Correction du DM 17

Problème - Suites équiréparties

Partie I. Généralités

1 C'est immédiat :

$$\boxed{\text{La négation de « } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est équirépartie » est : il existe } 0 \leqslant a < b \leqslant 1 \text{ tels que } \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \text{ ne tende pas vers } b-a.}$$

> En d'autres termes, une suite n'est pas équirépartie lorsqu'il existe (au moins) un intervalle $]\,a\,;b\,[$ dans lequel la suite ne se répartit pas équitablement. Attention de ne pas nier la triple inégalité $0 \leqslant a < b \leqslant 1$. On peut écrire la définition de la façon suivante :
>
> $$\forall (a,b) \in [\,0\,;1\,]^2, a < b \Rightarrow \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$$
>
> et là, on n'est plus tenté de nier les inégalités.

2 Il n'y a aucun terme de la suite dans l'intervalle $]\,1/2\,;1\,[$ (bien sûr, on pouvait prendre d'autres contre-exemples) si bien que, pour tout n, $\mathrm{S}_n(1/2,1) = 0$ et donc, en divisant par n, cette quantité tend vers 0 et pas vers $1 - 1/2 = 1/2$.

$$\boxed{\text{Cette suite n'est pas équirépartie.}}$$

> Cela se voit très bien : la suite décroît et les termes vont s'accumuler au voisinage de 0 (on dit d'ailleurs que 0 est un point d'accumulation) donc ne vont pas remplir de façon satisfaisante tous les intervalles.

3 L'idée est la même que précédemment : si la suite converge, alors les termes vont s'accumuler au voisinage de L donc, si on s'éloigne un peu, il n'y a qu'un nombre fini de termes donc la fréquence va tendre vers 0. Faisons cela rigoureusement.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite L, et soit $\alpha = (\mathrm{L}+1)/2$. Alors $\mathrm{L} < \alpha$ donc il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite supérieurs stricts à α, donc $(\mathrm{S}_n(\alpha,1))_{n\geqslant 1}$ est bornée, si bien que

$$\frac{\mathrm{S}_n(\alpha,1)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq 1-\alpha$$

car $1 > \alpha$. Le résultat en découle.

$$\boxed{\text{Une suite convergente n'est pas équirépartie.}}$$

La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'une suite qui diverge n'est pas forcément équirépartie (ou, ce qui revient au même par contraposée, une suite qui n'est pas équirépartie n'est pas forcément convergente) : par exemple, la suite qui vaut 0 si n est pair et 1 si n est impair diverge mais n'est pas équirépartie (de même qu'à la question 2).

$$\boxed{\text{Une suite qui n'est pas équirépartie n'est pas forcément convergente.}}$$

4 Supposons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ prenne un nombre fini de valeurs, qu'on note $a_1 < \cdots < a_p$ (et qu'on a donc ordonnées dans l'ordre croissant). Alors, pour tout n, $\mathrm{S}_n(a_1,a_2) = 0$ (rappelons qu'on compte le nombre de termes dans l'intervalle ouvert) et on montre que la suite n'est pas équirépartie comme précédemment.

$$\boxed{\text{Une suite qui prend un nombre fini de valeurs n'est pas équirépartie.}}$$

Une suite périodique prenant un nombre fini de valeurs :

$$\boxed{\text{Une suite périodique n'est pas équirépartie.}}$$

5 Question de cours :

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathrm{A}^2, a < b \Rightarrow \exists x \in \mathrm{A}, a < x < b}$$

Le résultat est intuitif : si une suite est équirépartie, elle doit remplir chaque intervalle équitablement, et donc tomber une infinité de fois, et donc au moins une seule, dans chaque intervalle. Prouvons-le proprement.

Soient donc $a < b$ deux éléments de $[0;1]$. Supposons que la suite soit équirépartie mais que l'ensemble $]a;b[$ ne contienne aucun terme de la suite. Alors, pour tout n, $\mathrm{S}_n(a,b) = 0$ (encore une fois, on compte le nombre de termes dans l'intervalle ouvert) donc la suite de terme général $\mathrm{S}_n(a,b)/n$ converge vers 0 et pas vers $b-a$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\text{Si la suite est équirépartie, l'ensemble de ses termes est dense dans } [0;1].}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ On a $u_1 = v_2, u_2 = v_4, u_3 = v_6$ etc. Plus généralement, $u_n = v_{2n}$ si bien que l'ensemble des termes de la suite (v_n) est simplement le même que l'ensemble des termes de (u_n), auquel on a rajouté 0 :

