Correction du DS n°3

Préliminaires

3 Soit $x \in \mathbb{R}$ (la fonction $1/\operatorname{ch}$ est continue sur $\mathbb{R}$). À l'aide du changement de variable $u = e^t, t = \ln(u)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/u$, il vient :

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}(t)} &= \int^x \frac{2}{e^t + e^{-t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int^{e^x} \frac{2}{u + \dfrac{1}{u}} \times \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int^{e^x} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\text{Une pimitive de } 1/\operatorname{ch} \text{ est } x \mapsto 2\operatorname{Arctan}(e^x).}$

4.(a) y étant dérivable deux fois, z est dérivable. Soit $x > 0$. $z'(x) = y'(x) + xy''(x) + y'(x) = xy''(x) + 2y'(x)$. En particulier, puisque x ne s'annule pas (on est sur $\mathbb{R}_+^*$), $y''(x) = (z'(x) - 2y'(x))/x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E)} &\iff \forall x > 0, x^3y''(x) - 2xy(x) + 3 = 0 \\ &\iff \forall x > 0, x^3 \times \left(\frac{z'(x) - 2y'(x)}{x}\right) - 2xy(x) + 3 = 0 \\ &\iff \forall x > 0, x^2 \times (z'(x) - 2y'(x)) - 2x \times (z(x) - xy'(x)) + 3 = 0 \\ &\iff \forall x > 0, x^2z'(x) - 2xz(x) + 3 = 0\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{y \text{ est solution de (E) si et seulement si } z \text{ est solution de (F)} : x^2z' - 2xz + 3}$

4.(b) Cette équation est équivalente à : $z' - \dfrac{2}{x} \times z = -\dfrac{3}{x^2}$ (on peut diviser par x puisqu'on est sur $\mathbb{R}_+^*$). L'équation homogène associée est (H) : $z' - (2/x)z = 0$ dont l'ensemble des solutions est

$$\mathrm{S_H} = \left\{x \mapsto \lambda e^{2\ln(x)} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \lambda x^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Aucune solution évidente ne saute aux yeux : on applique la méthode de la variation de la constante. Soit $\lambda : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $z_0 : x \mapsto \lambda(x)x^2$. Soit $x > 0$. z_0 est dérivable et ${z_0}'(x) = \lambda'(x)x^2 + 2\lambda(x)x$ si bien que ${z_0}'(x) - (2/x)z_0(x) = \lambda'(x)x^2$. Par conséquent, z_0 est solution particulière si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x)x^2 = -3/x^2$ si et seulement si, pour tout x, $\lambda'(x) = -3/x^4 = -3x^{-4}$. Il en découle que $\lambda : x \mapsto 1/x^3$ convient et donc $z_0 : x \mapsto 1/x$ est solution particulière. En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{S_F} = \left\{x \mapsto \lambda x^2 + \frac{1}{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

4.(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche donc à résoudre l'équation (dépendant de λ) (E_λ) : $xy' + y = \lambda x^2 + 1/x$, équivalente à $y' + y/x = \lambda x + 1/x^2$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est (attention, λ est déjà pris) :

$$\mathrm{S_H} = \left\{x \mapsto \alpha e^{-\ln(x)} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \mapsto \frac{\alpha}{x} \mid \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

Aucune solution évidente ne saute aux yeux : appliquons la méthode de variation de la constante. Soit $\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable et soit $y_0 : x \mapsto \alpha(x)/x$. Alors y_0 est dérivable. Soit $x > 0$. Alors :

$${y_0}'(x) = \frac{\alpha'(x)}{x} - \frac{\alpha(x)}{x^2}$$

Il en découle que ${y_0}'(x) + y_0(x)/x = \alpha'(x)/x$ donc y_0 est solution de (E_λ) si et seulement si, pour tout x, $\alpha'(x)/x = \lambda x + 1/x^2$ si et seulement si, pour tout x, $\alpha'(x) = \lambda x^2 + 1/x$. On en déduit que $\alpha : x \mapsto \lambda x^3/3 + \ln(x)$ convient donc $y_0 : x \mapsto \lambda x^2/3 + \ln(x)/x$ est solution particulière. En d'autres termes, les solutions de (E_λ) sont :

$$\mathrm{S}_{\mathrm{E}_\lambda} = \left\{ x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \frac{\lambda x^2}{3} + \frac{\ln(x)}{x} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Finalement, les solutions de (E) sont les solutions de (E_λ), lorsque λ décrit $\mathbb{R}$, c'est-à-dire (en reparamétrant, cf. cours, cela ne veut pas dire que $\lambda = \lambda/3$) :

$$\mathrm{S}_{\mathrm{E}} = \left\{ x \mapsto \frac{\alpha}{x} + \lambda x^2 + \frac{\ln(x)}{x} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

