Chapitre 12

Suites numériques

I Compléments sur les réels

I.1 Ordre sur $\mathbb{R}$ (stage two)

Nous avons défini dans le chapitre 2 les notions de majorant et de minorant. Le problème de ces notions est qu'il n'y a pas unicité et que ce n'est pas forcément optimal. Par exemple, dire que $[\,0\,;1\,]$ est majoré par 2022 est juste mais on sent qu'on peut faire mieux.

Pour remédier à cela, nous avons défini la notion de maximum et de minimum. L'avantage est qu'il y a unicité et, puisqu'un maximum appartient à l'ensemble, les autres majorants lui sont supérieurs donc on a le sentiment que c'est « le meilleur majorant possible ». Inconvénient : il n'existe pas toujours. Par exemple, $[\,0\,;1\,[$ n'a pas de plus grand élément. Il faut donc une notion intermédiaire qui collerait à la notion intuitive de « meilleur des majorants » (et idem pour les minorants).

On se donne dans tout ce paragraphe une partie de $\mathbb{R}$ non vide A.

I.1.a Borne inférieure, borne supérieure

Définition (Borne supérieure, borne inférieure).

- Sous réserve d'existence, on appelle borne supérieure ou supremum de A le plus petit de ses majorants.
- Sous réserve d'existence, on appelle borne inférieure ou infimum de A le plus grand de ses minorants.

Remarque : Lorsqu'elle existe, la borne supérieure est donc le plus petit élément de B, l'ensemble des majorants de A, et est donc unique (on rappelle qu'un plus petit ou qu'un plus grand élément est unique lorsqu'il existe) : on la note $\sup(A)$. De même, lorsqu'elle existe, la borne inférieure est donc le plus grand élément de C, l'ensemble des minorants de A, et est donc unique : on la note $\inf(A)$.

Remarque : En d'autres termes, la borne supérieure est, quand elle existe, le « meilleur majorant possible » : tous les autres lui sont supérieurs ! Idem pour la borne inférieure, c'est le « meilleur minorant possible » : tous les autres lui sont inférieurs ! Rappelons (cf. chapitre 2) qu'un majorant est d'autant plus intéressant qu'il est petit, et qu'un minorant est d'autant plus intéressant qu'il est grand.

Exemples :

- Montrons que 1 est la borne supérieure de $[\,0\,;1\,[$. Tout d'abord, tout réel supérieur ou égal à 1 est un majorant de $[\,0\,;1\,[$. De plus, si $x<1$, alors x n'est pas un majorant de $[\,0\,;1\,[$ car $\alpha = \dfrac{x+1}{2}$ est un élément de $[\,0\,;1\,[$ strictement supérieur à x. En d'autres termes, l'ensemble des majorants de $[\,0\,;1\,[$ est $[\,1\,;+\infty\,[$, qui admet 1 comme plus petit élément : $\sup\,[\,0\,;1\,[\,=1$.
- Montrons que 0 est la borne inférieure de $\mathbb{R}_+^*$. Tout d'abord, tout réel inférieur ou égal à 0 est un minorant de $\mathbb{R}_+^*$. De plus, si $x>0$, alors x n'est pas un minorant de $\mathbb{R}_+^*$ car $\alpha = x/2$ est un élément de $\mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à x. En d'autres termes, l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}_+^*$ est $]\,-\infty\,;0\,]$ qui admet 0 comme plus grand élément : $\inf \mathbb{R}_+^* = 0$.

On retrouve la méthode vue au chapitre 2 : x n'est pas un majorant s'il existe un élément de l'ensemble qui lui est strictement supérieur, et on prend $\dfrac{1+x}{2}$ est le milieu entre x et 1, cf. chapitre 2 pour un dessin.

Remarque : En pratique, il est rare d'exhiber la borne supérieure d'une partie en explicitant l'ensemble de ses majorants. Nous ferons un bilan des méthodes à la fin de ce paragraphe. Dans le cas où A admet un plus grand ou un plus petit élément, on peut conclure directement :

Proposition.

- Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
- Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

Remarque : En d'autres termes : « maximum $\Rightarrow$ borne supérieure » mais la réciproque est fausse car une borne supérieure n'appartient pas forcément à l'ensemble. Par exemple (cf. chapitre 2 et ce qui précède), $[\,0\,;1\,[$ admet une borne supérieure égale à 1 mais n'admet pas de plus grand élément. De même pour une borne inférieure.

Démonstration. Supposons que A admette un maximum M. Alors M est un majorant de A. Soit à présent $\tilde{M}$ un majorant de A. Puisque $M \in A$, alors $M \leqslant \tilde{M}$: M est le plus petit de tous les majorants donc est la borne supérieure de A. De même pour la borne inférieure.

Méthode pour montrer qu'un réel est la borne supérieure : montrer que c'est un majorant puis que tous les majorants lui sont supérieurs. Mais nous ferons un bilan à la fin du paragraphe.

I.1.b Parties de $\mathbb{R}$

Pour les différents types d'intervalles, on a le tableau suivant (avec a et b des réels tels que $a < b$), qu'on obtient au cas par cas de la même façon que ci-dessus, et qu'on pourra utiliser directement (mais il faut savoir le montrer si besoin) :

A	$\inf A$	$\min A$	$\sup A$	$\max A$
$[\,a\,;b\,]$	a	a	b	b
$[\,a\,;b\,[$	a	a	b	X
$]\,a\,;b\,]$	a	X	b	b
$]\,a\,;b\,[$	a	X	b	X
$[\,a\,;+\infty\,[$	a	a	X	X
$]\,a\,;+\infty\,[$	a	X	X	X
$]-\infty\,;b\,]$	X	X	b	b
$]-\infty\,;b\,[$	X	X	b	X
$]-\infty\,;+\infty\,[$	X	X	X	X

Ce tableau laisse penser que, contrairement au maximum ou au minimum, les bornes supérieure et inférieure existent toujours (lorsque l'ensemble est majoré ou minoré). C'est effectivement le cas (même pour des parties plus générales que des intervalles) :

C'est en effet la moindre des choses : par définition, un ensemble non majoré n'admet pas de borne supérieure et un ensemble non minoré n'admet pas de borne inférieure.

Théorème (Propriété de la borne supérieure - admis).

- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.
- Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

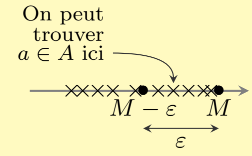
Remarque : Le théorème ci-dessus découle de la construction de $\mathbb{R}$ qui est hors-programme et peut être considéré comme un axiome. Il est propre à $\mathbb{R}$: par exemple, il n'est pas valable sur $\mathbb{Q}$! Par exemple, $]-\infty\,;\sqrt{2}\,[\,\cap\mathbb{Q}$ est un exemple de partie de $\mathbb{Q}$ non vide majorée mais n'admettant pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (mais avec une borne supérieure dans $\mathbb{R}$).

C'est d'ailleurs une des raisons qui ont poussé à construire $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure !

Donnons un moyen pratique de prouver qu'un réel est la borne supérieure d'un ensemble.

Théorème (caractérisation de la borne supérieure). Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$.

$$M = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall a \in A,\, a \leqslant M \qquad (M \text{ est un majorant de } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists a \in A,\, M - \varepsilon < a \leqslant M \\ \qquad (M \text{ est le plus petit des majorants de } A) \end{cases}$$

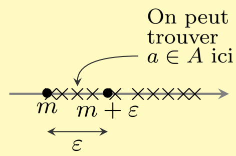


Démonstration. C'est une simple reformulation de la définition : $M = \sup(A)$ si et seulement si c'est le plus petit des majorants si et seulement si tout réel strictement inférieur (donc de la forme $M - \varepsilon$ avec ε strictement positif) n'est pas un majorant, donc si tout nombre de la forme $M - \varepsilon$ admet un élément de A qui lui est strictement supérieur.

De façon analogue, on a :

Théorème (caractérisation de la borne inférieure). Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$m = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall a \in A,\, a \geqslant m \qquad (m \text{ est un minorant de } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\, \exists a \in A,\, m \leqslant a < m + \varepsilon \\ \qquad (m \text{ est le plus grand des minorants de } A) \end{cases}$$



Nous verrons de nombreux exemples d'utilisation de ces résultats dans ce chapitre et les suivants.

I.1.c Bornes supérieure, borne inférieure et inclusion

Proposition. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose que A est inclus dans B.

1. Si B admet une borne supérieure, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Si B admet une borne inférieure, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) \geqslant \inf(B)$.

C'est intuitif ! Si on prend un ensemble plus petit, le sup sera inférieur et la borne inf sera supérieure ! Par exemple, le plus grand éléve de la classe est plus petit que le plus grand élève du lycée, et le plus petit élève de la classe est plus grand que le plus petit élève du lycée !

Démonstration.
1. Tout d'abord, A est non vide et majoré par $\sup(B)$ (car tout élément de A appartient à B donc est inférieur à $\sup(B)$ qui est un majorant de B) donc admet une borne supérieure. Or, $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A et $\sup(B)$ est un majorant de A donc $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Raisonnement analogue.

Remarque : Il n'y a pas forcément égalité. Par exemple, $[\,0\,;1\,] \subset [\,-2\,;2\,]$ mais $\sup([\,0\,;1\,]) = 1 < \sup([\,-2\,;2\,]) = 2$, et idem pour les bornes inférieures.

I.1.d Bilan

Pour montrer qu'un réel M est la borne supérieure d'une partie A non vide et majorée :

- On peut montrer que M est un majorant de A et que $M \in A$. En d'autres termes, on montre que M est le maximum de A. Le problème est que ce n'est pas toujours possible car une borne supérieure n'appartient pas toujours à l'ensemble et donc n'est pas toujours un plus grand élément.
- On montre que M est un majorant de A et que tout majorant de A est supérieur ou égal à M.
- On montre que M est un majorant de A puis on fixe $\varepsilon > 0$ et on prouve qu'il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a \leqslant M$. En d'autres termes, on utilise la caractérisation de la borne supérieure : on montre que M est un majorant et que tout élément strictement inférieur à M n'en est pas un.

- (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure) On montre que M est un majorant de A et qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers M (cf. paragraphe VI.1).

I.2 Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

Par commodité, il est parfois intéressant de pouvoir considérer les deux infinis comme des éléments comme les autres. Cela permet en particulier d'unifier certains énoncés et certaines démonstrations qui, sans cela, nécessiteraient une disjonction de cas.

Définition. La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}$.

Nous ne posons aucune difficulté sur cette définition, mais c'est tout de même assez perturbant au début. En fait, on se donne deux éléments distincts et n'appartenant pas à $\mathbb{R}$ et on les appelle $+\infty$ et ∞, et ensuite on s'arrange (en prolongeant l'ordre, la somme etc.) pour que ces éléments vérifient les conditions et les propriétés qu'on s'attend à voir vérifiées par $\pm\infty$. En pratique, on zappe cette difficulté et on dit juste qu'on ajoute $\pm\infty$ à $\mathbb{R}$. On fait parfois la même chose avec $+\infty$ qu'on ajoute à $\mathbb{C}$ quand on fait de la géométrie hyperbolique.

Définition. On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad -\infty \leqslant x \leqslant +\infty$$

Définition. On prolonge (partiellement) les opérations usuelles de $\mathbb{R}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ en posant :

- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{-\infty\}, x + (+\infty) = +\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \backslash \{+\infty\}, x + (-\infty) = -\infty$
- $\dfrac{1}{+\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*, x \times (+\infty) = +\infty$ et $x \times (-\infty) = -\infty$
- $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*, x \times (+\infty) = -\infty$ et $x \times (-\infty) = +\infty$

Remarque : En revanche, certaines opérations ne peuvent pas être définies de façon cohérente. Nous dirons dans le paragraphe IV que ce sont des formes indéterminées :

$$+\infty + (-\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad 0 \times \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \frac{0}{0}$$

Remarque : Puisque nous avons prolongé l'ordre $\leqslant$ à $\overline{\mathbb{R}}$, nous pourrions étendre à $\overline{\mathbb{R}}$ la notion de majorant, de borne supérieure, etc. (d'ailleurs, nous étendrons ces notions à tout ensemble ordonné dans le chapitre 16), ce qui nous donnerait une théorie plus unifiée et conforme à l'intuition (cela nous permettrait par exemple d'affirmer rigoureusement que $\sup(\mathbb{R}_+) = +\infty$ ou, plus généralement, que si A n'est pas majorée, alors $\sup(A) = \mathbb{R}_+$) : nous en parlerons dans le chapitre 35 mais, pour l'instant, nous nous contenterons donc de dire que c'est possible et que poser $\sup(A) = +\infty$ par convention lorsque A n'est pas majorée est un peu plus qu'une convention (qui se comprend d'ailleurs très bien) et que l'on pourrait rendre ceci très rigoureux.

I.3 Caractérisation des intervalles

On rappelle qu'un intervalle est un ensemble de la forme suivante (a et b sont des réels) :

- $[\, a\,; b\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$ (intervalle fermé borné ou **segment**),
- $]\, a\,; b\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$ si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),
- $[\, a\,; b\,[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$ si $a < b$ (intervalle semi-ouvert borné),
- $]\, a\,; b\,[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ si $a < b$ (intervalle ouvert borné),
- $]\, -\infty\,; a\,] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
- $]\, -\infty\,; a\,[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$ (intervalle ouvert non borné),

- $[\,a\,;+\infty\,[\, = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant a\}$ (intervalle fermé non borné),
- $]\,a\,;+\infty\,[\, = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$ (intervalle ouvert non borné),
- $]\,-\infty\,;+\infty\,[\, = \mathbb{R}$ (intervalle ouvert et fermé non borné).

Voici un moyen très pratique de montrer qu'un ensemble est un intervalle, même sans connaître ses extrémités.

Théorème (caractérisation des intervalles). Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, le segment $[\,a\,;b\,]$ est inclus dans I.

La caractérisation des intervalles ci-contre nous dit qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ caractérisée par le fait que, quels que soient les éléments a et b de I, tout nombre réel compris entre a et b est encore dans I. En d'autres termes, les intervalles sont les seules parties de $\mathbb{R}$ sans trou ». Par exemples, $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle : il a un « trou » en 0 ! On dit que les intervalles sont les parties convexes (cf. chapitre 15) de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Le résultat est immédiat si I est vide. Supposons donc I non vide.

Supposons que I soit un intervalle, par exemple qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $I = \,]\,-\infty\,;\beta\,[$ (raisonnement analogue dans les autres cas). Soit $(a,b) \in I^2$ avec $a \leqslant b$. Soit $c \in [\,a\,;b\,]$. $b \in I$ donc $b < \beta$ donc $c < \beta$ si bien que $c \in I$: $[\,a\,;b\,] \subset I$.

Réciproquement, supposons que pour tous a et b appartenant à I tels que $a \leqslant b$, $[\,a\,;b\,] \subset I$, et montrons que I est un intervalle.

- Si I est minoré, alors I admet une borne inférieure (car I est supposé non vide) : on pose alors $\alpha = \inf I$, sinon on pose $\alpha = -\infty$.
- Si I est majoré, alors I admet une borne supérieure : on pose alors $\beta = \sup I$, sinon on pose $\beta = +\infty$.

Montrons que $]\,\alpha\,;\beta\,[\, \subset I$. On suppose que I est minoré non majoré (raisonnement analogue dans les autres cas). On a donc $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta = +\infty$ et on veut donc montrer que $]\,\alpha\,;+\infty\,[$ est inclus dans I.

Soit donc $x \in \,]\,\alpha\,;+\infty\,[$. Posons $\varepsilon = x - \alpha$. Puisque $x > \alpha$, alors $\varepsilon > 0$. Comme $\alpha = \inf I$, il existe $a \in I$ tel que $\alpha \leqslant a < \alpha + \varepsilon = x$ (caractérisation de la borne inférieure). De plus, I n'est pas majoré donc il existe $b \in I$ tel que $x < b$. Ainsi, $x \in [\,a\,;b\,]$ qui est inclus dans I par hypothèse. En d'autres termes, $]\,\alpha\,;+\infty\,[\, \subset I$. Or, $\alpha = \inf I$: en particulier, α est un minorant de I, c'est-à-dire que : $\forall x \in I, x \geqslant \alpha$. En d'autres termes, I est inclus dans $[\,\alpha\,;+\infty\,[$ i.e. :

$$]\,\alpha\,;+\infty\,[\, \subset I \subset [\,\alpha\,;+\infty\,[\qquad \square$$

I est par conséquent égal à l'un de ces deux intervalles. En particulier, c'est un intervalle.

Remarque : On peut généraliser la notion d'intervalle en définissant des intervalles sur $\overline{\mathbb{R}}$ (par exemple en définissant les intervalles $[\,0\,;+\infty\,]$ ou $[\,-\infty\,;+\infty\,]$). Encore une fois, nous ne le faisons pas pour ne pas créer de confusion, ce qui ne nous empêchera pas de les utiliser (principalement quand nous parlerons de limites) car tout cela est somme toute très intuitif. Nous dirons par exemple qu'une suite admet une limite dans $[\,0\,;+\infty\,]$ quand elle admet une limite dans $\mathbb{R}_+$ ou égale à $+\infty$. En conclusion, quand nous parlerons d'intervalles, nous parlerons d'intervalles de $\mathbb{R}$, et quand nous parlerons d'intervalles de $\overline{\mathbb{R}}$, nous le dirons explicitement.

I.4 Notion de voisinage, points intérieurs et points adhérents

I.4.a Notion de voisinage et point intérieur

Définition. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit V une partie de $\mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage de a si V contient un ensemble du type :

- $[\,a - \varepsilon\,;a + \varepsilon\,]$, où $\varepsilon > 0$, si $a \in \mathbb{R}$.
- $[\,A\,;+\infty\,[$, où $A \in \mathbb{R}$, si $a = +\infty$.
- $]\,-\infty\,;A\,]$, où $A \in \mathbb{R}$, si $a = -\infty$.

Remarque : On trouve parfois des intervalles ouverts dans la définition et, parfois, on demande que A soit (strictement) positif (lorsque $a = +\infty$) ou (strictement) négatif (lorsque $a = -\infty$), tout dépend des conventions, les diverses définitions sont totalement équivalentes. Plus précisément, de même que dans l'exercice 12 du chapitre 0, on montre (entre autres) qu'on a les équivalences suivantes :

- Si $a \in \mathbb{R}$:

$$\exists \varepsilon > 0, [\, a-\varepsilon \,;\, a+\varepsilon \,] \subset V \iff \exists \varepsilon > 0,]\, a-\varepsilon \,;\, a+\varepsilon \,[\subset V$$

- Si $a = +\infty$:

$$\exists A > 0, [\, A \,;\, +\infty \,[\subset V \iff \exists A \in \mathbb{R}, [\, A \,;\, +\infty \,[\subset V$$

- Si $a = +\infty$:

$$\exists A \in \mathbb{R}, [\, A \,;\, +\infty \,[\subset V \iff \exists A \in \mathbb{R},]\, A \,;\, +\infty \,[\subset V$$

- etc.

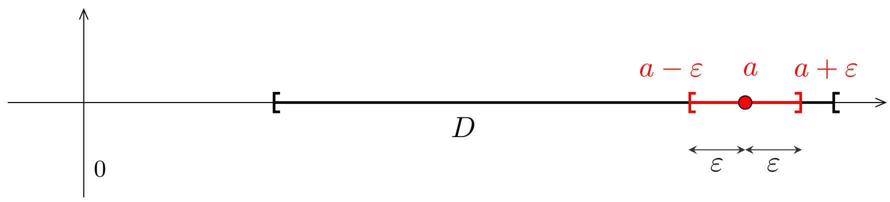
Puisque ces définitions sont équivalentes, nous n'aurons aucun scrupule pour passer de l'une à l'autre lorsque cela nous arrangera (par exemple, si nous avons besoin de considérer $\sqrt{A}$, nous pourrons supposer que A est positif). Nous reparlerons de ces équivalences au paragraphe III. Il suffit de retenir qu'un voisinage contient un intervalle d'intérieur non vide centré en a (lorsque $a \in \mathbb{R}$) ou ayant comme extrémité a (lorsque $a = \pm\infty$).

On peut prendre $\varepsilon \in]\,0\,;1\,]$ dans le cas $a \in \mathbb{R}$, $A \geqslant 1$ dans le cas $a = +\infty$ et $A \leqslant -1$ dans le cas $a = -\infty$: la seule contrainte est qu'on puisse être « aussi proche de a qu'on veut ». Par exemple, dans le cas $a \in \mathbb{R}$, la seule contrainte est que ε puisse être aussi proche de 0 qu'on veut, dans le cas $a = +\infty$, il faut que A puisse être aussi grand qu'on veut, et dans le cas $a = -\infty$, il faut que A puisse être aussi petit (i.e. proche de $-\infty$) qu'on veut. Pour le faire rigoureusement, encore une fois, on prouve des équivalences comme ci-contre.

Remarque : Nous avons parlé d'intervalle d'intérieur non vide (et ce n'est pas la première fois), mais qu'est-ce que c'est ?

Définition. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un point intérieur à D si D est un voisinage de a, c'est-à-dire s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[\, a-\varepsilon \,;\, a+\varepsilon \,] \subset D$. L'ensemble des points intérieurs à D est noté $\overset{o}{D}$.

Un point intérieur est un réel ! En effet, intuitivement, un point est un point intérieur lorsque ce n'est pas « un point du bord », c'est-à-dire que, des deux côtés, si on reste proche de ce point, alors on reste dans D. $+\infty$ et $-\infty$ ne peuvent pas être des points intérieurs puisqu'on ne peut « les atteindre que par un seul côté ».



Remarque : En particulier, un point intérieur appartient à l'ensemble (ce qui est assez cohérent). Ce ne sera pas la même chose avec un point adhérent dans le paragraphe suivant.

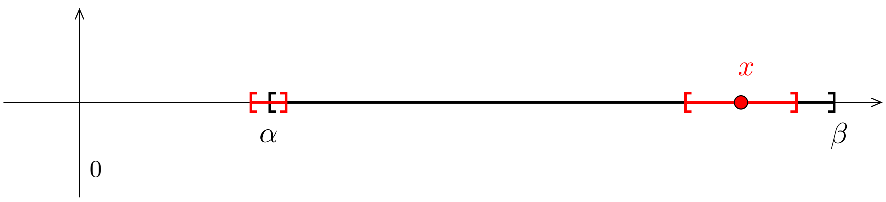
Proposition. Soit I un intervalle. Alors $\overset{o}{I}$ est l'intervalle ouvert ayant les mêmes bornes que I. En particulier, si I est un intervalle ouvert, alors $\overset{o}{I} = I$.

Démonstration. Supposons que I soit de la forme $[\, \alpha \,;\, \beta \,]$, avec $\alpha < \beta$ deux réels (raisonnement analogue dans les autres cas).

Soit $x \in]\, \alpha \,;\, \beta \,[$. Soit $\varepsilon = \min\left(\dfrac{x-\alpha}{2}, \dfrac{\beta - x}{2}\right)$. Alors $x - \varepsilon \geqslant x - \dfrac{x-\alpha}{2} = \dfrac{x+\alpha}{2} \geqslant \alpha$ et $x + \varepsilon \leqslant x + \dfrac{\beta - x}{2} = \dfrac{x+\beta}{2} \leqslant \beta$ donc $x - \varepsilon$ et $x+\varepsilon$ appartiennent à I. I étant un intervalle, $[\, x-\varepsilon \,;\, x+\varepsilon \,] \subset I$ donc $x \in \overset{o}{I}$. En d'autres termes, $]\, \alpha \,;\, \beta \,[\subset \overset{o}{I}$. Or, $\overset{o}{I} \subset I = [\, \alpha \,;\, \beta \,]$ donc, pour conclure, il suffit de prouver que α et β n'appartiennent pas à $\overset{o}{I}$, ce qui est immédiat : en effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $\alpha - \varepsilon \notin I$ donc $[\, \alpha - \varepsilon \,;\, \alpha + \varepsilon \,] \not\subset I$ donc $\alpha \notin \overset{o}{I}$, et de même pour β.

Rappelons que $\dfrac{\alpha + x}{2}$ est le milieu de $[\, \alpha \,;\, x \,]$ et donc est supérieur strict à α. De même, $\dfrac{\beta + x}{2} < \beta$: voir les dessins du chapitre 2.

Remarque : Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous : si $x \in]\, \alpha \,;\, \beta \,[$ alors $x \in \overset{o}{I}$ mais $\alpha \notin \overset{o}{I}$: peu importe la valeur de $\varepsilon > 0$, l'intervalle $[\, \alpha - \varepsilon \,;\, \alpha + \varepsilon \,]$ « déborde ».



Exemples :

- Si $I = \mathbb{R}_+$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}_+^*$.
- Si $I = [\,0\,;1\,]$, alors $\overset{o}{I} =]\,0\,;1\,[$.
- Si $I =]\,0\,;1\,[$, alors $\overset{o}{I} =]\,0\,;1\,[$
- Si $I = \mathbb{R}$, alors $\overset{o}{I} = \mathbb{R}$.

Remarque : Ainsi, parmi tous les types d'intervalles, seuls le vide et les singletons sont d'intérieur vide donc, comme on l'a dit depuis le début d'année, un intervalle d'intérieur non vide est un intervalle non vide, non réduit à un point.

Remarque : Lorsque D n'est pas un intervalle, donner son intérieur est parfois plus difficile. Dans certains cas, c'est immédiat, par exemple lorsque D est une union d'intervalles « non collés » : par exemple, l'intérieur de $D = [\,0\,;1\,] \cup [\,2\,;3\,] \cup \{4\}$ est $\overset{o}{D} =]\,0\,;1\,[\cup]\,2\,;3\,[$ (exo). Mais ce n'est pas toujours aussi simple, il ne suffit pas toujours d'écrire D comme une union disjointe d'intervalles et de prendre l'intérieur des intervalles de cette union : par exemple, si $D = [\,0\,;1\,] \cup]\,1\,;2\,]$, alors on pourrait croire que $\overset{o}{D} =]\,0\,;1\,[\cup]\,1\,;2\,[$, mais on a en fait $D = [\,0\,;2\,]$ donc $\overset{o}{D} =]\,0\,;2\,[$! Morale de l'histoire : avec les ensembles qui ne sont pas des intervalles (ou du moins qui ne sont pas écrits sous forme d'intervalle), ce n'est pas forcément immédiat, et on raisonnera au cas par cas.

I.4.b Notion de point adhérent

Définition. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que a est un point adhérent de D si tout voisinage de a intersecte D, c'est-à-dire si pour tout V voisinage de a, $V \cap D \neq \varnothing$.

Remarque : ⚠ a est un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ donc peut être égal à $\pm\infty$. Par conséquent, si on veut traduire cette définition avec des quantificateurs, il faut distinguer les cas :

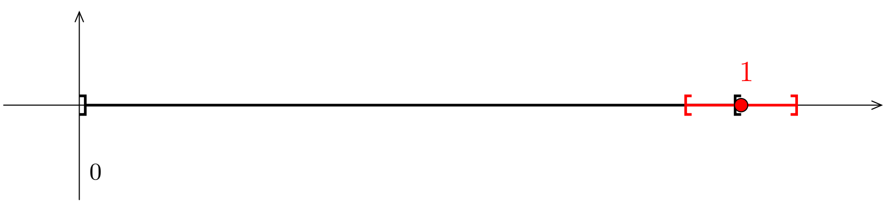
- si $a \in \mathbb{R}$: $\forall \varepsilon > 0, D \cap [\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,] \neq \varnothing$.
- si $a = +\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, D \cap [\,A\,;+\infty\,[\neq \varnothing$.
- si $a = -\infty$: $\forall A \in \mathbb{R}, D \cap]\,-\infty\,;A\,] \neq \varnothing$.

On remarque l'avantage de $\overline{\mathbb{R}}$: dans la définition, il est inutile de distinguer les cas, cela donne une théorie beaucoup plus unifiée.

Comme dit ci-dessus, on pourra évidemment prendre des écritures équivalentes, c'est-à-dire qu'on pourra prendre les intervalles ouverts, on pourra prendre A positif quand $a = +\infty$, on pourra prendre $A \leqslant -1$ quand $a = -\infty$ etc. Par exemple, ci-contre, on aurait pu se contenter de prendre $\varepsilon \in]\,0\,;1\,]$.

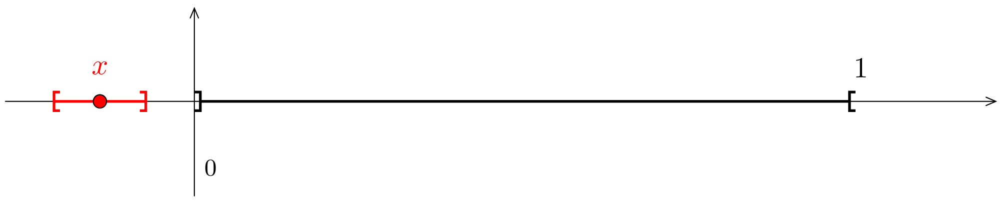
Remarque : Un élément de D est évidemment un point adhérent à D, mais la réciproque est fausse. Montrons par exemple que 1 est un point adhérent à $]\,0\,;1\,[$.

Soit $\varepsilon > 0$. Si $\varepsilon \geqslant 1$ alors $1/2 \in [\,1-\varepsilon\,;1+\varepsilon\,] \cap]\,0\,;1\,[$, et si $\varepsilon < 1$, alors $1-\varepsilon \in [\,1-\varepsilon\,;1+\varepsilon\,] \cap]\,0\,;1\,[$ donc, dans tous les cas, l'intersection est non vide.



Remarque : Avec les mains, l'adhérence, c'est « l'intérieur + la frontière ». Par exemple, montrons que si $x < 0$, alors x n'est pas un point adhérent à $]\,0\,;1\,[$. Soit $\varepsilon = -x/2$. Alors $[\,x-\varepsilon\,;x+\varepsilon\,] = \left[\dfrac{3x}{2}\,;\dfrac{x}{2}\right] \subset \mathbb{R}_-^*$ donc $[\,x-\varepsilon\,;x+\varepsilon\,] \cap]\,0\,;1\,[= \varnothing$: x n'est pas un point adhérent à $]\,0\,;1\,[$.