$$\{v_n \,|\, n \geqslant 1\} = \{u_n \,|\, n \geqslant 1\} \cup \{0\}$$

Or, $\{u_n \,|\, n \geqslant 1\}$ est dense dans $[0;1]$ par hypothèse, et un ensemble qui contient un ensemble dense est lui-même dense (on peut l'affirmer directement, mais c'est très simple à prouver : si A est dense et est contenu dans B, alors tout intervalle ouvert non vide contient un élément de A par densité de A donc un élément de B). On en déduit que :

$$\boxed{\{v_n \,|\, n \geqslant 1\} \text{ est dense dans } [0;1].}$$

Cependant, pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n(0,1) \leqslant n/2$ car au moins un terme sur deux est égal à 0, donc il y a au plus un terme sur deux dans l'intervalle $]0;1[$, si bien que, pour tout n, $\mathrm{S}_n(0,1) \leqslant 1/2$ et donc ne peut pas tendre vers 1 (attention à ne pas dire que sa limite est inférieure ou égale à 1/2, cette quantité peut ne pas avoir de limite). En conclusion :

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas équirépartie : la réciproque est fausse.}}$$

> Et là, c'est l'angoisse : existe-t-il des suites équiréparties ? En effet, pour l'instant, on ne trouve que des suites qui ne conviennent pas, et que des conditions nécessaires, pas des conditions suffisantes !

Partie II. Critère de Weyl : sens (3) ⇒ (2)

Supposons donc l'assertion (3) vraie, et prouvons que l'assertion (2) est vraie. Soit donc $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $n \geqslant 1$. L'idée est de partir de (3) pour prouver (2), donc on pose :

$$f : \begin{cases} [0;1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto e^{2ip\pi x} \end{cases}$$

La fonction f est évidemment continue sur $[0;1]$ et vérifie $f(0) = f(1)$ donc, d'après l'hypothèse (3) :

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi u_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

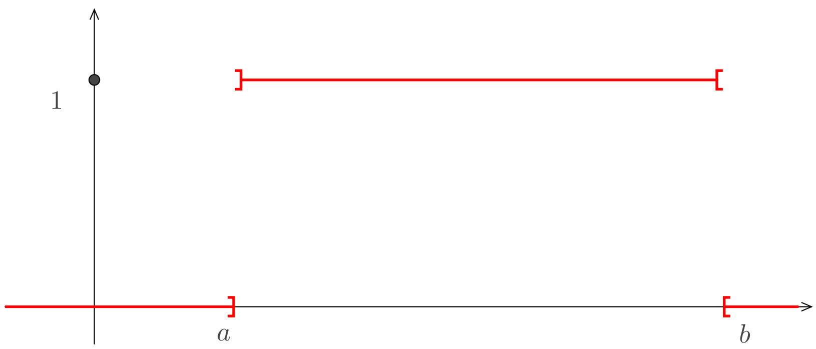
Or
$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 e^{2ip\pi t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{e^{2ip\pi t}}{2ip\pi}\right]_0^1 \\ &= \frac{e^{2ip\pi} - e^0}{2ip\pi} \\ &= \frac{1-1}{2ip\pi}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que cette intégrale est nulle : l'assertion (2) en découle.

$$\boxed{\text{L'implication (3) ⇒ (2) du critère de Weyl est démontrée.}}$$

Partie III. Critère de Weyl : sens (1) ⇒ (3)

$\boxed{\textbf{1.(a)}}$ L'indicatrice de $]\,a\,;b\,[$ est la fonction qui vaut 1 sur $]\,a\,;b\,[$ et nulle ailleurs. Ci-dessous son graphe :



$\boxed{\textbf{1.(b)}}$ Il suffit de remarquer que la somme de nombres valant 0 ou 1 est le nombre de 1 parmi ces nombres : il en découle que la somme des $\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(u_k)$ est le nombre de termes $\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(u_k)$ valant 1, donc le nombre de u_k appartenant à $]\,a\,;b\,[$, c'est-à-dire $\mathrm{S}_n(a,b)$. En d'autres termes,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(u_k) = \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$$

De plus
$$\int_0^1 \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{d}t = b-a$$

Le résultat en découle.
$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(t)\,\mathrm{d}t}$$

$\boxed{\textbf{1.(c)}}$ L'égalité de l'énoncé découle du fait que $]\,x\,;z\,[\,=\,]\,x\,;y\,[\,\cup\{y\}\cup\,]\,y\,;z\,[$ et que cette union est disjointe. Le nombre d'éléments de la suite dans le premier ensemble est donc la somme des nombres d'éléments de la suite dans chacun des trois ensembles, c'est-à-dire que $\mathrm{S}_n(x,z) = \mathrm{S}_n(x,y) + \mathrm{T}_n(y) + \mathrm{S}_n(y,z)$, d'où l'égalité de l'énoncé :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \mathrm{T}_n(y) = \mathrm{S}_n(x,z) - \mathrm{S}_n(x,y) - \mathrm{S}_n(y,z)}$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{T}_n(y)}{n} = \frac{\mathrm{S}_n(x,z)}{n} - \frac{\mathrm{S}_n(x,y)}{n} - \frac{\mathrm{S}_n(y,z)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} z-x-(y-x)-(z-y) = 0$$

De même que dans la question précédente, $\mathrm{T}_n(a)/n$ est égal à la quantité de gauche de l'énoncé (avec les indicatrices), donc cette quantité tend vers 0, ce qui est la valeur de l'intégrale de $\mathbb{1}_{\{a\}}$: le résultat est donc vrai avec l'indicatrice d'un singleton.