5 Notons S le membre de gauche de l'énoncé. Précisons que le complexe $j = e^{2i\pi/3}$ n'intervenant pas dans cette question, on peut sans problème le prendre comme indice de sommation. D'après le binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(ae^{2i\pi j/m}\right)^k b^{n-k} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{k}\left(ae^{2i\pi j/m}\right)^k b^{n-k} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}\sum_{j=0}^{m-1}\left(e^{2ik\pi/m}\right)^j \end{aligned}$$

On a une somme géométrique : cherchons pour quelles valeurs de k la raison vaut 1. Soit $k \in [\![0 ; n]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} e^{2ik\pi/m} = 1 &\iff \frac{2k\pi}{m} \equiv 0[2\pi] \\ &\iff k \equiv 0[m] \end{aligned}$$

c'est-à-dire les entiers k divisibles par m. Si k n'est pas divisible par m, alors :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{m-1}\left(e^{2ik\pi/m}\right)^j &= \frac{1-\left(e^{2ik\pi}m\right)^m}{1-e^{2ik\pi/m}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, dans la somme, il ne reste que les indices k divisibles par m (les autres sont nuls), et la somme de droite vaut alors m car somme de m termes égaux à 1. Finalement :

$$\boxed{\mathrm{S} = \frac{1}{m}\sum_{\substack{k=0 \\ m\mid k}}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} m = \sum_{\substack{k=0 \\ m\mid k}}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}}$$

Exercice 2 :

1 C'est immédiat (quand on connaît sa trigo...) puisque f_0 est la fonction constante égale à 1 :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_0 &= \int_0^{2r} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [-\cos(x)]_0^{2r} \\ \mathrm{I}_0 &= 1 - \cos(2r) \end{aligned}$$

et en utilisant le fait que $\cos(2r) = 1 - 2\sin^2(r)$ il vient

$$\boxed{\mathrm{I}_0 = 2\sin^2(r)}$$

Or, $r \not\equiv 0[\pi/2]$ donc en particulier $r \not\equiv 0[\pi]$. Il en découle que $\sin(r) \neq 0$, d'où le résultat.

$$\boxed{\mathrm{I}_0 \neq 0}$$

2.(a) Posons $u(x) = x, u'(x) = 1, v(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$, on peut donc effectuer une intégration par parties (on ne le précisera plus dans la suite).

$$\mathrm{A} = [-x\cos(x)]_0^{2r} + \int_0^{2r} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

D'où $$\boxed{\mathrm{A} = -2r\cos(2r) + \sin(2r)}$$

De même, avec $u(x) = x^2, u'(x) = 2x, v(x) = -\cos(x)$ et $v'(x) = \sin(x)$ il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= \left[-x^2\cos(x)\right]_0^{2r} + 2\int_0^{2r} x\cos(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -4r^2\cos(2r) + 2\int_0^{2r} x\cos(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Notons C l'intégrale du membre de droite (sans le 2). De même avec $u(x) = x$, $u'(x) = 1, v(x) = \sin(x)$ et $v'(x) = \cos(x)$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{C} &= [x\sin(x)]_0^{2r} - \int_0^{2r} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2r\sin(2r) + \cos(2r) - 1\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{B} = \left(-4r^2 + 2\right)\cos(2r) + 4r\sin(2r) - 2}$$

2.(b)

Par conséquent
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= \int_0^{2r} (2ax - bx^2)\sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2a \times \mathrm{A} - b \times \mathrm{B} \qquad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= -4ar\cos(2r) + 2a\sin(2r) - b(-4r^2 + 2)\cos(2r) - 4br\sin(2r) + 2b \\ &= (4br^2 - 2b - 4ar)\cos(2r) + (2a - 4br)\sin(2r) + 2b\end{aligned}$$

