel : ✪✪ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib).(x, y) = (a.x - b.y, b.x + a.y)$$

Montrer que $E \times E$, muni de ces deux lois, est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Correction : On sait déjà que $(E^2, +)$ est un groupe abélien car $(E, +)$ en est un : $(E^2, +)$ est alors muni d'une structure de groupe produit (cf. chapitre 18).

Il ne reste plus qu'à prouver que $(C_1), (C_2), (C_3)$ et (C_4) sont vérifiées pour la nouvelle loi externe (il faut bien comprendre que, dans les coordonnées i.e. $a.x - b.y$ et $b.x + a.y$, le point est la loi externe de E donc vérifie les quatre conditions, et on s'en servira dans la suite, tandis qu'à l'extérieur, i.e. $(a + ib).(x, y)$, le point désigne la nouvelle loi externe sur E^2 dont on ne sait pas encore si elle vérifie ces quatre propriétés). Soient donc $\lambda = a + ib$ et $\mu = c + id$ deux complexes, et $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de E^2. Tout d'abord, $\lambda + \mu = (a + c) + i(b + d)$ et $\lambda \times \mu = (ac - bd) + i(ad + bc)$.

- On a $\mu.x = (c + id).(x_1, x_2) = (c.x_1 - d.x_2, d.x_1 + c.x_2)$ donc

$$\begin{aligned} \lambda.(\mu.x) &= (a + ib).(c.x_1 - d.x_2, d.x_1 + c.x_2) \\ &= (a(cx_1 - dx_2) - b(dx_1 + cx_2), b(cx_1 - dx_2) + a(dx_1 + cx_2)) \\ &= ((ac - bd)x_1 - (ad + bc)x_2, (ad + bc)x_1 + (ac - bd)x_2) \\ &= (\lambda \times \mu).x \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que (C_1) est vraie . On a utilisé sans scrupule les propriétés $(C_1), (C_2)$ et (C_4) sur E : par exemple, $a.(c.x_1 - d.x_2) = a.(c.x_1) - a.(d.x_2)$ d'après (C_4) puis, d'après (C_1), cette quantité vaut $(ac).x_1 - (ad)x_2$ et ensuite on peut « factoriser » par x_1 et par x_2 grâce à (C_2). On le fera aussi dans la suite sans le préciser.
- On a :

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu).x &= ((a + c) + i(b + d)).(x_1, x_2) \\ &= ((a + c)x_1 - (b + d)x_2, (b + d)x_1 + (a + c)x_2) \\ &= (ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2) + (cx_1 - dx_2, dx_1 + cx_2) \\ &= \lambda.x + \mu.x \end{aligned}$$

et donc (C_2) est vraie.

- C'est immédiat :

$$\begin{aligned} 1.x &= (1+i\times 0).(x_1,x_2) \\ &= (1.x_1 - 0.x_2, 0.x_1 + 1.x_2) \\ &= (x_1,x_2) \\ &= x \end{aligned}$$

donc (C_3) est vérifiée.

- Enfin :

$$\begin{aligned} \lambda.(x+y) &= (a+ib)(x_1+y_1, x_2+y_2) \\ &= (a(x_1+y_1) - b(x_2+y_2), b(x_1+y_1) + a(x_2+y_2)) \\ &= (ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2) + (ay_1 - by_2, by_1 + ay_2) \\ &= \lambda.x + \lambda.y \end{aligned}$$

et donc (C_4) est vérifiée.

28.2 Être ou ne pas être un espace vectoriel ?

Exercice 3 : ✪ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites qui divergent.
3. L'ensemble des suites positives.
4. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 + u_1 = 0$.
5. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 u_1 = 0$.
6. L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
7. L'ensemble des suites qui convergent vers 1.
8. L'ensemble des suites qui admettent 0 comme valeur d'adhérence.
9. L'ensemble des suites bornées.
10. L'ensemble des suites arithmétiques.
11. L'ensemble des suites géométriques.
12. L'ensemble des suites croissantes.
13. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
14. L'ensemble $\{(a(-1)^n + b\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.
15. ✪✪ $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum {u_n}^2 \text{ converge } \right\}$.
16. ✪✪ L'ensemble des suites monotones.
17. ✪✪ L'ensemble des suites périodiques.

Correction : Notons à chaque fois F l'ensemble en question.

1. - La suite nulle converge (vers 0) donc appartient à F donc F est non vide.
   - Soient (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Soient $L_1 = \lim u_n$ et $L_2 = \lim v_n$. Alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 + L_2$. En particulier, $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$ converge donc appartient à F : F est stable par somme.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda L_1$ donc $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$ converge donc appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2. La suite nulle n'appartient pas à F donc F n'est pas un espace vectoriel.
3. Si on note (u_n) la suite constante égale à 1, alors $(u_n)\in F$ mais $-(u_n)\notin F$ donc F n'est pas stable par multiplication par un scalaire, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (alors qu'il est stable par somme et contient la suite nulle). Attention, il faut des contre-exemples EXPLICITES.
4. - Si on note (u_n) la suite nulle alors $u_0 + u_1 = 0$ donc la suite nulle appartient à F : F est non vide.
   - Soient (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Alors $u_0 + u_1 = v_0 + v_1 = 0$ donc $(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) = 0$: la suite $(u_n) + (v_n)$ appartient à F donc F est stable par somme.
   - Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. $\lambda u_0 + \lambda u_1 = 0$ donc $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$ appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

5. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient la suite nulle et est stable par multiplication par un scalaire) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. En effet, si on note (u_n) la suite de terme général n et (v_n) la suite de terme général $1-n$ alors (u_n) et (v_n) appartiennent à F mais $(u_n) + (v_n)$ est la suite constante égale à 1 donc n'appartient pas à F.

6.
   - La suite nulle converge vers 0 donc appartient à F donc F est non vide.
   - Soient (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Alors $u_n+v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En particulier, $(u_n)+(v_n)=(u_n+v_n)$ converge vers 0 donc appartient à F : F est stable par somme.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda\times 0=0$ donc $\lambda(u_n)=(\lambda u_n)$ converge vers 0 donc appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

7. F ne contient pas la suite nulle donc n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
8. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient la suite nulle et qu'il est stable par multiplication par un scalaire). En effet, si on note (u_n) la suite dont les termes d'ordre pair valent 0 et ceux d'ordre impair valent 1, et (v_n) la suite dont les termes d'ordre impair valent 0 et ceux d'ordre pair valent 1, alors (u_n) et (v_n) appartiennent à F mais $(u_n)+(v_n)$ est la suite constante égale à 1 donc n'appartient pas à F.
9. On va montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en deux étapes au lieu de trois (on pourrait le faire à chaque fois, c'est tout à fait équivalent, cf cours).
   - La suite nulle est bornée donc appartient à F donc F est non vide.
   - Soient (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Alors (u_n) et (v_n) sont bornées, disons par M_1 et M_2 respectivement, c'est-à-dire que, pour tout n, $|u_n|\leq M_1$ et $|v_n|\leq M_2$ (pour ne pas s'embarrasser de signe pour les inégalités, on va utiliser le fait qu'une suite est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue). Soient λ et μ deux réels. Dès lors, pour tout n, d'après l'inégalité triangulaire :

   $$|\lambda u_n+\mu v_n|\leq |\lambda|\times|u_n|+|\mu|\times|v_n|\leq|\lambda|M_1+|\mu|M_2$$

   donc $\lambda(u_n)+\mu(v_n)$ est bornée : F est stable par combinaison linéaire, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

10. Fait en cours.
11. Montrons que F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient la suite nulle et qu'il est stable par multiplication par un scalaire). Soient (u_n) la suite constante égale à 1 (géométrique de raison 1) et (v_n) la suite de terme général 2^n (donc géométrique de raison 2). Montrons que $(u_n)+(v_n)$ n'est pas géométrique. Attention, il ne suffit pas de dire que 2^n+1 n'est pas de la forme $u_0\times q^n$ pour conclure ! Cela ne se voit pas toujours à l'oeil nu (cf. Vrai ou Faux du chapitre 12). Rappelons que si (u_n) est une suite géométrique à valeurs non nulles, alors (u_{n+1}/u_n) est constante. Ainsi, pour prouver que la suite $(u_n)+(v_n)=(u_n+v_n)$ n'est pas géométrique, il suffit de prouver que $((u_{n+1}+v_{n+1})/(u_n+v_n))$ n'est pas constante, ce qui est immédiat puisque

    $$\frac{u_1+v_1}{u_0+v_0}=\frac{3}{2}\qquad\text{et}\qquad\frac{u_2+v_2}{u_1+v_2}=\frac{5}{3}$$

    ce qui permet de conclure.
12. F n'est pas stable par multiplication par un scalaire donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: la suite (u_n) de terme général n est dans F mais $-(u_n)$ n'est pas dans F.
13.
    - Si on note (u_n) la suite nulle alors $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ donc la suite nulle appartient à F : F est non vide.
    - Soient (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Alors $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ et $v_{n+2}=v_{n+1}+v_n$. Soient également λ et μ deux réels. Dès lors, pour tout n :

    $$\begin{aligned}\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2} &= \lambda(u_{n+1}+u_n)+\mu(v_{n+1}+v_n)\\ &= (\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1})+(\lambda u_n+\mu v_n)\end{aligned}$$

    c'est-à-dire que $\lambda(u_n)+\mu(v_n)\in F$: F est stable par CL, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
    - Cet ensemble est égal à $\text{Vect}(((-1)^n),(\cos(n)))$ donc est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
    - La suite nulle est dans $\ell^2(\mathbb{N})$ donc $\ell^2(\mathbb{N})$ est non vide. On a prouvé dans l'exercice 32 du chapitre 25 que $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par somme. De plus, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, si $(u_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$ alors $\sum {u_n}^2$ converge donc $\sum\lambda^2{u_n}^2$ converge donc $\lambda(u_n)\in\ell^2(\mathbb{N})$: $\ell^2(\mathbb{N})$ est stable par multiplication par un scalaire, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
    - F n'est pas stable par somme : en effet, la suite (u_n) de terme général $2n$ est strictement croissante et la suite (v_n) de terme général $-n^2$ est strictement décroissante (on est sur $\mathbb{N}\subset\mathbb{R}_+$) mais la suite $(u_n)+(v_n)$ est la suite de terme général $2n-n^2$ qui n'est pas monotone. En effet, $u_0+v_0=0<1=u_1+v_1$ donc la suite $(u_n)+(v_n)$ n'est pas décroissante, et $u_1+v_1>u_2+v_2=0$ donc la suite $(u_n)+(v_n)$ n'est pas croissante.
    - Précisons qu'une suite (u_n) est périodique s'il existe $T\in\mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+T}=u_n$. T est alors appelée une période de (u_n) et, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, pT est aussi une période de (u_n). Précisons qu'une période est toujours un entier strictement positif (ce qui n'est pas le cas pour les fonctions et ce qui fait que les fonctions périodiques ne forment pas un espace vectoriel, cf. cours).
      — La suite nulle est 1-périodique donc appartient à F donc F est non vide.

— Soient λ et μ deux réels et (u_n) et (v_n) qui appartiennent à F. Alors (u_n) et (v_n) sont périodiques : soient T_1 et T_2 dans $\mathbb{N}^*$ des périodes de (u_n) et (v_n) respectivement. Le problème est que T_1 et T_2 n'ont aucune raison d'être égales, mais puisque tout multiple est aussi une période, il suffit de prendre un multiple commun. T_1T_2 (on pouvait aussi prendre $T_1 \vee T_2$) est une période commune de (u_n) et de (v_n), c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T_1T_2} = u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+T_1T_2} = v_n$$

Dès lors, pour tout n, $\lambda u_{n+T_1T_2} + \mu v_{n+T_1T_2} = \lambda u_n + \mu v_n$ donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ est périodique donc appartient à F : F est stable par combinaison linéaire, c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : ✪ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions dérivables en 2024.
2. L'ensemble des fonctions continues en 2024.
3. L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) + f(1) = f'(0)$.
4. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$.
5. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ mais pas $\mathscr{C}^2$.
6. L'ensemble des fonctions convexes.
7. L'ensemble des fonctions convexes ou concaves.
8. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, nulles en 1 et de dérivée nulle en π.
9. L'ensemble des fonctions non dérivables en 0.
10. L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$.
11. L'ensemble des fonctions f telles que $f(1) = 0$.
12. L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
13. L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
14. L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.
15. L'ensemble des fonctions nulles en 0 et en 1.
16. L'ensemble des fonctions nulles en 0 ou en 1.
17. L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en $+\infty$.
18. ✪✪ L'ensemble des fonctions lipschitziennes.
19. ✪✪ L'ensemble des fonctions uniformément continues.
20. L'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle.
21. L'ensemble des fonctions majorées.
22. L'ensemble des fonctions bornées.
23. L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + e^{-t}y = 0$.
24. L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + y = 1$.
25. L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1-x)$.
26. L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + f(-x)$.
27. ✪✪ L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie ou infinie en $+\infty$.
28. ✪✪ L'ensemble des fonctions qui sont différence de deux fonctions croissantes (ces fonctions sont dites à variations bornées).

Correction : Là aussi, notons à chaque fois l'ensemble F. Précisons qu'on demande de montrer que c'est un espace vectoriel et non pas un sous-espace vectoriel (même si, en pratique, cela revient au même) : la rédaction va donc être légèrement différente.

1. • La fonction nulle est dérivable en 2024 donc appartient à F donc F est non vide.
   • Soient f et g qui appartiennent à F. Alors f et g sont dérivables en 2024 (une somme de fonctions dérivables est dérivable) donc $f+g$ également donc appartient à F : F est stable par somme.
   • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. f est dérivable en 2024 donc λf également donc $\lambda f \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire.
   • F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

2. Idem que ci-dessus en remplaçant « dérivable » par « continue ».
3. • Si on note f la fonction nulle, alors f est $\mathscr{C}^1$ et $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$ donc $f(0) + f(1) = f'(0)$: la fonction nulle appartient à F donc F est non vide.
   • Soient f et g qui appartiennent à F. Alors f et g sont $\mathscr{C}^1$ donc $f+g$ est $\mathscr{C}^1$. De plus, $f(0)+f(1) = f'(0)$ et $g(0)+g(1) = g'(0)$ donc $(f+g)(0)+(f+g)(1) = (f+g)'(0)$ i.e. $f+g \in F$: F est stable par somme.
   • Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. f est $\mathscr{C}^1$ donc λf également, et $\lambda f(0)+\lambda f(1) = (\lambda f)'(0)$ donc $\lambda f \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire.
   • F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

4. • Si on note f la fonction nulle, alors f est $\mathscr{C}^1$ donc la fonction nulle appartient à F donc F est non vide.
   • Soient f et g qui appartiennent à F. Alors f et g sont $\mathscr{C}^1$ donc $f+g$ est $\mathscr{C}^1$ i.e. $f+g \in F$: F est stable par somme.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. f est $\mathscr{C}^1$ donc λf également donc $\lambda f \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire.
- F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

5. La fonction nulle est $\mathscr{C}^2$ donc n'appartient pas à F : F n'est pas un espace vectoriel.
6. Montrons que F n'est pas stable par multiplication par un scalaire donc n'est pas un espace vectoriel (alors qu'il est stable par somme et contient la fonction nulle). La fonction exp est convexe donc appartient à F mais $-\exp \notin F$ car n'est pas convexe (dérivable deux fois de dérivée seconde strictement négative) donc F n'est pas stable par multiplication par un scalaire.
7. Là, F contient la fonction nulle et est stable par multiplication par un scalaire mais n'est pas stable par somme. En effet, si on note $f : x \mapsto x^2 + \sin(x)$, alors f est convexe (dérivable deux fois de dérivée seconde positive) et $g : x \mapsto -x^2$, alors g est concave mais $f + g$ est la fonction sin qui n'est ni convexe ni concave. En d'autres termes, f et g appartiennent à F mais $f + g \notin F$.
8.
   - La fonction nulle appartient à F donc F est non vide.
   - Soient f et g qui appartiennent à F. Alors f et g sont dérivables donc $f+g$ est dérivable. De plus, $f(1) = g(1) = 0$ donc $(f + g)(1) = 0$ et $f'(\pi) = g'(\pi) = 0$ donc $(f + g)'(\pi) = f'(\pi) + g'(\pi) = 0$ i.e. $f + g \in F$: F est stable par somme.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. f est dérivable donc λf également et $\lambda f(1) = 0$ et $(\lambda f)'(\pi) = \lambda f'(\pi) = 0$ donc $\lambda f \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire.
   - F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

9. La fonction nulle n'appartient pas à F donc F n'est pas un espace vectoriel.
10. Idem.
11. On montre comme précédemment que F est un espace vectoriel.
12. F n'est pas stable par multiplication par un scalaire (alors qu'il contient la fonction nulle et est stable par somme) : en effet, si on note f la fonction constante égale à 1, alors $f \in F$ mais $\pi.f \notin F$. F n'est donc pas un espace vectoriel.
13. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient la fonction nulle et est stable par multiplication par un scalaire) : en effet, $f : x \mapsto x \in F$ et $g : x \mapsto 1 - x \in F$ mais $f + g$ est la fonction constante égale à 1 donc n'appartient pas à F : F n'est donc pas un espace vectoriel.
14. La fonction nulle n'appartient pas à F donc F n'est pas un espace vectoriel.
15. On montre comme précédemment que c'est un espace vectoriel.
16. On montre avec le même contre-exemple que pour le 13 que ce n'est pas un espace vectoriel.
17.
   - La suite fonction nulle admet une limite finie (nulle) en $+\infty$ donc appartient à F donc F est non vide.
   - Soient f et g qui appartiennent à F. Soient $L_1 = \lim f$ et $L_2 = \lim g$. Alors $(f + g)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2$. En particulier, $f + g$ a une limite finie en $+\infty$ donc appartient à F : F est stable par somme.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda L_1$ donc λf admet une limite finie en $+\infty$ donc appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire.
   - F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

18.
   - La suite fonction nulle est 1-lipschitzienne (plus généralement k-lipschitzienne pour tout $k \geq 0$) donc appartient à F donc F est non vide.
   - Soient f et g qui appartiennent à F. Soient k_1 et k_2 positifs tels que f et g soient respectivement k_1 et k_2-lipschitzienne. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \\
&\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \quad \text{(I.T.)} \\
&\leq k_1|x - y| + k_2|x - y| \\
&\leq (k_1 + k_2)|x - y|
\end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $f + g$ est $(k_1 + k_2)$-lipschitzienne donc appartient à F : F est stable par somme.
   - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tous x et y réels,

$$|\lambda f(x) - \lambda f(y)| = |\lambda| \times |f(x) - f(y)| \leq |\lambda| \times k_1|x - y|$$

   c'est-à-dire que λf est $|\lambda| \times k_1$-lipschitzienne donc λf admet une limite finie en $+\infty$ donc appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire.

- F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

19. - La fonction nulle est lipschitzienne donc uniformément continue (lipschitzienne implique UC, réciproque fausse, mais on aurait pu évidemment le prouver à la main) donc appartient à F : F est non vide.
    - Soient f et g dans F. Prouvons que $f+g$ est UC. Soit $\varepsilon > 0$. f et g étant UC :

    $$\exists \eta_1 > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists \eta_2 > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |x-y| \leq \eta_2 \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq \varepsilon$$

    Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|x-y| \leq \eta$. Une rapide inégalité triangulaire prouve que

    $$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq 2\varepsilon$$

    si bien que $f+g$ est UC (si on veut absolument un ε à la fin, il suffit de partir de $\varepsilon/2$ au départ, mais on sait que si on arrive à 2ε, le résultat est encore valide). En d'autres termes, $f+g \in F$ donc F est stable par somme.
    - Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $(x,y) \in I^2$ tel que $|x-y| \leq \eta_1$. Alors $|\lambda f(x) - \lambda f(y)| \leq |\lambda| \times \varepsilon$ donc λf est UC (idem, si on veut absolument arriver à ε, il suffit de partir de $\varepsilon/|\lambda|$ si $\lambda \neq 0$, et on peut supposer $\lambda \neq 0$ puisqu'on sait déjà que la fonction nulle est UC). En d'autres termes, $\lambda f \in F$: F est stable par multiplication par un scalaire.
    - F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.
20. - La fonction nulle est 1-périodique donc appartient à F donc F est non vide.
    - Soient λ et μ deux réels et f et g qui appartiennent à F. Alors f et g sont périodiques et admettent une période rationnelle : soient $T_1 = p_1/q_1$ et $T_2 = p_2/q_2$ dans $\mathbb{Q}^*$ des périodes de f et g respectivement. De même que pour les suites, il suffit de trouver un multiple commun (puisque tout multiple d'une période est aussi une période) : p_1p_2 est un multiple commun de T_1 et de T_2 donc est une période commune à f et g, c'est-à-dire :

    $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+p_1p_2) = f(x) \qquad \text{et} \qquad g(x+p_1p_2) = g(x)$$

    Dès lors, pour tout x, $\lambda f(x+p_1p_2) + \mu g(x+p_1p_2) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ donc $\lambda f + \mu g$ est périodique avec une période rationnelle donc appartient à F : F est stable par combinaison linéaire.
    - F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

21. F n'est pas stable par multiplication par un scalaire (alors qu'il contient la fonction nulle et est stable par somme) donc n'est pas un espace vectoriel. En effet, la fonction $f : x \mapsto -x^2$ est majorée (par 0) mais $-f$ ne l'est pas, c'est-à-dire que $f \in F$ mais $-f \notin F$.
22. On montre que c'est un espace vectoriel de même qu'on a montré que les suites bornées formaient un espace vectoriel.
23. On a $F = \left\{ t \mapsto \lambda e^{e^{-t}} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ donc $F = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{e^{-t}} \right)$ donc est un espace vectoriel.
24. F ne contient pas la fonction nulle donc n'est pas un espace vectoriel.
25. - La fonction nulle appartient à F donc F est non vide.
    - Soient λ et μ deux réels et f et g qui appartiennent à F. Alors, pour tout x, $f(x) = f(1-x)$ et $g(x) = g(1-x)$ donc

    $$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(1-x) &= \lambda f(1-x) + \mu g(1-x) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ &= (\lambda f + \mu f)(x) \end{aligned}$$

    donc $\lambda f + \mu g$ appartient à F : F est stable par combinaison linéaire.
    - F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

26. F ne contient pas la fonction nulle donc n'est pas un espace vectoriel.
27. Montrons que F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient la fonction nulle et est stable par multiplication par un scalaire). Soient $f : x \mapsto x + \sin(x)$ et $g : x \mapsto -x$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (théorème d'encadrement, minorer par $x-1$) et $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$ donc f et g appartiennent à F mais $f+g$ est la fonction sinus qui n'a pas de limite donc n'appartient pas à F : F n'est pas stable par somme donc n'est pas un espace vectoriel.
28. À ma connaissance, c'est le seul exemple où il est plus simple de le faire en trois étapes qu'en deux (somme et multiplication par un scalaire plutôt que combinaison linéaire).

- Si on note f la fonction nulle, alors $f = \exp - \exp$ donc f est différence de deux fonctions croissantes : $f \in F$, F est non vide.
- Soient f_1 et f_2 deux éléments de F : il existe donc g_1, g_2, h_1, h_2 croissantes telles que $f_1 = g_1 - h_1$ et $f_2 = g_2 - h_2$ donc $f_1 + f_2 = (g_1 + g_2) - (h_1 + h_2)$. Une somme de fonctions croissantes étant croissante, $g_1 + g_2$ et $h_1 + h_2$ sont croissantes donc $f_1 + f_2$ est différence de deux fonctions croissantes donc appartient à F : F est stable par somme.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f = \lambda g - \lambda h$. Si $\lambda \geq 0$ alors λg et λh sont croissantes. Si $\lambda < 0$, il suffit de voir que $\lambda f = (-\lambda h) - (-\lambda g)$: $-\lambda h$ et $-\lambda g$ sont donc croissantes. Dans tous les cas, λf est différence de deux fonctions croissantes donc appartient à F : F est stable par multiplication par un scalaire.
- F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ qui est un espace vectoriel de référence : en particulier, F est un espace vectoriel.

Exercice 5 : ✪ Déterminer parmi les parties suivantes lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

1. $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Z}^2$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$.
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 2y\}$.

Correction :

1. Géométriquement, c'est la réunion des deux axes. Non, ce n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par somme : $(1,0) \in F$ (on note comme précédemment tous les ensembles F), $(0,1)$ également mais leur somme $(1,1)$ n'est pas dans F. Il est cependant stable par multiplication par un scalaire.
2. Non car il n'est pas stable par multiplication par un scalaire (mais il est stable par somme). En effet, $(1,0) \in \mathbb{Z}^2$ mais $\pi.(1,0) \notin \mathbb{Z}^2$.
3. Géométriquement, c'est l'union des deux droites d'équation $y = \pm x$. Ce n'est pas un espace vectoriel car il n'est pas stable par somme : $(1,1) \in F$, $(1,-1) \in F$ mais leur somme $(2,0) \notin F$.
4. C'est un sev de $\mathbb{R}^2$ car ensemble des solutions du système homogène (à deux inconnues) $x - 2y = 0$.

Exercice 6 : ✪ Les sous-ensembles constitués des triplets (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Le cas échéant, en donner une base.

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
2. $x_3 = 0$
3. $x_3 = 1$
4. $|x_1| = |x_2| = |x_3|$
5. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$
6. $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
7. $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$.
8. ${x_1}^2 + x_2 + x_3 = 0$
9. $x_1 x_2 x_3 = 0$
10. $x_1 = x_2 = x_3$
11. $|x_1 + x_2| + x_3 = 0$
12. $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0$
13. $\sin(x_1) + e^{x_2} - {x_3}^3 = 0$
14. $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
15. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$
16. $\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{ou} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right.$

Correction : Notons à chaque fois l'ensemble F.

1. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus, $x = (x_1, x_2, x_3) \in F \iff x_1 = -x_2 - x_3$ si bien que
$$\begin{aligned} F &= \{(-x_2 - x_3, x_2, x_3) \,|\, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(-1,1,0) + x_3(-1,0,1) \,|\, (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((-1,1,0), (-1,0,1)) \end{aligned}$$
donc $(-1,1,0)$ et $(-1,0,1)$ forment une famille génératrice de F, et puisqu'ils sont non colinéaires, ils sont libres (attention, cf. cours, ça ne marche que pour deux vecteurs) donc forment une base de F.
2. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus, $x = (x_1, x_2, x_3) \in F \iff x_3 = 0$ si bien que
$$\begin{aligned} F &= \{(x_1, x_2, 0) \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_1(1,0,0) + x_2(0,1,0) \,|\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((1,0,0), (0,1,0)) \end{aligned}$$
et on conclut de même que $(1,0,0)$ et $(0,1,0)$ forment une base de F.

3. F ne contient pas 0 (le vecteur nul, le triplet nul $(0,0,0)$) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.
4. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. En effet, $x=(1,1,-1)$ et $y=(1,1,1)$ appartiennent à F mais $x+y=(2,2,0)\notin F$.
5. F n'est pas stable par multiplication par un scalaire (alors qu'il contient le vecteur nul et est stable par somme) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$: en effet, $x=(1,1,1)\in F$ mais $-x=(-1,-1,-1)\notin F$.
6. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus, $x=(x_1,x_2,x_3)\in F \iff x_3=-4x_1-2x_2$ si bien que

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1,x_2,-4x_1-2x_2)\,|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_1(1,0,-4)+x_2(0,1,-2)\,|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,-4),(0,1,-2)) \end{aligned}$$

et on conclut de même que $(1,0,-4)$ et $(0,1,-2)$ forment une base de F.
7. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. En effet, $x=(1,1,0)$ et $y=(0,2,2)$ appartiennent à F (précisions qu'un vecteur appartient à F si et seulement s'il a au moins deux coordonnées égales) mais $x+y=(1,3,2)\notin F$.
8. F n'est ni stable par somme, ni par multiplication par un scalaire (mais contient le vecteur nul) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas stable par somme car $x=(1,-1,0)$ et $y=(1,0,-1)$ appartiennent à F mais $x+y=(2,-1,-1)\notin F$, et il n'est pas stable par multiplication par un scalaire car $-x=(-1,1,0)\notin F$ (je précise qu'un seul des deux contre-exemples suffit pour prouver que ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$).
9. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. En effet, $x=(1,1,0)$ et $y=(0,0,1)$ appartiennent à F (précisions qu'un vecteur appartient à F si et seulement s'il a au moins une coordonnée nulle) mais $x+y=(1,1,1)\notin F$.
10. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène (le système formé des deux équations $x_1-x_2=0$ et $x_1-x_3=0$) donc est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus, $x=(x_1,x_2,x_3)\in F \iff x_2=x_1$ et $x_3=x_1$ si bien que

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1,x_1,x_1)\,|\,x_1\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,1,1)\,|\,x_1\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,1,1)) \end{aligned}$$

Dès lors, $(1,1,1)$ est une famille génératrice de F et c'est une famille libre car une famille à un élément est libre si et seulement si cet élément est non nul donc c'est une base de F.
11. F n'est ni stable par somme, ni par multiplication par un scalaire (mais contient le vecteur nul) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. Il n'est pas stable par somme car $x=(1,1,-2)$ et $y=(-1,0,-1)$ appartiennent à F mais $x+y=(0,1,-3)\notin F$, et il n'est pas stable par multiplication par un scalaire car $-x=(-1,-1,2)\notin F$ (là aussi, je précise qu'un seul des deux contre-exemples suffit pour prouver que ce n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$).
12. F n'est pas stable par somme (alors qu'il contient 0 et est stable par multiplication par un scalaire) donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$. En effet, $x=(1,0,1)$ et $y=(1,0,1)$ appartiennent à F mais $x+y=(1,1,1)\notin F$.
13. Celui-là... il ne vérifie rien donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$: il suffit de voir qu'il ne contient pas le vecteur nul puisque $\sin(0)+e^0-0^3=1$.
14. F ne contient pas le vecteur nul donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$.
15. F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc est un sev de $\mathbb{R}^3$. De plus :

$$\begin{aligned} x=(x_1,x_2,x_3)\in F &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & = & -x_3 \\ & & x_2 & = & 0 \end{array}\right. \end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned} F &= \{(x_1,0,-x_1)\,|\,x_1\in\mathbb{R}\} \\ &= \{x_1(1,0,-1)\,|\,x_1\in\mathbb{R}\} \\ &= \mathrm{Vect}((1,0,-1)) \end{aligned}$$

Dès lors, $(1, 0, -1)$ est une famille génératrice de F et c'est une famille libre car une famille à un élément est libre si et seulement si cet élément est non nul donc c'est une base de F.

16. F n'est pas stable par somme donc n'est pas un sev de $\mathbb{R}^3$: en effet, $x = (1, 1, 0) \in F$ car vérifie la première équation, $y = (1, -1, 0) \in F$ car vérifie la seconde équation, mais $x + y = (2, 0, 0) \notin F$ car ne vérifie aucune des deux équations.

Exercice 7 : ✪✪ Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que cette suite est une filtration, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n$ est inclus dans E_{n+1}. Montrer que pour tous $n \leq p, E_n$ est inclus dans E_p, puis montrer que $F = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

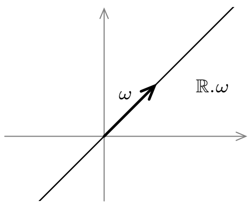
Correction : Pour tous $n \leq p$, $E_n \subset E_{n+1} \subset \cdots \subset E_p$ donc $E_n \subset E_p$ (pour le faire très proprement, on peut aussi fixer n et prouver par récurrence sur p que pour tout $p \geq n$, $E_n \subset E_p$ i.e. H_p : « $E_n \subset E_p$ » est vraie). Prouvons que F est un sous-espace vectoriel de E. Rappelons qu'un élément est dans une union si et seulement s'il appartient à (au moins) un des ensembles, i.e. :

$$x \in F \iff \exists n \in \mathbb{N}, x \in E_n$$

- E_0 est un sous-espace vectoriel de E donc $0 \in E_0$ donc $0 \in F$: F est non vide.
- Soient x et y dans F et λ, μ deux scalaires. Il existe n et p tels que $x \in E_n$ et $y \in E_p$. Sans perte de généralité, on peut supposer $n \leq p$ donc $E_n \subset E_p$ si bien que $x \in E_p$. E_p étant un espace vectoriel, il est stable par CL donc $\lambda x + \mu y \in E_p$ si bien que $\lambda x + \mu y \in F$: F est stable âr CL, c'est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{R}.\omega = \{x \times \omega \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathbb{R}.\omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. À quelle condition $\mathbb{R}.\omega$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? Illustrer par un dessin.

Correction : $\mathbb{R}.\omega$ est la droite (du plan complexe) passant par 0 et par ω :



On peut voir $\mathbb{R}.\omega$ comme $\mathrm{Vect}(\omega)$ dans $\mathbb{R}^2$, la droite vectorielle engendrée par ω (si ω est non nul !) qui est bien un sev de $\mathbb{R}^2$. Prouvons le proprement. Rappelons l'écriture avec des quantificateurs de $z \in \mathbb{R}.\omega$:

$$z \in \mathbb{R}.\omega \iff \exists x \in \mathbb{R}, z = x \times \omega$$

- $0 = 0 \times \omega$ donc $0 \in \mathbb{R}.\omega$: $\mathbb{R}.\omega$ est non vide.
- Soient z_1 et z_2 deux éléments de $\mathbb{R}.\omega$ et λ_1 et λ_2 deux réels. Il existe donc x_1 et x_2 réels tels que $z_1 = x_1\omega$ et $z_2 = x_2\omega$ donc

$$\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)\omega$$

et $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in \mathbb{R}$ donc $\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \in \mathbb{R}.\omega$: $\mathbb{R}.\omega$ est stable par CL donc est un sev de $\mathbb{C}$.

Cependant, si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, alors cela ne marche plus car si on multiplie par un complexe (non nul) $re^{i\theta}$, alors on fait une rotation d'angle θ donc « on sort de la droite »... si droite il y a, c'est-à-dire si $\omega \neq 0$! Prouvons donc que $\mathbb{R}.\omega$ est un sev de $\mathbb{C}$ si et seulement si $z \neq 0$.

Si $\omega = 0$ alors $\mathbb{R}.\omega = \{0\}$ qui est un sev de $\mathbb{C}$ (sous-espace nul). Supposons donc $\omega \neq 0$: si $i \times \omega \in \mathbb{R}.\omega$ alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $i.\omega = x.\omega$ et $\omega \neq 0$ donc $x = i \in \mathbb{R}$: absurde. $i\omega \notin \mathbb{R}.\omega$ donc $\mathbb{R}.\omega$ n'est pas stable par multiplication par un scalaire donc n'est pas un espace vectoriel. C'est intuitif : si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, alors (cf. chapitre 31) $\mathbb{C}$ est de dimension 1 donc ses seuls sev sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}$ lui-même.

Exercice 9 : ✪✪✪ Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sup \sqrt[n]{|u_n|} < +\infty$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Correction : Notons F cet ensemble.

- Si (u_n) est la suite nulle, alors $\sqrt[n]{|u_n|} = 0$ pour tout n donc $\sup \sqrt[n]{|u_n|} = 0 < +\infty$ c'est-à-dire que la suite nulle appartient à F donc F est non vide.

- Soient (u_n) et (v_n) deux suites de F. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $|u_n| \leq |v_n|$, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\sqrt[n]{|u_n+v_n|} \leq \sqrt[n]{|u_n|+|v_n|} \leq \sqrt[n]{2|v_n|} = \sqrt[n]{2} \times \sqrt[n]{|v_n|} \leq 2\sqrt[n]{|v_n|} \leq 2 \times \sup \sqrt[n]{|v_n|}$$

Si $|u_n| \geq |v_n|$, on prouve de même que $\sqrt[n]{|u_n+v_n|} \leq 2 \times \sup \sqrt[n]{|u_n|}$. Dans tous les cas :

$$\sqrt[n]{|u_n+v_n|} \leq 2 \times \left(\sup \sqrt[n]{|u_n|} + \sup \sqrt[n]{|v_n|}\right)$$

La suite de terme général $\sqrt[n]{|u_n+v_n|}$ est majorée par $2 \times \left(\sup \sqrt[n]{|u_n|} + \sup \sqrt[n]{|v_n|}\right)$ et la borne supérieure est le plus petit des majorants donc

$$\sup \sqrt[n]{|u_n+v_n|} \leq 2 \times \left(\sup \sqrt[n]{|u_n|} + \sup \sqrt[n]{|v_n|}\right) < +\infty$$

c'est-à-dire que $(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n) \in F$: F est stable par somme.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout n,

$$\sqrt[n]{|\lambda u_n|} = \sqrt[n]{|\lambda|} \times \sqrt[n]{|u_n|} \leq |\lambda| \sqrt[n]{|u_n|}$$

et on conclut comme précédemment que $\lambda.(u_n) \in F$ ce qui permet de conclure.

28.3 Premières manipulations d'espaces vectoriels

Exercice 10 : ✪✪ Si $z \in E$ et H est un sev de E, on note $z + H = \{z + h \,|\, h \in H\}$. Soient $(x_0, y_0) \in E^2$ et E_1 et E_2 deux sev de E. Montrer que $x_0 + E_1 = y_0 + E_2$ si et seulement si $x_0 - y_0 \in E_1$ et $E_1 = E_2$.

Correction : Supposons que $x_0 - y_0 \in E_1$ et $E_1 = E_2$. Montrons que $x_0 + E_1 = y_0 + E_2$ par double inclusion.

Soit $x \in x_0 + E_1$: il existe donc $h \in E_1$ tel que $x = x_0 + h$. Dès lors, $x = y_0 + (h + x_0 - y_0)$. Or, $x_0 - y_0 \in E_1$ donc, par somme (E_1 est un sev de E donc est stable par somme), $h + x_0 - y_0 \in E_1 = E_2$ donc $x = y_0 + (h + x_0 - y_0) \in y_0 + E_2$. Ainsi, $x_0 + E_1 \subset y_0 + E_2$ et l'inclusion réciproque est analogue, d'où l'égalité voulue.

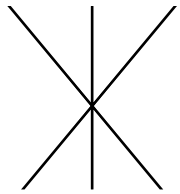
Réciproquement, supposons que $x_0 + E_1 = y_0 + E_2$. Puisque E_2 est un sev de E, il contient 0_E donc $y_0 = y_0 + 0_E \in y_0 + E_2 = x_0 + E_1$: il existe donc $h \in E_1$ tel que $y_0 = x_0 + h$ donc $x_0 - y_0 = -h \in E_1$ (E_1 stable par multiplication par un scalaire donc $-h \in E_1$). Par symétrie des rôles, $y_0 - x_0 \in E_2$. Soit à présent $y \in E_2$. Alors $x_0 + x \in x_0 + E_1 = y_0 + E_2$ donc il existe $y \in E_2$ tel que $x_0 + x = y_0 + y$ si bien que $x = y + (y_0 - x_0) \in E_2$ donc $E_1 \subset E_2$ et, par symétrie des rôles, $E_2 \subset E_1$, d'où l'égalité.

Exercice 11 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E, alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n F_i \neq E$.

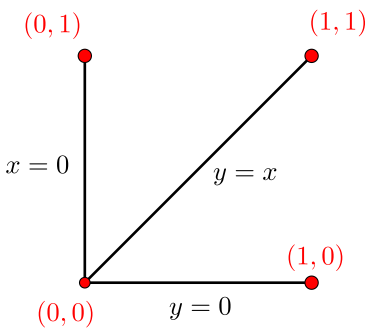
1. Faire un dessin dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$.
2. Montrer l'initialisation.
3. On suppose que le résultat est vrai au rang n, montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Soient donc $F_1, \dots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels stricts de E. Ainsi, par hypothèse de récurrence $\displaystyle\bigcup_{i=1}^n F_i \neq E$. Que se passe-t-il si F_{n+1} est inclus dans $F_1 \cup \cdots \cup F_n$? On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.
4. Soit $x \in F_{n+1} \backslash (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ et soit $y \in E \backslash F_{n+1}$. Justifier l'existence de x et de y.
5. Montrer que $\lambda x + y \notin F_{n+1}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
6. Montrer que, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
7. Conclure.
8. Adapter le résultat au cas d'un corps $\mathbb{K}$ quelconque (on séparera les cas $\mathbb{K}$ fini et $\mathbb{K}$ infini).

Correction :

1. Une union finie de sev stricts de $\mathbb{R}^2$ donc qui sont égaux à $\{0\}$ ou qui sont des droites vectorielles, ne peuvent pas engendrer tout le plan :



2. L'initialisation consiste à dire que si F_1 est un sev strict de E alors $F_1 \neq E$ ce qui est évident puisque F_1 est un sev STRICT de E.
3. Si $F_{n+1} \subset (F_1 \cup \cdots \cup F_n)$ alors
$$\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i = (F_1 \cup \cdots \cup F_n) \cup F_{n+1} = F_1 \cup \cdots \cup F_n$$
qui est différente de E par hypothèse de récurrence, donc le résultat est démontré.
4. x existe car on vient de supposer que F_{n+1} n'était pas inclus dans $F_1 \cup \cdots \cup F_n$, et y existe car $F_{n+1} \neq E$ par hypothèse.
5. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Supposons que $\lambda x + y \in F_{n+1}$. Alors :
$$y = (\lambda x + y) - \lambda x$$
Or, $\lambda x + y$ et y appartiennent à F_{n+1} qui est un sev de E donc stable par CL si bien que $y \in F_{n+1}$ ce qui est absurde.
6. Soit $i \in [\![1\,;\, n]\!]$. Supposons qu'il existe $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $\lambda_1 x + y$ et $\lambda_2 x + y \in F_i$. Alors $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ et donc :
$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left((\lambda_1 x + y) - (\lambda_2 x + y)\right) \in F_i$$
car F_i est un sev de E donc stable par CL et x est CL de deux éléments de F_i, ce qui est absurde car $x \notin F_i$.
7. D'après les questions précédente, pour tout i, il existe au plus un λ tel que $x + \lambda y \in F_i$: cela fait donc au plus n valeurs de λ pour que $x + \lambda y \in F_1 \cup \cdots \cup F_n$ (au plus car il y a au plus un λ pour chaque i, et même s'il y en a un pour chaque i, on peut avoir plusieurs fois le même) et il n'y a aucun λ tel que $x \in F_{n+1}$, si bien qu'il y a au plus n valeurs de λ telles que $x + \lambda y \in F_1 \cup \cdots \cup F_{n+1}$ mais $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc est infini donc il existe λ différent de ces (au plus) n valeurs et donc on a forcément $x + \lambda y \notin F_1 \cup \cdots \cup F_{n+1}$ et en particulier cette union n'est pas égale à E : le résultat est vrai au rang $n+1$, ce qui clôt la récurrence.
8. Le raisonnement précédent s'applique sans aucune modification au cas d'un corps $\mathbb{K}$ infini. Supposons à présent que $\mathbb{K}$ soit un corps fini de cardinal n. Le point clef des questions précédentes est de pouvoir choisir un λ pour lequel $x + \lambda y$ n'appartient à aucun F_i et pour cela il faut que le cardinal de $\mathbb{K}$ soit strictement supérieur au nombre d'espaces **sans compter le dernier** (celui qu'on appelait F_{n+1}). En d'autres termes : si $\text{card}(\mathbb{K}) = n$ alors $\mathbb{K}$ ne peut pas s'écrire comme union de n sous-espaces stricts (mais peut éventuellement s'écrire comme l'union de $n+1$ sous-espaces stricts). Par exemple, $E = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (qui est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel car de la forme $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$) peut s'écrire comme union de trois sous-espaces stricts : les droites d'équation $x = 0$, $y = 0$ et $y = x$ (qui sont bien des sev car solutions de systèmes linéaires homogènes). Cela se voit bien géométriquement (les droites sont en fait des segments car il n'y a pas d'autre point dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$, et en fait ce sont des faux segments puisqu'il n'y a aucun autre point sur les droites à part les points rouges, c'est pour mieux visualiser la chose) :



28.4 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 12 : ✪ Dans chacun des cas suivant, dire si les vecteurs u, v, w sont libres dans $\mathbb{R}^4$, donner une base de $\text{Vect}(u, v, w)$ puis caractériser cet espace à l'aide d'une ou de plusieurs équations.

1. $u = (1, 1, 0, -1), v = (2, 1, -1, 2), w = (1, -1, -2, 3)$.

2. $u = (1,0,1,1), v = (-1,-2,3,-1), w = (-5,-3,1,-5)$.

Correction :

1. Soient α, β, γ trois réels. On ne sait pas si la famille est libre donc on travaille par équivalences.

$$\begin{aligned}
\alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad & \iff \quad \alpha(1,1,0,-1) + \beta(2,1,-1,2) + \gamma(1,-1,-2,3) = (0,0,0,0) \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 0 \\ & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ -\alpha & + & 2\beta & - & 3\gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ & - & \beta & - & 2\gamma & = & 0 \\ & & 4\beta & - & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & 0 \\ & & \beta & & & = & -2\gamma \\ & & \beta & & & = & \gamma/2 \end{array} \right. \\
& \iff \quad \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la famille est libre. Puisque, par définition, elle est génératrice de $\mathrm{Vect}(u,v,w)$ (elle est génératrice de l'espace engendré), c'est une base de $\mathrm{Vect}(u,v,w)$. Faisons comme en classe pour caractériser cet espace à l'aide d'une ou de plusieurs équations. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t)\in \operatorname{Vect}(u,v,w) &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \alpha u+\beta v+\gamma w=(x,y,z,t)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \alpha(1,1,0,-1)+\beta(2,1,-1,2)+\gamma(1,-1,-2,3)=(x,y,z,t)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & x\\
\alpha & + & \beta & - & \gamma & = & y\\
 & - & \beta & - & 2\gamma & = & z\\
-\alpha & + & 2\beta & - & 3\gamma & = & t
\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & x\\
 & - & \beta & - & 2\gamma & = & y-x\\
 & - & \beta & - & 2\gamma & = & z\\
 & & 4\beta & - & 2\gamma & = & t+x
\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & + & 2\beta & + & \gamma & = & x\\
 & - & \beta & - & 2\gamma & = & y-x\\
 & & & & 0 & = & z-y+x\\
 & & & - & 10\gamma & = & t+4y-3x
\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcrcl}
\alpha & + & 2\beta & = & x-\gamma\\
 & & \beta & = & -y+x-2\gamma\\
 & & 0 & = & z-y+x\\
 & & \gamma & = & \dfrac{t+4y-3x}{-10}
\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl}
\alpha & = & x-\gamma-2\beta\\
\beta & = & -y+x-2\gamma\\
0 & = & z-y+x\\
\gamma & = & \dfrac{t+4y-3x}{-10}
\end{array}\right.\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \left\{\begin{array}{rcl}
\alpha & = & x-\left(\dfrac{t+4y-3x}{-10}\right)-2\left(-y+x-2\left(\dfrac{t+4y-3x}{-10}\right)\right)\\
\beta & = & -y+x-2\left(\dfrac{t+4y-3x}{-10}\right)\\
0 & = & z-y+x\\
\gamma & = & \dfrac{t+4y-3x}{-10}
\end{array}\right.\\
&\iff x-y+z=0
\end{aligned}
$$

puisque les autres conditions sont toujours vraies. Dès lors, $\operatorname{Vect}(u,v,w)$ est l'espace d'équation $x-y+z=0$ (il ne coûte pas très cher de vérifier que u,v,w vérifient tous les trois cette équation).

2. Soient α,β,γ trois réels.

$$
\begin{aligned}
\alpha u+\beta v+\gamma w=0 &\iff \alpha(1,0,1,1)+\beta(-1,-2,3,-1)+\gamma(-5,-3,1,-5)=(0,0,0,0)\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & - & \beta & - & 5\gamma & = & 0\\
 & - & 2\beta & - & 3\gamma & = & 0\\
\alpha & + & 3\beta & + & \gamma & = & 0\\
\alpha & - & \beta & - & 5\gamma & = & 0
\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
\alpha & - & \beta & - & 5\gamma & = & 0\\
 & - & 2\beta & - & 3\gamma & = & 0\\
 & & 4\beta & + & 6\gamma & = & 0
\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}
\alpha & = & \beta+5\gamma\\
\beta & = & -3\gamma/2
\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}
\alpha & = & 7\gamma/2\\
\beta & = & -3\gamma/2
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

En prenant $\gamma = 2$ (éviter les fractions si possibles), il vient : $7u - 3v + 2w = 0$ (on peut le vérifier pour se rassurer) donc la famille est liée. De plus, $w = -7/2.u + 3/2.v$ donc w est CL de u et v si bien que $\text{Vect}(u,v,w) = \text{Vect}(u,v)$ et u et v sont non proportionnels donc libres (attention, valable uniquement pour deux vecteurs) et forment une famille génératrice de $\text{Vect}(u,v,w)$ donc u et v forment une base de cet espace. Idem, soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in \text{Vect}(u,v,w) = \text{Vect}(u,v) \quad & \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha u + \beta v = (x,y,z,t) \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha(1,0,1,1) + \beta(-1,-2,3,-1) = (x,y,z,t) \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -2\beta = y \\ \alpha + 3\beta = z \\ \alpha - \beta = t \end{cases} \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -2\beta = y \\ 4\beta = z - x \\ 0 = t - x \end{cases} \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \beta = -y/2 \\ 4\beta = z - x \\ 0 = t - x \end{cases} \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ \beta = -y/2 \\ 0 = z - x + 2y \\ 0 = t - x \end{cases} \\
& \iff \quad \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} \alpha = x - y/2 \\ \beta = -y/2 \\ 0 = z - x + 2y \\ 0 = t - x \end{cases} \\
& \iff \quad z - x + 2y = 0 \qquad \text{et} \qquad t - x = 0
\end{aligned}$$

Exercice 13 : ✪ Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

1. $(x \mapsto x^2, \cos, \exp, \ln)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+*}}$.
2. $(\cos, \sin, x \mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. $(\cos^2, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $(\text{Id}_{\mathbb{R}}, \sin^2, \cos^2, x \mapsto \cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. $(\text{Id}_{\mathbb{R}}, \sin, \cos, x \mapsto \cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
6. $((1,0,0,2),(0,2,0,3),(1,0,1,0))$ dans $\mathbb{R}^4$.
7. $((3,2,1,4),(1,1,1,3),(4,2,0,3))$ dans $\mathbb{R}^4$.
8. $((1,5,6),(2,3,0),(3,8,6),(1,0,0))$ dans $\mathbb{R}^3$.
9. $((2,2,1),(1,1,2),(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
10. $((1,2,3),(2,3,4),(3,4,5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
11. $((1,2,0),(0,1,1),(2,0,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
12. $((1,0,1),(2i,2,0),(0,1,-i))$ dans $\mathbb{C}^3$.
13. $((2^n),((-1)^n),(1))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
14. $((2^n),((-1)^n),(-1)^{n+1})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
15. $\left((n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
16. $((1),(n),(2^n),(3^n))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
17. $(\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
18. $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
19. $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.
20. $\left(x \mapsto x^k e^{kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
21. $\left(x \mapsto e^{-kx^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
22. $\left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Correction :

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x > 0, \alpha x^2 + \beta\cos(x) + \gamma e^x + \delta\ln(x) = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. En divisant par $e^x \neq 0$:

$$\gamma = \frac{-\alpha x^2 - \beta\cos(x) - \delta\ln(x)}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

mais γ est constant donc $\gamma = 0$. De même, $\alpha = 0$ puis $\delta = 0$ si bien que pour tout $x > 0$, $\beta\cos(x) = 0$ et en prenant $x = \pi$, il vient : $-\beta = 0$ donc $\beta = 0$: la famille est libre. Elle n'est évidemment pas génératrice puisque les fonctions CL de ces fonctions sont $\mathscr{C}^\infty$ donc une fonction qui n'est pas $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (par exemple la fonction qui vaut 0 sur $]\,0\,;1\,[$ et 1 sur $[\,1\,;+\infty\,[$) n'est pas CL de ces fonctions.

2. Soient α, β, γ tels que pour tout x, $\alpha + \beta\cos(x) + \gamma\sin(x) = 0$. En évaluant en $x = 0$, il vient : $\alpha + \beta = 0$. En évaluant en $x = \pi/2$, il vient : $\alpha + \gamma = 0$ et en évaluant en $x = \pi$, il vient : $\alpha - \beta = 0$ donc $\alpha = \beta = -\beta$ donc $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ donc $\gamma = 0$, la famille est libre. Elle n'est pas génératrice pour la même raison.
3. La famille n'est pas libre car, pour tout x, $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ donc une fonction est CL des autres. Elle n'est toujours pas génératrice.
4. La famille n'est pas libre car, pour tout x, $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ donc une fonction est CL des autres (si on tient absolument à ajouter l'identité, on peut écrire $0 \times \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}(x)$). Elle n'est toujours pas génératrice.
5. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que pour tout x, $\alpha x + \beta\sin(x) + \gamma\cos(x) + \delta\cos(2x) = 0$. En évaluant en 0, il vient : $\gamma - \delta = 0$ donc $\gamma = \delta$. En évaluant en $x = \pi$, il vient : $\alpha\pi - \gamma + \delta = \alpha\pi = 0$ donc $\alpha = 0$. En évaluant en $x = \pi/2$, il vient $\beta - \delta = 0$ (rappelons que $\alpha = 0$) donc $\beta = \delta$. Enfin, en évaluant en $x = 2\pi$, il vient : $\gamma + \delta = 2\delta = 0$ donc $\delta = \beta = \gamma = 0$, la famille est libre et n'est toujours pas génératrice.
6. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\alpha(1,0,0,2) + \beta(0,2,0,3) + \gamma(1,0,1,0) = (0,0,0,0) \quad & \iff \quad (\alpha+\gamma, 2\beta, \gamma, 2\alpha+3\beta) = (0,0,0,0) \\
& \iff \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la famille est libre. On prouve comme dans l'exercice précédent que l'espace engendré est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ d'équation $4x + 3y - 4z - 2t = 0$. Par conséquent, le vecteur $(1,0,0,0)$ n'est pas dans l'espace engendré qui n'est donc par $\mathbb{R}^4$ tout entier : la famille n'est pas génératrice. Dans le chapitre 30, on pourra aller plus vite : on a une famille à trois éléments en dimension 4 donc elle n'est pas génératrice.
7. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\alpha(3,2,1,4) + \beta(1,1,1,3) + \gamma(4,2,0,3) = (0,0,0,0) \quad & \iff \begin{cases} 3\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ 4\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 4\alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + 4\gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -2\beta + 4\gamma = 0 \\ -\beta + 2\gamma = 0 \\ +\gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \quad \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

La famille est libre. Elle n'est pas non plus génératrice car on prouve comme dans l'exercice précédent que l'espace engendré est l'ensemble d'équation $x - 2y + z = 0$ donc le vecteur $(1,0,0,0)$ n'est pas dans l'espace engendré donc l'espace engendré n'est pas $\mathbb{R}^4$ donc la famille n'est pas génératrice.
8. Dans le chapitre 30, on dira que la famille est liée car on a 4 vecteurs en dimension 3. Pour l'instant, montrons-le à la main. Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$.

$$\alpha(1,5,6)+\beta(2,3,0)+\gamma(3,8,6)+\delta(1,0,0)=(0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma + \delta = 0 \\ 5\alpha + 3\beta + 8\gamma = 0 \\ 6\alpha + 6\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2\beta + 2\gamma + \delta = 0 \\ 3\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \delta = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = -\gamma \end{cases}$$

Dès lors, $\alpha = \beta = 1, \gamma = -1$ et $\delta = 0$ conviennent : il existe une combinaison linéaire non triviale qui annule les vecteurs, la famille est liée. Si on les note u, v, w, x, alors $u + v - w = 0$ donc $w = u + v$: w est CL de u et v donc $\mathrm{Vect}(u, v, w, x) = \mathrm{Vect}(u, v, x)$. De plus, si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a,b,c) \in \mathrm{Vect}(u,v,w,x) = \mathrm{Vect}(u,v,x) \iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha u + \beta v + \gamma x = (a,b,c)$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha(1,5,6)+\beta(2,3,0)+\gamma(1,0,0) = (a,b,c)$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = a \\ 5\alpha + 3\beta = b \\ 6\alpha = c \end{cases}$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2\beta + \gamma = a - c/6 \\ 3\beta = b - 5c/6 \\ \alpha = c/6 \end{cases}$$

$$\iff \exists (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} \gamma = a - c/6 - 2b/3 + 5c/9 \\ \beta = b/3 - 5c/18 \\ \alpha = c/6 \end{cases}$$

et ceci est toujours vrai donc (a, b, c) appartient toujours à $\mathrm{Vect}(u, v, w, x) = \mathrm{Vect}(u, v, x)$ c'est-à-dire que ces vecteurs engendrent $\mathbb{R}^3$ tout entier : la famille est génératrice.

9. On peut montrer à la main que la famille est liée mais, pour une fois, cela se voit à l'oeil nu : on voit facilement que $1.(2, 2, 1) + 1.(1, 1, 2) - 3(1, 1, 1) = 0$ donc la famille est liée. De plus, si on les note (u, v, w), alors $u = 3w - v$ donc $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(v, w)$ et on montre comme d'habitude que cet espace est l'ensemble d'équation $x - y = 0$: le vecteur $(1, 0, 0)$ n'appartient pas à cet ensemble, la famille n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ tout entier donc n'est pas génératrice.
10. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha(1,2,3)+\beta(2,3,4)+\gamma(3,4,5)=(0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 0 \\ 4\alpha + 4\beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 3\gamma = 0 \\ - \beta - 2\gamma = 0 \\ - 2\beta - 4\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -2\gamma \end{cases}$$

En prenant $\gamma = 1$, on obtient : $(1, 2, 3) - 2(2, 3, 4) + (3, 4, 5) = 0$: la famille est liée. De plus, si on les note u, v, w, alors puisque $w = 2v - u$ donc $\mathrm{Vect}(u, v, w) = \mathrm{Vect}(u, v)$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(a,b,c)\in \mathrm{Vect}(u,v,w)=\mathrm{Vect}(u,v) &\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha u+\beta v=(a,b,c)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \alpha(1,2,3)+\beta(2,3,4)=(a,b,c)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}\alpha & + & 2\beta & = & a\\ 2\alpha & + & 3\beta & = & b\\ 3\alpha & + & 4\beta & = & c\end{cases}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}\alpha & + & 2\beta & = & a\\ & & -\beta & = & b-2a\\ & - & 2\beta & = & c-3a\end{cases}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2, \begin{cases}\alpha & + & & = & a+2b-4a\\ & & -\beta & = & b-2a\\ & & 0 & = & c-3a-2b+4a\end{cases}\\
&\iff a-2b+c=0
\end{aligned}$$

si bien que $\mathrm{Vect}(u,v,w)$ est l'ensemble d'équation $a-2b+c=0$ et on en déduit comme précédemment que la famille n'est pas génératrice.

11. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,0,1)=(0,0,0) &\iff \begin{cases}\alpha & & & + & 2\gamma & = & 0\\ 2\alpha & + & \beta & & & = & 0\\ & & \beta & + & \gamma & = & 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha & & + & 2\gamma & = & 0\\ & \beta & - & 4\gamma & = & 0\\ & \beta & + & \gamma & = & 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}\alpha & & + & 2\gamma & = & 0\\ & \beta & - & 4\gamma & = & 0\\ & & & 5\gamma & = & 0\end{cases}\\
&\iff \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que la famille est libre. Dans le chapitre 30, nous dirons que la famille est libre et constituée de 3 vecteurs en dimension 3 donc est génératrice, mais pour l'instant, prouvons-le à la main. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(a,b,c)\in\mathrm{Vect}(u,v,w) &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \alpha u+\beta v+\gamma w=(a,b,c)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \alpha(1,2,0)+\beta(0,1,1)+\gamma(2,0,1)=(a,b,c)\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}\alpha & & & + & 2\gamma & = & a\\ 2\alpha & + & \beta & & & = & b\\ & & \beta & + & \gamma & = & c\end{cases}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}\alpha & & + & 2\gamma & = & a\\ & \beta & - & 4\gamma & = & b-2a\\ & \beta & + & \gamma & = & c\end{cases}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}\alpha & & + & 2\gamma & = & a\\ & \beta & - & 4\gamma & = & b-2a\\ & & & 5\gamma & = & c-b+2a\end{cases}\\
&\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases}\alpha & & & = & a-2(c-b+2a)/5\\ & \beta & & = & b-2a+4(c-b+2a)/5\\ & & \gamma & = & (c-b+2a)/5\end{cases}
\end{aligned}$$

et ceci est toujours vrai donc (a,b,c) appartient toujours à $\mathrm{Vect}(u,v,w,)$ c'est-à-dire que ces vecteurs engendrent $\mathbb{R}^3$ tout entier : la famille est génératrice.

12. C'est la même chose mais il faut faire attention de prendre les scalaires dans $\mathbb{C}$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{C}^3$.

$$\alpha(1,0,1)+\beta(2i,2,0)+\gamma(0,1,-i)=(0,0,0) \iff \begin{cases}\alpha + 2i\beta = 0\\ 2\beta + \gamma = 0\\ \alpha - i\gamma = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha + 2i\beta = 0\\ 2\beta + \gamma = 0\\ -2i\beta - i\gamma = 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\alpha = -2i\beta\\ \gamma = -2\beta\end{cases}$$

et donc, en prenant $\beta = 1$, il vient : $-2i(1,0,1)+(2i,2,0)-2(0,1,-i)=0$, la famille est liée. De plus, toujours en notant ces vecteurs u,v,w, alors $v = 2iu+2w$ donc $\text{Vect}(u,v,w)=\text{Vect}(u,w)$. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$.

$$(a,b,c)\in\text{Vect}(u,v,w)=\text{Vect}(u,w) \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \alpha u+\beta w=(a,b,c)$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \alpha(1,0,1)+\beta(0,1,-i)=(a,b,c)$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \begin{cases}\alpha = a\\ \beta = b\\ \alpha - i\beta = c\end{cases}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2, \begin{cases}\alpha = a\\ \beta = b\\ a - ib = c\end{cases}$$

$$\iff a-ib-c=0$$

si bien que $\text{Vect}(u,v,w)$ est l'ensemble d'équation $a-ib-c=0$ et on en déduit comme précédemment que la famille n'est pas génératrice.

13. On commence à s'intéresser à des familles de suites ou de fonctions : ne pas oublier le « pour tout n » ou « pour tout x » quand on manipule des réels ! Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que, pour tout n, $\alpha 2^n+\beta(-1)^n+\gamma=0$. Si $\alpha\neq 0$ alors $\alpha 2^n+\beta(-1)^n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ selon le signe de α (une suite qui tend vers $\pm\infty$ et deux suites bornées) ce qui est absurde puisque cette quantité est constante égale à 0, donc $\alpha=0$. Par conséquent, pour tout n, $\beta(-1)^n+\gamma=0$: en prenant $n=0$ puis $n=1$, il vient : $\beta+\gamma=\beta-\gamma=0$ si bien que $\alpha=\beta=\gamma=0$, la famille est libre.

    Montrons qu'elle n'est pas génératrice : ici, il n'est pas possible de donner une équation de l'espace engendré, on s'en tire en donnant une suite qui n'est pas dans l'espace engendré. Montrons que la suite de terme général n n'est pas dans l'espace engendré. Supposons qu'elle le soit : il existe α,β,γ tels que, pour tout n, $n=\alpha 2^n+\beta(-1)^n+1$. En divisant par 2^n :

$$\alpha = \frac{n-\beta(-1)^n+1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

    si bien que $\alpha=0$ car α est constant, donc, pour tout n, $n=\beta(-1)^n+\gamma$ donc la suite de terme général n est bornée, absurde. Par conséquent, elle n'est pas dans l'espace engendré donc l'espace engendré n'est pas $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tout entier : la famille n'est pas génératrice. Dans le chapitre 30, on pourra aller plus vite : $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ étant de dimension infinie, une famille finie ne peut pas l'engendrer donc n'est jamais génératrice (plus fort : on ne connaît pas de famille génératrice de cet espace, cf. chapitre 30).

14. La famille est liée puisque la troisième suite est l'opposée de la deuxième, et on prouve de même que la famille n'est pas génératrice.

15. Soient $k_1<\cdots<k_p$ des entiers naturels. Soient $\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_p}$ des réels tels que, pour tout n, $\lambda_{k_p}n^{k_p}+\cdots+\lambda_{k_1}n^{k_1}=0$. Dès lors, le polynôme $\lambda_{k_p}X^{k_p}+\cdots+\lambda_{k_1}X^{k_1}$ admet une infinité de racines (tous les entiers) donc est le polynôme nul donc ses coefficients sont nuls : $\lambda_{k_1}=\cdots=\lambda_{k_p}=0$, la famille $(n^{k_1})_{n\in\mathbb{N}},\dots,(n^{k_p})_{n\in\mathbb{N}}$ est libre. Finalement, toute sous-famille finie est libre : la famille est libre. Montrons cependant qu'elle n'est pas génératrice : une suite dans l'espace engendré est polynomiale donc a un terme général de la forme $a_kn^k+\cdots+a_0$. Dès lors, une telle suite tend vers $\pm\infty$ (selon le signe du terme dominant) ou est constante. On en déduit que la suite de terme général $(-1)^n$ n'est pas dans l'espace engendré donc la famille n'est pas génératrice.

16. Montrons que la famille est libre. Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tels que, pour tout n, $\alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n=0$. En divisant par 3^n :

$$\delta = \frac{-\alpha-\beta n-\gamma 2^n}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $\delta = 0$ puisque δ est constant. Dès lors, pour tout n, $\alpha+\beta n+\gamma 2^n = 0$ et on prouve de même que $\gamma = 0$ puis que $\beta = 0$ et enfin que $\alpha = 0$: la famile est libre.

Cependant, elle n'est toujours pas génératrice : on pourrait prouver qu'une suite CL de ces quatre suites tend vers $\pm\infty$ ou est constante (pour tout n, on aurait $u_n = \alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n$ qui tend vers $+\infty$ si $\delta > 0$, $-\infty$ si $\delta < 0$ et si $\delta = 0$, on s'intéresse à γ etc.) mais on va prouver directement que la suite de terme général 4^n n'est pas dans l'espace engendré car « croît trop vite ». Supposons qu'elle le soit : il existe $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ tel que pour tout n,

$$4^n = \alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n$$

En divisant par 4^n :

$$1 = \frac{\alpha+\beta n+\gamma 2^n+\delta 3^n}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est absurde.

17. Montrons que la famille est libre. Soit $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4$ tel que, pour tout x, $\alpha\cos(x)+\beta\sin(x)+\gamma\mathrm{ch}(x)+\delta\mathrm{sh}(x) = 0$. En évaluant en 0, il vient : $\alpha+\gamma = 0$. Les fonctions sont dérivables donc on peut dériver l'égalité précédente : pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$-\alpha\sin(x)+\beta\cos(x)+\gamma\mathrm{sh}(x)+\delta\mathrm{ch}(x) = 0$$

En évaluant encore en 0, on obtient : $\beta+\delta = 0$. Si on redérive et on réévalue en 0, on obtient $-\alpha+\gamma = 0$ donc $\alpha = \gamma$ mais on avait déjà $\alpha = -\gamma$ donc $\alpha = \gamma = 0$, et si on redérive et on réévalue en 0, on obtient $\beta = \delta = 0$, la famille est libre.

Elle n'est toujours pas génératrice car toute fonction CL de ces fonctions est $\mathscr{C}^\infty$ donc la valeur absolue n'est pas dans l'espace engendré. Ce sera la même chose pour tous les exemples suivants donc nous ne le préciserons plus.

18. Soient $n_1 < \cdots < n_p$ des entiers. Soient $\lambda_{n_1},\dots,\lambda_{n_p}$ des **complexes** tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lambda_{n_p}e^{in_pt}+\cdots+\lambda_{n_1}e^{in_1t} = 0$. En d'autres termes, pour tout $t\in\mathbb{R}$, e^{it} est racine du polynôme $\lambda_{n_p}X^{n_p}+\cdots+\lambda_{n_1}X^{n_1}$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathbb{U}$ est racine de ce polynôme : il admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul, donc $\lambda_{n_1} = \cdots = \lambda_{n_p}$. Ainsi, la famille $(t\mapsto e^{in_kt})_{k\in[\![1\,;\,p]\!]}$ est libre, toute sous-famille finie est libre donc on a bien une famille libre.

On a dit pourquoi la famille n'est pas génératrice dans l'exemple précédent : on peut aussi remarquer que toute fonction dans l'espace engendré est bornée.

19. Soient $k_1 < \cdots < k_n$ des entiers. Soient $\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_n}$ des réels tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

$$\frac{\lambda_{k_1}}{1+x^{k_1}}+\cdots+\frac{\lambda_{k_n}}{1+x^{k_n}} = 0$$

Montrons que les λ_{k_i} sont tous nuls. L'idée est que chaque terme est négligeable devant les suivants. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe i tel que $\lambda_{k_i}\neq 0$ et posons $i_0 = \min\{i\,|\,\lambda_{k_i}\neq 0\}$. Dès lors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\frac{\lambda_{k_{i_0}}}{1+x^{k_{i_0}}}+\cdots+\frac{\lambda_{k_n}}{1+x^{k_n}} = 0$$

En multipliant par $1+x^{i_0}$:

$$\lambda_{k_{i_0}} = -\frac{\lambda_{k_{i_0+1}}(1+x^{i_0})}{1+x^{k_{i_0+1}}}+\cdots+\frac{\lambda_{k_n}(1+x^{i_0})}{1+x^{k_n}}$$

et la quantité de droite tend vers 0 en $+\infty$ si bien que $\lambda_{k_{i_0}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ ce qui est absurde car c'est une constante non nulle.

20. Les trois exemples suivants sont des copier-coller du 18 : on conclut en disant qu'un polynôme a une infinité de racines. Le cas général est traité dans l'exercice 14.

Soient $k_1 < \cdots < k_n$ des entiers. Soient $\lambda_{k_1},\dots,\lambda_{k_n}$ des réels tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\lambda_{k_1}x^{k_1}e^{k_1x}+\cdots+\lambda_{k_n}x^{k_n}e^{k_nx} = 0$$

En d'autres termes, pour tout $x\in\mathbb{R}$, xe^x est racine du polynôme $\lambda_{k_n}X^{k_n}+\cdots+\lambda_{k_1}X^{k_1}$. Un rapide tableau de variations prouve que l'image de $x\mapsto xe^x$ est $\left[-e^{-1}\,;+\infty\right[$ donc tout élément de cet intervalle est racine de ce polynôme. Il admet donc une infinité de racines, c'est le polynôme nul, donc $\lambda_{k_1} = \cdots = \lambda_{k_n}$. Ainsi, la famille $(x\mapsto x^{k_i}e^{k_ix})_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ est libre, toute sous-famille finie est libre donc on a bien une famille libre.

21. Même chose puisque $]\,0\,;1\,]$ est infini.
22. Même chose puisque $[\,-1\,;1\,]$ est infini.

Exercice 14 : ✪✪ Soit I un intervalle non trivial et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue non constante. Montrer que $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Correction : Soit $n \geq 1$ et soient $k_1 < \cdots < k_n$ dans $\mathbb{N}$. Soient $\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_n}$ des réels tels que $\lambda_{k_1} f^{k_1} + \cdots + \lambda_{k_n} f^{k_n} = 0$ i.e. :

$$\forall x \in I, \lambda_{k_n}(f(x))^{k_n} + \cdots + \lambda_{k_1}(f(x))^{k_1} = 0$$

c'est-à-dire que, pour tout x, $f(x)$ est racine du polynôme $P = \lambda_{k_n} X^{k_n} + \cdots + \lambda_{k_1} X^{k_1}$. Or, f est continue donc, d'après le TVI, $f(I)$ est un intervalle, et f n'est pas constante donc $f(I)$ est infini : $f(x)$ prend donc une infinité de valeurs, P a une infinité de racines, c'est donc le polynôme nul donc tous ses coefficients sont nuls. La famille $(f^{k_1}, \dots, f^{k_n})$ est libre, toute sous-famille finie est libre ce qui est le résultat voulu.

Exercice 15 : ✪ Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (x_3, x_1) (si $n \geq 3$)
2. $(x_1, 2x_1 + x_4, x_4)$ (si $n \geq 4$)
3. $(x_1, 2x_2, x_3)$ (si $n \geq 3$)
4. $(x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\cdots+x_n)$
5. $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_n - x_1)$
6. ✪✪ $(x_1+x_2, x_2+x_3, \dots, x_n+x_1)$

Correction :

1. Sous-famille d'une famille libre donc famille libre.
2. Un des vecteurs est CL des autres donc famille liée.
3. La famille (e_1, e_2, e_3) est une sous-famille d'une famille libre donc est libre, si bien que la famille $(e_1, 2e_2, e_3)$ est aussi libre. En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $\lambda_1 e_1 + 2\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$. La famille (e_1, e_2, e_3) étant libre, $\lambda_1 = 2\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ce qui permet de conclure. Plus généralement (cf. VF et exercice 22), si on multiplie des vecteurs libres par des scalaires tous non nuls, la famille reste libre.
4. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2(e_1 + e_2) + \cdots + \lambda_n(e_1 + \cdots + e_n) = 0$$

si bien que

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)e_1 + (\lambda_2 + \cdots + \lambda_n)e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ étant libre, on a le système suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \qquad \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \lambda_n = 0 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système linéaire est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

qui est inversible car triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non nuls, donc le système est un système de Cramer donc admet une unique solution, et puisque la solution nulle est solution évidente, c'est la seule, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$: la famille est libre.
5. La somme des vecteurs est nulle : il existe une combinaison linéaire non triviale qui les annule, la famille est liée.
6. On ne sait pas trop si elle est libre ou pas. Travaillons donc par équivalences. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\lambda_1(x_1+x_2)+\lambda_2(x_2+x_3)+\cdots+\lambda_{n-1}(x_{n-1}+x_n)+\lambda_n(x_n+x_1)=0$$

$$\iff (\lambda_1+\lambda_n)x_1+(\lambda_1+\lambda_2)x_2+(\lambda_2+\lambda_3)x_3+\cdots+(\lambda_{n-1}+\lambda_n)x_n=0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccl}\lambda_1 & + & \lambda_n=0\\ \lambda_1 & + & \lambda_2=0\\ \lambda_2 & + & \lambda_3=0\\ & \vdots & \\ \lambda_{n-1} & + & \lambda_n=0\end{array}\right. \qquad \text{(la famille } (x_1,\dots,x_n) \text{ est libre)}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccl}\lambda_1 & = & -\lambda_n\\ \lambda_1 & = & -\lambda_2\\ \lambda_2 & = & -\lambda_3\\ & \vdots & \\ \lambda_{n-1} & = & -\lambda_n\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccl}\lambda_1 & = & -\lambda_n\\ \lambda_1 & = & -\lambda_2\\ \lambda_1 & = & \lambda_3\\ \lambda_1 & = & -\lambda_4\\ & \vdots & \end{array}\right.$$

$$\iff \lambda_1=-\lambda_n \qquad \text{et} \qquad \forall k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!], \lambda_1=(-1)^{k-1}\lambda_k$$

Séparons les cas selon la parité de n : si n est impair, alors on a à la fois $\lambda_1=-\lambda_n$ et $\lambda_1=(-1)^{n-1}\lambda_n=\lambda_n$ car $n-1$ est pair donc $-\lambda_n=0$ si bien que $\lambda_1=0$ donc tous les λ_i sont nuls : la famille est libre. Si n est pair alors on a $\lambda_1=-\lambda_n$ et $\lambda_1=-\lambda_n$ ce qui n'apporte pas de nouvelle information. On a $\lambda_1=(-1)^{k-1}\lambda_k$ donc $\lambda_2=-\lambda_1$, $\lambda_3=\lambda_1$ etc. Par conséquent, les scalaires $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=1,\lambda_4=-1,\cdots,\lambda_n=-1$ (car n est pair) conviennent : la famille est liée. En conclusion, la famille est libre si et seulement si n est impair.

Exercice 16 : ✪ Soit $\theta\in\mathbb{R}$. Donner une CNS pour que $(1,e^{i\theta})$ soit une famille libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Correction : Une famille à deux éléments est libre si et seulement si ces éléments ne sont pas proportionnels (ce n'est plus vrai à partir de trois vecteurs). 1 et $e^{i\theta}$ sont libres si et seulement s'ils ne sont pas proportionnels (sur $\mathbb{R}$) donc si et seulement si $e^{i\theta}\notin\mathbb{R}$ ssi $\theta\equiv 0[\pi]$. Cependant, sur $\mathbb{C}$, ils ne forment jamais une famille libre puisqu'ils sont proportionnels (on peut prendre un λ complexe) : $e^{i\theta}=\lambda.1$ avec $\lambda=e^{i\theta}$.

Exercice 17 : ✪

1. Donner une base de l'espace vectoriel $S=\{y\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\,|\,y''+y'+y=0\}$.
2. Déterminer une base sur $\mathbb{R}$ de S.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel S' de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $f''+4f=0$, $f(\pi)=0$.

Correction :

1. On cherche les solutions complexes (il est écrit dans l'énoncé qu'on cherche les solutions à valeurs complexes). On prouve comme dans le chapitre 11 que
$$S=\left\{x\mapsto\lambda e^{jx}+\mu e^{j^2x}\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2\right\}$$
En d'autres termes, $S=\mathrm{Vect}\left(x\mapsto e^{jx},x\mapsto e^{j^2x}\right)$: ces deux fonctions forment une famille génératrice de S et une famille libre car elles ne sont pas proportionnelles donc forment une base de S.
2. En résolvant cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$, on trouve (idem que dans le chapitre 11) que
$$S=\left\{x\mapsto\lambda e^{x/2}\left(\lambda\cos(x\sqrt{3}/2)+\mu\sin(x\sqrt{3}/2)\right)\,|\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$$
donc, de même, une base de S est $(x\mapsto\cos(x\sqrt{3}/2)e^{x/2},x\mapsto\sin(x\sqrt{3}/2)e^{x/2})$.

3. Ici, on cherche donc les solutions sur $\mathbb{R}$, et on trouve de même que

$$S = \left\{x \mapsto \lambda\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x) \,|\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

et une telle solution vérifie $f(\pi) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ si et seulement si elle est de la forme $x \mapsto \mu\sin(2x)$. Dès lors, $S = \text{Vect}(x \mapsto \sin(2x))$ et cette fonction n'est pas la fonction nulle donc une base de S est $x \mapsto \sin(2x)$.

Exercice 18 : ✪ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

1. $F = \{x \mapsto A\cos(x+\varphi) \,|\, (A,\varphi) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + z = 0\}$.
3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P\left(X^2\right) = (X^3+1)P\}$.
4. $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y = z+t \text{ et } 2x-y-z+t = 0\}$.
5. $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2)\}$.
6. $C = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \,|\, M \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \times M\right\}$.

Correction :

1. On sait que toute fonction de la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$ peut s'écrire sous cette forme (cf. chapitre 5) et, réciproquement, toute fonction de cette forme peut s'écrire sous la forme $x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$. Dès lors :

$$F = \{x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

c'est-à-dire que $F = \text{Vect}(\cos, \sin)$. En en déduit directement que F est un espace vectoriel. De plus, cos et sin forment une famille génératrice de F, et forment une famille libre car sont non proportionnelles donc une base de F.

2. On fait comme en classe :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \,|\, x = -2y - z\} \\ &= \{(-2y, -z, y, z) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-2,1,0) + z(-1,0,1) \,|\, (y,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}((-2,1,0), (-1,0,1)) \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que F est un espace vectoriel et que $(-2,1,0)$ et $(-1,0,1)$ forment une base de F.

3. Résolvons $P(X^2) = (X^3+1)P$ comme dans le chapitre 19, en raisonnant par analyse-synthèse : soit $P \in \mathbb{K}_3[X]$ qui convient. Le polynôme nul est évidemment solution donc on peut supposer $P \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ son degré. Alors $P(X^2)$ et $(X^3+1)P$ ont même degré, c'est-à-dire que $2n = n+3$ donc $n = 3$: il existe donc $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ avec $a \neq 0$ (par définition d'un coefficient dominant) tel que $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Dès lors,

$$P(X^2) = aX^6 + bX^4 + cX^2 + d \qquad \text{et} \qquad (X^3+1)P = aX^6 + bX^5 + cX^4 + (a+d)X^3 + bX^2 + cX + d$$

Par unicité des coefficients, on trouve que $b = c = 0$ et $d = -a$ si bien que $P = a(X^3 - 1)$. Réciproquement, on vérifie facilement que tout polynôme de cette forme est solution si bien que

$$\begin{aligned} F &= \{a(X^3 - 1) \,|\, a \in \mathbb{K}\} \\ &= \text{Vect}(X^3 - 1) \end{aligned}$$

donc F est un espace vectoriel et une famille génératrice est $X^3 - 1$. Puisque ce polynôme est non nul, c'est une famille libre donc une base de F.

4. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in F \quad &\iff \quad \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ 2x - y - z + t = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ \quad - 3y + z + 3t = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x - z = -y + t \\ \quad z = 3y - 3t \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} x = 2y - 2t \\ z = 3y - 3t \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} F &= \{(2y-2t, y, 3y-3t, t) \,|\, (y,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(2,1,3,0) + t(-2,0,-3,1) \,|\, (y,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((2,1,3,0), (-2,0,-3,1)) \end{aligned}$$

et on conclut comme précédemment que F est un espace vectoriel et que les vecteurs $(2,1,3,0)$ et $(-2,0,-3,1)$ forment une base de F.

5. Essayons de traduire cela en terme de racine pour pouvoir factoriser (c'est plus pratique que de résoudre un système 4×4... et en plus cela permettra de mettre plus facilement F sous forme de Vect). Soit $P \in \mathbb{K}_4[X]$.

$$\begin{aligned} P \in F &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, P(0) = P(1) = P(2) = \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, P(0) - \lambda = P(1) - \lambda = P(2) - \lambda = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, X(X-1)(X-2) | (P - \lambda) \\ &\iff \exists (\lambda, a, b) \in \mathbb{K}^3, P - \lambda = (aX+b)X(X-1)(X-2) \\ &\iff \exists (\lambda, a, b) \in \mathbb{K}^3, P = aX^2(X-1)(X-2) + bX(X-1)(X-2) + \lambda \end{aligned}$$

si bien que $F = \mathrm{Vect}(X^2(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), 1)$: F est un espace vectoriel. De plus, $X^2(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2), 1$ forment une famille génératrice de F et aussi une famille libre car échelonnée en degré donc une base de F.

6. Commençons par chercher la forme générale des éléments de C. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned} M \in C &\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} 3a+7b & -a+b \\ 3c+7d & -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-c & 3b-d \\ 7a+c & 7b+d \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 3a + 7b = 3a - c \\ -a + b = 3b - d \\ 3c + 7d = 7a + c \\ -c + d = 7b + d \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 7b + c = 0 \\ -a - 2b + d = 0 \\ -7a + 2c + 7d = 0 \\ -7b - c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 7b + c = 0 \\ -a - 2b + d = 0 \\ 14b + 2c = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} c = -7b \\ d = a + 2b \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -7b & a+2b \end{pmatrix} \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

si bien que F est un espace vectoriel et que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ en forment une famille génératrice et une famille libre (car famille à deux éléments non proportionnels) donc une base.

Exercice 19 : ✪✪ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = |x-a|$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Est-ce une base de cet espace ?

Correction : Soient $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que $\lambda_1 f_{a_1} + \cdots + \lambda_n f_{a_n} = 0$ i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1|x-a_1| + \cdots + \lambda_n|x-a_n| = 0$$

Supposons qu'il existe i tel que $\lambda_i \neq 0$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |x-a_i| = \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} \lambda_j|x-a_j|$$

ce qui est impossible puisque $x \mapsto |x-a_i|$ n'est pas dérivable en a_i (limite à droite et à gauche du taux d'accroissement en a_i différentes) mais

$$x \mapsto \frac{1}{\lambda_i}\sum_{j\neq i} \lambda_j|x-a_j|$$

est dérivable en a_i (en effet, pour tout $j \neq i$, $x \mapsto x-a_j$ est dérivable en a_i et $a_i - a_j \neq 0$ donc la valeur absolue est dérivable en $a_i - a_j$ donc, par composition, $x \mapsto |x-a_j|$ est dérivable en a_i et on a le résultat voulu par somme), et donc ces fonctions ne peuvent pas être égales. On en déduit que tous les λ_i sont libres donc $(f_{a_1}, \dots, f_{a_n})$ est libre : toute sous-famille est libre donc la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre. Ce n'est pas une base car toute combinaison linéaire non nulle de telles fonctions admet un nombre fini de points en lesquels elle n'est pas dérivable : il n'y a donc aucune fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à part la fonction nulle dans l'espace engendré, et donc l'espace engendré n'est pas $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 20 : ✪✪ Soit $(a,b,c) \in E^3$. On pose $u = b+c, v = a+c, w = a+b$. Montrer que (a,b,c) est libre si et seulement si (u,v,w) est libre.

Correction : Supposons (a,b,c) libres. Soient α, β, γ trois scalaires tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$. Alors

$$\alpha(b+c) + \beta(a+c) + \gamma(a+b) = 0$$

donc

$$(\beta+\gamma)a + (\alpha+\gamma)b + (\alpha+\beta)c = 0$$

Or, a, b, c sont libres donc

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & & & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 0 \end{array}\right.$$

On résout rapidement ce système et on trouve que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, la famille (u,v,w) est libre. Réciproquement, supposons que (u,v,w) soient libres. Soient α, β, γ trois scalaires tels que $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$. On veut faire comme précédemment, se ramener à une CL de u, v, w : pour cela, il suffit d'exprimer a, b, c en fonction de u, v, w. Or, par définition :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & b & + & c & = & u \\ a & & & + & c & = & v \\ a & + & b & & & = & w \end{array}\right.$$

On a un système 3×3 dont les inconnues sont a, b, c. En résolvant ce système à l'aide d'un pivot de Gauß, on trouve :

$$a = \frac{1}{2}(-u+v+w), b = \frac{1}{2}(u-v+w) \qquad \text{et} \qquad c = \frac{1}{2}(u+v-w)$$

En remplaçant a, b, c par ces valeurs, il vient :

$$\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}.u + \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}.v + \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}.w = 0$$

et puisque la famille (u,v,w) est libre, on en déduit que les trois scalaires en facteur de u, v, w ci-dessus sont nuls. Par conséquent :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} -\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & - & \gamma & = & 0 \end{array}\right.$$

En résolvant ce système, on trouve que $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 21 : ✪

1. Montrer que $((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base.
2. Montrer que $(X^3+X^2-X-1, X^3-X^2+1, X^3-X^2+X, X^3+2X+1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.
3. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on pose $u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)$. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction : Dans tout cet exercice, on utilise la caractérisation des bases suivantes : une famille est une base si et seulement si tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de cette famille.

1. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1(-1,1,1) + \lambda_2(1,-1,1) + \lambda_3(1,1,-1) = x \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_1 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = & x_2 \\ \lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

Si on note

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice du système, alors on prouve comme au chapitre 21 que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est inversible donc on a un système de Cramer qui admet une unique solution : tout vecteur s'écrit de façon unique comme CL des trois vecteurs donc on a bien une base. De plus (cf. chapitre 21)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

et donc, dans le cas où $x = (8,4,2)$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base sont $3, 5, 6$ c'est-à-dire que :

$$(8,4,2) = 3.(-1,1,1) + 5.(1,-1,1) + 6(1,1,-1)$$

2. Soit $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}_3[X]$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

$$\lambda_1(X^3+X^2-X-1) + \lambda_2(X^3-X^2+1) + \lambda_3(X^3-X^2+X) + \lambda_4(X^3+2X+1) = P$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = & a_3 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 & & & = & a_2 \\ -\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 & = & a_3 \\ -\lambda_1 & + & \lambda_2 & & & + & \lambda_4 & = & a_4 \end{array} \right.$$

Si on note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice du système, alors on prouve comme au chapitre 21 que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & 2/7 & -1/7 & -1/7 \\ 2/7 & -1/7 & -3/7 & 4/7 \\ 1/7 & -4/7 & 2/7 & -5/7 \\ 1/7 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix}$$

La matrice est inversible donc on a un système de Cramer qui admet une unique solution : tout vecteur s'écrit de façon unique comme CL des quatre vecteurs donc on a bien une base. De plus (cf. chapitre 21)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}$$

et donc, dans le cas où $P = X^2$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que les coordonnées de $(8,4,2)$ dans cette base sont $2/7, -1/7, -4/7, 3/7$ c'est-à-dire que :

$$X^2 = \frac{2}{7}(X^3 + X^2 - X - 1) - \frac{1}{7}(X^3 - X^2 + 1) - \frac{4}{7}(X^3 - X^2 + X) + \frac{3}{7}(X^3 + 2X + 1)$$

3. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = x \iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & \cdots & + & n\lambda_n & = & x_1 \\ & & \lambda_2 & + & \cdots & + & (n-1)\lambda_n & = & x_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ & & & & & & \lambda_n & = & x_n \end{array} \right.$$

On a une matrice inversible (triangulaire supérieure avec des coefficients tous non nuls) donc un système de Cramer donc une unique solution : la famille est libre.

Exercice 22 - Familles orthonormales de $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$: ✪✪ On dit qu'une famille de fonctions F appartenant à $\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ forment une famille orthonormale si

$$\forall f \in F, \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall (f,g) \in F^2, f \neq g \Rightarrow \int_0^1 f(t) \times g(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

1. Montrer qu'une famille orthonormale est libre.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre (respectivement génératrice) d'un espace vectoriel E, et $(\alpha_i)_{i \in I}$ des scalaires tous non nuls. Montrer que $(\alpha_i x_i)_{i \in I}$ est une famille libre (respectivement génératrice).
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[0;1]$ la fonction f_k par $f_k(x) = \sin(\pi k x)$. Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre.

Correction : Ce résultat est un cas particulier d'un résultat général que nous verrons dans le chapitre 34 (une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre).

1. Soit donc F une famille orthonormale. Soient $n \geq 1$ et soient $f_1, \dots, f_n$ des éléments (distincts) de F. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que :

$$\forall t \in [0;1], \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(t) = 0$$

Soit $i \in [\![1 ; n]\!]$. Soit $t \in [0;1]$. En multipliant l'égalité ci-dessus par $f_i(t)$:

$$\lambda_i f_i(t)^2 + \sum_{j \neq i} \lambda_j f_j(t) f_i(t) = 0$$

En intégrant entre 0 et 1 et par linéarité de l'intégrale :

$$\lambda_i \int_0^1 f_i(t)^2 \,\mathrm{d}t + \sum_{j \neq i} \lambda_j \int_0^1 f_j(t) f_i(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

La famille étant orthonormale, la première intégrale vaut 1 et les autres valent 0. On en déduit que $\lambda_i = 0$. i étant quelconque, les scalaires sont tous nuls : la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre. Toute sous-famille finie est libre : F est une famille libre.

2. Supposons la famille libre. Soit $n \geq 1$ et soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de cette famille. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 \alpha_1 x_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n x_n = 0$$

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ étant libre, $\lambda_i \alpha_i = 0$ pour tout i et les α_i sont tous non nuls donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, c'est-à-dire que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre : toute sous-famille finie est libre donc la famille $(x_i)_{i \in I}$ est libre.

Supposons à présent qu'elle soit génératrice : soit $x \in E$. Il existe $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de cette famille et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

Les α_i sont tous non nuls donc :

$$x = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} . \alpha_1 x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\alpha_n} . \alpha_n x_n$$

Tout vecteur est combinaison linéaire des $\alpha_i x_i$: on a une famille génératrice.

3. On pourrait prouver qu'elle est libre de la même façon qu'en classe, quand on a prouvé que les $x \mapsto \cos(\alpha x)$ étaient libres (récurrence et double dérivation, exo), mais on va plutôt utiliser les questions précédentes. Tentons donc de prouver que la famille est orthonormale (ce sera un échec mais on adaptera la preuve). Soient $k_1 \neq k_2$ deux entiers distincts (en particulier, $k_1 - k_2 \neq 0$ et puisque k_1 et k_2 sont positifs, ils ne peuvent être tous les deux nuls donc $k_1 + k_2 \neq 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(\pi k_1 t) \sin(\pi k_2 t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1}{2} (\cos(\pi(k_1 - k_2)t) - \cos(\pi(k_1 + k_2)t)) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(\pi(k_1 - k_2)t)}{\pi(k_1 - k_2)} - \frac{\sin(\pi(k_1 + k_2)t)}{\pi(k_1 + k_2)} \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc la deuxième condition pour avoir une famille orthonormale est remplie... Le problème va être la première. En effet, si $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin^2(\pi k t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{1 - \cos(2\pi k t)}{2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2\pi k t)}{2\pi k} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

et donc la famille n'est pas orthonormale, zut... Mais on n'est pas loin : il suffit de multiplier les fonctions par des constantes. Attention, il y a un carré, il ne faut donc pas multiplier par 2 mais par $\sqrt{2}$: en effet, pour tout k,

$$\int_0^1 (\sqrt{2} \sin(\pi k t))^2 \, \mathrm{d}t = 1$$

et on a toujours

$$\int_0^1 \sqrt{2} \sin(\pi k_1 t) \times \sqrt{2} \sin(\pi k_2 t) \, \mathrm{d}t = 0$$

donc la famille $(\sqrt{2} f_k)$ est orthonormale donc libre, et d'après la question 2 (avec les α_i égaux à $1/\sqrt{2}$), la famille (f_k) est libre.

Exercice 23 - Fonction génératrice des moments : ✪✪ Si X est une variable aléatoire, on appelle fonction génératrice de moments de X la fonction $M_X : t \mapsto E\left(e^{tX}\right)$.

1. Expliciter la fonction génératrice des moments d'une loi binomiale de paramètres (n, p).
2. Montrer que la fonction génératrice des moments caractérise la loi, c'est-à-dire que si on a deux variables X et Y telles que $M_X = M_Y$, alors X et Y ont la même loi.

3. Montrer que, dans le cas de deux variables aléatoires X et Y suivant une loi binomiale, cette condition peut être affaiblie. Montrer plus précisément que X et Y ont la même loi si et seulement si M_X et M_Y sont équivalentes en $+\infty$. Peut-on remplacer $+\infty$ par $-\infty$?

Correction :

1. Soit donc X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(pe^t\right)^k (1-p)^{n-k} \\ &= \left(1-p+pe^t\right)^n \end{aligned}$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires et notons $X(\Omega) = \{x_1; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; \dots; y_m\}$ (avec, a priori, $n \neq m$), avec $x_1 < \cdots < x_n$ et $y_1 < \cdots < y_m$, de probas respectives (strictement positives : si un des x_i ou des y_j a une proba nulle, on le retire de l'univers image) $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_m$. Dès lors, toujours d'après le théorème de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$M_X(t) = p_1 e^{tx_1} + \cdots + p_n e^{tx_n} \qquad \text{et} \qquad M_Y(t) = q_1 e^{ty_1} + \cdots + q_m e^{ty_m}$$

et donc on suppose que ces deux quantités sont égales pour tout t. Or, on sait (cf. cours, même si ce n'est pas au programme : il faut savoir le redémontrer) que la famille $\left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre. Par unicité des coordonnées sur une famille libre (cf. cours), les coefficients devant les exponentielles correspondantes sont égaux des deux côtés de l'égalité. De cela on déduit plusieurs choses :

- On trouve à droite de l'égalité toutes les exponentielles de la forme e^{tx_i} avec les mêmes coefficients. On en déduit en particulier que $m \geq n$. Par symétrie des rôles, $m \leq n$ donc $m = n$.
- Dès lors, les x_i et les y_j sont égaux, c'est-à-dire que $X(\Omega) = Y(\Omega)$, et par unicité des coefficients, les p_i sont égaux aux q_j, donc les probas sont les mêmes. On en déduit que X et Y ont la même loi.

3. Il est évident que si X et Y ont la même loi, alors $M_X = M_Y$ (e^{tX} et e^{tY} ont la même loi pour tout t, donc les probas sont les mêmes, donc les espérances sont les mêmes) donc, en particulier, ces fonctions sont équivalentes en $+\infty$.

   Réciproquement, supposons que $M_X(t) \sim M_Y(t)$ en $+\infty$. Notons (n,p) les paramètres de X et (m,q) ceux de Y (avec p et $q \in \,]\,0\,;1\,[$). D'après la question 1 (l'équivalence passe à la puissance fixe), en $+\infty$, $M_X(t) \sim p^n e^{nt}$ et $M_Y(t) \sim q^m e^{mt}$. En faisant le quotient ($M_Y(t) \neq 0$ pour t assez grand puisque $q \neq 0$) :

$$\frac{M_X(t)}{M_Y(t)} \sim \frac{p^n}{q^m} e^{t(n-m)}$$

   et cette quantité tend vers 1 quand t tend vers $+\infty$ donc $n = m$ (sinon on a soit 0 soit $+\infty$) si bien que le rapport devient donc équivalent à $(p/q)^n$ qui tend vers 1. Or, il est constant donc il est égal à 1 donc $p = q$: les paramètres sont égaux, les deux variables ont la même loi. Cela ne marche plus avec $-\infty$ car $M_X(t) \sim (1-p)^n$ et $M_Y \sim (1-q)^m$ et donc on a $(1-p)^n = (1-q)^m$ mais cela ne permet pas de conclure. Par exemple, avec $p = 1/2$ et $n = 2$ et $q = 3/4$ et $m = 1$, on a égalité mais pas égalité des paramètres.

Exercice 24 - Souvenirs : ✪✪✪ On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
2. Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
3. L'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par deux points à coordonnées rationnelles recouvre-t-il $\mathbb{R}^2$?

Correction : cf. exercice 17 du chapitre 1.

Exercice 25 - Indépendance des caractères d'un groupe : ✪✪✪✪

1. Soit G un groupe.

(a) Rappeler comment $\mathbb{C}^G$, l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{C}$, est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(b) Soient $\chi_1, \dots, \chi_n$ des morphismes de groupe distincts de G dans $\mathbb{C}^*$ (ce sont des *caractères* de G). Montrer que les χ_i sont linéairement indépendants.

2. **Remake (lemme de Dedekind) :** On se donne dans cette question $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps quelconques. La définition d'espace vectoriel se généralisant sans mal à un corps quelconque, on montrerait de même que $\mathbb{L}^{\mathbb{K}}$ est muni d'une structure de $\mathbb{L}$-espace vectoriel. Montrer que des morphismes de corps distincts de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{L}$.

Correction :

1. (a) On sait (cf. cours) que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble quelconque, alors E^X est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les lois interne et externe $+$ et $.$ définies par :

$$f+g\colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto & f(x)+g(x) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \lambda.f\colon \begin{cases} X \longrightarrow & E \\ x \longmapsto & \lambda.f(x) \end{cases}$$

Par conséquent, cela permet de munir $\mathbb{C}^G$ d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(b) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n = 0$ i.e. :

$$\forall x \in G, \lambda_1\chi_1(x) + \cdots + \lambda_n\chi_n(x) = 0 \qquad (*)$$

L'idée est d'utiliser le fait que les χ_i sont des morphismes : soient donc x et y deux éléments de G. D'une part,

$$\lambda_1\chi_1(xy) + \cdots + \lambda_n\chi_n(xy) = 0$$

et les χ_i sont des morphismes donc

$$\lambda_1\chi_1(x)\chi_1(y) + \cdots + \lambda_n\chi_n(x)\chi_n(y) = 0 \qquad (1)$$

D'autre part, en multipliant l'égalité $(*)$ par $\chi_n(y)$:

$$\lambda_1\chi_1(x)\chi_n(y) + \cdots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}(x)\chi_n(y) + \lambda_n\chi_n(x)\chi_n(y) = 0 \qquad (2)$$

En faisant la différence $(1) - (2)$, le dernier terme part :

$$\lambda_1\chi_1(x)(\chi_1(y) - \chi_n(y)) + \cdots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}(x)(\chi_{n-1}(y) - \chi_n(y)) = 0$$

et on se ramène donc à une égalité du même type avec un terme de moins : on pense donc à faire une récurrence.

- Si $n \geq 1$, notons H_1 : « n morphismes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$ forment une famille libre ».
- H_1 est vraie : en effet, un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$ n'est pas la fonction nulle (car est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, ou car envoie e, le neutre de G, sur 1, le neutre de $\mathbb{C}^*$) donc est une famille libre à un élément.
- Soit $n \geq 2$ et supposons H_{n-1} vraie (pour utiliser ce qui précède) et prouvons que H_n est vraie. Soient $\chi_1, \dots, \chi_n$ des morphismes distincts. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $\lambda_1\chi_1 + \cdots + \lambda_n\chi_n = 0$. D'après ce qui précède, pour tous x et y :

$$\lambda_1\chi_1(x)(\chi_1(y) - \chi_n(y)) + \cdots + \lambda_{n-1}\chi_{n-1}(x)(\chi_{n-1}(y) - \chi_n(y)) = 0$$

c'est-à-dire que :

$$\lambda_1(\chi_1(y) - \chi_n(y)) \times \chi_1 + \cdots + \lambda_{n-1}(\chi_{n-1}(y) - \chi_n(y)) \times \chi_{n-1} = 0$$

La famille $(\chi_1, \dots, \chi_{n-1})$ est libre par hypothèse de récurrence : on en déduit que, pour tout $i \in [\![1\,;\, n-1]\!]$, $\lambda_i \times (\chi_i(x) - \chi_i(y)) = 0$. Or, les morphismes sont distincts donc, pour tout i, il existe x et y tels que $\chi_i(x) \neq \chi_i(y)$ donc $\lambda_i = 0$. En d'autres termes, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ et l'égalité initiale devient : $\forall x \in G, \lambda_n\chi_n(x) = 0$ donc $\lambda_n = 0$ puisque $\chi_n(x) \neq 0$. On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ ce qui clôt la récurrence.

(c) Idem.

28.5 Espaces vectoriels engendrés

Exercice 26 : ✪ Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $ax + by + cz = 0$ avec a et b non nuls. Montrer que $\text{Vect}(x, z) = \text{Vect}(y, z)$.

Correction : Soit $u \in \text{Vect}(x, z)$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que $u = \alpha x + \beta z$. Or, $a \neq 0$ donc

$$x = \frac{1}{a}(by + cz)$$

si bien que

$$u = \frac{\alpha b}{a} y + \left(\frac{\alpha c}{a} + \beta\right) z \in \text{Vect}(y, z)$$

donc $\text{Vect}(x, z) \subset \text{Vect}(y, z)$. L'inclusion réciproque est analogue.

Exercice 27 : ✪

1. **Matheux vs physiciens :** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que $\text{Vect}(\text{sh}, \text{ch}) = \text{Vect}(\exp, x \mapsto e^{-x})$.
2. Dans $\mathbb{R}^{[-1\,;1]}$, montrer que $\text{Vect}(x \mapsto 1, \text{Arccos}, \text{Arcsin})$ peut s'écrire sous la forme $\text{Vect}(f, g)$ pour deux fonctions f et g de $[-1\,;1]$ dans $\mathbb{R}$ bien choisies.

Correction :

1. Soit $f \in \text{Vect}(\text{sh}, \text{ch})$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = \alpha\text{sh} + \beta\text{ch}$ donc, pour tout x,

$$f(x) = \frac{\alpha + \beta}{2} e^x + \frac{\beta - \alpha}{2} e^{-x}$$

si bien que $f \in$ $\text{Vect}(\text{sh}, \text{ch})$. Dès lors, $\text{Vect}(\text{sh}, \text{ch}) \subset \text{Vect}(\exp, x \mapsto e^{-x})$. Réciproquement, soit $f \in \text{Vect}(\exp, x \mapsto e^{-x})$: il existe α et β tels que, pour tout x, $f(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$. Comme dans l'exercice 26, il suffit d'exprimer exp et $x \mapsto e^{-x}$ comme CL de sh et ch. Or, pour tout x,

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

si bien que

$$e^x = \text{sh}(x) + \text{ch}(x) \qquad \text{et} \qquad e^{-x} = \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$$

Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha(\text{ch}(x) + \text{sh}(x)) + \beta(\text{ch}(x) - \text{sh}(x)) \\ &= (\alpha + \beta)\text{ch}(x) + (\alpha - \beta)\text{sh}(x) \end{aligned}$$

donc $f \in \text{Vect}(\text{sh}, \text{ch})$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

2. Il suffit de se souvenir (cf. chapitre 5) que pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\text{Arccos}(x) + \text{Arcsin}(x) = \pi/2$ donc $\text{Arccos}(x) = \pi/2.1 - \text{Arcsin}(x)$. Dès lors, Arccos est CL de $x \mapsto 1$ et Arcsin donc (cf. cours) $\text{Vect}(x \mapsto 1, \text{Arccos}, \text{Arcsin}) = \text{Vect}(x \mapsto 1, \text{Arcsin})$. On pouvait évidemment supprimer n'importe quelle des autres fonctions.

Exercice 28 : ✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(x)$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
2. ✪✪ **Remake :** Montrer que $E = \{x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) \,|\, (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est un espace vectoriel et en donner une base.

Correction :

1. Par définition, $E = \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n)$ où, pour tout k, f_k est la fonction $x \mapsto x^k \cos(x)$. E est donc un espace vectoriel et $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de E (puisque E est l'espace vectoriel engendré par ces fonctions). Montrons que c'est une famille libre. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_n f_n + \cdots + a_0 f_0 = 0$ i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(x) = 0$$

En particulier, pour tout $x \in \left[0\,; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x) \neq 0$ donc $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$: le polynôme $a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ admet donc une infinité de racines donc est le polynôme nul donc tous ses coefficients sont nuls : $a_0 = \cdots = a_n = 0$, la famille est libre, c'est donc une base de E.

2. De même, $E = \text{Vect}\left((f_k)_{k\in\mathbb{N}}, (g_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ où, pour tout k, $f_k : x \mapsto x^k\cos(x)$ et $g_k : x \mapsto x^k\sin(x)$ puisque, par définition, E est l'ensemble des fonctions s'écrivant comme CL (finie, forcément, par définition d'une CL) de telles fonctions. Ces fonctions forment donc une famille génératrice de E, et on prouve de même qu'elles forment une famille libre : soient $k_0 < \dots < k_n$ et $p_0 < \dots < p_m$ des entiers et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ des scalaires tels que $a_0f_{k_0} + \dots + a_nf_{k_n} + b_0g_{p_0} + \dots + b_mg_{p_m} = 0$ i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (a_nx^{k_n} + \dots + a_0x^{k_0})\cos(x) + (b_mx^{p_m} + \dots + b_0x^{p_0})\sin(x) = 0$$

Si on pose $P = a_nX^{k_n} + \dots + a_0X^{k_0}$ et $Q = b_mX^{p_m} + \dots + b_0X^{p_0}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) = 0$ et on prouve comme dans l'exercice 2 du chapitre 19 que $P = Q = 0$ donc tous les b_i et les b_j sont nuls donc la famille est libre. Toute sous-famille finie est libre donc on a une famille libre donc une base de E.

Exercice 29 : ✪

1. Soient a et b deux réels. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1,1,-1), e_2 = (1,2,4), e_3 = (3,-1,a) \qquad \text{et} \qquad e_4 = (2,3,b)$$

Déterminer a et b pour qu'on ait $\text{Vect}(e_1,e_2) = \text{Vect}(e_3,e_4)$.

2. **Remake :** Soient $E_1 = \text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $E_2 = \text{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$. A-t-on $E_1 = E_2$?

Correction :

1. On prouve comme précédemment que $\text{Vect}(e_1,e_2)$ est l'ensemble d'équation $6x-5y+x = 0$. e_3 et e_4 appartiennent à cet ensemble si et seulement si $a = -23$ et $b = 3$. Ainsi, si $a \neq -23$ **ou** $b \neq 3$, alors e_3 ou e_4 n'appartient pas à $\text{Vect}(e_1,e_2)$ donc les deux ensembles sont distincts. Supposons à présent que $a = -23$ et $b = 3$, si bien que $e_3 = (3,-1,-23)$ et $e_4 = (2,3,3)$. Alors e_3 et e_4 appartiennent à $\text{Vect}(e_1,e_2)$ donc $\text{Vect}(e_3,e_4) \subset \text{Vect}(e_1,e_2)$. On pourra dire dans le chapitre 31 que ces deux espaces sont de même dimension 2 et l'un est inclus dans l'autre donc ils sont égaux, mais pour l'instant, on est obligé de prouver l'inclusion réciproque. On trouve que $\text{Vect}(e_3,e_4)$ est l'ensemble d'équation $-66x + 55y - 11z = 0$ donc l'ensemble d'équation $6x - 5y + z = 0$ c'est-à-dire l'ensemble $\text{Vect}(e_1,e_2)$: ces deux ensembles sont donc égaux si et seulement si $a = -23$ et $b = 3$.
2. On trouve que E_1 est l'ensemble d'équation $7x - 3y + 5z = 0$ et que E_2 admet la même équation donc $E_1 = E_2$.

Exercice 30 : ✪✪ Donner $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$.

Correction : On a prouvé dans le chapitre 21 que toute matrice est somme de deux matrices inversibles. On en déduit que $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 31 : ✪✪

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.
2. **Remake :** Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $F = \{P \in \mathbb{K}_5[X] \mid P(a) = P(b) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.

Correction :

1. Travaillons par équivalences :

$$\begin{aligned}
P \in F &\iff 0 \text{ et } 1 \text{ sont racines de } P \\
&\iff X(X-1)|P \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{K}_2[X], P = X(X-1)Q \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, P = X(X-1)(aX^2+bX+c) \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{K}^3, P = aX^3(X-1) + bX^2(X-1) + cX(X-1)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $F = \{aX^3(X-1) + bX^2(X-1) + cX(X-1) \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{K}^3\}$ donc $F = \text{Vect}(X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1))$. On en déduit que F est un espace vectoriel (c'est un Vect) et que $X^3(X-1), X^2(X-1), X(X-1)$ est une famille génératrice de F et c'est aussi une famille libre car échelonnée en degré : c'est donc une base de F.

2. On montre de même (en utilisant le fait que a et b sont distincts) que :

$$\begin{aligned} F &= \{\alpha X^3(X-a)(X-b)+\beta X^2(X-a)(X-b)+\gamma X(X-a)(X-b)+\delta(X-a)(X-b)\,|\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^4\} \\ &= \mathrm{Vect}(X^3(X-a)(X-b),X^2(X-a)(X-b),X(X-a)(X-b),(X-a)(X-b)) \end{aligned}$$

donc $X^3(X-a)(X-b), X^2(X-a)(X-b), X(X-a)(X-b), (X-a)(X-b)$ est génératrice, et puisqu'elle est échelonnée en degré, c'est une famille libre, donc une base de F.

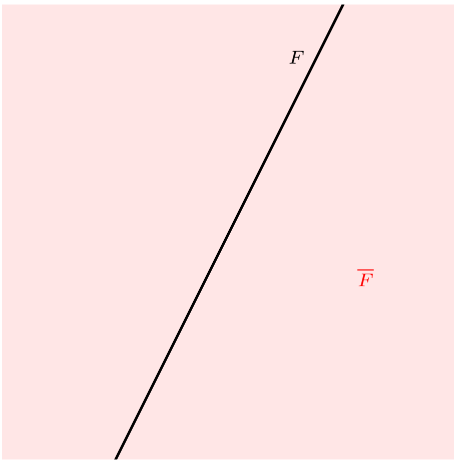
Exercice 32 : ✪✪ Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Comme en probabilités, on note $\overline{F}$ le complémentaire de F, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à F.

1. $\overline{F}$ est-il un espace vectoriel ?
2. Montrer que pour tous $x\in F$ et $y\in\overline{F}, x+y\in\overline{F}$. En déduire que $E=\mathrm{Vect}\left(\overline{F}\right)$. Illustrer par un dessin.

Correction :

1. F est un espace vectoriel donc contient 0 donc $\overline{F}$ ne contient pas 0 donc n'est pas un espace vectoriel. C'est pour cela qu'on ne s'intéresse jamais au complémentaire d'un espace vectoriel puisqu'il a un intérêt limité, puisque ce n'est même pas un espace vectoriel.
2. Soient $x\in F$ et $y\in\overline{y}$. Si $x+y\in F$ alors $y=(x+y)-x$ est CL d'éléments de F donc appartient à F car F est un sev de E donc stable par CL, ce qui est absurde puisque $y\notin F$.

   Soit $x\in E$. Montrons que x est CL d'éléments de $\overline{F}$. Si $x\in\overline{F}$, alors $x\in\mathrm{Vect}(\overline{F})$. Supposons à présent que $x\in F$. Soit $y\in\overline{F}$ (possible car $F\neq E$). Alors $x=(x+y)-y$ donc x est CL d'éléments de $\overline{F}$ (car y et $x+y\in\overline{F}$ d'après ce qui précède) donc appartient à $\mathrm{Vect}(\overline{F})$, si bien que $E=\mathrm{Vect}(\overline{F})$. En d'autres termes, le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient $\overline{F}$ est E tout entier, ce qu'on voit très bien sur le dessin ci-dessous où on a représenté un sev F de $\mathbb{R}^2$: puisque les sev de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{R}^2$ tout entier, le plus petit sev de $\mathbb{R}^2$ qui contient $\overline{F}$ est le plan tout entier.



Exercice 33 : ✪✪

1. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\mathrm{Vect}(A\cap B)\subset\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Soient E_1,E_2,E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(E_1\cap E_2)+(E_1\cap E_3)\subset E_1\cap(E_2+E_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que $E_1+(E_2\cap E_3)\subset(E_1+E_2)\cap(E_1+E_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si $E_1\subset E_2$, alors il y a égalité.

Correction :

1. Soit $x\in\mathrm{Vect}(A\cap B)$. Il existe donc $n\geq 1$, $x_1,\dots,x_n\in A\cap B$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $x=\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n$. Or, les x_i appartiennent à A donc x est CL d'éléments de A donc appartient à $\mathrm{Vect}(A)$ et, par symétrie des rôles, $x\in\mathrm{Vect}(B)$ donc $x\in\mathrm{Vect}(A)\cap\mathrm{Vect}(B)$, d'où l'inclusion voulue. Si on se place dans $\mathbb{R}^2$ et si on prend $A=\{(1,0)\}$ et $B=\{(2,0)\}$ alors $A\cap B=\varnothing$ donc $\mathrm{Vect}(A\cap B)=\{0\}$ mais $\mathrm{Vect}(A)=\mathrm{Vect}(B)=$l'axe des abscisses : l'inclusion est donc stricte.

2. Soit $x \in (E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3)$. Il existe alors $x_2 \in E_1 \cap E_2$ et $x_3 \in E_1 \cap E_3$ tels que $x = x_2 + x_3$. x_2 et x_3 appartiennent à E_1 qui est stable par somme car sev de E donc $x \in E_1$ et x est la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_3 donc $x \in E_2 + E_3$ donc $x \in E_1 \cap (E_2 + E_3)$: on a l'inclusion voulue. Si on se place dans $\mathbb{R}^3$ et si on prend $E_1 = \text{Vect}(1,0), E_2 = \text{Vect}(1,1)$ et $E_3 = \text{Vect}(0,1)$ alors $E_2 + E_3 = \mathbb{R}^2$ donc $E_1 \cap (E_2 + E_3) = E_1$ mais $E_1 \cap E_2 = E_1 \cap E_3 = \{0\}$ donc $(E_1 \cap E_2) + (E_2 \cap E_3) = \{0\}$: l'inclusion est stricte.
3. Soit $x \in E_1 + (E_2 \cap E_3)$: il existe donc $x_1 \in E_1$ et $y \in E_2 \cap E_3$ tels que $x = x_1 + y$. x est somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 donc $x \in E_1 + E_2$. De même, $x \in E_1 + E_3$ donc appartient à leur intersection, ce qui donne l'inclusion souhaitée. Le même contre-exemple que précédemment prouve que l'inclusion peut être stricte : $E_2 \cap E_3 = \{0\}$ donc $E_1 + (E_2 \cap E_3) = E_1$ et $E_1 + E_2 = E_1 + E_3 = \mathbb{R}^2$ donc l'intersection est aussi égale à $\mathbb{R}^2$.

   Supposons enfin que $E_1 \subset E_2$ et prouvons l'inclusion réciproque. Soit $x \in (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$. Puisque $x \in E_1 + E_2$, alors il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. De même, il existe $y_1 \in E_1$ et $y_3 \in E_3$ tels que $x = y_1 + y_3$ si bien que $x_1 + x_2 = y_1 + y_3$. Dès lors, $y_3 = x_1 + x_2 - y_1 \in E_2$: en effet, $E_1 \subset E_2$ donc cette quantité est une CL d'éléments de E_2 donc appartient à E_2 puisque E_2 est un sev de E. On en déduit que $y_3 \in E_2 + E_3$ et puisque $x = y_1 + y_3$, alors $x \in E_1 + (E_2 \cap E_3)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 34 - Polynômes trigonométriques pairs : ✪✪✪ Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ définis par :

$$F = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos(nx) \,|\, n \in \mathbb{N}\right) \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos^n(x) \,|\, n \in \mathbb{N}\right)$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Les familles $(x \mapsto \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x \mapsto \cos^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ forment-elles des bases de $F = G$?

Correction :

1. Grâce aux polynôme de Tchebychev (cf. chapitre 19), on sait déjà que, pour tout n, $x \mapsto \cos(nx)$ est un polynôme en cos donc est CL de fonctions du type $x \mapsto \cos^k(x)$ donc appartient à G. En d'autres termes, toutes les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$ appartiennent à G donc $F \subset G$ (rappelons que l'espace engendré par une partie est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion qui contient cette partie).

   Réciproquement, prouvons que $G \subset F$: il suffit donc de prouver que, pour tout n, $x \mapsto \cos^n(x)$ est un élément de F. Prouvons-le par récurrence sur n.
   - Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $x \mapsto \cos^n(x)$ appartient à F. »
   - H_0 est vraie puisque $x \mapsto \cos^0(x)$ est la fonction égale à 1 qui est aussi la fonction $x \mapsto \cos(0 \times x)$ qui appartient à F.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0, \dots, H_n$ vraies (récurrence forte) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons T_{n+1} le $(n+1)$-ième polynôme de Tchebychev, c'est-à-dire que $\cos((n+1)x) = T_{n+1}(\cos(x))$. Rappelons que T_{n+1} est de degré $n+1$ de coefficient dominant 2^n donc il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que :

     $$\cos((n+1)x) = 2^n \cos^{n+1}(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(x)$$

     si bien que :

     $$\cos^{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\left(\cos((n+1)x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cos^k(x)\right)$$

     Or, par HR, tous les termes en $\cos^k$ appartiennent à F, et $x \mapsto \cos((n+1)x)$ aussi donc $\cos^{n+1}(x)$ est CL d'éléments de F donc est un élément de F également, si bien que H_{n+1} est vraie, ce qui clôt la récurrence et permet de conclure.
2. On sait déjà qu'elles forment, par définition, une famille génératrice de $F = G$ et on a montré en cours (pour les fonctions $x \mapsto \cos(nx)$) et dans l'exercice 13 (pour les fonctions $x \mapsto \cos^n(x)$) qu'elles forment une famille libre donc une base de $F = G$.

28.6 Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 35 : ✪ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2 \iff E_1 = E_2$$

Correction : Supposons que $E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2$. Alors $E_1 \subset E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2$ donc $E_1 = E_1 \cap E_2$ c'est-à-dire que $E_1 \subset E_2$. Par symétrie des rôles, $E_2 \subset E_1$ donc $E_1 = E_2$.

Réciproquement, supposons que $E_1 = E_2$. Alors $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$. Prouvons que $E_1 + E_2 = E_1$. On a déjà l'inclusion $E_1 \subset E_1 + E_2$. Réciproquement, soit $x \in E_1 + E_2$. Alors il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ mais $x_2 \in E_2 = E_1$ et E_1 est stable par somme donc $x \in E_1$ ce qui permet de conclure.

Exercice 36 : ✪ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$.

1. Montrer que l'ensemble F des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que F et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Correction :

1. On rappelle qu'un polynôme M est un multiple de P s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = Q \times P$. Ainsi, $F = \{QP \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}$.
   - $0 = 0 \times P$ (0 est évidemment du polynôme nul ici) : $0 \in F$ donc F est non vide.
   - Soient $(M_1, M_2) \in F_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Il existe $(Q_1, Q_2) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que $M_1 = Q_1 P$ et $M_2 = Q_2 P$. Dès lors, $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)P \in F$. F est donc stable par CL donc est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

2. On cherche à montrer que tout polynôme A s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\mathbb{K}_n[X]$, ie qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $R \in \mathbb{K}_n[X]$ uniques tels que $A = QP + R$: c'est exactement le théorème de division euclidienne.

Exercice 37 : ✪ Soient F_1, F_2, G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.
2. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ sont-ils supplémentaires dans G ?

Correction :

1. Il suffit de voir $(F_1 \cap G) \cap (F_2 \cap G) = F_1 \cap F_2 \cap G \subset F_1 \cap F_2 = \{0\}$ donc $(F_1 \cap G) \cap (F_1 \cap G) = \{0\}$.
2. Non car on n'a pas forcément $G = (F_1 \cap G) + (F_2 \cap G)$: l'intersection n'est pas distributive sur la somme. Il suffit de prendre F_1, F_2, G trois droites vectorielles (i.e. passant par 0) distinctes du plan : on a $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2$ mais $F_1 \cap G = F_2 \cap G = \{0\}$ donc on n'a pas $G = (F_1 \cap G) \oplus (F_2 \cap G)$.

Exercice 38 : ✪ Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $E_1 = \{(x, y, z) \mid x + y - z = 0\}$ et $E_2 = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $E_1 \cap E_2$.
3. Établir que $E_1 + E_2 = E$. La somme est-elle directe ?

Correction :

1. E_1 est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène donc es un sev de $\mathbb{R}^3$. Pour E_2, il suffit de voir que
$$E_2 = \{a(1,1,1) + b(-1,1,-3) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$
donc $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,1), (-1,1,-3))$ donc est aussi un sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E_2$. Cherchons à quelle condition il appartient à E_1 (et donc à $E_1 \cap E_2$). Il existe donc a et b tels que $x = (a - b, a + b, a - 3b)$. Dès lors :
$$\begin{aligned} x \in E_1 \cap E_2 \quad & \iff \quad (a-b) + (a+b) - (a-3b) = 0 \\ & \iff \quad a + 3b = 0 \\ & \iff \quad a = -3b \end{aligned}$$
Finalement, $x \in E_1 \cap E_2$ si et seulement si $x = (-4b, -2b, -6b)$, c'est-à-dire que :
$$E_1 \cap E_2 = \{b(-4,-2,-6) \mid b \in \mathbb{R}\}$$
donc $E_1 \cap E_2 = \mathrm{Vect}(-4,-2,-6)$: il n'est pas surprenant d'obtenir une droite vectorielle puisqu'on prend l'intersection de deux plans en dimension 3 !

3. On peut déjà répondre que la somme n'est pas directe puisque l'intersection n'est pas nulle. Prouvons à présent que $E_1 + E_2 = E$. Soit $(u, v, w) \in E$. Montrons qu'il existe $(x_1, x_2, x_1 + x_2) \in E_1$ et $(a - b, a + b, a - 3b) \in E_2$ dont la somme soit égale à (u, v, w). Soient donc $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Travaillons par équivalences :

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_1 + x_2) + (a - b, a + b, a - 3b) = (u, v, w) \quad &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & a & - & b & = & u \\ & & x_2 & + & a & + & b & = & v \\ x_1 & + & x_2 & + & a & - & 3b & = & w \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & + & a & - & b & = & u \\ & x_2 & + & a & + & b & = & v \\ & x_2 & & & - & 2b & = & w - u \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & + & a & - & b & = & u \\ & x_2 & + & a & + & b & = & v \\ & & - & a & - & 3b & = & w - u - v \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + & a & = & u + b \\ & x_2 & + & a & = & v - b \\ & & & a & = & -w + u + v - 3b \end{array}\right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x_1 & & + & a & = & w - v + 4b \\ & x_2 & + & a & = & w - u + 2b \\ & & & a & = & -w + u + v - 3b \end{array}\right.
\end{aligned}$$

En prenant $b = 0$, on trouve $x_1 = w - v$, $x_2 = w - u$ et $a = -w + u + v$ (et donc $b = 0$) : en remplaçant, on a bien un élément de E_1 et un élément de E_2 dont la somme vaut (u, v, w) : tout élément de E s'écrit (de façon non unique, ce qui prouve encore une fois que la somme n'est pas directe) comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 : $E = E_1 + E_2$.

Exercice 39 : ✪✪ Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $E = E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \subset E_3$ alors $E_3 = E_1 \oplus (E_2 \cap E_3)$.
2. Montrer que l'on est dans cette situation si $E = \mathbb{R}^3$, $E_1 = \text{Vect}(1, 0, 0)$ et si E_2 et E_3 sont les plans d'équations $x - 3y + 4z = 0$ et $y = z$ respectivement.

Correction :

1. Soit $x \in E_3$. Alors $x \in E = E_1 \oplus E_2$ donc il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Par conséquent, $x_2 = x - x_1$ et puisque $x_1 \in E_1 \subset E_3$ alors $x_2 \in E_3$ (E_3 sev donc stable par CL). Par conséquent, $x_2 \in E_2 \cap E_3$ donc x s'écrit comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de $E_2 \cap E_3$ donc $E_3 \subset E_1 + (E_2 \cap E_3)$. Réciproquement, E_1 et $E_2 \cap E_3$ sont inclus dans E_3 donc leur somme aussi : si $x \in E_1 + (E_2 \cap E_3)$ alors il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2 \cap E_3$ tels que $x = x_1 + x_2$ mais x_1 appartient à E_3 car $E_1 \subset E_3$ et x_2 aussi donc leur somme aussi donc $x \in E_3$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

   Montrons enfin que la somme est directe : soit $x \in E_1 \cap (E_2 \cap E_3) \subset E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Alors $x = 0$, donc $E_1 \cap (E_2 \cap E_3) = \{0\}$, la somme est directe.
2. Il suffit donc de prouver que $E = E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \subset E_3$. Soit $x \in E_1$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = (\lambda, 0, 0)$ donc on a bien $x \in E_3$: $E_1 \subset E_3$. Il reste donc à prouver que E_1 et E_2 sont supplémentaires, ce qu'on fait comme précédemment (et c'est même plus facile car le système est très simple à résoudre). Soit $x \in E$ et soit $x_1 \in E_2, x_2 \in E_2$. Notons $x = (a, b, c), x_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $x_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Puisque $x_1 \in E_1$, alors $b_1 = c_1 = 0$ donc $x_1 = (a_1, 0, 0)$ et puisque $x_2 \in E_2$, alors $a_2 - 3b_2 + 4c_2 = 0$ donc $a_2 = 3b_2 - 4c_2$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
x = x_1 + x_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad (a_1, 0, 0) + (3b_2 - 4c_2, b_2, c_2) = (a, b, c) \\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a_1 & + & 3b_2 & - & 4c_2 & = & a \\ & & b_2 & & & = & b \\ & & & & c_2 & = & c \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   Ce système admet une unique solution, il y a donc existence et unicité de x_1 et x_2, on a bien $E = E_1 \oplus E_2$ ce qui est le résultat voulu.

Exercice 40 : ✪✪ Soient $(u, v) \in E^2$ et F un sev de E. Montrer que $F + \text{Vect}(u) = F + \text{Vect}(v)$ si et seulement s'il existe $x \in F$ et deux scalaires α et β non nuls tels que $x + \alpha u + \beta v = 0$.

Correction : Supposons que $F + \text{Vect}(u) = F + \text{Vect}(v)$. Puisque F est un sev de E, alors $0 \in F$ si bien que $u = 0+u \in F+\text{Vect}(u) = F+\text{Vect}(v)$ si bien qu'il existe $x \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = x+\lambda v$. Si $u \notin F$ alors $\lambda \neq 0$: en effet, si $\lambda = 0$ alors $u = x \in F$ ce qui est exclu, donc on a bien $x-u+\lambda v = 0$ avec $\lambda \neq 0$. Supposons à présent que $u \in F$: c'est encore plus facile puisque $F + \text{Vect}(u) = F$ et donc $F + \text{Vect}(v) = F$ donc $v \in F$ (sinon, $v \in F + \text{Vect}(v)$ donc $F + \text{Vect}(v) \neq F$ car contient $v \notin F$) et donc, en posant $x = u+v \in F$ (car F stable par somme), on a bien $x-u-v = 0$ ce qui est le résultat voulu.

Réciproquement, supposons qu'il existe $x \in F$ et α, β non nuls tels que $x + \alpha u + \beta v = 0$. Soit $y \in F + \text{Vect}(u)$. Alors il existe $a \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = a + \lambda u$, mais puisque $\alpha \neq 0$, alors :

$$u = \frac{1}{\alpha}(-x - \beta v)$$

et donc

$$y = \left(a - \frac{1}{\alpha}.x\right) - \frac{\beta}{\alpha}v \in F + \text{Vect}(v)$$

c'est-à-dire que $F + \text{Vect}(u) \subset F + \text{Vect}(v)$. Par symétrie des rôles on a l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 41 : ✪✪ Notons $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout a, notons E_a l'ensemble des fonctions de E s'annulant en a.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$.
3. La somme de E_a et E_b peut-elle être directe ?

Correction :

1. • La fonction nulle appartient à E_a donc E_a est non vide.
   • Soient f et g appartenant à E_a, et λ et μ deux réels. Alors f et g sont continues donc $\lambda f + \mu g$ est continue, et $f(a) = g(a) = 0$ donc

   $$(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = 0$$

   donc $\lambda f + \mu g \in E_a$: E_a est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de E.
2. Soit $f \in E$. On cherche une fonction $g \in E_a$ et $h \in E_b$ telles que $f = g + h$. Bien qu'il n'y ait pas du tout unicité (voir ci-dessous), faisons une espère d'analyse synthèse pour chercher dans la bonne direction et pas au pifomètre.
   • Analyse : si g et h conviennent, alors $f(a) = h(a)$ et $g(b) = f(b)$. g est donc une fonction nulle en a qui vaut $f(b)$ en b.
   • Synthèse : soit g la fonction affine passant par 0 en a et $f(b)$ en b, i.e. :

   $$g : x \mapsto \frac{f(b) - 0}{b - a}(x - a)$$

   Alors g est bien une fonction continue qui s'annule en a et qui vaut $f(b)$ en b, et posons $h = f - g$. Alors h est continue et appartient à E_b puisque $g(b) = f(b)$, et on a bien $f = g + h$ par construction.

   En conclusion, tout élément de E s'écrit (de façon non unique) comme somme d'un élément de E_a et d'un élément de E_b donc on a le résultat voulu.
3. Non, elle n'est jamais directe car il existe des fonctions continues non nulles qui s'annulent en a et en b, par exemple

   $$f : x \mapsto (x - a)(x - b)$$

   On n'a jamais $E_a \cap E_b = \{0\}$ donc la somme ne peut pas être directe.

Exercice 42 : ✪ Montrer à chaque fois que E_1 et E_1 sont supplémentaires dans E.

1. $E_1 = \text{Vect}(1, 2)$ et $E_2 = \text{Vect}(-1, 1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2. $E_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3. $E_1 = \{(x, 2x, 3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x + y, x + y, y) \,|\, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}(0, 1, 0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5. $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ et $E_2 = \text{Vect}(1, 2, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
6. $E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
7. E_1 l'ensemble des fonctions affines et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. E_1 l'ensemble des fonctions linéaires et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(1) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

9. E_1 l'ensemble des fonctions nulles en 0 et $\pi/2$ et $E_2 = \text{Vect}(\sin, \cos)$ dans $E = \mathscr{C}([0\,;\pi], \mathbb{R})$.
10. $E_1 = \text{Vect}(1, \dots, 1)$ et $E_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
11. ✪✪ $E_1 = \text{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$ et $E_2 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
12. E_1 l'ensemble des suites constantes et E_2 l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans E l'ensemble des suites convergentes.
13. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et E_2 l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
14. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et
$$E_2 = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
15. ✪✪ $E_1 = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,|\, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ et
$$E_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0\,;1], \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}^1([0\,;1], \mathbb{R})$.

Correction : Comme dit en classe, on va prouver que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. Pour des espaces simples (par exemple dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$), on peut travailler par équivalences et résoudre un système, on trouvera alors une unique solution ce qui donnera le résultat voulu, mais pour des exemples plus compliqués, on travaillera par analyse synthèse. On peut toujours travailler par analyse synthèse, mais dans des cas simples, on peut aller plus vite. Si vous avez un doute : analyse-synthèse.

