Chapitre 24

Analyse asymptotique et Développements Limités

Dans les trois premières parties, on se donne des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ etc., dont les termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang.

I Suites négligeables

I.1 Définition et interprétation

Définition. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$ ou, plus simplement, $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, et on dit que u_n est un « petit o » de v_n.

On oubliera souvent d'écrire « $n \to +\infty$ » quand on manipulera des suites car, comme pour les limites : pour les suites, c'est « forcément » (sauf quand il y a un paramètre mais dans ce cas tout sera précisé) quand n tend vers $+\infty$.

Remarque : De manière équivalente : $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ lorsqu'il existe une suite (w_n) de limite nulle telle que, pour tout n, $u_n = v_n \times w_n$. Cela peut être utile dans certains exercices, mais c'est la définition ci-dessus (celle au programme) qu'il faut retenir.

Exemples :

- Tout d'abord, si $0 < \alpha < \beta$, $n^{\alpha-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que :

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{1/n^\beta}{1/n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

  En d'autres termes, $n^\alpha = \mathrm{o}\left(n^\beta\right)$ et $\dfrac{1}{n^\beta} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$. Cela sera immédiat une fois qu'on aura vu l'interprétation (voir ci-dessous, avec un exemple) et on pourra l'affirmer sans démonstration.

- Autre écriture des croissances comparées vues au chapitre 12 : pour tous α, γ strictement positifs et pour tout q tel que $|q| > 1$,

$$(\ln(n))^\gamma = \mathrm{o}(n^\alpha), \qquad n^\alpha = \mathrm{o}(q^n), \qquad q^n = \mathrm{o}(n!) \qquad \text{et} \qquad n! = \mathrm{o}(n^n).$$

Toutes ces suites tendent vers $+\infty$ (en valeur absolue pour $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$).

- On a également, si α et γ sont strictement positifs et q est tel que $|q| < 1$:

$$\frac{1}{n^n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n!}\right), \quad \frac{1}{n!} = \mathrm{o}(q^n), \quad q^n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{n^\alpha} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln(n))^\gamma}\right).$$

Toutes ces suites tendent vers 0. Attention : quand on parle de suites négligeables, les suites ne tendent pas forcément vers 0 ou $+\infty$ comme les exemples ci-contre pourraient le laisser penser. Par exemple (voir page suivante), $(-1)^n = \mathrm{o}(n)$.

⚠ **Cas particulier important :**

$$u_n = \mathrm{o}(1) \iff \frac{u_n}{1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Dire que $u_n = \mathrm{o}(1)$ est donc une autre manière de dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Interprétation :

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ quand « $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ infiniment plus vite que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $n = \mathrm{o}(n^2)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers $+\infty$ (⚠ en valeur absolue pour $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$!) « de la plus lente à la plus rapide » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

⚠ Le terme « infiniment » est capital : si (u_n) tend vers $+\infty$ deux fois plus vite que (v_n), alors (v_n) n'est pas négligeable devant (u_n). Par exemple, il est faux de dire que $n/2 = \mathrm{o}(n)$. Tout ce qu'on peut dire est que $n/2 = \mathrm{O}(n)$ (cf. paragraphe III).

$(\ln(n))^\gamma \qquad n^\alpha \qquad n^\beta \qquad q^n \qquad n! \qquad n^n \qquad +\infty$

$0 < \gamma \qquad 0 < \alpha < \beta \qquad 1 < |q|$

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers 0, alors $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 infiniment plus vite que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ». Par exemple (voir ci-dessus), $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ci-dessous, parmi les suites usuelles, on range celles qui tendent vers 0 « de la plus rapide à la plus lente » (et donc, chaque suite est négligeable devant celles situées à sa droite) :

Cette interprétation n'est pas rigoureuse ! Justement, la notation o permet de définir rigoureusement les notions écrites entre guillemets.

$0 \qquad \dfrac{1}{n^n} \qquad \dfrac{1}{n!} \qquad q^n \qquad \dfrac{1}{n^\beta} \qquad \dfrac{1}{n^\alpha} \qquad \dfrac{1}{(\ln(n))^\gamma}$

$|q| < 1 \qquad 0 < \alpha < \beta$

I.2 Premières propriétés

Proposition. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$, alors $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$.

Les propriétés de ce paragraphe sont toutes assez intuitives une fois que les interprétations ci-dessus ont été bien comprises. Par exemple, il est intuitif qu'une suite bornée est négligeable devant une suite qui tend vers l'infini. Par exemple : $(-1)^n = \mathrm{o}\left(n\right)$.

Démonstration. On suppose que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n > 0$. De plus, par hypothèse, il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-M \leqslant u_n \leqslant M$. Soit $n \geqslant n_0$. Puisque $v_n > 0$, on ne change pas le sens des inégalités en divisant par v_n, ce qui donne :

$$\frac{-M}{v_n} \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqslant \frac{M}{v_n}$$

Or, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\pm M/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on conclut avec le théorème d'encadrement. □

Proposition (Transitivité de la négligeabilité). Si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ et $v_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$, alors $u_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

Démonstration. Par hypothèse, $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où :

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

□

Par exemple, on rappelle que $\dfrac{1}{n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Ainsi, si $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ alors $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Remarque : La relation « être négligeable devant » n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble des suites non nulles à partir d'un certain rang car n'est pas réflexive ni antisymétrique. Elle peut par contre servir à définir une relation d'ordre strict : cela dépasse le cadre du programme, mais cela permet parfois de bien visualiser ou de bien deviner certains résultats.

Proposition. Si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ alors $u_n \times w_n = \mathrm{o}\left(v_n \times w_n\right)$.

Démonstration. $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $\dfrac{u_n \times w_n}{v_n \times w_n} = \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Par exemple, si on a $u_n = \mathrm{o}\left(1/n\right)$, alors $nu_n = \mathrm{o}\left(1\right)$. Si $u_n = \mathrm{o}\left(1\right)$ alors $u_n/n = \mathrm{o}\left(1/n\right)$.

Proposition. Si $u_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$ et $v_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$ alors $u_n + v_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$ et, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u_n = \mathrm{o}\left(w_n\right)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarques :

- En particulier, si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $-u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $2u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Avec les mains : « les constantes multiplicatives n'apparaissent pas dans les o ». En fait, elles sont superflues. Il ne serait pas faux d'écrire $2u_n = \mathrm{o}(2v_n)$, mais c'est inutile : on peut dire qu'elles sont « absorbées par les o ».
- Les o servent à comparer les ordres de grandeur de deux suites : par exemple, le cas échéant, il est plus parlant de dire que $2u_n$ est négligeable devant n que de dire que $2u_n$ est négligeable devant $2n$: on s'intéresse uniquement à l'ordre de grandeur.

En d'autres termes, on peut « sommer les o ». Attention, cependant, il faut « les mêmes o » ! Voir le paragraphe II.5.c pour voir ce qu'on fait avec des o différents.

Exemple : $n^2 = \mathrm{o}(2^n)$, $n^4 = \mathrm{o}(2^n)$, si bien que $10^{10^{10}} n^2 + 2^{1789!} n^4 = \mathrm{o}(2^n)$.

Proposition. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $w_n = \mathrm{o}(t_n)$ alors $u_n \times w_n = \mathrm{o}(v_n \times t_n)$. En particulier, ${u_n}^2 = \mathrm{o}\left({v_n}^2\right)$.

Et plus généralement, pour tout $k \geqslant 1$, ${u_n}^k = \mathrm{o}\left({v_n}^k\right)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition.

- $u_n = \mathrm{o}(v_n) \iff |u_n| = \mathrm{o}(v_n) \iff u_n = \mathrm{o}(|v_n|) \iff |u_n| = \mathrm{o}(|v_n|)$.
- Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ et si $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $|u_n| \leqslant v_n$ et si $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

Les résultats ci-contre sont tous très intuitifs :

- ⋆ la négligeabilité ne change pas en multipliant par -1 (on peut donc se ramener à des suites positives quand on étudie la négligeabilité).
- ⋆ si une quantité positive est plus petite qu'une deuxième qui est négligeable devant une troisième, alors la première est négligeable devant la troisième.

Attention, s'il n'y a pas de valeur absolue, c'est faux sans l'hypothèse de positivité : la première suite pourrait tendre vers $-\infty$, être « très grande dans les négatifs ». Par exemple, $-n \leqslant 1$ mais c'est 1 qui est négligeable devant $-n$ et pas l'inverse !

Démonstration.

- La première équivalence vient de l'égalité :

$$\left|\frac{u_n}{v_n}\right| = \left|\frac{|u_n|}{v_n}\right|$$

et donc l'une tend vers 0 si et seulement si l'autre tend vers 0 (rappelons qu'une suite tend vers 0 si et seulement si elle tend vers 0 en valeur absolue). Les autres équivalences sont analogues.
- En divisant par $|w_n|$ (strictement positive à partir d'un certain rang), on obtient :

$$0 \leqslant \frac{u_n}{|w_n|} \leqslant \frac{v_n}{|w_n|}$$

Or, $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ donc $v_n = \mathrm{o}(|w_n|)$ donc $v_n/|w_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: d'après le théorème d'encadrement, $u_n = \mathrm{o}(|w_n|)$ donc $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- On applique ce qui précède à $|u_n|$ et on utilise le fait que si $|u_n| = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

$\square$

II Suites équivalentes

II.1 Définition et interprétation

Définition. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On notera $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou, plus simplement, $u_n \sim v_n$.

Là aussi, quand on manipulera des suites, on oubliera souvent d'écrire « $n \to +\infty$ ».

Remarque : Là aussi, de manière équivalente : $u_n \sim v_n$ lorsqu'il existe une suite (w_n) qui tend vers 1 telle que, pour tout n, $u_n = v_n \times w_n$. Ou, encore de manière équivalente : $u_n \sim v_n$ lorsqu'il existe une suite (t_n) qui tend vers 0 telle que $u_n = v_n \times (1 + t_n)$ (cette dernière forme peut être utile quand on cherche un développement asymptotique, cf. exercice 60). On peut retenir ça en un seul morceau : « on multiplie par un truc qui tend vers 1 ». Mais, comme plus haut, attention : c'est la définition ci-dessus qui est au programme et qu'il faut retenir.

Proposition. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

DÉMONSTRATION.
- $u_n/u_n = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: $\sim$ est réflexive.
- Supposons que $u_n \sim v_n$. Alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $v_n/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/1 = 1$: $v_n \sim u_n$, $\sim$ est symétrique.
- Supposons que $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$: alors $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $v_n/w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 1 = 1$$

En d'autres termes, $u_n \sim w_n$: $\sim$ est transitive. $\square$

Nous avons déjà vu que c'est une relation d'équivalence dans l'exercice 20 du chapitre 16.

Remarque : Cette relation étant symétrique, si $u_n \sim v_n$, alors on a aussi $v_n \sim u_n$, et donc il paraît cohérent de ne pas distinguer les deux suites. On dira donc plutôt que les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes.

Interprétation (peu rigoureuse ici aussi !) : $u_n \sim v_n$ quand « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à peu près de la même taille ». À ne pas confondre avec la relation de domination, cf. paragraphe III, moins précise, qui dit que « deux suites sont à peu près du même ordre de grandeur ».

Par exemple, les suites de TG n et $2n$ sont du même ordre de grandeur mais ne sont pas « à peu près égales ». Plus rigoureusement, elles ne sont pas équivalentes car le quotient ne tend pas vers 1. D'où la nécessité du O : cf. paragraphe III.

Les classes d'équivalence de la relation $\sim$ sont en gros des « tiroirs » comportant des suites « à peu près de la même taille », mais attention : certaines propriétés sont conservées par l'équivalence (comme la limite, même si deux suites ayant la même limite ne sont pas forcément équivalentes, cf. II.3) et d'autres ne le sont pas (par exemple la monotonie), cf. paragraphe II.3.

Remarque : L'interprétation d'une suite négligeable devant une autre, ou d'une suite équivalente à une autre, doit être bien comprise pour bien visualiser ou deviner certains résultats, mais il ne faut pas perdre de vue la vraie définition (i.e. le quotient tend vers 0 ou vers 1), et ce sera la même chose pour une suite dominée par une autre dans le paragraphe III. En particulier, si on a un doute, on revient à la définition : on fait le quotient, et on regarde ce qui se passe !

II.2 Équivalents usuels

Proposition. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a les équivalents suivants :

- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan(u_n) \sim u_n$
- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $\mathrm{Arctan}(u_n) \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) \sim 1$
- $\sqrt{1+u_n} - 1 \sim \dfrac{u_n}{2}$
- $\cos(u_n) - 1 \sim \dfrac{-{u_n}^2}{2}$

C'est faux si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 ! Il ne faut donc pas oublier de le vérifier.

Remarque : L'équivalent usuel $\ln(1+u_n) \sim u_n$ n'est valable que quand $u_n \to 0$. En d'autres termes, il n'y a qu'au voisinage de 1 (car $1+u_n$ tend vers 1 quand u_n tend vers 0) qu'on peut donner un équivalent du ln en se débarrassant du ln. Ailleurs, on peut parfois simplifier (en factorisant, cf. paragraphe II.5.c) mais il restera toujours du ln. Par exemple, un équivalent de $\ln(n+1)$ est $\ln(n)$, et on ne peut pas faire mieux !

DÉMONSTRATION.
- $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ donc, par composition de limites, $\dfrac{\sin(u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ c'est-à-dire que $\sin(u_n) \sim u_n$. De même pour $\ln, \mathrm{Arctan}, \tan, \exp$ et la racine carrée.
- L'équivalent de $\cos(u_n)$ est immédiat.

Ces équivalents seront immédiats quand on aura vu les DL, cf. V.

- La fonction cos étant $\mathscr{C}^3$, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange (avec $n=2$, $a=0$ et $b=u_n$) :
$$\left|\cos(u_n)-1+\frac{{u_n}^2}{2}\right|\leqslant\frac{|u_n|^3}{6}$$
D'où, en divisant par ${u_n}^2$ pour n assez grand (rappelons que u_n est supposé non nul à partir d'un certain rang) :
$$\left|\frac{\cos(u_n)-1}{{u_n}^2}+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{|u_n|}{6}.$$
Or, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{\cos(u_n)-1}{u_n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{1}{2}$. En conclusion, $\dfrac{\cos(u_n)-1}{-u_n^2/2}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui est le résultat voulu. □

En effet $\cos'(0)=0$, $\cos''(0)=-1$ et $\displaystyle\max_{c\in[\,0\,;u_n\,]}\left|\cos^{(3)}\right|\leqslant 1$ car $\cos^{(3)}=\sin$.

Exemple : $3n^4+6n^3+18000^{18000}n^2\sim 3n^4$. Plus généralement :

Proposition. Soit $P\in\mathbb{R}[X]$ non nul de degré d de coefficient dominant $a_d\neq 0$. Alors $P(n)\sim a_dn^d$. En d'autres termes, une suite polynomiale est équivalente à son terme de plus haut degré.

Démonstration. Par hypothèse, $P(n)=a_dn^d+a_{d-1}+\cdots+a_1n+a_0$ donc
$$\frac{P(n)}{a_dn^d}=1+\frac{a_{d-1}}{n}+\cdots+\frac{a_1}{n^{d-1}}+\frac{a_0}{n^d}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
□

Remarque : Puisque l'équivalence passe au quotient (cf. paragraphe II.5.a), cela permet très facilement de donner un équivalent d'une suite de terme général $Q(n)$ avec Q une fonction rationnelle.

Donnons d'autres exemples (plus ou moins usuels) :

Exemples :

- $\dfrac{4n}{4n+19}\sim\dfrac{4n}{4n}=1$.
- $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\sim\dfrac{1}{n}$.
- $n+1\sim n$.
- Par croissances comparées, $n^2-100n\ln(n)+\sqrt{n}+\dfrac{1}{n}\sim n^2$.
- Si $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\pm\infty$, $\lfloor u_n\rfloor\sim u_n$ (par encadrement).
- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $a_0=1$ et :
$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad a_n=a_{\lfloor n/2\rfloor}+a_{\lfloor n/3\rfloor}+a_{\lfloor n/6\rfloor}$$
alors on peut montrer que $a_n/n\xrightarrow[n\to+\infty]{} 12/\ln(432)$ si bien que :
$$a_n\sim\frac{12}{\ln(432)}\times n$$

Cet exemple est très difficile et n'est pas à connaître, nous ne le mettons que pour illustrer la remarque ci-dessous.

Remarque : Contrairement aux suites négligeables (voir plus haut : « les constantes multiplicatives n'apparaissent pas dans les o » ou « les constantes multiplicatives sont absorbées par les o »), les constantes multiplicatives sont tout sauf anecdotiques quand on cherche un équivalent. En effet, quand on multiplie une suite qui tend vers 0 par une constante λ, le produit tend toujours vers 0, mais si on multiplie une suite qui tend vers 1 par une constante λ, le produit ne tend plus vers 1 (sauf si $\lambda=1$ évidemment...). En d'autres termes, si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u_n = \mathrm{o}(v_n)$ mais si $u_n \sim v_n$ alors λu_n n'est plus équivalent à v_n.

