Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 19

Exercice - Préliminaires

1. Donner un équivalent puis en déduire la limite de f en x_0 dans les cas suivants :

   (a) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin(x)}$, $x = 0$.

   (b) $f(x) = \dfrac{1-\cos(x^2)}{x\sin(x)\ln(1-x^2)}$, $x_0 = 0$.

   (c) $f(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})^5 - 1}{x - \sqrt{x}}$, $x_0 = 0$.

   (d) $f(x) = \ln(x) \times \tan(\ln(1+x))$, $x_0 = 0$.

   (e) $f(x) = \dfrac{x^{12}-1}{x^{33}-1}$, $x_0 = 1$.

   (f) $f(x) = \dfrac{(8x^3+1)^{1/3} - 2x}{(x^3+1)^{1/3} - x}$, $x_0 = +\infty$.

   (g) $f(x) = \dfrac{x^{\frac{x+1}{x}} - x}{\ln(1+x^2)}$, $x_0 = +\infty$.

2. Donner le développement limité de f en 0 à l'ordre n indiqué.

   (a) $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$, $n = 4$.

   (b) $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$, $n = 4$.

   (c) $f(x) = e^{\sqrt{4+x}}$, $n = 2$.

   (d) $f(x) = \dfrac{\cos(x) - \cos(2x)}{\sin(x) - \sin(2x)}$, $n = 4$.

3. Donner le DL à l'ordre 2 au voisinage de 1/2 de $f(x) = \cos(\pi x(1-x))$.

Problème (facultatif) - Le problème des anniversaires

Nous verrons dans le chapitre 26 que la probabilité qu'au moins deux élèves de la classe (42 élèves) aient le même anniversaire est :

$$\begin{aligned}
p &= 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \left(1 - \frac{2}{365}\right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{41}{365}\right) \\
&= 1 - \frac{364 \times 363 \times \cdots \times 324}{365^{41}} \\
&= 1 - \frac{365 \times 364 \times \cdots \times 324}{365^{42}} \\
&= 1 - \frac{365!}{365^{42} \times 323!} \\
&= 1 - \frac{365!}{365^{42} \times (365-42)!}
\end{aligned}$$

De façon générale, le problème des anniversaires est le suivant : on choisit une liste de n éléments appartenant tous à un ensemble à $N \geq 1$ éléments, de telle sorte que toutes les listes soient équiprobables, et l'on se demande quelle chance on a d'avoir deux éléments identiques au moins dans notre liste.

Cette question intervient dans un certain nombre de situations concrètes, dont voici quelques exemples :

- si l'on effectue un sondage dans une population sans prendre de précaution particulière, a-t-on beaucoup de chances d'interroger deux fois la même personne ?
- si l'on decide d'associer par une fonction de hachage à chaque fichier d'un ordinateur ou d'un réseau un identifiant numérique (principe de la méthode « MD5 », aujourd'hui considérée comme trop peu fiable, ou des algorithmes « SHA » successifs), quel doit être le nombre d'identifiants possibles pour qu'une attaque par génération aléatoire de fichiers ne finisse par produire deux fichiers distincts possédant le même identifiant, problème appelé collision, qui peut peut conduire un hacker à concevoir un fichier malveillant ayant la même signature qu'un fichier inoffensif ?
- sur combien de marqueurs doit porter une analyse d'ADN pour que dans une population donnée, deux individus quelconques aient peu de chance d'avoir les mêmes caractéristiques (problème qui ne se pose cependant pas en ces termes à la police scientifique, qui doit rechercher si des suspects ont les mêmes caractéristiques qu'un individu dont on connaît d'avance l'ADN) ?

- comment compter le nombre d'individus d'une population dans des situations où l'exhaustivité est impossible, par exemple pour déterminer les ressources halieutiques [1] dans une zone de pêche donnée ?

De façon tout à fait analogue à la probabilité donnée ci-dessus, on peut montrer que cette probabilité vaut

$$P(N,n) = 1 - \frac{N!}{N^n \times (N-n)!}$$

Dans la suite, on pose

$$Q(N,n) = 1 - P(n,N) = \frac{N!}{N^n \times (N-n)!}$$

et le but de ce problème est d'étudier en détails ces quantités, et comment choisir n pour que $P(n,N)$ ait une valeur donnée. En particulier, nous nous intéresserons précisément à la valeur de n qui rend cette probabilité supérieure ou égale à $1/2$.

Dans tout le problème, quand nous parlerons de limites, d'équivalents, de o, etc. ce sera pour $N \to +\infty$. Attention cependant : n est considéré comme dépendant de N (par exemple $n = \left\lfloor \sqrt{N} \right\rfloor$), mais nous n'écrivons pas $n(N)$ pour ne pas surcharger les écritures. En particulier, n n'est pas supposé constant.

Partie I - Simple, basique

On suppose dans cette partie que $n = \mathrm{o}(N)$.

1. On admet [2] la formule de Stirling : $N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N}$. Justifier que

$$Q(N,n) \sim e^{-n} \left(\frac{N}{N-n} \right)^{N-n+\frac{1}{2}}$$

   On justifiera pourquoi on peut appliquer la formule de Stirling pour donner un équivalent de $N-n$.

