Chapitre 21

The Matrix has you...

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque (pas forcément $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, pour une fois...) et $n, p, q, r \dots$ des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Mais, pour mieux visualiser la chose, vous pouvez supposer que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ en première lecture.

I Premières définitions.

Définition. Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$, que l'on représente sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{bmatrix}$$

Si $i \in [\![1 ; n]\!]$, $L_i = \begin{pmatrix} A_{i,1} & A_{i,2} & \dots & A_{i,p} \end{pmatrix}$ est la i-ième ligne de A et, si $j \in [\![1 ; p]\!]$,

$$C_j = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix}$$

est sa j-ième colonne.

Le premier indice est donc l'indice de la ligne et le second celui de la colonne et, pour tous $(i,j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, $A_{i,j}$ est appelé le terme (ou le coefficient) de A d'indice (i,j), qui se trouve donc en i-ième ligne et j-ième colonne. On l'appelle aussi parfois le terme général de la matrice.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée de taille n ou d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (au lieu de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

On dit aussi une matrice de taille $n \times p$. On note aussi également $A = (A_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ ou $A = (A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Quand il n'y a pas de confusion sur la dimension des matrices, on notera simplement $A = (A_{i,j})_{i,j}$ ou, encore plus simplement, $A = (A_{i,j})$. Enfin, on écrit parfois le terme général avec des minuscules, par exemple $A = (a_{i,j})$. Attention à ne pas oublier les parenthèses : écrire $A = A_{i,j}$ est un grave échec de type entre une matrice et un élément de $\mathbb{K}$.

Deux matrices (de même taille) sont égales si et seulement si elles ont les mêmes coefficients/le même terme général. En d'autres termes, si A et B appartiennent à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $A = B$ si et seulement si $A_{i,j} = B_{i,j}$ pour tous $i \in [\![1 ; n]\!]$ et $j \in [\![1 ; p]\!]$.

Exemple : Si on définit $M = (i+j-1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$, alors on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbb{K}).$$

Remarque : Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, les $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux de A.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{A_{1,1}} & A_{1,2} & \dots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & \mathbf{A_{2,2}} & \dots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & \mathbf{A_{n,n}} \end{pmatrix}$$

Définition. Soit A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

- Si $n = 1$, alors on dit que A est une matrice ligne (ou un vecteur ligne). Si $p = 1$, alors on dit que A est une matrice colonne (ou un vecteur colonne).
- On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. Si $n = p$, on la note 0_n.
- Pour tous $(i,j) \in [\![1 ; n]\!] \times [\![1 ; p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1. Cette matrice

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la taille de la matrice, on la note plus simplement 0. Attention, on ne la confondra pas avec le 0 de $\mathbb{K}$.

est appelée matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarques :

- En d'autres termes, $E_{i,j}$ est la matrice suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} & \end{array}$$

- Nous manipulerons ces matrices régulièrement et, plus généralement, nous manipulerons souvent des matrices ayant beaucoup de coefficients égaux. Nous mettrons parfois un coefficient entre parenthèses pour signifier que tous les coefficients non écrits sont égaux à ce coefficient. Enfin, s'il y a ambiguïté (ce qui sera assez rare), on peut parfois indiquer en bas à droite la taille de la matrice. Par exemple :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$$

Remarque : On note souvent

- $A = (A_j)_{1 \leqslant j \leqslant p}$ une matrice ligne à p colonnes au lieu de $(A_{1,j})_{1 \leqslant j \leqslant p}$.
- $A = (A_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une matrice colonne à n lignes au lieu de $(A_{i,1})_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

Nous identifierons parfois les matrices lignes ou colonnes aux éléments de $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathbb{K}^p$ ou ... selon la taille des matrices) ayant les mêmes coordonnées. Par exemple, nous identifierons parfois la matrice ligne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ au triplet $(1,2,3)$. De la même façon, nous identifierons souvent une matrice 1×1 à l'élément de $\mathbb{K}$ qu'elle contient. Nous justifierons ces identifications (intuitives !) au chapitre 30, quand nous parlerons d'espaces vectoriels isomorphes.

Ci-contre, nous avons supposé $p > n$ mais on peut avoir $n = p$ et $n > p$: la notation $E_{i,j}$ est la même, peu importe la taille de la matrice. Ainsi, quand nous parlerons de matrices élémentaires, nous préciserons toujours la taille pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté.

Dans tout le chapitre, nous noterons 0 et 1 (au lieu de $0_{\mathbb{K}}$ et $1_{\mathbb{K}}$) les neutres du corps $\mathbb{K}$: d'une part, c'est ce qu'on fait en général dans un corps quelconque, et d'autre part, $\mathbb{K}$ sera en général $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ donc on peut considérer (en tout cas en première lecture) qu'il s'agit des 0 et 1 réels.

II Somme et multiplication par un scalaire, combinaison linéaire.

Définition. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la somme de A et B, et on note $A+B$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket \times \llbracket 1\,;\,p \rrbracket$ est $A_{i,j} + B_{i,j}$. Autrement dit, $A + B = (A_{i,j} + B_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

Remarque : En d'autres termes, on somme coefficient par coefficient (attention, ce ne sera pas le cas pour le produit, cf. paragraphe suivant).

On ne peut sommer que des matrices de même taille (c'est-à-dire avec le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes). Attention, ce ne sera pas le cas avec le produit (cf. paragraphe III).

Exemple : Dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Définition. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit le produit de A par le scalaire λ, et on note $\lambda \cdot A$ ou plus simplement λA, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket \times \llbracket 1\,;\,p \rrbracket$ est $\lambda A_{i,j}$. Autrement dit, $\lambda A = (\lambda A_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$.

La matrice $(-1) \cdot A$ est notée $-A$.

Remarque : En d'autres termes, on multiplie tous les coefficients par λ. Attention à ne pas confondre le produit par un scalaire avec le produit tout court qui est, lui, le produit de deux matrices, cf. paragraphe III.

Puisque nous avons employé ce terme sans le définir, précisons (nous utiliserons ce terme constamment en algèbre linéaire à partir du chapitre 28) qu'un scalaire est un élément de $\mathbb{K}$.

Exemple : Toujours dans $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 2\pi & 3\pi \\ 4\pi & 5\pi & 6\pi \end{pmatrix}$$

Proposition. Soient A, B et C dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On a :

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$.
4. $A + (-A) = (-A) + A = 0_{n,p}$.
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
6. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.
7. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.
8. $1 \cdot A = A$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Corollaire. $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. L'élément neutre est la matrice nulle $0_{n,p}$ et, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le symétrique de A est $-A$.

Les propriétés reliant les lois $+$ et $.$ ci-dessus nous permettront d'affirmer au chapitre 28 que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente : la somme est une loi interne, commutative, associative, $0_{n,p}$ est bien un élément neutre et, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le symétrique de A est bien $-A$.

Définition. Soit $N \geqslant 1$ et soit $(M_1, \dots, M_N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^N$. On dit qu'une matrice M est combinaison linéaire de $M_1, \dots, M_N$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{K}^N$ tel que $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \lambda_k M_k$.

Avec les mains : combinaison linéaire = multiplier par des constantes et sommer.

Exemple : Si $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, alors A est combinaison linéaire des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant 2, 1 \leqslant j \leqslant 3}$. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned} A &= a.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a.E_{1,1} + b.E_{1,2} + c.E_{1,3} + d.E_{2,1} + e.E_{2,2} + f.E_{2,3} \end{aligned}$$

On peut généraliser ce résultat :

Proposition. Si $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $A = (A_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} E_{i,j}.$$

Remarque : ⚠ Attention, dans l'écriture ci-dessus, les $A_{i,j}$ sont des éléments de $\mathbb{K}$ (ce sont les coefficients de A) et les $E_{i,j}$ sont des matrices (ce ne sont pas les coefficients d'une certaine matrice E). Si on veut éviter toute confusion, on peut écrire $A = (a_{i,j})_{i,j}$

et on a alors $A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}$. Ces deux écritures (qui sont en fait la même) disent la même chose (voir ci-contre) : A est CL de matrices élémentaires, et les coefficients de cette combinaison linéaire sont exactement les coefficients de A.

En d'autres termes, toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices élémentaires (et les coefficients de cette combinaison linéaire sont exactement les coefficients de A), ou encore : les matrices élémentaires engendrent $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (et ce résultat est très important car si un résultat est vrai pour les matrices élémentaires, on peut parfois l'étendre à toutes les matrices). Nous donnerons au chapitre 28 un résultat plus fort : elles forment ce qu'on appelle une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Soit $B = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} A_{i,j} E_{i,j}$. Soient $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et $\ell \in [\![1\,;\, p]\!]$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, p]\!]$, le coefficient d'indice (k,ℓ) de $A_{i,j}E_{i,j}$ est 0 si $(i,j) \neq (k,\ell)$ et $A_{k,\ell}$ si $(i,j) = (k,\ell)$. Par conséquent le coefficient d'indice (k,ℓ) de B est $A_{k,\ell}$. Nous en déduisons que A et B ont les mêmes coefficients, donc sont égales.

III Produit de matrices

III.1 Définition, premiers exemples.

