Devoir Surveillé n°8 - Sujet groupes B et C

Préliminaires

1. (Question de cours) Donner la décomposition en produit de cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions (méthode au choix) et la signature de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 & 9 & 2 & 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. (Question de cours) Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (démonstration).

Problème - Autour de l'existence de valeurs propres

Dans tout le problème, sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une valeur propre de f s'il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$, et on dit alors que x est un vecteur propre de f. Noter que, par définition, un vecteur propre est non nul (mais λ, lui, peut être nul).
- Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on dit que λ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ tel que $MX = \lambda X$, et on dit alors que X est un vecteur propre (matrices/endomorphismes : même combat !).
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ et si $\mathrm{Mat}_B(f) = M$ (où B est une base de E), alors on pourra abusivement confondre f et M. Par exemple, on pourra écrire $\ker(f) = \ker(M)$.
- Puisque la composition se traduit matriciellement par le produit, un vecteur $x \in \mathscr{L}(E)$ est vecteur propre d'un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ pour la valeur propre λ si et seulement si la matrice colonne X associée à x (dans une base quelconque) est vecteur propre pour la matrice M associée à f pour la même valeur propre (il n'est pas demandé de le prouver).
- Si f et g sont deux endomorphismes de E, on dit qu'ils commutent lorsqu'ils commutent pour la composition, c'est-à-dire lorsque $f \circ g = g \circ f$.

Le but de ce problème est de prouver que tout endomorphisme u d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie admet une valeur propre (complexe) et d'en déduire une preuve du théorème de d'Alembert-Gauß. En particulier, on n'utilisera pas le théorème de d'Alembert-Gauß dans ce problème (ni aucune de ses conséquences directes, comme par exemple la décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$).

Partie I - Préliminaires, premiers exemples

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif, si et seulement si $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif.
2. Donner une CNS faisant intervenir le rang de $M - \lambda I_n$ pour que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre d'une matrice M.
3. Soit

$$f \colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (-4x+2y-2z, -6x+4y-6z, -x+y-3z) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est linéaire et donner A, la matrice canoniquement associée à f.
   (b) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, donner le rang de $A - \lambda I_3$. En déduire que A admet deux valeurs propres λ_1, λ_2 que l'on explicitera.
   (c) Expliciter une base B' de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres A (on vérifiera bien que c'est une base).
   (d) Donner, de deux façons différentes, la matrice de f dans la base B'.

Partie II - Existence d'une valeur propre dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire

On suppose dans cette partie que n est un entier impair et que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par conséquent, les matrices, valeurs propres, vecteurs propres etc. seront tous considérés réels.

1. On suppose dans cette question uniquement que $n = 1$.
   (a) Montrer que toute matrice (de taille $n = 1$) admet une valeur propre (réelle).
   (b) Montrer que si A et B sont deux matrices qui commutent, alors A et B admettent un vecteur propre commun (pas forcément pour la même valeur propre !).

   Le but de cette partie est de prouver que ces deux résultats sont encore vrais lorsque les matrices sont de taille n, où n est un entier impair quelconque. On raisonne pour cela par récurrence forte sur n, et on vient donc de prouver l'initialisation. Dans la suite de cette partie, on suppose que le résultat est vrai pour tout $k < n$ impair, c'est-à-dire que si k est un entier impair strictement inférieur à n, alors :
   - toute matrice réelle de taille k admet (au moins une) valeur propre (réelle),
   - si A et B sont deux matrices réelles de taille k qui commutent, alors elles admettent un vecteur propre commun,

   et on cherche à prouver que ces résultats sont encore vrais pour des matrices de taille n.

2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Notons $\chi_M = \det(XI_n - M)$ (χ_M est appelé le polynôme caractéristique de M). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Justifier que λ est valeur propre de M si et seulement si λ est racine de χ_M.
   (b) D'après l'exercice 45 du chapitre 33, χ_M est un polynôme à coefficients réels, de degré n, et unitaire (il n'est pas demandé de le prouver). En utilisant le fait que n est impair, prouver que M admet une valeur propre réelle. Le premier point de l'hérédité ci-dessus est donc prouvé.