En écrivant $\cos(2r) = 1 - 2\sin^2(r)$ et $\sin(2r) = 2\sin(r)\cos(r)$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1 &= (4br^2 - 2b - 4ar)(1 - 2\sin^2(r)) + (2a - 4br)2\cos(r)\sin(r) + 2b \\ &= (4br^2 - 2b - 4ar) - 2(4br^2 - 2b - 4ar)\sin^2(r) + 2(2a - 4br)\cos(r)\sin(r) + 2b\end{aligned}$$

Les $2b$ se simplifient (celui dans la première parenthèse et celui à la fin), et puisque $r = a/b$, alors $br = a$ donc $2a - 4br = -2a$ (dernière parenthèse), et $br^2 = a^2/b = ar$ si bien que $4br^2 - 4ar = 0$ (première et deuxième parenthèses). Il ne reste plus que :

$$\boxed{\mathrm{I}_1 = -2(-2b)\sin^2(r) + 2(-2a)\cos(r)\sin(r) = (2b\sin(r) - 2a\cos(r)) \times 2\sin(r)}$$

3.(a) Puisque $r = a/b$, alors $f_n(2r) = 4a^2/b - 4a^2/b = 0$. De plus, puisque pour tout réel x,

$$\begin{aligned}{f_n}'(x) &= n \times (2a - 2bx) \times \frac{(2ax - bx^2)^{n-1}}{n!} \\ &= (2a - 2bx) \times f_{n-1}(x)\end{aligned}$$

il en découle que ${f_n}'(2r) = 0$. Finalement,

$$\boxed{f_n(2r) = {f_n}'(2r) = 0}$$

3.(b) Il suffit de faire deux intégrations par parties successives (en dérivant f_n puis ${f_n}'$) et d'utiliser la question précédente et le fait que $f_n(0) = {f_n}'(0) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{I}_n = -\int_0^{2r} {f_n}''(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t}$$

4.(a) D'après la question précédente et le résultat admis,

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_{n+2} &= -\int_0^{2r} f_{n+2}{}''(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= (4n+6)b\int_0^{2r} f_{n+1}(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t - 4a^2\int_0^{2r} f_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(linéarité)}
\end{aligned}$$

En d'autres termes $$\boxed{\mathrm{I}_{n+2} = (4n+6)b\mathrm{I}_{n+1} - 4a^2\mathrm{I}_n}$$

4.(b) Montrons le résultat par récurrence (double).

- Pour $n \geqslant 0$ on note l'hypothèse

$$\mathrm{H}_n : \text{« Il existe } (a_n, b_n) \in \mathbb{Z}^2 \text{ tels que } \mathrm{I}_n = (a_n\cos(r) + b_n\sin(r)) \times 2\sin(r) \text{ »}$$

- H_0 est vraie (avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$) et H_1 l'est aussi (avec $a_1 = -2a$ et $b_1 = 2b$).
- Soit n quelconque tel que H_n et H_{n+1} soient vraies et montrons que H_{n+2} est vraie. Par hypothèse de récurrence, il existe $(a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$\mathrm{I}_{n+1} = (a_{n+1}\cos(r) + b_{n+1}\sin(r)) \times 2\sin(r) \quad \text{et} \quad \mathrm{I}_n = (a_n\cos(r) + b_n\sin(r)) \times 2\sin(r)$$

  D'après la question précédente, il vient

$$\mathrm{I}_{n+2} = \left[\left((4n+6)ba_{n+1} - 4a^2a_n\right)\cos(r) + \left((4n+6)b \times b_{n+1} - 4a^2b_n\right)\right] \times 2\sin(r)$$

  c'est-à-dire que H_{n+2} est vraie (en posant $a_{n+2} = (4n+6)ba_{n+1} - 4a^2a_n$ et $b_{n+2} = (4n+6)b \times b_{n+1} - 4a^2b_n$ qui sont bien des entiers relatifs car sommes et produits d'entiers relatifs).
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

