Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 18

Exercice 1 - Des développements en série entière

Dans la suite de l'exercice, si $(a_n)_{n\geq n_0}$ est une suite (qui peut dépendre de x), on notera

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n_0}^{n} a_k$$

à condition, bien sûr, que cette limite existe. On a vu en classe que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad \sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ainsi que le classique $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Première partie - La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

1. Donner la dérivée n-ième de f pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]\,, \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$.
3. On souhaite montrer que ce résultat est toujours vrai pour $x \in \,]-1\,;0\,]$. On se donne donc dans cette question $x \in \,]-1\,;0\,]$.
   (a) Expliquer rapidement pourquoi l'inégalité de Taylor-Lagrange ne permet pas de conclure.
   (b) Donner le maximum de la fonction $|\varphi|$ sur l'intervalle $[\,x\,;0\,]$, où φ est la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{x-t}{1+t}$.
   (c) À l'aide de la formule de Taylor reste intégral, montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ que l'on exprimera en fonction de x (on vérifiera que K est bien positif) tel que

   $$\forall n \geq 1, \qquad \left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k} \right| \leq K|x|^n$$

   (d) Conclure.

Deuxième partie - La fonction tan.

1. On se donne dans cette partie un réel $x \in [\,0\,;\pi/2\,[$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, \tan^{(n)}(x) \geq 0$. On pourra utiliser un certain exercice du chapitre 14.
2. Donner la monotonie de la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$ et en déduire qu'elle converge (on pourra utiliser la formule de Taylor reste intégral et donner le signe du reste). Le but de cette partie est de montrer qu'elle converge vers $\tan(x)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R_n(x)$ le reste intégral de la question précédente. Montrer que la fonction $\varphi : u \mapsto R_n(u)/u^{n+1}$ est croissante sur $]\,0\,;\pi/2\,[$ (on calculera $\varphi(u) - \varphi(v)$, on pourra faire des changements de variable pour que les deux intégrales aient les mêmes bornes 0 et 1 et on se rappellera que $\tan^{(n+2)}$ est positive).
4. Soit $y \in \,]\,x\,;\pi/2\,[$. Montrer que $0 \leq R_n(y) \leq \tan(y)$ et en déduire que $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire que

$$\tan(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Exercice 2 - Méthode de Newton (DS n$^\mathrm{o}$ 6, 2021/22) :

On se donne dans tout l'exercice une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ avec $a < b$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et telle que f' ne s'annule pas sur $[\,a\,;b\,]$.

1. **Montrer** que f' est de signe constant. En déduire que f s'annule une unique fois sur $[\,a\,;b\,]$ en un réel que l'on notera x_0. On définit dans la suite la fonction φ sur $[\,a\,;b\,]$ par
$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
2. Montrer que x_0 est un point fixe de φ. Justifier rapidement que φ est dérivable en x_0 et donner la valeur de $\varphi'(x_0)$.
3. Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]\,, |\varphi'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$.
4. On garde dans la suite la valeur de η trouvée à la question précédente, et on pose $J = [\,x_0 - \eta\,; x_0 + \eta\,]$. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que J est stable par φ.

   On définit dans la suite de l'exercice la suite (u_n) par
$$\begin{cases} u_0 \in J \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$$
   Il découle de la question précédente, par une récurrence immédiate (et donc on l'admettra), que $u_n \in J$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - x_0| \leq \dfrac{1}{2^n} \times |u_0 - x_0|$ et en déduire la limite de la suite (u_n).
6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse u_n.
   (b) En déduire que cette tangente coupe l'axe des abscisses en u_{n+1}. llustrer graphiquement.

7. (a) Justifier l'existence de $m = \min_{c\in[\,a\,;b\,]} |f'(c)|$ et de $M = \max_{c\in[\,a\,;b\,]} |f''(c)|$, et justier que $m > 0$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction φ sur $[\,u_n\,; x_0\,]$, montrer que
$$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{M}{2m} \times |u_n - x_0|^2$$
   (c) On pose $\lambda = M/2m$. En déduire une majoration de $|u_n - x_0|$ en fonction de λ, n et de $|u_0 - x_0|$ [1].
   (d) Soit $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. Montrer que $\alpha^{2^n} \times 2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (attention, ce n'est pas une croissance comparée du cours, il faut le montrer à la main !).
   (e) En déduire que si u_0 est suffisamment proche de x_0 en un sens que l'on précisera, alors la majoration de la question 7.(c) est bien meilleure que celle de la question 5.

8. **Application :** On veut une valeur approchée de $x_0 = \sqrt{2}$. On cherche donc une fonction f qui s'annule en $\sqrt{2}$: prendre $f(x) = x - \sqrt{2}$ n'apporterait rien, on ne saurait pas calculer les images de f car on cherche précisément une valeur approchée de $\sqrt{2}$. On contourne la difficulté en posant $f(x) = x^2 - 2$ dont les images sont simples à calculer. On reprend les notations de ce problème $(u_n, \varphi \dots)$.
   (a) Donner la fonction φ correspondante.
   (b) Soit $n \geq 1$. Montrer que
$$\frac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}} = \left(\frac{u_{n-1} - \sqrt{2}}{u_{n-1} + \sqrt{2}}\right)^2$$
   En déduire une expression de $\dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$ en fonction de $u_0, \sqrt{2}$ et n.
   (c) En déduire finalement un équivalent de $u_n - \sqrt{2}$.

1. Les « par récurrence immédiate » seront acceptés, mais si votre formule est fausse, il ne faudra pas venir pleurer !