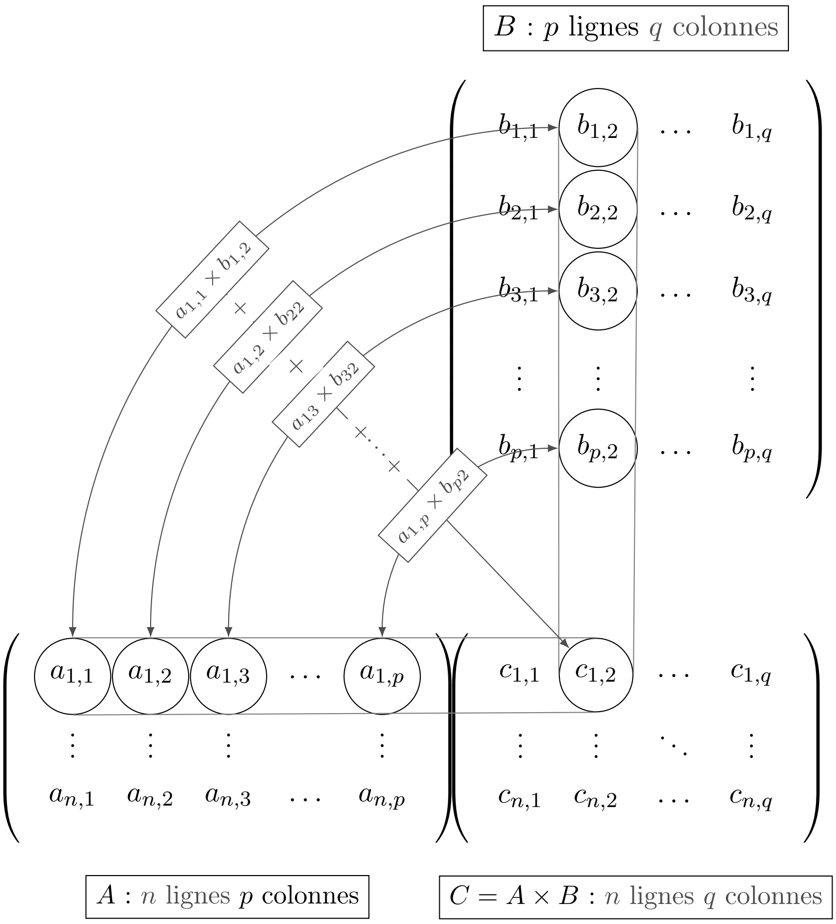
Définition. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. On appelle produit des matrices A et B la matrice notée AB ou $A \times B$ appartenant à $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!] \times [\![1\,;\, q]\!]$ est :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}.$$

Remarque : Le produit de deux matrices n'existe pas forcément ! On peut multiplier une matrice de taille $n \times p$ par une matrice de taille $p \times q$ et on obtient alors une matrice de taille $n \times q$. Le produit AB n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En particulier, AB peut être définie sans que BA le soit.

En particulier, le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini.

On peut en présenter le produit matriciel de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sous la forme ci-dessus (qui prend de la place mais facilite les calculs de chaque coefficient de AB), parfois appelée « produit en papillon ».



Exemple : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a $A \in \mathscr{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ donc AB est bien définie et appartient à $\mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rl} & \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B \\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 20 & \boxed{22} & -5 \\ -6 & 6 & 13 \end{pmatrix} = AB \end{array}$$

Dans la suite, nous n'utiliserons plus cette notation « en papillon » (car elle prend beaucoup de place), nous écrirons le produit AB avec les matrices A et B côte à côte.

III.2 Propriétés du produit.

Proposition. Quand il est défini, le produit de matrices est associatif, distributif par rapport à la somme et compatible avec la multiplication par un scalaire, c'est-à-dire que pour tous $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\widetilde{B} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.
- $(B + \widetilde{B}) \times C = BC + \widetilde{B}C$.
- $A \times (B + \widetilde{B}) = AB + A\widetilde{B}$.
- $A \times (\lambda B) = (\lambda A) \times B = \lambda(AB)$.

On généralise aisément les propriétés ci-contre à un nombre quelconque de matrices (de taille convenable).

Si on combine les propriétés de distributivité par rapport à la somme et de compatibilité avec le produit par un scalaire, cela donne (avec des notations analogues à ci-contre) : $A \times (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) = \lambda_1(AB_1) + \lambda_2(AB_2)$ et de même à gauche (et là aussi on généralise facilement à un plus grand nombre de matrices). Nous dirons plus tard que le produit matriciel est bilinéaire.

Démonstration. Pour l'associativité : les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ appartiennent toutes les deux à $\mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,r]\!]$.

$$\begin{aligned} ((AB)C)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{q} (AB)_{i,k}\, C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\, B_{\ell k} \right) C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\, B_{\ell k}\, C_{k,j} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (A(BC))_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\, (BC)_{\ell j} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell} \left(\sum_{k=1}^{q} B_{\ell k}\, C_{k,j} \right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} A_{i\ell}\, B_{\ell k}\, C_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{q} \sum_{\ell=1}^{p} A_{i\ell}\, B_{\ell k}\, C_{k,j} \end{aligned}$$

Ainsi $(AB)C$ et $A(BC)$ ont les mêmes coefficients donc sont égales. Les trois autres sont laissés en exercice. $\square$

Remarque : Même lorsqu'il est bien défini, le produit de matrices n'est pas commutatif ! Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous verrons au paragraphe V.1 que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau : il est donc non commutatif et non intègre. Ci-contre deux diviseurs de 0.

En particulier, on voit qu'on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$! Il est donc faux de dire : « On a $AB = 0$. Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul donc $A = 0$ ou $B = 0$ ». Si $AB = 0$... on ne peut rien dire !

Enfin presque : au chapitre 31, nous pourrons dire que $\mathrm{Im}(B) \subset \ker(A)$, mais c'est tout !

Définition. On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent si $AB = BA$.

III.3 Quelques produits particuliers.

III.3.a Produit par l'identité, par une matrice scalaire.

Définition.

- On appelle matrice identité d'ordre n la matrice (carrée de taille n) :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

- Les matrices de la forme λI_n, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, sont appelées matrices scalaires ou homothéties.

Remarque : En d'autres termes, les matrices scalaires sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Ce sont les matrices diagonales (cf. paragraphe V.4) dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

Proposition. $\forall (A, \lambda) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}$, $A \times (\lambda I_p) = (\lambda I_n) \times A = \lambda A$. En particulier :

- $I_n \times A = A \times I_p = A$.
- $0_n \times A = A \times 0_p = 0_{n,p}$.

En d'autres termes, quand le produit est bien défini, multiplier par la matrice identité (de taille idoine) ne change pas la matrice. Pour les matrices carrées, cela signifie que l'identité est l'élément neutre pour le produit (cf. paragraphe V.1). Enfin, multiplier par la matrice nulle donne la matrice nulle (quand on manipule des matrices de taille convenable).

Démonstration. Cela se voit bien en faisant le produit avec les mains. Montrons-le rigoureusement. Soit $(i, j) \in [\![1 \,; n]\!] \times [\![1 \,; p]\!]$. Alors :

$$(\lambda I_n \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda I_n)_{i,k} \times A_{k,j}$$

□

Or, $(\lambda I_n)_{i,k} = \lambda$ si $k = i$ et 0 sinon, donc la somme ci-dessus ne contient que le terme d'indice $k = i$. Elle est donc égale à $(\lambda I_n)_{i,i} \times A_{i,j} = \lambda A_{i,j}$, ce qui est le résultat voulu : $(\lambda I_n) \times A = A$ car ces deux matrices ont les mêmes coefficients. De même pour l'autre.

Remarque : En particulier, λI_n commute avec toute matrice carrée de taille n. On montrera dans l'exercice 31 que la réciproque est vraie : si une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors M est une matrice scalaire.

III.3.b Produit de deux matrices élémentaires, symbole de Kronecker.

Définition. Soit $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$. On définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Le symbole de Kronecker est donc un élément de $\mathbb{K}$. La plupart du temps, nous prendrons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc $\delta_{i,j}$ sera égal aux 0 et 1 réels.

Exemple : Nous avons vu au chapitre 10 que :

$$\forall (n,k) \in \mathbb{Z}^2, \qquad \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t}\,\mathrm{d}t = \delta_{n,k} \times 2\pi$$

Le symbole de Kronecker permet de donner des résultats plus synthétiques et de ne pas s'embarrasser avec des études de cas.

Proposition. Plaçons-nous dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;\, n]\!]^4$. Alors :

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Le résultat ci-contre est toujours valable pour des matrices élémentaires rectangulaires (quand le produit est bien défini). Plus précisément : soient $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, $(j,k) \in [\![1\,;\, p]\!]$ et $\ell \in [\![1\,;\, q]\!]$. Notons respectivement :

- $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- $E_{k,\ell}$ la matrice élémentaire d'indice (k,ℓ) de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- $E_{i,\ell}$ la matrice élémentaire d'indice (i,ℓ) de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Alors on a encore : $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,l}$. Il suffit donc de retenir le résultat pour les matrices carrées et de se souvenir qu'il est encore valable pour les matrices rectangulaires, quand tout est bien défini.

DÉMONSTRATION. Cela se voit bien quand on fait le produit avec les mains :

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & j & & \end{matrix} & \end{array} \times \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ k \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & & & \ell \end{matrix} & \end{array}$$

La seule façon d'avoir un coefficient non nul pour le produit est de multiplier les 1 entre eux, et cela n'est possible que lorsque $j = k$, c'est-à-dire « lorsque la distance parcourue par la main gauche vers la droite est égale à la distance parcourue par la main droite vers le bas ». Montrons cela rigoureusement. Notons $A = E_{i,j} \times E_{k,\ell}$. A étant carrée de taille n, donnons-nous $(a,b) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ (les indices i et j sont déjà pris, ainsi que k et ℓ !).

$$A_{a,b} = \sum_{c=1}^{n} (E_{i,j})_{a,c} \times (E_{k,\ell})_{c,b}$$

Si $a \neq i$ alors, pour tout c, $(E_{i,j})_{a,c} = 0$ (rappelons que $(E_{i,j})_{a,c} = 0$ si $(a,c) \neq (i,j)$ et 1 si $(a,c) = (i,j)$), et si $b \neq \ell$, alors, pour tout c, $(E_{k,\ell})_{c,b} = 0$. Dès lors, si $a \neq i$ ou si $b \neq \ell$, $A_{a,b} = 0$ car tous les termes de la somme sont nuls. En d'autres termes, tous les coefficients de $A_{a,b}$ sont nuls sauf **éventuellement** $A_{i,\ell}$. Or,

$$A_{i,\ell} = \sum_{c=1}^{n} (E_{i,j})_{i,c} \times (E_{k,\ell})_{c,\ell}$$

D'après ce qui précède, si $c \neq j$, alors $(E_{i,j})_{i,c} = 0$ et $(E_{i,j})_{i,c} = 1$ si $c = j$ donc :

Il ne reste dans la somme que le terme d'indice $c = j$, tous les autres sont nuls.

$$\begin{aligned} A_{i,\ell} &= (E_{i,j})_{i,j} \times (E_{k,\ell})_{j,\ell} \\ &= (E_{k,\ell})_{j,\ell} \end{aligned}$$

□

Finalement :

- Si $j \neq k$ alors $(E_{k,\ell})_{j,\ell} = 0$ donc $A_{i,\ell} = 0$: tous les coefficients de A sont nuls, c'est-à-dire que A est nulle.
- Si $j = k$ alors $(E_{k,\ell})_{j,\ell} = 1$ donc $A_{i,\ell} = 1$: tous les coefficients de A sont nuls sauf celui en position (i, ℓ) qui vaut 1, c'est-à-dire que $A = E_{i,\ell}$.