5.(a) Cela découle du fait que $r \not\equiv 0[\pi/2]$ et du fait que $\sin(2r) = 2\sin(r)\cos(r)$.

$$\boxed{\sin(r) \neq 0, \cos(r) \neq 0 \text{ donc } \sin(2r) \neq 0}$$

5.(b) Soient a_n et b_n les entiers dont on a montré l'existence à la question 4.(b). Dès lors, puisque $\sin(2r) = 2\sin(r)\cos(r)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{I}_n}{\sin(2r)} &= \frac{a_n\cos(r) + b_n\sin(r)}{\cos(r)} \\
&= a_n + b_n\tan(r) \\
\frac{\mathrm{I}_n}{\sin(2r)} &= a_n + b_n \times \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure : $$\boxed{\frac{q \times \mathrm{I}_n}{\sin(2r)} \in \mathbb{Z}}$$

5.(c) C'est immédiat (inutile de dériver, c'est un trinôme de coefficient dominant $-b < 0$), et on rappelle que $a/b = r$:

	0	r	$2r$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	0 $\nearrow$	a^2/b	$\searrow$ 0

5.(d) On rappelle (cf. chapitre 2) que pour montrer une inégalité du type $|\alpha| \leqslant \mathrm{A}$, il suffit de prouver que $\alpha \leqslant \mathrm{A}$ et $-\alpha \leqslant \mathrm{A}$. Dès lors, il suffit de prouver les deux inégalités suivantes :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Or, $f \leqslant |f|$ et $-f \leqslant |f|$ donc, par croissance de l'intégrale (le résultat de l'énoncé, que nous reverrons au chapitre 22) et par linéarité pour l'égalité de droite :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

En conclusion $\boxed{\text{L'inégalité triangulaire est démontrée.}}$

5.(e) D'après l'inégalité triangulaire (question précédente, et on a bien $r > 0$) et la question 5.(c) (et bien sûr le fait qu'un sinus est majoré par 1 en valeur absolue),

$$\begin{aligned}|\mathrm{I}_n| &\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{2r} |\left(2ax - bx^2\right)^n \sin(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^{2r} \left(\frac{a^2}{b}\right)^n \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat voulu. $\boxed{|\mathrm{I}_n| \leqslant \left(\frac{a^2}{b}\right)^n \times \frac{2r}{n!}}$

Par croissances comparées (oui, les suites n'étaient pas au programme du DS, mais bon...), le membre de droite tend vers 0, et d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

5.(f) D'après la question précédente,

$$\frac{q \times \mathrm{I}_n}{\sin(2r)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Or, une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui tend vers 0 est nulle à partir d'un certain rang (car elle est stationnaire, cf. cours, mais il suffit de dire qu'elle est comprise entre $-1/2$ et $1/2$ pour n assez grand), d'où le résultat.

$$\boxed{\text{Il existe } n_0 \text{ tel que pour tout } n \geqslant n_0, \mathrm{I}_n = 0}$$

5.(g) L'ensemble E est non vide car contient 0 d'après la question 1, et est majoré par n_0 (et même $n_0 - 1$) d'après la question précédente. Puisque c'est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$,

$$\boxed{\text{E admet un plus grand élément, noté } n_1.}$$

Or, d'après la question 4.(a) (car $a \neq 0$)

$$\mathrm{I}_{n_1} = \frac{1}{4a^2}\left[(4n_1 + 6)\mathrm{I}_{n_1+1} - \mathrm{I}_{n_1+2}\right]$$

Or, n_1 est le plus grand élément de E. En d'autres termes, $\mathrm{I}_{n_1} \neq 0$ et si $n > n_1$ alors $n \notin \mathrm{E}$ donc $\mathrm{I}_n = 0$. Ainsi, $\mathrm{I}_{n_1+1} = \mathrm{I}_{n_1+2} = 0$ donc $\mathrm{I}_{n_1} = 0$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\tan(r) \text{ est irrationnel.}}$$