Il ne faut jamais oublier que derrière l'idée intuitive de deux suites équivalentes comme « deux suites à peu près de la même taille » se trouve une définition définition précise et non ambiguë, qui est que leur rapport tend vers 1. Cependant, parfois, il est difficile de prouver que cette limite est effectivement égale à 1.

Avec le dernier exemple, il est assez simple (cf. exercice 38 du chapitre 12) de prouver que la suite de terme général a_n/n est dans $[1\,;3]$ donc bornée, mais trouver sa limite est beaucoup plus difficile (c'est le but du sujet de l'ENS Cachan 1991). On a envie de dire que $u_n \sim n$ car $n \leqslant u_n \leqslant 3n$ mais il faut se retenir car le quotient ne tend pas vers 1.

Avec un exemple plus modeste, il est assez simple de prouver qu'il existe K tel que :

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K$$

donc $n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ mais la valeur de K ne peut être trouvée explicitement qu'avec des intégrales de Wallis. On a envie de dire que $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ mais il faut se retenir car le quotient ne tend pas vers 1 mais vers $K = \sqrt{2\pi}$ (cf. chapitre 25).

C'est la formule de Stirling : cf. paragraphe II.5.c et chapitre 25.

L'existence de K était connue bien avant sa valeur : donner la valeur explicite d'une limite est en général plus difficile que de prouver son existence.

Enfin, quand on a une suite polynomiale, par exemple la suite de terme général $u_n = 4n^3 + 5n + 6$, on a envie de dire que la suite se comporte « en gros comme du n^3 » ou « qu'elle est de l'ordre de grandeur de n^3 » mais il faut faire attention car elle n'est pas équivalente à n^3.

La morale de cette remarque est la suivante : « être équivalent » est plus précis que « être du même ordre de grandeur ». Parfois, on a envie de dire qu'une suite se comporte « en gros comme du n » mais attention de ne pas dire qu'elle est équivalente à n si, par exemple, elle est équivalente à $2n$ ou à $12n/\ln(432)$: les constantes multiplicatives sont exactes et importantes quand on manipule des équivalents, les changer annule l'équivalence des suites. Quand elles seront inconnues ou quand on ne s'intéressera qu'à l'ordre de grandeur, sans vouloir s'embêter avec des constants multiplicatives, on utilisera plutôt un O : cf. paragraphe III.

II.3 Propriétés

Là aussi, les propriétés de ce paragraphe sont toutes assez intuitives une fois que l'interprétation du II.1 a bien été comprise.

Proposition. Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n = \mathrm{o}(u_n)$ alors $w_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Proposition. Si $u_n \sim v_n$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant 2$. En particulier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même signe à partir d'un certain rang.

Par exemple, si $w_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$, alors $w_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. En d'autres termes, dans le o, on ne garde que le terme prédominant. Comme pour les constantes multiplicatives, on ne garde pas les termes suivants car ils sont superflus : seul compte l'ordre de grandeur.

Démonstration. Immédiat puisque $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

⚠ De même signe ne veut pas dire de signe constant ! Les suites peuvent avoir un signe qui change, mais alors il change en même temps : par exemple, $\dfrac{(-1)^n}{n+1} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$.

⚠ Deux suites équivalentes ne sont pas forcément de même monotonie, même à partir d'un certain rang. Par exemple, si $n \geqslant 1$, posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Alors $u_n \sim v_n$. Pourtant, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Théorème. Si $u_n \sim v_n$ et si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Démonstration. Il suffit de voir que, pour n assez grand, u_n est non nul par hypothèse donc $v_n = u_n \times \dfrac{v_n}{u_n}$ et que $\dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. □

⚠ La réciproque est fausse ! Deux suites ayant même limite ne sont pas forcément équivalentes ! Par exemple :

- $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais les suites de terme général n et n^2 ne sont pas équivalentes (le quotient ne tend pas vers 1).
- $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\dfrac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n^2}$ ne sont pas équivalentes.

Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition. Soit $L \in \mathbb{R}^*$. Alors $u_n \sim L$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

Démonstration. $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \iff \dfrac{u_n}{L} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \iff u_n \sim L$. □

Remarque : ⚠ Attention, on rappelle qu'on ne manipule que des suites non nulles à partir d'un certain rang. Par conséquent, cela n'a AUCUN SENS de dire qu'une suite est équivalente à 0 ou à la suite nulle. Par exemple, même s'il est correct d'écrire que $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on n'écrira JAMAIS $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim 0$ mais plutôt $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ (cf. paragraphe II.2).

Corollaire. Soit $L \in \mathbb{R}^*$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n \sim v_n$.

Exemple : $2 + \dfrac{1}{n} \sim 2 - \dfrac{1}{n} \sim 2$.

Remarque : Disons un mot à propos de ces « tiroirs » que seraient les classes d'équivalence de la relation $\sim$ et que nous avons évoqués dans le paragraphe II.1, c'est-à-dire qu'on range dans un même tiroir les suites équivalentes. Quels sont les différents tiroirs obtenus ?

- On vient de voir que, si L est un réel **non nul**, toutes les suites de limite L sont équivalentes (et équivalentes à L). En d'autres termes, il y a un tiroir étiqueté : « suites qui tendent vers L » et qui contient... toutes les suites qui tendent vers L et uniquement celles-là. Ce n'est pas très surprenant : une suite qui tend vers 2, quand on la divise par 2, tend vers 1 (c'est ce point qui ne sera plus valide pour les suites qui tendent vers $\pm\infty$ ou vers 0), et c'est le cas de toutes les suites qui tendent vers 2.
- Par contre, ce n'est plus vrai avec les suites qui tendent vers $\pm\infty$, il y a une infinité de tiroirs ! Par exemple, il y a le tiroir étiqueté : « suites équivalentes à n » qui contient, entre autres, les suites de terme général $n, n+1, n+\sqrt{n}, n-2023\ln(n)$ etc., un autre tiroir étiqueté « suites équivalentes à $2n$ » qui contient, entre autres, la suite de terme général $2n+\ln(n)^{2023}$, encore un autre tiroir étiqueté « suites équivalentes à e^n » qui contient, entre autres, la suite de terme général e^n+n^2 etc. À chaque tiroir un modèle de suite qui tend vers $\pm\infty$.
- Ce n'est pas non plus vrai qu'il y a un seul tiroir contenant toutes les suites qui tendent vers 0 : là aussi, il y a une infinité de tiroirs, par exemple les tiroirs « suites équivalentes à $1/n$ », « suites équivalentes à $1/n^2$ » etc.
- Quant aux suites n'ayant pas de limite, il est bien évident qu'il y a là aussi une infinité de tiroirs...

En d'autres termes, deux suites équivalentes ont même limite éventuelle. Attention, comme dit ci-contre, la réciproque est fausse.

⚠ C'est une erreur classique : ce n'est pas une raison pour la faire !

⚠ Comme on l'a vu ci-dessus, c'est faux si $L = 0$ ou si $L = \pm\infty$: en poussant un peu, on pourrait dire que c'est faux dans tous les cas intéressants...

L'argument clef qui fait que ça marche avec les suites ayant une limite non nulle L est qu'en divisant par L, on a une suite qui tend vers 1, mais on ne peut pas diviser par 0 : cela ne marche donc plus avec les suites qui tendent vers 0. Voir également l'erreur ignoble à ne pas faire ci-dessus.

II.4 Lien entre $\sim$ et o

Attention, même si $u_n \sim v_n$, on n'a pas forcément $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$! Par exemple, $n^2 \sim n^2 + n$ mais la différence tend vers $+\infty$! Cependant, on a le résultat fondamental suivant :

C'est intuitif ! Deux suites sont « à peu près égales » si et seulement si la différence est négligeable devant ces mêmes suites. L'intérêt de ce théorème est qu'on peut alors écrire que $u_n \sim v_n$ si et seulement si

$$u_n = v_n + \mathrm{o}\left(v_n\right)$$

c'est-à-dire qu'une somme de deux termes, dont l'un négligeable devant l'autre, est équivalente au terme prédominant (là aussi c'est intuitif).

Théorème. $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = \mathrm{o}\left(v_n\right) \iff u_n - v_n = \mathrm{o}\left(u_n\right)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n \quad \iff \quad \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad & \iff \quad \frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ & \iff \quad \frac{u_n - v_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ & \iff \quad u_n - v_n = \mathrm{o}\left(v_n\right) \end{aligned}$$

De même pour l'autre équivalence. □

Théorème (Obtention d'un équivalent par encadrement). Si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et si $u_n \sim w_n$ alors $v_n \sim u_n$.

Exemple : Si, pour tout n, $n - 2\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant n + 50\ln(n)$, alors $u_n \sim n$.

Remarque : Attention, si (par exemple) $n \leqslant u_n \leqslant 3n$, on ne peut pas conclure quant à un équivalent éventuel ! Tout ce qu'on pourra dire est que $u_n = \mathrm{O}\left(n\right)$: cf. paragraphe III.

Démonstration. Pour tout n, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. Or, $w_n \sim u_n$ donc $w_n - u_n = \mathrm{o}\left(u_n\right)$. D'après le dernier résultat du paragraphe I.2, $v_n - u_n = \mathrm{o}\left(u_n\right)$ donc $v_n \sim u_n$.

Remarques :

- De manière générale, les notations o et $\sim$ sont utiles pour formaliser des approximations. Par exemple, écrire « $n + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} n$ » est une horreur ignoble mais écrire $n + 1 \sim n$ est tout-à-fait rigoureux.
- Et si on veut plusieurs termes ? On utilise un o. Par exemple, écrire

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  signifie que

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n^2}\right) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

  c'est-à-dire que $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est à peu près égal à $\left(1 - \frac{1}{2n^2}\right)$ et que l'erreur commise en faisant cette approximation est négligeable devant $1/n^2$ c'est-à-dire devant le dernier terme de l'approximation. C'est le principe du développement limité et du développement asymptotique : cf. paragraphes V et VI.

L'avantage de cette écriture est qu'on peut l'utiliser dans les calculs car le o vérifie des propriétés que ne vérifie par forcément l'équivalent (voir paragraphe suivant).

Dans la remarque de la page suivante, c'est à cette interprétation qu'on fait référence.

- Pourquoi préfère-t-on écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ plutôt que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 - \frac{1}{2n^2}$? Cette écriture est correcte mais écrire des équivalents à plus d'un terme est déconseillé voire interdit. Prenons un autre exemple d'équivalent à plus d'un terme pour que cela soit plus parlant. Écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{1}{n}$ est
  - ⋆ **correct :** le quotient tend bien vers 1.
  - ⋆ **grotesque et inutile :** on peut tout aussi bien écrire $\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim 1 + \frac{\pi^2}{n^{1789}}$ et ce sera tout aussi correct. En effet, le deuxième terme n'apporte aucune information.

Morale de l'histoire : Un terme seulement dans un équivalent. Quand on veut en mettre plusieurs, pour avoir une meilleure approximation, on utilise un o.

$\star$ **dangereux :** on a envie d'en déduire que $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{1}{n}$ ce qui est **faux** !

Pour prendre un exemple peut-être plus parlant, c'est comme si vous disiez que $\pi = 3.14999$ à 10^{-2} près : c'est correct mais cela ne sert à rien et cela peut induire en erreur.

Attention à l'envie furieuse de simplifier des o. En effet, l'égalité

$$\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

doit être interprétée comme ci-dessus (c'est-à-dire que $\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ est à peu près égal etc.). Le $\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ signifie juste que « ce qui reste est très petit devant $1/n^2$ ». En particulier, cette quantité est complètement inconnue. Par exemple, avoir $u_n + \mathrm{o}(w_n) = v_n + \mathrm{o}(w_n)$ N'IMPLIQUE PAS $u_n = v_n$! Le membre de gauche est égal à u_n plus « quelque-chose de très petit devant w_n » et le membre de droite est égal à v_n plus « quelque-chose de très petit devant w_n » mais rien ne dit que les « quelque-chose » sont égaux (et d'ailleurs, en général, ils ne le sont pas).

Un o est un « trou noir » : il est impossible d'obtenir quelque information que ce soit sur une quantité à l'intérieur, ou de la récupérer.

Par exemple : $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n-1}$ donc $\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ (cf. theorème précédent). De même, $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc

$$\frac{1}{n-1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

De la même manière, $\frac{\mathrm{o}(u_n)}{\mathrm{o}(u_n)} \neq 1$ en général, c'est une forme indéterminée !

mais $\frac{1}{n-1} \neq \frac{1}{n+1}$. Tout ce qu'on peut faire est regrouper les « quelque-chose » c'est-à-dire écrire $u_n - v_n = \mathrm{o}(w_n) + \mathrm{o}(w_n) = \mathrm{o}(w_n)$ ou, dans notre exemple, $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ce qui est intuitif : les deux quantités sont équivalentes à $1/n$ donc la différence n'est pas nulle mais négligeable devant $1/n$.

Rappelons qu'on peut sommer les o.

II.5 Opérations légales/illégales sur les équivalents

II.5.a Opérations légales

Le produit :

Théorème. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $u_n \times w_n \sim v_n \times t_n$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : En particulier, si $u_n \sim v_n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$. Contrairement aux o, les constantes multiplicatives « apparaissent » dans les équivalents.

C'est normal ! Quand on parle de suites négligeables, on parle de limite nulle donc multiplier par un scalaire ne change rien, tandis que quand on parle de suites équivalentes, on parle de limite égale à 1, donc si on multiplie par une constante, on change la limite ! cf. paragraphe II.2.

Exemple : $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ donc $\frac{2}{n+1} \sim \frac{2}{n}$ alors que, par exemple, $\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc $\frac{2}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (écrire $\frac{2}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)$ serait correct mais moins parlant : cf. paragraphe I.2).

Le quotient :

Théorème. Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$.

$\rightsquigarrow$ EXERCICE.

L'élévation à une puissance FIXE :

Théorème. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $u_n \sim v_n$ alors ${u_n}^\alpha \sim {v_n}^\alpha$.

Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$ ou $\alpha < 0$, il est nécessaire d'avoir u_n et v_n strictement positifs, sinon ce n'est pas défini, mais ce sera le cas en pratique.

Démonstration. Par hypothèse, $u_n/v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est continue donc $(u_n/v_n)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1^\alpha = 1$ ce qui permet de conclure.

II.5.b Opérations illégales

⚠ **La somme :** Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$, on n'a pas forcément $u_n + w_n \sim v_n + t_n$. Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1 + \dfrac{1}{n^2}$ et $-1 + \dfrac{1}{n} \sim -1$ mais $\dfrac{2}{n}$ n'est pas équivalent à $\dfrac{1}{n^2}$.

⚠ **Le passage à une fonction (même continue) :** Si $u_n \sim v_n$, même f est continue , on n'a pas forcément $f(u_n) \sim f(v_n)$. Par exemple, $n+1 \sim n$ mais e^{n+1} n'est pas équivalent à e^n (car le quotient ne tend pas vers 1).

On peut composer les limites par une fonction continue (cf. chapitre 12 et chapitre 13), c'est pour cela que composer un équivalent par une fonction continue est une erreur fréquente. Le passage à la fonction non continue est également une opération illégale mais c'est une erreur moins fréquente : d'une part, on manipule moins souvent des fonctions non continues, d'autre part on sait que c'est faux pour les limites, donc on est moins tenté de le faire pour les équivalents.

⚠ **L'élévation à une puissance variable :** Par exemple, $1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ n'est pas équivalent à $1^n = 1$ car $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ (c'est l'immense classique vu dans le chapitre 12).

II.5.c Comment contourner la loi

Pour la somme : en écrivant l'équivalence avec des o (c'est-à-dire en utilisant le théorème vu en II.4).

Exemple : Posons $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Donnons un équivalent de $u_n + v_n$. Puisque $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on sait (cf. paragraphe II.2) que $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ et $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$. Attention cependant : on ne peut pas sommer les équivalents ! Il suffit d'écrire ces équivalents sous la forme

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{et} \qquad \tan\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Par conséquent, puisqu'on peut sommer les o,

$$u_n + v_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{2}{n}$$

On montre de même (exo) que $\sin(1/n) + \tan(2/n) \sim 3/n$, mais attention : dire que $\sin(1/n) - \tan(1/n) \sim 0$ est une erreur ignoble passible de châtiments corporels ! cf. paragraphe II.3.

Dans les autres cas où aucun théorème ne s'applique : revenir à la définition (c'est-à-dire faire le quotient et montrer qu'il tend vers 1).

