Chapitre 2.1

Ordre sur $\mathbb{R}$ (stage one)

Le programme est clair : toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme, et toute construction des ensembles de nombres usuels (en particulier celle de $\mathbb{R}$) sont hors programme. Par conséquent, quand un résultat découlera, soit de l'axiomatique, soit d'une construction technique (mais intéressante), soit simplement d'une démonstration fastidieuse qui ne nous apporterait rien sur le plan de la compréhension, nous l'admettrons ou, s'il est intuitif, nous l'utiliserons sans sourciller en le considérant comme évident (par exemple, nous utiliserons sans démonstration qu'un nombre entier inférieur strictement à 4 est inférieur ou égal à 3).

I Rappels (?) sur les inégalités

Proposition. Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Lien strict/large :** Si $a < b$ alors $a \leqslant b$.
- **Antisymétrie de la relation d'ordre :** Si $a \leqslant b$ et si $a \geqslant b$ alors $a = b$.
- **Transitivité de la relation d'ordre :** Si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$. De plus, l'inégalité finale est stricte si et seulement si au moins l'une des égalités initiales est stricte (ou encore : l'inégalité finale est une égalité si et seulement si **les deux** inégalités initiales sont des égalités).
- **Somme :**
  - ⋆ Si $a \leqslant b$ alors $a + \lambda \leqslant b + \lambda$. En d'autres termes, on peut ajouter un réel quelconque (peu importe son signe) à une inégalité. Ce résultat est encore valable avec des inégalités strictes.
  - ⋆ Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$. De plus, l'inégalité finale est stricte si et seulement si au moins l'une des inégalités initiales est stricte (ou encore : l'inégalité finale est une égalité si et seulement si **les deux** inégalités initiales sont des égalités). En d'autres termes, on peut sommer les inégalités (de signe quelconque, mais dans le même sens !).
- **Produit :**
  - ⋆ Si $a \leqslant b$ et si $\lambda \geqslant 0$ (respectivement $\lambda \leqslant 0$) alors $\lambda a \leqslant \lambda b$ (respectivement $\lambda a \geqslant \lambda b$). En d'autres termes, on change le sens d'une inégalité quand on multiplie par un réel négatif. Ce résultat est encore valable avec des inégalités strictes si λ est non nul.
  - ⋆ Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et si $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $0 \leqslant ac \leqslant bd$. En d'autres termes, on peut multiplier les inégalités **positives**. Attention, le résultat est faux si les inégalités ne sont pas positives ! Par exemple, $-2 \leqslant -1$ et $-4 \leqslant -3$ mais on n'a pas $8 \leqslant 3$!
- **Quotient :** Si a et b sont non nuls et de même signe, et si $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{a} \geqslant \dfrac{1}{b}$.

La réciproque est fausse !

Attention, si $a \leqslant c$ et si $b \leqslant c$, alors on ne peut pas comparer a et b !

À tout hasard, précisons qu'on ne peut pas soustraire les inégalités, ni les diviser. En effet, soustraire des inégalités revient à multiplier l'une d'elles par -1 et alors celle-ci change de sens. De même pour le quotient.

Remarque : On généralise facilement ces résultats à un nombre quelconque (fini) d'inégalités.

- Pour la transitivité de la relation d'ordre : soient $a_1, \dots, a_n$ sont n réels. Si $a_1 \leqslant a_2, \dots, a_{n-1} \leqslant a_n$ (ce qu'on notera $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$), alors $a_1 \leqslant a_n$, et cette inégalité est stricte si et seulement si au moins l'une des inégalités initiales est stricte. En d'autres termes, il y a égalité si et seulement si **toutes** les inégalités sont des égalités. Par exemple, une somme de termes **positifs** est nulle si et seulement si tous les termes

Cette équivalence est capitale et doit être bien comprise ! Les exercices demandant de prouver une inégalité puis le cas d'égalité sont légion !

sont nuls. C'est bien sûr faux si les termes ne sont pas positifs (ne jamais oublier combien font $1-1$).
- Pour la somme et le produit : on peut sommer les inégalités (de signe quelconque) et multiplier les inégalités positives, cf. chapitre 3.