Lorsque $a \in \mathbb{R}$, la négation de « a est adhérent à D » est : $\exists \varepsilon > 0, [\,a-\varepsilon\,;a+\varepsilon\,] \cap D = \varnothing$. En d'autres termes, pour prouver que a n'est pas adhérent, il suffit de trouver...



... **un** intervalle d'intérieur non vide centré en a qui n'intersecte pas D.

Notation : On appelle adhérence de D l'ensemble de ses points adhérents, et on note $\text{adh}(D)$ ou $\overline{D}$ l'adhérence de D.

Ne pas confondre l'adhérence de D avec le complémentaire de D, qu'on peut au besoin noter D^c.

Proposition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si $a \in \mathbb{R}$, alors a est un point adhérent à D si et seulement si a n'est pas dans l'intérieur du complémentaire de D.
- Si $a = +\infty$, alors a est un point adhérent à D si et seulement si D n'est pas majoré.
- Si $a = +\infty$, alors a est un point adhérent à D si et seulement si D n'est pas minoré.

Démonstration. Découle de la définition :

- si $a \in \mathbb{R}$, a est un point adhérent si et seulement s'il n'existe pas de réel $\varepsilon > 0$ tel que $[\, a-\varepsilon\,; a+\varepsilon\,]$ soit inclus dans le complémentaire de D, ce qui donne le résultat voulu.
- si $a = +\infty$, alors a est un point adhérent si et seulement si, pour tout A, il existe $x \in D$ tel que $x \geqslant A$ ce qui permet de conclure.
- si $a = -\infty$, idem.

Proposition. Soit I un intervalle. Alors $\text{adh}(I)$ est l'intervalle fermé ayant les mêmes bornes que I.

Dans cette proposition, quand on parle d'intervalle, on parle d'intervalle de $\overline{\mathbb{R}}$: par exemple, l'adhérence de $\mathbb{R}_+ = [\,0\,; +\infty\,[$ est $[\,0\,; +\infty\,]$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : Comme précédemment, c'est parfois plus difficile pour les ensembles qui ne sont pas des intervalles. Par exemple, l'adhérence de $D_{\tan}$ est $\mathbb{R}$ tout entier (exo). Nous verrons une CNS très utile au paragraphe VI : un point a est adhérent à D si et seulement si a est limite d'une suite d'éléments de D.

I.5 Partie dense

Définition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. D est dense dans $\mathbb{R}$ si D rencontre tout intervalle ouvert non vide.

Proposition (Caractérisation pratique de la densité). Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Alors :

$$D \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \forall x < y \in \mathbb{R}, \exists z \in D, x < z < y$$

En d'autres termes : entre deux éléments distincts de $\mathbb{R}$, il y a toujours (au moins) un élément de D. On verra ci-dessous qu'il y en a alors une infinité.

Démonstration. Supposons D dense. Soient $x < y$ deux réels. Alors $]\,x\,; y\,[$ est un intervalle ouvert non vide donc contient un élément de D : il existe $z \in D$ tel que $x < z < y$.

Réciproquement, supposons que : $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists z \in D, x < z < y$. Soit I un intervalle ouvert non vide. Alors I est non vide, non réduit à un point donc contient au moins deux éléments x et y avec $x < y$. Par hypothèse, il existe $z \in D$ tel que $x < z < y$. I étant un intervalle, $[\,x\,; y\,] \subset I$ donc $z \in I$: D rencontre tout intervalle ouvert non vide donc D est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Si I est un intervalle quelconque, on généralise facilement cette notion pour définir une partie de I dense dans I. Par exemple : si D est inclus dans $[\,0\,;1\,]$, alors D est dense dans $[\,0\,;1\,]$ si et seulement si, pour tous $x<y$ dans $[\,0\,;1\,]$, il existe $z \in D$ tel que $x<z<y$.
Donnons plusieurs caractérisations équivalentes de la densité :

Proposition. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. D est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tous $x<y$ dans $\mathbb{R}$, il existe $z \in D$ tel que $x<z<y$.
3. Pour tous $x<y$ dans $\mathbb{R}$, il existe une infinité d'éléments de D qui appartiennent à $]\,x\,;y\,[$.

Nous verrons une autre CNS dans le paragraphe VI.

Démonstration. On a $1 \iff 2$ d'après ce qui précède. Montrons l'implication $1 \Rightarrow 3$ par récurrence. Soient $x<y$ deux réels. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $]\,x\,;y\,[$ contient au moins n éléments de D.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « $\exists (z_1, \dots, z_n) \in D^n, x<z_1<\cdots<z_n<y$ ».
- H_1 est vraie par définition d'une partie dense.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $z_1, \dots, z_n$ dans D tels que $x<z_1<\cdots<z_n<y$. Or, D est dense donc il existe $z_{n+1} \in D$ tel que $z_n<z_{n+1}<y$ (on applique la définition d'une partie dense avec z_n à la place de x). Finalement, $z_1, \dots, z_{n+1}$ appartiennent à D et $x<z_1<\cdots<z_n<z_{n+1}<y$ donc H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Méthode classique pour montrer qu'un ensemble est infini : montrer qu'il contient au moins n éléments pour tout n. En effet, s'il est fini, alors il existe N tel que cet ensemble contienne N éléments donc il ne contient pas $N+1$ éléments.

En conclusion, on a prouvé l'implication $1 \Rightarrow 3$. On a évidemment $3 \Rightarrow 2$ donc : $1 \iff 2 \iff 3$.

Remarque : On peut trouver beaucoup de CNS pour qu'un ensemble soit dense dans $\mathbb{R}$:

- Tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide contient un élément de D.
- Tout intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide contient une infinité d'éléments de D.
- $\forall \varepsilon>0, \exists z \in D, |x-z| \leqslant \varepsilon$.
- $\forall \varepsilon>0, \exists z \in D, |x-z| < \varepsilon$.
- etc.

Toutes ces équivalences ne doivent pas cacher l'idée de la densité (d'ailleurs, elles ne font que reformuler cette idée) : tout intervalle de longueur non nulle contient au moins un élément de D (et donc en contient une infinité en itérant le processus).

Remarque : Les dernières CNS permettent de généraliser la notion de densité à une partie de $\mathbb{C}$ (puisqu'il n'est pas possible de parler d'intervalle ou d'inégalités). Par exemple, une partie D de $\mathbb{U}$ est dense dans $\mathbb{U}$ si et seulement si : $\forall u \in \mathbb{U}, \forall \varepsilon>0, \exists z \in D, |u-z| \leqslant \varepsilon$ (cf. exercice 65 du chapitre 14).

I.6 Exemples

Proposition. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $x<y$ deux réels. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{1}{q}<y-x$ (l'entier $q=\left\lfloor \dfrac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$ convient car $q>\dfrac{1}{y-x}$ donc on a le résultat par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$).

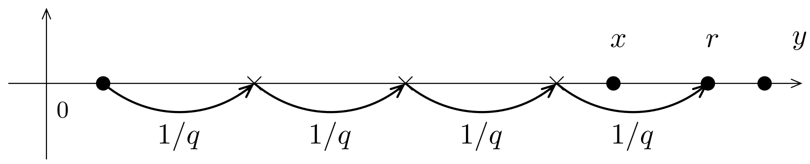
Plus tard, nous pourrons justifier l'existence de q en disant : $1/q \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$ donc il existe q tel que $1/q<y-x$, mais nous n'avons pas encore défini la limite d'une suite.

Soit $A = \left\{ p \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{p}{q} < y \right\}$. Alors :

- A est une partie de $\mathbb{Z}$.
- A est majorée par qy : en effet, si $p \in A$, alors $p/q < y$ donc $p < qy$ car $q > 0$.
- A est non vide car contient $n_0 = \lfloor yq \rfloor - 1$: en effet, $n_0 < yq$ donc $n_0/q < y$ si bien que $n_0 \in A$.

A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus grand élément p, et posons enfin $r = p/q$. Montrons que $r \in \left]\, x\,;y\,\right[$.

L'idée est de partir d'un rationnel inférieur à y, d'ajouter $1/q$ autant de fois qu'il faut, et on s'arrête juste avant y : le dernier terme appartiendra à l'intervalle $\left]\, x\,;y\,\right[$. C'est pour cela que nous avons pris $1/q < y - x$: les pas sont de longueur inférieure strictement à l'écart $y - x$ et on prend le dernier terme inférieur strict à y, il est donc supérieur strict à x.

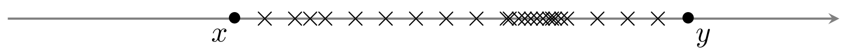


$p \in A$ donc $r = p/q < y$. Si $r \leqslant x$ alors $r + \dfrac{1}{q} \leqslant x + \dfrac{1}{q} < x + y - x$ par choix de q donc $r + \dfrac{1}{q} < y$. Or, $r + \dfrac{1}{q} = \dfrac{p+1}{q}$ donc $p + 1 \in A$ ce qui est absurde car $p + 1 > p$ et p est le plus grand élément de A.

En conclusion, $r \in \left]\, x\,;y\,\right[$ et $r \in \mathbb{Q}$ ce qui permet de conclure : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe un rationnel r' tel que $x - \sqrt{2} < r' < y - \sqrt{2}$ donc $x < r' + \sqrt{2} < y$. Or, $r' + \sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (cf. chapitre 1 : la somme d'un irrationnel et d'un rationnel est un irrationnel) : $\left]\, x\,;y\,\right[$ contient un irrationnel donc $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Remarque : Par conséquent, tout intervalle d'intérieur non vide contient une infinité de rationnels et une infinités d'irrationnels.

Cependant, il ne faudrait pas croire pour autant qu'il y a « autant » de rationnels que d'irrationnels : il y a « beaucoup plus » d'irrationnels que de rationnels (cf. chapitre 17).

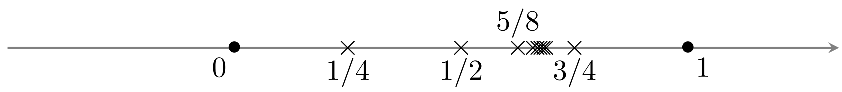


Il est donc absurde de parler de « deux (ir)rationnels consécutifs » (alors qu'on peut parler de deux entiers consécutifs) : en effet, entre deux réels et en particulier entre deux rationnels, il y en a une infinité d'autres ! Et idem pour les irrationnels et pour n'importe quelle partie dense.

Définition (Nombres dyadiques - HP). Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un nombre dyadique s'il existe $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{k}{2^n}$.

Exemple : $-3 = \dfrac{-3}{2^0}, -\dfrac{7}{8} = \dfrac{-7}{2^3}, \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{23}{16} = \dfrac{23}{2^4}$ sont des nombres dyadiques.

Remarque : Les nombres dyadiques apparaissent naturellement dans beaucoup de situations, par exemple lorsqu'on raisonne par dichotomie (cf. exercice 21 du chapitre 15 par exemple) : en effet, on les obtient en partant de $\mathbb{Z}$ et en divisant les intervalles par 2 un certain nombre de fois. Par exemple, ci-dessous, quelques nombres dyadiques entre 0 et 1.



Proposition (HP). L'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soient $x < y$ deux réels. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{2^n} < y - x$. Un tel n existe bien : si $y - x > 1$ alors $n = 0$ convient, et si $y - x \leqslant 1$, posons $n = \left\lfloor \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{y-x}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1$.

Alors $n > \dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{y-x}\right)}{\ln(2)}$ donc $n\ln(2) > \ln\left(\dfrac{1}{y-x}\right)$ car $\ln(2) > 0$ et l'exponentielle est strictement croissante donc $e^{n\ln(2)} = 2^n > \dfrac{1}{y-x}$ donc $\dfrac{1}{2^n} < y - x$ car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $A = \left\{ k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \dfrac{k}{2^n} < y \right\}$. Alors :

On fait à présent des pas de longueur $1/2^n$: faites le dessin !

- A est une partie de $\mathbb{Z}$.
- A est majorée par $2^n \times y$.
- A est non vide car contient $n_0 = \lfloor 2^n \times y \rfloor - 1$.

A est une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ donc admet un plus grand élément k, et on montre de même que ci-dessus que $x < \dfrac{k}{2^n} < y$.

Remarque : On peut généraliser cette notion en prenant les nombres de la forme $\dfrac{k}{d^n}$ avec d un entier supérieur ou égal à 2. Il suffit alors de remplacer 2 par d dans ce qui précède. Donnons un cas particulier (au programme) : le cas $d = 10$.

Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. On dit que x est un nombre décimal s'il existe $(k, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tel que $x = \dfrac{k}{10^n}$. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :

- $1/2 = 0.5 = \dfrac{5}{10} \in \mathbb{D}$.
- $1/4 = 0.25 = \dfrac{25}{10^2} \in \mathbb{D}$.
- $2022.4567321 = \dfrac{20224567321}{10^7} \in \mathbb{D}$.
- $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$. Supposons en effet que $\dfrac{1}{3} \in \mathbb{D}$. Alors il existe $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\dfrac{1}{3} = \dfrac{k}{10^n}$ donc $3k = 10^n$. En particulier, 3 divise 10^n ce qui est absurde car $3 \wedge 10^n = 1$.

Remarque : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ par définition et l'inclusion est stricte puisque $1/3 \notin \mathbb{D}$. $\mathbb{D}$ est en fait l'ensemble des nombres rationnels ayant un nombre fini de décimales (dans son développement décimal propre), ce qui se voit très bien avec les exemples ci-dessus. Nous le prouverons au chapitre 25 quand nous définirons ce qu'est le développement décimal (propre ou non) d'un réel.

Proposition. $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Il suffit de remplacer 2 par 10 dans la démonstration précédente. Nous le prouverons d'une autre façon dans le paragraphe VI.

II Suites réelles

II.1 Préliminaires

Définition. Une suite (réelle) est une famille $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ indexée par $\mathbb{N}$. Il s'agit donc d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites (réelles).

Nous nous intéresserons dans un premier temps aux suites réelles (nous généraliserons aux suites complexes dans le paragraphe IX). Sauf indication contraire (par exemple dans le paragraphe IX), une suite désigne une suite réelle.

Remarques :

- Autrement dit une suite u est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ mais, au lieu de la noter

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array} \right.$$

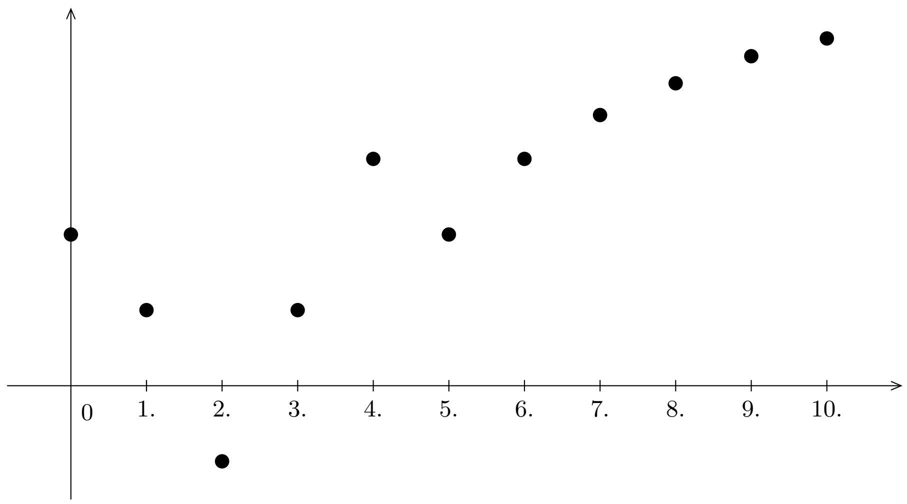
  on la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et, si $n \in \mathbb{N}$, on note u_n plutôt que $u(n)$ l'image de l'entier n : u_n est appelé terme général d'indice n ou d'ordre n de la suite.
- ⚠ Ne pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son terme général u_n, ni avec l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des valeurs de la suite. Il y a un nombre infini d'indices, mais l'ensemble des valeurs peut être fini (il est cependant toujours non vide). Par exemple, $\{(-1)^n \,|\, n \in \mathbb{N}\} = \{-1; 1\}$.
- Dans certaines situations très simples, on peut être amené à travailler avec des suites définies à partir d'un rang n_0, comme par exemple $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ ou $(\ln(n-1))_{n\geqslant 2}$: on définit de façon analogue une suite définie à partir d'un rang n_0 comme une application de $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant n_0\}$ dans $\mathbb{R}$ et on la note $(v_n)_{n\geqslant n_0}$. On se ramène à une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = v_{n+n_0}$. Les résultats que l'on prouvera pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront toujours vrais pour $(v_n)_{n\geqslant n_0}$. Ainsi, dans la suite du cours, sauf indication contraire, on suppose que les suites sont définies à partir du rang 0, les autres cas s'y ramenant facilement.

⚠ Gare aux échecs de types ! On ne parlera pas de la suite u_n tout comme on ne parle pas de la fonction $f(x)$. D'ailleurs, de même que x dans $x \mapsto f(x)$, la lettre n dans $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est muette : on peut la remplacer par ce qu'on veut (pas u bien sûr) et on ne doit pas l'introduire :

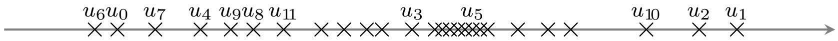
$$\begin{aligned} (u_n)_{n\in\mathbb{N}} &= (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \\ &= (u_p)_{p\in\mathbb{N}} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

En revanche, dans u_n, n n'est pas muette mais désigne un entier bien particulier, introduit préalablement.

- Cela peut être assez lourd d'écrire « $n \geqslant 0$ » ou « $n \geqslant n_0$ » à chaque fois que l'on manipule une suite, surtout qu'en général, il n'y a aucune ambiguïté : on prend le plus petit n à partir duquel la suite de terme général u_n est définie (par exemple, pour $u_n = 1/n$, on démarre à partir du rang 1, et pour $u_n = \ln(n-1)$, à partir du rang 2 même si, en pratique, on ne manipulera en général que des suites définies à partir du rang 0). Par conséquent, on notera parfois les suites (u_n), mais attention à ne pas écrire u_n qui, on le répète, est un réel et pas une suite !
- Il existe au moins deux manières de représenter une suite. Le plus souvent, on la représentera comme une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire comme la famille de points de coordonnées (n, u_n) :



  Mais on peut aussi la représenter comme un ensemble de points sur l'axe des réels, c'est-à-dire comme la famille de points $(u_n, 0)$.



La première représentation (que nous utiliserons en général) permet de mieux voir, par exemple, les propriétés de monotonie et de convergence, tandis que la deuxième permet de mieux voir, par exemple, les valeurs d'adhérence (cf. paragraphe VII).

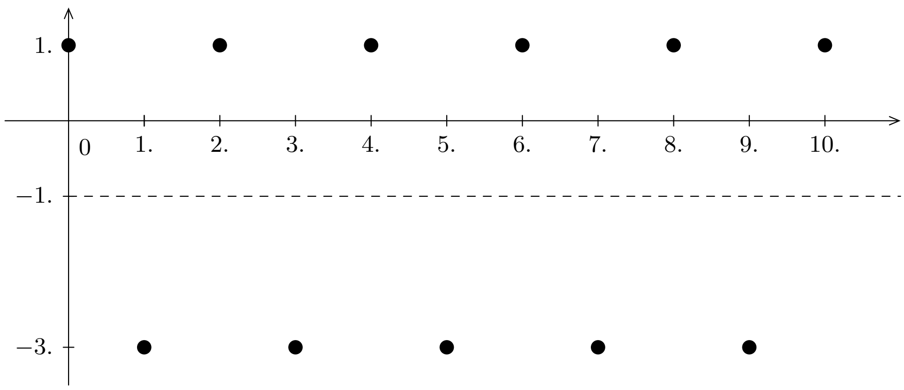
Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On dit qu'elle est :

- majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$. On dit alors que M est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M.
- minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$. On dit alors que ...
- bornée si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et minorée.
- positive (respectivement strictement positive) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$ (respectivement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$).
- négative (respectivement strictement négative) si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 0$ (respectivement : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$).

Remarque : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée $\iff$ l'ensemble de ses termes $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. De même pour minorée.

Proposition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si elle est majorée en valeur absolue, i.e. s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$. On dit alors que la suite est bornée par M.

Exemple : La suite $(-1 + 2 \times (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par 3.



Démonstration. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée en valeur absolue, et soit M un majorant de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$ donc $-M \leqslant u_n \leqslant M$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et minorée, elle est donc bornée.

Réciproquement, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Soient m un minorant et M un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n \leqslant M$ si bien que $-M \leqslant -u_n \leqslant -m$. Soit $\tilde{M} = \max(M, -m)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M \leqslant \tilde{M}$ et $-u_n \leqslant -m \leqslant \tilde{M}$ donc $|u_n| \leqslant \tilde{M}$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en valeur absolue.

On rappelle qu'un moyen simple de prouver une inégalité du type $|\alpha| \leqslant A$ est de prouver que $\alpha \leqslant A$ et que $-\alpha \leqslant A$ (cf. chapitre 2).

Remarque : Méthode à retenir : si deux suites sont majorées, un majorant commun est le maximum des deux majorants. Par exemple, si toutes les filles font moins d'1m90 et tous les garçons font mois d'1m70, alors tous les élèves font moins d'1m90 (le max des deux). Pour un minorant, il faut prendre le minimum : par exemple, si toutes les filles font plus d'1m50 et tous les garçons font plus d'1m30, alors tous les élèves font plus d'1m30 (le min des deux). Par conséquent, un minorant commun de (u_n) et $(-u_n)$ est $\tilde{m} = \min(m, -M)$. En effet, pour tout n, $u_n \geqslant m \geqslant \tilde{m}$ et $-u_n \geqslant -M \geqslant \tilde{m}$.

Définition. On dit qu'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de propriétés est vérifiée par une suite « à partir d'un certain rang » ou « pour n assez grand » s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_n soit vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Par abus de langage, on dira également que P_n est vraie à partir d'un certain rang. Par exemple, on dira parfois que u_n est positif à partir d'un certain rang (au lieu de dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang).

Remarque : Avec des quantificateurs :

$$(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est vraie à partir d'un certain rang } \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, P_n$$

Cette écriture avec des quantificateurs est à connaître sur le bout des doigts ! Par exemple :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est positive à partir d'un certain rang } \iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant 0$$

Exemple : $\dfrac{\ln(\ln(n))}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand. En effet, si $n \geqslant n_0 = \lfloor e^e \rfloor + 1$, alors $n > e^e$ donc $\ln(n) > e$ (car le ln est une fonction strictement croissante) donc $\ln(\ln(n)) > 1$.

Quand nous aurons défini la notion de limite, nous pourrons aller plus vite : nous dirons que $\ln(\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\ln(\ln(n)) \geqslant 1$ pour n assez grand.

Modes de définition d'une suite : Voici les trois principales façons de définir une suite.

1. **Suites définies explicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie explicitement lorsque l'on donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression du terme u_n en fonction de son rang n.

   Exemples : On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 5(-2)^n, \quad v_n = \frac{1}{n^2+1}\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right), \quad w_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3^n}} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

2. **Suites définies par récurrence.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence lorsque l'on donne
   - $p \in \mathbb{N}^*$ et les valeurs de $u_0, \dots, u_{p-1}$,
   - pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_{n+p} en fonction des p termes précédents : $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}$.

   On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une relation de récurrence d'ordre p.

On fera attention à « initialiser » pour suffisamment de valeurs (comme pour une récurrence).

   Exemples :
   - On définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant :

$$\begin{cases} a_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 5a_n + n + 2, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 2,\ b_1 = 3,\ b_2 = -1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+3} = -3b_{n+1} + 4b_n. \end{cases}$$

   - La factorielle est définie par récurrence par $0! = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)! = (n+1) \times n!$.
   - Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite (complexe) $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $z_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = {z_n}^2 + c$. Alors c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement si la suite (z_n) est bornée (cf. exercice 23 du chapitre 7).

   Remarque : On peut parfois définir une suite par récurrence « forte » (même si on ne dit pas le terme, c'est juste une analogie avec le raisonnement par récurrence forte), c'est-à-dire donner la valeur de u_0 puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_{n+1} en fonction de $u_0, \dots, u_n$. On peut évidemment généraliser (par exemple donner u_0, u_1 et u_{n+1} en fonction de $u_0, \dots, u_n$ pour tout $n \geqslant 1$, comme dans l'exemple suivant).

Nous définirons les suites complexes et en particulier les suites complexes bornées dans le paragraphe IX, mais l'occasion était trop belle pour ne pas donner ce type de suite en exemple ici.

   Exemple : (cf. exercice 56 du chapitre 14) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $u_0 = 0, u_1 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \times u_{n-k}$$

3. **Suites définies implicitement.** On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie implicitement lorsque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution d'une certaine équation. Cela définit bien une suite car l'existence et l'unicité de u_n fait correspondre à tout entier n un unique élément : c'est la définition d'une fonction définie sur $\mathbb{N}$ donc d'une suite.

   Exemple : On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n l'unique point fixe de la fonction tan appartenant à l'intervalle $\left[n\pi \,; n\pi + \dfrac{\pi}{2} \right[$.

On peut mélanger les deux, i.e. construire une suite implicitement par récurrence. Par exemple, on peut, pour tout n, définir x_{n+1} comme l'unique objet strictement supérieur à x_n qui vérifie une certaine condition.

Remarques :

- Le plus pratique est évidemment de définir une suite explicitement. En effet, si on veut calculer le terme d'ordre 1000, on peut le faire directement avec une suite définie explicitement, alors qu'il faut calculer $u_0, \dots, u_{999}$ pour une suite définie par récurrence (à l'aide de calculs parfois coûteux qui peuvent faire exploser la complexité en temps et en espace). C'est pour cela qu'on cherche très souvent à exprimer une suite explicitement (voir paragraphe suivant)... mais ce n'est pas toujours possible ! Par exemple pour la factorielle : pour calculer 1000!, il faut impérativement calculer tous les termes précédents.

1000! est pris à titre d'exemple : c'est un nombre tellement énorme qu'il est absolument impossible de le calculer !

- C'est encore pire avec une suite définie implicitement : en ayant le temps, on peut calculer n'importe quel terme d'une suite définie par récurrence (du moins en théorie), mais parfois, il est tout simplement impossible de calculer explicitement les termes d'une suite définie implicitement. On cherche alors à en donner un équivalent ou à en calculer la limite. Par exemple, avec la suite (x_n) ci-dessus, nous montrerons dans l'exercice 67 du chapitre 24 que $\dfrac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$ c'est-à-dire que $x_n \sim n\pi$ (cf. chapitre 24), alors qu'on n'a aucune idée de la valeur exacte de x_n !
- Parfois, définir une suite par récurrence est plus compliqué que ci-dessus. Nous verrons quelques exemples dans ce chapitre où il faut **construire** les termes de la suite un par un. Plus précisément, on construit x_0, puis on construit éventuellement x_1 pour bien comprendre comment ça marche, puis on suppose $x_0, \dots, x_n$ construits et on construit ensuite x_{n+1}. Il faudra savoir le faire !

Définition. Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On désigne par

- $|u|$ la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = |u_n|$.
- $u + v$ la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n + v_n$.
- αu la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \alpha u_n$.
- uv la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = u_n v_n$.

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$, on désigne par

- $\dfrac{1}{v}$ la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{1}{v_n}$.
- $\dfrac{u}{v}$ la suite w définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$.

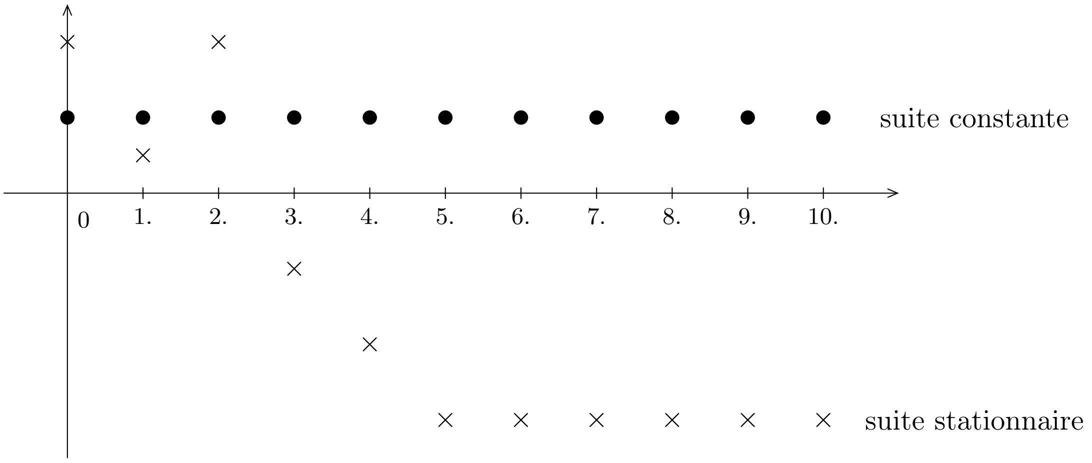
II.2 Quelques suites remarquables

II.2.a Suites constantes, stationnaires

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- constante s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = L$.
- stationnaire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang, c'est-à-dire s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0, u_n = L$.

Oui, L sera la limite de ces suites : cf. paragraphe III.



Remarques :

- Une suite constante est constante égale à son premier terme.
- Une suite constante est stationnaire, la réciproque est fausse.

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si, pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p$.

DÉMONSTRATION. analogue à l'exercice 11 du chapitre 0 : $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Par conséquent, pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas constante, il suffit de prouver qu'elle prend au moins deux valeurs. Utile pour les raisonnements par l'absurde !