1. Soient $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Il existe alors α et β tels que $x_1 = \alpha(1, 2)$ et $x_2 = \beta(-1, 1)$. On a alors :
$$\begin{aligned}
x = x_1 + x_2 \quad & \iff \quad \begin{cases} \alpha - \beta = a \\ 2\alpha + \beta = b \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \alpha - \beta = a \\ 3\beta = b - 2a \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \alpha = a + \beta \\ \beta = \dfrac{b - 2a}{3} \end{cases} \\
& \iff \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a + b}{3} \\ \beta = \dfrac{b - 2a}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$
Il y a existence et unicité de α et de β donc de x_1 et x_2 : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :
$$(a, b) = \underbrace{\frac{a + b}{3}.(1, 2)}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{b - 2a}{3}.(-1, 1)}_{\in E_2}$$
2. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1$ et $z = (z_1, z_2, z_3) \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc $y_3 = -y_1$ et $z_1 = z_3 = 2z_2$ si bien que $y = (y_1, y_2, -y_1)$ et $z = (2z_2, z_2, 2z_2)$. Raisonnons ensuite par équivalences :

$$x = y + z \iff (y_1, y_2, -y_1) + (2z_2, z_2, 2z_2) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\iff \begin{cases} y_1 & & + & 2z_2 & = & x_1 \\ & y_2 & + & z_2 & = & x_2 \\ -y_1 & & + & 2z_2 & = & x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 & + & & + & 2z_2 & = & x_1 \\ & & y_2 & + & z_2 & = & x_2 \\ & & & & 4z_2 & = & x_3 + x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y_1 & & & = & \dfrac{x_1 - x_3}{2} \\ & y_2 & & = & \dfrac{4x_2 - x_1 - x_3}{4} \\ & & z_2 & = & \dfrac{x_3 + x_1}{4} \end{cases}$$

Il y a existence et unicité de y_1, y_2 et de z_2 donc de y et z : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\left(\frac{x_1 - x_3}{2}, \frac{4x_2 - x_1 - x_3}{4}, \frac{x_3 - x_1}{2}\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{x_1 + x_3}{4}, \frac{x_1 + x_3}{2}\right)}_{\in E_2}$$

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_1 = (a, 2a, 3a) \in E_1$ et $x_2 = (b + c, b + c, c) \in E_2$ (il fallait faire attention à ne pas donner le même nom à toutes les variables).

$$x = x_1 + x_2 \iff (a, 2a, 3a) + (b + c, b + c, c) = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\iff \begin{cases} a & + & b & + & c & = & x_1 \\ 2a & + & b & + & c & = & x_2 \\ 3a & & & + & c & = & x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & + & b & + & c & = & x_1 \\ & - & b & - & c & = & x_2 - 2x_1 \\ & - & 3b & - & 2c & = & x_3 - 3x_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & + & b & + & c & = & x_1 \\ & & b & + & c & = & 2x_1 - x_2 \\ & & & & c & = & 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & & & = & -x_1 + x_2 \\ & b & & = & -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ & & c & = & 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

Il y a existence et unicité de a, b et de c donc de x_1 et x_2 : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(-x_1 + x_2, -2x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{(2x_1 - x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + x_3)}_{\in E_2}$$

4. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y \in E_1$ et $z \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc $y_2 = y_1 + y_3$ et $z_1 = z_3 = 0$ donc $y = (y_1, y_1 + y_3, y_3)$ et $z = (0, z_2, 0)$. On trouve de même que $y_1 = x_1, z_2 = x_2 - x_1 - x_3, y_3 = x_3$ et on conclut de la même façon, avec la décomposition suivante :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(x_1, x_1 + x_3, x_3)}_{\in E_1} + \underbrace{(0, x_2 - x_1 - x_3, 0)}_{\in E_2}$$

5. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y \in E_1$ et $z \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc il existe a, b, c tels que $y = a(1,0,0) + b(1,1,0)$ et $z = c(1,2,3)$. On trouve de même que $a = x_2 - x_2 + x_3/3, b = x_2 - 2x_3/3$ et $c = x/3/3$ et on conclut de la même façon, avec la décomposition suivante :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\left(x_1 - x_2 + \frac{x_3}{3}, 0, 0\right) + \left(x_2 - \frac{2x_3}{3}, x_2 - \frac{2x_3}{3}, 0\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\frac{x_3}{3}, \frac{2x_3}{3}, x_3\right)}_{\in E_2}$$

6. On va commencer à travailler par analyse synthèse car les raisonnements par équivalences ne seront plus possibles (et même lorsqu'ils le seront, ils seront plus délicats à rédiger). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche à prouver qu'il existe $(v_n) \in E_1$ et $(w_n) \in E_2$ telles que $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$.

   Analyse : Si (v_n) et (w_n) conviennent. Alors, pour tout n, $v_{2n+1} = 0$ donc $w_{2n+1} = u_{2n+1}$ et puisque $(w_n) \in E_2$, alors $w_{2n} = u_{2n+1}$. Par conséquent, pour tout n, $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $v_n = u_n - w_n$.

   Synthèse : Soient (v_n) et (w_n) les suites définies de la façon suivante :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n+1}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - w_n$ i.e. : $\forall k \in \mathbb{N}, v_{2k} = u_{2k} - u_{2k+1}$ et $v_{2k+1} = u_{2k+1} - u_{2k+1} = 0$.

   Par construction, (v_n) appartient à E_1, (w_n) appartient à E_2 et $(u_n) = (v_n) + (w_n)$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité des suites (v_n) et (w_n) : E_1 et E_2 sont supplémentaires.
7. Soit $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On souhaite prouver qu'il existe $g \in E_1$ et $h \in E_2$ uniques telles que $f = g + h$.

   Analyse : Si g et h conviennent. g étant affine, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x, $g(x) = ax + b$. Pour tout x, $f(x) = ax + b + h(x)$. En évaluant en 0, étant donné que $h(0) = 0$ puisque $h \in E_2$, on obtient : $b = f(0)$. Les fonctions étant dérivables, on peut dériver l'égalité précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a + h'(x)$ et, de même, $h'(0) = 0$ donc $a = f'(0)$ si bien que $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$.

   Synthèse : Soient $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$ i.e. $h : x \mapsto f(x) - f'(0)x - f(0)$. Alors, par construction, g est affine donc appartient à E_1 et $f = g + h$. De plus, $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $h'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ donc $h \in E_2$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité de f et g : E_1 et E_2 sont supplémentaires.
8. Rappelons qu'une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $g(x) = ax$. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On souhaite prouver qu'il existe $g \in E_1$ et $h \in E_2$ uniques telles que $f = g + h$.

   Analyse : Si g et h conviennent. g étant linéaire, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout x, $g(x) = ax$. Pour tout x, $f(x) = ax + h(x)$. En évaluant en 1, étant donné que $h(1) = 0$ puisque $h \in E_2$, on obtient : $a = f(1)$, si bien que $g : x \mapsto f(1)x$ et $h = f - g$.

   Synthèse : Soient $g : x \mapsto f(1)x$ et $h = f - g$ i.e. $h : x \mapsto f(x) - f(1)x$. Alors, par construction, g est linéaire donc appartient à E_1 et $f = g + h$. De plus, $h(1) = f(1) - f(1) = 0$ donc $h \in E_2$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité de f et g : E_1 et E_2 sont supplémentaires.
9. Soit $f \in \mathscr{C}([0\,;\pi], \mathbb{R})$. On souhaite prouver qu'il existe $g \in E_1$ et $h \in E_2$ uniques telles que $f = g + h$.

   Analyse : Si g et h conviennent. $h \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ donc il existe a et b réels tels que $h = a \sin + b \cos$ et donc $f = g + a \sin + b \cos$. En évaluant en 0 et en $\pi/2$ et en utilisant le fait que $g(0) = g(\pi/2) = 0$ car $g \in E_1$, on obtient que $b = f(0)$ et $a = f(\pi)/2$ si bien que $h = f(\pi/2) \times \sin + f(0) \times \cos$ et $g = f - h$.

   Synthèse : Soient $h : x \mapsto f(\pi/2) \times \sin(x) + f(0) \times \cos(x)$ et $g = f - h$ i.e. $g : x \mapsto f(x) - f(\pi/2)\sin(x) - f(0)\cos(x)$. Alors, par construction, $f = g + h$ et $h \in \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$. De plus, $g(0) = f(0) - f(0)\cos(1) = 0$ et $g(\pi/2) = 0$ donc $g \in E_1$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité de f et g : E_1 et E_2 sont supplémentaires.
10. Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, y = (y_1, \dots, y_n) \in E_1$ et $z = (z_1, \dots, z_n) \in E_2$. $y \in E_1$ donc $y_1 = \cdots = y_n$ donc $y = (y_1, y_1, \dots, y_1)$.

    Analyse : Si y et z conviennent i.e. si $x = y + z$. Alors :

$$\begin{cases} y_1 + z_1 & = & x_1 \\ y_1 + z_2 & = & x_2 \\ & \vdots & \\ y_1 + z_{n-1} & = & x_{n-1} \\ y_1 + z_n & = & x_n \end{cases}$$

Si on somme toutes ces lignes, cela donne :

$$ny_1 + (z_1 + \cdots + z_n) = x_1 + \cdots + x_n$$

Or, $z \in E_1$ donc $z_1 + \cdots + z_n = 0$ si bien que $y_1 = S/n$ où $S = x_1 + \cdots + x_n$. Dès lors, $z - x - y$ i.e. $z = (x_1 - S/n, \cdots, x_n - S/n)$.

Synthèse : Soient $y = S/n.(1, \dots, 1) = (S/n, \dots, S/n)$ et $z = x - y = (x_1 - S/n, \dots, x_n - S/n)$. Par construction, $y \in \text{Vect}(1, \dots, 1)$ et $x = y + z$. De plus :

$$\begin{aligned} z_1 + \cdots + z_n &= x_1 - \frac{S}{n} + \cdots + x_n - \frac{S}{n} \\ &= x_1 + \cdots + x_n - n \times \frac{S}{n} \\ &= S - S \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $z \in E_2$ et on conclut comme précédemment.

11. Soit $x = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}, y \in E_1$ et $z = (z_1, \dots, z_{2n}) \in E_2$. $y \in E_1$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y = \alpha(1, 2, \dots, 2n) = (\alpha, 2\alpha, \dots, 2n\alpha)$.

Analyse : Si y et z conviennent. Alors, pour tout $k \in [\![1 \,;\, 2n]\!], x_k = z_k + \alpha \times k$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} x_k &= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \alpha k + \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} z_k \\ &= \alpha \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k + 0 \end{aligned}$$

En effet, la deuxième somme est nulle puisque $z \in E_2$. Or, on a prouvé dans le chapitre 4 (cf. cours, il faut séparer en deux paquets selon la parité de k, il faut savoir le refaire) que

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = n$$

Par conséquent :

$$\alpha = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} x_k$$

et donc, pour tout k, $z_k = x_k - \alpha \times k$.

Synthèse : Soit

$$\alpha = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} x_k$$

et soient $y = \alpha.(1, 2, \dots, 2n)$ ainsi que $z = x - y = (x_1 - \alpha, x_2 - 2\alpha, \dots, x_{2n} - 2n\alpha)$. Par construction, $y \in \text{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$, $x = y + z$. Enfin :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}z_k &= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k - \alpha\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k - \alpha\times -n \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k + \alpha\times n \\
&= \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k - \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}x_k \\
&= 0
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. On cherche à prouver qu'il existe $(v_n)\in E_1$ et $(w_n)\in E_2$ telles que $(u_n)=(v_n)+(w_n)$ c'est-à-dire : $\forall n\in\mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$. Notons L la limite de (u_n) (on ne travaille qu'avec des suites convergentes).

    Analyse : Si (v_n) et (w_n) conviennent. Soit λ la valeur de la suite (v_n) (qui est une suite constante). Alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$ et donc $w_n = u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L-\lambda$. Or, $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par unicité de la limite, $L-\lambda = 0$ donc $\lambda = L$. En d'autres termes, (v_n) est constante égale à L et $(w_n) = (u_n)-(v_n)$.

    Synthèse : Soit (v_n) la suite constante égale à L et soit $(w_n)=(u_n)-(v_n)$ i.e. (w_n) est la suite de terme général $u_n - L$. Alors, par construction, $(u_n)=(v_n)+(w_n)$, (v_n) est constante et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L-L=0$ ce qui permet de conclure.

13. Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Montrons qu'il existe $f_1\in E_1$ et $f_2\in E_2$ uniques telles que $f=f_1+f_2$.

    Analyse : si f_1 et f_2 conviennent. En évaluant l'égalité $f=f_1+g_2$ en 0, il vient :

    $$f(0)=f_1(0)+f_2(0)=f_1(0)$$

    car f_2 est nulle en 0. Puisque f_1 est constante, alors elle est égale à sa valeur en 0, c'est-à-dire que f_1 est la fonction constante égale à $f(0)$, et donc $f_2=f-f_1=f-f(0)$.

    Synthèse : soient f_1 la fonction constante égale à $f(0)$, et $f_2=f-f(0)$. Alors f_1 est constante par définition, $f_2(0)=0$ et $f=f_1+f_2$: c'est bon. Tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires.

14. Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrons qu'il existe $f_1\in E_1$ et $f_2\in E_2$ uniques telles que $f=f_1+f_2$.

    Analyse : si f_1 et f_2 conviennent. En intégrant l'égalité $f=f_1+f_2$ entre 0 et 1, il vient

    $$\begin{aligned}
    \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 f_1(t)+f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
    &= \int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t \\
    &= \int_0^1 f_1(t)\,\mathrm{d}t
    \end{aligned}$$

    En effet, la deuxième intégrale est nulle puisque $f_2\in E_2$. Puisque f_1 est constante, alors elle est égale à sa valeur en 0 et donc l'intégrale ci-dessus est égale à $f(0)\times 1 = f(0)$, c'est-à-dire que f_1 est la fonction constante égale à $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et donc $f_2=f-f_1=f-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

    Synthèse : soient f_1 la fonction constante égale à $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$, et $f_2=f-\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors g est constante par définition, $f=f_1+f_2$ et on montre aisément que $\displaystyle\int_0^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$: c'est bon. Les deux espaces sont bien supplémentaires.

15. Idem, soient $f \in E, f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$.

Analyse : Si f_1 et f_2 conviennent. Il existe alors a_0, a_1, a_2 tels que, pour tout $x \in [0;1], f_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Ainsi, pour tout x,

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + f_2(x)$$

En évaluant en 0, $f(0) = a_0$ puisque $f(0) = 0$. En dérivant (toutes les fonctions sont $\mathscr{C}^1$) et en évaluant en 1, on trouve que $a_1 + 2a_2 = f'(1)$ (on rappelle que ${f_2}'(1) = 0$). En intégrant l'égalité entre 0 et 1, il vient :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(0) + a_1 t + a_2 t^2\,\mathrm{d}t$$

On a utilisé le fait que l'intégrale de f_2 est nulle. Dès lors :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}$$

On trouve donc :

$$a_1 = -\frac{1}{2} \times f'(1) + 3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - 3 \times f(0) \qquad \text{et} \qquad a_2 = \frac{3}{4} \times f'(1) - \frac{3}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2} \times f(0)$$

Par conséquent :

$$f_1 : \left(\frac{3}{4} \times f'(1) - \frac{3}{2}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{3}{2} \times f(0)\right)x^2 + \left(-\frac{1}{2} \times f'(1) + 3\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t - 3 \times f(0)\right)x + f(0)$$

et $f_2 = f - f_1$.

Synthèse : Soient f_1 et f_2 les fonctions ci-dessus. Alors, par construction, $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$. On prouve enfin aisément que $f_2(0) = 0$, ${f_2}'(1) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 f_2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (faites le !) si bien que $f_2 \in E_2$, ce qui permet de conclure.

Exercice 43 : ✪ On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On pose $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (1,1,0,0), e_3 = (1,1,1,0)$ et $e_4 = (1,1,1,1)$. Soient enfin $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Exprimer E_1 et E_2 à l'aide d'une ou de plusieurs équations, et prouver que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

Correction : On trouve comme précédemment que E_1 est l'ensemble des $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $z = 0$ et $t = 0$ (donc deux équations) et E_2 l'ensemble des $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x = y = z$ (i.e. $x - y = 0$ et $x - z = 0$ donc aussi deux équations). On prouve de même que précédemment que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre et génératrice donc une base de E : on conclut à l'aide du théorème de concaténation des bases.

Exercice 44 : ✪✪ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 + E_2 = E$. Soit E_3 un supplémentaire de $E_1 \bigcap E_2$ dans E_1. Montrer que $E_2 \oplus E_3 = E$.

Correction :

- Montrons tout d'abord que $E_1 + E_2 = E_3 + E_2$. Soit $x \in E_1 + E_2$. Il existe donc $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$. Or, $x_1 \in E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus E_3$ donc il existe $y \in E_1 \cap E_2$ et $x_3 \in E_3$ tels que $x_1 = y + x_3$, d'où $x = y + x_3 + x_2$ c'est-à-dire que
$$x = \underbrace{x_3}_{\in E_3} + \underbrace{(y + x_2)}_{\in E_2} \in E_3 + E_2.$$
Finalement, $E_1 + E_2 \subset E_3 + E_3$, et puisque $E_3 \subset E_1$, on a l'inclusion $E_3 + E_2 \subset E_1 + E_2$. D'où l'égalité.
- Montrons à présent que E_3 et E_2 sont en somme directe. Puisqu'il n'y a que deux sous-espaces vectoriels, il suffit de montrer que leur intersection est nulle. Soit donc $x \in E_3 \cap E_2$. Comme $x \in E_3$, on a $x \in E_1$ et $x \in E_2$ donc $x \in E_1 \cap E_2$. Finalement, $x \in E_3 \cap (E_1 \cap E_2) = \{0\}$ car E_3 et $E_1 \cap E_2$ sont en somme directe. Par conséquent $x = 0$. Ainsi $E_3 \cap E_2 = \{0\}$: E_3 et E_2 sont bien en somme directe.

En conclusion, $E_1 + E_2 = E_3 \oplus E_2$.

Exercice 45 : ✪✪✪ Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1\,;\,p]\!]}$ p réels distincts de $[0;1]$ et soit

$$E_1 = \{f \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R}) \mid f(\alpha_i) = 0 \quad \forall i\}.$$

Montrer que c'est un espace vectoriel et en trouver un supplémentaire dans $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ (on pourra chercher un ensemble de fonctions polynômes).

Correction : La fonction nulle appartient à E_1 donc E_1 est non vide. Soient $(f,g) \in {E_1}^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. f et g étant continues sur $]\,0\,;1\,[$, $(\lambda f + \mu g) \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Soit $i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$.

$$(\lambda f + \mu g)(\alpha_i) = \lambda f(\alpha_i) + \mu g(\alpha_i) = 0$$

(car f et g appartiennent à E_1). En d'autres termes, $\lambda f + \mu g \in E_1$. Ainsi, E_1 est stable par combinaison linéaire donc est un sev de $\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de référence. En particulier, c'est un espace vectoriel. On cherche un espace vectoriel de fonctions polynômes (c'est une indication de l'énoncé) supplémentaire de E_1. Soit $f \in E$. On veut trouver $g \in E_1$ et P une fonction polynôme telle que $f = g + P$ et, avec un peu de chance, P et g seront uniques.

- Analyse : si g et P conviennent. En évaluant l'égalité $f = g + P$ en α_i, il vient $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$. Et c'est la seule condition sur P. Question : un polynôme P vérifiant ces conditions existe-t-il ? Et, si oui, est-il unique ? On cherche un polynôme vérifiant $P(\alpha_i) = f(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n) = f(\alpha_n)$. Et ça nous fait penser aux... polynômes d'interpolation de Lagrange ! Rappelons que si $(a_1, \dots, a_n)$ sont n réels **distincts** et $(b_1, \dots, b_n)$ sont n réels pas forcément distincts, il existe un unique $L \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $L(a_i) = b_i$ pour tout i (par exemple, il y a une unique fonction affine dont le graphe passe par deux points d'abscisses distinctes). Ainsi, pour avoir à la fois l'existence et l'unicité, il faut donner une condition sur le degré. Supposons donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Alors P est l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange vérifiant $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ pour tout i, et $g = f - P$.
- Synthèse : soit P l'unique élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifiant $P(\alpha_i) = f(\alpha_i)$ pour tout i et soit $g = f - P$. Alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $g(\alpha_i) = 0$ pour tout i et on a bien $f = g + P$.

En conclusion, tout élément f de E s'écrit d'une façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (on identifie ici polynôme et fonction polynomiale). Ainsi, un supplémentaire de E_1 dans $\mathscr{C}^{(}\,[\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ est $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Remarque : on a fait un très léger abus de langage, les éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sont en effet définies sur $\mathbb{R}$ (idem, identification des polynômes et fonctions polynomiales). Le supplémentaire est donc plutôt l'ensemble des fonctions polynômes définies sur $[\,0\,;1\,]$, ou (ce qui revient au même) l'ensemble des restrictions à $[\,0\,;1\,]$ des fonctions polynômes (bien sûr, de degré inférieur ou égal à $n-1$).

Chapitre 29

Applications linéaires

« I would prefer not to. »

Herman Melville, Bartleby le scribe

Si rien n'est précisé, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Vrai ou Faux ?

1. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(2x) = 2f(x)$.
2. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(2x) = f(2) \times f(x)$.
3. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(x+2) = f(x) + f(2)$.
4. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est vide.
5. Une application linéaire d'un espace dans lui-même est bijective.
6. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire et injective, alors f est bijective.
7. Soit $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Alors f est linéaire et $f^2 = 0$.
8. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ constante égale à 1 est un projecteur.
9. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\ker(f) \neq \operatorname{Im}(f)$.
10. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
11. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Im}(f^2)$.
12. Dans cette question et les suivantes, on se donne (e_1, e_2, e_3) une base de E. Si $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = 0$ alors f est la fonction nulle.
13. Si f est un endomorphisme de E vérifiant $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$, alors f est un automorphisme.
14. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$.
15. Soit $(f_1, f_2, f_3) \in E^3$. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = f_1$, $f(e_2) = f_2$, $f(e_3) = f_3$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = f_1 + f_2 + f_3$.
16. Soit $(f_1, f_2, f_3) \in E^3$. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = e_3$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = 5e_1 + 3e_2 - e_3$.
17. Si u et v appartiennent à $\mathscr{L}(E, F)$, alors $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.
18. Un projecteur n'est pas injectif.
19. La somme de deux projecteurs est un projecteur.
20. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $-p$ est un projecteur.
21. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Id}_E - p$ est un projecteur.
22. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $-s$ est une symétrie.

29.1 Être ou ne pas être une application linéaire ?

Exercice 1 : ✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de E ?

1. $f \mapsto \exp \circ f$
2. $f \mapsto f \circ \exp$
3. $f \mapsto \exp \times f'$
4. $f \mapsto f'' - f$.

Correction :

1. Si 0_E est la fonction nulle, alors $u(0_E)$ est la fonction constante égale à 1 : $u(0_E) \neq 0_E$: u n'est pas linéaire donc n'est pas un endomorphisme de E.
2. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f+\mu g) & = & (\lambda f+\mu g)\circ \exp \\ & = & \lambda f \circ \exp + \mu g \circ \exp \quad \text{(vrai même si } f \text{ n'est pas linéaire !)} \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

Ainsi, u est linéaire. Or, si $f \in E$, alors $u(f) = f \circ \exp$ est $\mathscr{C}^\infty$ car composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$: $u(f) \in E$, u va de E dans E donc est un endomorphisme de E.
3. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f+\mu g) & = & \exp \times(\lambda f+\mu g)' \\ & = & \exp \times(\lambda f'+\mu g') \qquad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & \lambda \exp \times f' + \mu \exp \times g' \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

Ainsi, u est linéaire. Or, si $f \in E$, alors f' est aussi $\mathscr{C}^\infty$ et donc $u(f)$ est aussi $\mathscr{C}^\infty$ car est un produit de fonctions $\mathscr{C}^\infty$: $u(f) \in E$, u va de E dans E donc est un endomorphisme de E.
4. Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f+\mu g) & = & (\lambda f+\mu g)'' - (\lambda f+\mu g) \\ & = & \lambda f'' + \mu g'' - \lambda f - \mu g \qquad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ & = & \lambda(f''-f) + \mu(g''-g) \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

Ainsi, u est linéaire. Or, si $f \in E$, alors f'' est aussi $\mathscr{C}^\infty$ et donc $u(f)$ est aussi $\mathscr{C}^\infty$ car est une différence de fonctions $\mathscr{C}^\infty$: $u(f) \in E$, u va de E dans E donc est un endomorphisme de E.

Exercice 2 : ✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$?

1. $f \mapsto f(2024)$.
2. $f \mapsto f(1) - 1$.
3. $f \mapsto f''(3)$.
4. $f \mapsto (f'(2))^2$.
5. $f \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\sqrt{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Correction : Notons à chaque fois u l'application de l'énoncé.

1. On peut se contenter de dire que u est linéaire par linéarité de l'évaulation, mais on va le prouver. Soient $(f,g) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f+\mu g) & = & (\lambda f+\mu g)(2024) \\ & = & \lambda f(2024) + \mu g(2024) \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

u est linéaire.
2. Si on note 0_E la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $u(0_E) = 1 \neq 0$: u n'est pas linéaire.
3. Soient $(f,g) \in E^2$, $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f+\mu g) & = & (\lambda f+\mu g)''(3) \\ & = & \lambda f''(3) + \mu g''(3) \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

u est linéaire. On l'a rédigé, mais on peut se contenter de dire que u est linéaire par linéarité de la dérivation.

4. Montrons que u n'est pas linéaire (à cause du carré). Attention, il faut un contre-exemple explicite ! Pas de chance, $u(0_E) = 0$ donc ce n'est pas aussi simple. Notons f la fonction carré, qui appartient bien à E. Alors $f'(2) = 4$ donc $u(f) = 16$ mais $u(2f) = 64 \neq 2u(f)$: u n'est pas linéaire.
5. u est linéaire par linéarité de l'intégrale. On peut se contenter de dire ça, mais si on veut le rédiger : soient $(f, g) \in E^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda f + \mu g) & = & \displaystyle\int_{-\pi}^{\sqrt{2}} (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \lambda \displaystyle\int_{-\pi}^{\sqrt{2}} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \displaystyle\int_{-\pi}^{\sqrt{2}} g(t)\,\mathrm{d}t \\ & = & \lambda u(f) + \mu u(g) \end{array}$$

donc u est bien linéaire.

Exercice 3 : ✪ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$? Le cas échéant, donner une base de son image et de son noyau.

1. $u : (x, y, z) \mapsto (x, xy, x - z)$
2. $u : (x, y, z) \mapsto (x + y, 2x + 5, 0)$
3. $u : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, 0)$.
4. $u : (x, y, z) \mapsto (x - 3, x + y, z + 2)$
5. $u : (x, y, z) \mapsto (y + z, x - 2024z, -3x - 4y)$
6. $u : (x, y, z) \mapsto (-x + z, -y + z, x - 2y + z)$
7. $u : (x, y, z) \mapsto (x + 2y, z - x, x + 4y + z)$

Correction : Les applications allant toutes de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même, ce sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si elles sont linéaires.

1. u n'est pas linéaire à cause du xy mais il faut un contre-exemple explicite : il suffit de voir que $u(1, 1, 1) = (1, 1, 0)$ et $u(2, 2, 2) = (2, 4, 0) \neq 2u(1, 1, 1)$.
2. u n'est pas linéaire car $u(0, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$.
3. Montrons que u est linéaire. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

donc (penser à « première coordonnée » etc.)

$$\begin{array}{rcl} u(\lambda x + \mu y) & = & (\lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_2 - \mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, 0) \\ & = & \lambda(x_1 - x_2, x_1 + x_2, 0) + \mu(y_1 - y_2, y_1 + y_2, 0) \\ & = & \lambda u(x) + \mu u(y) \end{array}$$

c'est-à-dire que u est linéaire donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Donnons une base de son image et de son noyau. Commençons par l'image. Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$, alors $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\Big(u(1, 0, 0), u(0, 1, 0), u(0, 0, 1)\Big) \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1, 1, 0)}_{=u(e_1)}, \underbrace{(-1, 1, 0)}_{=u(e_2)}, \underbrace{(0, 0, 0)}_{=u(e_3)}\Big). \end{aligned}$$

Il est immédiat que cette famille est liée puisqu'elle contient le vecteur nul. Le vecteur nul étant combinaison linéaire des autres, il est « superflu », c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (-1, 1, 0))$ donc ces vecteurs forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, et ils sont libres car non proportionnels (attention, ceci est valable uniquement pour deux vecteurs) donc $(1, 1, 0)$ et $(-1, 1, 0)$ forment une base de $\mathrm{Im}(u)$. Cherchons à présent une base du noyau. On se donne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} (x, y, z) \in \ker(u) & \iff & u(x, y, z) = (0, 0, 0) \\ & \iff & (x - y, x + y, 0) = (0, 0, 0) \\ & \iff & \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \\ & \iff & \left\{\begin{array}{ccc} x & = & y \\ x & = & -y \end{array}\right. \\ & \iff & x = y = 0 \end{array}$$

Nous obtenons donc que $\ker(u) = \{z(0,0,1) \,|\, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\big((0,0,1)\big)$. $(0,0,1)$ est donc une famille génératrice du noyau, et c'est aussi une famille libre puisque c'est une famille à un élément qui est non nul : c'est donc une base.

4. u n'est pas linéaire car $u(0,0,0) \neq (0,0,0)$.
5. Montrons que u est linéaire. Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3)$ appartenant à $\mathbb{R}^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3)$$

donc (penser à « première coordonnée » etc.)

$$\begin{aligned} u(\lambda x + \mu y) &= (\lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_1 + \mu y_1 - 2024(\lambda x_3 + \mu y_3), -3(\lambda x_1 + \mu y_1) - 4(\lambda x_2 + \mu y_2)) \\ &= \lambda(x_2 + x_3, x_1 - 2024x_3, -3x_1 - 4x_2) + \mu(y_2 + y_3, y_1 - 2024y_3, -3y_1 - 4y_2) \\ &= \lambda u(x) + \mu u(y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est linéaire donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Donnons une base de son image et de son noyau. Commençons par l'image. Puisque la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (e_1, e_2, e_3) engendre $\mathbb{R}^3$, alors $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une famille génératrice de $\text{Im}(u)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}\Big(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)\Big) \\ &= \text{Vect}\Big(\underbrace{(0,1,-3)}_{=u(e_1)}, \underbrace{(1,0,-4)}_{=u(e_2)}, \underbrace{(1,-2024,0)}_{=u(e_3)}\Big). \end{aligned}$$

Cherchons si ces trois vecteurs sont libres. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) = 0 \quad &\iff \quad \begin{cases} \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2024\gamma = 0 \\ -3\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha - 2024\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -3\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha - 2021\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -4\beta - 6066\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha - 2021\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -6062\gamma = 0 \end{cases} \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que cette famille est libre, et puisqu'elle est génératrice de $\text{Im}(u)$, c'est une base de $\text{Im}(u)$. Cherchons à présent une base du noyau : soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \ker(u) \quad &\iff \quad u(x,y,z) = (0,0,0) \\ &\iff \quad (y + z, x - 2024z, -3x - 4y) = (0,0,0) \\ &\iff \quad \begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2024z = 0 \\ -3x - 4y = 0 \end{cases} \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

En effet, on a déjà résolu ce système. Dès lors, $\ker(u) = \{(0,0,0)\}$ ce qui prouve par ailleurs que u est injective. On peut dire que $\ker(u)$ n'admet pas de base, ou admet comme base l'ensemble vide par convention, mais ce n'est pas très important, puisqu'on a de toute façon trouvé $\ker(u)$ donc ça suffit pour répondre à la question.
6. On prouve de même que u est linéaire. De même, l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image donc $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une famille génératrice de $\text{Im}(u)$:

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}\Big(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)\Big) \\ &= \text{Vect}\Big(\underbrace{(-1,0,1)}_{=u(e_1)}, \underbrace{(0,-1,-2)}_{=u(e_2)}, \underbrace{(1,1,1)}_{=u(e_3)}\Big). \end{aligned}$$

Cherchons si ces trois vecteurs sont libres. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) = 0 \qquad & \iff \qquad \begin{cases} -\alpha \qquad\quad + \gamma = 0 \\ \qquad - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} -\alpha \qquad\quad + \gamma = 0 \\ \qquad - \beta + \gamma = 0 \\ \qquad - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = \gamma \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\alpha = \beta = \gamma = 1$ conviennent donc cette famille est liée. De plus, $u(e_3) = -u(e_1) - u(e_2)$ c'est-à-dire que $u(e_3)$ est CL de $u(e_1)$ et $u(e_2)$ si bien que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) = \mathrm{Vect}((-1,0,1),(0,-1,-2))$ donc ces deux vecteurs forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ et ces deux vecteurs sont libres car non colinéaires donc forment une base de $\mathrm{Im}(u)$. Déterminons son noyau. On se donne $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(u) \qquad & \iff \qquad u(x,y,z) = (0,0,0) \\
& \iff \qquad (x+2y, z-x, x+4y+z) = (0,0,0) \\
& \iff \qquad \begin{cases} -x \qquad\quad + z = 0 \\ \qquad - y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} -x \qquad\quad + z = 0 \\ \qquad - y + z = 0 \\ \qquad - 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons donc que $\mathrm{Ker}(u) = \{z(1,1,1) \,|\, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$. $(1,1,1)$ est donc une famille génératrice du noyau, et c'est aussi une famille libre puisque c'est une famille à un élément qui est non nul : c'est donc une base.

7. On prouve de même que u est linéaire. De même, l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image donc $u(e_1), u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}(u) &= \mathrm{Vect}\Big(u(1,0,0), u(0,1,0), u(0,0,1)\Big) \\
&= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(1,-1,1)}_{=u(e_1)}, \underbrace{(2,0,4)}_{=u(e_2)}, \underbrace{(0,1,1)}_{=u(e_3)}\Big).
\end{aligned}
$$

Cherchons si ces trois vecteurs sont libres. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

$$
\begin{aligned}
\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) + \gamma u(e_3) = 0 \qquad & \iff \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta \qquad\quad = 0 \\ -\alpha \qquad\quad + \gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} \alpha + 2\beta \qquad\quad = 0 \\ \qquad 2\beta + \gamma = 0 \\ \qquad 2\beta + \gamma = 0 \end{cases} \\
& \iff \qquad \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ \gamma = -2\beta \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\alpha = \gamma = -2$ et $\beta = 1$ conviennent : la famille est liée. De plus, $-2u(e_1) + u(e_2) - 2u(e_3) = 0$ donc $u(e_2) = 2u(e_1) + 2u(e_3)$ donc $u(e_2)$ est CL de $u(e_1)$ et $u(e_2)$: il est « superflu », donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_3)) = \mathrm{Vect}((1,-1,1),(0,1,1))$ donc ces deux vecteurs forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ et ces deux vecteurs sont libres car non colinéaires donc forment une base de $\text{Im}(u)$. Déterminons son noyau. On se donne $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl}(x,y,z)\in \text{Ker}(u) & \iff & u(x,y,z)=(0,0,0)\\ & \iff & (x+2y,z-x,x+4y+z)=(0,0,0)\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0\\ -x & & & + & z & = & 0\\ x & + & 4y & + & z & = & 0\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 0\\ & & 2y & + & z & = & 0\\ & & 2y & + & z & = & 0\end{array}\right.\\ & \iff & \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y\\ z & = & -2y\end{array}\right.\end{array}$$

Nous obtenons donc que $\text{Ker}(u)=\{y(-2,1,-2)\,|\,y\in\mathbb{R}\}=\text{Vect}\big((-2,1,-2)\big)$. $(-2,1,-2)$ est donc une famille génératrice du noyau, et c'est aussi une famille libre puisque c'est une famille à un élément qui est non nul : c'est donc une base.

Exercice 4 : ✪ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Le cas échéant, préciser leur noyau et leur image, et préciser si ce sont des endo/iso/automorphismes.

1. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u_n) & \longmapsto & (u_0,u_1,u_2)\end{array}\right.$.
2. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x|\end{array}\right.$.
3. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x|\end{array}\right.$.
4. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x+1\end{array}\right.$.
5. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \longmapsto & (y,x,x+y)\end{array}\right.$.
6. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \min(x,y)\end{array}\right.$.
7. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ f & \longmapsto & f^{(n)}\end{array}\right.$ (où $n\in\mathbb{N}$).
8. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (u_n) & \longmapsto & \lim u_n\end{array}\right.$ (E étant l'ensemble des suites convergentes).
9. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \longmapsto & \text{Re}\,(3z+i\overline{z})\end{array}\right.$ ($\mathbb{C}$ étant considéré comme un $\mathbb{C}$ puis comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
10. ✪✪ $f\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n^2})\end{array}\right.$.
11. $f\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n) & \longmapsto & \left({u_n}^2\right)\end{array}\right.$.
12. ✪✪ $f\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\\ (u_n) & \longmapsto & (u_{n+2}+2u_{n+1}+u_n)\end{array}\right.$.
13. $u\colon\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ f & \longmapsto & (f(1),f(-1))\end{array}\right.$.

Correction :

1. Montrons que u est linéaire. Soient (u_n) et (v_n) deux suites et λ,μ deux réels.

$$\begin{array}{rcl}u(\lambda(u_n)+\mu(v_n)) & = & u((\lambda u_n+\mu v_n))\\ & = & (\lambda u_0+\mu v_0,\lambda u_1+\mu v_1,\lambda u_2+\mu v_2)\\ & = & \lambda(u_0,u_1,u_2)+\mu(v_0,v_1,v_2)\\ & = & \lambda u((u_n))+\mu u((v_n))\end{array}$$

c'est-à-dire que u est linéaire (mais n'est pas un endomorphisme donc pas un automorphisme car l'espace de départ et l'espace d'arrivée ne sont pas les mêmes). De plus, $(u_n)\in\ker u\iff u_0=u_1=u_2=0$ donc $\ker(u)$ est l'ensemble des suites dont les termes d'indices $0,1,2$ sont nuls (et donc u n'est pas injective donc par bijective, ce qui prouve que ce n'est pas un isomorphisme, ce qui prouve à nouveau que ce n'est pas un automorphisme). Enfin, u est surjective puisque, pour tout $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, la suite (u_n) définie par :

$$u_0=x,u_1=y,u_2=z\qquad\text{et}\qquad\forall n\geq 3,u_n=2024$$

a pour image (x,y,z), donc $\text{Im}(u)=\mathbb{R}^3$.

2. u n'est pas linéaire puisque $u(1)=1$ et $u(-1)=1\neq -u(1)$.
3. u n'est pas linéaire puisque son domaine de définition n'est pas un espace vectoriel...

4. u n'est pas linéaire puisque $u(0) \neq 0$.
5. On prouve comme dans l'exercice précédent que u est linéaire, que $\ker(u) = \{(0,0)\}$ et que $\text{Im}(u) = \text{Vect}((0,1,1),(1,0,1))$. u n'est pas un endomorphisme car l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont distincts, donc n'est pas un automorphisme, et n'est pas non plus un isomorphisme car n'est pas bijectif. En effet, $(1,1,0) \notin \text{Im}(u)$ puisque $0 \neq 1+1$ (et tous les éléments de $\text{Im}(u)$ sont de la forme $(x,y,x+y)$, ou on peut montrer comme en classe que $\text{Im}(u)$ est d'équation $x+y-z=0$), ce qui prouve que $\text{Im}(u)$ n'est pas surjectif.
6. u n'est pas linéaire car $u(1,0) = u(0,1) = 0$ mais $u(1,1) = 1 \neq u(1,0) + u(0,1)$.
7. u est linéaire par linéarité de la dérivation, mais n'est pas un endomorphisme car l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont distincts, donc n'est pas un automorphisme. De plus, $f \in \ker(u) \iff f^{(n)} = 0$ si bien que $\ker(u)$ est l'ensemble des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à $n-1$ (donc u n'est pas injective donc n'est pas un isomorphisme). Enfin, prouvons que u est surjective. Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. f est continue donc admet une primitive F_1 i.e. F_1 est dérivable et ${F_1}' = f$ continue donc F_1 est $\mathscr{C}^1$. F_1 est elle-même continue donc admet une primitive F_2 qui vérifie ${F_2}' = F_1$ de classe $\mathscr{C}^1$ donc F_2 est $\mathscr{C}^2$ et ${F_2}'' = f$. On itère le procédé et on trouve une fonction F_n de classe $\mathscr{C}^n$ dont la dérivée n-ième est f i.e. $u(F_n) = f$: u est surjective, c'est-à-dire que $\text{Im}(u) = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
8. Montrons que u est linéaire. Soient (u_n) et (v_n) deux suites qui convergent respectivement vers L_1 et L_2 et λ et μ deux réels. Alors $\lambda(u_n) + \mu(v_n)$ converge vers $\lambda L_1 + \mu L_2$ si bien que

$$\begin{aligned} u(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) &= \lambda L_1 + \mu L_2 \\ &= \lambda u((u_n)) + \mu v((u_n)) \end{aligned}$$

et donc u est linéaire. Ce n'est toujours pas un endomorphisme donc pas un automorphisme. u est surjective : si $L \in \mathbb{R}$ alors $L = u((u_n))$ où (u_n) est la suite constante égale à L. Ainsi, $\text{Im}(u) = \mathbb{R}$. Enfin, $\ker(u)$ est l'ensemble des suites de limite nulle donc u n'est pas injective car la suite de terme général $1/(n+1)$ (on cherche des suites définies sur $\mathbb{N}$ tout entier) est non nulle et dans le noyau : u n'est pas injective donc n'est pas bijective, ce n'est pas un isomorphisme (et pas un automorphisme, ce qu'on savait déjà car ce n'est pas un endomorphisme).
9. Dans un premier temps, on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. u n'est alors pas linéaire car $u(i) = 1$ et $u(i \times i) = -3 \neq iu(i)$.

Cependant, si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, alors u est linéaire (par linéarité de la transposition et par $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle) donc est un endomorphisme. Son image est incluse dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x = \text{Re}\left(3 \times \dfrac{x}{3} + i\overline{\dfrac{x}{3}}\right) = u(x/3)$ si bien que $x \in \text{Im}(u)$: on a donc prouvé par double inclusion que $\text{Im}(u) = \mathbb{R}$: u n'est pas surjective donc n'est pas bijective, ce n'est ni un isomorphisme ni un automorphisme. Enfin, soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} u(z) = 0 &\iff \text{Re}(3z + i\overline{z}) = 0 \\ &\iff \text{Re}(3x + ix + i(x - iy)) = 0 \\ &\iff 3x + y = 0 \\ &\iff y = -3x \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\ker(u)$ est la droite d'équation $y = -3x$ (point de vue géométrique) ou $\ker(u) = \{x - 3ix \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ (point de vue complexe), et en particulier $\ker(u) \neq \{0\}$, u n'est pas injective.
10. En clair : f associe à (u_n) sa suite extraite composée des termes d'indices les carrés parfaits (le carré est sur l'indice, contrairement à l'exemple suivant). Montrons que f est linéaire. Soient (u_n) et (v_n) deux suites et λ, μ deux réels.

$$\begin{aligned} f(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) &= f((\lambda u_n + \mu v_n)) \\ &= (\lambda u_{n^2} + \mu v_{n^2}) \\ &= \lambda(u_{n^2}) + \mu(v_{n^2}) \\ &= \lambda f((u_n)) + \mu f((v_n)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que f est un endomorphisme. Cependant, $\ker(f)$ est l'ensemble des suites dont tous les termes d'indices les carrés parfaits sont nuls donc f n'est pas injective : en effet, par exemple, la suite (u_n) dont tous les coefficients d'indices les carrés parfaits sont nuls et les autres valent 1 est un élément non nul du noyau. Par conséquent, u n'est pas un automorphisme ni un isomorphisme. Montrons enfin que u est surjective. Soit (v_n) une suite quelconque. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n^2} = v_n$$

et, si p n'est pas un carré parfait, $u_p = 0$ (par exemple, $u_0 = v_0, u_1 = v_1, u_2 = u_3 = 0, u_4 = v_2$ etc.) Alors $f((u_n)) = (v_n)$ ce qui permet de conclure.

11. f n'est pas linéaire car, si (u_n) est la suite constante égale à 1, alors $f((u_n))$ est la suite constante égale à 1 et $f(2(u_n))$ est la suite constante égale à 4 donc n'est pas égale à $2f((u_n))$.
12. On prouve comme précédemment que f est linéaire donc est un endormorphisme. Le noyau de f est constitué des suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$ donc -1 est racine double : $\ker(f)$ est donc l'ensemble des suites dont le terme général est de la forme $u_n = (\lambda + \mu \times n) \times (-1)^n$ donc n'est pas réduit à 0, u n'est pas injective donc est un isomorphisme ni un automorphisme. Montrons là aussi que f est surjective. Soit (v_n) une suite quelconque. On cherche donc une suite (u_n) telle que $f((u_n)) = (v_n)$ donc telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n = v_n$$

c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n + v_n$. On cherche donc une suite (u_n) vérifiant les conditions suivantes :
- $u_2 = -2u_1 - u_0 + v_0$.
- $u_3 = -2u_2 - u_1 + v_1$.
- $u_4 = -2u_3 - u_2 + v_2$.
- etc.

Il suffit en fait de construire (u_n) de proche en proche (ce qui est habituel pour les suites !). Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = u_1 = 2024, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n + v_n$$

Alors on a bien $f((u_n)) = (v_n)$ ce qui permet de conclure.
13. Soient f et g dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et λ et μ deux réels.

$$\begin{aligned} u(\lambda + \mu g) &= ((\lambda f + \mu g)(1), (\lambda f + \mu g)(-1)) \\ &= (\lambda f(1) + \mu g(1), \lambda f(-1) + \mu g(-1)) \\ &= \lambda(f(1), f(-1)) + \mu(g(1), g(-1)) \\ &= \lambda u(f) + \mu u(g) \end{aligned}$$

Il en découle que u est linéaire mais n'est pas un endomorphisme (donc n'est pas un automorphisme) car l'espace d'arrivée et l'espace de départ sont distincts. $\ker(f)$ est l'ensemble des fonctions nulles en ± 1 donc est très très gros... Il contient (entre autres !) $x \mapsto x^2 - 1$ qui n'est pas la fonction nulle donc u n'est pas injective donc pas bijective, ce n'est pas un isomorphisme. Enfin, u est surjective car, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(1) = a$ et $f(-1) = b$, par exemple... la fonction qui vaut a en 1, b en -1 et 0 ailleurs... mais on peut aussi trouver des fonctions continues, $\mathscr{C}^\infty$ etc. par exemple :

$$f : x \mapsto \frac{b-a}{-1-1}(x-1) + a$$

la fonction affine qui passe par les deux points $(1, a)$ et $(-1, b)$. On a donc $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}^2$.

29.2 Manipulation d'applications linéaires, noyaux et images

Exercice 5 : ✪ Soit $n \geq 1$. Déterminer le noyau et l'image des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants :

1. $P \mapsto P'$.
2. $P \mapsto XP'$.
3. ✪✪ $P \mapsto P - P'$.

Correction : Notons à chaque fois u l'endomorphisme associé.

1. $\ker(P)$ est l'ensemble des polynômes constants. Montrons que $\mathrm{Im}(P) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Tout d'abord, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $P' \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (si $\deg P \leq n$ alors $\deg(P') \leq \deg P - 1 \leq n-1$) donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Réciproquement, soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors $P = Q'$ où

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{R}_n[X]$$

c'est-à-dire que $P \in \mathrm{Im}(u)$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors : $u(P) = 0 \iff XP' = 0 \iff P' = 0$ (rappelons que $\mathbb{R}[X]$ est un anneau intègre : on peut toujours simplifier par un polynôme non nul). En d'autres termes, $\ker(u)$ est l'ensemble des polynômes constants.

   Montrons que $\mathrm{Im}(P)$ est l'ensemble F des polynômes qui s'annulent en 0. Si $P \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe Q tel que $P = XQ'$ donc $P(0) = 0$ i.e. $P \in F$ donc $\mathrm{Im}(u) \subset F$. Réciproquement, soit $P \in F$. Alors P est divisible par X : il existe Q tel que $P = XQ$. Puisque $\deg(P) \leq n$ alors $\deg(Q) = \deg(P) - 1 \leq n - 1$: soit A une primitive de Q. Alors $A \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P = XA' \in \mathrm{Im}(u)$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.
3. Soit $P \in \ker(u)$. Alors $P = P'$ donc P et P' ont même degré, ce qui n'est possible que si $P = 0$: $\ker(u) = \{0\}$, u est injective. On prouvera dans les chapitres 30 et 31 que u est surjective donc que $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 : ✪ Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que f est linéaire et donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction : La linéarité de f est immédiate. Soit $P = aX^3 + bX + c \in \mathbb{R}_3[X]$. Alors

$$\begin{aligned} f(P) &= aX^3 + bX^2 + cX + d - (X+1)(3aX^2 + 2bX + c) \\ &= -2aX^3 + (-3a - b)X^2 - 2bX + d - c \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients sur une base,

$$\begin{aligned} P \in \ker(f) &\iff -2a = -3a - b = -2b = d - c = 0 \\ &\iff a = b = 0 \qquad \text{et} \qquad c = d \end{aligned}$$

si et seulement si $P = c(X+1)$ si bien que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(X+1)$. Pour trouver une base de l'image, on fait comme d'habitude : $f(1), f(X), f(X^2)$ et $f(X^3)$ forment une famille génératrice de l'image, c'est-à-dire que

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, -1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)$$

et puisqu'on peut retirer les vecteurs superflus, $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2)$, ce qui donne une base (génératrice, et libre car échelonnée en degré).

Exercice 7 : ✪ Soient $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Correction :

- Montrons que $\ker(u)$ est stable par v. Soit $x \in \ker(u)$. Il faut montrer que $v(x) \in \ker(u)$ donc que $u(v(x)) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} u(v(x)) &= v(u(x)) \quad \text{(car } u \text{ et } v \text{ commutent)} \\ &= v(0) \quad \text{(car } x \in \ker(u)) \\ &= 0 \quad \text{(car } v \text{ est linéaire)} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que $v(x) \in \ker(u)$: $\ker(u)$ est stable par v.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$ si bien que

$$\begin{aligned} v(y) &= v(u(x)) \\ &= u(v(x)) \quad \text{(car } u \text{ et } v \text{ commutent)} \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

Exercice 8 : ✪ Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E et soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que $f(U + V) = f(U) + f(V)$ (oui, il y a quelque-chose à montrer : il ne suffit pas de dire que f est linéaire !).
2. Montrer que si U et V sont en somme directe et si f est injective, alors $f(U \oplus V) = f(U) \oplus f(V)$.

Correction :

1. Il ne suffit pas de dire que f est linéaire : U et V ne sont pas des vecteurs mais des espaces vectoriels, et rien dans notre cours ne permet d'affirmer cela. Il faut donc raisonner par double inclusion. Soit $y \in f(U+V)$. Il existe donc $x \in U+V$ tel que $y = f(x)$. $x \in U+V$ donc il existe $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$ tel que $x = x_1 + x_2$ donc

$$\begin{aligned} y &= f(x_1+x_2) \\ &= f(x_1)+f(x_2) \quad \text{(par linéarité de } f\text{)} \end{aligned}$$

$f(x_1) \in f(U)$ et $f(x_2) \in f(V)$ donc $y \in f(U)+f(V)$: $f(U+V) \subset f(U)+f(V)$. Réciproquement, soit $y \in f(U)+f(V)$. Il existe $y_1 \in f(U)$ et $y_2 \in f(V)$ tels que $y = y_1+y_2$. $y_1 \in f(U)$ donc il existe $x_1 \in U$ tel que $y_1 = f(x_1)$. De même, il existe $x_2 \in V$ tel que $y_2 = f(x_2)$, si bien que

$$\begin{aligned} y &= f(x_1)+f(x_2) \\ &= f(x_1+x_2) \qquad \text{(par linéarité de } f\text{)} \end{aligned}$$

Finalement, $y \in f(U+V)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité. Remarque : une fois n'est pas coutume, on aurait pu travailler par équivalences : soit $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(U+V) &\iff \exists x \in U+V, y = f(x) \\ &\iff \exists (x_1,x_2) \in U \times V, y = f(x_1+x_2) \\ &\iff \exists (x_1,x_2) \in U \times V, y = f(x_1)+f(x_2) \quad (f \text{ linéaire}) \\ &\iff y \in f(U)+f(V) \end{aligned}$$

En d'autres termes, $f(U+V)$ et $f(U)+f(V)$ ont les mêmes éléments donc sont égaux. Pourquoi n'a-t-on pas raisonné comme cela ? Car raisonner par équivalences n'est pas toujours possible, et parfois ça ne saute pas aux yeux, donc j'ai préféré mettre un raisonnement par analyse synthèse, raisonnement qu'on utilise beaucoup plus souvent.

2. On suppose donc que U et V sont en somme directe et que f est injective. Puisque U et V sont en somme directe, alors $U+V = U \oplus V$. D'après la question précédente,

$$f(U \oplus V) = f(U)+f(V)$$

Ainsi, pour répondre à la question, il suffit de montrer que $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe. Puisqu'il n'y a que deux espaces vectoriels, il suffit de montrer que leur intersection est nulle. Soit donc $y \in f(U) \cap f(V)$. Il existe donc $x_1 \in U$ et $x_2 \in f(V)$ tels que $y = f(x_1) = f(x_2)$. f étant injective, $x_1 = x_2$. $x_1 \in U$ et $x_2 \in V$ donc $x_1 = x_2 \in U \cap V = \{0\}$ car U et V sont en somme directe. En conclusion, $y = f(0) = 0$ car f est linéaire, c'est-à-dire que $f(U) \cap f(V) = \{0\}$: $f(U)$ et $f(V)$ sont en somme directe, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 9 : ✪

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u)$.
2. **Remake :** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^3 = u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{Im} u^2$.
3. **Remake :** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\ker(v) \oplus \operatorname{Im}(u) = F$.

Correction :

1. Il s'agit donc de montrer que $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont supplémentaires. Soit $x \in E$: il faut donc montrer que x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément $x_1 \in \ker(u)$ et d'un élément $x_2 \in \operatorname{Im}(u)$.
   - **Analyse :** Si x_1 et x_2 conviennent. En composant l'égalité $x = x_1+x_2$ par u linéaire, et puisque $x_1 \in \ker(u)$, il vient :

   $$u(x) = u(x_1)+u(x_2) = u(x_2)$$

   Or, $x_2 \in \operatorname{Im}(u)$ donc il existe $t_2 \in E$ tel que $x_2 = u(t_2)$ si bien que $u(x) = u^2(t_2) = -u(t_2)$ puisque $u^2 = -u$. Dès lors, $x_2 = u(t_2) = -u(x)$ et $x_1 = x - x_2 = x + u(x)$.
   - **Synthèse :** Soient $x_2 = -u(x)$ et $x_1 = x+u(x)$. Par construction, $x = x_1+x_2$. Montrons que $x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in \operatorname{Im}(u)$. Par linéarité de u, $x_2 = u(-x) \in \operatorname{Im}(u)$. Enfin, u étant linéaire et vérifiant $u^2 = -u$:

   $$\begin{aligned} u(x_1) &= u(x)+u^2(x) \\ &= u(x)-u(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $x_1 \in \ker(u)$ ce qui permet de conclure.

2. Il s'agit donc de montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u^2)$ sont supplémentaires. Soit $x \in E$: il faut donc montrer que x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément $x_1 \in \ker(u)$ et d'un élément $x_2 \in \mathrm{Im}(u^2)$.
   - **Analyse :** Si x_1 et x_2 conviennent. En composant l'égalité $x = x_1 + x_2$ par u linéaire, et puisque $x_1 \in \ker(u)$, il vient :
   $$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2)$$
   Or, $x_2 \in \mathrm{Im}(u^2)$ donc il existe $t_2 \in E$ tel que $x_2 = u^2(t_2)$ si bien que $u(x) = u^3(t_2) = u(t_2)$ puisque $u^3 = u$. Dès lors, $x_2 = u^2(t_2) = u^2(x)$ et $x_1 = x - x_2 = x - u^2(x)$.
   - **Synthèse :** Soient $x_2 = u^2(x)$ et $x_1 = x - u^2(x)$. Par construction, $x = x_1 + x_2$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(u^2)$. Montrons que $x_1 \in \ker(u)$. u étant linéaire et vérifiant $u^3 = u$:
   $$\begin{aligned} u(x_1) &= u(x) - u^3(x) \\ &= u(x) - u(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   c'est-à-dire que $x_1 \in \ker(u)$ ce qui permet de conclure.
3. Il s'agit donc de montrer que $\ker(v)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont supplémentaires dans F. Soit $y \in E$: il faut donc montrer que y s'écrit de façon unique comme somme d'un élément $y_1 \in \ker(v)$ et d'un élément $y_2 \in \mathrm{Im}(u)$.
   - **Analyse :** Si y_1 et y_2 conviennent. En composant l'égalité $y = y_1 + y_2$ par v linéaire, et puisque $y_1 \in \ker(v)$, il vient :
   $$v(y) = v(y_1) + y(y_2) = v(y_2)$$
   Or, $y_2 \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $x_2 \in E$ tel que $y_2 = u(x_2)$ si bien que $v(y) = v \circ u(x_2) = x_2$ puisque $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Dès lors, $y_2 = u(x_2) = u(v(y))$ et $y_1 = y - y_2 = y - u(v(y))$.
   - **Synthèse :** Soient $y_2 = u(v(y))$ et $y_1 = y - u(v(y))$. Par construction, $y = y_1 + y_2$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(u)$. Montrons que $y_1 \in \ker(v)$. Enfin, v étant linéaire, et puisque $v \circ u = \mathrm{Id}_E$:
   $$\begin{aligned} v(y_1) &= v(y) - v \circ u(v(y)) \\ &= v(y) - v(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$
   c'est-à-dire que $y_1 \in \ker(v)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 10 : ✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et soit g une application (pas forcément linéaire) de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire alors g est linéaire.

Correction : Soient $(y_1, y_2) \in F^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. f étant surjective, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} g(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) &= g(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)) \\ &= g(f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)) && f \text{ linéaire.} \\ &= \lambda_1 g(f(x_1)) + \lambda_2 g(f(x_2)) && g \circ f \text{ linéaire.} \\ &= \lambda_1 g(y_1) + \lambda_2 g(y_2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que g est linéaire.

Exercice 11 - Crochet de Lie : ✪ Soient u et v dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

Correction : Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$. Le résultat étant vrai pour $k = 1$ par hypothèse, soit $k \geq 1$ et supposons que le résultat soit vrai au rang k. On a donc :

$$\begin{array}{rcll}
u^{k+1}\circ v - v\circ u^{k+1} & = & u\circ\left(u^k\circ v\right) - v\circ u^{k+1} & \\
& = & u\left(ku^k + v\circ u^k\right) - v\circ u^{k+1} & \text{(Par hypothèse de récurrence)} \\
& = & ku^{k+1} + u\circ v\circ u^k - v\circ u^{k+1} & \\
& = & ku^{k+1} + (u\circ v)\circ u^k - v\circ u^{k+1} & \\
& = & ku^{k+1} + (u + v\circ u)\circ u^k - v\circ u^{k+1} & \\
& = & ku^{k+1} + u^{k+1} + v\circ u^{k+1} - v\circ u^{k+1} & \\
& = & ku^{k+1} + u^{k+1} & \\
& = & (k+1)u^{k+1} &
\end{array}$$

ce qui clôt la récurrence.

Exercice 12 : ✪ On considère dans cet exercice $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit

$$u\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + i\overline{z} \end{cases}$$

   Montrer que u est linéaire et donner une base de $\ker(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$.

2. **Remake :** Mêmes questions avec :

$$u\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto iz - i\overline{z} \end{cases}$$

Correction :

1. La linéarité de u (comme application de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel) découle de la $\mathbb{R}$-linéarité de la transposition. Plus précisément, soient z_1 et z_2 deux complexes et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{array}{rcll}
u(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) & = & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + i\times\overline{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} & \\
& = & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + i\times(\overline{\lambda_1}\times\overline{z_1} + \overline{\lambda_2}\times\overline{z_2}) & \\
& = & \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + i\times(\lambda_1\times\overline{z_1} + \lambda_2\times\overline{z_2}) & \text{(car } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont réels)} \\
& = & \lambda_1(z_1 + i\overline{z_1}) + \lambda_2(z_2 + i\overline{z_2}) & \\
& = & \lambda_1 u(z_1) + \lambda_2 u(z_2) &
\end{array}$$

   u est bien linéaire. Soit $z = x + iy$. Alors :

$$\begin{array}{rcl}
z\in\ker(u) & \iff & z + i\overline{z} = 0 \\
& \iff & x + iy + i(x - iy) = 0 \\
& \iff & x + y + i(x+y) = 0 \\
& \iff & x + y = 0
\end{array}$$

   c'est-à-dire que $\ker(u)$ est la droite d'équation $y = -x$ (point de vue géométrique) ou l'ensemble $\{x - ix \mid x\in\mathbb{R}\}$ (point de vue complexe). On sait que $\operatorname{Im}(u)$ est engendré par $u(1)$ et $u(i)$ (rappelons que l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image) donc

$$\begin{array}{rcl}
\operatorname{Im}(u) & = & \operatorname{Vect}(u(1), u(i)) \\
& = & \operatorname{Vect}(1+i, i+1) \\
& = & \operatorname{Vect}(1+i)
\end{array}$$

Attention, rappelons que quand on parle de Vect, on se place sur $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel donc $\text{Vect}(1+i) = \{x + ix \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$. Pouvait-on le prévoir ? Oui et non : les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}$ (qu'on identifie à $\mathbb{R}^2$) sont $\{0\}$, les droites vectorielles et $\mathbb{C}$ tout entier.

2. On prouve de même que u est linéaire. De plus, $z \in \ker(u) \iff z = \overline{z}$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire que $\ker(u) = \mathbb{R}$ donc 1 est une base de $\ker(u)$. On sait que $\text{Im}(u)$ est engendré par $u(1)$ et $u(i)$ (rappelons que l'image d'une famille génératrice est une famille génératrice de l'image) donc

$$\begin{aligned}\text{Im}(u) &= \text{Vect}(u(1), u(i)) \\ &= \text{Vect}(0, -2) \\ &= \text{Vect}(-2)\end{aligned}$$

puisqu'on peut retirer les vecteurs superflus. Attention, rappelons que quand on parle de Vect, on se place sur $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel donc $\text{Vect}(-2) = \{-2\lambda \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$. -2 est donc une base, mais en fait, tout réel non nul convient également. Remarquons qu'un a $\text{Im}(u) = \ker(u)$.

Exercice 13 : ✪ On définit les deux applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x, 2x+y, y)$, ainsi que $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x+z, 5x-2y+z)$.

1. Montrer que f et g sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Qu'en est-il de $f \circ g$?

Correction :

1. On prouve de même que dans l'exercice 3 que f et g sont linéaires, que $\text{Im}(f) = \text{Vect}((1,2,0),(0,1,1))$ forment une base de $\text{Im}(f)$, que $\ker(f) = \{0\}$, que $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ et $\ker(g) = \text{Vect}(1,2,-1)$.
2. Tout d'abord, $g \circ f$ va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et $f \circ g$ va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Dans le chapitre 30, on pourra dire directement que $f \circ g$ ne peut pas être bijective car $\text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg}\, f, \text{rg}\, g) \leq 2$. Pour l'instant, faisons-le à la main. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On pense toujours en terme de « première coordonnée », etc.

$$\begin{aligned}g \circ f(x,y) &= g(x, x+2y, y) \\ &= (x+y, 5x - 2(x+y) + y) \\ &= (x+y, 3x-y)\end{aligned}$$

et on montre comme précédemment que $\ker(g \circ f) = \{0\}$ et $\text{Im}(g \circ f) = \mathbb{R}^2$: $g \circ f$ est linéaire (car composée d'applications linéaires) bijective de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même donc est un automorphisme. De même, si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}f \circ g(x,y,z) &= f(x+z, 5x-2y+z) \\ &= (x+z, 2(x+z) + 5x - 2y + z, 5x - 2y + z) \\ &= (x+z, 7x - 2y + 3z, 5x - 2y + z)\end{aligned}$$

On peut prouver, au choix, que $f \circ g$ n'est pas injective ou qu'elle n'est pas surjective (puisqu'elle n'est ni l'un ni l'autre). On peut prouver que son image est l'ensemble d'équation $2x - y + z = 0$ donc $(1,0,0) \notin \text{Im}(u)$, ou que $\ker(f \circ g) = \text{Vect}(1,-2,1) \neq \{0\}$.

Exercice 14 : ✪ Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \text{Im}(f)$.

Correction : Par double inclusion.

Soit $y \in f(\ker(g \circ f))$. Alors il existe $x \in \ker(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$. Dès lors, $y \in \text{Im}(f)$. De plus, $g(y) = g(f(x)) = 0$ puisque $x \in \ker(g \circ f)$ donc $y \in \ker(g)$ donc $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$: en d'autres termes, $f(\ker(g \circ f)) \subset \ker(g) \cap \text{Im}(f)$.

Réciproquement, soit $y \in \ker(g) \cap \text{Im}(f)$. Puisque $y \in \text{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or, $y \in \ker(g)$ donc $g(y) = 0 = g(f(x))$ donc $x \in \ker(g \circ f)$ si bien que $y \in f(\ker g \circ f)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 15 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Montrer que f est soit nulle soit surjective.

Correction : Il suffit de prouver que si f est non nulle, alors f est surjective. On le prouvera plus rapidement dans le chapitre 30. Prouvons-le à la main en attendant : supposons f non nulle. Il existe donc $a \in E$ tel que $f(a) \neq 0$. Soit $y \in \mathbb{K}$. Alors

$$\begin{aligned} y &= \underbrace{\frac{y}{f(a)}}_{\in \mathbb{K}} \times f(a) \\ &= f\left(\frac{y}{f(a)}.a\right) \end{aligned}$$

donc tout élément de $\mathbb{K}$ est une image par f donc f est surjective.

Exercice 16 : ✪✪ Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $p \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;\, p]\!], f(e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1\,;\, n]\!], f(e_i) \neq 0$$

1. Donner une inclusion entre $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\ker(f)$. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité.
2. Montrer que si $n = p + 1$ alors il y a égalité.

Correction :

1. $e_1, \dots, e_p$ appartiennent à $\ker(f)$ donc $\ker(f)$ est un espace vectoriel contenant $e_1, \dots, e_p$: on en déduit donc que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \ker(f)$. Il n'y a pas forcément égalité : par exemple, si $f(e_{p+1}) = f(e_{p+2}) \neq 0$ alors, par linéarité de f,

$$f(e_{p+2} - e_{p+1}) = f(e_{p+2}) - f(e_{p+1}) = 0$$

donc $e_{p+2} - e_{p+1} \in \ker(f)$, mais $e_{p+2} - e_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$: en effet, si c'est le cas, alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que

$$e_{p+2} - e_{p+1} = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$$

et donc

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p + e_{p+1} - e_{p+2} = 0$$

ce qui est impossible car on a une famille libre (et, ci-dessus, une combinaison linéaire non triviale à cause des ± 1 qui est égale à 0).

2. Supposons donc que $n = p+1$: on souhaite prouver l'inclusion réciproque $\ker(f) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$. Soit $x \in \ker(f)$. La famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ (car $n = p+1$) étant une base, c'est une famille génératrice donc il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1}$ tel que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{p+1} e_{p+1}$. Par linéarité de f :

$$f(x) = \alpha_f(e_1) + \cdots + \alpha_{p+1} f(e_{p+1})$$

Or, $e_1, \dots, e_p$ appartiennent à $\ker(f)$ donc $f(x) = \alpha_{p+1} f(e_{p+1}) = 0$ puisque $x \in \ker(f)$. Mais $f(e_{p+1}) \neq 0$ si bien que $\alpha_{p+1} = 0$ donc $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 17 : ✪✪ Les applications suivantes sont-elles injectives ?

1. $\varphi \colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \left(\mathbb{R}^3\right)^3 \\ u & \longmapsto & (u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \end{cases}$, où (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $D \colon \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$, où $E = \mathrm{Vect}(\cos \times \sin, \cos^2, \sin^2)$.

Correction :

1. Soit $u \in \ker(\varphi)$. Alors $u(e_1) = u(e_2) = u(e_3) = 0$, c'est-à-dire que u est nulle sur une base de $\mathbb{R}^3$. Or, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base et l'application nulle est nulle sur cette base donc u est l'application nulle : $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.
2. La fonction constante égale à 1 appartient à E puisqu'elle est égale à $\cos^2 + \sin^2$ et elle est dans $\ker(D)$ donc $\ker(D) \neq \{0\}$: D n'est pas injective.

Exercice 18 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et soient V, W deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(V) \subset f(W)$ si et seulement si $V + \ker f \subset W + \ker f$.

Correction : Puisqu'il y a une équivalence, montrons un sens et puis l'autre. Supposons que $f(V) \subset f(W)$ et montrons que $V + \ker f \subset W + \ker f$. Soit donc $x \in V + \ker f$ et montrons que $x \in W + \ker f$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in V$ et $x_2 \in \ker(f)$ tel que $x = x_1 + x_2$. Puisqu'on ne sait pas quoi faire et qu'on a une information sur $f(V)$ et $f(W)$, alors appliquons f à cette égalité, ce qui donne

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & f(x_1 + x_2) & \\ & = & f(x_1) + f(x_2) & (f \text{ est linéaire}) \\ & = & f(x_1) & (x_2 \in \ker(f)) \end{array}$$

Or, $x_1 \in V$ donc $f(x_1) \in f(V) \subset f(W)$ par hypothèse. Ainsi, $f(x) \in f(W)$. Attention, cela ne veut pas du tout dire que $x \in W$! D'ailleurs, ce n'est pas du tout ce que l'on veut montrer ! Comme à chaque fois que l'on est un peu bloqué, traduisons ce que l'on sait. $f(x) \in f(W)$ donc il existe $x_3 \in W$ tel que $f(x) = f(x_3)$. Dès lors, $f(x) - f(x_3) = 0$ et f est linéaire donc $f(x - x_3) = 0$ c'est-à-dire que $x - x_3 \in \ker(f)$. Finalement, $x = x_3 + (x - x_3)$ avec $x_3 \in W$ et $x - x_3 \in \ker(f)$: $x \in W + \ker(f)$, c'est-à-dire que $V + \ker(f) \subset W + \ker(f)$.
Réciproquement, supposons que $V + \ker(f) \subset W + \ker(f)$ et montrons que $f(V) \subset f(W)$. Soit $y \in f(V)$. Il existe $x \in V$ tel que $y = f(x)$. Or, $x \in V$ et $V \subset V + \ker(f)$ (c'est du cours, $E_1 + E_2$ contient E_1 et E_2) donc $x \in W + \ker(f)$: il existe $x_1 \in W$ et $x_2 \in \ker(f)$ tels que $x = x_1 + x_2$, si bien que

$$\begin{array}{rcll} y & = & f(x) & \\ & = & f(x_1 + x_2) & \\ & = & f(x_1) + f(x_2) & (f \text{ est linéaire}) \\ & & f(x_1) & (x_2 \in \ker(f)) \end{array}$$

et puisque $x_1 \in W$, alors $f(x_1) \in f(W)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 19 : ✪✪ On considère l'application T définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$.

1. Montrer que T est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de P' en fonction de celui de P.
3. Donner le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.
4. T est-elle injective ? surjective ?

Correction :

1. Soient $(P_1, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$.

$$\begin{array}{rcl} T(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) & = & 3X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + X^2(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' - X^3(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)'' \\ & = & 3X(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) + X^2(\lambda_1 P_1{}' + \lambda_2 P_2{}') - X^3(\lambda_1 P_1{}'' + \lambda_2 P_2{}'') \\ & = & \lambda_1(3XP_1 + X^2 P_1{}' - X^3 P_1{}'') + \lambda_2(3XP_2 + X^2 P_2{}' - X^3 P_2{}'') \\ & = & \lambda_1 T(P_1) + \lambda_2 T(P_2) \end{array}$$

   c'est-à-dire que T est linéaire (la deuxième ligne a été obtenue par linéarité de la dérivation).
2. C'est du cours : si $\deg(P) \leq 0$ (ie si P est constant) alors $\deg(P') = -\infty$ et si $\deg(P) \geq 1$ alors $\deg(P') = \deg(P) - 1$.
3. T étant linéaire, si $P = 0$, alors $T(P) = 0$. En d'autres termes, si $\deg(P) = -\infty$ alors $\deg(T(P)) = -\infty$. Supposons $P \neq 0$. Soit $n \geq 0$ le degré de P. On a envie de dire que $\deg(P') = n - 1$ et $\deg(P'') = n - 2$. Il faut pour cela que P et P' ne soient pas constants : on étudie donc ces cas à part. Supposons P constant (non nul) égal à $\lambda \neq 0$. Alors $P' = P'' = 0$ si bien que $T(P) = 3\lambda X$ qui est de degré 1 (car $\lambda \neq 0$). En d'autres termes, si $\deg(P) = 0$ alors $\deg(T(P)) = 1$. Supposons que P soit de degré 1. Il existe donc $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $P = aX + b$. Par conséquent, $P' = a$ et $P'' = 0$, d'où

$$T(P) = 3X(aX + b) + aX^2 = 4aX^2 + 3bX$$

   et donc $T(P)$ est de degré 2 (car $a \neq 0$). Supposons à présent $n \geq 2$ (on rappelle que n est le degré de P). Dès lors, $\deg(P') = n - 1$ et $\deg(P'') = n - 2$. Il en découle que $3XP, X^2P'$ et X^3P'' sont tous de degré $n + 1$: on ne peut pas donner le degré directement (rappelons que le degré d'une somme de polynômes de degrés distincts est le max des degrés, mais si les degrés ne sont pas distincts, il faut que les coefficients dominants ne se compensent pas), tout ce qu'on peut affirmer est que son degré est inférieur ou égal à $n+1$: cherchons si le coefficient devant X^{n+1} est nul. Notons $a_n \neq 0$ le coefficient dominant de P (un coefficient dominant est non nul par définition). Le coefficient dominant de $3XP$ est alors $3a_n$, celui de X^2P' est na_n (car la dérivée de a_nX^n est na_nX^{n-1}) et celui de X^3P'' est $n(n-1)a_n$. Finalement, le coefficient devant X^{n+1} (on ne parle pas encore de coefficient dominant car on ne sait pas encore s'il est nul) est $(3+n-n(n-1))\times a_n$. Il est nul si et seulement si $-n^2+2n+3=0$ (car $a_n \neq 0$) si et seulement si (en calculant le discriminant) $n=3$ ou $n=-1$. Or, $n \geq 2$ donc ce coefficient est nul si et seulement si $n=3$. En d'autres termes, si $n \neq 3$, alors $\deg(T(P)) = n+1 = \deg(P)+1$. Intéressons-nous à présent au cas $n=3$: tout ce qu'on sait est que le degré est inférieur strictement à 4 (strictement car on vient de voir que le coefficient devant X^4 est nul) mais on ne peut pas (pour l'instant) être plus précis. P est de degré 3 donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ avec a non nul tels que $P = aX^3+bX^2+cX+d$. Après calculs, on trouve

$$T(P) = 3bX^3+4cX^2+3dX$$

Si $b \neq 0$ alors $\deg(T(P)) = 3$. Si $b=0$ et $c \neq 0$ alors $\deg(T(P)) = 2$. Si $b=c=0$ mais $d \neq 0$ alors $\deg(T(P)) = 1$ et si $b=c=d=0$ (mais on rappelle que $a \neq 0$) alors $\deg(T(P)) = -\infty$.

4. D'après la question précédente, $T(X^3) = 0$ (on est dans le cas où $b=c=d=0$). En d'autres termes, $X^3 \in \ker(T)$ donc $\ker(T) \neq \{0\}$: T n'est pas injective. Pour la surjectivité, on pourrait chercher $\mathrm{Im}(T)$ mais ce serait difficile. Écrivons le résultat de la question précédente sous forme de tableau :

$\deg(P)$	$\deg(T(P))$
$-\infty$	$-\infty$
0	1
1	2
2	3
3	$-\infty$, 1,2 ou 3
4	5
$\vdots$	$\vdots$
n	$n+1$
$\vdots$	$\vdots$

On remarque qu'on ne trouve jamais 0 ou 4 dans la colonne de droite. Par conséquent, une image n'est jamais de degré 0 ou 4 : $\mathrm{Im}(T)$ ne contient aucun élément de degré 0 ou 4, et en particulier $\mathrm{Im}(T) \neq \mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire que T n'est pas surjective.

Exercice 20 : ✪✪ Soient $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer les quatre équivalences suivantes :

1. $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$
2. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) + \ker(u) = E$
3. $\ker(v \circ u) = \ker(u) \iff \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$
4. $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \iff \ker(v) + \mathrm{Im}(u) = E$

Correction :

1. Montrons un sens et puis l'autre. Supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Montrons que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$. Soit $x \in \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u)$. $x \in \ker(u)$ donc $u(x) = 0$. $u \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $t \in E$ tel que $x = u(t)$, et donc $u(x) = u^2(t) = 0$. Dès lors, $t \in \ker(u^2) = \ker(u)$ par hypothèse, et donc $u(t) = 0$. Or, $u(t) = x$ donc $x = 0$: $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$.

   Remarque : on n'a en fait montré que l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) \subset \{0\}$ mais, comme expliqué en cours, l'inclusion réciproque est toujours vraie puisque $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des espaces vectoriels, et donc l'inclusion réciproque est omise en pratique.

   Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$ et montrons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Pour cela, raisonnons par double inclusion.

   Soit $x \in \ker(u)$. Alors $u(x) = 0$ donc, en composant par u, $u^2(x) = u(0) = 0$ car u est linéaire. Ainsi, $x \in \ker(u^2)$ donc $\ker(u) \subset \ker(u^2)$.

Remarque : on n'a pas utilisé l'hypothèse $\mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$: en effet, l'inclusion $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ est toujours vraie. C'est l'inclusion réciproque qui est fausse en général.

Réciproquement, soit $x \in \ker(u^2)$.Alors $u^2(x) = u(u(x)) = 0$. Par conséquent, $u(x) \in \ker(u)$. Or, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$ donc $u(x)\mathrm{Im}\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$ donc $u(x) = 0$. Ainsi, $x \in \ker(u)$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

2. Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in E$. Montrons qu'il existe $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et $x_2 \in \ker(u)$ (pas forcément unique puisqu'on ne cherche pas une somme directe) tels que $x = x_1 + x_2$. Un raisonnement par analyse-synthèse ne nous servirait pas forcément à grand chose car on ne cherche pas l'unicité. Comme d'habitude, quand on est bloqué, on cherche à utiliser les hypothèses. On a une condition sur les images. Problème : u n'est pas forcément surjective donc x n'est pas forcément dans l'image. Pour être sûr d'avoir une image, appliquons u (c'est toujours une bonne idée d'appliquer l'application linéaire qu'on a sous la main en algèbre linéaire). $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$ donc $u(x) \in \mathrm{Im}(u^2)$: il existe $t \in E$ tel que $u(x) = u^2(t)$. Attention, u n'est pas injective donc on ne peut pas dire que $x = u(t)$! Cependant, ce qu'on peut affirmer est que $u(x) - u^2(t) = 0$ et que, u étant linéaire, $u(x - u(t)) = 0$. En d'autres termes, $x - u(t) \in \ker(t)$. Finalement,

$$x = u(t) + (x - u(t))$$

$u(t) \in \mathrm{Im}(u)$ et $x - u(t) \in \ker(u)$: x est la somme d'une image et d'un élément du noyau, donc $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$.

Réciproquement, supposons que $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$ et montrons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Ici encore, raisonnons par double inclusion. Soit $y \in \mathrm{Im}(u^2)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^2(x) = u(u(x))$. En particulier, $y \in \mathrm{Im}(u)$ (car si on pose $t = u(x)$ alors $y = u(t)$ mais il n'est pas nécessaire de le préciser). Ainsi, $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Remarque : là aussi, cette inclusion est toujours vraie. Attention, ce n'est pas dans le même sens que pour les noyaux !

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(u)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$. On est bloqué : on cherche à utiliser les hypothèses. $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$ ie tout élément de E s'écrit (pas forcément de façon unique) comme somme d'un élément de $\ker(u)$ et d'un élément de $\mathrm{Im}(u)$. Qui a-t-on comme élément de E sous la main ? x ! $x \in E$ donc il existe $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ et $x_2 \in \ker(u)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} y &= u(x) \\ &= u(x_1 + x_2) \\ &= u(x_1) + u(x_2) \quad (u \text{ est linéaire}) \\ &= u(x_1) \qquad\qquad\quad (x_2 \in \ker(u)) \end{aligned}$$

Or, $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ donc il existe $t_1 \in E$ tel que $x_1 = u(t_1)$. Finalement, $y = u^2(t_1) \in \mathrm{Im}(u^2)$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

3. Démonstration analogue.
4. Idem.

Exercice 21 : ✪✪✪ Soient F un sous-espace vectoriel de E et $h \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si B est une partie de E, rappeler la définition de $h^{-1}(B)$, ainsi qu'une CNS pour qu'un élément $x \in E$ appartienne à $h^{-1}(B)$.
2. Montrer que $h^{-1}(h(F)) = F + \ker(h)$.
3. Exprimer de la même manière $h\left(h^{-1}(F)\right)$ en fonction de F et de $\mathrm{Im}(h)$.
4. Pour quels endomorphismes $h \in \mathscr{L}(E)$ a-t-on $h^{-1}(h(F)) = h\left(h^{-1}(F)\right)$?

Correction : On remplace u par h dans la suite (et donc on suppose que $h \in \mathscr{L}(E)$).

1. C'est du cours : $u^{-1}(B)$ est l'ensemble des éléments de E dont l'image appartient à B, c'est-à-dire : $u^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, u(x) \in B\}$. Écriture avec des quantificateurs est mal dit (car il n'y a pas de quantificateur), mea culpa, plutôt : donner une CNS pour que $x \in u^{-1}(B)$. Par conséquent : $x \in u^{-1}(B) \iff u(x) \in B$.
2. Par double inclusion. Soit $x \in h^{-1}(h(F))$. Alors $h(x) \in h(F)$ (question précédente avec $B = h(F)$). Attention, cela ne veut pas forcément dire que $x \in F$! Cela signifie que $h(x)$ est l'image d'un élément de F... qui n'a aucune raison d'être égal à x ! $h(x) \in h(F)$ donc il existe $t \in F$ tel que $h(x) = h(t)$ donc $h(x) - h(t) = 0$ et h est linéaire donc $h(x - t) = 0$ c'est-à-dire que $x - t \in \ker(h)$. Finalement :

$$x = \underbrace{t}_{\in F} + \underbrace{x - t}_{\in \ker(h)}$$

c'est-à-dire que x s'écrit (pas forcément de façon unique) comme somme d'un élément de F et d'un élément de $\ker(h)$ donc $x \in F + \ker(h)$: on a prouvé l'inclusion $h^{-1}(h(F)) \subset F + \ker(h)$.

Réciproquement, soit $x \in F + \ker(h)$. Alors il existe $t \in F$ et $y \in \ker(h)$ tels que $x = t + y$. Par linéarité de h,

$$h(x) = h(t) + h(y) = h(t)$$

puisque $h(y) = 0$. Or, $t \in F$ donc $h(t) \in h(F)$. On a prouvé que $h(x) \in h(F)$ donc $x \in h^{-1}(h(F))$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

3. Toujours d'après la question 1 : $x \in h^{-1}(F) \iff h(x) \in F$. Soit donc $y \in h(h^{-1}(F))$. Il existe donc $x \in h^{-1}(F)$ tel que $y = h(x)$ et puisque $x \in h^{-1}(F)$, alors $y \in F$. De plus, $y = h(x) \in \mathrm{Im}(h)$ si bien que $y \in F \cap \mathrm{Im}(h)$: on a montré que $h(h^{-1}(F)) \subset F \cap \mathrm{Im}(h)$.

   Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in F \cap \mathrm{Im}(h)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$. Or, $h(x) = y \in F$ donc $x \in h^{-1}(F)$ si bien que $y = h(x) \in h(h^{-1}(F))$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité $h(h^{-1}(F)) = F \cap \mathrm{Im}(h)$.
4. D'après les deux questions précédentes, on a égalité si et seulement si $F \cap \mathrm{Im}(h) = F + \ker(h)$. Si $F \notin \mathrm{Im}(h)$ alors $F \cap \mathrm{Im}(h) \subset F$ et l'inclusion est stricte. Or, rappelons que $F \subset F + \ker(h)$ donc on a l'inclusion $F \cap \mathrm{Im}(h) \subset F + \ker(h)$ et l'inclusion est stricte donc h ne convient pas. De plus, si $\ker(h) \not\subset F$, alors il existe $x \in \ker(h)$ qui n'appartient pas à F, donc $x \in F + \ker(h)$ si bien que $F \subset F + \ker(h)$ et l'inclusion est stricte. En particulier :

$$F \cap \mathrm{Im}(h) \subset F \subset F + \ker(h)$$

   et l'inclusion est stricte, donc h ne convient pas. On voit qu'une condition nécessaire est d'avoir $\ker(h) \subset F \subset \mathrm{Im}(h)$. C'est également une condition suffisante, car on a alors $F \cap \mathrm{Im}(h) = F$ et $F + \ker(h) = F$. En conclusion, les endomorphismes qui conviennent sont exactement les endomorphismes h vérifiant $\ker(h) \subset F \subset \mathrm{Im}(h)$.

Exercice 22 : ✪✪✪ Soient E, F_1, F_2 et G quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient f_1, f_2, g_1, g_2 et u cinq applications linéaires. On suppose qu'elles vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{tikzcd}
& F_1 \arrow[dd, "u"] \arrow[dr, "g_1"] & \\
E \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & G \\
& F_2 \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

- f_1 va de E dans F_1, f_2 de E dans F_2, u de F_1 dans F_2, g_1 de F_1 dans G et g_2 de F_2 dans G.
- $u \circ f_1 = f_2$ et $g_2 \circ u = g_1$.
- f_1 et f_2 sont injectives.
- g_1 et g_2 sont surjectives.
- $\ker(g_1) = \mathrm{Im}(f_1)$ et $\ker(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$.

Montrer que u est un isomorphisme.

Correction : Montrons donc que u est à la fois injective et surjective.

Commençons par l'injectivité : soit $x \in \ker(u)$, si bien que $u(x) = 0$. En composant par g_2, linéaire, il vient : $g_2(u(x)) = 0 = g_1(x)$ puisque $g_2 \circ u = g_1$. En d'autres termes, $x \in \ker(g_1) = \mathrm{Im}(f_1)$ si bien qu'il existe $t \in E$ tel que $x = f_1(t)$, et donc $u(x) = 0 = u(f_1(t))$ mais $u \circ f_1 = f_2$ donc $f_2(t) = 0$. Dès lors, $t \in \ker(f_2) = \{0\}$ puisque f_2 est injective donc $x = f_1(t) = 0$: on en déduit que $\ker(u) = \{0\}$ donc u est bien injective.

Montrons que u est surjective. Soit $y \in F_2$. $g_2(y) \in G$ et g_1 est surjective donc il existe $x \in F_1$ tel que $g_2(y) = g_1(x)$. De plus, $g_1(x) = g_2(u(x)) = g_2(y)$ et g_2 est linéaire donc $g_2(y - u(x)) = 0$, c'est-à-dire que $y - u(x) \in \ker(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$. Dès lors, il existe $t \in E$ tel que $y - u(x) = f_2(t)$ mais $f_2 = u \circ f_1$ donc $f_2(t) = u(f_1(t))$. Toujours par linéarité de u,

$$\begin{aligned} y &= u(x) + u(f_1(t)) \\ &= u(x + f_1(t)) \end{aligned}$$

ce qui prouve la surjectivité de u.

Exercice 23 - Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe : ✪✪✪ Soient $n \geq 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout i, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre.

Correction : Suivons l'indication de l'énoncé et raisonnons par récurrence sur n.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : « Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont des scalaires distincts, et si $x_1, \dots, x_n$ sont des vecteurs non nuls tels que, pour tout i, $u(x_i) = \lambda_i x_i$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre ».
- Soit $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ et soit x_1 non nul tel que $u(x_1) = \lambda_1 x_1$. Alors x_1 est non nul donc forme une famille libre : H_1 est vraie.
- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des scalaires distincts et $x_1, \dots, x_{n+1}$ non nuls tels que, pour tout $i \in [\![1\,;\, n+1]\!]$, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrons que la famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est libre. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$. On est bloqué : appliquons u, linéaire, ce qui donne

$$\alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{n+1} u(x_{n+1}) = 0$$

et, par hypothèse sur les x_i :

$$\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0$$

Notons cette égalité (1). On aimerait appliquer l'hypothèse de récurrence, donc se « débarrasser » d'un des termes (si possible, le dernier) pour n'avoir que n termes. Le but est de trouver une autre égalité dans laquelle on a aussi x_{n+1}. Il en faut une autre, car si on soustrait celle qu'on a déjà, on obtiendra $0 = 0$. On en a déjà une : la première ! Multiplions la première égalité par λ_{n+1}, ce qui donne

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0$$

Notons cette égalité (2). En faisant la différence $(1) - (2)$, il vient :

$$(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \alpha_1 x_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \alpha_n x_n = 0$$

On a à présent une somme de n termes : cherchons à appliquer l'hypothèse de récurrence. Par hypothèse de récurrence, $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$,

$$(\lambda_i - \lambda_{n+1}) \alpha_i = 0$$

Or, $\lambda_i - \lambda_{n+1} \neq 0$ (car les scalaires sont distincts) donc $\alpha_i = 0$ (pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$). L'égalité initiale devient donc (en simplifiant par tous les termes nuls) $\alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$. Puisque x_{n+1} est non nul, alors $\alpha_{n+1} = 0$ ce qui permet de conclure : $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est une famille libre, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 24 : ✪✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que

$$\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$$

Correction :

1. Soit $x \in E$. Montrons que x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément x_1 de $\ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et d'un élément x_2 de $\mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Raisonnons par analyse synthèse.
   - **Analyse :** Si x_1 et x_2 conviennent. Alors $x = x_1 + x_2$. Si on applique f linéaire, il vient : $f(x) = f(x_1) + f(x_2)$. Or, $x_1 \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ si bien que $f(x_1) = x_1$. Par conséquent, $f(x) = x_1 + f(x_2)$. De plus, $x_2 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$ donc il existe $t_2 \in E$ tel que $x_2 = f(t_2) - t_2$. Par conséquent : $f(x) = x_1 + f^2(t_2) - f(t_2)$ (toujours par linéarité de f, ce qu'on arrêtera désormais de préciser). En appliquant de nouveau f (l'idée est de faire apparaître f^3 pour utiliser l'information sur f) :

$$f^2(x) = f(x_1) + f^3(t_2) - f^2(t_2)$$

   Or, $f(x_1) = x_1$ et $f^3 = \mathrm{Id}_E$ donc $f^2(x) = x_1 + t_2 - f^2(t_2)$. Le membre de droite fait penser à x_2 : on ajoute et on enlève $f(t_2)$, ce qui donne :

$$f^2(x) = x_1 + t_2 - f(t_2) + f(t_2) - f^2(t_2)$$

   c'est-à-dire : $f^2(x) = x_1 - x_2 - f(x_2)$. En faisant la somme $f^2(x) + f(x) + x$, on obtient :

$$f^2(x) + f(x) + x = 3x_1$$

   si bien que $x_1 = \dfrac{1}{3}(f^2(x) + f(x) + x)$ et $x_2 = x - x_1$ c'est-à-dire :

$$x_2 = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$$

- **Synthèse :** Soient $x_1 = \dfrac{1}{3}(f^2(x)+f(x)+x)$ et $x_2 = x - x_1$ c'est-à-dire :
$$x_2 = \frac{1}{3}(2x - f(x) - f^2(x))$$
Par construction, on a bien $x = x_1 + x_2$. Montrons que $x_1 \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$ et que $x_2 \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$. Tout d'abord :
$$\begin{aligned} f(x_1) &= \frac{1}{3}(f^3(x)+f^2(x)+f(x)) \\ &= \frac{1}{3}(x+f^2(x)+f(x)) \\ &= x_1 \end{aligned}$$
si bien que $x_1 \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. De plus,
$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{3}(x - f^2(x) - (f(x) - x)) \\ &= \frac{1}{3}(x - f^2(x) - (f(x) - f^3(x))) \\ &= \frac{1}{3}(x - f^2(x) - f(x - f^2(x))) \\ &= f\left(-\frac{1}{3}(x - f^2(x))\right) - \left(-\frac{1}{3}(x - f^2(x))\right) \\ &\in \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) \end{aligned}$$
ce qui permet de conclure.

2. Montrons la première égalité par double inclusion.

   Soit $x \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. Alors l'écriture dont on a prouvé l'existence et l'unicité dans la question précédente est : $x = x + 0$ (elle convient, et il y a unicité donc c'est la seule). En particulier, $x = x_1$ (avec les notations de la question précédente) donc
$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3}(f^2(x)+f(x)+x) \\ &= (f^2+f+\mathrm{Id}_E)\left(\frac{1}{3}.x\right) \end{aligned}$$
(toujours par linéarité de x) donc $x \in \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. D'où la première inclusion. Pour l'inclusion réciproque, soit $y \in \mathrm{Im}(f^2+f+\mathrm{Id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^2(x)+f(x)+x$ si bien que
$$\begin{aligned} f(y) &= f^3(x)+f^2(x)+f(x) \\ &= x+f^2(x)+f(x) \\ &= y \end{aligned}$$
donc $y \in \ker(f - \mathrm{Id}_E)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où la première égalité. La deuxième est analogue.

29.3 Détermination d'applications linéaires

Exercice 25 : ✪ Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Soit u une application de E dans F telle que la restriction de u à $\overline{E_1}$ (le complémentaire de E_1) soit nulle.

1. Montrer que u est linéaire si et seulement si u est nulle. On pourra utiliser l'exercice 32 du chapitre 28.
2. Comment expliquer ce résultat alors qu'il existe un résultat dans le cours donnant l'existence et l'unicité d'une application linéaire connaissant ses restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires ?

Correction :

1. Si u est nulle alors u est évidemment linéaire. Réciproquement, supposons u linéaire. Alors u est nulle sur $\overline{E_1}$ et on a montré dans l'exericice 31 du chapitre 28 que tout élément de E_1 est somme de deux éléments de $\overline{E_1}$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E_1, \exists (y,z) \in \overline{E_1}^2, x = y+z$$

Par linéarité de u, $u(x) = u(y) + u(z) = 0$ donc u est nulle : u est nulle sur deux sous-espaces supplémentaires donc est nulle sur u. D'où l'équivalence.

2. Ce résultat ne s'applique pas car $\overline{E_1}$ n'est pas un espace vectoriel : ne pas confondre un supplémentaire avec le complémentaire !

Exercice 26 : ✪ On se place dans $E = \mathbb{K}^3$. Soient $E_1 = \text{Vect}(1,0,0)$ et $E_2 = \text{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$. Montrer qu'il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E_1, u(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E_2, u(x) = -x$$

Déterminer cette application linéaire.

Correction : Faisons comme au chapitre 28 et prouvons que E_1 et E_2 sont supplémentaires. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$, soient $y \in E_1$ et $z \in E_2$. Il existe donc α, β, γ tels que $y = \alpha(1,0,0) = (\alpha, 0, 0)$ et

$$\begin{aligned} z &= \beta(1,1,0) + \gamma(1,1,1) \\ &= (\beta+\gamma, \beta+\gamma, \gamma) \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} x = y+z &\iff (\alpha,0,0) + (\beta+\gamma,\beta+\gamma,\gamma) = (x_1,x_2,x_3) \\ &\iff \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x_1 \\ \beta + \gamma = x_2 \\ \gamma = x_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = x_1 - x_2 \\ \beta = x_2 - x_3 \\ \gamma = x_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Il y a existence et unicité de α, β, γ donc de y et z : tout élément x s'écrit d'une façon unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2, et cette écriture est :

$$(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2, 0, 0) + (x_2, x_2, x_3)$$

D'après le cours, une application linéaire est entièrement déterminée par son image sur deux espaces supplémentaires : on en déduit l'existence et l'unicité de u, et l'application u est donnée par :

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2,x_3) &= u(x) \\ &= u(y+z) \\ &= u(y) + u(z) \\ &= 2y - z \\ &= (2x_1 - 2x_2, 0, 0) - (x_2, x_2, x_3) \\ &= (2x_1 - 3x_2, -x_2, -x_3) \end{aligned}$$

Exercice 27 : ✪ Montrer qu'il unique une unique application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$u(1,0,0) = (0,1), u(1,1,0) = (1,0) \qquad \text{et} \qquad u(1,1,1) = (1,1)$$

Déterminer u et donner une base de son noyau et de son image.

Correction : En vertu du théorème de caractérisation par l'image des vecteurs d'une base, il suffit de montrer que $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Raisonnons par analyse-synthèse. Supposons qu'il existe $(\lambda, \mu, \beta) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,0,0) + \mu(1,1,0) + \beta(1,1,1)$. On a alors $x = \lambda + \mu + \beta$, $y = \mu + \beta$ et $z = \beta$. Ainsi $\mu = y - \beta = y - z$ et $\lambda = x - (\mu + \beta) = x - y$.

Réciproquement, on vérifie que

$$(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1) \in \text{Vect}\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big).$$

Ainsi la famille est une base car tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire de ces vecteurs (on aurait aussi pu raisonner par équivalences, ou introduire une matrice qu'on aurait inversée, comme dans le chapitre précédent).

Puisque $\big((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, le théorème de caractérisation par l'image des vecteurs d'une base entraîne qu'il existe une unique application linéaire de f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1), \qquad f(1,1,0) = (1,0), \qquad \text{et} \qquad f(1,1,1) = (1,1).$$

Comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$ donc $\text{Vect}((0,1),(1,0),(1,1)) = \text{Vect}((0,1),(1,0)) = \mathbb{R}^2$. La famille des vecteurs images engendre $\mathbb{R}^2$ donc f est surjective, et une base de $\text{Im}(u)$ est la base canonique $(1,0),(0,1)$.

Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) = (x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)$ donc

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f\Big((x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1)\Big) \\ &= (x-y)f(1,0,0) + (y-z)f(1,1,0) + zf(1,1,1) \\ &= (x-y)(0,1) + (y-z)(1,0) + z(1,1) \\ &= (y, x-y+z). \end{aligned}$$

Donnons enfin une base du noyau. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in \text{Ker}(f) \quad &\iff \quad f(x,y,z) = (0,0) \\ &\iff \quad (y, x-y+z) = (0,0) \\ &\iff \quad y = 0 \ \text{ et } \ x = -z \\ &\iff \quad (x,y,z) = (x,0,-x) = x(1,0,-1) \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1,0,-1))$, donc $(1,0,-1)$ est une base (on le justifie comme précédemment) du noyau.

Exercice 28 : ✪ Soit (e_1,e_2,e_3) une base de E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que
   - $f(e_1) = e_1 + e_2$
   - $f(e_1+e_2) = e_1 - e_2$
   - $f(e_1+e_2+e_3) = e_1 + \lambda e_3$

   Comment choisir λ pour que f soit injective ?
2. Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que
   - $f(e_1) = 2e_2 + e_3$
   - $f(e_2) = e_1 - e_3$
   - $f(e_3) = 0$
   - $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+2e_2$
3. ✪✪ Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que
   - $f(e_2+e_3) = e_2$
   - $f(e_1+e_2) = e_3$
   - $f(e_1-e_3) = e_1$

Correction :

1. On sait qu'une application linéaire est totalement déterminée par l'image d'une base (cf cours). Par conséquent, pour montrer l'existence de f, il suffit de montrer que $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ est une base de E (et on aura en prime l'unicité de f). Montrons que cette famille est libre. Soit $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{K}^3$.

$$\begin{aligned} \alpha_1 e_1 + \alpha_2(e_1+e_2) + \alpha_3(e_1+e_2+e_3) = 0 \quad &\iff \quad (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)e_1 + (\alpha_2+\alpha_3)e_2 + \alpha_3 e_3 = 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{(car } e_1,e_2,e_3 \text{ sont libres)} \\ &\iff \quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Dès lors, $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ est une famille libre. Montrons que c'est une famille génératrice.

Remarque : Quand on aura fait le chapitre suivant, on pourra aller plus vite : E est de dimension 3 car admet une base à trois éléments. $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ est une famille libre à trois éléments dans un espace de dimension 3 donc est une base.

Soit $x \in E$. (e_1, e_2, e_3) est une base de E donc en particulier une famille génératrice donc il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. On veut faire apparaître les vecteurs e_1 (c'est bon), e_1+e_2 et $e_1+e_2+e_3$: on rajoute les termes manquants et on compense. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
x &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 \\
&= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 (e_1+e_2+e_3) - \alpha_3 e_1 - \alpha_3 e_2 \\
&= (\alpha_1 - \alpha_3) e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3) e_2 + \alpha_3 (e_1+e_2+e_3) \\
&= (\alpha_1 - \alpha_3) e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)(e_1+e_2) - (\alpha_2 - \alpha_3) e_1 + \alpha_3 (e_1+e_2+e_3) \\
&= (\alpha_1 - \alpha_2) e_1 + (\alpha_2 - \alpha_3)(e_1+e_2) + \alpha_3 (e_1+e_2+e_3)
\end{aligned}$$

Finalement, $(e_1, e_1+e_2, e_1+e_2+e_3)$ est une base de E. Or, pour caractériser une application linéaire, il suffit de se donner l'image d'une base : il existe donc un unique endomorphisme f tel que $f(e_1) = e_1+e_2, f(e_1+e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_1+e_2+e_3) = e_1 + \lambda e_3$. De plus, d'après le cours, une application linéaire est injective si et seulement si elle envoie une base sur une famille libre. En d'autres termes, f est injective si et seulement si la famille $(e_1+e_2, e_1-e_2, e_1+\lambda e_3)$ est libre. Cherchons les valeurs de λ pour lesquelles c'est le cas. Soient $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{K}^3$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1(e_1+e_2) + \alpha_2(e_1-e_2) + \alpha_3(e_1+\lambda e_3) = 0 &\iff (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)e_1 + (\alpha_1-\alpha_2)e_2 + \alpha_3\lambda e_3 = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & & & \lambda\alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \qquad \text{(car } e_1, e_2, e_3 \text{ sont lib}
\end{aligned}$$

Il faut séparer les cas. Si $\lambda = 0$ alors la troisième ligne devient $0 = 0$ donc le système est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & & & = & \alpha_2 \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha_1 & = & -\alpha_3 \\ \alpha_1 & = & \alpha_2 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Les réels $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\alpha_3 = -2$ conviennent : la famille n'est pas libre. Supposons à présent $\lambda \neq 0$. Alors le système est équivalent à

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & & & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff &\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \alpha_1 & + & \alpha_2 & & & = & 0 \\ \alpha_1 & - & \alpha_2 & & & = & 0 \\ & & & & \alpha_3 & = & 0 \end{array}\right. \\
\iff &\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0
\end{aligned}$$

et donc la famille est libre. En conclusion, la famille est libre si et seulement si $\lambda \neq 0$, donc f est injective si et seulement si $\lambda \neq 0$.

2. On aimerait faire pareil, mais pas de chance : $(e_1, e_2, e_3, e_1 + e_2 + e_3)$ n'est pas une famille libre (l'un est combinaison linéaire des autres). Comment faire dans ce cas ? En fait, il suffit de supprimer une condition pour avoir une unique application qui vérifie les trois premières conditions, et de regarder si cette application vérifie la quatrième : si oui, alors c'est bon, sinon, alors aucune application ne convient (car une seule vérifie les trois premières conditions mais celle-ci ne vérifie pas la quatrième). Puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de E et qu'une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base, il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = 2e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 - e_3$ et $f(e_3) = 0$. Par conséquent, par linéarité de f,

$$\begin{aligned} f(e_1 + e_2 + e_3) &= f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) \\ &= 2e_2 + e_3 + e_1 - e_3 + 0 \\ &= e_1 + 2e_1 \end{aligned}$$

Finalement, une telle application linéaire convient.

3. Là non plus, on ne peut pas appliquer la méthode de la question 1 car les trois vecteurs $e_2 + e_3, e_1 + e_2$ et $e_1 - e_3$ ne sont pas libres : en effet, $e_1 - e_3 = (e_1 + e_2) - (e_2 + e_3)$. La question qu'il faut se poser est : ces trois conditions sont-elles compatibles ? C'est-à-dire : si les deux premières conditions sont vérifiées, la troisième l'est-elle aussi (à l'aide de la linéarité de f, comme dans la question précédente) ? Si oui, c'est un peu compliqué, il faut compléter en base et faire comme dans la question précédente, mais sinon, c'est assez simple et une telle fonction f n'existe pas. Vérifions si ces conditions sont compatibles. Si les deux premières conditions sont vérifiées, alors

$$\begin{aligned} f(e_1 - e_3) &= f(e_1 + e_2 - (e_2 + e_3)) \\ &= f(e_1 + e_2) - f(e_2 + e_3) \quad (f \text{ est linéaire}) \\ &= e_2 + e_3 \end{aligned}$$

Est-ce compatible avec $f(e_1 - e_3) = e_1$? Si $f(e_1 - e_3) = e_1$ alors $e_2 + e_3 = e_1$ donc $e_1 - e_2 - e_3 = 0$ ce qui est absurde puisque (e_1, e_2, e_3) est une base donc une famille libre. Ainsi, aucune application linéaire f ne peut vérifier les trois conditions en même temps : un tel endomorphisme n'existe pas.

29.4 Projecteurs et symétries

Exercice 29 : ✪✪ Montrer à chaque fois que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2, ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. $E_1 = \text{Vect}(1, 2)$ et $E_2 = \text{Vect}(-1, 1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2. $E_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3. $E_1 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x + y, x + y, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}(0, 1, 0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5. $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ et $E_2 = \text{Vect}(1, 2, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
6. $E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
7. E_1 l'ensemble des fonctions affines et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. E_1 l'ensemble des fonctions linéaires et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. E_1 l'ensemble des fonctions nulles en 0 et $\pi/2$ et $E_2 = \text{Vect}(\sin, \cos)$ dans $E = \mathscr{C}([\,0\,;\pi\,], \mathbb{R})$.
10. $E_1 = \text{Vect}(1, \dots, 1)$ et $E_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
11. $E_1 = \text{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$ et $E_2 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
12. E_1 l'ensemble des suites constantes et E_2 l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans E l'ensemble des suites convergentes.
13. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et E_2 l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
14. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et

$$E_2 = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

15. $E_1 = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,|\, (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ et

$$E_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\}$$

dans $E = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$.

Correction : La méthode est toujours la même : on montre qu'ils sont supplémentaires, on explicite la décomposition (unique) $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$, et on a alors $p(x) = x_1$ et $s(x) = x_1 - x_2$. On fait donc un (honteux) copier-coller de l'exercice 42 du chapitre 28 qu'on complète à la fin de chaque question. On note à chaque fois p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 et s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. Soient $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$. Il existe alors α et β tels que $x_1 = \alpha(1, 2)$ et $x_2 = \beta(-1, 1)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
x = x_1 + x_2 \quad &\iff \quad \begin{cases} \alpha - \beta = a \\ 2\alpha + \beta = b \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \alpha - \beta = a \\ 3\beta = b - 2a \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \alpha = a + \beta \\ \beta = \dfrac{b - 2a}{3} \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{a + b}{3} \\ \beta = \dfrac{b - 2a}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a existence et unicité de α et de β donc de x_1 et x_2 : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :

$$(a, b) = \underbrace{\frac{a + b}{3}.(1, 2)}_{\in E_1} + \underbrace{\frac{b - 2a}{3}.(-1, 1)}_{\in E_2}$$

Par conséquent :

$$p : (a, b) \mapsto \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2(a + b)}{3} \right) \qquad \text{et} \qquad s : (a, b) \mapsto \left(\frac{a + b}{3}, \frac{2(a + b)}{3} \right) - \left(\frac{2a - b}{3}, \frac{b - 2a}{3} \right) = \left(\frac{2b - a}{3}, \frac{4a + b}{3} \right)$$

2. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in E_1$ et $z = (z_1, z_2, z_3) \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc $y_3 = -y_1$ et $z_1 = z_3 = 2z_2$ si bien que $y = (y_1, y_2, -y_1)$ et $z = (2z_2, z_2, 2z_2)$. Raisonnons ensuite par équivalences :

$$\begin{aligned}
x = y + z \quad &\iff \quad (y_1, y_2, -y_1) + (2z_2, z_2, 2z_2) = (x_1, x_2, x_3) \\
&\iff \quad \begin{cases} y_1 + 2z_2 = x_1 \\ y_2 + z_2 = x_2 \\ -y_1 + 2z_2 = x_3 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} y_1 + \quad + 2z_2 = x_1 \\ y_2 + z_2 = x_2 \\ 4z_2 = x_3 + x_1 \end{cases} \\
&\iff \quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{x_1 - x_3}{2} \\ y_2 = \dfrac{4x_2 - x_1 - x_3}{4} \\ z_2 = \dfrac{x_3 + x_1}{4} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a existence et unicité de y_1, y_2 et de z_2 donc de y et z : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\left(\frac{x_1 - x_3}{2}, \frac{4x_2 - x_1 - x_3}{4}, \frac{x_3 - x_1}{2}\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{x_1 + x_3}{4}, \frac{x_1 + x_3}{2}\right)}_{\in E_2}$$

Par conséquent :

$$p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1 - x_3}{2}, \frac{4x_2 - x_1 - x_3}{4}, \frac{-x_3 - x_1}{2}\right)$$

et

$$s : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \left(\frac{x_1 - x_3}{2}, \frac{4x_2 - x_1 - x_3}{4}, \frac{x_3 - x_1}{2}\right) - \left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{x_1 + x_3}{4}, \frac{x_1 + x_3}{2}\right) = \left(-x_3, \frac{4x_2 - 2x_1 - 2x_3}{4}, -x_1\right)$$

3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x_1 = (a, 2a, 3a) \in E_1$ et $x_2 = (b + c, b + c, c) \in E_2$ (il fallait faire attention à ne pas donner le même nom à toutes les variables).

$$\begin{aligned}
x = x_1 + x_2 \quad &\iff \quad (a, 2a, 3a) + (b + c, b + c, c) = (x_1, x_2, x_3) \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ 2a + b + c = x_2 \\ 3a + c = x_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ - b - c = x_2 - 2x_1 \\ - 3b - 2c = x_3 - 3x_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a + b + c = x_1 \\ b + c = 2x_1 - x_2 \\ c = 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = -x_1 + x_2 \\ b = -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ c = 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Il y a existence et unicité de a, b et de c donc de x_1 et x_2 : x s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de E_1 et de E_2 : E_1 et E_2 sont supplémentaires. On a même montré que cette décomposition était :

$$(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{(-x_1 + x_2, -2x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2)}_{\in E_1} + \underbrace{(2x_1 - x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + x_3)}_{\in E_2}$$

Par conséquent :

$$p : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1 + x_2, -2x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2)$$

et

$$\begin{aligned}
s : (x_1, x_2, x_3) \quad &\mapsto \quad (-x_1 + x_2, -2x_1 + 2x_2, -3x_1 + 3x_2) - (2x_1 - x_2, 2x_1 - x_2, 3x_1 - 3x_2 + x_3) \\
&= \quad (-3x_1 + 2x_2, -4x_1 + 3x_2, -6x_1 + 6x_2 - x_3)
\end{aligned}$$

4. Soient $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y \in E_1$ et $z \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc $y_2 = y_1 + y_3$ et $z_1 = z_3 = 0$ donc $y = (y_1, y_1 + y_3, y_3)$ et $z = (0, z_2, 0)$. On trouve de même que $y_1 = x_1, z_2 = x_2 - x_1 - x_3, y_3 = x_3$ et on conclut de la même façon, avec la décomposition suivante :

$$(x_1,x_2,x_3) = \underbrace{(x_1, x_1+x_3, x_3)}_{\in E_1} + \underbrace{(0, x_2-x_1-x_3, 0)}_{\in E_2}$$

Par conséquent :

$$p : (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1, x_1+x_3, x_3)$$

et

$$s : (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1, x_1+x_3, x_3) - (0, x_2-x_1-x_3, 0) = (x_1, 2x_1 - x_2 + 2x_3, x_3)$$

5. Soient $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y \in E_1$ et $z \in E_2$. $y \in E_1$ et $z \in E_2$ donc il existe a, b, c tels que $y = a(1,0,0) + b(1,1,0)$ et $z = c(1,2,3)$. On trouve de même que $a = x_2 - x_2 + x_3/3, b = x_2 - 2x_3/3$ et $c = x/3/3$ et on conclut de la même façon, avec la décomposition suivante :

$$(x_1,x_2,x_3) = \underbrace{\left(x_1 - x_2 + \frac{x_3}{3}, 0, 0\right) + \left(x_2 - \frac{2x_3}{3}, x_2 - \frac{2x_3}{3}, 0\right)}_{\in E_1} + \underbrace{\left(\frac{x_3}{3}, \frac{2x_3}{3}, x_3\right)}_{\in E_2}$$

Par conséquent :

$$p : (x_1,x_2,x_3) \mapsto \left(x_1 - x_2 + \frac{x_3}{3}, 0, 0\right) + \left(x_2 - \frac{2x_3}{3}, x_2 - \frac{2x_3}{3}, 0\right) = \left(x_1 - \frac{x_3}{3}, x_2 - \frac{2x_3}{3}, 0\right)$$

et

$$\begin{aligned} s : (x_1,x_2,x_3) &\mapsto \left(x_1 - x_2 + \frac{x_3}{3}, 0, 0\right) + \left(x_2 - \frac{2x_3}{3}, x_2 - \frac{2x_3}{3}, 0\right) - \left(\frac{x_3}{3}, \frac{2x_3}{3}, x_3\right) \\ &= \left(x_1 - \frac{2x_3}{3}, x_2 - \frac{4x_3}{3}, -x_3\right) \end{aligned}$$

6. On va commencer à travailler par analyse synthèse car les raisonnements par équivalences ne seront plus possibles (et même lorsqu'ils le seront, ils seront plus délicats à rédiger). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche à prouver qu'il existe $(v_n) \in E_1$ et $(w_n) \in E_2$ telles que $(u_n) = (v_n) + (w_n)$ c'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$.

   Analyse : Si (v_n) et (w_n) conviennent. Alors, pour tout n, $v_{2n+1} = 0$ donc $w_{2n+1} = u_{2n+1}$ et puisque $(w_n) \in E_2$, alors $w_{2n} = u_{2n+1}$. Par conséquent, pour tout n, $w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n+1}$ et $v_n = u_n - w_n$.

   Synthèse : Soient (v_n) et (w_n) les suites définies de la façon suivante :
   - $\forall n \in \mathbb{N}, w_{2n} = w_{2n+1} = u_{2n+1}$.
   - $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - w_n$ i.e. : $\forall k \in \mathbb{N}, v_{2k} = u_{2k} - u_{2k+1}$ et $v_{2k+1} = u_{2k+1} - u_{2k+1} = 0$.

   Par construction, (v_n) appartient à E_1, (w_n) appartient à E_2 et $(u_n) = (v_n) + (w_n)$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité des suites (v_n) et (w_n) : E_1 et E_2 sont supplémentaires.

   Par conséquent, $p : (u_n) \mapsto (v_n)$ et $s :\mapsto (v_n) - (w_n)$.

7. Soit $f \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On souhaite prouver qu'il existe $g \in E_1$ et $h \in E_2$ uniques telles que $f = g + h$.

   Analyse : Si g et h conviennent. g étant affine, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout x, $g(x) = ax + b$. Pour tout x, $f(x) = ax + b + h(x)$. En évaluant en 0, étant donné que $h(0) = 0$ puisque $h \in E_2$, on obtient : $b = f(0)$. Les fonctions étant dérivables, on peut dériver l'égalité précédente : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a + h'(x)$ et, de même, $h'(0) = 0$ donc $a = f'(0)$ si bien que $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$.

   Synthèse : Soient $g : x \mapsto f'(0)x + f(0)$ et $h = f - g$ i.e. $h : x \mapsto f(x) - f'(0)x - f(0)$. Alors, par construction, g est affine donc appartient à E_1 et $f = g + h$. De plus, $h(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $h'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$ donc $h \in E_2$. On a donc prouvé l'existence et l'unicité de f et g : E_1 et E_2 sont supplémentaires.

   Par conséquent, $p : f \mapsto g$ et $s : f \mapsto g - h$.

8. Idem pour les suivants.

Exercice 30 : ✪ Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition associée. En déduire sans calcul que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

Correction : On a :

$$\begin{array}{rcl}(g \circ f)^2 & = & (g \circ f) \circ (g \circ f) \\ & = & g \circ (f \circ g) \circ f \\ & = & g \circ \mathrm{Id}_E \circ f \\ & = & g \circ f\end{array}$$

c'est-à-dire que $g \circ f$ est un projecteur. On sait (cf. cours) que $g \circ f$ est alors la projection sur $\ker(g \circ f)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(g \circ f)$ (qui sont donc supplémentaires). Montrons que $\ker(g \circ f) = \ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)$. Cela prouvera également que $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.

L'inclusion $\ker(f) \subset \ker(g \circ f)$ est immédiate et doit être faite en claquant des doigts (cf. cours). Montrons l'inclusion réciproque. Soit $u \in \ker(g \circ f)$. Alors $g(f(x)) = 0$. En composant par f linéaire, on obtient que $f(g(f(x))) = f(0) = 0$ mais $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ donc $f(g(f(x))) = f(x)$ si bien que $f(x) = 0$ donc $x \in \ker(f)$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

De même, l'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ est immédiate (cf. cours, à savoir faire !). Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Alors il existe x tel que $y = g(x)$. En composant par f, il vient : $f(y) = f(g(x)) = x$ si bien que $x = f(y)$ et donc $y = g \circ f(y) \in \mathrm{Im}(g)$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

En conclusion, $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires et $g \circ f$ est la projection sur $\mathrm{Im}(g)$ parallèlement à $\ker(f)$.

Exercice 31 : ✪ Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$. Montrer que f et g sont deux projecteurs puis qu'ils ont la même direction.

Correction : Rappelons que la direction d'un projecteur est le E_2 dans la définition, leur noyau, l'espace vectoriel parallèlement auquel on projette. Tout d'abord :

$$\begin{array}{rcl}f^2 & = & f \circ f \\ & = & (f \circ g) \circ f \\ & = & f \circ (g \circ f) \\ & = & f \circ g \\ & = & f\end{array}$$

donc f est un projecteur. f et g jouant le même rôle, g est également un projecteur. De plus, si $x \in \ker(f)$, alors $f(x) = 0$ et g est linéaire donc $g(f(x)) = g(0) = 0$ donc $g(x) = 0$ puisque $g = g \circ f$. En d'autres termes, $x \in \ker(g)$ donc $\ker(f) \subset \ker(g)$: par symétrie des rôles, on a l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Exercice 32 : ✪ Soit $n \geq 1$. Prouver que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ en exhibant une certaine symétrie.

Correction : La transposition est une symétrie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car, si on la note s, alors on a bien $s \circ s = \mathrm{Id}$. Dès lors, en reprenant les notations du cours : $A_1 = \ker(s - \mathrm{Id})$ et $A_2 = \ker(s + \mathrm{Id})$ sont supplémentaires (et s est la symétrie par rapport à A_1 parallèlement à A_2). Or, $A_1 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, M^\top = M\}$ et $A_2 = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \,|\, M^\top = -M\}$, c'est-à-dire que $A_1 = S_n(\mathbb{K})$ et $A_2 = A_n(\mathbb{K})$ qui sont donc bien supplémentaires.

Exercice 33 : ✪ On note $\mathrm{Proj}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E. On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\mathrm{Proj}(E)$ par :

$$p \preccurlyeq q \iff p \circ q = q \circ p = p$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathrm{Proj}(E)$.
2. Montrer que pour tous p et q dans $\mathrm{Proj}(E)$ qui commutent, $p \circ q = \inf\{p, q\}$.

Correction :

1. Montrons que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathrm{Proj}(E)$.
   - $p \circ p = p \circ p = p$ donc il existe bien q est que $p \circ q = q \circ p = p$ donc $p \preccurlyeq p$: p est réflexive.

- Soient p et q deux projecteurs tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq p$. Puisque $p \preccurlyeq q$, alors $p \circ q = q \circ p = p$ mais puisque $q \preccurlyeq p$, on a égalenent : $q \circ p = p \circ q$. En particulier, $p \circ q = q \circ p = p = q$ donc $p = q$: $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
- Soient p, q, r trois projecteurs tels que $p \preccurlyeq q$ et $q \preccurlyeq f$. Alors $p \circ q = q \circ p = p$ et $q \circ r = r \circ q = q$. Dès lors :

$$\begin{aligned} p &= p \circ q \\ &= p \circ (q \circ r) \\ &= (p \circ q) \circ r \\ &= p \circ r \end{aligned}$$

  et on prouve de même que $r \circ p = p$ si bien que $p \preccurlyeq r$: $\preccurlyeq$ est transitive, $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

2. Soient donc p et q deux projecteurs qui commutent. Il s'agit de montrer deux choses :
   - $p \circ q$ est un minorant de p et q.
   - Tout minorant de p et q est inférieur à $p \circ q$.

   Tout d'abord, p est un projecteur donc $p \circ (p \circ q) = (p \circ p) \circ q = p \circ q$ et :

$$\begin{aligned} (p \circ q) \circ p &= q \circ p \circ p \qquad (p \text{ et } q \text{ commutent}) \\ &= q \circ p \qquad (p \text{ est un projecteur}) \\ &= p \circ q \qquad (p \text{ et } q \text{ commutent}) \end{aligned}$$

   donc $p \circ q \preccurlyeq p$ et on prouve de même que $p \circ q \preccurlyeq q$: $p \circ q$ est bien un minorant de p et de q.

   Soit $r \in \text{Proj}(E)$ un minorant de p et de q. Alors $r \circ p = p \circ r = r$ et $q \circ r = r \circ q = r$. Dès lors :

$$\begin{aligned} r \circ (p \circ q) &= (r \circ p) \circ q \\ &= r \circ q \\ &= r \end{aligned}$$

   et on prouve de même que $(p \circ q) \circ r = r$ ce qui permet de conclure.

Exercice 34 : ✪ Soient p et q deux projecteurs de E distincts et non nuls. Montrer que (p, q) est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.

Correction : Puisqu'on a deux éléments, il suffit de prouver qu'ils ne sont pas proportionnes. On va en fait prouver que les seules constantes de proportionnalité possibles sont 0 et 1 à cause de l'égalité $p^2 = p$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $p = \lambda q$. Alors $p^2 = \lambda^2 q^2$. En effet,

$$\begin{aligned} p^2 &= p \circ p \\ &= (\lambda q) \circ (\lambda q) \\ &= (\lambda \times \lambda)(q \circ q) \quad (\text{par linéarité de } q) \\ &= \lambda^2 q^2 \end{aligned}$$

et puisque p et q sont des projecteurs, $p = \lambda^2 q$ donc $\lambda q = \lambda^2 q$ donc $\lambda(1-\lambda)q = 0$. Or, $q \neq 0$ donc $\lambda(1-\lambda) = 0$ si bien que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$: si $\lambda = 0$ alors $p = 0$ et si $\lambda = 1$ alors $p = q$, ce qui est absurde dans tous les cas car p et q sont non nuls et distincts.

Exercice 35 : ✪✪

1. Montrer que $(x, y, z) \mapsto (x, -z, -y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
2. Montrer que

$$P \mapsto \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - P$$

   est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.
3. Montrer que $P \mapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Correction : Les symétries de cet exercice seront toutes notées s. Quand on parle des éléments caractéristiques d'une symétrie, on parle des espaces E_1 et E_2 supplémentaires qui la définissent. De plus, $E_1 = \{x \in E \,|\, s(x) = x\} = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\} = \ker(f + \mathrm{Id}_E)$.

1. On vérifie aisément que s est linéaire (ne pas l'oublier !) et que $s^2 = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, s^2(x, y, z) = (x, y, z)$. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} s(x,y,z) = (x,y,z) &\iff (x,-z,-y) = (x,y,z) \\ &\iff y = -z \end{aligned}$$

   Dès lors,

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker(s - \mathrm{Id}_E) \\ &= \{(x,-z,z) \,|\, (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1,0,0) + z(0,-1,1) \,|\, (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

   et donc $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,-1,1))$. De même :

$$\begin{aligned} s(x,y,z) = -(x,y,z) &\iff (x,-z,-y) = (-x,-y,-z) \\ &\iff x = 0 \qquad \text{et} \qquad y = z \end{aligned}$$

   On en déduit de même que $E_2 = \mathrm{Vect}(0,1,1)$. En conclusion, s est la symétrie sur $\mathrm{Vect}((1,0,0),(0,-1,1))$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(0,1,1)$.

2. s est trivialement linéaire. Montrons que s est une symétrie (ce qui n'est pas évident à première vue). Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors :

$$s(P)(-1) = \frac{1}{3}(-P(-1)+2P(0)+2P(1)), s(P)(0) = \frac{1}{3}(2P(-1)-P(0)+2P(1)) \qquad \text{et} \qquad s(P)(1) = \frac{1}{3}(2P(-1)+2P(0)+-P(1$$

   Dès lors :

$$s(P)(-1) + s(P)(0) + s(P)(1) = P(-1) + P(0) + P(1)$$

   Par conséquent :

$$\begin{aligned} s^2(P) &= \frac{2}{3}(s(P)(-1) + s(P)(0) + s(P)(1)) - s(P) \\ &= \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) + P \\ &= P \end{aligned}$$

   s est bien une symétrie. Faisons comme dans la question précédente :

$$\begin{aligned} s(P) = P &\iff \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - P = P \\ &\iff P = \frac{1}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) \end{aligned}$$

   Si P convient, alors P est constant et, réciproquement, un polynôme constant convient donc $s(P) = P$ si et seulement si P est constant. On en déduit que $E_1 = \ker(s - \mathrm{Id}_0) = \mathbb{R}_0[X]$. De plus :

$$\begin{aligned} s(P) = -P &\iff \frac{2}{3}(P(-1) + P(0) + P(1)) - P = -P \\ &\iff P(-1) + P(0) + P(1) = 0 \end{aligned}$$

   Notons $P = aX^2 + bX + c$ (on est dans $\mathbb{R}_2[X]$). Dès lors :

$$\begin{aligned} s(P) = P &\iff a - b + c + c + a + b + c = 0 \\ &\iff 2a + 3c = 0 \\ &\iff c = -2a/3 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{array}{rcl} E_2 = \ker(s + \mathrm{Id}_E) & = & \{aX^2 + bX - 2a/3 \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \\ & = & \{a(X^2 - 2/3) + bX \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ & = & \mathrm{Vect}(X, X^2 - 2/3) \end{array}$$

On en déduit donc que s est la symétrie par rapport à $\mathbb{R}_2[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(X, X^2 - 2/3)$.

3. Il est immédiat que s est linéaire, peut-être moins que s est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$. Si $P = a_nX^n + \cdots + a_0$, alors :

$$\begin{array}{rcl} s(P) & = & X^n\left(\dfrac{a_n}{X^n} + \dfrac{a_{n-1}}{X^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_1}{X} + a_0\right) \\ & = & a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_1X^{n-1} + a_0X^n \end{array}$$

donc on a bien $s(P) \in \mathbb{R}_n[X]$, et $s(P)$ est obtenu en « échangeant » les coefficients, du début à la fin (par exemple, $s(4X^3 + 3X^2 + 2X + 1) = X^3 + 2X^2 + 3X + 4$). On a donc également :

$$\begin{array}{rcl} s^2(P) & = & s(s(P)) \\ & = & s(a_0X^n + a_1X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n) \\ & = & a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \\ & = & P \end{array}$$

donc s est bien une symétrie. De plus,

$$\begin{array}{rcl} s(P) = P & \iff & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}X^k = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k \\ & \iff & \forall k \in [\![0\,;\, n]\!], a_k = a_{n-k} \end{array}$$

c'est-à-dire que $E_1 = \left\{ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k \,|\, \forall k \in [\![0\,;\, n]\!], a_k = a_{n-k} \right\}$. En d'autres termes, E_1 est l'ensemble des polynômes dont les coefficients sont « des palindromes », c'est-à-dire qui se lisent de la même façon dans les deux sens, par exemple $X^3 + 2X^2 + 2X + 1$. De même, $E_2 = \left\{ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kX^k \,|\, \forall k \in [\![0\,;\, n]\!], a_k = -a_{n-k} \right\}$. En d'autres termes, E_2 est l'ensemble des polynômes dont les coefficients symétriques sont opposés, par exemple $X^3 + 2X^2 - 2X - 1$.

Exercice 36 : ✪✪ Soit p un projecteur de E. On définit

$$C(p) = \{u \in \mathscr{L}(E) \,|\, p \circ u = u \circ p\}$$

1. Montrer que $C(p)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ (on dit que c'est une sous-algèbre). Donner un élément de $C(p)$ distinct de l'application nulle.
2. Montrer que $u \in C(p)$ si et seulement si u laisse stables le noyau et l'image de p.

Correction :

1. Montrons tout d'abord que $C(p)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
   - Si on note u l'application nulle, alors $u \circ p = 0$ (l'application nulle) et $p \circ u = 0$ car p est linéaire. On en déduit que l'application nulle appartient à $C(p)$ donc $C(p)$ est non vide.
   - Soient $(u,v) \in C(p)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. p étant linéaire, $p \circ (\lambda u + \mu v) = \lambda p \circ u + \mu p \circ v$ et puisque u et v appartiennent à $C(p)$:

   $$\begin{array}{rcl} p \circ (\lambda u + \mu v) & = & \lambda u \circ p + \mu v \circ p \\ & = & (\lambda u + \mu v) \circ p \end{array}$$

   Précisons que la dernière égalité est vraie pour toutes fonctions u, v, p et même si elles ne sont pas linéaires : la composition est toujours distributive à droite par rapport à la somme, et elle ne l'est à gauche que quand on manipule des applications linéaires. Quoi qu'il en soit, $\lambda u + \mu v \in C(p)$: $C(p)$ est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Montrons à présent que $C(p)$ est un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ (sous-entendu : pour les lois $+$ et $\circ$, lois qui font de $\mathscr{L}(E)$ un anneau, cf. cours).

- On sait déjà que $C(p)$ est un sous-groupe de $\mathscr{L}(E)$ puisque c'est un sous-espace vectoriel.
- L'identité commute avec tout endomorphisme donc avec p : $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ (un sous-anneau doit contenir le neutre de la deuxième loi, et Id_E est le neutre pour $\circ$).
- Enfin, soit $(u,v) \in C(p)^2$.

$$\begin{aligned} u\circ v\circ p &= u\circ p\circ v \quad (\text{car } v\in C(p)) \\ &= p\circ u\circ v \quad (\text{car } u\in C(p)) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $u\circ v \in C(p)$: $C(p)$ est stable pour la deuxième loi, c'est bien un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$.

Enfin, $\mathrm{Id}_E \in C(p)$.

2. Si $u \in C(p)$ alors on montre comme dans l'exercice 7 que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u. Réciproquement, supposons que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ soient stables par u. Tout vient du fait que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont supplémentaires puisque p est un projecteur. Plus précisément, soit $x\in E$. Alors il existe $x_1 \in \ker(p)$ et $x_2\in \mathrm{Im}(p)$ uniques tels que $x = x_1 + x_2$. p étant linéaire, $p(x) = p(x_1) + p(x_2)$ mais $x_1 \in \ker(f)$ et $x_2 \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(x) = x_2$ (un projecteur laisse les éléments de son image invariants, cf. cours) si bien que $u(p(x)) = u(x_2)$. De plus, $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u donc $u(x_1)\in\ker(p)$ et $u(x_2)\in \mathrm{Im}(p)$ et donc

$$\begin{aligned} p(u(x)) &= p(u(x_1)) + p(u(x_2)) \\ &= u(x_2) \end{aligned}$$

puisque $u(x_2)\in\mathrm{Im}(p)$ donc est invariant par p. x étant quelconque, on en déduit que $p\circ u = u\circ p$ donc $u \in C(p)$.

Exercice 37 : ✪✪ Montrer que deux projecteurs ayant la même image et qui commutent sont égaux.