3. On se donne dans cette question deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent et on cherche donc à prouver que A et B admettent un vecteur propre commun.
   (a) Justifier que A admet une valeur propre (réelle) que l'on notera λ.
   (b) Prouver le résultat voulu lorsque $A = \lambda I_n$. On suppose dans la suite de cette question que $A \neq \lambda I_n$.
   (c) Soient f et $g \in \mathscr{L}(E)$ les deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associés à A et B respectivement. En utilisant le fait que f et g commutent (il n'est pas demandé de le prouver), justifier que le noyau et l'image de $\lambda \mathrm{Id}_E - f$ sont stables par g.
   (d) Justifier que l'un de ces deux espaces (le noyau ou l'image de $\lambda \mathrm{Id}_E - f$) est de dimension impaire strictement inférieure à n, et conclure (on pourra utiliser, après l'avoir brièvement justifié, le fait que les restrictions de f et g à cet espace sont des endomorphismes de cet espace).

Partie III - Existence d'une valeur propre dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension impaire

Le but de cette partie est de prouver que le résultat de la partie précédente est encore vrai, mais sur $\mathbb{C}$. En d'autres termes, on se donne encore un entier n impair et on souhaite prouver que :
- toute matrice complexe de taille n admet (au moins une) valeur propre (complexe),
- si A et B sont deux matrices complexes de taille n qui commutent, alors elles admettent un vecteur propre (complexe) commun.

Là aussi, nous allons travailler par récurrence forte sur n. L'initialisation étant analogue au cas réel, nous l'admettons dans la suite, et nous supposons donc le résultat vrai pour tous les entiers k impairs strictement inférieurs à n.

1. On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est antihermitienne si $\left(\overline{M}\right)^\top = -M$ où, évidemment, $\overline{M}$ désigne la conjuguée de M, c'est-à-dire la matrice obtenue en conjuguant tous les coefficients de M.
   (a) Montrer que l'application $M \mapsto \overline{M}$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
   (b) En déduire que l'ensemble des matrices antihermitiennes (qu'on notera Λ_n) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Est-ce un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

2. En examinant la partie réelle et la partie imaginaire d'une matrice antihermitienne, prouver que Λ_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n^2 impaire.

   On se donne dans la suite une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (pas forcément antihermitienne) et on définit sur Λ_n les deux fonctions f et g par :

$$\forall B \in \Lambda_n, \qquad f(B) = \frac{1}{2}\left(AB + B\left(\overline{A}\right)^\top\right) \qquad \text{et} \qquad g(B) = \frac{1}{2i}\left(AB - B\left(\overline{A}\right)^\top\right)$$

3. Montrer que f et g sont des endomorphismes de Λ_n qui commutent.
4. Montrer qu'il existe $B \in \Lambda_n$ non nulle et deux **réels** λ et μ tels que $f(B) = \lambda B$ et $g(B) = \mu B$.
5. Exprimer AB en fonction de B, de λ et de μ et en déduire que tout vecteur colonne non nul de B est vecteur propre de A. En déduire que le premier point ci-dessus est vrai au rang n. On prouverait le deuxième point de la même façon que dans dans la partie précédente, et donc on l'admettra, ce qui clôt la récurrence.

Partie IV - Cas général

1. Montrer que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $n = 2^a \times b$ avec a et $b \in \mathbb{N}$ et b impair.

   Nous allons prouver les deux points de la partie précédente pour toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons pour cela raisonner par récurrence sur a. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{N}$, notons H_a le résultat suivant : pour tout $b \in \mathbb{N}$ impair, en posant $n = 2^a \times b$:
   - tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n admet une valeur propre,
   - si u et v sont deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n qui commutent, alors u et v ont un vecteur propre commun.