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{a\}}(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \int_0^1 \mathbb{1}_{\{a\}}(t)\,\mathrm{d}t}$$

> Pour des suites équiréparties, seule compte la longueur. Par hypothèse, les suites sont bien réparties dans tout intervalle ouvert (au sens de la définition, i.e. la proportion de termes de la suite tend vers la longueur de l'intervalle). On vient de montrer que cela marche aussi avec les singletons, et on pourrait prouver de la même façon que cela marche aussi avec les intervalles fermés ou semi-ouverts.

$\boxed{\textbf{2}}$ Rappelons qu'une fonction g est en escalier lorsqu'il existe une subdivision $\sigma = (a_0,\dots,a_p)$ telle que, pour tout $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$, g soit constante sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$.

$$\boxed{\text{C'est du cours.}}$$

Soit donc une fonction en escalier.Pour tout $i \in [\![\,0\,;\,p-1\,]\!]$, notons λ_i la valeur de g sur $]\,a_i\,;a_{i+1}\,[$ et, pour tout $i \in [\![\,0\,;\,p\,]\!]$, notons $\mu_i = f(a_i)$. Par conséquent :

$$\boxed{g=\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i \mathbb{1}_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}+\sum_{i=0}^{p}\mu_i \mathbb{1}_{\{a_i\}} : g \text{ est CL d'indicatrices.}}$$

Dès lors, par linéarité de la somme puis passage à la limite :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i \mathbb{1}_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}(u_k)+\sum_{i=0}^{p}\mu_i \mathbb{1}_{\{a_i\}}(u_k)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}(u_k)\right)+\sum_{i=0}^{p}\mu_i\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{\{a_i\}}(u_k)\right)\\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i\int_0^1 \mathbb{1}_{]\,a_i\,;a_{i+1}\,[}(t)\,\mathrm{d}t+\sum_{i=0}^{p}\lambda_i\int_0^1 \mathbb{1}_{\{a_i\}}(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et, par linéarité de l'intégrale, cette quantité est égale à l'intégrale de g, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{L'assertion (2) est vraie pour les fonctions en escalier.}}$$

> J'acceptais aussi un simple argument du type : le résultat est vrai pour les indicatrices donc, par linéarité, pour les fonctions en escalier.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Soit donc $\varepsilon>0$. D'après le résultat du cours concernant la densité des fonctions en escalier, il existe g en escalier telle que $|f-g|\leqslant\varepsilon$. De plus, d'après la question précédente :

$$\exists n_0, \forall n\geqslant n_0, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)-\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\varepsilon$$

Soit donc $n\geqslant n_0$. L'idée est d'utiliser deux fois l'inégalité triangulaire. Notons A la valeur absolue de gauche dans l'énoncé. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)-\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(u_k)-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)\right|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)-\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|+\left|\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| && \text{(I.T.)}\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|f(u_k)-g(u_k)|+\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(u_k)-\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right|+\int_0^1 |g(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t && \text{(I.T.)}\\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon+\varepsilon+\int_0^1 \varepsilon\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

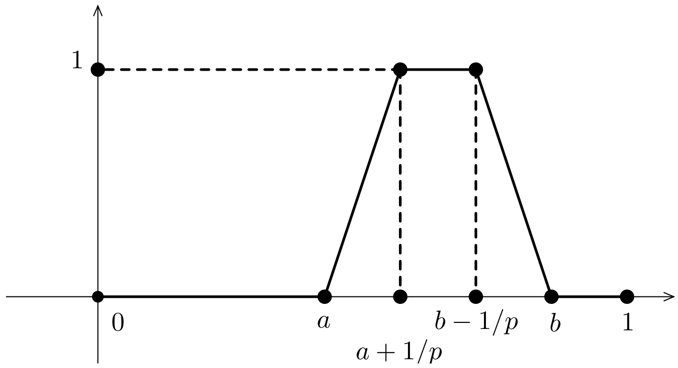
ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{L'assertion (3) du critère de Weyl est donc démontrée.}}$$

> L'argument clef étant la densité des fonctions en escalier, l'assertion (3) est encore valable avec des fonctions continues par morceaux. L'hypothèse $f(0)=f(1)$ n'est pas utile ici, l'assertion (3) est vraie pour toute fonction continue (par morceaux), l'hypothèse $f(0)=f(1)$ sera utile pour le sens (2) $\Rightarrow$ (3).

