Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 8

Exercice 1 - Les intégrales de Wallis, le retour.

On pourra utiliser les résultats du cours sans démonstration.

Partie A - Equivalents des intégrales de Wallis.

1. Montrer que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante et donner sa valeur (on pourra écrire un terme et son successeur).
2. Donner la monotonie de la suite (W_n) (revenir à sa définition...) et montrer que

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

3. En déduire que

$$W_n \times \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Partie B - Valeur exacte des intégrales de Wallis d'indice pair

On va voir une autre façon de donner la valeur des intégrales de Wallis d'indice pair. On pose, pour tout n, l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + e^{i\theta}\right)^{2n} e^{-in\theta} d\theta.$$

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} d\theta$ en différenciant les cas.
2. Avec le binôme de Newton, donner la valeur de I_n.
3. En utilisant cette fois la méthode de l'angle-moitié, montrer que

$$I_n = 2^{2n+1} \int_0^{\pi} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{2n} d\theta.$$

4. Avec un changement de variable adéquat (ou deux), montrer que $I_n = 2^{2n+2} W_{2n}$.
5. Retrouver la valeur de W_{2n}.

Exercice 2 - La fonction Dilogarithme.

Dans tout ce problème, on définit (quand c'est possible) la fonction f par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

Partie I - Définition et prolongement de f.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f la fonction prolongée dans la suite. Préciser la valeur de $f(0)$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$ et expliciter f'.

Partie II - La fonction Dilogarithme et prolongement en 1.

1. Justifier l'existence de la fonction L définie sur $]-\infty\,;1\,[$ par

$$L(x) = -\int_0^x f(t)dt$$

et donner la valeur de $L(0)$. Par un abus (raisonnable) de notation, on écrira également $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}dt$.

2. Justifier que L est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;1\,[$ et expliciter L'. En déduire les variations de L (il n'est pas demandé d'expliciter les limites aux bornes).
3. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Montrer que

$$L(x) - L\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(x)\ln(1-x) + (\ln(2))^2 - \int_{1/2}^x \frac{\ln(t)}{1-t}dt$$

   (b) Justifier que $\ln(u) \times \ln(1-u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$. En déduire la limite, quand $x \to 1$, de $-\ln(x)\ln(1-x)$.

   (c) Montrer que la fonction $g : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t}$ est prolongeable par continuité en 1 (on pourra poser $u = 1-t$). La fonction g ainsi prolongée est donc continue sur $]\,0\,;1\,]$.

   (d) Justifier que g admet une primitive, notée G, sur $]\,0\,;1\,]$, et justifier que $\displaystyle\int_{1/2}^x \frac{\ln(t)}{1-t}dt$ admet une limite finie, quand $x \to 1$, que l'on exprimera en fonction de G.

   (e) Conclure que L admet une limite finie en 1. On la note $L(1)$. Ainsi, L est prolongeable en une fonction continue sur $]-\infty\,;1\,]$.

Partie III - Équations fonctionnelles vérifiées par L.

1. (a) On définit sur $]\,0\,;1\,[$ la fonction u par $u(x) = L(1-x) + L(x) + \ln(x)\ln(1-x)$. Montrer que u est constante.

   (b) À l'aide de la partie précédente, donner la limite de u en 1 (on exprimera cette limite en fonction de L).

   (c) En déduire la relation d'Euler :

$$\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\,, \qquad L(x) + L(1-x) = L(1) - \ln(x)\ln(1-x)$$

2. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Montrer que

$$L(x) + L(-x) = -\int_0^x \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}dt$$

   (b) Montrer la formule de duplication : $L(x) + L(-x) = \dfrac{L\left(x^2\right)}{2}$.

3. On admet que $L(1) = \pi^2/6$. En déduire les valeurs de $L(-1)$ et $L\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Attention, la relation de la question précédente n'est valable que pour $x \in \,]\,0\,;1\,[$!