   Nous ferons référence à cette hypothèse comme à l'hypothèse de récurrence, version endomorphismes. Encore une fois, nous pourrons confondre matrices et endomorphismes, et donc il est tout à fait équivalent de noter H_a le résultat suivant (auquel nous ferons référence comme à l'hypothèse de récurrence, version matrices) :
   - toute matrice complexe de taille n admet valeur propre,
   - si A et B sont deux matrices complexes de taille n qui commutent, alors elles admettent un vecteur propre commun.
2. Expliquer rapidement pourquoi l'initialisation a déjà été prouvée. Dans la suite, on se donne a un entier naturel non nul, on suppose le résultat vrai jusqu'au rang $a-1$ et on cherche à prouver qu'il est encore vrai au rang a. On se donne dans la suite un entier $b \in \mathbb{N}$ impair et on note $n = 2^a \times b$. On se donne enfin une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. (a) Justifier que $A_n(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices antisymétriques (pas antihermitiennes !) de taille n à coefficients dans $\mathbb{C}$, est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et justifier rapidement [1] qu'il est de dimension $n(n-1)/2$.
   (b) En déduire qu'on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, version endomorphismes, à $A_n(\mathbb{C})$ (c'est-à-dire appliquer l'hypothèse de récurrence à des endomorphismes de $A_n(\mathbb{C})$).
4. On définit sur $A_n(\mathbb{C})$ des applications f et g par :
   $$\forall B \in A_n(\mathbb{C}), \qquad f(B) = AB + BA^\top \qquad \text{et} \qquad g(B) = ABA^\top$$
   Il est immédiat que f et g sont linéaires et donc on l'admettra. Montrer qu'il existe λ et $\mu \in \mathbb{C}$ et une matrice antisymétrique B non nulle tels que $f(B) = \lambda B$ et $g(B) = \mu B$. En déduire que $(A^2 - \lambda A + \mu I_n)B = 0$.
5. Soient r et s les deux racines (éventuellement égales) du polynôme $X^2 - \lambda X + \mu$ et soit Y un vecteur colonne non nul de B. Montrer que
   $$(A - rI_n)(A - sI_n)Y = 0$$
6. En déduire que soit Y est vecteur propre de A, soit $AY - sY$ est vecteur propre de A. Le premier point de l'hérédité est donc prouvé (pour l'hypothèse de récurrence, version matrices, équivalente à l'hypothèse de récurrence, version endomorphismes).
7. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension $n = 2^a \times b$ qui commutent.
   (a) Montrer le deuxième point de l'hérédité dans le cas particulier où f est une homothétie et en utilisant le premier point (prouvé à la question précédente).
   (b) On suppose dans la suite que f n'est pas une homothétie. Prouver que f admet une valeur propre λ et que, parmi le noyau ou l'image de $\lambda \mathrm{Id}_E - f$, l'un des deux est non trivial (c'est-à-dire différent de $\{0\}$ et E) et de dimension $2^r \times q$ avec $r \leq a$ et q impair (où l'on rappelle que E est de dimension $n = 2^a \times b$).
   (c) Prouver que l'ensemble
   $$D = \{\dim(F) \,|\, F \text{ sev de } E \text{ non trivial stable par } f \text{ et } g \text{ de dimension } \dim(F) = 2^c \times d \text{ avec } d \text{ impair et } c \leq a\}$$
   admet un plus petit élément noté $n_0 = 2^{r_0} q_0$ avec $r_0 \leq a$ et q_0 impair. Il existe donc un sev E_0 de E non trivial stable par f et g de dimension n_0.
   (d) Justifier que, si $r_0 = a$, alors la restriction de f à E_0 est une homothétie, et conclure à une absurdité.
   (e) Conclure.

1. On autorisera une démonstration « avec les mains ».

Partie V - Théorème de d'Alembert-Gauß

1. Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant (donc avec $n \geq 1$). Soit

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   On dit que C est la matrice compagnon de P. Montrer que $\det(XI_n - C) = P$.
2. Prouver le théorème de d'Alembert-Gauß.

Fin