Partie IV. Critère de Weyl : sens (3) $\Rightarrow$ (1)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Ci-dessous le graphe de φ_p. La condition $1/p<(\beta-\alpha)/2$ est nécessaire si on veut qu'il y ait « un plateau » sur l'intervalle $[\,\alpha+1/p\,;\beta-1/p\,]$:



2 La fonction φ_p est continue et vérifie $\varphi_p(0) = \varphi(1)$ donc, d'après l'assertion (3) :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$$

Il suffit donc de montrer que cette intégrale vaut $b - a - 1/p$. Or :

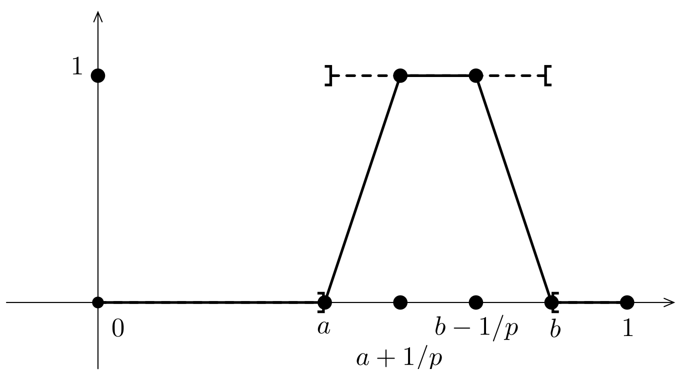
$$\int_0^1 \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a+1/p} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a+1/p}^{b-1/p} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b-1/p}^{b} \varphi_p(t)\,\mathrm{d}t$$

La première intégrale est l'aire d'un triangle de hauteur 1 de base $1/p$ donc cette intégrale vaut $1/2p$, et idem pour la troisième, tandis que celle du milieu vaut $b - a - 2/p$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b - a - \frac{1}{p}}$$

3 Si $x \notin \,]\,a\,;b\,[$ alors $x \leqslant a$ ou $x \geqslant b$: dans tous les cas, $\varphi_p(x) = 0 = \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(x)$, d'où l'inégalité voulue (qui est, dans ce cas, une égalité). Si $x \in [\,a + 1/p\,;b - 1/p\,]$, alors $x \in \,]\,a\,;b\,[$ donc $\varphi_p(x) = 1 = \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(x)$, et là aussi le résultat est vérifié (et est une égalité). Enfin, dans le cas où $x \in \,]\,a\,;a + 1/p\,[$ ou $]\,b - 1/p\,;b\,[$, alors $\varphi_p(x) \leqslant 1 = \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(x)$, d'où le résultat.

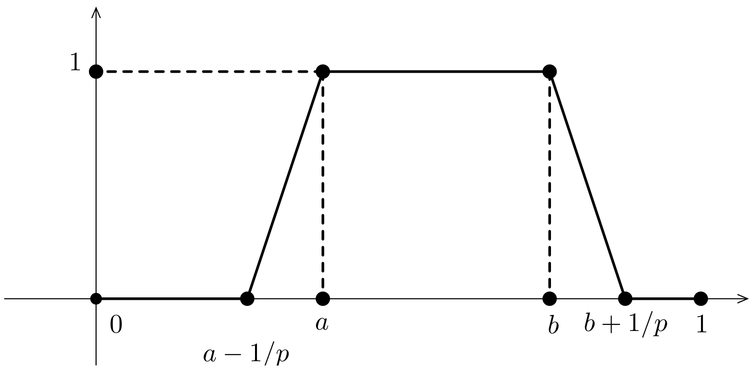
$$\boxed{\varphi_p \leqslant \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(x)}$$

> Ce résultat se voit particulièrement bien si on trace les deux graphes sur la même figure : ci-dessous le graphe de φ_p en traits pleins et le graphe de l'indicatrice en pointillés (qu'on voit très peu sur les intervalles $[\,0\,;a\,]$ et $[\,b\,;1\,]$ parce que, justement, il est confondu avec celui de φ_p).
>
> 
>

On définit de même pour p tel que $1/p < a$ et $b + 1/p < 1$ (pour « laisser le temps au plateau de redescendre ») une fonction ψ_p par :

- φ_p est continue sur $[\,0\,;1\,]$.
- φ_p est nulle sur $[\,0\,;a - 1/p\,]$ et sur $[\,b + 1/p\,;0\,]$.
- φ_p vaut 1 sur $[\,a\,;b\,]$.
- φ_p est affine sur $[\,a - 1/p\,;a\,]$ et sur $[\,b\,;b + 1/p\,]$.