Remarque : Pour le quotient, cela deviendra un réflexe quand nous aurons vu les variations de la fonction inverse (cf. chapitre 2.5). Attention, cela ne marche plus si a et b sont de signes contraires ! Par conséquent, dès qu'on veut « passer une inégalité à l'inverse », non seulement on se demande si on ne divise pas par 0, mais on se demande encore quel est le signe des quantités que l'on manipule.

Remarque : Précisons qu'en français, « positif » signifie la plupart du temps « positif ou nul ». C'est le contraire en anglais : « positive » signifie (la plupart du temps) « strictement positif », et on dit « nonnegative » pour « positif ou nul ». Afin d'éviter toute confusion, on prendra l'habitude de préciser « positif ou nul » ou « strictement positif ». La même remarque vaut pour négatif, pour supérieur (supérieur strict ? supérieur ou égal ?) ou inférieur. Spoiler : la scène suivante se produira souvent cette année.

- **Un élève :** Monsieur, x est plus grand que y.
- **Moi :** Ça veut dire quoi, plus grand ?
- **Un élève :** Ben, plus grand. *Intérieurement : il est bête ce prof.*
- **Moi :** ... *Intérieurement : ~~il est b...~~ cet élève est en cours d'apprentissage, après tout, c'est peut-être lui qui a raison, et il a autant à apprendre de moi que moi de lui.*

Remarque : Comment prouver une inégalité ? Vaste programme, comme dirait l'autre... Nous n'allons évidemment pas faire le tour tout de suite, nous verrons pléthore de méthodes cette année. Donnons juste quelques méthodes générales :

- Si on a un résultat qui dépend de n, on peut faire une récurrence (cf. chapitres 1 et cf. chapitre 3).
- On peut raisonner par équivalences (attention, quand on compose par une fonction, à bien préciser que la fonction est strictement monotone, cf. chapitre 2.2).
- On peut tout mettre du même côté et donner le signe, par exemple en mettant au même dénominateur ou en factorisant (factoriser doit être un réflexe !).

Exemple : Soit $x \neq 1$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\dfrac{x}{x-1} \geqslant \dfrac{-1}{x-1}$? Comme pour une équation, on raisonne la plupart du temps avec des équivalences (nous reverrons les inéquations au chapitre 2.2 et nous ferons beaucoup d'exercices pour maîtriser la rédaction).

Attention, on ne peut pas faire de produit en croix dans une inégalité ! On peut à la limite multiplier par $x-1$ et distinguer les cas selon le signe de $x-1$, mais c'est tout de même plus laborieux que ce que nous faisons ci-contre.

$$\frac{x}{x-1} \geqslant \frac{-1}{x-1} \iff \frac{x+1}{x-1} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		-1		1	$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		
$x-1$		$-$			0	$+$
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

En conclusion : x est solution si et seulement si $x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left]1\,;+\infty\right[$.

Exemple : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $xy \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

$$\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{2} - xy &= \frac{x^2+y^2-2xy}{2} \\ &= \frac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Remarque : ⚠ Cet exemple est très important. C'est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique que nous verrons dans l'exercice 14 et dans l'exercice 4 du chapitre 15. Quand on souhaite majorer un produit, elle doit devenir un nouveau réflexe. Puisqu'elle est valable pour tous réels x et y, on peut l'appliquer à d'autres réels (penser à « truc ») et on a (entre autres) :

- $\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+)^2, \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ (on applique ce qui précède à $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$).
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, |xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$ (on applique ce qui précède à $|x|$ et $|y|$).

Encadrons ce dernier résultat pour la route :

Théorème. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors : $|xy| \leqslant \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

Exemple : Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $x^2 \geqslant x$?

Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche le signe de $x^2 - x$: inutile de calculer un discriminant ! Il n'y a pas de terme constant ! Il suffit de factoriser : $x^2 - x = x(x-1)$ et, de même que ci-dessus, un tableau de signes nous dit que $x^2 - x$ est positif sur $]-\infty\,;0] \cup [1\,;+\infty[$.

Nous reverrons les trinômes du second degré et les fonctions puissances dans le chapitre 2.5.