Donnons à présent un résultat propre aux suites (il est faux pour les fonctions si l'on remplace n par x !).

Proposition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

DÉMONSTRATION. Le sens direct est immédiat car tous les termes de la suite sont alors égaux à L. Pour la réciproque, on prouve par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$: $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

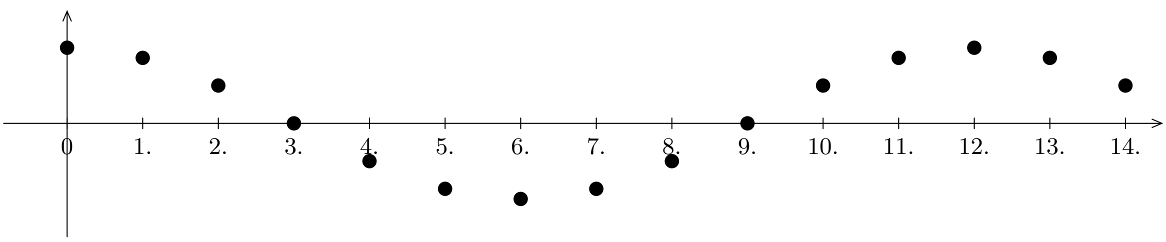
II.2.b Suites périodiques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+k} = u_n$. On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est k-périodique.

Pour une suite, les périodes sont des entiers strictement positifs !

Exemples :

- La suite de terme général $(-1)^n$ est 2-périodique.
- Une suite est périodique de période 1 si et seulement si elle est constante.
- La suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{6}\right)$ est 12-périodique car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+12} = u_n$.



Remarques :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est k-périodique, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $2k$-périodique, $3k$-périodique et, plus généralement, pk-périodique pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
- On définit de façon analogue les suites périodiques à partir d'un certain rang.
- Une suite périodique à partir d'un certain rang ne prend qu'un nombre fini de valeurs et donc est bornée En particulier, une suite stationnaire est bornée car est périodique à partir d'un certain rang.

En effet, l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des termes de la suite est alors fini et un ensemble fini est borné.

Activité : la conjecture de Syracuse. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Par exemple, si $u_0 = 14$, alors on a successivement : $u_1 = 7, u_2 = 22, u_3 = 11, u_4 = 34, u_5 = 17, u_6 = 52, u_7 = 26, u_8 = 13, u_9 = 40, u_{10} = 20, u_{11} = 10, u_{12} = 5, u_{13} = 16, u_{14} = 8, u_{15} = 4, u_{16} = 2, u_{17} = 1, u_{18} = 4, u_{19} = 2, u_{20} = 1$ etc. On voit arriver le cycle $1, 4, 2$. C'est le cas pour tout $u_0 \in [\![1\,; 100]\!]$. De manière générale, s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = 1$ alors le cycle $4, 2, 1$ se répètera indéfiniment. Plus précisément, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n_0+3k} & = & 1 \\ u_{n_0+3k+1} & = & 4 \\ u_{n_0+3k+2} & = & 2 \end{cases}$$

En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3-périodique à partir du rang n_0. La conjecture de Syracuse est que, peu importe u_0, un tel n_0 existe toujours, c'est-à-dire que, peu importe $u_0 \in \mathbb{N}^*$, on finit toujours par tomber sur le cycle $4, 2, 1$, qui se répète donc indéfiniment.

« Conjecture » donc, comme son nom l'indique, pas encore démontrée, mais vérifiée expérimentalement jusqu'à 1.25×10^{62}.

II.2.c Suites arithmétiques

Définition. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + q$. Le réel q est appelé la raison de la suite.

Remarque : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique si et seulement si la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Par conséquent, pour prouver qu'une suite (u_n) n'est pas arithmétique, il suffit d'exhiber deux entiers n_1 et n_2 tels que $u_{n_1+1} - u_{n_1} \neq u_{n_2+1} - u_{n_2}$.

Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison q, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times q$.

La réciproque est immédiate.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

II.2.d Suites géométriques

Définition. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. Le réel q est appelé la raison de la suite.

Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q, alors : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes tous non nuls, elle est géométrique si et seulement si la suite $(u_{n+1}/u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Un moyen simple de prouver qu'une suite n'est pas géométrique est d'exhiber deux entiers n_0 et n_1 (en général 0 et 1) tels que $\dfrac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \neq \dfrac{u_{n_1+1}}{u_{n_1}}$.

Exemple : La suite de terme général $2^n + 3^n$ n'est pas géométrique. En effet,

$$\frac{2^1 + 3^1}{2^0 + 3^0} = \frac{5}{2} \neq \frac{13}{5} = \frac{2^2 + 3^2}{2^1 + 3^1}$$

Là aussi, la réciproque est immédiate, mais il faut être prudent : ce n'est pas parce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sous cette forme qu'elle n'est pas géométrique, cf. VF du TD. Voir ci-contre pour prouver qu'une suite n'est pas géométrique.

Remarque : Les deux propositions précédentes peuvent être facilement adaptées au cas où la suite est définie à partir du rang n_0. Pour une suite arithmétique :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0} + (n - n_0) \times q$$

Pour une suite géométrique : $\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$.

II.2.e Suites arithmético-géométriques

Définition. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique si il existe deux réels a et b tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$.

Si $a = 1$, alors il s'agit d'une suite arithmétique de raison b (et on connaît alors le terme général). Si $b = 0$, alors il s'agit d'une suite géométrique de raison a.

Supposons que $a \neq 1$ et $b \neq 0$. L'équation caractéristique de cette suite est $x = ax + b$, de solution $c = b/(1-a)$ (rappelons qu'on a supposé $a \neq 1$). Soit $n \in \mathbb{N}$. On a les deux égalités suivantes :

$$\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & au_n + b \\ c & = & ac + b \end{array}$$

Dès lors, en faisant la différence : $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$, c'est-à-dire que la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, si bien que $u_n - c = a^n(u_0 - c)$.
Nous en déduisons la proposition suivante :

L'idée essentielle derrière la preuve est de déterminer un point fixe de la fonction de récurrence (c'est-à-dire la solution de $x = ax+b$). C'est la même méthode que pour une similitude directe (cf. chapitre 7). C'est également la même idée que pour les équations différentielles (cf. chapitre 11) : la solution générale est la somme d'une solution d'une équation plus simple (une relation de récurrence $u_{n+1} = a \times u_n$ ici, l'équation homogène dans le chapitre 11) et d'une solution particulière. Cette méthode revient souvent : cf. exercice 21 par exemple. L'idée sous-jacente est celle d'espace affine et celle d'équation linéaire : cf. chapitre 36.

Proposition. Avec les notations de la définition, si $a \neq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = a^n \times u_0 + b \times \frac{1-a^n}{1-a}$$

Exemple : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -4u_n + 1$. Alors l'équation caractéristique de cette suite est $x = -4x + 1$, de solution $c = 1/5$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & -4u_n + 1 \\ c & = & -4c + 1 \end{array}$$

Dès lors, $u_{n+1} - c = -4(u_n - c)$, c'est-à-dire que la suite $(u_n - c)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -4, si bien que $u_n - c = (-4)^n(u_0 - c)$. Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_n &= (-4)^n \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5} \\ &= \frac{1 - (-4)^{n+1}}{5} \end{aligned}$$

II.2.f Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition.
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants si il existe deux réels a et b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On dit que $r^2 = ar + b$ est l'équation caractéristique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a et b ne doivent pas dépendre de n ! C'est pour cela qu'une telle suite est appelée suite récurrence linéaire à coefficients **constants**, mais comme nous ne rencontrerons que des suites de ce type, nous parlerons simplement de suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Remarque : Si $b = 0$, alors $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est « presque » géométrique : u_0 et quelconque et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = a^{n-1} \times u_a$. On supposera donc $b \neq 0$ dans la suite.

Exemples :

- La suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

- Cependant, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = n \times u_{n+1} - n^2 \times u_n$$

n'est pas une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Théorème (admis provisoirement). L'équation caractéristique est équivalente à (E) : $r^2 - ar - b = 0$. Elle est polynomiale du second degré et son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

- Si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux réels λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda \times {r_1}^n + \mu \times {r_2}^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une racine double réelle $r_0 = a/2$ et il existe deux réels λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu \times n) \times {r_0}^n.$$

Attention à l'ordre des quantificateurs : c'est

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$$

et non

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

(λ et μ ne peuvent pas dépendre de n).

Démonstration. Nous pourrions le montrer par récurrence. Nous verrons une autre preuve plus élégante au chapitre 30.

Remarque : On détermine λ et μ à l'aide de u_0 et u_1.

Remarque : Le cas $\Delta < 0$ est analogue au cas $\Delta > 0$ si ce n'est que les racines sont complexes, ainsi que λ et μ. Cependant, nous nous intéressons aux suites réelles : nous en parlerons dans le paragraphe IX.

Exemples :

- (Suite de Fibonacci) Calculons le terme général de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.
L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 5 > 0$. Elle admet deux solutions réelles : $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Par conséquent il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = \lambda\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

On a $\lambda + \mu = F_0 = 0$ et $\lambda\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = F_1 = 1$ donc $\lambda = -\mu = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Il ne coûte pas très cher de vérifier au brouillon que, pour $n = 0$ et $n = 1$, on retombe bien sur les valeurs de F_0 et F_1. On est alors sûr de ne pas s'être trompé !

- Calculons le terme général de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$, $x_1 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n$.
L'équation caractéristique est $r^2 - r + 1/4 = 0$. Son discriminant est $\Delta = 0$. Elle admet $1/2$ pour unique solution. Ainsi il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = (\lambda + n\mu)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

On a $\lambda = x_0 = 1$ et $(\lambda + \mu)/2 = x_1 = -2$ donc $\mu = -5$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_n = \frac{1-5n}{2^n}.$$

Remarque : Parfois, on a une suite qui vérifie une condition du type « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant 2u_n$ » ou « $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leqslant u_{n+1} + u_n$ ». L'idée est de majorer par la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec les termes initiaux vérifiant la même relation de récurrence, mais avec une égalité à la place de l'inégalité : on sait calculer le terme général de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une récurrence (en général) immédiate prouve que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, ce qui permet d'obtenir des informations sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De telles suites sont appelées suites sous-géométriques, suites sous-récurrentes linéaires d'ordre deux etc. selon les cas. Méthode à retenir, cf. exercice 48 par exemple.

III Limite d'une suite

On se donne dans cette partie et les suivantes trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

III.1 Suites convergentes

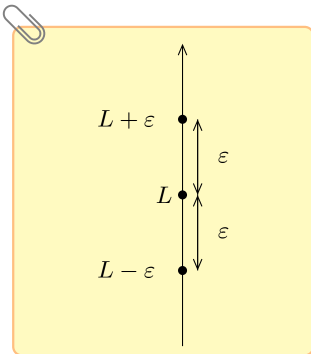
Intuitivement, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L \in \mathbb{R}$ si ses termes s'en approchent autant qu'on veut, sans plus s'en éloigner donc si, peu importe la précision voulue, notée ε l'écart entre u_n finit, dès que n est assez grand, par être plus petit que ε. Cela justifie la définition suivante :

Définition. Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite L ou tend vers L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

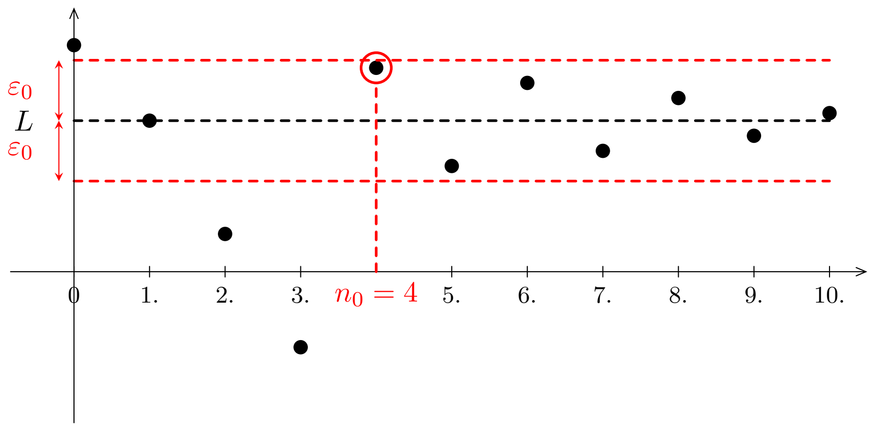
On note alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Remarque : Comme dit dans le chapitre 2 : $|u_n - L| \leqslant \varepsilon \iff L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon$. Nous jonglerons régulièrement entre ces deux écritures : la première est plus pratique car il n'y a qu'une inégalité, et la deuxième est plus pratique car il n'y a plus de valeur absolue. Vous devez toujours avoir le dessin ci-contre à l'esprit !

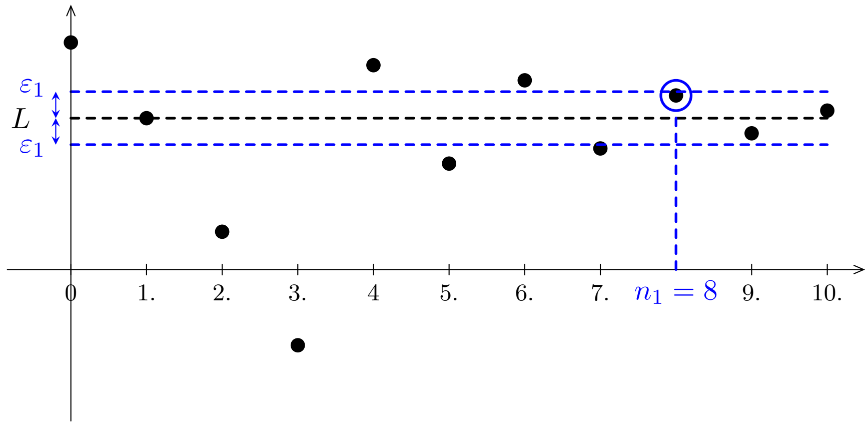


Définition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $L \in \mathbb{R}$, on dit qu'elle est convergente (et qu'elle converge vers L). Si elle n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente (ou qu'elle diverge).

Faisons un dessin :



Pour cette valeur de ε_0, il existe un entier n_0 (ici $n_0 = 4$) tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant \varepsilon_0$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous dans le « cylindre rouge ». Prenons une autre valeur de ε, notée ε_1 :



Pour cette précision ε_1, il existe un entier n_1 (ici, $n_1 = 8$) tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n - L| \leqslant \varepsilon_1$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous dans le « cylindre bleu ». La suite converge si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont tous dans le cylindre correspondant.

Remarquons enfin que $n_0 < n_1$: le n_0 (ou le n_1) de la définition dépend de ε car il est défini après, ce qui est intuitif ! n_0 est le rang à partir duquel on a un écart plus petit que ε : plus la précision est grande (i.e. plus ε est petit), plus il faut attendre longtemps et donc plus n_0 est grand !

Remarques :

- Dire que tous les termes sont dans le cylindre à partir du rang n_0 ne signifie pas qu'il n'y a aucun terme dans le cylindre avant le rang n_0, ni même que n_0 est le plus petit rang à partir duquel « on ne sort plus du cylindre ». Dans les exemples précédents, on aurait pu prendre $n_0 = 7$ et $n_1 = 10$ par exemple : tout ce qu'on peut affirmer, c'est qu'on ne sort plus du cylindre après n_0, mais on n'a aucune idée de ce qui se passe avant. En particulier, si n_0 convient, alors tout entier supérieur ou égal à n_0 convient.
- Parfois, on arrivera à une majoration du type $|u_n - L| \leqslant 2\varepsilon$. On pourra alors conclure directement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. En effet, ε étant quelconque, en partant de $\varepsilon/2$ au lieu de ε, on arrive à $\leqslant \varepsilon$ ce qui est bien la définition ci-dessus, mais il est inutile de détailler autant. En effet (cf. exercice 12 du chapitre 0), on a l'équivalence suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant 2\varepsilon$$

Et la liste est longue ! Par exemple, on a les équivalences suivantes :

Essayez d'en prouver une ou deux en exo !

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon \quad &\iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant 2\varepsilon \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon^2 \\ &\iff \quad \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \sqrt{\varepsilon} \\ &\iff \quad \forall \varepsilon \in \,]\,0\,;1\,]\,, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Ces équivalences sont déclinables à l'infini et ne doivent pas masquer l'idée très simple qui les relie : ε est quelconque donc « aussi petit qu'on veut ». Si on se demande si on a le droit, si c'est équivalent à la définition d'une limite, il suffit de se demander si la quantité par laquelle on majore (2ε, ε^2 etc.) peut être aussi petite qu'on veut. Si oui, alors c'est bon ! Par contre, ça ne marche pas avec (par exemple) $\varepsilon + 1$ car cette quantité est toujours supérieure à 1.

- Dans le même ordre d'idée, on a l'équivalence suivante :

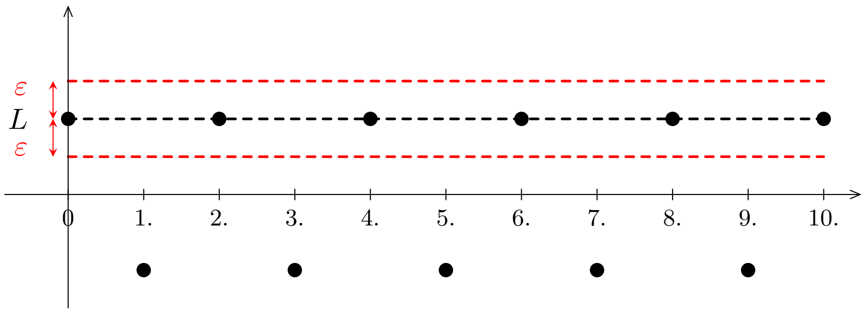
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| < \varepsilon$$

Encore une fois, il suffit de se demander ce que ça veut dire : les termes de la suite sont aussi proches qu'on veut de L pour n assez grand.

Morale de l'histoire : on dispose d'une liberté (relative) pour la quantité par laquelle on doit majorer pour pouvoir affirmer que c'est bon.

Attention, l'inégalité stricte $\varepsilon > 0$, elle, est non négociable !

- La négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ est : $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, |u_n - L| > \varepsilon$. En d'autres termes : il existe un intervalle centré en ε en dehors duquel se trouvent une infinité de termes (car, pour tout n_0, il y en a un après : on peut donc en prendre un, puis il y en a un après, et encore un après, et ainsi de suite, ce qui en fait une infinité) mais il peut y avoir une infinité de termes aussi dans l'intervalle). Ci-dessous une suite qui ne converge pas vers L (alors qu'une infinité de termes sont égaux à L).



III.2 Exemples fondamentaux

Théorème.

1. Soit $L \in \mathbb{R}$. Une suite constante ou stationnaire égale à L à partir d'un certain rang converge vers L.
2. Soit $\alpha > 0$. Alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Soit $q \in \left]-1\,;1\right[$. Alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

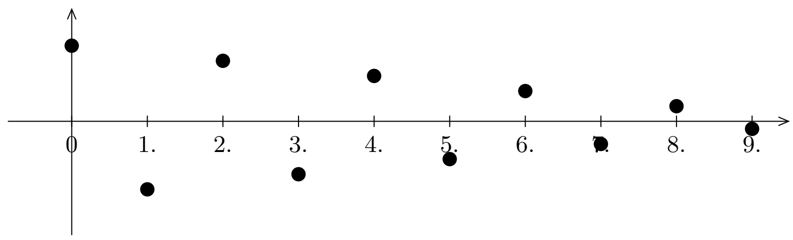
En particulier, une suite constante est constante égale à sa limite. On peut aussi « regarder de l'autre côté » et dire qu'une suite constante est égale à son premier terme, donc la limite est égale au premier terme, i.e. une suite constante converge vers sont premier terme : c'est parfois utile !

Démonstration.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $a \in \mathbb{R}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = 0$ dans le cas d'une suite constante égale à a) tels que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n = a$. On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - a| = 0 \leqslant \varepsilon$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
2. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \varepsilon$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon^{1/\alpha}}$. Posons $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon^{1/\alpha} \rfloor + 1$. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $0 < \dfrac{1}{n^\alpha} \leqslant \varepsilon$ et donc $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Si $q = 0$, le résultat est évident car la suite est constante égale à 0. Supposons que $q \in \left]-1\,;0\right[\cup \left]0\,;1\right[$ et donnons-nous $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|q^n| \leqslant \varepsilon \iff n\ln(|q|) \leqslant \ln(\varepsilon) \iff n \geqslant \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)},$$

car $\ln(|q|) < 0$. Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|q|)} \right\rfloor + 1$. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $|q^n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cela se voit très bien sur le graphe (non à l'échelle !) ci-dessous (pour $q = -1/2$). □



On voit en particulier qu'une suite convergente n'est pas forcément supérieure ou inférieure à sa limite, elle peut osciller autour de celle-ci.

Donnons un exemple de suite divergente.

Exemple : Montrons que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Nous verrons une autre façon de le prouver dans le paragraphe VII.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'elle converge vers une limite $L \in \mathbb{R}$. En d'autres termes :

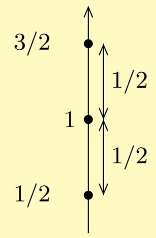
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |(-1)^n - L <| \leqslant \varepsilon$$

C'est vrai en particulier pour $\varepsilon = 1/2$:

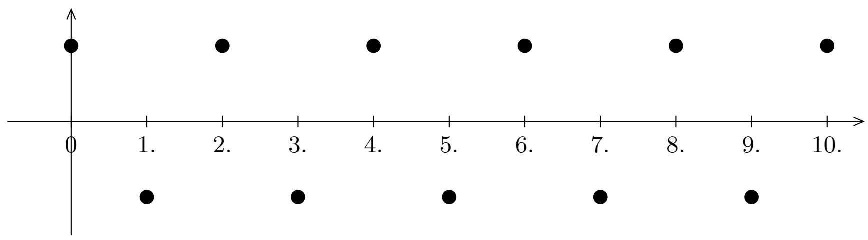
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |(-1)^n - L <| \leqslant \frac{1}{2}$$

D'une part, $2n_0 \geqslant n_0$ donc $\left|(-1)^{2n_0} - L\right| = |1 - L| \leqslant 1/2$ donc $L \in [\,1/2\,;3/2\,]$. D'autre part, $2n_0 + 1 \geqslant n_0$ donc $\left|(-1)^{2n_0+1} - L\right| = |-1-L| \leqslant 1/2$ donc $L \in [\,-3/2\,;-1/2\,]$ ce qui est absurde : la suite diverge. Cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous : les termes de la suite ne s'approchent d'aucune valeur et « oscillent entre -1 et 1 ».

Il faut avoir ce dessin en tête :



et idem pour -1.



Remarque : Lorsqu'on veut prouver la convergence d'une suite, ce n'est pas toujours aussi simple que dans le théorème précédent, parce qu'on n'arrive pas en général à isoler n et à donner le premier rang à partir duquel ça marche. Ce n'est pas grave puisqu'on cherche **un** n_0 qui convient et pas forcément le plus petit ! En clair : lorsqu'on veut prouver qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L et qu'on cherche un rang n_0 à partir duquel $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$, on majore $|u_n - L|$ **par des quantités qui tendent vers** 0 (sinon, on n'a aucune chance d'être inférieur à ε) et, dès qu'on a une majoration simple, on essaye de trouver un n_0 qui convient : en effet, si $|u_n - L|$ est inférieure à une certaine quantité v_n et si $v_n \leqslant \varepsilon$, alors $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$.

Exemple : Montrer que $\dfrac{\sqrt{n}\cos(n)}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Plus tard, nous aurons des outils puissants comme le théorème d'encadrement qui pourront nous éviter ce genre de formalités (cf. paragraphe IV.2), mais parfois on ne peut pas faire autrement : il faut donc savoir le faire !

On ne peut pas isoler n ici. On fait donc comme expliqué ci-dessus, à savoir : majorer (en faisant attention qu'on majore par des quantités qui tendent vers 0) puis, quand on a une quantité simple, on essaye de trouver un rang à partir duquel l'inégalité est vérifiée.

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\left|\frac{\sqrt{n}\times\cos(n)}{n^2+1} - 0\right| \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} \leqslant \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Or : $1/n \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant 1/\varepsilon$. Posons donc $n_0 = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant n_0$, $1/n \leqslant \varepsilon$ donc

$$\left|\frac{\sqrt{n}\times\cos(n)}{n^2+1} - 0\right| \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

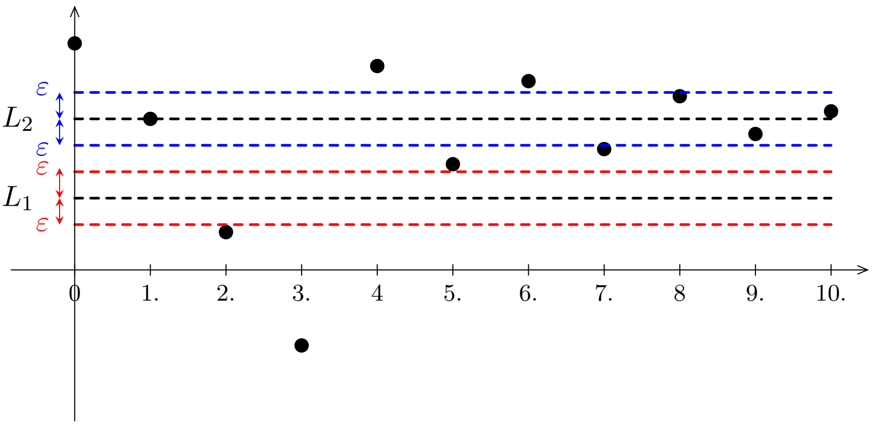
ce qui est le résultat voulu.

III.3 Unicité de la limite

Théorème (Unicité de la limite). Soient L_1 et L_2 deux réels tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$. Alors $L_1 = L_2$.

En d'autres termes, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux limites, alors elles sont égales.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que $L_1 \neq L_2$. Sans perte de généralité, on peut supposer $L_2 > L_1$. Soit donc $\varepsilon = \dfrac{L_2 - L_1}{3} > 0$.



L'idée de la preuve est très simple : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finit par être très proche de L_1 et très proche de L_2, ce qui n'est pas possible si $L_1 \neq L_2$, car on peut alors construire des cylindres disjoints qui sont censés contenir tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, et ce n'est pas possible car ils sont disjoints (voir dessin ci-contre).

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_1, alors :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |u_n - L_1| \leqslant \varepsilon$$

n_1 et n_2 n'ont aucune raison d'être égaux !

De même, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L_2, alors :

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |u_n - L_2| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant n_3$, $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon$ et $|u_n - L_2| \leqslant \varepsilon$. En particulier :

$$u_n \leqslant L_1 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad L_2 - \varepsilon \leqslant u_n$$

En particulier, $L_2 - \varepsilon \leqslant L_1 + \varepsilon$. Or,

$$\begin{aligned} L_1 + \varepsilon - (L_2 - \varepsilon) &= L_1 - L_2 + 2\varepsilon \\ &= L_1 - L_2 + 2 \times \frac{L_2 - L_1}{3} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{3} < 0 \end{aligned}$$

□

Méthode classique à retenir absolument ! On cherche un rang pour lequel les deux conditions sont vérifiées : on prend le maximum des deux rangs. Par exemple, si la première condition est vraie à partir du rang 10 et la deuxième est vraie à partir du rang 20, alors les deux conditions sont vraies à partir du rang 20. On généralise aisément à un nombre quelconque (fini !) de conditions.

ce qui est absurde car $L_2 - \varepsilon \leqslant L_1 + \varepsilon$, donc $L_1 = L_2$.

Remarque : On peut donc parler de **la** limite d'une suite et (le cas échéant), la noter $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Remarque : À la réflexion, on n'écrira **jamais** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ et on préférera écrire $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ car la notation $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ est dangereuse à plus d'un titre.

- $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} L$ signifie « (u_n) ne tend pas vers L » tandis que « $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n \neq L$ » signifie que la limite de (u_n) est différente de L (sous entendu : (u_n) admet une limite). Par exemple, écrire $(-1)^n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$ est correct mais $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \neq 0$ n'a aucun sens !

Bon, ce n'est pas tout à fait vrai : on écrira parfois « Soit $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ » mais **uniquement** après avoir prouvé l'existence de cette limite.

- Quand on demande de calculer une limite, on pourrait être tenté d'écrire $\lim\limits_{n\to+\infty}$ **avant** d'avoir montré son existence.

Exemple : Donner la limite de la suite de terme général

$$u_n = \frac{n^2+n+1}{2n^2+2n+2022}$$

Soit $n \geqslant 1$.

$$u_n = \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2022}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Cependant, écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{2}{n}+\dfrac{2022}{n^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

n'a aucun sens car, quand on l'écrit, on ne sait pas encore que la limite existe !

Cet exemple utilise des résultats que nous verrons dans le IV mais c'est juste un modèle de rédaction.

III.4 Des résultats bien pratiques

Proposition. Une suite convergente est bornée.

Remarque : ⚠ La réciproque est fausse ! Par exemple : la suite de terme général $(-1)^n$ diverge mais est bornée.

DÉMONSTRATION. Soit L la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant 1$.

- Si $n \geqslant n_0$, alors $|u_n| - |L| \leqslant |u_n - L| \leqslant 1$ par inégalité triangulaire donc $|u_n| \leqslant |L|+1$ (définition d'une suite convergente avec $\varepsilon = 1 > 0$).
- L'ensemble $\{|u_n| \,|\, n < n_0\}$ est fini donc admet un maximum A.

Soit $M = \max(A, |L|+1)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

L'idée de la preuve est très simple : à partir d'un certain rang, les termes de la suite sont proches de L, donc bornés, et avant il n'y a qu'un nombre fini de termes, qui sont donc bornés aussi.