Ci-dessous son graphe :



De même, $\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[} \leqslant \psi_p$ et on a bien la limite demandée (car l'hypothèse (3) est vraie).

$$\boxed{\text{D'où l'existence d'une telle fonction } \psi_p.}$$

4 Soit p_0 tel que, pour tout $p \geqslant p_0, 1/p \leqslant \varepsilon$. On se donne donc un entier $p \geqslant p_0$. De plus, d'après les questions précédentes, il existe n_0 et n_1 tels que :

$$\forall n \geqslant n_0, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(u_k) - \left(b - a - \frac{1}{p}\right)\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \forall n \geqslant n_1, \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k) - \left(b - a + \frac{1}{p}\right)\right| \leqslant \varepsilon$$

On note donc $\mathrm{N} = \max(n_0, n_1)$ et on se donne dans la suite $n \geqslant \mathrm{N}$. En particulier :

$$b - a - \frac{1}{p} - \varepsilon \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(u_k) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k) \leqslant b - a + \frac{1}{p} + \varepsilon$$

On a, de même qu'à la partie précédente :

$$\frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}(u_k)$$

Dès lors, étant donné que $\varphi_p \leqslant \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[} \leqslant \psi_p$:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_p(u_k) \leqslant \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_p(u_k)$$

et donc, puisque $n \geqslant \mathrm{N}$, d'après ce qui précède :

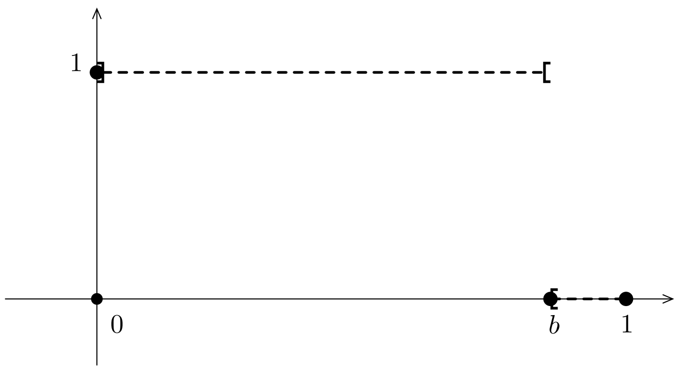
$$b - a - \frac{1}{p} - \varepsilon \leqslant \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \leqslant b - a + \frac{1}{p} + \varepsilon$$

Enfin, par choix de p, $1/p \leqslant \varepsilon$, d'où :

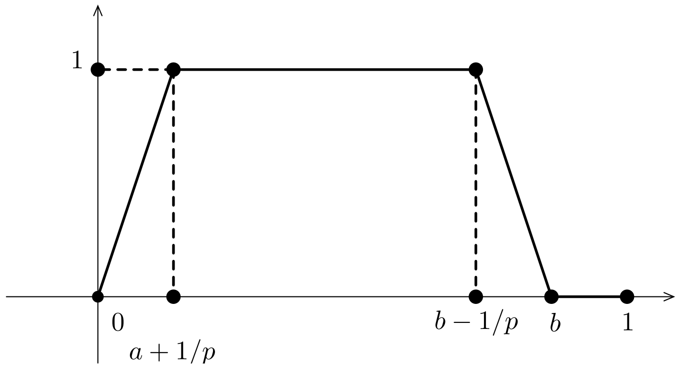
$$b - a - \varepsilon - \varepsilon \leqslant \frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \leqslant b - a + \varepsilon + \varepsilon$$

Ce qui est le résultat voulu. $\boxed{\text{C'est bon.}}$

5 Supposons donc que $a = 0$ et $0 < b$ si bien que le graphe de $\mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[}$ est :



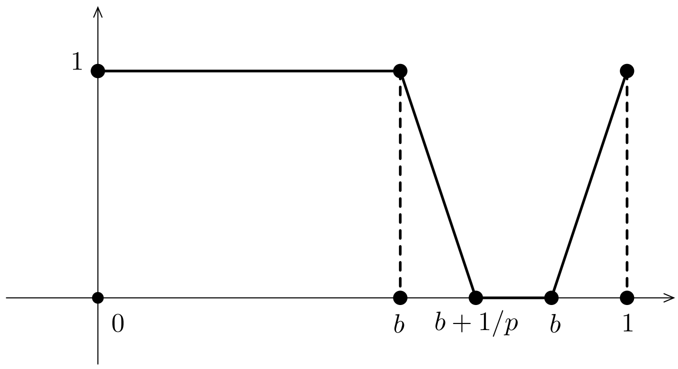
On définit la fonction φ_p de la même façon que ci-dessus :



Ce qui change, c'est la définition de ψ_p : l'astuce est de créer un pic entre $1-1/p$ et 1 pour avoir $\psi_p(0) = \psi_p(1)$. Plus précisément, on définit ψ_p par :

- φ_p est continue sur $[\,0\,;1\,]$.
- φ_p est nulle sur et sur $[\,b+1/p\,;1-1/p\,]$.
- φ_p vaut 1 sur $[\,0\,;b\,]$ et en 1.
- φ_p est affine sur $[\,b\,;b+1/p\,]$ et sur $[\,1-1/p\,;1\,]$.