Retournons aux méthodes pour montrer des inégalités :

- On peut effectuer une étude de fonctions, ou utiliser de la convexité : cf. chapitre 2.4.
- ⚠ Quand on veut encadrer une fractions de réels positifs :
  - ⋆ Pour majorer une fraction de réels positifs, on majore le numérateur et on **minore** le dénominateur.
  - ⋆ Pour minorer une fraction de réels positifs, on minore le numérateur et on **majore** le dénominateur.

En effet, si on a quatre réels positifs $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 < c \leqslant d$ alors $0 < \dfrac{1}{d} \leqslant \dfrac{1}{c}$ donc, puisqu'on peut multiplier des inégalités positives, $\dfrac{a}{d} \leqslant \dfrac{b}{c}$.

Pour le dénominateur, c'est intuitif ! Plus on divise par quelque-chose de grand, plus on obtient quelque-chose de petit !

Exemple : Soit $x \in [0\,;2]$. Encadrer grossièrement, par un calcul simple, $\dfrac{2x+1}{3x^2+4}$.

On a les encadrements $1 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$ et $4 \leqslant 3x^2+4 \leqslant 16$ donc

$$\frac{1}{16} \leqslant \frac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \frac{5}{4}$$

Une étude de fonction donnerait l'encadrement plus précis suivant :

$$\forall x \in [0\,;2], \frac{1}{4} \leqslant \frac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \frac{3+\sqrt{57}}{24}$$

Rappelons qu'une majoration est d'autant plus précise qu'elle est plus petite, et qu'une minoration est d'autant plus précise qu'elle est plus grande. Quelle est la minoration qui apporte le plus d'informations : le plus grand élève fait moins d'1m95, ou le plus grand élève fait moins d'1m85 ? Et idem pour une minoration : quelle est celle qui apporte le plus d'information : le plus petit élève fait plus d'1m55, ou le plus petit élève fait plus d'1m65 ?

Cependant, il faut quand même travailler plus, et on peut perdre du temps à l'écrit, surtout si le premier l'encadrement ci-dessus est suffisant (tout dépend du contexte évidemment, parfois il n'y a pas le choix).

Exemple : On montrerait de même que, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{6} \leqslant \dfrac{x+1}{4x+2} \leqslant 1$ (exo).

Remarque : Attention, il ne faut pas oublier qu'il faut **minorer** le dénominateur. Un jour de grande fatigue, parfois, on peut oublier ça, mais il ne faut jamais oublier de vérifier la cohérence de ce qu'on écrit (je dirai ça souvent cette année), ce qui peut parfois sauver la mise. Par exemple, écrire

$$\frac{1}{4} \leqslant \frac{2x+1}{3x^2+4} \leqslant \frac{5}{16}$$

est faux mais pas délirant, alors que, si on veut encadrer la fraction $\dfrac{x+1}{4x+2}$ sur $[0\,;1]$, si on se trompe et qu'on majore à la fois le numérateur et le dénominateur pour la majorer et qu'on minore à la fois le numérateur et le dénominateur pour la minorer, cela donne :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x+1}{4x+2} \leqslant \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ce qui est non seulement faux mais totalement absurde car on a écrit $1/2 \leqslant 1/3$! Il faut faire attention à la cohérence de ce qu'on écrit !

II Majorants, minorants, maxima, minima

Dans cette partie, nous nous donnons A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.

II.1 Majorant, minorant

Définition.

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est **un** majorant de A si tout élément de A est inférieur ou égal à M. Avec des quantificateurs, M est un majorant de A si : $\forall a \in A, a \leqslant M$.
- Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est **un** minorant de A si tout élément de A est supérieur ou égal à m. Avec des quantificateurs, m est un minorant de A si : $\forall a \in A, a \geqslant m$.
- Si A admet un majorant M, on dit que A est majorée (par M).
- Si A admet un minorant m, on dit que A est minorée (par m).
- Si A est majorée et minorée, on dit que A est bornée.