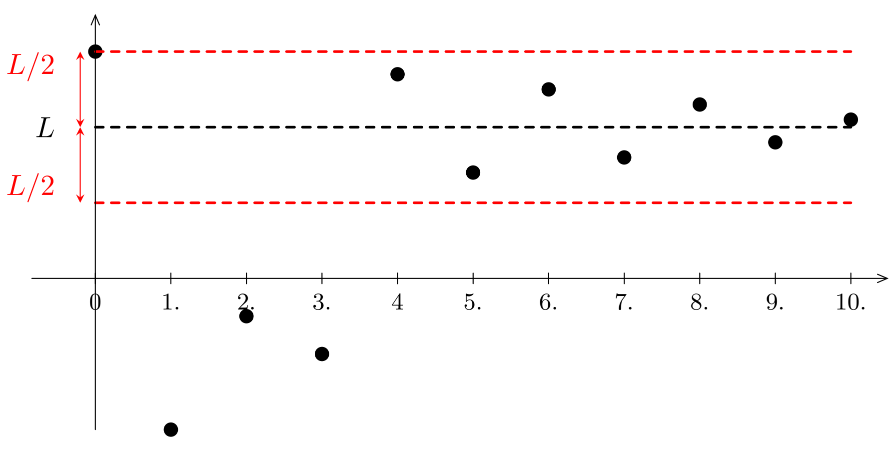
Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $L > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

⚠ C'est faux si $L = 0$! Par exemple, la suite de terme général $(-1/2)^n$ tend vers 0 mais ses termes « oscillent » autour de 0.

DÉMONSTRATION. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant L/2$ (définition d'une limite avec $\varepsilon = L/2 > 0$) i.e.

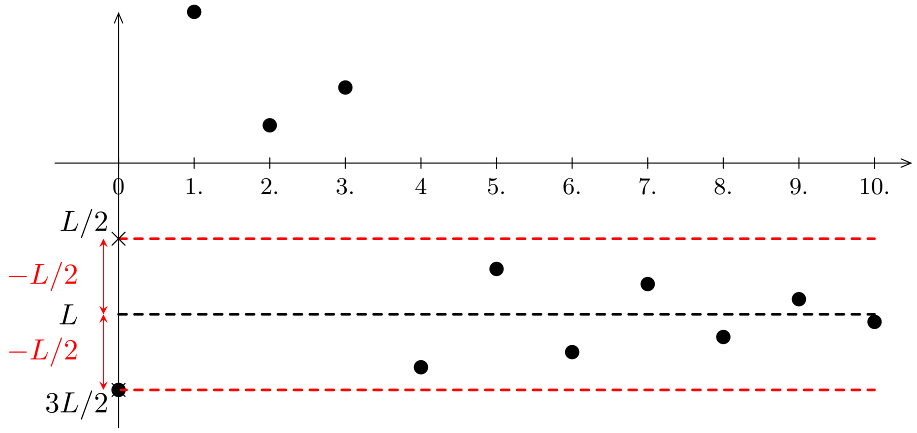
$$0 < \frac{L}{2} = L - \frac{L}{2} \leqslant u_n \leqslant L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$$

□

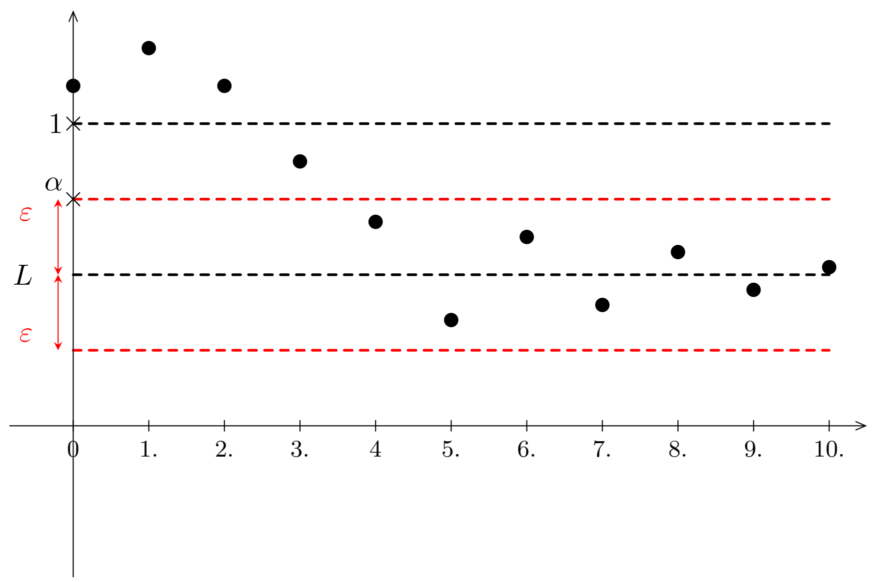


Remarque : Il est impératif d'avoir bien ce dessin en tête car cette proposition peut se généraliser à l'infini et il faut savoir adapter la démonstration. Par exemple :

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ alors $u_n \in \left[\frac{1}{2}\,;2\right]$ à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon = 1/2 > 0$).
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L < 0$ alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang (prendre $\varepsilon = -L/2 > 0$: attention au signe $-$!). Plus précisément, pour n assez grand, $u_n \leqslant L/2 < 0$ (car $L < 0$).



- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in [\,0\,;1\,[$ alors $u_n < 1$ pour n assez grand (prendre $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2} > 0$). Plus précisément, $u_n \leqslant \alpha = \dfrac{L+1}{2}$ pour n assez grand (α est le milieu de $[\,L\,;1\,]$).



On peut affirmer tout cela le cas échéant, mais il est impératif de savoir le prouver si besoin, et il est donc impératif de savoir prendre sans hésiter la bonne valeur de ε. L'idée de ces résultats est que si L est à une certaine distance d'un autre réel ou d'un ensemble, il y a un certain « cylindre de sécurité » autour de L auquel appartiennent les termes de la suite à partir d'un certain rang. On prend donc ε la moitié de la distance entre L et cet autre réel, pour que ce réel ne soit pas dans le cylindre.

Proposition. La convergence éventuelle d'une suite ne dépend pas de ses premiers termes. Plus précisément, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont égales sauf en un nombre fini de points, alors elles sont de même nature et, si elles convergent, alors elles ont la même limite.

Démonstration. On suppose que $u_n = v_n$ sauf en un nombre fini de points et on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L. Si on note $n_0 = \max\{k \,|\, u_k \neq v_k\}$ (n_0 est bien défini car un ensemble fini admet un maximum), alors $u_n = v_n$ pour tout $n \geqslant n_0 + 1$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|v_n - L| \leqslant \varepsilon$. Soit $n_2 = \max(n_0+1, n_1)$. Alors, pour tout $n \geqslant n_2$, $u_n = v_n$ et $|v_n - L| \leqslant \varepsilon$ donc $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Seul compte « ce qui se passe en $+\infty$ ». Par exemple, si on s'intéresse uniquement à la limite de la suite, on pourra supposer $n \geqslant 1, n \geqslant 2$ ou même $n \geqslant 1000$ si cela nous arrange.

Proposition (HP mais très classique). Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

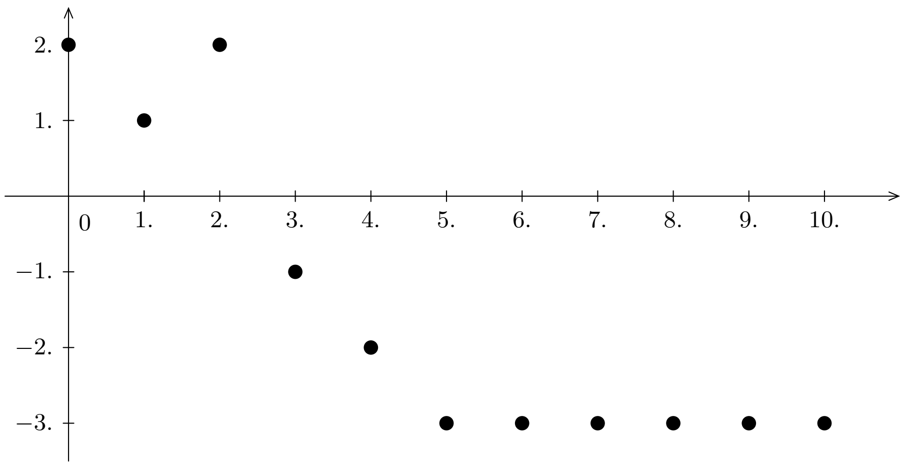
C'est bien sûr faux si la suite n'est pas à valeurs dans $\mathbb{Z}$: par exemple, la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 mais n'est jamais égale à 0.

Démonstration. Une suite stationnaire converge d'après le paragraphe III.2. Réciproquement, supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Soit L sa limite. Alors il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant 1/4$ (définition d'une suite convergente avec $\varepsilon = 1/4 > 0$). Soient n et p supérieurs ou égaux à n_0. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_n - u_p| = |u_n - L - u_p + L| \leqslant |u_n - L| + |u_p - L| \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \square$$

Or, u_n et u_p sont des entiers donc $u_n = u_p$. En d'autres termes, tous les termes de la suite sont égaux à partir du rang n_0, la suite est stationnaire.

Remarque : En particulier, la suite est stationnaire égale à $u_{n_0} \in \mathbb{Z}$ donc converge vers u_{n_0} : la limite appartient donc à $\mathbb{Z}$.



III.5 Limites infinies

III.5.a Définition

Intuitivement, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si ses termes deviennent aussi grands qu'on veut à partir d'un certain rang donc si, peu importe le seuil A i.e. peu importe le réel positif A, u_n finit par être supérieur à A dès que n est assez grand. Cela justifie la définition suivante :

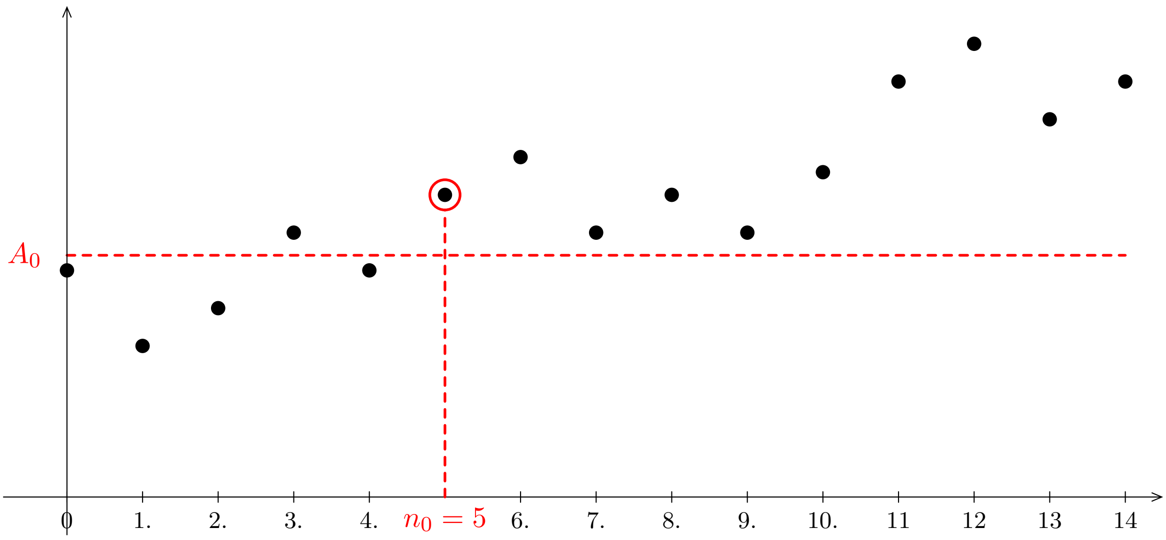
Définition. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite $+\infty$ ou tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \geqslant 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$$

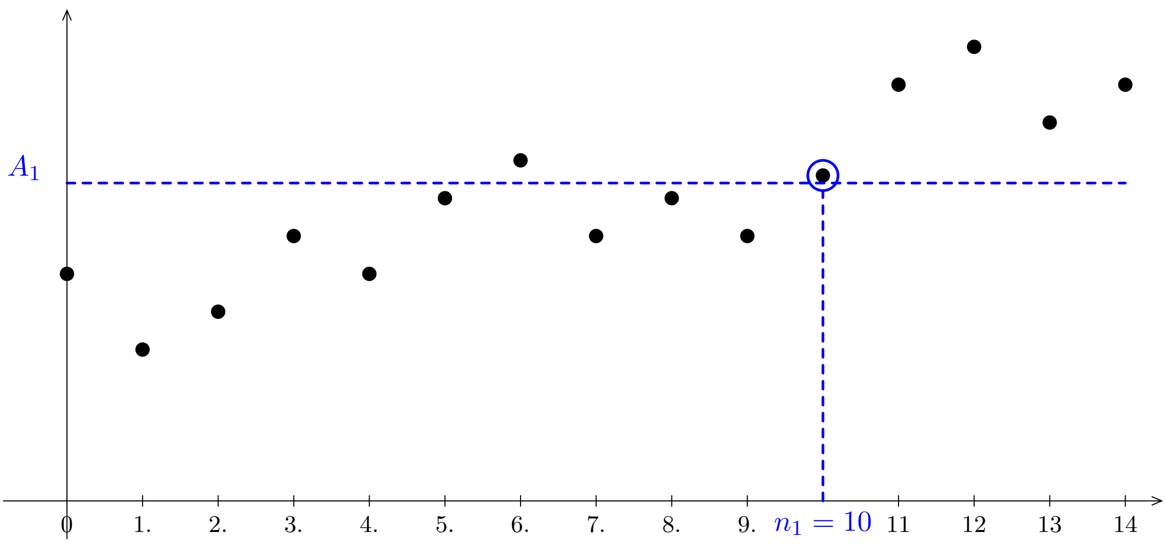
On note alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Pas de valeur absolue ici !

Faisons un dessin :



Pour cette valeur de A_0, il existe un entier n_0 (ici $n_0 = 5$) tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant A_0$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous « au-dessus de la barre rouge ». Prenons une autre valeur de A, notée A_1 :



Pour cette précision A_1, il existe un entier n_1 (ici, $n_1 = 10$) tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \geqslant A_1$ c'est-à-dire à partir duquel les termes de la suites sont tous « au-dessus de la barre bleue ». La suite tend vers $+\infty$ si, pour tout $A \geqslant 0$, il existe un rang à partir duquel les termes de la suite sont tous au-dessus de la barre correspondante.

Remarquons enfin que $n_0 < n_1$: le n_0 (ou le n_1) de la définition dépend de A car il est défini après, ce qui est intuitif ! n_0 est le rang à partir duquel reste au-dessus de A : plus plus la hauteur à dépasser est grande, plus il faut attendre longtemps et donc plus n_0 est grand !

Remarques :

- ⚠ Idem que ci-dessus, le n_0 n'est pas forcément le premier qui convient.
- Idem que ci-dessus, on a de nombreuses écritures équivalentes. Par exemple, (cf. exercice 12 du chapitre 0), on a l'équivalence suivante :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$$

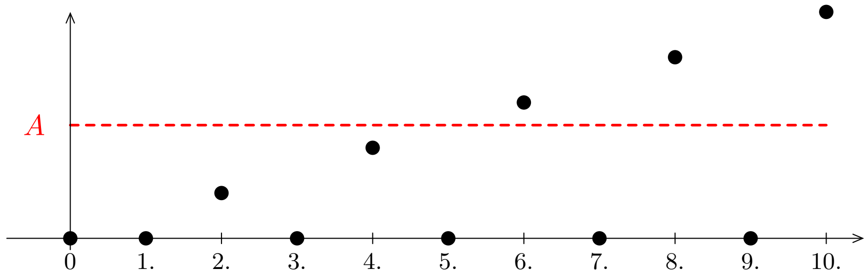
Là aussi, la liste est longue (et non exhaustive) :

$$\begin{aligned}
\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A \quad &\iff \quad \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A \\
&\iff \quad \forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A \\
&\iff \quad \forall A \geqslant 1000, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A \\
&\iff \quad \forall A \geqslant 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A + 1 \\
&\iff \quad \forall A \geqslant 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant \sqrt{A}
\end{aligned}$$

Ci-dessous, nous serons confrontés au cas $u_n \geqslant A + L_1 - 1$, qui est tout aussi équivalent à l'écriture initiale.

Là aussi, ces équivalences sont déclinables à l'infini et ne doivent pas masquer l'idée très simple qui les relie : A est quelconque donc « aussi grand qu'on veut ». Si on se demande si on a le droit, si c'est équivalent à la définition d'une limite, il suffit de se demander si la la quantité par laquelle on minore peut être aussi grande qu'on veut, et si A peut lui aussi être aussi grand qu'on veut. Par exemple, si on minore par $A+1$, $A - 1000$, A^2 ou $\sqrt{A}$ ou $2A$, alors c'est bon, mais si on minore par $-A$ et si A est positif, alors ça ne tient plus. De même, le but de A est d'être très grand donc A doit pouvoir être aussi grand qu'on veut : prendre $A \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}_+$, $A > 0$ ou $A \geqslant 1$ est tout à fait équivalent, donc on pourra le faire si ça nous arrange (par exemple si on veut prendre la racine carrée).

- La négation de $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ est : $\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n < A$. En d'autres termes : il existe un seuil en-dessous duquel se trouvent une infinité de termes (mais il peut y avoir une infinité de termes aussi au-dessus du seuil). Ci-dessous une suite ne divergeant pas vers $+\infty$ alors qu'il y a une infinité de termes au-dessus de A !



De façon analogue :

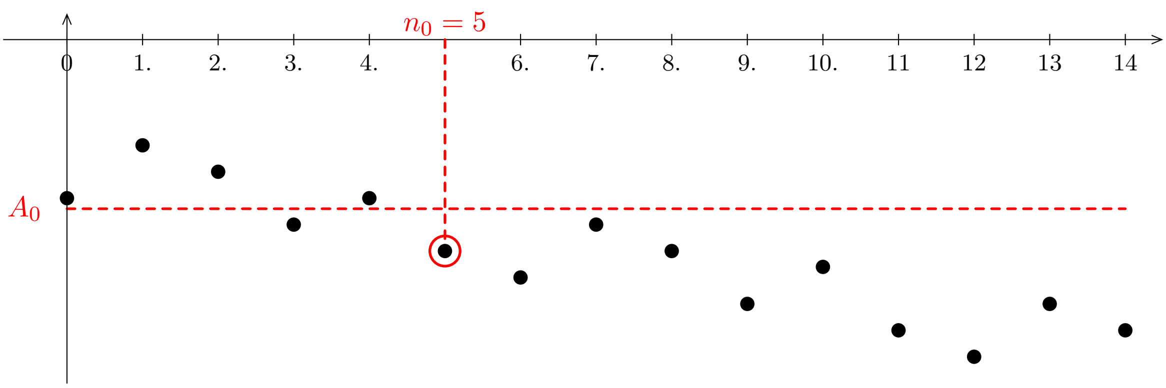
Définition. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite $-\infty$ ou tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \leqslant 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant A$$

On note alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Pas de valeur absolue ici !

Faisons un dessin :



III.5.b Exemples fondamentaux

Théorème.

1. Si $\alpha > 0$, alors $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Si $\beta > 0$, alors $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. Si $q > 1$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Si $\alpha < 0$, $-\alpha > 0$ donc

$$n^\alpha = \frac{1}{n^{-\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Si $\alpha = 0$, alors

$$n^\alpha = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

DÉMONSTRATION.
1. Soient $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. On a $n^\alpha \geqslant A$ si et seulement si $n \geqslant A^{1/\alpha}$. Posons $n_0 = \lfloor A^{1/\alpha} \rfloor + 1$. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $n^\alpha \geqslant A$. Ainsi $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Soit $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a $(\ln(n))^\beta \geqslant A$ si et seulement si $\ln(n) \geqslant A^{1/\beta}$ si et seulement si $n \geqslant \exp(A^{1/\beta})$. Posons $n_0 = \lfloor \exp(A^{1/\beta}) \rfloor + 1$. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $(\ln(n))^\beta \geqslant A$. Ainsi $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
3. Soit $A > 0$. Posons $n_0 = \lfloor A \rfloor + 1$. Nous avons, pour tout $n \geqslant n_0$, $n! \geqslant n \geqslant n_0 \geqslant A$. Donc $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. Soit $A > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Nous avons $q^n \geqslant A$ si et seulement si $n\ln(q) \geqslant \ln(A)$ si et seulement si $n \geqslant \dfrac{\ln(A)}{\ln(q)}$, car $\ln(q) > 0$. Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(A)}{\ln(q)} \right\rfloor + 1$. Nous avons alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $q^n \geqslant A$. Donc $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. $\square$

Remarques :

- De façon analogue, on montre que si $\alpha > 0$ et $q \in \,]\,0\,;1\,[$,
$$q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et, si $q > 1$,
$$q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$
Dans la pratique, on utilise plutôt uniquement les limites de ces deux derniers théorèmes puis le théorème de composition des limites par une fonction (cf. partie IV.3). Ici on compose $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par la fonction $x \longmapsto e^{x\ln(q)}$ et on conclut selon le signe de $\ln(q)$.
- Là aussi, parfois, on ne peut pas en général expliciter n et donner le premier rang à partir duquel ça marche. Cette fois, on **minore u_n par des quantités qui tendent vers** $+\infty$ (sinon, on n'a aucune chance d'être supérieur à A) et, dès qu'on a une minoration simple, on essaye de trouver une minoration qui convient : en effet, si u_n est supérieur à une certaine quantité v_n et si $v_n \geqslant A$ alors $u_n \geqslant A$.

Exemple : Montrons que $n^2 + (-1)^n \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Idem, plus tard, nous ferons autrement, mais il faut tout de même maîtriser cette méthode.

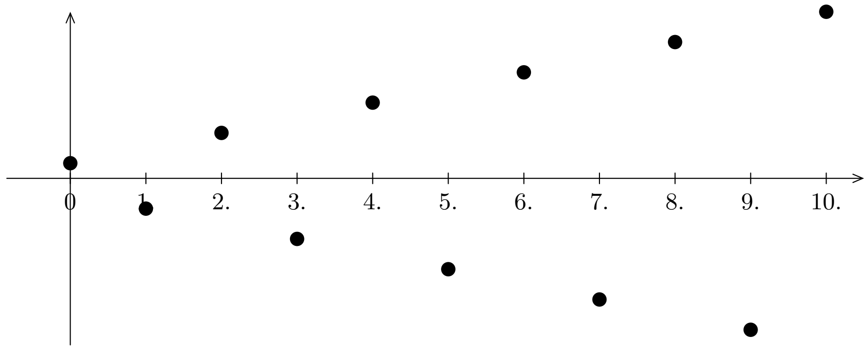
Soit $A > 0$. Alors $n^2 + (-1)^n \times n \geqslant n^2 - n = n(n-1) \geqslant n-1$. Or, $n-1 \geqslant A \iff n \geqslant A+1$. Soit donc $n_0 = \lfloor A \rfloor + 2$. Si $n \geqslant n_0$ alors $n^2 + (-1)^n \times n \geqslant A$: la suite tend bien vers $+\infty$.

III.5.c Généralisation des résultats précédents aux limites infinies

- Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas majorée par définition (car, pour tout réel A, elle finit par dépasser A) et une suite qui tend vers $-\infty$ n'est pas minorée.
- En particulier, une suite qui tend vers $\pm\infty$ n'est pas bornée donc ne converge pas. On dit qu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ **diverge** vers $\pm\infty$. En conclusion :

$$\textbf{converger} = \textbf{admettre une limite finie}$$

- Attention, une suite peut diverger sans tendre vers $\pm\infty$, elle peut ne pas admettre de limite. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$.
- Une suite non bornée ne tend pas forcément vers $\pm\infty$: par exemple, $((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais ne tend pas vers $\pm\infty$.



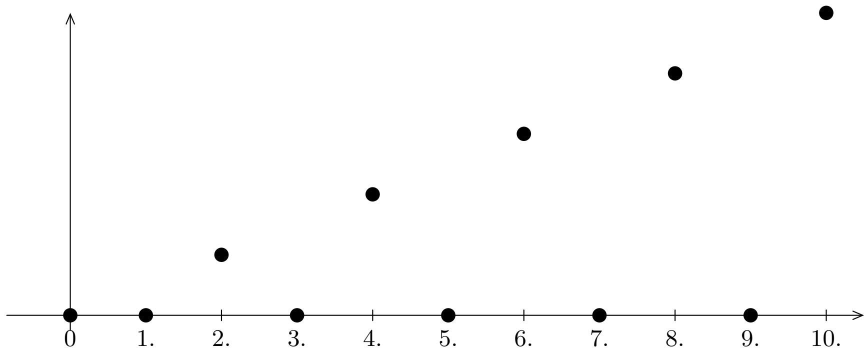
Elle n'est pas bornée car n'est pas majorée en valeur absolue : en effet, $2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc la suite de terme général 2^n n'est pas majorée. Cependant, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $(-2)^n < 1$ (il suffit de prendre $n = 2n_0+1$ impair). En d'autres termes, il y a une infinité de termes inférieurs à 1 i.e. :

Nous pourrons aller plus vite plus tard quand nous parlerons de suites extraites.

$$\exists A \in \mathbb{R}_+, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n < A$$

ce qui signifie que cette suite ne tend pas vers $+\infty$, et de même elle ne tend pas vers $-\infty$.

- Une suite non bornée ne tend pas forcément en valeur absolue vers $+\infty$: par exemple, $(((-1)^n+1)\times n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée mais sa valeur absolue ne tend pas vers $+\infty$.



Elle n'est pas bornée car, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, il existe n tel que $((-1)^n+1)\times n > A$ (par exemple $n = 2\times(\lfloor A\rfloor+1)$) mais ne tend pas vers $+\infty$ pour la même raison que ci-dessus.

Idem, nous pourrons aller plus vite quand nous parlerons de suites extraites.

- Une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée : en effet, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_n \geqslant 1$ à partir d'un rang n_0 et, de même que pour montrer qu'une suite qui converge est bornée, en posant $A = \min\{u_n \,|\, n < n_0\}$ puis en posant $m = \min(A, 1)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par m. De même (exo), une suite qui tend vers $-\infty$ est majorée.
- Enfin, puisqu'une suite qui tend vers$+\infty$ n'est pas majorée et qu'une suite qui tend vers $-\infty$ n'est pas minorée, on en déduit qu'une suite ne peut pas tendre à la fois vers $+\infty$ et $-\infty$. Et puisqu'une suite qui tend vers $\pm\infty$ diverge, on en déduit que :

Le théorème d'unicité de la limite est aussi valable avec des limites infinies.

III.5.d Vraiment une définition différente ?

Les trois définitions sont en fait la même : si $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a si tout voisinage de a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Cette définition unifiée permet de voir que les trois définitions que nous avons vues sont en fait la même. Il faut cependant pouvoir la quantifier sans hésitation.

Remarque : Avec cette définition, on pourrait être tenté de dire qu'une suite qui tend vers $+\infty$ **converge** vers $+\infty$. En fait, tout est affaire de convention : une suite qui tend vers $+\infty$ **diverge** dans $\mathbb{R}$ mais **converge** dans $\overline{\mathbb{R}}$. Puisque le cadre habituel est de se placer dans $\mathbb{R}$, nous prendrons la première convention.

IV Opérations sur les limites

On se donne dans cette partie deux réels L_1 et L_2.

IV.1 Sommes, produits, combinaisons linéaires, quotients

IV.1.a Sommes

Proposition.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$ alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 + L_2$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les deux vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).

En particulier, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $u_n + \lambda \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 + \lambda$: prendre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à λ.

Démonstration. 1. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L_1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_1, \forall n \geqslant n_1, |v_n - L_2| \leqslant \varepsilon$$

n_0 et n_1 n'ont aucune raison d'être égaux !

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$.

$$\begin{aligned} |(u_n + v_n) - (L_1 + L_2)| &= |u_n - L_1 + v_n - L_2| \\ &\leqslant |u_n - L_1| + |v_n - L_2| \\ &\leqslant 2\varepsilon \end{aligned}$$

I.T.

2. Soit $A \geqslant 0$. Par hypothèse :

$$\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant L_1 - 1 \qquad \text{et} \qquad \exists n_1, \forall n \geqslant n_1, v_n \geqslant A$$

Définition de la limite avec $\varepsilon = 1$: $|u_n - L_1| \leqslant 1 \iff L_1 - 1 \leqslant u_n \leqslant L_1 + 1$.

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$. Alors $u_n + v_n \geqslant A + L_1 - 1$.

3. $\rightsquigarrow$ Exercice. □

Remarque : Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, on ne peut pas conclure. La somme peut tendre vers tout et n'importe quoi, voire même ne pas admettre de limite. On dit que c'est une forme indéterminée (F.I.).

Exemples :

- $n + 2022 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $-n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ et la somme tend vers 2022.
- $n^2 + (-1)^n \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (voir ci-dessus) et $-n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ mais la somme $(-1)^n \times n$ n'a pas de limite (on le montre comme ci-dessus).

Nous utilisons le fait que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, ce qu'on peut montrer directement mais découle également du paragraphe suivant.

Remarque : ⚠ Une somme de suites divergentes peut converger ! Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $(-1)^n$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général $(-1)^{n+1}$ alors leur somme est la suite nulle qui converge vers 0. Cependant, la somme d'une suite convergente et d'une suite divergente diverge : en effet, supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Si $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$ alors $v_n = u_n + v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2 - L_1$ ce qui est absurde.

IV.1.b Produits, combinaisons linéaires

Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration. Soit $M > 0$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée par M. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \varepsilon$. Soit donc $n \geqslant n_0$. Alors $|u_n \times v_n| \leqslant M \times \varepsilon$.

Proposition.

1. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$ alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 \times L_2$.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 \neq 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ (règle des signes).
3. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ alors $u_n \times v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ (règle des signes).

En particulier, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda L_1$: prendre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à λ.