6 On a montré dans la question précédente que si $r \in \mathbb{Q}^*$ alors $\tan(r) \notin \mathbb{Q}$. Par contraposée, si $\tan(r) \in \mathbb{Q}$ alors $r \notin \mathbb{Q}^*$, c'est-à-dire que r est irrationnel ou nul. Puisque $\tan(\pi/4) = 1 \in \mathbb{Q}$ alors $\pi/4 \notin \mathbb{Q}$, ce qui permet de conclure (car si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $4x \notin \mathbb{Q}$, on le montre facilement par contraposée mais on peut l'affirmer directement).

$$\boxed{\pi \notin \mathbb{Q}}$$

Problème

1.(a) Puisque $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ alors $z_1 - z_2 + jz_2 + j^2z_3 = -z_2$. En mettant jz_2 et j^2z_3 à droite, cela donne $z_1 - z_2 = -(1+j)z_2 - j^2z_3$ et puisque $1 + j = -j^2$, on trouve que $z_1 - z_2 = j^2(z_2 - z_3)$. On en déduit donc que

$$\begin{aligned}\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} &= -j^2\\ &= -e^{4i\pi/3}\\ &= e^{i\pi+4i\pi/3}\\ &= e^{2i\pi+\pi/3}\end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = e^{i\pi/3}}$$

1.(b) D'après la question précédente, $z_1 = e^{i\pi/3}(z_3 - z_2) + z_2$ donc z_1 est l'image de z_3 par la rotation d'angle $\pi/3$ (dans le sens direct) et de centre z_2. On en déduit que les deux côtés Z_1Z_2 et Z_3Z_2 sont de même longueur et que l'angle en Z_2 vaut $\pi/3$ donc

$$\boxed{Z_1Z_2Z_3 \text{ est équilatéral (direct).}}$$

1.(c) Par définition, $uv = e^{2i(\alpha+\beta)}$. Or, $\alpha + \beta \in \left]0\,;2\pi/3\right[$ donc $2(\alpha+\beta) \in \left]0\,;4\pi/3\right[$ donc n'est pas congru à 0 modulo 2π si bien que $uv \neq 1$. De même pour les deux autres.

$$\boxed{uv, vw \text{ et } wu \text{ sont différents de 1.}}$$

De plus, $uvw = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}$. Or, $3\alpha+3\beta+3\gamma$ est la somme des angles du triangle ABC donc vaut π si bien que $\alpha+\beta+\gamma = \pi/3$. Le résultat en découle.

$$\boxed{uvw = j}$$

1.(d) On a :

$$\begin{aligned}\frac{u(1-v)}{1-uv} &= \frac{e^{2i\alpha}\left(1-e^{2i\beta}\right)}{1-e^{2i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{e^{2i\alpha}e^{i\beta}\left(e^{-i\beta}-e^{i\beta}\right)}{e^{i(\alpha+\beta)}\left(e^{-i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha+\beta)}\right)} && \text{angle-moitié}\\ &= \frac{e^{i\alpha}\times(-2i\sin(\beta))}{-2i\sin(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{e^{i\alpha}\times\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

Or, par définition, α et β appartiennent à $\left]0\,;\pi/3\right[$ donc $\alpha+\beta \in \left]0\,;2\pi/3\right[$ et donc les deux sinus sont strictement positifs. On en déduit que l'écriture ci-dessus est la forme exponentielle recherchée. Le calcul est analogue (et même plus simple) pour le deuxième complexe :

$$\begin{aligned}\frac{1-u}{1-uv} &= \frac{1-e^{2i\alpha}}{1-e^{2i(\alpha+\beta)}}\\ &= \frac{e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}\right)}{e^{i(\alpha+\beta)}\left(e^{-i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha+\beta)}\right)} && \text{angle-moitié}\\ &= \frac{e^{-i\beta}\times(-2i\sin(\alpha))}{-2i\sin(\alpha+\beta)}\\ &= \frac{e^{-i\beta}\times\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)}\end{aligned}$$

ce qui est bien la forme exponentielle voulue (même raisonnement que ci-dessus).

$$\boxed{\frac{u(1-v)}{1-uv} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \times e^{i\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{1-u}{1-uv} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\alpha+\beta)} \times e^{-i\beta}}$$

2.(a) En multipliant la relation vérifiée par p par $(1-uv)(1-wu)$ (le coefficient $(1-vw)$ est déjà dans la relation), il vient :