On peut sommer les o, mais que faire quand on a des o différents ? On garde « le plus gros ». Voyons avec un exemple :

Exemple : Posons $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$. Donnons un équivalent de $u_n + v_n$. Puisque $1/n$ et $1/n^2$ tendent vers 0, il vient :

$$u_n + v_n = \frac{1}{n} + \underbrace{\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^2}}_{\text{négligeables devant } 1/n} + \underbrace{\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\substack{\text{négligeable devant } 1/n^2 \\ \text{donc devant } 1/n}}$$

On utilise les équivalents donnés en II.2, qu'on écrit avec un o avec le théorème donné en II.4, comme dans l'exemple précédent.

Ces trois termes sont négligeables devant $1/n$ donc leur somme egalement, si bien que $u_n + v_n = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$.

En pratique, on peut aller plus vite : cf. TD.

Cependant, en pratique, cela ne se passe pas toujours aussi bien :

Exemple : Peut-on, avec nos outils actuels, donner un équivalent de $u_n = 1-\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$?

On a

$$\begin{aligned} u_n &= 1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1-1+\mathrm{o}\left(1\right)-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \mathrm{o}\left(1\right)-\frac{1}{2n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Or, les deux termes $\mathrm{o}(1)$ et $-1/2n$ tendent tous les deux vers 0, mais on ne sait pas « qui est le plus gros », c'est-à-dire qui est le terme prédominant. Tout ce qu'on peut dire est que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ i.e. $u_n = \mathrm{o}(1)$: on ne peut pas (encore) conclure avec nos outils actuels, on ne peut pas donner un équivalent de u_n. Il faut une plus grande précision dans l'approximation du ln : cf. chapitre 25.

Rappelons qu'il est HORS DE QUESTION de dire que u_n est équivalent à 0 !

Remarque : On voit qu'il y a une différence de méthode selon qu'on veut donner l'équivalent d'un produit, d'un quotient, ou d'une somme :

- Pour un produit, il suffit de donner un équivalent de chacun des termes du produit.
- Pour un quotient, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur.
- Pour une somme : on écrit chaque équivalent avec un o (toujours à l'aide du théorème du II.4) et on garde le terme prédominant. On ne somme pas les équivalents !

En effet, l'équivalent passe au produit, au quotient, mais pas à la somme !

Pour la composition par une fonction : On rappelle que les équivalents ne passent pas à la fonction, même continue. Cependant, deux cas de figure se produisent fréquemment, et là aussi, il faut savoir contourner la loi.

- **Cas particulier du logarithme népérien :** On fait comme au premier semestre et on factorise par le terme prédominant.

  Exemple : Donner un équivalent de $u_n = \ln\left(2n^2+5n+1000\ln(n)+3\right)$.

  $$\begin{aligned} u_n &= \ln\left(2n^2\left(1+\frac{5}{2n}+\frac{500\ln(n)}{n^2}+\frac{3}{2n^2}\right)\right) \\ &= \ln(2)+\ln\left(n^2\right)+\ln\left(1+\frac{5}{2n}+\frac{500\ln(n)}{n^2}+\frac{3}{2n^2}\right) \\ &= 2\ln(n)+\ln(2)+\ln\left(1+\frac{5}{2n}+\frac{500\ln(n)}{n^2}+\frac{3}{2n^2}\right). \end{aligned}$$

  ce qui implique que $u_n \sim 2\ln(n)$. En effet, tous les autres termes sont négligeables devant $2\ln(n)$: le $\ln(2)$ est constant et le dernier ln tend vers 0, si bien qu'il est aussi négligeable devant $2\ln(n)$.

  Un autre cas peut se produire : si on a $u_n \sim v_n$ et si on veut appliquer la fonction ln, on écrira $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$ et, encore une fois, on factorise par le terme prédominant, c'est-à-dire v_n, ce qui donne $u_n = v_n(1+\mathrm{o}(1))$. Cela fonctionne toujours sauf lorsque $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: inutile de retenir cela, de toute façon il faut tout redémontrer le cas échéant.

  Rappelons qu'un $\mathrm{o}(1)$ est une suite qui tend vers 0.

  Exemple : On admet la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$. Pour obtenir un équivalent de $\ln(n!)$, on écrit $n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} + \mathrm{o}\left(\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\right) = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}(1+\mathrm{o}(1))$, si bien que

  Cf. chapitre 25 pour la démonstration

  $$\begin{aligned} \ln(n!) &= \ln(\sqrt{2\pi})+\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+\ln\left(e^{-n}\right)+\ln(1+\mathrm{o}(1)) \\ &= n\ln(n)+\underbrace{\ln(\sqrt{2\pi})+\frac{\ln(n)}{2}-n+\ln(1+\mathrm{o}(1))}_{\text{négligeable devant } n\ln(n)} \\ &\sim n\ln(n). \end{aligned}$$

Exemple : Donner un équivalent de $u_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Puisque $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$, on écrit $\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \times (1 + \mathrm{o}(1))$, ce qui implique :

$$u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = -\ln(n) + \ln(1 + \mathrm{o}(1))$$

Or, $\ln(1 + \mathrm{o}(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc est négligeable devant $-\ln(n)$ (qui tend vers $-\infty$), si bien que $u_n \sim -\ln(n)$.

- **Cas particulier de l'exponentielle :** Cela ne fonctionne plus car $e^{ab} \neq e^a \times e^b$, et donc, même si on peut toujours écrire $u_n = v_n(1 + \mathrm{o}(1))$, cela ne mène à rien. On s'en sort en général en donnant une meilleure approximation de u_n.

  Exemple : On se donne une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_n = \dfrac{n\ln(n)}{3} + \dfrac{n}{2} + \mathrm{o}(n)$. Peut-on donner un équivalent de e^{u_n} ?

$$e^{u_n} = e^{\frac{n\ln(n)}{3}} \times e^{n/2} \times e^{\mathrm{o}(n)} = n^{n/3} \times e^{n/2} \times e^{\mathrm{o}(n)}$$

  $\mathrm{o}(n)$ est une suite négligeable devant n. Or, une suite négligeable devant n peut tendre vers tout et n'importe quoi $(1, 0, 1789, \pm\infty$, par exemple la suite de terme général $-\sqrt{n})$, voire même ne pas admettre de limite : on ne peut rien dire sur $\mathrm{o}(n)$ donc on ne peut rien dire non plus sur son exponentielle, c'est-à-dire qu'on ne peut pas conclure.

  Si on a maintenant une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $v_n = \dfrac{n\ln(n)}{2} - \dfrac{n}{4} + \dfrac{\ln(n)}{2} + \mathrm{o}(1)$, peut-on donner un équivalent de e^{v_n} ? On trouve de même :

$$e^{v_n} = n^{\frac{n+1}{2}} \times e^{-n/4} \times e^{\mathrm{o}(1)}$$

  Or, $\mathrm{o}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et l'exponentielle est continue donc $e^{\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, si bien qu'en faisant le quotient, on obtient l'équivalent suivant : $e^{v_n} \sim n^{\frac{n+1}{2}} \times e^{-n/4}$.

En particulier, il vient : $v_n \sim \dfrac{n\ln(n)}{2}$, mais on va voir que e^{v_n} n'est pas équivalent à $e^{\frac{n\ln(n)}{2}}$. Encore une fois, l'équivalent ne passe pas à la fonction, même continue !

Morale de l'histoire : Quand on a une exponentielle, on cherche à donner une plus grande précision, et on s'arrête quand on a un $\mathrm{o}(1)$.

II.6 Utilisation du théorème de Cesàro

Parfois (typiquement lorsqu'on peut faire apparaître un télescopage), le théorème de Cesàro peut être un bon outil pour donner un équivalent. Cela peut servir quand la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$, ou ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2$, ou... admet une limite non nulle : on applique le théorème de Cesàro et cela permet de donner un équivalent de u_n. Donnons un exemple illustrant cette remarque.

Exemple : Donner la limite et un équivalent de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

Une récurrence immédiate permet d'affirmer que $u_n > 0$ pour tout n donc la suite est bien définie. De plus, pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 1/u_n$ donc la suite est strictement croissante. Si elle converge vers une limite L, par stricte croissance de la suite, $L > u_0 > 0$ donc la fonction $f : x \mapsto x + 1/x$ est continue en L, donc L est un point fixe de f i.e. $L = L + 1/L$ donc finalement $1/L = 0$ ce qui est absurde : la suite diverge, et puisqu'elle est croissante, elle diverge vers $+\infty$.

Donnons à présent un équivalent de u_n. Pour multiplier u_n et $1/u_n$, on pense à mettre l'égalité ci-dessus au carré, c'est-à-dire :

$$ {u_{n+1}}^2 = {u_n}^2 + 2 + \frac{1}{{u_n}^2}$$

Appliquer le théorème de Cesàro à $u_{n+1} - u_n$ donnera : $u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $u_n = \mathrm{o}(n)$, ce qui est bien mais insuffisant.

et puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il en découle que $u_{n+1}^2 - {u_n}^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. D'après le théorème de Cesàro :

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - {u_k}^2)}{n} = \frac{{u_n}^2 - {u_0}^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Dès lors :

$$\frac{{u_n}^2}{n} = \frac{{u_n}^2 - {u_0}^2}{n} + \frac{{u_0}^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2 + 0 = 2$$

Par conséquent, ${u_n}^2 \sim 2n$ et l'équivalent passe à l'élévation à une puissance fixe donc $u_n \sim \sqrt{2n}$.

On peut remarquer que cela ne dépend pas du premier terme u_0.

III Suites dominées

III.1 Définition et interprétation

Définition. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(v_n\right)$ ou, plus simplement, $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$, et on dit que u_n est un « grand o » de v_n.

Là aussi, on oubliera souvent d'écrire « $n \to +\infty$ ».

Exemple : Rappelons qu'une suite convergente est bornée. Dès lors, puisque

$$\frac{5n^3 + 12n^2 + 1000}{n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 5$$

la suite de terme général $\dfrac{5n^3 + 12n^2 + 1000}{n^3}$ est bornée donc $5n^3 + 12n^2 + 1000 = \mathrm{O}\left(n^3\right)$.

Elle est bornée mais pas forcément par 5 !

Interprétation : $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$ lorsque u_n est, au mieux, du même ordre de grandeur que v_n : soit elle est d'un ordre de grandeur moindre (voir ci-dessous : si $u_n = \mathrm{o}\left(v_n\right)$ alors $u_n = \mathrm{O}\left(v_n\right)$), soit u_n est du même ordre de grandeur. L'avantage de cette notation par rapport à l'équivalence est qu'elle est plus souple concernant les constantes, puisque seul compte l'ordre de grandeur : par exemple, si $n \leqslant u_n \leqslant 3n$, alors la suite de terme général u_n/n est à valeurs dans $[\,1\,;3\,]$ donc est bornée, donc $u_n = \mathrm{O}\left(n\right)$, i.e. u_n est de l'ordre de grandeur de n (ce qui n'est déjà pas si mal comme information), mais il n'y a aucune raison que $u_n/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$: le O permet de donner des informations sur l'ordre de grandeur, même lorsqu'on n'a pas idée du comportement « précis ». Quand trouver une constante précise est fastidieux et inutile (ce qui compte souvent est uniquement l'ordre de grandeur), on peut penser au O.

Exemple : $\dfrac{10n^4 + 12n^2 + 5n + 1000}{25n^5 + 19n^3} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Plus généralement :

Proposition. Soit $R \in \mathbb{K}(X)$ non nulle de degré $d \in \mathbb{Z}$. Alors $R(n) = \mathrm{O}\left(n^d\right)$.

Rappelons que le degré d'une fraction rationnelle est la différence du degré de son numérateur et de son dénominateur.

Démonstration. Notons $R = P/Q$ avec $P = a_qX^q + \cdots + a_0$ et $Q = b_kX^k + \cdots b_0$ avec a_q et b_k non nuls, si bien que $d = q - k$. Il en découle (cf. paragraphe II.2) que $P(n) \sim a_qn^q$ et que $Q(n) \sim b_kn^k$ donc (l'équivalent passe au quotient et au produit) :

$$\frac{R(n)}{n^{q-k}} \sim \frac{a_qn^q}{b_kn^k} \times \frac{1}{n^{q-k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a_q}{b_k} \qquad \square$$

et en particulier la suite de terme général $R(n)/n^{q-k}$ est bornée, ce qui est le résultat voulu.

Remarque : Pourquoi donner un O alors qu'ici on pourrait donner un équivalent, ce qui serait plus précis ? Parce que, par exemple, on peut sommer les O (alors qu'on ne peut pas sommer les équivalents, cf. paragraphe II.5.b) et aussi parce que, parfois, un O est tout ce dont on a besoin (par exemple pour appliquer les théorèmes de comparaison dans le chapitre 25). Surtout, parce que la plupart du temps, donner un O est plus simple que donner un équivalent précis : c'est donc un bon réflexe à prendre quand on n'a pas besoin de plus ! Par exemple :

$$(n+19)^{42} - (n+2023)^{42} = \mathrm{O}\left(n^{41}\right)$$

En effet, on applique le binôme de Newton, les termes en n^{42} se simplifient, il ne reste que des puissances inférieures à 41 ce qui permet de conclure.

Le O est une « arme de destruction massive » : il donne des informations utiles tout en étant très facile de manipulation. C'est pourquoi il est capital de bien savoir le manier.

On pourrait donner un équivalent à l'aide du binôme de Newton ; on trouverait (en faisant attention de ne pas sommer ou soustraire des équivalents, exo) :

$$-42 \times 2004 \times n^{41}$$

mais tout dépend de ce qu'on cherche, parfois un O suffit amplement, et alors il est inutile de faire du zèle.

Cas particulier important :

$$u_n = \mathrm{O}(1) \iff \text{la suite } \left(\frac{u_n}{1}\right) \text{ est bornée} \iff \text{la suite } (u_n) \text{ est bornée}$$

Dire que $u_n = \mathrm{O}(1)$ est donc une autre manière de dire que (u_n) est bornée.

III.2 Propriétés et lien avec la négligeabilité et l'équivalence

Toutes les propriétés du paragraphe I.2 sont encore vraies en remplaçant les o par des O. En particulier, la transitivité : si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. De plus, la première propriété du paragraphe II.3 est aussi vérifiée avec un O à la place du o : si $u_n \sim v_n$ et si $w_n = \mathrm{O}(u_n)$ alors $w_n = \mathrm{O}(v_n)$. Par exemple, si $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$, alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$. Tout cela se retrouve facilement, se prouve facilement avec la définition, et est très intuitif à l'aide de l'interprétation du O vue ci-dessus. Attention cependant, une propriété est fausse en remplaçant un o par un O : si on a $u_n = v_n + \mathrm{O}(v_n)$, on n'a pas forcément $u_n \sim v_n$! C'est, encore une fois, intuitif : si on ajoute à v_n un terme du même ordre de grandeur que v_n, on ne sait plus du tout ce qu'on va récupérer ! Par exemple, $50n^2 + n = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ mais $n^2 + (50n^2 + n)$ n'est pas équivalent à n^2 mais à $51n^2$.

La raison est que le n^2, ou le v_n dans le cas général, se fait « absorber par le trou noir » qu'est le O : tout ce qu'on peut dire est que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ ou, dans notre exemple, qu'on a un $\mathrm{O}(v_n)$.

Proposition. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ ou si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.

Démonstration. Si la suite de terme général u_n/v_n tend vers 0 ou vers 1, alors elle est bornée.

Remarque : Bien sûr, réciproque fausse : $2n = \mathrm{O}(n)$ mais n'est ni négligeable, ni équivalent à n.

Remarque : Il faut faire parfois attention avec l'interprétation du O comme l'ordre de grandeur : c'est l'ordre de grandeur « maximal » i.e. la suite peut très bien être d'un ordre de grandeur inférieur. Par exemple, $\ln(n) = \mathrm{O}(n)$: s'il existe $\lambda \neq 0$ tel que $u_n \sim \lambda v_n$ alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ mais la réciproque est fausse ! Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, alors u_n peut très bien être négligeable devant v_n ! Tout ce qu'on peut dire est que u_n ne peut pas être d'un ordre de grandeur strictement supérieur. Par exemple, si $u_n = \mathrm{O}(n)$, alors on ne peut pas dire si u_n est plutôt de l'ordre de grandeur de n ou de $\ln(n)$, mais on peut dire directement que $u_n = \mathrm{o}\left(n^2\right)$. En effet :

Comme pour le o, le O est un « trou noir » !

Proposition.

- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.

La démonstration est évidente et laissée en exercice. Plutôt que de retenir ce résultat avec toutes les chances de s'embrouiller le jour J (« c'est un grand ou un petit o ? »), il est plus rentable de bien comprendre ce qu'il signifie : si u_n est de l'ordre de grandeur de v_n et v_n négligeable devant w_n, alors u_n est négligeable devant w_n, et idem pour l'autre : c'est intuitif !

