Programme de colle fictif - Semaine n°32

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Célian FORET, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 33 - Déterminants

- cf. semaines 30 et 31.

Chapitre 34 - Espaces préhilbertiens réels

- cf. semaine 31.
- Orthogonal d'une partie. $X^\perp$ est un sev de E (même si X n'en est pas un). $X^\perp = \mathrm{Vect}(X)^\perp$. Parties orthogonales.
- Deux sev orthogonaux sont en somme directe. Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie, orthogonal de l'orthogonal. Contre-exemple quand on prend un espace de dimension infinie. Dimension de l'orthogonal quand l'espace ambiant est de dimension finie. Exemple : matrices symétriques/antisymétriques, fonctions paires/impaires (même si le théorème ne s'applique pas). Vecteur normal (un vecteur normal est non nul par définition).
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, $x - p(x) \in F^\perp$. Expression du projeté orthogonal selon une base orthonormale. Méthodes pour calculer le projeté orthogonal, exemples.
- Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie, exemple. Cas particulier d'un hyperplan en dimension finie.

Chapitres au programme

Chapitre 33 (cours et exercices), chapitre 34 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Définition de la comatrice. Valeur de $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top$ et expression de A^{-1} en fonction de la comatrice le cas échéant (énoncé précis, sans démonstration).
2. Déterminant de Vandermonde (sans démonstration).
3. Définition d'un produit scalaire. Au choix de l'examinateur : montrer que le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}\left(\left(A^\top \times B\right)\right) \end{cases}$$

ou le produit scalaire « habituel » sur $\mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ défini par

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}([\,a\,;b\,])^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est un produit scalaire.

4. Valeur de $\left|\left|\sum_{i=1}^{n} x_i\right|\right|^2$ (sans démonstration).
5. Formule de polarisation (sans démonstration). Une application linéaire préserve la norme si et seulement si elle préserve le produit scalaire (démonstration).
6. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (démonstration de l'inégalité uniquement).
7. Définition de la norme associée à un produit scalaire. Inégalité triangulaire, cas d'égalité (sans démonstration).
8. L'examinateur demande au candidat d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans un cas simple (maximum trois vecteurs).
9. Expression des coordonnées dans une base orthonormale en dimension finie (énoncé précis, sans démonstration).
10. Expression du projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel de dimension finie quand on connaît une BON (sans démonstration).
11. Projeté orthogonal de l'identité sur $\text{Vect}(\cos, \sin)$ quand on se place sur $\mathscr{C}([\,0\,;2\pi\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration : on pourra admettre que cos et sin sont de norme $\sqrt{\pi}$ et sont orthogonaux, mais l'examinateur peut demander de le redémontrer).
12. Projeté orthogonal de exp sur F, l'ensemble des fonctions affines, quand on se place sur $\mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration).

Groupes B - C :

1. Déterminant de Vandermonde (démonstration).
2. L'application

$$\langle\, , \rangle : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) & \to \quad \mathbb{R} \\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \mapsto \quad \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{cases}$$

   est bien définie et est un produit scalaire (démonstration : il n'est pas demandé de prouver que $\ell^2(\mathbb{N})$ est effectivement un espace vectoriel).
3. La famille $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base orthonormale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration).
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (démonstration, y compris du cas d'égalité).
5. Si $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, alors il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale telle que, pour tout n, P_n soit de degré n et de coefficient dominant 1 (démonstration : attention, l'initialisation a été faite avant l'hérédité dans le cours).
6. Si A est une partie non vide de E et $x \in E$, définition de $d(x, A)$. Si x et y appartiennent à E, $|d(x, A) - d(y, A)| \le ||x - y||$ (démonstration).
7. Valeur de

$$m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} (t - (a\cos(t) + b\sin(t))^2 \,\mathrm{d}t$$

   On pourra utiliser sans démonstration une autre question de cours, à savoir que le projeté orthogonal de l'identité sur $\text{Vect}(\cos, \sin)$ est $-2\sin$.

Groupe C :

1. Définition de la comatrice. Valeur de $A \times (\text{Com}(A))^\top$ et expression de A^{-1} en fonction de la comatrice le cas échéant (démonstration).
2. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille finie (énoncé précis, démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Familles sommables.
- Espaces affines.
- Début des fonctions de deux variables.

Exercices à préparer

Rien cette semaine.

Cahier de calcul

Chapitre 30.