Correction : Soient donc p et q deux projecteurs tels que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$ et $p\circ q = q\circ p$. Montrons que $\ker(p) = \ker(q)$. Soit $x\in\ker(p)$. On prouve comme dans l'exercice 7 (car p et q commutent) que $q(x)\in\ker(p)$. Or, $q(x)\in\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont supplémentaires car p est un projecteur, donc $q(x)\in\mathrm{Im}(p)\cap\ker(p) = \{0\}$ si bien que $q(x) = 0$: $x\in\ker(q)$. Ainsi, $\ker(p)\subset\ker(q)$, et par symétrie des rôles, on a l'inclusion réciproque. Or, pour tout $x\in\ker(p) = \ker(q), p(x) = q(x) = 0$ et pour tout $x\in\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q), p(x) = q(x) = x$ (propriété d'un projecteur : si p est un projecteur et $y\in\mathrm{Im}(p)$ alors $p(y) = y$). Ainsi, p et q coïncident sur deux espaces supplémentaires donc sont la même application linéaire.

Exercice 38 : ✪✪ Soient $\lambda\in\mathbb{K}\backslash\{1\}$, et E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle **affinité** de base E_1, de direction E_2 et de rapport λ l'application

$$u : \begin{cases} E = E_1\oplus E_2 \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 \longmapsto & x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$$

1. Que sont les affinités vectorielles de rapport 0 ? de rapport -1 ? de base $\{0_E\}$?
2. (a) Soit u l'affinité de base E_1, de direction E_2 et de rapport λ. Montrer que $u\in\mathscr{L}(E)$ et que $E_1 = \ker(u-\mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(u-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
   (b) Montrer que si $u\in\mathscr{L}(E)$ est tel que $E = \ker(u-\mathrm{Id}_E)\oplus\ker(u-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$, alors u est l'affinité vectorielle de base $\ker(u-\mathrm{Id}_E)$, de direction $\ker(u-\lambda\,\mathrm{Id}_E)$ et de rapport λ.
3. Montrer que $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(x,y,z)\mapsto(x, 3x-2y, -3x+3y+z)$, est une affinité vectorielle. Préciser ses éléments caractéristiques.

Correction :

1. L'affinité de rapport 0 de base E_1 et de direction E_2 est exactement la projection sur E_1 parallèlement à E_2. L'affinité de rapport -1 de base E_1 et de direction E_2 est exactement la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Enfin, si $E_1 = \{0\}$, alors l'écriture $x = x_1 + x_2$ est juste l'écriture $x = 0 + x$ donc l'affinité associée est simplement la fonction $x\mapsto\lambda x$ donc l'homothétie $\lambda\,\mathrm{Id}_E$.
2. (a) Soient $(x,y)\in E^2, \alpha\in\mathbb{K}$. Il existe $(x_1,y_1)\in {E_1}^2$ et $(x_2,y_2)\in{E_2}^2$ uniques tels que

$$x = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad y = y_1 + y_2$$

Ainsi, $\alpha x = \underbrace{\alpha x_1}_{\in E_1} + \underbrace{\alpha x_2}_{\in E_2}$, d'où :

$$\begin{aligned} u(alphax) &= \alpha x_1 + \lambda\alpha x_2 \\ &= \alpha p(x) \end{aligned}$$

L'égalité $u(x+y) = u(x)+u(y)$ se démontre de la même façon : u est bien linéaire. Supposons que $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$. Alors $u(x) = x$ donc $x_2 = \lambda x_2$ et $\lambda \neq 1$ donc $x_2 = 0$, si bien que $x = x_1 + 0 \in E_1$: $\ker(u - \mathrm{Id}_E) \subset E_1$. Réciproquement, supposons que $x \in E_1$. Alors

$$x = \underbrace{x}_{\in E_1} + \underbrace{0}_{\in E_2}$$

donc $u(x) = x_1 + \lambda.0 = x_1$ ie $x \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité. L'autre égalité est analogue.

(b) Soit $x \in E$. Notons $E_1 = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$. Par hypothèse, il existe $x_1 \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $x_2 \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ tels que $x = x_1 + x_2$. Par linéarité de u, $u(x) = u(x_1) + u(x_2)$. Par hypothèse sur u, $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = \lambda x_2$ si bien que

$$u(x) = x_1 + \lambda x_2$$

ce qui est le résultat voulu.

3. Tout d'abord, trouvons $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$. On trouve comme d'habitude que $(x, y, z) \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $x = y$ donc $\ker(u - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Pour l'autre, le problème est qu'on ne connaît pas λ... Il suffit de chercher λ pour que $\ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ ne soit pas réduit à 0. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E) &\iff \begin{cases} x = \lambda x \\ 3x - 2y = \lambda y \\ -3x + 3y + z = \lambda z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ -2y = \lambda y \\ 3y + z = \lambda z \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système admet des solutions non nulles si et seulement si $\lambda = -2$, ce qu'on suppose dans la suite. On trouve alors que $(x, y, z) \in \ker(u + 2\,\mathrm{Id}_E)$ si et seulement si $x = 0$ et $z = 0$ donc $\ker(u + 2\,\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$. On prouve comme d'habitude que ces deux espaces vectoriels sont supplémentaires, ce qui permet de conclure, d'après la question précédente, que u est l'affinité de base $E_1 = \mathrm{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$, de direction $E_2 = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$ et de rapport -2.

Exercice 39 : ✪✪ Soient deux projecteurs p et q sur le même espace vectoriel E_1 (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur sur E_1.

Correction : Rappelons que si p est un projecteur sur E_1 alors, pour tout $x \in E_1$, $p(x) = x$ (et c'est donc aussi valable pour q). Par conséquent, pour tout $x \in E$, $q(x)$ et $p(x)$ appartiennent à E_1 donc $p(q(x)) = q(x)$ et $q(p(x)) = p(x)$, c'est-à-dire que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$. Ainsi :

$$\begin{aligned} (\lambda p + (1 - \lambda)q)^2 &= (\lambda p + (1 - \lambda)q) \circ (\lambda p + (1 - \lambda)q) \\ &= \lambda p \circ \lambda p + \lambda p \circ (1 - \lambda)q + (1 - \lambda)q \circ \lambda p + (1 - \lambda)q \circ (1 - \lambda)q \\ &= \lambda^2 p \circ p + \lambda(1 - \lambda)p \circ q + (1 - \lambda)\lambda q \circ p + (1 - \lambda)^2 q \circ q \qquad \text{(Par linéarité de } p \text{ et } q\text{)} \\ &= \lambda^2 p + \lambda(1 - \lambda)q + (1 - \lambda)\lambda p + (1 - \lambda)^2 q \\ &= \lambda p + (1 - \lambda)q \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\lambda p + (1 - \lambda)q$ est un projecteur. Or, pour tout $x \in E$, $p(x)$ et $q(x)$ appartiennent à E_1 si bien que

$$(\lambda p + (1 - \lambda)q)(x) \in E_1$$

car E_1 est stable par combinaison linéaire, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 40 : ✪✪ Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x, y, z) = \big(-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y \big)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   (b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.
3. Posons $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.

   (a) Exprimer f en fonction de p et q.

   (b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.

   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

Correction :

1. Déjà il est immédiat que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Ensuite on se donne (x, y, z) et (u, v, w) deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f\big(\lambda(x,y,z) + (u,v,w)\big) &= f(\lambda x + u, \lambda y + v, \lambda z + w) \\ &= \big(-(\lambda x + u) - 2(\lambda y + v) - 2(\lambda z + w), \\ &\qquad 4(\lambda x + u) + 5(\lambda y + v) + 4(\lambda z + w), -(\lambda x + u) - (\lambda y + v)\big) \\ &= \big(\lambda(-x - 2y - 2z) + (-u - 2v - 2w), \\ &\qquad \lambda(4x + 5y + 4z) + (4u + 5v + 4w), \lambda(-x - y) + (-u - v)\big) \\ &= \lambda(-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y) \\ &\qquad + (-u - 2v - 2w, 4u + 5v + 4w, -u - v) \\ &= \lambda f(x,y,z) + f(u,v,w) \end{aligned}$$

   Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= f\big(-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y\big) \\ &= \big(-(-x - 2y - 2z) - 2(4x + 5y + 4z) - 2(-x - y), \\ &\qquad 4(-x - 2y - 2z) + 5(4x + 5y + 4z) + 4(-x - y), \\ &\qquad\qquad -(-x - 2y - 2z) - (4x + 5y + 4z)\big) \\ &= \big(-5x - 6y - 6z, 12x + 13y + 12z, -3x - 3y - 2z\big) \\ &= 3\big(-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y\big) - 2(x,y,z) \end{aligned}$$

   Ainsi $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

   (b) On a donc $2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 3f - f^2$ donc $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = \dfrac{3}{2}f - \dfrac{1}{2}f^2 = f \circ \left(\dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f\right)$. On a aussi $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = \left(\dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f\right) \circ f$. Nous en déduisons que f est un automorphisme et que $f^{-1} = \dfrac{3}{2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - \dfrac{1}{2}f$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f^{-1} : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \frac{3}{2}(x,y,z) - \frac{1}{2}\big(-x - 2y - 2z, 4x + 5y + 4z, -x - y\big) \\ = \big(2x + y + z, -2x - y - 2z, x/2 + y/2 + 3z/2\big) \end{aligned}$$

3. (a) Il est immédiat que $2p + q = 2f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f = f$.

   (b) On a $p \circ p = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = f^2 - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 2f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = p$ donc p est un projecteur (p est un endomorphisme en tant que somme d'endomorphismes).

   On a $q \circ q = (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = f^2 - 4f + 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - 4f + 4\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f = q$ donc q est un projecteur (q est un endomorphisme en tant que somme d'endomorphismes).

   On a $p \circ q = (f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}) = f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} = 0$. De même $q \circ p = 0$.

   (c) On applique la formule du binôme de Newton avec p et q qui commutent (car $p \circ q = q \circ p = 0$) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = (2p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2p)^k q^{n-k} = 2^n p^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} (2p)^k q^{n-k} + q^n.$$

Comme p et q sont des projecteurs, on a $p^k = p$ et $q^k = q$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad f^n = 2^n p + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k p \circ q + q.$$

Mais comme $p \circ q = 0$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

Exercice 41 : ✪✪ Soit A un polynôme non nul. Montrer que l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par A est un projecteur et en donner le noyau et l'image.

Correction : Rappelons le théorème de division euclidienne (on a changé un peu les notations du cours pour mieux les adapter à l'exercice) : « Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Il existe $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ uniques tels que $P = AQ + R$ et $\deg(R) < \deg(A)$ ». Ainsi, si on note p l'application de l'énoncé (on fera attention à distinguer les minuscules et majuscules), p est définie par :

$$p \colon \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P = AQ + R \longmapsto & R \end{cases}$$

On fera bien attention au fait que le polynôme R renvoyé par p dépend du polynôme P en lequel on évalue p (mais c'est normal : l'image dépend de l'antécédent). Pour montrer que p est un projecteur, il suffit de montrer que p est linéaire et que $p^2 = p$. Montrons donc que p est linéaire. Soient $(P_2, P_2) \in \mathbb{R}[X]^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Notons (Q_1, Q_2) les quotients respectifs des divisions euclidiennes de P_1 et P_2 par A, et (R_1, R_2) les restes. En d'autres termes, $P_1 = AQ_1 + R_1$ et $P_2 = AQ_2 + R_2$ si bien que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2) + (\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2)$$

Or, par définition de p, $p(P_1) = R_1$ et $p(P_2) = R_2$. Donnons $p(\lambda_1 P_2 + \lambda_2 P_2)$. Il y a unicité dans le théorème de la division euclidienne, c'est-à-dire que si on a une écriture du type $P = AQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(A)$, alors on peut affirmer que Q est le quotient et R le reste. On rappelle que le degré d'une somme est inférieur ou égal au max des degrés.

$$\begin{aligned} \deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) \quad & \leq \quad \max(\deg(\lambda_1 R_1), \deg(\lambda_2 R_2)) \\ & \leq \quad \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \end{aligned}$$

En effet, $\deg(\lambda_1 R_1) = \deg(\lambda_1) + \deg(R_1) \leq \deg(R_1)$ car le degré d'une constante est négatif (soit nul, soit égal à $-\infty$) et idem pour R_2. Or, par définition d'un reste, $\deg(R_1) < \deg(A)$ et $\deg(R_2) < \deg(A)$, si bien que $\deg(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) < \deg(A)$. Par unicité de la division euclidienne, $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2$ est le reste dans la division euclidienne de $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ par A, et donc

$$\begin{aligned} p(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \quad & = \quad \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \\ & = \quad \lambda_1 p(P_1) + \lambda_2 p(P_2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que p est linéaire. On a $p(P_1) = R_1$ et donc $p^2(P_1) = p(R_1)$. Or, $R_1 = 0 \times A + R_1$ avec $\deg(R_1) < \deg(A)$: le reste dans la division euclidienne de R_1 par A est R_1 lui-même, c'est-à-dire que $p(R_1) = R_1$. Finalement, $p^2(P_1) = R_1 = p(P_1)$. P_1 étant quelconque, $p^2 = p$ donc p est bien un projecteur.

Donnons son image et son noyau. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. $P \in \ker(p) \iff p(P) = 0 \iff$ le reste de la division de P par A est nul. Finalement, $\ker(p)$ est l'ensemble des multiples de A. Par hypothèse, tout élément de l'image a un degré strictement inférieur au degré de A. Notons $n = \deg(A)$. Alors $\mathrm{Im}(p) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrons l'inclusion réciproque. Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ alors $P = 0 \times A + P$ et, de même que précédemment, $P = p(P)$ donc $P \in \mathrm{Im}(p)$. Finalement, $\mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ où $n = \deg(P)$ (si $n = 0$, alors $\mathrm{Im}(p) = \{0\}$).

Exercice 42 : ✪✪ Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $\ker p = \ker q$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Correction : Supposons que $\ker(p) = \ker(q)$ et montrons que $p \circ q = p$ (le fait que $q \circ p = q$ en découlera par symétrie). Pour cela, montrons que $p \circ q - p = 0$ donc, que pour tout $x \in E, p(q(x)) - p(x) = 0$. Soit donc $x \in E$. p est linéaire donc

$$p(q(x)) - p(x) = p(q(x) - x)$$

On est bloqué : on cherche à utiliser une hypothèse que l'on n'a pas encore utilisée. Utilisons le fait que p et q sont des projecteurs. q est un projecteur donc $q^2 = q$ ie $q^2 - q = 0$. Par conséquent, $q^2(x) - q(x) = 0$ et q est linéaire donc $q(q(x) - x) = 0$: $q(x) - x \in \ker(q)$. Or, $\ker(q) = \ker(p)$ donc $q(x) - x \in \ker(p)$. Finalement, $p(q(x) - x) = 0$ ce qui est le résultat voulu : $p \circ q(x) - p(x) = 0$ donc $p \circ q = p$. Par symétrie (p et q jouent le même rôle), $q \circ p = q$.

Réciproquement, supposons que $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$ et montrons que $\ker(p) = \ker(q)$. Soit $x \in \ker(p)$. Alors $p(x) = 0$. Composons par q : $q(p(x)) = q(0) = 0$ car q est linéaire. Or, $q \circ p = q$ par hypothèse donc $q(x) = 0$: $x \in \ker(q)$ donc

$\ker(p) \subset \ker(q)$. Par symétrie, on a l'inclusion réciproque, donc $\ker(p) = \ker(q)$. D'où l'équivalence.

Exercice 43 : ✪✪ Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes
- $p + q$ est un projecteur.
- $p \circ q = -q \circ p$.
- $p \circ q = q \circ p = 0$ (on pourra composer par p).

Montrer que dans ce cas on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Correction : TYPE DE RAISONNEMENT À RETENIR !!! Plutôt que de montrer (1) $\iff$ (2) et (2) $\iff$ (3) (où l'on a évidemment noté (1) la première condition, etc.), il suffit de montrer les implications suivantes :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$$

Cela prouve bien que les conditions sont équivalentes : si (1) est réalisée alors (2) l'est, et si (2) est réalisée alors (3) l'est et donc (1) l'est, c'est-à-dire que (1) et (2) sont équivalentes, et on fait pareil pour les autres. Le premier avantage est qu'il suffit de montrer trois implications (au lieu de 4, car, si on avait raisonné comme dit ci-dessus, on aurait dû montrer les implications $(1) \Rightarrow (2), (2) \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow (3)$ et $(3) \Rightarrow (2)$). Le second avantage est que ces quatre implications sont parfois délicates à prouver, alors que les trois implications ci-dessus sont en général plus faciles (et, en général, l'énoncé les met dans l'ordre le plus simple à prouver). Bref, allons-y !

- Montrons que $(1) \Rightarrow (2)$: supposons que $p+q$ soit un projecteur. Alors $(p+q)^2 = p+q$. Attention, a priori, p et q ne commutent pas donc on ne peut pas appliquer le binôme de Newton donc on ne peut pas utiliser les identités remarquables, il faut développer à la main (et, si besoin, avec des flèches...).

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= (p+q)\circ(p+q) \\ &= p^2 + p\circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p + p \circ q + q \circ p + q \qquad (p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs})\end{aligned}$$

  Or, $p+q$ est un projecteur donc $(p+q)^2 = p+q$. Il en découle que $p \circ q + q \circ q = 0$ ie que $p \circ q = -q \circ p$.
- Montrons que $(2) \Rightarrow (1)$: supposons que $p \circ q = -q \circ p$. Suivons l'indication de l'énoncé et composons par p :

$$\begin{aligned}p^2 \circ q &= p \circ (-q \circ p) \\ &= -p \circ q \circ p \qquad (p \text{ est linéaire}) \\ &= -(-q\circ p)\circ p \quad (\text{car, par hypothèse, } q \circ p = -p \circ q) \\ &= q \circ p^2\end{aligned}$$

  Or, p est projecteur donc $p^2 = p$. Il en découle que $p \circ q = q \circ p$. Or, $p \circ q = -q \circ p$. Ainsi, $p \circ q = -p \circ q$ donc $2p \circ q = 0$ donc $p \circ q = 0$ et $q \circ p = -p \circ q = 0$.
- Montrons que $(3) \Rightarrow (1)$: supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors

$$\begin{aligned}(p+q)^2 &= (p+q)\circ(p+q) \\ &= p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 \\ &= p^2 + q^2 \qquad (\text{car } p \circ q = q \circ p = 0) \\ &= p + q \qquad (\text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs})\end{aligned}$$

  Finalement, $p+q$ est un projecteur. D'où l'équivalence.

Supposons à présent ces condition vérifiées. Commençons par le noyau. Montrons l'égalité par double inclusion. Soit $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. Alors $p(x) = q(x) = 0$ donc $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0$: $x \in \ker(p+q)$ donc $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p+q)$. Réciproquement, soit $x \in \ker(p+q)$. Alors $(p+q)(x) = 0$ ie $p(x) + q(x) = 0$. Cependant, cela ne suffit pas pour affirmer que $p(x) = q(x) = 0$. On est bloqué : composons par p, ce qui donne par linéarité :

$$p^2(x) + p \circ q(x) = 0$$

Or, $p^2 = p$ (p est un projecteur) et $p \circ q = 0$ par hypothèse, si bien que $p(x) = 0$. Ainsi, $x \in \ker(p)$. Or, p et q jouent le même rôle donc $x \in \ker(q)$ si bien que $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

L'égalité des images est plus délicate, car il faut non seulement montrer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$, mais en plus que la somme est directe. Montrons déjà que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(p+q)$. Il existe donc $x \in E$ tel que $y = (p+q)(x) = p(x) + q(x)$. Or, $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $q(x) \in \mathrm{Im}(q)$ donc $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$ c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(p+q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$.

Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Il existe $y_1 \in \mathrm{Im}(p)$ et $y_2 \in \mathrm{Im}(q)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Par conséquent, il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $y = p(x_1) + q(x_2)$ (on ne peut pas affirmer directement que $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ car y_1 et y_2 ne sont pas forcément égaux). On est bloqués : composons par p (linéaire) ce qui donne

$$p(y) = p^2(x_1) + p \circ q(x_2)$$

De même, cela implique que $p(y) = p(x_1)$. De même, en composant par q, on obtient $q(y) = q(y_2)$ si bien que

$$y = p(y) + q(y) = (p+q)(y)$$

Dès lors, $y \in \mathrm{Im}(p+q)$ ce qui permet d'affirmer que $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Montrons que la somme est directe. Puisqu'il n'y a que deux espaces vectoriels, c'est facile, il suffit de montrer que l'intersection est nulle. Soit $y \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Il existe $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $y = p(x_1) = q(x_2)$. De même, en composant par p, il vient $p^2(x_1) = p \circ q(x_2)$ et puisque $p^2 = p$ et $p \circ q = 0$, alors $p(x_1) = 0$ c'est-à-dire $y = 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) = \{0\}$ et la somme est directe.

Exercice 44 - Introduction au lemme des noyaux : ✪✪ Soient a et b deux scalaire distincts et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(u - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$.

1. Simplifier $(u - a\mathrm{Id}) - (u - b\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $E = \ker(u - a\mathrm{Id}) \oplus \ker(u - b\mathrm{Id})$.
3. Déterminer une expression simple de la projection p sur $\ker(u - a\,\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$.
4. Vérifier que $u = ap + b(\mathrm{Id}_E - p)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u^n.

Correction :

1. Cette quantité vaut $(b-a)\,\mathrm{Id}_E$.
2. Pour une fois, on ne va pas raisonner par analyse synthèse. L'idée est d'utiliser la question précédente. Soit $x \in E$. D'après la question précédente, en évaluant l'égalité $(u - a\mathrm{Id}) - (u - b\mathrm{Id}) = (b-a)\,\mathrm{Id}_E$ en x :

$$(u(x) - ax) - (u(x) - bx) = (b-a)x$$

c'est-à-dire (rappelons que $b - a \neq 0$) :

$$x = \left(\frac{1}{b-a}(u(x) - ax)\right) - \left(\frac{1}{b-a}(u(x) - bx)\right)$$

Or, $(u - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$ si bien que

$$(u - a\,\mathrm{Id}_E)(u(x) - bx) = 0$$

En d'autres termes, $u(x) - bx \in \ker(u - a\,\mathrm{Id}_E)$ et comme un noyau est un espace vectoriel, il est stable par produit par un scalaire donc

$$\left(\frac{1}{b-a}(u(x) - bx)\right) \in \ker(u - a\,\mathrm{Id}_E)$$

En remarquant que $u - a\,\mathrm{Id}_E$ et $u - b\,\mathrm{Id}_E$ commutent, on obtient que $(u - b\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - a\,\mathrm{Id}_E) = 0$ et on obtient de même que :

$$\left(\frac{1}{b-a}(u(x) - ax)\right) \in \ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$$

En d'autres termes, x peut s'écrire comme somme d'un élément de $\ker(u - a\,\mathrm{Id}_E)$ et d'un élément de $\ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$: $E = \ker(u - a\,\mathrm{Id}_E) + \ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$. Pour montrer que la somme est directe, il suffit de prouver que l'intersection est nulle. Soit donc $x \in \ker(u - a\,\mathrm{Id}_E) \cap \ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$. En particulier, x appartient à ces deux noyaux donc $u(x) = ax = bx$ donc l'écriture

$$x = \left(\frac{1}{b-a}(u(x) - ax)\right) - \left(\frac{1}{b-a}(u(x) - bx)\right)$$

implique que x est nul ce qui permet de conclure.
3. Il découle de l'écriture ci-dessus que la fonction p est définie par :

$$p : x \mapsto \frac{-1}{b-a}(u(x) - bx)$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$p = \frac{-1}{b-a}(u - b\,\mathrm{Id}_E)$$

ce qui donne bien l'expression de u voulue. Or, p et $\mathrm{Id}_E - p$ commutent (vérification immédiate) donc on peut appliquer le binôme de Newton :

$$u^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (ap)^k (b(\mathrm{Id}_E - p))^{n-k}$$

Or, p est un projecteur et $\mathrm{Id}_E - p$ également : en effet, Id_E et p commutent donc

$$\begin{aligned}(\mathrm{Id}_E - p)^2 &= \mathrm{Id}_E^2 - 2p + p^2 \\ &= \mathrm{Id}_E - 2p + p \\ &= \mathrm{Id}_E - p\end{aligned}$$

Par conséquent, $p^2 = p$ et $(\mathrm{Id}_E - p)^2 = \mathrm{Id}_E - p$ et, plus généralement, par une récurrence immédiate, pour tout $k \geq 1$, $p^k = p$ et $(\mathrm{Id}_E - p)^k = \mathrm{Id}_E - p$. Attention, le cas $k = 0$ est à part : $p^0 = \mathrm{Id}_E$ et $(\mathrm{Id}_E - p)^0 = \mathrm{Id}_E$. Par conséquent, dans la somme ci-dessus, il faut mettre à part les cas $k = 0$ et $k = n$:

$$\begin{aligned} u^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k p^k b^{n-k} (\mathrm{Id}_E - p)^{n-k} \\ &= \tbinom{n}{0} a^0 p^0 b^{n-0} (\mathrm{Id}_E - p)^{n-0} + \tbinom{n}{n} a^n p^n b^{n-n} (\mathrm{Id}_E - p)^{n-n} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k p b^{n-k} (\mathrm{Id}_E - p) \\ &= b^n (\mathrm{Id}_E - p) + a^n p + \left(\sum_{k=1}^{n-1} a^k b^{n-k} \right) p \circ (\mathrm{Id}_E - p) \end{aligned}$$

Enfin, p étant un projecteur, $p \circ (\mathrm{Id}_E - p) = p - p^2 = 0$. En conclusion :

$$u^n = a^n p + b^n (\mathrm{Id}_E - p)$$

Exercice 45 - Théorème de Maschke : ✪✪✪ Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal n, F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G, et p un projecteur d'image F.

1. Montrer que

$$q = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} g p g^{-1}$$

est un projecteur d'image F.

2. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de E.

Remarque : On a prouvé le théorème de Maschke : si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et si F est un sev de E stable par tous les éléments de G, alors F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G. Cette démonstration est vraie en dimension quelconque (finie ou infinie) et sur un corps quelconque (même si le programme nous impose de nous restreindre à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous verrons une autre démonstration (valable uniquement sur $\mathbb{R}$ et en dimension finie) dans l'exercice 50 du chapitre 34.

Correction :

1. q est linéaire car combinaison linéaire et composée d'applications linéaires. Il suffit donc de prouver que $q^2 = q$. Attention, les différentes AL ne commutent pas : on ne peut pas utiliser les identités remarquables, il faut développer entièrement.

$$\begin{aligned} q^2 &= \left(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g p g^{-1} \right) \times \left(\frac{1}{n} \sum_{g \in G} g p g^{-1} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} g p g^{-1} h p h^{-1} && \text{(indice muet)} \end{aligned}$$

Or, p est à valeurs dans F donc $ph^{-1} = p \circ h^{-1}$ également, F est stable par tous les éléments de G donc, pour tous h et $g \in G$, $g^{-1}hph^{-1}$ est à valeurs dans F. Or, on rappelle (cf. cours) que, si $y \in F$, alors $p(y) = y$ (p laisse invariant tous les éléments de F) si bien que, pour tout x,

$$p\left(g^{-1}hph^{-1}(x)\right) = g^{-1}hph^{-1}(x)$$

puisque $g^{-1} \circ h \circ p \circ h^{-1}(x) \in F$. On en déduit que, pour tous h et g dans G, $pg^{-1}hph^{-1} = g^{-1}hph^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned}
q^2 &= \frac{1}{n^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} gg^{-1}hph^{-1} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{g\in G}\sum_{h\in G} hph^{-1} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{h\in G}\sum_{g\in G} hph^{-1} && \text{(Interversion de sommes)} \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{h\in G} nhph^{-1} && \text{(Somme d'un terme constant)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\in G} hph^{-1}
\end{aligned}$$

et l'indice est muet donc on a bien $q^2 = q$: q est un projecteur.

2. p étant à valeurs dans F, et F étant stable par tous les éléments de G, on en déduit que, pour tout $g \in G$, gpg^{-1} est à valeurs dans F donc q également. On en déduit que $\text{Im}(q) \subset F$. Réciproquement, soit $x \in F$. Toujours car F est stable par tous les éléments de G, $g^{-1}(x) \in F$ pour tout $g \in G$ et donc $p(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x)$ (p laisse invariant les éléments de F, voir plus haut). On en déduit que

$$\begin{aligned}
q(x) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} gg^{-1}(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} x \\
&= x
\end{aligned}$$

si bien que $x \in \text{Im}(q)$, d'où l'inclusion réciproque. On en déduit donc que $\text{Im}(q) = F$. q étant un projecteur, $\ker(q)$ est un supplémentaire de $F = \text{Im}(q)$. Il suffit, pour conclure, de prouver que $\ker(q)$ est stable par tous les éléments de F. Soit donc $x \in \ker(q)$ et soit $g \in F$. Montrons donc que $g(x) \in \ker(q)$: il suffit donc de prouver que $q(g(x)) = 0$. Or (ne pas oublier de changer l'indice : g est déjà pris !) :

$$q(g(x)) = \frac{1}{n}\sum_{h\in G} hph^{-1}g(x)$$

L'idée est de faire apparaître q donc la somme des $\text{truc} \circ p \circ \text{truc}^{-1}$, pour $\text{truc} \in G$ (multipliée évidemment par $1/n$). Cela justifie les manipulations suivantes :

$$\begin{aligned}
q(g(x)) &= \frac{1}{n}\sum_{h\in G} hp\left(g^{-1}h\right)^{-1}(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{h\in G} gg^{-1}hp\left(g^{-1}h\right)^{-1}(x) \\
&= g\left(\frac{1}{n}\sum_{h\in G} g^{-1}hp\left(g^{-1}h\right)^{-1}(x)\right) && (g \text{ linéaire})
\end{aligned}$$

Montrons que

$$\varphi : \begin{cases} G \longrightarrow G \\ h \longmapsto g^{-1}h \end{cases}$$

est bijective (c'est un raisonnement classique : voir par exemple la démonstration du fait qu'un anneau intègre fini est un corps, cf. chapitre 18). Tout d'abord, elle va bien de G dans G puisque G est un groupe donc stable par inverse et composition (la loi du groupe). De plus, elle est injective (attention : on n'a ni un morphisme de groupes, ni une AL, donc il faut revenir à la définition de l'injectivité) : en effet, supposons que $\varphi(h_1) = \varphi(h_2)$. Alors $g^{-1}h_1 = g^{-1}h_2$ et, en multipliant par g à gauche, on obtient $h_1 = h_2$ c'est-à-dire que φ est injective. Enfin, φ est injective entre deux ensembles finis (attention : pas deux espaces vectoriels de même dimension finie, ça c'est dans le chapitre 30) donc est bijective. Dès lors, la somme ci-dessus est tout simplement la somme, pour tous les trucs appartenant à G, de $\text{truc} \circ p \circ \text{truc}^{-1}(x)$, et l'indice est muet, donc :

$$g(q(x)) = g\left(\frac{1}{n}\sum_{h\in G} gpg^{-1}(x)\right)$$

c'est-à-dire que $g(q(x)) = g(x) = 0$ puisque $x \in \ker(q)$, ce qui permet de conclure.

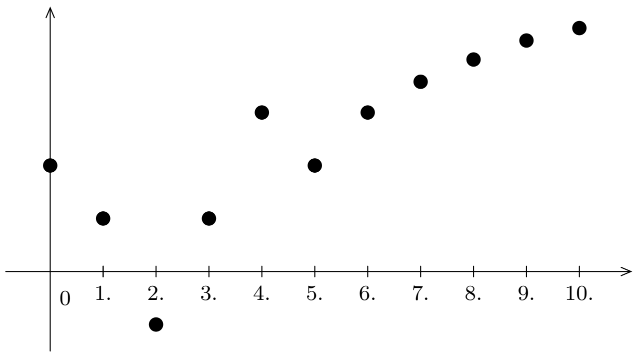
29.5 Cas particulier des espaces de suites et de fonctions

Exercice 45 - Le shift : ✪✪ Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit l'application S suivante :

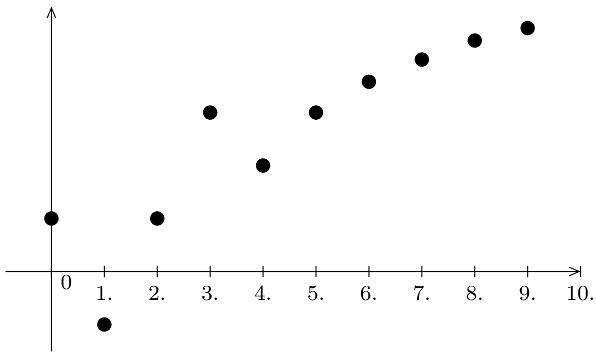
$$S : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\geq 0}\end{array}\right.$$

1. Montrer que c'est un endomorphisme de E et donner son image et son noyau.
2. Montrer que $\left(\ker(S^k)\right)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces de E. Que vaut la réunion $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \ker\left(S^k\right)$?
3. Quel est le sous-espace $\ker(S^p - \text{Id})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$?

Correction : S est l'application qui à une suite $(u_0, u_1, u_2, \dots)$ associe la suite $(u_1, u_2, \dots,)$. En clair : S consiste à « supprimer » le premier terme et à décaler la suite d'un terme vers la gauche.



(u_n)



$S((u_n))$

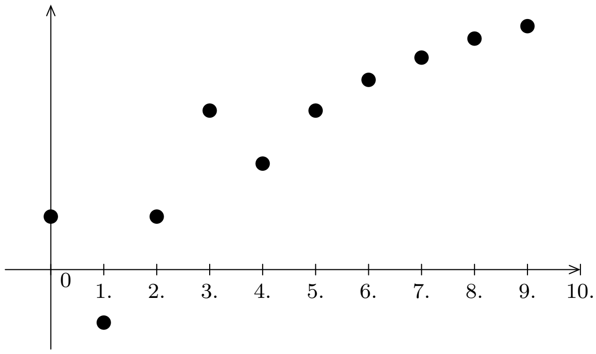
1. E étant une application de E dans lui-même, il suffit de prouver que E est linéaire. Soient (u_n) et (v_n) deux suites et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} S(\lambda(u_n) + \mu(v_n)) &= S((\lambda u_n + \mu v_n)) \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) \\ &= \lambda(u_{n+1}) + \mu(v_{n+1}) \\ &= \lambda S((u_n)) + \mu S((v_n)) \end{aligned}$$

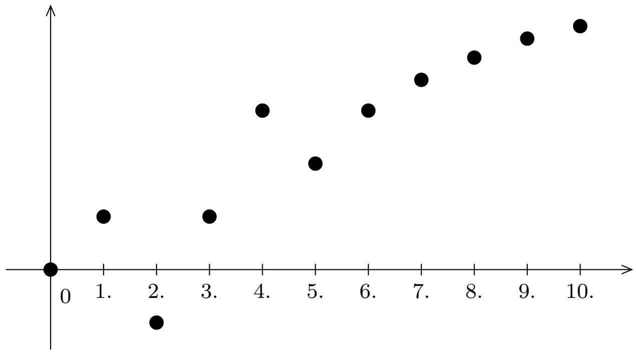
S est linéaire : c'est donc un endomorphisme de E. De plus :

$$\begin{aligned} (u_n) \in \ker(S) &\iff (u_{n+1}) = 0 \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0 \\ &\iff \forall p \geq 1, u_p = 0 \end{aligned}$$

En d'autres termes, $\ker(S)$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang 1. Montrons que S est surjectif, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(S) = E$. Soit $(v_n) \in E$. Notons (u_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = v_{n-1}$ et $v_0 = 0$ (on décale (v_n) d'un rang vers la droite, et on attribue une valeur quelconque à u_0, on aurait pu tout aussi bien poser $u_0 = 2024$).



(v_n)



(u_n)

Alors $S(u_n) = (v_n)$ ce qui permet de conclure.

2. Pour tout $k \geq 1$, on a :

$$S^k : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (u_{n+k})_{n\geq 0} \end{array} \right.$$

De même que précédemment, $\ker(S^k)$ est l'ensemble des suites dont les termes à partir du rang k sont nuls, donc est une suite croissante (car si une suite est nulle à partir du rang k, alors elle est nulle à partir du rang $k+1$), strictement car une suite ayant un coefficient non nul à l'ordre k mais dont tous les termes suivants sont nuls est dans $\ker(S^{k+1}) \backslash \ker(S^k)$. Enfin, une suite est dans cette union si et seulement s'il existe k tel qu'elle soit dans $\ker(S^k)$ donc tel qu'elle s'annule à partir du rang k. En d'autres termes, c'est l'ensemble des suites qui sont nulles à partir d'un certain rang, donc l'ensemble des suites presque nulles (ou ayant un nombre fini de termes non nuls).

3. Une suite (u_n) est dans $\ker(S^p - \mathrm{Id})$ si et seulement si $(u_{n+p}) = (u_n)$ si et seulement si, pour tout n, $u_{n+p} = u_n$: cet ensemble est l'ensemble des suites p-périodiques.

Exercice 46 - La dérivation discrète : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $\Delta(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

1. Montrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$ et donner son noyau. Δ est-elle injective ?
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in E$

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

3. On se donne dans cette question $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\theta_1 \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $\Delta(f)(x) = f'(x+\theta_1)$.
   (b) Montrer qu'il existe $\theta_2 \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $\Delta^2(f)(x) = f''(x+2\theta_2)$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta_n \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x+n\theta_n)$$

   On pourra faire une récurrence et remarquer que $\Delta^{n+1} = \Delta^n \circ \Delta$.

4. Le but de cette question est de montrer que si $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ alors $c \in \mathbb{N}$. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que $c \notin \mathbb{N}$ et que $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose $f : x \mapsto x^c$. Montrer que $f \in E$.
   (b) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}, \Delta^n(f)(p) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Soit $n = \lfloor c \rfloor + 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\theta_n \in \,]\,0\,;1\,[$

$$\Delta^n(f)(p) = c(c-1)\cdots(c-n+1)(p+n\theta_n)^{c-n}$$

(d) Montrer que $p + n\theta_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ (attention, θ_n dépend de p) puis que $\Delta^n(f)(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

(e) Montrer que $\Delta^n(f)(p) \neq 0$ pour tout p et conclure.

Remarque : Ainsi, il n'existe pas de réel non entier c tel que $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout entier p. On peut se poser une question apparemment plus simple : un tel réel c existe-t-il si l'on ne considère qu'un nombre fini d'entiers p ?

Le résultat est trivial pour un seul entier, par exemple, $2^{\ln(2024)/\ln(2)} = 2024 \in \mathbb{N}$, mais que se passe-t-il si on prend plusieurs entiers ? On peut montrer (mais c'est très difficile, il faut parler de nombres transcendants, cf DS n° 5B) qu'il n'existe pas de réel c non entier tel que $2^c, 3^c$ et 5^c soient entiers et donc a fortiori la réponse est négative si on prend plus de trois entiers.

Cependant, on ne sait pas s'il existe un réel c non entier tel que 2^c et 3^c soient entiers (mais on conjecture qu'un tel réel c n'existe pas). Ces deux résultats (dans le cas de trois entiers et de deux entiers) sont des conséquences respectives du théorème des six exponentielles, et de la conjecture des quatre exponentielles (si elle est vraie) et, malgré leur simplicité apparente, sont d'une complexité bien supérieure à tout ce qui est nécessaire pour la résolution de notre exercice.

Correction :

1. Soient $(f,g) \in E^2, (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ et enfin $x > 0$ (on veut montrer une égalité entre fonctions, il faut donc montrer qu'elles sont égales en tout $x > 0$, de même que si on veut montrer une égalité entre deux suites, il faut montrer qu'elles sont égales en tout entier n).

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x) \\ &= \lambda(f(x+1) - f(x)) + \mu(g(x+1) - g(x)) \\ &= \lambda\Delta(f)(x) + \mu\Delta(g)(x)\end{aligned}$$

Cela étant valable pour tout $x > 0$, $\Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g)$: Δ est bien linéaire. $f \in \ker(\Delta)$ si et seulement si $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est nulle, si et seulement si f est 1-périodique. La fonction (restreinte à $\mathbb{R}_+^*$) $x \mapsto \cos(2\pi x)$ est non nulle et dans le noyau donc Δ n'est pas injective.

2. Montrons le résultat par récurrence. Fixons $f \in E$ et $x > 0$.
   - Si $n \geq 1$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « $\Delta^n(f)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$ »
   - Si $n = 1$, la somme ci-dessus est égale à $f(x+1) - f(x)$, c'est-à-dire $\Delta(f)(x)$. En d'autres termes, H_1 est vraie.
   - Soit n quelconque tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

   Or, $\Delta^{n+1} = \Delta \circ \Delta^n$, et, d'après la question précédente, Δ est linéaire. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{n+1}(f)(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta(f)(x+k)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(f(x+k+1)-f(x+k))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k+1)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{n-k+1}f(x+k)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{n+1-k}f(x+k)+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n+1-k}f(x+k)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}f(x+k)\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)+f(x+n+1)+(-1)^{n+1}f(x)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+1-k}f(x+k)\binom{n+1}{k}+(-1)^{n+1-n-1}\binom{n+1}{n+1}f(x+n+1)+(-1)^{n+1-0}\binom{n+1}{0}f(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^{n+1-k}f(x+k)\binom{n+1}{k}
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

3. (a) f étant continue sur le segment $[\,x\,;x+1\,]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]\,x\,;x+1\,[$, d'après l'égalité des accroissements finis, il existe $y_1 \in\,]\,x\,;x+1\,[$ tel que

$$\Delta(f)(x) = f(x+1)-f(x) = f'(y_1)\times(x+1-x) = f'(y_1)$$

Il suffit de poser $\theta_1 = y_1 - x \in\,]\,0\,;1\,[$ pour conclure.

(b) D'après la question précédente,

$$\Delta^2(f)(x) = \Delta(f')(x+\theta_1) = f'(x+\theta_1+1)-f'(x+\theta_1)$$

De même, d'après l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f' sur le segment $[\,x+\theta_1\,;x+\theta_1+1\,]$, il existe $y_2 \in\,]\,x+\theta_1\,;x+\theta_1+1\,[$ tel que

$$\Delta^2(f)(x) = f''(y_2)$$

Alors $0<\theta_1<y_2-x<\theta_1+1<2$. Il suffit de poser $\theta_2 = (y-x)/2$ pour conclure.

(c) Suivons l'indication de l'énoncé et faisons une récurrence.

- Si $n \geq 1$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « $\forall f \in E, x>0, \exists \theta_n \in\,]\,0\,;1\,[\,, \Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x+n\theta_n)$ ».
- D'après les deux questions précédentes, H_1 et H_2 sont vraies.
- Soit n quelconque supérieur ou égal à 2 tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. H_1 étant vraie, il existe $\theta \in\,]\,0\,;1\,[$ tel que $\Delta(f)(x) = f'(x+\theta)$. Composons cette égalité par Δ^n :

$$\Delta^{n+1}(f)(x) = \Delta^n f'(x+\theta)$$

Appliquons à présent l'hypothèse de récurrence (à f' et $x+\theta$) : il existe θ_n dans $]\,0\,;1\,[$ tel que

$$\Delta^n f'(x+\theta) = \Delta^{n+1}(f)(x) = (f')^{(n)}(x+\theta+n\theta_n) = f^{(n+1)}(x+\theta+n\theta_n)$$

Or, θ et θ_n appartiennent à $]\,0\,;1\,[$ donc $\theta+n\theta_n \in\,]\,0\,;n+1\,[$: il suffit par conséquent de poser

$$\theta_{n+1} = \frac{\theta+n\theta_n}{n+1} \in\,]\,0\,;1\,[$$

et $\Delta^{n+1}(f)(x) = f^{(n+1)}(x+(n+1)\theta_{n+1})$ c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geq 1$.

4. (a) Puisque c n'est pas un entier, f est définie par $f(x) = e^{c\ln(x)}$. Par composition de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $f \in E$.

   (b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0\,;n]\!], f(p+k) \in \mathbb{Z}$ (car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$) par hypothèse sur f. De plus, une somme et un produit d'entiers (relatifs) est un entier. Il suffit ensuite d'appliquer la question 2 : $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, \Delta^n(f)(p) \in \mathbb{Z}$

   (c) Il suffit d'appliquer la question 3.(c) en remarquant que la dérivée n^e de f est donnée par $f^{(n)} : x \mapsto c(c-1)\cdots(c-n+1)x^{c-n}$.

   (d) Puisque $\theta_n > 0, p + n\theta_n \geq p$ et on obtient la première limite en appliquant le théorème d'encadrement :

$$p + n\theta_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$$

   Ensuite, il suffit de voir que $c - n < 0$ par définition de n : la quantité $\Delta^n(f)(p)$ est donc une constante, $c(c-1)\cdots(c-n+1)$, multipliée par une quantité qui tend vers $+\infty, p + n\theta_n$, à une puissance strictement négative, et tend de ce fait vers 0 :

$$\Delta^n(f)(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

   (e) c n'étant pas un entier, la quantité $c(c-1)\cdots(c-n+1)$ n'est pas nulle, et puisque $p + n\theta_n > p > 0$,

$$\forall p \qquad \Delta^n(p) \neq 0$$

   D'après les questions précédentes, la suite $(\Delta^n(f)(p))_p$ est une suite d'entiers relatifs tous non nuls (donc supérieurs ou égaux à 1 en valeur absolue) qui tend vers 0, et donc $|\Delta^n(f)(p)| \leq 1/2$ pour p assez grand. C'est absurde : $c \in \mathbb{N}$.

Exercice 47 : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère les endomorphismes de E

$$D : f \mapsto f' \qquad \text{et} \qquad P : f \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

1. Montrer rapidement que ce sont bien des endomorphismes de E.
2. Expliciter $D \circ P$ et $P \circ D$.
3. Donner les noyaux de $D, P, P \circ D$ et $D \circ P$.
4. Montrer que l'image de P est l'ensemble des fonctions de E nulles en 0.
5. Donner les images de $D, P \circ D$ et $D \circ P$.

Correction :

1. D et P sont linéaires par linéarité, respectivement, de la dérivation et de l'intégrale. Montrons que D et P sont bien à valeurs dans E. Si $f \in E$ alors f est $\mathscr{C}^\infty$. En particulier, f est dérivable et f' est aussi $\mathscr{C}^\infty$ donc $D(f) \in E$: D est bien un endomorphisme de E. De même, f étant continue, $P(f)$ est une primitive de f (c'est même l'unique primitive de f qui s'annule en 0). En particulier, $P(f)$ est dérivable et $P(f)' = f$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ donc $P(f)$ est elle-même $\mathscr{C}^\infty$: $P(f) \in E$ donc P est aussi un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in E$. Alors $D \circ P(f) = f$ (quand on dérive une primitive, on retombe sur la fonction initiale). En d'autres termes, $D \circ P = \mathrm{Id}_E$. Cependant, ça ne marche pas dans l'autre sens : si on dérive et qu'on primitive, on ne retombe pas forcément sur la fonction initiale. Plus précisément, $D(f) = f'$ et $P(D(f)) = P(f')$ est l'unique primitive de f' qui s'annule en 0, donc $P(D(f)) = f - f(0)$. Par conséquent, $P \circ D$ est l'application de E dans E définie par

$$P \circ D : f \mapsto f - f(0)$$

3. $\ker(D)$ est l'ensemble des fonctions constantes. Puisque $D \circ P = \mathrm{Id}_E$, alors $D \circ P$ est injective donc son noyau est nul (ie $\ker(D \circ P) = \{0\}$). Soit $f \in E$.

$$f \in \ker(P \circ D) \iff f - f(0) = 0 \iff f = f(0)$$

   En d'autres termes, $f \in \ker(P \circ D)$ si et seulement si elle est constante égale à $f(0)$. Finalement, $\ker(P \circ D)$ est également l'ensemble des fonctions constantes. Donnons enfin le noyau de P.

   Remarque : un résultat classique dit que si g et f sont des applications quelconques (pas forcément linéaires) et si $g \circ f$ est injective alors f est injective. Ainsi, puisque $D \circ P$ est injective, alors P est injective donc $\ker(P) = \{0\}$.

Cependant, ce résultat n'est pas à connaître donc on va montrer à la main que P est injective.

Soit $f \in \ker(P)$. Alors $P(f) = 0$. En dérivant cette égalité (deux fonctions égales ont la même dérivée, réciproque fausse : c'est la raison pour laquelle on n'a pas travaillé par équivalences ici) il vient $P(f)' = 0$ donc $f = 0$: $\ker(P) = \{0\}$.

4. Soit $f \in E$. Par définition, $P(f)$ est l'unique primitive de f nulle en 0. Ainsi, $\mathrm{Im}(P)$ est inclus dans l'ensemble des fonctions de E nulles en 0. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in E$ nulle en 0. $g \in E$ donc, en particulier, g est dérivable. g est l'unique primitive de g' nulle en 0 donc $g = P(g')$. Il en découle que $g \in \mathrm{Im}(P)$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.
5. Tout d'abord, $D \circ P = \mathrm{Id}_E$ donc est surjective, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(D \circ P) = E$. Cherchons à présent l'image de D. Soit $f \in E$. f est $\mathscr{C}^\infty$ donc est continue : f admet donc une primitive F. Or, $F' = f$ est $\mathscr{C}^\infty$ donc $F \in E$, et $f = D(F)$, c'est-à-dire que $f \in \mathrm{Im}(D)$. On vient de montrer que $E \subset \mathrm{Im}(D)$. L'inclusion réciproque est immédiate (D est un endomorphisme de E) donc $\mathrm{Im}(D) = E$: D est surjective. Cherchons à présent l'image de $P \circ D$. Soit $f \in E$. Alors $(P \circ D)(f) = f - f(0)$ est nulle en 0, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(P \circ D)$ est incluse dans l'ensemble des fonctions de E nulle en 0. Là aussi, montrons que l'inclusion réciproque est vraie. Soit $g \in E$ nulle en 0. g est $\mathscr{C}^\infty$ donc est dérivable, et $P(D(g)) = P(g')$ est l'unique primitive de g' qui s'annule en 0, c'est-à-dire g. En d'autres termes, $P \circ D(g) = g$ donc $g \in \mathrm{Im}(P \circ D)$. D'où l'inclusion réciproque. Il en découle que $\mathrm{Im}(P \circ D)$ est aussi l'ensemble des fonctions de E qui s'annulent en 0.

   Remarque : on a vu en classe qu'une application linéaire $u \in L(E, F)$ est bijective s'il existe $v \in L(F, E)$ telle que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Cet exercice montre que les deux égalités sont indispensables : ici, $D \circ P = \mathrm{Id}_E$ mais ni D, ni P n'est bijective.

Exercice 48 : ✪✪ On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{[\,0\,;1\,]} \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. On note $g = \varphi(f)$. Exprimer $g(x)$ sans utiliser de min (on pourra couper l'intégrale en deux).
3. Montrer que g est $\mathscr{C}^2$ et calculer g''. φ est-elle surjective ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ g \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \mid g(0) = g'(1) = 0 \right\}$.
5. Montrer que φ est injective.

Correction :

1. Notons $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$. Montrons que φ est linéaire. Soient $(f, g) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soit xß$[\,0\,;1\,]$ (ne pas l'oublier, $\varphi(\lambda f + \mu g)$ est une fonction !).

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + \mu g)(x) &= \int_0^1 \min(x,t)(\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_0^1 \min(x,t) g(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \\ &= (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x) \end{aligned}$$

   En d'autres termes, $\varphi(\lambda f + \mu g)$ et $\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$ coïncident en tout $x \in [\,0\,;1\,]$ donc sont égales : φ est linéaire.
2. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Il suffit de voir que, si $t \leq x$ alors $\min(x,t) = t$, tandis que si $t \geq x$, alors $\min(t,x) = x$. Dès lors,

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

3. f est continue donc $t\mapsto tf(t)$ également. D'après le théorème fondamental de l'analyse, $x\mapsto \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$. De même, $x\mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ donc g est $\mathscr{C}^1$ par somme et produit de fonctions $\mathscr{C}^1$. Soit $x\in[\,0\,;1\,]$.
$$g'(x) = xf(x) + \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t + x\times(-f(x)) = \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$
De même, g' est $\mathscr{C}^1$ donc g est $\mathscr{C}^2$ et $g''(x) = -f(x)$ donc $g'' = -f$. Par conséquent, $\mathrm{Im}(g)$ est incluse dans $\mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$. Or, il existe des fonctions de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ qui ne sont pas $\mathscr{C}^2$ (par exemple une fonction discontinue, mais on peut même une fonction continue non dérivable, comme $x\mapsto \left|x-\dfrac{1}{2}\right|$, attention, la fonction définie sur $[\,0\,;1\,]$ par $x\mapsto |x| = x$ est $\mathscr{C}^2$) donc $\mathrm{Im}(g)\neq \mathbb{R}^{[\,0\,;1\,]}$: g n'est pas surjective.
4. On a déjà vu que g est $\mathscr{C}^2$. De plus, $g(0)=0$ (intégrale de 0 à 0) et $g'(1)=0$ (intégrale de 1 à 1). On vient de montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est incluse dans l'ensemble $F=\{g\in\mathscr{C}^2([\,0\,;1\,],\mathbb{R})\mid g(0)=g'(1)=0\}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $g\in F$. On sait que, si g admet un antécédent f, alors $g''=-f$, c'est-à-dire que $f=-g''$. Montrons donc que $\varphi(-g'')=g$, cela prouvera que $g\in\mathrm{Im}(\varphi)$ et permettra de conclure. Soit $x\in[\,0\,;1\,]$.
$$
\begin{aligned}
\varphi(-g'')(x) &= -\int 0xtg''(t)\,\mathrm{d}t - x\int_x^1 g''(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -[tg'(t)]_0^x + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t - x(g'(1)-g'(x)) \qquad (\text{IPP, } g' \text{ est } \mathscr{C}^1) \\
&= -xg'(x) + g(x) - g(0) + xg'(x) \qquad (g'(1)=0) \\
&= g(x) \qquad (g(0)=0)
\end{aligned}
$$
ce qui permet de conclure.

Remarque : comment faire si on ne donne pas $\mathrm{Im}(\varphi)$ explicitement ? Comment le trouver (par exemple, comme dans l'exercice 50) ? On prend une image, on essaye de donner toutes les propriétés possibles qu'on arrive à remarquer (régularité, valeur spéciale, etc.) et, quand on ne voit plus rien, on essaye de montrer la réciproque. Par exemple, ici, si on prend une image g, alors on voit que g est $\mathscr{C}^2$, et que $g(0)=g'(1)=0$. On ne trouve plus rien, donc on essaye de montrer la réciproque : que toute fonction vérifiant ces trois propriétés est bien une image. Et si on en rate une ? Et si on ne voit pas, par exemple, que $g'(1)=0$? Et bien, à la fin, on obtient $g(x)-xg'(1)$ et on se dit : « lolillol » (ou autre horreur du même genre), « ça m'aiderait beaucoup que $g'(1)$ soit nul. Est-ce que ce ne serait pas le cas et est-ce que je ne l'aurais pas remarqué, par la reine de toutes les coïncidences ? Ça alors ! C'est le cas ! Vite, rajoutons-le plus haut ! » et le tour est joué !

5. Soit $f\in\ker(\varphi)$, c'est-à-dire que, pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $g(x)=0$. Or, on a vu que $f=-g''$ donc $f=0$. $\ker(\varphi)=\{0\}$ donc φ est injective.

Exercice 49 : ✪✪ Soit $E=\mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on note $T(f)$ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$T(f)(x) = \begin{cases} f(0) & \text{si } x=0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.

2. Montrer que T est injective.
3. Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. T est-elle surjective ?
4. ✪✪✪ Donner $\mathrm{Im}(T)$.

Correction :

1. Montrons que T est linéaire. Soient $(f_1, f_2) \in E^2, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - Si $x = 0$, alors

$$\begin{aligned} T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) \\ &= \lambda_1 f_1(0) + \lambda_2 f_2(0) \\ &= \lambda_1 T(f_1)(0) + \lambda_2 T(f_2)(0) \\ &= (\lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2))(0) \end{aligned}$$

   - Si $x > 0$, on trouve comme précédemment (exo) que $T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = (\lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2))(x)$.

   Par conséquent, $T(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)$ et $\lambda_1 T(f_1) + \lambda_2 T(f_2)$ coïncident en tout $x \geq 0$ donc sont égales : T est bien linéaire. Montrons que T est bien à valeurs dans E, ce qui n'est pas immédiat cette fois : il y a un « point de recollement », il faut donc montrer que $T(f)$ est bien une fonction continue. Tout d'abord, f étant continue, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ (c'est une primitive de f) donc$T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, car quotient de fonctions continues, celle au dénominateur ne s'annulant pas. Il reste à montrer que $T(f)$ est continue en 0. Soit $x > 0$. Soit F une primitive de f (possible car f est continue sur $\mathbb{R}_+$).

$$T(f)(x) = \frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} F'(0) = f(0) = T(f)(0)$$

   (en effet, on a reconnu un taux d'accroissement). Par conséquent, $T(f)$ est bien continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$ donc appartient à E : T est bien un endomorphisme de E.
2. Soit $f \in \ker(T)$. Alors $T(f) = 0$ (la fonction nulle) c'est-à-dire que, pour tout $x \geq 0$, $T(f)(x) = 0$. Tout d'abord, $f(0) = 0$. Soit $x > 0$. Alors

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   si bien que

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

   Attention, f n'est pas forcément positive donc on ne peut pas dire directement que $f(x) = 0$. Cependant, on peut dériver l'égalité précédente (deux fonctions égales ont la même dérivée, réciproque fausse, et on a dit à la question précédente que le membre de gauche est dérivable) ce qui donne $f(x) = 0$. Ainsi, f est la fonction nulle donc $\ker(T) = \{0\}$: T est injective.
3. Il existe donc $f \in E$ tel que $g = T(f)$. Le caractère $\mathscr{C}^1$ a déjà été prouvé à la question 1. Soit $x > 0$. On a

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x}$$

   et donc

$$xg'(x) = -\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -f(0) + f(0) = 0$$

   En effet, le premier terme tend vers $-f(0)$ (on l'a vu à la question précédente) et le second vers $f(0)$ car f est continue. On en déduit que T n'est pas surjective. En effet, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ qui ne sont pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par exemple $x \mapsto |x-1|$ qui n'est pas dérivable en 1 (exo, il faut montrer que le taux d'accroissement n'a pas de limite, et ne pas se contenter de dire « ben, euh, la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 ») donc il existe des fonctions qui ne sont pas des images : T n'est donc pas surjective.

4. Notons F l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifiant $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. On vient de montrer que $\mathrm{Im}(T) \subset F$. Comme dans l'exercice précédent, montrons l'inclusion réciproque. Soit $g \in F$. On veut montrer que g admet un antécédent. Puisque T est injective, si g admet un antécédent, celui-ci est unique. Dans l'exercice précédent, le fait de connaître l'antécédent nous a aidé. On cherche donc l'unique antécédent de g par T : raisonnons par analyse-synthèse.

   - Analyse : si g admet un antécédent, noté f. Alors $T(f)(x) = g(x)$ pour tout x. Tout d'abord, si $x = 0$, cela implique que $f(0) = g(0)$. Soit $x > 0$. Alors
$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xg(x)$$
Dérivons cette égalité (tout est bien dérivable : g l'est par hypothèse, et le membre de gauche l'est car f est continue) ce qui donne
$$f(x) = g(x) + xg'(x)$$
Par conséquent, l'unique antécédent possible de g est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(0) = g(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, f(x) = g(x) + xg'(x)$$
   - Synthèse : soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(0) = g(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x > 0, f(x) = g(x) + xg'(x)$$
Montrons que $T(f) = g$. Tout d'abord, il faut vérifier que $f \in E$, ce qui n'est pas immédiat (il y a un point de recollement), sinon on ne peut même pas calculer $T(f)$ (car T est définie sur E). g étant $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, g est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc
$$f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} g(0) = f(0)$$
donc f est bien continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$: tout va bien, $f \in E$. Montrons que $T(f) = g$ ie que pour tout $x \geq 0$, $T(f)(x) = g(x)$. Si $x = 0$, $T(f)(x) = f(0) = g(0)$: c'est bon. Soit $x > 0$. Alors
$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x g(t) + tg'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{x}\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_0^x tg'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
On aimerait faire une IPP pour la deuxième intégrale. Problème : g n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;x\,]$ mais sur $]\,0\,;x\,]$. Il faut donc se placer sur un segment $[\,\varepsilon\,;x\,]$ et faire tendre ε vers 0. Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$. Les fonctions $t \mapsto t$ et g sont $\mathscr{C}^1$ sur $[\,\varepsilon\,;x\,]$ donc :
$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^x tg'(t)\,\mathrm{d}t &= [tg(t)]_\varepsilon^x - \int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}t \\ &= xg(x) - \varepsilon g(\varepsilon) - \int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
Essayons à présent de faire tendre ε vers 0. g étant continue, $g(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} g(0)$ si bien que $\varepsilon g(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$. De plus, la fonction (de variable y)
$$y \mapsto \int_y^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
est continue (et même $\mathscr{C}^1$: c'est une primitive de $-g$) donc
$$\int_\varepsilon^x g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$
si bien que

$$\int_0^x tg'(t)\,\mathrm{d}t = xg(x) - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure : $T(f)(x) = g(x)$.

Finalement, f est un (et même le seul) antécédent de g par T : $g \in \mathrm{Im}(T)$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

Remarque : on a même prouvé une seconde fois que T est injective.

Exercice 50 - Sans les petites roues : ✪✪✪ Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image des deux endomorphismes suivants :

$$\varphi : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xf(x) \end{cases} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \psi : \begin{cases} E \to E \\ f \mapsto \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \end{cases}$$

Correction :

Les applications φ et ψ sont linéaires et à valeurs dans E (exo) donc sont bien des endomorphismes. Commençons par les noyaux.

Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (ne pas l'oublier !), $xf(x) = 0$. Ainsi, pour tout $x \neq 0, f(x) = 0$. f est donc nulle sur $\mathbb{R}^*$ et elle est continue donc f est nulle sur $\mathbb{R}$: $\ker(\varphi) = \{0\}$, c'est-à-dire que φ est inversible.

Soit $f \in \ker(\psi)$. Alors $\psi(f) = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Or, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est continue donc la fonction $\psi(f)$ est dérivable : on peut dériver l'égalité précédente, ce qui donne :

$$xf(x) = 0$$

On a déjà vu que cela signifie que f est nulle. On a donc également $\ker(\psi) = \{0\}$ et ψ est aussi injective.

Intéressons-nous à présent à $\mathrm{Im}(\varphi)$. On remarque que, pour tout $f \in E$, $\varphi(f)$ est nulle en 0. Par conséquent, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est incluse dans l'ensemble des fonctions continues (car φ est à valeurs dans E) nulles en 0. Cherchons à montrer l'inclusion réciproque (je préviens que ce sera un échec). Soit g continue sur $\mathbb{R}$ nulle en 0. On cherche $f \in E$ telle que $\varphi(f) = g$ ie telle que, pour tout réel x, $xf(x) = g(x)$. On cherche donc à définir une fonction f par $f(x) = g(x)/x$. Problème : quelle valeur attribuer à f en 0 ? Il faut que f soit continue (l'antécédent doit appartenir à E). Cherchons donc la limite éventuelle en 0 de $g(x)/x$. Or, g est nulle en 0 donc

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

On reconnaît le taux d'accroissement de g en 0 : admet-il une limite ? Problème : g est continue, mais pas forcément dérivable. Pour que tout marche bien, il faudrait que g soit dérivable en 0. Sapristi ! Une image serait-elle dérivable en 0, et on l'aurait loupé ? Et oui ! Revenons sur nos pas : si f est une fonction de E quelconque (pas forcément égale à $g(x)/x$) alors, pour tout x, $\varphi(f)(x) = xf(x)$. Si $x \neq 0$,

$$\frac{\varphi(f)(x) - \varphi(f)(0)}{x} = \frac{xf(x) - 0}{x} = f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0)$$

car f est continue. Par conséquent, on vient de montrer qu'une image est forcément nulle en 0 et dérivable en 0. Par conséquent, $\mathrm{Im}(\varphi)$ est incluse dans l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, nulles en 0 et dérivables en 0. Montrons à présent l'inclusion réciproque (pour de vrai). Soit g continue sur $\mathbb{R}$, nulle en 0 et dérivable en 0. Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = f'(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0, f(x) = \frac{g(x)}{x}$$

Alors f est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $xf(x) = g(x)$ (immédiat si $x \neq 0$, et vrai aussi si $x = 0$ car $g(0) = 0$). Ainsi, $g = \varphi(f)$. g admet un antécédent donc on a montré l'inclusion réciproque, d'où l'égalité :

$$\mathrm{Im}(\varphi) = \{g \in E \mid g(0) = 0,\ g \text{ dérivable en } 0\}$$

Enfin, donnons l'image de ψ. Soit $g \in \mathrm{Im}(\psi)$. Il existe f telle que $g = \psi(f)$. On remarque que g est $\mathscr{C}^1$ (car $t \mapsto tf(t)$ est continue), nulle en 0 (on a l'intégrale de 0 à 0) et que $g'(0) = 0f(0) = 0$. De plus, pour tout $x, g'(x) = xf(x)$ donc, de même que précédemment, il en découle que g est dérivable deux fois en 0 (si on ne le voit pas, on fait comme précédemment, on s'en rend compte plus tard). Dès lors, $\mathrm{Im}(\psi)$ est incluse dans l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$, nulles en 0 et de dérivée nulle en 0, et dérivables deux fois en 0. Montrons l'inclusion réciproque : soit g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, dérivable deux fois en 0 et telle que $g(0) = g'(0) = 0$. Montrons que $g \in \text{Im}(\psi)$. On cherche un antécédent de g (et ψ est injective donc on cherche l'unique antécédent de g).

- Analyse : si f est un antécédent de g. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

Tout est $\mathscr{C}^1$: on peut dériver, ce qui donne $xf(x) = g'(x)$ donc, si $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{g'(x)}{x}$. Or, f est continue donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$. g est dérivable deux fois et $g'(0) = 0$ donc

$$f(x) = \frac{g'(x) - g'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} g''(0)$$

dès lors, $f(0) = g''(0)$. Finalement, f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(0) = g''(0) \qquad \text{et} \qquad \forall x \neq 0, f(x) = \frac{g'(x)}{x}$$

- Synthèse : soit f la fonction définie comme ci-dessus. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\psi(f) = g$. Cela se fait comme pour la fonction φ (flemme).

En conclusion, $g \in \text{Im}(\psi)$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité :

$$\text{Im}(\psi) = \{g \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,]\,, \mathbb{R}) \mid g(0) = g'(0) = 0,\ g \text{ dérivable deux fois en } 0\}$$

Chapitre 30

Espaces vectoriels de dimension finie

« - Hum ! visage de traître !
Quand la bouche dit oui, le regard dit peut-être. »

Victor Hugo, Ruy Blas

Comme dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si rien n'est précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Vrai ou Faux ?

1. Une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension n est génératrice.
2. Une famille de $n-1$ vecteurs dans un espace de dimension n est libre.
3. Tout vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie peut-être complété en une base.
4. L'espace des fonctions de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 est de dimension finie.
5. L'espace des polynômes de degré au plus 3 s'annulant en 0 et en 1 est de dimension 2.
6. Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension infinie est lui-même de dimension infinie.
7. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est de dimension n.
8. Si $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, alors c'est une base.
9. Si u est un endomorphisme de E, qui est de dimension finie, alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires.
10. Si u est un endomorphisme injectif de E, alors u est surjectif.
11. Si u est un endomorphisme injectif de E, qui est de dimension finie, alors u est surjectif.
12. Si $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire surjective, alors u est injective.

Exercice 1 : ✪ Montrer que

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ & & \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{array} \right.$$

est un isomorphisme. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Correction : Il est immédiat que φ est linéaire (on peut dire : par linéarité de la dérivation et de l'évaluation si on veut des mots compliqués...). Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P' = 0$ donc P est constant et $P(0) = 0$ donc P est le polynôme nul : $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective. Soit $(\alpha, Q) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$. Notons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ si bien que

$$P = \alpha + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

est un polynôme vérifiant $P(0) = \alpha$ et $P' = Q$ si bien que $\varphi(P) = (\alpha, Q)$ donc φ est surjective : c'est un isomorphisme. Si $\mathbb{K}[X]$ est de dimension finie n, alors $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[X]$ est de dimension $n+1$ (la dimension d'un produit d'espaces vectoriels est la somme des dimensions) ce qui est absurde car il est isomorphe à $\mathbb{K}[X]$ donc de même dimension n. $\mathbb{K}[X]$ est donc de dimension infinie.

Exercice 2 : ✪ Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Correction : Il est immédiat que φ est linéaire (idem, linéarité de la dérivation et de l'évaluation). Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P(0) = \cdots = P^{(n)}(0)$ c'est-à-dire que 0 est racine de P de multiplicité au moins $n+1$ (cf. chapitre 19) mais $\deg(P) \leq n$ donc $P = 0$ car admet au moins $n+1$ racines avec multiplicité. On en déduit que φ est injective donc bijective car linéaire et injective entre deux espaces de même dimension finie $n+1$.

Exercice 3 : ✪ Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -x+3y+z=0\}$.
2. $\{(x,y,z) \,|\, x+y+z=0 \text{ et } x-3y=0\}$.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
4. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists (a,b) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^x + bx\}$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(2) = P(3) = 0\}$.

Correction : Notons tous ces espaces vectoriels F.

1. De même que dans le chapitre 28, on prouve que $F = \text{Vect}((3,1,0),(1,0,1))$ donc $(3,1,0)$ et $(1,0,1)$ forment une famille génératrice de F et également une famille libre car on a deux vecteurs non proportionnels, donc une base de F à deux éléments, si bien que F est de dimension 2 (c'est un plan vectoriel).
2. Idem que dans le chapitre 28, $F = \text{Vect}(3,1,-4)$ donc $(3,1,-4)$ est une famille génératrice de F donc une famille libre car famille à un élément non nul, donc une base de F, si bien que $\dim(F) = 1$ (c'est une droite vectorielle, ce qui est intuitif car c'est l'intersection de deux plans).
3. Il suffit de voir que
$$\begin{aligned} F &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \,|\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$
donc ces trois matrices forment une famille génératrice de F, et elles forment une famille libre car aucune n'est CL des autres (par exemple, la deuxième n'est pas CL des deux autres car aucune n'a un coefficient en position $(2,1)$ qui soit non nul). Elles forment donc une base de F qui est par conséquent de dimension 3.
4. $F = \text{Vect}(\exp, \text{Id})$ donc exp et Id forment une famille génératrice de F donc une famille libre car sont non proportionnelles, et donc une base de F qui est par conséquent de dimension 2.
5. Un polynôme s'annule en 2 et en 3 si et seulement s'il est divisible par $(X-2)(X-3)$ et puisqu'on manipule des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 :
$$\begin{aligned} F &= \{(aX+b)(X-2)(X-3) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{aX(X-2)(X-3) + b(X-2)(X-3) \,|\, (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(X(X-2)(X-3), (X-2)(X-3)) \end{aligned}$$
Les polynômes $X(X-2)(X-3)$ et $(X-2)(X-3)$ forment donc une famille génératrice de F et également une famille libre car c'est une famille échelonnée en degré (ou tout simplement car on a deux polynômes non proportionnels) donc une base de F si bien que $\dim(F) = 2$.

Exercice 4 : ✪ Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes. En déduire, sans plus de calcul, leur image, et leur éventuel caractère injectif/surjectif/bijectif.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+y+z,\, x+y,\, x-z)$.
2. $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z,t) \mapsto (2x+y+z-t,\, -3x-y+2t,\, 4x+z-t)$.
3. $h : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$.
4. $\Phi : \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3)^3$, $p \mapsto (p(u),\, p(v),\, p(w))$, où (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $D : E \to E$, $f \mapsto f'$, où $E = \text{Vect}(\cos^2, \sin^2, \sin\cos, \sin, \cos)$.

Correction :

1. On prouve comme au chapitre précédent que $\ker(f) = \{0\}$ (le triplet nul évidemment) donc f est injective. Puisqu'elle est linéaire et injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, elle est aussi bijective (et donc surjective).

2. Tout d'abord, g ne peut pas être injective donc ne peut pas être bijective car $\dim(\mathbb{R}^4) > \dim(\mathbb{R}^3)$. On trouve plus précisément que $\ker(g) = \text{Vect}(2, 4, -3, 5)$ donc est de dimension 1. D'après le théorème du rang, $\text{Im}(g)$ est de dimension $4 - 1 = 3$ donc g est surjective.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in \ker(h) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ a+c & a+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a & + & c & & & & & = & 0 \\ a & - & c & & & & & = & 0 \\ & & & & b & + & d & = & 0 \\ & & & & b & - & d & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff a = b = c = d = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\ker(h) = \{0\}$: h est injective donc est bijective car linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. On aurait aussi pu dire que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (on le montrerait comme dans le chapitre 21) donc $AM = 0 \iff M = 0$ ce qui permet de conclure plus rapidement.
4. Soit $p \in \ker(\Phi)$. Alors $p(u) = p(v) = p(w) = 0$ donc p s'annule sur une base donc est la fonction nulle (pour caractériser une AL il suffit de se donner l'image d'une base). Ainsi, Φ est injective donc est bijective car injective linéaire entre deux espaces de même dimension finie donc bijective.
5. Montrons que la famille $(\cos^2, \sin^2, \cos\sin, \sin, \cos)$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_5$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \cos^2(x) + \lambda_2 \sin^2(x) + \lambda_3 \sin(x)\cos(x) + \lambda_4 \sin(x) + \lambda_5 \cos(x) = 0$$

En évaluant en $x = 0$, il vient : $\lambda_1 + \lambda_5 = 0$. En évaluant en π, il vient : $\lambda_1 - \lambda_5 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_5 = 0$. En évaluant en $\pm\pi/2$, on trouve de même que $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$. Enfin, en évaluant en $\pi/4$, on trouve que $\lambda_3 = 0$, la famille est bien libre. Soit $f \in E$, il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) \in \mathbb{R}^5$.

$$f = \alpha_1 \cos^2 + \alpha_2 \sin^2 + \alpha_3 \sin\cos + \alpha_4 \sin + \alpha_5 \cos$$

Par conséquent,

$$D(f) = (-2\alpha_1 + 2\alpha_2)\cos\sin + \alpha_3 \sin^2 - \alpha_3 \sin^2 + \alpha_4 \cos - \alpha_5 \sin$$

Or la famille est libre. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f \in \ker(D) &\iff -2\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \\ &\iff \alpha = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 \end{aligned}$$

si bien que $\ker(D) = \{\alpha_1(\cos^2 + \sin^2) \,|\, \alpha_1 \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto 1)$ donc D n'est pas injective, donc n'est pas non plus surjective ni bijective avec le même argument que d'habitude.

Exercice 5 : ✪ Donner la dimension de :

1. $D_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales (de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}$).
2. ${T_n}^+(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
3. ${T_n}^-(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
4. ${T_n}^{++}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (i.e. avec une diagonale nulle).
5. ${T_n}^{--}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.

Correction : Rappelons que $(E_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, appelée base canonique.

1. Une matrice D est diagonale si et seulement si $D_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$. Par conséquent :

$$D_n(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,i})_{i \in [\![1\,;\,n]\!]}$$

$D_n(\mathbb{K})$ admet une base à n éléments (c'est bien une base car famille génératrice, et libre car sous-famille d'une famille libre à savoir la base canonique) donc $D_n(\mathbb{K})$ est de dimension n.

2. Une matrice T est triangulaire supérieure si et seulement si $T_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$. Par conséquent :

$$T_n{}^+(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j})_{i \leq j}$$

De même que ci-dessus (génératrice et sous-famille d'une famille libre), les $E_{i,j}$ forment une base de $T_n{}^+(\mathbb{K})$. Il ne reste plus qu'à les compter. Il y en a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (n-i+1) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

donc $\dim(T_n{}^+(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Même chose (et même dimension) en remarquant qu'une base est $(E_{i,j})_{j \leq i}$.
4. Idem que pour $T_n{}^+(\mathbb{K})$ mais cette fois une base est donnée par $(E_{i,j})_{i<j}$ si bien que :

$$\begin{aligned} \dim(T_n{}^{++}(\mathbb{K})) &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \\ &= n(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

5. Même chose en remarquant qu'une base est $(E_{i,j})_{j<i}$. Essayez d'interpréter et de visualiser les résultats de cet exercice à l'aide de degrés de liberté !

Exercice 6 : ✪ Que pensez-vous de la proposition suivante : si $m \leq n$ alors $\mathbb{R}^m$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Corrigez-la.

Correction : $\mathbb{R}^m$ n'est pas inclus dans $\mathbb{R}^n$ donc cela n'a pas de sens. Mais on a envie d'identifier $\mathbb{R}$ avec l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$, et on a envie d'identifier $\mathbb{R}^2$ avec le plan d'équation $z = 0$ (le plan horizontal qui passe par 0). Montrons que $\mathbb{R}^m$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0) \end{array} \right.$$

Alors f est évidemment linéaire et injective (si $f(x_1, \dots, x_m) = (0, \dots, 0)$, alors $(x_1, \dots, x_m) = 0$ donc le noyau est réduit à 0). Il en découle que f est une bijection entre $\mathbb{R}^m$ et $\mathrm{Im}(f)$ (une fonction injective est une bijection sur son image, cf. chapitre 3) donc il existe bien un sev de $\mathbb{R}^n$ isomorphe à $\mathbb{R}^m$.

Exercice 7 : ✪ On pose $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (2, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (n, n-1, n-2, \dots, 1)$ (les vecteurs étant dans $\mathbb{R}^n$). Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Correction : Puisque la famille comporte n éléments en dimension n, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$. Si les α_i sont non tous nuls, notons $k = \max\{i \mid \alpha_i \neq 0\}$. Alors $\alpha_k \neq 0$, et plus précisément, c'est le dernier non nul donc $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$. Or, $e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (2, 1, 0, \dots, 0)$ et ainsi de suite jusque $e_k = (k, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. En particulier, la k-ième coordonnée de $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_k e_k = 0$ est α_k (les termes différents de $\alpha_k e_k$ ont une k-ième coordonnée nulle) donc $\alpha_k = 0$ ce qui est absurde. Tous les α_i sont nuls, la famille est libre donc c'est une base.

Exercice 8 : ✪ Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques est un espace vectoriel. Donner sa dimension et en donner une base.

Correction : Il suffit de voir qu'une suite (u_n) est arithmétique si et seulement s'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout n, $u_n = a + nb$. En d'autres termes, l'ensemble des suites arithmétiques est égal à $\text{Vect}((1),(n))$ c'est-à-dire que la suite constante égale à 1 et la suite de terme général n en forment une famille génératrice, et donc une base car elles sont libres (car non proportionnelles). On en déduit en particulier que cet ensemble est un espace vectoriel de dimension 2.

Exercice 9 : ✪ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F)+\dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Correction : D'après la formule de Graßmann,

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

Or, $F+G$ est un sev de E donc $\dim(F+G) \leq \dim(E) = n$. Ainsi,

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) > 0$$

car $\dim(F) + \dim(G) > n$. Le résultat en découle.

Exercice 10 - Lemme d'échange : ✪ Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Montrer qu'il existe $p \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, f_p)$ soit une base de E.

Correction : $(e_1, \dots, e_{n-1})$ est une sous-famille de $(e_1, \dots, e_n)$ qui est une famille libre donc est une famille libre. De plus, $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter $(e_1, \dots, e_{n-1})$ en base de E à l'aide de vecteurs de $(f_1, \dots, f_n)$. Combien faut-il en rajouter ? Un seul, car on est en dimension n donc toutes les bases contiennent n éléments. Il existe donc p tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, f_p)$ soit une base de E.

Exercice 11 : ✪ On note $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel stable par composition de dimension supérieure ou égale à 1.

Correction : Si on note 0 l'application nulle, $u \circ 0 = 0 \circ u = 0$ (le fait que $u \circ 0 = 0$ vient du fait que u est linéaire). Par conséquent, $0 \in C(u)$ et donc $C(u)$ est non vide. Soient $(v_1, v_2) \in C(u)^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u \circ (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= \lambda_1 u \circ v_1 + \lambda_2 u \circ v_2 && \text{(car } u \text{ est linéaire)} \\ &= \lambda_1 v_1 \circ u + \lambda_2 v_2 \circ u && \text{(car } v_1 \text{ et } v_2 \text{ appartiennent à } C(u)) \\ &= (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \circ u \end{aligned}$$

La dernière égalité est toujours vraie, rien à voir avec une quelconque linéarité. On en déduit que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in C(u)$, ie $C(u)$ est stable par CL, donc c'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ qui est un espace vectoriel de référence, et en particulier c'est un espace vectoriel. Pour montrer qu'il est de dimension supérieure ou égale à 1, il suffit de montrer qu'il existe un élément non nul qui appartient à $C(u)$. Deux méthodes :

- Première méthode : Id_E commute avec tous les endomorphismes donc $\text{Id}_E \in C(u)$.
- Deuxième méthode : si $u \neq 0$ (encore une fois, on note 0 l'application nulle) alors $u \in C(u)$. Si $u = 0$ alors u commute avec tout élément de $\mathscr{L}(E)$ donc $C(u) \neq \mathscr{L}(E)$: dans les deux cas, $C(u) \neq \{0\}$.

Montrons que $C(u)$ est stable par composition. Soient $(v,w) \in C(u)^2$. Montrons que $v \circ w \in C(u)$ ie que $u \circ (v \circ w) = (v \circ w) \circ u$. On peut enlever les parenthèses car la composition est associative (il est inutile de le préciser, on peut le faire directement). On veut donc montrer que $u \circ v \circ w = v \circ v \circ w$. On a successivement :

$$\begin{aligned} u \circ v \circ w &= v \circ u \circ w && \text{(car } v \in C(u)) \\ &= v \circ w \circ u && \text{(car } w \in C(u)) \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 12 : ✪ Un sev F de E est dit stable par automorphisme si, pour tout u automorphisme de E, $u(F) \subset F$.

1. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe un automorphisme u de E tel que $u(x) = y$.
2. Montrer qu'un sev F de E est stable par automorphisme si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Correction :

1. x et y forment des familles libres à un élément car ce sont des vecteurs non nuls. D'après le théorème de la base incomplète, on peut les compléter en base ce qui donne deux bases $(x, e_2, \dots, e_n)$ et $(y, f_2, \dots, f_n)$. Une application linéaire étant totalement déterminée par l'image d'une base, il existe une (unique) application linéaire vérifiant $u(x) = y, u(e_2) = f_2, \dots, u(e_n) = f_n$, et u est un automorphisme car envoie une base sur une base.
2. Il est immédiat que $\{0\}$ et E sont stables par automorphismes. Réciproquement, soit F un sev de E distinct de $\{0\}$ et E. Soit $x \neq 0$ un élément de F et soit $y \in E \backslash F$ (y est alors non nul puisque F est un sev de E). D'après ce qui précède, il existe un automorphisme u tel que $u(x) = y \notin F$ donc F n'est pas stable par automorphisme.

Exercice 13 : ✪

1. Soit $E_1 = \text{Vect}((0,1,1),(1,0,2))$. Trouver $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 \oplus \text{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $E_2 = \text{Vect}(1,0,1)$. Trouver x et $y \in \mathbb{R}^3$ tels que $E_2 \oplus \text{Vect}(x,y) = \mathbb{R}^3$.
3. Trouver un supplémentaire de $F = \text{Vect}(1, X+1, X^3 - X^2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Dans chacun des cas suivants, prouver (à l'aide d'arguments de dimension) que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
   (a) $E_1 = \text{Vect}(1,2)$ et $E_2 = \text{Vect}(-1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
   (b) $E_1 = \{(x,y,z) \mid x+z=0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (c) $E_1 = \{(x, 2x, 3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x+y, x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (d) $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}(0,1,0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (e) $E_1 = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}(1,2,3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (f) $E_1 = \text{Vect}(1,\dots,1)$ et $E_2 = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1 + \dots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
   (g) $E_1 = \text{Vect}(1,2,\dots,2n)$ et $E_2 = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.

Correction :

1. E_1 admet une base à deux éléments (génératrice par définition et libre car formée de deux vecteurs non colinéaires) et $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 : tout espace vectoriel D de dimension 1 (i.e. une droite vectorielle) vérifiant $D \cap E_1 = \{0\}$ est donc un supplémentaire. Il suffit donc de trouver un vecteur x non nul tel que $x \notin E_1$. On trouve comme dans le chapitre 28 que E_1 est l'ensemble d'équation $2y + x - z = 0$. Par conséquent, $(1,0,0) \notin E_1$ si bien que $\text{Vect}((1,0,0))$ est un supplémentaire de E_1.
2. Il suffit de trouver deux vecteurs x et y tels que $(1,0,1), xy$ forment une famille libre : ce sera donc une base (car famille libre à trois éléments en dimension 3) donc le théorème de concaténation des bases nous permettra de conclure. On prouve aisément que (par exemple) $(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)$ est une famille libre donc $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ est un supplémentaire de E_2.
3. On a un espace de dimension 3 : en effet, la famille $(1, X+1, X^3 - X^2)$ est génératrice de F et est libre car échelonnée en degré, donc est une base de F, donc F est de dimension 3. Puisque $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4, comme dans la question 1, il suffit de trouver un polynôme P non nul n'appartenant pas à F, $\text{Vect}(P)$ sera un supplémentaire de F. Soit $P = X^2$. La famille $(1, X+1, X^2, X^3 - X^2)$ est échelonnée en degré donc est une famille libre à 4 éléments en dimension 4 donc une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Par conséquent, F et $\text{Vect}(X^2)$ sont supplémentaires d'après le théorème de concaténation des bases (ou tout simplement car, la famille étant libre, $X^2 \notin F$).
4. (a) Les deux espaces sont de dimension 1 (car admettent une base à un élément). De plus, leur intersection est nulle : si $x \in D_1 \cap D_2$ alors il existe λ et μ tels que $x = \lambda(1,2) = \mu(-1,1)$. Par conséquent, $\lambda = -\mu$ et $2\lambda = \mu$, ce qui implique que $\lambda = \mu = 0$. $D_1 \cap D_2 = \{0\}$ et $\dim(D_1) + \dim(D_2) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc D_1 et D_2 sont supplémentaires. L'inconvénient de cette méthode par rapport à celle vue au chapitre 28 est qu'elle ne donne pas la décomposition et donc qu'elle n'est d'aucune utilité, par exemple, pour expliciter la projection ou la symétrie associées. L'avantage est que c'est plus rapide donc, si on cherche uniquement à prouver que les espaces sont supplémentaires, cela peut être intéressant.
   (b) E_1 est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire non vide, et on prouve comme dans le chapitre 28 que $E_2 = \text{Vect}(2,1,2)$ dpnc $\dim(E_1) = 2$ et $\dim(E_2) = 1$. De même, il suffit de prouver que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in E_1 \cap E_2$. $x \in E_2$ donc $x = (2x_2, x_2, 2x_2)$ et $x \in E_1$ donc $2x_2 + 2x_2 = 0$ donc $x_2 = 0$ si bien que $x = (0,0,0)$ ce qui permet de conclure.
   (c) $E_1 = \text{Vect}(1,2,3)$ et $E_2 = \text{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$ donc $\dim(E_1) = 1$ et $\dim(E_2) = 2$. Il suffit de prouver que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Or, on trouve comme au chapitre 28 que E_2 est d'équation $x - y = 0$ donc $(1,2,3) \notin E_2$ si bien que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ ce qui permet de conclure.
   (d) Idem que précédemment.
   (e) Idem.
   (f) E_2 est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc est un hyperplan si bien que $\dim(E_2) = n-1$ et $\dim(E_1) = 1$ donc il suffit de même de prouver que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ donc il suffit de prouver que $(1,\dots,1) \notin E_2$ ce qui est immédiat (on sait que si H est un hyperplan et si $a \notin H$ et si a est non nul alors $\text{Vect}(a)$ est un supplémentaire de H).

(g) Idem.

Exercice 14 : ✪ On considère les 4 hyperplans H_1, H_2, H_3, H_4 de $\mathbb{R}^5$ d'équations respectives dans la base canonique : $(H_1) : x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5 = 0$; $(H_2) : x_1 = x_2+x_3-3x_5$; $(H_3) : x_1-x_2+5x_3-2x_4-x_5 = 0$ et $(H_4) : x_1-x_2+2x_3-x_4-x_5 = 0$. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$?

Correction : Faisons comme au chapitre 28 et donnons une base de cet espace vectoriel qu'on notera F. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$.

$$x \in F \iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_4 = 3x_3 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} F &= \{(x_2 + x_3, x_2, x_3, 3x_3, 0) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x_2(1, 1, 0, 0, 0) + x_3(1, 0, 1, 3, 0) \mid (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \mathrm{Vect}((1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 3, 0)) \end{aligned}$$

F admet une base à deux éléments (famille génératrice par définition, et libre car deux vecteurs non proportionnels) donc $\dim(F) = 2$: ce n'est pas parce qu'on a quatre hyperplans que F est de dimension 1 !

Exercice 15 : ✪ Soit $n \geq 1$. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$ est un espace vectoriel, donner sa dimension et en donner une base.

Correction : On pourrait montrer comme d'habitude que c'est un espace vectoriel, mais on va en fait répondre aux deux premières questions en même temps. Notons cet ensemble H (nom bien sûr choisi totalement au hasard). Alors

$$H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] | \ P(0) - P(1) = 0\}$$

En d'autres termes, H est le noyau de la forme linéaire non nulle

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(0) - P(1) \end{cases}$$

φ est évidemment linéaire, et est non nulle car $\varphi(X) = -1$. Par conséquent, H est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$: c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $\dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = n$. Donnons une base de H. Puisque $\dim(H) = n$, il suffit de donner une famille libre de cardinal n. Or, les polynômes $(1, X(X-1), X^2(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ appartiennent à H et forment une famille libre car c'est une famille échelonnée en degré. C'est une famille libre à n éléments dans un espace vectoriel de dimension n : c'est une base.

Exercice 16 : ✪ Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_p)$ des familles libres. On suppose que pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$. Montrer que pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, $f_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

Correction : Soit $i \in [\![1 ; p]\!]$. Pour tout $k \in [\![1 ; i]\!]$,

$$e_k \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) \subset \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$$

Par conséquent, $e_1, \dots, e_i$ appartiennent à $\text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$ donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$ (rappelons que si $A \subset F$ avec F un espace vectoriel alors $\text{Vect}(A) \subset F$: $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel au sens de l'inclusion qui contient A). Or, $(e_1, \dots, e_i)$ et $(f_1, \dots, f_i)$ sont libres car sous-familles de familles libres. Elles forment donc des bases respectivement de $\text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ et $\text{Vect}(f_1, \dots, f_i)$ qui sont donc par conséquent de même dimension i donc sont égaux (car l'un est inclus dans l'autre et ils ont la même dimension). En particulier, $f_i \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_i) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

Exercice 17 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$$

Correction : Cela sent la bijectivité à plein nez... Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}\left(\frac{X}{2^i}\right) \end{cases}$$

Il est immédiat que f est linéaire (linéarité de la somme, de la dérivation, et de l'évaluation, mais on n'est pas obligé de le préciser). Il suffit donc de prouver que f est bijective. Puisque f est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, il suffit de prouver qu'elle est injective. Soit donc $P \in \ker(f)$. Supposons que $P \neq 0$ et notons $d = \deg(P)$. Alors

$$f(P) = 0 = \sum_{k=0}^{d} P^{(k)}\left(\frac{X}{2^i}\right)$$

(les dérivées suivantes sont nulles). Or, les polynômes ci-dessus sont échelonnés en degré donc forment une famille libre, ce qui est absurde car on a une combinaison linéaire triviale qui les annule. Ainsi, $P = 0$, $\ker(f) = \{0\}$, f est injective, ce qui permet de conclure.

Exercice 18 : ✪✪ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{C}[X], \exists ! P \in \mathbb{C}[X], P(X-\alpha) + P(X-\beta) = A$$

Correction : Idem, introduisons une fonction et prouvons qu'elle est bijective. Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X-\alpha) + P(X-\beta) \end{cases}$$

f est évidemment linéaire, prouvons qu'elle est bijective. Attention, on est en dimension infinie ! Il faudra donc être un peu subtil pour prouver la bijectivité (on raisonnera de la même façon dans l'exercice 19).

Soit $P \in \ker(f)$. Alors $P(X-\alpha) + P(X-\beta) = 0$. Or, si P est non nul, soit n son degré et notons a_n son coefficient dominant. Alors le coefficient de X^n de $f(P)$ est $2a_n$ donc est non nul ce qui est absurde. f est donc injective. Prouvons qu'elle est bijective. On va raisonner comme dans l'exercice 5 : soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Soit $n = \deg(P)$, si bien que $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On a vu que f préservait le degré donc $\mathbb{C}_n[X]$ est stable par f : la restriction de f à $\mathbb{C}_n[X]$ est donc un endomorphisme injectif (car f l'est) donc bijectif car (à présent) est linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. P admet donc un antécédent par f donc f est surjective. On peut également prouver que f préserve le degré : si P est de degré $n \geq 0$ de coefficient dominant $a_n \neq 0$ alors on prouve facilement que $P(X-\alpha)$ et $P(X-\beta)$ sont de même degré et même coefficient dominant donc $f(P)$ est de degré n de coefficient dominant $2a_n$, et si $P = 0$ alors $f(P) = 0$. Dès lors, la famille $(f(X^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ car, pour tout n, $f(X^n)$ est de degré n (cf. cours) : f envoie une base sur une base donc est bijective.

Exercice 19 : ✪✪ Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X) + P(X+1)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Correction : φ est évidemment linéaire. Attention, $\mathbb{R}[X]$ n'est pas de dimension finie, il faut donc prouver à la fois l'injectivité et la surjectivité, pas de raccourci.

Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors $P(X) = -P(X+1)$ si bien que $P(X+1) = -P(X+2)$ donc $P(X) = P(X+2)$: P est périodique donc constant (cf. chapitre 19). Or, si P est constant égal à λ, alors $P(X) + P(X+1) = 2\lambda = 0$ donc $P = 0$: $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc φ est injective.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ et soit n tel que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. L'idée est de se restreindre à $\mathbb{R}_n[X]$. $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ : en effet, si $\deg(P) \leq n$ alors $\varphi(P)$ est aussi de degré inférieur ou égal à n. La restriction de φ à $\mathbb{R}_n[X]$

$$\varphi_{|\mathbb{R}_n[X]} : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X)+P(X+1) \end{cases}$$

est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ injectif (car φ l'est) entre deux espaces de même dimension finie donc est surjective : il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X)+P(X+1) = Q$ donc φ (la vraie) est surjective donc est un isomorphisme. Raisonnement classique ! On peut aussi prouver que φ préserve le degré (si P est de degré $n \geq 0$ de coefficient dominant $a_n \neq 0$ alors on prouve facilement que $P(X+1)$ est de même degré et même coefficient dominant donc $\varphi(P)$ est de degré n de coefficient dominant $2a_n$, et si $P = 0$ alors $\varphi(P) = 0$). Dès lors, la famille $(\varphi(X^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ car, pour tout n, $\varphi(X^n)$ est de degré n (cf. cours) : φ envoie une base sur une base donc est bijective.

Exercice 20 : ✪✪ On ne suppose plus que E est de dimension finie, mais on se donne E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Redémontrer la formule de Graßmann à l'aide de l'application linéaire :

$$\varphi : \begin{cases} E_1 \times E_2 & \to & E \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{cases}$$

Correction : Montrons que φ est linéaire. Attention, les éléments de l'espace de départ sont des couples ! Pour montrer la linéarité, il faut donc prendre deux couples ! Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux éléments de $E_1 \times E_2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2)$$

si bien que

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda x + \mu y) &= \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 \\ &= \lambda(x_1 + x_2) + \mu(y_1 + y_2) \\ &= \lambda\varphi(x) + \mu\varphi(y) \end{aligned}$$

donc φ est linéaire. $\mathrm{Im}(\varphi)$ est, par définition, $E_1 + E_2$ car c'est l'ensemble des éléments de E s'écrivant comme la somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2. Cherchons à présent $\ker(\varphi)$.

$$x = (x_1, x_2) \in \ker(\varphi) \iff x_1 = -x_2$$

Par conséquent, x_1 est égal à un élément de E_2 donc appartient à $E_1 \cap E_2$, et idem pour x_2. Par conséquent :

$$\ker(\varphi) = \{(x_1, -x_1) \,|\, x_1 \in E_1 \cap E_2\}$$

Montrons que

$$f : \begin{cases} E_1 \cap E_2 & \longrightarrow & \ker(\varphi) \\ x_1 & \longmapsto & (x_1, -x_1) \end{cases}$$

Il est immédiat que f est linéaire, elle est surjective d'après ce qui précède, et injective car si $x_1 \in \ker(f)$ alors $x_1 = 0$. Ainsi, $\ker(\varphi)$ et $E_1 \cap E_2$ sont isomorphes dont ont la même dimension. Appliquons enfin le théorème du rang à φ :

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi))$$

si bien que

$$\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(E_1 + E_2) + \dim(E_1 \cap E_2)$$

ce qui est la formule de Graßmann.

Exercice 21 : ✪✪ Soit $n \geq 1$. On note :

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \,|\, P(-X) = P(X)\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{I} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \,|\, P(-X) = -P(X)\}$$

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sev de $\mathbb{K}_{2n}[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont en somme directe.
3. Montrer que $\dim(\mathscr{P}) \geq n+1$ et $\dim(\mathscr{I}) \geq n$.
4. En déduire que ces inégalités sont des égalités, et prouver que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_{2n}[X]$.

Correction :

1. On montre aisément qu'ils contiennent le polynôme nul et sont stables par combinaison linéaire.
2. Attention, il ne faut pas prouver qu'ils sont supplémentaires, simplement qu'ils sont en somme directe ! Il suffit donc de prouver que leur intersection est nulle, ce qui est immédiat : soit $P \in \mathscr{P} \cap \mathscr{I}$, alors $P(-X) = P(X) = -P(X)$ et en particulier $P = -P$ donc $P = 0$ ce qui permet de conclure.
3. Les polynômes $1, X^2, \dots, X^{2n}$ forment une famille libre car échelonnée en degré de cardinal $n+1$ et appartiennent à $\mathscr{P}$ donc celui-ci est de dimension supérieure ou égale à $n+1$. De même, $X, X^3, \dots, X^{2n-1}$ forment une famille libre à n éléments de $\mathscr{I}$ ce qui permet de conclure.
4. On sait que $\dim(\mathscr{P} + \mathscr{I}) = \dim(\mathscr{P}) + \dim(\mathscr{I})$ puisqu'ils sont en somme directe, donc cette somme est de dimension au moins égale à $2n+1$, mais puisque $\mathscr{P} + \mathscr{I} \in \mathbb{R}_{2n}[X]$ qui est de dimension $2n+1$, alors $\dim(\mathscr{P} + \mathscr{I}) \leq 2n+1$ donc les inégalité sont des égalités. Ainsi, $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \{0\}$ et $\dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{I} = \mathbb{K}_{2n}[X]$ donc les deux espaces sont bien supplémentaires.

Exercice 22 : ✪✪ Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.

Correction : On veut montrer qu'il existe une base de matrices inversibles. La base canonique ne convient pas car aucune matrice élémentaire n'est inversible (les matrices de la base canonique sont triangulaires avec au moins un 0 sur la diagonale). On va utiliser le théorème de la base extraite, il suffit donc de trouver une famille génératrice de matrices inversibles. On sait que toute matrice est somme de deux matrices inversibles (cf cours sur les matrices). Par exemple, en dimension 3,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Donnons un autre exemple, cette fois avec une matrice avec une diagonale non identiquement nulle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On peut évidemment généraliser en dimension n (cf cours sur les matrices). Par conséquent, si $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$, il existe $A_{i,j}$ et $B_{i,j}$ inversibles telles que $E_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j}$. Puisque les $A_{i,j}$ et les $B_{i,j}$ engendrent les $E_{i,j}$ et que les $E_{i,j}$ sont une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors les $A_{i,j}$ et les $B_{i,j}$ engendrent $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Plus précisément,

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j} | (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2) = \mathrm{Vect}(A_{i,j}, B_{i,j} |\ (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2)$$

Les $A_{i,j}$ et les $B_{i,j}$ forment donc une famille génératrice (à $2n^2$ éléments) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, constituée de matrices inversibles. D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base, et en particulier $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles. On pourrait en donner une explicitement, mais ce n'est pas demandé et le théorème de la base extraite permet de répondre assez facilement à la question.

Exercice 23 : ✪✪ Pour quels (a,b,c) les trois fonctions $f_a : x \mapsto \sin(a+x), f_b : x \mapsto \sin(b+x), f_c : x \mapsto \sin(c+x)$ forment-elles une famille libre ?

Correction : Si on essaye de voir si les fonctions sont libres à la main, on commence par écrire : soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout x

$$\lambda_1 \sin(x+a) + \lambda_2 \sin(x+b) + \lambda_3 \sin(x+c) = 0$$

mais cela paraît compliqué de trouver un système explicite avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ car, même en prenant des valeurs explicites pour x, cela ne donnera pas des valeurs du sinus faciles à calculer (si on prend par exemple $x = \pi - a$ alors $\sin(x+a) = 0$, ça va, mais on ne peut pas expliciter les deux autres) : bref, trop dur ! On veut simplifier tout cela, on utilise les formules de trigo : f_a est la fonction $x \mapsto \sin(a)\cos(x) + \sin(x)\cos(a)$, et idem pour les deux autres. Au lieu de recommencer avec la même méthode (on pourrait se débarrasser des termes $\sin(x)$ et $\cos(x)$ avec des valeurs explicites, mais on aurait toujours des $\sin(a), \cos(a)$ etc.), on remarque que f_a, f_b, f_c appartiennent toutes les trois à $\mathrm{Vect}(\sin, \cos)$ qui est un espace de dimension 2 (car le sinus et le cosinus ne sont pas proportionnelles, mais si on ne veut pas s'embêter on dit qu'il est de dimension inférieure ou égale à 2). Une famille à trois éléments dans un espace de dimension 2 est liée, donc f_a, f_b, f_c ne forment jamais une famille libre, quels que soient les réels a, b, c choisis.

Exercice 24 : ✪✪ Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ (cf exercice 32 du chapitre sur les séries) n'est pas de dimension finie.

Correction : Idem que dans le cours, où l'on a montré que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est de dimension infinie.

Exercice 25 : ✪✪ Soient $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des éléments d'un espace vectoriel E (pas forcément de dimension n dans cet exercice). On suppose que $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est libre. Montrer qu'il y a au moins n vecteurs libres parmi

$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$.

Correction : Tout d'abord, $x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n$ appartiennent à $F = \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Puisque F contient une famille libre de cardinal n, alors $\dim(F) \geq n$. Par définition, $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ est une famille génératrice de F. D'après le théorème de la base extraite, on peut en extraire une base $(e_1, \ldots, e_p)$ (avec $p = \dim(F) \geq n$), qui est en particulier une famille libre. Puisqu'une sous-famille d'une famille libre est libre, $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre et est extraite de $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 26 - Bien essuyer ses lunettes (ou en acheter le cas échéant...) : ✪✪ On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m(x) = 0$. Montrer que u est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Correction : Rappelons que u est nilpotent s'il existe $k \geq 1$ tel que $u^k = 0$ ie tel que, pour tout $x, u^k(x) = 0$. La différence avec l'énoncé est qu'on veut trouver un même k qui convient pour tout x. E est de dimension n donc admet une base de cardinal n notée $(e_1, \ldots, e_n)$. Par hypothèse, il existe $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n, u^{k_i}(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Notons $k = \max(k_1, \ldots, k_n)$. Alors $u^k(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Or, il existe un unique endomorphisme f tel que $f(e_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ (car une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base). L'application nulle convient, donc u^k est l'application nulle : u est nilpotente.

Remarque : On pouvait montrer à la main que $u^k = 0$. Soit $x \in E$. $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base, x est CL de $(e_1, \ldots, e_n)$ ie il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Par linéarité de u^k,

$$\begin{aligned} u^k(x) &= \alpha_1 u^k(e_1) + \cdots + \alpha_n u^k(e_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. On a déjà vu dans le chapitre précédent que la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ est un contre-exemple.

Exercice 27 : ✪✪ Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F est inclus dans $u(F)$ alors $F = u(F)$.
2. A l'aide de $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ et de la dérivation, montrer que le résultat n'est plus valable si E n'est pas supposé de dimension finie.

Correction :

1. L'idée est que l'image d'un espace vectoriel ne peut pas être « strictement plus grande » que l'espace vectoriel de départ (voir cours, les dessins peu rigoureux...), donc si $F \subset u(F)$, la seule possibilité est que ces espaces vectoriels soient égaux. Plus précisément, appliquons le théorème du rang à $u_{|F}$ (l'espace de départ est donc F) :

   $$\dim(F) = \dim \ker(u_{|F}) + \dim \text{Im}(u_{|F})$$

   Or, $\text{Im}(u_{|F}) = u(F)$. Comme $\dim \ker(u_{|F}) \geq 0$, on a $\dim(F) \geq \dim u(F)$. Puisque $F \subset u(F)$, $\dim(F) \leq \dim(u(F))$: on a donc $\dim(F) = \dim(u(F))$. Finalement, $F \subset u(F)$ et ces deux espaces vectoriels sont de même dimension donc ils sont égaux.
2. Montrons que $u(F) = \mathbb{R}[X]$ (où u est la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$), ce qui montrera que le résultat précédent est faux en dimension infinie (on a en effet F qui est inclus strictement dans $\mathbb{R}[X]$ car il existe des polynômes qui ne s'annulent pas en 0, par exemple le polynôme constant égal à 1). Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On cherche à montrer que $P \in u(F)$ donc qu'il existe $Q \in F$ (ie qui s'annule en 0) tel que $u(Q) = P$ ie $Q' = P$. En d'autres termes, on cherche à montrer que P admet une primitive nulle en 0, ce qui est le cas car P est un polynôme donc une fonction continue. Ainsi, $\mathbb{R}[X] \subset u(F)$, et l'inclusion réciproque est évidente. Ainsi, $u(F) = \mathbb{R}[X]$ donc F est inclus strictement dans $u(F)$: le résultat précédent est faux en dimension infinie.

Exercice 28 : ✪✪ Soit $v \in L(E)$ tel que $E = \ker u + \ker v = \text{Im}u + \text{Im}v$. Montrer que ces sommes sont directes. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Correction : Il suffit de montrer que $\ker(u) \cap \ker(v) = \text{Im}(u) \cap \text{Im}(v) = \{0\}$. Appliquons deux fois la formule de Graßmann :

$$n = \dim(E) = \dim(\ker(u) + \ker(v)) = \dim \ker(u) + \dim \ker(v) - \dim(\ker(u) \cap \ker(v))$$

et

$$n = \dim(E) = \dim(\text{Im}(u) + \text{Im}(v)) = \dim \text{Im}(u) + \dim \text{Im}(v) - \dim(\text{Im}(u) \cap \text{Im}(v))$$

Sommons ces deux lignes :

$$2n = \dim\ker(u) + \dim\ker(v) + \dim\operatorname{Im}(u) + \dim\operatorname{Im}(v) - \dim(\ker(u)\cap\ker(v)) - \dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v))$$

Or, d'après le théorème du rang appliqué à u,

$$\dim\ker(u) + \dim\operatorname{Im}(u) = \dim(E) = n$$

De même, $\dim\ker(v) + \dim\operatorname{Im}(v) = n$. Dès lors,

$$2n = 2n - \dim(\ker(u)\cap\ker(v)) - \dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v))$$

c'est-à-dire : $\dim(\ker(u)\cap\ker(v)) + \dim(\operatorname{Im}(u)\cap\operatorname{Im}(v)) = 0$. Or, une dimension est positive, donc les deux dimensions ci-dessus sont nulles, ce qui permet de conclure. Donnons à présent un contre-exemple en dimension infinie. Plaçons-nous sur $E = \mathbb{R}[X]$ et prenons $u = D$ où D est la dérivation donc $u : P \mapsto P''$, et $v : P \mapsto P(0)$. Alors $\ker(u) = \mathbb{R}_1[X]$ (l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1), $\operatorname{Im}(u) = \mathbb{R}[X]$ (on l'a prouvé dans le chapitre 29), $\ker(v) = \operatorname{Vect}(X^k)_{k\geq 1} = \{P \mid P(0) = 0\}$ et $\operatorname{Im}(v) = \mathbb{R}_0[X]$. On a bien :

$$\mathbb{R}[X] = \ker(u) + \ker(v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$$

mais aucune de ces sommes n'est directe.

Exercice 29 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\dim(f(E_1)) = \dim(E_1) - \dim(E_1 \cap \ker(f))$.
2. Montrer que $\dim(f^{-1}(E_1)) = \dim(E_1 \cap \operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$.

Correction :

1. Appliquons le théorème du rang à la restriction de f à E_1 :

$$\dim(\ker(f_{|E_1})) + \dim(\operatorname{Im}(f_{|E_1})) = \dim(E_1)$$

Il suffit de voir que $\ker(f_{|E_1}) = \ker(f) \cap E_1$ et $\operatorname{Im}(f_{|E_1}) = f(E_1)$ pour conclure.

2. Appliquons le théorème du rang à la restriction de f à $f^{-1}(E_1)$:

$$\dim(\ker(f_{|f^{-1}(E_1)})) + \dim(\operatorname{Im}(f_{|f^{-1}(E_1)})) = \dim(f^{-1}(E_1))$$

Il suffit de montrer que $\operatorname{Im}(f_{|f^{-1}(E_1)}) = \operatorname{Im}(f) \cap E_1$ et $\ker(f_{|f^{-1}(E_1)}) = \ker(f)$. Soit $y \in \operatorname{Im}(f_{|f^{-1}(E_1)})$. Alors il existe $x \in f^{-1}(E_1)$ tel que $y = f(x)$ si bien que $y \in E_1$, et $y \in \operatorname{Im}(f)$ donc $y \in \operatorname{Im}(f)\cap E_1$. Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im}(f)\cap E_1$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et puisque $y \in E_1$ alors $x \in f^{-1}(E_1)$, d'où l'inclusion réciproque, d'où la première égalité.

L'inclusion $\ker(f_{|f^{-1}(E_1)}) \subset \ker(f)$ est immédiate. Réciproquement, soit $x \in \ker(f)$. Alors $f(x) = 0 \in E_1$ donc $x \in f^{-1}(E_1)$: on en déduit la deuxième inclusion, ce qui permet de conclure.

Exercice 30 : ✪✪ Soient E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $f(E_1) = E_2$.

Correction : Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E_1 et soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ une base de E_2 (les deux bases ont le même cardinal car les espaces ont la même dimension). D'après le théorème de la base incomplète (on est en dimension finie), on peut les compléter en bases de E : $(e_1, \dots, e_n)$ d'une part, et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ d'autre part. Une application linéaire étant entièrement déterminée par l'image d'une base, il existe un unique endomorphisme f de E tel que, pour tout i, $f(e_i) = \varepsilon_i$. En particulier, $f(e_1) = \varepsilon_1, \dots, f(e_p) = \varepsilon_p$, si bien que $f(E_1) = E_2$. En effet, pour tout $x \in E_1$, x est CL des e_i donc, par linéarité de f, $f(x)$ est CL des $f(e_i)$ c'est-à-dire des ε_i si bien que $f(x) \in E_2$: $f(E_1) \subset E_2$, et on prouve l'inclusion réciproque de la même façon, c'est-à-dire que tout élément $y \in E_2$ est CL des ε_i, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ tels que $y = \alpha_1\varepsilon_1 + \cdots + \alpha_p\varepsilon_p$, et $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$ est un antécédent de y, ce qui permet de conclure.

Exercice 31 : ✪✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que

$$T : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' + \omega^2 P \end{cases}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. En calculant $T(1), T(X), T(X^2), \dots, T(X^n)$, montrer que T est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction polynomiale f telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + \omega^2 f(x) = x^n$$

Attention, il n'y a a priori aucune condition sur le degré d'une éventuelle solution !

Correction :

1. La linéarité de T est immédiate et découle de la linéarité de la dérivation. De plus, T va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même : en effet, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg(P) \leq n$ et $\deg(P'') \leq \deg(P) - 2$ (cf. chapitre 19 : $\deg(P') \leq \deg(P) - 1$, il n'y a pas forcément égalité !) donc $\deg(P'') \leq n - 2 \leq n$ donc, par somme, $\deg(T(P)) \leq n$ i.e. $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: T est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in [\![0 \,;\, n]\!]$. Alors $T(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + \omega^2 X^k$. Puisque $\omega > 0$, alors $\deg(T(X^k)) = k$: la famille $(T(X^k))_{k \in [\![0 \,;\, n]\!]}$ est échelonnée en degré donc libre, c'est une famille libre à $n+1$ éléments en dimension n donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$: T envoie une base sur une base donc est bijectif.
3. T étant surjectif, X^n admet un unique antécédent par T dans $\mathbb{R}_n[X]$. En particulier, il existe une solution polynomiale à cette équation différentielle (de degré inférieur ou égal à n, donc), mais, même si T est injectif, nous n'avons pas encore prouvé l'unicité demandée ! Il faut faire attention que, dans l'énoncé, on ne parle pas de degré : il pourrait y avoir une solution dans $\mathbb{R}_n[X]$ et une autre dans $\mathbb{R}_{2n}[X]$ par exemple, il faut prouver l'unicité dans $\mathbb{R}[X]$ donc il faut travailler encore un peu. Supposons qu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ solution de cette équation différentielle. Notons $d = \max(\deg(P), \deg(Q))$. Alors P et Q appartiennent tous les deux à $\mathbb{R}_d[X]$ et ont la même image (X^n) par l'application

$$T \colon \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R}_d[X] \\ \quad P & \longmapsto P'' + \omega^2 P \end{cases}$$

qui est injective donc sont égaux : d'où l'unicité.

Exercice 32 : ✪✪ Soit $E = D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des solutions de l'équation différentielle $y'' - (1+x^2)y = 0$.

1. Peut-on appliquer le résultat du cours ?
2. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soient f et g les applications définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2/2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

Montrer que f et g appartiennent à F.

5. Soit $h \in F$. Montrer que h est combinaison linéaire de f et g (on pourra dériver h/f). En déduire la dimension de F.

Correction :

1. Non car on a donné en cours de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
2. La fonction nulle est solution de l'équation différentielle donc F est non vide. Soient f et g dans F et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors f et g sont dérivables deux fois si bien que $\lambda f + \mu g$ l'est aussi, et on a :

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)'' - (1+x^2)(\lambda f + \mu g) &= \lambda f'' + \mu g'' - (1+x^2)(\lambda f + \mu g) \\ &= \lambda(f'' - (1+x^2)f) + \mu(g'' - (1+x^2)g) \\ &= 0 \end{aligned}$$

si bien que $\lambda f + \mu g \in F$: F est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de $D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de référence donc, en particulier, F est un espace vectoriel.

3. Notons $f = v'w - vw'$. v et w appartiennent à F donc sont dérivables deux fois, si bien que f est dérivable et :

$$f' = v''w + v'w' - v'w' - vw''$$

c'est-à-dire que $f' = v''w - vw''$. Or, v et w sont dans F donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x^2)vw - v(1+x^2)w \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

4. Il suffit de calculer f'' et g''.
5. Suivons l'indication de l'énoncé et dérivons h/f (qui est bien dérivable et même dérivable deux fois en tant que quotient de fonctions dérivables deux fois, celle au dénominateur ne s'annulant pas).

$$\left(\frac{h}{f}\right)' = \frac{h'f - hf'}{f^2}$$

Or, d'après la question 3, $h'f - f'h$ est constante, disons égale à λ. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left(\frac{h}{f}\right)'(x) = \lambda e^{x^2}$$

c'est-à-dire que h/f est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ (une primitive est définie à une constante près) telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{h(x)}{f(x)} = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \alpha$$

c'est-à-dire que $h(x) = g(x) + \alpha f(x)$: h est bien CL de f et g donc f et g forment une famille génératrice de F. Or, f et g sont non proportionnelles : en effet, si f et g sont proportionnelles, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $g = \lambda f$ et en évaluant en 0, on obtient $g(0) = 0 = \lambda \times 1$ donc g est la fonction nulle ce qui est absurde car g n'est nulle qu'en 0. On en déduit que f et g sont non proportionnelles donc forment une famille libre donc une base de F si bien que F est de dimension 2.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $p \geq 1$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques est un espace vectoriel de dimension p et en donner une base.

Correction : Une suite (u_n) est p-périodique si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = u_n$. Une suite (u_n) est donc p-périodique si et seulement si :

$$u_0 = u_p = u_{2p} = \cdots \qquad , u_1 = u_{p+1} = u_{2p+1} = \cdots \qquad , \text{et ainsi de suite jusque} \qquad u_{p-1} = u_{2p-1} = \cdots$$

Par conséquent, si on note v_0 la suite dont tous les termes sont nuls, sauf ceux d'indices u_0, u_p, u_{2p} etc. i.e. les termes d'indice congrus à 0 modulo p qui valent 1, v_1 la suite dont tous les termes valent 0 sauf ceux d'indices $1, p+1$ etc. i.e. ceux d'indices congrus à 1 modulo p, et ainsi de suite jusque v_{p-1}, alors (u_n) est constante si et seulement si $(u_n) \in \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_{p-1})$, c'est-à-dire que les suites $(v_0, \dots, v_{p-1})$ forment une famille génératrice de cet espace et une famille libre car aucune n'est CL des autres (les termes non nuls sont tous à des indices différents) donc une base, ce qui permet de conclure.

Exercice 34 : ✪✪ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ stabilisant tous les hyperplans. Montrer que u est une homothétie.

Correction : On va utiliser le résultat vu dans le chapitre 29 : si, pour tout x, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie (quand je dis que ce résultat est un classique !). Soit $x \in E$. Si $x = 0$ alors $u(x) = x$ donc x et $u(x)$ sont liés. Supposons $x \neq 0$. Alors $\mathrm{Vect}(x)$ est de dimension 1 donc (cf. cours) est l'intersection de $n-1$ hyperplans (rappelons que E est supposé de dimension n) qu'on note $H_1, \dots, H_{n-1}$, c'est-à-dire que $\mathrm{Vect}(x) = H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1}$. Dès lors, $x \in H_1$ et u stabilise H_1 donc $u(x) \in H_1$. De même, $u(x) \in H_2, \dots, u(x) \in H_{n-1}$ si bien que

$$u(x) \in H_1 \cap \cdots \cap H_{n-1} = \mathrm{Vect}(x)$$

si bien que $u(x)$ et x sont liés ce qui permet de conclure.

Exercice 35 : ✪✪ Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\dim \ker u^k \leq k \times \dim \ker u$ et $\mathrm{rg}(u^k) \geq k \times \mathrm{rg}(u) - n(k-1)$.

Correction : Montrons la première inégalité par récurrence sur $k \geq 1$.

- Si $k \geq 1$, notons H_k : « $\dim \ker(u^k) \leq k \times \dim \ker(u)$ ».
- H_1 est évidemment vraie.

- Soit $k \geq 1$. Supposons H_k vraie et montrons que H_{k+1} est vraie. Comme souvent quand il y a des compositions, intéressons-nous à une restriction. Plus précisément, appliquons le théorème du rang $u_{|\mathrm{Im}(u^k)}$ (et donc, l'espace de départ est $\mathrm{Im}(u^k)$) :
$$\dim \mathrm{Im}(u^k) = \dim \mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u^k)}) + \dim \ker(u_{|\mathrm{Im}(u^k)})$$
Or, d'après le cours (noyau et image d'une restriction) :
$$\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u^k)}) = \mathrm{Im}(u^{k+1}) \qquad \text{et} \qquad \ker(u_{|\mathrm{Im}(u^k)}) = \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k)$$
si bien que
$$\dim \mathrm{Im}(u^k) = \dim \mathrm{Im}(u^{k+1}) + \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k))$$
D'après le théorème du rang appliqué à u^{k+1} et à u^k :
$$\dim(E) - \dim \ker(u^k) = \dim(E) - \dim \ker(u^{k+1}) + \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k))$$
c'est-à-dire
$$\dim \ker(u^{k+1}) = \dim \ker(u^k) + \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k))$$
Or, par hypothèse de récurrence, $\dim \ker(u^k) \leq k \times \dim \ker(u)$. De plus, $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k) \subset \ker(u)$ donc, en particulier, $\dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^k)) \leq \dim(\ker(u))$ donc
$$\dim \ker(u^{k+1}) \leq (k+1) \dim \ker(u)$$
c'est-à-dire que H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout k.

La deuxième inégalité découle immédiatement de la première et du théorème du rang appliqué à u^k (on rappelle que E est de dimension n) :
$$n - \mathrm{rg}(u^k) \leq k \times (n - \mathrm{rg}(u))$$
et donc
$$\mathrm{rg}(u^k) \geq n - kn + k \times \mathrm{rg}(u) = k \times \mathrm{rg}(u) - n(k-1)$$

Exercice 36 : ✪✪

1. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker f = \mathrm{Im} f$ si et seulement si E est de dimension paire.
2. **Remake :** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle CNS sur $\dim(F)$ et $\dim(G)$ existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = F$ et $\ker(u) = G$?

Correction :

1. Si un tel endomorphisme f existe alors $\dim(E) = 2\dim(\ker(f))$ d'après le théorème du rang, donc E est de dimension paire.

   Réciproquement, supposons que E soit de dimension paire qu'on note $2n$. Soit $(e_1, \dots, e_{2n})$ une base de E. On cherche un endomorphisme dont l'image est égale au noyau. On veut en particulier qu'ils aient la même dimension, et puisque la somme des deux dimensions doit être égale à $2n$ (d'après le théorème du rang), on veut en particulier que le noyau et l'image soient de dimension n. On veut donc construire un endomorphisme dont le noyau est de dimension n. On va donc choisir un endomorphisme f vérifiant $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$. Puisqu'on veut que l'image soit égale au noyau, on veut que $e_1, \dots, e_n$ soient également dans l'image. En résumé, on se dit qu'une application linéaire f vérifiant $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$ et telle que $e_1, \dots, e_n$ soient des images par f va avoir des chances de convenir.

   Soit donc f l'unique endomorphisme de E tel que
$$f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(e_{n+1}) = e_1, f(e_{n+2}) = e_2, \dots, f(e_{2n}) = e_n$$
   (un tel endomorphisme existe et est unique car pour caractériser un endomorphisme, il suffit de se donner l'image d'une base). Alors $e_1, \dots, e_n$ forment une famille libre et appartiennent à la fois au noyau et à l'image, donc $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont de dimension au moins égale à n. Or, la somme de ces deux dimensions vaut $\dim(E) = 2n$ d'après le théorème du rang donc il y a égalité : $\dim \ker(f) = \dim \mathrm{Im}(f) = n$. Il en découle que $e_1, \dots, e_n$ est une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ (famille libre de cardinal égal à la dimension). En particulier, ces deux espaces sont égaux (à $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$).

2. Montrons qu'un tel endomorphisme existe si et seulement si $\dim(F)+\dim(G) = n(=\dim(E))$. Si un tel endomorphisme existe, alors $\dim(F)+\dim(G) = n$ d'après le théorème du rang. Réciproquement, supposons que $\dim(F)+\dim(G) = n$. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F, qu'on complète en base de E d'après le théorème de la base incomplète, ce qui donne une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $(f_1, \dots, f_{n-p})$ une base de G (à $n-p$ éléments car $\dim(G) = n - \dim(F) = n - \dim(p)$). Soit u l'unique endomorphisme vérifiant $u(e_1) = \cdots = u(e_p) = 0$ et $u(e_{p+1}) = f_1, \dots, u(e_n) = f_{n-p}$. Alors on prouve comme ci-dessus que $\ker(u) = F$ et $\operatorname{Im}(u) = G$.

Exercice 37 - Interpolation d'Hermite ✪✪ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts, et $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ et $P'(a_i) = c_i$. Illustrer par un dessin.

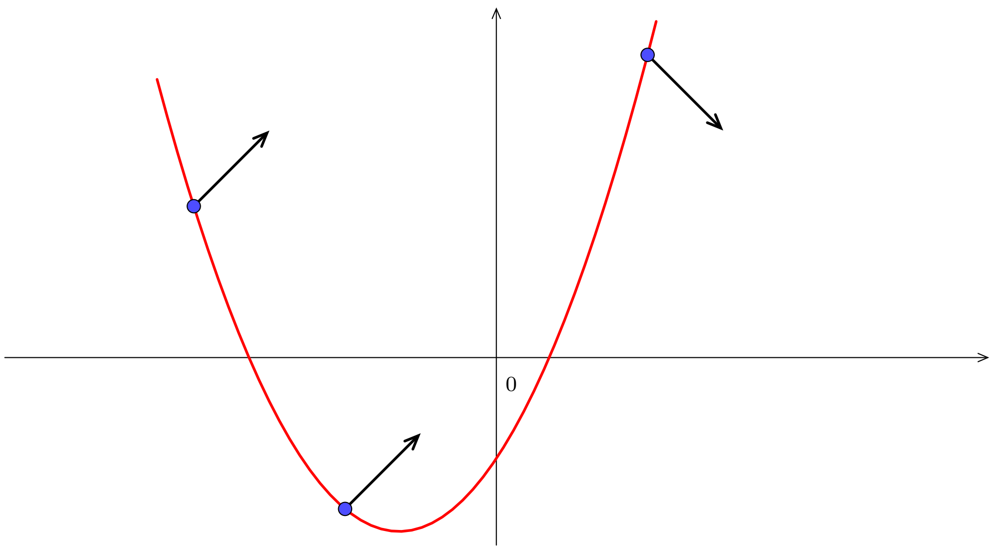
Correction : Cela ressemble aux polynômes d'interpolation de Lagrange, mais il y a plus de conditions à vérifier. On veut montrer qu'il existe un unique (ça sent la bijection) polynôme $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ vérifiant $2n$ conditions. On pense donc (comme dans l'exemple du cours avec les polynômes de Lagrange) à définir la fonction

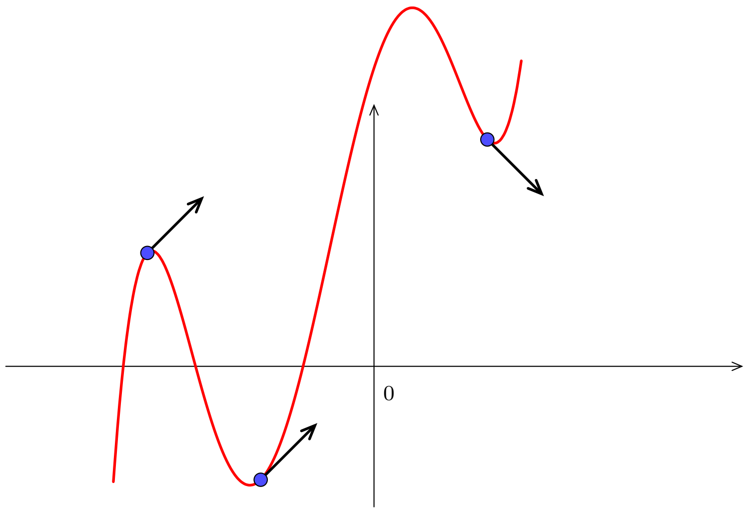
$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{K}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ P \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n), P'(a_1), \dots, P'(a_n)) \end{cases}$$

Il suffit de montrer que φ est bijective pour répondre à la question : tout élément de l'ensemble d'arrivée, qu'on note $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n)$, admet un unique antécédent, noté P, donc tel que $P(a_1) = b_1$ etc. φ est linéaire (exo, il faut utiliser la linéarité de la dérivation). Montrons que φ est injective. Soit $P \in \ker(\varphi)$. Alors

$$P(a_1) = \cdots = P(a_n) = P'(a_1) = \cdots = P'(a_n) = 0$$

En d'autres termes, $a_1, \dots, a_n$ sont racines au moins doubles de P, et comme les a_k sont distincts, P admet au moins $2n$ racines (comptées avec multiplicité). P étant de degré inférieur ou égal à $2n-1$, P est le polynôme nul, donc $\ker(\varphi) = \{0\}$. φ est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie ($\dim \mathbb{K}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{K}^{2n} = 2n$) donc est bijective. Interprétation géométrique : si on prend n points d'abscisses distinctes, il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$ passant par ces points et ayant une dérivée fixée en ces points : par exemple, si on cherche simplement un polynôme passant par les trois points ci-dessous alors, à l'aide du polynôme d'interpolation de Lagrange vu précédemment (avec 3 points, on peut aller jusqu'au degré 2), on obtient une jolie parabole mais dont la dérivée ne prend pas les bonnes valeurs. Cependant, en augmentant le degré (mais pas trop quand même : avec 3 points, on peut aller jusqu'au degré 5), on vient de montrer qu'il existe un unique polynôme qui convient. Le premier dessin représente le polynôme d'interpolation de Lagrange (qui ne convient pas) et le deuxième le polynôme d'interpolation de Hermite (qui convient).

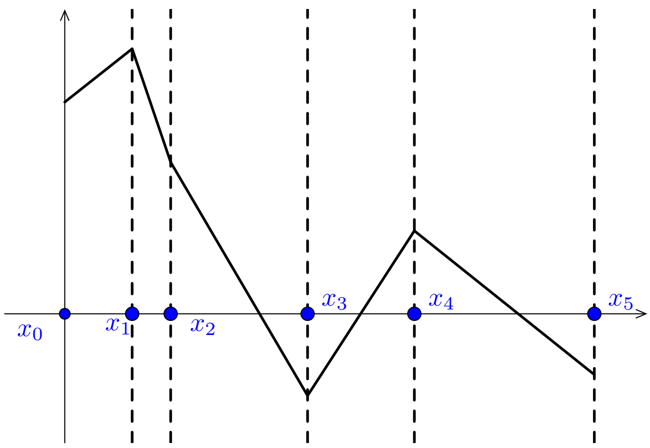




Il existe un moyen d'obtenir de façon explicite le polynôme d'interpolation de Hermite (on s'est contenté de prouver son existence et son unicité), mais ce n'est pas le sujet de cet exercice.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $\sigma : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision du segment $[\,0\,;1\,]$. On note E_σ l'ensemble des fonctions continues de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$ est affine. Montrer que E_σ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^{[\,0\,;1\,]}$ et calculer sa dimension. On pourra commencer par faire un dessin. Même question pour F_σ, l'ensemble des fonctions (pas forcément continues) de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ est affine.

Correction : La fonction nulle appartient à E_σ donc E_σ est non vide. Soient f et g appartenant à E_σ et soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. f et g sont continues sur $[\,0\,;1\,]$ donc $\lambda f + \mu g$ également. De plus, pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$, f et g sont affines sur $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$ donc $\lambda f + \mu g$ l'est également. En d'autres termes, $\lambda f + \mu g \in E_\sigma$. E_σ est stable par CL donc est un sev de $\mathbb{R}^{[\,0\,;1\,]}$ qui est un espace vectoriel de référence, et en particulier E_σ est un espace vectoriel. Devinons la dimension de E_σ. Commençons par faire un dessin d'un élément quelconque de E_σ (avec $n = 5$) :



Les éléments de E_σ étant continus et affines par morceaux, ils sont entièrement déterminés par leurs valeurs en $x_0, x_1, \dots, x_n$: en effet, si on connaît les valeurs en ces points, il suffit de « relier ces valeurs » avec « des morceaux affines ». Ainsi, on se dit que les éléments de E_σ ont $n+1$ degrés de liberté, donc que $\dim(E_\sigma) = n+1$. Montrons cela rigoureusement. Soit

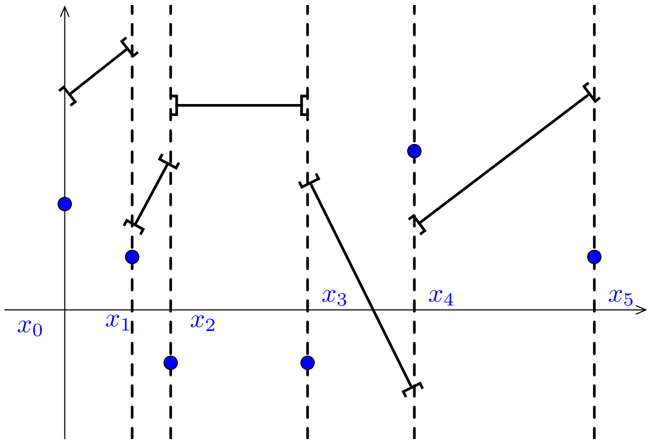
$$\varphi : \begin{cases} E_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ f \longmapsto (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{cases}$$

Montrons que φ est un isomorphisme. Tout d'abord, φ est évidemment linéaire. Montrons que φ est injective. Soit $f \in \ker(\varphi)$. Alors $f(x_0) = \cdots = f(x_n) = 0$. Puisque f est affine sur chaque intervalle $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$ et nulle en x_i et en x_{i+1}, alors f est nulle sur chaque intervalle $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$ donc f est la fonction nulle. Il en découle que $\ker(\varphi) = \{0\}$ donc que φ est injective. Montrons à présent que φ est surjective.