Remarque : Si $x \in \mathbb{R}$, la négation de « x est un majorant de A » est donc : $\exists a \in A, a > x$. En d'autres termes, pour prouver que x n'est pas un majorant de A, il suffit d'exhiber **un** élément de A **strictement** supérieur à x. De même, pour montrer que x n'est pas un minorant de A, il suffit d'exhiber **un** élément de A **strictement** inférieur à x.

Exemples :

- -1 est un minorant de $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ ne sont pas majorés.
- $]\,0\,;1\,[$ est un ensemble minoré par 0 et majoré par 1 (qui n'appartiennent pas à l'ensemble). C'est donc un ensemble borné.
- 1, $\sqrt{2}$, 2, e, 3 et π sont des majorants de $[\,0\,;1\,]$. On voit avec cet exemple qu'un majorant peut ou non appartenir à l'ensemble, et qu'il n'y a pas unicité d'un éventuel majorant.

Attention à ne pas confondre un ensemble borné avec un ensemble fini ! Un ensemble fini est forcément borné (cf. III.1), on voit avec cet exemple que la réciproque est fausse !

Remarque : Plus fort : si M est un majorant de A, alors tout nombre supérieur ou égal à M est aussi un majorant de A. En particulier, si A est majorée, alors A admet une infinité de majorants ! C'est décidé : on ne dira jamais « le » majorant, mais « un » majorant (et idem pour minorant).

Remarque : Avec des quantificateurs :

- A est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \leqslant M$.
- A est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in A, a \geqslant m$.

Remarque : Donnons la négation de ces propriétés.

- A n'est pas majorée : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists a \in A, a > M$.
- A n'est pas minorée : $\forall m \in \mathbb{R}, \exists a \in A, a < m$.

Introduisons une méthode que nous reverrons beaucoup quand nous reverrons les suites et la continuité. Supposons A non majorée. La propriété ci-dessus étant vraie **pour tout** $M \in \mathbb{R}$, elle est en particulier vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on fixe $n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in A$ (qui dépend de n) tel que $a > n$. Puisque a dépend de n, on décide d'expliciter cette dépendance en notant cet élément non plus a mais a_n. Finalement, si A n'est pas majorée :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n > n$ (et la réciproque est évidemment vraie, cf. exercice 12). En particulier, par minoration, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En d'autres termes, puisque les a_n forment une suite d'éléments de A, si A n'est pas majorée, alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $+\infty$ (là aussi, la réciproque est évidemment vraie, mais pour le montrer proprement, nous devons définir la limite d'une suite, cf. chapitre 12).

Le fait d'appeler cet élément a_n et non pas simplement a possède un autre avantage : on peut ensuite manipuler des éléments différents (pour différentes valeurs de n), tandis que si on l'appelle juste a, cela peut prêter à confusion car tous les éléments sont notés de la même façon.

On montre de même que si A n'est pas minorée, alors il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $-\infty$.

Encore une fois, c'est une méthode que nous reverrons souvent dans les chapitres de suites et de continuité : si une propriété est vraie pour tout $M \in \mathbb{R}$ ou tout $m \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie pour n et cela nous donne un élément qui dépend de n que l'on note a_n ou x_n ou... et donc nous avons une suite vérifiant une propriété. De la même façon, si une propriété est vraie pour tout $\varepsilon > 0$ alors, pour tout $n \geqslant 1$, cette propriété est vraie pour $1/n$, ce qui peut également nous donner une suite vérifiant une propriété. De plus, en général, on peut en déduire la limite de la suite obtenue, et puisque nous avons beaucoup de résultat concernant les suites, cela peut se révéler intéressant.

L'astuce est donc de noter a_n ou x_n un élément qui dépend de n, c'est-à-dire d'expliciter la dépendance en n.

II.2 Plus petit élément, plus grand élément

Définition.

- Soit M un majorant de A. On dit que M est un plus grand élément ou un maximum de A si $M \in A$. En d'autres termes, un maximum est un majorant qui appartient à l'ensemble.
- Soit m un minorant de A. On dit que m est un plus petit élément ou un minimum de A si $m \in A$. En d'autres termes, un minimum est un minorant qui appartient à l'ensemble.

Proposition. Si A admet un maximum (respectivement minimum), celui-ci est unique.