Ci-dessous son graphe :



Alors on a encore $\varphi_p \leqslant \mathbb{1}_{]\,a\,;b\,[} \leqslant \psi_p$ et tout le reste du raisonnement est valide (y compris le fait que l'intégrale de ψ_p vaut $b-a+1/p$). Raisonnement tout à fait analogue si $b=1$.

$$\boxed{\text{Ce résultat est encore valable si } a=0 \text{ ou } b=1.}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ D'après les questions précédentes, pour tous $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$\frac{\mathrm{S}_n(a,b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b-a$$

ce qui est la définition d'une suite équirépartie.

$$\boxed{\text{L'assertion (1) du critère de Weyl est donc démontrée.}}$$

Partie V. Critère de Weyl : sens (2) ⇒ (3)

$\boxed{\mathbf{1}}$ Supposons donc (2) vraie. Soit P un polynôme trigonométrique, qu'on note donc comme dans l'énoncé. On a bien $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1) = a_0 + \cdots + a_n$ (les cos valent 1 en 0 et 2π et les sinus valent 0). On nous demande donc de montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t$$

Tout d'abord, calculons l'intégrale de droite. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 a_0\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{n} a_p \cos(2p\pi t)\,\mathrm{d}t + \sum_{p=1}^{n} b_p \int_0^1 \sin(2p\pi t)\,\mathrm{d}t$$

et on prouve facilement que cette intégrale est égale à a_0, les autres étant nulles. Or, d'après les formules d'Euler, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, on a :

$$\mathrm{P}(x) = a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p \times \frac{e^{2ip\pi x} + e^{-2ip\pi x}}{2} + \sum_{p=1}^{n} b_p \times \frac{e^{2ip\pi x} - e^{-2ip\pi x}}{2i}$$

si bien que, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}(u_k) = a_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p \times \frac{e^{2ip\pi u_k} + e^{-2ip\pi u_k}}{2} + \sum_{p=1}^{n} b_p \times \frac{e^{2ip\pi u_k} - e^{-2ip\pi u_k}}{2i}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(u_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n} a_p \times \frac{e^{2ip\pi u_k} + e^{-2ip\pi u_k}}{2} + \sum_{p=1}^{n} b_p \times \frac{e^{2ip\pi u_k} - e^{-2ip\pi u_k}}{2i}\right)$$

Le premier terme vaut a_0 donc tend vers a_0, et la suite est une CL de termes qui tendent vers 0 puisque l'assertion (2) est vraie. On en déduit que :

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(u_k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a_0 = \int_0^1 \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t : \text{l'assertion (3) est vraie pour les polynômes trigonométriques.}}$$

$\boxed{2}$ $g(0) = f(0)$ par définition (f et g coïncident sur $[\,0\,;1\,[$), $f(0) = f(1)$ par hypothèse, et g est 1-périodique donc $g(0) = g(1)$. On en déduit que $g(1) = g(0) = f(0) = f(1)$.

$$\boxed{g(1) = f(1)}$$

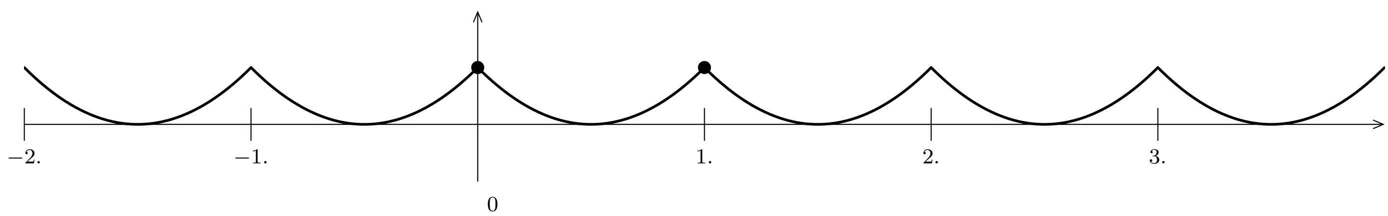
$\boxed{3}$ Attention (cf. chapitre 13 : attention aux points de recollement !) ce n'est pas parce que f est continue en 1 que g l'est forcément ! Il faut pour cela étudier la limite à droite et la limite à gauche.