$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)p = (1-uv)(1-wu)[(1-v)b + v(1-w)c]$$

De même, en multipliant respectivement la relation vérifiée par q et celle vérifiée par r par $(1-uv)(1-vw)$ et $(1-vw)(1-wu)$, on trouve :

$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)q = (1-uv)(1-vw)[(1-w)c + w(1-u)a]$$

et
$$(1-uv)(1-vw)(1-wu)r = (1-vw)(1-wu)[(1-u)a + u(1-v)b]$$

Dès lors
$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= (1-uv)(1-vw)(1-wu)p + j(1-uv)(1-vw)(1-wu)q + j^2(1-uv)(1-vw)(1-wu)r \\ &= (1-uv)(1-wu)[(1-v)b + v(1-w)c] + j(1-uv)(1-vw)[(1-w)c + w(1-u)a] \\ &\qquad + j^2(1-vw)(1-wu)[(1-u)a + u(1-v)b] \end{aligned}$$

En développant, on obtient bien une combinaison linéaire de a, b, c, donc E est bien de la forme voulue avec

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lcl} \lambda &=& j(1-uv)(1-vw)w(1-u) + j^2(1-vw)(1-wu)(1-u) \\ \mu &=& (1-uv)(1-wu)(1-v) + j^2(1-vw)(1-wu)u(1-v) \\ \nu &=& (1-uv)(1-wu)v(1-w) + j(1-uv)(1-vw)(1-w) \end{array}\right.}$$

En factorisant λ par $j(1-u)(1-vw)$, on obtient l'expression voulue :

$$\boxed{\lambda = j(1-u)(1-vw)[w(1-uv) + j(1-wu)]}$$

2.(b) On voit tout d'abord qu'il y a $1-u$ dans l'expression voulue donc on n'y touche pas ! Pour le terme $1-vw$, d'après la question 1.(c), $vw = j/u$ si bien que $1 - vw = 1 - j/u$. Enfin,

$$\begin{aligned} w(1-uv) + j(1-wu) &= w - wuv + j - jwu \\ &= w - jwu \qquad \text{car } wuv = j \end{aligned}$$

Par conséquent
$$\begin{aligned} \lambda &= j(1-u) \times \left(1 - \frac{j}{u}\right) \times w(1-ju) \\ &= wj(1-u) \times \left(1 - \frac{j}{u}\right) \times (1-ju) \end{aligned}$$

Quand on compare à ce qu'on cherche, on se rend compte qu'on a le terme $(1-j/u)$ en trop et qu'il manque $j(j^2u-1)/u$ donc on aimerait avoir $(1-j/u) = j(j^2u-1)/u$ (les autres termes étant bien à leur place). Il suffit de voir que

$$\begin{aligned} \frac{j}{u}(j^2u - 1) &= j^3 - \frac{j}{u} \\ &= 1 - \frac{j}{u} \end{aligned}$$

Par conséquent, on a bien l'égalité $(1-j/u) = j(j^2u-1)/u$ donc

$$\boxed{\lambda = wj(1-u) \times \frac{j(j^2u-1)}{u} \times (1-ju) = \frac{wj^2}{u}(1-u)(j^2u-1)(1-ju)}$$

2.(c) Il suffit donc de prouver que $(1-u)(j^2u-1)(1-ju) = u^3 - 1$. Pour cela, développons le membre de gauche, appelé y :

$$\begin{aligned} y &= (j^2u - 1 - j^2u^2 + u)(1 - ju) \\ &= j^2u - 1 - j^2u^2 + u - j^3u^2 + ju + j^3u^3 - ju^2 \\ &= u^3 - u^2(j^2 + j + 1) + u(j^2 + j + 1) - 1 && j^3 = 1 \\ &= u^3 - 1 && j^2 + j + 1 = 0 \end{aligned}$$

En conclusion $$\boxed{\lambda = \frac{wj^2}{u}(u^3 - 1)}$$

3 D'après le cours, et par définition de u, v, w (elles sont déjà sous la forme $z \mapsto e^{i\theta}(z - z_0) + z_0$, inutile de chercher le centre i.e. le point fixe) :

> Les fonctions R_a, R_b, R_c sont, respectivement : la rotation d'angle 2α de centre a, la rotation d'angle 2β de centre b et la rotation d'angle 2γ de centre c.

