Corrigé du DM n°22

Exercice 1

1 Montrons que f_1 et f_2 sont linéaires mais que f_3 ne l'est pas.

- Soient $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$ et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= f_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \\ &= (3\lambda_1 z_1 + 3\lambda_2 z_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 - 2\lambda_1 y_1 - 2\lambda_2 y_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\ &= \lambda_1(3z_1, x_1 - 2y_1, x_1) + \lambda_2(3z_2, x_2 - 2y_2, x_2) \\ f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) &= \lambda_1 f(u_1) + \lambda_2 f(u_2) \end{aligned}$$

- Il suffit de dire que f_2 est linéaire par linéarité de la dérivation, mais si on veut le redémontrer : soient φ_1 et φ_2 dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned} f_2(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) &= e^4 \times (\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2)^{(3)}(2) \\ &= e^4 \times \lambda_1 \varphi_1^{(3)} + e^4 \times \lambda_2 \varphi_2^{(3)}(2) \\ &= \lambda_1 \left(e^4 \times \varphi_1^{(3)}(2)\right) + \lambda_2 \left(e^4 \times \varphi_2^{(3)}(2)\right) \\ f_2(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) &= \lambda_1 f_2(\varphi_1) + \lambda_2 f_2(\varphi_2) \end{aligned}$$

- Enfin, $f_3(1,1,1) = (1,0,0)$ et $f_3(2,2,2) = (4,0,0) \neq 2f_3(1,1,1)$.

En conclusion $\boxed{f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires mais } f_3 \text{ ne l'est pas.}}$

De plus, toutes les fonctions affines (au moins) appartiennent au noyau de f_2 donc $\text{Ker}\,(f_2) \neq \{0\}$. En d'autres termes,

$$\boxed{f_2 \text{ n'est pas injective.}}$$

> Le noyau de f_2 est même de dimension infinie. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il contient la famille (libre car échelonnée en degré) à n éléments $\left((\mathrm{X}-2)^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant n, k \neq 3}$ (ainsi, bien sûr, que beaucoup d'autres fonctions non polynomiales).

2 Soit $x \in \mathrm{E}$. Montrons par analyse-synthèse que x peut s'écrire d'une façon unique comme somme d'un éléments $x_1 \in \text{Ker } u$ et d'un élément $x_2 \in \text{Im } u^2$.

- Analyse : Si x_1 et x_2 conviennent. Composons par u. Par linéarité de u et puisque $x_1 \in \text{Ker } u$,

$$u(x) = u(x_1) + u(x_2) = u(x_2)$$

Or, $x_2 \in \text{Im } u^2$ donc il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $x_2 = u^2(y)$. En d'autres termes, $u(x) = u\left(u^2(y)\right) = u^3(y) = u(y)$ par hypothèse sur u, d'où $u^2(x) = u^2(y) = x_2$ et donc $x_1 = x - x_2 = x - u^2(x)$.

- Synthèse : Soient $x_2 = u^2(x)$ et $x_1 = x - u^2(x)$. On a bien $x \in \text{Im } u^2, x_1 \in \text{Ker } u$ puisque $u(x_1) = u(x) - u^3(x) = 0$ par linéarité de u et hypothèse sur u, et enfin on a évidemment $x = x_1 + x_2$.

Puisqu'il y a existence et unicité de l'écriture,

$$\boxed{\mathrm{E} = \text{Ker } u \bigoplus \text{Im } u^2}$$

Exercice 2 :

1 Soit $n \geqslant 1$, soit $x \in \text{Ker } u^n$. Alors $u^n(x) = 0$. Comme u est linéaire

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x) &= u\left(u^n(x)\right) \\ &= u(0) \\ u^{n+1}(x) &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $u^{n+1}(x) = 0$: $x \in \text{Ker } u^{n+1}$, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \text{Ker } u^n \subset \text{Ker } u^{n+1}}$$

> L'inclusion réciproque est fausse en général. Un contre-exemple peut être donné par la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par
> $$f(x, y) = (0, x)$$
> Son noyau est Vect $(0, 1) = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ tandis que le noyau de f^2 est $\mathbb{R}^2$ tout entier (on dit que f est une application linéaire nilpotente, cf TD). Il y a bien sûr d'autres contre-exemples, par exemple si u est la dérivation sur $\text{E} = \mathbb{R}[\text{X}]$: Ker $u^n = \mathbb{R}_{n-1}[\text{X}]$ et Ker $u^{n+1} = \mathbb{R}_n[\text{X}]$.