III.3.c Produit par une matrice colonne.

Lemme. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1\,;\,p]\!]$. Alors

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \dots & A_{1,p} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \dots & A_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \dots & A_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array} = \begin{pmatrix} A_{1,j} \\ A_{2,j} \\ \vdots \\ A_{n,j} \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire que si on note X_j le vecteur colonne (de taille p) dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne j qui vaut 1, alors $A \times X_j$ est le vecteur colonne (de taille n) égal à la j-ème colonne de A.

Il n'est pas nécessaire de retenir les tailles des vecteurs colonnes : elles découlent immédiatement de la définition d'un produit matriciel. En effet, AX_j n'est défini que lorsque X_j a p lignes, et alors AX_j a n lignes.

DÉMONSTRATION. Cela se voit bien en faisant le produit avec les mains. Montrons-le rigoureusement. Tout d'abord, $AX_j \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$:

$$\begin{aligned} (AX_j)_i &= \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} \times (X_j)_k \\ &= A_{i,j} \end{aligned} \qquad \square$$

car $(X_j)_k = \delta_{j,k}$, ce qui permet de conclure.

Remarque : Ce résultat est très utile. Donnons un exemple d'utilisation.

Exemple : Soient A et B sont deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que, pour tout vecteur colonne X, $AX = BX$, alors $A = B$.

Comme dit dans le paragraphe I, pour un vecteur colonne, on ne met en général que la coordonnée de la ligne.

Pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, en notant X_j le vecteur colonne de taille n dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle en position j qui vaut 1, alors $AX_j = BX_j$, si bien que A et B ont même j-ème colonne. L'indice j étant quelconque, les colonnes de A et B sont les mêmes donc $A = B$.

Attention, X étant un vecteur colonne, X n'est pas une matrice inversible (cf. paragraphe V.6.a). On ne peut donc pas « simplifier » par X : d'où l'importance du résultat précédent !

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors AY est un vecteur colonne (de taille n) combinaison linéaire des colonnes de A. Plus précisément, si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A :

$$AY = \sum_{k=1}^{p} Y_k C_k$$

DÉMONSTRATION. En reprenant les notations $X_1, \dots, X_p$ de la proposition précédente, il vient $Y = Y_1 X_1 + \dots + Y_p X_k$. En utilisant la bilinéarité du produit matriciel :

$$\begin{aligned} AY &= A \times \left(\sum_{k=1}^{p} Y_k X_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} Y_k (AX_k) \end{aligned} \qquad \square$$

ce qui permet de conclure.

IV Transposition

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, et on note $A^\top$, la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1\,;\,p]\!] \times [\![1\,;\,n]\!]$ est $A_{j,i}$. Autrement dit, pour tous (i,j) dans $[\![1\,;\,p]\!] \times [\![1\,;\,n]\!]$, $(A^\top)_{i,j} = A_{j,i}$.

Exemple : Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, alors $A^\top = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

Remarque : En clair, $A^\top$ est obtenue à partir de A à l'aide d'une symétrie par rapport à la diagonale (ou en échangeant les lignes et les colonnes). En voyant la transposition comme une symétrie, le résultat suivant est intuitif :

Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $(A^\top)^\top = A$. En particulier, la transposition est une bijection de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

En particulier, quand on se place sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la transposition est une involution de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (cf. chapitre 4), mais ce n'est pas le cas pour les matrices rectangulaires, même si ça y ressemble : une involution va d'un ensemble dans lui-même !

Démonstration. Tout d'abord, A et $(A^\top)^\top$ sont toutes les deux de taille $n \times p$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,p]\!]$. Alors :

$$\begin{aligned} \left((A^\top)^\top\right)_{i,j} &= (A^\top)_{j,i} \\ &= A_{i,j} \end{aligned}$$

□

Proposition. Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Ainsi, quand on transpose, on inverse l'ordre des matrices. Moyen mnémotechnique : $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc $B^\top = \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, si bien que $B^\top A^\top$ est défini mais pas $A^\top B^\top$.

Démonstration. Les matrices $(AB)^\top$ et $B^\top A^\top$ appartiennent toutes les deux à $\mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,q]\!] \times [\![1\,;\,n]\!]$. On a :

$$\begin{aligned} \left((AB)^\top\right)_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} A_{j,k} B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^{p} B_{k,i} A_{j,k} \qquad \text{(deux éléments de } \mathbb{K} \text{ commutent)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} (B^\top)_{i,k} (A^\top)_{k,j} \\ &= (B^\top A^\top)_{i,j} \end{aligned}$$

□

ce qui permet de conclure.

Proposition (linéarité de la transposition). Soient $(A,B) \in (\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors $(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top$. On dit que la transposition est linéaire.

On généralise aisément par récurrence à une CL d'un nombre quelconque de matrices.

⇝ Exercice.

Remarques :

- Si X est un vecteur ligne, alors $X^\top$ est un vecteur colonne. Par conséquent, on trouve parfois l'écriture $\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$ pour parler du vecteur

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

C'est surtout pour gagner de la place et éviter les interlignes énormes et peu esthétiques... Mais ne soyez pas surpris si vous rencontrez cette écriture.

- Si X est un vecteur colonne, alors $X^\top$ est un vecteur ligne, si bien que $X^\top \times X$ est une matrice 1×1, que l'on identifie parfois à l'élément de $\mathbb{K}$ correspondant. Par exemple, nous dirons parfois :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 14$$

Cela permettra par exemple de définir un produit scalaire et sa norme associée (cf. chapitre 34).

Là aussi, nous justifierons cette identification au chapitre 30.

V Cas particulier des matrices carrées

Rappel : Le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini. Ainsi, on pourra parler du produit de deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sans avoir à justifier son existence.

V.1 L'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition. $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau.

Une matrice étant une famille, on peut définir de la même façon des matrices (de taille quelconque, pas forcément carrées) à coefficients dans un ensemble quelconque. Par exemple, on peut définir des matrices à coefficients dans un anneau A (commutatif), et $\mathscr{M}_n(A)$ est alors aussi muni d'une structure d'anneau. On parlera ainsi parfois d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. C'est moins fréquent, mais il ne faut alors pas être surpris par cette notation.

Démonstration. D'après le paragraphe II, $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. D'après le paragraphe III.2, la loi $\times$ est associative, distributive par rapport à la somme et admet un élément neutre I_n.

Remarques :

- ⚠ Il est non commutatif (cf. paragraphe III.2) et non intègre (bon... sauf si $n=1$: dans ce cas, c'est un anneau intègre, commutatif, et c'est même un corps isomorphe à $\mathbb{R}$, mais ce cas est d'un intérêt limité). En effet, il admet des diviseurs de 0. Par exemple, toute matrice nilpotente non nulle (cf. paragraphe V.7) est un diviseur de 0. Plus simplement,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc les deux matrices ci-dessus sont des diviseurs de 0. On peut aussi donner des exemples en dimension n : par exemple, d'après le paragraphe III.3.b, les matrices élémentaires $E_{i,j}$ sont des diviseurs de 0 car, pour tous i et j, en prenant k et ℓ tels que $k \neq j$, $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = 0_n$. En conclusion, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet (beaucoup...) de diviseurs de 0 donc n'est pas intègre donc n'est pas un corps.

- ⚠ Attention, si $n \neq p$, alors $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est certes un groupe abélien (quand on le munit de l'addition) mais n'est pas un anneau car le produit n'est pas défini sur cet ensemble ! Seuls les ensembles du type $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont des anneaux.

Rappelons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un diviseur de 0 s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$. Nous montrerons au chapitre 31 que les diviseurs de 0 sont exactement les matrices non inversibles (cf. paragraphe V.6).

Remarque : Par conséquent, tous les résultats vus sur les anneaux (et aussi sur les lois internes) au chapitre 18 (puissances d'un élément, binôme de Newton, éléments nilpotents, inverse etc.) sont encore valables. Cependant, puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un anneau qui revient tout de même très souvent (parmi les anneaux qui ne sont pas des corps, c'est l'anneau que nous verrons le plus souvent avec $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$) et puisqu'il a des propriétés supplémentaires bien à lui, nous allons revoir tout cela en détail.

V.2 Puissances d'une matrice carrée.

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $A^p = \underbrace{A \cdots A}_{p \text{ fois}}$.

On utilise sans le dire l'associativité du produit.

Remarques :

- Par convention, on pose $A^0 = I_n$.
- Si A n'est pas carrée, on ne peut pas calculer les puissances successives de A car le produit $A \times A$ n'est pas défini.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $p \in \mathbb{N}, (\lambda I_n)^p = \lambda^p I_n$.

Proposition. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(p_1, p_2) \in \mathbb{N}^2$.

- $A^{p_1} \times A^{p_2} = A^{p_2} \times A^{p_1} = A^{p_1+p_2}$.
- $(A^{p_1})^{p_2} = (A^{p_2})^{p_1} = A^{p_1 \times p_2}$.