Remarque : On peut regretter le fait que le O soit parfois imprécis : comme dit ci-dessus, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, on a peut-être $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et donc cela ne permet pas de se faire une idée claire de l'ordre de grandeur de u_n. On a pour cela la définition suivante :

Définition (HP). On note $u_n = \Theta(v_n)$ si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(u_n)$. En d'autres termes :

$$u_n = \Theta(v_n) \iff \exists (m, M) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, m|v_n| \leqslant |u_n| \leqslant M|v_n|$$

En d'autres termes, $u_n = \Theta(v_n)$ lorsque u_n et v_n sont du même ordre de grandeur.

On trouve aussi la notation $u_n = \Omega(v_n)$ pour traduire le fait que u_n n'est pas négligeable devant v_n.

Cette notation est plus adaptée que o et O pour l'étude de la complexité des algorithmes : une minoration de la complexité permet de mieux cerner les limitations d'un algorithme !

IV Comparaison de fonctions

Dans cette partie et la suivante, on se donne D une union d'intervalles non vides, non réduits à un point et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à D (par exemple, si $D = \mathbb{R}^*$, on peut prendre $a = 0, a = 1$ ou même $a = +\infty$). Si rien n'est précisé, f, g, h sont trois fonctions définies sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui ne s'annulent pas au voisinage de a, sauf éventuellement en a (par exemple, on pourra étudier la fonction sinus, qui ne s'annule pas au voisinage de 0, sauf en 0). Enfin, toutes les limites seront prises quand x tend vers a.

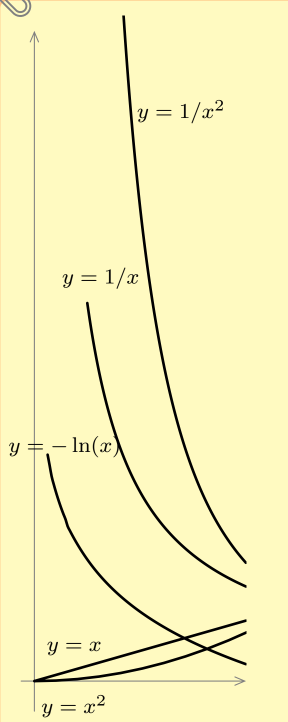
Rappelons qu'un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) est un ensemble du type $D \cap [A\,;+\infty[$ (resp. $D \cap]-\infty\,;A]$) avec $A \in \mathbb{R}$. Un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ est un ensemble du type $D \cap [a-\eta\,;a+\eta]$, avec $\eta > 0$.

IV.1 Définitions et exemples

IV.1.a Fonctions négligeables

Définition. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$. On note $f(x) \underset{x \to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ ou $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ si aucune confusion n'est possible.

Exemple : On rappelle que pour tous $\alpha, \beta > 0$, $x^\alpha |\ln(x)|^\beta \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Ainsi, au voisinage de 0, $|\ln(x)|^\beta = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$. De plus, si $\beta > \alpha > 0$, $\dfrac{1}{x^\alpha} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\beta}\right)$ et $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$. Par exemple, $\pm\ln(x) = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\dfrac{1}{x} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ tandis que $x = \mathrm{o}(\pm\ln(x))$ et $x^2 = \mathrm{o}(x)$. Voir le dessin ci-contre



Remarques :

- De même que pour les suites, si f et g tendent vers $\pm\infty$, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « g tend vers $\pm\infty$ plus vite que f » tandis que si f et g tendent vers 0, $f(x) = \mathrm{o}(g(x))$ signifie que « f tend vers 0 plus vite que g ».
- Autre écriture des croissances comparées vues au premier semestre :
  - ⋆ $\forall \alpha, \beta > 0$, $\ln(x)^\beta \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}(x^\alpha)$,
  - ⋆ $\forall \alpha, \beta > 0$, $\dfrac{1}{x^\alpha} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\ln(x)^\beta}\right)$,
  - ⋆ $\forall \alpha, \beta > 0$, $x^\alpha \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^{\beta x}\right)$,
  - ⋆ $\forall \alpha, \beta > 0$, $e^{-\beta x} \underset{x \to +\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)$,
  - ⋆ $\forall \alpha, \beta > 0$, $e^{\beta x} \underset{x \to -\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{|x|^\alpha}\right)$.

⚠ Le petit o « dépend de l'endroit où on se trouve » : un o au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement. Par exemple $e^x \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}\left(x^{1789}\right)$, $e^x \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}\left(1\right)$ et $e^x \underset{x\to-\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^{1789}}\right)$. Mais $x^{1789} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(e^x\right)$.

Ce n'était pas le cas avec les suites puisque, pour les suites, on se place forcément quand $n \to +\infty$.

IV.1.b Fonctions équivalentes

Définition. On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de a si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$. On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \sim g(x)$ si aucune confusion n'est possible.

Exemples :

- $\dfrac{1}{x} + \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
- $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $x + \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(x)$.
- $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.
- $\cos(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x^2}{2}$.

⚠ L'équivalent « dépend de l'endroit où on se trouve » : un équivalent au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement.

Exemples :

- $\ln(1+x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.
- $x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$.
- $\dfrac{1}{x} + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

L'équivalent de $\ln(1+x)$ en $+\infty$ se démontre en mettant en facteur le terme prédominant, cf. paragraphe II.5.c.

IV.1.c Fonctions dominées

Définition. On dit que f est dominée par g au voisinage de a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a. On note $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ ou $f(x) = \mathrm{O}\left(g(x)\right)$ si aucune confusion n'est possible.

Exemples :

- $\forall \alpha \leqslant \beta, x^\beta \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(x^\alpha\right)$
- $\forall \alpha \leqslant \beta, x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^\beta\right)$

⚠ Le grand O « dépend de l'endroit où on se trouve » : un O au voisinage de $+\infty$ ne sera plus forcément valable au voisinage de 0, et réciproquement. Par exemple, $5x^3 + 2x^2 + 10 \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(x^3\right)$ mais $5x^3 + 2x^2 + 10 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}\left(1\right)$.

En clair, au voisinage de $\pm\infty$, ce sont les plus grandes puissances qui gagnent, mais ce sont les plus petites qui gagnent au voisinage de 0. Voir le dessin ci-dessus avec les différents graphes.

IV.2 Propriétés

Proposition. Si f est bornée au voisinage de a et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, alors $f(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\right)$.

Démonstration. On suppose que $a \in \mathbb{R}$ et que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (raisonnement analogue dans les autres cas). Par hypothèse, f est bornée au voisinage de a donc il existe $\eta > 0$ et $M \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in D, \quad |x-a| \leqslant \eta \quad \Rightarrow \quad -M \leqslant f(x) \leqslant M$$

et puisque $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$:

$$\exists \eta' > 0, \quad \forall x \in D, \quad |x-a| \leqslant \eta' \quad \Rightarrow \quad g(x) > 0$$

Soit $\eta'' = \min(\eta, \eta') > 0$. Soit $x \in D, |x-a| \leqslant \eta''$. Alors $\dfrac{-M}{g(x)} \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant \dfrac{M}{g(x)}$. Les deux termes extrémaux tendent vers 0 quand $x \to a$. D'après le théorème d'encadrement, on a le résultat. $\square$

Le reste du cours est identique à celui pour les suites, avec $x \to a$ à la place de $n \to +\infty$, $f(x)$ à la place de u_n, etc. et en adaptant les démonstrations.

Par théorème de composition d'une suite ou une fonction par une fonction, on a aussi :

Proposition (substitution). Supposons que $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$.

- Si u est une fonction définie au voisinage de $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telle que $u(t) \xrightarrow[t \to b]{} a$, alors $f(u(t)) \underset{t \to b}{\sim} g(u(t))$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$, alors $f(u_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} g(u_n)$.

Et on a le même résultat en remplaçant par $\underset{x \to a}{\sim}$ par $\underset{x \to a}{=}$ o() et $\underset{t \to b}{\sim}$ par $\underset{t \to b}{=}$ o().

Exemple : On a $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $\ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

IV.3 Un exemple dans un cas où $a \neq 0$ et $a \neq \pm\infty$

Les cas les plus fréquents sont les cas où $a = 0$ ou $\pm\infty$, mais il arrivera parfois de se placer à un autre endroit (par exemple au voisinage de 1), ce qui revient au même qu'au voisinage de 0 par une simple translation, mais alors : « les x se transforment en $x - a$ » et alors on est obligé de garder du $x - a$, on ne peut pas supprimer des termes, aucun n'étant prédominant par rapport à un autre. Un exemple vaut mieux qu'un long discours.

Exemple : Donnons un équivalent au voisinage de 1 de $\sqrt{1 - x^2}$.

Au voisinage de 1, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)}$. Or, au voisinage de 1, $1+x \sim 2$ (rappelons qu'une quantité admettant une limite non nulle est équivalente à cette limite) et l'équivalent passe à la puissance fixe donc on trouve :

$$\sqrt{1-x^2} \underset{x \to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$$

On ne peut pas faire mieux ! Aucun terme, entre le 1 et le x, n'est prédominant (on est au voisinage de 1, pas au voisinage de 0 ou de $+\infty$), et il est évidemment hors de question de dire « équivalent à 0 ».

V Développements Limités

Dans cette partie, sauf indication contraire (par exemple dans le paragraphe V.8), on suppose que f est une fonction définie sur D et que 0 est adhérent à D. De plus (toujours sauf indication contraire, par exemple dans le paragraphe V.8), les limites, équivalents etc. sont tous au voisinage de 0. On se donne enfin $n \in \mathbb{N}$.

V.1 Introduction et définitions

On a vu les équivalents suivants :

On rappelle qu'on se place au voisinage de 0.

- $\sin(x) \sim x$,
- $\mathrm{Arctan}(x) \sim x$,
- $e^x - 1 \sim x$,
- $\ln(1+x) \sim x$,
- $\sqrt{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{2}$,
- $\cos(x) - 1 \sim -\dfrac{x^2}{2}$.

On peut écrire les trois derniers sous la forme suivante :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \mathrm{o}(x), \quad e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x) \quad \text{et} \quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

On a ainsi une approximation simple (un polynôme) de cos, exp etc. au voisinage de 0. Cela permet par exemple de donner une valeur approchée de $\cos(x)$, ainsi que de lever des indéterminations. Cependant, ces approximations peuvent s'avérer insuffisants : cf. paragraphe II.5.c. Peut-on obtenir des termes supplémentaires, pour obtenir une approximation encore meilleure ?

Définition. On dit que f admet un développement limité (DL) à l'ordre n au voisinage de 0 s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

Remarque : Intuitivement, f admet un DL à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme de degré inférieur ou égal à n « proche de f » au voisinage de 0. S'il existe, ce polynôme est la meilleure approximation de f par un polynôme de degré n puisque l'erreur commise en faisant l'approximation est négligeable devant x^n, et il est appelé la partie principale du DL (c'est-à-dire le DL sans le o).

Rappelons qu'au voisinage de 0, si $\alpha < \beta$, alors $x^\beta = \mathrm{o}(x^\alpha)$. Ainsi, les puissances dans le DL sont rangées de « la plus importante à la plus négligeable » : chaque terme est négligeable devant les précédents.

Proposition. On suppose que f admet un DL à l'ordre n en 0 non trivial i.e. avec au moins un coefficient non nul :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Alors f est équivalente au premier terme non nul du DL c'est-à-dire si

$$f(x) = a_k x^k + a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

avec $a_k \neq 0$, alors $f(x) \sim a_k x^k$.

Remarque : Ainsi, le développement limité est à voir comme une généralisation et un affinement des équivalents : l'ordre le plus grossier d'un DL non trivial fournit l'équivalent, les termes suivants du DL permettent d'affiner l'approximation donnée par l'équivalent, ces termes ne sont pas accessibles directement par le calcul d'équivalent : cf. paragraphe II.4, un seul terme dans un calcul d'équivalent, quand on voudra plusieurs termes... on fera un DL !

Démonstration. Il suffit de voir qu'on a alors :

$$f(x) = a_k x^k + \underbrace{a_{k+1} x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)}_{=\mathrm{o}\left(x^k\right)}$$

□

ce qui permet de conclure.

Remarque : L'équivalent, c'est donc le premier terme non nul du DL. Quand on voudra donner un équivalent, il suffira de donner un DL, le premier terme non nul sera l'équivalent recherché. C'est parfois plus facile à dire qu'à faire, en particulier il est parfois difficile de savoir à quel ordre effectuer les DL : cf. paragraphe V.9 et cf. TD. Mais il ne faut tout de même pas céder à la tentation de dire des énormités. Par exemple, si on cherche un équivalent en 0 de $\mathrm{sh}(x) + \sin(x) - 2x$ (cf. exercice 22), un DL à l'ordre 3 donnera :

$$\mathrm{sh}(x) + \sin(x) - 2x = \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Alors on ne peut pas conclure : on n'a pas assez d'information, il faut pousser le DL à un ordre plus élevé. Attention à ne pas dire n'importe quoi du type $\mathrm{sh}(x) + \sin(x) - 2x \sim x^3, \mathrm{o}\left(x^3\right)$ ou, pire : $\mathrm{sh}(x) + \sin(x) - 2x \sim 0$!

V.2 Premiers exemples

Exemples : D'après ce qui précède,

- $e^x = 1 + x + \mathrm{o}(x)$, c'est-à-dire que l'exponentielle admet un DL à l'ordre 1 en 0 (avec $a_0 = a_1 = 1$).
- $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} + \mathrm{o}(x)$, c'est-à-dire que la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ admet un DL à l'ordre 1 en 0 (avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 1/2$).

On généralisera ce résultat dans le paragraphe V.4.

- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, c'est-à-dire que le cosinus admet un DL à l'ordre 2 en 0 (avec $a_0 = 1, a_1 = 0$ et $a_2 = -1/2$).

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(1+x)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n\right) = 1 + (-1)^n x^{n+1}.$$

Par conséquent, si $x \neq -1$, il vient :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n - \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

Or, $-\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x} \sim (-1)^{n+1} x^{n+1} = \mathrm{o}\left(x^n\right)$. En conclusion :

Rappelons qu'on se trouve au voisinage de 0.

Théorème. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$

C'est-à-dire que $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ admet un DL à l'ordre n en 0 (avec $a_k = (-1)^k$ pour tout $k \in [\![0\,;\, n]\!]$).

Remarque : Il faut bien voir que x peut être remplacé par n'importe quelle quantité qui tend vers 0 (penser à « truc ») : c'est pour cela que j'ai mis u dans la feuille des DL que je vous ai distribuée. En particulier, on peut remplacer x par n'importe quelle quantité qui tend vers 0. Par exemple, on peut appliquer cela à $-x$ (possible car $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) :

$$\frac{1}{1-x} = 1 - (-x) + (-x)^2 - (-x)^3 + \cdots + (-1)^n(-x)^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

c'est-à-dire :

Théorème. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$

Remarque : Pour faire simple : dès qu'il y a quotient, il faut utiliser l'une de ces formules.

Nous reverrons les opérations sur les DL dans le paragraphe V.9.

Exemple : $\dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1 + \frac{x}{2}}$. On pose $u = x/2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Or :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots + (-1)^n u^n + \mathrm{o}\left(u^n\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+x} &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \cdots + (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

V.3 Premières propriétés

V.3.a Unicité du DL

Proposition (unicité du DL). Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0, celui-ci est unique.

Démonstration. Soient $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + x_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Attention, on rappelle qu'on ne peut pas simplifier les o ! En particulier, on ne peut pas affirmer que $a_0 + a_1 x + \cdots + x_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ au voisinage de 0 !

Supposons qu'il existe $i \in [\![0\,;\,n]\!]$ tel que $a_i \neq b_i$. Soit $k = \min\{i | a_i \neq b_i\}$. Alors $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots a_{k-1} = b_{k-1}$, si bien que

$$a_k x^k + \underbrace{a_{k+1}x^{k+1} + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)}_{=\mathrm{o}\left(x^k\right)} = b_k x^k + \underbrace{b_{k+1}x^{k+1} + \cdots + b_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)}_{=\mathrm{o}\left(x^k\right)}.$$

Ainsi, $a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right) = b_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right)$ donc $a_k + \mathrm{o}\left(1\right) = b_k + \mathrm{o}\left(1\right)$, et finalement $a_k - b_k = \mathrm{o}\left(1\right)$, c'est-à-dire que $a_k - b_k \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Or, $a_k - b_k$ est une constante non nulle, ce qui est absurde. En conclusion, $a_i = b_i$ pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$. □

Corollaire. On suppose que D est symétrique par rapport à 0 et que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0.

- Si f est impaire, alors tous les coefficients d'ordre pair $(a_0, a_2, a_4 \dots)$ sont nuls.
- Si f est paire, alors tous les coefficients d'ordre impair $(a_1, a_3, a_5 \dots)$ sont nuls.

