Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 13

Exercice - Chaînes et antichaînes

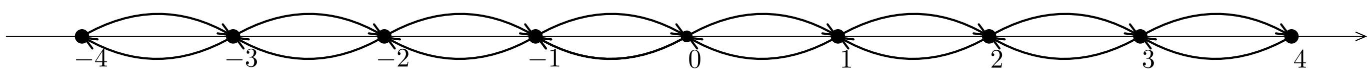
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit F un sous-ensemble de $\mathscr{P}(E)$. On dit que F est une chaîne s'il existe $A_1, \dots, A_n \subset E$ tels que $F = \{A_1 ; \dots ; A_n\}$ et $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n = E$ avec, pour tout i, $\text{card}(A_i) = i$. Au contraire, F est une antichaîne si aucun élément élément de F ne contient un autre élément de F (et si le cardinal de F est quelconque, pas forcément égal à n).

1. Montrer qu'il existe $n!$ chaînes.
2. Soit $A \subset E$ de cardinal k. Donner le nombres de chaînes contenant A.
3. Soient A et B deux éléments distincts d'une même antichaîne. Montrer que A et B ne peuvent pas appartenir à une même chaîne.
4. Soit F une antichaîne. Pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, on pose m_k le nombre de sous ensembles de E de cardinal k appartenant à F. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$
5. Montrer que pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.
6. En déduire le théorème de Sperner (démontré en 1928, alors qu'il avait... 23 ans) : une antichaîne a un cardinal inférieur ou égal à $\displaystyle\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ et cette borne est atteinte (on pourra chercher un objet dans le cours qui a ce cardinal).

Problème 1 - Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Le but de ce problème est d'étudier [1] quelques propriétés des marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$ (qui, comme vous allez le voir dans ce DM et le DM n$^{\text{o}}$ 20, apparaissent régulièrement aux concours). Intuitivement, une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est une succession de déplacements ± 1 effectués « au hasard », et on étudie alors le comportement asymptotique de l'élément qui se déplace : repasse-t-il une infinité de fois par son point de départ ? S'éloigne-t-il « à l'infini » ? Visite-t-il chaque élément de $\mathbb{Z}$? etc.

Plus précisément, on munit une droite d'un repère $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$. Une particule située sur un point d'abscisse $k \in \mathbb{Z}$ peut sauter à chaque instant sur le point d'abscisse $k+1$ (ce qu'on appelle une montée) ou sur le point d'abscisse $k-1$ (ce qu'on appelle une descente) :



Le but de ce problème est d'étudier certains aspects combinatoire de ce modèle (très riche !).

Partie I - Chemins

Dans tout le problème, plutôt que de représenter une marche aléatoire horizontalement comme ci-dessus [2], nous les représenterons plutôt sous forme de chemin. Plus précisément, on munit le plan d'un repère orthonormé direct. Soient a, b, c, d des entiers tels que $a < c$. On appelle chemin allant de (a, b) à (c, d) une ligne polygonale dans le plan joignant le point de coordonnées (a, b) au point de coordonnées (c, d) en ne faisant que des montées (déplacement selon le vecteur $(1, 1)$) et des descentes (déplacement selon le vecteur $(1, -1)$). Le chemin est constitué alors de $n = c - a$ pas.

Ci-dessous un exemple d'un chemin allant de $(0, 0)$ à (n, k) avec $n = 20$ et $k = 2$. Il est constitué de deux montées successives, puis d'une descente, puis de trois montées successives, puis de deux descentes successives, etc.

1. Modestement ! D'ailleurs, on en reparlera dans le DM n$^{\text{o}}$ 20.
2. En effet, cette représentation est peu claire : par exemple, sur le dessin ci-dessus, dans quel ordre se produisent les montées ou les descentes ?

On peut donc représenter une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ comme un chemin : par exemple, le chemin représenté ci-dessus représente la marche aléatoire partant de 0 et effectuant dans l'ordre les déplacements :

$$(1,1,-1,1,1,1,-1-1,1,-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1,1)$$

1. Combien y a-t-il de chemins possibles issus de $(0,0)$ et effectuant n pas ?
2. Soit $k \in [\![-n\,;\,n]\!]$. Considérons un chemin allant de $(0,0)$ à (n,k).
   (a) Notons m le nombre de montées et d le nombre de descentes. Calculer $m+d$ et $m-d$. En déduire que n et k ont la même parité.
   (b) En déduire que le nombre de chemins allant de $(0,0)$ à (n,k) est $\binom{n}{\frac{n+k}{2}}$.
3. Soient $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ avec $a < c$ et $|d-b| \leq c-a$. Déduire de ce qui précède le nombre de chemins allant de (a,b) à (c,d). On pourra justifier rapidement que le nombre recherché est égal au nombre de chemins reliant $(0,0)$ à un point (n,k) que l'on explicitera et illustrer par un dessin.