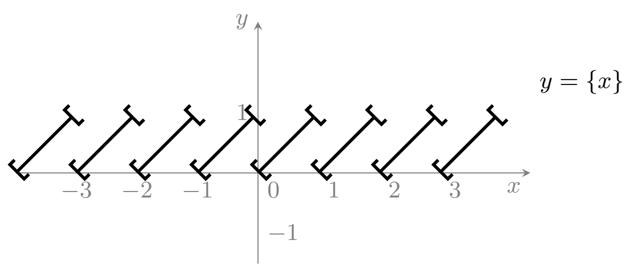
- f et g coïncident sur $[\,0\,;1\,]$ et f est continue donc g est continue à gauche en 1.
- Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$. Par 1-périodicité de g, $g(x) = g(x-1) = f(x-1)$ puisque $x - 1 \in \,]\,0\,;1\,[$, intervalle sur lequel f et g coïncident. Or, $x - 1 \xrightarrow[x \to 1^+]{} 0^+$ et f est continue en 0^+ donc $g(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} f(0) = f(1) = g(1)$. On en déduit que g est continue à droite en 1.

Dès lors, g est continue en 1 donc, par périodicité, en tous les éléments de $\mathbb{Z}$. f et g coïncident sur $]\,0\,;1\,[$ et f est continue donc g est continue sur cet intervalle. Par périodicité, g est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ donc sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle est continue sur $\mathbb{Z}$).

$$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Ci-dessous un dessin :



> La continuité de g vient du fait que $f(0) = f(1)$, sinon il y aurait des problèmes « de recollement » : ci-dessous avec une fonction f ne vérifiant pas $f(0) = f(1)$ (vous aurez sans doute reconnu le graphe de la partie fractionnaire).
>
> 
>

$\boxed{4}$ Soit $\varepsilon > 0$. On se donne donc P polynôme trigonométrique tel que $|g - \mathrm{P}| \leqslant \varepsilon$ et puisque f et g coïncident sur $[\,0\,;1\,]$ (d'après la question 2 pour 1), $|f - \mathrm{P}| \leqslant \varepsilon$. D'après la question précédente, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(u_k) - \int_0^1 \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon$$

Si on se donne un $n \geqslant n_0$, alors on prouve comme dans la partie III (à l'aide de multiples inégalités triangulaires) que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(u_k) - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 3\varepsilon$$

ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{L'assertion (3) du critère de Weyl est donc démontrée.}}$$

Partie VI. Application du critère de Weyl aux suites équiréparties modulo 1

$\boxed{1}$ Il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $\theta = p/q$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a donc $n\theta = np/q$. D'après le théorème de division euclidienne, si on fait la division euclidienne de np par q, il existe a et b avec $0 \leqslant b < q-1$ tels que $np = aq+b$ donc $n\theta = a + b/n$ si bien que $n\theta - \lfloor n\theta \rfloor = b/q$ avec $b \in [\![0\,;\, q-1]\!]$. En d'autres termes, la suite $(n\theta - \lfloor n\theta \rfloor)_{n\geqslant 1}$ prend un nombre fini de valeurs donc (cf. partie I) n'est pas équirépartie.

$$\boxed{\text{Si } \theta \in \mathbb{Q}, \text{ la suite } (n\theta)_{n\geqslant 1} \text{ n'est pas équirépartie modulo 1.}}$$

$\boxed{2}$ On va donc chercher à prouver que la suite de terme général $u_n = n\theta - \lfloor n\theta \rfloor$ vérifie l'assertion (2) du critère de Weyl. Soient donc $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$ et posons

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi u_k}$$

D'après le critère de Weyl, il suffit donc de prouver que $\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi k\theta - 2ip\pi\lfloor k\theta\rfloor} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2ip\pi k\theta} && x \mapsto e^{2ix} \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(e^{2ip\pi\theta}\right)^k
\end{aligned}$$

C'est ici qu'on va utiliser l'irrationnalité de θ. Cherchons s'il est possible d'avoir $e^{2ip\pi\theta} = 1$. Attention de ne pas oublier les congruences et de ne pas utiliser le ln (on est sur $\mathbb{C}$) !

$$\begin{aligned}
e^{2ip\pi\theta} = 1 &\iff 2p\pi\theta \equiv 0[2\pi] \\
&\iff p\theta \equiv 0[1] \\
&\iff p\theta \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Or, $p\theta$ n'est entier pour aucune valeur (non nulle) de p car θ est irrationnel. La raison est donc toujours différente de 1 et on peut utiliser la formule habituelle :

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{n} e^{2ip\pi\theta} \times \frac{1 - e^{2ipn\pi\theta}}{1 - e^{2ip\pi\theta}}$$

Par conséquent
$$|\mathrm{A}_n| = \frac{1}{n} \times \frac{|1 - e^{2ipn\pi\theta}|}{1 - e^{2ip\pi\theta}} \leqslant \frac{2}{n|1 - e^{2ip\pi\theta}}$$

ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

$$\boxed{\mathrm{A}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ donc, d'après le critère de Weyl, la suite } (n\theta)_{n\geqslant 1} \text{ est équirépartie modulo 1.}}$$

> Ouf ! Enfin une suite équirépartie !