Démonstration. Découle de la définition. En particulier, deux puissances d'une même matrice commutent. □

Remarque : Attention, tous les résultats sur les puissances réelles ou complexes ne sont pas valables pour les matrices ! Par exemple, en général, si A et B appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(AB)^2 \neq A^2B^2$! En effet, $(AB)^2 = ABAB$ et $A^2B^2 = AABB$. Or, si A et B ne commutent pas, on n'a pas forcément $ABAB = AABB$! Plus généralement, on n'a pas forcément $(AB)^k = A^kB^k$ lorsque $k \in \mathbb{N}$! En effet :

$$(AB)^k = \underbrace{AB \times AB \times \cdots \times AB}_{k \text{ fois}} \qquad \text{et} \qquad A^kB^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{B \times \cdots \times B}_{k \text{ fois}}$$

et ces deux quantités n'ont aucune raison d'être égales. De la même façon, les identités remarquables ou (ce qui revient au même) la formule du binôme de Newton ou la formule de factorisation de $a^n - b^n$ ne se généralisent pas sans prendre de gants. Sans hypothèse supplémentaire, tout ce qu'on peut affirmer est que

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B) \times (A+B) \\ &= A^2 + AB + BA + B^2 \end{aligned}$$

mais $AB \neq BA$ en général donc on ne peut pas simplifier. De même, sans hypothèse supplémentaire, tout ce qu'on peut affirmer est que

De même, $(A+B)^3 = (A+B)(A+B)(A+B)$ et, par distributivité du produit sur la somme, on obtient (exo) que $(A+B)^3 = A^3 + A^2B + ABA + AB^2 + BA^2 + BAB + B^2A + B^3$ et on ne peut pas faire mieux ! Morale de l'histoire : on peut toujours développer, mais si les matrices ne commutent pas, c'est gore...

$$(A+B) \times (A-B) \quad = \quad A^2 - AB + BA - B^2$$

et on ne peut pas aller plus loin sans hypothèse supplémentaire. En clair : on peut développer $(A+B)^2$ et plus généralement $(A+B)^k$ et $(A-B) \times (A-B)$, mais on ne peut pas regrouper les termes donc les formules bien connues ne sont pas valables sans une hypothèse supplémentaire : le fait que les matrices commutent. Comme sur un anneau quelconque, le fait que les deux éléments commutent est une hypothèse indispensable.

Lemme. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A et B^k commutent.

Démonstration. Par récurrence sur k.

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons H_k : « $AB^k = B^kA$ ».
- $B^0 = I_n$ donc $AB^0 = AI_n = A = I_nA = B^0I_n$: H_0 est vraie.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons H_k vraie et prouvons que H_{k+1} est vraie. On a $AB^{k+1} = AB^kB$. Par hypothèse de récurrence, $AB^{k+1} = B^kAB$ et, puisque A et B commutent, $AB^{k+1} = B^kBA = B^{k+1}A$: H_{k+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_k est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Remarque : Plus généralement, toute puissance de A commute avec toute puissance de B .

Il suffit d'appliquer ce lemme avec $\ell \in \mathbb{N}$, B et A^ℓ (au lieu de k, B et A).

Proposition. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(AB)^k = A^k B^k$.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition (formule du binôme de Newton). Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Comme dit ci-dessus et dans le chapitre 18, l'hypothèse que A et B commutent est indispensable.

Démonstration. Analogue à celle du chapitre 18.

Exemples :

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^p lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On remarque que $A = \mathrm{I}_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les matrices I_3 et N commutent, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^k = 0_3$ dès que $k \geqslant 3$ (N est donc nilpotente, cf. paragraphe V.7). La formule du binôme de Newton entraîne donc que :

Rappelons que I_3 commute avec toute matrice de taille 3.

$$\begin{aligned} A^2 &= (\mathrm{I}_3 + N)^2 \\ &= \mathrm{I}_3 + 2N + N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'identité remarquable $(A+B)^2$ n'est rien d'autre que le binôme de Newton pour $p = 2$: elle aussi nécessite donc la commutativité.

et, pour tout $p \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} A^p &= (\mathrm{I}_3 + N)^p \\ &= \mathrm{I}_n + \binom{p}{1} N + \binom{p}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & p & \dfrac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$. Considérons la matrice $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a $A_n = 2\mathrm{I}_n + J_n$ avec J_n la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1. Les matrices $2\mathrm{I}_n$ et J_n commutent donc la formule du binôme de Newton entraîne que, pour tout $p \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} {A_n}^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} {J_n}^k (2I_n)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} 2^{p-k} {J_n}^k \end{aligned}$$

Méthode classique dans cet exemple : écrire A_n comme somme de deux matrices qui commutent. Puisque les matrices du type λI_n commutent avec toute matrice carrée de taille n, on cherche à écrire A_n sous la forme $\lambda I_n + B_n$ avec B_n une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

(rappelons que pour tous entiers p et k avec $0 \leqslant k \leqslant p$, $(2I_n)^{p-k} = 2^{p-k} I_n$ et donc ${J_n}^k (2I_n)^{p-k} = 2^{p-k} {J_n}^k$). Par conséquent, il nous faut expliciter les puissances de J_n. Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
J_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} n & n & n & \cdots & n \\ n & n & n & \cdots & n \\ n & n & n & & n \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix} \\
&= nJ_n
\end{aligned}$$

De plus, $J_n^3 = J_n^2 \times J_n = nJ_n \times J_n = nJ_n^2 = n \times nJ_n = n^2 J_n$ puis, par une récurrence immédiate, pour tout $k \geqslant 1$, $J_n^k = n^{k-1} J_n$. Finalement, si $p \geqslant 2$,

Attention, cette relation n'est pas valable pour $k = 0$ car ${J_n}^0 = I_n$. Ci-contre, on met donc à part le terme de la somme d'indice $k = 0$.

$$\begin{aligned}
{A_n}^p &= 2^p I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k-1} 2^{p-k} \right) J_n \\
&= 2^p I_n + \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} n^{k} 2^{p-k} \right) J_n \\
&= 2^p I_n + \left(\frac{1}{n} \times ((n+2)^p - 2^p) \right) J_n .
\end{aligned}$$

En conclusion, si on note $u_p = \dfrac{1}{n} \times ((n+2)^p - 2^p)$, on a :

$$ {A_n}^p = \begin{pmatrix} 2^p + u_p & u_p & u_p & \cdots & u_p \\ u_p & 2^p + u_p & u_p & \cdots & u_p \\ u_p & u_p & 2^p + u_p & & u_p \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ u_p & u_p & u_p & \cdots & 2^p + u_p \end{pmatrix} .$$

Théorème. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ qui **commutent**. Alors :

$$A^p - B^p = (A - B) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right)$$

Démonstration. Idem, analogue au chapitre 18.

Corollaire. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$I_n - A^p = (I_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

Nous donnerons une application de ce résultat dans le paragraphe V.7.

Démonstration. Immédiat puisque I_n et A commutent.

V.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est

- symétrique si $A^\top = A$, i.e. si $A_{j,i} = A_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$.
- antisymétrique si $A^\top = -A$, i.e. si $A_{j,i} = -A_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$.

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont symétriques, (respectivement antisymétriques).

Remarques :

- On ne parle de matrices (anti)symétriques que pour des matrices carrées. En effet, si A n'est pas carrée, alors A et $A^\top$ n'ont pas la même taille donc ne peuvent être ni égales ni opposées.
- Si A est symétrique et si $i = j$, il vient $A_{i,i} = A_{i,i}$: en d'autres termes, on n'a aucune condition sur les coefficients diagonaux, ceux-ci sont quelconques. En revanche, si $i \neq j$, la condition $A_{i,j} = A_{j,i}$ signifie que A est symétrique par rapport à la diagonale (d'où le nom de matrice symétrique). Par exemple, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & -4 & \sqrt{2} \\ -2 & 7 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

  est symétrique : les coefficients diagonaux sont absolument quelconques, et ceux au-dessus de la diagonale sont égaux à ceux en dessous.
- Si A est antisymétrique et si $i = j$, il vient $A_{i,i} = -A_{i,i}$ donc $A_{i,i} = 0$: une matrice antisymétrique a des coefficients diagonaux nuls, tandis que si $i \neq j$, $A_{i,j} = -A_{j,i}$ signifie que les coefficients au-dessus de la diagonaux sont opposés à ceux qui sont en dessous. Par exemple, la matrice ci-dessous est antisymétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La réciproque est fausse : une matrice avec une diagonale nulle n'est pas forcément antisymétrique, il ne faut pas oublier l'autre condition, les coefficients au dessus de la diagonale sont opposés à ceux en dessous.

Activité : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ uniques telles que $M = S + A$.

- **Analyse :** Soient A et S qui conviennent. Alors $M = S + A$. Par linéarité de la transposition, $M^\top = S^\top + A^\top = S - A$ car S est symétrique et A antisymétrique. Par somme et par différence, il vient $M + M^\top = 2S$ et $M - M^\top = 2A$, si bien que $S = \dfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right)$ et $S = \dfrac{1}{2}\left(M - M^\top\right)$.
- **Synthèse :** Soient $S = \dfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right)$ et $A = \dfrac{1}{2}\left(M - M^\top\right)$. Ensuite, par linéarité de la transposition,

$$S^\top = \frac{1}{2}\left(M^\top + ({}^\top M^\top)\right) = \frac{1}{2}\left(M^\top + M\right) = S$$

  donc S est symétrique. De même, A est antisymétrique. Enfin il est immédiat que $M = S + A$.

D'où l'existence et l'unicité de A et S.

Ce résultat est analogue à celui démontré au chapitre : toute fonction est somme d'une unique fonction paire et d'une unique fonction impaire.

Proposition. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par somme et par multiplication par un scalaire. En particulier, ce sont des groupes abéliens (munis de la loi $+$).

Ils sont donc également stables par CL. Nous dirons au chapitre 28 que ce sont des espaces vectoriels.

Démonstration. Soient $(S_1, S_2) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de la transposition,

$$\begin{array}{rcl} (S_1 + S_2)^\top & = & {S_1}^\top + {S_2}^\top \\ & = & S_1 + S_2 \end{array}$$

□

puisque S_1 et S_2 sont symétriques. En d'autres termes, $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ qui est donc stable par somme. On montre de même que $\lambda S_1 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ qui est donc stable par multiplication par un scalaire. De même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Montrons que ce sont des sous-groupes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice nulle appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, il est stable par somme et, si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, alors $-S = (-1).S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ d'après ce qui précède. Finalement, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est donc un groupe. De même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : ⚠ Ce ne sont pas des anneaux quand on les munit du produit car le produit n'est pas une loi interne. En d'autres termes : un produit de matrices (anti)symétriques ne l'est pas forcément. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

sont symétriques mais leur produit ne l'est pas.

cf. exercice 5 : un produit de deux matrices symétriques est symétrique si et seulement si ces deux matrices commutent.

