Devoir Maison Hardcore n° 20

Problème - Le côté obscur des séries de Fourier (snif)

Dans tout le problème, $\mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$ désigne l'ensemble des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est un élément de $\mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$:

- On définit les suites $(a_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

- Les $a_n(f)$ et $b_n(f)$, quand n décrit $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^*$ pour $b_n(f)$), sont appelés coefficients de Fourier de la fonction f. Dans la suite, il n'y aura aucune ambiguïté sur la fonction f considérée, et donc on pourra plus simplement les noter a_n et b_n.
- Sous réserve d'existence, la fonction

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

  est appelée développement en série de Fourier de f.
- La série (de fonctions) associée :

$$x \mapsto \frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$$

  est appelée série de Fourier de f. En particulier, f admet un développement en série de Fourier sur $\mathbb{R}$ lorsque sa série de Fourier converge pour tout réel x.

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés des séries de Fourier.

Partie I - Les questions fantômes

On se donne dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$.

1. Justifier que les coefficients de Fourier de f sont bien définis. Comme dit ci-dessus, puisqu'il n'y a aucune ambiguïté, on les notera simplement a_n et b_n (au lieu de $a_n(f)$ et $b_n(f)$).
2. Pourquoi est-il inutile de définir b_0 ?
3. Montrer que si f est paire (respectivement impaire), alors les b_n (respectivement les a_n) sont nuls.
4. On suppose dans cette question que f est continue. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer[1] que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, a_n = \frac{1}{\pi}\int_x^{x+2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

   En d'autres termes, pour calculer les a_n, on peut calculer l'intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur 2π. On montrerait de même (et donc on l'admettra) que ce résultat est aussi vrai pour les b_n. Enfin, on admettra que c'est également vrai pour les fonctions continues par morceaux.

Partie II - L'attaque des coefficients clonés

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$.

1. Montrer que f est continue et 2π-périodique.
2. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
3. La fonction f est-elle paire ? impaire ?
4. Tracer l'allure du graphe de f. On fera apparaître les demi-tangentes en 0.

1. J'attends une vraie démonstration ! Pas seulement un « argument » du type : f étant 2π-périodique, son intégrale sur n'importe quel intervalle de longueur 2π est la même.

5. Calculer ses coefficients de Fourier. Montrer en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

On pourra, pour calculer a_n, commencer par réduire l'intervalle d'intégration en utilisant des relations de parité.
6. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum a_n \cos(nx)$ converge.
7. Donner la valeur de la somme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx)$$

lorsque $x = 0$. Vérifier en particulier que la somme de la série de Fourier de f en $x = 0$ est égale à $f(0)$.

Partie III - La revanche de $\zeta(2)$

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

- f est paire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t \in [\,0\,;\pi\,]\,, f(t) = t$.

1. Tracer sans justification le graphe de f sur $[\,-3\pi\,;3\pi\,]$.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ (on pourra donner la valeur de $f(x)$ si $x \in \,]\,\pi\,;2\pi\,]$).
3. Donner la valeur des coefficients de Fourier de f.
4. On admet (provisoirement : on le démontre dans l'avant-dernière partie) le théorème de Dirichlet, c'est-à-dire que f est égale à la somme de sa série de Fourier (en particulier, pour tout x, celle-ci converge) c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Prouver que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Partie IV - Un nouveau phénomène : le phénomène de Gibbs

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par :

- f est impaire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, f(t) = \dfrac{\pi - t}{2}$.

1. Donner la valeur de $f(0)$, ainsi que les limites à droite et à gauche en 0. f est-elle continue ? Tracer sans justification le graphe de f sur $[\,-3\pi\,;3\pi\,]$. Pouvait-on se passer de l'hypothèse d'imparité ?
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi - t}{2}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire que $b_n = 1/n$.
3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on, note S_N la somme partielle d'indice N de la série de Fourier de f. Montrer qu'il existe une fonction φ continue sur $[\,0\,;1\,]$ que l'on explicitera telle que :

$$S_N\left(\frac{\pi}{N}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Le but des parties suivantes (sauf les deux dernières) est d'énoncer et de démontrer le théorème de Dirichlet. Toutes les parties suivantes (même les deux dernières) sont facultatives.