Attention, ici, on ne peut pas dire que φ est linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie donc est surjective, car on ne sait pas que l'espace de départ et l'espace d'arrivée ont la même dimension : c'est ce qu'on essaye de prouver ! Ici, on va prouver que φ est bijective, ce qui prouvera que les deux espaces ont la même dimension.

Soit $y=(y_0,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Soit f la fonction affine par morceaux vérifiant $f(x_0)=y_0,\dots,f(x_n)=y_n$. Alors $\varphi(f)=y$, c'est-à-dire que f est un antécédent de y. φ est donc surjective donc bijective : c'est un isomorphismes. Or, deux espaces vectoriels isomorphes ont la même dimension, donc $\dim(E_\sigma)=\dim\mathbb{R}^{n+1}=n+1$.

Pour F_σ, il suffit de voir qu'une fonction f est entièrement déterminée par les valeurs $f(x_0),\dots,f(x_n)$ et par les limites à droite en $x_0,\dots,x_{n-1}$, et les limites à gauche en $x_1,\dots,x_n$ (on ne peut faire l'économie de rien de tout ça puisque la fonction n'est pas continue).



Notons $f^-(a)$ la limite à gauche en a et f^+ la limite à droite en a. On prouve de même que

$$\varphi:\begin{cases} F_\sigma \longrightarrow \mathbb{R}^{3n+1} \\ f \longmapsto (f(x_0),f(x_1),\dots,f(x_n),f^+(x_0),\dots,f^+(x_{n-1}),f^-(x_1),\dots,f^-(x_{n-1})) \end{cases}$$

On prouve de même que φ est bijective donc $\dim(F_\sigma)=3n+1$.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $P=\displaystyle\sum_{k=0}^d a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$, on pose

$$P(A)=\sum_{k=0}^n a_kA^k$$

et on dit que $P(A)$ est un polynômes en A. On note enfin $K[A]$ l'ensemble $\{P(A)\,|\,P\in\mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un espace vectoriel.
2. À l'aide de l'application $M\mapsto AM$, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Correction :

1. Immédiat.
2. Soit $M\in\ker(f)$ où f est la fonction de l'énoncé (qui est évidemment linéaire). Alors $AM=0$ et en multipliant par A^{-1} à gauche, il vient $M=0$: $\ker(f)=\{0\}$, f est injective. Or, si $M\in\mathbb{K}[A]$, alors il existe $P\in\mathbb{K}[X]$ tel que $M=P(A)$ si bien que $f(M)=AP(A)$ donc appartient encore à $\mathbb{K}[A]$ (c'est $Q(A)$ avec $Q=XP$). Enfin, $\mathbb{K}[A]$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui est de dimension finie donc est lui-même de dimension finie. f est donc injective entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective et en particulier surjective. Or, $I_n=P(A)$ avec P le polynôme constant égal à 1 donc $I_n\in\mathbb{K}[A]$: f étant surjective, il existe $M\in\mathbb{K}[A]$ tel que $f(M)=I_n$ donc $M=A^{-1}$ si bien que $A^{-1}\in\mathbb{K}[A]$.

Exercice 40 - Une infinité de supplémentaires : ✪✪ On suppose $n\geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E différent de E et de $\{0\}$.

1. Soit G un supplémentaire de F de base $(e_1,\dots,e_p)$. Montrer que pour tout $a\in F$, la famille $(a+e_1,\dots,a+e_p)$ est une famille libre. On appelle G_a l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2. Montrer que G_a est un supplémentaire de F.
3. Soient $a\neq b$ deux éléments de F. Montrer que $a+e_1\notin G_b$. Montrer cependant que si $p\geq 2$, alors $G_a\cap G_b\neq\{0\}$.
4. En déduire que F admet une infinité de supplémentaires. Illustrer par un dessin.

Correction :

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\lambda_1(a+e_1)+\cdots+\lambda_p(a+e_p)=0$. Regroupons d'un côté les éléments de F et, de l'autre, ceux de G :

$$(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)a = -\lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_p e_p$$

Or, $(\lambda_1+\cdots+\lambda_p)a \in F$ et $-\lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_p e_p \in G$ (car F et G sont des sev de E donc sont stables par CL). Il en découle que l'élément ci-dessus appartient à $F \cap G = \{0\}$ car F et G sont supplémentaires. Dès lors,

$$-\lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_p e_p = 0$$

et comme $e_1, \dots, e_p$ est une famille libre (c'est une base de G), les λ_i sont tous nuls, ce qui est le résultat voulu.

2. La famille $(a+e_1, \dots, a+e_p)$ est libre d'après la question précédente, et est par définition une famille génératrice de G_a. Ainsi, c'est une base de G_a : G_a est donc de dimension p. Or, G est de dimension p (car admet une base à p éléments) et est un supplémentaire de F donc $\dim(F) = n-p$. Il en découle que $\dim(G_a)+\dim(F) = n = \dim(E)$. Ainsi, pour montrer que G_a est un supplémentaire de F, il suffit de montrer que $G_a \cap F = \{0\}$. Soit $x \in G_a \cap F$. Puisque $x \in G_a = \text{Vect}(a+e_1, \cdots, a+e_p)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $x = \lambda_1(a+e_1)+\cdots+\lambda_p(a+e_p)$. De même que précédemment, puisque $x \in F$, il en découle que

$$x - (\lambda_1+\cdots+\lambda_p)a = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \in F \cap G = \{0\}$$

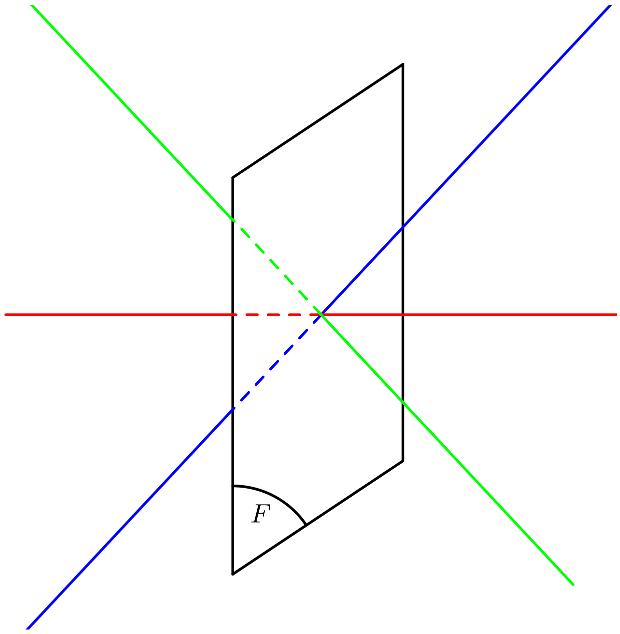
Toujours par liberté des e_k, il en découle que tous les λ_k sont nuls donc $x=0$. Finalement, on a $F \cap G_a = \{0\}$ et $\dim(F)+\dim(G_A) = \dim(E)$ donc G_a est bien un supplémentaire de F.

3. Supposons que $a+e_1 \in G_b = \text{Vect}(b+e_1, \cdots, b+e_p)$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que $a+e_1 = \lambda_1(b+e_1)+\cdots+\lambda_p(b+e_p)$. De même que précédemment, puisque a et b appartiennent à F, il en découle que

$$a - (\lambda_1+\cdots+\lambda_p)b = (\lambda_1-1)e_1 + \lambda_2 e_2 \cdots + \lambda_p e_p \in F \cap G = \{0\}$$

Les e_k étant libres, $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, c'est-à-dire que $a+e_1 = b+e_1$ donc $a=b$ ce qui est absurde : $a+e_1 \notin G_b$. Cependant, si $p \geq 2$ alors $e_1 - e_2 = a+e_1-(a+e_2) \in G_a$ et $e_1+e_2 = b+e-1-(b+e_2) \in G_b$ donc $e_1+e_2 \in G_a \cap G_b$. Finalement, $e_1+e_2 \neq 0$ car e_1 et e_2 sont libres donc $G_a \cap G_b \neq \{0\}$.

4. D'après la question précédente, $a+e_1 \in G_a \backslash G_b$, et en particulier $G_a \neq G_b$. À chaque élément a de F correspond un supplémentaire G_a différent. Or, F est un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0\}$ donc est infini : F admet une infinité d'éléments donc une infinité de supplémentaires.



Exercice 41 - Composition d'endomorphismes nilpotents : ✪✪

1. Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, montrer que $\text{Im}\, u$ et $\ker u$ sont stables par v.
2. Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Montrer que $\text{rg}(u_2 \circ u_1) \leq n-2$.
3. Soient $u_1, \dots, u_n$ n endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Remarque : Si u est un endomorphisme nilpotent, en appliquant la dernière question à $u_1 = \cdots = u_n = u$, on vient donc de redémontrer le fait (cf. cours) que $u^n = 0$, c'est-à-dire que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension de l'espace.

Correction :

1. C'est l'exercice 7 du chapitre précédent.
2. On veut faire comme dans le cours et l'exercice 35 : quand on a une composition, on pense à s'intéresser à une restriction. Notons v la restriction de u_1 à $\mathrm{Im}(u_2)$:
$$v\colon \begin{cases} \mathrm{Im}(u_2) \longrightarrow E \\ \quad x \quad \longmapsto u_1(x) \end{cases}$$
Or, d'après la question précédente, $\mathrm{Im}(u_2)$ est stable par u_1 donc v est à valeurs dans $\mathrm{Im}(u_2)$: on peut réécrire
$$v\colon \begin{cases} \mathrm{Im}(u_2) \longrightarrow \mathrm{Im}(u_2) \\ \quad x \quad \longmapsto \quad u_1(x) \end{cases}$$
En d'autres termes, v est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(u_2)$: on peut donc calculer ses puissances. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathrm{Im}(u_2), v^k(x) = {u_1}^k(x)$. Puisque u_1 est nilpotent, il existe k tel que ${u_1}^k = 0$ donc tel que $v^k = 0$: v est un endomorphisme nilpotent. Par conséquent, il n'est pas injectif car une composée d'injections est injective, et $v^k = 0$ n'est pas injective, donc v ne l'est pas. Ainsi, la dimension de son noyau est supérieure ou égale à 1 donc, d'après le théorème du rang, v a un rang inférieur ou égal à la dimension de l'espace de départ moins 1, c'est-à-dire que $\mathrm{rg}(v) \leq \dim \mathrm{Im}(u_2) - 1 = \mathrm{rg}(u_2) - 1$. Or, d'après le cours, $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2)$ donc $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(u_1 \circ u_2)$, donc
$$\mathrm{rg}(u_1 \circ u_2) \leq \mathrm{rg}(u_2) - 1 \leq n - 2$$
car on a $\mathrm{rg}(u_2) \leq n - 1$ (même raisonnement que ci-dessus : un endomorphisme nilpotent a un rang inférieur ou égal à la dimension de l'espace -1).
3. montrer de même que ci-dessus par récurrence (finie !) que, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!], \mathrm{rg}(u_1 \circ \cdots \circ u_k) \leq n - k$, ce qui permet de conclure en prenant $k = n$.

Exercice 42 - Familles positivement génératrices : ✪✪ Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est dite positivement génératrice si
$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^p \qquad x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i$$

1. Montrer que pour $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ on a équivalence entre
   (a) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est positivement génératrice.
   (b) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est génératrice et il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ tels que
$$\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i = 0$$
2. Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est positivement génératrice alors $p \geq n+1$. Existe-t-il une famille positivement génératrice de cardinal $n+1$?
3. On se donne une famille positivement génératrice $(e_1, \dots, e_p)$ avec $p \geq 2n+1$.
   (a) Montrer qu'il existe $I \subset [\![1\,;\, p]\!]$ tel que $(e_i)_{i \in I}$ soit une base de E.
   (b) On pose $J = [\![1\,;\, p]\!] \backslash I$. Montrer que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille liée.

Correction :

1. Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ soit positivement génératrice. Alors, en particulier, elle est génératrice et, en appliquant la définition d'une famille positivement génératrice avec $x = 0$, on a la deuxième condition.

   Réciproquement, supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ soit génératrice et qu'il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ strictement positifs tels que $0 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$, et montrons que $(e_1, \dots, e_p)$ est positivement génératrice. Soit donc $x \in E$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice donc il existe $(\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que
$$x = \sum_{i=1}^p \beta_i e_i$$

Le problème est que les β_i ne sont pas forcément strictement positifs : on cherche à utiliser la deuxième condition. Par hypothèse,

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i$$

En sommant ces deux égalités, il vient :

$$x = \sum_{i=1}^{p} (\beta_i + \alpha_i) e_i$$

On ajoute des nombres strictement positifs aux β_i, c'est déjà mieux, mais cela ne suffit pas forcément (par exemple, si les β_i valent -1000 et les α_i valent 1). L'idée est de multiplier l'égalité $0 = \cdots$ par un réel suffisamment grand pour que l'égalité ci-dessus ne fasse intervenir que des coefficients strictement positifs. Plus précisément, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda.0 = 0 = \sum_{i=1}^{p} (\lambda \times \alpha_i) e_i$$

En sommant cette égalité avec la première égalité $x = \cdots$, il vient :

$$x = \sum_{i=1}^{p} (\beta_i + \lambda \times \alpha_i) e_i$$

Il suffit de choisir λ tel que $\beta_i + \lambda\alpha_i > 0$ donc tel que $\lambda > -\beta_i/\alpha_i$ (les α_i sont strictement positifs donc on ne change pas le sens des inégalités). Soit donc $\lambda > \max(-\beta_i/\alpha_i)$ (le max existe car il y a un nombre fini de réels). On a

$$x = \sum_{i=1}^{p} (\beta_i + \lambda \times \alpha_i) e_i$$

et, par choix de λ, les coefficients sont strictement positifs, donc la famille est bien positivement génératrice

2. Rappelons que E est de dimension n. Supposons que $(e_1, \dots, e_p)$ soit positivement génératrice. D'après la question précédente, $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice donc $p \geq n$. Si $p = n$ alors c'est une base, donc une famille libre, ce qui est absurde car, d'après la question précédente, il existe une combinaison linéaire non triviale qui annule les e_i. Donc $p \geq n+1$. Donnons à présent une famille génératrice de cardinal $n+1$. Commençons par nous donner une base de E (qui est de dimension n) notée $(e_1, \dots, e_n)$. Ainsi, la première condition du 1.(b) est vérifiée. Trouvons un vecteur e_{n+1} pour que la seconde soit vérifiée. Il suffit de prendre $e_{n+1} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e_k$. Dès lors, $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ est génératrice (car si on ajoute un vecteur à une famille génératrice, alors elle reste génératrice) et $e_1 + \cdots + e_{n+1} = 0$: les deux conditions de la question 1.(b) sont vérifiées, donc $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est positivement génératrice, il existe donc une famille positivement génératrice de cardinal $n+1$.
3. (a) Une famille positivement génératrice est génératrice donc le résultat découle du théorème de la base extraite.
   (b) $p \geq 2n+1$ et E est de dimension n donc I est de cardinal n (rappelons que la dimension est le cardinal commun de toutes les bases). Par conséquent $\text{card}(J) = p - n \geq n+1$ et donc $(e_j)_{j \in J}$ est liée car une famille contenant au moins $n+1$ éléments en dimension n est liée.

Exercice 43 : ✪✪ Soit $\omega > 0$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \lambda \cos(\omega x)$ (on fera attention au cas $\omega = 1$).
2. Prouver que l'ensemble des fonctions $f \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $f'' + f = f(0)\cos(\omega x)$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Correction : On se place dans tout l'exercice sur $\mathbb{R}$.

1. On a tout d'abord

$$S_H = \{x \mapsto \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$$

On cherche une solution particulière. Comme dans le chapitre 11, on a un cosinus donc on cherche une solution particulière de l'équation « complexifiée » $(E_c) : y'' + y = \lambda e^{i\omega x}$. On cherche une solution particulière de la forme $y_0 : x \mapsto Q(x) e^{i\omega x}$. Le degré de Q dépendra de si $i\omega$ est racine (simple ou double) de l'équation particulière de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. Or, les solutions de cette équation sont $\pm i$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$: ainsi, $i\omega$ est racine de cette équation si et seulement si $\omega = 1$. Séparons donc les cas selon que $\omega = 1$ ou non.

Supposons donc $\omega \neq 1$. Alors $i\omega$ n'est pas racine de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière de (E_c) sous la forme $x \mapsto Ae^{i\omega x}$. Soient donc $A \in \mathbb{C}$ et $y_0 : x \mapsto Ae^{i\omega x}$. Alors y_0 est dérivable deux fois et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$y_0''(x) + y_0(x) = (1-\omega^2)Ae^{i\omega x}$$

donc y_0 est solution particulière si et seulement si $A = \dfrac{\lambda}{1-\omega^2}$. On en déduit qu'une solution particulière de l'équation originelle est $\mathrm{Re}(y_0)$ à savoir $x \mapsto \dfrac{\lambda\cos(\omega x)}{1-\omega^2}$ et donc

$$S_E = \left\{ x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \frac{\lambda\cos(\omega x)}{1-\omega^2} \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Supposons à présent que $\omega = 1$. Alors $i\omega = i$ est racine simple de l'équation caractéristique donc on cherche une solution particulière sous la forme $y_0 : x \mapsto (Ax+B)e^{ix}$. Soit donc $(A,B) \in \mathbb{C}^2$ et soit $y_0 : x \mapsto (Ax+B)e^{ix}$. Alors y_0 est dérivable deux fois. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$y_0'(x) = (iAx + (A+iB))e^{ix} \qquad \text{et} \qquad y_0''(x) = (-Ax + i(A+iB) + iA)e^{ix}$$

si bien que

$$y_0''(x) + y_0(x) = 2iAe^{ix}$$

Par conséquent, y_0 est solution particulière si et seulement si $2iA = \lambda$ si et seulement si $A = -\lambda_i/2$ (rappelons que $1/i = -i$). Par conséquent, une solution particulière de (E_c) est :

$$y_0 : x \mapsto \frac{-\lambda ix}{2}(\cos(x) + i\sin(x))$$

si bien qu'une solution particulière de l'équation originelle est $\mathrm{Re}(y_0) : x \mapsto \dfrac{\lambda x\sin(x)}{2}$. En conclusion, si $\omega = 1$:

$$S_E = \left\{ x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \frac{\lambda x\sin(x)}{2} \mid (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

2. On démontre que c'est un espace vectoriel de la même façon que dans le chapitre 28 (contient la fonction nulle et stable par CL). On ne peut pas appliquer directement la question précédente avec $\lambda = f(0)$ car la constante devant $\cos(\omega x)$ dépend de f, alors que dans la question précédente, c'était la même pour toutes les fonctions. De plus, on ne peut pas définir une fonction f de la façon suivante :

$$f : x \mapsto \cdots + f(0) \times \cdots$$

car la définition de f ne peut pas dépendre de $f(0)$ sinon la définition de f fait appel à f, il y a un problème de logique. Cependant, si on fixe f, alors on fixe $f(0)$ et donc on se ramène à une équation du type précédent. On va travailler par analyse synthèse. Supposons que $\omega \neq 1$ dans un premier temps.

Analyse : si f est solution, posons $\lambda = f(0)$. Alors f est solution de $y'' + y = \lambda\cos(\omega x)$. Il existe alors (α,β) tels que

$$f : x \mapsto \alpha\cos(x) + \beta\sin(x) + \frac{\lambda\cos(\omega x)}{1-\omega^2}$$

Or $f(0) = \lambda$ si bien que $\alpha + \dfrac{\lambda}{1-\omega^2} = \lambda$ et donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda\left(1 - \frac{1}{1-\omega^2}\right) \\ &= \frac{-\lambda\omega^2}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

si bien que

$$f : x \mapsto \frac{\lambda}{1-\omega^2}(-\omega^2\cos(x) + \cos(\omega x)) + \beta\sin(x) \in \mathrm{Vect}(x \mapsto -\omega^2\cos(x) + \cos(\omega x), x \mapsto \sin(x))$$

Synthèse : soit $f \in \mathrm{Vect}(x \mapsto -\omega^2\cos(x) + \cos(\omega x), x \mapsto \sin(x))$. Alors il existe α, β tels que

$$f : x \mapsto \alpha(-\omega^2\cos(x) + \cos(\omega x)) + \beta\sin(x)$$

On sait que cos et sin vérifient $y'' + y = 0$ si bien que « seul compte le terme en $\cos(\omega x)$ » : pour tout x, $f''(x) + f(x) = (-\alpha\omega^2 + 1)\cos(\omega x)$ et on a précisément $-\alpha\omega^2 + 1 = f(0)$ si bien que f est bien solution de l'équation. En conclusion,

$$S_E = \text{Vect}(x \mapsto -\omega^2\cos(x) + \cos(\omega x), x \mapsto \sin(x))$$

donc est de dimension 2.

Le cas $\omega = 1$ est analogue : on trouve que

$$S_E = \text{Vect}\left(x \mapsto \cos(x) + \frac{x\sin(x)}{2}, x \mapsto \sin(x)\right)$$

donc est encore de dimension 2.

Exercice 44 : ✪✪ On suppose que E est de dimension n et que F est de dimension p, avec $n > p$. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \text{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de rang p. Que vaut $\ker(v \circ u)$?

Correction : On montre de même que dans l'exercice 30 du chapitre 29 que $v \circ u$ est un projecteur et que $\ker(v \circ u) = \ker(u)$ et $\text{Im}(v \circ u) = \text{Im}(v)$. Or, $u \circ v = \text{Id}_F$ donc v est injective (si $x \in \ker(v)$ alors $v(x) = 0$ donc $u \circ v(x) = x = 0$, et plus généralement, si $g \circ f$ est injective, alors f est injective, même quand les applications ne sont pas linéaires, cf. chapitre 3). D'après le théorème du rang, $\text{rg}(v) = \dim(F) = p = \text{rg}(v \circ u)$.

Exercice 45 - Générateur automatique d'exercices : ✪✪ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 11/2, u_1 = 61/11$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n u_{n+1}}$$

1. Donner u_2, u_3, u_4 sous forme irréductible (bon, là, d'accord, une calculatrice peut être utile). Que remarque-t-on au niveau des numérateurs et des dénominateurs ?
2. Démontrer ce résultat. Pour cela, on écrira pour commencer une récurrence à trous de la forme :

> Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 2, d_1 = 11$ et ... Montrons le résultat suivant par récurrence :
>
> $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad H_n : \text{« } u_n = \frac{d_{n+1}}{d_n} \text{ »}$$

   et on remplira les trous au fur et à mesure du calcul.
3. Exprimer d_n en fonction de n (allez je vous aide : 100 est racine « évidente »). On prouvera le résultat utilisé concernant les suites récurrentes d'ordre 3.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. Mais comment ai-je fait pour construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblant si compliquée, mais pouvant en fait s'écrire de façon si simple ?
   (a) Donner un polynôme de degré 3 admettant $3, 11$ et 2024 pour racines.
   (b) En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 3 vérifiée par la suite (d_n) définie par
   $$d_n = 1 \times 3^n + 1 \times 11^n + 0 \times 2024^n$$
   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = d_{n+1}/d_n$. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 7, u_1 = 65/7$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 2038 - \frac{28369}{u_{n+1}} + \frac{66792}{u_n u_{n+1}}$$
   (e) Ça vous a plu ? Alors essayez d'inventer un autre exercice pour mes élèves de l'an prochain (parce que j'aime en faire le moins possible).

Correction :

1. Votre calculatrice donne

$$u_2 = \frac{341}{61} \quad u_3 = \frac{1921}{341} \quad u_4 = \frac{10901}{1921}$$

c'est-à-dire que le dénominateur de u_{n+1} semble être le numérateur de u_n.

2. Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 2, d_1 = 11$ et par la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+3} = 111d_{n+2} - 1130d_{n+1} + 3000d_n$$

   - Si $n \geq 0$, soit l'hypothèse de récurrence H_n : « $u_n = \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$ ».
   - H_0, H_1, H_2, H_3 et H_4 sont vraies par la question précédente.
   - Soit n quelconque supérieur ou égal à 3. Supposons que H_p soit vraie pour tout $p \leq n+1$ et montrons que H_{n+2} est vraie. Par construction de la suite (u_n)

$$u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n u_{n+1}}$$

     Par hypothèse de récurrence, et en mettant au même dénominateur

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 111 - \frac{1130d_{n+1}}{d_{n+2}} + \frac{3000d_n}{d_{n+2}} \\ &= \frac{111d_{n+2} - 1130d_{n+1} + 3000d_n}{d_{n+2}} \\ &= \frac{d_{n+3}}{d_{n+2}} \end{aligned}$$

     c'est-à-dire que H_{n+2} est vraie.
   - D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n, c'est-à-dire que : $\forall n \geq 0, u_n = \dfrac{d_{n+1}}{d_n}$.

   Remarque : on voit encore une fois l'importance du travail au brouillon.

3. Cherchons les racines de l'équation

$$r^3 = 111r^2 - 1130r + 3000$$

D'après l'énoncé, 100 est solution de cette équation. Il nous reste à trouver r_1 et r_2 tels que

$$r^3 - 111r^2 + 1130r - 3000 = (r - 100)(r - r_1)(r - r_2)$$

En développant, on trouve $r_1 = 5$ et $r_2 = 6$ (ou le contraire bien sûr). D'après le théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 (démontré ci-dessous), il existe λ, μ et ν uniques tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n = \lambda \times 5^n + \mu \times 6^n + \nu \times 100^n$$

On trouve ces constantes en regardant d_0, d_1 et d_2, c'est-à-dire en résolvant le système 3×3

$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 2 \\ 5\lambda + 6\mu + 100\nu = 11 \\ 25\lambda + 36\mu + 10000\nu = 61 \end{cases}$$

On peut soit résoudre le système à la main (c'est long...) soit chercher une solution évidente. Puisque les constantes sont relativement petites comparées aux puissances de 100, on peut se dire que ν doit être nul. BIEN SÛR, CECI N'A AUCUNE VALEUR DE DEMONSTRATION ! On se demande juste s'il n'y aurait pas une solution avec $\nu = 0$: on doit donc résoudre $\lambda + \mu = 2$ et $5\lambda + 6\mu = 11$ ce qui est beaucoup plus digeste et donne $\lambda = \mu = 1$. Il se trouve que ces deux valeurs de λ et μ vérifient aussi $25\lambda + 36\mu = 61$ donc le triplet $\lambda = \mu = 1$ et $\nu = 0$ est solution, et c'est la seule puisque la solution est unique. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n = 5^n + 6^n$$

Le théorème pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 3 se démontre de la même façon que pour celles d'ordre 2 : les suites vérifiant la relation de récurrence ci-dessus forment un espace vectoriel de dimension 3 (on le montre de même en exhibant un isomorphisme entre cet ensemble et $\mathbb{R}^3$) et, de même, une suite géométrique non nulle de raison q est dans cet espace si et seulement si q est solution de l'équation caractéristique. Enfin, lorsqu'il y a trois racines simples, les trois suites associées forment une famille libre donc une base, ce qui permet de conclure.

4. D'après les deux questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{5^{n+1} + 6^{n+1}}{5^n + 6^n} = \frac{6^{n+1} \times \left(1 + (5/6)^{n+1}\right)}{6^n \times (1 + (5/6)^n)} = \frac{6 \times \left(1 + (5/6)^{n+1}\right)}{(1 + (5/6)^n)}$$

Or, les deux suites géométriques ci-dessus ont une raison strictement inférieure à 1 donc tendent vers 0, c'est-à-dire que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 6$.

5. (a) Il suffit de remarquer que $3, 11$ et 2024 sont racines du polynôme $P = (X-3)(X-11)(X-2024)$. En développant, il vient que $3, 11$ et 2024 sont racines du polynôme $X^3 - 2038X^2 + 28369X - 66792$.

(b) Toujours d'après le théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 3, la suite (d_n) vérifie la relation de récurrence $d_{n+3} = 2038 d_{n+2} - 28369 d_{n+1} + 66792 d_n$.

(c) De même que dans la partie précédente, en mettant 11^{n+1} et 11^n en facteur respectivement au numérateur et au dénominateur, et en se souvenant qu'une suite géométrique de raison strictement inférieure à 1 converge vers 0, on obtient : $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 11$.

(d) Les premiers termes conviennent, montrons que la relation de récurrence convient également. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 5.(b) on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{d_{n+3}}{d_{n+2}} \\
&= \frac{2038 d_{n+2} - 28369 d_{n+1} + 66792 d_n}{d_{n+2}} \\
&= 2038 - 28369 \times \frac{d_{n+1}}{d_{n+2}} + 66792 \times \frac{d_n}{d_{n+1}} \times \frac{d_{n+1}}{d_{n+2}} \\
&= 2038 - \frac{28369}{u_{n+1}} + \frac{66792}{u_n u_{n+1}}
\end{aligned}$$

(e) Bien sûr ici il n'y a pas unicité de la réponse. Je propose les trois entiers $5, 20$ et 101, avec toujours 1 en face des deux plus petits, et 0 en face du plus grand. On obtient la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 25/2, u_1 = 17$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = 126 - \frac{2625}{u_{n+1}} + \frac{10100}{u_n u_{n+1}}$$

et cette magnifique suite converge vers 20.

Exercice 46 - Racine carrée de la dérivation : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et soit D l'opérateur de dérivation. Le but de cet exercice est de montrer que D n'a pas de racine carrée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'endomorphisme $T \in \mathscr{L}(E)$ tel que $D = T \circ T$.

1. Donner la dimension de $K = \ker(D^2)$.
2. Montrer que K est stable par D et par T.
3. Montrer que t, la restriction de T à K, est nilpotente.
4. Conclure à une absurdité.

Correction :

1. $f \in \ker(D^2) \iff f'' = 0$. Par conséquent, $\ker(D^2)$ est l'ensemble des fonctions affines donc de dimension 2 (car $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$ en forment une base).
2. La dérivée d'une fonction affine est affine donc K est stable par D. Or, D et T commutent car $DT = T^3 = TD$ puisque $D = T^2$ donc on montre comme d'habitude (cf. exercice 7 du chapitre précédent) que $\ker(D^2)$ est stable par T.
3. Puisque K est stable par T, alors t va bien de K dans K i.e. t est un endomorphisme de K donc on peut bien définir les puissances de t. Il suffit de voir que $D^2 = 0$ sur K donc $t^4 = 0$: t est nilpotente.
4. Or, on sait que sur un ensemble de dimension n, un endomorphisme u nilpotent vérifie $u^n = 0$ et K est de dimension 2 donc $t^2 = D = 0$ ce qui est absurde puisque D n'est pas l'application nulle sur K car la dérivée de $x \mapsto x$ est non nulle.

Exercice 47 - Représentation des formes linéaires : ✪✪✪

1. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$$

2. **Remake :** Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(2024) = \sum_{k=0}^{n} P(k)A(k)$$

Correction : L'idée est toujours la même : exhiber un isomorphisme φ entre E et $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ qui sont de même dimension finie (évidemment si E est de dimension finie), l'élément dont on demande de montrer l'existence et l'unicité étant l'antécédent d'une forme linéaire donnée. Précisons qu'une telle fonction φ doit renvoyer un élément de $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ c'est-à-dire une fonction (plus précisément une forme linéaire) et pas un réel. Par exemple, dans la première question, il ne faut pas renvoyer $\displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$ mais $P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & \varphi(A)\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \end{cases}$$

Tout d'abord, pour tout A, la fonction

$$\varphi(A)\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est bien une forme linéaire par linéarité de l'intégrale : il en découle que φ va bien de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$.

Montrons que φ est linéaire (même si je pense qu'on pourrait se contenter de dire « par linéarité de l'intégrale »). Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ et λ et μ deux réels. On veut montrer que $\varphi(\lambda A + \mu B) = \lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$: c'est une égalité entre fonctions, il faut donc montrer qu'elles coïncident en tout polynôme P. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda A + \mu B)(P) &= \int_0^1 (\lambda A(t) + \mu B(t))P(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda\int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_0^1 B(t)P(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \lambda\varphi(A)(P) + \mu\varphi(B)(P) \\ &= (\lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B))(P) \end{aligned}$$

Les deux fonctions $\varphi(\lambda A + \mu B)$ et $\lambda\varphi(A) + \mu\varphi(B)$ coïncident en tout P donc sont égales, d'où l'égalité voulue, ce qui prouve la linéarité de φ.

Montrons que φ est injective. Soit donc $A \in \ker(\varphi)$, c'est-à-dire que $\varphi(A)$ est la fonction nulle :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \int_0^1 A(t)P(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

C'est en particulier vrai pour $P = A$:

$$\int_0^1 A(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

On a l'intégrale d'une fonction continue (c'est une fonction polynôme) positive (c'est un carré réel) qui est nulle donc la fonction intégrée est nulle : de ce fait, A est nulle sur $[\,0\,;1\,]$, donc A admet une infinité de racines donc est le polynôme nul, si bien que φ est injective. φ est une application linéaire injective entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective. En particulier, l'application

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{cases}$$

admet un unique antécédent, c'est-à-dire qu'il existe un unique A tel que $\varphi(A) = g$, c'est-à-dire tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X], \varphi(A)(P) = g(P)$, ce qui est le résultat voulu.

2. Le raisonnement est exactement le même : on définit

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & \varphi(A)\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)A(k) \end{cases} \end{cases}$$

Par linéarité de la somme, pour tout A, la fonction

$$\varphi(A)\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)A(k) \end{cases}$$

est bien linéaire, donc φ est bien à valeurs dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$. Par linéarité de la somme, φ est également linéaire. Enfin, φ est injective (exo : utiliser le fait qu'un polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui admet au moins $n+1$ racines distinctes est nul) linéaire entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective. Il en découle que

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P'(2024) \end{cases}$$

admet un unique antécédent par φ (c'est bien une forme linéaire), c'est-à-dire qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(A) = g$ c'est-à-dire tel que, pour tout $P, \varphi(A)(P) = g(P)$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 48 - Théorème de multiplicativité des degrés : ✪✪✪ Soient K, L, V trois corps tels que $\mathbb{K} \subset L \subset V$. On rappelle (cf. chapitre 28) que L est muni d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel, que V est muni d'une structure de L espace vectoriel ainsi que d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On suppose que $\dim_{\mathbb{K}}(L) = p$ et $\dim_L(V) = q$. Montrer que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = p \times q$.

Correction : Soient $B_L = (e_1, \dots, e_p)$ une base de L vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à p éléments puisque L est de dimension p comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel) et $B_V = (f_1, \dots, f_q)$ vu comme L-espace vectoriel (idem). Rappelons qu'on se trouve sur des corps : on peut donc définir des produits d'éléments (ce qu'on ne peut pas faire sur des espaces vectoriels quelconques). Il suffit de prouver que $(e_i f_j)_{1 \le i \le p, 1 \le j \le q}$ est une base de V vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel : on aura une base à $p \times q$ éléments, ce qui permettra de conclure.

Montrons que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \le i \le p, 1 \le j \le q} \in \mathbb{K}^{p \times q}$ (on prend des scalaires dans $\mathbb{K}$ puisqu'on s'intéresse à V vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel) telle que

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \lambda_{i,j} e_i f_j = 0$$

Dès lors :

$$\sum_{j=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} e_i \right) f_j = 0$$

Or, la famille $(f_1, \dots, f_q)$ est libre donc, pour tout j :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,j} e_i = 0$$

La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre, pour tout i, on a également $\lambda_{i,j} = 0$ si bien que pour tous i et j, $\lambda_{i,j} = 0$: la famille est libre.

Montrons que la famille est génératrice. Soit $x \in V$. La famille $(f_1, \dots, f_q)$ étant génératrice (sur V vu comme un L-espace vectoriel), il existe une famille d'éléments de L notée $(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in L^q$ telle que

$$x = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j f_j$$

Soit $j \in [\![1\,;\,q]\!]$. $\lambda_j \in L$ et $(e_1, \dots, e_p)$ est génératrice de L donc il existe une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ notée $(\alpha_{i,j})_{1\leq i\leq p}$ telle que

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} e_i$$

si bien que

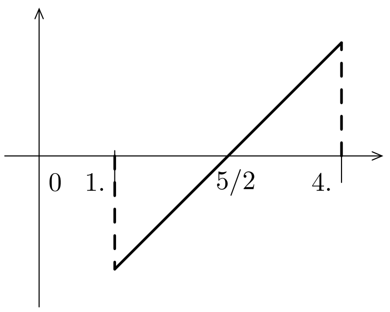
$$x = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} e_i f_j$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 49 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On pose $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \;\middle|\; \int_1^4 P(x)\,\mathrm{d}x\; = 0 \right\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel, donner sa dimension et en donner une base.

Correction : Tout d'abord, H est un hyperplan de $\mathbb{R}_{2n}[X]$ car est le noyau de la forme linéaire non nulle $P \mapsto \displaystyle\int_1^4 P(x)\,\mathrm{d}x$ (c'est une forme linéaire par linéarité de l'intégrale, et pour montrer qu'elle est non nulle, il suffit de prendre $P = X$ par exemple, ou P constant égal à 1). Par conséquent, c'est un espace vectoriel et $\dim(H) = \dim(\mathbb{R}_{2n}[X]) - 1 = 2n$. Donnons à présent une base de H.

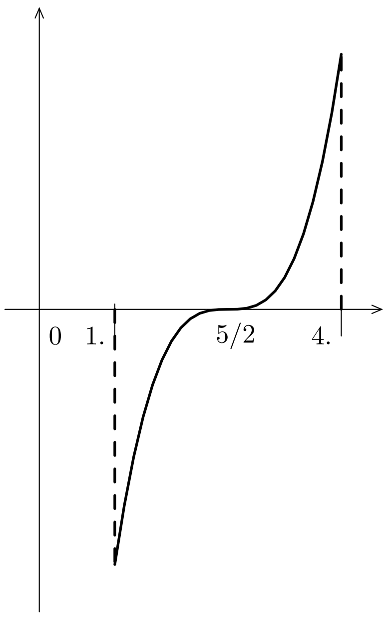
Rien d'évident ne nous vient à l'esprit. Cherchons déjà un élément (non nul) de H, pour nous donner une idée. Aucun polynôme constant non nul ne convient. Cherchons donc un polynôme de degré 1 dans H. On se rappelle que l'interprétation géométrique de l'intégrale est « l'aire sous la courbe ». Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 P(x)\,\mathrm{d}x\; = 0$ quand « les parties positive et négative se compensent ». On pense donc à une fonction affine s'annulant au milieu de $[\,1\,;4\,]$, c'est-à-dire en $5/2$:



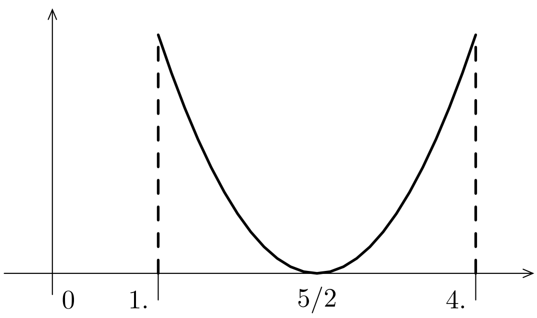
On pense donc à $P_1 = X - \dfrac{5}{2}$. Vérifions que $P_1 \in H$:

$$\begin{aligned}
\int_1^4 P_1(x)\,\mathrm{d}x &= \int_1^4 \left(x - \frac{5}{2}\right)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Pas de } X\,!!\text{)}\\
&= \left[\frac{\left(x-\frac{5}{2}\right)^2}{2}\right]_1^4\\
&= \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} - \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2}{2}\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$

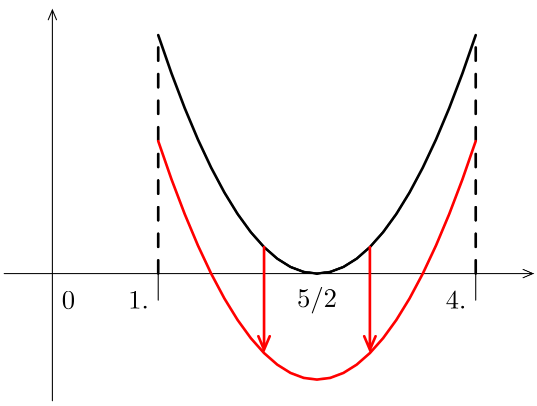
c'est-à-dire que $P_1 \in H$. Cherchons à généraliser cette méthode. On se dit que ça ne marche pas avec un polynôme de degré 2 : le polynôme $\left(X - \dfrac{5}{2}\right)^2$ n'appartient pas, en effet, à H car c'est une fonction positive, et donc son intégrale n'est pas nulle. C'est le cas pour toutes les puissances paires. Les polynômes de degré pair sont en effet un cas de figure plus difficile, on en parle plus loin. Cependant, aucun problème pour les polynômes de degré impair ! Plus précisément : si, pour tout $k \leq n-1$ (car on veut des polynômes de degré inférieur ou égal à $2n$), on pose $P_{2k+1} = \left(X - \dfrac{5}{2}\right)^{2k+1}$, alors on montre de même que $P_{2k+1} \in H$. Ci-dessous le graphe de P_3.



Le problème est que cela ne marche pas tel quel avec les polynômes de degré pair : ci-dessous le graphe de $\left(X - \dfrac{5}{2}\right)^2$.



On veut, comme précédemment, avoir une fonction dont « les parties positive et négative » sont égales. On pense donc à « tirer vers le bas » le polynôme précédent :



Si on tire trop, tout le graphe sera sous l'axe des ordonnées, et l'intégrale sera négative. Il faut donc « tirer juste ce qu'il faut ». Soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et soit $\lambda_{2k} \in \mathbb{R}$. Cherchons pour quelle valeur de λ_k le polynôme $P_{2k} = \left(X - \dfrac{5}{2}\right)^{2k} - \lambda_{2k}$ est d'intégrale nulle (bien sûr, entre 1 et 4). Résolvons donc l'équation suivante :

$$\int_1^4 P_{2k}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \int_1^4 \left(x - \frac{5}{2}\right)^{2k} - \lambda_{2k}\,\mathrm{d}x = 0$$

On pourrait calculer cette intégrale, mais la valeur exacte importe peu !

$$\int_1^4 P_{2k}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \iff \int_1^4 \left(x-\frac{5}{2}\right)^{2k} \mathrm{d}x - 3\lambda_{2k} = 0$$

$$\iff \lambda_{2k} = \frac{1}{3}\int_1^4 \left(x-\frac{5}{2}\right)^{2k} \mathrm{d}x$$

On suppose que λ_{2k} est égal à cette valeur, et on pose donc $P_{2k} = \left(X-\dfrac{5}{2}\right)^{2k} - \lambda_{2k}$. Alors $P_{2k} \in H$. On a donc trouvé une famille de polynômes $(P_1, P_2, \dots, P_{2n-1}, P_{2n})$ d'éléments de H échelonnée en degré, donc libre. On a une famille libre à $2n$ éléments dans H qui est de dimension $2n$: c'est une base.

Exercice 50 : ✪✪✪ Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts.

1. Pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on note φ_k la forme linéaire définie sur E par $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Montrer que $(\varphi_k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ est une base de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in E$ tel que :

$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n A(a_k)P(a_k)$$

3. **Remake :** Prouver qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(k)$$

Donner une expression des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ à l'aide des polynômes de Lagrange.

Correction :

1. E^* est de même dimension que E c'est-à-dire $n+1$. Puisqu'on a une famille à $n+1$ éléments, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soit donc $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ tel que $\lambda_0\varphi_0 + \cdots + \lambda_n\varphi_n = 0$. En d'autres termes (le 0 ci-contre est la fonction nulle de E dans $\mathbb{K}$) :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \lambda_0 P(a_0) + \cdots + \lambda_n P(a_n) = 0$$

L'idée est de ne garder qu'un terme donc de trouver un polynôme P tel que $P(a_k) = 1$ et $P(a_i) = 0$ si $i \neq k$: on pense aux polynômes d'interpolation de Lagrange. Plus précisément (cf. chapitre 19) : les a_i étant deux à deux distincts, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, il existe un unique polynôme L_k de degré inférieur ou égal à n tel que $L_k(a_k) = 1$ et $L_k(a_i) = 0$ si $i \neq k$. De plus (mais ce n'est pas nécessaire pour la suite)

$$L_k = \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i}$$

Appliquons l'égalité ci-dessus avec $P = L_k$, ce qui donne $\lambda_k = 0$. k étant quelconque, les λ sont tous nuls donc la famille est libre ce qui permet de conclure. On peut aussi raisonner comme suit : prouvons que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit de prouver que c'est une famille génératrice (une fois n'est pas coutume). Or, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$$

En effet, pour tout k, P et le polynôme de droite valent $P(a_k)$ donc coïncident en au moins $n+1$ points et sont de degré inférieur ou égal à n donc sont égaux, ce qui permet de conclure. De plus, les coordonnées de P dans cette base sont les $P(a_k)$ si bien que $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est la base duale (cf. cours : les ${e_i}^*$) associée à $(L_0, \dots, L_n)$ et en particulier c'est une base.

2. On cherche à utiliser la question précédente. Cela ressemble à une propriété de bijectivité : on va en fait prouver que toute forme linéaire peut se mettre sous la forme de droite. Montrons donc que l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) \\ \quad A \quad \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^n A(a_k)\varphi_k \end{cases}$$

est bijective. Elle est linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc il suffit de prouver qu'elle est injective. Soit $A \in \ker(f)$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} A(a_k)\varphi_k = 0$$

et $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ sont libres donc $A(a_0) = \cdots = A(a_n) = 0$: A a au moins $n+1$ racines distinctes mais est de degré inférieur ou égal à n donc $A = 0$ ce qui permet de conclure que f est bijective. Par conséquent, la forme linéaire

$$u : P \mapsto \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$$

admet un unique antécédent, c'est-à-dire qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$u = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)\varphi_k$$

i.e.

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)\varphi_k(P)$$

ce qui est le résultat voulu.

3. On prend $a_0 = 0, \dots, a_n = n$ et les formes linéaires $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ (en remplaçant a_k par k pour tout k) forment donc une base. L'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) \\ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k \end{array} \right.$$

est donc bijective : en effet, elle est linéaire entre deux espaces de même dimension finie $n+1$ et est injective car si $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \ker(f)$ alors $\alpha_0\varphi_0 + \cdots + \alpha_n\varphi_n = 0$ donc $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$ par liberté des φ_k. La bijectivité de f permet de répondre à la question. De plus, pour tout k,

$$f(L_k) = \alpha_k$$

car $L_k(k) = 1$ et $L_k(i) = 0$ si $i \neq k$ donc

$$\alpha_k = \int_0^1 L_k(t)\,\mathrm{d}t$$

où

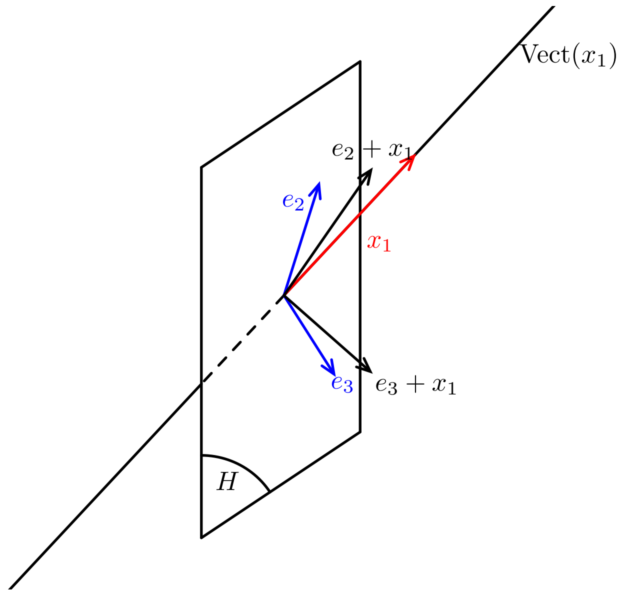
$$L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - i}{k - i}$$

Exercice 51 : ✪✪✪ Soit H un hyperplan de E.

1. Soit $x_1 \notin H$. Montrer qu'on peut compléter x_1 en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.
2. Plus généralement, si $p \leq n$ et $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs libres n'appartenant pas à H, montrer qu'on peut compléter la famille $(x_1, \dots, x_p)$ en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.

Correction :

1. L'idée est simple : on complète x_1 en base avec des éléments de H qu'on viendra décaler pour qu'ils en sortent, comme sur le dessin ci-dessous.



$x_1 \notin H$ donc $E = \text{Vect}(x_1) \oplus H$: si $(e_2, \dots, e_n)$ est une base de H (de cardinal $n-1$ car H est un hyperplan de E qui est de dimension $n-1$) alors, d'après le théorème de concaténation des bases, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Montrons que $(x_1, e_2 + x_1, \dots, e_n + x_1)$ est une base de E et que $e_2 + x_1, \dots, e_n + x_1$ n'appartiennent pas à H.

Puisque cette famille est de cardinal n dans un ensemble à n éléments, il suffit de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2(e_2 + x_1) + \cdots + \lambda_n(e_n + x_1) = 0$$

Alors

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)x_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$$

La famille $(x_1, e_2, \dots, e_n)$ étant libre,

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$$

Puisque $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, on en déduit que $\lambda_1 = 0$ donc la famille est libre : on a une base. Soit $i \in [\![2\,;\,n]\!]$. Si $e_i + x_1 \in H$ alors

$$x_1 = (e_1 + x_1) - e_1 \in H$$

car combinaison linéaire d'éléments de H ce qui est absurde. On a donc bien complété x_1 en base avec des éléments qui n'appartiennent pas à H.

2. L'idée est la même et reprenons les vecteurs $(e_2, \dots, e_n)$ de la question précédente. La famille $(x_1, \dots, x_p, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice donc, d'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre $(x_1, \dots, x_p)$ en base à l'aide de $n-p$ vecteurs de cette famille. Or, ce sont forcément des vecteurs parmi $(e_2, \dots, e_n)$ sinon on a plusieurs fois le même vecteur donc une famille liée et donc pas une base. On peut donc compléter $(x_1, \dots, x_p)$ en base à l'aide de $n-p$ vecteurs de $(e_2, \dots, e_n)$: quitte à les renuméroter, on peut supposer que ce sont $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ si bien que $(x_1, \dots, x_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E. On montre de même (exo) que $(x_1, \dots, x_p, e_{p+1} + x_1, \dots, e_n + x_1)$ convient i.e. est une base et que $e_{p+1} + x_1, \dots, e_n + x_1$ n'appartiennent pas à H.

Exercice 52 : ✪✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme g de E et un projecteur p tel que $f = g \circ p$.

Correction : Raisonnons comme dans la démonstration du théorème du rang. Soit S un supplémentaire de $\ker(f)$ (qui existe puisqu'on est en dimension finie). Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base adaptée à l'écriture $E = S \oplus \ker(f)$, c'est-à-dire que, si on note $r = \text{rg}(f)$, alors $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de S (S est de même dimension que $\text{Im}(f)$) et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\ker(f)$. Rappelons que $\ker(f_{|S}) = S \cap \ker(f) = \{0\}$ donc f est injective sur S donc envoie une famille libre de S sur une famille libre. En particulier, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une famille libre qu'on peut compléter en base d'après le théorème de la base incomplète : il existe $y_{r+1}, \dots, y_n$ tels que $(f(e_1), \dots, f(e_r), y_{r+1}, \dots, y_n)$ soit une base de E.

L'idée est de projeter sur S puis d'appliquer f : soit donc p la projection sur S parallèlement à $\ker(f)$ et u l'unique application linéaire caractérisée par $u(e_1) = f(e_1), \dots, u(e_r) = f(e_r), u(e_{r+1}) = y_{r+1}, \dots, u(e_n) = y_n$. Alors u est bien un isomorphisme car envoie une base sur une base. Il suffit de prouver que $f = u \circ p$ pour conclure.

Or, si $x \in \ker(f)$, alors $p(x) = 0$ (car $\ker(p) = \ker(f)$) donc $u(p(x)) = 0 = f(x)$ et si $x \in S$ alors $p(x) = x$ (p est un projecteur sur S donc les éléments de S sont invariants). De plus, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r$. Par linéarité,

$$\begin{aligned} u(p(x)) &= u(x) \\ &= \alpha_1 u(e_1) + \cdots + \alpha_r u(e_r) \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_r y_r \\ &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

En particulier, f et $u \circ p$ coïncident sur deux espaces vectoriels supplémentaires donc sont égales. On aurait aussi pu montrer que $u \circ p$ et f coïncident sur la base $(e_1, \dots, e_n)$ donc sont égales.

Exercice 53 : ✪✪✪ Soient p, q, r appartenant à $[\![1\,;\, n]\!]$. Montrer qu'il existe F et G deux sev de E tels que $\dim(F) = p, \dim(G) = q$ et $\dim(F \cap G) = r$ si et seulement si : $p + q - n \leq r \leq \min(p, q)$.

Correction : Supposons que de tels sev F et G existent. $F \cap G$ est inclus dans F et G donc est de dimension inférieure, si bien que $r \leq \min(p, q)$. De plus, d'après la formule de Graßmann,

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G)$$

Or, $F + G \subset E$ donc est de dimension inférieure à n, si bien que $r \geq p + q - n$.

Réciproquement, supposons que r vérifie les deux inégalités de l'énoncé et construisons F et G vérifiant ces trois conditions. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, qui est de dimension p car admet une base de cardinal p. On va maintenant compléter $(e_1, \dots, e_r)$ avec des vecteurs pour construire G, mais pour que l'intersection soit de dimension r, il faut piocher « ailleurs que dans F » (ce qui ne signifie pas : à l'extérieur de F mais dans un supplémentaire). Soit donc S un supplémentaire de F (qui existe car on est en dimension finie), de dimension $n - p$. Soit $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-p})$ une base de S. $p + q - n \leq r$ donc $q - r \leq n - p$: on peut donc prendre $q - r$ vecteurs dans cette base. Plus précisément, posons $G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-r})$. Montrons que F et G conviennent.

On a déjà dit que $\dim(F) = p$. Montrons que $\dim(G) = q$. Il suffit de prouver que $(e_1, \dots, e_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{q-r})$ est une famille libre, puisque c'est une famille génératrice, on aura une base à q éléments ce qui donnera le résultat voulu. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{q-r}) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1 \varepsilon_1 + \cdots + \beta_{q-r} \varepsilon_{q-r} = 0$$

si bien que

$$\underbrace{\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r}_{\in F} = \underbrace{-\beta_1 \varepsilon_1 - \cdots - \beta_{q-r} \varepsilon_{q-r}}_{\in S}$$

Par conséquent, le vecteur ci-dessus appartient à $F \cap S = \{0\}$ donc est nul : les e_i et les ε_i étant libres, les α_i et les β_i sont nuls ce qui donne le résultat voulu.

Il reste à prouver que $F \cap G$ est de dimension r. Il suffit donc de prouver que $F \cap G = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. On sait déjà que $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r) \subset F \cap G$. Réciproquement, soit $x \in F \cap G$. Alors il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_{q-r}) \in \mathbb{K}^q$ tel que

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r + \beta_1 \varepsilon_1 + \cdots + \beta_{q-r} \varepsilon_{q-r}$$

donc

$$\underbrace{x - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_r e_r}_{\in F} = \underbrace{\beta_1 \varepsilon_1 + \cdots + \beta_{q-r} \varepsilon_{q-r}}_{\in S}$$

On prouve de même que tous les β_i sont nuls (attention, pas les α_i car il y a aussi les coordonnées de x à prendre en compte) donc $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_r e_r$ ce qui permet de conclure.

Exercice 54 : ✪✪✪

1. Montrer que la famille $(\ln(p))_{p \in \mathbb{P}}$ est libre sur $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

2. En déduire que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension infinie.
3. En déduire que $\ln(p)$ est rationnel pour au plus une valeur de p.

Correction :

1. Soit $(p_1, \dots, p_n)$ une sous-famille finie de $\mathbb{P}$. Soient $r_1, \dots, r_n$ des rationnels tels que $r_1 \ln(p_1) + \cdots + r_n \ln(p_n) = 0$. Quitte à multiplier par le PPCM de tous les dénominateurs, on peut supposer que les r_i appartiennent à $\mathbb{Z}$. Supposons qu'ils soient non tous nuls. On garde uniquement les termes non nuls, ce qui donne (quitte à renuméroter) une égalité du type $\alpha_1 \ln(p_1) + \cdots + \alpha_r \ln(p_r) = 0$ avec les α_i des entiers tous non nuls. Mettons d'un côté les termes strictement positifs et de l'autre les termes strictement négatifs, ce qui donne (quitte à renuméroter) une égalité du type :

$$\alpha_1 \ln(p_1) + \cdots + \alpha_q \ln(p_q) = -\alpha_{q+1} \ln(\beta_{q+1}) - \cdots - \alpha_r \ln(p_r)$$

si bien qu'en posant $\beta_i = -\alpha_i > 0$ lorsque $i \geq q+1$:

$$\ln\left({p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_q}^{\alpha_q}\right) = \ln\left({p_{q+1}}^{\beta_{q+1}} \times \cdots \times {p_r}^{\beta_r}\right)$$

et donc

$${p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_q}^{\alpha_q} = {p_{q+1}}^{\beta_{q+1}} \times \cdots \times {p_r}^{\beta_r}$$

Or, les p_i sont distincts et les α_i et β_i sont des entiers non nuls, ce qui contredit l'unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers. Par conséquent, les α_i sont tous nuls, $(\ln(p_1), \dots, \ln(p_n))$ est libre, toute sous-famille finie est libre ce qui permet de conclure.

2. $\mathbb{R}$ contient une famille libre infinie donc est de dimension infinie (comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel).
3. Supposons qu'il existe $p \neq q$ tels que $\ln(p)$ et $\ln(q)$ soient rationnels, qu'on note $\ln(p) = a/b$ et $\ln(q) = c/d$ avec a, b, c, d non nuls (car p et q sont distincts de 1 qui n'est pas premier). On en déduit que

$$cb \ln(p) - ad \ln(q) = 0$$

ce qui contredit la liberté de la famille $(\ln(p))$. Il y a donc au plus un nombre premier p tel que $\ln(p)$ soit rationnel. On peut même montrer (cf. DM 17) que $\ln(p)$ est irrationnel pour tout p, mais la démonstration est plus technique.

Exercice 55 : ✪✪✪ On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Correction :

1. Le résultat étant évident si $k = 0$, soient donc $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$ et prouvons que $P_k(n) \in \mathbb{Z}$. On pourrait utiliser le résultat de l'exercice 38 du chapitre 3, disant que le produit de k entiers consécutifs est divisible par $k!$, mais on va le redémontrer. Faisons une disjonction de cas.
   - Si $n \in [\![0 \,;\, k-1]\!]$, c'est-à-dire si $k > n$, alors n est racine de P_k donc $P_k(n) = 0 \in \mathbb{Z}$.
   - Supposons que $n \geq k$. Alors

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k)\cdots\times 1}{k!\times(n-k)\times\cdots\times 1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k} \end{aligned}$$

   et donc on a bien $P_k(n) \in \mathbb{Z}$.

- Supposons enfin $n<0$. Dès lors :

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{(-1)^k(-n)\times(-n+1)\times\cdots(-n+k-1)}{k!} \end{aligned}$$

Il faut bien comprendre que le plus grand entier au numérateur est $-n+k-1$ et le plus petit est $-n$: il manque donc tous les entiers de 1 à $-n$ (rappelons que $-n>0$), qu'on rajoute comme d'habitude :

$$\begin{aligned} P_k(n) &= \frac{(-1)^k\times 1\times(-n-1)\times(-n)\times(-n+1)\times\cdots(-n+k-1)}{1\times\cdots\times(-n-1)\times k!} \\ &= \frac{(-1)^k\times(k-1-n)!}{k!(-n-1)!} \\ &= (-1)^k\times\binom{k-1-n}{k} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

- Pour tout k, $\deg(P_k)=k$ ce qui permet de conclure (cf. cours). Attention, ce n'est pas équivalent ! De plus, il ne suffit pas de dire que la famille est échelonnée en degré car une famille échelonnée en degré est libre mais n'est pas forcément une base, cf. cours.
- Soit $P\in\mathbb{C}[X]$. Tout d'abord, les P_k formant une base de $\mathbb{C}[X]$ d'après la question précédente, P est combinaison linéaire des P_k, c'est-à-dire qu'il existe une (unique) famille $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ presque nulle d'éléments de $\mathbb{C}$ telle que

$$P=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k P_k$$

Montrons que $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ si et seulement les α_k appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Supposons que les α_k appartiennent tous à $\mathbb{Z}$. Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in\mathbb{N}$, $P_k(n)\in\mathbb{Z}$ d'après la question 1, et $\alpha_k\in\mathbb{Z}$ donc, par produit et somme, $P(n)\in\mathbb{Z}$ donc $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\alpha_k\notin\mathbb{Z}$ et notons $i=\min\{k\in\mathbb{N}\,|\,\alpha_k\notin\mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire que α_i est le premier coefficient à ne pas être entier (i n'a bien sûr rien à voir avec le i complexe). Calculons $P(i)$. On a déjà vu que $P_k(i)=0$ si $k>i$ donc on a

$$P(i)=\sum_{k=0}^{i}\alpha_k P_k(i)$$

On a également vu que, si $i\geq k$, alors $P_k(i)=\binom{i}{k}$ si bien que :

$$P(i)=\sum_{k=0}^{i}\alpha_k\binom{i}{k}$$

En particulier,

$$P(i)=\sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k\binom{i}{k}+\alpha_i\times 1$$

Or, par choix de i, $\alpha_0,\dots,\alpha_{i-1}$ appartiennent à $\mathbb{Z}$, donc la somme ci-dessus appartient à $\mathbb{Z}$, et $\alpha_i\notin\mathbb{Z}$, donc $P(i)\notin\mathbb{Z}$ (un entier plus un nombre non entier donne un nombre non entier). D'où l'équivalence recherchée. En conclusion, les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}$ sont exactement les polynômes s'écrivant comme combinaison linéaire (finie, par définition d'une combinaison linéaire) à coefficients entiers des polynômes P_k.

Exercice 56 - Cardinal d'un corps fini : ✪✪✪ Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Soit $\varphi:\mathbb{Z}\to\mathbb{K}$ définie par $\varphi(n)=\underbrace{1_\mathbb{K}+\cdots+1_\mathbb{K}}_{n\text{ fois}}$ si $n\geq 0$, et $\varphi(n)=\underbrace{-1_\mathbb{K}-\cdots-1_\mathbb{K}}_{-n\text{ fois}}$ sinon. On rappelle (cf chapitre 18) que φ est un morphisme d'anneaux.

1. Montrer qu'il existe p premier tel que $\ker(\varphi)=p\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathbb{K}_0=\varphi(\mathbb{Z})$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ de cardinal p (on dit que $\mathbb{K}_0$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).

3. En regardant $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel, montrer que le cardinal de $\mathbb{K}$ est une puissance de p.

Remarque : Ainsi, le cardinal d'un corps fini est toujours une puissance d'un nombre premier. Par exemple, il n'existe aucun corps à 6 ou 10 éléments. Réciproquement, on peut prouver (mais c'est plus difficile) que si p est premier et $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) un unique corps à $q = p^n$ éléments noté $\mathbb{F}_q$. Par exemple, il existe un unique corps à 4 ou à 8 éléments. On prouvera dans l'exercice 47 du chapitre 33 l'existence d'un corps à p^2 éléments pour tout p premier impair.

Correction :

1. φ est un morphisme d'anneaux donc en particulier un morphisme de groupes si bien que $\ker(\varphi)$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$ donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$ (forme des sous-groupes de $\mathbb{Z}$, cf. chapitre 18). Prouvons que p est un nombre premier. Tout d'abord, p ne peut pas être nul car φ n'est pas injectif (car $\mathbb{Z}$ est infini et $\mathbb{K}$ est fini, c'est le principe des tiroirs). Ainsi, $p \geq 1$. De plus, $p \neq 1$ car sinon $\ker(\varphi) = \mathbb{Z}$ i.e. φ est l'application nulle ce qui est absurde car $\varphi(1) = 1_{\mathbb{K}}$. Ainsi, $p \geq 2$. Si p n'est pas premier, alors il existe $1 < a, b < n$ tels que $p = ab$ (cf. chapitre 6). $p \in \ker(\varphi)$ donc $\varphi(p) = 0$. Or, φ est un morphisme d'anneaux donc $\varphi(p) = \varphi(ab) = \varphi(a) \times \varphi(b)$ si bien que $\varphi(a)\varphi(b) = 0$. Or, $0 < a, b < p$ donc a et b n'appartiennent pas à $p\mathbb{Z} = \ker(\varphi)$ si bien que $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ sont non nuls. Or, $\mathbb{K}$ est un corps donc un anneau intègre et $\varphi(a) \times \varphi(b) = 0$ ce qui est absurde : p est premier.
2. $\mathbb{K}_0$ est l'image d'un anneau par un morphisme d'anneaux donc est un anneau (cf. chapitre 18). Soit $y \in K_0$ non nul. Il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $y = \varphi(x)$. Or, $y \neq 0$ donc $x \notin \ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$: x n'est pas un multiple de p et p est premier donc x et p sont premiers entre eux (c'est faux si p n'est pas premier, par exemple 12 n'est pas un multiple de 8 mais 12 et 8 ne sont pas premiers entre eux). D'après le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $xu + pv = 1$. Par conséquent, $\varphi(xu + pv) = \varphi(1)$. φ étant un morphisme d'anneaux :
$$\varphi(x)\varphi(u) + \varphi(p)\varphi(v) = 1_{\mathbb{K}}$$
et $\varphi(p) = 0$ donc $y\varphi(u) = 1_{\mathbb{K}}$: tout élément de $\mathbb{K}_0$ est inversible, $\mathbb{K}_0$ est un corps. Montrons enfin que $\mathbb{K}_0$ est bien de cardinal p. Soient a et b deux entiers. Alors, φ étant un morphisme d'anneaux :
$$\begin{aligned} \varphi(a) = \varphi(b) \quad &\iff \quad \varphi(a) - \varphi(b) = 0 \\ &\iff \quad \varphi(a - b) = 0 \\ &\iff \quad a - b \in \ker(\varphi) = p\mathbb{Z} \end{aligned}$$
En d'autres termes, $\varphi(a) = \varphi(b)$ si et seulement si a et b diffèrent d'un multiple de p. On en déduit deux choses :
   - $\varphi(0), \dots, \varphi(p-1)$ sont deux à deux distincts.
   - si $n \in \mathbb{Z}$, en écrivant la division euclidienne de n par $p > 0$, il existe (q, r) uniques tels que $n = pq + r$ avec $0 \leq r \leq p - 1$ et $\varphi(n) = \varphi(r)$.

   On en déduit que $\mathbb{K}_0 = \{\varphi(0); \dots; \varphi(p-1)\}$ et que ces éléments sont deux à deux distincts ce qui permet de conclure. $\mathbb{K}_0$ est ce qu'on appelle le sous-corps premier de $\mathbb{K}$, c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ qui contient 1 (on peut le voir comme Vect(1) sur $\mathbb{K}$ vu comme $\mathbb{K}_0$ espace vectoriel). Par exemple, le sous-corps premier de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{Q}$: c'est le plus petit corps qui contient 1 (mais ici on est sur des corps finis).
3. $\mathbb{K}_0$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ donc, de même que $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on peut munir $\mathbb{K}$ d'une structure de $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel (la loi externe étant la multiplication). $\mathbb{K}$ est fini donc $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel de dimension finie (si $q = \mathrm{card}(\mathbb{K})$ alors $\mathbb{K}$ n'admet pas de famille libre à $q + 1$ éléments donc n'a pas de famille libre de cardinal arbitrairement grand donc est de dimension finie). Soit $n = \dim(\mathbb{K})$. Alors $\mathbb{K}$ est isomorphe à ${\mathbb{K}_0}^n$ (deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension). En particulier, il existe une bijection entre $\mathbb{K}$ et ${\mathbb{K}_0}^n$ donc ils ont le même cardinal : $\mathrm{card}(\mathbb{K}) = p^n$.

Exercice 57 - Une suite qui s'essouffle : ✪✪✪

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^6\right)$ tel que $\mathrm{rg}\left(u^2\right) = 3$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) = 3$ ou 4. On pourra s'intéresser à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$.
2. **Remake :** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) = 1$.
3. On se replace dans le cas général i.e. u est un endomorphisme de E qui est un espace vectoriel de dimension n. Montrer que la suite $(\dim(\ker(u^p)))_p$ est croissante mais s'essouffle, c'est-à-dire que la suite $(\dim(\ker(u^{p+1})) - \dim(\ker(u^p)))_p$ est décroissante.

Correction :

1. On sait que $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathbb{R}^6$ donc $\mathrm{rg}(u^2) \in [\![0\,;6]\!]$.
   - Si $\mathrm{rg}(u) = 0$ alors $\mathrm{Im}(u) = \{0\}$ donc u est l'application nulle donc u^2 également ce qui est absurde puisque $\mathrm{rg}(u^2) = 3$.

- Si $\mathrm{rg}(u) = 6$ alors u est surjective donc u^2 également (une composée de surjections est une surjection) ce qui est absurde pour la même raison.
- $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$ (de façon générale, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$, cf. cours) donc $\mathrm{rg}(u) \geq \mathrm{rg}(u^2)$. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir $\mathrm{rg}(u) = 1$ ou $\mathrm{rg}(u) = 2$.
- Il reste à éliminer le cas $\mathrm{rg}(u) = 5$. Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$. Plus précisément, appliquons lui le théorème du rang (à gauche, la dimension de l'espace de départ c'est-à-dire $\mathrm{Im}(u)$) :

$$\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\ker(u_{|\mathrm{Im}(u)})) + \dim(\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u)}))$$

  Or (cf. cours), $\ker(u_{|\mathrm{Im}(u)}) = \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(u^2)$ si bien que :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)) + \mathrm{rg}(u^2)$$

  Or, $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$ donc a une dimension inférieure :

$$\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u^2) \leq \dim(\ker(u)) = 6 - \mathrm{rg}(u)$$

  d'après le théorème du rang appliqué à u. Par conséquent, $\mathrm{rg}(u) - 3 \leq 6 - \mathrm{rg}(u)$ si bien que $2\,\mathrm{rg}(u) \leq 9$: il n'est pas possible d'avoir $\mathrm{rg}(u) = 5$.

2. De même, $\mathrm{rg}(u) \in [\![0\,;\,3]\!]$ et on exclut de même les cas $\mathrm{rg}(u) = 0$ ou $\mathrm{rg}(u) = 3$. Il reste à exclure le cas $\mathrm{rg}(u) = 2$. Appliquons le théorème du rang à $u_{|\mathrm{Im}(u)}$:

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)) + \mathrm{rg}(u^2)$$

   De même, $\dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u)) \leq \dim(\ker(u)) = 3 - \mathrm{rg}(u)$ si bien que $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(u^2) \leq 3 - \mathrm{rg}(u)$. Or, $u^2 = 0$ donc $\mathrm{rg}(u^2) = 0$ et on a finalement $2\,\mathrm{rg}(u) \leq 3$ ce qui permet de conclure.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il est immédiat que $\ker(u^p) \subset \ker(u^{p+1})$ (à savoir faire en claquant des doigts !) donc la suite des dimensions est croissante. Montrons qu'elle s'essouffle : inspirons-nous des questions précédentes en appliquant le théorème du rang à $u_{|\mathrm{Im}(u^p)}$:

$$\dim(\mathrm{Im}(u^p)) = \dim(\ker(u_{|\mathrm{Im}(u^p)})) + \dim(\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u^p)}))$$

   Or (cf. cours), $\ker(u_{|\mathrm{Im}(u^p)}) = \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^p)$ et $\mathrm{Im}(u_{|\mathrm{Im}(u^p)}) = \mathrm{Im}(u^{p+1})$ si bien que :

$$\mathrm{rg}(u^p) = \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^p)) + \mathrm{rg}(u^{p+1})$$

   donc $\mathrm{rg}(u^p) - \mathrm{rg}(u^{p+1}) = \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^p))$. p étant quelconque, on peut appliquer ce qui précède à $p+1$: $\mathrm{rg}(u^{p+1}) - \mathrm{rg}(u^{p+2}) = \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^{p+1}))$. Or, $\mathrm{Im}(u^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(u^p)$ donc $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^{p+1}) \subset \ker(u) \cap \mathrm{Im}(u^p)$ ce qui donne :

$$\mathrm{rg}(u^{p+1}) - \mathrm{rg}(u^{p+2}) \leq \mathrm{rg}(u^p) - \mathrm{rg}(u^{p+1})$$

   En appliquant le théorème du rang à u^p, u^{p+1} et u^{p+2} (ce qui donne $\mathrm{rg}(u^p) = n - \dim\ker(u^p)$ et idem pour les autres) on obtient :

$$\dim(\ker(u^{p+2})) - \dim(\ker(u^{p+1})) \leq \dim(\ker(u^p)) - \dim(\ker(u^{p+1}))$$

   La suite s'essouffle : elle est croissante mais fait des bonds de plus en plus petits. C'est le principe des tableaux de Young.

Exercice 58 : ✪✪✪ Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u^2 \circ v = u$ et $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(v)$. Le but de l'exercice est de montrer que $v^2 \circ u = v$.

1. Montrer que $\ker(u) = \ker(v)$ et que $\mathrm{Im}(u \circ v - \mathrm{Id}_E) \subset \ker u$.
2. En déduire que $v \circ u \circ v = v$.
3. Soit $p = u \circ v$. Montrer que p est un projecteur de E.
4. Montrer que $\ker(p) = \ker(v)$, puis que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(u)$.
5. En déduire que $u \circ v \circ u = u$ et conclure.

Correction :

1. Soit $x \in \ker(v)$. Alors $v(x) = 0$ donc $u^2(v(x)) = u^2(0) = 0$ car u est linéaire. Or, $u^2 \circ v = u$ donc $u(x) = 0$, si bien que $x \in \ker(u)$. On a l'inclusion $\ker(v) \subset \ker(u)$. Cependant, l'inclusion réciproque ne semble pas aisée à prouver. Intéressons-nous aux dimensions : $\text{rg}(u) = \text{rg}(v)$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim(E) - \dim\ker(u) = \dim(E) - \dim\ker(v)$, et donc $\ker(u)$ et $\ker(v)$ ont la même dimension : ils sont donc égaux (rappelons que si un espace est inclus dans un autre et s'ils ont la même dimension, alors ils sont égaux).

   Soit $y \in \text{Im}(u \circ v - \text{Id}_E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u \circ v(x) - x$. Montrons que $y \in \ker(u)$:

$$\begin{aligned} u(y) &= u^2 \circ v(x) - u(x) && (u \text{ est linéaire}) \\ &= u(x) - u(x) && (\text{car } u^2 \circ v = u) \\ &= 0 \end{aligned}$$

   ce qui permet de conclure.
2. Montrons que, pour tout $x \in E, v \circ u \circ v(x) = v(x)$. Soit donc $x \in E$. D'après la question précédente,

$$u \circ v(x) - x \in \ker(u) = \ker(v)$$

   donc, par linéarité de v, $v \circ u \circ v(x) - v(x) = 0$, ce qui est le résultat voulu.
3. Attention, a priori, u et v ne commutent pas ! $p^2 = p \circ p = (u \circ v) \circ (u \circ v)$. Or, la composition est associative (il n'est pas forcément nécessaire de le rappeler, mais ça ne peut pas faire de mal) donc

$$\begin{aligned} p^2 &= u \circ (v \circ u \circ v) \\ &= u \circ v && (\text{question précédente}) \\ &= p \end{aligned}$$

   donc p est bien un projecteur de E.
4. L'inclusion $\ker(v) \subset \ker(p)$ est immédiate et laissée en exo. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \ker(p)$. Alors $u \circ v(x) = 0$. En composant par v, il vient $v \circ u \circ v(x) = v(0) = 0$. Or, $v \circ u \circ v = v$ donc $v(x) = 0$. D'où l'inclusion réciproque. D'où l'égalité.

   L'inclusion $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(u)$ est aussi immédiate et laissée en exo. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in \text{Im}(u)$. L'inclusion réciproque ne semble pas aisée à prouver : on ne trouve le terme $u \circ v$ dans aucune des égalités reliant les deux endomorphismes. Cependant, on va conclure à l'aide des dimensions. En effet, puisque $\text{Im}(p) \subset \text{Im}(u)$, il suffit de prouver que ces espaces ont la même dimension pour conclure. D'après la question 1 et ce qui précède, $\dim\ker(u) = \dim\ker(v) = \dim\ker(p)$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim(E) - \dim\text{Im}(u) = \dim E - \dim\text{Im}(p)$ donc $\dim\text{Im}(u) = \dim\text{Im}(p)$, ce qui permet de conclure.
5. Montrons que, pour tout $x \in E, u \circ v \circ u(x) = u(x)$. Soit donc $x \in E$. Intéressons-nous à $u \circ v \circ u(x)$. $u(x) \in \text{Im}(u)$ donc, d'après la question précédente, $u(x) \in \text{Im}(p)$: il existe donc $t \in E$ tel que $u(x) = p(t)$ ie tel que $u(x) = u \circ v(t)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} u \circ v \circ u(x) &= u \circ v \circ u \circ v(t) \\ &= p^2(t) \\ &= p(t) && (p \text{ est un projecteur}) \\ &= u(x) \end{aligned}$$

   et x est quelconque donc on a bien $u \circ v \circ u = u$. Composons cette égalité à gauche et à droite (u et v ne commutent pas !) par v ce qui donne :

$$v \circ (u \circ v \circ u) \circ u = v \circ u \circ v$$

   Or, $v \circ u \circ v = v$ d'après la question 2, et la composition étant associative,

$$\begin{aligned} v \circ (u \circ v \circ u) \circ u &= (v \circ u \circ v) \circ u \circ u \\ &= v \circ u^2 && (\text{d'après la question 2}) \end{aligned}$$

   ce qui permet de conclure.

Exercice 59 : ✪✪✪ On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On suppose que $(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_{p-1}))$ est une famille libre. Montrer que $(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p))$ est également une famille libre.
2. (a) Soit $x_1 \neq 0$. Montrer que $(x_1, u(x_1))$ est une famille libre.
   (b) Montrer que si $n \neq 2$, alors il existe x_2 tel que $(x_1, x_2, u(x_1))$ soit une famille libre.
   (c) En déduire que $n \geq 4$.
3. Montrer que n est pair. On s'inspirera du théorème de la base incomplète.
4. Donner un exemple de tel endomorphisme u dans le cas où $n = 2$.

Correction :

1. Il suffit de prouver que $u(x_p)$ n'est pas combinaison linéaire des autres (ajout d'un vecteur à une famille libre, cf. cours). Supposons donc qu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_{p-1}$ tels que

$$u(x_p) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \beta_1 u(x_1) + \cdots + \beta_{p-1} u(x_{p-1})$$

   Appliquons u qui est linéaire et vérifie $u^2 = -\mathrm{Id}$:

$$-x_p = \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_p u(x_p) - \beta_1 x_1 - \cdots - \beta_{p-1} x_{p-1}$$

   Par conséquent,

$$\alpha_p u(x_p) = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{p-1} x_{p-1} - x_p - \alpha_1 u(x_1) - \cdots - \alpha_{p-1} u(x_{p-1})$$

   En multipliant la première égalité par α_p, il vient :

$$\alpha_p u(x_p) = \alpha_p \alpha_1 x_1 + \cdots + (\alpha_p)^2 x_p + \alpha_p \beta_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_p \beta_{p-1} u(x_{p-1})$$

   Par unicité des coefficients sur une famille libre, et plus précisément le coefficient devant x_p, on obtient ${\alpha_p}^2 = -1$ ce qui est absurde car on est sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Supposons que la famille soit liée. Il existe alors α tel que $u(x_1) = \alpha x_1$. En appliquant encore u, il vient : $u^2(x_1) = \alpha_1 u(x_1)$ donc $-x_1 = {\alpha_1}^2 x_1$ et $x_1 \neq 0$ donc ${\alpha_1}^2 = -1$ ce qui est encore absurde.
   (b) Il suffit de prendre $x_2 \notin \mathrm{Vect}(x_1, u(x_1))$ ce qui est possible car $E \neq \mathrm{Vect}(x_1, u(x_1))$ car $n \neq 2$.
   (c) D'après la question 1, $(x_1, x_2, u(x_1), u(x_2))$ est encore une famille libre ce qui permet de conclure.
3. On va itérer le processus. Notons

$$C = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists (x_1, \dots, x_k), (x_1, \dots, x_k, u(x_1), \dots, u(x_k)) \text{ soit une famille libre}\}$$

   C est une partie non vide (car $(x_1, u(x_1))$ est une famille libre donc $1 \in C$) de $\mathbb{N}$ et majorée car E est de dimension finie donc admet un plus grand élément p : il existe $(x_1, \dots, x_{n_0})$ tel que $(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p))$ soit une famille libre. Si n est impair alors l'espace engendré par ces $2p$ vecteurs est de dimension $2p$ donc n'est pas égal à E : il existe $x_{p+1} \notin \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p))$ si bien que $(x_1, \dots, x_{p+1}, u(x_1), \dots, u(x_p))$ est libre donc, d'après la question 1, la famille reste libre en ajoutant $u(x_{p+1})$ donc $p + 1 \in C$ ce qui contredit le fait que $p = \max C$.
4. Il suffit de prendre la rotation de centre O d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 60 : ✪✪✪ Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $|\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v| \leq \mathrm{rg}\ (u+v) \leq \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v - n \leq \mathrm{rg}\ u \circ v$.
3. On suppose que $u + v$ est injective et $uv = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.

Correction :

1. Tout d'abord, $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ (réciproque fausse en général). En effet, si $y \in \mathrm{Im}(u+v)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u+v)(x) = u(x) + v(x)$ donc $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. Par conséquent,

$$\dim \mathrm{Im}(u+v) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v))$$

   D'après la formule de Graßmann (et on rappelle que, par définition, le rang est la dimension de l'image et qu'une dimension est positive) :

$$\mathrm{rg}(u+v) \leq \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Im}(v) - \dim \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) \leq \dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Im}(v) = \mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)$$

c'est-à-dire qu'on a montré l'inégalité de droite. Montrons à présent celle de gauche. Il suffit d'appliquer celle de droite avec u et v bien choisis (de la même façon que dans l'inégalité triangulaire « inversée »). Plus « précisément » : on vient de montrer que si machin et truc sont deux endomorphismes, alors rg(machin+truc)$\leq$ rg(machin)+rg(truc). En prenant machin $= u+v$ et truc $= -v$, cela donne :

$$\mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(u+v) + \mathrm{rg}(-v)$$

Or, une double inclusion triviale (faites la ! Il faut utiliser la linéarité de v) nous dit que $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(-v)$ donc que $\mathrm{rg}(v) = \mathrm{rg}(-v)$ (plus généralement, on montre facilement que si λ est un scalaire non nul, alors $\mathrm{rg}(\lambda v) = \lambda\,\mathrm{rg}(v)$, cf chapitre suivant). Finalement, en mettant $\mathrm{rg}(-v) = \mathrm{rg}(v)$ à gauche, on trouve que $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leq \mathrm{rg}(u+v)$. De même avec machin $= u+v$ et truc $= -u$ on trouve $\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(u+v)$ ce qui est le résultat voulu (rappelons que pour montrer une inégalité du type $|A| \leq \alpha$, il suffit de montrer que $A \leq \alpha$ et que $-A \leq \alpha$).

2. On a également $\ker(u_{|\mathrm{Im}(v)}) = \ker(u) \cap \mathrm{Im}(v)$ donc (théorème du rang à $u_{|\mathrm{Im}(v)}$)

$$\mathrm{rg}(u \circ v) = \mathrm{rg}(v) - \dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(v))$$

Or, $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(v) \subset \ker(u)$ donc $\dim(\ker(u) \cap \mathrm{Im}(v)) \leq \dim \ker(u)$, si bien que (on n'oublie pas de changer le sens car il y a un $-$) :

$$\mathrm{rg}(u \circ v) \geq \mathrm{rg}(v) - \dim \ker(u)$$

On conclut à l'aide du théorème du rang : $\dim \ker(u) = n - \mathrm{rg}(u)$ (car E est de dimension n).

3. D'après ce qui précède, $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) - n \leq \mathrm{rg}(u \circ v) = 0$ donc $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$. De plus, toujours d'après ce qui précède, $\mathrm{rg}(u)+\mathrm{rg}(v) \geq \mathrm{rg}(u+v) = n$. En effet, $u+v$ est injective et linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie donc est bijective. Le résultat en découle.

Exercice 61 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2-1})$ est liée. On pourra utiliser l'exercice 31 du chapitre 21.

Correction : Si c'est une famille libre, alors c'est une base car famille libre de cardinal n^2 dans un espace de dimension n^2. Par conséquent, c'est une famille génératrice : toute matrice s'exprimer comme combinaison linéaire de puissances de A donc A commute avec toute matrice. D'après l'exercice 31 du chapitre 21, cela implique que A est de la forme λI_n, mais alors toutes les puissances de A sont proportionnelles ce qui est absurde puisque $(I_n, A, \dots, A^{n^2-1})$ est libre.

Remarque : On peut même montrer (c'est le théorème de Cayley-Hamilton, au programme de deuxième année) que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^n)$ est liée. Pourquoi est-ce un résultat plus fort ?

Exercice 62 - Suites exactes : ✪✪✪ Soient $E_0, E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On dispose pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ d'une application linéaire f_k de E_k dans E_{k+1}.

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

On suppose que $\ker f_0 = \{0\}$, que $\mathrm{Im} f_{n-1} = E_n$ et enfin que pour tout $k \in [\![0\,;\,n-2]\!]$, $\mathrm{Im} f_k = \ker f_{k+1}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{dim} E_k = 0$$

Correction : Donnons deux démonstrations de ce résultat.

- Première méthode : par un calcul direct.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim E_k + (-1)^n \dim E_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (\dim \ker(f_k) + \dim \mathrm{Im}(f_k)) + (-1)^n \dim E_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (\dim \ker(f_k) + \dim \ker(f_{k+1})) + (-1)^{n-1} (\dim \ker(f_{n-1}) + \dim \mathrm{Im}(f_{n-1})) + (-1)^n \dim E_n
\end{aligned}$$

(car $\ker(f_{k+1}) = \mathrm{Im}(f_k)$ pour tout $k \in [\![0\,;\,n-2]\!]$). Tout d'abord, $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = E_n$ si bien que

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1}\dim\mathrm{Im}(f_{n-1})+(-1)^n\dim E_n &= (-1)^{n-1}\dim E_n+(-1)^n\dim E_n\\ &= 0\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dim E_k &= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k(\dim\ker(f_k)+\dim\ker(f_{k+1}))+(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1})\\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\dim\ker(f_k)+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\dim\ker(f_{k+1})+(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1})\\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\dim\ker(f_k)+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j-1}\dim\ker(f_j)+(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1}) \qquad (j=k+1)\\
&= \sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\dim\ker(f_k)-\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j}\dim\ker(f_j)+(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1})\\
&= (-1)^0\dim\ker(f_0)-(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1})+(-1)^{n-1}\dim\ker(f_{n-1}) \qquad \text{(télescopage)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

car f_0 est injective donc $\ker(f_0)=\{0\}$, ce qui est le résultat voulu.

- Deuxième méthode : par récurrence.
  - — Si $n\geq 1$, notons H_n le résultat de l'énoncé.
  - — Montrons que H_1 est vraie. On se place donc dans les conditions de l'énoncé : on se donne E_0 et E_1 deux espaces vectoriels de dimension finie, $f_0 : E_0\to E_1$ une application linéaire injective et telle que $\mathrm{Im}(f_0)=E_1$. Il en découle que f_0 est surjective donc bijective (elle est injective par hypothèse), et donc $\dim(E_0)=\dim(E_1)$. En particulier,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dim(E_k)=-\dim(E_1)+\dim(E_0)=0$$

    c'est-à-dire que H_1 est vraie.
  - — Soit $n\geq 1$. Supposons H_n vraie, et montrons que H_{n+1} est vraie. On se donne donc $E_0,\dots,E_{n+1}$ des espaces vectoriels de dimension finie, $f_0,\dots,f_n$ des applications linéaires comme ci-dessous :

$$E_0\xrightarrow{f_0}E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}\cdots E_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}E_n\xrightarrow{f_n}E_{n+1}$$

    On suppose enfin que f_0 est surjective, que f_n est surjective (et non plus f_{n-1} ! c'est la dernière qui est surjective), et que pour tout $k\in[\![0\,;\,n-1]\!], \mathrm{Im}(f_k)=\ker(f_{k+1})$.

    Si on veut reformuler l'hypothèse de récurrence de façon plus familière (mais sans « truc », pour une fois) : quand on a n espaces vectoriels, des applications linéaires allant successivement du premier au dernier, la première étant injective, la dernière étant injective, et, pour toutes sauf la dernière, l'image de chaque AL étant égale au noyau de la suivante, alors la somme alternée des dimensions des espaces est nulle.

    On veut appliquer l'hypothèse de récurrence : on aimerait l'appliquer au diagramme

$$E_0\xrightarrow{f_0}E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_{n-2}}E_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}E_n$$

    mais on n'est pas dans les conditions de l'hypothèse de récurrence : il faut que la dernière application linéaire soit surjective, ce qui n'est pas le cas ici ! f_{n-1} n'est pas surjective ! Il faut donc « la rendre surjective ». Or, une application est toujours surjective sur son image. Par conséquent, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence au diagramme suivant :

$$E_0\xrightarrow{f_0}E_1\xrightarrow{f_1}E_2\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_{n-2}}E_{n-1}\xrightarrow{f_{n-1}}\mathrm{Im}(f_{n-1})$$

    En effet, tout y est : on a n espaces de dimension finie, n AL, la première est injective et la dernière surjective, et l'image de chacune sauf la dernière est égale au noyau de la suivante. Par hypothèse de récurrence,

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\dim E_k+(-1)^n\dim\mathrm{Im}(f_{n-1})=0$$

Or, $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \ker(f_n)$ et donc, en particulier, ces deux espaces ont la même dimension, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim E_k + (-1)^n \dim \ker(f_n) = 0$$

D'après le théorème du rang appliqué à f_n, il vient : $\dim \ker(f_n) = \dim E_n - \dim \mathrm{Im}(f_n)$. Or, par hypothèse, f_n est surjective donc $\dim \ker(f_n) = \dim E_n - \dim E_{n+1}$. Finalement,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim E_k + (-1)^n \dim \ker(f_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim E_k + (-1)^n \times (\dim E_n - \dim E_{n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \dim E_k + (-1)^n \dim E_n + (-1)^{n+1} \dim E_{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \dim E_k
\end{aligned}$$

et puisque cette somme est nulle, H_{n+1} est vraie.

— D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

Exercice 63 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $E^* = \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$. Soit H un hyperplan de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le but de cette question est de montrer que H contient une matrice inversible.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}^{n^2}$ non tous nuls tels que :

$$M \in H \iff \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{ij} M_{ij} = 0$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe $i \neq j$ tels que $\lambda_{ij} \neq 0$. Montrer que H contient une matrice inversible.
3. On suppose à présent que $\lambda_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Calculer J^2. En déduire que J est inversible et conclure.

Correction :

1. Si E est un espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors tout hyperplan H admet une équation du type $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ avec $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base B (cf. cours). Il suffit d'appliquer ce résultat avec $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (les coordonnées de M dans la base canonique sont exactement ses coefficients, les $M_{i,j}$).
2. On cherche donc une matrice inversible annulant φ. Or, d'après la question précédente, si $M = (m_{ij})$, alors

$$\varphi(M) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{ij} m_{ij}$$

On cherche donc une matrice M inversible telle que la somme ci-dessus soit nulle. On va chercher une matrice inversible simple (ce n'est pas facile en général de montrer qu'une matrice est inversible) : les matrices inversibles les plus simples sont les matrices diagonales ou triangulaires. On va donc chercher une matrice triangulaire telle que la somme ci-dessus soit nulle. Pour qu'elle soit inversible, on prend des coefficients diagonaux tous non nuls, disons égaux à 1. Ainsi, dans la somme ci-dessus, puisqu'on prend les coordonnées, qu'on les multiplie par les λ correspondants et qu'on somme, on aura (entre autres) la somme $\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{nn}$. On veut une somme nulle : il faut s'arranger avec les autres coefficients pour compenser. L'énoncé nous dit qu'il y a un λ_{ij} avec $i \neq j$ non nul, donc ne se trouvant pas sur la diagonale. On va donc placer un coefficient en dehors de la diagonale pour compenser. On veut avoir

$$\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{nn} + \lambda_{ij} \times m_{ij} = 0$$

donc on prend

$$m_{ij} = \frac{-\sum_{i=1}^n \lambda_{ii}}{\lambda_{ij}}$$

ce qui est possible car $\lambda_{ij} \neq 0$. Finalement, soit M la matrice triangulaire ayant des coefficients égaux à 1 sur la diagonale et, en position i, j, m_{ij} égal à la valeur ci-dessus, les autres coefficients de M étant nuls. M est triangulaire avec des 1 sur la diagonale, et $\varphi(M) = 0$ donc $M \in \ker \varphi = H$: H contient une matrice inversible.

3. Le problème est que la méthode ci-dessus ne convient plus car tous les λ_{ij} avec $i \neq j$ sont nuls. On pourrait prendre une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux tous non nuls, mais on ne connaît pas les λ_{ii}, donc ce serait assez compliqué de faire en sorte que $\varphi(M)$ soit nulle. On va plutôt raisonner à l'envers : on va s'arranger pour annuler φ, et on verra ensuite pour que la matrice soit inversible. Puisque tous les λ_{ij} en dehors de la diagonale sont nuls, les seuls termes éventuellement non nuls sont ceux sur la diagonale. Ainsi, pour être sûr d'annuler φ, il suffit d'avoir une diagonale nulle (rappelons que $\varphi(M)$ est la somme des coefficients de M multipliés par les λ correspondants : puisque les seuls λ éventuellement non nuls sont ceux correspondants aux termes diagonaux, si M a une diagonale nulle, alors $\varphi(M) = 0$). Il suffit donc d'exhiber une matrice inversible de diagonale nulle (évidemment, M ne peut pas être triangulaire ou diagonale). On va s'intéresser à la matrice J de l'énoncé, la matrice avec des 1 partout, sauf sur la diagonale où tous les coefficients sont nuls. On a

$$J^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-2 & n-2 & \dots & n-1 & n-2 \\ n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

En effet, dans le calcul de chaque coefficient, on multiplie des 1 par des 1, mais il y a un 0 par ligne et par colonne : pour les coefficients non diagonaux, cela ne tombe pas en même temps donc ils sont égaux à $n-2$, mais pour les coefficients diagonaux, cela tombe en même temps ie on a 0×0 et, pour les autres, 1×1 donc les coefficients non diagonaux valent $n-1$ (faites le produit !). On en déduit que $J^2 = (n-2)J + (n-1)I_n$ donc $J^2 - (n-2)J = (n-1)I_n$ donc

$$J \times \left[\frac{1}{n-1}\left(J - (n-2)I_n\right)\right] = I_n$$

En d'autres termes, J est inversible (et J^{-1} est le terme entre crochets) et a une diagonale nulle donc $\varphi(J) = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 64 - Dénombrement : ✪✪✪ On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q et que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Combien y a-t-il de droites (vectorielles) dans E ?
3. Soit $p \in [\![1\,;\,n]\!]$ et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
   (a) Montrer que le nombre de bases possibles (en tenant compte de l'ordre des vecteurs) de F est
   $$(q^p - 1) \times (q^p - q) \times \cdots \times \left(q^p - q^{p-1}\right)$$
   (b) En déduire que le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension p est :
   $$\frac{(q^n - 1) \times (q^n - q) \times \cdots \times \left(q^n - q^{p-1}\right)}{(q^p - 1) \times (q^p - q) \times \cdots \times \left(q^p - q^{p-1}\right)}$$

Correction :

1. E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ (deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension). En particulier, il existe une bijection de E dans $\mathbb{K}^n$ donc ces ensembles ont le même cardinal, à savoir q^n.
2. Une droite vectorielle est un espace vectoriel de dimension 1. Une droite vectorielle est entièrement déterminée par son vecteur directeur (non nul) : il y a $q^n - 1$ vecteurs non nuls dans E. Cependant, plusieurs vecteurs directeurs donnent la même droite : plus précisément, pour tout vecteur x, tous les vecteurs colinéaires à x non nuls sont aussi des vecteurs directeurs de $\mathrm{Vect}(x)$. Par conséquent, pour toute droite, il y a $q-1$ vecteurs qui engendrent cette droite, donc le nombre de droites est $\dfrac{q^n - 1}{q-1} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

3. (a) On est en dimension p donc une famille à p éléments est libre si et seulement si c'est une base. Rappelons qu'en ajoutant un vecteur y à une famille libre L, si y n'est pas CL de L, alors on obtient encore une famille libre. Par conséquent, une famille $(x_1, \dots, x_p)$ est une base de F si et seulement si, pour tout k, x_k n'est pas CL de $(x_1, \dots, x_{k-1})$: à chaque étape, on garde une famille libre, donc à la fin on a une famille libre à p éléments donc une base.

   Une telle base est entièrement déterminée par :
   - Le choix de x_1 : il doit former une famille libre à lui tout seul, donc on peut prendre n'importe quel vecteur non nul, on a donc $q^p - 1$ (tous les vecteurs de F sauf le vecteur nul) choix possible.
   - Le choix de x_2 : tout vecteur non colinéaire à x_1 convient. Or, il y a q vecteurs colinéaires à x (y compris 0) donc il y a $q^p - q$ choix possibles.
   - Le choix de x_3 : tout vecteur qui n'est pas CL de x_1 et x_2 convient, i.e. tout vecteur sauf ceux de la forme $\lambda x_1 + \mu x_2$, pour tout choix de λ et μ. Or, les vecteurs x_1 et x_2 sont libres donc, à tout choix de λ et μ correspond un vecteur différent (unicité des coordonnées selon une famille libre). Le nombre de vecteurs CL de x_1 et x_2 est donc q^2 (ou en remarquant que $\text{Vect}(x_1, x_2)$ est de dimension 2 car x_1 et x_2 sont libres donc de cardinal q^2 comme à la question 1). Tout ça pour dire qu'il y a $q^p - q^2$ choix possibles pour x_3.
   - et ainsi de suite jusque x_p : tout vecteur qui n'est pas CL de $x_1, \dots, x_{p-1}$, et il y a $q^p - q^{p-1}$ choix possibles.

   Le principe multiplicatif permet de conclure.

   (b) Pour caractériser un sous-espace vectoriel de dimension p, on commence par se donner une base de cet espace : il faut bien comprendre qu'ici, l'espace vectoriel n'est pas fixé : on doit prendre une famille libre à p éléments dans E tout entier, et le même raisonnement que ci-dessus nous dit qu'il y a $(q^n - 1) \times (q^n - q) \times \cdots \times (q^n - q^{p-1})$ familles libres à p éléments dans E. Cependant, plusieurs de ces familles donnent le même espace vectoriel : plus précisément, pour tout sev F de dimension p, chacune de ses bases donnent le même espace vectoriel, donc pour obtenir le nombre d'espaces vectoriels, on divise le nombre de familles libres par le nombre de bases de cet espace vectoriel (les différentes bases qui donnent le même sev ne comptent que pour une, donc si on veut le nombre de sev, on divise par le nombre de bases), ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 65 : ✪✪✪ Deux couples (F_1, G_1) et (F_2, G_2) de sev de E sont dits équivalents lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $\varphi(F_1) = F_2$ et $\varphi(G_1) = G_2$.

1. Montrer que la relation « être équivalents » est une relation d'équivalence.
2. Montrer que deux couples (F_1, G_1) et (F_2, G_2) sont équivalents si et seulement si $\dim(F_1) = \dim(F_2)$, $\dim(G_1) = \dim(G_2)$ et $\dim(F_1 \cap G_1) = \dim(F_2 \cap G_2)$.

Correction :

1. Notons $\sim$ la relation « être équivalents ».
   - Soit (F, G) un couple de sev de E. En prenant $\varphi = \text{Id}_E$, alors φ est un automorphisme de E et on a $\varphi(F) = F$ et $\varphi(G) = G$ donc $(F, G) \sim (F, G)$: $\sim$ est réflexive.
   - Soient (F_1, G_1) et (F_2, G_2) deux couples de sev de E tels que $(F_1, G_1) \sim (F_2, G_2)$. Il existe donc un automorphisme φ tel que $\varphi(F_1) = F_2$ et $\varphi(G_1) = G_2$. φ étant bijective, φ^1 existe et est aussi un automorphisme de E et on a $\varphi^{-1}(F_2) = F_1$ et $\varphi^{-1}(G_2) = G_1$ si bien que $(F_2, G_2) \sim (F_1, G_1)$: $\sim$ est symétrique.
   - Soient $(F_1, G_1), (F_2, G_2), (F_3, G_2)$ des couples de sev de E tels que $(F_1, G_1) \sim (F_2, G_2)$ et $(F_2, G_2) \sim (F_3, G_3)$. Il existe donc φ et ψ deux automorphismes de E tels que $\varphi(F_1) = F_2, \varphi(G_1) = G_2, \psi(F_2) = F_3$ et $\psi(G_2) = G_3$. φ et ψ sont des automorphismes de E donc $\psi \circ \varphi$ en est un également, et $\psi \circ \varphi(F_1) = F_3$ et $\psi \circ \varphi(G_1) = G_3$: $(F_1, G_1) \sim (F_3, G_3)$, $\sim$ est transitive, c'est une relation d'équivalence.
2. Supposons (F_1, G_1) et (F_2, G_2) équivalents. Il existe donc $\varphi \in \text{GL}(E)$ (i.e. un automorphisme de E) tel que $\varphi(F_1) = F_2$ et $\varphi(G_1) = G_2$. φ étant injective, F_1 et F_2 ont la même dimension, ainsi que G_1 et G_2. Cela découle en effet du théorème du rang : appliquons le théorème du rang à $\varphi_{|F_1}$ ce qui donne :

   $$\dim(F_1) = \dim(\ker(\varphi_{|F_1})) + \dim(\text{Im}(\varphi_{|F_1}))$$

   Or, $\ker(\varphi_{|F_1}) = \ker(\varphi) \cap F_1 \subset \ker(\varphi) = \{0\}$ et $\text{Im}(\varphi_{|F_1}) = \varphi(F_1) = F_2$ si bien que $\dim(F_1) = \dim(F_2)$, et idem pour G_1 et G_2 : cf. cours, une AL ne peut que « contracter les espaces », dans le meilleur des cas, i.e. quand l'application est injective, l'image et l'espace de départ ont la même taille. Prouvons que $\varphi(F_1 \cap G_1) = F_2 \cap G_2$ ce qui prouvera la première implication. Soit $y \in \varphi(F_1 \cap G_1)$. Alors il existe $x \in F_1 \cap G_1$ tel que $y = \varphi(x)$. Or, $x \in F_1$ donc $y = \varphi(x) \in F_2$ et de même $y \in G_2$ donc $y \in F_2 \cap G_2$: d'où l'inclusion $\varphi(F_1 \cap G_1) \subset F_2 \cap G_2$.

   Soit à présent $y \in F_2 \cap G_2 = \varphi(F_1) \cap \varphi(G_1)$: il existe donc $x \in F_1$ et $t \in G_1$ tels que $y = \varphi(x) = \varphi(t)$. Par injectivité de φ, $x = t$ donc $x = t \in F_1 \cap G_1$ donc $y \in \varphi(F_1 \cap G_1)$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité, d'où l'égalité des dimensions, ce qui prouve la première implication.

Réciproquement, supposons que $\dim(F_1) = \dim(F_2), \dim(G_1) = \dim(G_2)$ et $\dim(F_1 \cap G_1) = \dim(F_2 \cap G_2)$ et prouvons que les couples (F_1, G_1) et (F_2, G_2) sont équivalents. Notons $p = \dim(F_1) = \dim(F_2), q = \dim(G_1) = \dim(G_2)$ et $r = \dim(F_1 \cap G_1) = \dim(F_2 \cap G_2)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $F_1 \cap G_1$, qu'on complète en base de F_1 et en base de G_1 : on se donne donc $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de F_1 et $(e_1, \dots, e_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_q)$ une base de G_1. Montrons que $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_q)$ est une famille libre de E.

Soient donc $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_{r+1}, \dots, \beta_q$ des scalaires tels que

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_p e_p + \beta_{r+1} \varepsilon_{r+1} + \dots + \beta_q \varepsilon_q = 0$$

Alors on fait comme d'habitude, on met d'un côté les éléments de F_1, de l'autre les éléments de G_1, et on obtiendra un élément de l'intersection :

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r + \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_p e_p = -\beta_{r+1} \varepsilon_{r+1} - \dots - \beta_q \varepsilon_q$$

L'élément de gauche est dans F_1 et celui de droite dans G_1 et les deux sont égaux donc se trouvent dans $F_1 \cap G_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_r)$: il existe donc $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ tels que

$$-\beta_{r+1} \varepsilon_{r+1} - \dots - \beta_q \varepsilon_q = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_r e_r$$

En mettant tout du même côté, on a une CL nulle des vecteurs $(e_1, \dots, e_r, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_q)$ qui est une famille libre donc tous les coefficients sont nuls, et en particulier tous les β_i sont nuls. Par symétrie des rôles, $\alpha_{r+1} = \dots = \alpha_p = 0$. Finalement, il ne reste que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = 0$ et les e_i sont libres donc les α_i sont nuls : la famille est libre.

On peut donc la compléter en base avec des vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$. Faisons le même travail « de l'autre côté » : on se donne $(a_1, \dots, a_r)$ une base de $F_2 \cap G_2$ (les espaces ont la même dimension donc les bases ont le même cardinal) qu'on complète en base de F_2 : $(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_p)$ et en base de G_2 : $(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_q)$, ce qui donne une grosse famille libre $(a_1, \dots, a_r, a_{r+1}, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ qu'on complète en base avec des vecteurs $(y_1, \dots, y_k)$. Une AL étant entièrement déterminée par l'image d'une base, soit φ l'unique AL envoyant e_1 sur a_1 et ainsi de suite. φ envoie une base sur une base donc est un automorphisme, et on a bien $\varphi(F_1 \cap G_1) = F_2 \cap G_2, \varphi(F_1) = F_2$ et $\varphi(G_1) = G_2$ donc $(F_1, G_1) \sim (F_2, G_2)$: ouf !

Exercice 66 : ✪✪✪✪ Soient f et g deux endomorphismes de E. On considère les propriétés suivantes :

1. $f \circ g \circ f = f$
2. $g \circ f \circ g = g$
3. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(g)$

Montrer que deux des trois propriétés impliquent la troisième. Si f est fixé, existe-t-il g tel que les trois propriétés soient vérifiées ?

Correction : Montrons que (1) + (2) $\Rightarrow$ (3). Supposons que $\mathrm{rg}(f) \neq\neq (g)$. Sans perte de généralité, on peut supposer $\mathrm{rg}(f) < \mathrm{rg}(g)$. Rappelons que $\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$ si bien que

$$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(g \circ f \circ g) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)) = \mathrm{rg}(f) < \mathrm{rg}(g)$$

ce qui est absurde. Prouvons à présent que (1) + (3) $\Rightarrow$ (2). On cherche donc à montrer que $g \circ f \circ g = g$. Il suffit de montrer qu'ils coïncident sur deux espaces supplémentaires (caractérisation d'une AL par ses restrictions sur deux espaces vectoriels supplémentaires, cf. chapitre 29). Il est immédiat qu'elles coïncident sur $\ker(g)$. Trouvons un supplémentaire de $\ker(g)$ sur lequel elles coïncident aussi. En prenant un supplémentaire quelconque, cela n'a aucune chance de marcher : on cherche à utiliser les hypothèses (1) et (3). On veut donc faire apparaître $f \circ g \circ f$ donc appliquer $g \circ f \circ g$ à un élément du type $f(x)$ c'est-à-dire à une image de f : montrons donc que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires.

Soit $y \in \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$. Alors $g(y) = 0$ et il existe x tel que $y = f(x)$ si bien que $g(f(x)) = 0$ et en appliquant f linéaire, $f \circ g \circ f(x) = f(0) = 0$ mais $f \circ g \circ f = f$ donc $f(x) = 0$ si bien que $y = 0$: $\ker(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. De plus, $\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}(f)$ donc, d'après le théorème du rang :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(g) + \dim(\ker(g)) = \mathrm{rg}(f) + \dim(\ker(g))$$

si bien que $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(g)$ sont supplémentaires. Montrons enfin que g et $g \circ f \circ g$ sont égales sur $\mathrm{Im}(f)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe x tel que $y = f(x)$ si bien que

$$\begin{aligned} g \circ f \circ g(y) &= g \circ f \circ g \circ f(x) \\ &= g(f(x)) \qquad \text{(d'après (1))} \\ &= g(y) \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. Par symétrie des rôles, on a aussi l'implication $(2)+(3) \Rightarrow (1)$.

Soit donc $f \in \mathscr{L}(E)$ quelconque et cherchons g qui convient. D'après ce qui précède, il suffit que g vérifie les conditions (1) et (3). On cherche donc une AL de même rang que f et qui vérifie $f\circ g\circ f = f$, c'est-à-dire que pour tout x, $f(g(f(x))) = f(x)$ donc $g(f(x))$ est un antécédent de $f(x)$. On aimerait prendre $g = f^{-1}$ mais f n'est pas forcément injective ou bijective : il suffit de se placer sur un supplémentaire de $\ker(f)$, on a vu dans la démonstration du théorème du rang que si S est un supplémentaire du noyau, alors f est une bijection entre S et $\text{Im}(f)$. En d'autres termes, pour tout $y \in \text{Im}(f)$, il existe un unique $x \in S$ tel que $y = f(x)$. Soit donc S un supplémentaire de $\ker(f)$. Notons

$$f^{-1} : \begin{cases} \text{Im}(f) & \longrightarrow & S \\ y & \longmapsto & \text{l'unique } x \in S \text{ tel que } y = f(x) \end{cases}$$

Alors f^{-1} est bien linéaire car isomorphisme réciproque de $f_{|S}$. Soit enfin T un supplémentaire de $\ker(f)$. On définit g comme l'unique AL (idem, pour caractériser une AL, il suffit de la caractériser sur deux espaces supplémentaires) égale à f^{-1} sur $\text{Im}(f)$ et nulle sur T. Alors, pour tout $y \in \text{Im}(f)$, $g(y)$ est un antécédent de y donc on a bien $f\circ g\circ f = f$ et $\text{rg}(g) = \text{rg}(f)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 67 : ✪✪✪✪

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de $\{\deg(P)\,|\,P \in E, P \neq 0\}$.
2. Trouver les $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P\left(X^2\right) = (X^n+1)\times P$.

Correction :

1. Tout d'abord, une famille de polynômes de degrés distincts est (quitte à changer l'ordre) une famille échelonnée en degré donc libre. On en déduit qu'un espace de dimension n ne peut pas contenir strictement plus de n polynômes de degrés distincts, si bien que $\{\deg(P)\,|\,P \in E, P \neq 0\}$ est de cardinal inférieur ou égal à n. Montrons qu'il est de degré n.

   Puisque E est de dimension n, soit $(P_1,\dots,P_n)$ une base de E. L'idée est simple : si $\{\deg(P)\,|\,P \in E, P \neq 0\}$ est de cardinal inférieur ou égal à $n-1$, on va annuler prendre une combinaison linéaire des P_i qui va annuler les degrés contenus dans l'ensemble $\{\deg(P)\,|\,P \in E, P \neq 0\}$, ce qui va faire au plus $n-1$ équations, mais puisqu'on est en dimension n, il restera un degré de liberté donc on aura un degré supplémentaire (ce qui sera absurde).

   Montrons cela rigoureusement. Supposons que $\{\deg(P)\,|\,P \in E, P \neq 0\}$ soit de cardinal $k \leq n-1$ et soit $Q_1,\dots,Q_k$ appartenant à E de degrés respectifs $d_1 < \cdots < d_k$ (et donc les degrés $d_1,\dots,d_k$ sont les seuls apparaissant dans E, avec $-\infty$ le degré du polynôme nul). Notons $a_{1,1}, a_{2,1}\dots,a_{k,1}$ les coefficients de $X^{d_1},\dots,X^{d_k}$ de P_1 (éventuellement égaux à 0 si P_1 ne contient pas ces monômes). De même, notons $a_{1,2},\dots,a_{k,2}$ les coefficients de $X^{d_1},\dots,X^{d_k}$ de P_2 et ainsi de suite : pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, notons $a_{1,i},\dots,a_{k,i}$ les coefficients de $X^{d_1},\dots,X^{d_k}$ dans P_i. On cherche à tous les annuler : on cherche donc $x_1,\dots,x_n$ tels que $x_1P_1+\cdots+x_nP_n$ ne contienne aucun de ces monômes, donc tels que le système

   $$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & 0 & \text{(coefficient de } X^{d_1}) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & 0 & \text{(coefficient de } X^{d_2}) \\ & & & & \vdots & & & & \vdots & \\ a_{k,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{k,n}x_n & = & 0 & \text{(coefficient de } X^{d_k}) \end{cases}$$

   On a $k \leq n-1$ équations donc c'est l'intersection d'au plus k hyperplans donc cela définit un espace de dimension supérieur ou égale à $n-k \geq n-(n-1) = 1$: il y a donc un n-uplet non nul $(x_1,\dots,x_n)$ vérifiant ces conditions, si bien que $x_1P_1+\cdots+x_nP_n$ n'est pas de degré d_1, ni d_2, etc., ni d_k. Cependant, les P_i sont libres donc $x_1P_1+\cdots+x_nP_n \neq 0$ et est de degré différent de $d_1,\dots,d_k$ ce qui est absurde puisque ce sont les seuls degrés présents. Ainsi, l'ensemble ci-dessus est de cardinal n.
2. X^n-1 est solution évidente (identité remarquable). L'ensemble E des solutions est évidemment un espace vectoriel. Soit $P \neq 0$ une solution. Alors $2\deg(P) = n+\deg(P)$ donc $\deg(P) = n$. Ainsi, l'ensemble $\{\deg(P)\,|\,P \in E\}$ est de cardinal 1 : d'après la question précédente, il est donc de dimension 1 et puisque X^n-1 est un élément non nul de E, il en forme une base, c'est-à-dire que $E = \text{Vect}(X^n-1)$. Les seules solutions sont donc les polynômes de la forme $\lambda(X^n-1)$, lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.

Exercice 68 : ✪✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(X_i)_{i\in[\![1\,;\,n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1\,;\,n]\!]$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints non vides I et J de $[\![1\,;\,n]\!]$ tels que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in J} X_j$$

Correction : On a $n+1$ parties de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$, on se dit que cela a quelque-chose à voir avec $n+1$ vecteurs en dimension n. On définit les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ de la façon suivante : pour tout $i \in \llbracket 1\,;\, n+1 \rrbracket$, e_i est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la j-ième coordonnée vaut 1 si $j \in X_i$ et 0 sinon. Par exemple, si $n=5$ et si $X_i = \{1; 2; 5\}$ alors $e_i = (1,1,0,0,1)$ (un 1 en positions $1, 2, 5$ et des zéros ailleurs).

Cela nous donne $n+1$ vecteurs en dimension n : ils forment donc une famille liée. Il existe donc $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ réels non tous nuls tels que $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_{n+1} e_{n+1} = 0$. Notons I l'ensemble des i tels que $\alpha_i > 0$ et J l'ensemble des i tels que $\alpha_i < 0$. On a alors

$$\sum_{i \in I} \alpha_i e_i + \sum_{i \in J} \alpha_i e_i = 0$$

(les indices n'étant ni dans I ni dans J correspondent aux α_i nuls et donc n'apparaissent pas dans la somme). I et J sont évidemment disjoints. Puisque les α_i sont non tous nuls, I ou J est non vide et l'autre est forcément non vide sinon il n'y a qu'une somme ci-dessus et celle-ci est strictement négative ou strictement positive donc ne peut pas être nulle. Ainsi, I et J sont bien disjointes et non vides. En mettant la deuxième somme de l'autre côté, il vient :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i e_i = -\sum_{i \in J} \alpha_i e_i$$

Notons $X = \displaystyle\sum_{i \in I} \alpha_i e_i$. Soit $k \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$. Puisqu'on somme des termes strictement positifs, alors les termes non nuls des e_i ne peuvent pas se compenser : un coefficient de X est donc non nul si et seulement s'il apparaît chez l'un des e_i donc s'il appartient à l'un des X_i c'est-à-dire s'il appartient à l'un des X_i. En d'autres termes, les indices non nuls de X correspondent aux éléments de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$ qui appartiennent à $\bigcup_{i \in I} X_i$. Mais puisque $X = -\displaystyle\sum_{i \in J} \alpha_i e_i$, le même raisonnement dit que les indices non nuls de X sont les éléments de $\bigcup_{j \in J} X_j$, et les deux unions sont donc égales.

Chapitre 31

Matrix Reloaded

« I love French wine, like I love the French language. I have sampled every language, French is my favorite - fantastic language, especially to curse with. »

Matrix Reloaded

On notera comme dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si rien n'est précisé, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 2, que E est un espace vectoriel de dimension n, et que les matrices appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Vrai ou Faux ?

1. L'espace des matrices de trace nulle est de dimension $n-1$.
2. La matrice de l'application identité d'un espace de dimension n est I_n quelle que soit la base choisie.
3. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PB$ si et seulement si $\ker(A) = \ker(B)$.
4. Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = BP$ si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
5. S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PB$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
6. Deux matrices équivalentes sont semblables.
7. Deux matrices semblables sont équivalentes.
8. Deux matrices semblables ont même rang.
9. Deux matrices de rang 1 sont semblables.
10. Une matrice de rang 1 est équivalente à la matrice dont tous les coefficients valent 1.
11. L'ensemble des matrices de rang au plus r est un groupe pour l'addition.
12. Une matrice et sa transposée ont même rang.
13. Une matrice et sa transposée ont même noyau.
14. Si M a une seule colonne non nulle alors $\mathrm{rg}(M) = 1$.
15. Si M a exactement deux colonnes non nulles alors $\mathrm{rg}(M) = 2$.
16. Si M est triangulaire et si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
17. Si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
18. Si tous les coefficients de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
19. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base composée de matrices de rang 1.
20. Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.
21. Le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.
22. $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A) \times \mathrm{rg}(B)$.
23. $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B)$.
24. $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$.
25. Si A et B sont de rang 1 alors $A + B$ est de rang 1.
26. Si A et B sont de rang 1 alors $A + B$ est de rang 2.
27. ✪✪ Si A et B sont de rang 1 alors $A + B$ est de rang inférieur ou égal à 2.

31.1 Matrices et applications linéaires, stage one

Exercice 1 : ✪ Donner la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$. Est-il injectif/surjectif/bijectif ?

Correction : Comme en cours, donnons l'image de la base canonique, et organisons les coefficients en vecteurs colonnes. On a $u(1) = 1 - 1 = 0$, $u(X) = X + 1 - X = 1$, $u(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$ et enfin, à l'aide du triangle de Pascal,

$$\begin{aligned} u(X^3) &= (X+1)^3 - X^3 \\ &= X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 \\ &= 3X^2 + 3X + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice canoniquement associée à u est :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & u(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

Cette matrice n'est pas inversible car est de rang 3 ou car elle est triangulaire supérieure avec des termes nuls sur la diagonale, donc u n'est pas bijectif. Or, u est une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie donc est bijectif si et seulement s'il est injectif si et seulement s'il est surjectif. Puisqu'il n'est pas bijectif ni injectif ni surjectif (attention, il ne suffit pas de dire que u n'est pas bijectif : en effet, une application peut être injective mais pas bijective, ici u n'est ni l'un ni l'autre car est une AL entre deux espaces vectoriels de même dimension).

Exercice 2 : ✪ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_4[X]$ défini par $u(P) = P(1-X)$. Donner la matrice A canoniquement associée à u et donner A^{-1} sans calcul.

Correction : Rebelote. On a $u(1) = 1, u(X) = 1 - X, u(X^2) = (1-X)^2 = 1 - 2X + X^2$, de plus

$$\begin{aligned} u(X^3) &= (1-X)^3 \\ &= 1 - 3X + 3X^2 - X^3 \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} u(X^4) &= (1-X)^4 \\ &= 1 - 4X + 6X^2 - 4X^3 + X^4 \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & u(X^3) & u(X^4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array}$$

A est inversible car est triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls. On pourrait l'inverser à la main, mais on nous demande de ne pas le faire. On va donc utiliser le résultat du cours qui dit que A^{-1} est la matrice canoniquement associée à u^{-1}, la bijection réciproque de u (u est bijective car A est inversible). Il suffit de voir que $1 - (1 - X) = X$ et donc, si $P \in \mathbb{K}_4[X]$, on a

$$\begin{aligned} u^2(P) &= u(P(1-X)) \\ &= P(1-(1-X)) \\ &= P(X) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $u^2 = \mathrm{Id}$. Il en découle que $u^{-1} = u$ et donc que $A^{-1} = A$: A est sa propre inverse.

Exercice 3 : ✪ Soit A la matrice de $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en ligne et colonne n qui valent 1. Calculer A^2.

Correction : Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ canoniquement associée à A. Alors A^2 est la matrice canoniquement associée à u^2. Par définition, si $i \neq n$, $u(e_i) = e_n$, et $e_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n+1} e_i$. Par conséquent :

- Soit $i \neq n$.

$$\begin{aligned} u^2(e_i) &= u(e_n) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \end{aligned}$$

  c'est-à-dire que la i-ième colonne de A^2 a tous ses coefficients égaux à 1.

- $$\begin{aligned} u^2(e_n) &= u\left(\sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+1} u(e_i) \qquad\qquad \text{(linéarité de } u\text{)} \\ &= \sum_{i\neq n} u(e_i) + u(e_n) \\ &= \sum_{i\neq n} e_n + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \\ &= 2ne_n + \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \\ &= \sum_{i\neq n} e_i + (2n+1)e_n \end{aligned}$$

  En d'autres termes, si $i \neq n$, la coordonnée selon e_i vaut 1, et la coordonnée selon e_n vaut $2n+1$: la n-ième colonne a tous ses coefficients égaux à 1 sauf le coefficient en position (n,n) qui vaut $2n+1$.

En conclusion, tous les coefficients de A^2 sont égaux à 1 sauf le coefficient en position (n,n) qui vaut $2n+1$.

On aurait pu aussi le faire à la main (c'est l'exercice 12 du chapitre 21), mais ce n'est pas forcément facile. En tout cas cette méthode est plus courte et il n'y a aucune confusion possible sur les lignes ou les colonnes (le produit à la main peut être assez difficile à faire). Essayez de le faire à la main, et voyez la méthode que vous préférez. Mais peu importe la méthode, l'important est d'y arriver.

Exercice 4 - Opérateur de dérivation : ✪ Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $B = (\cos, \sin, \text{sh}, \text{ch})$ et soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que B est une base de E et que E est stable par D. On notera d la restriction de D à E.
2. Donner la matrice M de d sur B.
3. Montrer que M est inversible et donner M^{-1}.
4. Donner M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Correction :

1. Par définition, B est génératrice de E et on montre comme au chapitre 28 que B est libre donc est une base de E. De plus, si $f \in E$, alors il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tel que $f = \alpha\cos + \beta\sin + \gamma\text{sh} + \delta\text{ch}$ si bien que

$$D(f) = -\alpha\sin + \beta\cos + \gamma\text{ch} + \delta\text{sh} \in E$$

   c'est-à-dire que E est stable par D.

2. $d(\cos) = -\sin, d(\sin) = \cos, d(\text{sh}) = \text{ch}$ et $d(\text{ch}) = \text{sh}$ si bien que :

$$M = \mathrm{Mat}_B(d) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d(\cos) & d(\sin) & d(\mathrm{sh}) & d(\mathrm{ch}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \cos \\ \sin \\ \mathrm{sh} \\ \mathrm{ch} \end{array}$$

3. On pourrait l'inverser avec le pivot de Gauß mais on va utiliser l'application d : on remarque que $d^4 = \mathrm{Id}_E$ car les dérivées quatrièmes de ces quatre fonctions sont égales à elles-mêmes, donc d^4 et Id_E coïncident sur une base donc sont égales. Ainsi, $M^4 = I_4$ donc M est inversible et $M^{-1} = M^3$. Pour calculer M^3, on peut bien sûr le faire à la main, ou donner de même la matrice de d^3, ce qui donne dans tous les cas :

$$M^{-1} = M^3 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d^3(\cos) & d^3(\sin) & d^3(\mathrm{sh}) & d^3(\mathrm{ch}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \cos \\ \sin \\ \mathrm{sh} \\ \mathrm{ch} \end{array}$$

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $M^{4p} = (I_4)^p = I_4$. Dès lors, cela dépend de la congruence de n modulo 4.
   - Si $n \equiv 0[4]$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p$ si bien que $M^n = I_4$.
   - Si $n \equiv 1[4]$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+1$ si bien que $M^n = M$.
   - Si $n \equiv 2[4]$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+1$ si bien que $M^n = M^2$, où

$$M^2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} d^2(\cos) & d^2(\sin) & d^2(\mathrm{sh}) & d^2(\mathrm{ch}) \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \cos \\ \sin \\ \mathrm{sh} \\ \mathrm{ch} \end{array}$$

     Précisons qu'on aurait évidemment pu calculer M^2 avec les mains, mais personnellement je trouve que cela va plus vite dans ce cas précis de donner la matrice associée à d^2.
   - Si $n \equiv 3[4]$, alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4p+3$ si bien que $M^n = M^3$.

Exercice 5 : ✪ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit $r \in [\![1 \,;\, n]\!]$. On se donne dans tout l'exercice un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ et on note $M = \mathrm{Mat}_B(u)$. Déterminer quelles propriétés de u traduisent le fait que M présente les formes suivantes. Quand une matrice est présentée « par blocs », il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (respectivement de colonnes) est composé de r lignes (respectivement r colonnes).

1. $M = 0_n$.
2. $M = I_n$.
3. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. $M = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{array}\right)$
5. $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$
6. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$
7. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

Correction :

1. $M = 0_n$ signifie que u est l'application nulle.
2. $M = I_n$ signifie que $u = \mathrm{Id}_E$.
3. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ signifie que u est injective/surjective/bijective puisque u est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc ces trois conditions sont équivalentes.

4. Le fait que les r premières lignes de M soient nulles signifie que $\text{Im}(u) \subset \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$: les coordonnées des images selon $(e_1, \dots, e_r)$ sont nulles.
5. Le fait que les r premières colonnes soient nulles signifie que $u(e_1) = \cdots = u(e_r) = 0$ donc que $e_1, \dots, e_r$ sont dans $\ker(u)$.
6. Le fait que M soit de la forme ci-dessus signifie que $u(e_1), \dots, u(e_r)$ s'expriment uniquement en fonction de $e_1, \dots, e_r$ donc appartiennent à $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$. En d'autres termes : $\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$ est stable par u.
7. Cela signifie que $u(\text{Vect}(e_1, \dots, e_r)) \subset \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)$ et $u(\text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n)) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_r)$.

Exercice 6 : ✪ Pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$, on pose

$$f(P) = \frac{1}{2}\left(X^2 - 1\right)P'' - XP' + P$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Donner sa matrice canoniquement associée.
3. Montrer que f est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.

Correction :

1. La linéarité est immédiate et découle de la linéarité de la dérivation, et le fait que f aille de $\mathbb{K}_3[X]$ dans lui-même est aussi évident : si $\deg(P) \leq 3$ alors $\deg(P') \leq 2$ et $\deg(P'') \leq 1$ si bien que $f(P)$ est combinaison linéaire de polynômes de degré inférieur ou égal à trois donc appartient à $\mathbb{K}_3[X]$.
2. $f(1) = 1$, $f(X) = 0$ et

$$\begin{aligned} f(X^2) &= \frac{1}{2}(X^2 - 1) \times 2 - X \times 2X + X^2 \\ &= X^2 - 1 - 2X^2 + X^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

donc sa matrice canoniquement associée est

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$

3. Il est immédiat que $M^2 = M$ donc $f^2 = f$ donc f est un projecteur, et f est alors un projecteur sur son image parallèlement à son noyau (cf. chapitre 29). Il suffit donc de donner son image et son noyau. M est de rang 1 (non nulle et ses vecteurs colonnes sont colinéaires) donc $\text{rg}(f) = 1$: $1 \in \text{Im}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1$ donc $f = \text{Vect}(1) = \mathbb{K}_0[X]$ et X et $1 + X^2$ appartiennent à $\ker(f)$ et sont libres (non proportionnels ou échelonnés en degré, au choix) donc forment une base du noyau puisque, d'après le théorème du rang, $\ker(f)$ est de dimension 2. Finalement, f est la projection sur $\mathbb{K}_0[X]$ parallèlement à $\text{Vect}(1, X^2 + 1)$.

Exercice 7 : ✪ Soit $A = X^2 - 3X + 1$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{K}_4[X]$ dans $\mathbb{K}_1[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de sa division euclidienne par A (c'est bien une application linéaire d'après l'exercice 41 du chapitre 29).

1. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_4[X]$ et de $\mathbb{K}_1[X]$.
2. En déduire le reste dans la division euclidienne de $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ par A.

Correction :

1. On a évidemment $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(X) = X$. En posant la division euclidienne de X^2, X^3, X^4 par $X^2 - 3X + 1$, on trouve que $\varphi(X^2) = -3X + 1$, $\varphi(X^3) = 8X - 3$ et $\varphi(X^4) = 21X - 8$. Par conséquent, la matrice canoniquement associée à φ est

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \varphi(X^3) & \varphi(X^4) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & 21 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \end{array}$$

2. On sait que l'évaluation par une application linéaire se traduit matriciellement par un produit. Le vecteur colonne associé à P est

$$M = \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \\ X^4 \end{array}$$

si bien que le vecteur colonne associé à $\varphi(P)$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & -3 & 8 & 21 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 24 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \end{array}$$

En conclusion, le reste dans la division euclidienne de $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ est $24X - 8$.

Exercice 8 : ✪ Soit E un espace vectoriel ayant pour base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaître l'application linéaire u vérifiant :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction : Notons cette matrice M. Alors $M^2 = M$ donc $u^2 = u$: u est un projecteur. e_2 et e_3 sont dans le noyau donc $\dim(\ker(u)) \geq 2$ et $\mathrm{rg}(M) = \mathrm{rg}(u) = 2$ (il y a deux colonnes indépendantes) donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(u)) = 2$ si bien que e_2 et e_3 forment une base de $\ker(u)$: $\ker(u) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. De plus, e_1 et e_4 sont dans l'image qui est de dimension 2 donc $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, e_4)$. Puisque u est un projecteur, c'est le projecteur sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$ c'est-à-dire que u est le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_1, e_4)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Exercice 9 : ✪ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On définit l'application suivante

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ & & \\ M & \mapsto & A \times M \end{array} \right.$$

Montrer que u est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique en fonction des coefficients de A.

Correction : Soient $(M_1, M_2) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Alors on a :

$$\begin{aligned} u(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) &= A \times (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \\ &= \lambda_1 A M_1 + \lambda_2 A M_2 \\ &= \lambda_1 u(M_1) + \lambda_2 u(M_2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que u est linéaire. Donnons sa matrice canoniquement associée, c'est-à-dire sa matrice lorsqu'on prend la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, constituée, rappelons-le, des matrices élémentaires E_{11}, E_{12}, E_{21} et E_{22} (ici, l'ordre n'étant pas précisé, on les met dans l'ordre qu'on veut car il n'y a pas d'ordre naturel : on pourrait très bien mettre E_{21} avant E_{12}, ce n'est pas comme dans $\mathbb{K}_n[X]$ où il est légitime de placer les vecteurs de la base canonique dans l'ordre $1, X, X^2, \dots, X^n$). Par conséquent, la matrice voulue sera carrée de taille 4 ! Notons

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Calculons $u(E_{11}), u(E_{12}), u(E_{21})$ et $u(E_{22})$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} u(E_{11}) &= A \times E_{11} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \\ &= aE_{11} + cE_{21} \end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned} u(E_{12}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= aE_{12} + cE_{22} \end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned} u(E_{21}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \\ &= bE_{11} + dE_{21} \end{aligned}$$

- De même :

$$\begin{aligned} u(E_{22}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \\ &= bE_{12} + dE_{22} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(E_{11}) & u(E_{12}) & u(E_{21}) & u(E_{22}) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{matrix}$$

Exercice 10 : ✪✪ Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes dans les bases B_1 (base de départ) et B_2 (base d'arrivée).

1. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(1) \end{cases}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}$.
2. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}$.
3. $u\colon \begin{cases} \mathbb{C}_3[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P \longmapsto P + P' \end{cases}$ avec B_1 et B_2 égales à la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
4. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec $B_1 = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $B_2 = (1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\cdots+X^n)$.
6. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec $B_1 = (1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\cdots+X^n)$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. $u\colon \begin{cases} \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{C}^2 \\ P & \longmapsto \left(\overline{P(1+i)}, \mathrm{Re}(P(i))\right) \end{cases}$, $B_1 = (1, i, X, iX)$ et $B_2 = ((1,0),(i,0),(0,1),(0,i))$ (on considère $\mathbb{C}_1[X]$ et $\mathbb{C}^2$ comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels).

Correction : Notons à chaque fois M la matrice de l'application linéaire dans les bases B_1 et B_2.

1. On a $u(X^k) = 1$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$ donc (précisons que cette matrice est une matrice ligne de taille $n+1$)

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \dots & u(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} & 1 \end{array}$$

2. Pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$,

$$\begin{aligned} u(X^j) &= \int_0^1 t^j \,\mathrm{d}t \quad \text{(Pas de } X\,!) \\ &= \frac{1}{j+1} \end{aligned}$$

si bien que

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \dots & u(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+1) \end{pmatrix} & 1 \end{array}$$

3. On a $\varphi(1) = 1, \varphi(X) = X+1, \varphi(X^2) = X^2+2X$ et $\varphi(X^3) = X^3+3X^2$.

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & u(X^3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array} \end{array}$$

4. Attention à ne pas conclure trop rapidement que $M = I_n$: les bases de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes ! On cherche donc :

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} \mathrm{Id}(1) & \mathrm{Id}(X-a) & \mathrm{Id}(X-a)^2 & \mathrm{Id}(X-a)^3 & \dots & \mathrm{Id}(X-a)^n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & & \cdots & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & \cdots & \\ & & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \cdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$$

On a donc une matrice de taille $(n+1)\times(n+1)$. Soit donc $(i,j) \in [\![1\,;\, n+1]\!]^2$. Le coefficient $A_{i,j}$ en ligne i et j est la coordonnée selon X^{j-1} de $\mathrm{Id}(X-a)^{i-1}$: il y a en effet un décalage puisque les lignes et colonnes des matrices sont numérotées à partir du rang 1 mais les polynômes à partir de la puissance 0 (et c'est classique, cf. exercices 15, 36 et 66), on voit par exemple que la troisième colonne correspond à $\mathrm{Id}(X-a)^2$ et que la quatrième ligne correspond à X^3. Or,

$$\mathrm{Id}(X-a)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^k (-a)^{j-1-k}$$

En prenant $k = i-1$, le coefficient de X^{i-1} est $\binom{j-1}{i-1}(-a)^{j-i}$ et c'est donc la valeur de $A_{i,j}$ (et il est nul si $i > j$ donc la matrice est triangulaire supérieure).

5. Soit $j \in [\![0\,;\, n]\!]$. Il faut écrire X^j dans la base B_2. On a $1 = 1$, $X = (1+X)-1$, $X^2 = (1+X+X^2)-(1+X)$ et plus généralement, $X^j = (1+X+\dots+X^j) - (1+X+\dots+X^{j-1})$ si bien que

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} 1 & X & X^2 & X^3 & \dots & X^n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 1+X \\ 1+X+X^2 \\ \vdots \\ 1+X+\cdots+X^{n-1} \\ 1+X+\cdots+X^n \end{array} \end{array}$$

6. On peut simplement donner l'inverse de la matrice précédente (inverse d'une matrice de passage), mais la matrice est simple à donner directement : si on note $P_0, \dots, P_n$ les polynômes de la base B_2 :

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} P_0 & P_1 & P_2 & \cdots & \dots & P_n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$$

7. $u(1) = (1,1) = 1.(1,0) + 1.(0,1)$, $u(i) = (\bar{i}, \mathrm{Re}(i)) = (-i, 0) = (-1).(i,0)$. De plus :

$$\begin{aligned} u(X) &= (\bar{i}, \mathrm{Re}(i)) \\ &= (-i, 0) \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} u(iX) &= (\overline{i \times i}, \mathrm{Re}(i \times i)) \\ &= (-1, -1) \\ &= (-1).(1,0) + (-1).(0,1) \end{aligned}$$

Si bien que

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(1) & u(i) & u(X) & u(iX) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (1,0) \\ (i,0) \\ (0,1) \\ (0,i) \end{array} \end{array}$$

Exercice 11 : ✪✪ Soit F l'espace vectoriel des suites réelles vérifiant l'équation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Donner une base B de F.
2. Montrer que

$$T : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

est un endomorphisme de F.
3. Donner $\mathrm{Mat}_B(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de F.

Correction :

1. L'équation caractéristique de la relation de récurrence vérifiée par les éléments de F est $r^2 - r - 1 = 0$ dont les solutions sont $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (le nombre d'or) et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait (cf. cours) que $(\varphi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\psi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une base de F.

2. La linéarité est immédiate (idem que pour le shift, cf. exercice 45 du chapitre 29). Montrons que T va bien de F dans F. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc λ et μ uniques tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi_n$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T(u)_n &= u_{n+1} \\ &= \lambda\varphi^{n+1} + \mu\psi^{n+1} \\ &= \lambda\varphi \times \varphi^n + \mu\psi \times \psi^n \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $T(u) = \lambda\varphi(\varphi^n) + \mu\psi(\psi^n) \in \mathrm{Vect}((\varphi^n),(\psi^n)) = F$: T va bien de F dans F, c'est un endomorphisme de F.

3. D'après la question précédente, $T((\varphi^n)) = \varphi(\varphi^n)$ et $T((\psi^n)) = \psi(\psi^n)$ donc

$$\mathrm{Mat}_B(T) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} T((\varphi^n)) & T((\psi^n)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ (\varphi^n) \\ (\psi^n) \end{array}$$

Cette matrice étant inversible (diagonale de coefficients diagonaux non nuls), T est bijective donc est un automorphisme.

Exercice 12 : ✪✪

1. Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x+y-z=0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(1,1,1)$. Comment vérifier le résultat obtenu ?

2. **Remake :** Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la symétrie par rapport au plan d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^n x_i = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(1,\dots,1)$.

Correction :

1. On montre comme dans le chapitre 29 que cette projection est la fonction

$$p : (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_3 - x_2, x_3 - x_1, 2x_3 - x_2 - x_1)$$

La matrice canoniquement associée est donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On peut vérifier le résultat en vérifiant que $M^2 = M$, donc on a bien une matrice de projecteur, puis que $M \times (1,1,1)^\top = 0$, donc on a bien $(1,1,1) \in \ker(p)$, puis que $M \times (1,0,1)^\top = (1,0,1)$ et $M \times (0,1,1)^\top = (0,1,1)$ donc ces deux vecteurs, qui forment une base du plan d'équation $x+y-z=0$, ce qu'on prouve comme au chapitre 28, sont bien dans le noyau de p. Par conséquent, p est un projecteur, le noyau et l'image correspondent : tout va bien.

2. On prouve comme à l'exercice 42 du chapitre 28 que p est l'application

$$p : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \left(x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i, \dots, x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

si bien que la matrice canoniquement associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 1-1/n & -1/n & \dots & -1/n \\ -1/n & 1-1/n & \dots & -1/n \\ \dots & & \ddots & \vdots \\ -1/n & -1/n & \cdots & 1-1/n \end{pmatrix}$$

Exercice 13 : ✪✪

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ qui prend les valeurs $0,1,2$ avec les probabilités p_0,p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y)=1$ et $E(Y^2)=5/3$. Calculer p_0,p_1 et p_2.

2. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$-uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \ldots, Q(x_n))$.
   (a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
   (b) Déterminer la matrice Φ de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$. On suppose que $E(X), E\left(X^2\right), \ldots, E\left(X^n\right)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?

Correction :

1. Par définition de l'espérance, $E(Y) = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 = p_1 + 2p_2$ donc $p_1 + 2p_2 = 1$. D'après le théorème de transfert, $E(Y^2) = 0^2 \times p_0 + 1^2 \times p_1 + 2^2 \times p_2 = p_1 + 4p_2$ donc $p_1 + 4p_2 = 5/3$. On a un système 2×2 : on trouve que $p_1 = p_2 = 1/3$, et puisque $p_0 = 1 - p_1 - p_2$, on trouve également $p_0 = 1/3$.
2. C'est dans le cours : voir le paragraphe sur la matrice de Vandermonde (mais de taille $n+1$ et non pas de taille n).

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & {x_0}^n \\ 1 & x_1 & \ldots & {x_1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & {x_n}^n \end{pmatrix}$$

   Comme on peut le voir, c'est un classique !
3. Notons $p_0 = P(X=0), \ldots, p_n = P(X=n)$. Précisons que X admet des moments à tout ordre car a un support fini. Dès lors, d'après le théorème de transfert, on a successivement :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 \times p_0 & + & 1 \times p_1 & + & \cdots & + & n \times p_n & = & E(X) \\ 0^2 \times p_0 & + & 1^2 \times p_1 & + & \cdots & + & n^2 \times p_n & = & E(X^2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0^n \times p_0 & + & 1^n \times p_1 & + & \cdots & + & n^n \times p_n & = & E(X^n) \end{array} \right.$$

On a $n+1$ inconnues $(p_0, \ldots, p_n)$ et n équations : on aimerait une équation supplémentaire, on pense donc à $p_0 + \cdots + p_1 = 1$ ce qui donne le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 1 \times p_0 & + & 1 \times p_1 & + & \cdots & + & 1 \times p_n & = & 1 \\ 0 \times p_0 & + & 1 \times p_1 & + & \cdots & + & n \times p_n & = & E(X) \\ 0^2 \times p_0 & + & 1^2 \times p_1 & + & \cdots & + & n^2 \times p_n & = & E(X^2) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ 0^n \times p_0 & + & 1^n \times p_1 & + & \cdots & + & n^n \times p_n & = & E(X^n) \end{array} \right.$$

La question est : peut-on trouver $p_0, \ldots, p_n$? Ou, en d'autres termes : ce système admet-il une unique solution ? Pour cela, on se souvient du cours sur les systèmes linéaires. La matrice associée à ce système est la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & n \\ 0^2 & 1^2 & \ldots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0^n & 1^n & \ldots & n^n \end{pmatrix}$$

M est la transposée de la matrice Φ de la question précédente avec $x_0 = 0, x_1 = 1, \ldots, x_n = n$ qui sont bien distincts. Ainsi, Φ est inversible donc M est inversible (la transposée d'une matrice inversible est inversible, ou une matrice et sa transposée ont même rang) donc M est inversible : le système linéaire est donc un système de Cramer, il admet donc une unique solution, donc on peut déterminer la loi de X.

Exercice 14 : ✪✪ Soient

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x - 4y - 2z, 4x - 7y - 4z, -5x + 10y + 6z) \end{array} \right.$$

et

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x-8y-4z, 8x-15y-8z, -10x+20y+11z) \end{cases}$$

Montrer que f (respectivement g) est un projecteur (respectivement une symétrie) et donner une base dans laquelle la matrice de f (respectivement g) est diagonale.

Correction : Les matrices canoniquement associées à f et g sont respectivement

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 4 & -7 & -4 \\ -5 & 10 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$$

On prouve aisément que f est un projecteur en vérifiant que ${M_1}^2 = M_1$ et ${M_2}^2 = I_3$. On sait (cf. cours) que pour trouver une base dans laquelle la matrice de f est diagonale, il suffit de trouver une base du noyau et de l'image. On trouve comme au chapitre 29 qu'une base de $\mathrm{Im}(f)$ est donnée par $e_1 = (3,4,-5)$ et $e_2 = (-2,-4,-6)$, et qu'une base du noyau est donnée par $e_3 = (-2,-4,5)$. Dès lors, $f(e_1) = e_1, f(e_2) = e_2$ (les éléments de l'image sont invariants par f) et $f(e_3) = 0$ si bien que la matrice de f dans la base (c'en est une puisque l'image et le noyau sont supplémentaires, et c'est donc une base par le théorème de concaténation des bases) (e_1,e_2,e_3) est :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche à présent une base de $A_1 = \{X \mid MX = X\}$ et une base de $A_2 = \{X \mid MX = -X\}$. On trouve qu'une base de A_1 est donnée par $e_1 = (5,8,-10)$ et $e_2 = (-8,-15,20)$ et qu'une base de A_2 est $e_3 = (-2,-4,5)$ et dans cette base on a

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15 : ✪✪✪ Dans cet exercice, n et p désignent des entiers naturels non nuls, E désigne un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments (pas des espaces vectoriels !). On note $F(n,p)$ le nombre d'applications de E dans F et $S(n,p)$ le nombre de surjections de E dans F.

1. Donner A, la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.
2. Déterminer A^{-1}.
3. Montrer que

$$F(n,p) = \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n,k)$$

4. Vérifier que :

$$\begin{pmatrix} 0 & F(n,1) & \cdots & F(n,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S(n,1) & \cdots & S(n,n) \end{pmatrix} \times A$$

5. En déduire la valeur de $S(n,p)$ sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

Correction :

1. Soit A la matrice canoniquement associée à φ si bien que

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X)^2 & \varphi(X)^3 & \dots & \varphi(X)^n \end{array} \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & & \cdots & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & \cdots & \\ & & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

On a donc une matrice de taille $(n+1)\times(n+1)$. Soit donc $(i,j) \in [\![1 \,;\, n+1]\!]^2$. Le coefficient $A_{i,j}$ en ligne i et j est la coordonnée selon X^{j-1} de $\varphi(X)^{i-1}$: il y a en effet un décalage puisque les lignes et colonnes des matrices sont numérotées à partir du rang 1 mais les polynômes à partir de la puissance 0 (et c'est classique, cf. exercices 10, 36 et 64), on voit par exemple que la troisième colonne correspond à $\varphi(X)^2$ et que la quatrième ligne correspond à X^3. Or,

$$\varphi(X^{j-1}) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j-1}{i} X^{i-1}$$

si bien que le coefficient de X^{i-1}, le terme général de la matrice, est $\displaystyle\binom{j-1}{i-1}$ (la matrice est donc triangulaire supérieure car ce coefficient est nul si $i > j$).

2. Il est plus simple de chercher φ^{-1} : la bijection réciproque de φ est

$$\varphi^{-1} : P \mapsto P(X-1)$$

et on trouve de même que la matrice de φ^{-1} est la matrice de terme général $\displaystyle\binom{j-1}{i-1}(-1)^{j-i}$.

3. Fait dans l'exercice 28 du chapitre 17.
4. Notons F le vecteur ligne (de taille $n+1$) de gauche, et S celui de droite. On cherche donc à prouver que $S \times A = F$. Soit $j \in [\![1\,;\, n+1]\!]$.

$$\begin{aligned}
(SA)_j &= \sum_{k=1}^{n+1} S_k A_{kj} \\
&= \sum_{k=1}^{j} S(n,k-1)\binom{j-1}{k-1} \quad \text{(Matrice triangulaire supérieure)} \\
&= \sum_{k=0}^{j-1} S(n,k)\binom{j-1}{k} \\
&= F(n,j-1)
\end{aligned}$$

d'après la question précédente. Cette quantité est donc égale à L_j, et j est quelconque, on a donc $SA = L$.

5. D'après la question précédente,

$$\begin{pmatrix} 0 & F(n,1) & \cdots & F(n,n) \end{pmatrix} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & S(n,1) & \cdots & S(n,n) \end{pmatrix}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $p > n$ alors $S(n,p) = 0$. Supposons à présent $p \leq n$. Alors $S(n,p) = S_{p+1}$ où S est le vecteur ligne de la question précédente. Dès lors, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned}
S(n,p) &= S_{p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} L_k (A^{-1})_{k,p+1} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} F(n,k-1)\binom{p}{k-1}(-1)^{p+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{p} k^n \binom{p}{k}(-1)^{p-k}
\end{aligned}$$

et on retrouve bien sûr le même résultat qu'à l'exercice 28 du chapitre 17.

31.2 Rang, image et noyau

Exercice 16 : ✪ Donner sans calculs le rang des matrices suivantes (a et b sont deux réels) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & 0 & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \dots & 0 & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction :

1. $\text{rg}(A) = 2$ car a deux vecteurs colonnes libres.
2. $\text{rg}(B) = 1$ car toutes les lignes de B sont égales.
3. $\text{rg}(C) = 2$ car a deux vecteurs colonnes libres. En effet, les colonnes $C_2, \dots, C_n$ sont proportionnelles et C_1 et C_2 ne sont pas proportionnelles.
4. $1 \leq \text{rg}(D) \leq 2$: en effet (et on l'oublie trop souvent !), le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes. Il n'y a que deux vecteurs lignes distincts, donc $\text{rg}(D) \leq 2$, et D n'est pas la matrice nulle donc $\text{rg}(D) \geq 1$. $\text{rg}(D) = 1$ si et seulement si toutes ses lignes sont proportionnelles, et c'est le cas si et seulement si $a = b = 0$. En conclusion, $\text{rg}(D) = 1 \iff a = b = 0$ (car toutes les lignes sont proportionnelles) et, sinon, $\text{rg}(D) = 2$ car D a deux lignes libres.
5. On sait qu'une matrice appartenant à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a un rang inférieur ou égal à n et à p donc à $\min(n, p)$. Ainsi, $\text{rg}(E) \leq 2$ et E a deux vecteurs colonnes libres donc $\text{rg}(E) \geq 2$ et donc $\text{rg}(E) = 2$. On peut aussi dire directement que $\text{rg}(E) = 2$ car a deux vecteurs lignes libres.

Exercice 17 : ✪ La matrice suivante est-elle inversible ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Correction : Donnons le rang de M. M est inversible si et seulement si son rang est égal à 3.

$$\begin{aligned} \text{rg}(M) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\ &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} && (L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2) \\ &= 2 \end{aligned}$$

donc M n'est pas inversible.

Exercice 18 - Savoir lire une matrice : ✪ Donner une base du noyau et de l'image des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Correction : Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à B.

Notons e_1, e_2 et e_3 la base canonique de $\mathbb{R}^3$ (par exemple, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$). Tout d'abord, $\text{rg}(A) = 2$ car a deux vecteurs colonnes libres. De plus, $e_1 \in \ker(u)$ car la première colonne de A est nulle. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(u) + \text{rg}(u)$ donc $\ker(u)$ est de dimension 1. Puisque e_1 est un vecteur non nul (donc libre) dans $\ker(u)$ de dimension 1, il en forme une base. Enfin, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ forment deux vecteurs libres (car non colinéaires) dans $\text{Im}(u)$ qui est de dimension 2 donc en forment une base.

Intéressons-nous à v à présent. Encore une fois, notons e_1, e_2, e_3, e_4 la base canonique de $\mathbb{R}^4$ (par exemple, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$). B est de rang 2 car C_1 et C_4 sont libres, et C_2 et C_3 sont proportionnelles à C_1 : B a donc deux vecteurs colonnes libres. Par conséquent, $\text{rg}(v) = 2$ et, d'après le théorème du rang, $\dim \ker(v) = \dim \mathbb{R}^4 - \text{rg}(v) = 2$. Ainsi, pour donner une base de l'image et du noyau, il suffit de donner une famille libre à deux éléments dans chacun des espaces, donc deux vecteurs non proportionnels dans chacun des espaces. Pour l'image, $v(e_1)$ et $v(e_4)$ sont libres car non proportionnels : ils forment donc une famille libre à deux éléments en dimension 2 donc une base de $\text{Im}(v)$. Pour le noyau maintenant : $e_1 \in \ker(v)$ et on voit que $v(e_3) = -v(e_1)$ donc, v étant linéaire, $v(e_3 + e_1) = 0$ donc $e_1 + e_3 \in \ker(v)$. Or, $e_1 + e_3$ et e_1 sont libres donc, avec le même argument, e_1 et $e_1 + e_3$ forment une base de $\ker(v)$.

Exercice 19 : ✪ Soient $\alpha \in \mathbb{K}, A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $CX \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tels que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver α.

Correction : On sait que $\text{rg}(ABC) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B), \text{rg}(C))$ et que, si $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\text{rg}(M) \leq \min(n,p)$. Par conséquent, $\text{rg}(ABC) \leq 2$. Or, la première et la troisième colonne de ABC ne sont pas proportionnelles donc $\text{rg}(ABC) \geq 2$ si bien que $\text{rg}(ABC) = 2$. De plus :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(ABC) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & \alpha-8 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & \alpha-8 & -2 \end{pmatrix} && (L_3 \leftrightarrow L_2) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & \alpha-8 \end{pmatrix} && (C_3 \leftrightarrow C_2) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & -2 & \alpha-8 \end{pmatrix} && (C_2 \leftarrow C_2/-4) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & \alpha-7 \end{pmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_2)
\end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 7$, alors ABC est de rang 3 ce qui est exclu, et si $\alpha = 7$, alors ABC est de rang 2. En conclusion, $\alpha = 7$.

Exercice 20 : ✪ Donner à chaque fois le rang de $M - \lambda I_3$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ la matrice $M - \lambda I_3$ est-elle non inversible ? Donner alors la dimension de son noyau.

- $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Correction : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour la première matrice :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & 0 & -2 \end{pmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_3) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -2+(1+\lambda)(2-\lambda) \end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 + (1+\lambda)L_1) \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & -\lambda^2+\lambda \end{pmatrix} \\
&= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 \\ 0 & 0 & \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il faut donc distinguer les cas : tout d'abord, si $\lambda = 1$ alors

$$\begin{aligned}
\text{rg}(M - \lambda I_3) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Si $\lambda = 0$ alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\
&= 2
\end{aligned}$$

Enfin, si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$ alors $\mathrm{rg}(M-\lambda I_3) = 3$. En particulier, $M - \lambda I_3$ est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 1$. Passons à présent à la deuxième matrice.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-3-\lambda & -4 & 10\\ -2 & -5-\lambda & 10\\ -1 & -4 & 8-\lambda\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 8-\lambda\\ -2 & -5-\lambda & 10\\ -3-\lambda & -4 & 10\end{pmatrix} && (L_1 \leftrightarrow L_3)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 4 & -8+\lambda\\ -2 & -5-\lambda & 10\\ -3-\lambda & -4 & 10\end{pmatrix} && (L_1 \leftarrow -L_1)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 4 & -8+\lambda\\ 0 & 3-\lambda & -6+2\lambda\\ 0 & 8+4\lambda & 10+(3+\lambda)(-8+\lambda)\end{pmatrix} && (L_2 \leftarrow L_2+2L_1, L_3 \leftarrow L_3+(3+\lambda)L_1)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 4 & -8+\lambda\\ 0 & 3-\lambda & -6+2\lambda\\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2-5\lambda-14\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 4 & \lambda\\ 0 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 8+4\lambda & \lambda^2+3\lambda+2\end{pmatrix} && (C_3 \leftarrow C_3+2C_2)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda & 4\\ 0 & 0 & 3-\lambda\\ 0 & \lambda^2+3\lambda+2 & 8+4\lambda\end{pmatrix} && (C_3 \leftrightarrow C_2)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda & 4\\ 0 & \lambda^2+3\lambda+2 & 8+4\lambda\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{pmatrix} && (L_3 \leftrightarrow L_2)
\end{aligned}$$

On trouve aisément que $\lambda^2+3\lambda+2 = 0 \iff \lambda = -1$ ou $\lambda = -2$ (soit en calculant un discriminant, soit en remarquant que -1 est racine évidente, et le produit des racines fait 2 donc -2 est l'autre racine). On trouve de même que précédemment que si $\lambda = -1, -2$ ou $\lambda = 3$, alors $\mathrm{rg}(M-\lambda I_3) = 2$ et, sinon, $\mathrm{rg}(M-\lambda I_3) = 3$.

Exercice 21 : ✪ Donner le rang des familles suivantes.

1. $((0,1,2,-1),(1,2,2,-1),(0,2,-1,1),(4,6,1,3))$.
2. $((0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0))$.
3. $((0,1,0,1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1))$.
4. $((1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,1),(1,0,2))$.
5. $((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$.
6. $((1,0,2,3),(7,4,2,-1),(5,2,4,7))$.

Correction : Notons à chaque fois F la famille de vecteurs.

1.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(F) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 / -5 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 16/5 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

En particulier (mais ce n'était pas demandé), ces quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$.

2.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(F) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} & L_3 \leftrightarrow L_4 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\
&= 4
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(F) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&-1&-1&1\\0&1&-1&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&1&1&1\\0&1&-1&1\\1&-1&1&1\end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_1\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&1&1&1\\0&1&-1&1\\0&0&2&0\end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 - L_1\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&0\\0&0&2&0\end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - L_2\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&-2&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} && L_4 \leftarrow L_4 + L_3\\
&= 3
\end{aligned}$$

4. Tout d'abord, les vecteurs sont forcément liés et de rang inférieur ou égal à 3 car on a quatre vecteurs en dimension 3.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(F) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-1&1&1&0\\1&-1&1&2\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1\\
&= 2
\end{aligned}$$

puisqu'on arrive à un point où il y a deux vecteurs lignes libres.

5.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(F) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&-1&0&-2\\0&1&1&1\\1&0&1&-1\end{pmatrix}\\
\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2&0\\0&-2&-2&-2\\0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\end{pmatrix} & && L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1\\
&= 2
\end{aligned}$$

car on a deux vecteurs lignes libres.

6.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(F) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&7&5\\0&4&2\\2&2&4\\3&-1&7\end{pmatrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&7&5\\0&4&2\\0&-12&-6\\0&-22&-8\end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&0&2\\0&0&-6\\0&-6&-8\end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - 2C_3\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&-3&5\\0&-6&-8\\0&0&2\\0&0&-6\end{pmatrix} && L_2 \leftrightarrow L_4\\
&= 3
\end{aligned}$$

car les trois premières lignes forment une matrice de rang 3 et on sait que la matrice est de rang inférieur ou égal à 3.

Exercice 22 : ✪ Donner une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Correction : On pourrait trouver le noyau à l'aide d'un système d'équation, en résolvant le système $AX = 0$ avec $X = (x, y, z)$ (ou plutôt une matrice colonne de taille 3), mais ici on peut aller plus vite : A est de rang 2 car a deux colonnes linéairement indépendantes (la troisième colonne est proportionnelle à la deuxième, et les deux premières ne sont pas proportionnelles) donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) = 1$: il suffit donc de donner un vecteur non nul du noyau (un vecteur non nul est une famille libre, et une famille libre à un élément dans un espace de dimension 1 est une base), et puisque $3u(e_2) = 2u(e_3)$, alors, par linéarité de u (u étant l'AL de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ canoniquement associée à A), $u(3e_2 - 2e_3) = 0$ si bien que $3e_2 - 2e_3 = (0, 3, 2) \in \ker(u)$ donc forme une base de $\ker(u)$.

Exercice 23 : ✪ Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$$

et, dans chacun des cas, donner une base du noyau de A.

Correction : On va donc expliciter le noyau de A (et non pas calculer le rang en faisant comme d'habitude) car on demande une base du noyau (et le théorème du rang permettra de donner le rang de la matrice). Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ (qu'on identifie à la matrice colonne ayant les mêmes coordonnées).

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) \quad &\iff \quad AX = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & 0 \\ (1+m)x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & my & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-m)z & = & 0 \\ & - & (m+2)y & + & (1+m)z & = & 0 \\ & - & (m+2)y & + & (1+2m)z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & y & + & (1-m)z & = & 0 & \\ & - & (m+2)y & + & (1+m)z & = & 0 & \\ & & & & mz & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Tout d'abord, si $m \neq 0$ et $m \neq -2$, alors $(0, 0, 0)$ est l'unique solution donc $\ker(A) = \{0\}$ si bien que (d'après le théorème du rang), $\operatorname{rg}(A) = 0$ (et A est inversible).

Supposons que $m = 0$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) \quad &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccc} x & + & z & = & -y \\ & & z & = & 2y \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -3y \\ z & = & 2y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

si bien que $\ker(A) = \operatorname{Vect}(-3, 1, 2)$ donc $(-3, 1, 2)$ est une base de $\ker(A)$ et $\operatorname{rg}(A) = 2$. Supposons enfin que $m = -2$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A) \quad &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \\ & & & & -2z & = & 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -y \\ z & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\ker(A) = \text{Vect}(1,-1,0)$ donc $(1,-1,0)$ est une base de $\ker(A)$ et $\text{rg}(A) = 2$.

Exercice 24 : ✪ Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Donner le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & ac & ad & bd \end{pmatrix}$$

Correction :

$$\begin{aligned} \text{rg}(A) &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & d-c & d-c \\ 0 & 0 & a(d-c) & bd-ac \end{pmatrix} \\ &= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & d-c & d-c \\ 0 & 0 & 0 & (b-a)d \end{pmatrix} \qquad L_4 \leftarrow L_4 - aL_3 \end{aligned}$$

Si $a = b$, alors :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-c & d-c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $d = c$ alors $\text{rg}(A) = 1$, et sinon $\text{rg}(A) = 2$ (deux colonnes libres). Supposons donc $b \neq a$ mais $d = c$:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b-a)d \end{pmatrix}$$

On suppose donc que $b - a \neq 0$. Si $d = c = 0$ alors $\text{rg}(A) = 2$ et si $d = c \neq 0$ alors $\text{rg}(A) = 3$. Supposons enfin que $b \neq a$, $c \neq d$. Si $d = 0$ alors $\text{rg}(A) = 3$ et si $d \neq 0$, alors $\text{rg}(A) = 4$. En particulier, A est inversible si et seulement si $a \neq b, c \neq d$ et $d \neq 0$.

Exercice 25 : ✪ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner $\ker(A)$ et $\text{Im}(A)$.
2. En déduire le noyau et l'image de $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ canoniquement associée à A.

Correction :

1. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ (qu'on identifie à la matrice colonne de taille 3 avec les mêmes coordonnées).

$$\begin{aligned} X \in \ker(A) &\iff AX = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} x - 3y = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x - 3y = 0 \\ -2y + 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 3z \\ y = z \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que

$$\ker(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

D'après le théorème du rang, $\text{Im}(A)$ est de dimension 2 et $(1, -1, 0)$ et $(-3, 1, 1)$ sont libres (car non colinéaires) dans l'image donc en forment une base, c'est-à-dire :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

2. Il découle de la question précédente que $\ker(u) = \text{Vect}(3, 1, 1)$ et $\text{Im}(u) = \text{Vect}((1, -1, 0), (-3, 1, 1))$. Cependant, quand on écrit $(3, 1, 1)$, etc. il faut bien comprendre que ce sont les coordonnées dans les bases des espaces de départ et d'arrivée, c'est-à-dire la base canonique $(1, X, X^2)$. Finalement, $\ker(u) = \text{Vect}(3 + X + X^2)$ et $\text{Im}(u) = \text{Vect}(1 - X, -3 + X + X^2)$.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + a\overline{z} \end{cases}$$

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$.
3. Déterminer les noyau et image de f.

Correction :

1. La $\mathbb{R}$-linéarité est immédiate et se prouve comme dans l'exercice 12 du chapitre 29. Pour montrer que f n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire, on peut dire par exemple que $f(1) = 1 + a$ et $f(i) = i - ia$ mais $a \neq 0$ donc $1 + a \neq 1 - a$ donc $f(i) = i(1 - a) \neq i(1 + a) = if(1)$.
2. Notons $a = \text{Re}(a) + i\text{Im}(a)$. Dès lors, $f(1) = 1 + \text{Re}(a) + i\text{Im}(a)$ et

$$\begin{aligned} f(i) &= i - i(\text{Re}(a) + i\text{Im}(a)) \\ &= \text{Im}(a) + i(1 - \text{Re}(a)) \end{aligned}$$

En conclusion, la matrice cherchée est :

$$\text{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(1) & f(i) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 + \text{Re}(a) & \text{Im}(a) \\ \text{Im}(a) & 1 - \text{Re}(a) \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ i \end{array}$$

3. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\iff x + iy + (\text{Re}(a) + i\text{Im}(a))(x - iy) = 0 \\ &\iff (x + \text{Re}(a)x + \text{Im}(a)y) + i(y + \text{Im}(a)x - \text{Re}(a)y) = 0 \\ &\iff \begin{cases} \text{Im}(a)x + (1 - \text{Re}(a))y = 0 \\ (1 + \text{Re}(a))x + \text{Im}(a)y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Supposons que $\text{Im}(a) = 0$. Alors :

$$f(z) = 0 \iff \begin{cases} (1 - \text{Re}(a))y = 0 \\ (1 + \text{Re}(a))x = 0 \end{cases}$$

Si $\text{Re}(a) \neq \pm 1$, alors $f(z) = 0 \iff x = y = 0$: $\ker(f) = \{0\}$, et d'après le théorème du rang, $\dim(\text{Im}(f)) = 2$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{C}$, f est surjective.

Supposons que $\text{Re}(a) = 1$. Alors $f(z) = z + \overline{z}$: $\ker(f) = i\mathbb{R}$ et $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$. De même, si $\text{Re}(a) = -1$, alors $f(z) = z - \overline{z}$ si bien que $\ker(f) = \mathbb{R}$ et $\text{Im}(f) = i\mathbb{R}$.

Supposons à présent que $\mathrm{Im}(a) \neq 0$. Alors :

$$f(z)=0 \iff \begin{cases} x & + & \dfrac{(1-\mathrm{Re}(a))y}{\mathrm{Im}(a)} & = & 0 \\ (1+\mathrm{Re}(a))x & + & \mathrm{Im}(a)y & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \quad + & \dfrac{(1-\mathrm{Re}(a))y}{\mathrm{Im}(a)} & = & 0 \\ & \dfrac{\mathrm{Im}(a)^2-1+\mathrm{Re}(a)^2 y}{\mathrm{Im}(a)} & = & 0 \end{cases}$$

Si $a \notin \mathbb{U}$ i.e. si $\mathrm{Re}(a)^2+\mathrm{Im}(a)^2 \neq 1$ alors on trouve de même que $\ker(f)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{C}$. Supposons enfin que $a \in \mathbb{U}$. Alors :

$$f(z)=0 \iff \begin{cases} x & + & \dfrac{(1-\mathrm{Re}(a))y}{\mathrm{Im}(a)} & = & 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\ker(f)$ est la droite d'équation $x+\dfrac{1-\mathrm{Re}(a)}{\mathrm{Im}(a)}y=0$. De plus, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 1 (théorème du rang) et $f(1)=1+a\neq 0$ (car $a\neq -1$) donc $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Vect}(1+a)$.

Exercice 27 : ✪✪ Soit

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de $A-\lambda I_3$.
2. Lorsque $\ker(A-\lambda I_3) \neq \{0\}$, en donner une base.
3. Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A=P^{-1}DP$. En déduire A^n en fonction de n, pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. **Remake :** Recommencer l'exercice avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 3 & -2-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -\lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} && C_1 \leftrightarrow C_3 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 1-\lambda & 2 & -2 \end{pmatrix} && L_1 \leftarrow -L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 2+2(1-\lambda) & -2-\lambda(1-\lambda) \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3-(1-\lambda)L_1 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 4-2\lambda & -2-\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 8 & -8-\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3-2L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & -2-\lambda & 3 \\ 0 & 1 & (-8-\lambda+\lambda^2)/8 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3/8 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 1 & (-8-\lambda+\lambda^2)/8 \\ 0 & -2-\lambda & 3 \end{pmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 1 & (-8-\lambda+\lambda^2)/8 \\ 0 & 0 & 3+(2+\lambda)\times(-8-\lambda+\lambda^2)/8 \end{pmatrix} && L_3 \leftarrow L_3+(2+\lambda)L_2 \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -2 & \lambda \\ 0 & 1 & (-8-\lambda+\lambda^2)/8 \\ 0 & 0 & (\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8)/8 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3)=3$ si et seulement si $\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8\neq 0$, et sinon on a $\operatorname{rg}(A)=0$. Or, 1 est solution évidente de l'équation $\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8=0$, si bien qu'on peut factoriser $\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8$ par $(\lambda-1)$: il existe (a,b,c) tel que, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$,

$$\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8=(\lambda-1)(a\lambda^2+b\lambda+c)$$

On trouve comme d'habitude $a=1, c=-8$ et $b=2$ si bien que

$$\lambda^3+\lambda^2-10\lambda+8=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda-8)$$

On trouve finalement que $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3)=3$ sauf si $\lambda=1,2$ ou -4, et alors $\operatorname{rg}(A-\lambda I_3)=2$.

2. D'après le théorème du rang, si $\lambda=1,2,-4$, $\dim\ker(A-\lambda I_3)=1$ donc, pour en donner une base, il suffit d'en exhiber un vecteur non nul. Commençons par $\lambda=1$: soit $X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ (qu'on identifie au vecteur colonne ayant les mêmes coordonnées).

$$
\begin{aligned}
X \in \ker(A-I_3) &\iff (A-I_3)X = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & 3y & & & = & 0 \\ -2x & + & 2y & & & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lllcl} x & & & = & z \\ x & y & & = & y \end{array} \right.
\end{aligned}
$$

si bien que $e_1 = (1,1,1) \in \ker(A-I_3)$ et donc en forme une base. On trouve de même que $e_2 = (2,3,2)$ forme une base de $\ker(A-2I_3)$ et que $e_3 = (2,-3,2)$ forme une base de $\ker(A+4I_3)$.

3. On prouve comme d'habitude que $B' = (e_1, e_2, e_3)$ est libre (même si on pourrait s'en passer à l'aide de l'exercice 23 du chapitre 29, et vous pourrez l'affirmer directement l'année prochaine) donc une base car une famille libre en dimension 3. Or, d'après ce qui précède, $Ae_1 = e_1, Ae_2 = 2e_2$ et $Ae_3 = -4e_3$ si bien que la matrice de A dans la base B' est :

$$
D = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A(e_1) & A(e_2) & A(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}
$$

On a ensuite, par la formule de changement de base, étant donné que si on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A, $D = \mathrm{Mat}_{B'}(u)$ et $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ (avec B la base canonique) : $D = P_{B',B} A P_{B,B'}$. Il suffit de poser $P = P_{B,B'}$ i.e. (si on note, une fois n'est pas coutume, f_1, f_2, f_3 les vecteurs de la base canonique) :

$$
P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}
$$

4. On trouve de même :
   - que $A - \lambda I_3$ est de rang 3 sauf si $\lambda = 4$, et alors $\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) = 2$, ou si $\lambda = 1$, et alors $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = 1$.
   - On trouve de même que $e_1 = (1,1,1)$ est une base de $\ker(A-4I_3)$ et que $e_2 = (1,0,-1)$ et $e_3 = (0,1,-1)$ forment une base de $\ker(A-I_3)$ (ici, il faut deux vecteurs libres puisque cet espace est de dimension 2 d'après le théorème du rang).
   - Dans cette nouvelle base, la matrice de l'endomorphisme associé à A est

$$
D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

et la matrice de passage associée est

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
$$

Exercice 28 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $A_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $A_{i,j} = a$ sinon. Donner le rang de A en fonction de a.

Correction : On a donc :

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}
$$

On a donc :

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a-1 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ a-1 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a-1 & 0 & 0 & \cdots & 1-a \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \dots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_1, L_n \leftarrow L_n - L_1$$

En faisant $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + \cdots + C_n$:

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1+(n-1)a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 1-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1-a \end{pmatrix}$$

Il y a plusieurs cas de figure : si $a = 1$, alors $\operatorname{rg}(A) = 1$ ce qui se voit directement puisque toutes les lignes de A sont égales. L'autre cas de figure est $1 + (n-1)a = 0$ i.e. $a = -1/(n-1)$ (si $n \geq 2$) et alors le rang vaut $n - 1$.

Exercice 29 - Ou pourquoi les professeurs de mathématiques doivent avoir de l'imagination : ✪✪ Donner le rang de la matrice $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Correction : Notons cette matrice M. M contient tous les nombres de 1 à n^2.

$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & n & 2n & \cdots & (n-1)n \\ 2 & n & 2n & \cdots & (n-1)n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & 2n & \cdots & (n-1)n \end{pmatrix} \quad (C_i \leftarrow C_i - C_1 \text{ pour tout } i \geq 2)$$

et on se rend compte que cette matrice est de rang 2 : en effet, C_1 et C_2 sont libres et toutes les colonnes à partir de la deuxième sont proportionnelles à C_2. Il y a donc deux vecteurs libres parmi les vecteurs colonnes, et le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes, donc $\operatorname{rg}(M) = 2$. En particulier, si $n \geq 3$, alors M n'est pas inversible, ce qui implique (par exemple) que

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible : quand je veux vous donner une matrice 3×3 à inverser, je ne peux pas vous donner celle-ci car elle n'est pas inversible, il faut donc que je réfléchisse un peu (d'où le titre de cet exercice).

Exercice 30 - Le rang est invariant par extension de corps : ✪✪

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont égaux.
2. Plus généralement, soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps quelconques. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{L})$. Montrer que le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{L})$ sont égaux.

Correction : Faisons directement la deuxième question. On obtient le rang à l'aide d'opérations élémentaires en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß à M pour la transformer en matrice échelonnée. Or, celui-ci ne fait intervenir que des coefficients de M donc des éléments de $\mathbb{K}$ mais également des éléments de $\mathbb{L}$ donc, qu'on se place dans $\mathbb{K}$ ou dans $\mathbb{L}$, les opérations effectuées dans l'algorithme du pivot de Gauß seront les mêmes donc donneront le même rang.

Exercice 31 - Sur les matrices de rang 1 : ✪✪✪

1. Donner toutes les matrices qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe X et Y deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = XY^\top$.
3. Soient $A_1 = X_1Y_1^\top$ et $A_2 = X_2Y_2^\top$ deux matrices de rang 1. À quelle condition nécessaire et suffisante A_1 et A_2 sont-elles colinéaires ? sont-elles égales ?
4. Soit $A = XY^\top$ de rang 1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$. Plus précisément, exprimer A^p à l'aide de A et de $\mathrm{tr}\,(A)$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $(I_n + A)^k$.

Correction :

1. Les matrices élémentaires $E_{i,j}$ sont de rang 1 car ont une seule colonne non nulle. Par conséquent, une matrice qui commute avec toutes les matrices de rang 1 commute avec tous les $E_{i,j}$ donc avec toute matrice car toute matrice est combinaison linéaire des $E_{i,j}$. Par conséquent, d'après l'exercice 31 du chapitre 21, une matrice qui commute avec toutes les matrices de rang 1 est une homothétie (on peut aussi utiliser l'activité vue en classe : un endomorphisme qui commute avec tous les autres est une homothétie, et on sait que « matrices, AL : même combat »). La réciproque est évidente puisque les homothéties commutent avec tout le monde donc avec toutes les matrices de rang 1. En conclusion : les matrices qui commutent avec toutes les matrices de rang 1 sont exactement les homothéties, i.e. les matrices de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Supposons qu'il existe X, Y deux vecteurs colonnes non nuls tels que $A = XY^\top$. Alors X et Y sont de rang 1 : en effet, une matrice de taille $n \times p$ a un rang inférieur ou égal au minimum entre n et p, donc X et Y sont de rang ≤ 1, et X et Y sont non nuls donc de rang 1. De plus, $\mathrm{rg}(Y^\top) = \mathrm{rg}(Y)$ si bien que $\mathrm{rg}(A) \leq \min(\mathrm{rg}(X), \mathrm{rg}(Y^\top)) = 1$. Or, X et Y sont non nuls : il existe i et j tel que $X_i \neq 0$ et $Y_j \neq 0$. Or, le coefficient d'indice (i,j) de A est $X_iY_j \neq 0$ donc A est non nulle donc de rang 1.

   Réciproquement, supposons A de rang 1. Alors toutes ses colonnes sont proportionnelles et l'une d'elles est non nulle, disons la colonne i, si bien que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tel que $C_j = \alpha_j C_i$. Notons $X = C_i$ et $Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}^\top$. Alors la j-ième colonne de $XY^\top$ est $\alpha_j C_i = C_j$ donc la j-ième colonne de A si bien que $XY^\top = A$, et X et Y sont non nuls car $C_i \neq 0$ et $\alpha_i = 1$.
3. Supposons A_1 et A_2 proportionnelles : il existe λ (non nul puisque A_1 et A_2 sont de rang 1 donc non nulles) tel que $A_2 = \lambda A_1$. Les colonnes de A_1 sont proportionnelles à X_1 et les colonnes de A_2 sont proportionnelles à X_2, et les constantes de proportionnalité sont les éléments de Y_1 (respectivement Y_2). Ainsi, A_1 et A_2 sont proportionnelles donc X_1 et X_2 sont proportionnels : il existe α (non nul) tel que $X_2 = \alpha X_1$ si bien que $A_2 = \alpha X_1 Y_2^\top = \lambda A_1 = \lambda X_1 Y_1^\top$ et en particulier $\alpha X_1 Y_2^\top = \lambda X_1 Y_1^\top$ donc $X_1(\alpha Y_2^\top - \lambda Y_1^\top) = X_1(\alpha Y_2 - \lambda Y_1)^\top = 0$. Or, on a vu que si Y est un vecteur colonne non nul, alors $X_1 Y^\top$ est de rang 1 : on en déduit que $\alpha Y_2 - \lambda Y_1 = 0$ donc $Y_2 = (\lambda/\alpha) Y_1$ donc Y_1 et Y_2 sont proportionnels. La réciproque est évidente, si bien que A_1 et A_2 sont proportionnelles si et seulement si X_1 et X_2 d'une part, et Y_1 et Y_2 d'autre part, sont proportionnels (mais pas forcément avec la même constante de proportionnalité).

   Le même raisonnement avec $\lambda = 1$ montre que si $A_1 = A_2$ alors il existe $\alpha \neq 0$ tel que $X_2 = \alpha X_1$ et $Y_2 = (1/\alpha) Y_1$, et la réciproque est évidente donc : $A_1 = A_2$ si et seulement s'il existe $\alpha \neq 0$ tel que $X_2 = \alpha X_1$ et $Y_2 = (1/\alpha) Y_1$.
4. On a $A^0 = I_p$ et $A^1 = 1$. Supposons $p \geq 2$. Il est évident que X et $Y^\top$ ne commutent pas, pour la simple raison que $XY^\top$ est carrée de taille n et $Y^\top X$ est carrée... de taille 1 ! En effet, on multiplie un vecteur ligne, à gauche, par un vecteur colonne, à droite. On identifiera donc $Y^\top X$ à l'élément contenu dans cette matrice (de taille 1). Plus précisément :

   $$Y^\top X = \sum_{k=1}^{n} Y_k X_k$$

   Or, on sait que le coefficient d'indice (i,j) de $A = XY^\top$ est X_iY_j si bien que $Y^\top X = \mathrm{tr}\,(A)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
A^p &= \underbrace{A\times\cdots\times A}_{p \text{ fois}}\\
&= \underbrace{XY^\top \times XY^\top \times \cdots \times XY^\top}_{p \text{ fois}}\\
&= X\times \underbrace{Y^\top X\times Y^\top X\times\cdots\times Y^\top X}_{p-1 \text{ fois}}\times Y^\top\\
&= X\times \mathrm{tr}\,(A)^{p-1}\times Y^\top\\
&= \mathrm{tr}\,(A)^{p-1}\times A
\end{aligned}$$

et cette égalité est encore valable pour $p=1$, mais pas pour $p=0$! Soit enfin $k\in\mathbb{N}^*$. I_n et A commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

$$\begin{aligned}
(I_n+A)^k &= \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}A^p {I_n}^{k-p}\\
&= A^0+\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}A^p\\
&= I_n+\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}(\mathrm{tr}\,(A))^{p-1}A
\end{aligned}$$

Si $\mathrm{tr}\,(A)=0$ alors seul le terme d'indice $p=1$ est non nul et il vaut kA donc $(I_n+A)^k=I_n+kA$. Supposons donc $\mathrm{tr}\,(A)\neq 0$:

$$\begin{aligned}
(I_n+A)^k &= I_n+\frac{1}{\mathrm{tr}\,(A)}\left(\sum_{p=1}^{k}\binom{k}{p}(\mathrm{tr}\,(A))^p\right)A\\
&= I_n+\frac{1}{\mathrm{tr}\,(A)}\times\left[(1+\mathrm{tr}\,(A))^k-1\right]\times A
\end{aligned}$$

Exercice 32 : ✪✪✪

1. Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Donner le rang de la matrice $A_\alpha\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\cos((i+j-2)\alpha)$.
2. **Remake :** Calculer le rang de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est égal à $\sin(i+j)$.

Correction :

1. Soit $(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2$. En appliquant la formule de trigo $\cos(a-b)$ avec $a=i+j-\alpha$ et $b=\alpha$, puis $\sin(a)\sin(b)$ avec les mêmes paramètres :

$$\begin{aligned}
(A_\alpha)_{i,j} &= \cos((i+j-2)\alpha)\\
&= \cos((i+j-1)\alpha)\cos(\alpha)+\sin((i+j-1)\alpha)\sin(\alpha)\\
&= \cos((i+j-1)\alpha)\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\left(\cos((i+j-2)\alpha)-\cos((i+j)\alpha)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\cos((i+j)\alpha)=2\cos((i+j-1)\alpha)\cos(\alpha)-\cos((i+j-2)\alpha)$$

c'est-à-dire que la colonne d'indice $j+2$ est CL des deux colonnes précédentes. Rappelons que, lorsqu'on calcule le rang, on peut supprimer des vecteurs CL des autres. Dès lors, si on note $C_1,\dots,C_n$ les vecteurs colonnes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A_\alpha) &= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_n) \\
&= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_{n-1}) \\
&= \mathrm{rg}(C_1, \dots, C_{n-2}) \\
&= \cdots \\
&= \mathrm{rg}(C_1, C_2)
\end{aligned}$$

On se demande si les deux premières colonnes sont libres. Or, celles-ci sont égales à :

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \cos(2\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ \cos((n-1)\alpha) & \cos(n\alpha) \end{pmatrix}$$

Pour passer de $A_{1,1}$ à $A_{1,2}$, on multiplie par $\cos(\alpha)$. Par conséquent, si $\cos(2\alpha) \neq \cos^2(\alpha)$, alors C_1 et C_2 sont non proportionnelles, et alors $\mathrm{rg}(A) = 2$. Or, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) &\iff 2\cos^2(\alpha) - 1 = \cos^2(\alpha) \\
&\iff \cos^2(\alpha) = 1 \\
&\iff \alpha \equiv 0[\pi]
\end{aligned}$$

Dès lors, si $\alpha \not\equiv 0[\pi]$, alors C_1 et C_2 sont non proportionnelles, et $\mathrm{rg}(A) = 2$. Supposons $\alpha \equiv 0[\pi]$. Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, alors $C_1 = C_2$ (la colonne dont tous les coefficients valent 1) et donc $\mathrm{rg}(A) = 1$. Enfin, si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, on a

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ (-1)^{n-1} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ (-1)^{n} \end{pmatrix} = -C_1$$

et on a encore $\mathrm{rg}(A) = 1$. Par conséquent, $\mathrm{rg}(A) = 2$ si $\alpha \not\equiv 0[\pi]$, et $\mathrm{rg}(A) = 1$ si $\alpha \equiv 0[\pi]$.

2. En appliquant la formule $\sin(a+b)$ avec $a = i + j - 1$ et $b = 1$, le raisonnement est analogue, et on trouve que le rang de la matrice vaut 2.

Exercice 33 : ✪✪✪ Soient S une famille de n vecteurs de rang s et S' une sous-famille de S de n' vecteurs de rang s'. Montrer que $n - s \geq n' - s'$.

Correction : Notons $S = (e_1, \dots, e_n)$. Puisque S est de rang s, on peut extraire s vecteurs libres de S. Quitte à renuméroter les vecteurs, on suppose donc que $e_1, \dots, e_s$ sont libres.

De même, on peut écrire $S' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n'})$ avec $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s'}$ libres. Or, ces vecteurs sont aussi des vecteurs de S puisque S' est une sous-famille de S.

L'idée est qu'il ne peut pas y avoir plus de vecteurs superflus dans S' que dans S car S' est incluse dans S : si c'est le cas, cela va faire trop de vecteurs superflus, que l'on pourra donc « supprimer ». On sait que $\varepsilon_{s'+1}, \dots, \varepsilon_{n'}$ sont CL de $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s'}$. Puisque cette famille est extraite de S, cela signifie que, parmi les vecteurs de S, les vecteurs $\varepsilon_{s'+1}, \dots, \varepsilon_{n'}$ sont CL d'autres vecteurs de S : par conséquent,

$$\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}(\underbrace{S \backslash \{\varepsilon_{s'+1}, \dots, \varepsilon_{n'}\}}_{\text{de cardinal } n - (n' - s')})$$

Il en découle que $\mathrm{Vect}(S)$ est engendré par $n - (n - s')$ éléments donc est de dimension inférieure ou égale à $n - (n' - s')$. Or, $\mathrm{Vect}(S)$ est de dimension s, donc $s \leq n - (n' - s')$ ce qui permet de conclure.

Exercice 34 : ✪✪✪✪

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Donner le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

2. Si p est un nombre premier et G est un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha \times m$ avec $m \wedge p = 1$ et $\alpha \geq 1$ (cf. DM nº 13), un p-Sylow de G est un sous-groupe S de G de cardinal p^α, c'est-à-dire qu'un p-Sylow est un sous-groupe dont le cardinal est égal à la plus grande puissance de p possible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet un p-Sylow.

Correction :

1. La difficulté consiste à trouver la caractérisation la plus pratique des matrices inversibles pour cet exercice. On va utiliser le fait qu'une matrice est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une famille libre. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, dont on note les vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$, et montrons que M est inversible si et seulement si, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $C_i \notin \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{i-1})$.

   Si M est inversible, alors pour tout i, la famille $(C_1, \dots, C_i)$ est libre (car sous-famille de $(C_1, \dots, C_n)$ qui est libre) donc aucun vecteur n'est CL des autres, donc, pour tout i, $C_i \notin \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{i-1})$. Réciproquement, supposons que, pour tout i, $C_i \notin \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{i-1})$. Alors, pour tout i, $(C_1, \dots, C_i)$ est une famille libre (cf. chapitre 28 : quand on ajoute à une famille libre un vecteur qu'elle n'engendre pas, alors la famille reste libre) et en particulier $(C_1, \dots, C_n)$ est libre : M est inversible. D'où l'équivalence.

   Notons $q = \mathrm{card}(\mathbb{K})$, si bien que $\mathbb{K}^n$ est de cardinal q^n : les vecteurs colonnes sont en effet des éléments de $\mathbb{K}^n$.
   - Il y a $q^n - 1$ façons de choisir C_1 : tous les éléments de $\mathbb{K}^n$ à l'exception du vecteur nul.
   - C_2 doit être choisi dans $\mathbb{K}^n \backslash \mathrm{Vect}(C_1)$: or, $\mathrm{Vect}(C_1) = \{\lambda C_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ donc est de cardinal q (C_1 est non nul donc les λC_1 sont tous distincts, ou alors on peut dire que $\lambda \mapsto \lambda C_1$ est bijective de $\mathbb{K}$ dans $\mathrm{Vect}(C_1)$: surjective par définition, et injective car C_1 est non nul). Tout ça pour dire qu'on a $q^n - q$ choix possibles pour C_2.
   - C_3 doit être choisi dans $\mathbb{K}^n \backslash \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$: or, $\mathrm{Vect}(C_1, C_2) = \{\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \,|\, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$. L'application $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ est surjective de $\mathbb{K}^2$ dans $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ par définition de $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$, et elle est linéaire. De plus, si (λ_1, λ_2) est dans son noyau, alors $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ puisque C_1 et C_2 sont libres : cette application est injective donc bijective donc $\mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ est de cardinal q^2. Tout ça pour dire qu'il y a $q^n - q^2$ choix pour C_3.
   - Un raisonnement analogue prouve que, pour tout i, C_i doit être choisi dans $\mathbb{K}^n \backslash \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_{i-1})$ donc il y a $q^n - q^{i-1}$ choix pour C_i.

   Par principe multiplicatif, il y a $(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$ choix pour les vecteurs colonnes, donc pour M. En conclusion, si on note $q = \mathrm{card}(\mathbb{K})$ (qui est une puissance d'un nombre premier, donc de la forme p^f, d'après l'exercice 56 du chapitre 30), alors :

$$\mathrm{card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

2. On a donc $q = p$ dans cette question (puisque $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments). Commençons par expliciter α et m pour savoir le cardinal du sous-groupe que nous devons trouver. En mettant p en facteur autant de fois que possible :

$$\begin{aligned} \mathrm{card}(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})) &= (p^n - 1) \times p(p^{n-1} - 1) \times p^2(p^{n-2} - 1) \times \cdots \times p^{n-1}(p - 1) \\ &= p^{1+2+\cdots+n-1} \times (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \times \cdots \times (p - 1) \\ &= p^{n(n-1)/2} \times (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \times \cdots \times (p - 1) \end{aligned}$$

   Posons $m = (p^n - 1)(p^{n-1} - 1) \times \cdots \times (p - 1)$. Pour tout k, $p^k - 1 \equiv -1[p]$ donc est premier avec p d'après le théorème de Bézout. Par produit, m est bien premier avec p si bien que $\alpha = n(n-1)/2$. Il suffit donc d'exhiber un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de cardinal $p^{n(n-1)/2}$. On définit S comme l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (de taille n) à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, avec des 1 sur la diagonale (le 1 de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ évidemment, et le 0 de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sous la diagonale). Montrons que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.
   - Les éléments de S sont bien inversibles car triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux tous non nuls (dans le chapitre 33, on dira aussi que son déterminant vaut 1 donc est non nul donc la matrice est inversible).
   - Un produit de matrices triangulaires supérieure est triangulaire supérieure, et les termes diagonaux s'obtiennent par multiplication terme à terme, donc si les coefficients diagonaux valent 1, ceux du produit également. En d'autres termes, S est stable par produit.
   - Enfin, soit $M \in S$. Alors M^{-1} est triangulaire supérieure (cf. cours) et, si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses coefficients diagonaux, les coefficients diagonaux de MM^{-1} sont donc $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Or, ceux-ci sont égaux à 1 car $MM^{-1} = I_n$ si bien que les λ_i sont tous égaux à 1 : $M^{-1} \in S$, S stable par inverse, c'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL} - n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

   Enfin, un élément de S est entièrement déterminé par les $n(n-1)/2$ éléments au-dessus (au sens strict) de la diagonale et pour chacun il y a p choix possibles (on les pioche dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). Par principe multiplicatif, S est de cardinal $p^{n(n-1)/2}$: on a bien un p-Sylow.

Remarque : C'est le dernier argument qui nous manquait pour finir la démonstration du premier théorème de Sylow (cf. DM nº 13).

31.3 Trace

Exercice 35 : ✪

1. Montrer que, pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB - BA \neq I_n$.
2. On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$u : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{cases} E \longrightarrow \quad E \\ f \longmapsto \mathrm{Id}_E \times f \end{cases}$$

Vérifier que u et v sont des endomorphismes de E vérifiant $uv - vu = \mathrm{Id}_E$. Comment expliquer l'apparent paradoxe entre cette question et la précédente ?

Correction :

1. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(AB - BA) &= \mathrm{tr}\,(AB) - \mathrm{tr}\,(BA) \quad &&\text{(Linéarité de la trace)} \\ &= 0 &&(\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)) \end{aligned}$$

donc $AB - BA \neq I_n$ puisque $\mathrm{tr}\,(I_n) = n$.

2. Le fait que u et v soient linéaire est immédiat. u est bien à valeurs dans E car la dérivée d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ est encore $\mathscr{C}^\infty$, et si f est $\mathscr{C}^\infty$, alors $v(f)$ est la fonction $x \mapsto xf(x)$ donc est $\mathscr{C}^\infty$ par produit : v est bien à valeurs dans E donc u et v sont des endomorphismes.

Soit $f \in E$. Pour tout $x \in \mathbb{R} : v(f)(x) = xf(x)$ donc $v(f)'(x) = f(x) + xf'(x)$. En d'autres termes, $uv(f) = f + \mathrm{Id}_E \times f'$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} (uv - vu)(f) &= u \circ v(f) - v \circ u(f) \\ &= f + \mathrm{Id}_E \times f' - \mathrm{Id}_E \times f' \\ &= f \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'on a bien $uv - vu = \mathrm{Id}_E$: cela ne contredit pas la question précédente car on est en dimension infinie ! Ce n'est qu'en dimension finie que c'est impossible.

Exercice 36 : ✪✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer la trace de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

Correction : Soit A la matrice canoniquement associée à u si bien que

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} u(1) & u(X) & u(X)^2 & u(X)^3 & \dots & u(X)^n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & & \cdots & \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & & \cdots & \\ & & & & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \cdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$$

On a donc une matrice de taille $(n+1) \times (n+1)$. Soit donc $(i, j) \in [\![1\,;\, n+1]\!]^2$. Le coefficient $A_{i,j}$ en ligne i et j est la coordonnée selon X^{j-1} de $u(X)^{i-1}$: il y a en effet un décalage puisque les lignes et colonnes des matrices sont numérotées à partir du rang 1 mais les polynômes à partir de la puissance 0 (et c'est classique, cf. exercices 10, 15 et 64), on voit par exemple que la troisième colonne correspond à $u(X)^2$ et que la quatrième ligne correspond à X^3. Or,

$$u(X)^{j-1} = (aX + b)^{j-1} \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (aX)^k b^{j-1-k}$$

En prenant $k = i - 1$, le coefficient de X^{i-1} est $\binom{j-1}{i-1} a^{i-1} b^{j-i}$ et c'est donc la valeur de $A_{i,j}$ (et il est nul si $i > j$ donc la matrice est triangulaire supérieure). En particulier, $A_{i,i} = a^{i-1}$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(u) &= \operatorname{tr}(A) \\
& \sum_{i=1}^{n+1} a^{i-1} \\
& \sum_{k=0}^{n} a^k
\end{aligned}$$

quantité qui vaut $n+1$ si $a=1$ et $\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}$ sinon. Remarquons que cette quantité ne dépend pas de b.

Exercice 37 - Le dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\operatorname{tr}\left(A \times A^\top\right)$. En déduire que

$$f\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \quad A \quad \longmapsto \quad f_A \end{cases}$$

où f_A est l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$, est un isomorphisme.

Correction : Montrons que f est linéaire. Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Par linéarité de la trace, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{tr}((\lambda A + \mu B)M) = \lambda \operatorname{tr}(AM) + \mu \operatorname{tr}(BM)$$

c'est-à-dire que les fonctions (car ce sont des fonctions) $f(\lambda A+\mu B)$ et $\lambda f(A)+\mu f(B)$ coïncident en toute matrice M donc sont égales : f est bien linéaire. Puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K})$ sont de même dimension finie ($\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension $\dim(E)\times\dim(F)$), pour prouver que f est bijective, il suffit de prouver qu'elle est injective. Soit donc $A \in \ker(f)$. Alors $f(A) = 0$ c'est-à-dire que f_A est l'application nulle, c'est-à-dire que pour toute matrice M, $f_A(M) = 0$. C'est en particulier vrai pour $M = A^\top$ (il sera évident qu'il faut prendre $A^\top$ après le chapitre 34, et si on se place sur $\mathbb{C}$, il faut prendre $M = \overline{A}^\top$, exo). Or, pour tout i :

$$\begin{aligned}
(AA^\top)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}(A^\top)_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}A_{i,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} {A_{i,k}}^2
\end{aligned}$$

Or, on est sur $\mathbb{R}$ donc les carrés sont positifs et une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. En d'autres termes, pour tout i et tout k, $A_{i,k} = 0$ donc tous les coefficients de A sont nuls si bien que $A = 0$ ce qui permet de conclure.

Exercice 38 - Matrice d'un projecteur : ✪✪ Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit

$$P = \frac{1}{\text{card(G)}} \sum_{g \in G} g$$

Montrer que $P^2 = P$. En déduire que si $\operatorname{tr}(P) = 0$ alors $P = 0$.

Correction : Le fait que $P^2 = P$ a été prouvé dans l'exercice 24 du chapitre 21. On en déduit que son rang est égal à sa trace (cf. cours). Le résultat en découle, la seule matrice de rang nul étant la matrice nulle.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit T définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $T(M) = M - \operatorname{tr}(M)\,A$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Donner une CNS sur $\operatorname{tr}(A)$ pour que T soit bijective.
3. Lorsque T n'est pas bijective, montrer que T est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

Correction :

1. La linéarité est immédiate et découle de la linéarité de la trace, et T va bien de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même donc est un endomorphisme.

2. Puisque T est linéaire entre deux espaces de même dimension finie, elle est injective si et seulement si elle est bijective. On se demande donc quand ψ est injective. Soit $M \in \ker(T)$. Alors $M - \mathrm{tr}\,(M)\,A = 0$ si bien que $M = \mathrm{tr}\,(M)\,A$: M est proportionnelle à A. On en déduit que $\ker(T) \subset \mathrm{Vect}(A)$. Or, $A \neq 0$ donc $\mathrm{Vect}(A)$ est de dimension 1 : on en déduit que soit $\ker(T) = \{0\}$, soit $\ker(T) = \mathrm{Vect}(A)$, ce qui se produit si et seulement si $T(A) = 0$. Or, $T(A) = (1 - \mathrm{tr}\,(A))A$ et puisque A est nulle, on en déduit que $T(A) = 0$ si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) = 1$. En conclusion, T est bijective si et seulement si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 1$.
3. Supposons donc que $\mathrm{tr}\,(A) = 1$. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors T est linéaire et :

$$\begin{aligned} T^2(M) &= T(T(M)) \\ &= T(M - \mathrm{tr}\,(M)\,A) \\ &= T(M) - \mathrm{tr}\,(M)\,T(A) \qquad (T \text{ linéaire}) \\ &= T(M) \qquad\qquad (\text{car } T(A) = 0) \end{aligned}$$

donc T est un projecteur. On sait alors que T est une projection sur $\mathrm{Im}(T)$ parallèlement à $\ker(T)$, et on sait que $\ker(T) = \mathrm{Vect}(A)$. Il ne reste donc plus qu'à trouver $\mathrm{Im}(T)$. Or, par linéarité de la trace :

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(T(M)) &= \mathrm{tr}\,(M) - \mathrm{tr}\,(M) \times \mathrm{tr}\,(A) \\ &= \mathrm{tr}\,(M) - \mathrm{tr}\,(M) \qquad (\text{car } \mathrm{tr}\,(A) = 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

si bien que $\mathrm{Im}(T) \subset \ker(\mathrm{tr})$. Or, $\ker(\mathrm{tr})$ est de dimension $n^2 - 1$ (soit parce que c'est un hyperplan car noyau d'une forme linéaire non nulle, soit, ce qui revient au même, en appliquant à la trace le théorème du rang) et, en appliquant le théorème du rang à T, puisque son noyau est de dimension 1, on trouve que $\mathrm{Im}(T)$ est de dimension $n^2 - 1$. Par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(T) = \ker(\mathrm{tr})$. En conclusion, T est la projection sur le noyau de la trace (i.e. l'ensemble des matrices de trace nulle) parallèlement à $\mathrm{Vect}(A)$.

Exercice 40 : ✪✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $X + \mathrm{tr}\,(X)\,A = B$.
2. $X + X^\top = \mathrm{tr}\,(X)\,A$.

Correction :

1. Il semble difficile de raisonner par équivalences ici : la trace n'est pas injective, il est faux de dire « $\mathrm{tr}\,(X) = \mathrm{tr}\,(Y) \iff X = Y$ ». On va donc travailler par analyse-synthèse.
   - Analyse : si X convient. En prenant la trace de l'égalité $X + \mathrm{tr}\,(X)\,A = B$ il vient, par linéarité de la trace : $\mathrm{tr}\,(X) + \mathrm{tr}\,(X) \times \mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B)$ i.e. $\mathrm{tr}\,(X) \times (1 + \mathrm{tr}\,(A)) = \mathrm{tr}\,(B)$. Séparons les cas selon la valeur de $\mathrm{tr}\,(A)$.

     Supposons que $\mathrm{tr}\,(A) \neq -1$. Alors $\mathrm{tr}\,(X) = \dfrac{\mathrm{tr}\,(B)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)}$ si bien que (retour à l'équation vérifiée par X)

     $$X = B - \frac{\mathrm{tr}\,(B)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)} \times A$$

     Synthèse (toujours en supposant $\mathrm{tr}\,(A) \neq -1$) : posons

     $$X = B - \frac{\mathrm{tr}\,(B)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)} \times A$$

     Alors, par linéarité de la trace :

     $$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(X) &= \mathrm{tr}\,(B) - \frac{\mathrm{tr}\,(B)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)} \times \mathrm{tr}\,(A) \\ &= \frac{\mathrm{tr}\,(B)\,(1 + \mathrm{tr}\,(A)) - \mathrm{tr}\,(B) \times \mathrm{tr}\,(A)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)} \\ &= \frac{\mathrm{tr}\,(B)}{1 + \mathrm{tr}\,(A)} \end{aligned}$$

     et on a donc

$$\begin{aligned} X + \operatorname{tr}(X)\, A &= B - \frac{\operatorname{tr}(B)}{1+\operatorname{tr}(A)} \times A + \frac{\operatorname{tr}(B)}{1+\operatorname{tr}(A)} \times A \\ &= B \end{aligned}$$

c'est-à-dire que X est solution. En conclusion, si $\operatorname{tr}(A) \neq -1$, l'équation a une unique solution, à savoir

$$X = B - \frac{\operatorname{tr}(B)}{1+\operatorname{tr}(A)} \times A$$

Revenons à l'analyse : on revient à l'équation $\operatorname{tr}(X) \times (1+\operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B)$ et on suppose à présent que $\operatorname{tr}(A) = -1$ si bien que $\operatorname{tr}(B) = 0$. Rappelons que A et B sont fixées : si $\operatorname{tr}(B) \neq 0$ (et $\operatorname{tr}(A) = -1$), l'équation n'a pas de solution. Supposons enfin que $\operatorname{tr}(B) = 0$. Cette équation n'a plus rien à nous apprendre, tout ce qu'on sait est que $X = B + \operatorname{tr} X A \in S = \{B + \lambda A \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ (on dit que S est un espace affine, cf. chapitre 36).

Synthèse : montrons réciproquement (toujours en supposant $\operatorname{tr}(B) = 0$ et $\operatorname{tr}(A) = -1$) que tout élément de S est solution. Soit $X \in S$: il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $X = B + \lambda A$ si bien que (linéarité de la trace) $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(B) + \lambda \operatorname{tr}(A) = -\lambda$ par hypothèse sur A et B. Finalement,

$$\begin{aligned} X + \operatorname{tr}(X)\, A &= B + \lambda A - \lambda A \\ &= B \end{aligned}$$

et X est bien solution. En conclusion, dans le cas où $\operatorname{tr}(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(B) = 0$, il y a une infinité de solutions, tous les éléments de $S = \{B + \lambda A \,|\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

2. Idem, travaillons par analyse synthèse.
   - Analyse : si X convient. En prenant la trace, en utilisant la linéarité et en se souvenant que X et $X^\top$ ont la même trace, on trouve que $2\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(X) \times \operatorname{tr}(A)$. Tout dépend de si $\operatorname{tr}(X)$ est nulle ou non.

     Supposons donc que $\operatorname{tr}(X) = 0$. Dans ce cas, l'équation devient $X + X^\top = 0$ donc les solutions sont les matrices antisymétriques.

     Supposons à présent que $\operatorname{tr}(X) \neq 0$. Alors $\operatorname{tr}(A) = 2$: il en découle que si $\operatorname{tr}(A) \neq 2$, l'équation n'a pas de solution ayant une trace non nulle, donc n'a pas de solution autre que les matrices antisymétriques.

     Supposons donc que $\operatorname{tr}(A) = 2$. On remarque également que $X + X^\top$ est une matrice symétrique donc (rappelons que $\operatorname{tr}(X)$ est supposée non nulle)

     $$A = \frac{1}{\operatorname{tr}(X)}(X + X^\top)$$

     est aussi symétrique : de même, si A n'est pas symétrique, alors l'équation n'a pas de solution à part celles déjà trouvées.

     Supposons enfin que $\operatorname{tr}(A) = 2$ et que A soit symétrique. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Alors $(X^\top)_{i,i} = X_{i,i}$ donc $(X^\top)_{i,i} + X_{i,i} = 2X_{i,i} = \operatorname{tr}(X)\, A_{i,i}$ si bien que

     $$X_{i,i} = \frac{\operatorname{tr}(X)\, A_{i,i}}{2}$$

     Posons comme dans la question précédente $\lambda = \operatorname{tr}(X)$. Alors $X_{i,i} = \dfrac{\lambda A_{i,i}}{2}$. De plus, si $i \neq j$, alors $(X^\top)_{i,j} = X_{j,i}$ si bien que

     $$\begin{aligned} X_{i,j} + (X^\top)_{i,j} &= X_{i,j} + X_{j,i} \\ &= \lambda A_{i,j} \end{aligned}$$

     et donc $X_{i,j} = \lambda A_{i,j} - X_{j,i}$. En conclusion : si $\operatorname{tr}(A) = 2$ et si A est symétrique, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tous i et j :

     $$X_{i,i} = \frac{\lambda A_{i,i}}{2} \qquad \text{et} \qquad X_{i,j} = \lambda A_{i,j} - X_{j,i}$$

   - Synthèse : une matrice antisymétrique étant de diagonale nulle, une matrice antisymétrique est de trace nulle donc est solution de l'équation. Supposons enfin que A soit symétrique et de trace égale à 2 (sinon il n'y a pas d'autre solution). Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie de la façon suivante : pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $X_{i,i} = \lambda A_{i,i}/2$ et pour tous $i \neq j$, $X_{i,j}$ est quelconque si $i < j$ (au-dessus de la diagonale) et, si $i > j$, $X_{i,j} = \lambda A_{i,j} - X_{j,i}$ (ceux au-dessus de la diagonale sont quelconques, et ceux en-dessous sont choisis pour qu'en sommant avec la transposée, cela fasse le coefficient de A correspondant). Tout d'abord,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(X) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda A_{i,i}/2 \\ &= \frac{\lambda}{2}\mathrm{tr}\,(A) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

et donc on veut prouver que X est solution de l'équation $X + X^\top = \lambda A$, ce qui est immédiat : pour tout $i \neq j$, on a par définition $X_{i,j} + X_{j,i} = \lambda A_{i,j}$ et cela marche aussi sur la diagonale.

En conclusion, si A n'est pas symétrique ou si $\mathrm{tr}\,(A) \neq 2$, les seules solutions sont les matrices antisymétriques, et si A est symétrique de trace 2, il faut ajouter les matrices construites sur le modèle précédent.

Exercice 41 : ✪✪✪ Soit $p \geq 1$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Soit

$$\psi : \begin{cases} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \quad M \quad \longmapsto \quad AMB \end{cases}$$

Montrer que $\mathrm{tr}\,(\psi) = \mathrm{tr}\,(A) \times \mathrm{tr}\,(B)$.

Correction : La question cachée est de donner la matrice de ψ dans une base quelconque (il est évident que ψ est linéaire). On prend évidemment la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, à savoir $(E_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$. Remarquons que la matrice de ψ dans cette base sera donc de taille $(n+p)^2$: on va expliciter le terme général mais évidemment pas l'écrire explicitement. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$. Calculons donc $\psi(E_{i,j})$. On a $\psi(E_{i,j}) = AE_{i,j}B$: explicitons son terme général. Les indices i et j étant déjà pris, nous allons prendre d'autres noms pour les indices des matrices que nous allons manipuler. Soit $(k,l) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$. Précisons que $AE_{i,j}$ est de taille $n \times p$.

$$\begin{aligned} (AE_{i,j}B)_{k,l} &= \sum_{a=1}^{p} (AE_{i,j})_{k,a} B_{a,l} \\ &= \sum_{a=1}^{p}\sum_{b=1}^{n} A_{k,b}(E_{i,j})_{b,a}B_{a,l} \end{aligned}$$

Or, si $b \neq i$ ou $a \neq j$, alors $(E_{i,j})_{b,a} = 0$ et vaut 1 si $b = i$ et $a = j$: on a donc :

$$(AE_{i,j}B)_{k,l} = A_{k,i}B_{j,l}$$

Attention à ne pas prendre $k = l$ ou autre joyeuseté du genre. Nous venons de montrer que le terme général de $\psi(E_{i,j})$ vaut $A_{k,i}B_{j,l}$ c'est-à-dire que :

$$\psi(E_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} (A_{k,i}B_{j,l}).E_{k,l}$$

Les $A_{k,i}B_{j,l}$ sont donc les coefficients du vecteur colonne correspondant à $\psi(E_{i,j})$, et le coefficient diagonal correspond à la coordonnée de $\psi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$ lui-même (peu importe l'ordre dans lequel on place les $E_{i,j}$ tant qu'on garde le même en haut et à droite, le coefficient de $E_{i,j}$ selon lui-même sera forcément diagonal) :

$$\mathrm{Mat}_{C_2,B_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \psi(E_{1,1}) & \psi(E_{1,2}) & \psi(E_{2,1}) & \dots & \psi(E_{i,j}) & \dots & \psi(E_{n,p}) \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccccc} & & & & A_{1,i}B_{j,1} & & \\ & & & & A_{1,i}B_{j,2} & & \\ & & & & A_{2,i}B_{j,1} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & A_{i,i}B_{j,j} & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & A_{n,i}B_{j,p} & & \end{array}\right) & \begin{array}{c} E_{1,1} \\ E_{1,2} \\ E_{2,1} \\ \vdots \\ E_{i,j} \\ \vdots \\ E_{n,p} \end{array} \end{array}$$

c'est-à-dire pour $k = i$ et $j = l$, c'est-à-dire $A_{i,i}B_{j,j}$. Dès lors, la trace de ψ est la somme (obtenue quand on somme tous les éléments de la base donc on somme sur i et j !) c'est-à-dire :

$$\operatorname{tr}(\psi)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^p A_{i,i}B_{j,j}$$

et on reconnaît le produit des deux sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^n A_{i,i}$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^p B_{j,j}$ c'est-à-dire la trace de A et la trace de B.

Exercice 42 : ✪✪✪✪ Soit $f:\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\to\mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant : $\forall(A,B)\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB)=f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Correction : Rappelons le résultat vu au chapitre 30 : deux formes linéaires non nulles sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau. Tout d'abord, si f est nulle, alors $f=0\times\operatorname{tr}$ donc est proportionnelle à la trace. Supposons donc que f soit non nulle : il suffit donc de prouver que f et la trace ont le même noyau. Puisque leurs noyaux sont des hyperplans, ils ont de même dimension n^2-1 puisqu'on est en dimension finie n^2.

On a vu que $(E_{i,j})_{i\neq j}$ et $(E_{1,1}-E_{i,i})_{2\leq i\leq n}$ formaient une base du noyau de la trace. Il suffit donc de prouver que ces matrices appartiennent à $\ker(f)$: on aura alors

$$\ker(\operatorname{tr})=\operatorname{Vect}(\dots)\subset\ker(f)$$

et on conclura par égalité des dimensions. Soient $i\neq j$. La seule matrice dont on soit sûr qu'elle soit dans $\ker(f)$ est la matrice nulle : c'est le moment d'utiliser l'hypothèse faite sur f, on veut donc écrire $E_{i,j}$ sous la forme $AB-BA$. Or, on sait (cf. chapitre 21) que pour tous i,j,k,l, $E_{i,j}\times E_{k,l}=\delta_{j,k}E_{i,l}$. En particulier,

$$E_{i,j}=E_{i,j}E_{j,j}-E_{j,j}E_{i,j}$$

puisque $E_{i,j}E_{j,j}=E_{i,j}$ et $E_{j,j}E_{i,j}=0$ car $i\neq j$. Par linéarité de f,

$$f(E_{i,j})=f(E_{i,j}E_{j,j})-f(E_{j,j}E_{i,j})$$

et cette quantité est nulle puisque, par hypothèse sur f, $f(E_{i,j}E_{j,j})=f(E_{j,j}E_{i,j})$. En d'autres termes, $E_{i,j}\in\ker(f)$. Passons à présent à $E_{1,1}-E_{i,i}$ avec $i\geq 2$. On a : $E_{1,1}=E_{1,i}E_{i,1}$ et $E_{i,i}=E_{i,1}E_{1,i}$. Toujours par hypothèse sur f, $f(E_{1,1})=f(E_{i,i})$ si bien que, par linéarité de f, $f(E_{1,1}-E_{i,i})=0$ donc $E_{1,1}-E_{i,i}\in\ker(f)$, et on a vu que cela permettait de conclure.

31.4 Matrices équivalentes et semblables

Exercice 43 : ✪

1. Que dire d'un endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_B(u)=I_n$ pour une certaine base B ?
2. Que dire d'un endomorphisme $u\in\mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Mat}_{B',B}(u)=I_n$ pour deux bases B et B' de E ?

Correction :

1. On a vu en classe que cela signifie que $u=\operatorname{Id}_E$: la matrice de l'identité est la même dans toutes les bases (et plus généralement la matrice d'une homothétie est la même dans toutes les bases).
2. Cela signifie que les matrices de u et I_n sont équivalentes donc qu'elles ont le même rang. Cela signifie donc que $\operatorname{rg}(u)=n$ i.e. que u est bijective (mais pas forcément égale à Id_E).

Exercice 44 : ✪ Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A=\begin{pmatrix}2&1&6\\2&4&1\\1&1&7\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad B=\begin{pmatrix}4&1&1\\2&2&2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Correction : Non car elles n'ont pas la même trace (avoir la même trace est une condition nécessaire mais pas suffisante).

Exercice 45 : ✪✪ Montrer que

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables.

Correction : A et B ont même trace (4), et même rang (4 car inversibles car triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux tous non nuls) donc on ne peut pas conclure directement (rappelons que ce sont des conditions nécessaires non suffisantes). L'idée est de retirer I_4 à ces deux matrices, ce qui donne :

$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on voit que $A - I_4$ et $B - I_4$ n'ont pas le même rang (la première est de rang 1 et la deuxième de rang 2) donc ne sont pas semblables. Or, si A et B sont semblables, alors il existe $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$. Or, $I_4 = P^{-1}P$ donc :

$$\begin{aligned} A - I_4 &= P^{-1}BP - P^{-1}P \\ &= P^{-1}(B - I_4)P \end{aligned}$$

ce qui implique que $A - I_4$ et $B - I_4$ sont semblables, ce qui est absurde.

Exercice 46 : ✪✪ Trouver P et Q inversibles telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

Correction : Notons M la matrice de gauche et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^5)$ canoniquement associée à M (on a donc, par exemple, $u(0,1,0) = (1,0,0,0,1)$). Notons B_1 et C_1 les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^5$ si bien que $M = \mathrm{Mat}_{C_1,B_1}(u)$. On cherche des bases B_2 et C_2 de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^5$ telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{C_2,B_2}(u)$$

Si on note $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont linéairement indépendants et on cherche à les compléter en base : on pourrait utiliser le théorème de la base incomplète, mais on cherche des matrices explicites. Notons $C_1 = (\tilde{e_1}, \dots, \tilde{e_5})$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$: on montre alors aisément que

$$(u(e_1), u(e_2), \tilde{e_3}, \tilde{e_4}, \tilde{e_5}) = (u(e_1), u(e_2), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0))$$

est une base de $\mathbb{R}^5$ (famille libre à 5 éléments en dimension 5), qu'on note C_2. Enfin, $u(e_3) = u(e_1) - u(e_2)$ si bien que $u(e_1 - e_2 - e_3) = 0$: $e_1 - e_2 - e_3 \in \ker(u)$. On montre aisément que $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_1 - e_2 - e_3 = (1,-1,-1)$ est libre donc une base de $\mathbb{R}^3$ (famille libre à trois éléments en dimension 3) qu'on note B_2, et on note $f_3 = e_1 - e_2 - e_3$. On a bien :

$$\mathrm{Mat}_{C_2,B_2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(f_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} u(e_1) \\ u(e_2) \\ \tilde{e_3} \\ \tilde{e_4} \\ \tilde{e_5} \end{matrix}$$

Finalement, d'après la formule du changement de base, $\mathrm{Mat}_{C_1,B_1}(u) = P_{C_1,C_2} \times \mathrm{Mat}_{C_2,B_2}(u) \times P_{B_2,B_1}$. Il suffit donc de prendre $P = P_{C_1,C_2}$ et $Q = P_{B_2,B_1}$. Tout d'abord :

$$P = P_{C_1,C_2} = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & \tilde{e_3} & \tilde{e_4} & \tilde{e_5} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} \tilde{e_1} \\ \tilde{e_2} \\ \tilde{e_3} \\ \tilde{e_4} \\ \tilde{e_5} \end{matrix}$$

Enfin :

$$P_{B_1,B_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & f_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

et donc

$$Q = (P_{B_1,B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 47 - A et $A^\top$ sont semblables, le cas $n = 2$: ✪✪ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $b \neq 0$. On considère le système linéaire (S) : $A^\top P = PA$, où l'inconnue est $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que (S) est équivalent à $y = z$ et une seconde équation en x, y, t que l'on explicitera. Achever la résolution et donner une base de solutions.
2. Vérifier que (S) admet une solution P qui est inversible.
3. Déduire de cette étude que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

Correction :

1. Soit $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ notée comme dans l'énoncé. Travaillons par équivalences (et rappelons que $b \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
(S) &\iff A^\top P = PA \\
&\iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} ax + cz & ay + ct \\ bx + dz & by + dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + ct & bz + td \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} ax + cz = ax + cy \\ ay + ct = bx + dy \\ bx + dz = az + ct \\ by + dt = bz + dt \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} cz = cy \\ ay + ct = bx + dy \\ bx + dz = az + ct \\ by = bz \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} cz = cy \\ ay + ct = bx + dy \\ bx + dz = az + ct \\ y = z \end{cases} & (b \neq 0) \\
&\iff \begin{cases} cy = cy \\ ay + ct = bx + dy \\ bx + dy = ay + ct \\ y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} ay + ct = bx + dy \\ y = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{(a-d)y + ct}{b} \\ y = z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de S est :

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{(a-d)y+ct}{b} & y \\ y & t \end{pmatrix} \mid (y,t) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \left\{ y \begin{pmatrix} (a-d)/b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c/b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (y,t) \in \mathbb{K}^2 \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} (a-d)/b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c/b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

et ces deux matrices forment donc une base de l'ensemble des solutions (génératrice par définition, et libre car non proportionnelles).

2. Si $c \neq 0$, alors $P = \begin{pmatrix} c/b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (car diagonale de coefficients diagonaux tous non nuls) et solution. Supposons à présent $c = 0$. Alors $P = \begin{pmatrix} (a-d)/b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et solution (inversible car de déterminant non nul, cf. chapitre 33, mais on peut prouver son inversibilité comme au chapitre 21). On remarque que cette matrice est toujours inversible et solution, que c soit nul ou non.
3. D'après ce qui précède, il existe P inversible telle que $A^\top = PAP^{-1}$ donc $A^\top$ et A sont semblables. Il reste à présent à démontrer ce résultat si $b = 0$.

   Si $b = 0$ mais $c \neq 0$ alors, en appliquant ce qui précède à $A^\top$ au lieu de A (le coefficient en position $(1,2)$ est non nul donc le résultat précédent s'applique), $A^\top$ et $\left(A^\top\right)^\top = A$ sont semblables. Il ne reste que le cas $b = c = 0$, mais alors A est diagonale donc égale à sa transposée, donc semblable à sa transposée. Le résultat est encore valable pour une matrice de taille n quelconque, mais, pour le démontrer, il faut un outil qui n'est pas au programme de prépa : la réduction de Jordan.

Exercice 48 : ✪✪ Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction : Elles ont évidemment à chaque fois même trace et même rang mais cela ne permet pas de conclure car ce sont des conditions nécessaires non suffisantes. Il n'y a pas le choix : il faut expliciter des bases dans lesquelles l'endomorphisme représenté par A a pour matrice B et C.

1. Notons $B_1 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ canoniquement associée à A, c'est-à-dire qu'on a

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) & u(e_4) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}$$

   On a donc $u(e_1) = e_2, u(e_2) = e_1, u(e_3) = e_4$ et $u(e_4) = e_3$. Dès lors, si on note B_2 la base (c'en est une car simple permutation des vecteurs de la base canonique) (e_1, e_3, e_4, e_2) :

$$\mathrm{Mat}_{B_2}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_3) & u(e_4) & u(e_2) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_2 \end{array} \end{array}$$

A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes donc sont semblables. On montre de même que $C = \mathrm{Mat}_{B_3}(u)$ où $B_3 = (e_1, e_3, e_2, e_4)$ ce qui prouve que A et C sont aussi semblables.

2. Idem, si on note $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A, alors $u(e_1) = u(e_2) = 0$ et $u(e_3) = e_2$ donc, si on note $B_2 = (e_2, e_3, e_1)$, alors $B = \mathrm{Mat}_{B_2}(u)$ donc A et B sont semblables (car représentent le même endomorphisme dans des bases différentes). Pour la dernière, on cherche une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ telle que $u(\varepsilon_1) = 4\varepsilon_2$: puisque $u(e_3) = e_2$, il suffit de voir que $u(e_3) = 4u(e_2/4)$ (par linéarité de u). Or, (e_1, e_2, e_3) étant libre, on montre aisément que $B_3 = (e_3, e_2/4, e_1)$ est libre donc est une base de $\mathbb{R}^3$ (famille libre à trois éléments en dimension 3) puis que $C = \mathrm{Mat}_{B_3}(u)$ ce qui permet de conclure.
3. Idem, si on note $B_1 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à A, alors $u(e_1) = 0, u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$. On a tout d'abord $u(e_2) = 2u(e_1/2)$, puis $u(e_3) = u(e_2)$ donc $u(3e_3) = 3u(e_2)$. On pense donc à prendre $B_2 = (e_1/2, e_2, 3e_3)$, qui est une base et on a bien $B = \mathrm{Mat}_{B_2}(u)$. On prend ensuite $B_3 = (e_3, e_2, e_1/2)$ ce qui permet de conclure pour A et C.
4. On garde les mêmes notations pour u, B_1 et A. On cherche une base (f_1, f_2, f_3) telle que $u(f_1) = u(f_3) = 0$ donc f_1 et f_3 dans le noyau et $u(f_2) = f_1$: on prend $f_2 = e_1$ et on prouve aisément que $u(e_1) = (1, -3, -2) \in \ker(u)$. On veut compléter en base avec un élément du noyau : on montre aisément que $e_1 + e_3 = (1, 0, 1) \in \ker(u)$ et que $B_2 = (u(e_1), e_1, e_1 + e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et on a bien $\mathrm{Mat}_{B_2}(u) = B$ ce qui permet de conclure.

Exercice 49 : ✪✪ Soient A et B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = -BA$ et $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

Correction : A et B sont inversibles et vérifient $A^{-1} = -A$ et $B^{-1} = -B$. On sait également que $AB = -BA$: calculons $(A+B)^2$. Attention, les deux matrices ne commutent pas, on ne peut pas utiliser d'identité remarquable, il faut le faire à la main.

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= A^2 + B^2 + AB + BA \\ &= -2I_n \end{aligned}$$

si bien que $(A+B)$ est inversible d'inverse $-\dfrac{1}{2}(A+B)$. Enfin :

$$\begin{aligned} (A+B)A(A+B)^{-1} &= (A^2 + BA) \times \frac{-1}{2}(A+B) \\ &= (-I_n + BA) \times \frac{-1}{2}(A+B) \\ &= \frac{1}{2} \times A + \frac{1}{2} \times B - \frac{1}{2} \times BA^2 - \frac{1}{2} \times BAB \\ &= \frac{1}{2} \times A + \frac{1}{2} \times B + \frac{1}{2} \times B + \frac{1}{2} \times BBA \\ &= \frac{1}{2} \times A + \frac{1}{2} \times B + \frac{1}{2} \times B - \frac{1}{2} \times A \\ &= B \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 50 : ✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang r. Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.
2. On se donne dans cette question un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que I est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +)$ absorbant des deux côtés i.e. :

$$\forall M \in I, \forall (P, Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, PM \in I \qquad \text{et} \qquad MQ \in I$$

   (a) Montrer que I est non vide et que si $M \in I$, alors toute matrice de même rang que M appartient aussi à I.

(b) Montrer plus généralement que si $M \in I$, alors toute matrice de rang inférieur ou égal à $\text{rg}(M)$ appartient aussi à I.

(c) En déduire que $I = \{0_n\}$ ou $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Correction :

1. Soit B une base de E et soit A la matrice associée à f dans la base B. On sait qu'il existe P et Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$. Or,

$$\begin{aligned}
J_r &= \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\} r \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \\
&= E_{1,1} + E_{2,2} + \cdots + E_{r,r}
\end{aligned}$$

si bien que $A = PE_{1,1}Q + PE_{2,2}Q + \cdots + PE_{r,r}Q$. Or, les $E_{i,i}$ sont de rang 1 (une seule colonne non nulle) donc les $PE_{i,i}Q$ aussi (multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang) si bien que A est somme de r matrices de rang 1, et donc f est la somme des r endomorphismes associés qui sont également de rang 1.

2. (a) I est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc est non vide (il contient le neutre i.e. la matrice nulle). Soit $M \in I$ et soit N de même rang que M. Alors M et N sont équivalentes donc il existe P et Q inversibles telles que $N = PMQ$. Or, I est absorbant des deux côtés donc $PM \in I$ et donc $PMQ = N \in I$.

   (b) Il suffit de multiplier J_r par une matrice $J_{r'}$ avec $r' \leq r$. En effet, si $r' \leq r$, alors $J_r \times J_{r'} = J_{r'}$: je vous laisse écrire les matrices (faites le !), on a un produit de matrices diagonales donc le produit s'effectue terme à terme. Soit donc N de rang $r' \leq r = \text{rg}(M)$. Alors il existe P, Q inversibles telles que $N = PJ_{r'}Q$. Alors, d'après ce qui précède, $N = PJ_{r'}J_rQ$ et puisque, d'après la question précédente, $J_r \in I$, on conclut de même que précédemment que $N \in I$.

   (c) Supposons que $I \neq \{0\}$ et montrons que $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il suffit de montrer que I contient une matrice inversible : si I contient une matrice inversible, alors I contient une matrice de rang n donc toutes les matrices d'après la question précédente.

   Soit $M \in I$ non nulle. Alors $\text{rg}(M) \geq 1$. D'après la question précédente, I contient toutes les matrices de rang 1. Or, d'après la question 1, I_n est somme de n matrices de rang 1 et I est stable par somme car est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On en déduit que $I_n \in I$ ce qui permet de conclure.

Exercice 51 : ✪✪✪ Déterminer les $(A, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que :

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), ABC = 0_n$$

Correction : Montrons que les couples qui conviennent sont exactement les couples avec l'une au moins des deux matrices qui est nulle, i.e. :

$$(\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), ABC = 0) \iff A = 0 \text{ ou } C = 0$$

Si $A = 0$ ou $C = 0$ le résultat est trivial. Réciproquement, supposons que A et C soient non nulles. Notons $r_1 = \text{rg}(A)$ et $r_2 = \text{rg}(C)$ si bien que A est équivalente à J_{r_1} et C est équivalente à J_{r_2} : il existe P_1, P_2, Q_1, Q_2 inversibles telles que $A = P_1J_{r_1}Q_1$ et $C = P_2J_{r_2}Q_2$. Posons $B = {Q_1}^{-1}{P_2}^{-1}$ si bien que $ABC = P_1J_{r_1} \times J_{r_2} \times Q_2$. Or, J_{r_1} et J_{r_2} sont diagonales donc le produit s'obtient par multiplication terme à terme, et leur coefficient en haut à gauche est non nul donc $J_{r_1} \times J_{r_2} \neq 0$.

Par conséquent (multiplier par une matrice inversible ne change pas le rang), ABC n'est pas de rang 0 donc n'est pas nulle (on peut en fait montrer assez facilement en écrivant les matrices, faites le, que $J_{r_1} \times J_{r_2} = J_{\min(r_1,r_2)}$ donc ABC est de rang $\min(\text{rg}(A), \text{rg}(C)) \neq 0$). Dans tous les cas le résultat est démontré.

Exercice 52 : ✪✪✪ Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit de rang n.

Correction : L'idée est de décaler la diagonale de 1 de J_r d'un rang vers la droite (ce qui est possible puisqu'on en a strictement moins que r), de multiplier par λ puis de mettre une diagonale de 1 pour avoir une matrice toujours inversible. Plus précisément : notons K_r la matrice suivante :

$$K_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

Puisque K_r est de rang r, alors B et K_r sont équivalentes : il existe P et Q inversibles telles que $B = PK_rQ$. Notons A la matrice qui, après changement de bases i.e. multiplication par P et Q, vaut I_n i.e.

$$A = P \times I_n \times Q$$

Dès lors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B = P(I_n + \lambda K_r)Q$ et

$$I_n + \lambda K_r = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

car triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Par produit, $A + \lambda B$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 53 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe B inversible telle que $(AB)^2 = AB$.
2. Supposons que $\text{rg}(A) < n$. Montrer qu'il existe $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que AB soit nilpotente.

Correction :

1. On cherche donc B telle que $ABAB = AB$. Le problème est que A n'est pas forcément inversible donc on ne peut pas prendre $B = A^{-1}$. Soit $r = \text{rg}(A)$. A est équivalente à J_r donc il existe P et Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$. L'idée est de parvenir jusqu'à J_r et de la multiplier par I_n pour ne rien changer. Pour parvenir à J_r, il faut « enlever Q » donc multiplier par Q^{-1}, et puisqu'on multiplie par Q^{-1} à gauche, on pense à faire pareil avec P^{-1} à droite puisqu'ensuite on va remultiplier par A à droite (on veut calculer $ABAB$) : on pose donc $B = Q^{-1}I_nP^{-1}$ et donc

$$\begin{aligned} ABAB &= PJ_rQQ^{-1}P^{-1}PJ_rQQ^{-1}P^{-1} \\ &= P{J_r}^2P^{-1} \end{aligned}$$

Or, ${J_r}^2 = J_r$ (diagonale de termes diagonaux égaux à 0 ou 1) donc $ABAB = PJ_rP^{-1} = AB$. B étant inversible car produit de matrices inversibles, on a le résultat voulu.

2. De même, A est équivalente à la matrice K_r de l'exercice précédente qui est nilpotente : le problème est qu'en écrivant $A = PK_rQ$ c'est qu'on a $AQ^{-1} = PK_r$ qui n'est pas forcément nilpotente. L'idée est d'ajouter P^{-1} qui va donner une matrice semblable à K_r : il existe donc P et Q inversibles telles que $A = PK_rQ$ si bien que $AQ^{-1}P^{-1} = PK_rP^{-1}$ semblable à une matrice nilpotente donc nilpotente. Il suffit de poser $B = Q^{-1}P^{-1}$ inversible car produit de matrices inversibles pour conclure.

Exercice 54 : ✪✪✪ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante et multiplicative, c'est-à-dire que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A) \times f(B)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Correction : Dans le chapitre 33, on pourra appliquer ce résultat au déterminant. Tout d'abord,

$$\begin{aligned} f(I_n) &= f\left({I_n}^2\right) \\ &= f(I_n)^2 \end{aligned}$$

par hypothèse sur f. Il en découle que $f(I_n) = 0$ ou 1. Supposons que $f(I_n) = 0$. Alors, pour toute matrice A,

$$\begin{aligned} f(A) &= f(A \times I_n) \\ &= f(A) \times f(I_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisque f n'est pas constante. On en déduit que $f(I_n) = 1$.

On prouve de même que $f(0_n) = 0$ ou 1. Si $f(0_n) = 1$ alors, pour toute matrice A,

$$\begin{aligned} f(0_n) &= f(A \times 0_n) \\ &= f(A) \times f(0_n) \\ &= f(A) \end{aligned}$$

ce qui est également exclu puisque f n'est pas constante.

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $f(A \times A^{-1}) = f(I_n) = 1$. Or, $f(A \times A^{-1}) = f(A) \times f(A^{-1})$ si bien que $f(A) \neq 0$.

Réciproquement, supposons A non inversible et prouvons que $f(A) = 0$. L'idée est de se ramener à une matrice nilpotente : on mettra à une puissance convenable, et on obtiendra 0 ce qui prouvera que $f(A) = 0$. Le problème est qu'une matrice non inversible n'est pas forcément nilpotente. Cependant, elle va être équivalente à une matrice nilpotente : la matrice K_r vue précédemment, où $r = \mathrm{rg}(A) < n$. Il existe P et Q inversibles telles que $A = PK_rQ$ si bien que $f(A) = f(P)f(K_r)f(Q)$. Or, K_r est nilpotente si bien que ${K_r}^n = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(0_n) &= f\left({K_r}^n\right) \\ &= f(K_r)^n \end{aligned}$$

si bien que $f(K_r) = 0$ donc $f(A) = 0$. D'où l'équivalence.

Exercice 55 : ✪✪✪✪ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$. Lorsque cela a un sens, donner l'inverse de la matrice $I_n + aE_{i,j}$. À l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes de M, expliciter :

$$(I_n + aE_{i,j})M(I_n - aE_{i,j})$$

2. Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est nulle sauf éventuellement les coefficients en position $(1, 1)$ et $(2, 1)$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les coefficients en-dessous de la sous-diagonale sont nuls.
4. **Remake :** Montrer que si M est de trace nulle alors M est semblable à une matrice de diagonale nulle. On pourra commencer par se demander ce qui se passe lorsque M admet un coefficient non nul sur sa première ligne ou sa première colonne en dehors du coefficient en position $(1, 1)$, puis lorsque M admet un coefficient non diagonal non nul, et enfin lorsque M est diagonale.

Correction :

1. Il y a deux cas, selon que $i = j$ ou non. Supposons dans un premier temps que $i \neq j$. Alors :

$$I_n + aE_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & j & & \end{matrix} & \end{array}$$

Alors cette matrice est inversible car triangulaire (supérieure ou inférieure selon que $i < j$ ou $i > j$) avec des coefficients diagonaux tous non nuls, et on obtient son inverse par la méthode habituelle (le pivot de Gauß en effectuant les mêmes opérations sur I_n) en faisant l'opération $L_i \leftarrow L_i - aL_j$ si bien que son inverse est

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & j & & \end{matrix} & \end{array} = I_n - aE_{i,j}$$

Supposons à présent que $i = j$. Par conséquent :

$$I_n + aE_{i,i} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & (1+a) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & i & & & & \end{matrix} & \end{array}$$

Alors cette matrice (diagonale) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, si et seulement si $a \neq -1$, et alors son inverse est :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1/(1+a) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & i & & & & \end{matrix} & \end{array}$$

Supposons dans un premier temps que $i \neq j$. D'après le chapitre 21, multiplier **à gauche** par $I_n + aE_{i,j}$ revient à effectuer l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, et multiplier **à droite** par $EI_n - aE_{i,j}$ revient à effectuer l'opération élémentaire $C_j \leftarrow C_j - aC_i$ (attention, à gauche, on agit sur L_i, et à droite, sur C_j, l'indice change). Par conséquent, on a effectué (l'ordre n'importe pas) ces deux opérations sur M. Plus précisément :

- soit $k \in [\![1\,;\,n]\!]$ (l'indice j est déjà pris). Après l'opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, le coefficient en position (i,k) devient $M_{i,k} + aM_{j,k}$. Après l'opération $C_j \leftarrow C_j - aC_i$, si $k \neq j$, il est inchangé, et si $k = j$, il devient

$$(M_{i,j} + aM_{j,j}) - a(M_{i,i} + aM_{j,i}) = M_{i,j} + aM_{j,j} - aM_{i,i} - a^2 M_{j,i}$$

- Soit $l \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$ (l'indice i est déjà pris). Après l'opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, le coefficient en position (l, j) est inchangé, sauf si $l = i$, et dans ce cas il faut $M_{i,j} + aM_{j,j}$. Après l'opération $C_j \leftarrow C_j - aC_i$, il vaut, si $l \neq i$, $M_{l,j} - aM_{l,i}$ et, si $l = i$, il faut comme ci-dessus.

2. Si $i \neq j$, alors on a vu que $I_n \pm aE_{i,j}$ étaient inversibles et inverses l'une de l'autre. Par conséquent, la matrice M et $(I_n + aE_{i,j})M(I_n - aE_{i,j})$ sont semblables. De plus, on sait que les matrices de permutation de la forme $I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ (cf. chapitre 21) sont inversibles et sont leur propre inverse. Pour tous $i \neq j$, notons la matrice précédente $P_{i,j}$. De même que précédemment, $P_{i,j}MP_{i,j} = P_{i,j}MP_{i,j}{}^{-1}$ est la matrice obtenue en permutant les lignes i et j, ainsi que les colonnes i et j, et elle est encore semblable à M.

   Par conséquent, lorsqu'on applique ces deux types d'opérations sur une matrice M, on obtient une matrice semblable à M. Il suffit donc de prouver que l'on peut obtenir une matrice de la forme voulue à l'aide d'opérations de ce type.

   Si la première colonne est nulle, il n'y a rien à prouver.

   Supposons que la première colonne n'ait qu'un terme non nul : s'il est en position $(1, 1)$, il n'y a rien à prouver. Supposons qu'ils soit en position $(i, 1)$ avec $i > 1$. En effectuant les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + aL_i$ et $C_i \leftarrow C_i + aC_1$ (et la matrice obtenue est semblable à M d'après ce qui précède), alors la première colonne contient deux termes non nuls (a en positions $(1, 1)$ et $(i, 1)$) et on se ramène au cas suivant.

   Supposons donc que la première colonne ait au moins deux termes non nuls en position $(i, 1)$ et $(j, 1)$ avec $i < j$. Le but du jeu est de se ramener à une matrice dont les coefficients en positions $(1, 1)$ et $(2, 1)$ sont non nuls. Si $i = 1$ et $j = 2$ alors il n'y a rien à prouver. Supposons que les coefficients en $(1, 1)$ et $(2, 1)$soient nuls. On fait alors les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + L_i, C_i \leftarrow C_i - C_1$, et $L_2 \leftarrow L_2 + L_j, C_j \leftarrow C_j - C_2$ et à chaque fois la matrice est semblable à M. On a donc une matrice avec les deux premières coordonnées non nulles. Dans les autres cas, c'est même plus simple, par exemple si le coefficient en position $(1, 1)$ est non nul mais celui en position $(2, 1)$ est nul, on met un coefficient non nul à cette place grâce au coefficient en position $(j, 1)$ qui est non nul par hypothèse, etc.

   On a donc les deux premiers coefficients de la première colonne non nuls. Pour tout $i \geq 3$, on fait donc les opérations $L_i \leftarrow L_i - (a_{i,1}/a_{2,1})L_2$ et $C_2 \leftarrow C_2 + (a_{i,1}/a_{2,1})C_i$ si bien qu'on annule le coefficient en position $(i, 1)$ et on n'y touche pas ensuite puisqu'on ne touche qu'à la deuxième colonne. On annule donc tout le reste de la colonne, et à chaque étape, on reste semblable à M, d'où le résultat.

3. L'idée est d'appliquer le résultat précédent à la matrice de taille $n-1$ extraite « en bas à droite » de M. En ne touchant qu'aux colonnes 2 à n, en ne travaillant qu'avec cette matrice extraite et en la considérant comme une matrice de taille $n - 1$ et donc en appliquant ce qui précède à une matrice de taille $n - 1$, on se ramène à une matrice dont les coefficients en deuxième colonne sont tous nuls à part peut-être ceux en position $(2, 2)$ et $(3, 2)$ (et celui en position $(1, 2)$ auquel on n'a pas touché), et on itère l'opération, on réduit à chaque fois la matrice extraite de taille k en bas à droite de M, et à chaque fois on s'arrange, en ne touchant qu'aux lignes et aux colonnes qui viennent après, pour qu'il n'y ait que des termes nuls après les coefficients (k, k) et $(k + 1, k)$, et à chaque fois la matrice reste semblable à M ce qui permet de conclure.

4. Suivons l'indication de l'énoncé et séparons les cas.
   - Premier cas : si M admet un coefficient non nul en première ligne ou première colonne, en dehors du coefficient $(1, 1)$. Si celui-ci est en position $(i, 1)$ et vaut a, on fait alors $L_1 \leftarrow L_1 - (a_{1,1}/a)L_i, C_i \leftarrow C_i + (a_{1,1}/a)C_1$, on a annulé le coefficient en position $(1, 1)$.
   - Deuxième cas : si la première colonne et la première ligne de M sont nulles à part peut-être le coefficient en position $(1, 1)$ et si M admet un coefficient non diagonal non nul, disons en position (i, j) avec $i \neq j$ qui vaut a, alors on effectue les opérations $L_j \leftarrow L_j - L_1$, $C_1 \leftarrow C_1 + C_j$, alors a se retrouve en position $(i, 1)$ et on se retrouve au cas précédent, sauf si $i = 1$, mais alors le coefficient non nul était alors initialement en position $(1, j)$, et alors on se ramène au cas précédent en intervertissant les lignes L_j et L_1 et les colonnes C_1 et C_j, si bien que le coefficient non nul arrive en position $(j, 1)$ et on se ramène encore au cas précédent.
   - Supposons enfin que M soit diagonale. Si la diagonale de M est nulle alors M est nulle donc M est bien semblable à une matrice de diagonale nulle. Supposons la matrice de diagonale non nulle. La matrice ne peut pas avoir des coefficients tous égaux car sa trace est nulle : supposons que les coefficients en position (i, i) et (j, j) soient distincts. En faisant les opérations $L_i \leftarrow L_i + L_j, C_j \leftarrow C_j - C_i$, le coefficient en position (i, j) vaut $M_{i,i} - M_{j,j} \neq 0$ et on se ramène au premier cas.

   On itère ensuite le procédé pour annuler le coefficient en position $(2, 2)$ etc., et on a à chaque fois une matrice semblable à M, d'où le résultat.

31.5 Changements de bases

Exercice 56 : ✪ On note $a = (1, -1, 1), b = (2, 1, -1)$ et $c = (-1, 3, 1)$.

1. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de X dans la base (a, b, c).

Correction :

1. On prouve comme au chapitre 28 que la famille est libre, et puisque c'est une famille à trois éléments en dimension 3, alors c'est une base.
2. Notons $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique, et $B' = (a, b, c)$ la nouvelle base. Alors $X = X_B$. D'après la formule de changement de base,

$$X_{B'} = P_{B',B} X_B$$

Or,

$$P_{B,B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

On trouve aisément que

$$P_{B',B} = (P_{B,B'})^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

En conclusion :

$$\begin{aligned} X_{B'} &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4x - y + 7z \\ 4x + 2y - 2z \\ 3y + 3z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 57 : ✪ Dans chacun des cas suivants, on donner la matrice A canoniquement associée à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Donner à chaque fois la matrice de u relativement aux bases B_1 (base de départ) et B_2 (base d'arrivée).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_1 = B_2 = ((1,1), (1,2))$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_1 = ((1,1), (2,-3))$, $B_2 = ((1,1), (-1,-2))$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1 = B_2 = ((1,0,1), (1,2,0), (0,1,1))$.

Correction :

1. Notons B la base canonique de $\mathbb{R}^2$, si bien que $A = \mathrm{Mat}_B(u)$ et on cherche $\mathrm{Mat}_{B_1}(u)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{B_1}(u) &= P_{B_1,B} \times \mathrm{Mat}_B(u) \times P_{B,B_1} \\ &= (P_{B,B_1})^{-1} \times A \times P_{B,B_1} \end{aligned}$$

Or, P_{B,B_1} est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de B_1 (car B est la base canonique) donc

$$P_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

et on trouve alors

$$(P_{B,B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\mathrm{Mat}_{B_1}(u) = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. En notant toujours B la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $A = \text{Mat}_B(u)$ et on cherche $\text{Mat}_{B_2,B_1}(u)$. D'après la formule de changement de base :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{B_2,B_1}(u) &= P_{B_2,B} \times \text{Mat}_B(u) \times P_{B,B_1} \\ &= (P_{B,B_2})^{-1} \times A \times P_{B,B_1}\end{aligned}$$

Or :

$$P_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{B,B_2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$(P_{B,B_2})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et on obtient donc :

$$\text{Mat}_{B_2,B_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. En notant cette fois B la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a encore :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{B_1}(u) &= P_{B_1,B} \times \text{Mat}_B(u) \times P_{B,B_1} \\ &= (P_{B,B_1})^{-1} \times A \times P_{B,B_1}\end{aligned}$$

Or, P_{B,B_1} est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de B_1 (car B est la base canonique) donc

$$P_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on trouve alors

$$(P_{B,B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\text{Mat}_{B_1}(u) = \begin{pmatrix} 11/3 & 6/3 & 11/3 \\ 7/3 & 6/3 & 4/3 \\ -5/3 & -6/3 & -5/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 58 : ✪ Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \longmapsto (2x-y, y-z, -z+2x) \end{cases}$$

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $f_1 = e_2 - e_3, f_2 = -e_1 + e_3, f_3 = e_1 + e_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Correction :

1. On a $f_1 = (0,1,-1), f_2 = (-1,0,1)$ et $f_3 = (1,1,0)$. On montre comme au chapitre 28 que cette famille est libre (faites-le !) et comme on a une famille libre à trois éléments en dimension 3, c'est une base.
2. Si on note B_1 cette base, alors :

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{B_1}(f) &= P_{B_1,B} \times \text{Mat}_B(f) \times P_{B,B_1} \\ &= (P_{B,B_1})^{-1} \times \text{Mat}_B(f) \times P_{B,B_1}\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_{B,B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$(P_{B,B_1})^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et on trouve finalement :

$$\mathrm{Mat}_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 59 : ✪ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f^3 = 0$.
2. On pose $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$.
   (a) Montrer que $B' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.

Correction :

1. Il suffit de calculer A^3, qui est la matrice nulle.
2. On a $\varepsilon_1 = (1,0,0), \varepsilon_2 = (7,1,-6)$ et $\varepsilon_3 = (24,24,-48)$. On pourrait prouver que c'est une famille libre à la main, mais f est nilpotente et $f^2(e_1) \neq 0$ donc on montre comme en classe (dans l'activité où ou a montré que si f est nilpotente en dimension n alors $f^n = 0$) que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ est libre donc est une base car libre à trois éléments en dimension 3 : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$, et sa matrice est donnée par :

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(f(e_1)) & f(f^2(e_1)) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ f(e_1) \\ f^2(e_1) \end{array}$$

Exercice 60 : ✪ On note $B = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $B' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de B à B'.
3. Déterminer la matrice de passage de B' à B.
4. Soit D l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire :

$$D\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ \quad P \quad \longmapsto \quad P' \end{cases}$$

   Déterminer la matrice de D dans la base B puis la matrice de u dans la base B'.

Correction :

1. Famille libre car échelonnée en degré, donc base car famille échelonnée à 4 éléments en dimension 4.
2. Notons $P_0 = 1, P_1 = X, P_2 = X(X-1)$ et $P_3 = X(X-1)(X-2)$. En développant, on trouve $P_2 = X^2 - X$ et $P_3 = X^3 - 3X^2 + 2X$ si bien que

$$P_{B,B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}$$

3. Par conséquent :

$$
\begin{aligned}
P_{B',B} &= (P_{B,B'})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4. On trouve comme en classe :

$$
\mathrm{Mat}_B(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} D(1) & D(X) & D(X^2) & D(X^3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ X^3 \end{array}
$$

Finalement :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Mat}_{B'}(D) &= P_{B',B} \times \mathrm{Mat}_B(D) \times P_{B,B'} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Exercice 61 : ✪✪ Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 où $B_1 = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$ et $B_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$.

Correction : On cherche donc P_{B_1,B_2}. Passons par la base canonique : on a $P_{B_1,B_2} = P_{B_1,B} \times P_{B,B_2}$, où B est la base canonique. En effet, rappelons que si B et B' sont deux bases, $P_{B,B'} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{Id}_E)$. Dès lors, la composition étant représentée matriciellement par le produit :

$$
\mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{B_1,B_2}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{B_1,B}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{B,B_2}(\mathrm{Id}_E)
$$

Le résultat devient alors trivial : si on note (a,b,c) les vecteurs de B_1, (u,v,w) les vecteurs de B_2, et enfin (e_1,e_2,e_3) les vecteurs de la base canonique B, on a :

$$
P_{B,B_2} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \qquad \text{et} \qquad P_{B,B_1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}
$$

si bien que

$$
\begin{aligned}
P_{B_1,B} &= (P_{B,B_1})^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et donc :

$$
\begin{aligned}
P_{B_1,B_2} &= \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -27 & -59 & 10 \\ 9 & 17 & 0 \\ 4 & 10 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

31.6 Matrices et applications linéaires, stage two

Exercice 62 : ✪✪ On suppose que E est de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$.

1. Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que si $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Plus généralement, montrer à l'aide d'une activité du cours que dans une certaine base de E, u a pour matrice l'une des matrices suivantes :
$$0_3, I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et montrer que ces matrices sont deux à deux non semblables.

Correction :

1. Soit $x \in E$. Montrons comme d'habitude, par analyse synthèse, qu'il existe $x_1 \in \ker(u^2)$ et $x_2 \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ (donc vérifiant $u(x_2) = x_2$) uniques tels que $x = x_1 + x_2$.

   Analyse : si x_1 et x_2 conviennent. En appliquant u^2 linéaire, il vient : $u^2(x) = u^2(x_1) + u^2(x_2)$ mais $x_1 \in \ker(u^2)$ donc $u^2(x_1) = 0$ et $x_2 \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ donc $u(x_2) = x_2$ et en appliquant encore u, $u^2(x_2) = u(x_2) = x_2$ (et, plus généralement, $u^k(x_2) = x_2$ par une récurrence immédiate). Ainsi, $u^2(x) = x_2$ si bien que $x_1 = x - x_2 = x - u^2(x)$.

   Synthèse : soient $x_1 = x - u^2(x)$ et $x_2 = u^2(x)$. Il est immédiat que $x = x_1 + x_2$. Montrons que $x_1 \in \ker(u^2)$ et $x_2 \in \ker(u^2 - \mathrm{Id}_E)$. $u^2(x_1) = u^2(x) - u^4(x)$. Or, $u^3 = u^2$ donc, en composant par u, $u^4 = u^3 = u^2$ si bien que $u^2(x_1) = 0$: on a bien $x_1 \in \ker(u^2)$. Enfin, $u(x_2) = u^3(x) = u^2(x) = x_2$ si bien que $x_2 \in \ker(u - \mathrm{Id}_E)$, ce qui permet de conclure.
2. Supposons donc que $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ soit de dimension 1. Alors $\ker(u^2)$ est de dimension 2 (car supplémentaire d'un espace de dimension 1 en dimension 3). Soit e_1 une base de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ (e_1 est donc non nul et vérifie $u(e_1) = e_1$). Vues les matrices, on va s'intéresser au noyau de u (certains éléments vont avoir une image nulle). On sait que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et que $\ker(u^2)$ est de dimension 2, si bien que $\ker(u)$ est de dimension inférieure ou égale à 2. Or, si $\ker(u) = \{0\}$, alors u est injectif donc, par composition, u^2 l'est aussi ce qui est absurde (son noyau n'est pas nul). Il en découle que $\ker(u)$ est de dimension 1 ou 2.

   Supposons que $\ker(u)$ soit de dimension 2 et soit (e_2, e_3) une base de $\ker(u)$. Puisque $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ et qu'ils ont la même dimension, ils sont égaux et donc $\ker(u)$ et $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires : d'après le théorème de concaténation des bases, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et la matrice de u dans cette base est
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   Supposons à présent que $\ker(u)$ soit de dimension 1. Vue la matrice de gauche, on cherche un vecteur e_2 et un vecteur e_3 tel que $u(e_3) = e_2$ et $u(e_2) = 0$: on prend donc un vecteur $e_3 \in \ker(u^2) \backslash \ker(u)$ (possible car ces deux espaces sont distincts car ils n'ont pas la même dimension) et $e_2 = u(e_3)$. $u(e_2) = u^2(e_3) = 0$ puisque $e_3 \in \ker(u^2)$. Il suffit donc de prouver que (e_1, e_2, e_3) est une base de E. D'après le théorème de concaténation des bases, il suffit de prouver que (e_2, e_3) est une base de $\ker(u^2)$. Puisque c'est une famille à 2 éléments en dimension 2, il suffit de prouver que c'est une famille libre, ce qui est immédiat car on a deux vecteurs non colinéaires : en effet, $e_2 \in \ker(u)$ et $e_3 \notin \ker(u)$ donc e_2 et e_3 ne sont pas proportionnels, ce qui permet de conclure, car la matrice de u dans cette base est bien de la forme voulue.
3. Vue la question précédente, il semble légitime de séparer les cas selon la dimension de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$. On a déjà fait le cas où il est de dimension 1. S'il est de dimension nulle, alors $\ker(u^2)$ est de dimension 3 puisqu'ils sont supplémentaires donc $\ker(u^2) = E$ si bien que $u^2 = 0$, et on a montré en classe (ce n'est pas à savoir, mais vous pouvez vous entraîner à le prouver) que soit $u = 0$ et alors la matrice associée est nulle, soit il existe une base dans laquelle la matrice de u est égale à
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\ker(u-\mathrm{Id}_E)$ est de dimension 3 alors cet espace est égal à E si bien que $u-\mathrm{Id}_E = 0$ donc $u = \mathrm{Id}_E$ et donc la matrice de u est I_3 dans toutes les bases. Supposons enfin que $\ker(u-\mathrm{Id}_E)$ soit de dimension 2. Alors $\ker(u^2)$ est de dimension 1. De même, u ne peut pas être injectif donc $\ker(u)$ est de dimension supérieure ou égale à 1 et $\ker(u) \subset \ker(u^2)$ si bien que $\ker(u) = \ker(u^2)$ car ils ont la même dimension, et donc $\ker(u)$ et $\ker(u^2 - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires. Soit (e_1, e_2) une base de $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ (vérifiant donc $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = e_2$) et e_3 une base de $\ker(u)$ (vérifiant donc $u(e_3) = 0$). D'après le théorème de concaténation des bases, (e_1, e_2, e_3) est une base de E et la matrice de u dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui permet de conclure.

Montrons enfin que ces matrices sont deux à deux non semblables. La matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même : on peut soit dire que c'est la seule matrice de rang nul, soit dire que la matrice de l'application nulle est la même dans toutes les bases (plus généralement, la matrice d'une homothétie est la même dans toutes les bases), soit dire que si M est semblable à 0_3, alors il existe P inversible telle que $M = P0_3P^{-1} = 0_3$. Dans tous les cas, 0_3 n'est semblable qu'à elle-même, et c'est pareil pour I_3. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est semblable qu'à elle-même (parmi les matrices de l'exercice) car c'est la seule qui a une trace égale à 2. La matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est semblable qu'à elle-même (parmi les matrices de l'exercice) car c'est la seule avec une trace de 1 et un rang égal à 2. Enfin, les deux matrices restantes ne sont pas semblables car n'ont pas la même trace.

Exercice 63 : ✪✪ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de montrer d'une autre façon que dans l'exercice 13 du chapitre 21 qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$. On fait encore une fois un raisonnement par l'absurde et on suppose donc qu'une telle matrice B existe.

1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Conclure à une absurdité.

Correction :

1. On trouve facilement que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A^3 = 0_3$, si bien que $A^n = 0_3$ pour tout $n \geq 3$ (car $A^n = A^{n-3} \times A^3$).

2. On sait que $B^2 = A$ et que $A^3 = 0$. Dès lors, $B^6 = 0$ donc B est nilpotente. Or, d'après l'exercice cité dans l'énoncé, B est une matrice de taille 3 nilpotente, donc $B^3 = 0$ (en effet, si on note u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à B, alors $u^6 = 0$ donc u est nilpotent donc $u^3 = 0$ donc $B^3 = 0$). Cependant, $B^4 = A^2 \neq 0$ ce qui est absurde.

Exercice 64 - De l'art de bien choisir ses espaces : ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\displaystyle\binom{j-1}{i-1} 2024^{j-i}$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Correction : Gros classique, comme en classe. On a

$$A = \begin{pmatrix} \binom{0}{0}2024^0 & \binom{1}{0}2024^1 & \binom{2}{0}2024^2 & \cdots & \binom{n}{0}2024^n \\ 0 & \binom{1}{1}2024^0 & \binom{2}{1}2024^1 & \cdots & \binom{n}{1}2024^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}2024^0 & \cdots & \binom{n}{2}2024^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n}2024^0 \end{pmatrix}$$

On peut voir (cf. cours et exercice 10, 15, 36 : les coefficients binomiaux font penser à un binôme de Newton) A comme la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+2024)$: on a bien, pour tout $j \in [\![1\,;\,n+1]\!]$,

$$\varphi(X^{j-1}) = (X+2024)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^k 2024^{j-1-k}$$

Attention au décalage (cf. exercices 10, 15, 36) : les puissances commencent en 0, les lignes et les colonnes au rang 1, et donc $A_{i,j}$ est le coefficient selon X^{i-1} dans l'expression de $\varphi(X^{j-1})$ c'est-à-dire $\binom{j-1}{i-1}2024^{j-i}$. On a donc :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \cdots & \varphi(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \binom{0}{0}2024^0 & \binom{1}{0}2024^1 & \binom{2}{0}2024^2 & \cdots & \binom{n}{0}2024^n \\ 0 & \binom{1}{1}2024^0 & \binom{2}{1}2024^1 & \cdots & \binom{n}{1}2024^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}2024^0 & \cdots & \binom{n}{2}2024^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n}2024^0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array} \end{array} = A$$

Puisque φ est bijectif de réciproque $\varphi^{-1} : P \mapsto P(X-2024)$, alors A est inversible d'inverse la matrice canoniquement associée à φ^{-1}, et dont le terme général est $\displaystyle\binom{j-1}{i-1}(-2024)^{j-i}$.

Exercice 65 : ✪✪ On identifie dans cet exercice polynômes et fonctions polynomiales. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $T(P)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. L'endomorphisme T_n est-il bijectif ?
4. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?

Correction :

1. T est linéaire par linéarité de l'intégrale. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si on note Q une primitive de P, alors Q est aussi un polynôme (encore une fois, on identifie polynômes et fonctions polynomiales) et, pour tout x,
$$T(P)(x) = Q\left(x+\frac{1}{2}\right) - Q\left(x-\frac{1}{2}\right)$$
si bien que $T(P)$ est aussi un polynôme donc T va bien de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$ est évidemment linéaire car restriction d'une application linéaire. Il faut donc prouver que, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $T(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit donc
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$$
Attention, on ne suppose pas $a_n \neq 0$: on peut avoir tous les a_k nuls, par exemple si $P = 0$, mais puisque $\deg(P) \leq n$, alors P s'écrit forcément sous cette forme. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} T(P)(x) &= \int_{x-1/2}^{x+1/2} \sum_{k=0}^{n} a_k t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{x-1/2}^{x+1/2} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{(x+1/2)^{k+1}}{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \times \frac{(x-1/2)^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$
En développant, on a une fonction polynomiale faisant intervenir des degrés de 0 à $n+1$ si bien que $\deg(T(P)) \leq n+1$. Or, on a une différence de deux polynômes dont le coefficient devant X^{n+1} est $a_n/(n+1)$ donc les termes en X^{n+1} s'annulent si bien qu'il ne reste que des termes de degré inférieur ou égal à n ce qui permet de conclure.

3. Prouvons que T_n est bijectif de deux façons différentes.

   Première façon : point de vue endomorphisme (et donc j'aurais très bien pu mettre cet exercice dans le chapitre précédent). Soit $P \in \ker(T_n)$. Alors $T(P) = 0$ si bien que, si on note encore Q une primitive de P, alors :
$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x+1/2) = Q(x-1/2)$$
   Puisque cette égalité est vraie pour tout x, elle est aussi vraie pour $x + 1/2$ (penser à truc), ce qui donne :
$$\forall x \in \mathbb{R}, Q(x+1) = Q(x)$$
   si bien que Q est 1-périodique donc constant (cf. chapitre 19 : ce n'est pas explicitement au programme, il faut savoir le prouver) donc $P = Q' = 0$ si bien que $\ker(T_n) = \{0\}$: T_n est linéaire injectif entre deux espaces vectoriels de même dimension finie donc est bijectif.

   Deuxième façon : point de vue matriciel. Donnons la matrice canoniquement associée à T_n (ou en tout cas commençons à le faire). Soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$. D'après ce qui précède :
$$\begin{aligned} T(X^k) &= \frac{1}{k+1}\left(X+\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{k+1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-i} X^i - \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1-i} X^i \\ &= \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k+1}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-i} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1-i}\right] X^i \end{aligned}$$
   Or, le coefficient de X^{k+1} vaut $\dfrac{1}{k+1}((1/2)^0 - (-1/2)^0) = \dfrac{1}{k+1}(1-1) = 0$ si bien que
$$T(X^k) = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-i} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1-i}\right] X^i$$
   On en déduit que la matrice canoniquement associée à T est triangulaire supérieure. De plus, le coefficient devant X^k vaut
$$\frac{1}{k+1}(1/2 - (-1/2)) = \frac{1}{k+1}$$
   si bien que le coefficient en position $(k+1, k+1)$ vaut $1/k+1$ et donc est non nul : la matrice canoniquement associée à T_n est triangulaire supérieure avec des coefficient diagonaux tous non nuls donc est inversible donc T_n est bijectif.
4. Comme au chapitre 30 : on se restreint à $\mathbb{R}_n[X]$ (d'où l'utilité de T_n). Soit $P \in \ker(T)$. Si $P \neq 0$ alors, en notant $n = \deg(P)$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ si bien que $T_n(P) = 0$ ce qui est absurde puisque T_n est injectif. On en déduit que $\ker(T) = \{0\}$ donc T est injectif. Attention, on est en dimension infinie, l'injectivité n'est pas équivalente à la bijectivité ! Prouvons également la surjectivité. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $n \geq \deg(P)$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et, par surjectivité de T_n, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $T_n(Q) = P$ et en particulier, $T(Q) = P$ si bien que T est surjectif donc bijectif.

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^x$$
On note, pour tout $i \in [\![0\,;\, n]\!]$, b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i e^x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que $B = (b_0, \dots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E, et donner sa matrice relativement à la base B. D est-il un isomorphisme ?
3. Déterminer une base C de E dans laquelle la matrice de D est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer M^{-1}.
5. En déduire une primitive de la fonction b_n.
6. En déduire la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Correction :

1. Par définition, $f \in E$ s'il existe $(a_0, \dots, a_n)$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n e^x + \cdots + a_0 e^x$$

En d'autres termes, $E = \mathrm{Vect}(b_i)_{i \in [\![0\,;\,n]\!]}$ donc est un espace vectoriel. Montrons que $\dim(E) = n+1$. La famille $(b_0, \dots, b_n)$ étant génératrice de E par définition, prouvons que c'est une famille libre. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que $\alpha_0 b_0 + \cdots + \alpha_n b_n = 0$ i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_0 e^x + \cdots + \alpha_n x^n e^x = (\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_0) e^x = 0$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_0 = 0$ donc $\alpha_n X^n + \cdots + \alpha_0$ est le polynôme nul donc les α_i sont nuls : la famille est libre, c'est une base de E, E admet une base à $n+1$ éléments donc est de dimension $n+1$.

2. Tout d'abord, tout élément de E est dérivable car produit de fonctions dérivables, donc D est bien définie sur E. D est évidemment linéaire par linéarité de la dérivation. Soit $f \in E$. Il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^x$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$f'(x) = (P'(x) + P(x))e^x$$

et $P' + P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f' \in E$: D va de E dans E donc est un endomorphisme de E. De plus, pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$,

$$b_k{}'(x) = (kx^{k-1} + x^k)e^{-x}$$

si bien que $D(b_k) = b_k + kb_{k-1}$. On en déduit la matrice de E dans la base B :

$$\mathrm{Mat}_B(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D(b_0) & D(b_1) & D(b_2) & \cdots & \cdots & D(b_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{array}$$

Cette matrice est inversible car triangulaire avec des coefficients diagonaux tous non nuls, donc D est bijectif : c'est un isomorphisme.