Remarque : Si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $M + M^\top$ et $M \times M^\top$ sont symétriques (même si M ne l'est pas !). En effet, par linéarité de la transposition,

$$\begin{array}{rcl} \left(M + M^\top\right)^\top & = & M^\top + \left(M^\top\right)^\top \\ & = & M^\top + M \end{array}$$

donc $M + M^\top$ est symétrique, et puisqu'on change l'ordre en transposant un produit :

$$\begin{array}{rcl} \left(M \times M^\top\right)^\top & = & \left(M^\top\right)^\top \times M^\top \\ & = & M \times M^\top \end{array}$$

donc $M \times M^\top$ est symétrique. Il peut être utile de savoir que ces deux quantités sont symétriques car on les retrouve dans quelques exercices. Cela peut par exemple servir pour prouver directement que l'équation (d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$)

$$M + M^\top = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$$

n'a pas de solution car la matrice de gauche est symétrique mais pas celle de droite (cf. chapitre 36).

V.4 Matrices diagonales

Définition. Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que D est diagonale si tous les coefficients non diagonaux de D sont nuls, c'est-à-dire si $D_{i,j} = 0$ pour tous $i \neq j$. L'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $D_n(\mathbb{K})$.

⚠ Attention, cela ne signifie pas que les coefficients diagonaux de D sont non nuls ! Par exemple, la matrice D ci-contre est diagonale alors qu'elle a un coefficient diagonal nul. Plus fort : la matrice nulle est diagonale ! Si on veut prouver qu'une matrice D est diagonale, on se donne donc $i \neq j$ et on prouve que $D_{i,j} = 0$.

Exemple : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonale.

Proposition. $D_n(\mathbb{K})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire. En particulier, c'est un sous-groupe de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc un groupe abélien (muni de la loi $+$).

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : Il est donc également stable par CL. Nous dirons au chapitre 28 que c'est un espace vectoriel.

Proposition. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ diagonales. Alors AB est diagonale, et les coefficients diagonaux s'obtiennent par multiplication terme à terme.

En particulier, deux matrices diagonales (carrées de même taille) commutent. Il en découle que $D_n(\mathbb{K})$ est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car c'est un groupe abélien (pour la loi $+$), le produit est une loi interne $D_n(\mathbb{K})$, le neutre du produit I_n appartient à $D_n(\mathbb{K})$, donc c'est bien un sous-anneau, et le produit est commutatif sur $D_n(\mathbb{K})$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Soit $(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$. Par définition du produit matriciel,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,j}$$

Or, $A_{i,k} = 0$ si $k \neq i$ car A est diagonale. Par conséquent, tous les termes d'indice $k \neq i$ de la somme sont nuls, si bien que $(AB)_{i,j} = A_{i,i} B_{i,j}$. Deux cas sont alors possibles :

- Si $i \neq j$ alors $B_{i,j} = 0$ car B est diagonale donc $(AB)_{i,j} = 0$: la matrice AB est donc diagonale.
- Si $i = j$ alors $(AB)_{i,i} = A_{i,i} B_{i,i}$, ce qui est le résultat voulu. $\square$

Corollaire. Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$ est diagonale alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$A^p = \begin{pmatrix} A_{1,1}{}^p & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n,n}{}^p \end{pmatrix}$$

Démonstration. Par récurrence sur p : $\rightsquigarrow$ Exercice.

V.5 Matrices triangulaires

Définition. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que T est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si $T_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$ tel que $i > j$ (respectivement $i < j$). On note $T_n{}^+(\mathbb{K})$ (respectivement $T_n{}^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

En d'autres termes, T est triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous (au sens strict) de la diagonale sont nuls. Attention, cela ne signifie pas que les autres sont non nuls !

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.

Proposition. $T_n{}^+(\mathbb{K})$ et $T_n{}^-(\mathbb{K})$ sont stables par somme et par multiplication par un scalaire. En particulier, ce sont des sous-groupes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donc des groupes abéliens (pour la loi $+$).

Il est donc également stable par CL. Nous dirons au chapitre 28 que c'est un espace vectoriel.

Démonstration. Soient T_1 et T_2 dans ${T_n}^+(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Alors :

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)_{i,j} &= (T_1)_{i,j} + (T_2)_{i,j} \\ &= 0+0\end{aligned}$$

□

car T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures. En d'autres termes, $T_1 + T_1 \in {T_n}^+(\mathbb{K})$, qui est donc stable par somme. Le reste de la preuve est laissé en exo.

Proposition. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures (respectivement inférieures). Alors AB est triangulaire supérieure (respectivement inférieure), et les coefficients diagonaux s'obtiennent par multiplication terme à terme.

Le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure n'est pas forcément triangulaire. Par exemple,

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 13\end{pmatrix}.$$

Démonstration. Supposons A et B triangulaires supérieures (raisonnement analogue dans l'autre cas). Soit $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Par définition du produit matriciel :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}$$

□

- Supposons $i > j$. Si $i > k$, alors $A_{i,k} = 0$ car A est triangulaire supérieure. Si $k \geqslant i$, alors $k > j$ car $i > j$ donc $B_{k,j} = 0$ pour la même raison. Ainsi, tous les termes de la somme sont nuls, $(AB)_{i,j} = 0$: AB est triangulaire supérieure.
- Supposons $i = j$. De même, si $i > k$ ou $k > i$, alors $A_{i,k}B_{k,i} = 0$ donc $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$ ce qui est le résultat voulu.

Remarque : Les termes non diagonaux ne s'obtiennent pas par multiplication terme à terme ! Par exemple, dans le produit ci-dessous, on a écrit à droite les coefficients pouvant être obtenus « gratuitement » :

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & \pi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & * & *\\ 0 & 0 & *\\ 0 & 0 & 3\pi\end{pmatrix}.$$

On multiplie en effet deux matrices triangulaires supérieures donc le produit est triangulaire supérieur, d'où les zéros sous la diagonale. De plus, les coefficients diagonaux sont obtenus par multiplication terme à terme. Cependant, les coefficients au-dessus de la diagonale (représentés par des étoiles ci-dessus) ne peuvent pas être obtenus aussi rapidement, il n'y a pas de raccourci, il faut les calculer à la main.

Contrairement aux matrices diagonales, deux matrices triangulaires supérieures ne commutent pas forcément. Par exemple, les deux matrices triangulaires ci-dessus ne commutent pas. Ainsi, ${T_n}^+(\mathbb{K})$ et ${T_n}^-(\mathbb{K})$ sont des sous-anneaux de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non commutatifs.

V.6 Matrices inversibles

V.6.a Définition, premiers exemples.

Définition. Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que B est un

- inverse à gauche de A si $BA = I_n$.
- inverse à droite de A si $AB = I_n$.
- inverse de A si B est un inverse à droite et à gauche de A, c'est-à-dire si $AB = BA = I_n$.

Enfin, on dit que A est inversible si A admet un inverse.

Une matrice inversible est donc carrée par définition. Cela n'a aucun sens de parler d'inversibilité pour une matrice non carrée.

Remarque : En d'autres termes, une matrice inversible est un élément inversible de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour le produit. Cependant, dans l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons le résultat bien pratique suivant (qui semble un peu miraculeux puisque l'anneau n'est pas commutatif).

Théorème (admis provisoirement). Soient $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si B est un inverse à gauche ou à droite de A alors B est un inverse de A.

Ce théorème sera démontré au chapitre 31.

Remarque : En d'autres termes : $AB = I_n \iff BA = I_n$.

Proposition. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet un inverse, celui-ci est unique. On le note A^{-1}.

Démonstration. Supposons A inversible. Soient B et C deux inverses de A. Alors $AB = AC = I_n$. En multipliant par B à gauche, il vient : $BAB = BAC = B$. Or, $BA = I_n$ donc $I_nB = I_nC$ c'est-à-dire que $B = C$.

On utilise sans le dire l'associativité du produit.

Remarque : Ainsi, si on arrive à une égalité du type $A \times B = I_n$ ou $B \times A = I_n$, alors on peut dire directement que A est inversible et que $B = A^{-1}$. Méthode classique !

Définition. L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé groupe linéaire d'ordre n.

C'est bien un groupe car c'est l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire $U(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))$, cf. chapitre 18. Nous redémontrerons que c'est un groupe dans le paragraphe suivant.

Exemples :

- $I_n \times I_n = I_n$ donc I_n est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
- De même, si $\lambda \neq 0$, alors λI_n est inversible, et $(\lambda I_n)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} I_n$.
- La matrice nulle n'est pas inversible. En effet, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $0_n \times M = 0_n$ donc il n'existe aucune matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $0_n \times M = I_n$. Nous avons d'ailleurs vu ce résultat dans le chapitre 18 : dans un anneau, le neutre pour l'addition n'est jamais inversible pour la multiplication.
- Cependant, une matrice peut ne pas être nulle et ne pas être inversible : un diviseur de 0 n'est pas inversible (cf. chapitre 18). En particulier, les matrices (carrées de taille n) élémentaires $E_{i,j}$ ne sont pas inversibles. Nous retrouvons le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un corps (en dehors du fait qu'il n'est pas commutatif) : il existe des éléments non nuls et non inversibles.

V.6.b Premières propriétés

Proposition. Soient A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors

1. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$..
3. $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
4. Si $k \in \mathbb{N}$, alors A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.
5. λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.

En d'autres termes, un produit de matrices inversibles est inversible, mais attention : on change l'ordre quand on inverse un produit !

Démonstration.
1. On a $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ donc A est un inverse à gauche de A^{-1}. Par conséquent, A^{-1} est inversible et A est l'inverse de A^{-1}.
2. On a :
$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ABB^{-1}A^{-1} \\ &= A\mathrm{I}_nA^{-1} \\ &= AA^{-1} \\ &= \mathrm{I}_n\end{aligned}$$
c'est-à-dire que $B^{-1}A^{-1}$ est un inverse à droite de AB : AB est donc inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. On a :
$$\begin{aligned}A^\top (A^{-1})^\top &= (A^{-1}A)^\top \\ &= {I_n}^\top \\ &= I_n\end{aligned}$$
□
si bien que $A^\top$ est inversible d'inverse $(A^{-1})^\top$. En d'autres termes, on peut interchanger inverse et transposée.