Partie V - Dirichlet contre-attaque

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle noyau de Dirichlet et on note φ_n la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R}\backslash\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ par :

$$\forall u \in \mathscr{D}, \qquad \varphi_n(u) = \frac{\sin\left(\left(n+\dfrac{1}{2}\right)u\right)}{2\sin\left(\dfrac{u}{2}\right)}$$

(l'ensemble $\mathscr{D}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas des multiples de 2π).

1. (a) Montrer que φ_n est bien définie sur $\mathscr{D}$, puis qu'elle est continue sur $\mathscr{D}$ et prolongeable par continuité en 0 à l'aide d'un équivalent.
   (b) Montrer que la fonction φ_n est 2π-périodique. En déduire que φ_n est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (on précisera les valeurs que prend φ_n en tout point de $\mathbb{R}\backslash\mathscr{D}$). On note encore φ_n la fonction ainsi prolongée sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout réel u, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{iku}$.
   (b) Montrer (on n'oubliera pas de différencier les cas) la relation :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$$

   (c) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi_n(u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

Partie VI - Le retour du lemme de Riemann - Lebesgue

Soit $f : [\,0\,;2\pi\,] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Montrer que :

$$\int_0^{\pi} f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

   On commencera par prouver le résultat dans le cas où f est constante, puis dans le cas où f est en escalier.
2. Donner une preuve plus simple lorsque f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie VII - Le réveil des fonctions $\mathscr{C}^1$ (par morceaux)

On dit que $f \in \mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision de $[\,0\,;2\pi\,]$ notée $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ telle que, pour tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$:

- f soit $\mathscr{C}^1$ sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.
- la restriction de f à $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ soit prolongeable par continuité en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$.

En d'autres termes, f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux s'il existe une subdivision de $[\,0\,;2\pi\,]$ notée $\sigma = (a_i)_{0\le i\le n}$ telle que, tout $i \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$:

- f soit $\mathscr{C}^1$ sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.
- f admette une limite à droite en a_i, notée D_i, et une limite à gauche en a_{i+1}, notée G_{i+1}, finies.
- La fonction

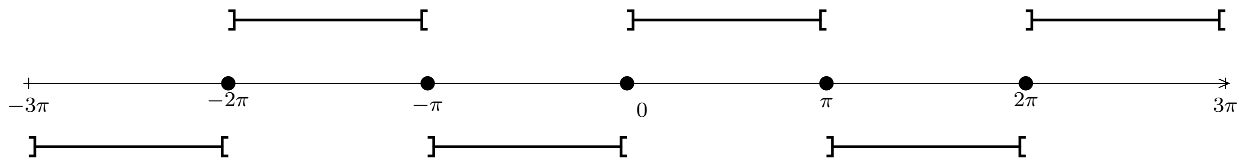
$$\tilde{f}_i \left\{ \begin{array}{ccc} [\,a_i\,;a_{i+1}\,] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \,]\,a_i\,;a_{i+1}\,[\\ D_i & \text{si } x = a_i \\ G_{i+1} & \text{si } x = a_{i+1} \end{cases} \end{array} \right.$$

  soit $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a_i\,;a_{i+1}\,]$.

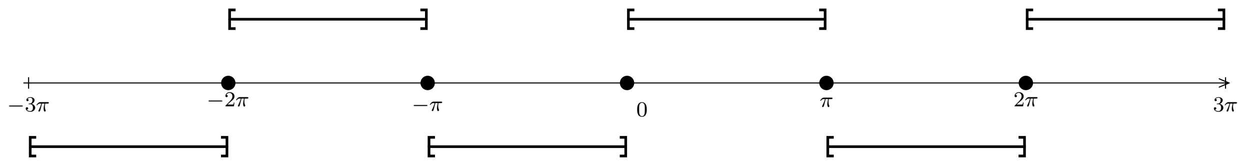
Par exemple (il n'est pas demandé de le prouver), la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- f est impaire.
- f est 2π-périodique.
- $\forall t \in]\,0\,;\pi\,[\,, f(t) = 1$.
- $f(\pi) = 0$.

dont le graphe est donné ci-dessous



est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, car les restrictions de f à $]\,-\pi\,;0\,[$ et $]\,0\,;\pi\,[$ sont toutes deux prolongeables par continuité en deux fonctions constantes, donc $\mathscr{C}^1$, respectivement sur $[\,-\pi\,;0\,]$ et $[\,0\,;\pi\,]$:



On se donne dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Soit $x \in [\,0\,;2\pi\,]$.