4.(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b(z) &= \mathrm{R}_a(v(z - b) + b) \\ &= u[v(z - b) + b - a] + a \end{aligned}$$

et donc $$\boxed{\mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b : z \mapsto uv(z - b) + u(b - a) + a}$$

4.(b) Soit $r \in \mathbb{C}$.

> Attention de ne pas écrire « soit r un point fixe de $\mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b$ » : on ne sait pas encore qu'un tel point fixe existe, on va prouver à la fois son existence et son unicité en raisonnant par équivalences !

$$\begin{aligned} r \text{ est un point fixe de } \mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b &\iff \mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b(r) = r \\ &\iff uv(r - b) + u(b - a) + a = r \\ &\iff -uvb + u(b - a) + a = (1 - uv)r \\ &\iff u(1 - v)b + (1 - u)a = (1 - uv)r \\ &\iff \frac{u(1 - v)b + (1 - u)a}{1 - uv} = r \qquad \text{car } 1 - uv \neq 0 \text{ (question 1.(c))} \end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{R}_a \circ \mathrm{R}_b \text{ admet un unique point fixe et celui-ci vérifie } u(1 - v)b + (1 - u)a = (1 - uv)r.}$$

4.(c) Suivons l'indication de l'énoncé et soustrayons $(1 - uv)a$ de chaque côté, ce qui donne :

$$u(1 - v)b + (1 - u)a - (1 - uv)a = (1 - uv)r - (1 - uv)a$$

c'est-à-dire $$ub - uvb - ua + uva = (1 - uv)(r - a)$$

donc $u(1 - v)(b - a) = (1 - uv)(r - a)$.

> On remarque l'absence subtile d'équivalences.

Il en découle que $\dfrac{r - a}{b - a} = \dfrac{u(1 - v)}{1 - uv}$ dont un argument est $e^{i\alpha}$ d'après la question 1.(d). Or, on rappelle que $r - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ et que $b - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, et qu'en faisant le quotient on soustrait les arguments, donc un argument de $(r - a)/(b - a)$ est la différence de ces deux arguments, donc l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ (en allant du premier au deuxième) donc l'angle orienté recherché, et α est compris entre 0 et 2π donc on ne fait pas plusieurs fois le tour, l'angle mesuré est bien l'argument qu'on a trouvé. En conclusion :

$$\boxed{\text{L'angle recherché a pour mesure } \alpha.}$$

4.(d) Puisque l'angle ci-dessus vaut α, alors c'est le tiers de l'angle du triangle en A donc R est sur la première trisectrice issue de A, et idem, R est sur la première (enfin, quand on part du segment [AB]) issue de B (le signe $-$ vient du fait qu'on va dans le sens indirect) trisectrice issue de B, donc R est leur point d'intersection, ce qui est le cas sur le dessin.

$$\boxed{\text{R est bien placé.}}$$

5.(a) R_c étant la rotation d'angle 2γ de centre c, quand on l'itère trois fois, cela fait la rotation de même centre c mais d'angle 6γ (qui appartient à $]\,0\,;2\pi\,[$) si bien que

$$\mathrm{R}_c{}^3(a) = e^{6i\gamma}(a-c)+c$$

Or, 6γ est deux fois l'angle orienté $(\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}})$ et la distance AC est préservée car on a juste une rotation de centre C donc on a bien le résultat voulu.

$$\boxed{\mathrm{R}_c{}^3(a) \text{ est le symétrique de } a \text{ par rapport à la droite (BC).}}$$

5.(b) De même que ci-dessus, $\mathrm{R}_b{}^3 : z \mapsto e^{6i\beta}(z-b)+b$ et $\mathrm{R}_a{}^3 : z \mapsto e^{6i\alpha}(z-a)+a$. En composant, on trouve donc :

$$\mathrm{R}_a{}^3 \circ \mathrm{R}_b{}^3 \circ \mathrm{R}_c{}^3 : z \mapsto e^{6i\alpha}\left[e^{6i\beta}\left(e^{6i\gamma}(z-c)+c-b\right)+b-a\right]+a$$