On utilise l'associativité du produit sans le dire.

Les résultats 1 et 2, le fait que I_n soit inversible et le fait que le produit soit associatif permettent de retrouver le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe (pour le produit, de neutre I_n). Attention, ce n'est pas un groupe pour la somme ! Le neutre (la matrice nulle) n'est pas inversible, et la somme n'est pas une loi interne (une somme de matrices inversibles ne l'est pas forcément, par exemple $I_n + (-I_n) = 0_n$).

4. Ce dernier point ce montre par récurrence sur k à partir du point précédent.
5. De même que précédemment, il suffit de voir que le produit des deux matrices λA et $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$ est égal à I_n.

Remarque : En gros, comme dans un anneau classique (les résultats 1, 2 et 4 ont d'ailleurs déjà été vus au chapitre 18), les matrices inversibles sont celles par lesquelles on peut « simplifier ». Attention, il faut le faire proprement, c'est-à-dire multiplier par l'inverse à gauche ou à droite le cas échéant, on ne peut pas « barrer sauvagement ». Par exemple, si A est inversible et si on a $AB = AC$ alors, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ donc $B = C$. Plus précisément, on a le résultat suivant (qu'on utilisera dans le paragraphe VI) mais il vaut mieux le redémontrer à chaque fois :

Si on a $AB = CA$ alors on ne peut rien affirmer ! On peut en effet avoir $AB = CA$ avec $B \neq C$, même si A est inversible !

Proposition. Soient $(X,Y) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. Alors :
- $AX = AY \iff X = Y$.
- $XB = YB \iff X = Y$.

Démonstration. Si $AX = AY$ alors, en multipliant par A^{-1} à gauche, il vient $X = Y$. Réciproque immédiate. De même pour B.

V.6.c Utilisation d'un polynôme annulateur

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ avec a_0 non nul. Supposons que $P = a_pX^p + \cdots + a_1X + a_0$ est un polynôme annulateur de A, i.e. :

Vous reverrez la notion de polynôme annulateur en deuxième année.

$$a_pA^p + \cdots + a_1A + a_0I_n = 0.$$

Montrons que A est inversible. On a : $a_nA^n + \cdots + a_1A = -a_0I_n$ donc

$$\frac{-1}{a_0}\left(a_pA^p + \cdots + a_1A\right) = I_n$$

et donc, en factorisant à gauche par A, il vient :

$$A \times \left[\frac{-1}{a_0}\left(a_pA^{p-1} + \cdots + a_1I_n\right)\right] = I_n.$$

Attention, quand on factorise a_1A par A, cela donne $A \times (a_1I_n)$, ne pas écrire par exemple $A^2 + A = A(A+1)$, cela n'a aucun sens de sommer une matrice et un réel !

Finalement, A est inversible et $A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left(a_pA^{p-1} + \cdots + a_1I_n\right)$.

Si $a_0 = 0$, on ne peut rien conclure avec cette méthode.

V.7 Matrices nilpotentes.

Définition. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que N est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. Le plus petit entier p qui vérifie cette condition est appelé l'indice de nilpotence de N.

Ce plus petit entier existe car l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{N} \,|\, N^k = 0_n\}$$

est une partie non vide (car N nilpotente) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.

Proposition. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. Alors : $\forall k \geqslant p, N^k = 0_n$.

Démonstration. Soit $k \geqslant p$. Alors

$$\begin{aligned} N^k &= N^p \times N^{k-p} \\ &= 0_n \times N^{k-p} \\ &= 0_n \end{aligned}$$

□

Proposition. Soient $(N_1, N_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ nilpotentes qui **commutent**. Alors $N_1 \times N_2$ est nilpotente.

Démonstration. Notons p_1 l'indice de nilpotence de N_1 et p_2 celui de N_2. Soit $p = \min(p_1, p_2)$. Puisque N_1 et N_2 commutent, alors : $(N_1 \times N_2)^p = {N_1}^p \times {N_2}^p$. Or, $p = p_1$ ou $p = p_2$ donc ${N_1}^p = 0$ ou ${N_2}^p = 0$ donc $(N_1 \times N_2)^p = 0$.

Remarque : ⚠ C'est faux si les deux matrices ne commutent pas ! Un produit de deux matrices nilpotentes n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes d'indice 2, mais leur produit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas car, par une récurrence immédiate, $P^k = P \neq 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Proposition. Soient $(N_1, N_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ nilpotentes qui **commutent**. Alors $N_1 + N_2$ est nilpotente.

Résultat classique mais HP : à savoir redémontrer !

Démonstration. Notons p_1 l'indice de nilpotence de N_1 et p_2 celui de N_2. Montrons que $(N_1 + N_2)^{p_1+p_2-1} = 0_n$. Les matrice N_1 et N_2 commutent donc, d'après le binôme de Newton :

$$(N_1 + N_2)^{p_1+p_2-k} = \sum_{k=0}^{p_1+p_2-1} \binom{p_1+p_2-1}{k} {N_1}^k \times {N_2}^{p_1+p_2-1-k}$$

□

Soit $k \in [\![0 \,;\, p_1 + p_2 - 1]\!]$.

- Si $k \geqslant p_1$ alors ${N_1}^k = 0$.
- Si $k < p_1$ alors $p_1 + p_2 - 1 - k > p_2 - 1$ donc $p_1 + p_2 - 1 - k \geqslant p_2$. En particulier, ${N_2}^{p_1+p_2-1-k} = 0$.

Finalement, tous les termes de la somme sont nuls : $(N_1 + N_2)^{p_1+p_2-1} = 0_n$, la matrice $N_1 + N_2$ est bien nilpotente.

Remarque : ⚠ C'est faux si les deux matrices ne commutent pas ! Une somme de deux matrices nilpotentes n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sont nilpotentes d'indice 2, mais leur somme

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas. En effet, une récurrence immédiate prouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{2k} = I_2$ et $S^{2k+1} = S$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}, S^p \neq 0$. L'ensemble $\mathscr{N}$ des matrices nilpotentes (de taille n) n'est donc pas un groupe (pour la somme). Cependant, il est stable par multiplication par un scalaire (exo) : on dit par conséquent que c'est un cône et on parle du cône nilpotent.

Proposition. Une matrice nilpotente n'est pas inversible.

DÉMONSTRATION. Si N est inversible alors, pour tout p, N^p est inversible donc $N^p \neq 0$ puisque la matrice nulle n'est pas inversible. Ainsi, N n'est pas nilpotente, d'où le résultat par contraposée.

Remarque : La réciproque est fausse ! Une matrice non inversible n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, la matrice

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible (car c'est un diviseur de 0, cf. paragraphe III.3.b, mais aussi car c'est une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux nuls, cf. paragraphe VI.4) mais n'est pas nilpotente. En effet, elle est diagonale donc, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} {E_{1,1}}^p &= \begin{pmatrix} 1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0^p & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0^p \end{pmatrix} \\ &= E_{1,1} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Le cas $p = 0$ est inutile : pour toute matrice M, $M^0 = I_n$ donc n'est pas nulle !

Cependant, on a tout de même le résultat suivant :

Proposition. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. Alors $I_n - N$ est inversible et :

$$(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$$

Moyen mnémotechnique : cela ressemble à la somme des termes d'une suite géométrique. Attention, ce n'est qu'un moyen mnémotechnique !

DÉMONSTRATION. I_n et N commutent donc (théorème de factorisation de $A^p - B^p$ lorsque A et B commutent) :

$${I_n}^p - N^p = (I_n - N) \times \sum_{k=0}^{p-1} N^k$$

Le résultat en découle puisque ${I_n}^p = I_n$ et $N^p = 0$. □

Exemples : Les matrices

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement nilpotentes d'indices 3 et 4 (exo). Plus généralement, on a le résultat suivant, que nous verrons au chapitre 31 :

Proposition.

- Une matrice triangulaire supérieure stricte (i.e. avec une diagonale nulle) est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.
- Si $k \in [\![2 \,;\, n]\!]$, alors la matrice

C'est intuitif : les rangées de coefficients vont « monter d'un étage » à chaque fois jusqu'à disparaître. Cependant, attention, la réciproque est fausse ! ...

$$\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix} & \begin{matrix}1\\ 2\\ \vdots\\ k-1\\ \\ \\ \\ [n]\end{matrix}\end{array}$$

est nilpotente d'indice k.

- L'indice d'une matrice nilpotente de taille n (pas forcément triangulaire) est inférieur ou égal à n. En d'autres termes, si $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $N^n = 0$.

... Une matrice peut être nilpotente sans être triangulaire ! Par exemple, la matrice

$$N = \begin{pmatrix}1 & j & j^2\\ j & j^2 & 1\\ j^2 & 1 & j\end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2 (j est ici le complexe $e^{2i\pi/3}$).

VI Systèmes linéaires

VI.1 Lien entre matrice et systèmes linéaires

Proposition/Définition. Soit

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1\\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n\end{array}\right.$$

un système linéaire de n équations à p inconnues où $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!] \times [\![1\,;\,p]\!]$. Posons

$$A = \begin{pmatrix}a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p}\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée la matrice associée au système (S). Nous avons alors :

- $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution du système (S) si et seulement si $AX = B$.
- $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ est solution du système homogène (S_0) si et seulement si $AX = 0$ (où 0 désigne ici $0_{n,1}$, la matrice à n lignes et 1 colonne dont tous les coefficients sont nuls).

cf. chapitre 8 pour les définitions, l'algorithme du pivot de Gauß et les opérations élémentaires sur les lignes.

$A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Cependant, comme expliqué en I, nous dirons parfois que $B \in \mathbb{K}^n$ et $X \in \mathbb{K}^p$.

Exemple : Le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & y & - & z & + & t & = & 1\\ 3x & + & 2y & + & z & - & 9t & = & 1\\ x & + & y & & & - & 3t & = & -2\\ x & + & y & - & z & & & = & 2\end{array}\right.$$

se réécrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & -9\\ 1 & 1 & 0 & -3\\ 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -2\\ 2\end{pmatrix}}_{B}.$$

VI.2 Ensemble des solutions.

