Programme de colle - Semaine n°25

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 26 - Probabilités sur un univers fini

- cf. semaines 22 et 23.

Chapitre 27 - Variables aléatoires sur un univers fini

- cf. semaine 23.

Chapitre 28 - Espaces vectoriels

- cf. semaine 24.
- Existence et unicité de la décomposition selon une base : notion de coordonnées (attention, les coordonnées dépendent de la base choisie).
- Une intersection de sev de E est un sev de E. Une union de deux sev de E est un sev de E si et seulement si l'un des deux est inclus dans l'autre. Application (de l'intersection) : $\mathrm{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sev de E qui contiennent A.
- Somme de deux sev de E. $E_1 + E_2$ est un sev de E qui contient E_1 et E_2, $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$.
- Somme directe de deux sous-espaces vectoriels (définie à l'aide de l'unicité de l'écriture). Caractérisation par l'intersection. Théorème de concaténation des bases.
- Sous-espaces supplémentaires. Méthode pour prouver que des espaces sont supplémentaires.

Chapitre 29 - Applications linéaires

- Définition d'une application linéaire. Condition nécessaire importante : $u(0_E) = 0_F$, contraposée (attention, réciproque fausse). Caractérisation pratique bis. Linéarité généralisée. Définition d'un endomorphisme, d'un isomorphisme, d'un automorphisme, exemples.
- Caractérisation des homothéties : si, pour tout x, x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie.
- Exemples plus géométriques : rotations, symétries, projections (on se contente de dessins pour l'instant, les projections et symétries seront vues dans la suite du cours). Les translations ne sont pas linéaires.
- Notation $Ł(E, F)$, notation $Ł(E)$. $Ł(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Isomorphisme réciproque, si $u \in Ł(E, F)$ et $v \in Ł(F, E)$ vérifient $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$ alors u et v sont bijectives et réciproques l'une de l'autre. Composée d'applications linéaires, distributivité de la composition par rapport à la somme, bilinéarité de la composition.
- Anneau $Ł(E)$, notation u^p pour $p \in \mathbb{N}$, propriétés de la puissance. Binôme de Newton, identités remarquables (les endomorphismes doivent commuter !). Endomorphismes nilpotents, exemples (la dérivation n'est pas nilpotente sur $\mathbb{K}[X]$!), somme et composée d'endomorphismes nilpotents qui commutent. Groupe $\mathrm{GL}(E)$, notation u^p pour $p \in \mathbb{Z}$ lorsque $u \in \mathrm{GL}(E)$.
- Image directe, image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Image, noyau, exemples. Caractérisation de l'injectivité.
- Détermination d'une AL étant donnée l'image d'une base, détermination d'une AL à l'aide de la restriction à deux sev supplémentaires.

- Image d'une famille libre, d'une famille génératrice, d'une base. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité à l'aide de l'image d'une base.

Chapitres au programme

Chapitres 26 et 27 (exercices uniquement, on peut à présent interroger sur tout le chapitre 27), chapitres 28 et 29 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Les deux caractérisations pratiques pour prouver qu'une partie est un sous-espace vectoriel de E (sans démonstration).
2. L'examinateur donne deux vecteurs de $\mathbb{K}^3$ et demande au candidat de décrire l'espace engendré à l'aide d'une équation.
3. L'examinateur donne une ou plusieurs équations dans $\mathbb{K}^3$ et demande au candidat d'écrire l'espace caractérisé par ces équations sous forme de Vect.
4. Écrire $\{P \in \mathbb{K}_3[X] \,|\, P(1) = 0\}$ sous forme de Vect.
5. Définition d'une famille génératrice. Écriture avec des quantificateurs (cas d'une famille quelconque, cas d'une famille finie).
6. Définition d'une famille libre (cas d'une famille finie, cas d'une famille quelconque). L'examinateur donne des vecteurs de $\mathbb{K}^3$ et demande s'ils sont libres ou non.
7. Définition d'une base. Donner les bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}[X], \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (sans démonstration).
8. La famille $(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et donner les coordonnées de $(1, -1, 1)$ dans cette base (méthode au choix de l'élève : avec un système ou une matrice).
9. Définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. $E_1 + E_2$ est un sev de E qui contient E_1 et E_2 (démonstration).
10. Somme directe de deux sev de E. Caractérisation par l'intersection (démonstration).
11. Théorème de concaténation des bases (sans démonstration).
12. $E_1 = \text{Vect}((-1, 0, 1))$ et $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x - y - z = 0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$ (démonstration).
13. Définition d'une application linéaire, condition nécessaire importante et caractérisation pratique bis (sans démonstration).
14. L'examinateur donne une application simple de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ dans un cas explicite (cela peut être avec des entiers n et p génériques, ou des entiers explicites, par exemple de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$) et demande si elle est linéaire.
15. Détermination d'une AL étant donnée l'image d'une base (énoncé précis, sans démonstration).
16. Définition du noyau, de l'image. Écriture de $y \in \text{Im}(u)$ avec des quantificateurs. Caractérisation de l'injectivité (démonstration).
17. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité à l'aide de l'image d'une base (sans démonstration).

Groupes B - C :

1. La famille de fonctions $(x \mapsto e^{\lambda x})_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est libre (démonstration).
2. Caractérisation des homothéties (démonstration).

Groupe C :

1. La famille de fonctions $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$ est libre (démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des applications linéaires.
- Début de la dimension finie ?

Exercices à préparer

Exercices 36, 37, 40, 42, 44, 45 du chapitre 28.

Cahier de calcul

Rien cette semaine !