Démonstration. Soient M_1 et M_2 deux maxima de A. Puisque M_1 est un majorant de A et M_2 un élément de A, alors $M_1 \geqslant M_2$. Par symétrie des rôles, $M_2 \geqslant M_1$ donc $M_1 = M_2$. De même pour le minimum.

Remarque : On pourra donc dire « le » maximum ou « le » minimum, s'il existe. Mais il faut faire attention : il n'existe pas forcément ! Voir ci-dessous.

Exemples :

- 0 est le minimum de $[\,0\,;1\,]$, et 1 est son maximum.
- Si $A = [\,0\,;1\,[$, alors 0 est le minimum de A, mais A n'admet pas de maximum (alors que A est majoré !). En effet, supposons que A admette un maximum x. En particulier, $x \in A$ donc $x < 1$. Soit $\alpha = \dfrac{x+1}{2}$. Alors $x < \alpha < 1$: d'une part, $\alpha \in A$ et d'autre part, $\alpha > x$ donc x n'est pas un majorant de A, ce qui est absurde. A n'admet donc pas de maximum.
- On peut généraliser le résultat précédent. Ci-dessous, a et b sont des réels avec $a < b$:

Les deux inégalités $x < \alpha$ et $\alpha < 1$ peuvent être affirmées directement, mais si on a un doute, il suffit de tout mettre du même côté puis d'étudier le signe.

A	$\min A$	$\max A$
$[\,a\,;b\,]$	a	b
$[\,a\,;b\,[$	a	X
$]\,a\,;b\,]$	X	b
$]\,a\,;b\,[$	X	X
$[\,a\,;+\infty\,[$	a	X
$]\,a\,;+\infty\,[$	X	X
$]-\infty\,;b\,]$	X	b
$]-\infty\,;b\,[$	X	X
$]-\infty\,;+\infty\,[$	X	X

On peut affirmer tout cela directement, mais il faut savoir le prouver si nécessaire. Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouvons par exemple que $A =]\, a\,; +\infty\, [$ n'a ni maximum, ni minimum.

Tout d'abord, il n'a pas de maximum car il n'est pas majoré. En effet, s'il admet un majorant M, alors $M \geqslant a+1$ car $a+1 \in A$, mais alors $M+1 > M \geqslant a+1 > a$: on en déduit que $M+1 \in A$ (car $M+1 > a$) et que $M+1 > M$ ce qui est absurde car M est un majorant de A. A n'est donc pas majoré.

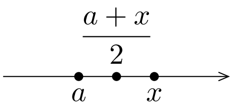
Supposons que A admette un minimum, noté x. De même que ci-dessus, si on pose $\alpha = \dfrac{a+x}{2}$, alors $a < \alpha < x$ donc $\alpha \in A$ et $\alpha < x$: x n'est pas un minorant de A ce qui est absurde.

Remarquons qu'un moyen simple de prouver qu'un ensemble n'admet pas de maximum est de supposer qu'il en existe un, puis de trouver un élément strictement supérieur. Nous verrons une autre méthode dans le chapitre 12, quand nous verrons les bornes supérieures.

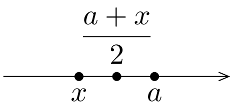
Remarque : Si a et x sont deux réels, $\alpha = \dfrac{a+x}{2}$ est le milieu du segment $[\, a\,; x\,]$. De plus, quand $a \neq x$, alors $\alpha \in]\, a\,; x\,[$: il faut impérativement y penser quand on cherche un réel compris strictement entre a et x, que x soit inférieur à a ou le contraire !

Rappelons que, quand on ne sait pas qui est le plus grand entre a et x, l'ensemble $[\, a\,; x\,]$ désigne l'ensemble des réels compris au sens large entre a et x.

Cas où $a < x$:



Cas où $x < a$:



Remarque : Comme on vient de le voir, l'inconvénient majeur du maximum ou du minimum est qu'il n'existe pas forcément. Par conséquent, on ne parlera jamais du maximum ou du minimum d'un ensemble sans avoir montré d'abord son existence (voir chapitre 0 : ne jamais parler d'un objet avant d'avoir montré son existence). On doit y penser tout seul, mais parfois, dans certains sujets, on trouve au préalable les questions suivantes :

- Justifier l'existence de $m = \min \ldots$.
- Montrer que $m = \min \ldots$ est bien défini.
- etc.