Proposition. Un système linéaire $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Démonstration. Si le système est compatible et si X est une solution, alors $B = AX$ est CL des colonnes de A d'après le paragraphe III.3.c. La réciproque est évidente en prenant X le vecteur colonne formé des coefficients de la combinaison linéaire.

Proposition. Les solutions d'un système compatible $AX = B$ sont les X_0+Y, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.

On dit que l'ensemble des solutions est un espace affine : cf. chapitre 36.

Remarque : En résumé, comme pour les équa-diffs : « solution générale du système complet = solution particulière + solution générale du système HOMOGÈNE ».
Démonstration. Soit X_0 une solution particulière (qui existe car le système est compatible). Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors :

La preuve est analogue à celle pour les équa-diffs.

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution} \quad &\iff \quad AX = B \\
&\iff \quad AX = AX_0 \\
&\iff \quad A(X - X_0) \\
&\iff \quad X - X_0 \text{ est solution du système homogène associé } (S_0) \\
&\iff \quad X \text{ est la somme de } X_0 \text{ et d'une solution de } (S_0)
\end{aligned}$$

Car X_0 est solution.

□

VI.3 Cas particulier des systèmes de Cramer.

Dans ce paragraphe, on suppose que $n = p$. Tous les vecteurs colonnes considérés (X, B et 0) seront donc des vecteurs colonnes à n coordonnées.

Définition. Un système (S) de n équations à n inconnues est de Cramer si sa matrice associée A est inversible.

On ne parle donc de systèmes de Cramer que lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire quand la matrice associée est carrée.

Proposition. Si $AX = B$ est un système de Cramer, alors il admet une unique solution : $X = A^{-1}B$.

Démonstration. On suppose donc que A est inversible. Soit X un vecteur colonne. Alors : $AX = B \iff X = A^{-1}B$.

Remarque : ⚠ Cas particulier important : si $AX = B$ est un système de Cramer et si $X = 0$ est solution, (c'est-à-dire si $B = 0$ i.e. si le système est homogène), alors c'est la seule.

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si le système $AX = 0$ admet une solution non nulle, alors A n'est pas inversible.

Nous verrons au chapitre 31 que la réciproque est vraie.

Démonstration. Le vecteur colonne nul est solution évidente. S'il y a une solution non nulle, alors il n'y a pas unicité de la solution, donc le système n'est pas de Cramer, donc la matrice n'est pas inversible. □

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. La résolution du système $AX = 0$ prouve que les solutions sont les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} -2x & -x & x \end{pmatrix}^\top$, $x \in \mathbb{K}$. En particulier, ce système admet des solutions non nulles donc A n'est pas inversible.

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, alors A n'est pas inversible.

En particulier, si A a une ligne ou une colonne nulle, alors A n'est pas inversible.

Démonstration. • Supposons qu'il existe $i \neq j$ dans $[\![1\,;n]\!]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $C_j = \lambda C_i$. Alors, si on note X le vecteur colonne dont les coordonnées sont nulles sauf celle en ligne i qui vaut λ et celle en ligne j qui vaut -1, il vient $AX = 0$, ce qui permet de conclure.

• Si A a maintenant deux lignes proportionnelles, alors $A^\top$ a deux colonnes proportionnelles, donc n'est pas inversible, donc A n'est pas inversible. □

⚠ La réciproque est fausse ! Une matrice qui n'a pas deux lignes ou deux colonnes proportionnelles n'est pas forcément inversible. Par exemple, la matrice A de l'exemple précédent n'est pas inversible alors qu'elle n'a pas deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, ce n'est qu'une condition suffisante de non inversibilité. Nous montrerons au chapitre 31 qu'une matrice est non inversible si et seulement si elle admet une ligne ou une colonne qui est CL des autres (mais cela ne se voit pas forcément à l'oeil nu).

cf. fin du chapitre pour un bilan concernant l'inversibilité.

VI.4 Le cas des matrices triangulaires et diagonales

Proposition. Une matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A_{n,n} \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et on a alors :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/A_{n,n} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Si un des coefficients diagonaux de A est nul, alors A a une colonne nulle donc n'est pas inversible. Si aucun des coefficients diagonaux de A n'est nul, posons $B = \begin{pmatrix} 1/A_{1,1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1/A_{n,n} \end{pmatrix}$. Alors $AB = I_n$ (le produit de deux matrices diagonales s'effectue terme à terme) donc A est inversible et $A^{-1} = B$.

Proposition (admise provisoirement). Une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, et alors son inverse est triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Nous démontrerons ce résultat au chapitre 31. Il en découle qu'un système triangulaire dont les coefficients sont non nuls (en particulier s'ils valent 1 : cas où tout se passe bien du chapitre 8) est un système de Cramer donc a une unique solution.

Remarque : ⚠ Attention, même si on peut affirmer que A^{-1} est triangulaire, A^{-1} n'est pas aussi facile à donner que dans le cas d'une matrice diagonale. Tout ce qu'on peut affirmer est que les coefficients diagonaux de A^{-1} sont les inverses des coefficients de A, c'est-à-dire que :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

où les étoiles et les points représentent des coefficients quelconques (nuls ou non, et pas forcément égaux). En effet, si on note A la matrice triangulaire à inverser, on sait que A^{-1} est triangulaire supérieure, donc A^{-1} est de la forme

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & \bullet & \cdots & \bullet \\ 0 & \mu_2 & \cdots & \bullet \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$$

Or, les coefficients diagonaux d'un produit de matrices triangulaires supérieures s'obtiennent par multiplication terme à terme, si bien que :

$$A \times A^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \times \mu_1 & \heartsuit & \cdots & \heartsuit \\ 0 & \lambda_2 \times \mu_2 & \cdots & \heartsuit \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \times \mu_n \end{pmatrix}$$

Finalement, $A \times A^{-1} = I_n$ si bien que les termes diagonaux valent 1 (et les coeurs sont nuls), ce qui permet de conclure.

Application : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrons que M est somme de deux matrices inversibles. Notons $M = (m_{i,j})$. On définit les deux matrices triangulaires T_1 et T_2 par : $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$,

$$(T_1)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ m_{i,j} & \text{si } i < j \\ m_{i,i}/2 & \text{si } i = j \text{ et } m_{i,i} \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = j \text{ et } m_{i,i} = 0 \end{cases}, \quad (T_2)_{i,j} = \begin{cases} m_{i,j} & \text{si } i > j \\ 0 & \text{si } i < j \\ m_{i,i}/2 & \text{si } i = j \text{ et } m_{i,i} \neq 0 \\ -1 & \text{si } i = j \text{ et } m_{i,i} = 0 \end{cases}$$

Alors T_1 et T_2 sont respectivement triangulaire supérieure et triangulaire inférieure avec des coefficients diagonaux tous non nuls, donc sont inversibles, et on a $M = T_1 + T_2$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & \pi & 2 \\ 1 & \pi & 3 \\ 1 & \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \pi & 2 \\ 0 & \pi/2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & \pi/2 & 0 \\ 1 & \pi & -1 \end{pmatrix}$.

VI.5 Opérations élémentaires et traduction matricielle.

Dans ce paragraphe, on revient au cas général, c'est-à-dire qu'on ne suppose plus $n = p$.

Définition. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, L_2, \ldots, L_n$ les n lignes de M. On appelle opération élémentaire sur les lignes de M l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange des lignes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- La multiplication de la ligne $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- L'ajout à la ligne $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ de la ligne $j \in [\![1\,;\,n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Ce sont évidemment les mêmes que pour les systèmes.

On peut évidemment définir de la même façon les opérations élémentaires sur les colonnes.

Définition. Soit $M \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, C_2, \ldots, C_p$ les p colonnes de M. On appelle opération élémentaire sur les colonnes de M l'une des trois opérations suivantes :

- L'échange des colonnes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $C_i \leftrightarrow C_j$.
- La multiplication de la colonne $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
- L'ajout à la colonne $i \in [\![1\,;\,n]\!]$ de la colonne $j \in [\![1\,;\,n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.

Définition. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On dit que
$$I_n + \lambda E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & j & & \end{array} & \end{array}$$
est une matrice de transvection.
- On dit que
$$I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & & & \end{array} & \end{array}$$
est une matrice de dilatation.
- On dit que
$$I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$$
est une matrice de permutation.

Dans cette définition, on se place sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, mais on peut bien sûr définir des matrices de transvection, dilatation, permutation de taille quelconque (mais carrées), voir ci-dessous.

Nous généraliserons la notion de matrice de permutation dans l'exercice 35.

Proposition. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (respectivement les colonnes) se traduit matriciellement par une multiplication à gauche (respectivement à droite) par une matrice inversible. Plus précisément, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

- multiplier A à gauche (respectivement à droite) par la matrice de transvection ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (respectivement $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$).
- multiplier A à gauche (respectivement à droite) par la matrice de dilatation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (respectivement $C_i \leftarrow \lambda C_i$).

Attention, selon si on travaille sur les lignes et les colonnes, quand on multiplie par une matrice de transvection, on agit sur L_i ou C_j ! Toujours vérifier, au moins avec les mains, afin de ne pas se tromper !

- multiplier A à gauche (respectivement à droite) par la matrice de permutation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (respectivement $C_i \leftrightarrow C_j$).

Ce résultat est toujours valable pour une matrice rectangulaire en adaptant les tailles des matrices, les définitions étant analogues. Par exemple, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors on doit multiplier à gauche par une matrice de taille n et à droite par une matrice de taille p.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : Moyen mnemotechnique : L pour lignes/left/links.

Exemple : Un calcul immédiat (?) donne :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 11 & 15 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 1 & 5 & 9 & 13 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & 13 \\ 10 & 6 & 2 & 14 \\ 11 & 7 & 3 & 15 \\ 12 & 8 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

Corollaire. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes (respectivement les colonnes) de A se traduit matriciellement par une multiplication à gauche (respectivement à droite) par une matrice inversible.

Démonstration. Il suffit de vérifier que les matrices de transvection, dilatation, permutation sont inversibles, puis d'appliquer la proposition précédente. Une matrice de transvection ou de dilatation est inversible car triangulaire avec des termes diagonaux tous non nuls. Pour une matrice de permutation, il suffit de vérifier qu'elle est sa propre inverse, c'est-à-dire que le produit d'une matrice de permutation par elle-même est égal à I_n : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Démontrons le résultat admis au chapitre 8 :

Théorème. Si on passe d'un système à un autre par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, alors ces deux systèmes sont équivalents, c'est-à-dire qu'ils ont les mêmes solutions.