Partie II - Problème du scrutin et principe de réflexion

On s'intéresse dans cette partie au problème du scrutin[3] : étant donnés deux candidats A et B à une élection, si A a obtenu a voix et B a obtenu b voix, avec $a > b$, quelle est la probabilité[4] (si on considère que les bulletins sont suffisamment mélangés pour que tous les dépouillements possibles soient équiprobables) pour que A soit strictement en tête d'un bout à l'autre[5] du dépouillement ?

Il y a plusieurs façons de résoudre ce problème (voir par exemple la preuve de Bertrand[6] dans l'exercice 55 du chapitre 26). Nous allons dans cette partie nous intéresser à une preuve faisant appel à un résultat classique en combinatoire (voir par exemple le sujet de Maths 2 Centrale PSI 2023) : le principe de réflexion.

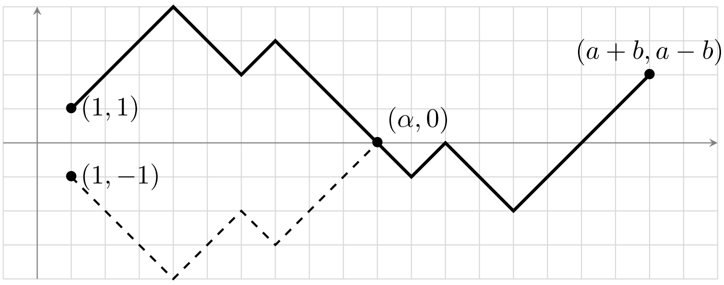
On modélise cette expérience en prenant Ω l'ensemble des $(a+b)$-uplets d'éléments de $\{\pm 1\}$ contenant exactement a fois le nombre 1 (correspondant à un bulletin pour A) et b fois le nombre -1 (correspondant à un bulletin pour B). Comme ci-dessus, une telle succession de ± 1, notée $(c_1,\dots,c_{a+b})$ est représentée par une ligne brisée $(M_0,\dots,M_{a+b})$ où, pour tout k, M_k a pour coordonnées (x_k,y_k) avec $x_k = k$ et $y_k = y_{k-1}+c_k$ c'est-à-dire que l'ordonnée augmente de 1 lorsqu'on a un bulletin pour A et diminue de 1 si on a un bulletin pour B. Ci-dessous, en prenant $a=3$ et $b=2$, on a représenté le dépouillement $(1,1,-1,1,-1)$:

1. Justifier que

$$\operatorname{card}(\Omega) = \binom{a+b}{a}$$

3. Parfois appelé problème du ballot, mais c'est un anglicisme...
4. Puisque nous n'avons pas encore vu les probabilités (chapitres 26 et 27), je vous rassure : la seule connaissance en probabilités utile dans cette partie est que, si on note E l'événement donc on cherche la probabilité, que $P(E) = \operatorname{card}(E)/\operatorname{card}(\Omega)$ (si on suppose, comme on le fait ici, qu'on est dans une situation d'équiprobabilité).
5. Sauf au départ évidemment.
6. Le même que celui du postulat de Bertrand (cf. DS n° 2 d'il y a deux ans) et des séries de Bertrand.

2. **Principe de réflexion**[7] **:** Montrer que le nombre de chemins reliant $(1,1)$ à $(a+b,a-b)$, tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(1,-1)$ à $(a+b,a-b)$. On pourra s'inspirer du dessin ci-dessous :



3. Résoudre le problème du scrutin en prouvant que la probabilité recherchée vaut $\dfrac{a-b}{a+b}$.

Problème 2 (facultatif) - Coloriage d'un graphe (CCP PSI 1999)