Démonstration. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n v_n - L_1 L_2 = u_n(v_n - L_2) - L_2(L_1 - u_n)$. Or, $v_n - L_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc est bornée. Dès lors, $u_n(v_n - L_2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. De même, $L_2(L_1 - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Par somme, $u_n v_n - L_1 L_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ donc

$$u_n v_n = u_n v_n - L_1 L_2 + L_1 L_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 L_1$$

2. On suppose que $L_1 < 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (raisonnement analogue dans les autres cas). Soit $A \leqslant 0$. Par définition d'une limite finie avec $\varepsilon = -L_1/2 > 0$ et d'une limite infinie avec $A = 2A/L_1 > 0$:

$$(1) \qquad \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant \frac{L_1}{2} < 0 \qquad \text{et} \qquad \exists n_1, \forall n \geqslant n_1, v_n \geqslant \frac{2A}{L_1} \qquad (2)$$

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$. En multipliant (1) par $u_n < 0$ et (2) par $2A/L_1 > 0$, il vient :

$$\begin{array}{lrcl} \text{D'une part,} & u_n v_n & \leqslant & \dfrac{2A}{L_1} \times u_n \\ \text{D'autre part,} & \dfrac{2A}{L_1} \times u_n & \leqslant & A \end{array}$$

□

Finalement, $u_n v_n \leqslant A$: $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

⚠ On ne peut multiplier que les inégalités positives !

3. ⇝ Exercice.

$+\infty \times -\infty$ n'est pas une F.I. !

Remarque : Le cas « $0 \times \pm\infty$ » est une F.I.

Exemples : $\dfrac{1}{n} \times 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$, $\dfrac{1}{n} \times n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\dfrac{1}{n^2} \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Remarque : On peut combiner les résultats précédents. Par exemple, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2$ et si $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, alors $\lambda_1 u_n + \lambda_2 v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2$. On peut aisément généraliser à un plus grand nombre (fini et fixe !) de suites.

En conclusion : une combinaison linéaire de suites convergentes converge (vers la même combinaison linéaire des limites).

Remarque : Le nombre de suites doit être fixes car, s'il varie, cela peut tout changer. Par exemple, si $p \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

en tant que somme de suites qui tendent vers 0, mais

$$\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n \text{ fois}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On somme des suites qui tendent vers 0, mais le nombre de suites tend vers $+\infty$, donc le résultat n'est plus valable.

IV.1.c Quotient

Définition. On dit que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (respectivement 0^-) si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $u_n > 0$ (respectivement $u_n < 0$) à partir d'un certain rang.

Lemme.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 \neq 0$ alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{L_1}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (respectivement 0^-) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$).
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (respectivement $-\infty$) alors $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ (respectivement 0^-).

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

De plus, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $|u_n| \geqslant |L_1|/2$ (définition de la limite avec $\varepsilon = |L_1|/2 > 0$). En particulier, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n \neq 0$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$. Alors

$$\left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{L_1}\right| = \frac{|u_n - L_1|}{|u_n L_1|} \leqslant \frac{\varepsilon}{|u_n L_1|}$$

□

Or, $|u_n| \geqslant |L_1|/2$ donc $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{L_1}\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{|L_1|^2}$.

Le reste : ⇝ Exercice.

Corollaire.

- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2 \neq 0$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L_1}{L_2}$.
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1 \neq 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ ou 0^- alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ (règle des signes).
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_2 \neq 0$ ou $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ ou 0^-, alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ (règle des signes).
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_1$ et si$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ alors $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\dfrac{\pm\infty}{0^\pm}$ n'est pas une F.I.

Démonstration. exo, utiliser le lemme, le paragraphe précédent, et le fait que $\dfrac{u_n}{v_n} = u_n \times \dfrac{1}{v_n}$.

Remarque : « $\dfrac{0}{0}$ » et « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » sont des formes indéterminées.

Remarque : Avant d'effectuer un quotient de limites, toujours vérifier que la limit du dénominateur est non nulle !

Exemple : Si $n \in \mathbb{N}$, posons $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Réponse (fausse) : (W_n) tend vers une limite L donc $W_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ donc $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L}{L} = 0$.

Ce raisonnement n'est pas valable car $L = 0$. Pour une réponse juste, cf. chapitre 10.

Remarque : Une limite est FIXE (i.e. indépendante de n).

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{{u_n}^2}{n+1}$$

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite L alors $L = 0$.

Réponse (fausse) : $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{L^2}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Cela n'a AUCUN SENS !

Réponse (juste) : ${u_n}^2 = u_n \times u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L^2$ et $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ d'où, par quotient, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ (cf. paragraphe VII.3) donc, par unicité de la limite, $L = 0$.

IV.1.d Moyenne : théorème de Cesàro (HP mais très classique)

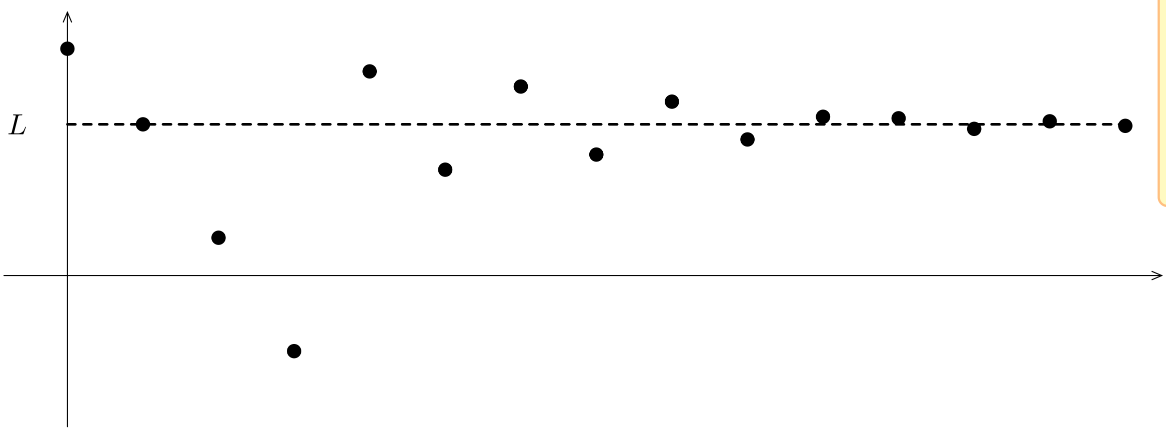
Théorème (Théorème de Cesàro). Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Alors :

$$\frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

Remarque : Le théorème de Cesàro est intuitif ! Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ finissent par être très proches de L donc la moyenne (arithmétique, mais c'est aussi vrai pour la moyenne géométrique en composant par le ln) des termes de la suite tend aussi vers L (les premiers termes, éloignés de L, ne sont pas gênants car on prend la moyenne).

Il est fondamental de bien comprendre qu'on étudie la limite de la moyenne de la suite. Parfois, la suite commence au terme d'indice 1, et alors le théorème de Cesàro devient :

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$



Démonstration. Supposons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon$. Soit $n \geqslant n_0$. Notons

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1}$$

Alors

$$\begin{aligned}
|v_n - L| &= \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k - (n+1)L}{n+1} \right| \\
&= \left| \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (u_k - L)}{n+1} \right| \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |u_k - L|}{n+1} \\
&\leqslant \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - L|}{n+1} + \frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} |u_k - L|}{n+1}
\end{aligned}$$

I.T.

Or, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - L|$ est un réel fixe et $n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - L|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, il existe n_1 tel que, pour tout $n \geqslant n_1$,

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} |u_k - L|}{n+1} \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
|v_n - L| &\leqslant \varepsilon + \frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \varepsilon}{n+1} \\
&\leqslant \varepsilon + \frac{n - n_0 + 1}{n+1} \times \varepsilon \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□

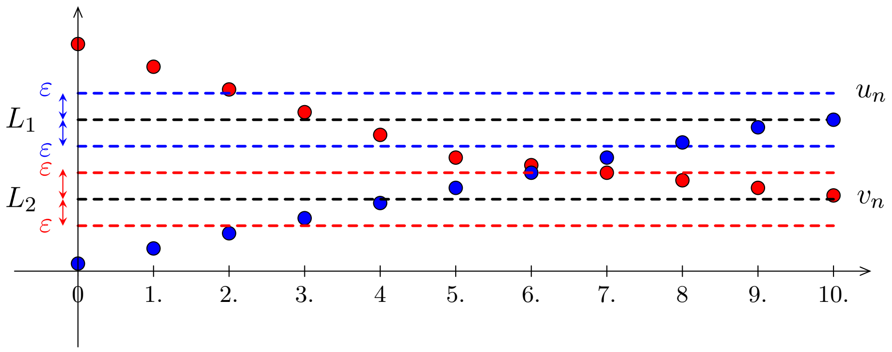
ce qui permet de conclure. Les cas $L = \pm\infty$ sont analogues (cf. exercice 54).

IV.2 Limites et relations d'ordre

Théorème. On suppose que (u_n) et (v_n) convergent respectivement vers L_1 et L_2. On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors $L_1 \leqslant L_2$: on dit que l'inégalité large passe à la limite.

Démonstration. Supposons que $L_1 > L_2$. Soit $\varepsilon = \dfrac{L_2 - L_1}{3}$.

L'idée du raisonnement est très simple : v_n se rapproche de L_1 et u_n se rapproche de L_2 et, si $L_1 > L_2$, alors u_n finit par dépasser v_n, car u_n finit par être dans le cylindre bleu et v_n dans le cylindre rouge, voir dessin ci-contre, ce qui est exclu.



Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |u_n - L_1| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |v_n - L_2| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$. Alors, pour tout $n \geqslant n_3$, $|u_n - L_1| \leqslant \varepsilon$ et $|v_n - L_2| \leqslant \varepsilon$. En particulier :

$$v_n \leqslant L_2 + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad L_1 - \varepsilon \leqslant u_n$$

En particulier, $L_2 + \varepsilon \leqslant L_1 - \varepsilon$. Or,

$$\begin{aligned} L_1 - \varepsilon - (L_2 + \varepsilon) &= L_1 - L_2 - 2\varepsilon \\ &= L_1 - L_2 - 2 \times \frac{L_1 - L_2}{3} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{3} < 0 \end{aligned}$$

□

ce qui est absurde car $L_2 + \varepsilon \leqslant L_1 - \varepsilon$, donc $L_1 \leqslant L_2$.

Remarques :

- En particulier, si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_1$ et si $u_n \geqslant \lambda$ pour tout n, alors $L_1 \geqslant \lambda$ (on applique ce qui précède avec une suite constante égale à λ).
- Le résultat est FAUX avec des inégalités strictes. Par exemple, pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ mais on n'a pas $L_1 > L_2$. En clair, ce théorème « transforme les inégalité strictes en inégalités larges » : si $u_n > v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_1$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_2$ alors $u_n \geqslant v_n$ et $L_1 \geqslant L_2$: on ne peut pas faire mieux ! On n'a pas forcément $L_1 > L_2$!
- Ce théorème ne dit PAS que si $u_n \geqslant v_n$ pour tout n alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et leurs limites sont dans le même ordre. La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une HYPOTHÈSE qu'il faut donc montrer AVANT d'appliquer le théorème.

Question type : Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $L > 0$.

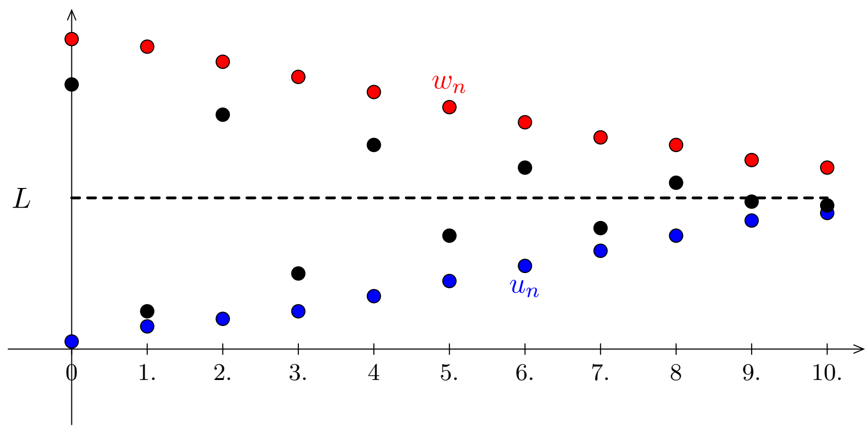
- On montre que $u_n \geqslant 0$ pour tout n.
- On montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L. L'inégalité large passant à la limite, $L \geqslant 0$.
- On montre ensuite que $L \neq 0$ (par exemple par l'absurde ou, le cas échéant, car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $L \geqslant u_0 > 0$, cf. paragraphe V).

Avoir $u_n > 0$ pour tout n ne suffit pas à avoir $L > 0$! Ex : $\dfrac{1}{n}$.

Théorème.

- **(Théorème d'encadrement)** On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite L, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ (et, en particulier, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge).
- **(Théorème de minoration)** On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- **(Théorème de majoration)** On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Ce n'est qu'un dessin ! $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément croissante (les suites ne sont pas forcément adjacentes, cf. paragraphe V.4).



Démonstration. Plaçons-nous dans le premier cas. Soit $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |u_n - L| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |w_n - L| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n_3 = \max(n_1, n_2)$ et soit $n \geqslant n_3$. Alors $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$ et $|w_n - L| \leqslant \varepsilon$ donc, en particulier :

$$L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \leqslant L + \varepsilon$$ □

si bien que $|v_n - L| \leqslant \varepsilon$: $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.
Plaçons-nous dans le second cas. Soit $A \geqslant 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$. Si $n \geqslant n_0$, alors $v_n \geqslant u_n \geqslant A$ ce qui permet de conclure. Le troisième cas est analogue et laissé en exo.

Remarque : Dans le premier cas, contrairement au théorème précédent, la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par le théorème, ce n'est pas une hypothèse, il est inutile de la prouver avant d'affirmer que la limite est égale à L. En clair : le théorème d'encadrement donne à la fois la convergence et la limite. On ne confondra pas le théorème d'encadrement et le théorème de passage à la limite pour les inégalités larges.

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + (-1)^n \geqslant n^2 - n = n^2 \times \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, par minoration, $n^2 + (-1)^n \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $n \geqslant 1$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$.

Une somme, ça se calcule ou ça s'encadre.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+n} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+n} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

si bien que

$$\frac{n^2}{n^2+n} + \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

Or, $\dfrac{n^2}{n^2+n} = \dfrac{n^2}{n^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc les deux termes extrémaux tendent vers $\dfrac{3}{2}$. D'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{3}{2}$.

Corollaire.

- Si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Soit $L \in \mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - L| \leqslant v_n$. Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Ce résultat ne fonctionne qu'avec une limite nulle ! Par exemple, si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, alors on ne peut rien affirmer sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle peut ne pas converger, par exemple si $u_n = (-1)^n$ pour tout n.

Remarque : Par conséquent, pour montrer qu'une suite tend vers 0, il suffit de montrer que sa valeur absolue tend vers 0 : cela peut être utile quand on n'a aucune idée du signe des quantités que l'on manie. Autre avantage (avec le deuxième point) : cela permet de montrer qu'une suite converge avec une seule inégalité (au lieu de deux si on applique le théorème d'encadrement) car l'inégalité $0 \leqslant$ est automatique avec une valeur absolue.

Démonstration.

- Il suffit de voir que, pour tout n, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$ et d'appliquer le théorème d'encadrement.
- Pour tout n, $0 \leqslant |u_n - L| \leqslant v_n$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $|v_n - L| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le point précédent, $v_n - L \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $v_n = v_n - L + L \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

La réciproque est vraie, c'est-à-dire que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, mais là, c'est aussi valable pour une limite non nulle : cf. paragraphe IV.3.

Remarque : Les résultats de ce paragraphe sont encore valable si les inégalités sont encore vraies à partir d'un certain rang n_0.

IV.3 Composition de limites

Théorème (admis provisoirement). Soit D une union d'intervalles non vides, non réduits à un point. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D.

- Soit a un point adhérent à D (éventuellement infini). Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(y) \xrightarrow[y\to a]{} L$ et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.
- Soit $a \in D$. Si f est continue en a et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ alors $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$.

Nous le démontrerons dans le chapire 13.

Dans le deuxième cas, a est un élément de D : en particulier, a est un réel !

Remarque : Pour le deuxième point, la continuité en a est indispensable ! Par exemple, $-\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\left\lfloor -\dfrac{1}{n} \right\rfloor = -1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \neq \lfloor 0 \rfloor$.

Exemples :

- Soit $q > 1$ et soit $\alpha > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. $q^{n^\alpha} = e^{n^\alpha \times \ln(q)}$. Or, $n^\alpha \times \ln(q) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ car $\ln(q) > 0$ et $e^y \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$. Par composition de limite, $q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- De même, si $\alpha > 0$ et si $q \in \left]0\,;1\right[$, alors $q^{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Généralisons ce résultat : montrons que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \left]0\,;1\right[$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors ${u_n}^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. ${u_n}^{v_n} = e^{v_n \times \ln(u_n)}$. Là aussi, par continuité du ln, $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(L) < 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, par produit, $v_n \times \ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Or, $e^y \xrightarrow[y\to-\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, on a le résultat. Par exemple : $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- De même, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L > 1$ et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors ${u_n}^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Par exemple, $\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Idem si $L = +\infty$. Par exemple, $n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Cela ne marche plus avec si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: cf. paragraphe IV.5. On dit que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée, mais il est inutile de retenir cela, il suffit de passer à l'exponentielle dès que la puissance est variable.
- Bon, par contre, quand la puissance est fixe, tout va bien. En effet, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est continue donc ${u_n}^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$. Cela ne marche pas avec une puissance variable car écrire (par exemple) « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est continue donc ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^n = 1$ » n'a aucun sens : une limite est FIXE !
- Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |L|$ car la valeur absolue est continue.

Attention de ne pas dire « par continuité de l'exponentielle » ici : l'exponentielle n'est pas continue en $+\infty$!

Pour les deux exemples ci-contre, on peut raisonner autrement : $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ donc, pour n assez grand, $\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{n} \leqslant \dfrac{3}{4}$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante si bien que $0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{n}\right)^n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$. Or, $\dfrac{3}{4} < 1$ donc $\left(\dfrac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on conclut avec le théorème d'encadrement. De même pour l'autre (et on peut adapter ce raisonnement dans le cas général avec $\alpha = \dfrac{1+L}{2}$, exo).

cf. paragraphe VIII pour d'autres exemples.

IV.4 Comparaison des suites usuelles et croissances comparées

IV.4.a Bilan

Théorème.

- Si $\alpha > 0$, alors $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $\beta > 0$, alors $(\ln(n))^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En passant à l'inverse :

- Si $\alpha > 0$, alors $\dfrac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $\beta > 0$, alors $\dfrac{1}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $\dfrac{1}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $\dfrac{1}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème (Convergence des suites géométriques).
Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $q \in \left]-1\,;1\right]$. Plus précisément :

- Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
- Si $q \in \left]-1\,;1\right[$, $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Si $q > 1$, $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- Si $q = -1$, flemme.
- Si $q < -1$, $|q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais la suite (q^n) n'a pas de limite.

On en déduit la limite éventuelle d'une suite géométrique quelconque à l'aide de la valeur (et du signe) de u_0.

Démonstration. Il reste à montrer que, si $q \in \left]-1\,;0\right[$, alors $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il suffit de voir que $|q| \in \left]0\,;1\right[$ donc $|q^n| = |q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui permet de conclure.

On a donc plusieurs suites de référence qui tendent vers 0 ou vers $+\infty$: tendent-elles vers $+\infty$ ou 0 « à la même vitesse » ou y a-t-il des suites « qui l'emportent sur les autres » ?

IV.4.b Croissances comparées

Théorème (croissances comparées).

1. Pour tous $a > 0$ et $b > 0$, $\dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Pour tous q tel que $|q| > 1$ et $a > 0$, $\dfrac{n^a}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Pour tous $q \in \left]-1\,;1\right[$ et $a > 0$, $n^a q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Pour tout $q \in \mathbb{R}$, $\dfrac{q^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
4. $\dfrac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On dit que les suites polynomiales l'emportent sur les puissances logarithmiques et que les suites géométriques ou exponentielles (q^n, $q > 1$) l'emportent sur les suites polynomiales. On préférera utiliser le terme croissances comparées.

Démonstration.

1. Soit $n \geqslant 2$. $\dfrac{\ln(n)^b}{n^a} = \left(\dfrac{\ln(n)}{n^{a/b}}\right)^b$. Or, d'après les croissances comparées du chapitre 2, $\dfrac{\ln(y)}{y^{a/b}} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ et puisque $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, par composition de limites, on a le résultat.
2. Supposons $|q| > 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, $\left|\dfrac{n^a}{q^n}\right| = \dfrac{n^a}{|q|^n} = e^{a\ln(n) - n\ln(|q|)}$. Or,

$$e^{a\ln(n) - n\ln(|q|)} = -n\ln(|q|) \times \left(1 - a \times \frac{\ln(n)}{n\ln(|q|)}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   car $\ln(|q|) > 0$ et car, d'après ce qui précède, la parenthèse tend vers 1. Le cas $|q| < 1$ est analogue.
3. Notons $N = \lfloor |q| \rfloor$. Pour tout $n > N + 2$,

$$0 \leqslant \frac{|q|^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|q|}{k} = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{N} \frac{|q|}{k}\right)}_{=C} \times \underbrace{\left(\prod_{k=N+1}^{n-1} \frac{|q|}{k}\right)}_{\leqslant 1} \times \frac{|q|}{n} \leqslant \frac{C|q|}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   (car C est une constante). D'où le résultat par encadrement.

   Rappelons qu'on peut multiplier les inégalités positives.
4. Pour tout $n \geqslant 2$,

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \times \underbrace{\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n}}_{\leqslant 1} \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   D'où le résultat par encadrement. □

Remarque : ⚠ Comme dans le chapitre 2, attention à ne pas inventer des croissances comparées qui n'existent pas.

IV.5 Comment lever l'indétermination ?

Première méthode : Mettre en facteur le terme prépondérant pour faire apparaître les croissances comparées.

On a déjà utilisé cette méthode plus haut.

Exemples :

- $u_n = \dfrac{n^4 + n^3 + 10n^2 + 10^{2022}}{2n^3 - n^4 + 50n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$. En effet, si $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^4 \times \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{10}{n^2} + \dfrac{10^{2022}}{n^4}\right)}{n^4 \times \left(-1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{50}{n^2}\right)} \\ &= \frac{1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{10}{n^2} + \dfrac{10^{2022}}{n^4}}{-1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{50}{n^2}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -1 \end{aligned}$$

- $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{2n + 12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En effet, si $n \geqslant 1$:

Avec les mains, pour les suites polynomiales ou rationnelles : c'est le terme dominant qui gagne (nous dirons au chapitre 24 qu'une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré). On pourra donner le résultat directement, mais il faut savoir le retrouver.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{n^2 \times \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{n \times \left(2 + \dfrac{12}{n}\right)} \\ &= \frac{n \times \left(1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)}{2 + \dfrac{12}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

- $u_n = \dfrac{n^{1000} + 50}{\sqrt{2}^n - n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En effet :

Cette méthode ne marche pas qu'avec des suites polynomiales !

$$u_n = \frac{n^{1000}}{\sqrt{2}^n} \times \frac{1 + \dfrac{50}{n^{1000}}}{1 - \dfrac{n^3}{\sqrt{2}^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées (car $\sqrt{2} > 1$).

Deuxième méthode : Faire apparaître un taux d'accroissement. On a pour cela les limites classiques suivantes :

En attendant les DL et les équivalents.

- $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$
- $\dfrac{\tan(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$
- $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$
- $\dfrac{\sqrt{1+u} - 1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} \dfrac{1}{2}$
- $\dfrac{e^u - 1}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$

Exemples :

- On a :

$$\begin{aligned} u_n &= n \times \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &= n \times \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} \times \frac{\pi}{n} \\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}{\dfrac{\pi}{n}} \times \pi \end{aligned}$$

  Or, $\dfrac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, le quotient tend vers 1, si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.

- $n \times \sin\left(\dfrac{\pi}{n^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- $\left(e^{5/n} - 1\right) \times n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5$.
- $n^2 \times \ln\left(1 + \dfrac{4}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{4}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

Y penser quand on a un sin, un ln, une tangente d'une quantité qui tend vers 0. On peut alors deviner le résultat en se disant que $\sin(u) \approx u$, $e^{5/n} - 1 \approx \dfrac{5}{n}$ etc. Les résultats ci-contre sont alors triviaux. Cependant, ce n'est pas une vraie démonstration : il faudra attendre le chapitre 24 pour ça.

Donnons une dernière application (importante) de ce résultat.

Théorème (HP mais très classique). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha}$.

À savoir faire !

Démonstration. $1 + \dfrac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 > 0$ donc $1 + \dfrac{\alpha}{n} > 0$ pour n assez grand : la suite de terme général

$$u_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^{n \times \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)}$$

est donc bien définie (pour n assez grand). Or,

$$\begin{aligned} n \times \ln\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) &= n \times \frac{\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)}{\dfrac{\alpha}{n}} \times \frac{\alpha}{n} \\ &= \frac{\ln\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)}{\dfrac{\alpha}{n}} \times \alpha \end{aligned}$$

□

On peut montrer plus généralement (cf. exercice 85) que, si (u_n) est une suite complexe qui converge vers un complexe z, alors

$$\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$$

Or, $\dfrac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, le quotient tend vers 1, si bien que le terme ci-dessus tend vers α. Enfin, par continuité de l'exponentielle, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha}$.

Remarque : On voit ici très bien le fait que « $1^{+\infty}$ » est une forme indéterminée, c'est-à-dire que dire « $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc ${u_n}^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ » est faux ! Par exemple, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 + \dfrac{\alpha}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $\left(1 + \dfrac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\alpha}$. On a une infinité de suites tendant vers 1 telles qu'en les mettant à la puissance n, elles ont des limites différentes !

Troisième méthode : « Supprimer » la partie entière quand il y en a une.

Morale de l'histoire (encore) : mettre sous forme exponentielle.

Tout vient du résultat suivant (qu'on utilisera directement, mais il faut savoir le redémontrer) :

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $\dfrac{u_n}{\lfloor u_n \rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Remarque : C'est intuitif ! Si $u_n = 1000000000.5$, alors $u_n \approx \lfloor u_n \rfloor$, tandis que, si $u_n = 1.5$, u_n et sa partie entière ont diffèrent de moitié (ou d'un tiers) : ce n'est pas rien !

Démonstration. On suppose que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > 0$. Soit donc $n \geqslant n_0$. Alors $u_n - 1 < \lfloor u_n \rfloor \leqslant u_n$ donc

$$1 - \frac{1}{u_n} < \frac{\lfloor u_n \rfloor}{u_n} \leqslant 1$$

□

D'après le théorème d'encadrement, on a le résultat.

Exemple :

$$\begin{aligned}\frac{\lfloor \sqrt{3} \times n^4 + 10n^2 + 1 \rfloor}{\lfloor \sqrt{10}n^4 - 100n^3 \rfloor} &= \frac{\lfloor \sqrt{3} \times n^4 + 10n^2 + 1 \rfloor}{\sqrt{3} \times n^4 + 10n^2 + 1} \times \frac{\sqrt{3} \times n^4 + 10n^2 + 1}{\sqrt{10}n^4 - 100n^3} \times \frac{\sqrt{10}n^4 - 100n^3}{\lfloor \sqrt{10}n^4 - 100n^3 \rfloor} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times \sqrt{\frac{3}{10}} \times 1\end{aligned}$$

V Suites monotones

V.1 Définitions et opérations

Définition. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$,
- décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1}$,
- strictement croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$,
- strictement décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$,
- monotone si elle est croissante ou décroissante, strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarques :

- La négation de « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » est : $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$. En d'autres termes, une suite n'est pas croissante lorsqu'il existe **un** terme strictement plus grand que son successeur. ⚠ Une suite non croissante n'est pas forcément décroissante ! Une suite peut très bien ne pas être monotone. Idem pour une suite décroissante.
- Une suite est croissante et décroissante si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$. En d'autres termes, une suite est croissante et décroissante si et seulement si elle est constante.

Proposition. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\iff \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, n \leqslant p \Rightarrow u_n \leqslant u_p$.

En d'autres termes, une suite est croissante lorsque les termes de la suite sont tous dans le même ordre que les indices. On adapte facilement cette proposition au cas d'une suite strictement croissante ou (strictement) décroissante.

Démonstration. Le sens « $\Leftarrow$ » est immédiat avec $n \in \mathbb{N}$ et $p = n+1$. Le sens « $\Rightarrow$ » se montre par récurrence en montrant que, pour tout n, H_n : « $\forall p \geqslant n, u_n \leqslant u_p$ » est vraie : $\leadsto$ Exercice.

Proposition.

- La somme de deux suites croissantes est croissante. De plus, si l'une d'elle est strictement croissante, alors la somme l'est aussi.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante et si $\lambda > 0$ alors $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante, et si $\lambda < 0$, alors $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) décroissante. De même pour décroissante.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : On ne peut rien affirmer sur un produit de suites monotones ou sur la somme de deux suites de monotonies différentes.

V.2 Comment montrer qu'une suite est monotone ?

Proposition. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs **strictement positives**. Alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$$

On adapte facilement ce résultat au cas d'une suite strictement croissante ou (strictement) décroissante.

DÉMONSTRATION. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante $\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ car $u_n > 0$.

Remarque : ⚠ C'est faux sans l'hypothèse de positivité ! Par exemple, $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante alors que, pour tout $n \geqslant 1$, $\frac{-(n+1)}{-n} = \frac{n+1}{n} > 1$!

Comment montrer qu'une suite est monotone ?