Démonstration. Soient $(S_1) : A_1X = B_1$ et $(S_2) : A_2X = B_2$ deux systèmes, et on suppose qu'on passe de l'un à l'autre par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. Dès lors, il existe une famille de matrices inversibles $M_1, \dots, M_N$ telles que $A_2 = (M_N \times \cdots \times M_1) \times A_1$ et $B_2 = (M_N \times \cdots \times M_1) \times B_1$ (chaque matrice M_k étant la matrice représentant l'opération élémentaire sur la ligne effectuée en k-ième position). Finalement :

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } (S_1) &\iff A_1X = B_1 \\ &\iff (M_N \times \cdots \times M_1) \times A_1X = (M_N \times \cdots \times M_1) \times B_1 \\ &\iff A_2X = B_2 \\ &\iff X \text{ est solution de } (S_2) \end{aligned}$$

□

Car $M_1, \dots, M_N$ sont inversibles donc leur produit l'est aussi.

VI.6 Calcul de l'inverse d'une matrice

VI.6.a Par une résolution de système.

On se donne $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et on cherche à donner A^{-1}. On sait que la seule solution du système $AX = B$ est $X = A^{-1}B$. Ainsi, « si on connaît X, on connaît A^{-1} ». On va donc utiliser le pivot de Gauß pour résoudre le système, et on trouvera A^{-1} à la fin.

Comme dit en I, nous identifions sans scrupule un élément de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$ et un élément de $\mathbb{K}^3$.

Exemple : Donnons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Donnons nous $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3$ et $B = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{K}^3$ et résolvons le système $(S) : AX = B$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 & & & & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & & & b_2 & & \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & & & & & b_3 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 & & & & \\ & - & x_2 & + & 2x_3 & = & -b_1 & + & b_2 & & \\ & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & -2b_1 & & & + & b_3 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2 \leftarrow -L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & b_1 & & & & \\ & & x_2 & - & 2x_3 & = & b_1 & - & b_2 & & \\ & - & 5x_2 & + & 5x_3 & = & -2b_1 & & & + & b_3 \end{array}\right.$$

On trouve après calculs :

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} x_1 & = & \dfrac{4}{5} \times b_1 & - & b_2 & + & \dfrac{3}{5} \times b_3 \\[2ex] x_2 & = & -\dfrac{1}{5} \times b_1 & + & b_2 & - & \dfrac{2}{5} \times b_3 \\[2ex] x_3 & = & -\dfrac{3}{5} \times b_1 & + & b_2 & - & \dfrac{1}{5} \times b_3 \end{array}\right.$$

c'est-à-dire :

$$X = \begin{pmatrix} 4/5 & -1 & 3/5 \\ -1/5 & 1 & -2/5 \\ -3/5 & 1 & -1/5 \end{pmatrix} \times B$$

Or, on sait que l'unique solution est $A^{-1} \times B$ donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1 & 3/5 \\ -1/5 & 1 & -2/5 \\ -3/5 & 1 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Attention, on ne simplifie pas par B ! B est une matrice colonne donc n'est pas inversible ! Cependant, le résultat ci-dessus étant vrai pour toute matrice colonne B, on peut affirmer que les deux matrices sont égales, cf. paragraphe III.3.c

VI.6.b Matriciellement.

Il suffit de faire la même chose, mais en travaillant sur les matrices au lieu de travailler sur les systèmes. Cette méthode nous permettra même d'affirmer que la matrice est ou n'est pas inversible et, si elle l'est, de calculer son inverse avec une rédaction moins lourde que ci-dessus.

On se donne donc une matrice carrée A et on se demande si elle est inversible.

- Lorsqu'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A, cela revient à multiplier A (à gauche) par des matrices inversibles, disons, dans l'ordre, $M_1, \dots, M_N$. Si on tombe en cours de route sur une matrice B non inversible (par exemple si B a une ligne nulle), alors on peut affirmer que la matrice originelle A n'est pas inversible : en effet, si A est inversible alors, par produit de matrices inversibles, $B = M_N \times \cdots \times M_1 \times A$ est inversible, d'où le résultat par contraposée.

- De même, si on tombe en cours de route sur une matrice B dont on sait qu'elle est inversible (typiquement une matrice triangulaire dont les coefficients triangulaires sont tous non nuls), alors on peut affirmer que la matrice originelle A est inversible. Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a alors $A = {M_1}^{-1} \times \cdots \times {M_N}^{-1} \times B$, qui est inversible car produit de matrices inversibles.
- On peut montrer (voir ci-dessous pour une démonstration heuristique mais tout de même assez rigoureuse et convaincante) que si A est inversible, alors l'algorithme du pivot de Gauß termine, c'est-à-dire qu'on peut passer de A à I_n par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. Matriciellement, cela se traduit par une égalité du type $M_N \times \cdots \times M_1 \times A = I_n$ où les M_k sont les matrices (inversibles) associées aux opérations successives effectuées sur les lignes de A. A est donc inversible, et $A^{-1} = M_N \times \cdots \times M_1$ (rappelons que si on a une égalité du type $A \times M = I_n$ alors A est inversible et $M = A^{-1}$) c'est-à-dire que $A^{-1} = M_N \times \cdots \times M_1 \times I_n$. En conclusion :

On change l'ordre quand on inverse un produit ! On peut aussi dire qu'on multiplie successivement à gauche par ${M_N}^{-1}, \dots, {M_1}^{-1}$.

Théorème. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors on peut « transformer » A en I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, et on obtient A^{-1} en effectuant sur I_n les mêmes opérations élémentaires que sur A.

Remarque : Et si on travaille avec les colonnes ? On a à la fin une égalité du type $A \times P_1 \times \cdots \times P_q = I_n$ où les P_k sont les matrices inversibles correspondant aux opérations élémentaires sur les colonnes effectuées sur A et, de même, il vient $A^{-1} = I_n \times P_1 \times \cdots \times P_q$: ça marche aussi ! Cependant, si on mélange les deux, on arrive à une égalité du type

$$M_1 \times \cdots \times M_N \times A \times P_1 \times \cdots \times P_q = I_n$$

Notons $B = M_1 \times \cdots \times M_N$ et $C = P_1 \times \cdots \times P_q$. Alors B et C sont inversibles car produits de matrices inversibles. Si on multiplie à gauche par B^{-1} et à droite par C^{-1}, il vient $A = B^{-1}C^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} A^{-1} &= CB \\ &= P_1 \times \cdots \times P_q \times M_1 \times \cdots \times M_N \end{aligned}$$

Les opérations sur les colonnes sont à gauche et celles sur les lignes sont à droite : on n'obtient pas A^{-1} en effectuant sur I_n les mêmes opérations que sur A !

Si la matrice est inversible, alors, en appliquant le pivot de Gauß au système linéaire associé, on arrive à un système triangulaire avec des coefficients tous égaux à 1 (c'est-à-dire au cas où tout se passe bien, cf. chapitre 8). En effet, on arrive sinon à un système avec une ligne nulle (voir le cas général dans le chapitre 8), donc à une matrice non inversible, ce qui est absurde. Ensuite, des opérations élémentaires sur les lignes permettent de « nettoyer » les lignes supérieures et on aboutit finalement à l'identité.

Conclusion : Pour calculer A^{-1}, on ne peut pas mélanger les opérations sur les lignes avec celles sur les colonnes, on choisit dès le début (en général les lignes) et on s'y tient. Par contre, on pourra les mélanger pour le calcul du rang (cf. chapitre 31).

En pratique, on écrit A et I_n côte à côte (séparées par une barre verticale, mais ce n'est pas obligatoire, chacun a sa rédaction propre), on transforme A en I_n à l'aide d'opérations sur les lignes, on fait les mêmes opérations sur I_n. Quand on aura transformé A en I_n, la matrice à laquelle on sera arrivé en partant de I_n sera A^{-1} (si A est inversible).

Exemple : Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. M est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

On arrive à une matrice non inversible donc A n'est pas inversible.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Cette méthode est en fait la même que celle vue dans le paragraphe précédent : on écrit simplement les systèmes sous forme matricielle, en omettant les x_i et les b_i.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 10 & 4 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2$$

À cette étape, on sait que la matrice A est inversible et on peut continuer la procédure :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10/9 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3/9$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 10/9 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/9 & -2/9 & 4/9 \\ 0 & 1 & 0 & 7/9 & 1/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & 1 & 10/9 & 4/9 & 1/9 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

Nous obtenons donc que A est inversible avec $A^{-1} = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 7 & 1 & -2 \\ 10 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

VI.7 Bilan sur l'inversibilité.

Comment prouver qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est ou n'est pas inversible ?

Nous verrons d'autres méthodes au fil de l'année. Il y a de plus, selon les exercices (cf. TD), d'autres méthodes, propres à chaque situation.

- Si A est diagonale ou triangulaire, alors A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On a donc une CNS d'inversibilité ici.
- Si A a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, alors elle n'est pas inversible. En particulier, si A a une ligne ou une colonne nulle, alors A n'est pas inversible. Cependant, la réciproque est fausse : on a une condition suffisante de non inversibilité.
- Si le système $AX = 0$ admet une solution non nulle, alors A n'est pas inversible. Seulement, nous verrons au chapitre 31 que la réciproque est vraie, donc nous n'utiliserons pas ce critère pour l'instant, puisqu'il a vocation à être remplacé par un plus performant (le critère du noyau, qui est une CNS).
- Si A admet un inverse à gauche ou à droite (i.e. s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$), alors on peut affirmer directement que A est inversible et $B = A^{-1}$.
- Sinon (quand on a des matrices de petite dimension, sinon ce n'est pas faisable en pratique), on applique l'algorithme du pivot de Gauß. Si on arrive à une matrice non inversible, alors A n'est pas inversible, et si on arrive à une matrice inversible, alors A est inversible (on a donc une CNS d'inversibilité), et en poursuivant jusqu'à faire apparaître I_n, on obtient A^{-1}.