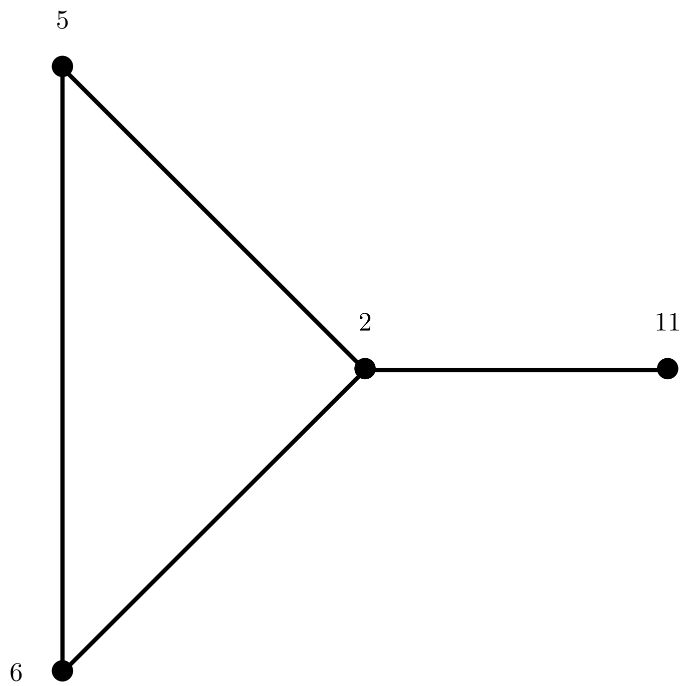
Dans tout le problème, on appellera **graphe** tout couple (S,A) où S est une partie finie non vide de $\mathbb{N}$ et où A est un ensemble de paires d'éléments de S (une paire étant un ensemble de cardinal 2). Etant donné un graphe (S,A), les éléments de S seront appelés **sommets** du graphe G, et les éléments de A seront appelés les **arêtes** du graphe G. Pour tout graphe G, l'ensemble des sommets sera noté S_G, ou simplement S s'il n'y a pas d'ambiguïté. De même, l'ensemble des arêtes sera noté A_G ou simplement A s'il n'y a pas d'ambiguïté. On appellera n_G, ou simplement n s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre de sommets du graphe.

Dans tout le problème, on considère, à titre d'exemples, les quatre graphes particuliers définis de la façon suivante : pour $k \in \{1,2,3,4\}, G_k = (S_k, A_k)$ avec

- $S_k = \{1;2;3;4;5\}$.
- $A_1 = \{\{1;2\};\{2;3\};\{3;1\};\{3;4\};\{4;5\}\}$.
- $A_2 = \{\{4;2\};\{2;3\};\{3;1\};\{3;4\};\{4;5\}\}$.
- $A_3 = \{\{1;2\};\{2;3\};\{3;5\};\{3;4\};\{4;5\}\}$.
- $A_4 = \{\{1;3\};\{1;4\};\{1;5\};\{3;5\}\}$.

Une représentation d'un graphe G consiste à associer à chaque sommet de G un point du plan et à tracer le segment défini par deux de ces points si, et seulement si, les sommets auxquels sont associés ces points forment une arête de G. Les points représentant les sommets du graphe doivent être choisis de telle sorte que les segments représentant deux arêtes distinctes quelconques ne puissent se rencontrer en plus d'un point.

Par exemple, le graphe $G = (S,A)$ où $S = \{2;5;6;11\}$ et $A = \{\{2;5\};\{6;5\};\{2;6\};\{2;11\}\}$ peut être représenté par la figure suivante



7. Question (adaptée : il n'y avait pas de dessin dans la question originelle) tirée de Centrale PSI 2023 Maths 2.

1. Représenter les graphes G_1, G_2, G_3, G_4. On dira que deux graphes $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont **isomorphes** s'il existe une bijection $\varphi : S \to S'$ telle que pour tous $x, y \in S^2$:

$$\{x; y\} \in A \iff \{\varphi(x); \varphi(y)\} \in A'.$$

On dit alors que φ est un isomorphisme de G sur G'.

2. (a) Montrer que les graphes G_1 et G_3 sont isomorphes.

   (b) Pour tout graphe $G = (S, A)$ et tout sommet s de S de ce graphe, on note $\alpha_G(s)$, où simplement $\alpha(s)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, le nombre d'arêtes du graphe auxquelles s appartient, et on note $V_G(s)$ (ou simplement $V(s)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble :

$$V(s) = \{t \in S \,|\, \{s; t\} \in A\}.$$

   $V_G(s)$ est donc un ensemble de cardinal $\alpha_G(s)$. Montrer que si φ est un isomorphisme de $G = (S, A)$ dans $G' = (S', A')$ alors pour tout $s \in S, \alpha_{G'}(\varphi(s)) = \alpha_G(s)$.

   (c) Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?