Précisons que la distance entre a et α ou entre x et α vaut $\dfrac{|x-a|}{2}$, cf. chapitre 2.5. Il ne faut pas confondre la distance entre les extrémités et le milieu (avec un $-$) et le milieu lui-même (avec un $+$).

Le sens est clair : on demande de montrer que l'ensemble en question admet un minimum (et idem avec un maximum le cas échéant).

On trouvera le même genre de questions avec les fonctions dans le chapitre 2.2 : justifier que $\max(f)$ est bien défini, par exemple.

Donnons enfin une équivalence pratique pour montrer qu'un nombre est inférieur ou supérieur à un maximum ou un minimum.

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- On suppose que A admet un minimum. Alors :

$$x \leqslant \min(A) \iff \forall a \in A, x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad x \geqslant \min(A) \iff \exists a \in A, x \geqslant a$$

- On suppose que A admet un maximum. Alors :

$$x \leqslant \max(A) \iff \exists a \in A, x \leqslant a \qquad \text{et} \qquad x \geqslant \max(A) \iff \forall a \in A, x \geqslant a$$

C'est totalement intuitif ! Par exemple, le plus grand élève fait moins d'1m90 si et seulement si tous les élèves font moins d'1m90, et le plus grand élève fait plus d'1m90 si et seulement si au moins un des élèves fait plus d'1m90.

Remarque : Nous généraliserons ce résultat avec la borne supérieure et la borne inférieure dans le chapitre 12.

III Ensembles particuliers

III.1 Ensembles finis

Nous reverrons la notion d'ensemble fini dans le chapitre 17. Nous nous contenterons de la définition intuitive suivante : un ensemble est fini quand il admet un nombre fini d'éléments.

Proposition. Un ensemble fini (non vide) admet un maximum et un minimum.

III.2 Parties de $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$

Théorème.

- Une partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.
- Une partie non vide minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.
- Une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.

Remarque : Il n'est pas nécessaire de minorer une partie de $\mathbb{N}$ pour qu'elle ait un plus petit élément : elle l'est automatiquement puisque $\mathbb{N}$ est minoré !

Remarque : Ce théorème (en tout cas les deux premiers points) est en fait un des axiomes qui définissent $\mathbb{N}$. Utilisons ce résultat pour prouver le principe de récurrence, que l'on rappelle ci-dessous :

Théorème (principe de récurrence). Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- H_{n_0} est vraie.
- $\forall n \geqslant n_0, H_n$ vraie $\Rightarrow H_{n+1}$ vraie.

Alors H_n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Posons $A = \{n \geqslant n_0 \,|\, H_n \text{ soit fausse}\}$. Prouvons par l'absurde que A est vide. Supposons donc A non vide. A est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément que l'on note n_1. Par définition d'un plus petit élément, $n_1 \in A$ donc $n_1 \geqslant n_0$ et H_{n_1} est fausse. Or, H_{n_0} est vraie par hypothèse donc $n_1 \neq n_0$ si bien que $n_1 \geqslant n_0 + 1$. Par conséquent, $n_1 - 1 \geqslant n_0$. De plus, n_1 est le plus petit élément de A et $n_1 - 1 < n_1$ donc $n_1 - 1 \notin A$. On en déduit que H_{n_1-1} est vraie. Or, $n_1 - 1 \geqslant n_0$ et H_{n_1-1} est vraie donc, par hérédité, H_{n_1} est vraie : absurde. On en déduit que A est vide donc il n'existe aucun $n \geqslant n_0$ tel que H_n soit fausse, c'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant n_0$, H_n est vraie.

On prouverait de la même façon le principe de récurrence forte et le principe de récurrence double. Nous verrons l'exemple du principe de récurrence de Cauchy dans l'exercice 14.

Donnons un autre exemple d'application de ce théorème.

