Programme de colle - Semaine n°4

Chapitre 3 - Sommes et produits

- cf. semaine 3.

Chapitre 4 - Ensembles et applications

- cf. semaine 3.
- Union et intersection : propriétés diverses (distributivité, etc.). Exemple : $\bigcup_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{k+1} \,;\, \frac{1}{k} \right] =]\,0\,;1\,]$.
- Partition d'un ensemble (par convention, les éléments composant une partition sont tous non vides), recouvrement (disjoint ou non).
- Complémentaire, différence, lois de Morgan.
- Différence symétrique (HP) : commutativité, associativité.
- Injections, surjections, bijections, écriture avec des quantificateurs. Rédaction type pour montrer qu'une fonction est (ou n'est pas) injective ou surjective. Erreurs à ne pas commettre. Exemples. Composition d'injections/de surjections/de bijections (les différentes « réciproques » seront vues en TD).
- Image directe, image réciproque. Application réciproque d'une injection, exemple du sh. Inversion d'une composée. Involutions : une involution est bijective et est sa propre réciproque. Si deux fonctions f et g vérifient $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ alors f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.
- Cas particulier des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$: théorème de la bijection, dérivabilité d'une application réciproque, cas particulier de la fonction ch^{-1} (note aux colleurs : les fonctions hyperboliques réciproques sont HP, celle-ci n'a été vue qu'à titre d'exemple).

Chapitre 5 - Fonctions circulaires/trigonométrie

- Formules de trigonométrie.
- Propriétés du sinus, du cosinus et de la tangente (parité, variations, convexité, dérivée, graphes, etc.).
- Congruence modulo un nombre réel, propriétés (en particulier, produit par un réel !).
- CNS pour avoir $\cos(a) = \cos(b)$, $\sin(a) = \sin(b)$, et les deux en même temps.
- Mise d'une expression de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ sous la forme $C\cos(x - \varphi)$.
- Paramétrisation du cercle trigonométrique : pour tout couple de réels (a, b) tel que $a^2 + b^2 = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$. De plus, ce réel est unique si on se place sur un intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Chapitres au programme

Chapitre 3 (cours et exercices sur tout le chapitre, y compris le binôme de Newton et les coefficients binomiaux), chapitre 4 (cours, exercices uniquement sur les ensembles), chapitre 5 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Valeur de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$, de $\sum_{k=0}^{n} q^k$, binôme de Newton et factorisation de $a^n - b^n$ (tout ça sans démonstration).
2. L'examinateur donne une somme télescopique dans un cas explicite et demande sa valeur.
3. Calcul de $S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$.
4. Prouver que $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{3}^k 2^{n-k} \in \mathbb{N}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$, $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}^*$ (démonstration).

6. Formule du binôme de Newton (démonstration).
7. L'examinateur donne une somme explicite et demande de donner sa valeur à l'aide du binôme de Newton. Nous avons vu en classe les exemples $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n}{k}(-1)^k$ et $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\binom{n+1}{k}2^{k+1}3^{n-k}$.
8. Valeur de $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ et $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$ (démonstration).
9. Produit des nombres impairs entre 1 et $2n+1$ (démonstration).
10. Définition de l'union et de l'intersection d'une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$. Écriture avec des quantificateurs de : « $x \in \displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i$ » et « $x \in \displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ ».
11. Définition de la différence symétrique de deux ensembles (avec un joli dessin). Associativité (méthode au choix de l'élève).
12. Définition d'une injection, d'une surjection, d'une bijection, et écriture avec des quantificateurs à chaque fois.
13. Méthode ou rédaction type pour montrer qu'une fonction $f : E \to F$ est ou n'est pas injective ou surjective, au choix de l'examinateur.
14. Une composée d'injections est une injection (énoncé précis, démonstration).
15. Une composée de surjections est une surjection (énoncé précis, démonstration).
16. Définition de l'image directe, de l'image réciproque d'une partie, et écriture avec des quantificateurs.
17. Prouver que la fonction sh est bijective et expliciter sa bijection réciproque.
18. Théorème de la bijection (sans démonstration).
19. Dérivée d'une bijection réciproque (énoncé précis, sans démonstration).
20. Prouver que ch est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[\,1\,;+\infty\,[$ et expliciter la dérivée de ch^{-1}.
21. L'examinateur donne une quantité sous la forme $a\cos(x)+b\sin(x)$ et demande de la mettre sous forme $C\cos(x-\varphi)$. Note aux colleurs : les fonctions Arccos et Arcsin n'ayant pas été vues, il faut des valeurs qui tombent juste !
22. Définition de la tangente, domaine de définition (les deux expressions), dérivée et allure du graphe (tout ça sans démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin de la trigonométrie.
- Début de l'arithmétique.

Exercices à préparer

Exercices 26, 28, 33, 35, 36, 37, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62 du chapitre 4.

Cahier de calcul

Chapitre 19.