Devoir Surveillé n°4 - Sujet groupe A

1. (Question de cours) Définition d'une relation d'ordre, d'une relation d'équivalence. Le candidat écrira la signification des conditions avec des quantificateurs.
2. (Question de cours) Donner la définition d'un groupe et d'un groupe abélien.
3. Donner le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - 2$.
4. Même question avec la suite (u_n) définie par $u_0 = -3, u_1 = -7$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n$.
5. Donner la limite des suites de terme général :
   - $u_n = \dfrac{8^n}{e^{3n}}$.
   - $v_n = \dfrac{e^n - n^2 \times 2^n + 3^n}{e^n + n^2 \times 2^n - 3^n}$.
6. (a) Justifier que, pour tout $k \geq 1$, $1/k! \leq 1/2^{k-1}$.

   (b) Montrer que la suite de terme général
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$
   converge.
7. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \lfloor 10^n \times \pi \rfloor / 10^n$.
8. Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto 1/\ln(x)$. En quel(s) point(s) f est-elle prolongeable par continuité ?
9. Soient $f, g : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f(x_0) = 2024g(x_0)$.
10. Soient f et g deux fonctions continues telles que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) < g(x)$. Montrer que $f \leq g$.
11. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^{2024} + 1\right) e^{-x^2}$.

    (a) Donner les limites de f en $\pm\infty$.

    (b) Justifier l'existence d'un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \geq A, |f(x)| \leq 1$.

    (c) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.
12. Donner la dérivée de :
    $$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\ln\left(3 + \cos\left(e^{\sin(2x)}\right)\right)\right) \end{cases}$$
    Il n'est pas demandé de justifier que f est effectivement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
13. Justifier que
    $$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \sin(1/x) \end{cases}$$
    est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
14. Soit $f : [\,0\,;1\,]$ dérivable telle que $f(0) = f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in \,]\,0\,;1\,[$ tel que $f'(x) = 2\pi \sin(2\pi x)$.
15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f(a) - f(-a) = a(f'(c) + f'(-c))$. On pourra introduire la fonction
    $$\varphi\colon \begin{cases} [\,0\,;a\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - f(-x) \end{cases}$$
16. Soit
    $$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto e^{-x/2} \end{cases}$$

(a) Montrer que f admet un unique point fixe (sur $\mathbb{R}_+$) que l'on notera α.

(b) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2024$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, pour tout n :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - \alpha|$$

(c) Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

17. Soit $n \geq 2$. Donner la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (7x^2 + 5x) \times e^{2x}$.
18. (Question de cours) Donner la définition d'une fonction convexe.
19. Sur quels intervalles la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est-elle concave ? convexe ? Préciser ses points d'inflexion éventuels.
20. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq n \times \sqrt{\frac{n+1}{2}}$$