- La définition (le plus sûr) i.e. fixer $n \in \mathbb{N}$ (« Soit $n \in \mathbb{N}$ ») et donner le signe de $u_{n+1} - u_n$ (ou parfois prendre $n \geqslant 1$ et regarder le signe de $u_n - u_{n-1}$).
- Le quotient (i.e. la proposition prpécédente). Valable uniquement pour les suites à termes positifs. Cela peut être utile par exemple lorsqu'il y a des produits, des factorielles, des puissances etc.
- Une étude de fonction : si f est monotone sur $\mathbb{R}_+$ (par exemple) et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone de même monotonie que f (car, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) - f(n)$). Il est en effet parfois plus pratique de travailler avec une fonction qu'avec une suite car on dispose d'outils puissants pour étudier la monotonie, comme la dérivation.

⚠ On ne dérive pas une suite !

Exemple : Donner la monotonie de la suite $(e^{-n} \times \sqrt{n})_{n\geqslant 1}$.

Soit $f : x \mapsto e^{-x} \times \sqrt{x}$ définie sur $[\,1\,;+\infty\,[$. f est dérivable et, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \times \sqrt{x} + e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= e^{-x} \times \left(\frac{-2x+1}{2\sqrt{x}}\right) < 0 \end{aligned}$$

On en déduit que f est strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Remarque : Ce dernier critère n'est valable que si on a $u_n = f(n)$, il n'est pas valable pour les suites vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Pour ce genre de suite, on peut avoir f croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, cf. paragraphe VIII.

V.3 Théorème de la limite monotone

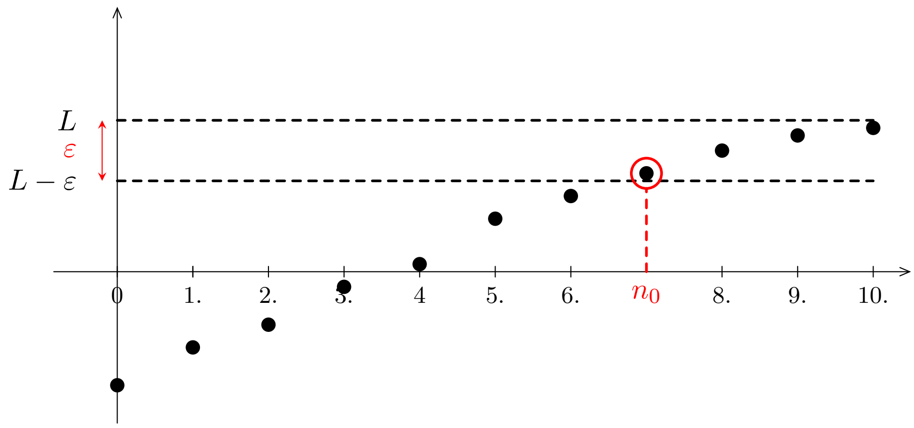
Théorème (de la limite monotone – cas croissant). On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge. De plus, si on note sa limite L, alors

$L = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. En particulier, $u_n \leqslant L$ pour tout n.

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration. 1. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. $E = \{\, u_n \mid n \in \mathbb{N}\,\}$ est alors une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Il admet donc une borne supérieure $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $a \in E$ tel que $L - \varepsilon < a \leqslant L$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant L$.



La croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$L - \varepsilon < u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant L$$

et donc $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

2. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. Soit $A \geqslant 0$. Il existe donc $a \in E$ tel que $a \geqslant L$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant A$. La croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implique que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. $\square$

De manière analogue :

Théorème (de la limite monotone – cas décroissant). Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente et sa limite est $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Corollaire. Toute suite réelle monotone admet une limite (finie ou infinie).

Remarques :

- Une suite croissante (respectivement décroissante) converge si et seulement si elle est majorée (respectivement minorée). Sinon, elle tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). C'est faux pour une suite non monotone : elle peut ne pas admettre de limite.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante **convergente**, alors $L \geqslant u_n$ pour tout n : une suite croissante est majorée par sa limite et minorée par son premier terme u_0, et c'est le contraire pour une suite décroissante.
- L'inégalité $L \geqslant u_n$ est stricte sauf si la suite est stationnaire : en effet, s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} = L$ alors, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant L$ donc $u_n = L$. En particulier, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone, l'inégalité est toujours stricte. Idem pour une suite décroissante.
- Enfin, pour appliquer le théorème de la limite monotone, il faut majorer ou minorer par une CONSTANTE ! Par exemple, si on prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et si $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$, cela ne suffit pas car on majore par un terme qui dépend de n. Il faut remarquer que $u_n \leqslant 2$ pour tout n pour appliquer le théorème.

Une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante, même à partir d'un certain rang, cf VF (mais elle ne peut pas être décroissante).

Quand on dit qu'une suite croissante est majorée par sa limite, il est sous-entendu : quand elle converge ! Dire « une suite croissante est majorée par sa limite donc est majorée donc converge » n'a aucun sens !

- Le théorème de la limite monotone est toujours valable pour des suites monotones à partir d'un certain rang (mais il faut alors adapter la définition de L).
- Enfin, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par A, alors elle converge vers une limite L et $L \leqslant A$ car l'inégalité large passe à la limite. Attention, L n'a aucune raison d'être égale à A : par exemple, la suite de terme général $-1/n$ est croissante, majorée par 2022 mais ne tend pas vers 2022. La même remarque vaut pour une suite décroissante minorée.

V.4 Suites adjacentes

Définition. Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

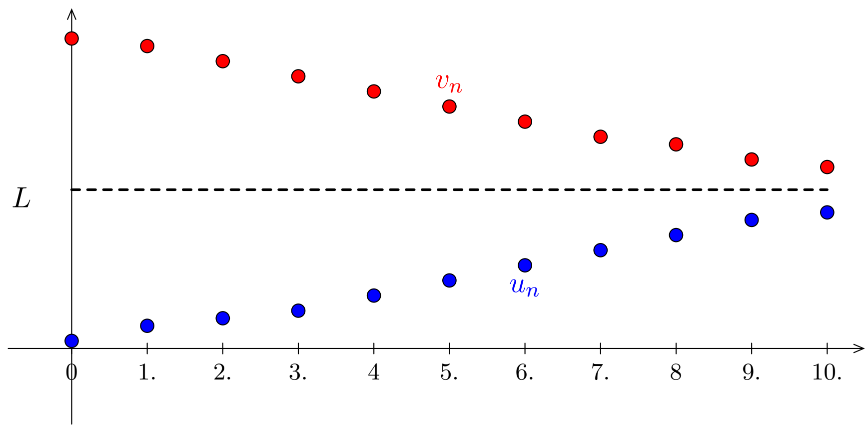
Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, alors elles convergent et ont la même limite.

Démonstration. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante raisonnement analogue dans l'autre cas). On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $d_n = v_n - u_n$. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante : par somme, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or, elle converge vers 0 donc est à valeurs positives Soit $n \in \mathbb{N}$. $d_n = v_n - u_n \geqslant 0$ donc $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ car une suite décroissante est majorée par son premier terme. Dès lors, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée (par v_0) donc converge vers une limite L. Enfin,

Une suite décroissante est minorée par sa limite.

$$v_n = (v_n - u_n) + u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + L = L$$

□



Remarque : De plus (dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_p$$

En particulier, tous les termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont inférieurs à tous les termes de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, il y a égalité si et seulement si les suites sont stationnaires. En particulier, si les suites sont strictement monotones, les inégalités sont strictes.

Exemple : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n \cdot n!}$. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. En effet :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{-1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+1)!} < 0.$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Les suites adjacentes sont notamment utilisées dans les algorithmes de dichotomie. Nous en verrons plusieurs exemples dans le chapitre 13.

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Nous en déduisons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers un même réel (il s'agit de $e = \exp(1)$, ce que l'on a montré dans l'exercice 28 du chapitre 10). On peut montrer alors que e est un nombre irrationnel : raisonnons par l'absurde et supposons que $e \in \mathbb{Q}$: il existe alors $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \dfrac{p}{q}$. On a alors :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad u_n < \frac{p}{q} < u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

C'est en particulier vrai pour $n = q$, si bien que

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q \times q!}$$

Or, si $k \in [\![0\,; q]\!]$, $q! = 1 \times \cdots \times k \times (k+1) \times \cdots q = k! \times (k+1) \cdots \times q$, si bien que $k!$ divise $q!$. Par conséquent, $q!$ est un multiple commun à $0!, 1!, \dots, k!$: on peut mettre toutes les fractions de la somme ci-dessus sur le dénominateur $q!$. Ainsi, il existe $D \in \mathbb{Z}$ tel que $u_q = D/q!$, si bien que

$$0 < \frac{p}{q} - \frac{D}{q!} < \frac{1}{q \times q!}.$$

En multipliant par $q! \in \mathbb{N}$, on obtient finalement : $0 < p \times (q-1)! - D < 1/q \leqslant 1$. En d'autres termes, $p \times (q-1)! - D$ est un entier compris strictement entre 0 et 1 : c'est absurde.

VI Traduction séquentielles de certaines propriétés

Certaines propriétés vues dans le paragraphe I s'expriment naturellement et simplement à l'aide de suites.

VI.1 Borne inférieure, borne supérieure

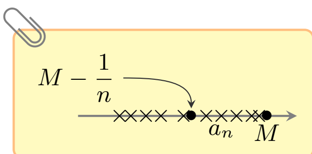
Proposition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\sup(A)$.
- Si A n'est pas majorée, il existe une suite d'éléments de A qui diverge vers $+\infty$.

Démonstration. Supposons A majorée. A admet donc une borne supérieure, notée M. Par caractérisation de la borne supérieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, M - \varepsilon < a \leqslant M$$

Soit $n \geqslant 1$. Le résultat est vrai pour $\varepsilon = 1/n > 0$: il existe donc $a_n \in A$ tel que :



$$M - \frac{1}{n} < a_n \leqslant M$$

Par définition, $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de A et elle converge vers M d'après le théorème d'encadrement. Supposons à présent A non majorée. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n \geqslant n \qquad \square$$

De même, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $+\infty$ d'après le théorème de minoration.

Remarque : Cette méthode est très importante et devra devenir un réflexe (on la reverra ci-dessous et dans le chapitre 13). L'idée est simple : si un résultat est vrai pour tout $\varepsilon > 0$ alors, pour tout n c'est vrai pour $1/n$. On obtient alors l'existence d'un réel x qui dépend de n et donc on explicite cette dépendance en le notant x_n : pour tout n, on se donne un élément x_n, et donc on crée une suite. De même, si un résultat est vrai pour tout $A \geqslant 0$ alors, pour tout n, c'est vrai pour n, et idem, on crée une suite. Alors, quand prendre $1/n$ et quand prendre n (il y a bien sûr d'autres possibilités, cela viendra avec l'expérience) ?Tout dépend du « but dans la vie » de la quantité quelconque qu'on va remplacer : si c'est ε, alors ε a plutôt tendant à être petit, donc on le remplacera plutôt par $1/n$, et c'est le contraire pour A, qui a plutôt tendance à être grand, donc on le remplacera plutôt par n.

Proposition (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure). Soit A une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} M \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite d'éléments de } A \text{ qui converge vers } M. \end{cases}$$

Démonstration. Le sens « $\Rightarrow$ » découle de la proposition précédente. Réciproquement, supposons que M soit un majorant de A et qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A de limite M. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|M - a_{n_0}| < \varepsilon$. Or, M est un majorant de la suite donc $M - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant M$: par caractérisation de la borne supérieure, on a le résultat.

Remarque : Tous les résultats de ce paragraphe s'adaptent facilement au cas d'une borne inférieure.

VI.2 Densité

Proposition (Caractérisation séquentielle de la densité). Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Alors D est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout réel est limite d'une suite d'éléments de D.

Démonstration. On suppose que D est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \geqslant 1$. Puisque D est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $x_n \in D$ tel que $x < x_n < x + \dfrac{1}{n}$. Alors $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de D et elle converge vers x d'après le théorème d'encadrement.

Réciproquement, supposons que tout réel soit limite d'une suite d'éléments de D. Soient $x < y$ deux réels. Il existe une suite d'éléments de D qui converge vers $\alpha = \dfrac{x+y}{2} \in \,]\,x\,;y\,[$. Par conséquent, $x_n \in \,]\,x\,;y\,[$ pour n assez grand (cf. paragraphe III.4) : D rencontre tout intervalle ouvert non vide donc D est dense dans $\mathbb{R}$.

Activité : Deux fonctions continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Soient f et g continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur une partie dense de $\mathbb{R}$ notée D. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors il existe une suite d'éléments de D, notée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers x. Par continuité de f, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Or, f et g coïncident sur D et g est continue donc $f(x_n) = g(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)$. Par unicité de la limite, $f(x) = g(x)$. x étant quelconque, $f = g$.

Exemples : Redémontrons la densité de $\mathbb{Q}, \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Pour tout $n \geqslant 1$, posons $x_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\frac{nx-1}{n} = 1 - \frac{x}{n} < x_n \leqslant \frac{nx}{n} = x$$

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels et converge vers x d'après le théorème d'encadrement : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

- Il suffit de poser, pour tout $n \geqslant 1$, $y_n = x_n + \dfrac{\sqrt{2}}{n}$: (y_n) est une suite d'irrationnels qui converge vers x.
- On montre de même que les suites de terme général $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $t_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$ convergent vers x (elles sont mêmes adjacentes, exo). Or, pour tout n, $10^n \times z_n$ et $10^n \times t_n$ sont des entiers donc z_n et t_n sont des décimaux : $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Les nombres z_n et t_n sont des approximations importantes du réel x :

D'ailleurs, vous les manipulez depuis des années !

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les décimaux $z_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $t_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}$ sont appelés respectivement valeur décimale approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès de x.

Remarque : Pourquoi ce nom ? Car il découle de la définition que, pour tout n, $0 \leqslant x - z_n \leqslant 10^{-n}$ (d'où : par défaut, puisque $z_n \leqslant x_n$) et $0 \leqslant y_n - x \leqslant 10^{-n}$ (d'où le : par excès). Intuitivement, z_n est le développement décimal de x tronqué à la n-ième décimale, et y_n est le développement décimal de x à n décimales, la n-ième étant arrondie à la décimale supérieure. On se contentera de cette approche intuitive : pour le faire rigoureusement, il faut définir le développement décimal (propre ou non) d'un réel : cf. chapitre 25 !

VII Suites extraites et valeurs d'adhérence

VII.1 Suites extraites

Lemme. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geqslant n$. En particulier, $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

En particulier, une suite d'entiers strictement croissante tend vers $+\infty$.

Démonstration. exo, par récurrence.

Remarque : On peut généraliser ce résultat au cas d'une fonction φ strictement croissante de $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant n_0\}$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{N}$: pour tout $n \geqslant n_0, \varphi(n) \geqslant n - n_0$, et on a encore $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Définition. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On dit que φ est une extractrice.

Exemples : Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les termes venant après u_{2n} et u_{2n+1} dans les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement u_{2n+2} et u_{2n+3} ! Ainsi, pour montrer que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, il faut montrer que $u_{2n+2} - u_{2n} \geqslant 0$ pour tout n, et idem pour $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : On peut généraliser la notion de suite extraite aux suites du type $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où φ va de $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant n_0\}$, pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{N}$ (bien sûr, toujours strictement croissante). Par exemple, $(u_{2n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : En d'autres termes, une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite formée d'une infinité de termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (car $\varphi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$) tous distincts (car φ est strictement croissante donc injective), mais pas tous : une suite dont on a pioché, dont on a « extrait » les termes à partir de ceux de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice, on note $n_0 = \varphi(0), n_1 = \varphi(1)$ et, plus généralement, $n_p = \varphi(p)$ pour tout $p \geqslant 1$. Par conséquent, l'indice étant muet, $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(p)})_{p\in\mathbb{N}} = (u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante. D'où la définition équivalente de suite extraite suivante :

Définition. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, où $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels strictement croissante.

Remarque : Cette définition est plus pratique quand on ne connaît pas d'expression explicite pour les termes qu'on extrait. Par exemple, si on veut extraire la suite correspondant aux indices premiers (possible car il y en a une infinité), il suffit de parler de la suite $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ où $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite strictement croissante des nombres premiers. Cette définition a aussi l'avantage d'être plus pratique pour extraire plusieurs fois une suite : là où, avec la première définition, il faut parler d'une suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, avec φ et ψ deux extractrices (voir ci-dessous), la seconde définition permet de parler d'une suite $(u_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$, extraite de $(u_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$, elle-même extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Car oui, on peut extraire plusieurs fois, et cela donne une nouvelle suite extraite. Plus précisément :

Proposition. Une suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle-même une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Soient $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il existe donc deux extractrices $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ si bien que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Or, $\varphi \circ \psi$ est strictement croissante car composée de fonctions strictement croissantes, ce qui permet de conclure.

Exemple : La suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite formée des termes d'indice pair de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{4n})_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite extraite de cette suite formée des termes d'indice congru à 0 modulo 4, elle-même extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

VII.2 Exemples de suites extraites construites terme à terme

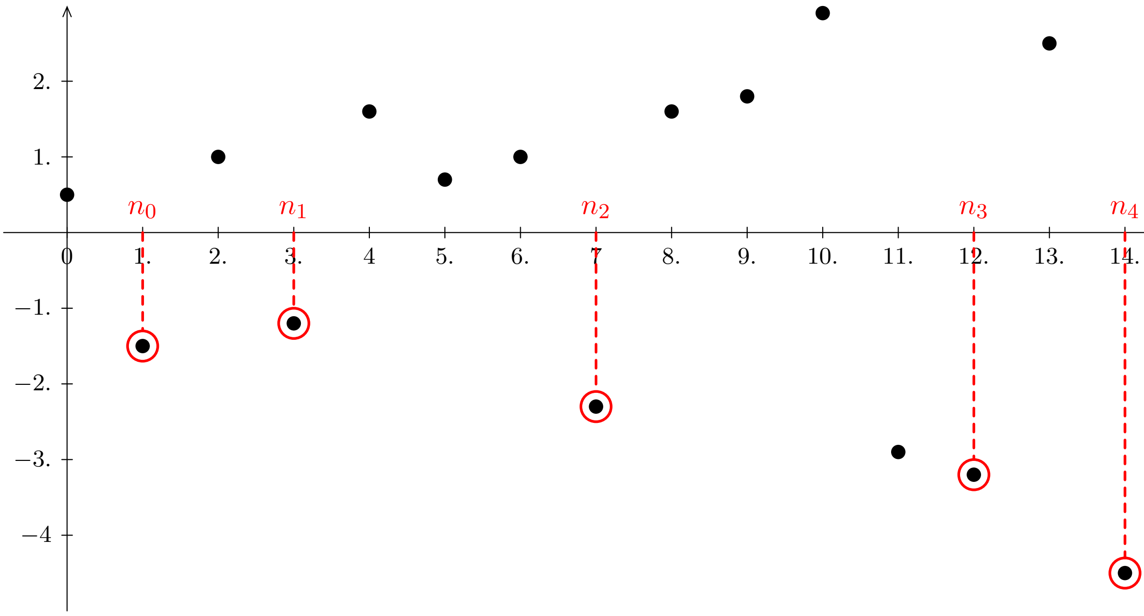
Parfois, on souhaite extraire une suite en prenant uniquement les termes vérifiant une certaine propriété. On ne connaît pas l'expression exacte de ces termes et donc il est difficile d'expliciter une extractrice φ ou une suite strictement croissante $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ correspondante pour définir cette sous-suite. Il faut alors construire la suite extraite terme à terme par récurrence : voyons quelques exemples ci-dessous. Méthode à connaître !

Exemple : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite non minorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite qui tend vers $-\infty$.

- Soit $n_0 = \min\{n \,|\, x_n \leqslant 0\}$ i.e. n_0 est le premier indice pour lequel $x_n \leqslant 0$. Montrons que ce minimum existe. L'ensemble $\{n \,|\, x_n \leqslant 0\}$ est une partie non vide (car la suite n'est pas minorée) de $\mathbb{N}$ donc admet bien un plus petit élément.
- Prenons $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, x_n \leqslant -1\}$. De même, n_1 existe : en effet, s'il n'existe pas d'entier $n_1 > n_0$ tel que $x_n \leqslant -1$, alors tous les termes suivant x_{n_0} sont minorés par -1, et avant il n'y a qu'un nombre fini de termes donc la suite est minorée, ce qui est exclu.
- De même, on pose $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, x_n \leqslant -2\}$.
- Si $k \geqslant 2$, supposons $n_0, \dots, n_{k-1}$ construits. On pose alors $n_k = \min\{n > n_k \,|\, x_n \leqslant -k\}$.

Il est indispensable de prendre $n_1 > n_0$: en effet, si on définit n_1 comme le premier indice pour lequel $x_n \leqslant -1$, alors n_1 peut être égal à n_0, par exemple si $x_{n_0} = -2$!

On a donc créé une suite strictement croissante (par définition) d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $x_{n_k} \leqslant -k$: on a donc construit une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$ par théorème de majoration.



La technicité de la construction de la suite $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne doit pas cacher l'idée très simple de cette preuve : la suite n'étant pas minorée, il est possible de choisir une suite de termes inférieurs à $-k$ pour tout k ce qui fait une suite qui tend vers $-\infty$.

Exemple : Généralisons et prouvons qu'on peut construire une suite qui **décroît** vers $-\infty$.

Sur le dessin ci-dessus, on « zapperait » n_1 et le terme suivant (le nouveau n_1) serait n_2. Le dessin est à votre charge !

- Soit $n_0 = \min\{n \,|\, x_n \leqslant 0\}$.
- Prenons $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, x_n \leqslant -1 \text{ et } x_n \leqslant x_{n_0}\}$. On prend le premier terme inférieur à la fois à -1 et à x_{n_0} (pour avoir une suite décroissante).
- De même, on pose $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, x_n \leqslant -2 \text{ et } x_n \leqslant x_{n_1}\}$.
- Si $k \geqslant 2$, supposons $n_0, \dots, n_{k-1}$ construits. On pose alors $n_k = \min\{n > n_{k-1} \,|\, x_n \leqslant -k \text{ et } x_n \leqslant x_{k-1}\}$.

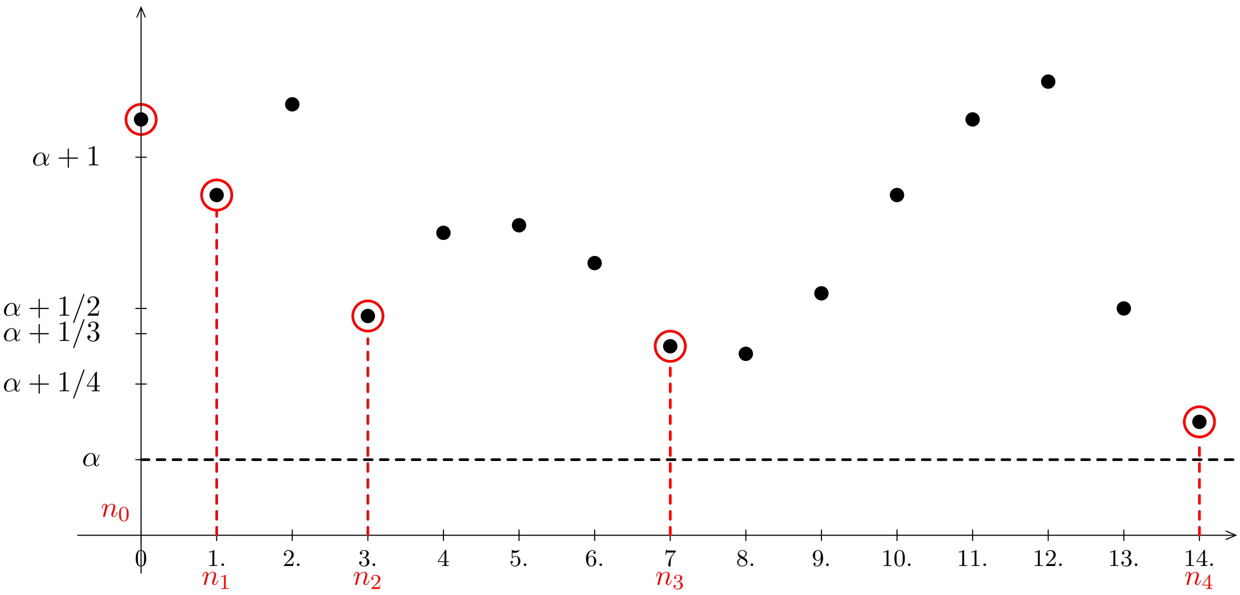
On a donc créé une suite strictement croissante (par définition) d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $x_{n_k} \leqslant -k$: on a donc construit une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $-\infty$ par théorème de majoration, et décroissante car, par construction, $x_k \leqslant x_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$.

Exemple : Supposons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit minorée et n'atteint pas sa borne inférieure, notée α. Montrons qu'on peut extraire une suite qui décroît vers $\inf u_n$.

Si la borne inf est atteinte, ce n'est pas forcément possible, par exemple si la suite est strictement croissante, sa borne inf est son minimum c'est-à-dire son premier terme, et il n'existe pas de sous-suite qui converge vers son premier terme.

- Soit $n_0 = 0$.
- Prenons $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, x_n \leqslant \min(\alpha + 1, x_{n_0})\}$. On prend le premier terme inférieur à la fois à $\alpha + 1$ et à x_{n_0} (pour avoir une suite décroissante). Un tel terme existe forcément : si l'ensemble ci-dessus est vide, alors $x_n \geqslant \min(\alpha + 1, x_0) > \alpha$ à partir du rang n_0 et avant il n'y a qu'un nombre fini de termes donc (x_n) est minorée par un réel $m > \alpha$ (car α n'est pas atteinte) ce qui contredit la caractérisation de la borne inférieure.
- De même, on pose $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, x_n \leqslant \min(\alpha + 1/2, x_{n_1})\}$.
- Si $k \geqslant 2$, supposons $n_0, \dots, n_{k-1}$ construits. On pose alors $n_k = \min\{n > n_{k-1} \,|\, x_n \leqslant \min(\alpha + 1/k, x_{k-1})\}$.

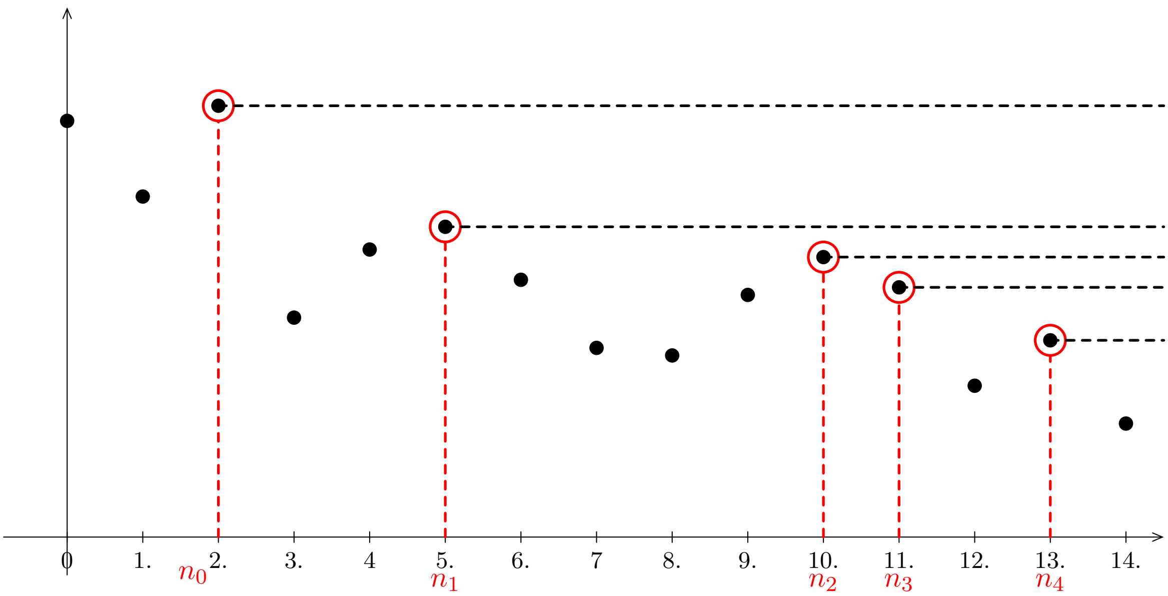
On a donc créé une suite strictement croissante (par définition) d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $\alpha \leqslant x_{n_k} \leqslant \alpha + 1/k$: on a donc construit une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers α par encadrement, et décroissante car, par construction, $x_k \leqslant x_{k-1}$ pour tout $k \geqslant 1$.



Exemple : Montrons que de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que x_n est un pic si, pour tout $p \geqslant n$, $x_n \geqslant x_p$. Supposons dans un premier temps que l'ensemble des pics soit infini. Alors les pics forment une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout k, $n_k = \min\{n > n_{k-1} \,|\, x_n \text{ est un pic}\}$ (cet ensemble est toujours non vide car il y a un nombre infini de pics). Cela forme donc une suite décroissante car, pour tout k, par construction, $n_k > n_{k-1}$ et donc, par définition d'un pic, $x_{n_k} \leqslant x_{n_{k-1}}$.

En d'autres termes, un point est un pic lorsqu'il est au-dessus de tous ses successeurs, voir le dessin ci-contre.