Partie VII. Fréquence d'apparition du premier chiffre des puissances de 2

$\boxed{1}$ Comme indiqué dans l'énoncé, cherchons quand un chiffre commence par i et inspirons-nous pour cela de l'exercice 38 du chapitre 18. Un nombre commence par i s'il s'écrit sous la forme $ia_1a_2\dots a_n$ où les a_k sont des entiers donc s'il est compris entre un terme de la forme $i0\dots0 = i\times 10^n$ et $i9\dots9 = (i+1)\times 10^n - 1$ donc s'il est supérieur ou égal à $i\times 10^n$ et strictement inférieur à $i\times 10^{n+1}$. D'où les équivalences suivantes (attention à la rédaction !) :

$$\begin{aligned}
\text{Il existe une puissance de 2 qui commence par } i \quad & \iff \quad \exists (k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, i\times 10^n \leqslant 2^k < (i+1)\times 10^n \\
& \iff \quad \exists (k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, n\ln(10)+\ln(i) \leqslant k\ln(2) < n\ln(10)+\ln(i+1) \\
& \iff \quad \exists (k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \ln(i) \leqslant k\ln(2) - n\ln(10) < \ln(i+1) \\
& \iff \quad \exists (k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, \frac{\ln(i)}{\ln(10)} \leqslant k\frac{\ln(2)}{\ln(10)} - n < \frac{\ln(i+1)}{\ln(10)}
\end{aligned}$$

Prouvons que cette dernière assertion est équivalente à celle de l'énoncé. Celle de l'énoncé implique celle ci-dessus (si cela marche avec la partie entière, alors en particulier cela marche pour un certain entier n). Réciproquement, si un tel entier n existe, alors il est forcément égal à la partie entière de $k\ln(2)/\ln(10)$ puisque les deux fractions extremales sont comprises entre 0 et 1. D'où l'équivalence recherchée.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

$\boxed{2}$ Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, $\mathrm{N}_i(n)$ est le nombre de termes de la forme $p\theta - \lfloor p\theta \rfloor$ avec $1 \leqslant p \leqslant n$ et $\theta = \ln(2)/\ln(10)$ qui appartiennent à l'intervalle $[\ln(i)/\ln(10)\,;\ln(i)/\ln(10)\,[$. Or, $\ln(2)/\ln(10)$ est irrationnel (on fait comme dans l'exercice 4 du chapitre 1) donc la suite de terme général $p\theta - \lfloor p\theta\rfloor$ est équirépartie modulo 1 d'après la question précédente. Dès lors, la fréquence d'apparition tend vers la longueur de l'intervalle, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\frac{\mathrm{N}_i(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ln(i+1)-\ln(i)}{\ln(10)}}$$

> Bon, on a semi arnaqué puisque l'intervalle est semi-ouvert et non pas ouvert, mais on a vu plus haut (cf. partie III) que les points isolés n'apportaient rien à la fréquence d'apparition.

$\boxed{3}$ On a une suite dont le terme général est de la forme $u_i = f(i)$ donc on va chercher la monotonie de la fonction associée. N'oublions pas qu'on ne dérive pas une suite ! Si $x \geqslant 1$, posons

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\ln(10)} \\
&= \frac{1}{\ln(10)} \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Or, la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ln est strictement croissante (et $\ln(10) > 0$) donc f est strictement décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$ (on pouvait également dériver f, bien entendu) si bien que

$$\boxed{\text{La suite est strictement décroissante.}}$$

On vient donc de montrer, ce qui est tout de même surprenant, que la fréquence d'apparition de i est d'autant plus élevée que i est petit ! Le 1 apparaît (quand n est grand) environ avec une fréquence de 30% et le 9 avec, environ, une fréquence de 4,5% !

$$\boxed{\text{Les maths, c'est cool.}}$$

> Mais bon... ce résultat est plus gadget qu'autre chose... Les suites équiréparties ont beaucoup d'applications vraiment utiles, comme par exemple des calculs d'intégrales avec la méthode de Monte-Carlo (ou quasi Monte-Carlo), pour calculer efficacement des intégrales en grande dimension.