3. Faisons comme en classe et construisons successivement des vecteurs qui conviennent. On cherche donc une base $C = (f_0, \dots, f_n)$ dans laquelle

$$\mathrm{Mat}_C(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D(f_0) & D(f_1) & D(f_2) & \cdots & \cdots & D(f_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{array}$$

c'est-à-dire que $D(f_0) = f_0, D(f_1) = f_1 + f_0, D(f_2) = f_2 + f_1$ et, plus généralement, $D(f_k) = f_k + f_{k-1}$ pour tout $k \geq 1$.

- Tout d'abord, on cherche une fonction f_0 telle que $D(f_0) = f_0$: $f_0 = \exp$ convient.
- On cherche à présent une fonction f_1 vérifiant : $D(f_1) = f_1 + f_0$ i.e., pour tout x, $f_1{}'(x) = f_1(x) + e^x$, et on a vu que $f_1 = b_1$ convient, c'est-à-dire que $f_1 : x \mapsto xe^x$ convient.
- On cherche une fonction f_2 vérifiant $D(f_2) = f_2 + f_1 = f_2 + b_1$. Or, b_2 vérifie : $D(b_2) = b_2 + 2b_1$. Par linéarité de D, $f_2 = b_2/2$ vérifie donc $D(f_2) = f_2 + b_1 = f_2 + f_1$ donc $f_2 = b_2/2$ convient.

- On cherche une fonction f_3 vérifiant $D(f_3) = f_3 + f_2 = f_3 + b_2/2$. Or, b_3 vérifie :

$$\begin{aligned} D(b_3) &= b_3 + 3b_2 \\ &= b_3 + 6f_2 \end{aligned}$$

Par linéarité de D, $f_3 = b_3/6$ vérifie donc $D(f_3) = f_3 + f_2$ donc $f_3 = b_3/6$ convient.

- Par récurrence finie, en posant, pour tout k, $f_k = b_k/k!$, alors on a $D(f_k) = f_k + f_{k-1}$. En effet, le résultat est vrai jusqu'au rang 3. Soit $k \in [\![3\,;\, n-1]\!]$, supposons que le résultat soit vrai au rang k et prouvons qu'il reste vrai au rang $k+1$. On sait que $D(b_{k+1}) = b_{k+1} + (k+1)b_k$ et donc, par linéarité de D,

$$\begin{aligned} D(f_{k+1}) &= D\left(\frac{b_{k+1}}{(k+1)!}\right) \\ &= \frac{1}{(k+1)!}D(b_{k+1}) \\ &= \frac{1}{(k+1)!}(b_{k+1} + (k+1)b_k) \\ &= \frac{b_{k+1}}{(k+1)!} + \frac{b_k}{k!} \\ &= f_{k+1} + f_k \end{aligned}$$

ce qui clôt la récurrence.

Il suffit de prouver que $(f_0, \dots, f_{n+1})$ est une base de E, ce qui est immédiat.

4. Avec la méthode habituelle (on met la matrice à côté de I_{n+1} et on effectue les mêmes opérations sur les deux matrices etc., faites-le !) on trouve que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire qu'on a des 1 sur la diagonale puis des alternances de ± 1 (précisons que la matrice est de taille $n+1$).

5. On sait que D est une bijection de E dans lui-même (question 2) : il existe h telle que $D(h) = b_n$ (et h est unique dans E, les autres primitives de b_n sont égales à h plus une constante, mais n'appartiennent pas à E à part avec une constante nulle). Dès lors, $h = D^{-1}(b_n)$ et cela se traduit matriciellement par :

$$\mathrm{Mat}_C(h) = M^{-1} \times \mathrm{Mat}_C(b_n)$$

Or, dans la base C, $b_n = n! \times f_n$ si bien que

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_C(h) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^n \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ n! \end{pmatrix} \\ &= n! \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \\ (-1)^n \\ (-1)^{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned} h &= n!(-1)^n(f_0 - f_1 + f_2 + \cdots + (-1)^n f_n) \\ &= n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f_k \\ &= n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{b_k}{k!} \end{aligned}$$

En d'autres termes, une primitive de b_n est

$$h : x \mapsto n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^k e^x}{k!}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$F(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$$

Effectuons le changement de variable $u = -t, t = -u$, $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ si bien que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{-x} (-u)^n e^u (-\mathrm{d}u) \\ &= (-1)^n \int_{-x}^{0} u^n e^u \, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

D'après la question précédente :

$$F(x) = (-1)^n \left[n!(-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{u^k e^u}{k!} \right]_{-x}^{0}$$

Tous les termes de cette somme tendent vers 0 en $-\infty$ sauf le terme d'indice $k = 0$ qui vaut 1 donc $I(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} n!$ (remarquons que le signe est cohérent). On aurait évidemment pu le prouver par récurrence avec une IPP, mais encore aurait-il fallu connaître le résultat à l'avance.

Exercice 67 : ✪✪✪ Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

Soit $B' = (e_1{}', \ldots, e_n{}')$ définie par : $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!], e_j{}' = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} e_k$. Montrer que B' est une base de E et donner la matrice de f dans la base B'.

Correction : Puisqu'on est en dimension n et qu'on a une famille à n éléments, il suffit de prouver qu'elle est libre. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_1 e_1{}' + \cdots + \alpha_n e_n{}' = 0$. Dès lors :

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \sum_{k=1}^{j} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \alpha_j \right) e_k = 0$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant libre, on a le système suivant :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \qquad \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0 \\ \qquad\qquad \ddots \quad \vdots \quad\ \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_n = 0 \end{cases}$$

On trouve $\alpha_n = 0$ puis, avec l'avant-dernière ligne $\alpha_{n-1} + \alpha_n = 0$, on trouve que $\alpha_{n-1} = 0$ et de proche en proche, tous les α_i sont nuls (on pouvait aussi dire que la matrice associée au système est la matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients valent 1 donc est inversible donc on a un système de Cramer donc il y a une unique solution et la solution nulle est solution évidente donc c'est la seule) donc la famille est libre ce qui permet de conclure.

On ne va pas donner les matrices de passage ici mais bien expliciter $f(e_j{}')$ en fonction des $e_i{}'$ pour tout j. Soit donc $j \in [\![1\,;\,n]\!]$. Par linéarité de f,

$$f(e_j{}') = \sum_{k=1}^{j} f(e_k)$$

Or, f est représentée par M dans la base B si bien que :

$$\begin{aligned}\forall k \in [\![1\,;\,n]\!], f(e_k) &= \alpha e_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{n} \beta e_i \\ &= (\alpha-\beta)e_k + \sum_{i=1}^{n} \beta e_i\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(e_j{}') &= \sum_{k=1}^{j} f(e_k) \\ &= (\alpha-\beta)\sum_{k=1}^{j} e_k + \beta\sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{i=1}^{n} e_i\right) \\ &= (\alpha-\beta)e_j{}' + \beta\sum_{k=1}^{j} e_n{}' \\ &= (\alpha-\beta)e_j{}' + \beta \times j e_n{}' \end{aligned}$$

et en particulier $f(e_n{}') = (\alpha+(n-1)\beta)e_n{}'$ si bien que la matrice associée à f dans la base B' est :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} f(e_1{}') & f(e_2{}') & \cdots & f(e_{n-1}{}') & f(e_n{}') \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0 \\ \beta & 2\beta & \cdots & (n-1)\beta & (\alpha+(n-1))\beta \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1{}' \\ e_2{}' \\ \vdots \\ e_{n-1}{}' \\ e_n{}' \end{array} \end{array}$$

Exercice 68 : ✪✪✪ On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est positive (ce qu'on note $A \geq 0$) si tous ses coefficients sont positifs. On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est monotone si A est inversible et si A^{-1} est positive.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et monotone si et seulement si : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. On note

$$A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX \geq 0$. On suppose qu'il existe i tel que $X_i < 0$ et note $i_0 = \min\{i \mid X_i < 0\}$. Montrer que pour tout $i \geq i_0$, $X_i \leq X_{i-1}$.

   (b) Montrer que A est monotone.

Correction :

1. Supposons A monotone et soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX \geq 0$. Alors A est inversible et $A^{-1} \geq 0$ donc $X = A^{-1}(AX) \geq 0$ car produit de matrices positives.

   Réciproquement, supposons l'autre condition remplie et montrons que A est monotone. Tout d'abord, montrons que A est inversible. Si A n'est pas inversible, alors il existe $X \in \ker(A)$ non nul, et puisque $\ker(A)$ est un espace vectoriel, alors il est stable par combinaison linéaire donc $-X \in \ker(A)$, et puisque $X \neq 0$, alors X ou $-X$ admet un coefficient strictement négatif mais $AX = A(-X) = 0 \geq 0$ on a donc un vecteur Y (soit X, soit $-X$) tel que $AY \geq 0$ mais Y n'est pas positif, ce qui est absurde, donc A est inversible.

Montrons enfin que A^{-1} est à coefficients positifs. Soit $j \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ et soit X_j le vecteur colonne (de taille n) dont tous les coefficients valent 0 sauf celui en ligne i qui vaut 1. Alors (écrivez les matrices et faites le produit avec les mains) $A^{-1}X_j$ est le vecteur colonne formé par la j-ième colonne de A^{-1}, qu'on note C_j. Alors, $AC_j = X \geq 0$ donc $C_j \geq 0$ i.e. la j-ième colonne de A^{-1} est positive et j est quelconque donc A^{-1} est positive donc A est monotone.

2. (a) Montrons le résultat par récurrence (finie) sur i.
   - Si $i \geq i_0$, notons H_i : « $X_i \leq X_{i-1}$ ».
   - H_{i_0} est vraie : en effet, par définition, $X_{i_0} < 0 \leq X_{i_0-1}$ puisque X_{i_0} est le premier coefficient strictement négatif.
   - Soit $i \in \llbracket i_0\,;\,n-1 \rrbracket$. Supposons $H_{i_0}, \dots, H_i$ vraies (on fait donc une récurrence forte) et prouvons que H_{i+1} est vraie. Effectuons le produit AX :

$$AX = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

   Le résultat est un vecteur colonne, positif par hypothèse, dont la i-ième cooordonnée est $-X_{i-1} + (2+a_i)X_i - X_{i+1} \geq 0$ si bien que

$$X_{i+1} \leq (2+a_i)X_i - X_{i-1} = (1+a_i)X_i + (X_i - X_{i-1})$$

   Or, par hypothèse de récurrence, $X_i - X_{i-1} \leq 0$ si bien que $X_{i+1} \leq (1+a_i)X_i$. De plus, puisqu'on a supposé $H_{i_0}, \dots, H_i$ vraies, alors $X_i \leq \cdots \leq X_{i_0} < 0$ si bien que $X_i < 0$. Par conséquent, $(1+a_i) \geq 1$ (car $a_i \geq 0$) et $X_i < 0$ donc $(1+ai)X_i \leq X_i$ ce qui clôt la récurrence.

   (b) $AX \geq 0$ donc $(AX)_n \geq 0$ donc $-X_{n-1} + (2+a_n)X_n \geq 0$. Or,

$$(2+a_n)X_n - X_{n-1} = (X_n - X_{n-1}) + (1+a_n)X_n < 0$$

   car on a prouvé que $X_n - X_{n-1} \leq 0$ et $X_n < 0$ ce qui est absurde : on en déduit que $X \geq 0$ et la première question nous permet de conclure.

Exercice 69 : ✪✪✪ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $f(e_p) = e_{p+1}$ si $p < n$ et $f(e_n) = 0$. Montrer que f est nilpotent et donner sa matrice dans la base B. Donner les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ stables par f.

Correction : Précisons que cette question est tirée d'un écrit de l'X. Commençons par expliciter $\mathrm{Mat}_B(f)$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) & \cdots & f(e_{n-1}) & f(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}$$

Il est immédiat que, pour tout k, $\mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$ est stable par f. En effet, si $x \in \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n)$, alors il existe $\lambda_k, \dots, \lambda_n$ tels que $x = \lambda_k e_k + \cdots + \lambda_n e_n$ si bien que, par linéarité de f :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_k f(e_k) + \cdots + \lambda_{n-1} f(e_{n-1}) + \lambda_n f(e_n) \\ &= \lambda_k e_{k+1} + \cdots + \lambda_{n-1} e_n + 0 \\ &\in \mathrm{Vect}(e_k, \dots, e_n) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{K}^n$ stable par f (l'espace $\{0\}$ est évidemment stable par f) et prouvons que f est de cette forme. Soit $d \geq 1$ la dimension de F. Soit $x \in F$ non nul : il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, avec au moins un coefficient parmi $(x_1, \dots, x_{n-d})$ qui soit non nul. Notons $i_0 = \min\{k \,|\, x_k \neq 0\}$ i.e. le premier indice tel que x_k soit non nul. Alors

$$x = x_{i_0}e_{i_0} + \cdots + x_n e_n$$

et en composant par f^{n-i_0} linéaire, on obtient

$$f^{i_0}(x) = x_{i_0}f^{n-i_0}(e_{i_0}) + f^{n-i_0}(e_{i_0+1}) + \cdots + f^{n-i_0}(e_n)$$

Or, $f(e_{i_0}) = e_{i_0+1}$, $f^2(e_{i_0}) = e_{i_0+2}$ et ainsi de suite jusque $f^{n-i_0}(e_{i_0}) = e_n$, et si $k > i_0$,

$$\begin{aligned} f^{n-i_0}(e_k) &= f^{k-i_0} \circ f^{n-k}(e_k) \\ &= f^{k-i_0}(e_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

si bien qu'on a $f^{i_0}(x) = x_{i_0}e_n \neq 0$ puisque x_{i_0} et e_n sont non nuls, et $f^{i_0+1}(x) = 0$. De même que dans le cours (quand on a prouvé que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension), les vecteurs $x, f(x), \dots, f^{n-i_0}(x)$ sont libres et au nombre de $n - i_0 + 1$ et sont dans F car F stable par f, et F est de dimension d si bien que $n - i_0 + 1 \leq d$ donc $i_0 \geq n - d + 1$ c'est-à-dire que les coefficients devant $e_1, \dots, e_{n-d}$ sont nuls (puisque i_0 est le premier indice avec un coefficient non nul) : $F \subset \mathrm{Vect}(e_{n-d+1}, \dots, e_n)$. Or, $e_{n-d+1}, \dots, e_n$ sont libres car sous-famille d'une famille libre (une base) et forment par définition une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(e_{n-d+1}, \dots, e_n)$ donc en forment une base si bien que cet espace est aussi de dimension d : par égalité des dimensions, et puisque F est inclus dans cet espace, $F = \mathrm{Vect}(e_{n-d+1}, \dots, e_n)$.

Exercice 70 : ✪✪✪ Soient $n \geq 1, E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Soit u l'application définie sur E par $u(P) = P(X + \alpha)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer A, la matrice canoniquement associée à u.
2. Montrer que A est inversible de deux façons différentes et déterminer A^{-1} sans calcul d'inverse.
3. Montrer que pour tous $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tels que $i < j$,

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k}\binom{k}{i}\binom{j}{k} = 0$$

Correction :

1. La linéarité de u est immédiate, et aussi le fait que u aille de E dans lui-même puisque, pour tout P, P et $P(X+\alpha)$ ont même degré. Donnons à présent la matrice canoniquement associée (précisons qu'elle est carrée de taille $n+1$). De même que dans les exercices 64, 36, 15 et 10, pour tout $j \in [\![0\,;\,n]\!]$, on a :

$$u(X^j) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}\alpha^{j-i}X^i$$

Soit donc $(i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!]^2$ (comme précédemment, attention au décalage : les indices d'une matrice commencent en 1 alors que les puissances de X commencent en 0). Par conséquent, le coefficient en position (i,j) est le coefficient de X^{i-1} dans l'écriture de X^{j-1} ce qui donne donc, d'après ce qui précède :

$$\binom{j-1}{i-1}\alpha^{j-i}$$

(valable aussi si $i > j$ car alors le coefficient binomial est nul). Finalement, la matrice canoniquement associée à u est :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \varphi(1) & \varphi(X) & \varphi(X^2) & \cdots & \varphi(X^n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \binom{0}{0}\alpha^0 & \binom{1}{0}\alpha^1 & \binom{2}{0}\alpha^2 & \cdots & \binom{n}{0}\alpha^n \\ 0 & \binom{1}{1}\alpha^0 & \binom{2}{1}\alpha^1 & \cdots & \binom{n}{1}\alpha^{n-1} \\ 0 & 0 & \binom{2}{2}\alpha^0 & \cdots & \binom{n}{2}\alpha^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n}\alpha^0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^n \end{array} \end{array}$$

2. A est inversible car triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls (car égaux à 1) : c'est le point de vue matriciel. Montrons que A est inversible par le point de vue application linéaire, c'est-à-dire montrons que u est bijective. Or, de même que dans les exercices précédents, u est bijective et $u^{-1} = P \mapsto P(X - \alpha)$ donc A est inversible.

3. Soient donc i et j tels que $i < j$. Puisque $A \times A^{-1} = I_n$, le coefficient de AA^{-1} en position (i, j) est nul (puisque $A^{-1}A$ est diagonale). Par définition d'un produit de matrices :

$$(AA^{-1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{k=1}^{n+1} A_{i,k}(A^{-1})_{k,j}$$

Or, A est triangulaire supérieure donc A^{-1} également (inverse d'une matrice triangulaire supérieure) donc :

- $A_{i,k} = 0$ dès que $i > k$ donc la somme va de $k = i$ à $k = n+1$.
- $(A^{-1})_{k,j} = 0$ dès que $k > j$ donc la somme va de $k = i$ (d'après ce qui précède) à $k = j$. De plus, en utilisant le terme général de A et celui de A^{-1} (analogue à celui de A en remplaçant α par $-\alpha$ puisque A^{-1} est la matrice canoniquement associée à $P \mapsto P(X - \alpha)$) :

$$(AA^{-1})_{i,j} \quad = \quad \sum_{k=i}^{j} \binom{k-1}{i-1} \times (-1)^{k-j} \binom{j-1}{k-1}$$

Or, en travaillant avec des factorielles, on prouve que pour tout k,

$$\binom{j-1}{k-1} \times \binom{k-1}{i-1} = \binom{j}{k} \times \binom{k}{i} \times \frac{i}{j}$$

si bien que

$$\begin{aligned}(AA^{-1})_{i,j} \quad &= \quad \frac{i}{j} \sum_{k=i}^{j} \binom{k}{i} \times (-1)^{k-j} \binom{j}{k} \\ &= \quad 0\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure (rappelons que $(-1)^{j-k} = (-1)^{k-j}$).

Exercice 71 - Théorème de Graham et Pollak : ✪✪✪✪ On fait disputer à n joueurs m matchs de balle au prisonnier : lors du k-ième match, on forme deux équipes : la bleue B_k et la rouge R_k ; ces deux équipes n'ont pas nécessairement le même nombre de joueurs, et tous les joueurs ne jouent pas tous les matchs (mais les équipes sont toujours non vides). On suppose qu'au bout des m matchs, chaque joueur aura affronté chaque autre une et une seule fois.

1. On définit la matrice M_k dont le coefficient $(M_k)_{i,j}$ vaut 1 si, lors du k-ième match, le i-ème joueur était bleu et le j-ième rouge, et 0 dans tous les autres cas. Déterminer son rang.
2. On pose $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} M_k$. Montrer que $M + M^\top$ est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients non diagonaux valent 1, et tous les coefficients diagonaux sont nuls.
3. Montrer que si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a un rang inférieur ou égal à $n-2$, alors il existe un vecteur x non nul, mais dont la somme des coordonnées est nulle, dans le noyau de A.
4. En considérant la fonction

$$\theta \colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\top \times (M + M^\top) \times x \end{cases}$$

déduire de ce qui précède que $m \geq n-1$.

5. Montrer que si, pour tout k, la partie k consiste à opposer le k-ième joueur aux joueurs numérotés de $k+1$ à n, alors la contrainte de l'énoncé est vérifiée. La borne $n-1$ est-elle optimale ?

Correction :

1. Puisqu'il y a n joueurs, alors M_k est carrée de taille n. Donnons un exemple : s'il y a 5 joueurs et si la deuxième partie consiste à opposer les joueurs 1 et 2 en rouge aux joueurs $3, 4, 5$ qui sont en bleu, alors M_2 est carrée de taille 5 et $(M_2)_{i,j} = 1$ si i est bleu donc $i = 3, 4, 5$ et j est rouge donc $j = 1$ ou 2, et 0 sinon. On a donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

M_2 est de rang 1 dans ce cas précis. Revenons au cas général et prouvons que M_k est toujours de rang 1. Soit $j \in [\![1 ; n]\!]$. Si le joueur j n'est pas dans l'équipe rouge, alors la colonne j est nulle. Supposons à présent que le joueur

j soit dans l'équipe rouge. Alors les coefficients de C_j non nuls sont exactement ceux d'indice i avec i les numéros des joueurs dans l'équipe bleue. En particulier, toutes les colonnes C_j non nulles sont égales ! Par conséquent, toutes les colonnes (nulles ou non) de M_k sont proportionnelles, et puisque l'équipe rouge est non vide, il y a au moins une colonne non nulle, donc M_k est bien de rang 1.

2. M est bien carrée de taille n car somme de matrices carrées de taille n. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]$. Il n'est pas possible qu'un joueur soit dans les deux équipes en même temps donc le coefficient en position (i,j) de M_k est toujours nul si $i=j$: tous les coefficients diagonaux de toutes les matrices M_k sont nuls donc les coefficients diagonaux de M sont nuls donc également ceux de $M + M^\top$.

   Supposons à présent que $i \neq j$. Il est précisé que chaque joueur joue une et une seule fois contre n'importe quel autre joueur : il existe donc un unique k tel que les joueurs i et j soient opposés. Pour toute autre valeur de k, le coefficient de M_k en position (i,j) est nul (car i et j ne s'affrontent pas : j ne peut pas être rouge et i bleu) et celui en position (j,i) également (pour la même raison : j ne peut pas être bleu et i rouge) donc les coefficients de M_k en positions (i,j) et (j,i) sont nuls. Prenons enfin k le numéro de la partie où les deux joueurs s'affrontent : si i est rouge et j bleu, alors $(M_k)_{j,i} = 1$ et si c'est le contraire, $(M_k)_{i,j} = 1$. Dans tous les cas, $(M_k)_{i,j} + (M_k)_{j,i} = 1$.

   En conclusion, M est une somme de matrices dont les coefficients en (i,j) et (j,i) sont nuls, sauf pour une valeur de k pour laquelle l'un des deux vaut 1 et donc $(M + M^\top)_{i,j} = 1$.

3. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) \geq 2$: il existe x et y libres (et donc non nuls) dans le noyau de $\ker(A)$. Si la somme des coordonnées de x ou de y est nulle, alors l'un de ces vecteurs convient. Supposons que la somme des coordonnées de x et celle de y soient toutes les deux non nulles, et notons-les S_x et S_y. Il suffit de voir que, pour tout λ, la somme des coordonnées de $x + \lambda y$ est $S_x + S_y + n\lambda$: il suffit de prendre $\lambda = (S_x + S_y)/(-n)$: $x + \lambda y$ a une somme des coordonnées nulle, et il est non nul car x et y sont libres.

4. On sait (cf. question 1) que M est somme de m matrices de rang 1. Or, (cf. cours, qu'on étend aisément à m matrices),

$$\mathrm{rg}(M) \leq \mathrm{rg}(M_1) + \cdots + \mathrm{rg}(M_m)$$

   Il suffit donc de prouver que $\mathrm{rg}(M) \geq n-1$. Supposons par l'absurde que $\mathrm{rg}(M) \leq n-2$. D'après la question précédente, il existe $x \neq 0$ tel que $Mx = 0$ et la somme des coordonnées de x est nulle. Puisque $Mx = 0$ alors $(Mx)^\top = 0$ donc $x^\top M^\top = 0$. On en déduit que $\theta(x) = 0$ puisque $Mx = 0$ et $x^\top M^\top = 0$. Cependant, si on note $S = 0$ la somme des coefficients de x,

$$\begin{aligned}
\theta(x) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n \\ \vdots \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1} x_j \sum_{i \neq j} x_i \\
&= \sum_{j=1} (x_j(S - x_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} -{x_j}^2
\end{aligned}$$

   car $S = 0$, et $\theta(x) = 0$ donc tous les ${x_j}^2$ donc tous les x_j sont nuls (rappelons qu'une somme de termes négatifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls), ce qui est absurde puisque x est supposé non nul. Le résultat en découle.

5. Chaque joueur joue une et une seule fois contre chaque autre joueur : si $i < j$, les joueurs i et j s'affrontent uniquement au i-ième match, lorsque le i-ième joueur joue contre les joueurs $i+1, \ldots, n$ (et en particulier contre j). En effet, avant, i et j sont dans la même équipe, et après, i ne joue plus. Il en découle qu'il est possible de réaliser cette expérience avec $m = n-1$ match, donc oui, la minoration $m \geq n-1$ est optimale.

Chapitre 32

Groupe symétrique

« Je le vis, je rougis, je pâlis à sa vue ;
Un trouble s'éleva dans mon âme éperdue ;
Mes yeux ne voyaient plus, je ne pouvais parler ;
Je sentis tout mon corps et transir et brûler ; »

Racine, Phèdre

Comme en cours, n est un entier supérieur ou égal à 3.

32.1 Permutations explicites

Exercice 1 : ✪

1. La permutation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle un cycle ?
2. Montrer que $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est la composée de deux cycles à supports disjoints.
3. Expliciter la permutation $\sigma_3 = (1\,2\,7\,4\,3) \circ (6\,4\,3\,5\,2) \circ (8\,1\,3\,7\,6)$ puis l'écrire comme composée de cycles à supports disjoints.
4. Même question avec $\sigma_4 = (1\,2\,4\,3) \circ (6\,4\,5\,2) \circ (8\,6\,3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.
5. Donner les signatures de σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4.
6. Écrire σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4. comme produit de transpositions de deux manières différentes.

Correction :

1. Donnons comme en classe la décomposition de σ_1 en produit de cycles à supports disjoints. 1 est dans le support : on commence par 1 et ainsi de suite jusqu'à retomber sur 1, et si on n'a pas fini, c'est que σ_1 n'est pas un cycle (mais on continue quand même car cela nous sera utile dans les questions suivantes). Les images successives de 1 sont $5, 7, 2, 4, 6, 3, 8$ c'est-à-dire tout le monde : σ_1 est le 8-cycle $(1\,5\,7\,2\,4\,6\,3\,8)$ et en particulier est un cycle.
2. Idem, donnons la décomposition de σ_2 comme produit de cycles à supports disjoints. Les images successives de 1 sont $8, 5, 6, 7, 3$. Le prochain élément du support que nous n'avons pas visité est 2 qui est envoyé sur 4 qui revient sur 2, et nous avons visité tout le monde, si bien que $\sigma_2 = (1\,8\,5\,6\,7\,3) \circ (2\,4)$ donc est produit de deux cycles à supports disjoints.
3. 1 est envoyé sur 3 puis sur 5, 2 est envoyé sur 6, 3 est envoyé sur 7 puis sur 4, 4 est envoyé sur 3 puis sur 1, 5 est envoyé par 2 puis sur 7, 6 est envoyé sur 8, 7 est envoyé sur 6 puis sur 4 puis sur 3 et enfin 8 est envoyé sur 1 puis sur 2 si bien que :

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   On trouve comme précédemment que $\sigma_3 = (1\,5\,7\,3\,4) \circ (2\,6\,8)$.
4. De même, 1 est envoyé sur 6 puis sur 3 puis 3 sur 1 donc 1 est envoyé sur 1. On trouve les autres de façon analogue :

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

   et on trouve ensuite (attention on commence en 2 puisque 1 est fixé par σ_4) que $\sigma_4 = (2\,6\,5) \circ (3\,7)$.

5. Rappelons qu'un p-cycle est de signature $(-1)^{p-1}$ et la signature est un morphisme donc on multiplie les signatures des cycles : on trouve successivement que $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^7 = -1$,

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma_2) &= \varepsilon((1\,8\,5\,6\,7\,3)) \times \varepsilon((2\,4)) \\ &= (-1)^5 \times (-1)^1 \\ &= 1\end{aligned}$$

On trouve de même que $\varepsilon(\sigma_3) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_4) = -1$.

6. Puisqu'on a les écritures en produit de cycles à supports disjoints, on peut écrire chaque cycle en produit de transpositions en se souvenant que

$$(a_1\,a_2\,\cdots\,a_{n-1}\,a_n) = (a_1\,a_2) \circ (a_2\,a_3) \circ \cdots (a_{n-2}\,a_{n-1}) \circ (a_{n-1}\,a_n)$$

On a donc successivement :
- $\sigma_1 = (1\,5) \circ (5\,7) \circ (7\,2) \circ (2\,4) \circ (4\,6) \circ (6\,3) \circ (3\,8)$.
- $\sigma_2 = (1\,8) \circ (8\,5) \circ (5\,6) \circ (6\,7) \circ (7\,3) \circ (2\,4)$.
- $\sigma_3 = (1\,5) \circ (5\,7) \circ (7\,3) \circ (3\,4) \circ (2\,6) \circ (6\,8)$.
- $\sigma_4 = (2\,6) \circ (6\,5) \circ (3\,7)$.

Deuxième méthode : avec l'autre méthode vue en classe. On prend le dernier élément qui n'est pas fixé par σ, on les intervertit dans la deuxième ligne et on sort la permutation qui les échange. On a donc :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 7 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\;7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 6 & 2 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\,7) \circ (3\,6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\,7) \circ (3\,6) \circ (2\,5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\,7) \circ (3\,6) \circ (2\,5) \circ (3\,4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\,7) \circ (3\,6) \circ (2\,5) \circ (3\,4) \circ (1\,3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= (1\,8) \circ (2\,7) \circ (3\,6) \circ (2\,5) \circ (3\,4) \circ (1\,3) \circ (1\,2)\end{aligned}$$

On voit comme en cours qu'il n'y a pas unicité de la décomposition en produit de transpositions (même à l'ordre près des termes). De même pour σ_2 :

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ (3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ (3\,7) \circ (3\,6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ (3\,7) \circ (3\,6) \circ (3\,5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ (3\,7) \circ (3\,6) \circ (3\,5) \circ (2\,4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (5\,8) \circ (3\,7) \circ (3\,6) \circ (3\,5) \circ (2\,4) \circ (1\,3)
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 7 & 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 7 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ (3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ (3\,7) \circ (2\,6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ (3\,7) \circ (2\,6) \circ (3\,5) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ (3\,7) \circ (2\,6) \circ (3\,5) \circ (1\,4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (2\,8) \circ (3\,7) \circ (2\,6) \circ (3\,5) \circ (1\,4) \circ (1\,3)
\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}
\sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 2 & 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (3\,7) \circ (5\,6) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 4 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (3\,7) \circ (5\,6) \circ (2\,5)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : ✪✪ Donner toutes les permutations qui commutent avec le n-cycle $(1\,2\,\dots\,n)$.

Correction : Notons c ce cycle. Soit $\sigma \in S_n$. Alors σ commute avec c si et seulement si, pour tout k, $\sigma(c(k)) = c(\sigma(k))$, c'est-à-dire $\sigma(k+1) = \sigma(k)+1$ (avec la convention $n+1 = 1$: on travaille modulo n). Une telle permutation est entièrement déterminée par l'image d'un entier quelconque, disons 1 : si $\sigma(1)$ est fixé, disons p, alors $\sigma(2) = p+1$ etc. à chaque fois on ajoute 1, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 5 & 6 & 7 & \cdots & n & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 : ✪✪ Déterminer la signature de la permutation σ définie par : $\forall k \in [\![1\,;\, n]\!], \sigma(k) = n+1-k$.

Correction : Il suffit d'écrire σ comme produit de cycles à supports disjoints ou comme produit de transpositions. Ici, cela revient au même :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit en partant du début (pour la décomposition en produit de cycles à supports disjoints), soit en partant de la fin (pour l'écriture en produit de transpositions), on a

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\,n) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & n-1 & n-2 & \cdots & 3 & 2 & n \end{pmatrix} \\ &= (1\,n) \circ \begin{pmatrix} 2 & n-1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 1 & 2 & n-2 & \cdots & 3 & n-1 & n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ainsi de suite, et on s'arrête juste avant la moitié : on s'arrête au dernier entier k vérifiant $2k \leq n$: si $n = 2k$ alors la dernière transposition est $\begin{pmatrix} k & k+1 \end{pmatrix}$ si bien que

$$\sigma = (1\,n) \circ \begin{pmatrix} 2 & n-1 \end{pmatrix} \circ \cdots \begin{pmatrix} n/2 & n/2+1 \end{pmatrix}$$

si bien que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n/2}$. Si n est impair, alors « le milieu » de σ est laissé fixe, on s'arrête juste avant. Plus précisément, si $n = 2k+1$ alors $\sigma(k+1) = n+1-(k+1) = k+1$ et la dernière transposition est donc $\begin{pmatrix} k & k+2 \end{pmatrix}$ si bien que

$$\sigma = (1\,n) \circ \begin{pmatrix} 2 & n-1 \end{pmatrix} \circ \cdots \begin{pmatrix} (n-1)/2 & (n+1)/2 \end{pmatrix}$$

si bien que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{(n-1)/2}$.

32.2 Permutations générales

Exercice 4 - Une autre définition de la signature : ✪ Si $\sigma \in S_n$, on appelle inversion de σ tout couple $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma}$, où I_σ est le nombre d'inversions de σ.

Correction : Rappelons que la signature d'une permutation σ est égale à

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j-i}$$

Par conséquent, I_σ est le nombre de termes strictement négatifs du produit, les autres termes étant strictement positifs. Ainsi, $\varepsilon(\sigma)$ et $(-1)^{I_\sigma}$ sont de même signe, et puisque $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$, il est égal à $(-1)^{I_\sigma}$.

Exercice 5 : ✪✪ Soient c_1 et c_2 deux cycles de supports respectifs S_1 et S_2. Montrer que si c_1 et c_2 commutent, alors $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ ou $S_1 = S_2$. Réciproque ?

Correction : Précisons tout de suite que la réciproque est fausse : on peut avoir deux cycles ayant même support qui ne commutent pas (mais si les supports sont disjoints, les cycles commutent, cf. cours). Par exemple,

$$(1\,3\,4\,2) \circ (1\,2\,3\,4) = (2\,4\,3) \qquad \text{et} \qquad (1\,2\,3\,4) \circ (1\,3\,4\,2) = (1\,4\,3)$$

Soient donc c_1 et c_2 deux cycles qui commutent. Tout vient du fait que ce sont des cycles : si $x \in S_1$, alors, en notant p la longueur du cycle c_1, on a

$$c_1 = \begin{pmatrix} x & c_1(x) & {c_1}^2(x) & \cdots & c^{p-1}(x) \end{pmatrix}$$

Supposons donc que $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ et soit $x \in S_1$ si bien que, si p est la longueur de c_1, on a l'écriture ci-dessus (et précisons que les éléments apparaissant dans l'écriture de c_1 sont deux à deux distincts). Puisque c_1 et c_2 commutent, alors $c_1(c_2(x)) = c_2(c_1(x))$. Or, $c_2(x) \neq x$ puisque $x \in S_2$ si bien que $c_1(c_2(x)) \neq c_1(x)$ puisque c_1 est injective. Par conséquent, $c_2(c_1(x)) \neq c_1(x)$ et donc $c_1(x) \in S_2$. En d'autres termes : si truc $\in S_1 \cap S_2$ alors $c_1(\text{truc}) \in S_1 \cap S_2$. $x \in S_1 \cap S_2$ donc $c_1(x) \in S_1 \cap S_2$ donc ${c_1}^2(x)$ également et ainsi de suite : on en déduit que $x, \dots, {c_1}^{p-1}(x) \in S_2$ donc $S_1 \subset S_2$ et par symétrie des rôles on a l'inclusion réciproque.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\, n]\!]}$. Que dire de la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints ? En déduire que si n est impair, alors σ admet un point fixe.

Correction : Notons $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_k$ la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints. Puisque les supports sont disjoints, les cycles commutent deux à deux si bien que :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= c_1 \circ \cdots \circ c_k \circ c_1 \circ \cdots \circ c_k \\ &= {c_1}^2 \circ \cdots \circ {c_k}^2\end{aligned}$$

Or, $\sigma^2 = \text{Id}$ donc son support est vide. Les c_i étant à supports disjoints, leurs carrés le sont aussi donc le support de σ^2 est l'union des supports des ${c_i}^2$, et cette union est vide donc tous les supports sont vides, ce qui veut dire que tous les ${c_i}^2$ sont égaux à l'identité, ce qui implique que les c_i sont des 2-cycles donc des transpositions. En d'autres termes, σ est un produit de transpositions **à supports disjoints**. En particulier, le support de σ est de cardinal pair donc, si n est impair, σ admet un point fixe : sur un ensemble de cardinal impair, une involution admet un point fixe (ce qu'on avait déjà prouvé par récurrence dans l'exercice 29 du chapitre 18, mais ici la preuve est particulièrement courte).

Exercice 7 : ✪✪ Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-f-c}$ où f est le nombre de points fixes de σ et c le nombre de cycles dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Correction : Notons $s_1, \dots, s_c$ les différents cycles à supports disjoints intervenant dans la décomposition de σ, de longueurs respectives $l_1, \dots, l_c$. Dès lors, la signature étant un morphisme :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= \varepsilon(s_1) \times \cdots \times \varepsilon(s_c) \\ &= (-1)^{l_1 - 1} \times \cdots \times (-1)^{l_c - 1} \\ &= (-1)^{l_1 + \cdots + l_c - c}\end{aligned}$$

Or, les supports étant disjoints, la somme de leurs cardinaux (i.e. la somme des longueurs des cycles) est égale au cardinal de l'union, c'est-à-dire le cardinal du support de σ, qui est égal à $n - f$.

Exercice 8 - Ordre d'une permutation : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$. On appelle **ordre** de la permutation σ, et on note $\omega(\sigma)$, le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie cette propriété.
2. Justifier que l'ordre d'une permutation est bien défini.
3. Soit $\sigma \in S_n$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma^k = \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ si et seulement si $\omega(\sigma) | k$. En déduire que si τ et σ sont deux permutations à supports disjoints, alors $\omega(\sigma \circ \tau) = \omega(\sigma) \vee \omega(\tau)$.
4. Soit $\sigma \in S_n$. Calculer $\omega(\sigma)$ en fonction des longueurs des cycles apparaissant dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. Calculer les ordres des permutations σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 de l'exercice 1.
6. Combien S_7 contient-il d'éléments d'ordre 12 ? On pourra utiliser l'exercice 11.

Correction :

1. S_n étant un ensemble fini, d'après le principe des tiroirs de Dirichlet, la suite (σ^k) prend au moins deux fois (en fait : une infinité de fois) la même valeur : il existe $k_1 < k_2$ tels que $\sigma^{k_1} = \sigma^{k_2}$. Or, on est dans un groupe (car ce sont des bijections), donc on peut multiplier à gauche par $(\sigma^{-1})^{k_1}$ ce qui donne $\sigma^{k_2 - k_1} = \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$.
2. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \,|\, \sigma^k = \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}\}$ est une partie non vide (d'après la question précédente) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.
3. Supposons que $\omega(\sigma) | k$. Alors il existe d tel que $k = d \times \omega(\sigma)$, si bien que :

$$\begin{aligned}\sigma^k &= \sigma^{\omega(\sigma \times d)} \\ &= \left(\sigma^{\omega(\sigma)}\right)^d \\ &= (\text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]})^d \\ &= \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $\omega(\sigma)$ ne divise pas k. D'après le théorème de division euclidienne, il existe q et r tels que $k = \omega(\sigma) \times q + r$ avec $r \in [\![1\,;\,\omega(\sigma) - 1]\!]$. De même que précédemment, $\sigma^k = \sigma^r$. Or, $1 \leq r < \omega(\sigma)$ donc $\sigma^r \neq \text{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ par définition de $\omega(\sigma)$. D'où l'équivalence.

Soient donc τ et σ deux permutations à supports disjoints et $k \geq 1$. Alors τ et σ commutent si bien que $(\tau \circ \sigma)^k = \tau^k \circ \sigma^k$. Rappelons que σ^k et τ^k ont des supports disjoints donc le support de $\tau^k \circ \sigma^k$ est l'union des supports. Dès lors,

$$\begin{aligned}
(\tau \circ \sigma)^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]} & \iff \tau^k \circ \sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]} \\
& \iff \mathrm{supp}(\tau^k \circ \sigma^k) = \varnothing \\
& \iff \mathrm{supp}(\tau^k) \cup \mathrm{supp}(\sigma^k) = \varnothing \\
& \iff \mathrm{supp}(\tau^k) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathrm{supp}(\sigma^k) = \varnothing \\
& \iff \tau^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]} \qquad \text{et} \qquad \sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]} \\
& \iff \omega(\tau)|k \qquad \text{et} \qquad \omega(\sigma)|k \\
& \iff \omega(\tau) \vee \omega(\sigma)|k
\end{aligned}$$

(rappelons que deux entiers divisent k si et seulement si leur PPCM le divise, cf. chapitre 6) c'est-à-dire que les k qui conviennent sont exactement les multiples du PPCM, et en particulier celui-ci est le plus petit qui convient, donc est égal à l'ordre de $\tau \circ \sigma$.

4. On généralise aisément le résultat précédent au cas d'un nombre quelconque de permutations : l'ordre d'une permutation est le PPCM des ordres. On sait (cf. cours) qu'un p-cycle c vérifie $c^p = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ et $c^k \neq \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ pour tout $k \in [\![1\,;\,p-1]\!]$: en effet, si on le note
$$c = \begin{pmatrix} x & c(x) & c^2(x) & \cdots & c^{p-1}(x) \end{pmatrix}$$
alors les éléments $x, c(x), \dots, c^{p-1}(x)$ sont deux à deux distincts et donc, si $k \leq [\![1\,;\,n-1]\!]$, $c^k(x) \neq x$ donc $c^k \neq \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$. On en déduit qu'un p-cycle est d'ordre p, donc qu'un cycle a un ordre égal à sa longueur. On en déduit donc que l'ordre d'une permutation est le PPCM des ordres, donc des longueurs, des cycles qui apparaissent dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. On en déduit que σ_1 est un 8 cycle donc est d'ordre 8.

   σ_2 est le produit (dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints) d'un 6-cycle, d'ordre 6 d'après ce qui précède, et d'un 2-cycle, d'après ce qui précède, donc l'ordre de σ_2 est égal à $6 \vee 2 = 6$.

   Puisque σ_3 est le produit d'un 5-cycle et d'un 3-cycle, alors $\omega(\sigma_3) = 5 \vee 3 = 15$. On montre de même que l'ordre de σ_4 vaut 6.
6. Soit $\sigma \in S_7$. Alors σ est d'ordre 12 si et seulement si les cycles apparaissant dans sa décomposition ont des longueurs dont le PPCM vaut 12 et en particulier divisent 12. Les diviseurs de 12 sont $1, 2, 3, 4, 6, 12$. Un élément de S_7 ne peut pas contenir un 12-cycle, ni contenir à la fois un 4-cycle et un 6-cycle (ils sont disjoints), ni contenir plusieurs 4-cycles ou plusieurs 3-cycles, ni contenir au moins un 2-cycle, un 3-cycle et un 4-cycle, donc la seule possibilité pour que 12 soit le PPCM des longueurs des cycles est qu'il y ait un 4-cycle et un 3-cycle. Une telle permutation est entièrement déterminée par le choix de son 4-cycle, ce qui fait (d'après l'exo 10)
$$\binom{7}{4} \times 3! = \frac{7 \times 6 \times 5}{3!} \times 3! = 210$$
choix possibles, puis par son 3-cycle, mais il ne reste que 3 éléments a, b, c, et il n'y a que deux 3-cycles possibles : $(a\,b\,c)$ et $(a\,c\,b)$ (ou on utilise encore l'exercice 11 : il y a deux 3-cycles dans un ensemble à 3 éléments). On trouve donc, d'après le principe multiplicatif, qu'il y a 420 telles permutations.

Exercice 9 - Jeu du taquin et problème de Sam Loyd : ✪✪✪✪ Le jeu du taquin est formé d'un plateau 4×4 formé de cases numérotées de 1 à 15 et d'une case laissée vide, dont l'état initial est donné ci-dessous (à gauche).

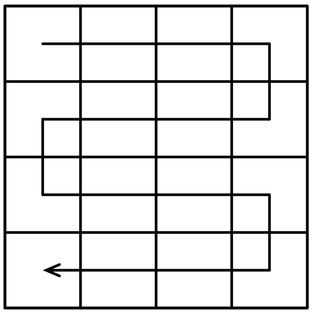
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Les seuls mouvements possibles sont le déplacement d'une case vers la case vide. Le but de l'exercice est de répondre à la question suivante, posée par Sam Loyd il y a plus d'un siècle : peut-on [1] arriver à la position de droite ci-dessus ? Peut-on se ramener à la position qui ne diffère de la position initiale que par l'interversion des cases numérotées 14 et 15 ?

À toute position du jeu du taquin, on peut associer une permutation de $[\![1\,;\,15]\!]$ obtenue en lisant tous les numéros suivant le parcours fléché (sans tenir compte du trou) ci-dessous :

1. Uniquement à l'aide de mouvements autorisés : l'usage d'une petite cuiller pour démonter le jeu est formellement interdit...



c'est-à-dire que l'image de 1 est le premier numéro, l'image de 2 est le deuxième numéro etc. Par exemple, la permutation associée à la configuration de départ du taquin est la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Le rangement des nombres de 1 à 15 ne détermine pas complètement la configuration du taquin, car il ne donne pas d'information sur la position de la case vide. Mais comme on peut promener la case vide le long du chemin par les mouvements autorisés du taquin, peu importe : si l'on peut arriver à l'une des configurations donnant un certain rangement, on pourra aussi arriver à toutes les configurations donnant le même rangement. On se demande donc si on peut réaliser la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix}$$

à l'aide des mouvements autorisés au jeu du taquin.

1. Montrer que, si la case vide n'est pas sur un des bords du plateau, effectuer un mouvement autorisé revient à composer la permutation avant mouvement par un 3-cycle, un 5-cycle, ou par l'identité.
2. Que se passe-t-il si la case vide est au bord du tableau, mais n'est pas un coin ?
3. Conclure.

Correction :

1. Supposons donc que la case vide ne soit pas sur le bord. Elle est donc en deuxième ou troisième ligne, et en deuxième ou troisième colonne, par exemple :

a	b	c	d
e		f	g
h	i	j	k
l	m	n	o

Il y a alors quatre cas de figure :

- Soit on fait glisser sur la case vide la case qui se trouve à gauche ou à droite : dans ce cas, l'ordre des numéros reste inchangé (voir sur l'exemple ci-dessus : faire glisser la case e ou la case f ne change pas l'ordre des lettres), donc la permutation reste inchangée. Cela revient à composer la permutation σ donnée par la position des cases avant le changement par l'identité.
- Soit on fait glisser sur la case vide le numéro qui se trouve sur la case au-dessus (la case b sur notre exemple). Dans ce cas, les cases avant le b ne sont pas modifiées, tout comme celles après la case vide. Il y a deux cas possibles (suivez l'ordre des flèches) : soit il y a 4 cases entre les deux, soit uniquement 2. Dans le dessin ci-dessus, il y a 4 cases entre le b et la case vide, et après avoir fait glisser la case, on obtient :

a		c	d
e	b	f	g
h	i	j	k
l	m	n	o

L'ordre des lettres est à présent a, c, d, g, f, b tandis qu'il était auparavant a, b, c, d, g, f : b a été envoyé sur f, c a été envoyé sur b, d a été envoyé sur c, g a été envoyé sur d, et f a été envoyé sur g. En d'autres termes, on a composé la permutation initiale par le cycle $(b\,f\,g\,d\,c)$, c'est-à-dire par un 5-cycle.

S'il n'y a que deux cases entre la case vide et la case du dessus, comme sur l'exemple ci-dessous :

a	b	c	d
e	f		g
h	i	j	k
l	m	n	o

qui mène à la configuration ci-dessous :

a	b		d
e	f	c	g
h	i	j	k
l	m	n	o

alors cela revient à composer par le 3-cycle $(c\,g\,d)$.

- Soit on fait monter la case du dessous, et c'est exactement la même chose.

2. On suppose que la case est sur le bord gauche comme ci-dessous :

a	b	c	d
	e	f	g
h	i	j	k
l	m	n	o

Si on déplace la case de droite, cela ne change pas l'ordre des lettres donc cela revient à composer par l'identité. Si l'on fait descendre la case du dessus, on arrive à :

	b	c	d
a	e	f	g
h	i	j	k
l	m	n	o

et on montre comme précédemment que cela revient à composer par le 7-cycle $(a\,e\,f\,g\,d\,c\,b)$. Si on fait monter le h, cela ne change pas l'ordre des lettres donc cela revient à composer par l'identité. Raisonnement analogue dans tous les autres cas de figure, par exemple si on part de :

a	b	c	d
e	f	g	h
	i	j	k
l	m	n	o

alors c'est faire glisser la case du dessus qui ne change rien et c'est faire glisser la case du dessous qui revient à multiplier par un 7-cycle.

3. Si la case vide est le coin supérieur droit ou le coin inférieur droit, on ne change pas l'ordre des numéros donc cela revient à composer par l'identité, et si c'est le coin inférieur gauche ou le coin supérieur gauche, cela revient à composer par l'identité ou par un 7-cycle.

Dans tous les cas, on passe d'une permutation à une autre en composant par une permutation de signature égale à 1, et on se demande si on peut passer, à partir de la permutation initiale, à une permutation obtenue en composant par une transposition, et donc en particulier à une permutation dont la signature a été multipliée par -1 : la réponse au problème posé est donc non.

Remarque : On peut se demander si on peut obtenir toutes les permutations ayant une signature égale à la signature de la permutation initiale. La réponse est oui, mais c'est plus difficile à montrer, cela vient du fait que les 3-cycles engendrent A_n (cf. DM).

32.3 Combinatoire et probabilités

Exercice 10 : ✪✪ Dénombrer les permutations $\sigma \in S_{2n}$ telles que :

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n) \qquad \text{et} \qquad \sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \cdots < \sigma(n+1)$$

Correction : Une telle permutation est entièrement déterminée par les images de $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ (sans notion d'ordre pour l'instant, c'est-à-dire l'ensemble des images) : $\displaystyle\binom{2n}{n}$ choix possibles. En effet, si on connaît ces images (sans connaître leur ordre, c'est-à-dire sans savoir qui est $\sigma(1)$, qui est $\sigma(2)$ etc.) alors en fait on connaît totalement σ :

- en effet, parmi ces éléments, $\sigma(1)$ est le plus petit, puis $\sigma(2)$ est le plus petit parmi ceux qui restent etc. Il n'y a qu'une seule façon de les ordonner.
- les entiers $\sigma(2n), \dots, \sigma(n+1)$ sont les entiers qui restent et, de la même façon, il n'y a qu'une seule façon de les ordonner.

Il y a donc $\displaystyle\binom{2n}{n}$ telles permutations.

Exercice 11 : ✪✪

1. Soit $p \in [\![2\,;\,n]\!]$. Combien S_n contient-il de p-cycles ?

2. Combien y a-t-il de permutations dans S_{20} dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints comporte trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes ?

Correction :

1. Un p-cycle est entièrement déterminé par le choix de ses éléments, $\binom{n}{p}$ choix possibles, puis par leur ordre : $p!$ choix possibles. Cependant, parmi les cycles obtenus, plusieurs sont en fait le même : en effet, par exemple, les cycles $(1\,3\,5)$ et $(3\,5\,1)$ sont en fait le même cycle. Si on prend un p cycle

$$c = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{p-1} & x_p \end{pmatrix}$$

alors les p-cycles obtenus en décalant le premier terme, c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & \cdots & x_p & x_1 \end{pmatrix}, \qquad \cdots \qquad , \begin{pmatrix} x_p & x_1 & \cdots & x_{p-2} & x_{p-1} \end{pmatrix}$$

sont égaux à c, et ce sont les seuls car, soit les autres n'ont pas le même support, soit l'enchaînement des images ne se fait pas dans le même ordre. Il y a donc p p-cycles qui sont en fait le même, si bien que le nombre de p-cycles est en fait égal à

$$\frac{\binom{n}{p} \times p!}{p} = \binom{n}{p} \times (p-1)!$$

2. D'après ce qui précède, l y a

$$\binom{n}{p} \times (p-1)!$$

p-cycles dans S_n. Une telle permutation est entièrement caractérisée par :

- son premier 4-cycle : il y a

$$\alpha = \binom{20}{4} \times 3!$$

4-cycles dans S_{20} donc il y a α choix possibles pour ce 4 cycle.

- son deuxième 4-cycle : les cycles étant à supports disjoints, il faut prendre ce cycle dans les 16 éléments restants, et il y a donc

$$\beta = \binom{16}{4} \times 3!$$

choix possibles.

- Idem, il y a

$$\gamma = \binom{12}{4} \times 3!$$

choix possibles pour le dernier 4-cycle.

- De même, il y a

$$\delta = \binom{8}{3} \times 2!$$

choix pour le premier 3-cycle, puis

$$\varepsilon = \binom{5}{3} \times 2!$$

pour le deuxième 3-cycle.

- Seulement, ces cycles peuvent être dans n'importe quel ordre donc il faut diviser par 5!, puisque chaque permutation de ces cycles donne le même résultat.

Par principe multiplicatif, le nombre de telles permutations est donc

$$\frac{\alpha \times \beta \times \gamma \times \delta \times \varepsilon}{5!}$$

On pourrait simplifier les factorielles se trouvant dans les coefficients binomiaux, mais flemme...

Exercice 12 - Points fixes d'une permutation aléatoire : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma \in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme.

1. Expliciter un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience. On note dans la suite de cet exercice N_n la variable aléatoire égale à son nombre de points fixes.
2. Pour tout $k \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$, notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est un point fixe de σ, et qui vaut 0 sinon. Expliciter la loi de X_k. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Exprimer N_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et en déduire $E(N_n)$ ainsi que $V(N_n)$.

Correction :

1. C'est immédiat : on munit S_n de $\mathscr{P}(S_n)$ et de l'équiprobabilité.
2. X_k peut prendre les valeurs 0 et 1 donc X_k suit une loi de Bernoulli. Donnons son paramètre, c'est-à-dire $P(X_k = 1)$. Puisqu'on munit S_n de l'équiprobabilité, il suffit de compter les permutations de S_n qui laissent k invariant. Une telle permutation est entièrement déterminée par les images des $n-1$ autres entiers, et cela donne une permutation de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket \backslash \{k\}$ qui a $n-1$ éléments : il y a donc $(n-1)!$ telles permutations. Dès lors, $P(X_k = 1) = (n-1)!/n! = 1/n$ et donc $X_k \sim B(1/n)$.

   Si $1, \dots, n-1$ sont des points fixes, alors n également puisqu'on manipule des bijections. Dès lors,

   $$P(X_1 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) = 0 \neq P(X_1 = 1) \times \cdots \times P(X_{n-1} = 1) \times P(X_n = 0)$$

   En particulier, les v.a. $X_1, \dots, X_n$ ne sont pas mutuellement indépendantes.
3. N_n étant le nombre de points fixes, on a $N_n = X_1 + \cdots + X_n$: en effet, quand des réels valent 0 ou 1, leur somme est le nombre de réels qui valent 1, et donc $X_1 + \cdots + X_n$ est le nombre de k tels que $X_k = 1$ donc le nombre de points fixes, c'est-à-dire N_n. Par linéarité de l'espérance,

   $$E(N_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = n \times 1/n = 1$$

   En d'autres termes, en moyenne, une permutation prise au hasard admet un seul point fixe. Cependant, les X_i ne sont pas indépendantes (question 2) : il faut donc utiliser la formule générale de la variance d'une somme.

   $$V(N_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

   Fixons donc $i < j$ deux entiers de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$. $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j)$. Or, $X_iX_j = 1$ si i et j sont des points fixes, et 0 sinon, et donc on montre de même qu'à la question 2 que cela arrive avec proba $(n-2)!/n! = 1/n(n-1)$ donc $X_iX_j \sim B(1/n(n-1))$ et donc cette covariance vaut $1/n(n-1) - 1/n^2$. En conclusion :

   $$\begin{aligned} V(N_n) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + 2 \times \binom{n}{2} \times \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n} + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

   Finalement, $V(X_n) = 1 - \dfrac{1}{n} + 1 - \dfrac{n-1}{n} = 1$.

Exercice 13 : ✪✪ Soit $\sigma \in S_n$ et soit $k \in \llbracket 1\,;\, n \rrbracket$. On dit que σ bat un record en k si : $\forall i < k, \sigma(i) < \sigma(k)$. Donner la probabilité que σ batte un record en k.

Correction : On prend $\Omega = S_n$ muni de $\mathscr{P}(S_n)$ et de l'équiprobabilité (sachant que le cardinal de S_n est $n!$). Pour conclure, il suffit de calculer le nombre de permutations battant un record en k, il suffira ensuite de diviser par $n!$.

$\sigma(k)$ peut prendre les valeurs $k, \dots, n$: il n'est pas possible que $\sigma(k)$ soit inférieur strict à k car, sinon, « il n'y a pas la place pour $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$ » qui doivent être strictement inférieurs à $\sigma(k)$ et distincts, donc k doit être supérieur ou égal à k. Le nombre de possibilités va ensuite dépendre de la valeur de $\sigma(k)$: on pense donc au principe additif. Notons i la valeur de $\sigma(k)$. Alors une permutation qui bat un record en k avec $\sigma(k) = i$ est entièrement déterminée par :

- les valeurs de $\sigma(1), \dots, \sigma(k-1)$, qu'on choisit dans $\llbracket 1\,;\, i-1 \rrbracket$ (sans notions d'ordre pour l'instant) : $\dbinom{i-1}{k-1}$ choix possibles.

- La façon de les ordonner : $(k-1)!$ choix possibles.
- les valeurs de $\sigma(k+1),\dots,\sigma(n)$ (sans notion d'ordre), mais celles-ci sont déjà fixées : ce sont les valeurs qui ne sont pas déjà prises par $\sigma(1),\dots,\sigma(k)$.
- Il reste cependant à les ordonner : $(n-k)!$ choix possibles.

Par principe multiplicatif, il y a $\binom{i-1}{k-1}(k-1)!\times(n-k)!$ telles permutations, et par principe additif, le nombre de permutations battant un record en k est :

$$\begin{aligned} S &= (n-k)!(k-1)!\sum_{i=k}^{n}\binom{i-1}{k-1} \\ &= (n-k)!(k-1)!\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1} \end{aligned}$$

On pourrait s'arrêter là (en divisant par $n!$ pour obtenir la probabilité voulue), mais il se trouve que cette somme ci-dessus se calcule (il y aurait sans doute eu une indication à l'écrit ou à l'oral de calculer les premiers termes). Pour $n=k$, on trouve que :

$$\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}=1$$

et pour $n=k+1$, on trouve que cette somme vaut

$$\begin{aligned} \sum_{i=k-1}^{k}\binom{i}{k-1} &= \binom{k}{k-1}+\binom{k}{k} \\ &= \binom{k+1}{k} \\ &= k+1 \end{aligned}$$

Montrons par récurrence que pour tout $n\geq k$,

$$\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}=\binom{n}{k}$$

Le résultat est vrai aux rangs k et $k+1$. Soit $n\geq k+1$. Supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est encore vrai au rang $n+1$. Tout d'abord :

$$\sum_{i=k-1}^{n}\binom{i}{k-1}=\sum_{i=k-1}^{n-1}\binom{i}{k-1}+\binom{n}{k-1}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$\sum_{i=k-1}^{n}\binom{i}{k-1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$$

ce qui permet de conclure d'après la formule de Pascal. Finalement, le nombre de permutations qui battent un record en k vaut :

$$(n-k)!\times(k-1)!\binom{n}{k}=\frac{n!}{k}$$

et donc la probabilité voulue vaut $1/k$. En particulier (ce qui est évident), la probabilité qu'une permutation batte un record en 1 est égale à 1...

Exercice 14 - Permutation sans grand cycle : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma_n\in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme. On note p_n la probabilité que σ_n n'ait aucun cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$ dans sa décomposition en cycles à supports disjoints.

1. Par un raisonnement combinatoire, prouver que

$$p_n=1-\frac{1}{n!}\sum_{k=m+1}^{n}\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!$$

où $m=\lfloor n/2\rfloor$.

2. Donner la limite de (p_n) quand $n \to +\infty$. On rappelle (cf. cours) que :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

Correction :

1. On se place encore (comme dans l'exercice 12) sur S_n qu'on munit de son ensemble des parties et de la probabilité uniforme. Par conséquent, $p_n = 1 - q_n$ où q_n est la probabilité que σ_n contienne un cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$, et pour calculer q_n, il suffit de calculer le nombre de telles permutations (qu'on divisera ensuite par $n!$). Soit $k > n/2$ donc $k \geq m+1$. Une permutation admettant un cycle de longueur k est entièrement déterminée par :
   - les k éléments (sans ordre pour l'instant) de ce cycle : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
   - le cycle formé par ces k éléments : attention, on rappelle que le premier élément est quelconque (par exemple, le cycle $(1\,2\,3)$ et le cycle $(2\,3\,1)$ sont le même cycle). Par conséquent, il y a $k!$ façons d'ordonner ces éléments, mais pour chaque permutation, les k permutations obtenues en changeant le premier élément donnent le même cycle (elles comptent pour une seule permutation). Il y a donc $k!/k = (k-1)!$ cycles possibles formés par ces k éléments.
   - les images des $n-k$ éléments restants : $(n-k)!$ choix possibles.

   Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!$ telles permutations. Or, une permutation admettant un cycle de cardinal $\geq m+1$ admet un cycle de cardinal $m+1$ ou $m+2$ ou... ou n éléments, et ces cas sont deux à deux incompatibles. Par principe additif, il y a

$$\sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!$$

   permutations admettant un cycle de cardinal supérieur ou égal à $m+1$, ce qui permet de conclure.

$$p_n = 1 - \frac{1}{n!}\sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k}(k-1)!(n-k)!$$

2. Soit $k \geq m+1$.

$$\binom{n}{k}(k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times (k-1)!(n-k)! = \frac{n!}{k}$$

   et donc

$$\begin{aligned}
p_n &= 1 - \frac{1}{n!}\sum_{k=m+1}^{n} \frac{n!}{k} \\
&= 1 - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \\
&= 1 - (H_n - H_m) \\
&= 1 - H_n + H_m \\
&= 1 - \ln(n) - \gamma + \ln(m) + \gamma + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

   Or, $\ln(m) - \ln(n/2) = \ln(m \times 2/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $m = \lfloor n/2 \rfloor \sim n/2$ (cf. cours et cf. DS 7) donc $2m/n$ tend vers 1. On en déduit que $\ln(m) = \ln(n/2) + \mathrm{o}(1)$. Dès lors :

$$p_n = 1 - \ln(n) - \gamma + \ln(n/2) + \gamma + \mathrm{o}(1) = 1 - \ln(2) + \mathrm{o}(1)$$

   Finalement, $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - \ln(2)$. Remarquons qu'on a bien une limite qui appartient à $[\,0\,;1\,]$.

Exercice 15 - Espérance du nombre de cycles : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma_n \in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme, et on note C_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de σ_n (en comptant les points fixes comme des cycles de longueur 1).

1. On note L_1 la longueur du cycle contenant 1. À l'aide d'un raisonnement combinatoire, calculer $P(L_1 = k)$ pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ et en déduire la loi de L_1 ainsi que son espérance. Il est immédiat (par symétrie des rôles), et donc on l'admettra, que si $i \in [\![2\,;n]\!]$ et si L_i est la longueur du cycle contenant i, alors L_i suit la même loi que L_1.

2. Pour tout $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, on note N_k le nombre de k-cycles de σ. Justifier que

$$N_k = \frac{1}{k}\left(\mathbb{1}_{L_1=k} + \cdots + \mathbb{1}_{L_n=k}\right)$$

3. En déduire $E(C_n)$ et en donner (sans démonstration) un équivalent quand $n \to +\infty$.

Correction :

1. Soit donc $k \in [\![1\,;\,n]\!]$. Encore une fois, il suffit de compter le nombre de permutations pour lesquelles $L_1 = k$ et on divisera par $n!$. Une permutation pour laquelle $L_1 = k$ est entièrement déterminée par :
   - les $k-1$ autres éléments du cycle : $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles (tous sauf 1).
   - l'ordre dans lequel ces $k-1$ éléments sont dans le cycle (pour former le cycle $(1\, x_2\, \cdots\, x_k)$) : $(k-1)!$ choix possibles.
   - les images des $n-k$ éléments restants : $(n-k)!$ choix possibles.

   Par principe multiplicatif, il y a $\binom{n-1}{k-1} \times (k-1)!(n-k)!$ telles permutations, si bien que

$$P(L_1 = k) = \frac{\binom{n}{k-1}(k-1)!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

2. Il suffit de voir que si on a un cycle à k éléments, alors les k indicatrices de ces k éléments font une somme égale à k, mais ils ne représentent qu'un seul k-cycle donc il faut diviser par k. Par conséquent, le nombre de k-cycles est égal à la somme des indicatrices divisé par k. D'où le résultat.
3. $C_n = N_1 + \cdots + N_n$. Par linéarité de l'espérance, $E(C_n) = E(N_1) + \cdots + E(N_n)$. De plus, pour tout k, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned} E(N_k) &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} E(\mathbb{1}_{L_i=k}) \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} P(L_i = k) \quad \text{Espérance de l'indicatrice=proba} \\ &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \\ & \quad \frac{1}{k} \end{aligned}$$

   Finalement,

$$E(C_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n \sim \ln(n)$$

Exercice 16 - Algorithme de Fischer-Yates-Knuth : ✪✪✪ Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, on se donne $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i, U_i suive une loi uniforme sur $[\![1\,;\,i]\!]$, et on note

$$X_n = (1\;\; U_1) \circ (2\;\; U_2) \circ \cdots (n\;\; U_n)$$

Le but de cet exercice est de prouver par récurrence sur $n \geq 1$ que X_n suit une loi uniforme sur S_n.

1. Prouver l'initialisation.
2. On se donne dans la suite un entier $n \geq 1$ et on suppose que le résultat est vrai au rang n, et on cherche à prouver que le résultat est vrai au rang $n+1$. Justifier qu'on peut considérer que $X_n \in S_{n+1}$ et donner $X_n(n+1)$.
3. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
4. Soit $\sigma \in S_n$.

   (a) Justifier que :

$$P(X_{n+1} = \sigma) = \sum_{k=1}^{n+1} P_{U_{n+1}=k}(X_{n+1} = \sigma) \times P(U_{n+1} = k)$$

   (b) Prouver que $[X_{n+1} = \sigma]$ et $[U_{n+1} = k]$ sont incompatibles si $k \neq \sigma^{-1}(n+1)$. En déduire que :

$$P(X_{n+1} = \sigma) = P_{U_{n+1}=\sigma^{-1}(n+1)}(X_{n+1} = \sigma) \times P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1))$$

(c) Justifier que X_n et U_{n+1} sont indépendantes, et en conclure que

$$P(X_{n+1} = \sigma) = P(X_n = \sigma') \times P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1))$$

où σ' est une permutation que l'on exprimera en fonction de σ et de $\sigma^{-1}(n+1)$.

5. Conclure.

Correction :

1. U_1 est une variable certaine égale à 1 donc $X_1 = (1\,1)$ qui suit une loi certaine égale à $\mathrm{Id}_{[\![1\,;\,1]\!]}$: H_1 est vraie.
2. Une permutation de $[\![1\,;\,n]\!]$ peut en fait être considérée comme une permutation de $[\![1\,;\,n+1]\!]$ qui laisse $n+1$ invariant (cf. cours). On peut donc considérer que $X_n \in S_{n+1}$ avec $X_n(n+1) = n+1$.
3. Par définition :

$$X_n = (1 \;\; U_1) \circ (2 \;\; U_2) \circ \cdots (n+1 \;\; U_{n+1}) = X_n \circ (n+1 \;\; U_{n+1})$$

4. (a) Découle de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire U_{n+1}, à savoir le système $([U_{n+1} = k])_{k \in [\![1\,;\,n+1]\!]}$.

(b) Soit $k \neq \sigma^{-1}(n+1)$ et supposons $[X_{n+1} = \sigma]$ et $U_{n+1} = k]$ réalisés. Dès lors,

$$X_{n+1} = X_n \circ (n+1 \;\; k) = \sigma$$

En évaluant en k, il vient $X_n(n+1) = \sigma(k)$ et puisque $n+1$ est fixe par X_n, on trouve que $\sigma(k) = n+1$ si bien que $k = \sigma^{-1}(n+1)$ ce qui est exclu. Les deux événements sont donc incompatibles. Dès lors, les probabilités conditionnelles de la question précédente sont toutes nulles (rappelons que $P_A(B) = P(A \cap B)/P(A)$ donc si A et B sont incompatibles, alors $P_A(B) = 0$) ce qui donne le résultat voulu :

$$P_{U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)}(X_{n+1} = \sigma) \times P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1))$$

(c) X_n s'exprime en fonction de $U_1, \dots, U_n$, et $U_1, \dots, U_{n+1}$ sont indépendantes par hypothèse donc X_n et U_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
Supposons donc $U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)$ réalisé. Alors :

$$\begin{aligned} X_{n+1} = \sigma \quad & \iff \quad X_n \circ (n+1 \;\; U_{n+1}) = \sigma \\ & \iff \quad X_n \circ (n+1 \;\; \sigma^{-1}(n+1)) = \sigma \\ & \iff \quad X_n = \sigma \circ (n+1 \;\; \sigma^{-1}(n+1)) \end{aligned}$$

puisqu'une transposition est sa propre inverse. Dès lors, en posant $\sigma' = \sigma \circ (n+1 \;\; \sigma^{-1}(n+1))$, on a :

$$P_{U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)}(X_{n+1} = \sigma) = P_{U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)}(X_n = \sigma')$$

et on conclut en disant que U_{n+1} et X_n sont indépendantes.

5. Par hypothèse de récurrence, X_n suit une loi uniforme sur S_n donc $P(X_n = \sigma') = 1/n!$ et U_{n+1} suit une loi uniforme sur $[\![1\,;\,n+1]\!]$ donc $P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1)) = 1/(n+1)$ si bien que $P(X_{n+1} = \sigma) = 1/(n+1)!$, et ce pour toute permutation σ, donc X_{n+1} suit une loi uniforme sur S_{n+1} ce qui clôt la récurrence.

32.4 Conjugaison

Exercice 17 - Conjugaison : ✪✪ Deux éléments s_1 et s_2 de S_n sont dits conjugués s'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $s_2 = \sigma \circ s_1 \circ \sigma^{-1}$.

1. Montrer que la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence.
2. Soient $\sigma \in S_n$, $p \in [\![2\,;\,n]\!]$ et $(a_1\,a_2\,\dots\,a_p)$ un p-cycle. Montrer que :

$$\sigma \circ (a_1\,a_2\,\dots\,a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\,\sigma(a_2)\,\dots\,\sigma(a_p))$$

3. En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur.
4. ✪✪✪ Soient s_1 et $s_2 \in S_n$. Donner une CNS portant sur les longueurs des cycles apparaissant dans les décompositions de s_1 et s_2 en produit de cycles à supports disjoints pour que s_1 et s_2 soient conjuguées.

Correction :

1. Montrons que c'est une relation d'équivalence.
   - Soit $s \in S_n$. Alors $\mathrm{Id} \circ s \circ \mathrm{Id}^{-1} = s$ donc s est conjuguée à elle-même : c'est une relation réflexive.
   - Soient s_1 et s_2 conjuguées. Alors il existe $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma \circ s_1 \circ \sigma^{-1} = s_2$ donc, en composant à gauche par σ^{-1} et à droite par σ, on obtient que $s_1 = (\sigma^{-1}) \circ s_2 \circ (\sigma^{-1})^{-1}$: la relation est symétrique.
   - Soient s_1, s_2 et s_3 trois permutations, et on suppose que s_1 et s_2 sont conjuguées, ainsi que s_2 et s_3. Alors il existe σ et $\tau \in S_n$ telles que $\sigma \circ s_1 \circ \sigma^{-1} = s_2$ et $\tau \circ s_2 \circ \tau^{-1} = s_3$ si bien que
   $$(\tau \circ \sigma) \circ s_1 \circ (\sigma^{-1} \circ \tau^{-1}) = s_3$$
   Il suffit de se souvenir que $\sigma^{-1} \circ \tau^{-1} = (\tau \circ \sigma)^{-1}$ (on change l'ordre quand on inverse) pour conclure que c'est une relation transitive et donc une relation d'équivalence.
2. Soit x qui ne fait pas partie de la famille $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_p))$. Alors $\sigma^{-1}(x)$ n'appartient pas à la famille $(a_1, \dots, a_p)$ si bien qu'il n'appartient pas au support du cycle de gauche (qu'on appelle c) et donc est laissé fixe par c. En d'autres termes, $c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(x)$ et donc $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = x$: x n'appartient pas au support de $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

   À présent, supposons qu'il existe k tel que $x = \sigma(a_k)$. Alors $\sigma^{-1}(x) = a_k$ donc $c \circ \sigma^{-1}(x) = c(a_k) = a_{k+1}$ (avec la convention $a_{n+1} = a_1$ si $k = n$, on travaille modulo n, de façon cyclique) et donc $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}(x) = \sigma(a_{k+1})$: $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ a donc un support égal à $\{\sigma(a_1); \cdots; \sigma(a_n)\}$ et envoie $\sigma(a_1)$ sur $\sigma(a_2)$ etc. jusque $\sigma(a_n)$ sur $\sigma(a_1)$, ce qui donne le résultat voulu.
3. D'après la question précédente, deux cycles conjugués ont même longueur. Réciproquement, soient $c_1 = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_p)$ et $c_2 = (b_1\, b_2\, \cdots\, b_p)$ deux cycles de même longueur. Soit σ une permutation vérifiant $\sigma(a_1) = b_1, \dots, \sigma(a_p) = b_p$ (une telle permutation existe forcément), on a $\sigma \circ c_1 \circ \sigma^{-1} = c_2$ donc c_1 et c_2 sont bien conjugués.
4. Montrons que deux permutations sont conjuguées si et seulement si elles ont des cycles de même longueur (et le même nombre) dans leur décomposition en cycles à supports disjoints, par exemple
   $$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 11 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$
   sont conjuguées car ont deux 4-cycles et un 3-cycle (l'ordre n'intervient pas car les cycles commutent puisqu'ils sont à supports disjoints). Supposons que deux permutations σ_1 et σ_2 aient les mêmes longueurs de cycles à supports disjoints. Notons la première permutations $\sigma = c_1 \circ \cdots \circ c_k$ et la deuxième $\tau = d_1 \circ \cdots \circ d_k$, avec d_1 et c_1 de même longueur etc. Soit s une permutation qui envoie les éléments des c_i sur les éléments correspondants des d_i. Alors $s \circ c_i \circ s^{-1} = d_i$ pour tout i si bien que
   $$\begin{aligned} \sigma_2 &= s \circ c_1 \circ s^{-1} \circ s \circ c_2 \circ s^{-1} \circ \cdots \circ s \circ c_k \circ s^{-1} \\ &= s \circ c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k \circ s^{-1} \\ &= s \circ \sigma_1 \circ s^{-1} \end{aligned}$$
   c'est-à-dire que σ_2 et σ_1 sont conjuguées. Réciproquement, supposons σ_1 et σ_2 conjuguées. Alors il existe s telle que $\sigma_2 = s \circ \sigma_1 \circ s$. Alors, en reprenant l'écriture de σ_1 ci-dessus,
   $$\begin{aligned} \sigma_2 &= s \circ c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_k \circ s^{-1} \\ &= \underbrace{s \circ c_1 \circ s^{-1}}_{\text{cycle}} \circ \underbrace{s \circ c_2 \circ s^{-1}}_{\text{cycle}} \circ \cdots \circ \underbrace{s \circ c_k \circ s^{-1}}_{\text{cycle}} \end{aligned}$$
   On a un produit de cycles à supports disjoints (car, d'après la question 2, les supports de ces cycles sont les images par s, qui est injective, des supports des c_i qui sont disjoints). Par unicité, ce sont les cycles à supports disjoints de σ_2, et puisqu'ils sont conjugués deux à deux aux cycles de σ_1, ils ont la même longueur deux à deux.

Exercice 18 - Caractérisation de la signature : ✪✪ Soit $\varphi : S_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes (on parle d'un caractère).

1. Soit $\tau \in S_n$ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau) = \pm 1$.
2. Montrer que toutes les transpositions ont la même image. On pourra utiliser l'exercice précédent.
3. En déduire que la signature est l'unique morphisme non trivial (i.e. non constant égal à 1) de S_n dans $\mathbb{C}^*$. Existe-t-il un morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}$?

Correction :

1. On sait que $\varphi(\tau \circ \tau) = \varphi(\tau) \times \varphi(\tau)$ car φ est un morphisme. Or, $\tau \circ \tau = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ et $\varphi(\mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}) = 1$ car un morphisme envoie le neutre sur le neutre. On en déduit que $\varphi(\tau)^2 = 1$ ce qui permet de conclure.

2. Soient τ_1 et τ_2 deux transpositions. Ce sont deux cycles de même longueur donc, d'après l'exercice précédent, elles sont conjuguées : il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\tau_2 = \sigma \circ \tau_1 \circ \sigma^{-1}$. φ étant un morphisme de groupes,
$$\varphi(\tau_2) = \varphi(\sigma) \times \varphi(\tau_1) \times \varphi(\sigma)^{-1}$$
ce qui permet de conclure.
3. D'après la question précédente, soit toutes les transpositions ont comme valeur 1, soit toutes les transpositions ont comme valeur -1. Puisque toute permutation est produit de transpositions, dans le premier cas, toutes les permutations ont comme image 1 donc le morphisme est trivial, et dans le second cas, le morphisme et la signature coïncident sur les transpositions donc coïncident en toutes les permutations donc sont le même morphisme. De plus, avec le même raisonnement qu'à la question 1, si f est un morphisme de S_n dans $\mathbb{C}$ (rappelons que $\mathbb{C}$ est un groupe pour la loi $+$), alors $f(\tau^2) = 2f(\tau)$ et puisqu'un morphisme envoie le neutre sur le neutre, $f(\mathrm{Id}) = 0$ donc $f(\tau) = 0$: f envoie toutes les transpositions sur 0 et puisque toute permutation est produit de transposition, on montre comme ci-dessus (attention, on a une somme, pas un produit) que f est le morphisme nul. Il n'existe donc pas de morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}$ (et on en déduit même que $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^*$ ne sont pas isomorphes car, si f est un isomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ alors $f \circ \varepsilon$ serait un morphisme non trivial de S_n dans $\mathbb{C}$, ce qui est impossible).

Exercices 19 - Générateurs de S_n : ✪✪✪ On pourra dans tout l'exercice utiliser la question 2 de l'exercice 17.

1. Soient i et j dans $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$. Calculer $(1\,i) \circ (1\,j) \circ (1\,i)$. En déduire que les transpositions $(1\,2), (1\,3), \dots, (1\,n)$ engendrent S_n, c'est-à-dire que tout élément de S_n s'écrit comme produit de ces transpositions. Donner une telle écriture du n-cycle $(1\,2\,\dots\,n)$. Le résultat est-il toujours vrai si l'on retire une de ces transpositions ?
2. Montrer que les transpositions $(1\,2), (2\,3), \dots, (n-1\,n)$ engendrent S_n.
3. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le n-cycle $(1\,2\,\dots\,n)$ engendrent S_n. Montrer que l'un de ces deux éléments ne peut engendrer S_n à lui seul (on rappelle que S_n est non abélien si $n \geq 3$).

Correction :

1. D'après la question 2 de l'exercice 17 (mais on peut aussi le trouver directement), $(1\,i) \circ (1\,j) \circ (1\,i) = (i\,j)$ (on a utilisé que l'inverse d'une transposition était elle-même). En d'autres termes, toute transposition s'écrit comme produit de permutations du type $(1 \quad \text{truc})$, et comme toute permutation est produit de transpositions, toute permutation est produit de transposition du type $(1 \quad \text{truc})$, c'est-à-dire que les permutations $(1\,1), \dots, (1\,n)$ engendrent S_n.

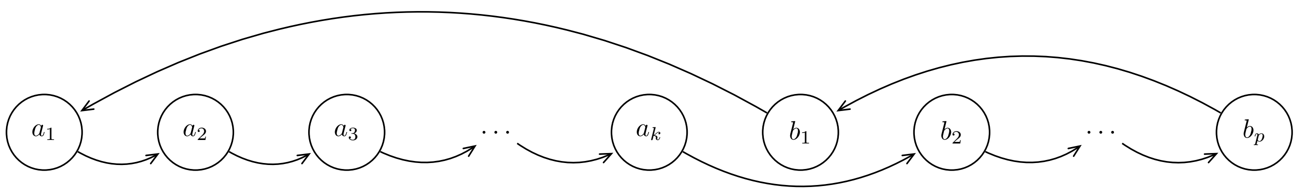
   Le principe sera le même dans tout l'exercice : si une famille engendre une famille génératrice (rien à voir avec des espaces vectoriels !), alors la première famille engendre également S_n.

   Puisque $(1\,2 \cdots n) = (1\,2) \circ (2\,3) \circ (3\,4) \circ \cdots \circ (n-1\,n)$, alors il vient :
$$(1\,2 \cdots n) = (1\,2) \circ (1\,2) \circ (1\,3) \circ (1\,2) \circ (1\,3) \circ (1\,4) \circ (1\,3) \circ \cdots \circ (1\,n-1) \circ (1\,n) \circ (1\,n)$$
   Alors, bien sûr, cela fait des décompositions plus longues, mais cela nécessite moins de transpositions pour engendrer S_n. On ne peut pas se passer de l'une de ces transpositions car alors un des éléments de $\llbracket 1\,;\, n \rrbracket$ n'appartiendrait pas au support de ces transpositions et donc serait laissé fixe par elles, et donc on ne pourrait pas engendrer les permutations dont le support contiendrait cet élément. On peut prouver (c'est intuitif mais c'est difficile) que $n-1$ transpositions (quelconques) ne permettent pas d'engendrer S_n.
2. Tout d'abord, $(1\,3) = (1\,2) \circ (2\,3) \circ (1\,2)$ (toujours exercice 17). Ensuite, $(1\,4) = (3\,4) \circ (1\,3) \circ (3\,4)$ et ainsi de suite : cette famille contient $(1\,2)$, puis permet d'obtenir $(1\,3)$, puis $(1\,4)$ (puisqu'elle permet d'obtenir $(1\,3)$) et ainsi de suite. On peut donc obtenir les permutations de la question précédente à partir des permutations de la forme $(i\,i+1)$ donc celles-ci engendrent S_n : en effet, toute permutation est produit de transpositions de la forme $(1\,i)$ d'après la question précédente, et celles-ci sont donc produit de transpositions de la forme $(1\,i)$, donc ces dernières engendrent S_n.
3. Notons cette transposition τ et ce cycle σ. Toujours d'après l'exercice 17 : $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (2\,3)$, donc τ et σ engendrent $(2\,3)$ (rappelons que $\sigma^{-1} = \sigma^{n-1}$ puisque σ est un n-cycle donc si une permutation est engendrée par τ, σ et σ^{-1}, alors elle est engendrée par τ et σ). De plus, $\sigma \circ (2\,3) \circ \sigma^{-1} = (3\,4)$ et puisque $(2\,3)$ est engendré par τ et σ, $(3\,4)$ l'est également. En itérant le procédé, chaque transposition du type $(i\,i+1)$ est engendrée par τ et σ donc, d'après la question précédente, τ et σ engendrent S_n (chaque élément de S_n est produit de transpositions du type $(i\,i+1)$ donc s'écrit comme produit de τ et de σ, celles-ci apparaissant évidemment plusieurs fois dans le produit). On voit qu'on peut engendrer S_n à l'aide d'uniquement deux éléments ! Cependant, l'un de ces éléments ne suffit pas : supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que τ engendre S_n, c'est-à-dire que toute permutation s'écrit sous la forme τ^p donc commute avec τ, ce qui est absurde. En fait, pour τ, c'était plus simple, il suffisait de voir que $\tau^p = \tau$ si p était impair et $\tau^p = \mathrm{Id}_{\llbracket 1\,;\, n \rrbracket}$ si p était pair, donc 3 est toujours laissé fixe par τ donc on ne peut pas obtenir les permutations qui ne laissent pas 3 invariant : la démo précédente prouve en fait qu'un élément quelconque de S_n ne peut pas engendrer S_n, il faut au minimum deux éléments (n'allez pas me dire que S_n est de dimension 2 : on ne parle pas d'espace vectoriel ni de famille libre, et donc pas de dimension, dans ce chapitre !).

Exercice 20 : ✪✪✪✪ Le but de cet exercice (qui ne traite à pas à proprement parler de conjugaison) est de prouver qu'un n-cycle ne peut pas s'écrire comme produit de $n-2$ transpositions. Le résultat du cours disant qu'un élément de S_n peut s'écrire comme produit d'au plus $n-1$ transpositions est donc optimal.

Dans tout l'exercice, on dira qu'un point fixe est un 1-cycle, et si $\sigma \in S_n$, on note $f(\sigma)$ le nombre de cycles (y compris les 1-cycles) apparaissant dans la décomposition de cycles en produit de cycles à supports disjoints.

1. Donner $f\left(\mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}\right)$.
2. On se donne dans cette question une permutation $\sigma \in S_n$ et une transposition $\tau = (i\,j)$ avec $i \neq j$.
   (a) Montrer que si i et j appartiennent à deux cycles distincts de σ, alors $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma) - 1$. On pourra noter $i = a_k$ et $j = b_1$ et s'inspirer du dessin ci-dessous :



   (b) Montrer que si i et j appartiennent au même cycle, alors $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma) + 1$.
3. Montrer qu'un n-cycle ne peut pas se décomposer en produit de $n-2$ transpositions.

Correction : Remarquons que f est bien définie puisque l'écriture d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints est unique à l'ordre près des termes.

1. Tout point est point fixe de l'identité, donc l'identité s'écrit comme produit de 1-cycles à supports disjoints : on a $\mathrm{Id} = (1) \circ (2) \circ \cdots \circ (n)$ et il y en a n donc $f(\mathrm{Id}) = n$.
2. (a) Notons c_1 et c_2 les cycles auxquels appartiennent, respectivement, i et j. On les note

$$c_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix}$$

avec $a_k = a$ et $b_1 = b$ (l'ordre des éléments dans lequel on écrit un cycle n'a aucune importance). Montrons (comme cela se voit sur le dessin) que

$$\sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & b_2 & b_3 & \cdots & b_p & b_1 \end{pmatrix} \circ c_3 \circ \cdots \circ c_q$$

où $c_3, \dots, c_q$ sont les autres cycles (y compris les 1-cycles) dans la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints, ce qui permettra de conclure : il y a un cycle de moins, on en a fusionné deux. Puisque $c_3, \dots, c_k$ ne contiennent ni i et j, leur support et le support de $(i\,j)$ sont disjoints donc ces cycles commutent avec $(i\,j)$ si bien que

$$\sigma \circ \tau = c_1 \circ c_2 \circ \tau \circ c_3 \circ \cdots \circ c_q$$

Il suffit donc de prouver que

$$c_1 \circ c_2 \circ \tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & b_2 & b_3 & \cdots & b_p & b_1 \end{pmatrix}$$

Notons $s = c_1 \circ c_2 \circ \tau$. Alors $\tau(a_1) = a_1$, $c_2(a_1) = a_1$ (a_1 n'appartient pas au support de c_2 ni de τ) et donc $s(a_1) = \sigma_1(a_1) = a_2$. De même pour $a_2, \dots, a_{k-1}$ et pour $b_2, \dots, b_{k-1}, b_k$ qui sont envoyés respectivement par σ_2 (et donc par s car sont laissés invariants par σ_1 et par $(i\,j)$) sur $b_3, \dots, b_k, b_1 = j$. Il reste à donner l'image de $a_k = i$ et de $b_1 = j$. On a successivement :

$$\begin{aligned} s(i) &= c_1 \circ c_2(j) \\ &= c_1 \circ c_2(b_1) \\ &= c_1(b_2) \\ &= b_2 \end{aligned}$$

et on prouve de même que $s(j) = a_1$ ce qui permet de conclure.

(b) On suppose cette fois que i et j appartiennent à c_1 et qu'on a $c_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$ avec $a_1 = i$ et $j = a_p$ avec $2 \leq p \leq k$ (attention, le premier élément d'un cycle est quelconque, mais après, l'ordre des éléments est fixé : on ne peut pas mettre j où on veut dans le cycle). De même, $c_2, \dots, c_q$ commutent avec τ et donc

$$\sigma \circ \tau = c_1 \circ \tau \circ c_2 \circ \cdots \circ c_q$$

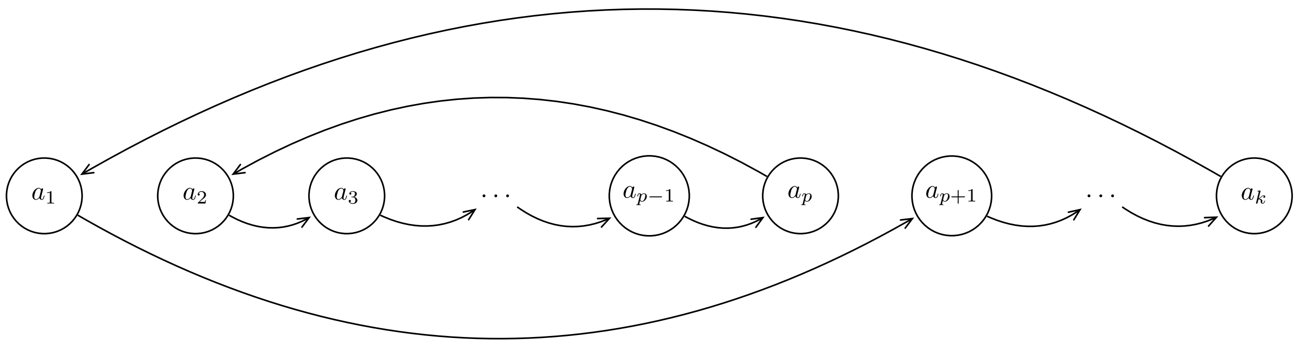
Il reste donc à expliciter $c_1 \circ \tau$: rappelons qu'on a noté

$$c_1 = \begin{pmatrix} i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{p-1} & j & a_{p+1} & \cdots & a_k \end{pmatrix}$$

Commençons par $c_1 \circ \tau(i)$:

$$\begin{aligned} c_1 \circ \tau(i) &= c_1(j) \\ &= a_{p+1} \end{aligned}$$

puis, a_{p+1} n'appartenant pas au support de $(i\,j)$, $c_1 \circ \tau(a_{p+1}) = c_1(a_{p+1}) = a_{p+2}$ et ainsi de suite jusque $c_1 \circ \tau(a_k) = c_1(a_k) = a_1 = i$: en partant de i, on obtient les images $a_{p+1}, a_{p+2}, \dots, a_k$ et on retombe sur i ce qui donne un cycle. De même, en partant de $j = a_p$ (qui n'apparaît pas dans le cycle qu'on vient d'obtenir), on obtient les images successives $j, a_2, a_3, \dots, a_{p-1}$ et on revient sur j. On a le dessin ci-dessous :



Tous les éléments de c_1 sont obtenus donc on a la décomposition

$$c_1 = \begin{pmatrix} i & a_{p+1} & a_{p+2} & \cdots & a_k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j & a_2 & a_3 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix}$$

(en se souvenant que $i = a_1$ et $j = a_p$) : il y a un cycle en plus dans l'écriture de $\sigma \circ \tau$ ce qui permet de conclure.

3. Soit donc σ un n-cycle, si bien que $f(\sigma) = 1$. On sait que $f(\mathrm{Id}) = n$ donc, si $\tau_1, \dots, \tau_{n-2}$ sont des transpositions, on sait d'après la question précédente qu'en composant par une transposition on fait ± 1 donc :

$$f(\mathrm{Id} \circ \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{n-2}) \geq n - (n-2) = 2$$

donc σ ne peut pas être égal à un produit de $n - 2$ transpositions.

Chapitre 33

Déterminants

« Les cons ça ose tout. C'est même à ça qu'on les reconnaît. »

Les tontons flingueurs

Sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier supérieur ou égal à 1, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, les déterminants sont de taille n, et les divers paramètres (a, b, c, x, $a_1, \dots a_n$ etc.) sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Vrai ou Faux ?

1. $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
2. $\exists (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
3. $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})^2, \det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
4. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \det\left(A \times A^\top\right) \geq 0$.
5. $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^*$.
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_n) = \lambda$.
7. Deux matrices semblables ont même déterminant.
8. Deux matrices équivalentes ont même déterminant.
9. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.
10. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.
11. Le déterminant de la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1 vaut 1.
12. Le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dans $\mathbb{Z}$.
13. Le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ est dans $\mathbb{R}_+$.
14. $\exists A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), A^2 = -I_n$.

33.1 Retour de l'Homo Calculus

Exercice 1 : ✪ Montrer que le déterminant d'une matrice nilpotente est nul.

Correction : On sait (cf. chapitre 29) qu'un endomorphisme nilpotent est non injectif donc de déterminant nul, donc le déterminant d'une matrice nilpotente est nul (car une matrice est nilpotente si et seulement si tout endomorphisme associé est nul) mais on peut le prouver directement. Soit M nilpotente. Alors il existe p tel que $M^p = 0$ (on peut même prouver que $p \leq n$, cf. cours) et donc $\det(M^p) = 0$ donc $\det(M)^p = 0$ si bien que $\det(M) = 0$.

Exercice 2 : ✪ Donner un exemple de matrices non semblables de même taille, même rang, même trace et même déterminant.

Correction : Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ont même rang, 2, même trace, 0, et même déterminant, 0 (et même taille !) mais ne sont pas semblables : en effet, si elles sont semblables, alors A^2 et B^2 sont semblables (réciproque fausse), ce qui est absurde car $B^2 = 0 \neq A^2$ et la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même (ou car A^2 et B^2 n'ont pas le même rang).

Exercice 3 : ✪ Soit $p<n$ et soient $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer $\det(AB)$.

Correction : On sait que $\text{rg}(AB)\le\min(\text{rg}(A),\text{rg}(B))$. Or, $\text{rg}(A)\le\min(n,p)=p$ et idem pour B, si bien que $\text{rg}(AB)\le p<n$ donc $\det(AB)=0$.

Exercice 4 : ✪ Que dire du déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire ?

Correction : Celui-ci est forcément nul. En effet, si A est antisymétrique de taille n impair, alors $\det(A)=\det(A^\top)$ mais A est antisymétrique donc

$$\begin{aligned}\det(A)&=\det(-A)\\&=(-1)^n\det(A)\end{aligned}$$

par caractère n-linéaire du déterminant, mais n est impair donc $(-1)^n=-1$ ce qui permet de conclure.

Exercice 5 : ✪ Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix}2&6\\4&12\end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix}56413&56513\\29413&29513\end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix}92&74\\72&59\end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix}7&30&37\\10&38&50\\3&12&15\end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix}a&\pi&0&\sqrt{3}\\0&b&0&1543\\\sqrt{2}&-217&c&2024\\0&0&0&d\end{vmatrix}$
7. $\begin{vmatrix}x&a&a&a\\a&x&a&a\\a&a&x&a\\a&a&a&x\end{vmatrix}$
8. $\begin{vmatrix}1&2&2&4\\2&3&2&8\\4&2&4&13\\2&8&4&11\end{vmatrix}$
9. $\begin{vmatrix}a-b-c&2a&2a\\2b&b-c-a&2b\\2c&2c&c-a-b\end{vmatrix}$
10. $\begin{vmatrix}a&b&c&d\\0&b&d&f\\-a&-b&-c&g\\-a&-b&0&d\end{vmatrix}$
11. ✪✪ $\begin{vmatrix}1&n&\dots&n\\n&2&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&n\\n&\dots&n&n\end{vmatrix}$

Correction : Notons à chaque fois D le déterminant.

1. $D=0$ par un calcul direct.
2. $$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}56413&100\\29413&100\end{vmatrix}\quad C_2\leftarrow C_2-C_1\\&=\begin{vmatrix}27000&0\\29413&100\end{vmatrix}\quad L_1\leftarrow L_1-L_2\\&=2700000\end{aligned}$$
3. $$\begin{aligned}D&=\begin{vmatrix}18&74\\13&59\end{vmatrix}\quad C_1\leftarrow C_1-C_2\\&=\begin{vmatrix}18&2\\13&7\end{vmatrix}\quad C_2\leftarrow C_2-4C_1\\&=100\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
D &= -\begin{vmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 10 & 38 & 50 \\ 7 & 30 & 37 \end{vmatrix} & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&= -\begin{vmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_2 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
&= -\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2 \\
&= 12
\end{aligned}$$

5. C'est un déterminant de Vandermonde : il vaut donc $(c-a)(c-b)(b-a)$.
6. En développant par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{aligned}
D &= (-1)^{3+3}c\begin{vmatrix} a & \pi & \sqrt{3} \\ 0 & b & 1543 \\ 0 & 0 & d \end{vmatrix} \\
&= abcd
\end{aligned}$$

7. La somme des colonnes est constante : on somme tout sur la première ligne, on sort par n-linéarité, et on soustrait, comme en cours.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} x+3a & x+3a & x+3a & x+3a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 + L_4 \\
&= (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \\
&= (x+3a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1, L_3 \leftarrow L_3 - aL_1, L_4 \leftarrow L_4 - aL_1 \\
&= (x+3a)(x-a)^3
\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -4 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1, L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & 3 \end{vmatrix} & L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2, L_4 \leftarrow L_4 + 4L_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

car deux lignes sont proportionnelles. Ainsi, les 4 vecteurs colonnes sont liés, ce qui n'est pas évident à première vue !

9. Idem : somme des colonnes constantes.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a+b+a & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} && L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} \\
&= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -b-c-a & 0 \\ 0 & 0 & -c-a-b \end{vmatrix} && L_2 \leftarrow L_2 - 2bL_1, L_3 \leftarrow L_3 - 2cL_1 \\
&= (a+b+c)^3
\end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & d & f \\ 0 & 0 & 0 & g+d \\ 0 & 0 & c & 2d \end{vmatrix} && L_3 \leftarrow L_3 + L_1, L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \\
D &= -\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & d & f \\ 0 & 0 & c & 2d \\ 0 & 0 & 0 & g+d \end{vmatrix} && L_3 \leftrightarrow L_4 \\
&= -abc(d+g)
\end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n-1 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} && \forall i \in [\![2 \,;\, n]\!], L_i \leftarrow L_i - L_1 \\
&= \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \cdots & n \\ n-1 & 2-n & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & 3-n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} && \forall i \in [\![1 \,;\, n-1]\!], C_i \leftarrow C_i - C_n \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} && \forall i \in [\![2 \,;\, n-1]\!], L_i \leftarrow L_i - L_n, L_1 \leftarrow L_1 + L_n \\
&= -\begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \end{vmatrix} && L_1 \leftrightarrow L_n \\
&= -(-1)^{n-2} n! \\
&= (-1)^{n-1} \times n!
\end{aligned}$$

Exercice 6 : ✪ Soit $a \in \mathbb{K}$. Étudier l'inversibilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

Correction : En développant avec la règle de Sarrus, il vient :

$$\begin{aligned}\det(A) &= a^2+a^2+a^2-a-a^4-a\\ &= a(-a^3+3a-2)\end{aligned}$$

1 est racine évidente donc on peut factoriser par $a-1$, et on trouve comme d'habitude que $\det(A)=a(a-1)(-a^2-a+2)$. Les solutions de l'équation $\det(A)=0$ sont donc $0,1$ et -2. Finalement, A est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$ si et et seulement si $a\neq 0,1,-2$.

Exercice 7 : ✪

1. Calculer :

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$$

2. Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et si $f\in\mathscr{L}(E)$ est tel que $f^2=-\operatorname{Id}_E$, que peut-on dire de n ?

Correction :

1.

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix} \quad L_2\leftarrow L_2-L_1, L_3\leftarrow L_3-L_1, L_4\leftarrow L_4-L_1\\ &= -8\end{aligned}$$

car déterminant d'une matrice triangulaire.

2. On a $\det(f^2)=(-1)^n\det(\operatorname{Id}_E)$ par n-linéarité du déterminant et donc $\det(f)^2=(-1)^n\geq 0$ puisqu'on est sur $\mathbb{R}$. On en déduit que n est pair.

Exercice 8 : ✪ Soit $(a,b,c)\in\mathbb{K}^3$. Sans développer le déterminant suivant, prouver que

$$\begin{vmatrix}1+a&a&a\\b&1+b&b\\c&c&1+c\end{vmatrix}=1+a+b+c$$

Correction : Notons encore D le déterminant recherché.

$$\begin{aligned}D &= \begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\-1&-1&1+c\end{vmatrix} \qquad C_1\leftarrow C_1-C_3, C_2\leftarrow C_2-C_3\\ &= \begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&-1&1+a+c\end{vmatrix} \qquad L_3\leftarrow L_3+L_1\\ &= \begin{vmatrix}1&0&a\\0&1&b\\0&&1+a+b+c\end{vmatrix} \qquad L_3\leftarrow L_3+L_2\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu (déterminant d'une matrice triangulaire).

Exercice 9 : ✪ Soient

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A=\begin{pmatrix}1&-10&11\\-3&6&5\\-6&12&8\end{pmatrix}$$

1. Expliciter la matrice $B=TA$ et en déduire le déterminant de A.
2. En déduire le déterminant de

$$C=\begin{pmatrix}3&5&55\\-9&-3&25\\-18&-6&40\end{pmatrix}$$

Correction :

1. On trouve

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ 0 & -24 & 38 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

si bien que $\det(B) = 48$ (déterminant d'une matrice triangulaire). Toujours car T est triangulaire, $\det(T) = 1$. Or, $\det(B) = \det(T) \times \det(A)$ donc $\det(A) = 48$.

2. Il suffit de voir qu'on obtient C à partir de A à l'aide d'opérations élémentaires (on multiplie la première colonne de A par 3, la deuxième colonne par $-1/2$ et la troisième par 5). On a donc, en utilisant le caractère n-linéaire du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(C) &= \begin{vmatrix} 3\times 1 & (-10)\times(-1/2) & 5\times 11 \\ 3\times(-3) & 6\times(-1/2) & 5\times 5 \\ 3\times(-6) & 12\times(-1/2) & 5\times 8 \end{vmatrix} \\ &= 3\times(-1/2)\times 5 \times \begin{vmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{vmatrix} \\ &= (-15/2)\times\det(A) \\ &= (-15/2)\times 48 \\ &= -15\times 24 \\ &= -360 \end{aligned}$$

Exercice 10 : ✪ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$, on note $A(x)$ la matrice de terme général $A_{i,j} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction affine.
2. Soient a et b deux scalaire distincts, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner la valeur de :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Correction :

1. Notons cette fonction φ. Soit $x \in \mathbb{K}$.

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} A_{1,1}+x & A_{1,2}+x & \cdots & A_{1,n}+x \\ A_{2,1}+x & A_{2,2}+x & \cdots & A_{2,n}+x \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ A_{n,1}+x & A_{n,2}+x & \cdots & A_{n,n}+x \end{vmatrix}$$

En effectuant les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_1$, pour $i \geq 2$, il ne reste du x que dans la première colonne, et en développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}(A_{i,1} + x) \times \Delta_{i,1}$$

avec $\Delta_{i,1}$ des déterminants qui ne dépendent pas de x, d'où le résultat.

2. Notons cette matrice A. D'après la question précédente,

$$\varphi : x \mapsto \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \alpha_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \alpha_n + x \end{vmatrix}$$

est affine, et on cherche $\varphi(0)$: il suffit de connaître φ en deux points distincts. Tout d'abord :

$$\varphi(-a) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - a & 0 & \dots & 0 \\ b-a & \alpha_2 - a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b-a & \dots & b-a & \alpha_n - a \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire que $\varphi(-a) = (\alpha_1 - a) \times \cdots \times (\alpha_n - a)$. De même ($a$ et b étant distincts, $-a$ et $-b$ le sont aussi) :

$$\varphi(-b) = \begin{vmatrix} \alpha_1 - b & a-b & \dots & a-b \\ 0 & \alpha_2 - b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-b \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n - b \end{vmatrix}$$

si bien que $\varphi(-b) = (\alpha_1 - a) \times \cdots \times (\alpha_n - a)$. Il existe c et d tels que pour tout x, $\varphi(x) = cx + d$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} c &= \frac{\varphi(-b) - \varphi(-a)}{-b - (-a)} \\ &= \frac{(\alpha_1 - b) \times \cdots \times (\alpha_n - b) - (\alpha_1 - a) \times \cdots \times (\alpha_n - a)}{a-b} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d &= \varphi(-a) + ca \\ &= (\alpha_1 - a) \times \cdots \times (\alpha_n - a) + a \times \frac{(\alpha_1 - b) \times \cdots \times (\alpha_n - b) - (\alpha_1 - a) \times \cdots \times (\alpha_n - a)}{a-b} \end{aligned}$$

et on conclut en disant que le déterminant recherché vaut $\varphi(0) = d$.

Exercice 11 : ✪ Montrer que pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix} = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$$

Correction : Notons ce déterminant D_n. Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq 1$. Le résultat est évident si $n = 1$ (car $|s_1| = s_1$, attention, c'est un déterminant, pas une valeur absolue). Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est vrai au rang $n+1$. Soient donc $s_1, \dots, s_{n+1} \in \mathbb{K}$. En faisant l'opération $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} - L_n$:

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s_{n+1} - s_n \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la dernière ligne, on trouve :

$$D_{n+1} = (s_{n+1} - s_n) \times \begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}$$

et on conclut par hypothèse de récurrence.

Exercice 12 : ✪✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ 1 & \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix} = -16\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)\sin^2\left(\frac{c}{2}\right)$$

Correction : Notons D le déterminant de gauche.

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos(c)-1 & \cos(b)-1 \\ 0 & \cos(c)-1 & 0 & \cos(a)-1 \\ 0 & \cos(b)-1 & \cos(a)-1 & 0 \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ &= \begin{vmatrix} 0 & \cos(c)-1 & \cos(b)-1 \\ \cos(c)-1 & 0 & \cos(a)-1 \\ \cos(b)-1 & \cos(a)-1 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en développant par rapport à la première colonne. À l'aide de la formule de trigo $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, il vient : $\cos(x) - 1 = -2\sin^2(x/2)$ ce qui donne :

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -2\sin^2(c/2) & -2\sin^2(b/2) \\ -2\sin^2(c/2) & 0 & -2\sin^2(a/2) \\ -2\sin^2(b/2) & -2\sin^2(a/2) & 0 \end{vmatrix}$$

et on conclut à l'aide de la règle de Sarrus.

Exercice 13 : ✪✪ Calculer le déterminant de la matrice de terme général $(-1)^{i+j}$. Recommencer avec la matrice de terme général $\min(i,j)$.

Correction : Notons le premier déterminant D_n. On a :

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} (-1)^{1+1} & (-1)^{1+2} & (-1)^{1+3} & \cdots & (-1)^{1+n} \\ (-1)^{2+1} & (-1)^{2+2} & (-1)^{2+3} & \cdots & (-1)^{2+n} \\ (-1)^{3+1} & (-1)^{3+2} & (-1)^{3+3} & \cdots & (-1)^{3+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & (-1)^{n+3} & \cdots & (-1)^{n+n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{1+n} \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n} \\ 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{1+n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & (-1)^{n+3} & \cdots & (-1)^{n+n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Toutes les lignes sont proportionnelles (et beaucoup sont égales) : le déterminant est nul. Si on note E_n le deuxième déterminant :

$$E_n = \begin{vmatrix} \min(1,1) & \min(1,2) & \min(1,3) & \cdots & \min(1,n) \\ \min(2,1) & \min(2,2) & \min(2,3) & \cdots & \min(2,n) \\ \min(3,1) & \min(3,2) & \min(3,3) & \cdots & \min(3,n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \min(n,1) & \min(n,2) & \min(n,3) & \cdots & \min(n,n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$$

et on répète l'opération : à chaque étape on fait l'opération $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ (pour $i \geq 2$) et on trouve finalement que

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire que $E_n = 1$.

Exercice 14 : ✪

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\overline{A}$ la matrice de taille n dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A. Montrer que $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
2. ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $\det\left(A^2 + B^2\right) \geq 0$.

Correction :

1. Avec la formule explicite du déterminant :

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{A_{\sigma(1),1}} \times \overline{A_{\sigma(2),2}} \times \cdots \times \overline{A_{\sigma(n),n}}$$

Or, le conjugué d'un produit est le produit des conjugués, et $\varepsilon(\sigma)$ est un réel donc égal à son conjugué :

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \overline{\varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n}}$$

et cela marche aussi avec la somme :

$$\det(\overline{A}) \quad = \quad \overline{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n}}$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Puisque A et B commutent, on peut utiliser les identités remarquables, si bien que

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= (A - iB)(A + iB) \\ &= \overline{(A - iB)} \times (A + iB) \end{aligned}$$

puisque A et B sont réelles. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(A^2 + B^2) &= \det\left(\overline{(A - iB)} \times (A + iB)\right) \\ &= \det\left(\overline{(A - iB)}\right) \times \det(A + iB) \\ &= \overline{\det(A + iB)} \times \det(A + iB) \qquad \text{(Question précédente)} \\ &= |\det(A + iB)|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Exercice 15 : ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $B = \left((-1)^{i+j} A_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$. Calculer $\det(B)$.

Correction : Avec la formule explicite du déterminant :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sigma(1)+1} A_{\sigma(1),1} \times (-1)^{\sigma(2)+2} A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times (-1)^{\sigma(n)+n} A_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{\sigma(1) \cdots + \sigma(n) + 1 + \cdots + n} A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n} \end{aligned}$$

Or, σ étant une bijection de $[\![1\,;\, n]\!]$, $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ sont égaux à $1, \dots, n$ dans un ordre quelconque, si bien que leur somme vaut $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ et donc :

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{2*n(n+1)/2} A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n} \\ &= (-1)^{n(n+1)} \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n} \\ &= (-1)^{n(n+1)} \det(A) \end{aligned}$$

mais, parmi n et $n+1$, il y a un nombre pair donc $n(n+1)$ est pair si bien que $\det(B) = \det(A)$.

Exercice 16 : ✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Correction : Donnons une relation de récurrence entre les différents $D_n(x)$. Soit $n \geq 3$. En développant par rapport à la première colonne :

$$D_n(x) = (1+x^2) \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n-1]} - x \begin{vmatrix} x & 0 & & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Le premier déterminant est égal à $D_{n-1}(x)$ et en développant le deuxième par rapport à la première ligne, on trouve qu'il vaut $x \times D_{n-2}(x)$ si bien que : $D_n(x) = (1+x^2)D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x)$. La suite $(D_n(x))_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est $r^2 = (1+x^2)r - x^2$ i.e. $r^2 - (1+x^2)r + x^2 = 0$ dont les solutions sont 1 et x^2 : on sait qu'il faut séparer les cas selon que les racines sont simples ou doubles. Supposons donc que $x \neq \pm 1$. Il existe α et μ uniques (dépendant de x mais pas de n) tels que, pour tout $n \geq 1$:

$$D_n(x) = \lambda \times 1^n + \mu \times x^{2n}$$

Or, $D_1(x) = 1 + x^2$ et

$$\begin{aligned} D_2(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\ &= (1+x^2)^2 - x^2 \\ &= 1 + x^2 + x^4 \end{aligned}$$

On a donc $\lambda + \mu x^2 = 1 + x^2$ et $\lambda + \mu x^4 = 1 + x^2 + x^4$. En faisant la différence, on trouve $\mu(x^4 - x^2) = x^4$ i.e. $\mu x^2(x^2-1) = x^4$. On a envie de diviser par $x^2(x^2-1)$: on sépare les cas.

Si $x \neq 0$ (car on a déjà supposé $x \neq \pm 1$), alors on trouve que

$$\mu = \frac{x^2}{x^2-1} \qquad \text{et} \qquad \lambda = \frac{-1}{x^2-1}$$

si bien que :

$$\forall n \geq 1, D_n(x) = \frac{-1 + x^{2n+2}}{x^2-1} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$$

Supposons $x = 0$. Alors $D_n(x) = 1$ (déterminant de l'identité). Supposons $x = \pm 1$. Alors 1 est racine double de l'équation caractéristique, si bien qu'il existe λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \geq 1, D_n(x) = (\lambda + n\mu) \times 1^n$$

et puisque $D_1(x) = 2$ et $D_2(x) = 3$, alors on trouve que $\lambda = \mu = 1$ si bien que $D_n(x) = n+1$. On pouvait également prolonger l'égalité $D_n(x) = \cdots$ puisque D_n est une fonction continue (car polynomiale en les coefficients de la matrice). Dans tous les cas, peu importe la valeur de x, on a donc

$$D_n(x) = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n}$$

et si $x \neq \pm 1$, cela donne

$$D_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$$

Exercice 17 : ✪✪✪ Soit $p \geq n$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{p+i-1}{j-1} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Correction : Notons D_n le déterminant (de taille n) recherché.

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ \binom{p+2}{0} & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \binom{p+n-2}{2} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-2}{n-1} \\ \binom{p+n-1}{0} & \binom{p+n-1}{1} & \binom{p+n-1}{2} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-2} & \binom{p+n-1}{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p+n-2}{1} & \binom{p+n-2}{2} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-2}{n-1} \\ 1 & \binom{p+n-1}{1} & \binom{p+n-1}{2} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-2} & \binom{p+n-1}{n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En faisant $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p+n-2}{1} & \binom{p+n-2}{2} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-2}{n-1} \\ 0 & \binom{p+n-1}{1} - \binom{p+n-2}{1} & \binom{p+n-1}{2} - \binom{p+n-2}{2} & \cdots & \binom{p+n-1}{n-2} - \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-1}{n-1} - \binom{p+n-2}{n-1} \end{vmatrix}$$

ce qui, d'après la formule de Pascal, est égal à :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{p+n-2}{1} & \binom{p+n-2}{2} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-2}{n-1} \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-3} & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}$$

En faisant à présent $L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}$, il vient :

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{p+n-2}{1} - \binom{p+n-3}{1} & \binom{p+n-2}{2} - \binom{p+n-3}{2} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-2} - \binom{p+n-2}{n-2} & \binom{p+n-2}{n-1} - \binom{p+n-3}{n-1} \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-3} & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 1 & \binom{p+1}{1} & \binom{p+1}{2} & \cdots & \binom{p+1}{n-2} & \binom{p+1}{n-1} \\ 1 & \binom{p+2}{1} & \binom{p+2}{2} & \cdots & \binom{p+2}{n-2} & \binom{p+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{p+n-3}{0} & \binom{p+n-3}{1} & \cdots & \binom{p+n-3}{n-3} & \binom{p+n-3}{n-2} \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-3} & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

On itère le procédé : on fait successivement (pas en même temps sinon on fait intervenir des lignes qu'on est en train de modifier) $L_{n-2} \leftarrow L_{n-2} - L_{n-3}, \ldots, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ d'où :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \binom{p}{1} & \binom{p}{2} & \cdots & \binom{p}{n-2} & \binom{p}{n-1} \\ 0 & \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & \cdots & \binom{p}{n-3} & \binom{p}{n-2} \\ 0 & \binom{p+1}{0} & \binom{p+1}{1} & \cdots & \binom{p+1}{n-3} & \binom{p+1}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \binom{p+n-3}{0} & \binom{p+n-3}{1} & \cdots & \binom{p+n-3}{n-3} & \binom{p+n-3}{n-2} \\ 0 & \binom{p+n-2}{0} & \binom{p+n-2}{1} & \cdots & \binom{p+n-2}{n-3} & \binom{p+n-2}{n-2} \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve que $D_n = D_{n-1}$: la suite (D_n) est égale à son premier terme. Or, pour $n = 1$,

$$D_1 = \left| \binom{p}{0} \right|$$

(encore une fois, c'est un déterminant, pas une valeur absolue) si bien que $D_n = 1$.

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$ et soit $P \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \ldots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \ldots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \ldots & P(2n-1) \end{vmatrix} = 0$$

Correction : Les n polynômes $P(X+1), \ldots, P(X+n)$ sont liés car appartiennent à $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ qui est de dimension $n-1$: il existe $a_1, \ldots, a_{n-1}$ tels que

$$P(X+n) = a_1 P(X+1) + \cdots + a_{n-1} P(X+n-1)$$

Dès lors, en évaluant en $0, 1, \ldots, n-1$:

- $P(n) = a_1P(1) + \cdots + a_{n-1}P(n-1)$
- $P(n+1) = a_1P(2) + \cdots + a_{n-1}P(n)$

  $\vdots$
- $P(2n-1) = a_1P(n) + \cdots + a_{n-1}P(2n-2)$

Par conséquent, si les colonnes du déterminant sont notées $C_1, \dots, C_n$,

$$C_n = a_1C_1 + \cdots + a_{n-1}C_{n-1}$$

Les vecteurs colonnes sont liés : le déterminant est nul.

Exercice 19 :

1. ✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent ± 1. Prouver que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.
2. ✪✪✪ Soit $C = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \forall (i,j), |A_{i,j}| \leq 1\}$. On admet que le déterminant admet un maximum sur C : montrer que ce maximum est un entier divisible par 2^{n-1}.

Correction :

1. On a (même si on écrit ± 1 partout, les coefficients n'ont aucune raison d'être égaux) :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{vmatrix}$$

Faisons les opérations $C_i \leftarrow C_i + C_1$ pour tout $i \geq 2$. On fait des sommes d'éléments valant ± 1 : on peut obtenir $-2, 0$ ou 2 donc

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \pm 1 & * & \cdots & * \\ \pm 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & * & \cdots & * \end{vmatrix}$$

où les coefficients $*$ sont égaux à ± 2 ou à 0 donc, quand on les divise par 2, ils restent entiers. Ainsi, par n-linéarité du déterminant, en factorisant par 2 dans les $n-1$ colonnes $C_2, \dots, C_n$:

$$\det(A) = 2^{n-1} \begin{vmatrix} \pm 1 & */2 & \cdots & */2 \\ \pm 1 & */2 & \cdots & */2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & */2 & \cdots & */2 \end{vmatrix}$$

Or, le déterminant ci-dessus est entier car les termes du déterminant sont entiers et car le déterminant est polynomial en les coefficients, d'où le résultat.

2. Soit $B \in C$ en laquelle det admet un maximum (on a admis l'existence d'un tel B). Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$. Soit

$$\varphi(x) = \det \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,i} & \cdots & B_{1,j} & \cdots & B_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{i,1} & \cdots & B_{i,i} & \cdots & x & \cdots & B_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ B_{j,1} & \cdots & B_{j,i} & \cdots & B_{j,j} & \cdots & B_{j,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n,1} & \cdots & B_{n,i} & \cdots & B_{n,j} & \cdots & B_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \phantom{B_{1,1}} & & \phantom{B_{1,i}} & & j & & \phantom{B_{1,n}} \end{matrix} & \end{array}$$

c'est-à-dire la fonction qui à x associe le déterminant de la matrice B dont on a modifié le coefficient d'indice (i,j), en lui substituant x. En développant par rapport à la j-ième colonne, on trouve que φ est une fonction affine. Or, une fonction affine est monotone donc, sur $[-1\,;1]$ donc le maximum de φ est atteint en ± 1. En d'autres termes, il existe une matrice $\tilde{B}$ donc le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 avec $\det(B) \leq \det(\tilde{B})$ (quand on remplace $B_{i,j}$ par 1 ou par -1, le déterminant augmente) et donc $\det(B) = \det(\tilde{B})$ car $\det(B)$ atteint un maximum en B. On itère l'expérience pour tous les coefficients : on peut donc remplacer tous les coefficients de B par ± 1 (parfois par 1, parfois par -1, pas toujours le même) sans changer la valeur du déterminant, ce qui permet de conclure d'après la question précédente.

Exercice 20 : ✪✪✪ On suppose $n \geq 2$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. Montrer que $A = 0$.

Correction : Tout d'abord, en appliquant cette égalité avec $B = A$, on trouve que $\det(2A) = 2\det(A)$ et le déterminant est n-linéaire donc $2^n \det(A) = 2\det(A)$ et $n \geq 2$ donc $\det(A) = 0$. Ainsi, pour tout B, $\det(A+B) = \det(B)$. L'idée, si $A \neq 0$, est de trouver B non inversible telle que $A+B$ soit inversible, ce qui sera absurde. Supposons donc A de rang $r \geq 1$ (on raisonne par l'absurde). Puisque A n'est pas inversible, $r \leq n-1$. A est donc équivalente à la matrice J_r suivante :

$$J_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

c'est-à-dire qu'il existe P et Q inversibles telles que $A = PJ_rQ$ (et $r \in [\![1\,;\, n-1]\!]$). Posons

$$B = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

où les 1 sont placés de façon complémentaires à ceux de J_r, c'est-à-dire de la place $r+1$ à n. Alors B n'est pas inversible, pourtant

$$A+B = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} Q = PI_nQ$$

est inversible, donc $\det(A+B) \neq 0 = \det(B)$ ce qui est absurde, c'est-à-dire que B est nulle.

33.2 Quelques déterminants classiques

Exercice 21 - Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon : ✪✪ Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$. Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit que C est la matrice compagnon de P. Montrer que $\det(XI_n - C) = P$.

Correction : Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq 1$.

- Si $n \geq 1$, notons H_n : Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1}+X \end{vmatrix} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

- H_1 est vraie : en effet, si a_0 et a_1 appartiennent à $\mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} a_0 + X \end{vmatrix} = a_0 + X$$

- H_2 est aussi vraie : si a_0 et a_1 appartiennent à $\mathbb{K}$,

$$\begin{vmatrix} X & a_0 \\ -1 & a_1 + X \end{vmatrix} = X^2 + a_1 X + a_0$$

- Soit $n \geq 2$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. En développant par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n+X \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+1+n} \times (-1) \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} + (-1)^{n+1+n+1}(a_n + X) \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} + (a_n + X) \times X^n$$

On veut appliquer l'hypothèse de récurrence mais il manque un X dans la dernière colonne. Par n-linéarité,

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_{n-1}+X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & X \end{vmatrix}$$

Or, le premier déterminant de droite vaut, par hypothèse de récurrence, $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ et celui de droite vaut X^n (déterminant triangulaire) donc

$$\begin{vmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n+X \end{vmatrix} = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 - X^n + (a_n + X)X^n$$

ce qui clôt la récurrence.

Exercice 22 - Déterminant de Cauchy (début de Mines MP 2009) : ✪✪✪ On considère deux suites finies $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $a_i+b_j\neq 0$ pour tout $(i,j)\in [\![1\,;n]\!]^2$. Pour tout entier m tel que $0<m\leq n$, le déterminant de Cauchy d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}$$

On définit également la fraction rationnelle :

$$R = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$$

1. Montrer que si R est de la forme $R=\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X+b_k}$ alors $A_nD_n=R(a_n)D_{n-1}$.

   On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par :

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$$

2. En déduire que :

$$D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_j+b_j)}$$

Correction :

1. Supposons que R s'écrive sous la forme voulue (c'est la décomposition en éléments simples de R). Suivons l'indication de l'énoncé et remplaçons la dernière colonne de D_n par le vecteur de l'énoncé :

$$
\begin{aligned}
E_n &= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{a_1+b_k} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{a_2+b_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{A_k}{a_n+b_k} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \qquad C_n \leftarrow C_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k C_k \\
&= A_n D_n
\end{aligned}
$$

Or, d'autre part, $R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$ si bien que

$$
E_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dfrac{1}{a_{n-1}+b_1} & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{vmatrix}
$$

et en développant par rapport à la dernière colonne, on trouve $E_n = R(a_n) \times D_{n-1}$ ce qui donne le résultat voulu.

2. Raisonnons donc par récurrence en utilisant la question précédente.
   - Si $n \geq 1$, notons H_n : « $D_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_j + b_j)}$ ».
   - $D_1 = \dfrac{1}{a_1+b_1}$. Or, si $n = 1$, alors le numérateur de la fraction ci-dessus est vide donc vaut 1, et le dénominateur vaut $a_1 + b_1$ si bien que H_1 est vraie.
   - Soit $n \geq 2$. Supposons H_{n-1} vraie et prouvons que H_n est vraie (pour utiliser directement la question précédente). On cherche à utiliser la question précédente : il faut donc écrire R sous la forme voulue. Or, si les b_k étant deux à deux distincts, R s'écrit sous la forme de la question précédente (c'est sa décomposition en éléments simples), et on obtient A_n en multipliant par $X + b_n$ et en évaluant en $-b_n$, ce qui donne :

     $$A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{-b_n - a_k}{b_k - b_n}$$

     Ainsi, d'après la question précédente, et par hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
D_n &= R(a_n)\times D_{n-1}\times \frac{1}{A_n}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}\times \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n-1}(a_j+b_j)}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_k-b_n}{-b_n-a_k}\\
&= \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(a_n+b_k)}\times \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n-1}(a_j+b_j)}\times\prod_{k=1}^{n-1}\frac{b_n-b_k}{a_k+b_n}
\end{aligned}$$

Or, les deux produits $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(a_n-a_k)$ et $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(b_n-b_k)$, injectés dans $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$, donnent

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$$

et idem pour le dénominateur, c'est-à-dire que H_n est vraie. Dans le cas où les b_k ne sont pas deux à deux distincts, la formule est encore valable car les deux quantités sont nulles ($D_n=0$ car le déterminant a deux colonnes égales). Dans tous les cas, H_n est vraie ce qui clôt la récurrence.

Exercice 23 - Déterminant circulant : ✪✪✪ Soit $(a_0,\dots,a_{n-1})\in\mathbb{C}^n$. On note

$$M=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \dots & a_0\end{pmatrix}$$

1. Pour tout $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, notons $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$ et $C_k=\begin{pmatrix}1 & \omega_k & {\omega_k}^2 & \dots & \omega^{n-1}\end{pmatrix}^\top$. Montrer que $(C_0,\dots,C_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
2. Donner la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M dans cette nouvelle base. On pourra introduire le polynôme $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}a_kX^k$
3. En déduire le déterminant de M en fonction de P et des ω_k.
4. (a) Montrer que $1-X^n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-X\omega_k)$.

   (b) Montrer que pour tout $a\in\mathbb{C}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \dots & a^{n-1}\\ a^{n-1} & 1 & \dots & a^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a^2 & \dots & 1\end{vmatrix}=(1-a^n)^{n-1}$$

Correction :

1. Alors $\det(C_0,\dots,C_{n-1})=V(\omega_0,\dots,\omega_{n-1})$ et donc est non nul car déterminant de Vandermonde de n complexes deux à deux distincts. Les vecteurs $C_0,\dots,C_{n-1}$ forment donc une base de $\mathbb{C}^n$.
2. Soit $k\in[\![0\,;n-1]\!]$. Alors :

$$MC_k=\begin{pmatrix} a_0+a_1\omega_k+a_2{\omega_k}^2+\dots+a_{n-1}{\omega_k}^{n-1}\\ a_{n-1}+a_0\omega_k+a_1{\omega_k}^2+\dots+a_{n-2}{\omega_k}^{n-1}\\ \vdots\\ a_1+a_2\omega_k+a_3{\omega_k}^2+\dots+a_0{\omega_k}^{n-1}\end{pmatrix}$$

   Or, ${\omega_k}^n=1$ si bien que :

$$
\begin{aligned}
MC_k &= \begin{pmatrix} a_0 + a_1\omega_k + a_2{\omega_k}^2 + \cdots + a_{n-1}{\omega_k}^{n-1} \\ \omega_k\left(a_{n-1}{\omega_k}^{n-1} + a_0 + a_1\omega_k + \cdots + a_{n-2}{\omega_k}^{n-2}\right) \\ \vdots \\ {\omega_k}^{n-1}\left(a_1\omega_k + a_2{\omega_k}^2 + a_3{\omega_k}^3 + \cdots + a_0\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(\omega_k) \\ \omega_k \times P(\omega_k) \\ \vdots \\ {\omega_k}^{n-1} \times P(\omega_k) \end{pmatrix} \\
&= P(\omega_k)C_k
\end{aligned}
$$

si bien que la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M admet comme matrice dans la base $(C_0, \dots, C_n)$ la matrice

$$
N = \begin{pmatrix} P(\omega_0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(\omega_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\omega_{n-1}) \end{pmatrix}
$$

3. Le déterminant ne dépendant pas de la base, $\det(M) = \det(N) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega_k)$.

4. (a) Le polynôme $1 - X^n$ est de degré n, de coefficient dominant égal à 1, et toutes ses racines sont les racines n-ièmes de l'unité, qui sont simples car on a n racines distinctes et un polynôme de degré n, si bien que

$$
1 - X^n = (-1)\prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)
$$

Or, le polynôme $Q = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - X\omega_k)$ est aussi de degré n, de coefficient dominant

$$
\begin{aligned}
\alpha_n &= \prod_{k=0}^{n-1}(-\omega_k) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1}(-1) \times e^{2ik\pi/n} \\
&= (-1)^n \times e^{2i\pi/n \times \sum_{k=0}^{n-1} k} \\
&= (-1)^n e^{2i\pi/n \times n(n-1)/2} \\
&= (-1)^n \times e^{i(n-1)\pi} \\
&= (-1)^n \times (-1)^{n-1} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Enfin, pour tout ω_i (k est déjà l'indice de sommation),

$$
Q(\omega_i) = \prod_{k=0}^{n-1}(1 - \omega_i \times \omega_k)
$$

Or, $\omega_i \times \omega_{n-i} = 1$ donc le terme d'indice $n - i$ du produit est nul si bien que $Q(\omega_i) = 0$: Q a les mêmes racines que $1 - X^n$, même degré, même coefficient dominant, donc même factorisation et ces deux polynômes sont donc égaux.

(b) Notons $D_n(a)$ le déterminant recherché. On reconnaît un déterminant circulant du même type que dans les trois premières questions, si bien que $D_n = P(\omega_0) \times P(\omega_1) \times \cdots \times P(\omega_{n-1})$ avec

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k X^k \\
&= \frac{1-a^n X^n}{1-aX}
\end{aligned}
$$

Supposons que a soit une racine n-ième de l'unité. Alors

$$
P = \frac{1-X^n}{1-aX}
$$

si bien que $P(\omega_k) = 0$ pour tout k (enfin sauf pour $k=0$ si $a=1$) et donc $D_n(a)$ est nul, donc on a bien $D_n(a) = (1-a^n)^{n-1}$. Supposons à présent que a ne soit pas une racine n-ième de l'unité. Par conséquent, pour tout $k \in [\![\, 0\,;\, n-1 \,]\!]$, $1 - a\omega_k \neq 0$ (car $a \neq 1/\omega_k = \omega_{n-k}$) donc

$$
P(\omega_k) = \frac{1-a^n}{1-a\omega_k}
$$

si bien que

$$
\begin{aligned}
D_n(a) &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-a^n}{1-a\omega_k} \\
&= (1-a^n)^n \times \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1-a\omega_k} \\
&= (1-a^n)^n \times \frac{1}{1-a^n}
\end{aligned}
$$

d'après la question précédente, ce qui permet de conclure.

33.3 Autour du déterminant de Vandermonde

Exercice 24 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Donner une CNS pour que le système (d'inconnues x, y, z)

$$
\left\{
\begin{array}{ccccccc}
x & + & ay & + & a^2 z & = & a^4 \\
x & + & by & + & b^2 z & = & b^4 \\
x & + & cy & + & c^2 z & = & c^4
\end{array}
\right.
$$

admette une unique solution, et la donner le cas échéant.

Correction : Le système admet une unique solution si et seulement si le déterminant du système est non nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$
\begin{vmatrix}
1 & a & a^2 \\
1 & b & b^2 \\
1 & c & c^2
\end{vmatrix} \neq 0
$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde : celui-ci est non nul si et seulement si a, b, c sont deux à deux distincts. Supposons donc cette condition réalisée. On sait alors que l'unique solution est donnée par les formules de Cramer vues en classe : commençons par x.