Supposons à présent que l'ensemble des pics soit fini. Dès lors, à partir d'un certain rang N, aucun terme de la suite n'est un pic, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant N$, il existe $p \geqslant n$ tel que $x_n < x_p$. On peut alors construire une suite extraite croissante de la façon suivante :

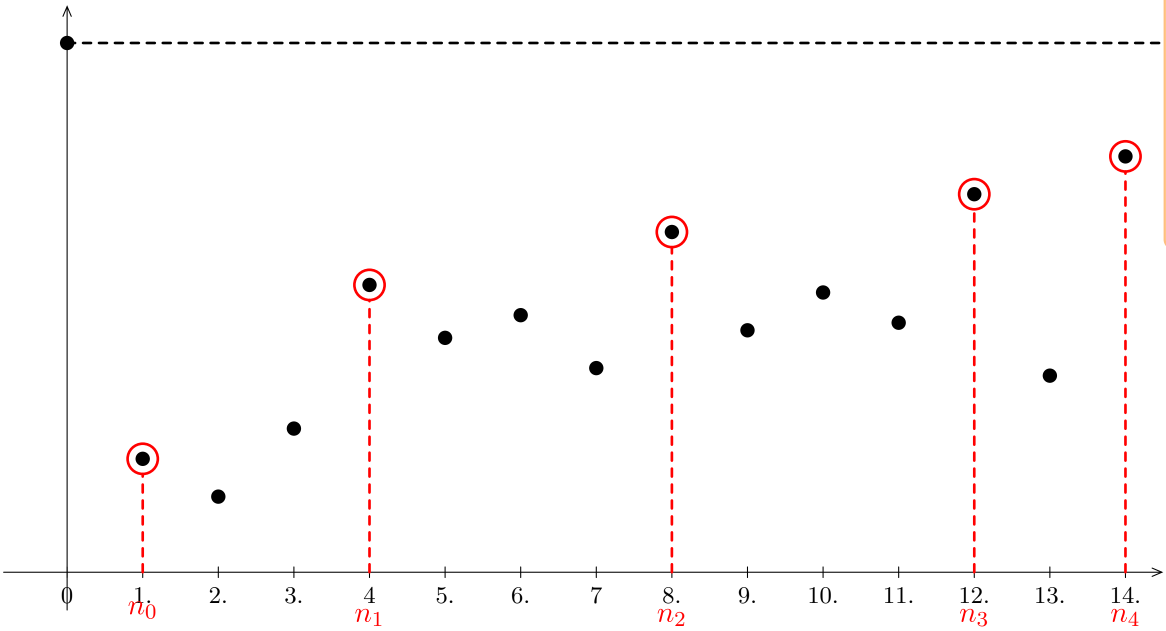
- Soit $n_0 = N$.
- Prenons $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, x_n > x_{n_0}\}$ ce qui est possible car x_{n_0} n'est pas un pic.
- De même, on pose $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, x_n > x_{n_1}\}$ et c'est possible car n_1 n'est pas un pic.

Un point n'est pas un pic lorsqu'il admet un successeur qui lui est strictement supérieur, voir le dessin ci-dessous.

- Si $k \geqslant 3$, supposons $n_0, \ldots, n_{k-1}$ construits. On pose alors $n_k = \min\{n > n_{k-1} \,|\, x_n > x_{k-1})\}$.

On a donc créé une suite strictement croissante (par définition) d'entiers $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $x_k > x_{k-1}$: on a donc construit une suite extraite strictement croissante.

Il y a un seul pic en 0 sur le dessin ci-contre. Tous les termes suivants admettent donc un successeur qui leur est strictement supérieur, et on construit comme cela une suite extraite strictement croissante.



VII.3 Limite d'une suite extraite

Théorème. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L. En d'autres termes, une suite extraite d'une suite qui a une limite (finie ou infinie) tend vers la même limite.

On ne dit pas « qui converge » car on rappelle qu'une suite converge lorsqu'elle a une limite FINIE.

Démonstration. Soit $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extractrice (donc strictement croissante). Supposons que $L \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$. Or, pour tout $n \geqslant n_0, \varphi(n) \geqslant n \geqslant n_0$ donc $|u_{\varphi(n)} - L| \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire que $u_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. La démonstration est analogue si $L = \pm\infty$.

Corollaire. Si une suite admet une suite extraite qui diverge ou deux suites extraites qui divergent vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Ce corollaire est très important car il fournit un moyen simple de prouver qu'une suite diverge.

Exemples :

- La suite de terme général $(-1)^n$ diverge car les deux suites extraites $\left((-1)^{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left((-1)^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des limites distinctes (1 et -1).
- La suite de terme général $(-2)^n$ n'a pas de limite car la suite des termes pairs tend vers $+\infty$ et la suite des termes impairs tend vers $-\infty$.
- De même, la suite de terme général $(-1)^n \times n$ n'a pas de limite.

Remarque : On peut se poser la question inverse : si certaines suites extraites convergent vers la même limite, peut-on en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers cette limite ? Cela dépend évidemment des suites choisies : on verra dans le VF que la convergence de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ et plus généralement de toute suite $(u_{p\times n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $p \geqslant 2$ vers la même limite n'entraîne pas la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers cette limite. Le cas le plus important est le suivant :

Proposition. Soit $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \qquad \text{et} \qquad u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$$

Démonstration. Le sens direct découle du théorème ci-dessus. Réciproquement, supposons que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers L. Supposons que $L = +\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $A \geqslant 0$. Il existe alors $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0, u_{2n} \geqslant A$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $u_{2n+1} \geqslant A$. Soit $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ et soit $n \geqslant n_2$.

- Si n est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$. Or, $n = 2k \geqslant n_2 \geqslant 2n_0$ donc $k \geqslant n_0$, si bien que $u_n = u_{2k} \geqslant A$.
- De même, si n est impair, $u_n \geqslant A$.

Dans tous les cas, $u_n \geqslant A$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend bien vers A.

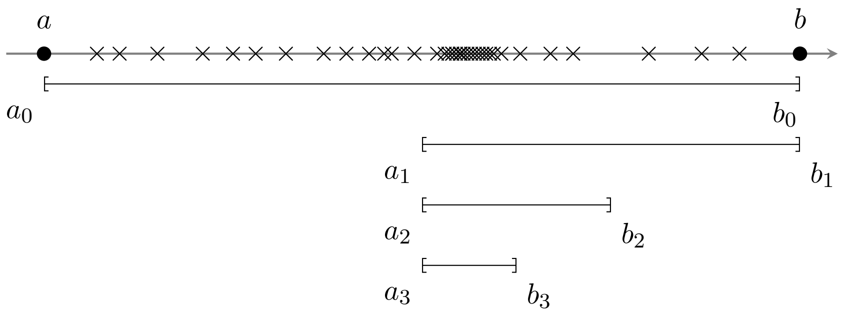
En d'autres termes, les termes pairs sont tous supérieurs ou égaux à A à partir de $2n_0$, et tous les termes impairs sont supérieurs ou égaux à A à partir de $2n_1+1$: la valeur de n_2 ne tombe pas du ciel !

Remarque : On généralise facilement ce résultat : il suffit d'avoir un nombre FINI de sous-suites dont les indices forment un recouvrement de $\mathbb{N}$. Par exemple, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers L si et seulement si les trois suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent toutes les trois vers L.

VII.4 Théorème de Bolzano-Weierstraß

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstraß). De toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Le théorème de Bolzano-Weierstraß dit, en gros, que si on a une suite bornée, alors elle s'accumule forcément quelque-part, i.e. autour d'un point (au moins).



Démonstration. Le dernier exemple du paragraphe VII.2 permet de conclure directement : en effet, de toute suite on peut extraire une sous-suite monotone, et donc convergente car bornée. Cependant, nous allons le prouver par une méthode que nous utiliserons plusieurs fois dans la suite : par dichotomie.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Notons $a = \inf u_n$ et $b = \sup u_n$. La suite est donc à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$.

$\inf u_n$ et $\sup u_n$ sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $\{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ des termes de la suite, qui est une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$ donc elles existent bien.

- Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
- Si l'ensemble $\left[\, a_0\,; \dfrac{a_0+b_0}{2}\,\right]$ contient une infinité de termes de la suite, on pose $a_1 = a$ et $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$, et sinon on pose $a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
- Soit $k \geqslant 1$. Supposons a_k et b_k construits. Si l'ensemble $\left[\, a_k\,; \dfrac{a_k+b_k}{2}\,\right]$ contient une infinité de termes, on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$, et sinon on pose $a_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$. □

On définit de cette façon deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

- $a_k \leqslant a_{k+1}$ et $b_{k+1} \leqslant b_k$.
- $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$.
- $[\, a_k \,;b_k\,]$ contient une infinité de termes de la suite.

Ce résultat est évidemment vrai au rang 0 (car $a_0 = a$ et $b_0 = b$). Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il soit vrai au rang k et prouvons qu'il est vrai au rang $k+1$. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $\left[\, a_k \,; \dfrac{a_k+b_k}{2}\,\right]$ ne contienne pas une infinité de termes. On a alors $a_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2}$ et $b_{k+1} = b_k$.

- Tout d'abord, $b_{k+1} = b_k$ donc $b_{k+1} \leqslant b_k$.
- Par hypothèse de récurrence, $a_k \leqslant b_k$ donc $a_{k+1} = \dfrac{a_k+b_k}{2} \geqslant \dfrac{a_k+a_k}{2} = a_k$.
- De plus, $b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \dfrac{a_k+b_k}{2} = \dfrac{b_k-a_k}{2}$. Par hypothèse de récurrence, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ donc $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^{k+1}}$.
- Par hypothèse, $\left[\, a_k \,; \dfrac{a_k+b_k}{2}\,\right]$ contient un nombre fini de termes de la suite. Si $[\, a_{k+1} \,; b_{k+1}\,] = \left[\, \dfrac{a_k+b_k}{2} \,; b_k\,\right]$ contient un nombre fini de termes, alors leur union $[\, a_k \,; b_k\,]$ contient un nombre fini de termes, ce qui est absurde : l'intervalle $[\, a_{k+1} \,; b_{k+1}\,]$ contient un nombre infini de termes, ce qui clôt la récurrence.

En clair, on coupe à chaque fois l'intervalle en deux et on garde une des deux moitiés qui contient une infinité de termes. Attention, quand on parle d'une infinité de termes, cela ne veut pas dire distincts, cela signifie qu'il existe une infinité de n tels que u_n soit dans cet ensemble.

On a utilisé le résultat intuitif suivant, que nous verrons dans le chapitre 17 : si A et B sont finis alors $A \cup B$ est fini.

En particulier, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes : la première est croissante, la seconde décroissante et la différence tend vers 0. Par conséquent, elle convergent vers une même limite α.

Puisque chaque intervalle $[\, a_k \,; b_k\,]$ contient une infinité de termes de la suite, cela permet de définir une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $x_{n_k} \in [\, a_k \,; b_k\,]$. Plus précisément :

- Soit $n_0 = 0$.
- Prenons $n_1 = \min\{n > n_0 \,|\, x_n \in [\, a_1 \,; b_1\,]\}$ ce qui est possible car $[\, a_1 \,; b_1\,]$ contient une infinité de termes.
- De même, on pose $n_2 = \min\{n > n_1 \,|\, x_n \in [\, a_2 \,; b_2\,]\}$ et c'est possible car $[\, a_2 \,; b_2\,]$ contient une infinité de termes.
- Si $k \geqslant 3$, supposons $n_0, \dots, n_{k-1}$ construits. On pose alors $n_k = \min\{n > n_{k-1} \,|\, x_n \in [\, a_k \,; b_k\,]\}$.

Alors, par construction $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'entiers strictement croissante donc $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et, pour tout k, on a bien $x_{n_k} \in [\, a_k \,; b_k\,]$ i.e. $a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k$. Finalement, d'après le théorème d'encadrement, $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet bien une sous-suite convergente.

Remarque : Il est impératif de bien comprendre le schéma de cette preuve, même si on peut dans un premier temps ne pas maîtriser les détails.

VII.5 Valeurs d'adhérence (deuxième année)

Définition (deuxième année). Soit $L \in \mathbb{R}$. On dit que L est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers L.

En d'autres termes, une valeur d'adhérence est la limite d'une suite extraite.

Exemple : -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite de terme général $(-1)^n$.

Remarque : Il découle du théorème de Bolzano-Weierstraß que toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. C'est faux si la suite n'est pas bornée : une suite qui diverge vers $+\infty$ a toutes ses suites extraites qui divergent vers $+\infty$ donc n'admet aucune valeur d'adhérence. En effet, même si on pourrait définir une valeur d'adhérence comme un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ qui est limite d'une suite extraite, mais on prend plutôt la convention qu'une valeur d'adhérence est un réel (sauf mention contraire).

Proposition (deuxième année). Soit $L \in \mathbb{R}$. Alors L est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si tout voisinage de L contient une infinité de termes de la suite.

C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]\,L-\varepsilon\,;L+\varepsilon\,[$ contient une infinité de termes de la suite.

Démonstration. Si L est une valeur d'adhérence, alors il existe une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de limite L. Par définition d'une limite, tout voisinage de L contient tous les termes de la suite extraite à partir d'un certain rang, et en particulier contient une infinité de termes de la suite originelle.

Réciproque (esquisse) : pour tout $k \geqslant 1$, l'intervalle $\left]\,L-\dfrac{1}{k}\,;L+\dfrac{1}{k}\,\right[$ contient une infinité de termes, et on construit comme précédemment une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout k, $u_{n_k} \in \left]\,L-\dfrac{1}{k}\,;L+\dfrac{1}{k}\,\right[$: celle-ci converge donc vers L, qui est donc une valeur d'adhérence.

VIII Introduction aux systèmes dynamiques

Soient D une union d'intervalles d'intérieur non vide et : $D \to \mathbb{R}$ **continue strictement croissante**. On se donne dans cette partie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 \in D \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

Le but de cette partie est d'apprendre à étudier de telles suites. Dans ce chapitre, on se restreindra aux fonctions croissantes : nous parlerons brièvement des autres cas dans le paragraphe VIII.6.

Remarquons tout d'abord que la suite n'a aucune raison d'être bien définie car il n'est pas évident que $u_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, la suite définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(u_n)$$

n'a que trois termes car $u_1 = \ln(2) \in \,]\,0\,;1\,[$, $u_2 = \ln(\ln(2)) < 0$ et donc u_3 n'est pas défini. Pour éviter cela et afin que la suite soit bien définie (ce qui est le minimum syndical), on impose une condition de stabilité.

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$. On dit que D est stable par f si $f(D) \subset D$, c'est-à-dire si :

$$\forall x \in D, f(x) \in D$$

Et pas de formulation qui n'ont aucun sens du type « f est stable sur D » ou autre chose du genre....

Dans la suite de ce paragraphe, on supposera donc que D est stable par f. Par conséquent, par une récurrence immédiate (nous en ferons suffisamment dans la suite), $u_n \in D$ pour tout n et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

VIII.1 Premiers exemples

Commençons par deux exemples simples mais très classiques dans lesquels les différentes étapes vont émerger naturellement.

Exemple : Étudier la suite définie par :

$$u_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \sin(u_n) - u_n$: on s'intéresse donc au signe de la fonction $g : x \mapsto \sin(x) - x$. Sur quel ensemble ? Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, nous verrons pourquoi dans la suite.

g est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \cos(x) - 1 \leqslant 0$ avec égalité uniquement en 0. On en déduit le tableau de variations de g.

Pour montrer que $\sin(x) \leqslant x$ sur cet intervalle, on aurait pu utiliser la concavité du sinus, mais celui-ci ne donne pas les cas d'égalité, utiles dans la suite. Tant pis : la convexité ne nous sera d'aucune utilité ici !

x	0		$\pi/2$
$g'(x)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	$1 - \frac{\pi}{2}$

Il en découle que g est négative sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Or, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$: pour pouvoir affirmer que cette quantité est négative, encore faut-il prouver que $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$! C'est là que la stabilité va être importante : soit $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Alors $\sin(x) \in [\,0\,;1\,] \subset \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ est stable par la fonction sin. Montrons par récurrence que $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ pour tout n. C'est vrai au rang 0 par hypothèse, et on suppose le résultat vrai au rang n, alors $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ par hypothèse de récurrence donc $u_{n+1} = \sin(u_n) \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ car cet intervalle est stable par la fonction sin, ce qui clôt la récurrence.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ car g est négative sur cet intervalle, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0, alors elle converge vers une limite L. Or, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ et l'inégalité large passe à la limite donc $L \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Ce n'est pas parce qu'une suite décroissante est minorée par 0 qu'elle converge vers 0 ! Tout ce qu'on peut dire est que $L \geqslant 0$.

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ (les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes vers L mais pour une suite aussi simple on peut l'affirmer directement). De plus, $u_{n+1} = \sin(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(L)$ car la fonction sin est continue. Par unicité de la limite, $L = \sin(L)$ donc $g(L) = 0$. D'après le tableau de variations ci-dessus, la seule équation de cette équation dans cet intervalle est $L = 0$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On peut remarquer que cela ne dépend pas du premier terme (mais cela ne sera pas toujours le cas).

Exemple : Étudier la limite de la suite définie par :

$$u_0 \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

Essayons d'effectuer les mêmes étapes que dans l'exemple précédent. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \ln(1 + x)$.

- Soit $g : x \mapsto \ln(1 + x) - x$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Alors g est dérivable et, pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) = \dfrac{-x}{1 + x}$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$

Il en découle que g est négative sur $\mathbb{R}_+$.

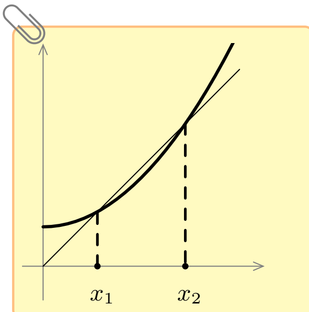
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $1 + x \geqslant 1$ donc $f(x) = \ln(1 + x) \geqslant 0$ i.e. $f(x) \in \mathbb{R}_+$: $\mathbb{R}_+$ est stable par f.
- Il en découle, par une récurrence immédiate, que $u_n \in \mathbb{R}_+$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in \mathbb{R}_+$ et car g est négative sur cet intervalle. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Puisqu'elle est minorée par 0 (la suite est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$), elle est minorée donc converge vers une limite L. Or, $u_n \geqslant 0$ pour tout n et l'inégalité large passe à la limite donc $L \geqslant 0$.
- $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et f est continue donc $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$. Par unicité de la limite, $f(L) = L$ i.e. $g(L) = 0$. Or, la seule solution de cette équation sur $\mathbb{R}_+$ est $L = 0$, si bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

VIII.2 Rappel sur les points fixes, limites ÉVENTUELLES

Définition. Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in D$; a est un point fixe de f si $f(a) = a$.

La recherche de point fixe est centrale dans l'étude des suites récurrentes (entre autres).

Interprétation géométrique : a est un point fixe de f si et seulement si le graphe de f coupe la droite d'équation $y = x$ (appelée aussi première bissectrice) au point d'abscisse a. Par exemple, sur le premier dessin dans la marge, f admet deux points fixes x_1 et x_2. Voir ci-dessous d'autres dessins.



Les exemples précédents laissent présager que la limite (quand elle existe !!!) est un point fixe. En effet :

Théorème. **Si** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément L et si f est **continue** en L alors $f(L) = L$. En d'autres termes, les limites **éventuelles** sont les points fixes de f.

Démonstration. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L alors $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et f est continue en L donc $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L)$ donc, par unicité de la limite, $L = f(L)$.

Remarques :

- Définissons comme ci-dessus la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array} \right.$$

  Soit $x \in D$. Alors x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) = x$ si et seulement si $g(x) = 0$. Ainsi, les points fixes de f sont exactement les zéros de g. La fonction g va donc jouer un rôle central dans toute cette partie ! En effet, son signe donne la monotonie de la suite, et ses zéros sont exactement les points fixes de f donc les limites éventuelles de la suite.
- Attention, le théorème ne dit PAS que si L est un point fixe alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$! Il dit que SI $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ALORS sa limite est un point fixe (évidemment si f est continue). En d'autres termes, les limites ÉVENTUELLES de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont

les points fixes de f ou, encore en d'autres termes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger vers autre chose qu'un point fixe (mais peut très bien ne pas converger du tout). Ce théorème est donc à utiliser avec prudence, uniquement lorsqu'on sait déjà que la suite converge (ou pour montrer par l'absurde qu'elle diverge, voir plus bas).

- Ce théorème permet donc de repérer les limites éventuelles au premier coup d'oeil, de choisir entre elles selon la monotonie de la suite et l'intervalle dans lequel la suite prend ses valeurs. Par exemple, si les deux points fixes sont 2 et 4 et si la suite est à valeurs dans $]-\infty\,;2\,[$, alors elle ne peut pas tendre vers 4 (mais elle peut tendre vers 2 même si l'intervalle est ouvert). Si elle est croissante, alors elle converge et converge donc vers 2, et si elle est décroissante, elle ne peut pas converger vers 2 donc diverge vers $-\infty$. C'est ce genre de raisonnements que nous ferons constamment dans cette partie.
- Un cas facile (qui se présente rarement mais qui est tout de même instructif) dans lequel ce théorème permet de conclure rapidement : si la fonction f n'admet aucun point fixe, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger !

En effet, l'inégalité large passant à la limite, si la suite converge vers une limite L, alors $L \leqslant 2$.

Exemple : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$$

Posons $f : x \mapsto x + e^x$ et $g : x \mapsto f(x) - x$. Ici, c'est simple : g est strictement positive sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$: la suite est strictement croissante. Si elle converge, alors elle converge vers un point fixe (car f est continue), ce qui est impossible car f n'a pas de point fixe. Dès lors, elle diverge, et puisqu'elle est croissante, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exemple : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(1+u_n)$$

Soit $f : x \mapsto x + \ln(1+x)$ et soit $g : x \mapsto f(x) - x = \ln(1+x)$, définies sur $\mathbb{R}_+$. Ci-dessous le tableau de signes de g.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	0 $\qquad$ $+$

Tout d'abord, $u_1 = u_0 + \ln(1+u_0)$. Or, $u_0 > 0$ donc $\ln(1+u_0) > 0$ si bien que $u_1 > 0$. Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout n. Par conséquent, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$: la suite est strictement croissante. Si elle converge vers une limite L, alors L est un point fixe de f car f est continue. Or, d'après ce qui précède, 0 est le seul point fixe de f donc $L = 0$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $L \geqslant u_0 > 0$ ce qui est absurde. Finalement, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et est croissante donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

VIII.3 Un exemple un peu moins simple

Exemple : Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$$

On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{2}^x = e^{x\ln\left(\sqrt{2}\right)}$ et $g : x \mapsto f(x) - x$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarquons que f est strictement croissante car dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln\left(\sqrt{2}\right) e^{x\ln\left(\sqrt{2}\right)} > 0$.

g est dérivable. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $g'(x) = \dfrac{\ln(2)}{2} \times e^{\frac{x\ln(2)}{2}} - 1$. Cherchons le signe de $g'(x)$.

$$\begin{aligned}
g'(x) \geqslant 0 \quad &\iff \quad \frac{\ln(2)}{2} \times e^{\frac{x\ln(2)}{2}} \geqslant 1 \\
&\iff \quad e^{\frac{x\ln(2)}{2}} \geqslant \frac{2}{\ln(2)} \\
&\iff \quad \frac{x\ln(2)}{2} \geqslant \ln(2) - \ln(\ln(2)) \\
&\iff \quad x \geqslant \frac{2(\ln(2) - \ln(\ln(2)))}{\ln(2)}
\end{aligned}$$

Fonction ln strictement croissante.

Posons $\alpha = \dfrac{2(\ln(2) - \ln(\ln(2)))}{\ln(2)} = 2 - \dfrac{2\ln(\ln(2))}{4}$. On en déduit le tableau de variations de g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Par conséquent, g s'annule au plus deux fois. Or, $g(2) = g(4) = 0$ (et donc les points fixes de f sont 2 et 4) donc $2 \leqslant \alpha \leqslant 4$ On en déduit le tableau de signes de g.

g ne peut pas s'annuler plus d'une fois sur chaque intervalle $]-\infty\,;\alpha\,]$ et $[\,\alpha\,;+\infty\,[$. On peut aussi montrer ces inégalités par le calcul : exo !

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

Contrairement aux exemples précédents, le signe de g dépend de l'intervalle considéré. Nous allons donc séparer les cas.

- On suppose que $u_0 < 2$.
  - ⋆ Montrons que $]-\infty\,;2\,[$ est stable par f. Soit $x < 2$. La fonction f étant strictement croissante, $f(x) < f(2) = 2$ car 2 est un point fixe de f. En d'autres termes, $f(x) \in\,]-\infty\,;2\,[$: cet intervalle est stable par f.

    C'est surtout ici que la croissance de f est importante : on ne s'en était pas beaucoup servi dans les exemples précédents.
  - ⋆ Montrons que $u_n \in\,]-\infty\,;2\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
    - — Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « $u_n \in\,]-\infty\,;2\,[$ ».
    - — H_0 est vraie par hypothèse.
    - — Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence, $u_n \in\,]-\infty\,;2\,[$ qui est stable par f donc $u_{n+1} = f(u_n) \in\,]-\infty\,;2\,[$: H_{n+1} est vraie.
    - — D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ car $u_n \in\,]-\infty\,;2\,[$ et car g est positive sur cet intervalle. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - ⋆ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, alors L est un point fixe de f (car f est continue) donc $L = 2$ ou $L = 4$. Or, pour tout n, $u_n < 2$ et l'inégalité large passe à la limite donc $L \leqslant 2$ donc $L \neq 4$ si bien que $L = 2$: $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
- On suppose à présent que $u_0 \in\,]\,2\,;4\,[$.

- ⋆ Montrons que $]2\,;4[$ est stable par f. Soit $x \in]2\,;4[$. La fonction f étant strictement croissante, $f(2) = 2 < f(x) < f(4) = 4$ car 2 et 4 sont des points fixes de f. En d'autres termes, $f(x) \in]2\,;4[$: cet intervalle est stable par f.
  - ⋆ Il en découle que $u_n \in]2\,;4[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par une récurrence immédiate.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \leqslant 0$ car $u_n \in]2\,;4[$ et car g est négative sur cet intervalle. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  - ⋆ Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L, alors L est un point fixe de f (car f est continue) donc $L = 2$ ou $L = 4$. Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc $L \leqslant u_0 < 4$ si bien que $L = 2$.

On remarque encore une fois que la croissance de f est importante : cf. paragraphe suivant.

- On suppose à présent que $u_0 > 4$.
  - ⋆ Comme précédemment, en utilisant la stricte croissance de f et le fait que 4 est un point fixe, $]4\,;+\infty[$ est stable par f.
  - ⋆ Par une récurrence immédiate, $u_n \in]4\,;+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ car $u_n > 4$ et car g est strictement positive sur cet intervalle. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
  - ⋆ f étant continue, si la suite converge vers une limite L, alors L est un point fixe de f donc $L = 2$ ou 4 mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $L \geqslant u_0 > 4$ ce qui est absurde. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et puisqu'elle est croissante, alors elle diverge vers $+\infty$.
- Enfin, si $u_0 = 2$ alors, par une récurrence immédiate, $u_n = 2$ pour tout n puisque 2 est un point fixe de f. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 2 donc converge vers 2.
- De même, si $u_0 = 4$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 4 donc converge vers 4.

Remarque : Dans le cas où $u_0 > 4$, dire « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $]4\,;+\infty[$ qui n'est pas majoré donc n'est pas majorée donc ne converge pas » n'a aucun sens : ce n'est pas parce qu'elle est à valeurs dans un ensemble non majoré qu'elle n'est pas majnorée. Par exemple, la suite constante égale à 5 est à valeurs dans $]4\,;+\infty[$. De plus, dans le cas où $u_0 < 2$, elle est à valeurs dans $]-\infty\,;2[$ mais est minorée et converge vers 2 ! Dans le cas où $u_0 > 4$, elle diverge car elle est croissante et car tous les points fixes, qui sont les limites éventuelles, lui sont strictement inférieurs. Il faut donc avoir bien compris que les limites éventuelles sont les points fixes : s'il est impossible que la suite converge vers un point fixe, c'est qu'elle diverge (mais, pour le prouver, il faut avoir deviné le résultat, au moins au brouillon).

VIII.4 Cas général

Les étapes sont les suivantes :

1. Étudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$. Repérer en particulier les réels c en lesquels g s'annule : ce sont les points fixes de f (et ce seront les éventuelles limites).
2. On prend $u_0 \in I$ où I est un intervalle ouvert sur lequel g est de signe constant (strict). On prouve que I est stable par f (et ça doit commencer par « soit $x \in I$ »). Ici, seule la stricte croissance de f et les éventuelles relations du type $f(c) = c$ interviennent. Inutile de parler ici de continuité.
3. On prouve que tous les termes de la suite sont dans I (sur lequel g garde un signe constant). On peut dire « par récurrence immédiate » mais si on n'est pas sûr de soi, on peut la rédiger.
4. On montre que la suite (u_n) est monotone en utilisant le signe de g (ici, pas de récurrence) et la localisation de la suite précédemment trouvée.
5. Ici, trois possibilités (pour deviner le résultat à l'avance, un petit dessin en escalier au brouillon peut être utile, cf. paragraphe suivant) :
   (a) (u_n) est croissante majorée ou décroissante minorée donc converge vers une limite L. On a alors $f(L) = L$ car f est continue, c'est-à-dire que L est un point fixe de f. Ensuite, à l'aide d'un argument de monotonie, on trouve L. Attention, si u_0 est un point fixe de f, la suite (u_n) est constante.
   (b) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On fera un raisonnement par l'absurde du type : « si (u_n) converge vers une limite L alors $f(L) = L$ (même chose que ci-dessus) donc $L = \dots$ ou $\dots$ or (u_n) est croissante donc $L \geqslant u_0 > \dots$ et $\dots$ ce qui est absurde. (u_n) étant croissante et divergente, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. »
   (c) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$: même chose (en adaptant les arguments) que le cas précédent.
6. On se relit car on sait que la moindre erreur sera détectée par le correcteur psychorigide (et pour moi c'est un compliment).

Exemple : Étudier la suite définie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 \in [\,0\,;3\pi\,] \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$$

Définissons sur $[\,0\,;3\pi\,]$ les fonctions $f : x \mapsto x + \sin(x)$ et $g : x \mapsto f(x) - x = \sin(x)$. Tout d'abord, f et g sont dérivables sur $[\,0\,;3\pi\,]$. Soit $x \in [\,0\,;3\pi\,]$. Alors $f'(x) = 1 - \cos(x)$. D'où le tableau de variations de f :

x	0		2π		3π
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	
f		↗		↗	

f est strictement croissante car sa dérivée est positive et s'annule seulement en un nombre fini de points. Ci-dessous le tableau de signes de g :

x	0		π		2π		3π
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Séparons les cas selon la valeur de u_0.