Démonstration. Supposons f impaire (raisonnement analogue dans l'autre cas). Par hypothèse, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$. Puisque $-x \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, alors, d'une part :

$$\begin{aligned} f(-x) &= a_0 + a_1(-x) + a_2(-x)^2 + \cdots + a_n(-x)^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &= a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n(-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \end{aligned}$$

et, d'autre part, f étant impaire, $f(-x) = -f(x)$, si bien que

$$f(-x) = -a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \cdots - a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$ □

Par unicité du DL (celui de $x \longmapsto f(-x)$), il vient : $a_0 = -a_0$, $-a_1 = -a_1$, $a_2 = -a_2$, $\dots$, $-a_n = (-1)^n a_n$. Les égalités avec les coefficients impairs (par exemple $-a_1 = -a_1$) n'apportent aucune information, mais celles avec les coefficients pairs (par exemple $a_0 = -a_0$) impliquent que ceux-ci sont tous nuls.

Remarque : Cela peut permettre d'augmenter gratuitement l'ordre d'un DL si on connaît sa parité. Par exemple (cf. paragraphe V.4), nous verrons que le DL de tan en 0 à l'ordre 7 est :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathrm{o}\left(x^7\right)$$

La tangente étant impaire, son coefficient à l'ordre 8 est nul donc on a son DL à l'ordre 8 sans effort supplémentaire :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \mathrm{o}\left(x^8\right)$$

Rappelons en effet (cela peut être utile si beaucoup de coefficients sont nuls) que l'ordre du DL est la puissance de x dans le o, ce n'est pas le nombre de termes ni la plus grande puissance dans les termes avant le o mais bien la puissance dans le o : le dernier DL ci-dessus est bien un DL à l'ordre 8 et non pas à l'ordre 7 !

V.3.b CNS d'existence d'un DL aux ordres 0 et 1

Proposition (Troncature d'un DL). Si f admet un DL à l'ordre n alors, pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p.

Par contraposée, si f n'admet pas de DL à l'ordre p, alors elle n'en admet pas non plus aux ordres supérieurs.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + \underbrace{a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)}_{=\mathrm{o}\left(x^p\right)}$$

ce qui permet de conclure. □

Remarque : Il découle de la démonstration que le DL de f à l'ordre p (unique d'après la partie précédente) est le DL à l'ordre n tronqué à l'ordre p : d'où le nom de cette proposition.

Proposition. Supposons f définie en 0. La fonction f admet un DL à l'ordre 0 en 0 si et seulement si f est continue en 0, et alors $a_0 = f(0)$.

On donnera parfois le DL de fonctions non continues en 0, par exemple $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x+x^2}$ (cf. exercice 19). Cela ne contredit pas le résultat ci-contre car elles ne sont pas définies en 0. L'existence d'un DL à l'ordre 0 implique alors qu'elles sont prolongeables par continuité en 0.

DÉMONSTRATION.
- Si f est continue en 0, alors $f(x) - f(0) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, c'est-à-dire que $f(x) - f(0) = \mathrm{o}(1)$. Ainsi, $f(x) = f(0) + \mathrm{o}(1)$: f admet un DL à l'ordre 0 et $a_0 = f(0)$.
- Réciproquement, supposons que f admette un DL à l'ordre 0 en 0. Il existe donc $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a_0 + \mathrm{o}(1)$. Ainsi, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a_0$. Comme f est définie en 0, si f admet une limite en 0, celle-ci est forcément égale à $f(0)$ (cf. chapitre 13), c'est-à-dire que $a_0 = f(0)$. Finalement, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)$: f est continue en 0.

Proposition. Supposons f définie en 0. La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0, et alors $a_1 = f'(0)$.

DÉMONSTRATION.
- Si f admet un DL à l'ordre 1 en 0, alors il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = a_0 + a_1 x + \mathrm{o}(x)$. En particulier, f admet un DL à l'ordre 0 donc est continue en 0 et $a_0 = f(0)$. Ainsi, si $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = a_1 + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} a_1.$$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.
- Réciproquement, supposons f dérivable en 0. Alors, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) - f'(0) = 0.$$

En d'autres termes, $f(x) - f(0) - xf'(0) = \mathrm{o}(x)$. Nous en déduisons que $f(x) = f(0) + xf'(0) + \mathrm{o}(x)$: f admet un DL à l'ordre 1. $\square$

Remarque : ⚠ Si $n \geqslant 2$, il n'y a plus équivalence entre « être dérivable n fois » et « admettre un DL à l'ordre n ». Par exemple, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Tout d'abord, si $x \neq 0$, $\dfrac{f(x)}{x^2} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ d'après le théorème d'encadrement (on encadre par $\pm|x|$). En d'autres termes, $f(x) = \mathrm{o}\left(x^2\right)$ donc f admet un DL à l'ordre 2 (avec $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, rappelons que l'ordre du DL est la puissance dans le o). Montrons cependant que f n'est pas dérivable deux fois en 0. Tout d'abord, f admet un DL à l'ordre 2 donc admet un DL à l'ordre 1 donc est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1 = 0$. De plus, si $x \neq 0$, $f'(x) = 3x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$, si bien que

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

et, de même que dans le chapitre 13, on montre que cette quantité n'a pas de limite en 0 donc f' n'est pas dérivable en 0 : f n'est pas dérivable deux fois en 0.

⚠ Pour faire simple :
- admettre un DL à l'ordre 0 $\iff$ être continue en 0 (ou, à la limite, être prolongeable par continuité en 0).
- admettre un DL à l'ordre 1 $\iff$ être dérivable en 0.
- **et ça s'arrête là !**

On pouvait aussi démontrer la dérivabilité de f en 0 à la main, avec un taux d'accroissement : exo.

V.4 Formule de Taylor-Young

Théorème (formule de Taylor-Young). Supposons f définie en 0. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0, alors f admet un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

En particulier, si f est $\mathscr{C}^\infty$, alors f admet un DL à tout ordre.

En d'autres termes, lorsque f est $\mathscr{C}^n$, la partie principale du DL à l'ordre n est la somme de la série de Taylor à l'ordre n.

Remarque : Sous forme plus condensée, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Démonstration. Supposons f de classe $\mathscr{C}^n$. Il suffit de prouver que

$$f(x) - \left(f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right) = \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Notons $g(x)$ le membre de gauche. Il suffit donc de prouver que $g(x)/x^n \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. La fonction f étant de classe $\mathscr{C}^n$, on peut appliquer la formule de Taylor reste intégral (à l'ordre $n-1$) :

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire que

$$g(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n - \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]_0^x \\ &= \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}|g(x)| &= \left|\int_0^x \frac{f^{(n)}(0)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^x \frac{(f^{(n)}(0)-f^{(n)}(t))(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right|\end{aligned}$$

Supposons dans la suite $x \geqslant 0$. D'après l'inégalité triangulaire (précisons que $|x-t| = x-t$ puisque $t \in \left]0\,;x\right[$ et que $x \geqslant 0$) :

Si $x \leqslant 0$, le raisonnement est tout à fait analogue si ce n'est qu'on intègre de x à 0 et non plus de 0 à x quand on applique l'inégalité triangulaire, et qu'on a $|x-t| = t-x$ dans l'intégrale.

$$|g(x)| \leqslant \int_0^x \frac{|f^{(n)}(0)-f^{(n)}(t)| \times (x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

Fixons $\varepsilon > 0$. $f^{(n)}$ étant continue (car f est $\mathscr{C}^n$), il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $t \in [-\eta\,;\eta]\,, |f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)| \leqslant \varepsilon$. Supposons donc $x \in [0\,;\eta]$ (rappelons qu'on a supposé $x \geqslant 0$). Alors, pour tout $t \in [0\,;x]\,, t \in [0\,;\eta]$ donc $|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(0)| \leqslant \varepsilon$. Par croissance de l'intégrale (les bornes sont dans le bon sens) :

$$\begin{aligned}|g(x)| &\leqslant \int_0^x \frac{\varepsilon \times (x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\varepsilon x^n}{n!}\end{aligned}$$

Si $x > 0$, on trouve donc : $|g(x)/x^n| \leqslant \varepsilon/n! \leqslant \varepsilon$. En d'autres termes :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \left]0\,;\eta\right], |g(x)/x^n| \leqslant \varepsilon \qquad \square$$

c'est-à-dire que $g(x)/x^n \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. Le raisonnement est analogue en 0^- ce qui permet de conclure.

Remarque : On a déjà vu que, si $n \geqslant 2$, il n'y a plus équivalence entre « être dérivable n fois » et « admettre un DL à l'ordre n ». Cependant, la formule de Taylor-Young nous fournit une condition **suffisante** simple pour affirmer qu'une fonction admet un DL : si f est $\mathscr{C}^n$, alors f admet un DL à l'ordre n (et celui-ci est donné par sa série de Taylor). En particulier, si f est $\mathscr{C}^\infty$, f admet un DL à tout ordre : y penser si on demande de justifier l'existence d'un DL !

Corollaire. Les fonctions $\exp, \sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (où α est un réel FIXE) admettent des DL à tout ordre et, pour tout n, on a :

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.
- $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$.
- $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$.
- $\mathrm{sh}(x) = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$.
- $\mathrm{ch}(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$.
- $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

De plus, la fonction tan est elle-aussi $\mathscr{C}^\infty$ donc admet un DL à tout ordre et :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right)$$

Nous nous restreignons à l'ordre 7 car les coefficients suivants sont vraiment indigestes...

Remarque : Précisons que les DL ci-dessus sont donnés à l'ordre n pour l'exponentielle, le ln et la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, à l'ordre $2n+1$ pour le sinus et à l'ordre $2n$ pour le cosinus. On remarque que les coefficients d'ordre pair du DL du sinus sont nuls, ce qui est cohérent avec l'application vue en V.3 car c'est une fonction impaire. On aurait même pu écrire $\mathrm{o}\left(x^{2n+2}\right)$ puisque le coefficient devant x^{2n+2} est nul. De même pour le cosinus, on aurait pu mettre $\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$. Idem pour le sh et le ch, et on généralise à toute fonction paire ou impaire (on pourrait donner le DL de la tangente à l'ordre 8 comme au paragraphe V.3 par exemple).

Démonstration. Ces six fonctions sont $\mathscr{C}^\infty$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, elles admettent des DL à tout ordre. Ensuite, il suffit de calculer les dérivées successives, leur valeur en 0 et d'appliquer la formule de Taylor-Young.

- Pour l'exponentielle, le sinus et le cosinus, cela découle des calculs faits au chapitre 23.
- Une récurrence immédiate prouve que, pour tout k, $\mathrm{sh}^{(2k)} = \mathrm{sh}$, donc $\mathrm{sh}^{(2k)}(0) = 0$, et $\mathrm{sh}^{(2k+1)} = \mathrm{ch}$ donc $\mathrm{sh}^{(2k+1)}(0) = 1$ ce qui donne le résultat voulu. Idem pour le ch.
- Si on note $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$, par récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $x > -1$, $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ ce qui permet de conclure.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \tan^{(n)}(0)/n!$.
    - ⋆ La fonction tan étant impaire, $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$.
    - ⋆ $a_1 = \tan'(0) = 1$.
    - ⋆ D'après l'exercice 56 du chapitre 14, $3a_3 = a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0$, si bien que $a_3 = 1/3$.
    - ⋆ De même, $5a_5 = a_0a_4 + a_1a_3 + a_2a_2 + a_3a_1 + a_4a_0$ donc $a_5 = 2/15$.
    - ⋆ De même on trouve $a_7 = 17/315$, ce qui donne le résultat voulu.

Nous avons prouvé dans cet exercice que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$(n+1)a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

□

Exemple : Par exemple, en prenant successivement $\alpha = 1/2$ puis $\alpha = -1/2$, on trouve à l'ordre 2 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \text{o}\left(x^2\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \text{o}\left(x^2\right)$$

Remarques :

- Comme on le voit ci-dessus, lorsqu'il y a un quotient, on peut penser à introduire un α négatif : cela évite de faire deux DL, d'abord celui du dénominateur, puis celui de la fonction avec le DL de $1/(1+u)$.

Le DL est valable pour n'importe quelle valeur FIXE de α, même négative.

- Lorsque α est un entier, on a :

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Par conséquent, lorsqu'on veut faire un DL d'une quantité du type $(1+x)^\alpha$ avec un α **entier**, il suffit de prendre les termes correspondants dans le binôme de Newton (ou du triangle de Pascal pour les petites valeurs). Par exemple, on sait (à l'aide du triangle de Pascal ou du binôme de Newton) que :

$$(1+x)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

On en déduit que le DL de $(1+x)^5$ à l'ordre 3 est tout simplement :

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + \text{o}\left(x^3\right)$$

Remarque : Encore une formule de Taylor ! Contrairement aux deux autres, celle-ci donne un résultat LOCAL, c'est-à-dire au voisinage d'un point. On ne peut pas s'en servir pour donner un encadrement ou le signe d'une fonction sur tout un intervalle, on utilise pour cela l'une des deux autres.

Remarque : Justement, rappelons que le principe de ces deux formules, quand on les applique sur $[\,0\,;x\,]$, est de donner des informations sur l'erreur commise en faisant l'approximation de $f(x)$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$. Or, d'après la formule de Taylor-Young, cette somme est la partie principale du DL de f en 0. Ainsi, quand on appliquera l'une de ces deux formules à une fonction connue ($\exp, \cos$ etc.), il sera inutile de calculer les dérivées successives pour expliciter la somme : c'est la partie principale du DL ! Attention cependant : ni la fonction intégrée (dans Taylor avec reste intégral), ni la majoration (dans l'inégalité de Taylor-Lagrange) ne sont en général égales au terme suivant dans le DL. Illustrons par un exemple.

Exemple : Soit $x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 1 sur $[\,x\,;0\,]$ (f est bien $\mathscr{C}^2$) :

$$\Bigg| f(x) - \underbrace{\left(1+\frac{x}{2}\right)}_{\substack{\text{Partie principale du DL}\\ \text{à l'ordre 1 : direct !}}} \Bigg| \leqslant \underbrace{\max_{c\in[-1/2\,;0]} \left|f''(c)\right|}_{\substack{\text{Pas de raccourci : on doit}\\ \text{le calculer à la main.}}} \times \frac{x^2}{2!}$$

Or, si $c \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right]$:

$$f''(c) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{(1+c)^{3/2}}$$

donc $|f''|$ est maximale en $c = -1/2$ (exo) et vaut $1/\sqrt{2}$. Finalement :

$$\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\right| \leqslant \underbrace{\frac{x^2}{2\sqrt{2}}}_{\substack{\text{Ce n'est pas le terme} \\ \text{suivant du DL !}}}$$

Remarque : Rappelons que la tangente en 0 (lorsque f est dérivable en 0 évidemment) est la droite d'équation $y = f(0) + f'(0) \times x$. Or, $f(0) + f'(0) \times x$ est la partie principale (c'est-à-dire sans le o) du DL de f à l'ordre 1. Par conséquent, si on connaît le DL de f, l'équation de sa tangente en 0 ne pose aucune difficulté : cela peut faire gagner du temps, en particulier quand on parle de convexité, domaine dans lequel les tangentes, et particulièrement la tangente en 0, jouent un grand rôle.

Exemples :

- La tangente en 0 du sinus, de la tangente, de l'Arctan, de $x \longmapsto \ln(1+x)$ est la droite d'équation $y = x$.
- La tangente en 0 de l'exponentielle est la droite d'équation $y = 1 + x$.
- La tangente en 0 de $x \longmapsto (1+x)^\alpha$ (où α est un réel FIXE) est la droite d'équation $y = 1 + \alpha x$.

V.5 Primitivation d'un DL

Théorème. Supposons f définie en 0. On suppose que f admet un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Supposons que f admette une primitive F. Alors F admet un DL à l'ordre $n+1$ donné par :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}\left(x^{n+1}\right)$$

Remarques :

- En particulier, on peut toujours primitiver le DL d'une fonction continue (puisqu'une fonction continue admet des primitives). Puisqu'on fera des DL en général avec des fonctions $\mathscr{C}^\infty$, on pourra primitiver les DL sans se poser de question.
- ⚠ On peut primitiver les DL terme à terme, mais attention de ne pas oublier de primitiver le o, et attention également à ne pas oublier le $F(0)$, i.e. attention à ne pas oublier la constante de primitivation !
- ⚠ En général, on ne peut pas dériver un DL. Par exemple, reprenons la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

du paragraphe V.3.b. Alors on f admet un DL à l'ordre 2 mais n'est pas dérivable deux fois en 0 : dès lors, f' n'est pas dérivable en 0 donc n'admet pas de DL à l'ordre 1, alors que f admet un DL à l'ordre 2. Cependant, on peut parfois avoir envie de

L'idée est simple : si f est petite alors ses primitives le sont (penser à l'aire sous la courbe) donc on peut primitiver un o, tandis que sa dérivée ne l'est pas forcément (f peut avoir de très fortes oscillations) donc on ne peut pas dériver un o.

justifier l'existence et de calculer le DL d'une dérivée. La méthode est simple : en général, on justifie l'existence à l'aide de la formule de Taylor-Young (en pratique, les fonctions sont suffisamment régulières), on primitive le DL de f' et on utilise l'unicité du DL.