1. Justifier que f admet en x une limite à gauche finie, notée $f_g(x)$.
2. Justifier que la fonction
$$u \mapsto \frac{f(x-u) - f_g(x)}{u}$$
admet une limite finie en 0^+. On montrerait de même (et donc on l'admettra) que f admet une limite à droite finie en x, notée $f_d(x)$, et que la fonction
$$u \mapsto \frac{f(x+u) - f_d(x)}{u}$$
admet également une limite finie en 0^+.

Partie VIII - Les derniers arguments

On se donne dans cette partie une fonction $f \in \mathscr{C}_{2\pi}^{pm}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. En particulier (cf. partie VII), cela implique que f admet en tout réel x une limite à gauche et une limite à droite finies, notées comme précédemment $f_g(x)$ et $f_d(x)$. Le but de cette partie est de prouver le théorème de Dirichlet : la série de Fourier de f converge en tout point, et pour tout réel x,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{f_g(x) + f_d(x)}{2}$$

En particulier, si f est continue (et $\mathscr{C}^1$ par morceaux), la somme de la série de Fourier de f est égale à f. On se donne dans cette partie un réel x, un entier $N \geq 1$ et on note $S_N(x)$ la somme partielle d'indice N de la série de Fourier de f d'indice N en x, c'est-à-dire :

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

1. Rappeler les formules de trigo $\cos(a)\cos(b)$ et $\sin(a)\sin(b)$. En déduire que :
$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\varphi_N(u)\,\mathrm{d}u$$
où la fonction φ_N a été définie dans la partie V (on pourra utiliser la dernière question de la partie I).
2. En déduire l'égalité :
$$S_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x+v) + f(x-v)) \times \varphi_N(v)\,\mathrm{d}v$$

3. À l'aide de la dernière question de la partie V, montrer que :

$$S_N(x) - \frac{f_g(x)+f_d(x)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (f(x+v) - f_d(x) + f(x-v) - f_g(x)) \times \varphi_N(v)\,\mathrm{d}v$$

4. À l'aide de la partie VII, prouver que la fonction

$$g : v \mapsto \frac{f(x+v) - f_d(x) + f(x-v) - f_g(x)}{2\sin(v/2)}$$

est prolongeable par continuité en 0^+. Ce prolongement est encore noté g et est à présent continu par morceaux sur $[\,0\,;\pi\,]$ (il n'est pas demandé de le prouver).

5. Conclure à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue.

Partie IX - L'ascension du théorème de Fejér

On se donne dans cette partie une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique (il n'est pas supposé que f est $\mathscr{C}^1$ par morceaux). On fixe dans cette partie un entier $N \geq 1$ ainsi qu'un réel $\varepsilon > 0$. On pose enfin, en reprenant les notations des parties précédentes :

$$\psi_N = \frac{\varphi_0 + \cdots + \varphi_N}{N+1} \qquad \text{et} \qquad C_n = \frac{S_0 + \cdots + S_N}{N+1}$$

1. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [\,-\pi\,;3\pi\,], |x-y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Quitte à prendre un α plus petit, on peut supposer $\alpha < \pi$ (il n'est pas demandé de le prouver) et c'est donc ce qu'on fera dans la suite.

2. Soit $x \in [\,-\pi\,;\pi\,] \setminus [\,-\alpha\,;\alpha\,]$. Calculer $\psi_N(x)$ et en déduire que

$$|\psi_N(x)| \leq \frac{1}{2(N+1)\sin^2(\alpha/2)}$$

3. À l'aide de la question 1 de la partie précédente (il est évident, et donc on l'admettra, qu'elle est toujours valable avec une fonction à valeurs complexes), prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, C_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\psi_N(u)\,\mathrm{d}u$$

Donner une écriture intégrale du même type pour $f(x)$ (on pourra utiliser la dernière question de la partie V).

4. Prouver l'existence de $M = \max_{[\,-\pi\,;3\pi\,]} |f|$.

5. Soit $x \in [\,0\,;2\pi\,]$. Montrer que :

$$|f(x) - C_N(x)| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\alpha \leq |t| \leq \pi} 2M\psi_N(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} \varepsilon\psi_N(t)\,\mathrm{d}t$$

6. À l'aide de la dernière question de la partie V et de la question 2 (de la partie IX), prouver qu'il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, $|f(x) - C_N(x)| \leq 2\varepsilon$, et justifier que ce résultat est en fait vrai pour tout réel x.