Dans la suite du problème, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ et tout graphe G

- On appelle p-coloriage de G toute application $\psi : S \to [\![1 \,;\, p]\!]$.
- On appelle bon p-coloriage de G tout p-coloriage ψ de G tel que pour tout couple $s, t \in S^2$ vérifiant $\{s, t\} \in A, \psi(s) \neq \psi(t)$.
- On note $B(p, G)$ l'ensemble des bons p-coloriages de G.
- De plus, on note $f_G(p) = \mathrm{card}(B(p, G))$ et $E_G = \{p \in \mathbb{N}^* \,|\, f_G(p) \neq 0\}$.

3. Soit G un graphe.

   (a) Montrer que $n_G \in E(G)$.

   (b) Prouver que si $p \in E(G)$ alors $p + 1 \in E(G)$.

   (c) En déduire l'existence d'un unique $\theta_G \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(G) = \{p \in \mathbb{N}^* \,|\, p \geq \theta_G\}$.

Le but des questions suivantes est d'étudier le principe d'une méthode visant à déterminer la fonction f_G et le nombre θ_G appelé **nombre chromatique de** G pour n'importe quel graphe G. Soit G un graphe.

4. On suppose A_G vide. Donner l'expression de $f_G(p)$ en fonction de p. On suppose désormais A_G non vide. On note $R(G)$ la partie de S_G définie par :

$$R(G) = \bigcup_{a \in A_G} a.$$

On définit deux sommets particuliers de G en posant

$$\sigma(G) = \min R(G) \qquad \text{et} \qquad \tau(G) = \min \{t \in S_G \,|\, \{\sigma(G), t\} \in A_G\}.$$

5. Déterminer sans démonstration $\sigma(G_4)$ et $\tau(G_4)$.

6. On note $k_G : S_G \to S_G$ l'application définie par $k_G(s) = s$ pour $s \neq \sigma(G)$ et $k_G(\sigma(G)) = \tau(G)$. On définit deux nouveaux graphes à partir de G, notés respectivement $\lambda(G)$ et $\mu(G)$, en posant :

$$S_{\lambda(G)} = S_G, \qquad A_{\lambda(G)} = A_G \setminus \{\{\sigma(G); \tau(G)\}\}$$

$$S_{\mu(G)} = S_G \setminus \{\sigma(G)\}, \qquad A_{\mu(G)} = \left\{\{k_G(s); k_G(t)\} \,|\, \{s, t\} \in A_{\lambda(G)}\right\}$$

Représenter sans démonstration les graphes $\lambda(G_4)$ et $\mu(G_4)$.

7. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Expliquer brièvement pourquoi $B(p, G) \bigcap B(p, \mu(G)) = \emptyset$.

   (b) Vérifier que $B(p, G) \subset B(p, \lambda(G))$. Pour tout $\psi \in B(p, \mu(G))$ on note $\widetilde{\psi}$ le p-coloriage de $\lambda(G)$ défini par :

$$\widetilde{\psi}(\sigma(G)) = \psi(\tau(G)) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\psi}(s) = \psi(s) \quad \text{si} \quad s \neq \sigma(G).$$

   (c) Vérifier que $\widetilde{\psi} \in B(p, \lambda(G))$.

(d) Etablir une relation entre $\operatorname{card}(B(p,G)), \operatorname{card}(B(p,\mu(G)))$ et $\operatorname{card}(B(p,\lambda(G)))$. Dans ce but, on pourra considérer l'application γ de $B(p,G)\bigcup B(p,\mu(G))$ dans $B(p,\lambda(G)$ définie par :

$$\begin{cases} \gamma(\psi)=\psi \quad \text{si} \quad \psi \in B(p,G) \\ \\ \gamma(\psi)=\widetilde{\psi} \quad \text{si} \quad \psi \in B(p,\mu(G)) \end{cases}$$

8. Exprimer la fonction f_G à l'aide des fonctions $f_{\lambda(G)}$ et $f_{\mu(G)}$.
9. Prouver que pour tout graphe G la fonction f_G est polynomiale à coefficients entiers de degré n_G (on pourra effectuer une récurrence sur le nombre d'arêtes).
10. Que peut-on dire des fonctions f_G et $f_{G'}$ si G et G' sont des graphes isomorphes ?
11. Soit $G = (\{1;2;3;4\}, \{\{1;2\};\{2;3\};\{3;4\};\{4;1\}\})$.

(a) Expliciter f_G sans le justifier (question pas si difficile mais longue !).

(b) Déterminer le nombre chromatique θ_G de G. Commenter.