On peut montrer que **si** f' admet un DL, alors on peut l'obtenir à partir de celui de f par dérivation terme à terme. Mais plutôt que de retenir un théorème qu'on appliquera mal le jour J et qui est HP, il faut mieux retenir la méthode qui permet de le faire avec les outils du programme.

Démonstration. Posons

$$g(x) = F(x) - \left(F(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}\right)$$

Là aussi, il suffit de prouver que $g(x)/x^{n+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Soit $x \neq 0$. F étant dérivable (c'est une primitive de f), g est continue sur $[\,0\,;x\,]$, dérivable sur $]\,0\,;x\,[$: d'après l'EAF, il existe $c_x \in\,]\,0\,;x\,[$ tel que

$$\begin{aligned} g'(c_x) &= \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \\ &= \frac{g(x)}{x} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{g(x)}{x^{n+1}} &= \frac{g'(c_x)}{x^n} \\ &= \frac{f'(c_x) - (a_0 - a_1 c_x - a_2 {c_x}^2 - \cdots - a_n {c_x}^n)}{x^n} \\ &= \frac{f'(c_x) - (a_0 - a_1 c_x - a_2 {c_x}^2 - \cdots - a_n {c_x}^n)}{{c_x}^n} \times \frac{{c_x}^n}{x^n} \end{aligned}$$

Or, $y = c_x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ (puisque $c_x \in\,]\,0\,;x\,[$) et puisque $f(y) - a_0 - a_1 y - \cdots - a_n y^n = \mathrm{o}\left(y^n\right)$, il vient :

Quand on écrit que $c_x \in\,]\,0\,;x\,[$, cela signifie que c_x est compris au sens strict entre 0 et x, peu importe que x soit positif ou négatif.

$$\frac{f'(y) - (a_0 - a_1 y - a_2 y^2 - \cdots - a_n y^n)}{y^n} \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

Par composition de limites :

$$\frac{f'(c_x) - (a_0 - a_1 c_x - a_2 {c_x}^2 - \cdots - a_n {c_x}^n)}{{c_x}^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

□

De plus, $c_x \in\,]\,0\,;c_x\,[$ donc $|c_x/x| \leqslant 1$ donc est borné. On en déduit que $g(x)/x^{n+1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ce qui est le résultat voulu.

Corollaire. Les fonctions $x \mapsto \ln(1+x)$ et Arctan admettent des DL à tout ordre et, pour tout n, on a :

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.
- $\mathrm{Arctan}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$.

Pas de factorielles ici ! Et $(-1)^{n-1}$ (ou $(-1)^{n+1}$ évidemment) pour le ln, pas $(-1)^n$!

Démonstration. On sait que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \mathrm{o}\left(x^{n-1}\right)$$

Par primitivation de DL :

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

De même, puisque $u = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

Par primitivation de DL :

$$\operatorname{Arctan}(x) = \underbrace{\operatorname{Arctan}(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

□

Ne pas oublier le terme constant, même s'il est nul : sinon, le jour où il n'est pas nul, on l'oubliera !

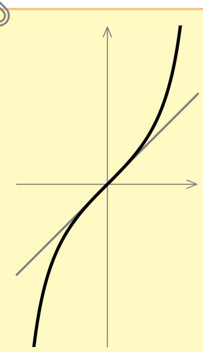
V.6 Allure locale des graphes

Les développements limités sont des approximations : grâce à ces approximations, pour lesquels certains résultats sont particulièrement simples à donner, on peut en déduire les mêmes résultats concernant la fonction originelle. Encore faut-il s'intéresser à des résultats préservés par l'équivalence : par exemple le signe (alors que la monotonie, elle, ne l'est pas), cf. paragraphe II.3.

Donnons un exemple d'application : on va chercher, grâce à un DL, à donner les positions relatives d'un graphe et de sa tangente en 0. On rappelle (cf. paragraphe V.4) que, sous réserve d'existence, le DL à l'ordre 1 de f en 0 est $f(x) = f(0) + xf'(0) + \mathrm{o}(x)$.

Nous verrons d'autres applications, par exemple les positions relatives d'un graphe et de son asymptote dans le paragraphe VI.

- La partie principale (c'est-à-dire ce qu'il y a avant le o) du DL à l'ordre 1 est donc l'équation de la tangente en 0 (enfin presque : il manque le $y =$). Comme on l'a déjà dit, c'est parfois utile quand on manie de la convexité, mais pas seulement.
- Il en découle que le polynôme de degré inférieur ou égal à 1 qui est la meilleure approximation de f, c'est-à-dire la meilleure approximation affine de f, est la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en 0 (quand celle-ci existe, c'est-à-dire quand f est dérivable en 0). Cela se voit bien sur le graphe ci-contre, où l'on a représenté le graphe de la fonction tan, ainsi que sa tangente en 0 : au voisinage de 0, la tangente est une bonne approximation du graphe de f, et on vient donc de montrer que c'est la meilleure approximation affine.



La question qu'on peut se poser est : peut-on donner les positions relatives des graphes ? Peut-on savoir lequel est au-dessus de l'autre ? En d'autres termes, peut-on comparer $f(x)$ et $f(0) + xf'(0)$? La réponse est oui, quand f admet un DL à un ordre plus grand avec au moins un terme non nul.

Plus précisément, supposons qu'il existe $k \geqslant 2$ et $a_k \neq 0$ tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right)$$

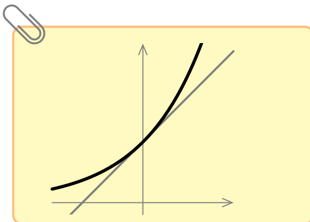
En particulier, $f(x) - a_0 - a_1 x = a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^k\right) \sim a_k x^k$. Or, deux quantités équivalentes en 0 sont de même signe au voisinage de 0 (cf. II.3 : on a énoncé ce résultat pour les suites, mais il est encore vrai pour les fonctions, avec « au voisinage de a » à la place de « pour n assez grand »), donc $f(x) - a_0 - a_1 x$ est du signe de $a_k x^k$ au voisinage de 0.
Plusieurs cas de figure peuvent se produire :

En d'autres termes, k est le plus petit entier supérieur ou égal à 2 tel que f admette un DL à l'ordre k avec $a_k \neq 0$.

- Si k est impair, alors $x \longmapsto a_k x^k$ change de signe en 0, le graphe de f est successivement au-dessus puis en dessous de sa tangente, ou le contraire, selon le signe de a_k.
  Par exemple, on a vu que $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction tan en 0 est la droite d'équation $y = x$, et $\tan(x) - x \sim x^3/3$: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de 0^+, et en dessous au voisinage de 0^-, comme on peut le voir sur le graphe ci-dessus.

En pratique, on calcule les DL successifs de f en 0 en augmentant l'ordre à chaque fois (sous réserve d'existence), et on s'arrête dès qu'on a un coefficient non nul.

- Si k est pair, alors $x \longmapsto a_k x^k$ est de signe constant donc, au voisinage de 0, $x \longmapsto f(x) - a_0 - a_1 x$ est de signe constant : si $a_k > 0$, alors $a_k x^k \geqslant 0$ donc le graphe de f est au-dessus de sa tangente en 0, et si $a_k < 0$, alors le graphe de f est en dessous de sa tangente. Par exemple, on a vu que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Par conséquent, la tangente au graphe de la fonction exp en 0 est la droite d'équation $y = 1 + x$, et $e^x - (1+x) \sim x^2/2$: le graphe est au-dessus de la tangente au voisinage de 0, comme on peut le voir sur le graphe ci-contre.



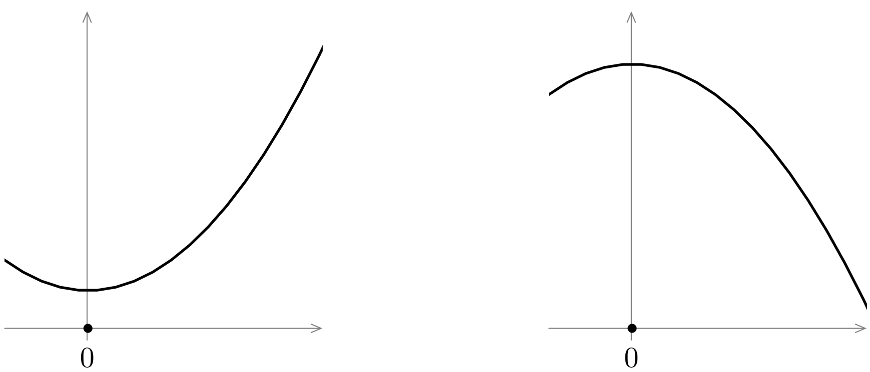
Ainsi, la forme du graphe de f au voisinage de 0 dépend du premier terme non linéaire (c'est-à-dire d'ordre supérieur ou égal à 2) de son développement limité (encore une fois, sous réserve d'existence).

Cette méthode ne permet évidemment pas seulement de comparer un graphe et sa tangente en 0 mais de donner l'allure locale d'un graphe :

- de la même façon, on peut comparer $f(x)$ et $f(0)$ au voisinage de 0 à l'aide du premier terme non nul après le terme constant. Par exemple, si $f(x) = 1 + x^2/4 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$, la même méthode permet d'affirmer qu'au voisinage de 0, $f(x) \geqslant f(0) = 1$.
- on peut dans certains cas affirmer la présence en 0 d'un extremum local. On a vu au chapitre 14 une condition **nécessaire** pour qu'un point intérieur soit un extremum local. Donnons à présent une condition **suffisante** quand la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$. Supposons f de classe $\mathscr{C}^2$ sur D et que $f'(0) = 0$. Si $f''(0) \neq 0$, alors f admet un extremum local en 0.

  Supposons $f''(0) > 0$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, f admet un DL à l'ordre 2 d'après la formule de Taylor-Young donné par : $f(x) = f(0) + f''(0)x^2/2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$ (rappelons que $f'(0) = 0$). La même méthode que ci-dessus prouve que f admet en 0 un maximum local si $f''(0) < 0$ et un minimum local si $f''(0) > 0$.

  Remarque : Cette condition suffisante se voit très bien une fois que l'on a vu la convexité (cf. chapitre 15). En effet, si $f'(0) = 0$ alors le graphe de f admet une tangente horizontale en 0, et si $f''(0) > 0$ alors, f'' étant continue, f'' est positive sur un voisinage de a donc f est convexe au voisinage de a, donc est au-dessus de sa tangente en a : on a un minimum local. De même, si $f''(0) < 0$, f est concave sur un voisinage de a donc est au-dessus de sa tangente en a : on a un maximum local.



⚠ Tous les résultats de ce paragraphe sont des résultats LOCAUX, c'est-à-dire qu'ils ne sont valables que sur un voisinage de 0 (ou de a dans le paragraphe V.8 car, oui, on peut évidemment les généraliser à un autre point que 0). Si on veut prouver un résultat global, par exemple que $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ne peut pas raisonner comme ci-dessus, mais on peut (par exemple) :

- faire une étude de fonction (cf. chapitre 2).
- appliquer la formule de Taylor avec reste intégral (cf. chapitre 23).
- utiliser de la convexité (cf. chapitre 15).

V.7 DL et O

Remarque : Parfois, nous donnerons des DL avec un O au lieu d'un o. Par exemple, nous écrirons parfois :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$$

au lieu de

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Par exemple, on écrira parfois $\ln(1+x) = x + \mathrm{O}\left(x^2\right)$ au lieu de $\ln(1+x) = x - x^2/2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. Avantages de cette écriture :

- elle évite de se coltiner le coefficient devant x^{n+1}, qui peut parfois être compliqué. Par exemple, on peut écrire directement (on sait que la tangente admet un DL à tout ordre et que les coefficients pairs sont nuls) :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{O}\left(x^9\right)$$

- le O étant très maniable (c'est une arme de destruction massive, cf. paragraphe III.1), cette écriture est aussi très maniable et permet de regrouper sous une même bannière des termes très divers.
- elle indique l'ordre de grandeur du prochain terme. Elle est donc plus précise que l'autre : dire que le prochain terme est un $\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$ est plus précis que dire que c'est un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$ (cela affirme par exemple qu'il n'y a aucun terme entre les deux, par exemple $x^{n+\frac{1}{2}}$. Mais, par là-même, elle est assez dangereuse.

Car, oui, cette écriture a également un inconvénient : il faut savoir que le prochain terme est en $\mathrm{O}\left(x^{n+1}\right)$: s'il y a un DL à l'ordre n, il n'y a pas forcément un DL à l'ordre $n+1$ et donc pas forcément de terme en x^{n+1}. Et, même si cela n'arrive qu'avec des développements asymptotiques (cf. paragraphe VI) et pas avec des développements limités, pourquoi le terme suivant ne serait-il pas « entre les deux », par exemple en $x^{n+\frac{1}{2}}$, en $x^n/\ln(x)$ (ce qui est bien un $\mathrm{o}\left(x^n\right)$ au voisinage de 0). On le voit : cette écriture fait l'économie d'un coefficient parfois difficile à calculer, mais il faut être sûr de ce qu'on avance, par exemple il faut pouvoir justifier l'existence d'un DL à l'ordre $n+1$ (en général avec la formule de Taylor-Young).

V.8 DL ailleurs qu'en 0

Dans ce paragraphe, on ne suppose plus que 0 est adhérent à D. On se donne à la place un réel a adhérent à D, et toutes les limites, tous les équivalents etc. seront au voisinage de a.

V.8.a Définition

La plupart du temps, on s'intéresse à des DL en 0 mais on peut définir exactement de la même manière des DL au voisinage de a adhérent à D quelconque : il suffit d'écrire $x-a$ à la place de x dans la définition du DL, c'est-à-dire qu'une fonction admet un DL à l'ordre n au voisinage de a s'il existe $(a_0, \dots, a_n)$ tels que :

On est obligé de garder les termes en $x-a$, comme dans le paragraphe IV.3.

$$f(x) \underset{x \to a}{=} a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

V.8.b Comment se ramener à un DL en 0 : méthode à connaître

En pratique, il suffit de maîtriser les DL en 0, un DL en un autre point s'y ramenant facilement grâce au résultat suivant :

Proposition. f admet un DL à l'ordre n en a si et seulement si la fonction $h\mapsto f(a+h)$ admet un DL à l'ordre n en 0, et alors leurs coefficients sont les mêmes, c'est-à-dire que si :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0+a_1h+a_2h^2+\cdots+a_nh^n+\mathrm{o}\left(h^n\right)$$

alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n+\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

En d'autres termes, le DL de f en a se ramène au DL de $h\mapsto f(a+h)$ en 0. Il suffit donc de bien maîtriser les DL en 0.

Démonstration. Immédiat en posant $h=x-a \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Ce changement de variable doit être fait automatiquement lorsqu'on cherche un DL ailleurs qu'en 0.

Exemples :

- Donnons le DL de ln au voisinage de 2 à l'ordre 3. Posons $h=x-2 \xrightarrow[x\to 2]{} 0$ si bien que $\ln(x)=\ln(2+h)$: on se ramène donc au DL de $h\mapsto \ln(2+h)$ en 0. Puisqu'on connaît le DL de $\ln(1+h)$, factorisons par 2 :

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \ln(2+h)\\
&= \ln(2)+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)\\
&= \ln(2)+\frac{h}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\\
&= \ln(2)+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{8}+\mathrm{o}\left(h^2\right)\\
&= \ln(2)+\frac{(x-2)}{2}-\frac{(x-2)^2}{8}+\mathrm{o}\left((x-2)^2\right)
\end{aligned}$$

  On retrouve le résultat vu en V.3.b et que nous généraliserons au paragraphe suivant : la valeur en a est égale au coefficient constant, ici la valeur en 2 du ln est égale au terme constant.

- Donnons le DL du cos à l'ordre 3 au voisinage de $\pi/4$. Là aussi, posons $h=x-\pi/4 \xrightarrow[x\to\pi/4]{}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(h)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(h)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{h^2}{2}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(h-\frac{h^3}{3!}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\mathrm{o}\left(h^3\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{4}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{12}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\mathrm{o}\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

On somme des DL : on prend un peu d'avance sur le paragraphe V.9.

La fonction cos est paire mais la fonction $h\mapsto\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$ elle, ne l'est pas : les coefficients impairs n'ont aucune raison d'être nuls !

V.8.c Généralisation (ou pas) des résultats vus précédemment

La plupart des résultats de cette partie sont encore valable avec des DL en a à la place de DL en 0, en remplaçant x par $x-a$, ou en appliquant ces résultats à $h\mapsto f(a+h)$:

- l'équivalent est le premier terme non nul du DL. Avec l'exemple ci-dessus, au voisinage de $\pi/4$:

$$\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2} \sim -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Comme dans le paragraphe IV.3, on est obligé de garder le $x - \pi/4$, on ne peut pas faire mieux !