2. On admet [3] le développement asymptotique plus précis de la factorielle :

$$N! = \sqrt{2\pi} N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N} \left(1 + \frac{1}{12N} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{N} \right) \right)$$

   Prouver que :

$$Q(N,n) = e^{-n} \left(\frac{N}{N-n} \right)^{N-n+\frac{1}{2}} \left(1 + \mathrm{o}\left(\frac{1}{N} \right) \right)$$

3. Prouver que :

$$\ln(Q(N,n)) = -n - \left(N - n + \frac{1}{2} \right) \times \left(-\frac{n}{N} - \frac{n^2}{2N^2} + \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{N^2} \right) \right) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{N} \right)$$

Partie II - Limite de $(P(N,n))$ dans un cas particulier

1. On se donne dans cette question un réel $\alpha > 0$ et on suppose que :

$$\frac{n}{\sqrt{N}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \alpha$$

   (a) Justifier que la suite de terme général n^2/N est bornée.

   (b) En déduire que

$$\left(N - n + \frac{1}{2} \right) \times \mathrm{o}\left(\frac{n^2}{N^2} \right) = \mathrm{o}(1)$$

   (c) Montrer que $\ln(Q(N,n)) \xrightarrow[N \to +\infty]{} -\alpha^2/2$. On justifiera bien pourquoi on peut utiliser la partie précédente.

   (d) En déduire que $P(N,n) \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1 - e^{-\alpha^2/2}$.

1. C'est un mot qu'on a rarement l'occasion de placer dans une conversation.
2. Provisoirement : nous la verrons au chapitre 25.
3. Celui-là, nous ne le prouverons pas en classe : pour le prouver, il faut raisonner comme dans l'exercice 1 du DS 7 de l'an dernier. Je pourrais vous le donner en DM, mais le DM de séries est déjà assez long comme ça...

2. On suppose à présent que $n/\sqrt{N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ et on fixe un réel $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$.
   (a) Dans cette question uniquement, l'entier N est supposé fixé. Montrer que la famille $(Q(N,n))_{n\in[\![\,0\,;\,N\,]\!]}$ est décroissante. En déduire la monotonie de $(P(N,n))_{n\in[\![\,0\,;\,N\,]\!]}$.
   (b) Prouver l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que $1 - e^{-\alpha^2/2} = 1-\varepsilon$.
   (c) On prend dans cette question le réel de α trouvé à la question précédente. Justifier que :
   $$P\left(N, \left\lfloor \alpha\sqrt{N}\right\rfloor\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1-\varepsilon$$
   (d) Montrer qu'il existe un entier N_2 tel que, pour tout $N \geq N_2$, $P(N,n) \geq 1-2\varepsilon$. On a donc prouvé que $P(N,n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$.

Partie III - Seuil de coïncidence

Dans cette partie, on s'intéresse au rang à partir duquel $P(N,n) \geq 1/2$. En d'autres termes, on se demande à partir de quand, en prenant n éléments au hasard, on ait au moins une chance sur deux d'avoir deux éléments égaux.

Le problème est que $P(N,n)$ est une quantité discrète et non pas continue, et donc qu'il n'existe pas forcément d'entier n tel que $P(N,n) = 1/2$.

On surmonte cette difficulté à l'aide d'un prolongement continu de la factorielle que vous verrez en deuxième année, à savoir la fonction Γ. Sans rentrer dans les détails, on admet qu'on peut le faire, et donc on supposera dans la suite que n est un réel (dépendant de N mais, encore une fois, on ne note pas $n(N)$ pour ne pas alourdir l'expression) strictement positif appelé seuil de coïncidence de N et qui est le plus petit réel strictement positif vérifiant $P(N,x) = 1/2 = Q(N,x)$ (mais n n'est plus forcément un entier [4], ce qui n'est pas très grave puisqu'on va vouloir en donner un développement asymptotique), et que tout ce qui précède est encore valable dans ce cadre élargi.

Dans cette partie, on suppose donc que n est un réel strictement positif qui vérifie $P(N,n) = Q(N,n) = 1/2$ et on note :

$$x_N = \frac{n}{\sqrt{N}}$$

1. Justifier que la suite $(x_N)_N$ est bornée. On pourra raisonner par l'absurde et appliquer la question 2 de la partie précédente à une sous-suite bien choisie.
2. En déduire que $n = \mathrm{o}\,(N)$.
3. On peut donc utiliser la première partie et la première question de la deuxième partie [5]. À l'aide des calculs effectués dans la question 1.(c) de la partie II, prouver que $x_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sqrt{\ln(4)}$. En déduire un équivalent de n.
4. À l'aide de la question 2 de la partie I, prouver que :
$$\ln(2) = \frac{{x_N}^2}{2} + \frac{{x_N}^3}{6\sqrt{N}} - \frac{x_N}{2\sqrt{N}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$
5. Prouver finalement que :
$$n = \sqrt{N\ln(4)} + \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{3} + \mathrm{o}\,(1)$$

4. Tant pis pour Médor.
5. L'hypothèse $n = \mathrm{o}\,(N)$ n'étant pas faite dans la question 2 de la deuxième partie, il n'y a aucun problème avec le fait de l'avoir utilisée avant d'avoir prouvé que $n = \mathrm{o}\,(N)$.

Voici la plupart des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir sur les DL (et d'autres sur lesquels je râle toute l'année...). Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Ne pas sommer d'équivalents.

   O - N - B.

2. Ne pas dire qu'une quantité est équivalente à 0.

   O - N - B.

3. Réfléchir aux ordres avant d'effectuer un DL.

   O - N - B.

4. Vérifier qu'une quantité tend vers 0 (au moins au brouillon) avant de faire un DL.

   O - N - B.

5. Ne pas simplifier les o.

   O - N - B.

6. Vérifier qu'une quantité tend vers $+\infty$ avant d'appliquer la formule de Stirling.

   O - N - B.

7. Ne pas composer les équivalents.

   O - N - B.

8. Préciser qu'une fonction est continue avant de passer à la limite.

   O - N - B.