Programme fictif de colle - Semaine n°26

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 27 - Variables aléatoires sur un univers fini

- cf. semaine 23.

Chapitre 28 - Espaces vectoriels

- cf. semaines 24 et 25.

Chapitre 29 - Applications linéaires

- cf. semaine 25.
- Application aux polynômes : démonstration des résultats admis au chapitre 19.
- Projecteurs et symétries : définition, noyau, image (pour une symétrie : $\ker(s - \mathrm{Id}), \ker(s + \mathrm{Id})$), caractérisation pratique.
- Méthode pour expliciter une base de $\mathrm{Im}(u)$, une base de $\ker(u)$, pour expliciter un projecteur, une symétrie.

Chapitre 30 - Espaces vectoriels de dimension finie

- Rappels du chapitre 28 : si un vecteur est CL des autres, on peut le « supprimer » pour engendrer le même espace ; si un vecteur n'appartient pas à l'espace engendré par une famille libre, on peut le « rajouter » et on garde une famille libre.
- Définition d'un espace de dimension finie. Exemples : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.
- Théorème de la base incomplète, de la base extraite.
- Si $n+1$ vecteurs sont CL de n vecteurs, alors les $n+1$ vecteurs sont liés (valable aussi en dimension infinie). Si E admet une famille génératrice à n éléments, alors toute famille à au moins $n+1$ éléments est liée, toute famille libre admet au plus n éléments. Un espace est de dimension finie s'il admet une famille libre infinie ou si, pour tout n, il admet une famille libre à n éléments (réciproque vraie). Exemples : $\mathbb{R}^\mathbb{R}, \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}), D(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}), \dots, \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ sont de dimension infinie.
- Si E est de dimension finie, toutes ses bases ont le même cardinal. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie, exemples : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X]$ (attention, de dimension $n+1$, pas de dimension n), $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Droites vectorielles, plans vectoriels. Interprétation de la dimension comme nombre de degrés de liberté. Ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 1, d'ordre 2 (à coefficients constants). Si E est de dimension finie supérieure ou égale à 2, $\mathscr{L}(E)$ est un anneau non commutatif. Dimension de $S_n(\mathbb{K})$, de $A_n(\mathbb{K})$.
- Produit d'espaces vectoriels de dimension finie.
- Familles libres et génératrices en dimension finie : en dimension n, le cardinal d'une famille libre est inférieur à n, cas d'égalité. Cas des familles génératrices. Familles échelonnées en degré dans $\mathbb{K}_n[X]$, dans $\mathbb{K}[X]$.
- Activité : si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent alors $u^n = 0$.
- Si E et F sont de dimension finie, CNS d'existence d'une injection (surjection, bijection) linéaire de E dans F. On peut identifier des espaces isomorphes (typiquement, $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, ou $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$). Deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont même dimension. Un espace vectoriel est de dimension n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2 (non traité en classe).

- Dimension d'un sous-espace vectoriel, cas d'égalité. Un moyen simple de prouver une égalité $E = F$ est de prouver une inclusion puis qu'ils sont de même dimension (finie).
- Rappel : théorème de concaténation des bases. Dimension d'une somme directe (valable en dimension infinie, seul compte le fait que les deux sous-espaces vectoriels soient de dimension finie). Existence d'un supplémentaire en dimension finie, tous les supplémentaires d'un espace vectoriel ont la même dimension.
- Formule de Graßmann. CNS pour que deux sev soient supplémentaires en dimension finie.
- Rang d'une AL, théorème du rang.

Chapitres au programme

Chapitre 27 (exercices uniquement), chapitre 28 (cours et exercices), chapitres 29 et 30 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. La famille $(1,1,1),(1,2,3),(2,1,1)$ est une base de $\mathbb{K}^3$ et donner les coordonnées de $(1,-1,1)$ dans cette base (méthode au choix de l'élève : avec un système ou une matrice).
2. Définition de la somme de deux sous-espaces vectoriels. E_1+E_2 est un sev de E qui contient E_1 et E_2 (démonstration).
3. Somme directe de deux sev de E. Caractérisation par l'intersection (démonstration).
4. Théorème de concaténation des bases (sans démonstration).
5. $E_1 = \mathrm{Vect}((-1,0,1))$ et $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{K}^3 \,|\, x-y-z=0\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^3$ (démonstration).
6. Définition d'une application linéaire, condition nécessaire importante et caractérisation pratique bis (sans démonstration).
7. L'examinateur donne une application simple de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$ dans un cas explicite (cela peut être avec des entiers n et p génériques, ou des entiers explicites, par exemple de $\mathbb{K}^3$ dans $\mathbb{K}^2$) et demande si elle est linéaire.
8. L'examinateur donne un endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ et demande une base du noyau et une base de l'image (il n'est pas demandé de prouver la linéarité dans cette question).
9. Détermination d'une AL étant donnée l'image d'une base (énoncé précis, sans démonstration).
10. Définition du noyau, de l'image. Écriture de $y \in \mathrm{Im}(u)$ avec des quantificateurs. Caractérisation de l'injectivité (démonstration).
11. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité à l'aide de l'image d'une base (sans démonstration).
12. Définition d'un projecteur, d'une symétrie, avec un joli dessin pour chaque (un seul dessin de projecteur et un seul dessin de symétrie, au choix de l'élève, en dimension 2 ou 3).
13. Définition d'un espace vectoriel de dimension finie, de la dimension d'un espace de dimension finie. Dimension de $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}_n[X], \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (sans démonstration). Donner au moins 5 espaces de dimension infinie (sans démonstration).
14. Dimension de $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ (démonstration « avec les mains »).
15. Que peut-on dire du cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice en dimension finie ? Énoncé précis, sans démonstration.
16. Dimension d'un sous-espace vectoriel (énoncé précis, sans démonstration).
17. Formule de Graßmann (sans démonstration).
18. Théorème du rang (sans démonstration).

Groupes B - C :

1. Caractérisation des homothéties (démonstration).
2. L'application

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est linéaire (démonstration).

3. Si $\dim(E) = n$ et si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent alors $u^n = 0$ (démonstration).
4. Théorème du rang (démonstration).

Groupe C :

1. Si $p \in \mathscr{L}(E)$ et vérifie $p^2 = p$ alors p est un projecteur (démonstration).
2. Dimension de $S_n(\mathbb{K})$ (démonstration propre).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Vacances !
- Suite de la dimension finie.

Exercices à préparer

Exercices 26, 27, 28, 29, 31, 32, 35, 37, 39, 41, 42, 43, 48, 49 du chapitre 29.

Cahier de calcul

Rien cette semaine !