- Les coefficients du DL sont toujours uniques.
- Une fonction paire ou impaire n'a pas forcément certains coefficients nuls (voir le cosinus ci-dessus). L'analogue est : si $x \mapsto f(x)$ est symétrique par rapport à a (i.e. $h \mapsto f(a+h)$ est paire i.e. $f(a+h) = f(a-h)$ pour tout h) alors les coefficients d'ordre impair du DL sont nul, et on a un résultat analogue si $f(a+h) = -f(a-h)$, mais cela n'arrive jamais en pratique. Il suffit de retenir le résultat pour les fonctions paires ou impaires en 0 et que cela ne marche pas ailleurs.
- Le résultat concernant la troncature d'un DL est encore valide.
- Les CNS d'existence d'un DL à l'ordre 0 et l'ordre 1 sont encore valables (et, encore une fois, ça s'arrête là). Par exemple, f admet un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a, et alors ce DL est donné par : $f(x) = f(a) + f'(a) \times (x-a) + \mathrm{o}\left(x-a\right)$ ou, ce qui revient au même : $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}\left(h\right)$.

Là aussi, la partie principale du DL à l'ordre 1 est presque (il manque le $y =$) l'équation de la tangente en a.

- la formule de Taylor-Young : si f est $\mathscr{C}^n$, alors f admet un DL à l'ordre n donné par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

et là aussi une fonction $\mathscr{C}^\infty$ admet un DL à tout ordre.
- Les fonctions de référence admettent encore des DL à tout ordre... mais comme on l'a vu, ils ne sont pas aussi simples ! On fait comme dans le paragraphe précédent et on se ramène systématiquement à un DL en 0.
- On peut encore primitiver un DL (en n'oubliant pas le terme constant : $F(a)$).
- Là aussi, un DL de $h \mapsto f(a+h)$ permet de donner des informations locales sur le graphes de f (positions relatives, extrema locaux etc.).

V.9 Opérations sur les DL

On revient dans la suite aux DL en 0, on a vu qu'on pouvait s'y ramener simplement par un changement de variable.

V.9.a Somme de DL

Pour la somme, c'est facile, il suffit de sommer...

Proposition. Si f et g admettent un DL en 0 alors $f+g$ également, et les coefficients sont obtenus par addition terme à terme.

DÉMONSTRATION. Immédiat en sommant des o.

Remarque : Pour sommer un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on somme. En bref on somme les ordres communs et tout ce qui reste est aspiré par le « trou noir » (cf. remarque en II.4) du $\mathrm{o}\left(x^n\right)$.

Exemple : Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de $\sin(x) + \ln(1+x)$.

On a regroupé les deux $\mathrm{o}\left(x^4\right)$: rappelons qu'on peut sommer les o !

$$\begin{aligned}
\sin(x) + \ln(1+x) &= x - \frac{x^3}{3!} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + \mathrm{o}\left(x^4\right).
\end{aligned}$$

Remarques :

- En particulier, au voisinage de 0, $\sin(x)+\ln(1+x) \sim 2x$. En effet, rappelons que l'équivalent est le premier terme non nul du DL !
- Par conséquent, quand on voudra « sommer les équivalents » (ce qui est illégal), on contournera la loi et on sommera les DL (ce qui est légal). Cependant, comme dit plus haut (cf. paragraphe V.1), il est parfois difficile de savoir à quel ordre aller : parfois, on est obligé de tâtonner et d'augmenter l'ordre petit à petit jusqu'à obtenir un terme non nul, cf. TD et les paragraphes suivants.

V.9.b Produit de DL

Pour le produit, il suffit également de faire le produit :

Proposition. Si f et g admettent un DL en 0 à l'ordre n alors $f\times g$ également, et les coefficients sont obtenus en développant le produit puis en tronquant à l'ordre n.

Démonstration. Si les DL de f et g sont donnés par :

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \mathrm{o}\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

on développe le produit

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)) \times (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)) \qquad \square$$

et tous les termes ayant une puissance strictement supérieure à n sont aspirés par le trou noir du $\mathrm{o}\left(x^n\right)$. Les détails sont laissés en exo.

Remarque : Il suffit de tout développer et de « supprimer » (i.e. de mettre dans le o) les termes ayant un ordre trop grand, mais réfléchir aux ordres en amont peut parfois éviter des calculs compliqués.

Exemple : Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $f(x)=\sin(x)\times(\cos(x)-1)$.

- **Méthode naïve :** Donnons le DL de $\sin(x)$ et $\cos(x)-1$ à l'ordre 5, et développons :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\
&= x\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)-\frac{x^3}{3!}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\
&\quad +\frac{x^5}{5!}\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)+\mathrm{o}\left(x^5\right)\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\\
&= -\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+\mathrm{o}\left(x^6\right)+\frac{x^5}{3!\times 2!}-\frac{x^7}{3!\times 4!}+\mathrm{o}\left(x^8\right)\\
&\quad -\frac{x^7}{5!\times 2!}+\frac{x^9}{5!\times 4!}+\mathrm{o}\left(x^{10}\right)+\mathrm{o}\left(x^7\right)+\mathrm{o}\left(x^9\right)+\mathrm{o}\left(x^{10}\right)\\
&= -\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{8}+\mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

  car tous les autres termes sont négligeables devant x^5 et donc sont « aspirés » par le « trou noir » (cf. remarque en II.4) du $\mathrm{o}\left(x^5\right)$.
- **En pratique :** Tout d'abord, il est inutile d'écrire un terme quand on se rend compte qu'il a un ordre trop grand donc, dans notre exemple, quand on se rend compte qu'il est négligeable devant x^5. Par conséquent, quand on développe, on n'écrit que les termes de degré inférieur ou égal à 5, les autres étant aspirés par le $\mathrm{o}\left(x^5\right)$ qu'on met à la fin de l'expression. De plus, il est même inutile de mettre certains termes au début du calcul. Dans notre exemple :

⋆ le premier terme de $\sin(x)$ est x, donc tous les termes de $\cos(x)-1$ seront multipliés au moins par x donc leur degré augmentera au moins de 1. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du cos à l'ordre 4.

⋆ le premier terme de $\cos(x)-1$ est $-x^2/2$, donc tous les termes de $\sin(x)$ seront multipliés au moins par x^2 donc leur degré augmentera au moins de 2. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du sin à l'ordre 3.

En conclusion, en pratique, on écrira simplement :

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\frac{x^3}{3!}+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ &= -\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}+\frac{x^5}{3!\times 2!}+\mathrm{o}\left(x^5\right) \\ &= -\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{8}+\mathrm{o}\left(x^5\right). \end{aligned}$$

On ne développe pas tous les termes (par exemple, on n'écrit pas le terme $x^3\times x^4$ ni le terme $x^3\times \mathrm{o}\left(x^4\right)$) : encore une fois, on n'écrit pas les termes dont on sait déjà qu'ils seront négligeables !

V.9.c DL à d'autres quantités que x, substitution

On peut réécrire le DL (sous réserve d'existence) de f en 0 sous la forme :

$$f(u) \underset{u\to 0}{=} a_0+a_1u+\cdots+a_nu^n+\mathrm{o}\left(u^n\right)$$

Penser à « truc » et plus précisément à « truc qui tend vers 0 ».

Par conséquent, si on a une quantité qui tend vers 0 (ne pas oublier de le vérifier !), on peut substituer cette quantité à u.

On pourrait là aussi donner un résultat général, mais d'une part il est écrit dans le programme qu'aucun résultat général n'est exigible, et d'autre part, il est plus important de s'entraîner avec des exemples explicites.

Exemple : Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $\sin(2x)$.

$u=2x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $\sin(u)=u-\dfrac{u^3}{3!}+\dfrac{u^5}{5!}+\mathrm{o}\left(u^5\right)$ donc

$$\sin(2x)=2x-\frac{8x^3}{6}+\frac{32x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)=2x-\frac{4x^3}{3}+\frac{4}{15}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Remarque : Il faut parfois réfléchir aux ordres en amont pour ne pas faire trop de calculs inutiles.

Exemple : Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $\sin\left(x^2\right)$.
$u=x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc, si on fait de même (DL de $\sin(u)$ à l'ordre 5 et ensuite on remplace u par x^2) :

$$\sin\left(x^2\right)=x^2-\frac{x^6}{6}+\frac{x^{10}}{120}+\mathrm{o}\left(x^{10}\right)$$

On a un DL à l'ordre 10 : c'est beaucoup trop ! En fait, dans le DL du sinus, on s'arrête à $\sin\left(x^2\right)=x^2+\mathrm{o}\left(x^5\right)$. Tous les termes suivants sont négligeables ! Le terme en u^3 est donc inutile, car il donne du x^6 : c'est trop grand.

V.9.d Exemples, multiples produits

- Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x^2)-\sin^2(x)$.

  On sait que $\ln(1+u)\sim u$ au voisinage de 0. Puisque $x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ alors $\ln(1+x^2)\sim x^2$. De plus, $\sin(x)\sim x$ et l'équivalent passe à la puissance fixe donc $\sin^2(x)\sim x^2$. attention, l'équivalent ne passe pas à la somme : on ruse et on écrit :

$$\begin{aligned} \ln(1+x^2)-\sin^2(x) &= x^2-x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right) \\ &= \mathrm{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

  ce qui ne permet pas de conclure (et surtout pas que cette quantité est équivalente à 0 !). Il faut donc faire un DL à un ordre plus grand. Puisque $\ln(1+u)=u-u^2/2+\mathrm{o}\left(u^2\right)$, il vient :

Le tâtonnement s'impose : espérons que le premier terme non nul ne soit pas d'ordre 50...

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Dès lors, faisons un DL de $\sin^2$ à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right)^2 \\
&= x^2 - 2\times x \times \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= x^2 - \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) - \sin^2(x) &= x^2 - \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= -\frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&\sim -\frac{x^4}{6}
\end{aligned}$$

Si les termes en x^4 s'étaient aussi simplifiés, il aurait fallu recommencer avec un ordre plus grand jusqu'à obtenir un coefficient non nul.

Petite explication de texte sur le DL du sinus : rappelons qu'une quantité de la forme $(a+b+c+\cdots)^2$ est égale à $a^2+b^2+c^2+\cdots+2ab+2ac+2bc+\cdots$, c'est-à-dire tous les carrés et tous les doubles produits. Par conséquent :

- ⋆ On est allé à l'ordre 3 dans le sinus alors qu'on voulait $\sin^2$ à l'ordre 4 : en mettant au carré, tous les termes, y compris le o, sont multipliés au moins par x, et puisqu'on veut du $\mathrm{o}\left(x^4\right)$ et que toutes les puissances augmentent au moins de 1, il suffit de partir de $\mathrm{o}\left(x^3\right)$.
- ⋆ Le x^2 est le carré de x, le $2\times x\times x^3/6$ est le double produit de x et de $x^3/3!$.
- ⋆ Le $\mathrm{o}\left(x^4\right)$ est le double produit de x et de $\mathrm{o}\left(x^3\right)$.
- ⋆ Les autres termes (le carré de $x^3/6$ par exemple) n'apparaissent pas car ont un ordre trop grand. Encore une fois, ils apparaissent mais sont aspirés par le trou noir du o.

Remarque : Donnons également la formule suivante, pour les cubes :

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= a^3+b^3+c^3 \\
&\quad +3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c+3bc^2 \\
&\quad +6abc
\end{aligned}$$

Les cubes.

Les triples produits.

Rarement utile en pratique.

- Donner le DL de $\sin\circ\tan$ à l'ordre 4.

$$\sin(\tan(x)) = \sin\left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)$$

On pose $u = x + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Or, $\sin(u) = u - u^3/3! + \mathrm{o}\left(u^4\right)$ donc :

$$\sin(\tan(x)) = x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right) - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Cependant, dans la parenthèse, le $x^3/3$ et le $\text{o}\left(x^4\right)$ sont inutiles : les plus petits termes dans lesquels ils vont apparaître sont le triple produit avec x à savoir $3\times x\times x\times x^3/3$ et $3\times x\times x\times \text{o}\left(x^4\right)$ qui sont tous les deux trop grands (et se poser la question en amont permet de gagner du temps et d'éviter des calculs superflus). Par conséquent, on peut simplement écrire :

$$\begin{aligned}\sin(\tan(x)) &= x+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}(x)^3+\text{o}\left(x^4\right)\\ &= x+\frac{x^3}{6}+\text{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

- Donner un DL à l'ordre 5 de $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$.

Réflexion aux ordres en amont : on va diviser le numérateur par x, donc tous les ordres vont diminuer de 1, et puisqu'on cherche du degré 5, alors il faut faire un DL du numérateur à l'ordre 6, et comme on applique le DL de $\ln(1+u)$ à x^2, il suffit d'appliquer le DL du ln à l'ordre 3.

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x^2)}{x} &= \frac{x^2-\dfrac{(x^2)^2}{2}+\dfrac{(x^2)^3}{3}\text{o}\left(x^6\right)}{x}\\ &= x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{3}+\text{o}\left(x^5\right)\end{aligned}$$

- Donner un DL de $\ln(1+x)\sin(x)$ à l'ordre 4.

Cherchons à quel ordre faire les DL : on écrit seulement le premier ordre de chaque dans notre tête ou au brouillon :

$$\ln(1+x)\sin(x)=(x+\cdots)(x+\cdots)$$

Puisque le premier terme du ln est x, tous les termes du sinus vont être augmentés au moins de 1 donc on va à l'ordre 3 pour le sinus, et puisque le premier terme du sinus est x, on fait pareil pour le ln, on va à l'ordre 3. Ici, on va à l'ordre 3 dans les deux termes, mais ce n'est pas toujours le cas, voir l'exemple suivant.

$$\begin{aligned}\ln(1+x)\sin(x) &= \left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\text{o}\left(x^3\right)\right)\times\left(x-\frac{x^3}{6}+\text{o}\left(x^3\right)\right)\\ &= x^2-\frac{x^4}{6}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{3}+\text{o}\left(x^4\right)\\ &= x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{6}+\text{o}\left(x^4\right)\end{aligned}$$

- Donner un DL de $e^x\sin(x^2)$ à l'ordre 7.

Cherchons à quel ordre faire les DL : on écrit seulement le premier ordre de chaque dans notre tête ou au brouillon : $e^x\sin(x^2)=(1+\cdots)(x^2+\cdots)$. Puisque le premier terme du sin est x^2, tous les termes de l'exp vont être augmentés au moins de 2 donc on va à l'ordre 5 pour l'exp, et puisque le premier terme de l'exp est 1, pas le choix, on va à l'ordre 7 pour le sinus, mais puisque c'est $\sin(x^2)$, le DL de $\sin(u)$ à l'ordre 3 suffit puisque le terme en u^5 donnera du x^{10}.

$$\begin{aligned}e^x\sin(x^2) &= \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\text{o}\left(x^5\right)\right)\left(x^2-\frac{x^6}{6}+\text{o}\left(x^7\right)\right)\\ &= x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{6}+\frac{x^6}{24}+\frac{x^7}{120}-\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{6}+\text{o}\left(x^7\right)\\ &= x^2+x^3+\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{6}-\frac{x^6}{8}-\frac{19x^7}{120}+\text{o}\left(x^7\right)\end{aligned}$$

- Donner un DL de $1/\cos(x)$ à l'ordre 4.

Comme dit au paragraphe V.2 : quand il y a un quotient, c'est le DL de $1/(1\pm u)$ (quitte à devoir factoriser si u ne tend pas vers 0, cf. paragraphe V.2 et ci-dessous pour un exemple). Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)} \\
&= \frac{1}{1+\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)}
\end{aligned}$$

On a bien une expression de la forme $1/(1+u)$ avec u qui tend vers 0 donc (on ne garde que les termes qui vont apparaître : dans la deuxième parenthèse, par exemple, on ne garde pas le x^4 car la plus petite puissance dans laquelle il va apparaître est le double produit avec x^2 qui donnera du x^6, c'est trop grand) :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= 1-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

- Donner un DL de $\dfrac{x^3}{\mathrm{sh}(x)-x}$ à l'ordre 2.

Pour savoir à quel ordre aller, on commence au brouillon ou dans notre tête :

$$\frac{x^3}{x+x^3/6+\cdots-x}$$

si bien que le premier terme du dénominateur sera x^3 donc on va tout simplifier par x^3 i.e. diminuer les ordres de 3 : on va donc à l'ordre 5.

$$\begin{aligned}
\frac{x^3}{\mathrm{sh}(x)-x} &= \frac{x^3}{x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\mathrm{o}\left(x^5\right)-x} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{x^2}{120}+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= \frac{6}{1+\frac{x^2}{20}+\mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= 6\left(1-\frac{x^2}{20}+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= 6-\frac{3x^2}{10}+\mathrm{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

DL de $1/(1-u)$.

- Donner un DL de $1/\sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 4.