En développant (ce qu'on ne fera que dans la question suivante), on trouve bien une fonction du type $z \mapsto \lambda z + \mu$ avec $\lambda = e^{6i(\alpha+\beta+\gamma)}$ et on a déjà vu que $\alpha+\beta+\gamma = \pi/3$ donc $\lambda = e^{2i\pi}$.

$$\boxed{\text{Cette fonction est bien de la forme } z \mapsto \lambda z + \mu \text{ avec } \lambda = 1.}$$

En d'autres termes, c'est une translation. Or, A est envoyé sur A′ (le symétrique par rapport à (BC)) par $\mathrm{R}_c{}^3$ d'après la question précédente, on prouve de même que A′ est envoyé sur A par $\mathrm{R}_b{}^3$ et A est laissé fixe par $\mathrm{R}_a{}^3$ (c'est son centre). On en déduit que A est un point fixe de cette fonction donc que $a = a + \mu$ donc $\mu = 0$: cette fonction est égale à l'identité de $\mathbb{C}$. On peut aussi affirmer directement qu'une translation ayant un point fixe est la translation de vecteur nul donc est l'identité.

$$\boxed{\mathrm{R}_a{}^3 \circ \mathrm{R}_b{}^3 \circ \mathrm{R}_c{}^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}.}$$

5.(c) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après la question précédente, cette expression vaut z, mais, pour la suite de la question, on veut en fait développer l'écriture de la question 5.(c) (en remettant u^3 au lieu de $e^{2i\alpha}$ etc.), ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_a{}^3 \circ \mathrm{R}_b{}^3 \circ \mathrm{R}_c{}^3(z) &= u^3\left[v^3\left(w^3(z-c)+c-b\right)+b-a\right]+a \\
&= u^3\left[v^3\left(w^3 z + c(1-w^3)-b\right)+b-a\right]+a \\
&= u^3\left[v^3w^3z + v^3c(1-w^3)+b(1-v^3)-a\right]+a \\
&= u^3v^3w^3z + u^3v^3c(1-w^3)+u^3b(1-v^3)+a(1-u^3)
\end{aligned}$$

Or, on rappelle que $u^3v^3w^3 = 1$ donc :

$$\boxed{\mathrm{R}_a{}^3 \circ \mathrm{R}_b{}^3 \circ \mathrm{R}_c{}^3(z) = z + u^3v^3c(1-w^3)+u^3b(1-v^3)+a(1-u^3)}$$

Puisque cette expression est égale à z d'après la question précédete, alors :

$$\boxed{u^3v^3c(1-w^3)+u^3b(1-v^3)+a(1-u^3) = 0}$$

5.(d) D'après la question 2.(c) :

$$\mathrm{E} = \frac{w}{u}j^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w}j(w^3-1)c$$

En remplaçant j par uvw et j^2 par $u^2v^2w^2$ il vient :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \frac{w}{u} \times u^2v^2w^2(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + \frac{v}{w} \times uvw(w^3-1)c \\
&= uv^2w^3(u^3-1)a + \frac{u}{v}(v^3-1)b + uv^2(w^3-1)c
\end{aligned}$$

On pense également à utiliser la question précédente : on remarque qu'il ne manque que u^2v pour retrouver l'expression précédente (puisque $u^3v^3w^3 = 1$) donc :

$$u^2v\mathrm{E} = (u^3-1)a + u^3(v^3-1)b + u^3v^3(w^3-1)c$$

ce qui est l'opposé de la question précédente, mais on a tout de même $u^2v\mathrm{E} = 0$ donc $\mathrm{E} = 0$ car u et v sont non nuls (ils sont de module 1).

$$\boxed{\mathrm{E} = 0}$$

5.(d) Rappelons que, par définition :

$$\mathrm{E} = (1-uv)(1-vw)(1-wu)(p+jq+j^2r)$$

Or, uv, vw et wu sont (question 1.(c)) distincts de 1 donc $p+jq+j^2r = 0$ ce qui (question 1.(b)) donne le résultat voulu.

$$\boxed{\text{PQR est équilatéral : le théorème de Morley est démontré.}}$$