Exemple : Montrons qu'une suite décroissante d'entiers naturels est stationnaire, c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeur dans $\mathbb{N}$. Notons $E = \{u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des termes de la suite. Alors E est une partie de $\mathbb{N}$ (car la suite est à valeurs dans $\mathbb{N}$) non vide (elle contient tous les termes de la suite) donc admet un plus petit élément x. Puisque $x \in E$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_{n_0}$. Soit $n \geqslant n_0$. La suite étant décroissante, $u_n \leqslant u_{n_0}$. Or, $u_n \in E$ et u_{n_0} est le plus petit élément de E donc $u_n \geqslant u_{n_0}$, si bien que $u_n = u_{n_0}$. Nous venons de prouver : $\forall n \geqslant n_0, u_n = u_{n_0}$. La suite est bien stationnaire.

Encore une fois, nous reverrons les suites dans le chapitre 12.

Attention, le fait que E contienne tous les termes de la suite ne veut pas dire que E est infini, car certains termes peuvent être égaux ! Par exemple, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, E est un singleton ! Cependant, E est non vide car contient au moins un terme de la suite.

Remarque : Le fait qu'une suite d'entiers naturels ne peut pas être strictement décroissante s'appelle le principe de la descente infinie. Ce principe est simple et intuitif (et nous venons de le prouver) : une suite d'entiers ne peut pas « descendre indéfiniment ». En général, on utilise cette méthode de la façon suivante : on supppose qu'il existe un entier naturel solution d'un problème, et on montre qu'alors il existe un autre entier naturel $p < n$ solution du problème, et on itère le procédé. On a construit une suite d'entiers naturels strictement décroissante, ce qui est impossible, et donc l'hypothèse initiale est absurde : le problème n'a pas de solution. C'est Fermat qui a utilisé ce principe pour la première fois pour prouver le grand théorème qui porte son nom pour $n = 4$.

Et il pensait que cette méthode se généralisait : d'où sa note dans la marge, sans doute la plus grande arnaque de toute l'histoire des mathématiques...

IV Brève extension aux familles de réels

Tout ce qui précède peut facilement être étendu aux familles de réels.Par exemple, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de réels, on dit qu'elle est majorée par un réel M si, pour tout $i \in I$, $x_i \leqslant M$

(on peut également dire qu'une famille est majorée si l'ensemble formé des termes de cette famille est majoré, c'est totalement équivalent). Nous ne rentrons pas dans les détails, c'est exactement la même chose, nous nous contenterons d'illustrer par un exemple.

Nous reverrons les familles dans le chapitre 4. Nous traiterons en détails le cas des suites (donc des familles indexées par $\mathbb{N}$) dans le chapitre 12.

Exemple : Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $x_i + \alpha > 0$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. α convient si et seulement si, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\alpha > -x_i$. Or, les $-x_i$ sont en nombre fini : ils admettent donc un maximum. Finalement, α convient si et seulement si $\alpha > \max(-x_i)$. Il suffit donc de prendre $\alpha = \max(-x_i) + 1$.

Exemple : Soit $n \geqslant 1$. Soit $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une famille de réels strictement négatifs. Prouver l'existence de α strictement positif tel que, pour tous i et j, $a_{i,j} + \alpha^2$ soit strictement négatif.

Soit $\alpha < 0$.

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ convient} \quad & \iff \quad \forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2, a_{i,j} + \alpha^2 < 0 \\
& \iff \quad \forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2, \alpha^2 < -a_{i,j} \\
& \iff \quad \forall (i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2, \alpha < \sqrt{-a_{i,j}} \\
& \iff \quad 0 < \alpha < \min_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(\sqrt{-a_{i,j}} \right)
\end{aligned}$$

Précisons que la troisième équivalence vient de la stricte croissance de la racine carrée et du fait que les $a_{i,j}$ sont strictement négatifs, et l'existence du minimum à la dernière ligne vient du fait qu'il y a un nombre fini de $a_{i,j}$. Il suffit donc de prendre α compris strictement entre 0 et ce minimum, ce qui est possible car le minimum d'une famille de réels strictement positifs est lui-même strictement positif.