Programme de colle - Semaine n°31
This is the end...

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Baptiste DAULE SIGAUT, Julien DENEUBOURG, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Raphaël DEPUYDT, Douae EL FANI, Houdayfa EL HAJJIOUI, Célian FORET, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Paul LEONARD, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Ethan DUMONT, Noelien DUTILLEUL, Julien GERY, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 32 - Groupe symétrique

- cf. semaine 30.

Chapitre 33 - Déterminants

- cf. semaine 31.
- Comatrice, expression de l'inverse.
- Le déterminant est polynomial en les coefficients : rapide extension aux déterminants de matrices à valeurs dans un anneau. Déterminant de Vandermonde.

Chapitre 34 - Espaces préhilbertiens réels

- Rappels sur la bilinéarité. En particulier, méthode pour développer quand on a deux sommes (il faut changer les indices !).
- Produit scalaire, notation $\langle , \rangle$ ou $(|)$. Identités remarquables (la norme n'a pas encore été vue). Espace préhilbertien, espace euclidien.
- Exemples à connaître : produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, produit scalaire « habituel » sur $\mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Autres exemples.
- Norme associée à un produit scalaire. Positivité, séparation, absolue homogénéité, identités remarquables. Vecteur unitaire : si $x \neq 0$, x divisé par sa norme est unitaire. Formule de polarisation. Activité : une application linéaire préserve la norme si et seulement si elle préserve le produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité, exemples. Application à l'espérance et la covariance (même si on n'a pas de produit scalaire).
- Inégalité triangulaire, cas d'égalité.
- Vecteurs orthogonaux, le vecteur nul est le seul vecteur orthogonal à tout le monde. Si x et y sont orthogonaux alors, pour tous λ et μ, λx et μy sont orthogonaux. Famille orthogonale, famille orthonormale (ou orthonormée), toute famille orthogonale de vecteurs non nuls peut être « transformée » en famille orthonormale. Exemple des matrices élémentaires, exemples des fonctions $x \mapsto \sin(nx)$ et $x \mapsto \cos(nx)$ sur $\mathscr{C}([\,0\,;2\pi\,],\mathbb{R})$. Théorème de Pythagore.
- Une famille de vecteurs orthogonaux tous non nuls est libre. Bases orthonormales. Décomposition selon une base orthonormale. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Théorème de la base orthonormale incomplète.

Chapitres au programme

Chapitres 32 et 33 (cours et exercices), chapitre 34 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. L'examinateur donne deux permutations explicites simples (disons $n \leq 10$) et demande d'en faire le produit.
2. L'examinateur donne une permutation explicite simple (disons $n \leq 15$) et demande sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions, et sa signature.
3. L'examinateur donne une permutation explicite simple et demande une décomposition en produit de transpositions sans passer par le produit en cycles à supports disjoints.
4. Définition du déterminant d'une matrice (on demande uniquement l'expression à l'aide de la somme).
5. L'examinateur donne un déterminant 3×3 explicite (pas trop moche) à calculer à l'aide de la règle de Sarrus.
6. Si $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, valeur de

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \ldots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

7. Définition de la comatrice. Valeur de $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top$ et expression de A^{-1} en fonction de la comatrice le cas échéant (énoncé précis, sans démonstration).
8. Déterminant de Vandermonde (sans démonstration).
9. Définition d'un produit scalaire. Au choix de l'examinateur : montrer que le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 & \to & \mathbb{R} \\ (A,B) & \mapsto & \mathrm{tr}\left(\left(A^\top \times B\right)\right) \end{cases}$$

ou le produit scalaire « habituel » sur $\mathscr{C}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ défini par

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathscr{C}([\,a\,;b\,])^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

est un produit scalaire.

10. Valeur de $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2$ (sans démonstration).
11. Formule de polarisation (sans démonstration). Une application linéaire préserve la norme si et seulement si elle préserve le produit scalaire (démonstration).
12. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (démonstration de l'inégalité uniquement).
13. Définition de la norme associée à un produit scalaire. Inégalité triangulaire, cas d'égalité (sans démonstration).
14. L'examinateur demande au candidat d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt dans un cas simple (maximum trois vecteurs).
15. Expression des coordonnées dans une base orthonormale en dimension finie (énoncé précis, sans démonstration).

Groupes B - C :

1. Toute permutation peut s'écrire comme un produit de transpositions (démonstration, méthode au choix de l'élève).
2. Déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (démonstration).
3. Déterminant de Vandermonde (démonstration).
4. L'application

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) \times \ell^2(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{R} \\ ((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \end{cases}$$

est bien définie et est un produit scalaire (démonstration : il n'est pas demandé de prouver que $\ell^2(\mathbb{N})$ est effectivement un espace vectoriel).

5. La famille $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base orthonormale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire canonique (démonstration).
6. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (démonstration, y compris du cas d'égalité).

Groupe C :

1. Le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de sa transposée (démonstration).
2. Définition de la comatrice. Valeur de $A \times (\mathrm{Com}(A))^\top$ et expression de A^{-1} en fonction de la comatrice le cas échéant (démonstration).
3. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille finie (énoncé précis, démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des produits scalaires.
- Familles sommables.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 5, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 20, 23, 24, 28, 29, 30 du chapitre 34.

Cahier de calcul

Chapitre 32.