On pourrait donner le DL du cos puis appliquer le DL de $\sqrt{1+u}$ puis celui de $1/(1+u)$ mais on peut gagner une étape en mélangeant les deux dernières et en donnant le DL de $1/\sqrt{1+u}=(1+u)^{-1/2}$. Plus précisément :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} &= \left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^{-1/2} \\
&= 1-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\right)+\frac{3}{8}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+\mathrm{o}\left(x^4\right) \\
&= 1+\frac{x^2}{4}+\frac{7x^4}{96}+\mathrm{o}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

DL de $(1+u)^{-1/2}$ vu au paragraphe V.4.

Remarque : Donnons un dernier exemple pour la route : les questions où il faut montrer qu'une fonction f est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sont légion. La méthode est toujours la même :

- On prouve que f est prolongeable par continuité en montrant, à l'aide d'un DL à l'ordre 0 ou d'un équivalent, qu'elle admet une limite finie.
- On applique ensuite le théorème de la limite de la dérivée : on dérive donc f, et on prouve (à l'aide d'un DL à l'ordre 0 ou d'un équivalent) que f' admet une limite finie. Attention, prouver que f admet un DL à l'ordre 1 ne suffit pas car cela prouve juste que f est dérivable, pas $\mathscr{C}^1$!

Exemple : Soient $\alpha = 1/2\pi$ et $\beta = -1$. Prouver que la fonction

Tiré de Mines MPI 2023.

$$f : \begin{cases}]\,0\,;\pi\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\alpha t^2 + \beta t}{2\sin(t/2)} \end{cases}$$

est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Tout d'abord, f est $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;\pi\,]$ car quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$, celle au dénominateur ne s'annulant pas. De plus, au voisinage de 0, $\alpha t^2 + \beta t \sim \beta t$ et $2\sin(t/2) \sim 2 \times t/2 = t$ donc $f(t) \sim \beta$ et en particulier $f(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \beta$: f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \beta$. Soit à présent $t \in \,]\,0\,;\pi\,]$. On a :

Au voisinage de 0, ce sont les plus petites puissances qui gagnent, et c'est le contraire en $\pm\infty$.

$$f'(t) = \frac{(2\alpha t + \beta) \times 2\sin(t/2) - \cos(t/2) \times (\alpha t^2 + \beta t)}{(2\sin(t/2))^2}$$

L'équivalent passe à la puissance fixe donc le dénominateur est équivalent à t^2. Donnons un équivalent du numérateur, qu'on note $g(t)$ (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros). Puisqu'on a de l'ordre 2 au dénominateur, donnons un DL du numérateur à l'ordre 2. Le sinus va être multiplié par une constante donc on va à l'ordre 2, et le cosinus va être multiplié par t donc on va à l'ordre 1. Dès lors :

Le quotient est une opération légale : pour donner un équivalent d'un quotient, il suffit de donner un équivalent du numérateur et du dénominateur. Par contre, la somme est une opération illégale : pour donner un équivalent du numérateur, on est obligé de faire un DL.

$$\begin{aligned} g(t) &= (2\alpha t + \beta) \times 2 \times \left(\frac{t}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)\right) - (1 + \mathrm{o}\,(t)) \times (\alpha t^2 + \beta t) \\ &= 2\alpha t^2 + \beta t - \alpha t^2 - \beta t + \mathrm{o}\left(t^2\right) \\ &= \alpha t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right) \\ &\sim \alpha t^2 \end{aligned}$$

si bien que $f'(t) \sim \alpha$ et, en particulier, $f'(t) \xrightarrow[t \to 0]{} \alpha$. Dès lors, f étant continue sur $[\,0\,;\pi\,]$ et $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;\pi\,]$, d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$ et $f'(0) = \alpha$.

VI Développements asymptotiques

VI.1 Définition

Pour définir un développement asymptotique, on se contentera de la définition intuitive suivante :

Définition. Un développement asymptotique d'une fonction f ou d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une écriture de f ou de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme d'une somme de fonctions ou de suites d'ordres de grandeur de plus en plus petits.

Exemple : On a vu dans le paragraphe II.5.c l'égalité suivante :

$$\ln(n!) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}\left(1\right)$$

On dit qu'on a donné un développement asymptotique de $\ln(n!)$ à la précision $\mathrm{o}\left(1\right)$.

Différences avec un DL (pour une fonction) ?

- Un développement asymptotique n'est pas forcément au voisinage de 0, on peut faire un développement asymptotique en $\pm\infty$ (voir ci-dessous).
- Les fonctions apparaissant dans le développement asymptotique ne sont pas forcément des polynômes (ci-dessous, on a du $1/x$ mais on peut parfois avoir du ln par exemple).

VI.2 Un exemple d'asymptote

Exemple : Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^3+2x^2+4x+1}$ admet une asymptote en $+\infty$, et donner les positions relatives.

Méthode : Donner un développement asymptotique à la précision $1/x$. En effet, on veut une équation de droite, donc des termes du type $ax+b$, mais on veut également les positions relatives, donc on veut un terme supplémentaire, de la forme c/x (après ax, puissance 1, et b, puissance 0, vient en général c/x, puissance -1), pour pouvoir donner le signe de la différence, comme dans le paragraphe précédent.

ou $1/x^2$ si le coefficient devant $1/x$ est nul, ou $1/x^3$ si les coefficients devant $1/x$ et $1/x^2$ sont nuls, etc. Mais c'est plus rare.

Soit $x \neq 0$. Puisque $\sqrt[3]{x^3} = x$, il vient : $f(x) = x \times \left(1 + \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right)^{1/3}$. Or, $u = \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et, au voisinage de 0 (cf. paragraphe IV.4) :

$$(1+u)^{1/3} = 1 + \frac{u}{3} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}u^2 + \mathrm{o}\left(u^2\right) = 1 + \frac{u}{3} - \frac{u^2}{9} + \mathrm{o}\left(u^2\right)$$

Attention, parfois on manipulera, non pas des racines cubiques, mais des racines carrées, et on voudra une asymptote en $-\infty$, et alors il ne faudra pas oublier que, si $x<0$, $\sqrt{x^2} = -x$!

Pourquoi s'arrête-t-on à l'ordre 2 ? Car on veut une précision $1/x$ à la fin, et puisqu'on multiplie la puissance $1/3$ par x, pour avoir $1/x$ à la fin, il faut du $1/x^2$. Par conséquent, on ne garde que les termes jusqu'à $1/x^2$, les termes suivants iront dans le $\mathrm{o}\left(1/x^2\right)$: c'est pour cela qu'on ne garde même pas le $1/x^3$ en facteur du $1/3$, et qu'on ne garde que le $1/x$ dans le carré en facteur du $1/9$ ci-dessous, les autres termes donneront au moins du $1/x^3$, ce qui est trop grand et donc négligeable devant $1/x^2$, tout cela part dans le $\mathrm{o}\left(1/x^2\right)$!

$$f(x) = x\left(1 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}\right) - \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + \frac{2}{3} + \frac{8}{9x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En particulier, $f(x) - x - \dfrac{2}{3} \sim \dfrac{8}{9x}$. De cet équivalent on déduit deux choses :

- $f(x) - x - \dfrac{2}{3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$: la droite d'équation $y = x + \dfrac{2}{3}$ est asymptote oblique au graphe de f en $+\infty$.
- Deux quantités équivalentes en $+\infty$ sont de même signe au voisinage de $+\infty$ donc $f(x) - x - \dfrac{2}{3} > 0$ pour x assez grand : le graphe de f est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

VI.3 Un exemple simple d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^2([\,0\,;1\,]\,,\mathbb{R})$. Donnons un développement asymptotique de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

à la précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$. À l'aide de deux IPP, on trouve facilement :

$$I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}f''(t)}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t$$

Tout d'abord (DL de $1/(1+u)$ avec $u = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) :

$$\begin{aligned}\frac{f(1)}{n+1} &= \frac{f(1)}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \frac{f(1)}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Attention à ne pas conclure trop vite que, $1/n$ étant équivalent à $1/(n+1)$ et $1/n^2$ étant équivalent à $1/((n+1)(n+2))$, le développement asymptotique de I_n est

$$\frac{f(1)}{n} - \frac{f'(1)}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Comme on le verra, ce n'est pas le développement asymptotique recherché, car il manquerait des termes !

On trouve de même, en remarquant que $3/n + 2/n^2 = \mathrm{O}(1/n)$ puis en faisant un DL de $1/(1+u)$ avec $u = \mathrm{O}(1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$\begin{aligned}\frac{f'(1)}{(n+1)(n+2)} &= \frac{f'(1)}{n^2} \times \frac{1}{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{f'(1)}{n^2} \times \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{f'(1)}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Enfin, f'' étant continue (car f est $\mathscr{C}^2$), elle est bornée par un réel M donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 \frac{t^{n+2}f''(t)}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^1 \left|\frac{t^{n+2}f''(t)}{(n+1)(n+2)}\right|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M\int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\end{aligned}$$

Finalement :

$$I_n = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)+f'(1)}{n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

VI.4 Développements asymptotiques « copy/paste »

VI.4.a Un exemple discret

Montrons que pour tout $n \geqslant 1$, il existe un unique réel x_n tel que $x_n + \mathrm{Arctan}(x_n) = n$. Donner la monotonie et la limite de la suite (x_n) et donner un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Soit $f : x \mapsto x + \mathrm{Arctan}(x)$. f est strictement croissante car somme de fonctions strictement croissantes (ou car dérivable et sa dérivée est strictement positive). De plus, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$. f étant continue, le théorème de la bijection permet de conclure : il existe un unique réel noté x_n tel que $f(x_n) = n$.

Pour la monotonie et la limite de (x_n), deux méthodes (qui sont en fait la même car reposent sur le tableau de variations de f).

Première méthode : Donnons le tableau de variations de f, sur lequel on fait apparaître x_n :

x	$-\infty$	x_n	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ n	$+\infty$

Par conséquent, $f(x) > n$ si et seulement si $x > x_n$ (un réel a une image plus grande que n si et seulement s'il est à droite de x_n), et idem dans l'autre sens. Or, par définition, $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$ donc $x_{n+1} > x_n$: la suite (x_n) est strictement croissante. Par conséquent, soit elle converge vers une limite L, soit elle diverge vers $+\infty$. Si elle converge vers une limite L, f étant continue, $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(L) \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde car $f(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Deuxième méthode : On déduit du tableau de f et du théorème de la bijection le tableau de variations de f^{-1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Or, $f(x_n) = n$ donc $x_n = f^{-1}(n)$. La fonction f^{-1} étant strictement croissante, (x_n) l'est aussi, et puisque f^{-1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on retrouve le fait que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Donnons à présent un développement asymptotique. Commençons par un équivalent. Puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et que $\operatorname{Arctan}(x_n)$ est borné, alors $\operatorname{Arctan}(x_n) = \mathrm{o}\,(x_n)$ si bien que

$$n = x_n + \mathrm{o}\,(x_n) \sim x_n$$

On en déduit que $x_n \sim n$. La méthode ensuite est toujours la même : ajouter un terme négligeable et **remplacer dans la dernière égalité obtenue**. Ici, on écrit donc $x_n = n + y_n$ avec $y_n = \mathrm{o}\,(n)$ et on réinjecte dans la dernière **égalité** (c'est-à-dire sans équivalent et sans o) obtenue, à savoir $x_n + \operatorname{Arctan}(x_n) = n$:

$$n + y_n + \operatorname{Arctan}(n + y_n) = n$$

On obtient alors : $y_n = -\operatorname{Arctan}(n + y_n)$. Puisque $n + y_n = x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on obtient : $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\pi/2$ donc $y_n \sim -\pi/2$. À présent, écrivons $y_n = -\pi/2 + z_n$ avec $z_n = \mathrm{o}\,(1)$ et on réinjecte dans la dernière égalité obtenue, ce qui donne :

$$-\frac{\pi}{2} + z_n = -\operatorname{Arctan}\left(n - \frac{\pi}{2} + z_n\right)$$

On aimerait faire un DL de l'Arctan mais ce qu'il y a dedans tend vers $+\infty$: il suffit de se souvenir de la formule pour passer de $+\infty$ en 0^+, à savoir :

$$\forall x > 0, \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Il y a parfois une légère variation au moment d'introduire la suite suivante : au lieu, par exemple, de poser $x_n = n + y_n$ avec $y_n = \mathrm{o}\,(n)$, on pose $x_n = n(1 + y_n)$ avec $y_n = \mathrm{o}\,(1)$ (ce n'est bien sûr pas la même suite (y_n)). L'avantage de cette méthode est qu'on connaît la limite de (y_n), à savoir 0, et elle est surtout pratique quand on manipule des quantités qui « marchent bien avec le produit » : typiquement, le ln (cf. paragraphe suivant) ou des puissances (cf. exercice 60). À retenir !

Dès lors :

$$-\frac{\pi}{2}+z_n=\text{Arctan}\left(\frac{1}{n-\dfrac{\pi}{2}+z_n}\right)-\frac{\pi}{2}$$

donc $z_n=\text{Arctan}\left(\dfrac{1}{n-\dfrac{\pi}{2}+z_n}\right)$. Or, $z_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\dfrac{1}{n-\dfrac{\pi}{2}+z_n}\sim\dfrac{1}{n}$ et on sait qu'au voisinage de 0, $\text{Arctan}(u)\sim u$. En conclusion, $z_n\sim 1/n$ et donc :

$$x_n=n-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}+\text{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

VI.4.b Un exemple continu

Donnons enfin un dernier exemple continu. Montrer que $f:x\mapsto xe^{x^2}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et donner un développement asymptotique à deux termes en $+\infty$ de f^{-1}. Soit $x\in\mathbb{R}$. f est dérivable et $f'(x)=e^{x^2}\left(1+2x^2\right)>0$: f est strictement croissante. De plus, $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ et $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}-\infty$. Enfin, f est continue : d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont voici le tableau de variations :

cf. exercice 44 pour un DL à l'ordre 5 en 0.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Toujours d'après le théorème de la bijection, on en déduit le tableau de variations de f^{-1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

Donnons donc un développement asymptotique à deux termes de $f^{-1}(x)$ en $+\infty$. Comme dans la partie précédente, on part de la dernière égalité obtenue. Ici, pour l'instant, pas beaucoup le choix : $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)^2}=x$.
En appliquant le ln (on cherche la limite en $+\infty$, on peut donc supposer $x>0$ et alors $f^{-1}(x)>0$ également) :

On montre de même que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même : $x>0$ si et seulement si $f(x)>0$, c'est-à-dire qu'un élément est dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si son image est dans $\mathbb{R}_+^*$, donc un élément est dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si son antécédent l'est, donc $x>0$ si et seulement si $f^{-1}(x)>0$.

$$\ln\left(f^{-1}(x)\right)+f^{-1}(x)^2=\ln(x)$$

Or, $f^{-1}(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$ d'après ce qui précède. Il en découle que $\ln\left(f^{-1}(x)\right)=\text{o}\left(f^{-1}(x)^2\right)$ donc $\ln(x)\sim f^{-1}(x)^2$. L'équivalent passant à la puissance fixe, $f^{-1}(x)\sim\sqrt{\ln(x)}$. Écrivons donc $f^{-1}(x)=\sqrt{\ln(x)}(1+g(x))$ avec $g(x)=\text{o}\,(1)$ i.e. $g(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. En réinjectant dans la dernière égalité :

$$\ln\left(\sqrt{\ln(x)}\right)+\ln(1+g(x))+\ln(x)\left(1+g(x)\right)^2=\ln(x)$$

Par conséquent :

$$\frac{\ln\left(\ln(x)\right)}{2}+\ln(1+g(x))+\ln(x)\times\left(1+2g(x)+g(x)^2\right)=\ln(x)$$

si bien que

$$\ln(1+g(x)) + \ln(x) \times \left(2g(x) + g(x)^2\right) = -\frac{\ln\left(\ln(x)\right)}{2}$$

Donnons un équivalent du membre de gauche. Puisque $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\ln(1+g(x)) \sim g(x)$ et $g(x)^2 = \mathrm{o}\left(g(x)\right)$. Dès lors, $\ln(x) \times (2g(x) + g(x)^2) \sim 2g(x)\ln(x)$ mais puisque $\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $g(x) = \mathrm{o}\left(g(x)\ln(x)\right)$. Finalement, tous les autres termes étant négligeables devant $g(x)\ln(x)$:

$$-\frac{\ln\left(\ln(x)\right)}{2} = 2g(x)\ln(x) + \mathrm{o}\left(g(x)\ln(x)\right) \sim 2g(x)\ln(x)$$

si bien que :

$$g(x) \sim \frac{-\ln(\ln(x))}{4\ln(x)}$$

Finalement :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{\ln(x)} - \frac{\ln(\ln(x))}{4\sqrt{\ln(x)}} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln(\ln(x))}{\sqrt{\ln(x)}}\right)$$