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\begin{vmatrix}
a^4 & a & a^2 \\
b^4 & b & b^2 \\
c^4 & c & c^2
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
1 & a & a^2 \\
1 & b & b^2 \\
1 & c & c^2
\end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{vmatrix}
a^4 & a & a^2 \\
b^4 & b & b^2 \\
c^4 & c & c^2
\end{vmatrix}}{(c-a)(c-b)(c-a)}
\end{aligned}
$$

On trouve de même que

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a^4 & a^2\\ 1 & b^4 & b^2\\ 1 & c^4 & c^2\end{vmatrix}}{(c-a)(c-b)(c-a)} \qquad \text{et} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a^4\\ 1 & b & b^4\\ 1 & c & c^4\end{vmatrix}}{(c-a)(c-b)(c-a)}$$

et on calcule ces quantités à l'aide de la règle de Sarrus.

Exercice 25 : ✪✪ Calculer le déterminant de la matrice $\left(i^j\right)_{1\le i,j\le n}$.

Correction : On a

$$\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix}1^1 & 1^2 & 1^3 & \cdots & 1^{n-1} & 1^n\\ 2^1 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n\\ 3^1 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ (n-1)^1 & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^{n-1} & (n-1)^n\\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^{n-1} & n^n\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 2 & 2^2 & 2^3 & \cdots & 2^{n-1} & 2^n\\ 3 & 3^2 & 3^3 & \cdots & 3^{n-1} & 3^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ (n-1) & (n-1)^2 & (n-1)^3 & \cdots & (n-1)^{n-1} & (n-1)^n\\ n & n^2 & n^3 & \cdots & n^{n-1} & n^n\end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Attention, ce n'est pas (encore) un déterminant de Vandermonde ! On factorise par 2 dans la deuxième ligne, par 3 dans la troisième ligne etc. :

$$D_n = 2\times 3\times\cdots\times n\times \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{n-2} & 2^{n-1}\\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{n-2} & 3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & (n-1) & (n-1)^2 & \cdots & (n-1)^{n-2} & (n-1)^{n-1}\\ 1 & n & n^2 & \cdots & n^{n-2} & n^{n-1}\end{vmatrix}$$

et là on reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\begin{aligned}
D_n &= n!\times\prod_{1\le i<j\le n}(j-i)\\
&= n!\times\prod_{j=2}^n\prod_{i=1}^{j-1}(j-i)\\
&= n!\times\prod_{j=2}^n\prod_{i=1}^{j-1}k\\
&= n!\times\prod_{j=2}^n(j-1)!\\
&= 1!\times 2!\times\cdots\times n!
\end{aligned}$$

Exercice 26 - Déterminant de Vandermonde lacunaire : ✪✪ Soit $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$.

1. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^n\\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^n\\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^n\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^n\end{vmatrix}$$

2. Si $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, généraliser à :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{k-1} & {x_1}^{k+1} & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{k-1} & {x_2}^{k+1} & \cdots & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{k-1} & {x_3}^{k+1} & \cdots & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{k-1} & {x_n}^{k+1} & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

Correction :

1. Tout d'abord, il est immédiat que ce déterminant est nul lorsque deux x_i sont égaux donc on suppose dans la suite que les x_i sont deux à deux distincts. L'idée est d'introduire la colonne manquante, mais alors la matrice ne serait plus carrée, donc on ajoute aussi une ligne, de façon analogue au calcul du déterminant de Vandermonde. On introduit le polynôme

$$P = \begin{vmatrix} 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \\ 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n-1} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n-1} & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n-1} & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n-1} & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

Précisons que ce déterminant est de taille $n+1$. De même que dans la démonstration de la valeur du déterminant de Vandermonde, chaque x_i est racine de P et en développant par rapport à la première ligne, on trouve que P est de degré n de coefficient dominant

$$\begin{aligned} (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} &= (-1)^n V(x_1, \dots, x_n) \\ &= (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

et puisque les racines trouvées sont distinctes, et que $\deg(P) = n$, alors elles sont simples si bien que

$$P = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \prod_{k=1}^{n} (X - x_k)$$

Le déterminant recherché est égal à $(-1)^{n+1}$ multiplié par le coefficient de X^{n-1} de P. Or, d'après les relations coefficients racines (alias formules de Viète), le coefficient de X^{n-1} de P est égal à

$$(-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times (-x_1 - \cdots - x_k)$$

En conclusion, le déterminant recherché est égal à $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times \sum_{k=1}^{n} x_k$ (encore valable si les x_i ne sont pas deux à deux distincts car alors tout est nul).

2. Le même raisonnement montre que le déterminant recherché est égal à $(-1)^{k+1}$ multiplié par le coefficient de X^k de p qui, toujours d'après les relations coefficients racines, vaut

$$(-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \times (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}$$

où, rappelons-le :

$$\sigma_{n-k} = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_{n-k} \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-k}}$$

On simplifie par $(-1)^{k+1}$ et on a le déterminant souhaité.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Prouver que :

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1(m_1-1) & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & m_2(m_2-1) & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & m_n(m_n-1) & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(m_j-m_i)$$

2. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!$ divise $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(m_j-m_i)$.

Correction :

1. Notons D_n le déterminant de gauche. Développons la troisième colonne :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & {m_1}^2-m_1 & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & {m_2}^2-m_2 & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & {m_n}^2-m_n & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix}$$

En faisant l'opération $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & {m_1}^2 & m_1(m_1-1)(m_1-2) & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & {m_2}^2 & m_2(m_2-1)(m_2-2) & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & m_n & {m_n}^2 & m_n(m_n-1)(m_n-2) & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix}$$

ce qui, en développant la quatrième colonne, donne :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & {m_1}^2 & {m_1}^3-3m_1+2 & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & {m_2}^2 & {m_2}^3-3m_2+2 & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & m_n & {m_n}^2 & {m_n}^3-3m_n+2 & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix}$$

et en faisant $C_4 \leftarrow C_4 + 3C_2 - 2C_1$, on trouve :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & m_1 & {m_1}^2 & {m_1}^3 & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & {m_2}^2 & {m_2}^3 & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & m_n & {m_n}^2 & {m_n}^3 & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix}$$

Il suffit d'itérer la méthode. Si on veut le faire (très ? trop ?) proprement : par récurrence, on prouve que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, D_n est égal au déterminant dont les k premières colonnes sont les lignes avec 1, les m_i, les ${m_i}^2$, etc. jusque ${m_i}^{k-1}$. Le résultat est vrai jusqu'au rang 3 d'après ce qui précède. Soit donc $k \geq 4$, supposons le résultat vrai jusqu'au rang $k-1$ et prouvons qu'il est vrai au rang k. La k-ième colonne est formée des termes de la forme

$$m_i(m_i-1)\cdots(m_i-k+2)$$

Quand on développe, on a ${m_i}^{k-1}$+ une CL de $1, m_i, \dots, {m_i}^{k-3}$ (on a une quantité polynomiale en m_i de degré $\leq k-3$) et les coefficients ne dépendent pas de la ligne donc cette colonne est égale à une colonne de ${m_i}^{k-2}$+ une CL des colonnes précédentes (par hypothèse de récurrence) donc, en utilisant le caractère n-linéaire alterné du déterminant, le déterminant reste inchangé quand on ne garde que ${m_i}^{k-1}$ ce qui clôt la récurrence. En particulier, pour $k=n$, cela donne le déterminant de Vandermonde $V(m_1,\dots,m_n)$ ce qui est le résultat voulu.

2. Rappelons (cf. exercice 38 du chapitre 3 mais c'est un classique) que le produit de k entiers consécutifs est toujours divisible par $k!$. Il en découle que tous les termes de la deuxième colonne sont divisibles par 1! (scoop), tous ceux de la troisième colonne par 2! etc. jusque la n-ième colonne, dont les termes sont tous divisibles par $(n-1)!$, termes qu'on peut sortir du déterminant par n-linéarité ce qui est le résultat voulu.

Exercice 28 : ✪✪ Dans les trois cas, montrer que la famille L est une famille libre de E à l'aide d'un déterminant de Vandermonde.

1. $L = ((X+a_k)^n)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ où $a_0,\dots,a_n$ sont des scalaires deux à deux distincts, dans $E = \mathbb{K}_n[X]$.
2. $L = \left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3. $L = (x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}_+^*}$ dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Correction :

1. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\lambda_0(X+a_0)^n + \cdots + \lambda_n(X+a_n)^n = 0$$

En dérivant cette égalité :

$$\lambda_0 n(X+a_0)^{n-1} + \cdots + \lambda_n n(X+a_n)^{n-1} = 0$$

Encore une fois :

$$\lambda_0 n(n-1)(X+a_0)^{n-2} + \cdots + \lambda_n n(n-1)(X+a_n)^{n-2} = 0$$

et ainsi de suite jusque la dérivée n-ième :

$$\lambda_0 \times n! + \cdots + \lambda_n \times n! = 0$$

Si à chaque fois on évalue en 0, cela donne un système linéaire (d'inconnues les λ_i) :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcccrcc} {a_0}^n\lambda_0 & + & {a_1}^n\lambda_1 & + & \cdots & + & {a_n}^n\lambda_n & = & 0 \\ n{a_0}^{n-1}\lambda_0 & + & n{a_1}^{n-1}\lambda_1 & + & \cdots & + & n{a_n}^{n-1}\lambda_n & = & 0 \\ n(n-1){a_0}^{n-2}\lambda_0 & + & n(n-1){a_1}^{n-2}\lambda_1 & + & \cdots & + & n(n-1){a_n}^{n-2}\lambda_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ n!\lambda_0 & + & n!\lambda_1 & + & \cdots & + & n!\lambda_n & = & 0 \end{array} \right.$$

dont la matrice associée est

$$A = \begin{pmatrix} {a_0}^n & {a_1}^n & \cdots & {a_n}^n \\ n{a_0}^{n-1} & n{a_1}^{n-1} & \cdots & n{a_n}^{n-1} \\ n(n-1){a_0}^{n-2} & n(n-1){a_1}^{n-2} & \cdots & n(n-1){a_n}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n! & n! & \cdots & n! \end{pmatrix}$$

Montrons que cette matrice est inversible. Par n-linéarité du déterminant, on peut factoriser par n dans la deuxième ligne, par $n(n-1)$ dans la troisième etc. ce qui donne :

$$\det(A) = n \times n(n-1) \times n(n-1)(n-2) \times \cdots \times n! \times \begin{vmatrix} {a_0}^n & {a_1}^n & \cdots & {a_n}^n \\ {a_0}^{n-1} & {a_1}^{n-1} & \cdots & {a_n}^{n-1} \\ {a_0}^{n-2} & {a_1}^{n-2} & \cdots & {a_n}^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

et le déterminant de Vandermonde ci-dessus est non nul car les a_i sont deux à deux distincts, si bien que $\det(A) \neq 0$: A est inversible, le système est de Cramer donc admet une unique solution, et la solution nulle est solution évidente donc c'est la seule : $\lambda_0 = \cdots = \lambda_n = 0$, la famille est libre.

2. Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n x} = 0$$

Si $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, en dérivant k fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 {\lambda_1}^k e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_n {\lambda_n}^k e^{\lambda_n x} = 0$$

En particulier, si on évalue en 0, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont solutions du système linéaire suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcccrcc} \alpha_1 & + & \alpha_2 & + & \cdots & + & \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_1\lambda_1 & + & \alpha_2\lambda_2 & + & \cdots & + & \alpha_n\lambda_n & = & 0 \\ \alpha_1{\lambda_1}^2 & + & \alpha_2{\lambda_2}^2 & + & \cdots & + & \alpha_n{\lambda_n}^2 & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1{\lambda_1}^{n-1} & + & \alpha_2{\lambda_2}^{n-1} & + & \cdots & + & \alpha_n{\lambda_n}^{n-1} & = & 0 \end{array} \right.$$

Le déterminant du système est $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ qui est non nul car les λ_i sont deux à deux distincts. On conclut de la même façon que les α_i sont tous nuls, donc la famille $(x \mapsto e^{\lambda_1 x}, \dots, x \mapsto e^{\lambda_n x})$ est libre : toute sous-famille finie est libre, donc la famille $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre.

3. Même chose, mais en dérivant une fois pour se ramener à des cosinus (donc qui valent 1 en 0) puis en dérivant $2,4,6$ jusque $2n-2$ fois. Plus précisément, Soient $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \sin(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_n \sin(\lambda_n x) = 0$$

En dérivant une fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 \lambda_1 \cos(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_n \lambda_n \cos(\lambda_n x) = 0$$

Si $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$, en dérivant $2k$ fois :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1 {\lambda_1}^{2k+1} (-1)^k \cos(\lambda_1 x) + \cdots + \alpha_n {\lambda_n}^{2k+1} (-1)^k \cos(\lambda_n x) = 0$$

En particulier, en évaluant en 0, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont solutions du système linéaire suivant :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcccrcl} \alpha_1 \lambda_1 & + & \alpha_2 \lambda_2 & + & \cdots & + & \alpha_n \lambda_n & = & 0 \\ \alpha_1 {\lambda_1}^3 & + & \alpha_2 {\lambda_2}^3 & + & \cdots & + & \alpha_n {\lambda_n}^3 & = & 0 \\ \alpha_1 {\lambda_1}^5 & + & \alpha_2 {\lambda_2}^5 & + & \cdots & + & \alpha_n {\lambda_n}^5 & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \alpha_1 {\lambda_1}^{2n+1} & + & \alpha_2 {\lambda_2}^{2n+1} & + & \cdots & + & \alpha_n {\lambda_n}^{2n+1} & = & 0 \end{array} \right.$$

Le déterminant de ce système est :

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^3 & {\lambda_2}^3 & \cdots & {\lambda_n}^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_1}^{2n+1} & {\lambda_2}^{2n+1} & \dots & {\lambda_n}^{2n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {\lambda_1}^{2n} & {\lambda_2}^{2n} & \cdots & {\lambda_n}^{2n} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $\lambda_1 \times \cdots \times \lambda_n V({\lambda_1}^2, \dots, {\lambda_n}^2)$: or, les λ_i sont positifs et distincts donc leurs carrés sont distincts, et donc le Vandermonde est non nul et on conclut comme précédemment.

Exercice 29 : ✪✪✪ Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \dots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \dots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & \cos(2x_n) & \dots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

Correction : Notons D_n ce déterminant. Tout d'abord, à l'aide d'une formule de trigo :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & 2\cos^2(x_1) - 1 & \dots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & 2\cos(x_2) - 1 & \dots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & 2\cos^2(x_n) - 1 & \dots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

et donc, en faisant $C_3 \leftarrow C_3 + C_1$, on trouve :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & 2\cos^2(x_1) & \dots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & 2\cos(x_2) - 1 & \dots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & 2\cos^2(x_n) & \dots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

Utilisons les polynômes de Tchebychev. On rappelle que, pour tout k et pour tout x, on peut écrire

$$\cos(kx) = 2^{k-1} \cos^{kx} + \cdots$$

où les quantités restantes sont des CL des puissances inférieures de $\cos(x)$. Ainsi :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & 2\cos^2(x_1) & 4\cos^3(x_1) + \cdots & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_1) + \cdots \\ 1 & \cos(x_2) & 2\cos(x_2) - 1 & 4\cos^3(x_2) + \cdots & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_2) + \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos(x_n) & 2\cos^2(x_n) & 4\cos^3(x_n) + \cdots & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_n) + \cdots \end{vmatrix}$$

On fait comme dans l'exercice 27 : on nettoie la quatrième colonne à l'aide des colonnes précédentes, ce qui donne une colonne de $4\cos^3(x_i)$, et ensuite on itère l'opération, c'est-à-dire qu'à chaque étape, à l'aide d'opérations élémentaires faisant intervenir les colonnes précédentes, il ne reste dans la colonne k que $2^{k-2}\cos^{k-1}(x_i)$, et en fin de compte :

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & 2\cos^2(x_1) & 4\cos^3(x_1) & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & 2\cos^2(x_2) & 4\cos^3(x_2) & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos(x_n) & 2\cos^2(x_n) & 4\cos^3(x_n) & \dots & 2^{n-2}\cos^{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

Cela ressemble à un déterminant de Vandermonde, mais les 2 et les cos ne sont pas à la même puissance : on sort donc les 2, une puissance par colonne, par n-linéarité, ce qui donne :

$$\begin{aligned} D_n &= 2^1 \times 2^2 \times \cdots \times 2^{n-2} \begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos^2(x_1) & \cos^3(x_1) & \dots & \cos^{n-1}(x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos^2(x_2) & \cos^3(x_2) & \dots & \cos^{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & \cos(x_n) & \cos^2(x_n) & \cos^3(x_n) & \dots & \cos^{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \\ &= 2^{1+2+\cdots+(n-2)} \times V(\cos(x_1), \dots, \cos(x_n)) \\ &= 2^{(n-1)(n-2)/2} \times \prod_{1 \le i < j \le n} (\cos(x_j) - \cos(x_i)) \end{aligned}$$

Exercice 30 : ✪✪✪✪ Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire. Montrer que T est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \ge 1$.
2. Soit D une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel des matrices diagonales.

Correction :

1. T étant triangulaire, on l'écrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Dès lors, pour k, T étant triangulaire :

$$\begin{pmatrix} {\lambda_1}^k & * & \cdots & * \\ 0 & {\lambda_2}^k & \cdots & * \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {\lambda_n}^k \end{pmatrix}$$

(précisons que ce ne sont pas les mêmes étoiles, mais on ne va pas s'embêter avec des notations différentes). Si un des λ_i n'est pas nul alors, pour tout k, ${\lambda_i}^k \neq 0$ donc $T^k \neq 0$ donc T n'est pas nilpotente, et on a vu en classe que si tous les λ_i sont nuls, alors T est nilpotente. Par conséquent, T est nilpotente si et seulement si tous les λ_i sont nuls.

Prouvons que c'est équivalent à : $\forall k \ge 1, \operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$. Un sens est trivial : si tous les λ_i sont nuls, alors pour tout $k \ge 1$, $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = {\lambda_1}^k + \cdots + {\lambda_n}^k = 0$. Montrons à présent la réciproque et supposons que, pour tout $k \ge 1$, $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que les λ_i soient non tous nuls. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les valeurs distinctes des λ_i non nuls, et $n_1, \dots, n_p$ le nombre de λ_i respectivement égaux à $\alpha_1, \dots, \alpha_p$, c'est-à-dire que parmi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a n_1

fois α_1, n_2 fois α_2, et ainsi de suite jusque n_p fois α_p, qui sont distincts et non nuls. Dès lors, sur la diagonale de T^k, on a n_1 fois ${\alpha_1}^k$, n_2 fois ${\alpha_2}^k$, et ainsi de suite jusque n_p fois ${\alpha_p}^k$, qui sont distincts et non nuls, si bien que

$$\operatorname{tr}\left(T^k\right) = n_1{\alpha_1}^k + n_2{\alpha_2}^k + \dots + n_p{\alpha_p}^k = 0$$

Il en découle que $n_1, \dots, n_p$ (les nombres de fois où l'on trouve les λ_i sur la diagonale) sont solutions du système linéaire :

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{ccccccccc} n_1\alpha_1 & + & n_2\alpha_2 & + & \cdots & + & n_p\alpha_p & = & 0 \\ n_1{\alpha_1}^2 & + & n_2{\alpha_2}^2 & + & \cdots & + & n_p{\alpha_p}^2 & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ n_1{\alpha_1}^p & + & n_2{\alpha_2}^p & + & \cdots & + & n_p{\alpha_p}^p & = & 0 \end{array}\right.$$

et le déterminant de la matrice du système est

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ {\alpha_1}^2 & {\alpha_2}^2 & \cdots & {\alpha_p}^2 \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ {\alpha_1}^p & {\alpha_2}^p & \cdots & {\alpha_p}^p \end{vmatrix} = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ {\alpha_1}^{p-1} & {\alpha_2}^{p-1} & \cdots & {\alpha_p}^{p-1} \end{vmatrix}$$

c'est-à-dire $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p V(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \neq 0$ car les α_i sont non nuls et deux à deux distincts. Le système est de Cramer donc admet une unique solution, et la solution nulle est solution évidente donc est la seule, ce qui est absurde puisque les n_i sont supposés non nuls. Ainsi, tous les λ_i sont nuls donc T est nilpotente.

2. Puisque les matrices sont au nombre de n qui est la dimension de l'espace des matrices diagonales (cf. exercice 5 du chapitre 30 mais on peut le dire directement), il suffit de montrer qu'elles forment une famille libre. Soient donc $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ tels que $\lambda_0 I_n + \lambda_1 D + \dots + \lambda_{n-1}D^{n-1} = 0$. Notons $d_1, \dots, d_n$ les coefficients diagonaux (deux à deux distincts par hypothèse) de D. Par conséquent, en regardant tous les termes diagonaux de l'égalité $\lambda_0 I_n + \lambda_1 D + \dots + \lambda_{n-1}D^{n-1} = 0$, il en découle que :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 d_1 & + & \cdots & + & \lambda_{n-1}{d_1}^{n-1} & = & 0 \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 d_2 & + & \cdots & + & \lambda_{n-1}{d_2}^{n-1} & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_0 & + & \lambda_1 d_n & + & \cdots & + & \lambda_{n-1}{d_n}^{n-1} & = & 0 \end{array}\right.$$

alors, de même que dans tous les exercices précédents, $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont solutions d'un système de Cramer dont le déterminant est un déterminant de Vandermonde non nul (car les d_i sont deux à deux distincts) si bien que les λ_i sont tous nuls, ce qui permet de conclure.

33.4 Utilisation de la comatrice

Exercice 31 : ✪✪

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer $\mathrm{Com}(M)$ à l'aide de M^{-1}.
2. Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$.
3. Soient A et B deux matrices semblables inversibles. Montrer que leurs comatrices sont semblables.
4. Montrer que la comatrice d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Correction :

1. On sait que $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \times \mathrm{Com}(M)^\top$ donc $\mathrm{Com}(M) = \det(M).\left(M^{-1}\right)^\top$.
2. D'après la question précédente (rappelons qu'on change l'ordre quand on transpose ou quand on inverse un produit) :

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(B) &= \det(A).\left(A^{-1}\right)^\top \times \det(B).\left(B^{-1}\right)^\top \\ &= \det(A) \times \det(B).\left(A^{-1}\right)^\top \times \left(B^{-1}\right)^\top \\ &= \det(AB).\left(B^{-1} \times A^{-1}\right)^\top \\ &= \det(AB).\left((AB)^{-1}\right)^\top \\ &= \mathrm{Com}(AB) \end{aligned}$$

3. Il existe P inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Par conséquent, d'après la question précédente (toutes les matrices sont bien inversibles) :

$$\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(P) \times \mathrm{Com}(A) \times \mathrm{Com}(P^{-1})$$

Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Com}(P^{-1}) = \mathrm{Com}(P)^{-1}$ pour conclure. Or, toujours d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}(P) \times \mathrm{Com}(P^{-1}) &= \mathrm{Com}(PP^{-1}) \\ &= \mathrm{Com}(I_n) \\ &= I_n \end{aligned}$$

En effet, la comatrice de I_n est I_n : soit on la calcule directement, soit on déduit ce résultat de la question 1. On en déduit le résultat voulu.

4. L'inverse d'une matrice triangulaire (inversible) est triangulaire, il suffit ensuite d'appliquer la question 1.

Exercice 32 : ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})^2$ tel que $AU + BV = I_n$.

Correction : $\det(A)$ et $\det(B)$ sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Bézout (pour les entiers), il existe u et v appartenant à $\mathbb{Z}$ tels que $u\det(A)+v\det(B) = 1$, si bien que $u\det(A)I_n+v\det(B)I_n = I_n$. Or, $\det(A)I_n = A\times\mathrm{Com}(A)^\top$ et $\det(B)I_n = B \times \mathrm{Com}(B)^\top$ si bien que

$$A \times (u\mathrm{Com}(A)^\top) + B \times (v\mathrm{Com}(B)^\top) = I_n$$

Or, A et B sont à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donc leur comatrice également (les coefficients de la comatrice sont des déterminants, multipliés par ± 1, de matrices extraites de A et B donc également à coefficients entiers, donc leurs déterminants également car le déterminant est polynomial en les coefficients) et donc il suffit de poser $U = u\mathrm{Com}(A)^\top$ et $V = v\mathrm{Com}(B)^\top$.

Exercice 33 : ✪✪✪ Supposons $n \geq 2$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation (d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) $\mathrm{Com}(X) = A$.

Correction : Soit $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque $X \times \mathrm{Com}(X)^\top = \det(X)I_n$, alors X est inversible si et seulement si $\mathrm{Com}(X)$ est inversible. Puisque A est inversible, alors une matrice solution est forcément inversible. Soit donc $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Comme dans l'exercice précédente, $\mathrm{Com}(X) = \det(X).\left(X^{-1}\right)^\top$

$$\begin{aligned} \mathrm{Com}(X) = A \quad &\iff \quad \det(X).\left(X^{-1}\right)^\top = A \\ &\iff \quad X^{-1} = \frac{1}{\det(X)}.A^\top \\ &\iff \quad X = \det(X).(A^\top)^{-1} \end{aligned}$$

Raisonnons comme dans le chapitre 31, avec les équations faisant intervenir la trace, et travaillons par analyse synthèse. Si X est solution, alors $X = \det(X).(A^\top)^{-1}$ donc, le déterminant étant n-linéaire :

$$\det(X) = \det(X)^n.\frac{1}{\det(A)}$$

(rappelons qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant) si bien que $\det(X)^{n-1} = \det(A)$. Séparons les cas selon la parité de n et le signe de $\det(A)$.

Premier cas : n est impair. Alors $n-1$ est pair. Si $\det(A) < 0$, alors on ne peut pas avoir $\det(X)^{n-1} = \det(A)$ donc l'équation n'a pas de solution. Supposons donc $\det(A) > 0$ ($\det(A) \neq 0$ car A est inversible). Alors $\det(X) = \pm(\det(A))^{1/(n-1)}$ si bien que $X = \pm(\det(A))^{1/(n-1)}.(A^\top)^{-1}$.

Deuxième cas : n est pair. Alors $n-1$ est impair donc, peu importe le signe de $\det(A)$, on obtient : $\det(X) = (\det(A))^{1/(n-1)}$ si bien que $X = (\det(A))^{1/(n-1)}.(A^\top)^{-1}$.

Synthèse : dans le cas où n est pair, posons $X = (\det(A))^{1/(n-1)}.(A^\top)^{-1}$. Par n-linéarité du déterminant,

$$
\begin{aligned}
\det(X) &= \left(\det(A)^{1/(n-1)}\right)^n \times \frac{1}{\det(A)} \\
&= \det(A)^{\frac{n}{n-1}-1} \\
&= \det(A)^{1/(n-1)}
\end{aligned}
$$

et on a bien $X = \det(X).(A^\top)^{-1}$ donc X est bien solution. Le cas n impair est analogue. En conclusion, dans le cas pair, $X = (\det(A))^{1/(n-1)}.(A^\top)^{-1}$ est l'unique solution (peu importe le signe du déterminant de A), tandis que si n est impair, alors l'équation n'a pas de solution si $\det(A) < 0$, et si $\det(A) > 0$, alors il y a deux solutions : $X = \pm(\det(A))^{1/(n-1)}.(A^\top)^{-1}$

Exercice 34 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner $\det(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.
2. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A. On séparera les cas $\mathrm{rg}(A) = n, \mathrm{rg}(A) \leq n-2$ et enfin $\mathrm{rg}(A) = n-1$.
3. Si $n \geq 3$, donner $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$.

Correction :

1. Supposons A inversible. Alors on a déjà vu que $\mathrm{Com}(A) = \det(A).\left(A^{-1}\right)^\top$. Par n-linéarité du déterminant, et le déterminant de $A^\top$ étant égal à $\det(A)$:
$$
\begin{aligned}
\det(\mathrm{Com}(A)) &= \det(A)^n \times \det(A^{-1}) \\
&= \det(A)^{n-1}
\end{aligned}
$$
Supposons à présent A non inversible. Alors $\det(A) = 0$, si bien que $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = 0$. Si $\mathrm{Com}(A)$ est inversible, alors sa transposée aussi, donc en multipliant à droite par son inverse, il vient $A = 0$ ce qui est absurde car alors $\mathrm{Com}(A)$ est la matrice nulle qui n'est pas inversible. Donc $\mathrm{Com}(A)$ n'est pas inversible, et donc $\det(\mathrm{Com}(A)) = 0 = \det(A)^{n-1}$. Dans tous les cas, on a donc $\det(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-1}$.
2. Si $\mathrm{rg}(A) = n$, alors A est inversible donc $\mathrm{Com}(A)$ également (car $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$ donc $\mathrm{Com}(A) \times A^\top = \det(A)I_n$ donc $\mathrm{Com}(A)$ est inversible, d'inverse $\dfrac{1}{\det(A)}A^\top$) donc $\mathrm{rg}(A) = n$. Supposons que $\mathrm{rg}(A) \leq n-2$. Le rang d'une matrice étant la taille de la matrice de taille maximale inversible qu'on peut extraire, et donc aucune matrice de taille $n-1$ extraite n'est inversible, et donc la comatrice est nulle car ses coefficients sont les mineurs de taille $n-1$ (multipliés par ± 1) qui sont tous nuls car déterminants de matrices de taille $n-1$ non inversibles. Supposons enfin que $\mathrm{rg}(A) = n-1$. On sait que $A \times \mathrm{Com}(A)^\top = 0$ donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Com}(A)^\top) \subset \ker(A)$ qui est de dimension 1 d'après le théorème du rang, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)^\top) \leq 1$ donc (une matrice et sa transposée ont même rang) $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1$. Or, A est de rang $n-1$ donc il existe un mineur non nul (même argument que ci-dessus, le rang est la taille maximale d'une matrice extraite inversible) donc $\mathrm{Com}(A) \neq 0$ si bien que $\mathrm{Com}(A)$ est de rang 1.
3. Si A n'est pas inversible, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq 1$ d'après ce qui précède, donc $\mathrm{rg}(\mathrm{Com}(A)) \leq n-2$ car $n \geq 3$ si bien que $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = 0$. Si A est inversible, alors on a déjà vu que
$$\mathrm{Com}(A) = \det(A).\left(A^{-1}\right)^\top$$
Dès lors :
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) &= \det(\mathrm{Com}(A)).\left(\mathrm{Com}(A)^{-1}\right)^\top \\
&= \det(A)^{n-1} \times \left(\mathrm{Com}(A)^\top\right)^{-1} \\
&= \det(A)^{n-1}\left(\frac{1}{\det(A)}.A\right)
\end{aligned}
$$
$A \times \mathrm{Com}(A)^\top = \det(A)I_n$ et donc $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \det(A)^{n-2}.A$ (formule encore valable si A non inversible car alors $\det(A) = 0$).

Exercice 35 : ✪✪✪✪ On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M a un inverse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. Vérifier que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit.
3. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Donner le PGCD des coefficients d'une ligne ou d'une colonne.

4. Montrer que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices de la forme $I_n \pm E_{i,j}$ $(i \neq j)$. Donner une telle décomposition pour la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. Supposons que M admette un inverse dans $\mathbb{Z}$ donc il existe $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $MN = I_n$. Dès lors, $\det(N) = 1/\det(M)$. Or, M et N sont à coefficients entiers et le déterminant est polynomial en les coefficients donc $\det(M)$ et $\det(N)$ appartiennent à $\mathbb{Z}$ donc $\det(M) = \pm 1$ (sinon, $\det(N) \notin \mathbb{Z}$).

   Réciproquement, supposons que $\det(M) = \pm 1$. Alors

   $$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \mathrm{Com}(M)^\top$$

   et donc $M^{-1} = \pm \mathrm{Com}(M)^\top$. Or, M est à coefficients entiers donc, de même que ci-dessus, le déterminant étant polynomial en les coefficients, tous les mineurs sont dans $\mathbb{Z}$ (et multiplier par ± 1 ne change rien) donc la comatrice est elle-aussi à coefficients entiers, donc sa transposée aussi, donc M^{-1} aussi.
2. Puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est un groupe (groupe linéaire) pour le produit (attention, $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'en est pas un, c'est un groupe pour la somme), il suffit de prouver que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ en est un sous-groupe. Tout d'abord, il est non vide car $I_n \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z})$ (de déterminant 1 et à coefficients entiers). De plus, il est stable par produit : en effet, si A et B appartiennent à $\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$, alors A et B sont à coefficients entiers donc AB l'est également, et $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$ donc $AB \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z})$, c'est-à-dire que $\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$ est stable par produit. Enfin, on a déjà vu que si $A \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z})$, alors A^{-1} est à coefficients entiers, et $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = 1$ donc $A^{-1} \in \mathrm{SL}(\mathbb{Z})$: $\mathrm{SL}(\mathbb{Z})$ est stable par inverse, c'est bien un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (attention, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ n'est pas un groupe car n'est pas stable par inverse) donc en particulier c'est un groupe (pour le produit).
3. Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$. Supposons que les éléments de la i-ème ligne ne soient pas premiers entre eux dans leur ensemble. Il existe alors $d \geq 2$ qui divise tous les éléments de L_i. Si on note B la matrice égale à A sauf la i-ème ligne égale à L_i/d, alors B est encore à coefficients entiers et, par n-linéarité du déterminant, $\det(A) = d \times \det(B)$ ce qui est absurde puisque $\det(A) = 1$, $d \geq 2$ et $\det(B) \in \mathbb{Z}$. Les éléments d'une ligne sont premiers entre ensemble, c'est-à-dire que leur PGCD vaut 1, de même pour les colonnes.
4. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Rappelons que les $I_n \pm E_{i,j}$ $(i \neq j)$ permettent, selon qu'on multiplie par elles à gauche ou à droite, de sommer ou de soustraire, à une ligne ou une colonne, une autre ligne ou une autre colonne. Par conséquent, sommer (plusieurs fois) ou soustraire des lignes ou des colonnes, à d'autres lignes ou d'autres colonnes, se traduit matriciellement par des multiplications à gauche ou à droite par des matrices de ce type. Le but du jeu est donc de prouver qu'on peut partir de A pour arriver à I_n uniquement à l'aide de matrices de ce type.

   On va en fait appliquer le théorème de division euclidienne. Rappelons que diviser, c'est soustraire (ou sommer quand on a des termes négatifs). Par exemple, si on veut effectuer la division euclidienne de 32 par 6, l'écriture $32 = 5 \times 6 + 2$ signifie qu'on soustrait 6 cinq fois à 32 pour tomber sur 2. On peut donc effectuer des divisions euclidiennes uniquement à l'aide de soustractions (ou de sommes si on a des nombres négatifs).

   Effectuons l'algorithme d'Euclide pour donner le PGCD de $A_{1,1}$ et $A_{1,2}$, qu'on note d (attention, on n'a pas forcément $d = 1$, les $A_{1,j}$ sont premiers entre eux dans leur ensemble mais pas deux à deux). On effectue la division euclidienne du plus grand par le plus petit (à l'aide de soustractions de colonnes), et on remplace le plus grand par le reste (ce qu'on peut faire, encore une fois, uniquement à l'aide de soustractions ou de sommes), et on recommence. Dès lors, on aura à la fin de l'algorithme un coefficient qui vaut d et l'autre 0. Si $A_{1,1} = d$ et $A_{1,2} = 0$ alors on passe à l'étape suivante, sinon on ajoute C_2 à C_1, donc on a $A_{1,1} = d = A_{1,2}$ et ensuite on soustrait C_1 à C_2. On a donc à présent $A_{1,1} = d$ et $A_{1,2} = 0$.

   On itère le procédé pour donner le PGCD entre d (qui se trouve en position $(1,1)$) et $A_{1,3}$ et on s'arrange (on a vu qu'on pouvait le faire) pour que leur PGCD (qui sera $A_{1,1} \wedge A_{1,2} \wedge A_{1,3}$ par associativité du PGCD) se retrouve en position $(1,1)$. On continue jusqu'à obtenir le PGCD de toute la ligne en position $(1,1)$ (et tous les autres termes nuls), PGCD qui vaut 1 d'après ce qui précède. On a donc une première ligne avec 1 en position $(1,1)$ et 0 ailleurs. Ensuite, en travaillant sur les lignes, on « nettoie » la première ligne, en soustrayant la première ligne suffisamment de fois par un pivot de Gauß.

   Récapitulons : on a, grâce à des soustractions ou des sommes, réussi à se ramener à une matrice du type

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Or, on a multiplié par des matrices $I_n \pm E_{i,j}$, triangulaires supérieures de déterminant 1 donc on n'a pas modifié le déterminant, si bien que le déterminant de la matrice ci-dessus vaut encore 1, et donc $\det(B) = 1$ en développant par rapport à la première colonne : on itère le procédé (sans toucher aux premières ligne et colonne) jusqu'à arriver à I_n.

Récapitulons : on a multiplié à gauche et à droite par des matrices du type $I_n \pm E_{i,j}$ donc on arrive à une égalité du type

$$B_q \times \cdots \times B_1 \times A \times C_1 \times \cdots C_r = I_n$$

avec les B_i et les C_j du type ci-dessus. Or, l'inverse de $I_n + E_{i,j}$ et $I_n - E_{i,j}$ et réciproquement : en multipliant par les inverses, on a (on change l'ordre en inversant un produit) :

$$A = {B_1}^{-1} \times \cdots \times {B_q}^{-1} \times {C_r}^{-1} \times \cdots \times {C_1}^{-1}$$

et ces matrices sont toujours du bon type ce qui permet de conclure.

Passons enfin à l'exemple. On commence par mettre 1 en haut à gauche avec des soustractions, puis on nettoie en dessous, et on aura terminé. Précisons que multiplier par $I_n + aE_{i,j}$ à gauche effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i + aL_j$ et que si on multiplie à droite par cette matrice, cela effectue l'opération $C_j \leftarrow C_j + aC_i$.

- On commence par effectuer l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, donc
$$A \times (I_n - E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
- On effectue ensuite l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, donc
$$A \times (I_n - E_{1,2}) \times (I_n - E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
- On effectue ensuite l'opération $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ deux fois, donc
$$A \times (I_n - E_{1,2}) \times (I_n - E_{2,1}) \times (I_n - E_{1,2}) \times (I_n - E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
- On effectue ensuite l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, donc
$$(I_n - E_{2,1}) \times A \times (I_n - E_{1,2}) \times (I_n - E_{2,1}) \times (I_n - E_{1,2}) \times (I_n - E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Et finalement, en n'oubliant pas que l'inverse de $I_n - E_{i,j}$ est $I_n + E_{i,j}$ et réciproquement (et en changeant l'ordre à gauche et à droite) :
$$A = \underbrace{(I_n + E_{2,1})}_{\text{gauche : les } {B_i}^{-1}} \times \underbrace{(I_n + E_{1,2}) \times (I_n + E_{1,2}) \times (I_n + E_{2,1}) \times (I_n + E_{1,2})}_{\text{droite : les } {C_j}^{-1} \text{ (et on a changé l'ordre)}}$$
et un rapide calcul de vérification (non nécessaire, juste pour avoir l'esprit tranquille) nous assure que c'est juste.

33.5 Déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs

Exercice 36 : ✪ Dans chacun des cas suivants, calculer $\det(u)$ où u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :

1. $u(P) = P + P'$.
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$.
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Correction :

1. La matrice canoniquement associée à u est :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} D(1) & D(X) & D(X^2) & \cdots & \cdots & D(X^n) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array} \end{array}$$

On a une matrice triangulaire : on en déduit que $\det(u) = 1$.

2. On pourrait faire la même chose et on trouverait une matrice triangulaire supérieure avec une diagonale nulle, donc le déterminant est nul, mais il suffit de voir que u n'est pas injectif car $u(1) = 0$ donc $\det(u) = 0$.
3. La matrice canoniquement associée à u est (précisons que $P(1) = 1$ si $P(1)$ est de la forme X^k) :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} D(1) & D(X) & D(X^2) & \cdots & \cdots & D(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & n \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}$$

si bien que $\det(u) = n!$.

Exercice 37 : ✪

1. Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{K}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est-il bijectif ?
2. **Remake :** Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{K}$ les trois vecteurs $e_1 = (1, 1, t)$, $e_2 = (1, t, 1)$ et $e_3 = (t, 1, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{K}^3$?

Correction :

1. Rappelons que $\det(u) = \det(A)$. À l'aide de la règle de Sarrus :
$$\begin{aligned} \det(u) &= -3 + 2\alpha - \alpha - 1 \\ &= \alpha - 4 \end{aligned}$$
u est bijectif si et seulement si $\det(u) \neq 0$ si et seulement si $\alpha \neq 4$.
2. Les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{K}^3$ si et seulement si leur déterminant est non nul. Or :
$$\begin{aligned} \det(e_1, e_2, e_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= t + t + t - t^3 - 1 - 1 \\ &= -t^3 + 3t - 2 \end{aligned}$$
et les seules solutions sont 1 et -2, donc les trois vecteurs forment une base de $\mathbb{K}^3$ si et seulement si $t \neq 1, \neq -2$.

Exercice 38 : ✪ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On définit l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{K}) & \to & M_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array} \right.$$

Montrer que f est linéaire et donner son déterminant en fonction de celui de A.

Correction : On a déjà vu dans l'exercice 9 du chapitre 31 que f est linéaire et que si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

alors la matrice canoniquement associée à f est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} u(E_{11}) & u(E_{12}) & u(E_{21}) & u(E_{22}) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \end{array}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}
\det(f) &= (-1)^{1+1}a\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}c\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & b \\ c & 0 & d \end{vmatrix} \\
&= a^2d^2 - abcd + b^2c^2 - acbd \\
&= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\
&= (ad-bc)^2 \\
&= \det(A)^2
\end{aligned}$$

Exercice 39 : ✪ Déterminer une CNS sur les réels x, y, z pour que les vecteurs (yz, z, y), (z, xz, x) et (y, x, xy) soient libres.

Correction : Ils forment une famille libre si et seulement si leur déterminant est non nul. Notons D leur déterminant. Alors

$$\begin{aligned}
D &= \begin{vmatrix} yz & z & y \\ z & xz & x \\ y & x & xy \end{vmatrix} \\
&= x^2y^2z^2 + xyz + xyz - xzy^2 - x^2yz - y^2xz \\
&= xyz(xyz + 2 - x - y - z)
\end{aligned}$$

Finalement, les trois vecteurs sont libres si et seulement si x, y, z sont non nuls et si $xyz + 2 - x - y - z \neq 0$.

Exercice 40 : ✪✪

1. Calculer le déterminant de l'endomorphisme transposition $f : M \mapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.
2. Généraliser : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, donner le déterminant de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Correction :

1. Prenons une base adaptée à la décomposition $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$, qu'on note $(S_1, \dots, S_{n(n+1)/2}, A_1, \dots, A_{n(n-1)/2})$. Alors $f(S_k) = S_k$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n(n+1)/2]\!]$ et $f(A_k) = -A_k$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n(n-1)/2]\!]$. Par conséquent, la matrice de f dans cette base est diagonale avec des 1 pour les éléments $S_1, \dots, S_{n(n+1)/2}$ et des -1 pour les matrices antisymétriques, donc avec $n(n+1)/2$ fois le chiffre 1 et $n(n-1)/2$ fois le chiffre -1, si bien que $\det(f) = (-1)^{n(n-1)/2}$.
2. Dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus G$, la matrice de cette symétrie est diagonale avec $\dim(F)$ fois le nombre 1 et $\dim(G)$ fois le nombre -1 si bien que $\det(s) = (-1)^{\dim(G)}$.

Exercice 41 : ✪✪ Soit Φ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $\Phi(P)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer le déterminant de Φ_n.
3. Montrer que Φ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

1. Φ est linéaire par linéarité de l'intégrale. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, qu'on note $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ (on peut avoir $a_n = 0$, on sait juste que $\deg(P) \leq n$). Soit

$$Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\Phi(P) &= Q(X+1) - Q(X) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(X+1)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}
\end{aligned}$$

Ce polynôme est donc de degré inférieur ou égal à $n+1$, et le coefficient de X^{n+1} est

$$\frac{a_n}{n+1} - \frac{a_n}{n+1} = 0$$

donc $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à n si bien que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$: Φ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Soit $k \in [\![0\,;\, n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\Phi(X^k) &= (X+1)^{k+1} - X^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} X^i - X^{k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k+1}{i} X^i
\end{aligned}$$

de degré k avec le coefficient dominant $\displaystyle\binom{k+1}{k}$. On en déduit que la matrice associée à Φ est triangulaire supérieure et que ses coefficients diagonaux sont les $\displaystyle\binom{k+1}{k} = k+1$, si bien que $\det(\Phi_n) = (n+1)!$.

3. En particulier, Φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et on conclut comme au chapitre 31 que Φ est un automorphisme : soit $P \in \ker(\Phi)$, alors il existe n tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\Phi_n(P) = 0$ mais Φ_n est injectif donc $P = 0$: Φ est injectif. Si on prend $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe n tel que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et puisque Φ_n est surjectif, il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Phi_n(Q) = P$ et en particulier $\Phi(Q) = P$: P admet un antécédent, Φ est surjectif donc bijectif.

Exercice 42 : ✪✪ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Enfin, on pose $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $v_i = u + e_i$. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq -1$.

Correction : Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (u + e_i) = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \\
&\iff \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) e_j + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0 \\
&\iff \sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right) + \alpha_j \right] e_i = 0 \qquad \text{(indices muets)}
\end{aligned}$$

Or, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre donc :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\, n]\!], \lambda_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\right) + \alpha_j = 0$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ccccccccc} (1+\lambda_1)\alpha_1 & + & \lambda_1\alpha_2 & + & \cdots & + & \lambda_1\alpha_n & = & 0 \\ \lambda_2\alpha_1 & + & (1+\lambda_2)\alpha_2 & + & \cdots & + & \lambda_2\alpha_n & = & 0 \\ & & & & \vdots & & & & \vdots \\ \lambda_n\alpha_1 & + & \lambda_n\alpha_2 & + & \cdots & + & (1+\lambda_n)\alpha_n & = & 0 \end{array}\right.$$

La matrice associée au système (d'inconnues $\alpha_1, \dots, \alpha_n$) est

$$A = \begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & 1+\lambda_n \end{pmatrix}$$

Calculons le déterminant de A :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 1+\lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda_n & \lambda_n & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1+\lambda_n \end{vmatrix} \qquad \forall i \in [\![1\,;\, n-1]\!], C_i \leftarrow C_i - C_n \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \lambda_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \lambda_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1+\lambda_1+\cdots+\lambda_n \end{vmatrix} \qquad \forall i \in [\![1\,;\, n-1]\!], L_n \leftarrow L_1 + \cdots + L_{n-1} \\ &= 1 + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \end{aligned}$$

Supposons donc que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq -1$. Alors $\det(A) \neq 0$ donc le système est de Cramer donc il y a une unique solution et la solution nulle est solution évidente donc c'est la seule : la famille est libre.

Supposons que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = -1$. Alors A n'est pas inversible donc a un noyau non nul donc il existe une solution non nulle : la famille n'est pas libre.

Exercice 43 - Un lemme d'Abel : ✪✪✪ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \det(x_1, u(x_2), \dots, x_n) + \cdots + \det(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que $\varphi = \mathrm{tr}(u) \det$.

Correction : Il est immédiat que φ est n-linéaire puisque u est linéaire et le déterminant est n-linéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables. De plus, supposons que deux des x_i soient égaux, disons x_i et x_j avec $i \neq j$. Alors tous les termes sauf

$$\det(x_1, \dots, \underbrace{u(x_i)}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) \qquad \text{et} \qquad \det(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{u(x_i)}_{j}, \dots, x_n)$$

(rappelons que $x_i = x_j$ contiennent x_i deux fois, donc sont nuls puisque le déterminant est n-linéaire). Il en découle qu'il ne reste que ces deux termes, c'est-à-dire :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det(x_1, \dots, \underbrace{u(x_i)}_{i}, \dots, \underbrace{x_j}_{j}, \dots, x_n) + \det(x_1, \dots, \underbrace{x_i}_{i}, \dots, \underbrace{u(x_i)}_{j}, \dots, x_n)$$

Or, on passe de l'un à l'autre en échangeant deux termes, et on sait qu'on multiplie alors le déterminant par -1. En d'autres termes, ces deux termes sont opposés si bien que $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$: φ est alternée.

On en déduit qu'elle est donc proportionnelle au déterminant (cf. cours) : soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si A est la matrice de u dans une base quelconque alors, pour tout j,

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} e_i$$

En particulier,

$$\begin{aligned}
\det(e_1, \dots, e_i, \dots, \underbrace{u(e_j)}_{j}, \dots, x_n) &= \det(e_1, \dots, e_i, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} A_{i,j} e_i}_{j}, \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} \det(e_1, \dots, e_i, \dots, \underbrace{e_i}_{j}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

par n-linéarité du produit scalaire. Or, son caractère alterné implique que tous les termes de cette somme sont nuls si $i \neq j$ (car on retrouve alors deux fois la quantité e_i). Par conséquent :

$$\det(e_1, \dots, e_i, \dots, \underbrace{u(e_j)}_{j}, \dots, x_n) = \det(e_1, \dots, e_i, \dots, \underbrace{e_j}_{j}, \dots, x_n)$$

j étant quelconque, en faisant la somme, il vient :

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = (A_{1,1} + \cdots + A_{n,n}) \det(e_1, \dots, e_n)$$

Or, le déterminant d'une base est non nul : il en découle que la constante de proportionnalité est

$$A_{1,1} + \cdots + A_{n,n} = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(u)$$

33.6 Applications du déterminant

Exercice 44 : ✪✪ Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan usuel $\mathcal{P}$, dont les coordonnées dans un repère quelconque de $\mathcal{P}$ sont (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) respectivement. Montrer l'équivalence :

$$\text{les points } M_1,\ M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Correction : Notons D le déterminant de droite.

$$D = x_1 y_2 + x_2 y_3 + y_1 x_3 - x_3 y_2 - y_3 x_1 - y_1 x_2$$

De plus, on sait que les points sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_3}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont colinéaires, si et seulement si $\det(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}) = 0$. Or,

$$\begin{aligned}
\det(\overrightarrow{M_1M_3}, \overrightarrow{M_1M_2}) &= \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_2 - x_1 \\ y_3 - y_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \\
&= (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \\
&= x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 + x_1 y_1 - x_2 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_3 - x_1 y_1 \\
&= x_3 y_2 - x_3 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_3 \\
&= -D
\end{aligned}$$

Les trois points sont alignés si et seulement si $-D \neq 0$ si et seulement si $D \neq 0$.

Exercice 45 - Autour du polynôme caractéristique : ✪✪✪ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A, qu'on note χ_A, le déterminant de $XI_n - A$, c'est-à-dire que si

$$A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

alors

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{pmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & X - a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors χ_A est unitaire de degré n. Montrer également que le coefficient devant X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un nombre fini de réels x tels que $A + xI_n$ ne soit pas inversible. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]0\,;\varepsilon\right[$, $A + xI_n$ soit inversible.
3. **Remake :** Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [-\varepsilon\,;\varepsilon]$, $A + xB$ soit inversible.

Correction :

1. L'idée est assez simple (pour la première partie de la preuve) : pour calculer un déterminant, on prend un terme par ligne et par colonne (et on multiplie par la signature et on somme). Si on ne prend pas tous les termes diagonaux, alors on a un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, donc la seule façon d'avoir du degré n est de prendre tous les coefficients diagonaux, ce qui donne un polynôme unitaire de degré n (multiplié par la signature de l'identité qui vaut 1), auquel on ajoute donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. Écrivons cela proprement : par définition, si on pose $B = XI_n - A$, alors

$$\chi_A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n}$$

Si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors il existe i tel que $\sigma(i) \neq i$ et donc $B_{\sigma(i),i}$ est constant. Or, les autres sont de degré au plus 1 donc $\varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n}$ est de degré inférieur ou égal à $n-1$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \varepsilon(\mathrm{Id}) B_{1,1} \cdots B_{n,n} + \textstyle\sum_{\sigma \neq \mathrm{Id}} \varepsilon(\sigma) B_{\sigma(1),1} \cdots B_{\sigma(n),n} \\ &= 1 \times (X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n}) + Q \end{aligned}$$

où Q est de degré inférieur ou égal à $n-1$. On en déduit que χ_A est unitaire de degré n.

Pour le coefficient devant X^{n-1}, c'est un peu plus difficile : en fait, si $\sigma \neq S_n$, alors il existe un autre j tel que $\sigma(j) \neq j$. En effet, si i est le seul tel que $\sigma(i) \neq i$ alors, en notant $j = \sigma(i)$, on a $\sigma(j) = j = \sigma(i)$ ce qui contredit l'injectivité de σ. En d'autres termes, si σ admet au moins $n-1$ points fixes, alors σ est l'identité par injectivité de σ, mais on peut aussi s'en sortir par surjectivité : si σ admet au moins $n-1$ points fixes, si j est le dernier élément restant, on a $\sigma(i) = i \neq j$ pour tout $i \neq j$ donc, σ étant surjective, on a $\sigma(j) = j$. Encore en d'autres termes, si $\sigma \neq \mathrm{Id}$, alors σ admet au moins deux éléments dans son support en utilisant sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints (le support de σ est l'union des supports disjoints qui contient donc au moins deux éléments). On en déduit que le polynôme Q ci-dessus est en fait de degré inférieur ou égal à $n-2$, si bien que le coefficient devant X^{n-1} de χ_A est le même que celui de $(X - a_{1,1}) \cdots (X - a_{n,n})$ et on sait (cf. chapitre 19) que celui-ci vaut $-a_{1,1} - \cdots - a_{n,n} = -\mathrm{tr}(A)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} A + xI_n \text{ est inversible} &\iff \det(A + xI_n) \neq 0 \\ &\iff \det(-(-xI_n - A)) \neq 0 \\ &\iff (-1)^n \det(-xI_n - A) \neq 0 \\ &\iff \det(-xI_n - A) \neq 0 \\ &\iff \chi_A(-x) \neq 0 \\ &\iff -x \text{ n'est pas racine de } \chi_A \end{aligned}$$

Or, χ_A étant de degré n, il admet au plus n racines, donc un nombre fini de réels pour lesquels $A + xI_n$ n'est pas inversible. De plus, l'ensemble des x strictement positifs qui conviennent étant fini, il admet un minimum qu'on appelle ε (s'il est non vide, sinon $\varepsilon = 1$ convient) et donc ε convient.

3. Si $x = 0$, alors $A + xB = A$ est inversible. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. A étant inversible, $\det(A) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}
A + xB \text{ est inversible} &\iff \det(A + xB) \neq 0 \\
&\iff \det(A(I_n + xA^{-1}B)) \neq 0 \\
&\iff \det\left(xA\left(\frac{1}{x}.I_n + A^{-1}B\right)\right) \neq 0 \\
&\iff x^n \times \det(A) \times \det\left(\frac{1}{x}.I_n + A^{-1}B\right) \neq 0 \\
&\iff \det\left(\frac{1}{x}.I_n + A^{-1}B\right) \neq 0 \\
&\iff 1/x \text{ n'est pas racine de } \chi_{-A^{-1}B}
\end{aligned}$$

et on conclut de la même façon.

Exercice 46 - Sous-espaces de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ sans matrice inversible : ✪✪✪ Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on note

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

On note F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ lorsque a parcourt $\mathbb{R}^4$. Enfin, on pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;4]\!]$, $M(e_i) + J$ est inversible et que la famille $(M(e_i) + J)_{i \in [\![1\,;4]\!]}$ est libre.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, $M(a) + xJ$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
4. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible et qui contient J.
   (a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que $\dim(G) \leq 12$.
   (b) Cette borne est-elle atteinte ?

Correction :

1. On a

$$F = \left\{ a_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}$$

c'est-à-dire que $F = \text{Vect}\,(M_1, M_2, M_3, M_4)$ où

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que F est un espace vectoriel. Par définition, (M_1, M_2, M_3, M_4) en forme une famille génératrice, et si a_1, a_2, a_3, a_4 sont tels que

$$a_1\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}+a_3\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}+a_4\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=0$$

alors

$$\begin{pmatrix}0&0&0&a_1\\0&0&0&a_2\\0&0&0&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

et donc $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ donc la famille est libre, c'est une base de F, si bien que $\dim(F)=4$.

2.

$$M(e_1)+J=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

et on montre aisément que son rang est 4 donc elle est inversible (on peut aussi calculer son déterminant en développant, par exemple, par rapport à sa dernière colonne puis appliquer la règle de Sarrus). De même pour les trois autres. De plus, si a_1,a_2,a_3,a_4 sont tels que $a_1(M(e_1)+J)+\cdots+a_4(M-(e_4)+J)=0$ alors

$$\begin{pmatrix}S&0&0&a_1\\0&S&0&a_2\\0&0&S&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

où on a noté $S=a_1+a_2+a_3+a_4$. On en déduit que les a_i sont tous nuls.

3. Supposons que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, $M(a)+xJ$ soit non inversible. Par conséquent, $\det(M(a)+xJ)=0$ pour tout $x\neq 0$. Or (si on développe par rapport à la première colonne) :

$$\begin{aligned}\det(M(a)+xJ) &= \begin{vmatrix}x&0&0&a_1\\0&x&0&a_2\\0&0&x&a_3\\a_1&a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}\\ &= x\begin{vmatrix}x&0&a_2\\0&x&a_3\\a_2&a_3&a_4\end{vmatrix}-a_1\begin{vmatrix}0&0&a_1\\x&0&a_2\\0&x&a_3\end{vmatrix}\\ &= x(x^2a_4-a_2{}^2x-a_3{}^2x)-a_1(a_1x^2)\\ &= x^3a_4-x^2(a_2{}^2+a_3{}^2+a_1{}^2)\end{aligned}$$

On a une fonction polynomiale qui admet une infinité de racines donc est la fonction nulle donc les coefficients sont nuls $a_4=0$ et $a_2{}^2+a_3{}^2+a_1{}^2=0$ donc $a_1{}^2=a_2{}^2=a_3{}^2=0$ (une somme de réels positifs est nulle si et seulement tous les termes sont nuls) donc $a_1=a_2=a_3=0$, c'est-à-dire que $a=0$.

4. (a) Soit $M\in G\cap F$. Alors $M\in F$ donc il existe a tel que $M=M(a)$. Or, $J\in G$ et $M\in F$ donc $M+xJ\in G$ car G est un espace vectoriel, et puisque G ne contient aucune matrice inversible, $M+xJ$ n'est pas inversible et, ce pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ donc, d'après la question précédente, $a=0$ donc $M=M(a)=0$ si bien que $G\cap F=\{0\}$. Dès lors, G et F sont en somme directe donc $\dim(G\oplus F)=\dim(G)+\dim(F)$ mais $F\oplus G\subset\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ qui est de dimension 16, donc $\dim(G)+\dim(F)\leq 16$ et on conclut en disant que $\dim(F)=4$.

   (b) Oui car l'espace vectoriel des matrices ayant leur dernière colonne nulle est de dimension 12 (car admet $(E_{i,j})_{1\leq i\leq 4,1\leq j\leq 3}$) et contient J.

Exercice 47 - Corps à p^2 éléments : ✪✪✪ On se donne dans cet exercice $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

1. Soit $a\in\mathbb{K}$. Prouver que l'ensemble

$$L=\left\{\begin{pmatrix}x&ay\\y&x\end{pmatrix}\mid(x,y)\in\mathbb{K}^2\right\}$$

est un corps si est seulement si a n'est pas un carré dans $\mathbb{K}$.

2. On rappelle que, si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments.
   (a) Prouver l'existence d'un corps à 25 éléments.
   (b) Plus généralement, si p est un nombre premier impair, prouver l'existence d'un corps à p^2 éléments.

Remarque : On a prouvé dans l'exercice 56 du chapitre 30 qu'un corps fini a comme cardinal une puissance d'un nombre premier. Cet exercice permet de construire effectivement un corps de cardinal p^2 lorsque p est un nombre premier impair.

Correction :

1. Tout d'abord, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ étant un anneau, pour prouver que L est un anneau, il suffit de prouver que c'est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - La matrice nulle appartient à L (en prenant $x = y = 0$, où on note $0 = 0_{\mathbb{K}}$ le neutre de l'addition sur $\mathbb{K}$, et idem nous noterons $1 = 1_{\mathbb{K}}$ le neutre du produit sur $\mathbb{K}$).
   - Soient M_1 et M_2 deux éléments de L. Il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{K}^4$ tel que
   $$M_1 = \begin{pmatrix} x_1 & ay_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_2 = \begin{pmatrix} x_2 & ay_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$
   Alors ($\mathbb{K}$ est un corps donc on peut factoriser car la deuxième loi est distributive par rapport à la première, mais il est inutile de le préciser) :
   $$M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & a(y_1 + y_2) \\ (y_1 + y_2) & x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in L$$
   donc L est stable par somme.
   - De plus,
   $$-M_1 = \begin{pmatrix} -x_1 & a(-y_1) \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix} \in L$$
   donc L est stable par opposé : c'est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   - $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \times 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in L$: L contient le neutre du produit.
   - Enfin :
   $$M_1 \times M_2 = \begin{pmatrix} x_1x_2 + ay_1y_2 & a(x_1y_2 + y_1x_2) \\ x_1y_2 + y_1x_2 & ay_1y_1 + x_1x_2 \end{pmatrix} \in L$$
   et donc L est stable par produit : c'est un sous-anneau de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc un anneau.
   - Tout d'abord, L est un corps si et seulement si tout élément non nul de L admet un inverse, et si cet inverse appartient à L. Faisons une disjonction de cas.

   Supposons tout d'abord que a soit un carré dans $\mathbb{K}$. Alors il existe b tel que $a = b^2$ et donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{K}^2$,
   $$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x & ay \\ y & x \end{pmatrix} &= x^2 - ay^2 \\ &= x^2 - b^2y^2 \end{aligned}$$
   En prenant $x = b$ et $y = 1$, on a une matrice non nulle qui a un déterminant nul donc non inversible : L n'est pas un corps.

   Supposons à présent que a ne soit pas un carré parfait. Supposons $\det(M_1) = 0$. Si $y \neq 0$, alors $a = (x/y)^2$ absurde car a n'est pas un carré parfait. Alors $y = 0$ et puisque $x^2 - ay^2 = 0$, alors $x = 0$. En d'autres termes, la matrice nulle est le seul élément de L à admettre un déterminant nul, donc tous les autres éléments de L sont inversibles : encore faut-il prouver que l'inverse d'un élément M_1 (non nul) de L est dans L. Or, cet élément est $\dfrac{1}{\det(M_1)}.\text{Com}(M_1)^\top$ c'est-à-dire
   $$\frac{1}{x^2 - ay^2} \begin{pmatrix} x & -ay \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{x^2 - ay^2} & a\left(\dfrac{-y}{x^2 - ay^2}\right) \\ \dfrac{-y}{x^2 - ay^2} & \dfrac{x}{x^2 - ay^2} \end{pmatrix} \in L$$
   et donc L est bien un corps.

2. (a) Dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, c'est-à-dire modulo 5, $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 4$ et $4^2 = 1$ si bien que 2 n'est pas un carré. En posant $a = 2$, l'ensemble

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \mid (x, y) \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \right\}$$

est un corps : il suffit de prouver qu'il a 25 éléments. L'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & L \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \end{cases}$$

est, par définition de L, surjective. Montrons qu'elle est injective. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ tels que

$$\begin{pmatrix} x_1 & 2y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 & 2y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}$$

Alors $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$ (en regardant les coefficients diagonaux et les coefficients en position $(2, 1)$) donc φ est injective donc bijective : on en déduit que L a le même cardinal que $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$, c'est-à-dire 25.

(b) Rappelons que, si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments. Il suffit de prouver qu'il y a un élément dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui n'est pas un carré, on pourra conclure de la même façon (le rappel serait utile si on voulait donner le nombre de carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, mais en fait nous ne nous en servirons pas car nous voulons juste prouver qu'il existe un élément qui n'est pas un carré). Puisque $x \mapsto x^2$ va de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans lui-même, c'est une application qui va d'un ensemble fini dans lui-même, donc elle est surjective si et seulement si elle est injective. Or, $1 \neq -1$ (modulo p) car p est impair donc $1 \not\equiv p - 1[p]$ car leur différence vaut $p - 2$ qui n'est pas un multiple de p (mais ce serait le cas si on avait pris $p = 2$: en effet, dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, tout élément est un carré) et 1 et -1 ont même carré donc la fonction carré n'est pas injective donc pas surjective sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: il existe un élément a qui n'est pas un carré et on conclut comme dans la question précédente.

Exercice 48 : ✪✪✪✪ On considère, dans le plan usuel, trois droites D_i d'équations $a_i x + b_i y + c_i = 0$, où $i \in [\![1 ; 3]\!]$. Montrer que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

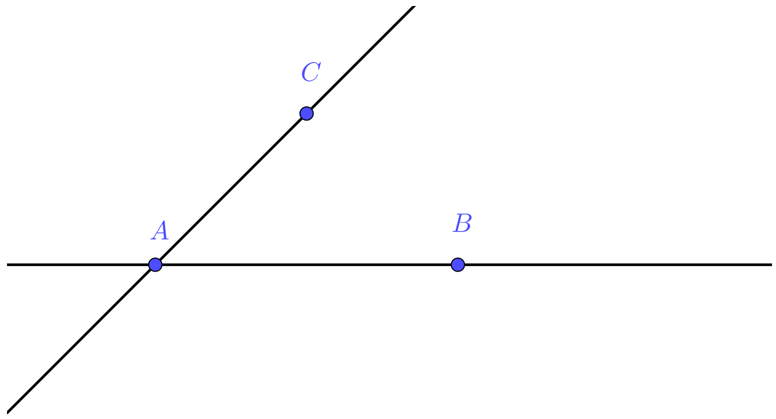
Correction : Précisons qu'un vecteur directeur d'une droite admettant une équation du type $ay + bx + c = 0$ est $(a, -b)$ (si elle est verticale, alors $a = 0$ donc $(0, 1)$ est vecteur directeur donc $(0, -b)$ également, et si elle n'est pas verticale, alors $a \neq 0$ donc on a $y = -(b/a)x - c/a$ donc $(1, -b/a)$ est vecteur directeur donc également $(a, -b)$). Si les trois droites sont parallèles, alors les trois vecteurs $(a_1, -b_1), (a_2, -b_2), (a_3, -b_3)$ sont proportionnels. Or, par n-linéarité du déterminant,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

et les vecteurs directeurs sont colinéaires donc, à l'aide d'opérations élémentaires sur les colonnes, on se ramène à un déterminant du type

$$- \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

En d'autres termes, si les trois droites sont parallèles, le déterminant est nul. Supposons donc que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire qu'il y a au moins deux droites non parallèles donc sécantes. Nommons A le point d'intersection des deux droites, et soient B un point de la première droite et C un point de la deuxième droite, ce qui donne un repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$:



Le déterminant ne dépend pas du choix de la base donc on peut donner les équations de droite dans ce nouveau repère : la première droite a pour équation $y = 0$ et la deuxième $x = 0$ (ou le contraire, mais échanger les droites revient à échanger les colonnes donc multiplier le déterminant par -1 ce qui ne change pas la nullité ou non nullité du déterminant) si bien que le déterminant devient

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a_3 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = c_3$$

donc le déterminant est non nul si et seulement si $c_3 \neq 0$ si et seulement si la troisième droite ne passe pas par le point de coordonnées $(0,0)$ si et seulement si la troisième droite ne passe pas par A, si et seulement si les trois droites ne sont pas concourantes.

Exercice 49 : ✪✪✪✪ Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Correction : Par hypothèse, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $B = PAP^{-1}$ donc telle que $BP = PA$. Notons $P = Q + iR$ avec Q et R réelles (la matrice des parties réelles des coefficients de P et la matrice des parties imaginaires des coefficients de P). Intéressons-nous à la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \det(Q + zR) \end{cases}$$

Le déterminant d'une matrice étant polynomial en ses coefficients, φ est une fonction polynomiale. Or, elle est non nulle en i puisque $\varphi(i) = \det(Q + iR) = \det(P) \neq 0$ car P est inversible. Ainsi, φ n'admet qu'un nombre fini de racines donc il existe un réel x tel que $\varphi(x) \neq 0$ donc tel que $Q + xR$ soit inversible. Or, en développant l'égalité $B(Q + iR) = (Q + iR)A$ et par unicité des parties réelle et imaginaire, $BQ = QA$ et $BR = RA$. Par conséquent,

$$B(Q + xR) = (Q + xR)A$$

et puisque $Q + xR$ est inversible, $B = (Q + xR)A(Q + xR)^{-1}$ donc A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50 - Le petit poucet : ✪✪✪✪

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On note $\overline{A}$ la matrice de taille n dont les coefficients sont les congruences de ceux de A modulo 2. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2022 & 2023 \\ 2024 & 2025 \end{pmatrix}$ alors $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que $\det\left(\overline{A}\right) \equiv \det(A)[2]$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont nuls et que tous les autres valent ± 1. Montrer que A est inversible.
3. On dispose de $2n+1$ cailloux, avec $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de n cailloux de même masse totale. Montrer que tous les cailloux ont même masse.

Correction :

1. Cette question est analogue à la première question de l'exercice 14 :

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \overline{A}_{\sigma(1),1} \times \overline{A}_{\sigma(2),2} \times \cdots \times \overline{A}_{\sigma(n),n}$$

Or, chaque $\overline{A}_{i,j}$ est congru à $A_{i,j}$ modulo 2 et la congruence passe à la somme et au produit donc :

$$\det(\overline{A}) \equiv \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1),1} \times A_{\sigma(2),2} \times \cdots \times A_{\sigma(n),n}[2]$$

ce qui est le résultat voulu.

2. Le problème est qu'on ne sait pas quels coefficients valent 1 et lesquels valent -1. Il suffit de travailler modulo 2 et d'utiliser la question précédente : la matrice $\overline{A}$ est la matrice

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$$

On fait comme dans l'exercice 11 du chapitre 21 : mettons $\overline{A}$ au carré ce qui donne :

$$\overline{A}^2 = \begin{pmatrix} 2n-1 & 2n-2 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-1 & 2n-2 & \dots & 2n-2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 2n-2 & 2n-2 & \dots & 2n-1 & 2n-2 \\ 2n-2 & 2n-2 & \dots & 2n-2 & 2n-1 \end{pmatrix}$$

Notons cette matrice B. Alors $\overline{B} = I_{2n}$ (on réduit modulo 2) si bien que $\det(\overline{B}) = 1$ et donc $\det(\overline{A}^2) = \det(B) \equiv 1[2]$. Dès lors,

$$\det(A)^2 \equiv \det(\overline{A})^2 \equiv 1[2]$$

si bien que $\det(A)$ est impair et en particulier non nul : A est inversible.

3. Travaillons comme dans le dernier exercice du chapitre 30, ou le dernier exercice du chapitre 31. Pour chaque caillou i, attribuons à l'un des deux tas de cailloux restants (deux tas de même masse totale) le numéro 1 et à l'autre le numéro -1. Je recommence : on sait que, pour tout i, quand on retire le caillou i, on peut répartir les cailloux restants en deux tas de même masse totale, on dit que l'un des deux est le tas $+1$ et que l'autre est le tas -1. Mettons ensuite tout cela sous forme matricielle : on se donne A une matrice de taille $(2n+1)$ définie de la façon suivante : pour tout i, le coefficient $A_{i,i}$ est nul, et pour tout j, on met 1 en $A_{i,j}$ si le j-ième caillou est dans le tas $+1$ et -1 sinon. On a par conséquent une matrice de taille $2n+1$ (et non pas encore $2n$ comme dans la question précédente) dont tous les coefficients diagonaux valent -1. On cherche son rang : on sait que la matrice extraite de taille $2n$ formée en barrant la dernière ligne et la dernière colonne est inversible (question précédente) donc $\mathrm{rg}(A) \geq 2n$. Or, les tas contiennent n cailloux chacun : si on note $X = (1, 1, \dots, 1)$, alors $AX = 0$ car, pour tout i, on ajoute n fois 1 et on ajoute n fois -1. Ainsi, $\ker(A) \neq \{0\}$ si bien que $\mathrm{rg}(A) = 2n$ et donc $\ker(A)$ est de dimension 1, si bien que $\ker(A) = \mathrm{Vect}(X)$: un élément est dans le noyau si et seulement si ses coordonnées sont toutes égales. Or, si on note M le vecteur colonne formé des masses des cailloux, alors $AM = 0$: en effet, pour chaque i, on multiplie les masse du tas $+1$ par 1 et celles du tas -1 par -1, donc on fait la différence des masses des deux tas, ce qui fait 0 car les deux tas ont même masse totale. Il en découle que $M \in \mathrm{Vect}(X)$ donc toutes les coordonnées de M sont égale : tous les cailloux ont la même masse.

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

« - Et votre écharpe blanche ?
- [...]
j'eus le bon esprit
De dénouer et de laisser couler à terre
L'écharpe qui disait mon grade militaire ;
En sorte que je pus, sans attirer les yeux,
Quitter les Espagnols, et revenant sur eux,
Suivi de tous les miens réconfortés, les battre !
— Eh bien ! que dites-vous de ce trait ?
- Qu'Henri quatre
N'eût jamais consenti, le nombre l'accablant,
À se diminuer de son panache blanc.
- L'adresse a réussi, cependant !
- C'est possible.
Mais on n'abdique pas l'honneur d'être une cible. »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac

Comme en cours, si rien n'est indiqué, E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien (donc pas forcément de dimension finie) dont le produit scalaire et la norme euclidienne associée sont notés comme en cours, n est un entier supérieur ou égal à 1 et a et b deux réels avec $a < b$.

Vrai ou Faux ?

1. Un produit scalaire sur E est une forme linéaire sur E^2 symétrique, définie positive.
2. La norme euclidienne associée à un produit scalaire est linéaire.
3. $\langle f,g\rangle \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}([-1;1],\mathbb{R})$.
4. $\langle f,g\rangle \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^{pm}([0;1],\mathbb{R})$.
5. $\langle P,Q\rangle \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
6. $\langle P,Q\rangle \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
7. La base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire précédent.
8. Si x et y sont de même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.
9. Une famille orthogonale est libre.
10. Pour tout produit scalaire, $\mathbb{R}[X]$ admet une base orthonormale échelonnée en degré.
11. L'orthogonal d'un espace euclidien est l'ensemble vide.
12. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthogonale de F, alors le projeté orthogonal de x sur F est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\langle x,e_k\rangle e_k$.

34.1 Produits scalaires

Exercice 1 : ✪ Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur l'espace indiqué :

1. $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 18x_2y_2 + \dfrac{3}{2}x_3y_3 + \dfrac{5}{2}x_4y_4$ sur $\mathbb{R}^4$.
2. $\langle x,y\rangle = 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$).
4. $\langle P,Q\rangle = -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\,\mathrm{d}x$ sur $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Correction :

1. • Soit $x \in \mathbb{R}^4$.

$$\langle x,x\rangle = {x_1}^2 + 18{x_2}^2 + \frac{3}{2}{x_3}^2 + \frac{5}{2}{x_4}^2 \geq 0$$

Supposons que $\langle x,x\rangle = 0$. Alors (une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls) ${x_1}^2 = {x_2}^2 = {x_3}^2 = {x_4}^2 = 0$ donc $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ donc $x = 0$: $\langle,\rangle$ est défini positif.

• Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^4)^2$.

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= x_1y_1 + 18x_2y_2 + \frac{3}{2}x_3y_3 + \frac{5}{2}x_4y_4 \\ &= y_1x_1 + 18y_2x_2 + \frac{3}{2}y_3x_3 + \frac{5}{2}y_4x_4 \\ &= \langle y,x\rangle \end{aligned}$$

donc $\langle,\rangle$ est symétrique.

• Soient x, y, z trois éléments de $\mathbb{R}^4$ et λ, μ deux réels.

$$\begin{aligned} \langle \lambda x + \mu y,z\rangle &= (\lambda x_1 + \mu y_1)z_1 + 18(\lambda x_2 + \mu y_2)z_2 + \frac{3}{2}(\lambda x_3 + \mu y_3)z_3 + \frac{5}{2}(\lambda x_4 + \mu y_4)z_4 \\ &= \lambda\left(x_1z_1 + 18x_2z_2 + \frac{3}{2}x_3z_3 + \frac{5}{2}x_4z_4\right) + \mu\left(y_1z_1 + 18y_2z_2 + \frac{3}{2}y_3z_3 + \frac{5}{2}y_4z_4\right) \\ &= \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle \end{aligned}$$

donc $\langle,\rangle$ est linéaire à gauche et donc, par symétrie, est bilinéaire : on a bien un produit scalaire.

2. • Soit $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \langle x,x\rangle &= 2({x_1}^2 + {x_2}^2) + (x_1x_2 + x_2x_1) \\ &= 2({x_1}^2 + {x_2}^2) + 2x_1x_2 \\ &= 2({x_1}^2 + {x_2}^2) + (x_1 + x_2)^2 - {x_1}^2 - {x_2}^2 \\ &= {x_1}^2 + {x_2}^2 + (x_1 + x_2)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Supposons que $\langle x,x\rangle = 0$. Alors ${x_1}^2 = {x_2}^2 = 0$ donc $x_1 = x_2 = 0$ donc $x = 0$: $\langle,\rangle$ est défini positif.

• Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2$.

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= 2(y_1x_1 + y_2x_2) + (y_2x_1 + y_1x_2y) \\ &= \langle y,x\rangle \end{aligned}$$

donc $\langle,\rangle$ est symétrique.

- Soient x, y, z trois éléments de $\mathbb{R}^2$ et λ, μ deux réels.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu y, z \rangle &= 2((\lambda x_1 + \mu y_1) z_1 + (\lambda x_2 + \mu y_2) z_2) + ((\lambda x_1 + \mu y_1) z_2 + (\lambda x_2 + \mu y_2) z_1) \\
&= \lambda \left(2(x_1 z_1 + x_2 z_2) + (x_1 z_2 + x_2 z_1)\right) + \mu \left(2(y_1 z_1 + y_2 z_2) + (y_1 z_2 + y_2 z_1)\right) \\
&= \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle
\end{aligned}$$

donc $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche et donc, par symétrie, est bilinéaire : on a bien un produit scalaire.
-

3. - Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$$

Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors (une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls) $P(k)^2 = 0$ pour tout k donc $P(k) = 0$ pour tout k si bien que P admet au moins $n+1$ racines distinctes. Or, $\deg(P) \leq n$ donc P est le polynôme nul : $\langle , \rangle$ est défini positif.
- Soient P et Q appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$.

$$\begin{aligned}
\langle P, Q \rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(k) Q(k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} Q(k) P(k) \\
&= \langle Q, P \rangle
\end{aligned}$$

et donc $\langle , \rangle$ est symétrique.
- Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda P + \mu Q, R \rangle &= \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(k) + \mu Q(k)) R(k) \\
&= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k) R(k) + \mu \sum_{k=0}^{n} Q(k) R(k) \\
&= \lambda \langle P, R \rangle + \mu \langle Q, R \rangle
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche et, par symétrie, $\langle , \rangle$ est bilinéaire : c'est un produit scalaire.

4. L'idée de cet exemple et d'effectuer des IPP successives (on a des polynômes, qu'on identifie à des fonctions polynômes, qui sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, donc on peut faire autant d'IPP qu'on veut). Rappelons que tout élément de E vérifie $P(0) = P(1) = 0$.
- Soit $P \in E$.

$$\begin{aligned}
\langle P, P \rangle &= -\left([P(x) P'(x)]_0^1 - \int_0^1 P'(x) P'(x) \, \mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^1 P'(x)^2 \, \mathrm{d}x \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. Alors on a l'intégrale d'une fonction positive, CONTINUE, qui est nulle donc P' est nulle sur $[\,0\,;1\,]$: P' admet une infinité de racines donc est le polynôme nul, si bien que P est constant. Or, $P(0) = 0$ donc P est le polynôme nul : $\langle , \rangle$ est défini positif.
- Soit $(P, Q) \in E^2$. À l'aide de deux IPP successives, et en utilisant encore une fois le fait que les polynômes sont nuls en 0 et en 1 :

$$\begin{aligned}\langle P,Q\rangle &= -\left([P(x)Q(x)']_0^1 - \int_0^1 P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \int_0^1 P'(x)Q'(x)\,\mathrm{d}x\\ &= [P'(x)Q(x)]_0^1 - \int_0^1 P''(x)Q(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\int_0^1 Q(x)P''(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \langle Q,P\rangle\end{aligned}$$

donc $\langle,\rangle$ est symétrique.

- La bilinéarité du produit scalaire découle de la linéarité de l'intégrale : on a bien un produit scalaire.

Exercice 2 : ✪ Soient f et $g \in \mathscr{L}(E)$ telles que : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x),f(y)\rangle = \langle g(x),g(y)\rangle$$

Correction : Soit $(x,y) \in E^2$. D'après la formule de polarisation :

$$\langle f(x),f(y)\rangle = \frac{1}{2}\left(\|f(x)+f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right)$$

Or, $\|f(x)\| = \|g(x)\|$ et $\|f(y)\| = \|g(y)\|$. De plus, f et g étant linéaires,

$$\begin{aligned}\|f(x)+f(y)\| &= \|f(x+y)\|\\ &= \|g(x+y)\|\\ &= \|g(x)+g(y)\|\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}\langle f(x),f(y)\rangle &= \frac{1}{2}\left(\|g(x)+g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right)\\ &= \langle g(x),g(y)\rangle\end{aligned}$$

Exercice 3 : ✪✪

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la série $\sum \dfrac{P(n)}{n!}$ converge.
2. Montrer que $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction :

1. La série converge si P est le polynôme nul. Si P n'est pas nul, notons d son degré et $a_d \neq 0$ son coefficient dominant, si bien que $P(n) \sim a_d n^d$ et donc

$$n^2 \times \frac{P(n)}{n!} \sim \frac{a_d n^{d+2}}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées. Ainsi, $P(n)/n! = \mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ et la série $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$). Par théorème de comparaison pour les séries de signe constant, $\sum P(n)/n!$ converge.

2. D'après la question précédente, toutes les séries de type $\sum P(n)/n!$ convergent donc on peut manipuler les sommes infinies sans se poser de question.
   - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\langle P,P\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)^2}{n!} \geq 0$$

Supposons $\langle P,P\rangle = 0$. Alors $P(n) = 0$ pour tout n (somme de termes positifs) donc P admet une infinité de racines donc est le polynôme nul. $\langle,\rangle$ est donc défini positif.

- La symétrie est évidente.
- Soient $(P_1, P_2, Q) \in \mathbb{R}[X]^3$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 P_2 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(n) Q(n)}{n!} \\ &= \lambda_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_1(n)Q(n)}{n!} + \lambda_2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P_2(n)Q(n)}{n!} \\ &= \lambda_1 \langle P_1, Q\rangle + \lambda_2 \langle P_2, Q\rangle \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\langle , \rangle$ est linéaire à gauche. Par symétrie, il est linéaire à droite donc bilinéaire : c'est un produit scalaire.

Exercice 4 : ✪✪ Soient x et y deux vecteurs non nuls. Montrer que :

$$\left\| \frac{1}{\|x\|^2} x - \frac{1}{\|y\|^2} y \right\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \times \|y\|}$$

Correction : Ces deux quantités étant positives, il suffit de prouver qu'elles ont même carré. Notons A la quantité de gauche. On a, en utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned} A^2 &= \langle \frac{1}{\|x\|^2} x - \frac{1}{\|y\|^2} y, \frac{1}{\|x\|^2} x - \frac{1}{\|y\|^2} y \rangle \\ &= \left\| \frac{1}{\|x\|^2} x \right\|^2 + \left\| \frac{1}{\|y\|^2} y \right\|^2 - 2 \langle \frac{1}{\|x\|^2} x, \frac{1}{\|y\|^2} y \rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^4} . \|x\|^2 + \frac{1}{\|y\|^4} . \|y\|^2 - 2 \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \langle x, y \rangle \\ &= \frac{1}{\|x\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} - 2 \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \langle x, y \rangle \\ &= \frac{\|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2} \\ &= \frac{\langle x - y, x - y\rangle}{\|x\|^2 \|y\|^2} \\ &= \frac{\|x - y\|^2}{\|x\|^2 \|y\|^2} \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure car une norme est positive.

Exercice 5 : ✪✪ Déterminer l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients réels, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Correction : Montrons que l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ est F, l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Soit $D \in D_n(\mathbb{R})$ et soit $M \in F$. Soit $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$.

$$\begin{aligned} \left(D \times M^\top\right)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} \left(M^\top\right)_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{n} D_{i,k} M_{i,k} \end{aligned}$$

Or, D est diagonale si bien que $D_{i,k} = 0$ si $k \neq i$. Dès lors, $\left(D \times M^\top\right)_{i,i} = D_{i,i} M_{i,i} = 0$ car les coefficients diagonaux de M sont nuls. En d'autres termes, les coefficients diagonaux de $D \times M^\top$ sont tous nuls donc cette matrice est de trace nulle, si bien que $\langle D, M\rangle = 0$: $F \subset D_n(\mathbb{R})^\perp$. Par égalité des dimensions (ces deux espaces sont tous les deux de dimension $n^2 - n$), on a le résultat voulu.

Exercice 6 - Un lemme de confinement : ✪✪ Soient $u_1, \dots, u_n \in E$ unitaires, $R_1, \dots, R_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher, à savoir $P(R_k = 1) = P(R_k = -1) = 1/2$ pour tout k.

1. Calculer l'espérance de $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^n R_i u_i\right\|^2$.
2. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1;1\}^n$ tel que :

$$\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i u_i\right\| \leq \sqrt{n}$$

Correction :

1. Notons $N = \left\|\displaystyle\sum_{i=1}^n R_i u_i\right\|$. Pour tout i, ${R_i}^2$ est une loi certaine égale à 1 donc son espérance vaut 1, et un calcul simple donne $E(R_i) = 0$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
E(N^2) &= E\left(\sum_{i=1}^n \|R_i u_i\|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \langle R_i u_i, R_j u_j\rangle\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n {R_i}^2\|u_i\|^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} R_i R_j \langle u_i, u_j\rangle\right) \\
&= E\left(\sum_{i=1}^n {R_i}^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} R_i R_j \langle u_i, u_j\rangle\right) && \text{(Les } u_i \text{ sont unitaires)} \\
&= \sum_{i=1}^n E\left({R_i}^2\right) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \langle u_i, u_j\rangle E(R_i R_j) && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\
&= \sum_{i=1}^n 1 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \langle u_i, u_j\rangle E(R_i) E(R_j) && \text{(v.a. indépendantes)} \\
&= \sum_{i=1}^n 1 && \text{(Les } R_i \text{ sont d'espérance nulle)} \\
&= n
\end{aligned}$$

2. Par conséquent, il existe $x \in N(\Omega)$ tel que $x \leq \sqrt{n}$: en effet, sinon, N est toujours supérieure stricte à $\sqrt{n}$ donc, par croissance de l'espérance, $E(N) > \sqrt{n}$ ce qui contredit la question précédente. On en déduit en particulier qu'il existe une éventualité ω telle que $N(\omega) \leq \sqrt{n}$ donc, en notant, pour tout i, $\varepsilon_i = R_i(\omega) = \pm 1$, on a le résultat voulu.

Exercice 7 : ✪✪✪ Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a_k) Q^{(k)}(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Correction : Attention, il n'est dit nulle part que les a_i sont deux à deux distincts ! La symétrie et la bilinéarité étant évidentes, il reste à montrer la définie positivité. Soit donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^n \left(P^{(k)}(a_k)\right)^2 \geq 0$$

Supposons à présent que $\langle P, P\rangle = 0$. Cela implique (somme de termes positifs) que $\left(P^{(k)}(a_k)\right)^2 = 0$ donc que $P^{(k)}(a_k) = 0$ pour tout k. L'astuce est d'écrire P sous la forme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n b_k X^k$ et de commencer par la dérivée n-ième de P. Plus précisément, on a $P^{(n)} = n! \times b_n$. En particulier, c'est un polynôme constant et il s'annule en a_n donc $b_n = 0$. On trouve donc que

$P = \sum_{k=0}^{n-1} b_k X^k$. On trouve de même que $P^{(n-1)} = (n-1)! \times b_{n-1}$ et ce polynôme est nul en a_{n-1} donc $b_{n-1} = 0$. De proche en proche, on trouve que tous les b_k sont nuls donc $P = 0$: on a bien un produit scalaire.

Exercice 8 : ✪✪✪ On se place sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ non nul.

1. Justifier l'existence de P et donner son degré.
2. Soit

$$\varphi : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x\,\mathrm{d}t$$

définie là où cette intégrale a un sens. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

3. Trouver φ à une constante multiplicative près.
4. En déduire les coefficients de P (à une constante multiplicative près).
5. En déduire une base orthogonale de E.

Correction :

1. On est en dimension finie : un espace et son orthogonal sont donc supplémentaires (orthogonaux). Ainsi, $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = 1$ donc il existe un polynôme non nul dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$. Si $\deg(P) \leq n-1$ alors $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp = \{0\}$ car les deux espaces sont supplémentaires, si bien que $P = 0$ ce qui est absurde. Finalement, $\deg(P) = n$ (ce qui ne veut pas dire que $P = X^n$!).
2. Notons

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

avec $a_n \neq 0$ (d'après la question précédente). Soit x tel que l'intégrale ait un sens.

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 t^{k+x}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+x+1} \end{aligned}$$

donc φ est bien une fraction rationnelle.

3. On sait que P est orthogonal à tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, et en particulier à $1, X, \dots, X^{n-1}$. En d'autres termes, pour tout $i \in [\![0\,;\, n-1]\!]$:

$$\int_0^1 P(t)t^i\,\mathrm{d}t = 0$$

c'est-à-dire que $\varphi(0) = \cdots = \varphi(n-1) = 0$. En mettant tous les éléments de la somme définissant φ au même dénominateur, on obtient une somme de $n+1$ termes avec, au numérateur, un polynôme de degré n (car produit de tous les termes $k+x+1$ sauf 1) divisé par le produit de tous les $k+x+1$ si bien qu'il existe Q de degré inférieur ou égal à n tel que, pour tout x où cela a un sens :

$$\varphi(x) = \frac{Q(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

D'après ce qui précède, $Q(0) = \cdots = Q(n-1) = 0$ donc Q est divisible par $X(X-1), \dots, X-(n-1)$ et Q est de degré inférieur ou égal à n donc il existe b_n (a_n est déjà pris), éventuellement nul si $Q = 0$, tel que, pour tout x où cela a un sens :

$$\varphi(x) = \frac{b_n \times x(x-1)\cdots(x-(n-1))}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)}$$

4. L'expression de φ obtenue à la question 2 est sa décomposition en éléments simples, et donc ses coefficients sont les coefficients de P. Pour les trouver, on donne la décomposition en éléments simples de φ selon la méthode habituelle : pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on multiplie par $X+k+1$ (ce qui fait qu'il n'y a plus le terme $x+k+1$ au dénominateur dans l'expression de φ trouvée à la question précédente) et on évalue en $-(k+1)$ ce qui donne :

$$a_k = \frac{b_n \times (-(k+1)) \times (-(k+1)-1) \times \cdots \times (-(k+1)+(n-1))}{(-(k+1)+1) \times \cdots \times (-(k+1)+k) \times (-(k+1)+k+2) \times \cdots \times (-(k+1)+n+1)}$$

Or, si $k+1 \leq n-1$, c'est-à-dire si $k \leq n-2$, alors on trouve au numérateur le terme $(-(k+1)-(k+1))$ qui vaut 0 donc $a_k = 0$. De plus, en prenant $k = n-1$, on a $k+1 = n$ si bien que :

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= \frac{b_n \times (-n) \times (-n-1) \times \cdots \times (-1)}{(-n+1) \times \cdots \times (-1) \times 1} \\ &= b_n \times \frac{(-1)^n n!}{(-1)^{n-1}(n-1)!} \\ &= -nb_n \end{aligned}$$

et pour $k = n$, on a $k+1 = n+1$ donc :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{b_n \times (-(n+1)) \times (-n) \times \cdots \times (-2)}{(-n) \times \cdots \times (-1)} \\ &= b_n \times \frac{(-1)^n (n+1)!}{(-1)^n n!} \\ &= (n+1)b_n \end{aligned}$$

si bien que $P = b_n((n+1)X^n - nX^{n-1})$.

5. Pour obtenir une base orthogonale, il suffit de prendre à chaque fois un vecteur orthogonal aux précédents, c'est-à-dire un vecteur orthogonal à $\mathbb{R}_k[X]$ pour tout k : d'après la question précédente, la famille $(1, 2X-1, 3X^2-2X, \ldots, (n+1)X^n - nX^{n-1})$ est orthogonale.

Exercice 9 - En dimension infinie : ✪✪✪

1. On se place sur $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire vu en classe. On note F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donner $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.
2. On se place sur $E = \mathscr{C}([-1\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel.
   (a) Donner l'orthogonal de $F = \{f \in E \,|\, \forall x \in [-1\,;0\,], f(x) = 0\}$.
   (b) Donner $F + F^\perp$.
3. On se place sur $E = \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ (avec $a < b$) muni du produit scalaire habituel. On note A l'ensemble des fonctions positives sur E. Montrer que $A^\perp = \{0\}$.
4. On se place sur $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel. On se donne $c \in \,]\,0\,;1\,[$ et on note

$$A = \left\{ f \in E \,|\, \int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t \, = 0 \right\}$$

On cherche à prouver que $A^\perp = \{0\}$. On se donne donc $g \in A^\perp$ et on cherche à prouver que g est la fonction nulle.

   (a) Montrer que s'il existe $x_0 \in [\,c\,;1\,]$ tel que $g(x_0) \neq 0$, alors il existe $f \in A$ telle que $\langle f, g \rangle > 0$. Que peut-on en déduire ?
   (b) Soient

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^c f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

   Montrer que ψ et φ sont linéaires et que $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$.
   (c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$. En déduire que g est constante égale à λ et conclure.

Correction :

1. Tout d'abord, une suite nulle à partir d'un certain rang, quand on la met au carré, donne bien une série convergente, donc $F \subset \ell^2(\mathbb{N})$. Montrons que $F^\perp = \{0\}$ (ici, 0 désigne évidemment la suite nulle). Soit $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ qui n'est pas la suite nulle. Alors il existe n_0 tel que $u_{n_0} \neq 0$. Soit (v_n) la suite dont tous les termes sont nuls à part v_{n_0} qui vaut u_{n_0}, si bien que $\langle u,v\rangle = {u_{n_0}}^2 > 0$: la suite (u_n) n'est pas orthogonale à v donc n'appartient pas à $F^\perp$: le résultat en découle. Dès lors, 0 étant orthogonal à tout vecteur (ici, toute suite de $\ell^2(\mathbb{N})$), on a $(F^\perp)^\perp = \ell^2(\mathbb{N})$: on voit que les résultats de la dimension finie ne sont en général pas valables en dimension infinie !

2. (a) Montrons que

$$F^\perp = \{f \in E \,|\, \forall x \in [\,0\,;1\,]\,, f(x) = 0\}$$

Notons G l'ensemble de droite. Il est immédiat que $G \subset F^\perp$: en effet, si $g \in G$ alors, pour toute fonction $f \in F$,

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\, = 0$$

car f est nulle sur $[\,-1\,;0\,]$ et g sur $[\,0\,;1\,]$. Réciproquement, montrons que si une fonction g n'est pas nulle sur $[\,0\,;1\,]$, alors g n'appartient pas à $F^\perp$. Soit donc $g \in E$ qui n'est pas la fonction nulle sur $[\,0\,;1\,]$ (malgré son nom, $g \notin G$). Soit

$$f : \begin{cases} [\,-1\,;1\,] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [\,-1\,;0\,] \\ xg(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Alors f est continue (évident sur $[\,-1\,;0\,[\, \cup \,]\,0\,;1\,]$, et continue à droite et à gauche donc continue en 0) et

$$\langle f,g\rangle = \int_{0}^{1} xg(x)^2\,\mathrm{d}x$$

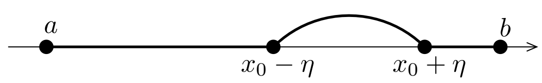
On a l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle donc l'intégrale est strictement positive, si bien que g n'est pas orthogonale à f : or, $f \in F$ donc $g \notin F^\perp$. On en déduit que $F^\perp = G$.

(b) Montrons que $F + F^\perp$ est l'ensemble des fonctions nulles en 0 (espace qu'on appelle H et qui est un hyperplan car noyau de la forme linéaire non nulle $f \mapsto f(0)$, et la somme est même directe car un espace et son orthogonal sont toujours en somme directe). On a tout d'abord $F + F^\perp \subset H$ car la somme d'une fonction nulle sur $[\,-1\,;0\,]$ et d'une fonction nulle sur $[\,0\,;1\,]$ est nulle en 0. Réciproquement, si $h \in H$, alors $h = f + g$ avec

$$f : \begin{cases} [\,-1\,;1\,] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [\,-1\,;0\,] \\ h(x) & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} [\,-1\,;1\,] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} h(x) & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \in [\,0\,;1\,] \end{cases} \end{cases}$$

$f \in F$ et $g \in H$ (elles sont bien continues puisque $h(0) = 0$) et $f + g = h$, d'où le résultat. Encore une fois, en dimension infinie, on n'a pas forcément $F + F^\perp = E$!

3. Soit donc f non nulle et montrons que $f \notin A^\perp$ en exhibant une fonction positive qui n'est pas orthogonale à f. f étant non nulle, il existe $x_0 \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Par continuité de f, il existe $\eta > 0$ tel que f ne s'annule pas (et donc soit de signe constant car f continue) sur $[\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]$. Soit g une fonction continue nulle en dehors de $]\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,[$ et strictement positive sur cet intervalle, par exemple la fonction dont le graphe est donné ci-dessous (il n'est pas nécessaire de donner une expression explicite de la fonction, et on aurait pu raisonner comme cela dans la question 2.(a) au lieu de donner une expression explicite de la fonction f) :



Alors

$$\langle f,g\rangle = \int_{x_0-\eta}^{x_0+\eta} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\, \neq 0$$

car intégrale d'une fonction continue, de signe constant, qui n'est pas la fonction nulle. On en déduit que f n'est pas orthogonale à $g \in A$ donc $f \notin A^\perp$.

4. (a) On raisonne comme dans les questions précédentes : on peut donner une fonction f nulle sur $[\,0\,;c\,]$, donc qui appartient à A, telle que $\langle f,g\rangle > 0$: en effet, g étant non nulle en x_0, elle est de signe constant (par continuité) sur un voisinage de x_0, disons sur $[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$ avec un $\eta > 0$, et la même fonction (ou son opposée si f est strictement négative sur $[\,x_0-\eta\,;x_0+\eta\,]$) que dans la question précédente (qu'on appellerait f au lieu de g cette fois) convient (on le montre de la même façon). On en déduit que g est nulle sur $[\,c\,;1\,]$.

(b) La linéarité de ψ et φ est évidente et découle de la linéarité de l'intégrale. Soit $f \in \ker(\psi)$. Alors

$$\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

si bien que $f \in A$: or, $g \in A^\perp$ donc

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

mais g est nulle sur $[\,c\,;1\,]$, donc

$$\int_0^c f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

c'est-à-dire que $\varphi(f) = 0$: $f \in \ker(\varphi)$, d'où l'inclusion voulue.

(c) ψ et φ sont deux formes linéaires non nulles : pour montrer que ψ est non nulle, il suffit de prendre la fonction constante égale à 1, et pour φ, il suffit de prendre g. En effet, g n'est pas nulle mais est nulle sur $[\,c\,;1\,]$ donc n'est pas nulle sur $[\,0\,;c\,]$. Par conséquent,

$$\int_0^c g^2(t)\,\mathrm{d}t > 0$$

car intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle. Il en découle que ψ et φ sont proportionnelles si et seulement si elles ont le même noyau (cf. chapitre 30). Or, $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$ (attention, on est en dimension infinie ici !). Ces deux espaces sont deux hyperplans donc sont égaux car l'un est inclus dans l'autre (même en dimension infinie) : en effet, si l'inclusion est stricte, alors il existe $f \in \ker(\varphi)\backslash\ker(\psi)$ donc $\ker(\psi) \oplus \mathrm{Vect}(f) = E$ (propriété d'un hyperplan) ce qui est absurde puisque $\ker(\psi) \oplus \mathrm{Vect}(f) \subset \ker(\varphi)$ qui est un hyperplan. Les deux formes linéaires ont même noyau donc sont proportionnelles.

Dès lors, pour toute fonction f (pas forcément dans A) :

$$\int_0^c f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

si bien que

$$\int_0^c f(t)(g(t)-\lambda)\,\mathrm{d}t = 0$$

En prenant $f = g-\lambda$, on montre comme d'habitude (intégrale d'une fonction positive, continue, qui est nulle donc la fonction intégrée est nulle) que $g-\lambda$ est nulle donc g est constante égale à λ, ce qui est absurde : en effet, g est non nulle par hypothèse, donc $\lambda \neq 0$, mais alors le fait que g soit nulle sur $[\,c\,;1\,]$ est absurde.

34.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Exercice 10 : ✪ Soient f et g continues positives sur $[\,0\,;1\,]$ telles que $f\times g \geq 1$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$$

Correction : Puisqu'il n'y a pas de carré dans les intégrales, appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$ (qui existent car f et g sont positives) :

$$\left(\int_0^1 \sqrt{f(t)}\times\sqrt{g(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui permet de conclure puisque $\sqrt{f}\times\sqrt{g} = \sqrt{fg} \geq \sqrt{1} = 1$ par hypothèse sur f et g.

Exercice 11 : ✪ Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, {I_{n+p}}^2 \leq I_{2n} \times I_{2p}$.

Correction : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} {I_{n+p}}^2 &= \left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \\ &= \left(\int_0^1 t^n \times \sqrt{f(t)} \times t^p \times \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \end{aligned}$$

et on conclut à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 12 : ✪ Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[a;b]$. Montrer que

$$\inf_{f \in E}\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right)$$

existe et est atteint.

Correction : Notons

$$F = \left\{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \mid f \in E\right\}$$

Tout d'abord, F est non vide car E est non vide, et F est minoré par 0 car les éléments de E sont des fonctions positives, si bien que F admet bien une borne inférieure. Soit $f \in E$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\sqrt{f}$ et $1/\sqrt{f}$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} &= \sqrt{\int_a^b \sqrt{f(x)}^2\,\mathrm{d}x}^2 \times \sqrt{\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{f(x)}^2}}^2 \\ &\geq \left|\int_a^b \sqrt{f(x)} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right|^2 \\ &\geq (b-a)^2 \end{aligned}$$

si bien que $(b-a)^2$ est un minorant de F, et il y a égalité lorsque f est constante égale à 1, donc $(b-a)^2$ est un minorant atteint, donc le minimum, donc la borne inférieure de F.

Exercice 13 : ✪✪ Soient a,b,c,d des réels positifs. Montrer que :

$$\sqrt{a+b+c+d} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d} + \sqrt{d} \geq \sqrt{a+4b+9c+16d}$$

Correction : Cela ressemble à une inégalité triangulaire (il y a des +, ce n'est pas un produit comme dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Essayons de faire apparaître une norme. Les réels a,b,c,d étant positifs :

$$\sqrt{a+b+c+d} = \sqrt{\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 + \sqrt{c}^2 + \sqrt{d}^2}$$

c'est-à-dire que $\sqrt{a+b+c+d} = \|(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d})\|$. De même :

$$\sqrt{b+c+d} = \|(0, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d})\|, \sqrt{c+d} = \|(0,0,\sqrt{c},\sqrt{d})\| \qquad \text{et} \qquad \sqrt{d} = \|(0,0,0,\sqrt{d})\|$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d})\| + \|(0, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d})\| + \|(0,0,\sqrt{c},\sqrt{d})\| + \|(0,0,0,\sqrt{d})\| \geq \|(\sqrt{a}, 2\sqrt{b}, 3\sqrt{c}, 4\sqrt{d})\|$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 14 : ✪✪ Montrer les inégalités suivantes :

1. $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^2 \leq n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. $n^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n {x_k}^2\right) \times \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{{x_k}^2}\right)$, où les x_k sont des réels strictement positifs.

3. $-1/2 \leq ab+ac+bc \leq 1$, où a, b, c sont trois réels tels que $a^2+b^2+c^2=1$.
4. $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$, où a et b sont deux réels positifs.
5. $\displaystyle \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$.
6. $\displaystyle \forall k \in \mathbb{N}, n \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt[2^k]{i} \leq n \times \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$.
7. $\displaystyle \sum_{k=0}^{n} \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$.
8. $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2$, où les x_k sont des réels.
9. $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2$, où les a_i sont des réels et $\sigma \in S_n$.
10. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$ où $x_1, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs de somme 1

Correction : Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, est :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} {x_k}^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} {y_k}^2\right)$$

1. Découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les x_i égaux aux $1/i$ et les y_i égaux à 1.
2. Découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux x_k et aux $1/x_k$ (la somme de gauche est donc la somme des 1 ce qui donne l'inégalité voulue).
3. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \\ &= 1+2(ab+ac+bc)\end{aligned}$$

et puisque $(a+b+c)^2 \geq 0$, on en déduit l'inégalité de gauche. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(a \times 1 + b \times 1 + c \times 1)^2 \leq (a^2+b^2+c^2) \times (1^2+1^2+1^2) = 3$$

si bien que $ab+ac+bc \leq \dfrac{3-1}{2} = 1$.
4. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à a et b d'un côté, et 1 et 1 de l'autre :

$$(a \times 1 + b \times 1)^2 \leq (a^2+b^2) \times (1^2+1^2) = 2(a^2+b^2)$$

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ (les réels sont positifs), $(a+b)^4 \leq 4(a^2+b^2)^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec $a^2, b^2, 1$ et 1) donne $(a^2+b^2)^2 \leq 2(a^4+b^4)$ ce qui permet de conclure.
5. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les x_k égaux à $\sqrt{k}/(n-k)$ et les y_k égaux à $\sqrt{k}$ (k variant évidemment entre 1 et $n-1$) :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n-k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(n-k)^2}\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)$$

ce qui permet de conclure puisque la dernière somme vaut $n(n-1)/2$.
6. L'inégalité de gauche est immédiate puisque tous les termes de la somme du milieu sont supérieurs ou égaux à 1. Montrons l'inégalité de droite par récurrence sur k (précisons que $\sqrt[p]{x} = x^{1/p}$).

   - Si $k \in \mathbb{N}$, notons H_k : « $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \sqrt[2^k]{i} \leq n \times \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$ ».

- Si $k=0$, alors $2^k=1$ si bien que le membre de gauche vaut $\sum_{i=1}^n i$ et le membre de droite $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et les deux sont égaux donc H_0 est vraie.
- Soit $k\in\mathbb{N}$. Supposons H_k vraie et prouvons que H_{k+1} est vraie. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les x_k égaux à $\sqrt[2^{k+1}]{i}$ et les y_k égaux à 1, on a :

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\sqrt[2^{k+1}]{i}\right)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}$$

Or, pour tout i,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[2^{k+1}]{i}\right)^2 &= \left(i^{\frac{1}{2^{k+1}}}\right)^2\\ &= i^{\frac{1}{2^{k+1}}\times 2}\\ &= i^{\frac{1}{2^k}}\\ &= \sqrt[2^k]{i}\end{aligned}$$

si bien que

$$\sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \sqrt[2^k]{i}} \times \sqrt{n}$$

Par hypothèse de récurrence (et en utilisant la croissance de la racine carrée) :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sqrt[2^{k+1}]{i} &\leq \sqrt{n\times \sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}}\times\sqrt{n}\\
&\leq \sqrt{n}\times\left(\sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}\right)^{1/2}\times\sqrt{n}\\
&\leq n\times\left(\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2^k}}\right)^{1/2}\\
&\leq n\times\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2^k}\times\frac{1}{2}}\\
&\leq n\times\left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{1}{2^{k+1}}}\\
&\leq n\times\sqrt[2^{k+1}]{\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout k.

7. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les x_k égaux aux $\sqrt{\binom{n}{k}}$ et les y_k égaux à 1 :

$$\sum_{k=0}^n \sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}}\times\sqrt{\sum_{k=0}^n 1}$$

ce qui permet de conclure puisque la somme des $\binom{n}{k}$ vaut (d'après le binôme de Newton) 2^n.

8. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les y_k égaux à $1/2^k$:

$$\left(\sum_{k=0}^n \frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n {x_k}^2\right)\times\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k}\right)$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4} \times \frac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{3} \leq \frac{1}{3}$$

ce qui permet de conclure.

9. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les x_i égaux aux a_i et les y_i égaux à $a_{\sigma(i)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i a_{\sigma(i)} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^2}$$

Or, les $a_{\sigma(i)}^2$ ont même somme que les ${a_i}^2$ puisque σ est bijective donc cette somme contient une et une seule fois tous les ${a_i}^2$. Dès lors,

$$\sum_{i=1}^{n} {a_{\sigma(i)}}^2 = \sum_{i=1}^{n} {a_i}^2$$

ce qui permet de conclure.

10. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux $\sqrt{x_i}$ et aux $1/\sqrt{x_i}$ (tout est bien défini car les x_i sont strictement positifs) :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \times \sqrt{x_i}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \times \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

ce qui permet de conclure puisque les x_i sont de somme 1.

Exercice 15 : ✪✪ Déterminer le maximum de

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \end{cases}$$

sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne usuelle).

Correction : Précisons que la sphère unité pour la norme euclidienne est l'ensemble des éléments de norme 1 i.e. l'ensemble S des $(x_1, \dots, x_n)$ vérifiant :

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2} = 1$$

Soit donc $x = (x_1, \dots, x_n) \in S$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à x et à $y = (1, \dots, 1)$:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times 1\right)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

et puisque $\|x\| = 1$ et $\|y\| = \sqrt{n}$, cela donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n$$

On en déduit que n est un majorant de f. Or, le vecteur

$$x = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

appartient à S et $f(x) = n$ donc le maximum recherché vaut n (majorant atteint donc maximum).

Exercice 16 : ✪✪ Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$,

$$\left| \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \left| \int_0^1 \frac{f(t)\sqrt{t}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right| \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{2} \left(\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \right)^{1/2}$$

Étudier les cas d'égalité.

Correction : Soit $f \in \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $g : t \mapsto \dfrac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ et $h : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$:

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 g(t)\times h(t)\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \sqrt{\int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_0^1 h(t)^2\,\mathrm{d}t} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \times \sqrt{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si g et h sont proportionnelles, si et seulement s'il existe λ tel que :

$$\forall t \in [0;1], \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}}$$

si et seulement s'il existe λ tel que, pour tout t, $f(t) = \lambda$: il y a donc égalité si et seulement si f est constante. La deuxième inégalité se montre de façon analogue en posant $g(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t^2}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ et en remarquant qu'une primitive de $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2t}{1+t^2}$ est $t \mapsto \dfrac{1}{2} \times \ln(1+t^2)$. Le cas d'égalité est analogue : il y a égalité si et seulement s'il existe λ tel que $f : t \mapsto \lambda\sqrt{t}$.

Exercice 17 : ✪✪ Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\|^2 \leq n \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

Correction : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left\|\sum_{k=1}^n x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k\|$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz réelle (cf. cours, en prenant les y_i égaux à 1),

$$\sum_{k=1}^n \|x_k\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2} \times \sqrt{n}$$

ce qui permet de conclure par croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 18 : ✪✪✪ Les questions de cet exercice sont indépendantes, mais utilisent toutes le résultat suivant : si $f \in \mathscr{C}^1$ et si $f(0) = 0$ alors, pour tout x,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in [0;1], |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(u)\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(u))^2\,\mathrm{d}u$$

3. **✪✪✪✪** Soient $a > 0$ et f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;a]$ telle que $f(0) = 0$.

(a) Montrer l'inégalité d'Opial :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| \,\mathrm{d}t \le \frac{a}{2}\int_0^a (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t$$

(b) Étudier les cas d'égalité.

Correction : Rappelons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions continues sur $[\,a\,;b\,]$ est :

$$\left|\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t}$$

ou, ce qui revient au même :

$$\left(\int_a^b g(t)h(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_a^b h(t)^2\,\mathrm{d}t\right)$$

1. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. f étant $\mathscr{C}^1$ et nulle en 0,

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $g = f'$ et h la fonction constate égale à 1 :

$$|f(x)| = \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sqrt{\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_0^x \,\mathrm{d}t}$$

Or, d'après la relation de Chasles, et par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t + \underbrace{\int_x^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t}_{\ge 0} \ge \int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

et $\sqrt{\int_0^x \,\mathrm{d}t} = \sqrt{x} \le 1$, et le résultat en découle.

2. Soit $u \in [\,0\,;1\,]$. f étant $\mathscr{C}^1$ et nulle en 0,

$$f(u)^2 = \left(\int_0^u f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f' et la fonction constante égale à 1 :

$$f(u)^2 \le \int_0^u f'(t)^2\,\mathrm{d}t \times \int_0^u \,\mathrm{d}t = u\int_0^u f'(t)^2\,\mathrm{d}t \le u \times \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t$$

de même que ci-dessus. Par croissance de l'intégrale, en intégrant par rapport à u (l'intégrale de $f'(t)^2$ étant constante par rapport à u, on peut la sortir de l'intégrale par linéarité) :

$$\int_0^1 f(u)^2\,\mathrm{d}u \le \int_0^1 u \times \left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}u = \left(\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t\right) \times \left(\int_0^1 u\,\mathrm{d}u\right)$$

et l'intégrale de u vaut $1/2$ ce qui permet de conclure.

3. (a) Soit $t \in [\,0\,;a\,]$. Comme précédemment, on obtient :

$$|f(t)| = \left|\int_0^t f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sqrt{\int_0^t f'(x)^2\,\mathrm{d}x} \times \sqrt{\int_0^x \,\mathrm{d}x}$$

Posons pour la suite :

$$G : t \mapsto \int_0^t f'(x)^2\,\mathrm{d}x$$

si bien que G est une primitive de $(f')^2$ (et $G(0) = 0$). Par conséquent, $|f(t)| \le \sqrt{t} \times \sqrt{G(t)}$. Dès lors,

$$|f(t)f'(t)| \leq \sqrt{t} \times \sqrt{G(t)} \times f'(t)$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| \, \mathrm{d}t \int_0^a \sqrt{t} \times \sqrt{G(t)} \times f'(t) \, \mathrm{d}t$$

Encore d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| \, \mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^a t \, \mathrm{d}t} \times \sqrt{\int_0^a G(t) \times f'(t)^2 \, \mathrm{d}t}$$

Or, la deuxième intégrale se calcule puisque G est une primitive de $(f')^2$: on a donc une fonction du type $u' \times u$ qu'on primitive en $u^2/2$:

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| \, \mathrm{d}t \sqrt{\frac{a^2}{2}} \times \sqrt{\left[\frac{G(t)^2}{2}\right]_0^a} = \sqrt{\frac{a^2}{2}} \times \sqrt{\frac{G(a)^2}{2}}$$

ce qui est le résultat voulu.

(b) Il y a égalité si et seulement s'il y a égalité dans les deux inégalités de Cauchy-Schwarz et dans l'inégalité de croissance de l'intégrale. Dans la première inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité si et seulement si f' et la fonction constante égale à 1 sont proportionnelles, si et seulement si f' est constante, si et seulement si f est affine donc linéaire car nulle en 0 : c'est donc une condition nécessaire. On prouve aisément que si f est de la forme $t \mapsto \alpha t$, alors il y a égalité, c'est donc une condition sufisante. En conclusion, il y a égalité si et seulement si f est de la forme $t \mapsto \alpha t$.

Exercice 19 - Mines PC 2013 : ✪✪✪ Soient (b_n) une suite réelle et $\varepsilon \in]\,0\,;1\,[$. On suppose que la série $\sum {b_n}^2(1-\varepsilon)^{2n}$ converge. Montrer que pour tout $|z| \in [\,0\,;1-\varepsilon\,[$, la série $\sum b_n z^n$ converge absolument et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} {b_n}^2 (1-\varepsilon)^{2n}\right)^{1/2} \times \left(1 - |z|^2/|1-\varepsilon|^2\right)^{-1/2}$$

Correction : Soit z tel que $|z| \in [\,0\,;1-\varepsilon\,[$. On se place dans $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire vu en classe (je précise que l'énoncé du sujet ne donnait pas plus d'indications que l'énoncé ci-dessus !). Par hypothèse, la suite $(|b_n| \times |1-\varepsilon|^n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ (car, quand on la met au carré, on obtient une série convergente). De plus, la série

$$\sum \left|\frac{z}{1-\varepsilon}\right|^{2n}$$

converge car série géométrique de raison $|z/(1-\varepsilon)|$ strictement inférieur à 1 par choix de z. On en déduit que la suite $\left(\left|\frac{z}{1-\varepsilon}\right|^n\right)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$. Par conséquent, le produit scalaire de ces deux suites est bien défini, c'est-à-dire que la série

$$\sum |b_n z^n|$$

converge. L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de conclure, en se souvenant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{z}{1-\varepsilon}\right|^{2n} = \frac{1}{1 - \dfrac{|z|^2}{|1-\varepsilon|^2}}$$

Exercice 19 : ✪ On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{tr}\,(A)\,| \leq \sqrt{n} \times \|A\|$, et montrer que cette égalité est optimale.
2. ✪✪✪ Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Correction : Rappelons que le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est défini par : $\langle A,B \rangle = \mathrm{tr}\left(\left(A^\top \times B\right)\right)$.

1. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à A et I_n :

$$|\langle I_n,A \rangle| = |\mathrm{tr}\,(A)\,| \leq \|I_n\|\|A\|$$

Or, $\|I_n\| = \sqrt{\mathrm{tr}\,(I_n)} = \sqrt{n}$, d'où le résultat voulu, et l'inégalité est optimale car, pour I_n par exemple, on a égalité.

2. On a des quantités positives et la fonction racine est croissante sur $\mathbb{R}_+$, il suffit donc de prouver que $\|AB\|^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$. Or, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors, pour tout i,

$$(M^\top \times M)_{i,i} = \sum_{j=1}^n M_{j,i}M_{j,i}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \|M\|^2 &= \langle M,M\rangle \\ &= \mathrm{tr}\left((M^\top \times M)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n {M_{j,i}}^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire la somme de tous les coefficients au carré. En particulier,

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n ((AB)_{i,j})^2, \|A\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n {A_{i,j}}^2 \qquad \text{et} \qquad \|B\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n {B_{i,j}}^2$$

Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par définition d'un produit matriciel,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$((AB)_{i,j})^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n {A_{i,k}}^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n {B_{k,j}}^2\right)$$

Par somme :

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n {A_{i,k}}^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n {B_{k,j}}^2\right)\right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{k=1}^n {A_{i,k}}^2\right)\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n {B_{k,j}}^2\right)\right] \\ &\leq \left[\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n {B_{k,j}}^2\right)\right] \times \left[\sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n {A_{i,k}}^2\right)\right] \\ &\leq \|B\|^2\|A\|^2 \end{aligned}$$

Exercice 21 : ✪✪✪ Soient $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer que si $\displaystyle\sum_{i\neq j} a_ib_j = 0$ alors $\displaystyle\sum_{i\neq j} b_ib_j \leq 0$.

Correction : Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^n b_j\right) &= \sum_{i=1}^n a_ib_i + \sum_{i\neq j} a_ib_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_ib_i \end{aligned}$$

puisque, par hypothèse, la deuxième somme est nulle. Dès lors,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \times \left(\sum_{j=1}^n b_j\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \times \left(\sum_{j=1}^n b_j\right)^2 \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right)$$

c'est-à-dire :

$$\left(\sum_{k=1}^n {a_k}^2 + \sum_{k\neq l} a_k a_l\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2 + \sum_{i\neq j} b_i b_j\right) \quad \leq \quad \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right)$$

En développant :

$$\left(\sum_{k=1}^n {a_k}^2\right) \times \left(\sum_{k=1}^n {b_k}^2\right) + \left(\sum_{k=1}^n {a_k}^2 + \sum_{k\neq l} a_k a_l\right) \times \left(\sum_{i\neq j} b_i b_j\right) + \left(\sum_{k\neq l} a_k a_l\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n {a_i}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {b_i}^2\right)$$

Les a_k étant strictement positifs, si la somme $\displaystyle\sum_{i\neq j} b_i b_j$ n'est pas négative, alors le membre de gauche est strictement plus grand que le membre de droite ce qui est absurde.

Exercice 22 : ✪✪✪ On rappelle (cf. cours) que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore valable pour l'application $(X,Y) \mapsto E(XY)$, même si ce n'est pas un produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{E(Y^2)} \qquad \text{et} \qquad |\text{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X) \times \sigma(Y)$$

On se place dans tout l'exercice sur un espace probabilité fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient A et B deux événements. Simplifier $\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et en déduire l'inégalité de Kosmanek :
$$P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance strictement positive. Montrer que $P(X\geq 1) \geq \dfrac{E(X)^2}{E(X^2)}$.
3. Soit $\eta \in [\,0\,;1\,]$ et soit X une variable aléatoire réelle positive avec $E(X^2) > 0$.
   (a) Montrer que $E(X\mathbb{1}_{[X\geq \eta E(X)]})^2 \leq E(X^2)P(X\geq \eta E(X))$.
   (b) En partant de $E(X)$, démontrer l'inégalité de Paley-Zygmund :
$$P(X\geq \eta E(X)) \geq (1-\eta)^2 \times \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$$

Correction :

1. On a tout d'abord :
$$\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) \quad = \quad E\left(\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B\right) - E(\mathbb{1}_A)E(\mathbb{1}_B)$$
Or, on rappelle que $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$. De plus, $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cap B}$: en effet, une indicatrice vaut 1 ou 0, donc ce produit également, et il vaut 1 si et seulement si les deux indicatrices valent 1, si et seulement si on est sur $A\cap B$, c'est-à-dire que $\mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ vaut 1 sur $A\cap B$ et 0 sinon, donc est égale à $\mathbb{1}_{A\cap B}$. Par conséquent,
$$\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B) = P(A\cap B) - P(A)P(B)$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$|\text{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)| \quad \leq \quad \sigma(\mathbb{1}_A) \times \sigma(\mathbb{1}_B)$$
Or, $\mathbb{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$ donc $V(\mathbb{1}_A) = P(A)\times(1-P(A))$ et une rapide étude de fonction montre que, pour tout $x\in[\,0\,;1\,]$, $x(1-x) \leq 1/4$. Ainsi, $V(\mathbb{1}_A) \leq 1/4$ et idem pour B, si bien que les deux écarts-types sont inférieurs ou égaux à $1/2$, ce qui permet de conclure.

2. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$E(X \times \mathbb{1}_{X\geq 1})^2 \leq E(X^2) \times E(\mathbb{1}_{X\geq 1}^2)$$

Or, une indicatrice étant égale à 0 ou 1, elle est égale à son carré si bien que

$$E(X \times \mathbb{1}_{X\geq 1})^2 \leq E(X^2) \times E(\mathbb{1}_{X\geq 1}) = E(X^2) \times P(X \geq 1)$$

Or, X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} kP(X=k)$$

cette somme étant en réalité finie car on est sur un espace probabilité fini. Or, le terme d'indice 0 est nul donc :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \mathbb{1}_{k\geq 1}(k)P(X=k) \\ &= E(X \times \mathbb{1}_{X\geq 1}) \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert, ce qui permet de conclure.

3. (a) De même que dans la question précédente, découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du fait qu'une indicatrice est égale à son carré.

   (b) Suivons l'indication de l'énoncé et partons de $E(X)$, comme dans la preuve de l'inégalité de Markov :

$$E(X) = E(X\mathbb{1}_{X\geq \eta E(X)}) + E(X\mathbb{1}_{X<\eta E(X)})$$

En effet, $\mathbb{1}_{X\geq \eta E(X)} + \mathbb{1}_{X<\eta E(X)} = 1$ car les deux événements sont complémentaires, si bien que

$$X = X\mathbb{1}_{X\geq \eta E(X)} + X\mathbb{1}_{X<\eta E(X)}$$

et on utilise la linéarité de l'espérance. Or, $X\mathbb{1}_{X<\eta E(X)} \leq \eta E(X)\mathbb{1}_{X<\eta E(X)}$ (soit cet événement est réalisé et alors les deux indicatrices valent 1 et $X < \eta E(X)$, soit il n'est pas réalisé, et alors les indicatrices sont nulles donc l'inégalité est encore valide). Par croissance puis linéarité de l'espérance,

$$E(X\mathbb{1}_{X<\eta E(X)}) \leq E(\eta E(X)\mathbb{1}_{X<\eta E(X)}) = \eta E(X)E(\mathbb{1}_{X<\eta E(X)}) = \eta E(X)P(X<\eta E(X))$$

Par conséquent, en utilisant également la question précédente :

$$\begin{aligned} E(X) &\leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X\geq \eta E(X))} + \eta E(X)P(X<\eta E(X)) \\ &\leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X\geq \eta E(X))} + \eta E(X)(1-P(X\geq \eta E(X))) \end{aligned}$$

si bien que

$$(1-\eta)E(X) \leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X\geq \eta E(X))} - \eta E(X)P(X\geq \eta E(X)) \leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{P(X\geq \eta E(X))}$$

puisque $E(X) \geq 0$. On conclut par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.

34.3 Bases orthonormales

Exercice 23 : ✪ Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer qu'on définit sur E un produit scalaire avec

$$\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$

2. Donner une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Correction :

1. Montrons que c'est bien un produit scalaire.
   - Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors $\langle P,P\rangle \geq 0$. De plus, si $\langle P,P\rangle = 0$, alors $P(0)^2 + P(1)^2 + P(2)^2 = 0$. Une somme de nombres positifs (car carrés réels) étant nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, il en découle que $P(0) = P(1) = P(2) = 0$. P étant de degré au plus 2 et admettant au moins trois racines distinctes, il est identiquement nul : $\langle,\rangle$ est défini positif.
   - La symétrie est évidente.
   - Soient $(P_1, P_2, Q) \in E^3$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

   $$\begin{aligned}\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(0)Q(0) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(1)Q(1) + (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(2)Q(2)\\ &= \lambda_1 P_1(0)Q(0) + \lambda_2 P_2(0)Q(0) + \lambda_1 P_1(1)Q(1) + \lambda_2 P_2(1)Q(1) + \lambda_1 P_1(2)Q(1) + \lambda_2 P_2(2)Q(2)\\ &= \lambda_1(P_1(0)Q(0) + P_1(1)Q(1) + P_1(2)Q(1)) + \lambda_2(P_2(0)Q(0) + P_2(1)Q(1) + P_2(2)Q(1))\end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $\langle \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q\rangle = \lambda_1\langle P_1, Q\rangle + \lambda_2\langle P_2, Q\rangle$: $\langle,\rangle$ est linéaire à gauche, et par symétrie, est bilinéaire.

   En conclusion, c'est bien un produit scalaire.
2. On applique la méthode d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Notons $e_0 = 1, e_1 = X$ la base canonique de F.
   - On commence par $\varepsilon_0 = e_0/\|e_0\|$. Or, $\langle e_0, e_0\rangle = 3$ donc $\|e_0\| = 1/\sqrt{3}$, si bien qu'on commence par $\varepsilon_0 = 1/\sqrt{3}$.
   - Soit $u_1 = e_1 - \langle e_1, \varepsilon_0\rangle\varepsilon_0$. On a :

   $$\begin{aligned}\langle e_1, \varepsilon_0\rangle &= 0 \times \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

   si bien qu'en posant $u_1 = e_1 - \sqrt{3}\varepsilon_0 = X - 1$, on a un vecteur orthogonal à ε_0 donc il suffit de diviser par sa norme pour avoir une famille orthonormale. Or, $\langle X-1, X-1\rangle = 2$ donc $\|X-1\| = \sqrt{2}$. Finalement, on trouve $\varepsilon_1 = \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$, si bien que $(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$ est une base orthonormale de F pour ce produit scalaire.

Exercice 24 : ✪ Orthonormaliser, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, la famille formée des vecteurs $x_1 = (1,1,0), x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,1,1)$.

Correction : On a $\|x_1\| = \sqrt{2}$ donc on pose $e_1 = x_1/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$.

Ensuite, posons $u_2 = x_2 - \langle x_2, e_1\rangle e_1$, si bien que

$$\begin{aligned}u_2 &= (1,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)\end{aligned}$$

est orthogonal à e_1, et donc posons

$$\begin{aligned}e_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|}\\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}u_2\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}$$

Enfin, posons

$$\begin{aligned}u_3 &= x_3 - \langle x_3, e_1\rangle e_1 - \langle x_3, e_2\rangle e_2\\ &= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

Alors u_3 est orthogonal à e_1, e_2, et il suffit de diviser u_3 par sa norme, qui vaut $2/\sqrt{3}$, donc il suffit de multiplier par $\sqrt{3}/2$ pour obtenir $e_3 = (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, et (e_1, e_2, e_3) est bien une famille orthonormale.

Exercice 25 : ✪ Orthonormaliser, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$, la famille formée des vecteurs $x_1 = (0,1,1,1), x_2 = (1,0,1,1), x_3 = (1,1,0,1)$ et $x_4 = (1,1,1,0)$.

Correction : Tout d'abord, on montre aisément que cette famille est libre. $\|x_1\|^2 = 3$ donc on pose $\varepsilon_1 = x_1/\sqrt{3} = (0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Posons à présent

$$\begin{aligned} u_2 &= x_2 - \langle x_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 \\ &= (1,0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= (1,0,1,1) - \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Alors u_2 est orthogonal à ε_1 et, en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ &= \sqrt{\frac{3}{5}}\left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ &= \left(\sqrt{\frac{3}{5}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right) \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right) \end{aligned}$$

alors $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille orthonormale. Posons à présent

$$\begin{aligned} u_3 &= x_3 - \langle x_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle x_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 \\ &= (1,1,0,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{15}}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}, \frac{-2}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right) \\ &= (1,1,0,1) - \left(0, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{6}{15}, \frac{-4}{15}, \frac{2}{15}, \frac{2}{15}\right) \\ &= \left(\frac{9}{15}, \frac{9}{15}, \frac{-12}{15}, \frac{3}{15}\right) \\ &= \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

Alors u_3 est orthogonal à $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et en posant

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ &= \sqrt{\frac{5}{7}}\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, \frac{1}{5}\right) \\ &= \left(\frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}, \frac{-4}{\sqrt{35}}, \frac{1}{\sqrt{35}}\right) \end{aligned}$$

Enfin, posons

$$\begin{aligned}
u_3 &= x_4 - \langle x_4,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \langle x_4,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 - \langle x_4,\varepsilon_3\rangle\varepsilon_3 \\
&= (1,1,1,0) - \frac{2}{\sqrt{3}}.\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2}{\sqrt{15}}.\left(\frac{3}{\sqrt{15}},\frac{-2}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}},\frac{1}{\sqrt{15}}\right) - \frac{2}{\sqrt{35}}\left(\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{3}{\sqrt{35}},\frac{-4}{\sqrt{35}},\frac{1}{\sqrt{35}}\right) \\
&= (1,1,1,0) - \left(0,\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{6}{15},\frac{-4}{15},\frac{2}{15},\frac{2}{15}\right) - \left(\frac{6}{35},\frac{6}{35},\frac{-8}{35},\frac{2}{35}\right) \\
&= \left(\frac{3}{7},\frac{3}{7},\frac{3}{7} - \frac{6}{7}\right)
\end{aligned}$$

et il suffit ensuite de diviser par sa norme, qui vaut $3/\sqrt{7}$, donc de multiplier par $\sqrt{7}/3$ pour obtenir une famille orthonormale.

Exercice 26 : ✪ Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto (x_1-2x_2)(y_1-2y_2) + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3) \end{cases}$$

Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Correction : Montrons que c'est un produit scalaire.