- On suppose que $u_0 \in \left]0\,;\pi\right[$.
  - ⋆ Montrons que $\left]0\,;\pi\right[$ est stable par f. Soit $x \in \left]0\,;\pi\right[$. La fonction f étant strictement croissante, $f(0) = 0 < f(x) < f(\pi) = \pi$ car 0 et π sont des points fixes. En d'autres termes, $f(x) \in \left]0\,;\pi\right[$: cet intervalle est stable par f.
  - ⋆ Par une récurrence immédiate, $u_n \in \left]0\,;\pi\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - u_n = g(u_n) \geqslant 0$ car $u_n \in \left]0\,;\pi\right[$ et car g est positive sur cet intervalle. Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  - ⋆ La suite étant majorée par π, elle converge vers une limite L. f est continue donc L est un point fixe de f donc $L = 0$ ou $L = \pi$ ou $L = 2\pi$ ou $L = 3\pi$. Or, $u_n < \pi$ pour tout n donc $L \leqslant \pi$ car l'inégalité large passe à la limite. De plus, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc $L \geqslant u_0 > 0$. Finalement, $L = \pi$.
- Si $u_0 \in \left]\pi\,;2\pi\right[$, alors on montre de même que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi$.

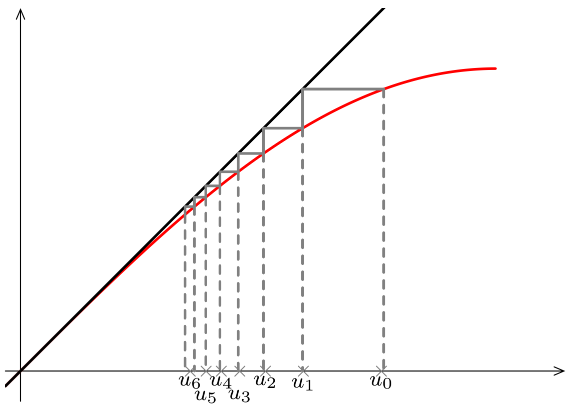
On le voit facilement sur un dessin : cf. paragraphe suivant.

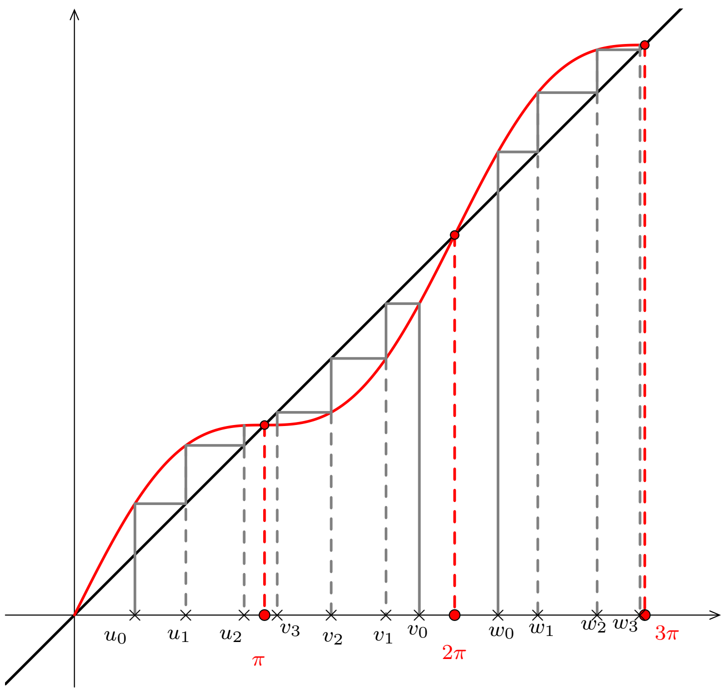
- Si $u_0 \in \left]2\pi\,;3\pi\right[$, alors on montre de même que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\pi$.
- Enfin, si $u_0 = 0$, alors la suite est constante égale à 0 donc converge vers 0. De même dans les autres cas où u_0 est un point fixe de f.

VIII.5 Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une suite de ce type de la façon suivante :

- On part du point de coordonnées $(u_0, 0)$ (sur l'axe des abscisses, donc) et on va verticalement jusqu'à la courbe f : le point atteint aura donc pour coordonnées $(u_0, f(u_0))$, c'est-à-dire (u_0, u_1).
- Ensuite on va horizontalement jusqu'à la première bissectrice, dont une équation est $y = x$. Puisque l'ordonnée vaut u_1, on arrive donc au point de coordonnées (u_1, u_1) (car, sur la droite, les abscisses et les ordonnées sont égales).
- On va ensuite verticalement jusqu'à la courbe f : le point atteint aura donc pour coordonnées $(u_1, f(u_1))$, c'est-à-dire (u_1, u_2).
- On va ensuite horizontalement jusqu'à la première bissectrice, et donc on arrive au point de coordonnées (u_2, u_2)
- Et on recommence : verticalement jusqu'à la courbe (vers le haut ou vers le bas selon si on est au dessus ou en dessous) et horizontalement jusqu'à la première bissectrice. Les abscisses successives seront les termes de la suite, et on pourra deviner (même si ce n'est pas rigoureux) le comportement de la suite (monotonie, limite éventuelle, etc.). Cela peut aussi permettre de vérifier qu'on ne s'est pas trompé.



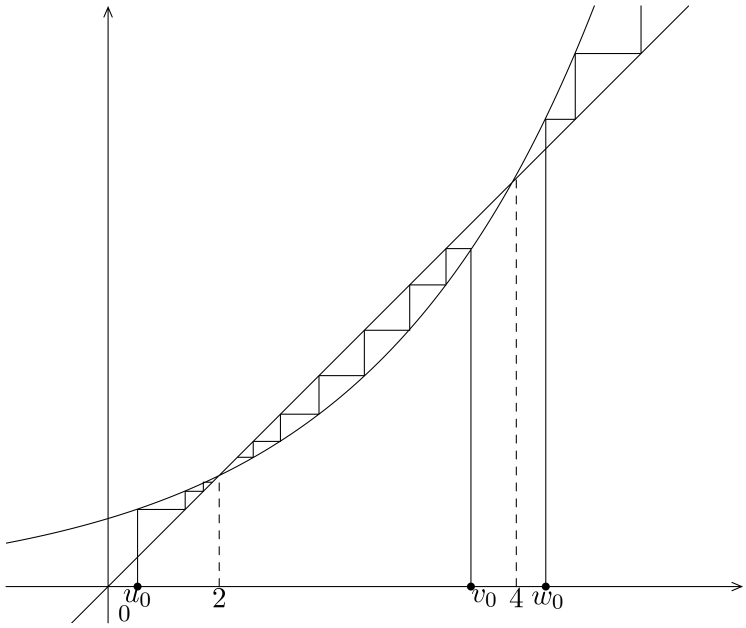


Sur le premier graphe ci-dessus, on a représenté les termes $u_0, \dots, u_7$ de la suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$: on voit que la suite est bien décroissante et semble tendre vers 0.

Sur le second graphe ci-dessus, on a représenté trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la même relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$ avec $u_0 \in\,]\,0\,;\pi\,[\,, v_0 \in\,]\,\pi\,;2\pi\,[$ et $w_0 \in\,]\,2\pi\,;3\pi\,[$: le dessin est cohérent avec l'étude faite plus haut.

Enfin, ci-dessous, on a tracé trois suites récurrentes pour la relation $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$ pour différents premiers termes : là aussi, tout est cohérent avec l'étude faite plus haut.

On dit que π est un point fixe attractif et 2π un point fixe répulsif, et c'est la même chose pour 2 et 4 ci-dessous : le fait que le point fixe soit attractif ou répulsif dépend de la dérivée de f en ce point, cf. exercice 48 du chapitre 14.



Morale de l'histoire : Faire un dessin, au moins au brouillon, pour deviner les résultats et/ou la cohérence des résultats.

VIII.6 Importance de la croissance de f

La (stricte) croissance de f est importante à plus d'un titre.

- Elle entraîne automatiquement la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Plus précisément, si $u_0 < u_1$, alors on montre par une récurrence immédiate (en utilisant la stricte croissance de f) que $u_n < u_{n+1}$ pour tout n, et c'est le contraire si $u_0 > u_1$. On pourrait donc donner la monotonie de la suite directement rien qu'avec les deux premiers termes (mais il est plus sûr de le faire à la main comme dans les exemples ci-dessus).
- ⚠ Attention, monotone mais pas forcément croissante, même si f est croissante ! On a vu ci-dessus des exemples de suites décroissantes vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante. Là où la croissance de f permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, c'est quand la suite est définie par une relation du genre $u_n = f(n)$. Attention de ne pas confondre !
- La stricte croissance de f entraîne également la stabilité de tous les intervalles délimités par deux points fixes. En effet, si $p < q$ sont deux points fixes alors, pour tout $x \in\,]\,p\,;q\,[$, $f(p) = p < f(x) < f(q) = q$.

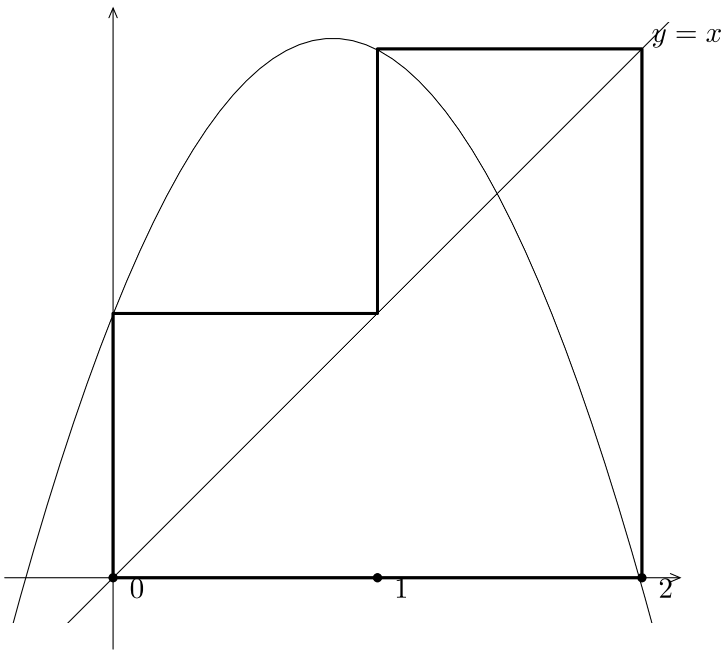
Tout cela n'est plus vrai lorsque f n'est pas croissante. Par exemple, 0 et 1 sont les deux points fixes de $f : x \mapsto x(x-1)$ mais $]\,0\,;1\,[$ n'est pas stable par f car $f(1/2) < 0$. De plus, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas forcément monotone, ce qui la rend plus difficile à étudier : c'est pour cela que nous nous restreignons ici au cas des fonctions croissantes.

Cependant, la limite éventuelle est toujours un point fixe (si f est continue).

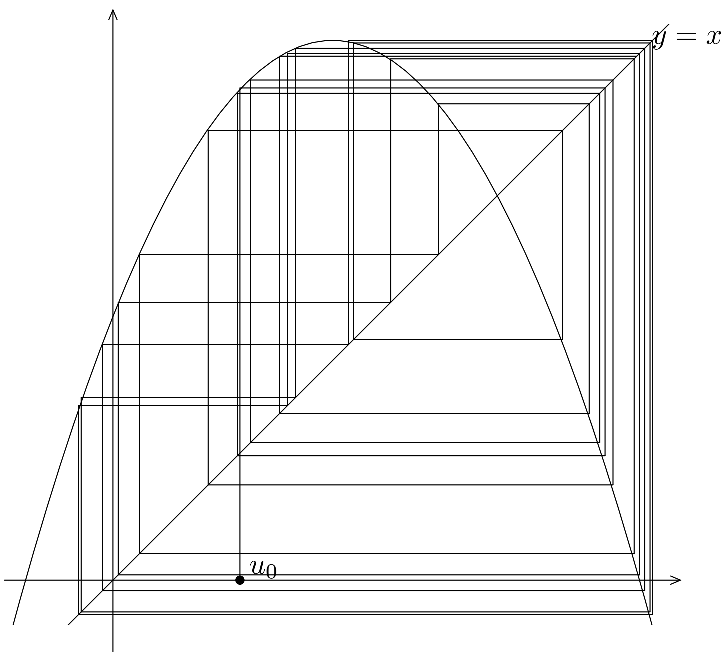
Par exemple, avec la simple fonction $f : x \mapsto -x$, si $u_0 = 0$ alors la suite est constante égale à 0, tandis que si $u_0 \neq 0$, la suite (u_n) est périodique de période 2 et donc ne converge pas (si on la représente graphiquement comme ci-dessus, cela donne un carré : exo). Mais on peut faire encore mieux ! Prenons la fonction un peu plus compliquée

$$f : x \mapsto \frac{(x-1)(x-2)}{2} - 2x(x-2) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1$$

Si (u_n) est la suite définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = f(u_n)$ alors $u_1 = 1$, $u_2 = 2, u_3 = 0$ et ainsi de suite, la suite (u_n) est 3-périodique.



Ce n'est toujours pas tout ! On peut avoir des suites totalement erratiques, sans aucune convergence ou périodicité, comme le montre l'exemple suivant, où on a pris la même fonction f :



Dans le cas où f n'est pas croissante, c'est plus difficile et, en général, vous serez guidés. Deux cas de figure assez fréquents se présentent tout de même : le cas où f est contractante (cf. chapitre 14) et le cas où f est décroissante.

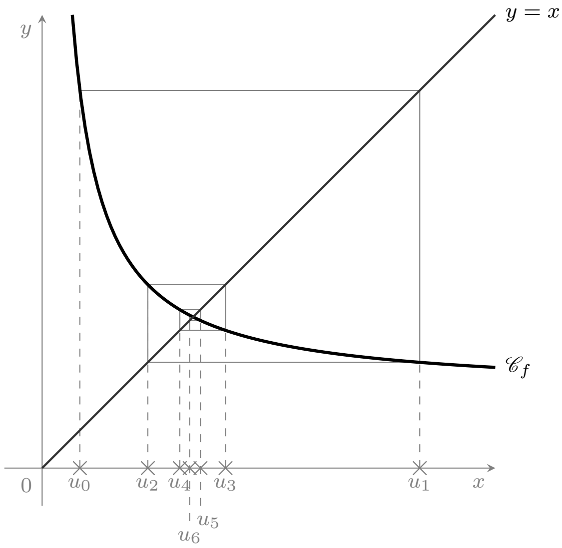
Lorsque f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante (car composée de deux fonctions monotones de même monotonie, cf. chapitre 2). Dans ce cas, on se ramène au cas précédent en étudiant les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$

et $u_{2n+3} = f \circ f(u_{2n+1})$ et on applique la méthode vue précédemment. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet alors une limite si et seulement si les deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers cette limite.

Exemple : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}$$

Alors $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$: cf. exercice 67. Cela donne un « escargot » convergent.

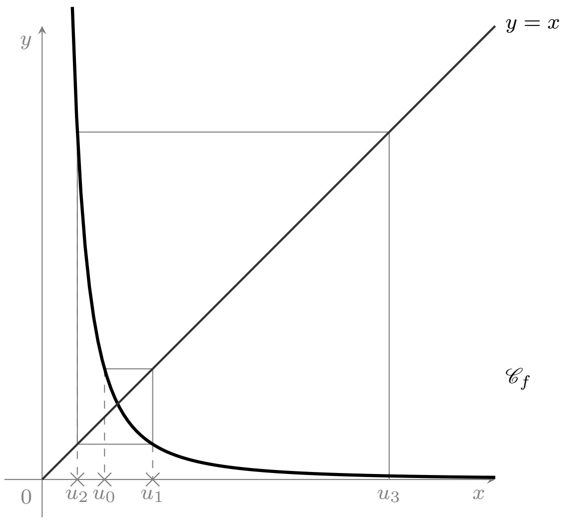


Exemple : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par :

$$u_0 \in \left]\,0\,;1\,\right[\qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{{u_n}^2}$$

Alors, par une récurrence immédiate, $u_{2n} = {u_0}^{2^n}$ (et pas ${u_0}^{2n}$) et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{{u_0}^{2^{n+1}}}$ donc $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. Cela donne un « escargot » divergent.

On prouve les limites en passant à la forme exponentielle ou en disant que ce sont des suites extraites des suites géométriques (x^n) et $(1/x^n)$ qui tendent respectivement vers 0 et $+\infty$ et une suite extraite d'une suite qui admet une limite admet la même limite.



IX Suites complexes

On définit une suite complexe exactement de la même façon qu'une suite réelle.

Définition. Une suite complexe est une famille $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{C}$ indexée par $\mathbb{N}$. Il s'agit donc d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites (complexes).

Nous noterons parfois $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Attention, puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ alors $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

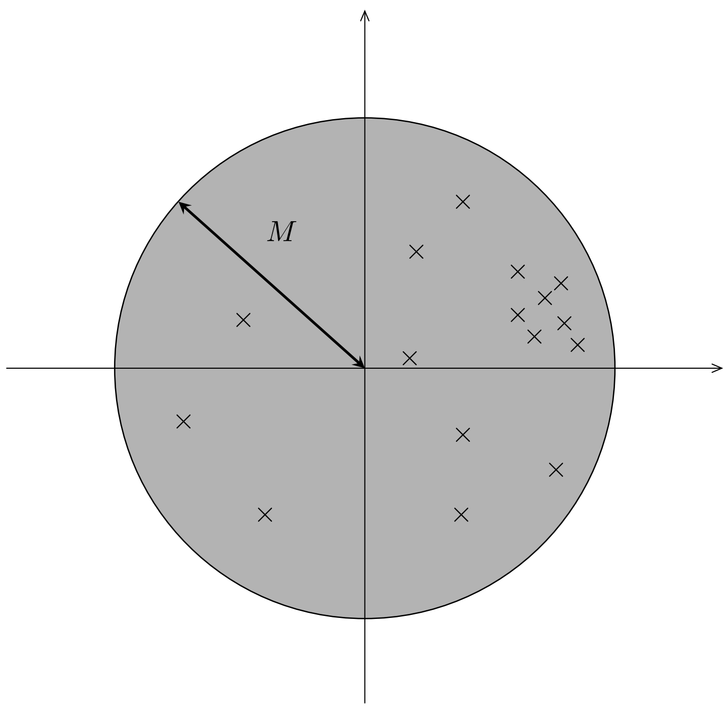
On se donne dans cette partie une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le reste du cours est tout à fait analogue, mais il faut faire attention qu'il n'y a pas d'inégalités sur $\mathbb{C}$: écrire par exemple $L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon$ ou $u_n \geqslant A$ n'a aucun sens si on ne manipule pas des réels. Pour cette raison, certaines définitions vont devoir être adaptées et certaines n'auront juste aucun sens sur $\mathbb{C}$: tant pis ! Rapide tour d'horizon :

- Cela n'a aucun sens de parler de suite complexe majorée ou minorée, positive ou négative.
- Par contre, cela a un sens de parler de suite complexe bornée, avec la définition suivante :

  Définition. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en module, i.e. s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$, et on dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par M.

  Les barres verticales ci-contre représentent le module. Cela n'a plus de sens de dire qu'une suite complexe est bornée si elle est majorée et minorée !

  Remarque : Géométriquement, une suite complexe est une suite de points du plan, et elle est bornée si les termes de la suite sont compris dans un disque (centré en 0).



- Les opérations sur les suites ($u + v$, $u \times v$ etc.) sont encore valides pour les suites complexes).
- On peut définir des suites complexes constantes, stationnaires, périodiques de la même façon que pour des suites réelles. Par exemple, la suite $(i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4-périodique.
- On peut définir des suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques de la même façon que pour des suites réelles, et le terme général s'obtient de la même façon.

- On peut définir des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 de la même façon que pour les suites réelles. Le terme général s'obtient de la même façon, mais il faut faire attention qu'ici, il n'y a pas de discriminant positif ou négatif. Plus précisément :

Théorème (admis provisoirement). L'équation caractéristique est équivalente à (E) : $r^2 - ar - b = 0$. Elle est polynomiale du second degré et son discriminant est $\Delta = a^2 + 4b$.

⋆ Si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 et il existe deux complexes λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda \times {r_1}^n + \mu \times {r_2}^n.$$

⋆ Si $\Delta = 0$, alors (E) admet une racine double complexe $r_0 = a/2$ et il existe deux complexes λ et μ uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda + \mu \times n) \times {r_0}^n.$$

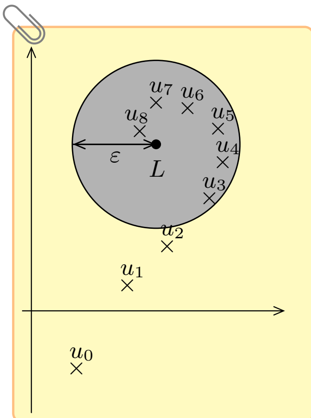
- On définit une suite convergente de la même façon qu'une suite réelle, à ceci près qu'on utilise le module et non plus la valeur absolue. Plus précisément :

Définition. Soit $L \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet comme limite L ou tend vers L si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

On note alors : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

En d'autres termes, la suite converge vers L si ses termes s'approchent aussi près qu'on veut de L sans plus s'en éloigner donc si, peu importe la précision voulue, notée ε, la distance entre u_n et L finit par être plus petite que ε dès que n est assez grand. Attention, l'équivalence « $|u_n - L| \leqslant \varepsilon \iff L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon$ » et le dessin qui va avec ne sont plus valables sur $\mathbb{C}$. L'interprétation géométrique de $|u_n - L| \leqslant \varepsilon$ est : u_n appartient au disque fermé de centre L et de rayon ε (voir ci-contre) .



- Nous avons le résultat très important suivant, reliant limites complexes et limites réelles :

Théorème. Soit $L \in \mathbb{C}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff \mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(L) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(L)$$

En d'autres termes, pour étudier la limite d'une suite complexe, il suffit d'étudier deux suites réelles. Cela permet de montrer pour les suites complexes des résultats vrais jusque là pour des suites réelles sans passer par le module.

Démonstration. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0, |u_n - L| \leqslant \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|\,\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(L)| = |\,\mathrm{Re}(u_n - L)| \leqslant |u_n - L| \leqslant \varepsilon$$

i.e. $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(L)$. De même pour l'autre.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(L)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(L)$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0, |\,\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(L)| \leqslant \varepsilon$ et il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1, |\,\mathrm{Im}(u_n) - \mathrm{Im}(L)| \leqslant \varepsilon$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ et soit $n \geqslant n_2$.

$$
\begin{aligned}
|u_n - L| &= |\operatorname{Re}(u_n - L) + i\operatorname{Im}(u_n - L)| \\
&\leqslant |\operatorname{Re}(u_n - L)| + |\operatorname{Im}(u_n - L)| \\
&\leqslant |\operatorname{Re}(u_n) - \operatorname{Re}(L)| + |\operatorname{Im}(u_n) - \operatorname{Im}(L)| \\
&\leqslant 2\varepsilon
\end{aligned}
\qquad \square
$$

ce qui permet de conclure.

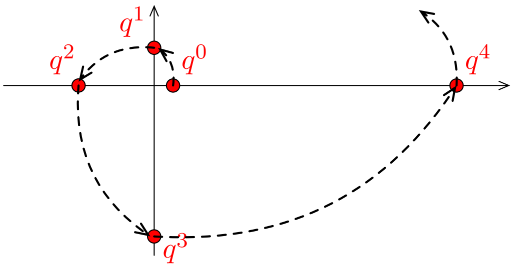
- Il y a encore unicité de la limite sur $\mathbb{C}$ grâce au théorème précédent.
- Une suite convergente est encore bornée.
- La convergence éventuelle d'une suite ne dépend toujours pas de ses premiers termes.
- Cela n'a plus de sens de parler de suite qui tend vers $\pm\infty$: où sont $\pm\infty$ sur $\mathbb{C}$? Tout ce qu'on peut faire à la limite est de parler de suite qui tend vers $+\infty$ en module.
- Les opérations sur les limites sont encore valables sur $\mathbb{C}$ (quand les limites ont un sens).
- Le théorème de Cesàro est encore valable sur $\mathbb{C}$ (quand les limites ont un sens).
- Cela n'a plus de sens de dire que l'inégalité large passe à la limite, ou de parler d'encadrement.
- Par contre, les critères « Si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ » et « S'il existe une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle de limite nulle telle que, pour tout n, $|u_n - L| \leqslant v_n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ » sont encore valables, mais en utilisant le module.
- Le théorème de composition de limites est encore valable (quand elles ont un sens).
- Pour la convergence des suites géométriques complexes, la situation est légèrement différente :

Théorème (Convergence des suites géométriques).
Soit $q \in \mathbb{C}$. La suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ ou $q = 1$.

- ⋆ Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
- ⋆ Si $|q| < 1$, $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- ⋆ Si $|q| = 1$ et si $q \neq 1$, la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (mais son module est constant égal à 1).
- ⋆ Si $|q| > 1$, $|q|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais la suite (q^n) n'a pas de limite (sauf si q est un réel positif et dans ce cas $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Exemple : Par exemple, si $q = 2i$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini **en module** mais n'a pas de limite.

Sur $\mathbb{C}$, ça tourne ! Plus précisément, multiplier par un complexe non nul $re^{i\theta}$ revient à multiplier les longueurs par r et à faire une rotation d'angle θ, cf. chapitre 7.



- Cela n'a pas de sens de parler de suite complexe monotone. En particulier, il n'existe pas de théorème de la limite monotone complexe, ni de suites adjacentes sur $\mathbb{C}$.

- Comme dit dans le paragraphe I, on peut définir une partie dense sur $\mathbb{C}$. La caractérisation séquentielle de la densité est encore valable.
- On définit une suite extraite de la même façon que sur $\mathbb{R}$. Tous les résultats sont encore valables, y compris le théorème de Bolzano-Weierstraß. Plus précisément :

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstraß). De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque : Comme dans le cas réel, cela signifie qu'une suite complexe bornée (donc à valeurs dans un disque, voir plus haut), s'accumule forcément quelque-part.

Démonstration. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée par un réel M. Si $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. Pour tout n, $|x_n| \leqslant |z_n| \leqslant M$ donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß (réel), elle admet une sous-suite convergente $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$. De même, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc la sous-suite $(y_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ est bornée : d'après le théorème de Bolzano-Weierstraß, elle admet une sous-suite convergente $(y_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$. Or, $(x_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(x_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge donc converge également (vers la même limite). Dès lors, les deux suites $(x_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ et $(y_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ convergent donc la suite $(z_{n_{p_q}})_{q\in\mathbb{N}}$ converge.

Attention, il ne fallait pas appliquer le théorème de Bolzano-Weierstraß à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous prétexte qu'elles sont bornées : on aurait obtenu une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge, et une sous-suite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mais leurs indices n'auraient pas été les mêmes ! Par exemple, on aurait pu obtenir que la suite des termes pairs de x convergeait et la suite des termes impairs de y, ce qui n'aurait pas permis de conclure. Il fallait extraire deux fois ! Méthode à retenir : pour extraire des suites qui convergent « en même temps », il ne faut pas extraire séparément mais successivement.

- Les limites éventuelles des systèmes dynamiques sont encore des points fixes de f (si f est continue). Cependant, puisque cela n'a pas de sens de parler de suite ou de fonction croissante sur $\mathbb{C}$, nous n'étudierons pas ce cas de figure cette année.

Activité : Quand on manipule des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on peut cependant être confronté à la situation suivante : on a une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **réelle** et les deux solution de l'équation caractéristique sont **complexes**. Comment exprimer le terme général sous la forme d'une suite réelle ?

Donnons-nous donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ réelle, récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients a et b réels, et supposons que l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$ admette un discriminant strictement négatif, donc deux racines complexes conjuguées α et $\overline{\alpha}$. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle donc est une suite complexe, donc d'après ce qui précède, il existe λ_1 et λ_2 complexes uniques tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \lambda_1 \times \alpha^n + \lambda_2 \times \overline{\alpha}^n$$

Or, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \overline{u_n}$ si bien que $u_n = \overline{\lambda_1} \times \overline{\alpha}^n + \overline{\lambda_2} \times \alpha^n$. Par unicité de λ_1 et λ_2, il vient $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ donc, si on note $\lambda_2 = x + iy$ (avec x et y réels), il vient

$$\begin{aligned} u_n &= (x - iy)\alpha^n + (x + iy)\overline{\alpha}^n \\ &= x\left(\alpha^n + \overline{\alpha}^n\right) + y\left(-i\alpha^n + \overline{i\alpha^n}\right) \\ &= x \times \mathrm{Re}\left(\alpha^n\right) - y \times \mathrm{Re}\left(i\alpha^n\right) \\ &= x \times \mathrm{Re}\left(\alpha^n\right) + y \times \mathrm{Im}\left(\alpha^n\right) \end{aligned}$$

Car $\mathrm{Re}(iz) = -\mathrm{Im}(z)$.

En conclusion, dans le cas réel avec $\Delta < 0$:

$$\forall (u_n) \in E_{a,b}, \quad \exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = x \times \mathrm{Re}\left(\alpha^n\right) + y \times \mathrm{Im}\left(\alpha^n\right)$$

De plus, α n'étant pas réel, il n'est pas nul donc on peut l'écrire sous la forme $\alpha = re^{i\theta}$ (avec r son module et θ un argument), ce qui donne $\alpha^n = r^n e^{in\theta}$, c'est-à-dire qu'on a également :

$$\exists!(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = x \times r^n \cos(n\theta) + y \times r^n \sin(n\theta)$$

Cette formule est analogue à celle pour les équa-diffs, cf. chapitre 11.

Morale de l'histoire : Revenir au cas complexe !