Partie X - Le nouvel ordre de $\zeta(2p)$

On admet pour gagner du temps (on l'a prouvé dans l'exercice 3 du chapitre 10) qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$B_0 = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, {B_n}' = nB_{n-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 B_n(t)dt = 0$$

Les B_n sont appelés polynômes de Bernoulli. On pose enfin $b_n = B_n(0)$. b_n est appelé le n-ième nombre de Bernoulli.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3 (en particulier, vérifier que $B_2 = X^2 - X + 1/6$). En déduire b_1, b_2 et b_3.

2. Calculer, pour $n \geq 2, B_n(1) - B_n(0)$.

Pour tout nombre entier $k \geq 0$, on note φ_k la fonction 2π-périodique qui coïncide avec $x \mapsto B_{2k}\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ sur $[\,0\,;2\pi\,[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n(k)$ et $b_n(k)$ les coefficients de Fourier $a_n(\varphi_k)$ et $b_n(\varphi_k)$ respectivement.

3. (a) Justifier que, pour tous n et k,

$$a_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

On montrerait de même (et donc on l'admettra) que pour tous n et k,

$$b_n(k) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} B_{2k}\left(\frac{t}{2\pi}\right)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

(b) Prouver que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]\,, B_2(1-x) = B_2(x)$. En déduire que, pour tout $x \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, \varphi_1(-x) = \varphi_1(x)$. On en déduit par 2π-périodicité que φ_1 est paire, et on montrerait comme dans les parties précédentes que φ_1 est continue (il n'est pas demandé de le prouver).

(c) Justifier que, pour tous $n \geq 1$ et $k \geq 2$, $b_n(k) = -\dfrac{k(2k-1)b_n(k-1)}{2\pi^2 n^2}$.

(d) En déduire que :

$$B_{2k}(0) = \frac{a_0(k)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(k)$$

4. (a) Donner la valeur de $a_0(k)$ pour $k \geq 1$.

(b) Soient $n \geq 1$ et $k \geq 1$. Montrer que l'on a

$$a_n(k) = \frac{k}{(n\pi)^2}\left(B_{2k-1}(1) - B_{2k-1}(0)\right) - \frac{(2k)(2k-1)}{(2n\pi)^2} \times a_n(k-1)$$

(c) En déduire la valeur de $a_n(1)$ pour $n \geq 1$.

(d) Conclure que pour $n \geq 1$ et $k \geq 2$ on a

$$a_n(k) = \frac{(-1)^{k-1}(2k)!}{2^{2k-1}(n\pi)^{2k}}$$

On remarquera dans la suite (il n'est pas demandé de le prouver) que cette formule reste vraie pour $k = 1$.

5. Donner une relation entre $\zeta(2k)$ et b_{2k}. Retrouver la valeur de $\zeta(2)$.

6. En utilisant le fait que $\zeta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ (cf. cours) ainsi que la formule de Stirling, montrer que

$$b_{2k} \sim (-1)^{k-1} \times 4\sqrt{k\pi}\left(\frac{k}{\pi e}\right)^{2k}$$

7. (a) Montrer, à l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

(b) En utilisant le fait que l'intégrale de B_n est nulle, donner une relation exprimant b_n en fonction de $b_0, \ldots, b_{n-1}$.

(c) En déduire la valeur de $\zeta(4)$ et de $\zeta(6)$.

Voici des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir de séries (et d'autres sur lesquels je râle toute l'année). Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Faire attention aux échecs de type (ne pas écrire « la suite u_n » ou « la fonction $f(x)$ » par exemple).

   O - N - B.

2. Ne pas inventer de propriétés qui n'existent pas (du type : « la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 donc f n'est pas dérivable en 0 »).

   O - N - B.

3. Ne pas comparer des séries mais des termes généraux (par exemple, ne pas écrire : « $\sum u_n \sim \sum v_n$ » mais écrire : « $u_n \sim v_n$ »).

   O - N - B.

4. Ne pas oublier d'écrire (le cas échéant) le mot « positif ».

   O - N - B.

5. Préciser qu'une série converge absolument avant d'utiliser le théorème de sommation par paquets (typiquement : termes pairs/termes impairs).

   O - N - B.

6. Justifier la convergence des sommes (et non pas des séries) de Riemann.

   O - N - B.

7. Faire deux cas quand on calcule des sommes de termes de suites géométriques.

   O - N - B.

8. Vérifier que les bornes sont dans l'ordre croissant quand on applique l'inégalité triangulaire pour les intégrales.

   O - N - B.