- Soit $x \in \mathbb{R}^3$.

$$\langle x,x\rangle = (x_1-2x_2)^2 + {x_2}^2 + (x_2+x_3)^2 \geq 0$$

Supposons que $\langle x,x\rangle = 0$. Alors (somme de termes positifs) $(x_1-2x_2)^2 = {x_2}^2 = (x_2+x_3)^2 = 0$ donc $x_2 = 0$, $x_1 - 2x_2 = x_2 + x_3 = 0$ donc $x_1 = x_3 = 0$ et donc $x = 0$: $\langle,\rangle$ est défini positif.
- La symétrie est immédiate.
- Soient $(x,y,z) \in (\mathbb{R}^3)^3$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda x + \mu y, z\rangle &= (\lambda x_1 + \mu y_1 - 2(\lambda x_2 + \mu y_2))(z_1 - 2z_2) + (\lambda x_2 + \mu y_2)z_2 + (\lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3)(z_2 + z_3) \\
&= \lambda((x_1-2x_2)(z_1-2z_2) + x_2z_2 + (x_2+x_3)(z_2+z_3)) + \mu((y_1-2y_2)(z_1-2z_2) + y_2z_2 + (y_2+y_3)(z_2+z_3)) \\
&= \lambda\langle x,z\rangle + \mu\langle y,z\rangle
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\langle,\rangle$ est linéaire à gauche donc bilinéaire par symétrie : c'est bien un produit scalaire. Quand nous parlerons de norme dans la suite de cet exercice, ce sera évidemment pour ce produit scalaire :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle} = \sqrt{(x_1-2x_2)^2 + {x_2}^2 + (x_2+x_3)^2}$$

$\|e_1\| = 1$ donc e_1 est déjà unitaire pour cette norme, donc on pose directement $\varepsilon_1 = e_1 = (1,0,0)$. Posons à présent

$$\begin{aligned}
u_2 &= e_2 - \langle e_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 \\
&= (0,1,0) - (-2).(1,0,0) \\
&= (2,1,0)
\end{aligned}$$

et puisque $\|u_2\| = \sqrt{2}$, on pose

$$\varepsilon_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$$

Posons enfin

$$\begin{aligned}
u_3 &= e_3 - \langle e_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \langle e_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 \\
&= (0,0,1) - 0.\varepsilon_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right) \\
&= \left(-1,-\frac{1}{2},1\right)
\end{aligned}$$

et ensuite il suffit de diviser par $\|u_3\| = 1/\sqrt{2}$ donc de multiplier par $\sqrt{2}$.

Exercice 27 : ✪✪✪ On suppose que E est un espace euclidien. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \langle x,u(x)\rangle = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)^\perp$.
2. Soit A la matrice de u dans une base B orthonormale.
   (a) Soient x et y deux éléments de E. On note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base B. Montrer que $\langle x,y\rangle = X^\top \times Y$.
   (b) Montrer que A est antisymétrique. On pourra s'intéresser à $\langle u(x+y),x+y\rangle$.

Correction : On suppose donc que E est de dimension finie si bien que E et $E^\perp$ sont supplémentaires (et orthogonaux).

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$ et soit $x \in \ker(u)$. Alors il existe $t \in E$ tel que $y = u(t)$. Dès lors, $\langle x,y\rangle = \langle x,u(t)\rangle$. Or, par hypothèse, $\langle x+t,u(x+t)\rangle = 0$. Or, par linéarité de u puis par bilinéarité du produit scalaire,
$$\begin{aligned} 0 = \langle x+t,u(x+t)\rangle &= \langle x+t,u(x)+u(t)\rangle \\ &= \langle x,u(x)\rangle + \langle t,u(x)\rangle + \langle x,u(t)\rangle + \langle t,u(t)\rangle \\ &= \langle t,u(x)\rangle + \langle x,u(t)\rangle \end{aligned}$$
puisque $\langle x,u(x)\rangle = \langle t,u(t)\rangle = 0$. Or, $x \in \ker(u)$ donc $u(x) = 0$ donc $\langle t,u(x)\rangle = 0$ (le vecteur nul est orthogonal à tout le monde). Finalement, $\langle x,u(t)\rangle = \langle x,y\rangle = 0$ donc $y \in \ker(u)^\perp$. Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(E) - \dim(\ker(u)) = \dim(\ker(u)^\perp)$ car c'est un supplémentaire de $\ker(u)$, si bien que les deux espaces $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)^\perp$ sont égaux.
2. (a) Il suffit de l'écrire : si on note $(x_1,\dots,x_n)$ les coordonnées de x dans la base $B = (e_1,\dots,e_n)$, et si on note $(y_1,\dots,y_n)$ celles de y, on a :
$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \langle e_i,e_j\rangle \end{aligned}$$
et $\langle e_i,e_j\rangle = \delta_{i,j}$ si bien que $\langle x,y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i y_i$ et un calcul matriciel immédiat prouve que cette quantité est égale à $X^\top Y$.
   (b) On prouve comme dans la première question (linéarité de u puis bilinéarité du produit scalaire, en utilisant le fait que $\langle u(x),x\rangle = \langle u(y),y\rangle = 0$) que :
$$\langle y,u(x)\rangle + \langle x,u(y)\rangle = 0$$
si bien que $\langle y,u(x)\rangle = -\langle x,u(y)\rangle$. Matriciellement, si X et Y sont les vecteurs associés à x et y dans la base B, d'après la question précédente, cela se traduit par : $Y^\top \times AX = -X^\top \times AY$ (rappelons que l'évaluation se traduit par un produit matriciel, cf. chapitre 31, et donc AX est le vecteur colonne associé à $u(x)$). Or, par symétrie du produit scalaire, $\langle x,u(y)\rangle = \langle u(y),x\rangle$ si bien que
$$Y^\top \times AX = -((AY)^\top \times X) = -Y^\top A^\top \times X$$
Attention, X et Y ne sont pas inversibles (ce sont des matrices colonnes). Comme d'habitude (cf. chapitre 21 par exemple), en prenant X le vecteur colonne dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne j, et Y le vecteur dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne i, alors le membre de gauche (écrivez le produit des matrices et faites le avec les mains) vaut $A_{i,j}$ et celui de droite vaut $-A_{j,i}$, qui sont donc opposés, et donc A est antisymétrique.

Exercice 28 - Caractérisation des BON : ✪✪✪ On suppose que E est un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille d'éléments de E telle que :
$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle x,e_i\rangle^2$$
Le but de cet exercice est de prouver que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

1. En s'intéressant à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$, montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.

2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Conclure. La réciproque de la propriété vue en classe est donc vraie.

Correction :

1. Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp$. Alors tous les $\langle x, e_i \rangle$ sont nuls si bien que $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0$. On en déduit que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)^\perp = \{0\}$ et on sait que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ est un supplémentaire de cet espace (on est en dimension finie) donc $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E$: la famille est génératrice, et puisque c'est une famille à n éléments en dimension n, c'est une base.
2. Soit $j \in [\![1\,; n]\!]$. En appliquant l'égalité de l'énoncé à $x = e_j$, il vient :

$$\begin{aligned} \|e_j\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2 \\ &= \langle e_j, e_j \rangle^2 + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2 \\ &\geq \langle e_j, e_j \rangle^2 \end{aligned}$$

Or, $\|e_j\|^2 = \langle e_j, e_j \rangle$ si bien que $\|e_j\|^2 \geq \|e_j\|^4$, ce qui implique que $\|e_i\| \leq 1$. Prouvons l'inégalité réciproque. Inspirons-nous de la première question et essayons d'enlever « tous les termes sauf 1 » : prenons donc $x \in \left(\text{Vect}(e_i)_{i \neq j}\right)^\perp$. Dès lors, $\|x\|^2 = \langle x, e_j \rangle^2$ et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|x\|^2 \leq \|x\|^2 \times \|e_j\|^2$. Or, $\left(\text{Vect}(e_i)_{i \neq j}\right)^\perp$ est de dimension 1 car supplémentaire (on est en dimension finie) de $\text{Vect}(e_i)_{i \neq j}$ qui est de dimension $\dim(E) - 1$ (on a retiré un vecteur de la base, ou engendré par une famille libre à $n-1$ éléments) donc il est possible de prendre x non nul dans cet espace, ce qui donne $\|e_i\|^2 \geq 1$ donc $\|e_i\| = 1$: les e_i sont unitaires.
3. On a prouvé que, pour tout j,

$$\|e_j\|^2 = \|e_j\|^4 + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2$$

et puisque les e_j sont de norme 1,

$$1 = 1 + \sum_{i=1, i \neq j}^{n} \langle e_j, e_i \rangle^2$$

Il en découle que cette somme est nulle donc que tous les termes sont nuls (somme de termes positifs). Ainsi, pour tous $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$: la famille est orthogonale.

Exercice 29 - Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien : ✪✪✪

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que, pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique $u \in E$ tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle u, x \rangle$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que A est de degré n.

Correction :

1. Si $u \in E$, par linéarité à droite du produit scalaire, l'application $f_u : x \mapsto \langle u, x \rangle$ est une forme linéaire. Soit

$$f : \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) \\ u \longmapsto \quad f_u \end{cases}$$

Montrons que f est linéaire. Soient $(u, v) \in E^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Pour tout $x \in E$, par linéarité à gauche du produit scalaire,

$$\langle \lambda u + \mu v, x \rangle = \lambda \langle u, x \rangle + \mu \langle v, x \rangle$$

si bien que les fonctions $x \mapsto \langle \lambda u+\mu v, x\rangle$ et $x \mapsto \lambda\langle u, x\rangle+\mu\langle v, x\rangle$ sont égales, c'est-à-dire que $f(\lambda u+\mu v) = \lambda f(u)+\mu f(v)$: f est linéaire. Soit $x \in \ker(f)$, c'est-à-dire que $x \mapsto \langle u, x\rangle$ est l'application nulle. En particulier, cette fonction est nulle en u c'est-à-dire que $\langle u, u\rangle = 0$ donc $u = 0$ par définie positivité du produit scalaire. En d'autres termes, $\ker(f) = \{0\}$, f est injective et linéaire entre deux espaces de même dimension finie donc est bijective, ce qui est le résultat voulu.

2. On se place sur $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire (cf. cours)

$$\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque $P \mapsto P(0)$ est une forme linéaire et que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, la question précédente donne l'existence et l'unicité de A. En particulier, pour tout P tel que $P(0) = 0$, $\langle P, A\rangle = 0$ c'est-à-dire que P est orthogonal à tout polynôme nul en 0. Supposons que $\deg(A) \leq n-1$. Alors $P = XA$ est de degré inférieur ou égal à n et est nul en 0 si bien que $\langle P, A\rangle = 0$ c'est-à-dire que

$$\int_0^1 tA(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$$

On a une fonction continue positive d'intégrale nulle donc c'est la fonction nulle : pour tout $t \in [\,0\,;1\,]\,, tA(t)^2 = 0$ donc, pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,]\,, A(t) = 0$: A admet une infinité de racines donc est le polynôme nul donc, pour tout polynôme P,

$$P(0) = \int_0^1 P(t) \times 0\,\mathrm{d}t = 0$$

ce qui est absurde. Donc $\deg(A) = n$.

Exercice 30 : ✪✪✪

1. On suppose que E est de dimension finie. Soit B une base de E. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E qui rende B orthonormale.
2. Déterminer ce produit scalaire lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et $B = ((1,2),(2,1))$.

Correction :

1. Notons $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Existence : soit

$$\langle , \rangle : (x,y) \mapsto \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

où les a_i et les b_i sont les coordonnées respectives de x et y DANS LA BASE B (et non pas dans la base canonique). Montrons que $\langle , \rangle$ convient. Rappelons que, B étant une base, tout vecteur x s'écrit de façon unique sous la forme $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$.

- Soit $x \in E$.

$$\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^n {a_i}^2 \geq 0$$

Supposons que $\langle x, x\rangle = 0$. Alors tous les a_i sont nuls donc $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0$: $\langle , \rangle$ est défini positif.
- La symétrie et la bilinéarité se prouvent comme pour le produit scalaire canonique : $\langle , \rangle$ est bien un produit scalaire.
- De plus, pour tout i, $e_i = 1.e_i$ et on sait qu'il y a unicité des coordonnées, donc $\langle e_i, e_i\rangle = 1$, et si $i \neq j$, $\langle e_i, e_j\rangle = 0$, la base B est bien orthonormale pour ce produit scalaire.

Unicité : soit $(|)$ un produit scalaire qui convient. Pour tous x et y, par bilinéarité du produit scalaire :

$$\begin{aligned}(x|y) &= (\sum_{i=1}^n a_i e_i | \sum_{i=1}^n b_i e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j (e_i|e_j)\end{aligned}$$

Or, la base est orthonormale pour ce produit scalaire donc $(e_i|e_j) = \delta_{i,j}$ si bien que

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \langle x,y \rangle$$

D'où l'unicité. On aurait aussi pu travailler par analyse-synthèse.

2. D'après ce qui précède, il suffit de trouver les coordonnées de $x = (a, b)$ dans cette base (c'en est bien une car famille libre, car deux vecteurs non proportionnels, à deux éléments en dimension 2). Soit donc $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} x = a_1 e_1 + a_2 e_2 \quad &\iff \quad (x_1, x_2) = a_1(1, 2) + a_2(2, 1) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} a_1 & + & 2a_2 & = & x_1 \\ 2a_1 & + & a_2 & = & x_2 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_1 & = & \dfrac{2x_2 - x_1}{3} \\ \\ a_2 & = & \dfrac{2x_1 - x_2}{3} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalement, le seul produit scalaire rendant cette base orthonormée est :

$$\langle x,y \rangle = \frac{(2x_2 - x_1)(2y_2 - y_1)}{9} + \frac{(2x_1 - x_2)(2y_1 - y_2)}{9}$$

Exercice 31 : ✪✪✪ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient $a_0, \dots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Pour P et Q dans E, notons

$$\langle P,Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k)$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour tout $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$, montrer l'existence d'un unique élément de E vérifiant : $\forall j \in [\![0 \,;\, n]\!], P_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
3. Montrer que les P_i forment une base orthonormale de E. Est-ce la base obtenue à partir de la base canonique grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?
4. Pour tout $P \in E$, calculer la distance de P à $H = \{P \in E \,|\, P(a_0) + \dots + P(a_n) = 0\}$.

Correction :

1. • Soit $P \in E$.

$$\langle P,P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \geq 0$$

Si $\langle P,P \rangle = 0$ alors $P(a_k) = 0$ pour tout k donc P admet au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré inférieur ou égal à n donc P est le polynôme nul : $\langle , \rangle$ est défini positif.

• La symétrie est immédiate.

• La bilinéarité découle de la linéarité de la somme : c'est bien un produit scalaire.

2. Soit $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$. L'existence et l'unicité de P_i découle du cours sur les polynômes : $a_0, \dots, a_n$ étant $n+1$ points deux à deux distincts, il existe un unique P_i de degré inférieur ou égal à n vérifiant cette condition, c'est-à-dire $P_i(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P_i(a_i) = 0$. Si on veut le redémontrer, il suffit de voir que

$$P_i = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

convient, d'où l'existence, et si un autre polynôme convient, alors P_i et ce polynôme sont de degré inférieur ou égal à n et coïncident en au moins $n+1$ points donc sont égaux, d'où l'unicité.

3. Puisqu'on a $n+1$ polynômes en dimension $n+1$, pour montrer que c'est une base, il suffit de prouver que c'est une famille libre. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$. Soit $i \in [\![0 \,;\, n]\!]$. En évaluant en a_i, il ne reste que $\lambda_i P_i(a_i)$ (car les autres P_j s'annulent en a_i) et $P_i(a_i) = 1$ donc $\lambda_i = 0$: i étant quelconque, tous les λ_i sont nuls, la famille est libre et c'est donc une base.

Montrons qu'elle est orthonormale. Tout d'abord, pour tout i,

$$\langle P_i, P_i\rangle = P_i(a_i)^2$$

car tous les autres termes de la somme sont nuls, et $P_i(a_i) = 1$ donc $\langle P_i, P_i\rangle = \|P_i\|^2 = 1$ si bien que $\|P_i\| = 1$: les P_i sont unitaires. De plus, si $i \neq j$, alors

$$\langle P_i, P_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} P_i(a_k) P_j(a_k)$$

Si $k \neq i$, $P_i(a_k) = 0$ donc il ne reste que $P_i(a_i)P_j(a_i)$ mais $i \neq j$ donc $P_j(a_i) = 0$ si bien que $\langle P_i, P_j\rangle = 0$: la famille est orthogonale donc orthonormale. Cependant, ce n'est pas la famille orthonormale obtenue grâce au procédé de Gram-Schmidt à partir de la base canonique : en effet, celle-ci doit vérifier, pour tout i, $\mathrm{Vect}(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_i) = \mathrm{Vect}(1, \dots, X^i)$, et en particulier $\varepsilon_0 = 1/\|1\|$, et ce n'est pas le cas de notre base puisque P_0 est de degré n donc n'est pas proportionnel au polynôme constant égal à 1.

4. Nous ne sommes pas dans le cas général où on projette sur un sous-espace de dimension finie (ce sera plutôt l'objet des exercices qui suivent) : ici, on projette sur un hyperplan. D'après le cours, si u est orthogonal non nul à H, la distance de P à u est $|\langle P, u\rangle|/\|u\|$. Il suffit donc de trouver un polynôme Q non nul orthogonal à H. Or, les polynômes $P_0 - P_n, \dots, P_{n-1} - P_n$ (où les polynômes $P_0, \dots, P_n$ sont ceux définis dans les questions précédentes) appartiennent à H car, par exemple,

$$(P_0 - P_n)(a_0) + \cdots + (P_0 - P_n)(a_n) = 1 + 0 + \cdots + 0 - 1 = 0$$

Puisque les P_i sont libres, on montre facilement que $P_0 - P_n, \dots, P_{n-1} - P_n$ sont libres donc forment une base de H (famille libre à n éléments en dimension n). Or, $Q = P_0 + \cdots + P_n$ est orthogonal à chacun de ces polynômes. En effet, par bilinéarité, pour tout i,

$$\begin{aligned} \langle P_i - P_n, Q\rangle &= \langle P_i, Q\rangle - \langle P_n, Q\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n} \langle P_i, P_j\rangle - \sum_{j=0}^{n} \langle P_i, P_n\rangle \end{aligned}$$

Or, les P_j formant une BON, la première somme vaut 1 (seul le terme $\langle P_i, P_i\rangle$ est non nul et vaut 1), et idem pour la deuxième, si bien que ce produit scalaire est nul : Q est orthogonal à $P_0 - P_n, \dots, P_{n-1} - P_n$ donc à l'espace engendré donc à H : la distance recherchée est alors $\langle P, Q\rangle/\|Q\|$. Or, pour tout k, $Q(a_k) = 1$ si bien que

$$\begin{aligned} \|Q\| &= \sqrt{\sum_{k=0}^{n} Q(a_k)} \\ &= \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle P, Q\rangle &= \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \end{aligned}$$

En conclusion, pour tout P,

$$d(P, H) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{\sqrt{n+1}}$$

34.4 Projection orthogonale, distance etc.

Exercice 32 : ✪ On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $e_2 = (1, -1, 1, -1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.

4. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1,0)$ à F.

Correction :

1. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt donne $\varepsilon_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$ et $\varepsilon_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.
2. Les vecteurs $e_3 = (1,0,-1,0)$ et $e_4 = (0,1,0,-1)$ sont orthogonaux à e_1 et e_2 donc sont dans $F^\perp$. Or, on est en dimension finie donc $F^\perp$ est un supplémentaire de F donc est de dimension 2 : e_3 et e_4 sont libres donc forment une base de $F^\perp$ (famille libre à deux éléments en dimension 2). Finalement, $F^\perp = \text{Vect}(e_3, e_4)$.
3. Puisqu'on connaît une BON de F, la première méthode va s'avérer plus pratique : soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

$$\begin{aligned} p(x) &= \langle x,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle x,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 \\ &= \frac{x+z}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{-y-t}{\sqrt{2}}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ &= \left(\frac{x+z}{2}, \frac{y+t}{2}, \frac{x+z}{2}, \frac{y+t}{2}\right) \end{aligned}$$

si bien que la matrice de p dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. Enfin, si on note x ce vecteur :

$$\begin{aligned} d(x,F) &= \|x - p(x)\| \\ &= \|(1,1,1,0) - (1, 1/2, 1, 1/2)\,\| \\ &= \|(0, 1/2, 0, -1/2)\| \\ &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercice 33 : ✪ Calculer

$$A = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$$

Correction : Notons $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$ avec f_0 la fonction constante égale à 1 et f_1 la fonction $t \mapsto t$, si bien qu'on cherche $d(f_2, F)^2$ avec $f_2 : t \mapsto t^2$ (et on se place sur $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel). Il suffit donc de trouver $p(f_2)$ avec p la projection orthogonale sur F, puisque $A = \|f_2 - p(f_2)\|^2$. Il existe a et b tels que $p(f_2) = bf_0 + af_1$ et on sait que $f_2 - p(f_2)$ est orthogonale à f_0 et f_1. Or,

$$\begin{aligned} \langle f_2 - p(f_2), f_0\rangle &= \langle f_2 - bf_0 - af_1, f_0\rangle \\ &= \int_0^1 (t^2 - b - at) \times 1 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{3} - b - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle f_2 - p(f_2), f_1\rangle &= \langle f_2 - bf_0 - af_1, f_1\rangle \\ &= \int_0^1 (t^2 - b - at) \times t \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4} - \frac{b}{2} - \frac{a}{3} \end{aligned}$$

et ces deux quantités sont nulles donc on a le système suivant :

$$b/2 + a/3 = 1/4 \qquad \text{et} \qquad b + a/2 = 1/3$$

On trouve aisément que $b = -1/6$ et $a = 1$ si bien que $p(f_2) = -f_0/6 + f_1$. Finalement, le minimum est atteint pour $b = -1/6$ et $a = 1$ donc :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (t^2 - t + 1/6)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t^4 + t^2 + \frac{1}{36} - 2t^3 + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{36} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{180} \end{aligned}$$

Exercice 34 - Pour faire ses gammes : ✪✪

1. On se place dans $\mathbb{R}^4$. Quel est le projeté orthogonal du vecteur $u = (2,0,0,4)$ sur l'hyperplan H d'équation $x - y + 2z - 3t = 0$? Quelle est la distance du vecteur u à l'hyperplan H ?
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y/2 = z/3$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur D.
3. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit u un vecteur unitaire de coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base B. Écrire la matrice dans la base B de la projection orthogonale sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équations dans la base canonique :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner une base orthonormée de F.
   (b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.
   (c) Montrer que $d(e_1, F) = \sqrt{\dfrac{7}{10}}$.

5. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. Soit $H = \mathrm{Vect}((1,1,0,1), (-2,0,1,1), (0,1,0,1))$.
   (a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une équation.
   (b) Donner un vecteur normal à H unitaire (pour le produit scalaire canonique).
   (c) Donner la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur H.
6. On se place dans $E = \mathbb{R}^n$. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels non tous nuls. Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur H.
7. Déterminer la projection orthogonale sur H, l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y + 3z = 0$, et donner la matrice canoniquement associée.

Correction :

1. Nous allons utiliser la deuxième stratégie vue en classe. Commençons donc par donner une base (pas forcément orthonormale) de H. Tout d'abord, H est de dimension 3 car hyperplan (car noyau d'une forme linéaire non nulle) de $\mathbb{R}^4$. Une base de H est donnée par $e_1 = (1,1,0,0), e_2 = (2,0,-1,0), e_3 = (3,0,0,1)$ (on montre aisément que c'est une famille libre, et on a une famille libre à trois éléments en dimension 3, ou alors on montre comme au chapitre 28 que $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ donc e_1, e_2, e_3 forment une famille génératrice de H donc une base). Notons $p(u) = ae_1 + be_2 + ce_3$ et utilisons le fait que $u - p(u) \in H^\perp$ donc

$$\langle u - p(u), e_1\rangle = \langle u - p(u), e_2\rangle = \langle u - p(u), e_3\rangle = 0$$

   Or, $u - p(u) = (2,0,0,4) - (a,a,0,0) - (2b,0,-b,0) - (3c,0,0,c) = (2 - a - 2b - 3c, -a, b, 4 - c)$. Par conséquent :

$$\langle u - p(u), e_1\rangle = 2 - 2a - 2b - 3c, \qquad \langle u - p(u), e_2\rangle = 4 - 2a - 5b - 6c \qquad \text{et} \qquad \langle u - p(u), e_3\rangle = 10 - 3a - 6b - 10c$$

   On arrive donc au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2a & + & 2b & + & 3c & = & 2 \\ 2a & + & 5b & + & 6c & = & 4 \\ 3a & + & 6b & + & 10c & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & 3c/2 & = & 1 \\ 2a & + & 5b & + & 6c & = & 4 \\ 3a & + & 6b & + & 10c & = & 10 \end{array}\right. \qquad L_1 \leftarrow L_1/2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & 3c/2 & = & 1 \\ & & 3b & + & 3c & = & 2 \\ & & 3b & + & 21c/2 & = & 7 \end{array}\right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & 3c/2 & = & 1 \\ & & 3b & + & 3c & = & 2 \\ & & & & 15c/2 & = & 5 \end{array}\right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcr} a & & & = & 0 \\ & b & & = & 0 \\ & & c & = & 2/3 \end{array}\right.$$

si bien que $p(u) = 2/3.e_3 = (2,0,0,2/3)$, et donc

$$\begin{aligned} d(u,H) &= \|u - p(u)\| \\ &= \sqrt{\langle u - p(u), u - p(u)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle (2,0,0,10/3), (2,0,0,10/3)\rangle} \\ &= \sqrt{136/9} \end{aligned}$$

2. Une base de D est donnée par $e_1 = (1,2,3)$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Notons $p(u) = ae_1$. Alors $u - p(u) = (x-a, y-2a, z-3a) \in D^\perp$ donc $\langle u - p(u), e_1\rangle = 0$ si bien que :

$$\begin{aligned} x - a + 2(y-2a) + 3(z-3a) &= x + 2y + 3z - 6a \\ &= 0 \end{aligned}$$

si bien que $a = \dfrac{x+2y+3z}{6}$. Dès lors :

$$p : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x+2y+3z}{6}, \frac{x+2y+3z}{3}, \frac{x+2y+3z}{2} \right)$$

si bien que sa matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

3. On sait (cf. cours) que, si $x \in E$, la projection orthogonale de x sur H est $x - \langle x,u\rangle.u$ (car u est unitaire). Par conséquent, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$p(e_i) = e_i - \langle e_i,u\rangle.u$$

Or, $u = u_1e_1 + \cdots + u_ne_n$ et la base B est orthonormée donc

$$\begin{aligned} \langle e_i,u\rangle &= \sum_{j=1}^n u_j \langle e_i,e_j\rangle \\ &= u_i \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} p(e_i) &= e_i - u_i.u \\ &= e_i - u_i(u_1e_1 + \cdots + u_ne_n) \end{aligned}$$

Finalement, la matrice de p dans la base B est :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) & \cdots & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-{u_1}^2 & -u_2u_1 & -u_3u_1 & \cdots & -u_nu_1 \\ -u_1u_2 & 1-{u_2}^2 & -u_3u_2 & \cdots & -u_nu_2 \\ \vdots & -u_2u_3 & 1-{u_3}^2 & \cdots & -u_nu_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -u_nu_{n-1} \\ -u_1u_n & -u_2u_n & -u_3u_n & \cdots & 1-{u_n}^2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_{n-1} \\ e_n \end{array}$$

4. (a) On montre comme au chapitre 28 que $a_1 = (1,-2,1,0)$ et $a_2 = (2,-3,0,1)$ forment une base de F. En faisant comme dans les exercices précédents, on trouve grâce à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt que $\varepsilon_1 = (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 0)$ et $\varepsilon_2 = (2/\sqrt{30}, -1/\sqrt{30}, -4\sqrt{30}, 3/\sqrt{30}))$ forment une BON de F.

(b) On a ici une BON : on va appliquer plutôt la première méthode vue en classe. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} p(u) &= \langle u,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle u,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 \\ &= \left(\frac{x-2y+z}{\sqrt{6}}\right).\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0\right) + \left(\frac{2x-y-4z+3t}{\sqrt{30}}\right).\left(\frac{2}{\sqrt{30}}, -\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right) \\ &= \left(\frac{x-2y+z}{6}\right).(1,-2,1,0) + \left(\frac{2x-y-4z+3t}{30}\right).(2,-1,-4,3) \end{aligned}$$

Dès lors, en calculant $p(e_1), p(e_2), p(e_3), p(e_4)$, on trouve que la matrice canoniquement associée à p est :

$$M = \begin{pmatrix} 3/10 & -2/5 & -1/10 & 1/5 \\ -2/5 & 7/10 & -1/5 & -1/10 \\ -1/10 & -1/5 & 7/10 & -2/5 \\ 1/5 & -1/10 & -2/5 & 3/10 \end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} d(e_1, F) &= \|e_1 - p(e_1)\| \\ &= \|(7/10, -2/5, -1/10, 1/5)\| \\ &= \sqrt{7/10} \end{aligned}$$

5. (a) On peut soit dire que H est de dimension 3 car les trois vecteurs qui l'engendrent sont libres (on le prouve facilement) donc est un hyperplan, mais on va faire du deux en 1 en donnant une équation, ce qui prouvera que H est un hyperplan. On trouve comme au chapitre 28 que H est d'équation $y+z-t=0$ donc est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc est un hyperplan.

(b) Le vecteur $a = (0,1,1,-1)$ est donc normal à H car, pour tout $h = (x,y,z,t) \in H$, $\langle u,h\rangle = 0$. Puisqu'on cherche un vecteur unitaire, il suffit de prendre $u = (0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1\sqrt{3})$.

(c) Comme précédemment et dans le cours, si $v = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, alors $p(v) = v - \langle v,u\rangle.u$ puisque u est unitaire et orthogonal à H, si bien que

$$\begin{aligned} p(v) &= (x,y,z,t) - \left(\frac{y+z-t}{\sqrt{3}}\right).\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= (x,y,z,t) - \left(\frac{y+z-t}{3}\right).(0,1,1,-1) \\ &= \left(x, \frac{2y-z+t}{3}, \frac{-y+2z+t}{3}, \frac{y+z+2t}{3}\right) \end{aligned}$$

et donc la matrice canoniquement associée à p est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

6. Même chose, il suffit de donner un vecteur unitaire u normal à H : $a=(a_1,\dots,a_n)$ est normal à H car, pour tout $h=(x_1,\dots,x_n)\in H$, $\langle a,h\rangle=0$. Notons $N=\sqrt{{a_1}^2+\cdots+{a_n}^2}$ la norme de a, si bien que $u=a/N=(a_1/N,\dots,a_n/N)$ est normal à H et unitaire ($N\neq 0$ car les a_i sont non tous nuls). Il en découle que, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in E$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x-\langle x,u\rangle.u \\ &= (x_1,\dots,x_n)-\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{N}.\left(\frac{a_1}{N},\dots,\frac{a_n}{N}\right) \\ &= (x_1,\dots,x_n)-\frac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{N}.(a_1,\dots,a_n) \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice canoniquement associée à p est :

$$M=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p(e_1) & p(e_2) & p(e_3) & \cdots & p(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-{a_1}^2/N^2 & -a_2a_1/N^2 & -a_3a_1/N^2 & \cdots & -a_na_1/N^2 \\ -a_1a_2/N^2 & 1-{a_2}^2/N^2 & -a_3a_2/N^2 & \cdots & -a_na_2/N^2 \\ \vdots & -a_2a_3/N^2 & 1-{a_3}^2/N^2 & \cdots & -a_na_3/N^2 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -a_na_{n-1}/N^2 \\ -a_1a_n/N^2 & -a_2a_n/N^2 & -a_3a_n/N^2 & \cdots & 1-{a_n}^2/N^2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ e_n \end{array} \end{array}$$

7. Une base de H est donnée par $f_1=(-3,0,1), f_2=(0,-2,1)$. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in E$. Il existe α et β tels que

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha f_1+\beta f_2 \\ &= (-3\alpha,-2\beta,\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Alors $x-p(x)\in H^\perp$ donc est orthogonal à f_1 et f_2. Tout d'abord, $x-p(x)=(x+3\alpha,y+2\beta,z+\alpha+\beta)$. Par conséquent :

$$\langle x-p(x),f_1\rangle=-3x-8\alpha+z+\beta \qquad \text{et} \qquad \langle x-p(x),f_2\rangle=-2y-3\beta+z+\alpha$$

Dès lors :

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & - & 3\beta & = & 2y-z \\ 8\alpha & - & \beta & = & -3x+z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} \alpha & - & 3\beta & = & 2y-z \\ & & 23\beta & = & -3x-16y+9z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha & = & \dfrac{-9x-2y+4z}{23} \\ \beta & = & \dfrac{-3x-16y+9z}{23} \end{array}\right.$$

On en déduit que

$$p(x,y,z)=\frac{-9x-2y+4z}{23}(-3,0,1)+\frac{-3x-16y+9z}{23}(0,-2,1)=\left(\frac{27x+6y-12z}{23},\frac{6x+32y-18z}{23},\frac{-12x-18y+13z}{23}\right)$$

et donc la matrice canoniquement associée à p est :

$$M=\begin{pmatrix} 27/23 & 6/23 & -12/23 \\ 6/23 & 32/23 & -18/23 \\ -12/23 & -18/23 & 12/23 \end{pmatrix}$$

Exercice 35 : ✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que, pour tout $x\in E$, $\|p(x)\|^2=\langle p(x),x\rangle$.
2. Montrer que pour tout base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ de E :

$$\sum_{k=1}^n \|p(e_k)\|^2=\mathrm{rg}(p)$$

Correction :

1. Tout d'abord, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x),p(x)\rangle$. Or, $x - p(x)$ est orthogonal à $p(x)$ donc $\langle x - p(x),p(x)\rangle = 0$ et, par linéarité à gauche, $\langle x,p(x)\rangle - \langle p(x),p(x)\rangle = 0$ donc $\langle p(x),p(x)\rangle = \langle x,p(x)\rangle$ ce qui permet de conclure.
2. Notons S la somme de gauche. D'après la question précédente,

$$S \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} \langle p(e_k),e_k\rangle$$

Notons A la matrice associée à p dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Par conséquent, pour tout k,

$$p(e_k) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,k} e_i$$

et la base est orthonormée donc

$$\langle p(e_k),e_k\rangle = A_{k,k}$$

si bien que

$$S = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$$

et donc $S = \operatorname{tr}(p)$. Or, p est projecteur donc (cf. cours) a un rang égal à sa trace, ce qui permet de conclure.

Exercice 36 : ✪✪ Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ avec le produit scalaire défini, pour tous $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} b_i X^i$, par :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{3} a_i b_i$$

1. Donner une base orthonormale de $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$.
2. Montrer que $d(X, H) = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer plus généralement que, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini, pour tous $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_i X^i$, par :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$$

si on note encore $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \,|\, P(1) = 0\}$, alors $d(X, H) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. On pourra commencer par prouver que $U = 1 + X + \cdots + X^n$ est un vecteur normal à H.

Correction :

1. Un polynôme P appartient à H si et seulement s'il est divisible par $X - 1$ donc si et seulement s'il s'écrit sous la forme

$$P = (aX^2 + bX + c)(X - 1) = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1)$$

si bien que $H = \text{Vect}(X^2(X-1), X(X-1), (X-1))$ donc ces trois polynômes forment une famille génératrice de H donc une base car famille libre car échelonnée en degré. Posons donc $P_1 = X - 1, P_2 = X(X-1) = X^2 - X, P_3 = X^2(X-1) = X^3 - X^2$. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

On a $\|P_1\| = \sqrt{2}$ donc on pose $\varepsilon_1 = \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$. Posons à présent

$$\begin{aligned}
u_2 &= P_2 - \langle P_2,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 \\
&= X^2 - X + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{X-1}{\sqrt{2}} \\
&= X^2 - X + \frac{X-1}{2} \\
&= X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

et $\|u_2\| = \sqrt{3/2}$ donc on pose

$$\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(X^2 - \frac{X}{2} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2X^2}{\sqrt{6}} - \frac{X}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Enfin, on pose

$$\begin{aligned}
u_3 &= P_3 - \langle P_3,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 - \langle P_3,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 \\
&= X^3 - X^2 + 0.\varepsilon_1 + \frac{2}{\sqrt{6}} \times \left(\frac{2X^2}{\sqrt{6}} - \frac{X}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \\
&= X^3 - X^2 + \frac{2X^2}{3} - \frac{X}{3} - \frac{1}{3} \\
&= X^3 - \frac{X^2}{3} - \frac{X}{3} - \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

et il suffit de poser

$$\begin{aligned}
\varepsilon_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(X^3 - \frac{X^2}{3} - \frac{X}{3} - \frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{3X^3}{2\sqrt{3}} - \frac{X^2}{2\sqrt{3}} - \frac{X}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

pour que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ soit une BON de H.

2. Puisqu'on a une BON de H, c'est assez simple :

$$\begin{aligned}
p(X) &= \langle X,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle X,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 + \langle X,\varepsilon_3\rangle\varepsilon_3 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X-1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2X^2}{\sqrt{6}} - \frac{X}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{3X^3}{2\sqrt{3}} - \frac{X^2}{2\sqrt{3}} - \frac{X}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{X-1}{2} + \frac{-2X^2+X+1}{6} + \frac{-3X^3+X^2+X+1}{12} \\
&= \frac{-3X^3-3X^2+9X-3}{12} \\
&= \frac{-X^3-X^2+3X-1}{4}
\end{aligned}$$

et donc

$$X - p(X) = \frac{X^3+X^2+X+1}{4}$$

si bien que $d(X,H) = \|X - p(X)\| = 1/2$.

3. Il est immédiat que U est un vecteur normal à H : en effet, U est non nul et, si $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in H$, alors

$$\begin{aligned} \langle P,U\rangle &= \sum_{i=0}^{n} a_i \times 1 \\ &= P(1) \end{aligned}$$

ce qui est bien nul par définition de H. Il est alors facile de calculer $d(X,H)$: d'après le cours, U étant un vecteur normal, cette distance est égale à

$$d(X,H) = \frac{|\langle X,U\rangle|}{\|U\|}$$

Or, un calcul immédiat prouve que $\langle X,U\rangle = 1$ et $\|U\| = \sqrt{n+1}$, d'où le résultat.

Exercice 37 : ✪✪

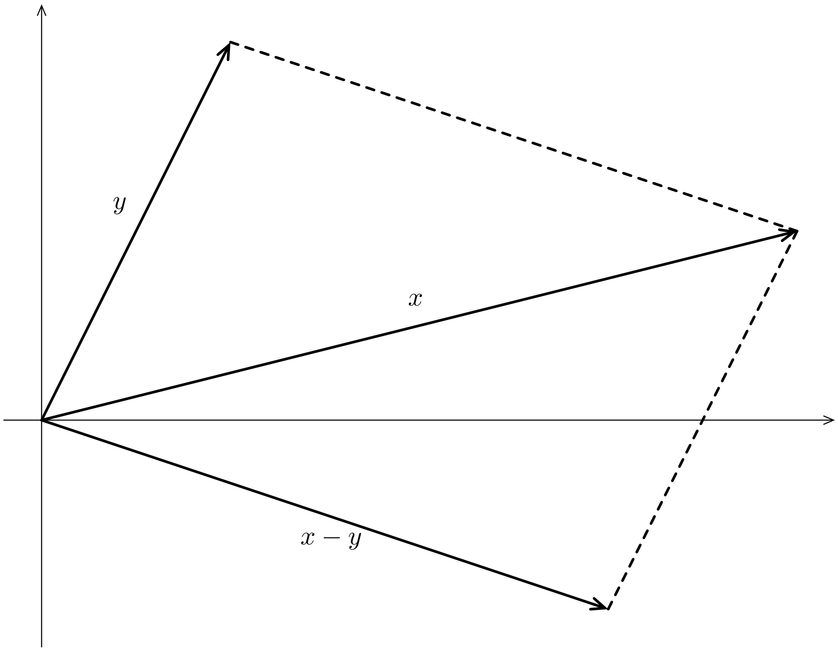
1. Soit $(x,y) \in E^2$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.
2. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Montrer que E_1 et E_2 sont orthogonaux si et seulement si, pour tout x, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Ainsi, les projections orthogonales sont les seules qui diminuent les distances.

Correction :

1. Supposons x et y orthogonaux et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors x et λy sont orthogonaux donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + \|\lambda y\|^2 \geq \|x\|^2$$

et la racine carrée est croissante donc $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$. Réciproquement, supposons que x et y ne soient pas orthogonaux (en particulier, y est non nul puisque le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur) et prouvons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x + \lambda y < \|x\|$.



Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2$$

Dès lors :

$$\begin{aligned} \|x + \lambda y\|^2 < \|x\|^2 \quad &\iff \quad 2\lambda\langle x,y\rangle + \lambda^2\|y\|^2 < 0 \\ &\iff \quad \lambda(2\langle x,y\rangle + \lambda\|y\|^2) < 0 \end{aligned}$$

On a un trinôme du second degré de coefficient dominant strictement positif avec deux racines distinctes (0 et $-2\langle x,y\rangle/\|y\|^2$ qui sont distinctes car $\langle x,y\rangle \neq 0$ puisque x et y ne sont pas orthogonaux) donc est strictement négatif entre ses racines : en particulier, il existe λ tel que cette quantité soit strictement négative (on peut même donner une valeur explicite, par exemple $\langle x,y\rangle/\|y\|^2$), ce qui permet de conclure.

2. Supposons E_1 et E_2 orthogonaux. Alors, pour tout x,

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in E_1} + \underbrace{(x - p(x))}_{\in E_2}$$

et donc $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux donc, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$$

et donc $\|x\| \geq \|p(x)\|$ par croissance de la racine carrée. Réciproquement, supposons E_1 et E_2 non orthogonaux, et soient $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ non orthogonaux. D'après la question précédente, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|x_1 + \lambda x_2\| < \|x_1\|$. Or, par définition de la projection sur E_1 parallèlement à E_2, si on note $x = x_1 + \lambda x_2$, alors $p(x) = x_1$ donc $\|p(x)\| > \|x\|$, ce qui permet de conclure.

Exercice 38 : ✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, on note s_{E_1} la symétrie orthogonale par rapport à E_1. Montrer que si F et G sont orthogonaux, alors $s_F \circ s_G = s_{(F+G)^\perp}$.

Correction :

1. Soit $x \in (F+G)^\perp$. Alors x est orthogonal à tout élément de $F+G$, et puisque F et G sont inclus dans $F+G$, alors x appartient à $F^\perp$ et à $G^\perp$, donc à leur intersection : on en déduit l'inclusion $(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$. Réciproquement, soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, et soit $y \in F+G$: alors il existe $y_1 \in F$ et $y_2 \in G$ tels que $y = y_1 + y_2$. Or, par linéarité à droite,

$$\langle x,y\rangle = \langle x,y_1\rangle + \langle x,y_2\rangle = 0$$

puisque x est orthogonal à y_1 et à y_2, ce qui prouve l'inclusion réciproque, et l'égalité. En appliquant ce qui précède à $F^\perp$ et $G^\perp$ (penser à truc et machin) :

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = \left(F^\perp\right)^\perp \cap \left(G^\perp\right)^\perp$$

Or, on est en dimension finie donc l'orthogonal de l'orthogonal est l'espace de départ donc :

$$\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp = F \cap G$$

donc

$$\left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = (F \cap G)^\perp$$

ce qui permet de conclure puisque

$$\left(\left(F^\perp + G^\perp\right)^\perp\right)^\perp = F^\perp + G^\perp$$

2. Il suffit de prouver que ces deux applications linéaires coïncident sur deux espaces vectoriels supplémentaires, et on va prendre $F+G$ et $(F+G)^\perp$. Soit donc $x \in (F+G)^\perp$. D'après ce qui précède, $x \in G^\perp$ et $x \in F^\perp$ donc $s_G(x) = -x$ et donc $s_F(-x) = x$ donc $s_F \circ s_G(x) = x = s_{(F+G)^\perp}(x)$.

   Supposons enfin que $x \in F+G$. Alors x s'écrit sous la forme $f+g$ avec $f \in F$ et $g \in G$. Or, f et g sont orthogonaux donc $s_G(x) = g - f$ et $s_F(g-f) = -g-f = -x$ donc $s_F \circ s_G(x) = -x = s_{(F+G)^\perp}(x)$ ce qui permet de conclure.

Exercice 39 : ✪✪ On rappelle que, dans $\mathscr{C}([-1;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel, P et I, respectivement les ensembles des fonctions paires et impaires, sont supplémentaires orthogonaux. Donner la distance de $f \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à P.

Correction : Attention, ici, on est en dimension infinie ! On ne peut donc pas raisonner comme d'habitude puisqu'on ne peut pas donner une base de P. Cependant, ici, inutile puisqu'on connaît déjà la projection sur P ! En effet, pour toute fonction f, alors $p(f)$ (la projection orthogonale de f sur P) est la fonction

$$p(f) : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

si bien que pour la fonction f de l'énoncé :

$$p(f) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2-x}\right)$$

et donc

$$f - p(f) : x \mapsto \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)$$

(c'est-à-dire la partie impaire). Dès lors :

$$\begin{aligned}
d(f,P) &= \|f-p(f)\| \\
&= \sqrt{\langle f-p(f), f-p(f)\rangle} \\
&= \sqrt{\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)^2 \mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{2}{(2+x)(2-x)} + \frac{1}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2+x)^2} - \frac{2}{4-x^2} + \frac{1}{(2-x)^2}\,\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)^2} &= \left[-\frac{1}{2+x}\right]_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{3}+1 \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

et on trouve de même que

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)^2} = \frac{2}{3}$$

Enfin, une rapide décomposition en éléments simples donne :

$$\frac{2}{(2+x)(2-x)} = \frac{1}{2(2+x)} + \frac{1}{2(2-x)}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{2\,\mathrm{d}x}{(2+x)(2-x)} &= \left[\frac{\ln(2+x)}{2} - \frac{\ln(2-x)}{2}\right]_{-1}^{1} \\
&= \ln(3)
\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
d(f,P) &= \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}-\ln(3)+\frac{2}{3}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{1}{3}-\frac{\ln(3)}{4}}
\end{aligned}$$

Exercice 40 : ✪✪ Déterminer

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_1^2 x^2(\ln(x)-ax-b)^2\,\mathrm{d}x$$

Correction : On cherche donc

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_1^2 (x\ln(x) - ax^2 - bx)^2 \,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire qu'on cherche $d(g,F)^2$ où $g : x \mapsto x\ln(x)$ et $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 : x \mapsto x$ et $f_2 : x \mapsto x^2$ (on se place évidemment dans $E = \mathscr{C}([\,1\,;2\,],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel), c'est-à-dire qu'on cherche $\|g - p(g)\|^2$ où p est la projection orthogonale sur F. Il existe donc a et b tels que $p(g) = af_2 + bf_1$ si bien que

$$\begin{aligned} \langle g - p(g), f_1\rangle &= \int_1^2 (x\ln(x) - ax^2 - bx) \times x \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 (x^2\ln(x) - ax^3 - bx^2) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, à l'aide d'une IPP, on trouve que

$$\int_1^2 x^n \ln(x) \,\mathrm{d}x = \frac{2^{n+1}\ln(2)}{n+1} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

si bien que

$$\int_1^2 x^2 \ln(x) \,\mathrm{d}x = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9} \qquad \text{et} \qquad \int_1^2 x^3 \ln(x) \,\mathrm{d}x = 4\ln(2) - \frac{15}{16}$$

On en déduit donc que

$$\langle g - p(g), f_1\rangle = \frac{8\ln(2)}{3} - \frac{7}{9} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2}$$

et on trouve de même que

$$\langle g - p(g), f_2\rangle = 4\ln(2) - \frac{15}{16} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3}$$

Comme précédemment, $g - p(g) \in F^\perp$ donc $g - p(g)$ est orthogonal à f_1 et f_2, c'est-à-dire que les deux produits scalaires ci-dessus sont nuls : a et b sont donc solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} a/3 & + & b/2 & = & 8\ln(2)/3 - 7/9 \\ a/4 & + & b/3 & = & 4\ln(2) - 15/16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcl} a & + & 3b/2 & = & 8\ln(2) - 7/3 \\ a/4 & + & b/3 & = & 4\ln(2) - 15/16 \end{array}\right.$$

On trouve $a = 80\ln(2) - 181/12$ et $b = 17/2 - 48\ln(2)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 x^2(\ln(x) - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 x^2\ln(x)^2 - 2ax^3\ln(x) - 2bx^2\ln(x) + 2abx^3 \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Or, à l'aide de deux IPP (ou d'une IPP et du calcul de l'intégrale de $x^2\ln(x)$ vu plus haut), on trouve que

$$\int_1^2 x^2 \ln(x)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{8\ln(2)^2}{3} - \frac{4\ln(2)}{9} + \frac{14}{27}$$

ce qui permet de conclure (flemme...).

Exercice 41 : ✪✪ Donner la valeur de

$$A = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(x^3 - a - bx - cx^2\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

Correction : On se place sur $\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel. Comme précédemment : notons $f_i : x \mapsto x^i$ si bien que $A = d(f_3, F)^2$ avec $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1, f_2)$, donc $A = \|f_3 - p(f_3)\|^2$: il suffit donc de calculer $p(f_3)$, et on fait cela comme d'habitude : il existe a, b, c tels que $p(f_3) = af_2 + bf_1 + cf_0$ si bien que

$$\begin{aligned} \langle f_3 - p(f_3), f_0\rangle &= \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times 1 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4} - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - c \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\langle f_3 - p(f_3), f_1\rangle &= \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5} - \frac{a}{4} - \frac{b}{3} - \frac{c}{2}\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\langle f_3 - p(f_3), f_2\rangle &= \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c) \times t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{6} - \frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{c}{3}\end{aligned}$$

Or, on sait que $f_3 - p(f_3) \in F^\perp$ donc est orthogonal à f_0, f_1, f_2 si bien que ces trois produits scalaires sont nuls : a, b, c sont donc solutions du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a/3 & + & b/2 & + & c & = & 1/4 \\ a/4 & + & b/3 & + & c/2 & = & 1/5 \\ a/5 & + & b/4 & + & c/3 & = & 1/6 \end{array}\right.$$

On trouve $a = 3/2, b = -3/5$ et $c = 1/20$ si bien que $p(f_3) = 3/2f_2 - 3/5f_1 + 1/20f_0$ et donc

$$\begin{aligned}A &= d(f_3, F)^2 \\ &= \|f_3 - p(f_3)\|^2 \\ &= \int_0^1 \left(t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{3t}{5} - \frac{1}{20}\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2800}\end{aligned}$$

Bon, là, OK, les calculs sont un peu moches...

Exercice 42 : ✪✪✪✪ On suppose que $n \geq 2$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit U la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|$$

Correction : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comme précédemment, on cherche $A = d(M, F)$ où $F = \mathrm{Vect}(I_n, U)$, donc $A = \|M - p(M)\|$ où p est la projection orthogonale sur F. Ici, il n'y a que deux éléments dans la base de F : on peut l'orthonormaliser grâce au procédé de Gram-Schmidt. Rappelons que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^\top \times B\right)$. Par conséquent, on a $\langle I_n, I_n\rangle = n$ donc $\|I_n\| = \sqrt{n}$, donc on pose $\varepsilon_1 = I_n/\sqrt{n}$. Posons ensuite

$$\begin{aligned}u_1 &= U - \langle U, \varepsilon_1\rangle \varepsilon_1 \\ &= U - \mathrm{tr}\left(U^\top \times \frac{I_n}{\sqrt{n}}\right)\frac{I_n}{\sqrt{n}} \\ &= U - \frac{1}{n}.(\mathrm{tr}\,(U)).I_n \\ &= U - I_n\end{aligned}$$

c'est-à-dire que u_1 est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, comme dans l'exercice 15 du chapitre 21 :

$$u_1{}^\top \times u_1 = u_1{}^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & n-2 & \dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n-2 & n-2 & \dots & n-1 & n-2 \\ n-2 & n-2 & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$$

si bien que

$$\begin{aligned} \|u_1\| &= \sqrt{\operatorname{tr}\left(u_1{}^\top \times u_1\right)} \\ &= \sqrt{n(n-1)} \end{aligned}$$

On pose donc $\varepsilon_2 = u_2/\sqrt{n(n-1)}$ c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & \dots & 1/\sqrt{n(n-1)} \\ 1/\sqrt{n(n-1)} & 0 & 1/\sqrt{n(n-1)} & \dots & 1/\sqrt{n(n-1)} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & \dots & 0 & 1/\sqrt{n(n-1)} \\ 1/\sqrt{n(n-1)} & 1/\sqrt{n(n-1)} & \dots & 1/\sqrt{n(n-1)} & 0 \end{pmatrix}$$

et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une BON de F, si bien que $p(M) = \langle M,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 + \langle M,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2$. Or :

$$\begin{aligned} \langle M,\varepsilon_1\rangle\varepsilon_1 &= \langle M, I_n/\sqrt{n}\rangle I_n/\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{n}\langle M, I_n\rangle I_n \\ &= \frac{1}{n} \times \operatorname{tr}(M)\, I_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle M,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 &= \langle M, u_2/\sqrt{n(n-1)}\rangle I_n/\sqrt{n(n-1)} \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\langle M, u_2\rangle u_2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\operatorname{tr}\left((u_2)^\top M\right) u_2 \\ &= \frac{1}{n(n-1)}\operatorname{tr}(u_2 M)\, u_2 \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$:

$$\begin{aligned} (u_2 M)_{i,i} &= \sum_{k=1}^{n} (u_2)_{i,k} M_{k,i} \\ &= \sum_{k \neq i} M_{k,i} \end{aligned}$$

puisque tous les coefficients de u_2 valent 1 sauf ses coefficients diagonaux qui sont nuls. Dès lors, la trace de $u_2 M$ vaut

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i} M_{k,i}$$

si bien que

$$\langle M,\varepsilon_2\rangle\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & T/n(n-1) & T/n(n-1) & \dots & T/n(n-1) \\ T/n(n-1) & 0 & T/n(n-1) & \dots & T/n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ T/n(n-1) & T/n(n-1) & \dots & 0 & T/n(n-1) \\ T/n(n-1) & T/n(n-1) & \dots & T/n(n-1) & 0 \end{pmatrix}$$

Finalement, en posant $T = \operatorname{tr}(M)$:

$$p(M) = \begin{pmatrix} T/n & S/n(n-1) & S/n(n-1) & \dots & S/n(n-1) \\ S/n(n-1) & T/n & S/n(n-1) & \dots & S/n(n-1) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ S/n(n-1) & S/n(n-1) & \dots & T/n & S/n(n-1) \\ S/n(n-1) & S/n(n-1) & \dots & S/n(n-1) & T/n \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{aligned} A &= \|M - p(M)\| \\ &= \sqrt{\langle M - p(M), M - p(M)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle M, M - p(M)\rangle - \langle p(M), M - p(M)\rangle} \end{aligned}$$

Or, $M - p(M)$ est orthogonal à F donc le deuxième produit scalaire est nul, si bien que

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\langle M, M - p(M)\rangle} \\ &= \sqrt{\langle M, M\rangle - \langle M, p(M)\rangle} \end{aligned}$$

On a

$$\langle M, M\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {M_{i,j}}^2$$

et $\langle M, p(M)\rangle = \mathrm{tr}\,(p(M) \times M)$ car $p(M)$ est symétrique, et on trouve comme précédemment que la trace de cette patrice vaut

$$\sum_{i=1}^n \frac{TM_{i,i}}{n} + \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \frac{SM_{i,j}}{n(n-1)} = \frac{T}{n} \times \sum_{i=1}^n M_{i,i} + \frac{S}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} M_{i,j}$$

et en se rappelant les définitions de T et S, on trouve que

$$\langle M, p(M)\rangle = \frac{T^2}{n} + \frac{S^2}{n(n-1)}$$

Finalement, on trouve :

$$A = \sqrt{\|M\|^2 - \frac{T^2}{n} - \frac{S^2}{n(n-1)}}$$

où

$$\|M\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {M_{i,j}}^2, T = \sum_{i=1}^n M_{i,i} = \mathrm{tr}\,(M) \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} M_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}\right) - \mathrm{tr}\,(M)$$

34.5 Polynômes orthogonaux

Exercice 43 - Polynômes orthogonaux : ✪✪✪ Soient $a < b$ deux réels et w continue sur $[\,a\,;b\,]$, strictement positive sur $]\,a\,;b\,[$.

1. Montrer que

$$\langle\,,\,\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}[X]^2 \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) \longmapsto & \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une unique famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \qquad \text{et} \qquad \langle P_n, X^n\rangle > 0$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et est scindé à racines simples toutes dans $]\,a\,;b\,[$. On pourra considérer $Q = (X - \alpha_1) \times \dots \times (X - \alpha_r)$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont les racines distinctes d'ordre impair de P qui appartiennent à $]\,a\,;b\,[$.

3. Montrer que Soit $n \geq 2$. Montrer que XP_{n-1} appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-3}[X]$. En déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aP_n + XP_{n-1} + bP_{n-1} + cP_{n-2} = 0$.

Remarque : Selon le choix de $[\,a\,;b\,]$ et de la fonction de poids w, on va obtenir différentes familles de polynômes orthogonaux. Les exercices suivants présentent quelques exemples.

Correction : Rappelons que, dans ce chapitre, quand on dit qu'un vecteur ou un polynôme est unitaire, cela signifie qu'il est de norme 1 pour la norme associée au produit scalaire, pas qu'il a un coefficient dominant égal à 1.

1. La symétrie et la bilinéarité sont immédiates. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\langle P,P\rangle = \int_a^b P(t)^2 w(t)\,\mathrm{d}t$$

Puisque P^2 et w sont positives, par positivité de l'intégrale, $\langle P,P\rangle \geq 0$. Supposons enfin $\langle P,P\rangle = 0$. On a l'intégrale d'une fonction positive continue qui est nulle donc la fonction intégrée est nulle. Or, w est strictement positive sur $]\,a\,;b\,[$ donc P est nul sur $]\,a\,;b\,[$: P a une infinité de racines donc est le polynôme nul, d'où la définie positivité.

2. Attention, on rappelle qu'il n'y a pas unicité dans l'orthonormalisation de Gram-Schmidt (et en plus nous avons prouvé le résultat uniquement en dimension finie dans le cours), mais quand on impose que $\langle P_n,X^n\rangle$ soit positif, il y a alors unicité. Montrons cela par récurrence (en adaptant la preuve faite en classe).

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'une telle famille existe.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « il existe un unique P_n unitaire orthogonal à $(P_1,\dots,P_{n-1})$ tel que $\deg(P_n) = n$ et $\langle P_n,X^n\rangle > 0$ ».
- Analyse : Si P_0 convient. Puisque $\deg(P_0) = 0$ alors P_0 est constant donc il existe λ tel que $P_0 = \lambda = \lambda.1$. Tout d'abord, $\langle P,1\rangle = \lambda\langle 1,1\rangle = \lambda\|1\|^2$ et puisque $\langle P,1\rangle > 0$, alors $\lambda > 0$. De plus, P_0 est unitaire alors $\|P_0\| = 1$ mais

$$\begin{aligned}\|P_0\|^2 &= \|\lambda.1\|^2 \\ &= \lambda^2\|1\|^2\end{aligned}$$

si bien que $\lambda^2 = 1/\|1\|^2$ et $\lambda > 0$ donc $\lambda = 1/\|1\|$ et donc $P = 1/\|1\|$.

Synthèse : immédiate. Donc H_1 est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $H_0,\dots,H_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $(P_0,\dots,P_n)$ orthonormale (car chaque vecteur est unitaire et orthogonal aux précédents) telle que pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $\deg(P_k) = k$ et $\langle P_k,X^k\rangle > 0$. On cherche donc P_{n+1} unitaire orthogonal à $P_0,\dots,P_n$ et de degré $n+1$.
  - ⋆ **Analyse :** Si P_{n+1} convient. On montre comme d'habitude (famille libre car échelonnée en degré avec le bon nombre d'éléments) que $(P_0,\dots,P_n,X^{n+1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$. Alors il existe $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que

$$P_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P_i + \alpha_{n+1} X^{n+1}$$

Or, P_{n+1} est orthogonal à $(P_0,\dots,P_n)$ donc, pour tout $j \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$,

$$\begin{aligned}\langle P_{n+1},P_j\rangle = 0 &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \underbrace{\langle P_i,P_j\rangle}_{=\delta_{i,j}} + \alpha_{n+1}\langle X^{n+1},P_j\rangle \\ &= \alpha_j + \alpha_{n+1}\langle X^{n+1},P_j\rangle\end{aligned}$$

si bien que $\alpha_j = -\alpha_{n+1}\langle X^{n+1},P_j\rangle$.
En d'autres termes, $P_{n+1} = \alpha_{n+1}u_{n+1}$ où

$$u_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle X^{n+1},P_i\rangle P_i$$

Or, P_{n+1} est unitaire donc $\|P_{n+1}\| = 1 = |\alpha_{n+1}| \times \|u_{n+1}\|$ si bien que $\alpha_{n+1} = \pm 1/\|u_{n+1}\|$. Or,

$$\begin{aligned}\|P_{n+1}\|^2 &= \langle P_{n+1},P_{n+1}\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i\langle P_i,P_{n+1}\rangle + \alpha_{n+1}\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle \\ &= \alpha_{n+1}\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

car P_{n+1} est orthogonal aux autres P_i, c'est-à-dire que $\alpha_{n+1} = \|P_{n+1}\|^2/\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle > 0$ et donc $\alpha_{n+1} = 1/\|u_{n+1}\|$ (le cas $\alpha_{n+1} = -1/\cdots$ est exclu) c'est-à-dire que :

$$P_{n+1} = \frac{1}{\|u_{n+1}\|}.u_{n+1} \qquad \text{où} \qquad u_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle X^{n+1},P_i\rangle P_i$$

$\star$ **Synthèse :** Soit

$$u_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{i=0}^{n} \langle X^{n+1},P_i\rangle P_i$$

et soit $P_{n+1} = \dfrac{1}{\|u_{n+1}\|}.u_{n+1}$. En effet, u_{n+1} est non nul : si $u_{n+1} = 0$, alors X^{n+1} est CL de $P_0, \dots, P_n$ ce qui est absurde pour des raisons de degré. On en déduit que $u_{n+1} \neq 0$ si bien que $P_{n+1} = u_{n+1}/\|u_{n+1}\|$ est bien défini et unitaire. Il est de plus orthogonal à $P_0, \dots, P_n$: en effet, pour tout $j \in [\![0 \,;\, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1},P_j\rangle &= \frac{1}{\|u_{n+1}\|}\left(\langle X^{n+1},P_j\rangle - \sum_{i=0}^{n}\langle X^{n+1},P_i\rangle \underbrace{\langle P_i,P_j\rangle}_{=\delta_{i,j}}\right) \\
&= \frac{1}{\|u_{n+1}\|}\left(\langle X^{n+1},P_j\rangle - \langle X^{n+1},P_j\rangle\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que P_{n+1} est orthogonal à $P_0, \dots, P_n$ et unitaire. Enfin,

$$\begin{aligned}
\langle P_{n+1},P_{n+1}\rangle &= \frac{1}{\|u_{n+1}\|}\left(\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle - \sum_{i=0}^{n}\langle X^{n+1},P_i\rangle \underbrace{\langle P_i,P_{n+1}\rangle}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{\|u_{n+1}\|}\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle
\end{aligned}$$

et donc $\langle X^{n+1},P_{n+1}\rangle = \|u_{n+1}\| \times \|P_{n+1}\|^2 > 0$ ce qui clôt la récurrence.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$. P_n est donc de degré n, montrons qu'il est scindé à racines simples. D'après le théorème de factorisation sur $\mathbb{R}$, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (ses racines de multiplicité impaire appartenant à $]\,a\,;b\,[$) et $\beta_1, \dots, \beta_q$ (ses autres racines) réels distincts, $n_1, \dots, n_r, p_1, \dots, p_q$ des entiers naturels et enfin $B_1, \dots, B_s$ des trinômes de discriminant strictement négatif (pas forcément distincts, ou alors on les suppose distincts et on les met à une certaine puissance) tels que

$$P_n = a_n(X-\alpha_1)^{2n_1+1} \times \cdots \times (X-\alpha_r)^{2n_r+1} \times (X-\beta_1)^{p_1} \times \cdots \times (X-\beta_q)^{p_q} \times B_1 \times \cdots B_s$$

Par conséquent, en prenant le même Q que dans l'énoncé :

$$P_n \times Q = a_n(X-\alpha_1)^{2n_1+2} \times \cdots \times (X-\alpha_r)^{2n_r+2} \times (X-\beta_1)^{p_1} \times \cdots \times (X-\beta_q)^{p_q} \times B_1 \times \cdots B_s$$

c'est-à-dire que $P_n \times Q$ est de signe constant sur $]\,a\,;b\,[$ (les autres termes ne s'annulent pas sur $]\,a\,;b\,[$ donc le signe ne change pas par continuité). Supposons que $r < n$. Alors P_n est orthogonal à $P_0, \dots, P_r$ qui forment une base de $\mathbb{R}_r[X]$ (même raisonnement que d'habitude) donc est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_r[X]$ donc à Q, donc

$$\int_a^b P_n(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

On a l'intégrale d'une fonction continue qui est de signe constant qui n'est pas la fonction nulle ce qui est absurde. On en déduit que $r = n = \deg(P_n)$: on en déduit qu'il n'y a pas d'autre terme dans la décomposition de P_n, donc P_n n'a pas d'autre racine complexe, donc est scindé et toutes ses racines appartiennent à $]\,a\,;b\,[$, et que toutes les multiplicités sont égales à 1 car on a n racines distinctes et un polynôme de degré 1.

3. P_{n-1} est de degré $n-1$ donc XP_{n-1} est de degré n donc appartient à $\mathbb{R}_n[X]$. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle XP_{n-1},Q\rangle &= \int_a^b tP_{n-1}(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b P_{n-1}(t) \times tQ(t)w(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \langle P_{n-1},XQ\rangle
\end{aligned}$$

Or, P_{n-1} est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ donc à XQ car $Q \in \mathbb{R}_{n-3}[X]$ si bien que ce produit scalaire est nul. Finalement, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ forme une BON de $\mathbb{R}_n[X]$ donc

$$XP_{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \langle XP_{n-1}, P_i \rangle P_i$$

et, d'après ce qu'on vient de voir, $\langle XP_{n-1}, P_i \rangle = 0$ si $i \leq n-3$ si bien que

$$XP_{n-1} = \langle XP_{n-1}, P_{n-2} \rangle P_{n-2} + \langle XP_{n-1}, P_{n-1} \rangle P_{n-1} + \langle XP_{n-1}, P_n \rangle P_n$$

ce qui permet de conclure en posant

$$a = -\langle XP_n, P_n \rangle, b = -\langle XP_{n-1}, P_{n-1} \rangle \qquad \text{et} \qquad c = -\langle XP_{n-2}, P_{n-2} \rangle$$

Exercice 44 - Polynômes de Legendre : ✪✪✪ On prend les notations de l'exercice précédent avec $a = -1$, $b = 1$ et w la fonction constante égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n = \frac{1}{2^n \times n!} \times \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dX}^n} \left[\left(X^2 - 1 \right)^n \right] = \frac{1}{2^n \times n!} \times \left[\left(X^2 - 1 \right)^n \right]^{(n)}$$

On surveillera bien sa main pour qu'elle ne confonde pas puissances et dérivées.

1. Calculer L_0, L_1, L_2. Pour tout n, préciser le degré de L_n, son coefficient dominant.
2. Montrer que, pour tout n pair (respectivement impair), L_n ne contient que des termes de degré pair (respectivement impair).
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle L_n, P \rangle = 0$. Déterminer $\|L_n\|$. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que L_n est scindé à racines simples toutes dans $]-1\,;1[$. Montrer ce résultat directement (on pourra commencer par trouver les racines de $\left[(X^2-1)^n\right]'$).
4. Pour tout $n \geq 1$, calculer $L_n(1)$.
5. Soit $n \geq 2$. On note $A = nL_n - (2n-1)XL_{n-1}$.
   (a) Justifier que $\deg(A) \leq n-2$ (on pourra utiliser la question 2).
   (b) Montrer que A est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-3}[X]$.
   (c) Montrer finalement que $nL_n = (2n-1)XL_{n-1} - (n-1)L_{n-2}$.
6. **Remake :** On prend $a = 0, b = 1$ et w constante égale à 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note L_k la dérivée k-ième de $[X(X-1)]^k$. Montrer que la famille $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est orthogonale et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L_k\|^2 = \dfrac{k!^2}{2k+1}$.

Correction :

1. Tout d'abord, $L_0 = \dfrac{1}{2^0 \times 0!}(X^2-1)^0 = 1$. Ensuite :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2^1 \times 1!} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dX}}(X^2-1) \\ &= \frac{1}{2} \times 2X \\ &= X \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2^2 \times 2!} \times \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dX}^2}\left[(X^2-1)^2\right] \\ &= \frac{1}{8} \times \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dX}^2}\left[X^4 - 2X^2 + 1\right] \\ &= \frac{1}{8} \times (12X^2 - 4) \\ &= \frac{1}{2}(3X^2 - 1) \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$(X^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{2k}$$

c'est-à-dire que $(X^2-1)^n$ est de degré $2n$ de coefficient dominant 1, et en dérivant n fois, $\left[(X^2-1)\right]^{(n)}$ est de degré n de coefficient dominant

$$2n \times (2n-1) \times \cdots \times (n+1) = \frac{(2n)!}{n!}$$

si bien que L_n est de degré n de coefficient dominant

$$\frac{(2n)!}{n! \times 2^n \times n!} = \frac{1}{2^n} \times \binom{2n}{n}$$

2. D'après la question précédente, $(X^2-1)^n$ ne contient que des termes pairs donc, si on dérive un nombre pair de fois, il n'y a que des puissances paires, et si on dérive un nombre impair de fois, il n'y a que des puissances impaires. On utilise dans cette question et la précédente le fait que, si $d \in \mathbb{N}$ et $k \leq d$,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dX}^2}(X^d) = d(d-1)\cdots(d-k+1)X^{d-k}$$

3. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. À l'aide d'une IPP (on dérive P et on intègre la dérivée n-ième de $(X^2-1)^n$, ce qui donne sa dérivée $(n-1)$-ième) :

$$\langle L_n, P\rangle \quad = \quad \frac{1}{2^n \times n!} \times \left(\left[P(t) \times \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left((t^2-1)^n\right) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P'(t) \times \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} \left((t^2-1)^n\right) \,\mathrm{d}t \right)$$

Or, $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ si bien que ± 1 sont racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicité n, si bien que toutes les dérivées jusque l'ordre $n-1$ sont nulles en ± 1. On en déduit que le crochet ci-dessus est nul et donc :

$$\langle L_n, P\rangle \quad = \quad \frac{-1}{2^n \times n!} \times \int_{-1}^{1} P'(t) \times \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}} \left((t^2-1)^n\right) \,\mathrm{d}t$$

On refait une IPP, et le crochet est encore nul car $\left((X^2+1)^n\right)^{n-2}$ est nul en ± 1, ce qui donne (on alterne les ± 1 au numérateur de la fraction) :

$$\langle L_n, P\rangle \quad = \quad \frac{1}{2^n \times n!} \times \int_{-1}^{1} P''(t) \times \frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}t^{n-2}} \left((t^2-1)^n\right) \,\mathrm{d}t$$

On itère le procédé jusqu'à l'ordre n, c'est-à-dire qu'on effectue n IPP (on a dérivé n fois P, et on a intégré n fois la dérivée n-ième, et les crochets sont toujours nuls) :

$$\langle L_n, P\rangle \quad = \quad \frac{(-1)^n}{2^n \times n!} \times \int_{-1}^{1} P^{(n)}(t) \times (t^2-1)^n \,\mathrm{d}t$$

et $P^{(n)} = 0$ car P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, si bien que ce produit scalaire est nul. Avec le même raisonnement (n IPP successives et les crochets sont tous nuls, donc l'un des L_n se transforme en dérivée $2n$-ième et l'autre en dérivée 0-ième) :

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{(2^n \times n!)^2} \times \int_{-1}^{1} \times \frac{\mathrm{d}^{2n}}{\mathrm{d}t^{2n}}\left((t^2-1)^n\right)(t^2-1)^n \,\mathrm{d}t$$

Or, en utilisant l'expression explicite de $(X^2-1)^n$ vue plus haut, on obtient que sa dérivée $2n$-ième vaut $(2n)!$ si bien que

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^n}{(2^n \times n!)^2} \times \int_{-1}^{1} (2n)!(t^2-1)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n (2n)!}{(2^n \times n!)^2} \times \int_{-1}^{1} (t-1)^n(t+1)^n \,\mathrm{d}t$$

Comme dans l'exercice 31 du chapitre 10, on montre à l'aide d'IPP successives que

$$\int_{-1}^{1} (t-1)^n(t+1)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n \times (n!)^2 \times 2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

On trouve finalement que

$$\langle L_n, L_n\rangle = \frac{2}{2n+1}$$

et donc $\|L_n\| = \sqrt{\dfrac{2}{2n+1}}$. La suite de polynômes (P_n) de l'exercice précédent est orthonormale, et on a montré que (L_n) est orthogonale (car L_n est de degré n pour tout n et est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur donc à $L_0, \dots, L_{n-1}$) si bien que $P_n = \pm L_n/\|L_n\|$. Or, P_n est scindé à racines simples toutes dans $]-1\,;1[$ d'après l'exercice précédent, donc L_n également.

Suivons l'indication de l'énoncé et intéressons-nous aux racines de Q', où on a posé $Q = (X^2-1)^n$. Puisque $X' = 2nX(X^2-1)^{n-1}$, alors les seules racines de Q' sont 0, de multiplicité 1, et ± 1, de multiplicité $n-1$. En appliquant le théorème de Rolle, on trouve que Q'' a deux racines dans $]-1\,;1[$ et ± 1 sont racines de Q'' de multiplicité $n-2$. Montrons par récurrence sur $k \in [\![0\,; n]\!]$ que, pour tout k, ± 1 sont racines de $Q^{(k)}$ de multiplicité $n-k$ et $Q^{(k)}$ admet k racines distinctes sur $]-1\,;1[$.

Le résultat est vrai aux rangs 0 et 1. Soit $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, supposons le résultat vrai au rang k et prouvons qu'il est vrai au rang $k+1$. Tout d'abord, ± 1 étant racines de Q de multiplicité n, ± 1 sont racines de $Q^{(k+1)}$ de multiplicité $n-(k+1)$ (critère de multiplicité avec les dérivées successives). De plus, par HR, $Q^{(k)}$ admet k racines distinctes dans $]-1\,;1[$ notées $-1 < x_1 < \cdots < x_k < 1$. En appliquant le théorème de Rolle sur $[-1\,;x_1], [x_1\,;x_2], \dots, [x_k\,;1]$ ($Q^{(k)}$ est continue sur chaque intervalle fermé, dérivable sur chaque intervalle ouvert, et les valeurs en les bornes sont égales car nulles), il existe $1<y_1 < \cdots < y_{k+1} < 1$ racines distinctes de $Q^{(k+1)}$ ce qui clôt la récurrence. En particulier, $Q^{(n)}$ admet n racines distinctes sur $]-1\,;1[$, et donc L_n également (car ces deux polynômes sont proportionnels) et puisque $\deg(L_n) = n$, celles-ci sont simples et il n'y a pas d'autre racine complexe, ce qui permet de conclure.

4. Notons $G = (X-1)^n$ et $H = (X+1)^n$ si bien que

$$L_n = \frac{1}{2^n \times n!} \times (GH)^{(n)}$$

D'après la formule de Leibniz :

$$L_n = \frac{1}{2^n \times n!} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G^{(k)} \times H^{(n-k)}$$

Or, 1 est racine de G de multiplicité n donc toutes les dérivées de G jusque l'ordre $n-1$ sont nulles en 1, si bien que

$$L_n(1) = \frac{1}{2^n \times n!} \times \binom{n}{n} G^{(n)}(1)H(1)$$

Or, $H(1) = 2^n$ et $G^{(n)} = n!$ donc $L_n(1) = 1$.

(a) L_n étant de degré n et L_{n-1} de degré $n-1$, A est de degré inférieur ou égal à n. Or, le coefficient de degré n vaut, d'après la question 1 :

$$\frac{n}{2^n}\binom{2n}{n} - \frac{2n-1}{2^{n-1}}\binom{2(n-1)}{n-1}$$

et un rapide calcul prouve que cette quantité est nulle. Or, d'après la question 2, les polynômes de Legendre ont un coefficient sur deux qui est nul, si bien que le coefficient d'ordre $n-1$ de L_n est nul, tout comme le coefficient d'ordre $n-2$ de L_{n-1} si bien que le coefficient d'ordre $n-1$ de A est nul, donc $\deg(A) \leq n-2$.

(b) De même que dans l'exercice précédent, A est orthogonal à tout élément de $\mathbb{R}_{n-3}[X]$ (pour L_n, cela a été prouvé dans la question 3, et pour XL_{n-1}, cela vient du fait que $\langle XL_{n-1}, P\rangle = \langle L_{n-1}, XP\rangle$, comme dans l'exercice précédent).

(c) De même que dans la dernière question de l'exercice précédent, A est combinaison linéaire de P_{n-2} (et pas des autres, comme dans la dernière question de l'exercice précédent). On en déduit qu'il existe a tel que $nL_n - (2n-1)XL_{n-1} = aP_{n-2}$. En évaluant en 1, et en utilisant la question 4, on trouve que $n-(2n-1) = a$ ce qui est le résultat voulu.

5. Idem que la question 2, on procède à des IPP successives.

Exercice 45 - Polynômes de Tchebychev de seconde espèce : ✪✪✪ On prend les notations de l'exercice 43 avec $a = -1$, $b = 1$ et $w : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.

2. Montrer que les Q_n sont deux à deux orthogonaux.
3. Montrer que l'application

$$g: \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint (il n'est pas demandé de donner sa valeur, sauf si on s'ennuie...).

Correction :

1. C'est l'exercice 80 du chapitre 19 (à savoir faire). On montre même que la suite (Q_n) est définie par :

$$Q_0 = 1, Q_1 = 2X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, Q_{n+2} = 2XQ_{n+1} - Q_n$$

Une récurrence double analogue à celle du DM 15 montre que, pour tout n, Q_n est de degré n et de coefficient dominant 2^n (et pas 2^{n-1} comme les polynômes de Tchebychev classiques !).

2. Soient $n < p$.

$$\langle Q_n, Q_p\rangle = \int_{-1}^{1} Q_n(t)Q_p(t)\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Utilisons la définition des polynômes de Tchebychev : faisons le changement de variable $t = \cos(\theta)$, $\theta = \mathrm{Arccos}(t)$ et $\mathrm{d}t = -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned} \langle Q_n, Q_p\rangle &= \int_{\pi}^{0} Q_n(\cos(\theta))Q_p(\cos(\theta))\sqrt{1-\cos^2(\theta)} \times -\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} Q_n(\cos(\theta))Q_p(\cos(\theta))\sqrt{\sin^2(\theta)} \times \sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

Or, le sinus est positif sur $[\,0\,;\pi\,]$ si bien que $\sqrt{\sin^2(\theta)} = \sin(\theta)$ et donc :

$$\begin{aligned} \langle Q_n, Q_p\rangle &= \int_{0}^{\pi} Q_n(\cos(\theta))Q_p(\cos(\theta))\sin^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) \times \sin(\theta)Q_p(\cos(\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{0}^{\pi} \sin((n+1)\theta)\sin((p+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((n-p)\theta) - \cos((n+p)\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n-p)\theta)}{n-p} - \frac{\sin((n+p)\theta)}{n+p}\right]_0^{\pi} \qquad (n-p \text{ et } n+p \text{ sont non nuls}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. On cherche comme d'habitude $d(X^2, \mathbb{R}_2[X])^2$. On pourrait faire comme d'habitude, écrire $p(X^2) = aX^2 + bX + c$ mais cela ferait des calculs un peu moches... Il suffit de voir que, dans $\mathbb{R}_3[X]$, Q_3 est orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$ car Q_3 est orthogonal à Q_0, Q_1, Q_2 qui forment une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Il en découle que le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ est (cf. cours avec $u = Q_3$ et $x = X^3$, mais attention, Q_3 n'est pas unitaire) :

$$X^3 - \frac{\langle Q_3, X^3\rangle}{\|Q_3\|^2}.Q_3$$

Cette application admet donc un minimum qui est atteint en l'unique point ci-dessous. Or, Q_3 est de coefficient dominant 8 et $p(X^3)$ est de degré inférieur ou égal à 2 donc le coefficient devant X^3 de $p(X^3)$ est nul : on en déduit que

$$\frac{\langle Q_3, X^3\rangle}{\|Q_3\|^2} = \frac{1}{8}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
X^3 - \langle Q_3,X^3\rangle \|Q_3\|^2.Q_3 &= X^3 - \frac{Q_3}{8} \\
&= X^3 - \frac{1}{8}\left(8X^3 - 4X\right) \\
&= \frac{X}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que le minimum de l'énoncé existe et est atteint uniquement pour $a = c = 0$ et $b = -1/2$.

34.6 Divers

Exercice 46 - Une construction du produit vectoriel : ✪✪ On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique et de la base canonique B.

1. Pour $w \in E$, on note $\varphi_w : E \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $\varphi_w(x) = \langle x,w\rangle$. Montrer que $\Phi : w \mapsto \varphi_w$ est un isomorphisme de E dans $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
2. En déduire que pour tous vecteurs u, $v \in E$, il existe un unique vecteur w de E qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ \langle w,x\rangle = \det_B(u,v,x)$$

Ce vecteur w sera noté $u \wedge v$, et on a ainsi défini une loi $\wedge : E^2 \to E$ qui vérifie, pour tous vecteurs u, v et x :

$$\langle u \wedge v,x\rangle = \det_B(u,v,x)$$

3. Montrer les propriétés suivantes du produit vectoriel :
   (a) Si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
   (b) Si (u,v) est libre alors $u \wedge v \neq 0$ et $(u,v,u \wedge v)$ est une base orientée dans le sens direct.
   (c) $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
   (d) $\wedge$ est bilinéaire.
   (e) $\wedge$ est anticommutative (c'est-à-dire $v \wedge u = -u \wedge v$).
   (f) La norme de $u \wedge v$ est égale à $\|u\| \times \|v\| \times |\sin\theta|$ où θ est l'angle entre les vecteurs u et v.
   (g) On a l'identité $\langle x \wedge y,z\rangle = \langle y \wedge z,x\rangle = \langle z \wedge x,y\rangle$.
4. Pour $u_1 = (a_1,b_1,c_1)$ et $u_2 = (a_2,b_2,c_2) \in E$, déterminer les coordonnées dans la base B de $u \wedge v$.
5. Cette construction du produit vectoriel est-elle adaptable à un espace de dimension différente de 3 ?

Correction :

1. Déjà fait dans l'exercice 29.
2. Idem que dans l'exercice 29 : par n-linéarité du déterminant, pour tous u et v, l'application $x \mapsto \det_B(u,v,x)$ est une forme linéaire donc égale à φ_w pour un unique w d'après la question précédente.
3. Par définition, pour tout x, $\langle x,u \wedge v\rangle = \det_B(u,v,x)$ et $u \wedge v$ est l'unique vecteur w vérifiant $\langle x,w\rangle = \det(u,v,x)$ pour tout x.
   (a) Si u et v sont colinéaires alors, pour tout x, $\det(u,v,x) = 0$ car deux vecteurs sont liés, si bien que $\langle x,u \wedge v\rangle = 0$: ceci étant vrai pour tout x, c'est vrai en particulier pour $x = u \wedge v$ donc $\langle u \wedge v,u \wedge v\rangle = 0$ donc $u \wedge v = 0$ par définie positivité du produit scalaire.
   (b) Supposons (u,v) libre. Alors (théorème de la base incomplète) on peut la compléter en base de $\mathbb{R}^3$ avec un vecteur x si bien que $\det_B(u,v,x) \neq 0$ (le déterminant d'une base est forcément non nul) et donc $\langle u \wedge v,x\rangle \neq 0$ si bien que $u \wedge v \neq 0$. Dès lors,

   $$\det_B(u,v,u \wedge v) = \langle u \wedge v,u \wedge v\rangle > 0$$

   par définie positivité du produit scalaire, donc la base est bien orientée dans le sens direct.
   (c) En appliquant la relation de départ à $x = u$, on trouve que $\langle u \wedge v,u\rangle = \det_B(u,v,u) = 0$ car déterminant d'une famille liée, si bien que $u \wedge v$ est orthogonal à u, et de même pour v.

(d) Soient a, b, c trois éléments de E et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Par définition de $(\lambda a + \mu b) \wedge c$, pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
\langle (\lambda a + \mu b) \wedge c, x\rangle &= \det_B(\lambda a + \mu b, c, x) \\
&= \lambda \det(a, c, x) + \mu \det(b, c, x) \quad (n\text{-linéarité du déterminant}) \\
&= \lambda\langle a \wedge c, x\rangle + \mu\langle b \wedge c, x\rangle \\
&= \langle \lambda(a \wedge c) + \mu\langle b \wedge c,, \rangle x\rangle
\end{aligned}$$

et par unicité du w dans ce qui précède, on a l'égalité :

$$(\lambda a + \mu b) \wedge c = \lambda(a \wedge c) + \mu b \wedge c$$

c'est-à-dire que $\wedge$ est linéaire à gauche. De même (attention, pas de symétrie ici !) on a la linéarité à droite.

(e) Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\langle u \wedge v, x\rangle &= \det_B(u, v, x) \\
&= -\det(v, u, x) \quad (\text{caractère alterné du déterminant}) \\
&= -\langle v \wedge u, x\rangle \\
&= \langle -v \wedge u, x\rangle
\end{aligned}$$

d'où le résultat (toujours par unicité).

(f) Par définition de la norme :

$$\begin{aligned}
\|u \wedge v\|^2 &= \langle u \wedge v, u \wedge v\rangle \\
&= \det_B(u, v, u \wedge v)
\end{aligned}$$

Or, ce déterminant est le volume (algébrique i.e. positif ou négatif) du pavé formé par les trois vecteurs u, v et $u \wedge v$. Rappelons que le volume d'un pavé est : aire de la base $\times$ hauteur. Le vecteur $u \wedge v$ étant orthogonal (question 3.(c)) à u et v, la hauteur vaut $\|u \wedge v\|$, et le volume est comptée positivitement puisque les vecteurs sont dans le sens direct (une base directe si u et v sont libres, et tout vaut 0 si u et v sont liés, voir précédemment) donc ce déterminant est égal à l'aide du parallélogramme formé par u et v multiplié par $\|u \wedge v\|$, et un dessin rapide montre que l'aire (positive) du parallélogramme formé par u et v est bien égale à $\|u\| \times \|v\| \times |\sin(\theta)|$ (car la base vaut $\|u\|$ et la hauteur est égale à $\|v\| \times |\sin(\theta)|$) si bien que

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\| \times \|v\| \times |\sin(\theta)| \times \|u \wedge v\|$$

Si $u \wedge v$ est non nul, on peut simplifier par sa norme, et si $u \wedge v$ est nul, alors sa norme est nulle et u et v sont colinéaires (questions 3.(a) et 3.(b) : deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul) donc $\theta \equiv 0[\pi]$ si bien que son sinus est nul donc on a tout de même l'égalité voulue.

(g) On sait que, quand on applique une permutation σ sur une famille de vecteurs, le déterminant s'en trouve multiplié par $\varepsilon(\sigma)$. De plus, les 3-cycles $(1\,2\,3)$ et $(1\,3\,2)$ sont de signature 1, si bien que :

$$\det(x, y, z) = \det(z, x, y) = \det(y, z, x)$$

ce qui donne : $\langle x \wedge y, z\rangle = \langle z \wedge x, y\rangle = \langle y \wedge z, x\rangle$.

4. La base B est la base canonique donc, en particulier, elle est orthonormée pour le produit scalaire canonique, si bien que les coordonnées recherchées sont égales à $\langle u_1 \wedge u_2, e_1\rangle, \langle u_1 \wedge u_2, e_2\rangle$ et $\langle u_1 \wedge u_2, e_3\rangle$. Or :

$$\begin{aligned}
\langle u_1 \wedge u_2, e_1\rangle &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= b_1 c_2 - c_1 b_2
\end{aligned}$$

On trouve de même que $\langle u_1 \wedge u_2, e_2\rangle = a_2 c_1 - a_1 c_2$ et $\langle u_1 \wedge u_2, e_2\rangle = a_1 b_2 - a_2 b_1$, c'est-à-dire que :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

En clair : on barre la ligne correspondante, et on calcule le déterminant 2×2 des lignes restantes.

5. Non car on ne peut calculer un déterminant de 3 vecteurs qu'en dimension 3 (on ne peut calculer un déterminant de n vecteurs qu'en dimension n).

Exercice 47 - Déterminant de Gram (d'après CCP MP 2006) : ✪✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Si $x_1, \dots, x_p$ sont p vecteurs de E, on appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_p$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ notée $G(x_1, \dots, x_p)$ de terme général $\langle x_i, x_j \rangle$, pour $(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2$:

$$G(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1 \rangle & \langle x_1,x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1,x_p \rangle \\ \langle x_2,x_1 \rangle & \langle x_2,x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2,x_p \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p,x_1 \rangle & \langle x_p,x_2 \rangle & \cdots & \langle x_p,x_p \rangle \end{pmatrix}$$

On notera $\Gamma(x_1, \dots, x_p)$ son déterminant.

1. (a) Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^\top Y = 0$?
   (b) Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\ker(A^\top A) \subset \ker(A)$ et en déduire que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^\top \times A)$.
2. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ p vecteurs de E.
   (a) Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et si A est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base B, montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.
   (b) Quel lien y a-t-il entre $\operatorname{rg}(G(x_1, \dots, x_p))$ et $\operatorname{rg}(x_1, \dots, x_p)$?
   (c) On suppose que $p = n$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\Gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $F = \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et $x \in E$. Montrer que :

$$\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = \Gamma(x - p(x), x_1, \dots, x_p)$$

   où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F. En déduire que $\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = d(x,F)^2 \times \Gamma(x_1, \dots, x_p)$.

Correction :

1. (a) Si on note $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, alors $Y^\top \times Y = \displaystyle\sum_{i=1}^n {y_i}^2$ donc cette quantité est nulle si et seulement si tous les y_i sont nuls, si et seulement si $Y = 0$. On aurait aussi pu dire que $Y^\top \times Y = \langle Y,Y \rangle$ avec $\langle , \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (qu'on identifie à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) et donc $Y^\top \times Y = 0$ implique $Y = 0$ par définie positivité du produit scalaire.
   (b) On sait (cf. cours) que $\operatorname{rg}(A^\top \times A) \leq \operatorname{rg}(A)$. Prouvons à présent l'autre inégalité. Soit $X \in \ker(A^\top \times A)$. Alors $A^\top AX = 0$ donc, en multipliant par $X^\top$ à gauche : $X^\top A^\top AX = AX^\top AX = 0$ donc, d'après la question précédente, $Y = AX = 0$ donc $X \in \ker(A)$. On en déduit que $\ker(A^\top A) \subset \ker(A)$ donc $\dim(\ker(A^\top A)) \leq \dim(\ker(A))$. D'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(A^\top A) \geq \operatorname{rg}(A)$, d'où l'égalité voulue.

2. (a) On a donc, pour tout $j \in [\![1\,;\,p]\!]$, $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n A_{i,j} e_i$ et, puisque la base est orthonormale, on connaît les coordonnées de x_j dans cette base : $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n \langle x_j, e_i \rangle e_i$. Par unicité des coordonnées sur une base : $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!], \forall j \in [\![1\,;\,p]\!], A_{i,j} = \langle x_j, e_i \rangle$. Par conséquent, pour tous $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $j \in [\![1\,;\,p]\!]$:

$$\begin{aligned} \left(A^\top A\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n (A^\top)_{i,k} A_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k \rangle \langle x_j, e_k \rangle \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\langle x_i, x_j\rangle &= \langle\sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k\rangle e_k, \sum_{l=1}^n \langle x_j, e_l\rangle e_l\rangle \\
&= \sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n \langle x_i, e_k\rangle \times \langle x_j, e_l\rangle \times \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}_{=\delta_{k,l}} \quad \text{(bilinéarité et BON)} \\
&= \sum_{k=1}^n \langle x_i, e_k\rangle\langle x_j, e_k\rangle
\end{aligned}$$

si bien que le terme général de $A^\top A$ vaut $\langle x_i, x_j\rangle$, c'est-à-dire le terme général de $G(x_1, \dots, x_p)$: les deux matrices sont bien égales.

(b) Les vecteurs colonnes de A sont donc les coordonnées des x_j dans la base B, si bien que $\text{rg}(A) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$ (le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs colonnes). D'après la question 1.(b), $\text{rg}(A^\top A) = \text{rg}(A)$ et $A^\top A = G(x_1, \dots, x_p)$ d'après la question précédente, donc $\text{rg}(G(x_1, \dots, x_p)) = \text{rg}(x_1, \dots, x_p)$.

(c) Si $\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \det(G(x_1, \dots, x_n)) > 0$, alors en particulier ce déterminant est non nul donc les vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ forment une base de E. Réciproquement, supposons que ces vecteurs forment une base de E. Alors $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_1, \dots, x_n) &= \det(G(x_1, \dots, x_n)) \\
&= \det(A^\top A) \\
&= \det(A^\top) \times \det(A) \\
&= \det(A)^2 \qquad\qquad (\det(A) = \det(A^\top)) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

et puisque ce déterminant est non nul, on a le résultat voulu.

3. p étant la projection orthogonale sur $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_p)$, $p(x)$ est CL de $x_1, \dots, x_p$. Notons A la matrice des coordonnées de $x, x_1, \dots, x_p$ et $\tilde{A}$ celles des coordonnées de $x - p(x), x_1, \dots, x_p$ dans une BPN, comme dans la question 2. Puisque $p(x)$ est CL de $x_1, \dots, x_p$, on obtient $\tilde{A}$ en partant de A à l'aide d'une opération élémentaire du type $C_1 \leftarrow C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_{p+1} C_{p+1}$, ce qui ne change pas le déterminant, c'est-à-dire que $\det(A) = \det(\tilde{A})$. Or,

$$G(x, x_1, \dots, x_p) = A^\top A \qquad \text{et} \qquad G(x - p(x), x_1, \dots, x_p) = \tilde{A}^\top \tilde{A}$$

si bien que $\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = \det(A)^2$ et $\Gamma(x - p(x), x_1, \dots, x_p) = \det(\tilde{A})^2$ et $\det(A) = \det(\tilde{A})$, d'où l'égalité. Dès lors :

On a donc :

$$\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \langle x - p(x), x - p(x)\rangle & \langle x - p(x), x_1\rangle & \langle x - p(x), x_2\rangle & \cdots & \langle x - p(x), x_p\rangle \\ \langle x_1, x - p(x)\rangle & \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_p\rangle \\ \langle x_2, x - p(x)\rangle & \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \langle x_p, x - p(x)\rangle & \langle x_p, x_1\rangle & \langle x_p, x_2\rangle & \cdots & \langle x_p, x_p\rangle \end{vmatrix}$$

Or, $p(x)$ étant la projection orthogonale sur F, $x - p(x) \in F^\perp$ donc tous les produits scalaires $\langle x_i, x - p(x)\rangle$ sont nuls, si bien que :

$$\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = \begin{vmatrix} \langle x - p(x), x - p(x)\rangle & \langle x - p(x), x_1\rangle & \langle x - p(x), x_2\rangle & \cdots & \langle x - p(x), x_p\rangle \\ 0 & \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle & \cdots & \langle x_1, x_p\rangle \\ 0 & \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle & \cdots & \langle x_2, x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \langle x_p, x_1\rangle & \langle x_p, x_2\rangle & \cdots & \langle x_p, x_p\rangle \end{vmatrix}$$

Il suffit de développer par rapport à la première colonne pour conclure, étant donné le fait que $\langle x - p(x), x - p(x)\rangle = d(x, F)^2$.

Exercice 48 : ✪✪✪

1. Montrer que la norme $\| \ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir :

$$\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Illustrer par un dessin. On cherche à présent à prouver que toute norme vérifiant cette propriété découle d'un produit scalaire. On se donne donc dans la suite de l'exercice une norme (c'est-à-dire, cf. cours, une application de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois conditions de séparation, d'absolue homogénéité et l'inégalité triangulaire) et vérifiant l'identité du parallélogramme, i.e. :

$$\forall (x,y) \in E^2, N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)$$

Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un produit scalaire dont N est la norme associée. Posons :

$$\varphi : \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \end{cases}$$

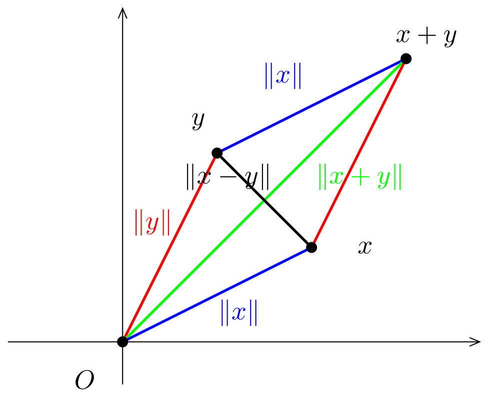
2. Pourquoi ce choix de φ est-il le seul possible ?
3. Prouver que φ est symétrique.
4. Prouver que φ est définie positive.
5. Il reste donc à montrer que φ est bilinéaire. Soit $(x,y,z) \in E^3$.
   (a) Montrer que $\varphi(-x,y) = -\varphi(x,y)$, et que $\varphi(x,0) = 0$.
   (b) Montrer que $\varphi(x+y,z) + \varphi(x-y,z) = 2\varphi(x,z)$. En déduire que :
   $$\varphi(x,z) + \varphi(y,z) = \varphi(x+y,z)$$
   (c) Justifier que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $\varphi(rx,z) = r\varphi(x,z)$.
   (d) Justifier que $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$. En déduire que si (r_n) est une suite de réels convergeant vers un réel λ, alors $N(r_n x + z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(\lambda x + z)$.
   (e) Conclure que N est bilinéaire et donc un produit scalaire.

Correction :

1. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y \rangle \\ &= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \end{aligned}$$

Comme dans l'exercice 4 du chapitre 7, si on trace les vecteurs x, y et $x+y$, alors $\|x+y\|$ est la distance entre 0 et $x+y$, et $\|x-y\|$ est la distance entre x et y : on vient de prouver que la somme des carrés des longueurs deux diagonales du parallélogramme formé par $0, x, y, x+y$ est égale à la somme des carrés des quatre côtés.



2. Cela découle de l'identité de polarisation : c'est l'expression du produit scalaire (éventuel) en fonction de la norme.
3. Soit $(x,y) \in E^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= \frac{N(x+y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \\ &= \frac{N(y+x)^2 - N(y)^2 - N(x)^2}{2} \\ &= \varphi(y,x) \end{aligned}$$

donc φ est symétrique.

4. Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned}
\varphi(x,x) &= \frac{N(2x)^2 - 2N(x)^2}{2} \\
&= \frac{4N(x)^2 - 2N(x)^2}{2} \quad \text{(car } N(2x) = 2N(x)) \\
&= N(x)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Supposons que $\varphi(x,x) = 0$. Alors $N(x) = 0$ donc $x = 0$ par hypothèse sur N (c'est une norme). Donc φ est bien définie positive.

5. (a) On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(-x,y) &= \frac{N(-x+y)^2 - N(-x)^2 - N(y)^2}{2} \\
&= \frac{N(y-x)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \qquad (N(-x) = N(x))
\end{aligned}$$

Or, N vérifie l'identité du parallélogramme si bien que

$$N(y-x)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2) - N(x+y)^2$$

ce qui implique que $\varphi(-x,y) = -\varphi(x,y)$. Puisque $N(0) = 0$ (car $N(0.x) = 0.N(x)$), alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x,0) &= \frac{N(x)^2 - N(x)^2 - N(0)^2}{2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$\varphi(x+y,z) + \varphi(x-y,z) = \frac{N(x+y+z)^2 - N(x+y)^2 - N(z)^2 + N(x-y+z)^2 - N(x-y)^2 - N(z)^2}{2}$$

Or, d'après l'identité du parallélogramme :

$$N(x+z+y)^2 + N(x+z-y)^2 = 2(N(x+z)^2 + N(y)^2) \qquad \text{et} \qquad N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y,z) + \varphi(x-y,z) &= \frac{2(N(x+z)^2 + N(y)^2) - 2(N(x)^2 + N(y)^2) - 2N(z)^2}{2} \\
&= N(x+z)^2 - N(x)^2 - N(z)^2 \\
&= 2\varphi(x,z)
\end{aligned}$$

L'idée est d'appliquer ce qui précède à des vecteurs u et v vérifiant $u+v = x$ et $u-v = y$ pour faire apparaître x et y à gauche. En appliquant ce résultat avec $u = (x+y)/2$ et $v = (x-y)/2$ à la place de x et y (penser à truc et machin) :

$$\varphi(u+v,z) + \varphi(u-v,z) = 2\varphi(u,z)$$

Or, $u+v = x$ et $u-v = y$ si bien que $\varphi(x,z) + \varphi(y,z) = 2\varphi(u,z)$. Cependant, le résultat précédent (à u et u à la place de x et y) donne :

$$\varphi(2u,z) + \varphi(0,z) = 2\varphi(u,z)$$

Or, $\varphi(0,z) = \varphi(z,0)$ par symétrie, ce qui vaut 0 d'après la question précédente. On en déduit que $\varphi(2u,z) = 2\varphi(u,z)$ si bien que $\varphi(x,z) + \varphi(y,z) = \varphi(2u,z)$ ce qui permet de conclure.

(c) Par une récurrence immédiate (faites-la !) en utilisant la question précédende : $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi(nx,z) = n\varphi(x,z)$. D'après la question 5.(a), si $n \in \mathbb{Z}$ avec $n \leq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(nx,z) &= -\varphi(-nx,z) \\ &= -(-n)\varphi(x,z) \quad \text{(d'après ce qui précède, car } -n \in \mathbb{N}) \\ &= n\varphi(x,z) \end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité est valable pour tout entier relatif. Dès lors, pour tout entier $q \neq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(x,z) &= \varphi\left(q \times \frac{1}{q} \times x, z\right) \\ &= q\varphi\left(\frac{1}{q} \times x, z\right) \end{aligned}$$

et donc :

$$\varphi\left(\frac{1}{q} \times x, z\right) = \frac{1}{q} \times \varphi(x,z)$$

Par conséquent, pour tout rationnel r, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tels que $r = p/q$ si bien que

$$\begin{aligned} \varphi(rx,z) &= \varphi\left(p \times \frac{1}{q} \times x, z\right) \\ &= p\varphi\left(\frac{1}{q} \times x, z\right) \\ &= p \times \frac{1}{q} \times \varphi(x,z) \\ &= r\varphi(x,z) \end{aligned}$$

(d) C'est l'inégalité triangulaire (inversée), qu'on prouve comme dans les chapitres 7 et 12 (en appliquant l'inégalité triangulaire « classique », vérifiée par N par hypothèse, à $x = x - y + y$). Soit donc (r_n) une suite de réels qui converge vers un réel λ. Alors :

$$|N(r_n x + z) - N(\lambda x + z)| \leq N((r_n - \lambda)x) = |r_n - \lambda| N(x)$$

par absolue homogénéité de la norme, et $|r_n - \lambda| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

(e) Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, il existe une suite de rationnels (r_n) qui converge vers λ. Soit $n \in \mathbb{N}$. Or, d'après la question 5.(c) :

$$\varphi(r_n x, z) = r_n \varphi(x,z)$$

D'une part, $\varphi(r_n x, z) = r_n\varphi(x,z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda\varphi(x,z)$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi(r_n x, z) &= \frac{N(r_n x + z)^2 - N(r_n x)^2 - N(z)^2}{2} \\ &= \frac{N(r_n x + z)^2 - {r_n}^2 N(x)^2 - N(z)^2}{2} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{N(\lambda x + z) - \lambda^2 N(x)^2 - N(z)^2}{2} = \frac{N(\lambda x + z) - N(\lambda x)^2 - N(z)^2}{2} = \varphi(\lambda x, z) \end{aligned}$$

Par unicité de la limite, $\lambda\varphi(x,z) = \varphi(\lambda x, z)$ donc φ est linéaire à gauche, et par symétrie (question 3), φ est bilinéaire : c'est bien un produit scalaire.

Exercice 49 - Adjoint d'un endomorphisme : ✪✪✪ On suppose que E est de $n \geq 1$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. Si A est la matrice de u dans une base orthonormée, donner la matrice de u^* dans cette même base.

2. Déterminer $\ker(u^*)$ et $\mathrm{Im}(u^*)$.
3. Si $v \in \mathscr{L}(E)$, calculer $(u \circ v)^*$.

Correction :

1. Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. Par conséquent, pour tout $x \in E$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$$

Notons A la matrice de u dans la base B, si bien que, pour tout j,

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j} e_k$$

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : si u^* convient. Notons C la matrice de u^* dans la base B, si bien que pour tout j :

$$u^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} C_{i,j} e_i$$

Alors, pour tous i et j, $\langle u(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, u^*(e_j) \rangle$. Or, par bilinéarité du produit scalaire, et la base B étant orthonormale :

$$\langle u(e_i), e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \langle e_k, e_j \rangle = A_{j,i}$$

et

$$\langle e_i, u^*(e_j) \rangle = C_{i,j}$$

si bien que, pour tous i et j, $C_{i,j} = A_{j,i}$. On en déduit que u^* est l'unique AL vérifiant :

$$\forall j \in [\![1 \,;\, n]\!], u^*(e_j) = \sum_{i=1}^{n} A_{j,i} e_i$$

Une telle AL existe et est unique car, pour caractériser une AL, il suffit de se donner l'image d'une base.

Synthèse : soit u^* l'AL ci-dessus. Soit $(x, y) \in E^2$, qu'on note

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y \rangle &= \langle u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} x_k u\left(e_k\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} x_k u\left(e_k\right), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} y_j \langle u\left(e_k\right), e_j \rangle
\end{aligned}$$

Or, par choix de u^*, pour tous j et k, $\langle u\left(e_k\right), e_j \rangle = \langle e_k, u^*(e_j) \rangle$ si bien que

$$
\begin{aligned}
\langle u(x),y\rangle &= \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{j=1}^{n} y_j \langle e_k,u^*(e_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, u^*\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\rangle \\
&= \langle x,u^*(y)\rangle
\end{aligned}
$$

D'où l'existence et l'unicité de u^*. On a également prouvé que la matrice de u^* dans la base B est $A^\top$.

2. Soit $y \in \ker(u^*)$. Alors, pour tout x,

$$
\begin{aligned}
\langle u(x),y\rangle &= \langle x,u^*(y)\rangle \\
&= \langle x,0\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

si bien que y est orthogonal à $u(x)$, et x est quelconque, donc $y \in \mathrm{Im}(u)^\perp$: on a donc montré que $\ker(u^*) \subset \mathrm{Im}(u)^\perp$. Réciproquement, soit $y \in \mathrm{Im}(u)^\perp$. Alors, pour tout x, $\langle u(x),y\rangle = 0$ donc $\langle x,u^*(y)\rangle = 0$. En prenant $x = u^*(y)$, il vient :

$$\langle u^*(y),u^*(y)\rangle = 0$$

Par définie positivité du produit scalaire, $u^*(y) = 0$ donc $y \in \ker(u^*)$. On a donc prouvé par double inclusion que $\ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^\perp$.

Montrons que $\mathrm{Im}(u^*) = \ker(u)^\perp$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u^*)$. Alors il existe $t \in E$ tel que $y = u^*(t)$. Par conséquent, pour tout $x \in \ker(u)$,

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle &= \langle x,u^*(t)\rangle \\
&= \langle u(x),t\rangle \\
&= \langle 0,t\rangle \\
&= 0
\end{aligned}
$$

donc y est orthogonal à x et x est quelconque donc $y \in \ker(u)^\perp$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}(u^*) \subset \ker(u)^\perp$. Or, d'après le théorème du rang,

$$
\begin{aligned}
\dim(\mathrm{Im}(u^*)) &= n - \dim(\ker(u^*)) \\
&= n - \dim(\mathrm{Im}(u)^\perp) \\
&= \dim(\mathrm{Im}(u)) && \text{(On est en dimension finie : } \mathrm{Im}(u) \text{ et } \mathrm{Im}(u)^\perp \text{ sont supplémentaires)} \\
&= n - \dim(\ker(u)) \\
&= \dim(\ker(u))^\perp
\end{aligned}
$$

donc ces deux espaces vectoriels sont égaux (l'un est inclus dans l'autre et même dimension).

3. D'après la question 1, si A est la matrice de u dans une base orthonormale B, et si C est celle de v, alors $A^\top$ est celle de u^* et $C^\top$ est celle de v^*. De plus, celle de $u \circ v$ est AC et donc celle de $(u \circ v)^*$ est $C^\top \times A^\top$, qui est la matrice de $v^* \circ u^*$. Par conséquent (on sait qu'il y a un isomorphisme entre matrices et endomorphismes), on a $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$. On aurait pu le prouver directement : soient en effet x et y dans E. D'une part,

$$\langle u \circ v(x),y\rangle = \langle x,(u \circ v)^*(y)\rangle$$

et d'autre part, par définition de u^* et v^* :

$$\begin{aligned}\langle u\circ v(x),y\rangle &= \langle v(x),u^*(y)\rangle\\ &= \langle x,v^*\circ u^*(y)\rangle\end{aligned}$$

et par unicité on retrouve le résultat.

Exercice 50 - Théorème de Maschke : ✪✪✪✪ On suppose que E est de dimension finie. On dit que $f\in\mathscr{L}(E)$ est orthogonal pour le produit scalaire $\langle\,,\rangle$ si f préserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y)\in E^2, \langle f(x),f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

1. Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ orthogonal pour le produit scalaire $\langle,\rangle$ et F est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $f(F)=F$ et en déduire que $F^\perp$ est stable par f.
2. Montrer que $(\,|\,):(x,y)\mapsto (x|y)=\displaystyle\sum_{g\in G}\langle g(x),g(y)\rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer le théorème de Maschke : si F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Correction :

1. Montrons tout d'abord que $f(F)=F$. On sait déjà que $f(F)\subset F$ puisque F est stable par f. Si on applique le théorème du rang à $f_{|F}$:

$$\begin{aligned}\dim(F) &= \dim(\ker(f_{|F}))+\dim(\mathrm{Im}(f_{|F}))\\ &= \dim(\ker(f_{|F}))+\dim(f(F))\end{aligned}$$

Soit $x\in\ker(f_{|F})$. Alors $f(x)=0$ si bien que $\langle f(x),f(x)\rangle=0$. Or, f préserve le produit scalaire donc $\langle f(x),f(x)\rangle = \langle x,x\rangle=0$ si bien que $x=0$ par définie positivité. On en déduit que $\ker(f_{|F})=\{0\}$ (et le même argument vaut pour $\ker(f)$) si bien que $\dim(F)=\dim(f(F))$ et puisque l'un est inclus dans l'autre, ils sont égaux.

Montrons à présent que $F^\perp$ est stable par f. Soit $y\in F^\perp$. Montrons que $f(y)\in F^\perp$ c'est-à-dire que y est orthogonal à tout élément de F. Soit $x\in F$, montrons que $\langle f(y),x\rangle=0$. D'après ce qui précèden il existe $t\in F$ tel que $x=f(t)$ si bien que $\langle f(y),x\rangle = \langle f(y),f(t)\rangle$ et f préserve le produit scalaire donc $\langle f(y),x\rangle = \langle y,t\rangle$. Or, $y\in F^\perp$ et $t\in F$ donc $\langle y,t\rangle=0$ ce qui est le résultat voulu.
2. La symétrie découle de la symétrie de $\langle,\rangle$, la bilinéarité découle de la linéarité des $g\in G$, de la bilinéarité de $\langle,\rangle$ et de la linéarité de la somme. Enfin, soit $x\in E$.

$$(x|x)=\sum_{g\in G}\langle g(x),g(x)\rangle$$

Or, $\langle,\rangle$ étant un produit de scalaire, par définie positivité, $\langle g(x),g(x)\rangle\geq 0$ pour tout x donc $(x|x)\geq 0$. Supposons enfin $(x|x)=0$. Alors (somme de termes positifs), $\langle g(x),g(x)\rangle^2=0$ pour tout $g\in G$, donc $\langle g(x),g(x)\rangle=0$: par définie positivité, $g(x)=0$ et g est bijective donc injective donc $x=0$: $(|)$ est définie positif, c'est bien un produit scalaire.
3. Montrons que tous les éléments de G sont orthogonaux pour $(|)$ (le produit scalaire défini à la question précédente). Soit $(x,y)\in E^2$ et soit $f\in G$.

$$(f(x)|f(y))=\sum_{g\in G}\langle f\circ g(x),f\circ g(y)\rangle$$

Or, l'application

$$g\mapsto f\circ g$$

est une bijection de G dans G : elle va bien de G dans G car G est un groupe donc stable par composition, elle est injective car tout élément d'un groupe est régulier, donc si $f\circ g_1=f\circ g_2$ alors $g_1=g_2$ (ou en composant par f^{-1} à gauche car f est bijective, ce qui revient au même puisqu'on redémontre que tout élément est régulier), et cette fonction est injective entre deux ensembles finis de même cardinal donc est bijective. En d'autres termes, la somme ci-dessus contient tous les $\langle g(x),g(y)\rangle$ dans un ordre différents (puisque $f\mapsto f\circ g$ est bijective, quand g décrit G, alors $f\circ g$ décrit aussi G, ce qui ne veut pas dire que $f\circ g=g$!) si bien que

$$(f(x)|f(y))=\sum_{g\in G}\langle g(x),g(y)\rangle = \langle x,y\rangle$$

D'après la question 1, $F^\perp$ (le perpendiculaire étant ici pris au sens de $(|)$) est stable par tous les éléments de G, et on sait que c'est un supplémentaire de F : le théorème de Maschke est démontré.

Exercice 51 - Familles obtusangles : ✪✪✪✪ Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_q)$ est dite obtusangle si $\langle e_i, e_j\rangle < 0$ pour tous $i \neq j$.

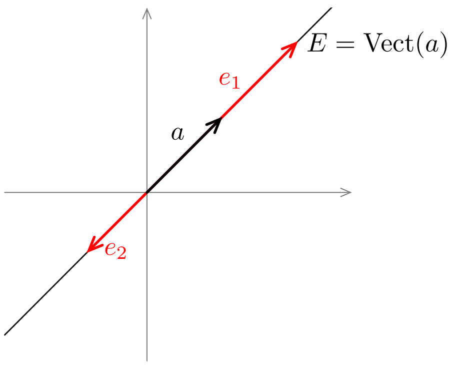
1. Décrire les familles obtusangles en dimension 1.
2. Montrer que si E est de dimension n, alors E admet une famille obtusangle de cardinal $n+1$ (on pourra raisonner par récurrence, et penser à ce qui se passe quand le vent s'engouffre dans un parapluie).
3. Montrer que E n'admet pas de famille obtusangle de cardinal $n+2$ (là aussi on pourra travailler par récurrence, et on prouvera que si on projette orthogonalement une famille obtusangle sur l'orthogonal d'un de ses membres, on obtient encore une famille obtusangle).
4. Deuxième méthode : soit $e_1, \dots, e_q$ une famille obtusangle et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^q \lambda_i e_i = 0$. Montrer que les λ_i sont soit tous nuls, soit les λ_i sont tous non nuls et de même signe. Retrouver le résultat de la question précédente.

Correction :

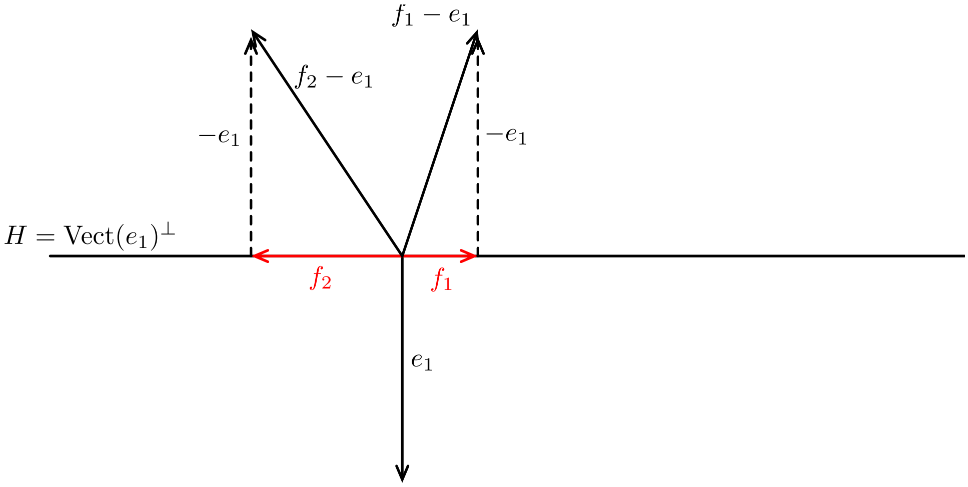
1. On suppose que E est de dimension 1 : soit $a \neq 0$ tel que $E = \text{Vect}(a)$ (E est de dimension 1 donc admet une base à un élément). Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille obtusangle : pour tout i, il existe λ_i tel que $e_i = \lambda_i a$ si bien que, pour tous $i \neq j$:

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle \lambda_i a, \lambda_j a\rangle = \lambda_i\lambda_j\langle a, a\rangle$$

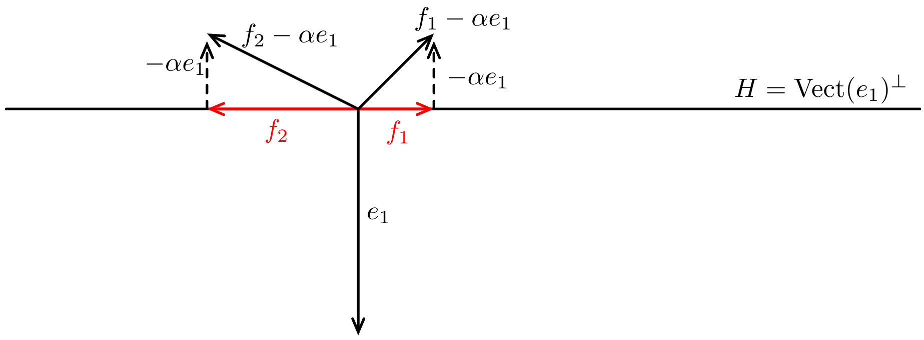
Or, $\langle a, a\rangle > 0$ donc les λ_i sont tous de signes opposés (et non nuls) : il ne peut donc pas y avoir plus de deux vecteurs, et donc on a forcément $p = 2$ et $e_1 = \lambda_1 a$ et $e_2 = \lambda_2 a$ avec λ_1 et λ_2 de signes contraires et, réciproquement, une telle famile est obtusangle.



2. Prouvons le résultat par récurrence sur n. D'après la question précédente, le résultat est vrai au rang 1. Soit $n \geq 1$, supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est vrai au rang $n+1$. Supposons donc E de dimension $n+1$. L'idée est de prendre un vecteur non nul et d'appliquer l'hypothèse de récurrence sur son orthogonal, qui est un hyperplan donc de dimension n. Plus précisément, soit e_1 non nul et soit $H = \text{Vect}(e_1)^\perp$ si bien que H et $\text{Vect}(e_1)$ sont supplémentaires (on est en dimension finie) : on en déduit que H est un hyperplan de E qui est de dimension $n+1$ donc H est de dimension n : par hypothèse de récurrence, H admet une famille obtusangle à $n+1$ éléments, qu'on note $f_2, \dots, f_{n+2}$. Le problème est que $(e_1, f_2, \dots, f_{n+2})$ n'est pas obtusangle car e_1 est orthogonaux à tous les autres. Suivons l'indication de l'énoncé et regardons ce qui se passe quand du vent s'engouffre dans un parapluie :



On a envie que les vecteurs obtusangles de H « aillent dans l'autre sens » donc on veut leur soustraire e_1... mais cela ne donne pas forcément des angles obtus, comme on peut le voir ci-dessus. L'idée est de soustraire un vecteur colinéaire à e_1 de « longueur pas trop grande » pour que les angles soient obtus :



Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $i \in [\![2\,;\, n+2]\!]$, posons $e_i = f_i - \alpha e_1$ et cherchons s'il existe une valeur de α pour laquelle la famille $(e_1, \dots, e_{n+2})$ est obtusangle. Tout d'abord, soit $i \in [\![2\,;\, n+2]\!]$.

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_1\rangle &= \langle f_i - \alpha e_1, e_1\rangle \\
&= \langle f_i, e_1\rangle - \alpha\langle e_1, e_1\rangle \quad \text{(bilinéarité)} \\
&= 0 - \alpha\langle e_1, e_1\rangle
\end{aligned}$$

car les f_i sont orthogonaux à e_1. Dès lors, cette quantité est strictement négative si et seulement si $\alpha > 0$ (car $\langle e_1, e_1\rangle > 0$ par définie positivité du produit scalaire). Soient à présent $i \neq j$ dans $[\![2\,;\, n+2]\!]$. Alors (toujours par bilinéarité et car e_1 est orthogonal aux f_i) :

$$\begin{aligned}
\langle e_i, e_j\rangle &= \langle f_i - \alpha e_1, f_j - \alpha e_1\rangle \\
&= \langle f_i, f_j\rangle - \alpha\langle e_1, f_j\rangle - \langle f_i, e_1\rangle + \alpha^2\langle e_1, e_1\rangle \\
&= \langle f_i, f_j\rangle + \alpha^2\langle e_1, e_1\rangle
\end{aligned}$$

et donc (on ne change pas le sens de l'inégalité puisque $\langle e_1, e_1\rangle > 0$) :

$$\langle e_i, e_j\rangle < 0 \iff \alpha^2 < \frac{-\langle f_i, f_j\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$$

Or, les $-\langle f_i, f_j\rangle / \langle e_1, e_1\rangle$, lorsque $i \neq j$, sont en nombre fini et strictement positifs car les $\langle f_i, f_j\rangle$ sont strictement négatifs puisque les f_i forment une famille obtusangle de H. On en déduit que cette famille admet un minimum strictement positif, qu'on note m :

$$m = \min_{(i,j) \in [\![2\,;\, n+2]\!]^2, i \neq j} -\frac{\langle f_i, f_j\rangle}{\langle e_1, e_1\rangle}$$

Il suffit alors de prendre α vérifiant $0 < \alpha < \sqrt{m}$, ce qui est possible puisque $m > 0$: on a donc une famille obtusangle à $n+2$ éléments ce qui clôt la récurrence.

3. Travaillons encore par récurrence : on a montré à la question 1 qu'il n'existe pas de famille obtusangle à trois éléments en dimension 1 donc le résultat est vrai au rang 1. Soit à présent $n \geq 1$: supposons le résultat vrai au rang n et prouvons qu'il est vrai au rang $n+1$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une famille obtusangle à $n+3$ éléments dans E, qu'on suppose de dimension $n+1$. Notons cette famille $(e_1, \dots, e_{n+3})$. Suivons l'indication de l'énoncé et projetons orthogonalement sur $H = \mathrm{Vect}(e_{n+3})^\perp$ qui est de dimension n pour les mêmes raisons que ci-dessus (pour un dessin : prendre le dessin ci-dessus « à l'envers »). Puisque e_{n+3} est normal à H, la projection orthogonale sur H est donnée par :

$$p : x \mapsto x - \frac{\langle x, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} . e_{n+3}$$

Notons, pour tout $i \in [\![1\,;\, n+2]\!]$, $f_i = p(e_i)$ et montrons que $(f_1, \dots, f_{n+2})$ est une famille obtusangle de H. Soient donc $i \neq j$ appartenant à $[\![1\,;\, n+2]\!]$.

$$\begin{aligned}
\langle f_i, f_j\rangle &= \langle e_i - \frac{\langle e_i, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2}.e_{n+3}, e_j - \frac{\langle e_j, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2}.e_{n+3}\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle - \frac{\langle e_i, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} \times \langle e_{n+3}, e_j\rangle - \frac{\langle e_j, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} \times \langle e_i, e_{n+3}\rangle + \frac{\langle e_i, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} \times \frac{\langle e_j, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} \times \langle e_{n+3}, e_{n+3}\rangle \\
&= \langle e_i, e_j\rangle - \frac{\langle e_i, e_{n+3}\rangle}{\|e_{n+3}\|^2} \times \langle e_{n+3}, e_j\rangle \\
&< 0
\end{aligned}$$

puisque tous les produits scalaires sont strictement négatifs. On en déduit que $(f_1, \dots, f_{n+2})$ est une famille obtusangle à $n+2$ éléments de H qui est de dimension n, ce qui est absurde par hypothèse de récurrence. On en déduit que H_{n+1} est vraie, ce qui permet de conclure.

4. Supposons qu'il existe un λ_i non nul. Quitte à tout multiplier par -1 (ce qui ne change rien puisque la somme est nulle), on peut supposer qu'il existe un λ_i strictement positif. Montrons qu'alors tous les λ sont strictement positifs.

   Séparons les indices selon le signe de λ : notons I l'ensemble des i tels que $\lambda_i > 0$ (non vide par hypothèse) et notons J le complémentaire de I c'est-à-dire l'ensemble des j tels que $\lambda_j \leq 0$ (et, en particulier, pour tous $i \in I$ et $j \in J$, alors $i \neq j$ et donc $\langle e_i, e_j\rangle < 0$). Dès lors :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = -\sum_{j \in J} \lambda_j e_j$$

   Si on note S la somme de gauche ci-dessus :

$$\langle S, S\rangle = \langle -\sum_{j\in J} \lambda_j e_j, \sum_{i \in I} \lambda_i e_i\rangle$$

   Par bilinéarité :

$$\langle S, S\rangle = -\sum_{j \in J} \lambda_j \sum_{i\in I} \lambda_i \langle e_j, e_i\rangle$$

   Or, cette quantité est égale à $\langle S, S\rangle \geq 0$ par définie positivité du produit scalaire. De plus, pour tous $i \in I$ et $j \in J$, $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$ et $\langle e_i, e_j\rangle < 0$ si bien que le membre de droite est strictement négatif, sauf si J est vide et alors cette somme est nulle : on en déduit que J est vide donc tous les λ_i sont strictement positifs.

   Prouvons donc le résultat de la question précédente, et supposons qu'il existe une famille obtusangle à $n+2$ éléments, notée $(e_1, \dots, e_{n+2})$, dans E, supposé de dimension n. La famille $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1} - e_{n+2})$ étant une famille de $n+1$ éléments en dimension n, elle est liée : il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1}(e_{n+1} - e_{n+2}) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} e_{n+1} - \lambda_{n+1} e_{n+2} = 0$$

   D'après ce qui précède, les λ_i étant non tous nuls, ils sont tous non nuls et de même signe, mais alors le coefficient devant e_{n+1} et celui devant e_{n+2} sont de même signe, ce qui est absurde puisqu'ils sont opposés et non nuls.

Exercice 52 - Matrices orthogonales : ✪✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M \times M^\top = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormales (d'un même espace de dimension n) est orthogonale. Réciproque ?
3. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) À l'aide de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PT$.
   (b) Montrer l'inégalité d'Hadamard :

$$\det(A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {A_{i,j}}^2$$

   Est-elle encore valable si A n'est pas inversible ?

Correction :

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Par définition d'une matrice orthogonale, $M^\top M = I_n$. Ainsi, M est inversible et $M^{-1} = M^\top$. D'où : $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. La matrice I_n est orthogonale donc $O_n(\mathbb{R})$ est non vide. Soient P et Q deux matrices orthogonales. Alors
$$(PQ)^\top(PQ) = Q^\top \left(P^\top P\right) Q = Q^\top I_n Q = Q^\top Q = I_n$$
En d'autres termes, $PQ \in O_n(\mathbb{R})$: $O_n(\mathbb{R})$ est stable par produit. De plus (on rappelle que la transposée de l'inverse est l'inverse de la transposée et qu'on change l'ordre d'un produit quand on passe à l'inverse),
$$\left(P^{-1}\right)^\top P^{-1} = \left(P^\top\right)^{-1} P^{-1} = \left(P \times P^\top\right)^{-1} = {I_n}^{-1} = I_n$$
En conclusion $P^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$: $O_n(\mathbb{R})$ est stable par inverse, c'est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ et $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ deux bases orthonormales, et notons $M = P_{B_2,B_1}$. Alors, par définition, pour tous i et j, $M_{i,j}$ est la coordonnée de e_j en facteur de ε_i, c'est-à-dire que pour tout j,
$$e_j = \sum_{i=1}^n M_{i,j}\varepsilon_i$$
Or, la base B_2 étant orthonormée, on connaît les coordonnées de façon explicite : pour tous i et j, $M_{i,j} = \langle e_j, \varepsilon_i\rangle$. Soient donc i et j deux éléments de $[\![1\,;\, n]\!]$. Alors :
$$\begin{aligned} \left(M \times M^\top\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n M_{i,k}\left(M^\top\right)_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n M_{i,k}M_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \langle \varepsilon_i, e_k\rangle\langle \varepsilon_j, e_k\rangle \end{aligned}$$
On reconnaît la somme des coordonnées de ε_i multipliées par les coordonnées de ε_j, c'est-à-dire que cette somme vaut $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j\rangle = \delta_{i,j}$ (car la base est orthonormale), et donc on trouve bien que $M \times M^\top = I_n$: la matrice est orthogonale.

   Montrons que la réciproque est vraie. La démonstration est analogue à celle du cours où on a montré qu'une matrice inversible était une matrice de passage : soit donc M une matrice inversible. Soit $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale de E et soit $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ la famille de vecteurs dont les coordonnées dans la base B_2 sont données par les colonnes de M. Alors B_1 est une base de E car M est inversible (car orthogonale) donc ses vecteurs colonnes forment une base. De plus, la matrice est orthogonale donc $\left(M^\top \times M\right)_{i,j} = \delta_{i,j}$. Or :
$$\begin{aligned} \left(M^\top \times M\right)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \left(M^\top\right)_{i,k} M_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n M_{k,i}M_{k,j} \end{aligned}$$
et on reconnaît le produit scalaire de e_i par e_j (somme des produits des coordonnées) et cette quantité vaut $\delta_{i,j}$, donc B_1 est elle aussi orthonormale.
3. (a) Notons $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. A étant inversible, les vecteurs colonnes de A forment une base de $\mathbb{K}^n$, qu'on note $B_1 = (f_1, \dots, f_n)$, et donc $A = P_{B,B_1}$ (les vecteurs colonnes de A sont les vecteurs de B_1 dans la base B). D'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormale $B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que, pour tout k, $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.

   D'après la formule de changement de base,
$$\begin{aligned} A &= P_{B,B_1} \\ &= \mathrm{Mat}_{B,B_1}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}) \\ &= \mathrm{Mat}_{B,B_2}(\mathrm{Id}) \times \mathrm{Mat}_{B_2,B_1}(\mathrm{Id}) \\ &= P_{B,B_2} \times P_{B_2,B_1} \end{aligned}$$

Posons donc $P = P_{B,B_2}$ et $T = P_{B_2,B_1}$. P est une matrice de passage entre deux bases orthonormales donc est orthogonale d'après la question 2. Or, les vecteurs colonnes de T sont les coordonnées de $(f_1, \ldots, f_n)$ dans la base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Par hypothèse, pour tout j, $f_j \in \text{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$ donc les coordonnées de f_j selon $(\varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ sont nulles, c'est-à-dire que $T_{j+1,j}, \ldots, T_{n,j}$ sont nuls : T est bien triangulaire supérieure.

(b) On demande de prouver que $\det(A)^2 \leq \|f_1\|^2 \times \cdots \times \|f_n\|^2$ puisque les coordonnées des vecteurs colonnes de A sont les coordonnées des vecteurs f_j dans la base canonique, et donc les $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} {A_{i,j}}^2$ sont leurs normes au carré. D'après la question précédente, $\det(A)^2 = \det(P)^2 \det(T)^2$. Or, P est orthogonale donc :

$$\begin{aligned}
\det(P)^2 &= \det(P) \times \det(P) \\
&= \det(P) \times \det(P^\top) \\
&= \det(P \times P^\top) \\
&= \det(I_n) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que $\det(T)^2 \leq \|f_1\|^2 \times \cdots \times \|f_n\|^2$. Or, T est triangulaire supérieure donc son déterminant est le produit de ses coefficients diagonaux, c'est-à-dire :

$$\det(T)^2 = {T_{1,1}}^2 \times \cdots \times {T_{n,n}}^2$$

Or, $T = P_{B_2,B_1}$ donc les coefficients de T sont les coordonnées des vecteurs de B_1 dans la base B_2. La base B_2 étant orthonormale, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2, T_{i,j} = \langle f_j, \varepsilon_i \rangle$ si bien que

$$\det(A)^2 = \det(T)^2 = \prod_{j=1}^{n} \langle f_j, \varepsilon_j \rangle^2$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout j, $\langle f_j, \varepsilon_j \rangle^2 \leq \|f_j\|^2 \|\varepsilon_j\|^2 = \|f_j\|^2$ puisque B_2 est orthonormale, ce qui permet de conclure.