# Programme de colle - Semaine n°22

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

## Chapitre 23 - Formules de Taylor

- cf. semaine 20.

## Chapitre 24 - Analyse asymptotique et Développements Limités

- cf. semaines 20 et 21.

## Chapitre 25 - Séries numériques

- cf. semaine 21.
- Séries de référence : séries de Riemann (paramètre réel), séries géométriques et exponentielles (paramètre complexe). Exemple : la série $\sum \dfrac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$ converge et sa somme vaut $180e^7$.
- Applications : règle de d'Alembert (au programme de deuxième année), la fonction $\zeta$ est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$, est équivalente à $1/(x-1)$ en 1 et à 1 en $+\infty$ (HP).
- Nature des séries de Bertrand (HP).

## Chapitre 26 - Probabilités sur un univers fini

- Vocabulaire probabiliste : expérience aléatoire, univers, éventualités, événements, événement élémentaire, événement impossible, événement certain, espace probabilisable fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$, événement contraire ou complémentaire, union, intersection, inclusion. Dictionnaire langage ordinaire/langage ensembliste. Système complet d'événements.
- Définition d'une probabilité. Exemple de la probabilité de Dirac. Propriétés d'une probabilité. Si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'événements, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(A_k) = 1$ (réciproque fausse). Formule du crible pour trois événements (HP). Activité : inégalité de Bonferroni. Événements presque impossibles, presque certains ou presque sûrs.
- Distribution de probabilités. Une distribution de probabilités définit une unique probabilité.
- Équiprobabilité. Problème des anniversaires. L'équiprobabilité n'est pas toujours le choix le plus naturel.
- Probabilités conditionnelles. Exemples. L'application $P_A$ est une probabilité.
- Formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.

## Chapitres au programme

Chapitres 23 et 24 (exercices uniquement), chapitre 25 (cours et exercices), chapitre 26 (cours uniquement).

# Questions de cours

### Groupes A - B - C :

1. Les 11 DL de base.
2. Condition nécessaire de convergence d'une série (démonstration). Contre-exemple pour la réciproque. Définition de la divergence grossière.
3. Série télescopique associée à une suite. CNS de convergence (sans démonstration).
4. Critère des séries alternées (sans démonstration).
5. Nature de la série $\sum \frac{n+1}{n^2}$ et de la série $\sum e^{-n^2}$ (démonstration).
6. Formule de Stirling (sans démonstration).
7. Définition d'un système complet d'événements.
8. Définition d'une probabilité sur un univers fini. Définition d'une probabilité conditionnelle.
9. Nature des séries de Bertrand lorsque $\alpha \neq 1$ (démonstration).
10. Paradoxe des anniversaires pour $n$ élèves (démonstration).
11. Formule des probabilités composées (sans démonstration).
12. Formule des probabilités totales (les deux versions, sans démonstration).

### Groupes B - C :

1. Convergence, signe et majoration de la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$.
2. Nature de la série $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
3. Convergence et somme de la série de terme général $u_n = \frac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$.
4. Règle de d'Alembert (démonstration).

### Groupe C :

1. Si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, nature de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ (démonstration : on pourra utiliser la valeur de $T_n$ sans démonstration, mais l'examinateur pourra demander de la redémontrer s'il le souhaite).
2. Il existe $K>0$ tel que $n! \sim Kn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$ (démonstration).
3. Valeur de $K$ (démonstration, en admettant la question précédente). L'examinateur rappellera la relation de récurrence des intégrales de Wallis, ainsi que la valeur des intégrales de Wallis de rang pair.
4. Encadrement de la fonction $\zeta$ et équivalent en $1^+$ et en $+\infty$.

# Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des probabilités.
- Début des variables aléatoires.

# Exercices à préparer

Exercices 32, 36, 37, 38, 39, 43, 44 du chapitre 25 et exercices 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 17, 20, 21, 35 du chapitre 26.

# Cahier de calcul

Chapitre 29.