2 Montrons que pour tout $n \geqslant 1, \text{Im } u^{n+1} \subset \text{Im } u^n$. Soit $n \geqslant 1$ et soit $y \in \text{Im } u^{n+1}$. Par définition, il existe $x \in \text{E}$ tel que

$$y = u^{n+1}(x) = u^n\left(u(x)\right)$$

Si on pose $z = u(x), z \in \text{E}$ et $y = u^n(z)$. En d'autres termes, $y \in \text{Im } u^n$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \text{Im } u^{n+1} \subset \text{Im } u^n}$$

> Là aussi l'inclusion réciproque est fausse en général. En prenant le premier exemple donné pour les noyaux, son image est Vect $(0, 1) = \{(0, x), x \in \mathbb{R}\}$ tandis que l'image de f^2 est tout simplement $\{0\}$.

3 Montrons le résultat par double inclusion.

- L'inclusion Ker $u^{n_0+1} \subset$ Ker u^{n_0+2} a été démontrée à la question 1.
- Soit $x \in \text{Ker } u^{n_0+2}$. Par définition

  $$u^{n_0+2}(x) = 0 = u^{n_0+1+1}(x) = u^{n_0+1}\left(u(x)\right)$$

  On en déduit que $u(x) \in \text{Ker } u^{n_0+1} = \text{Ker } u^{n_0}$, c'est-à-dire que

  $$u^{n_0}\left(u(x)\right) = u^{n_0+1}(x) = 0$$

  et pour finir $x \in \text{Ker } u^{n_0+1}$: Ker $u^{n_0+2} \subset$ Ker u^{n_0+1}.

$$\boxed{\text{Ker } u^{n_0+1} = \text{Ker } u^{n_0+2}}$$

Démontrons le résultat par récurrence. C'est exactement la même chose que ce qu'on vient de faire, en remplaçant n_0 par p dans l'hérédité (personnellement j'ai fait un copier-coller).

- Si $p \geqslant n_0$, soit l'hypothèse de récurrence

  $$\text{H}_p : \text{« Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1} \text{ »}$$

- H_{n_0} est vraie par hypothèse, et on vient de montrer que H_{n_0+1} est vraie.
- Soit $p \geqslant n_0$ quelconque tel que H_p soit vraie et montrons que H_{p+1} est vraie. L'inclusion Ker $u^{p+1} \subset$ Ker u^{p+2} a été démontrée à la question 1. Montrons à présent l'inclusion réciproque. Soit $x \in \text{Ker } u^{p+2}$. Par définition

  $$u^{p+2}(x) = 0 = u^{p+1+1}(x) = u^{p+1}\left(u(x)\right)$$

  On en déduit que $u(x) \in \text{Ker } u^{p+1} = \text{Ker } u^p$ par hypothèse de récurrence, c'est-à-dire que

  $$u^p\left(u(x)\right) = u^{p+1}(x) = 0$$

  et pour finir $x \in \text{Ker } u^{p+1}$: Ker $u^{p+2} \subset$ Ker u^{p+1}, l'inclusion réciproque est vérifiée et H_{p+1} est vraie.
- D'après le principe de principe de récurrence, H_p est vraie pour tout $p \geqslant n_0$:

$$\boxed{\forall p \geqslant n_0 \qquad \text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}}$$

4 Montrons directement le résultat analogue par récurrence, sans passer par le cas $n_1 + 1$ et $n_1 + 2$.

- Si $p \geqslant n_1$, soit l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{H}_p : \text{« Im } u^p = \text{Im } u^{p+1} \text{ »}$$

- H_{n_1} est vraie par hypothèse.
- Soit $p \geqslant n_1$ quelconque tel que H_p soit vraie et montrons que H_{p+1} est vraie. L'inclusion $\mathrm{Im}\ u^{p+2} \subset \mathrm{Im}\ u^{p+1}$ a été démontrée à la question 2. Montrons à présent l'inclusion réciproque. Soit $y \in \mathrm{Im}\ u^{p+1}$. Par définition, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que

$$y = u^{p+1}(x) = u\left(u^p(x)\right)$$

Posons $z = u^p(x)$: $z \in \mathrm{Im}\ u^p = \mathrm{Im}\ u^{p+1}$ par hypothèse de récurrence, donc il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $z = u^{p+1}(t)$ c'est-à-dire tel que

$$y = u(z) = u\left(u^{p+1}(t)\right) = u^{p+2}(t)$$

et pour finir $y \in \mathrm{Im}\ u^{p+2}$: $\mathrm{Im}\ u^{p+1} \subset \mathrm{Im}\ u^{p+2}$, l'inclusion réciproque est vérifiée et H_{p+1} est vraie.
- D'après le principe de principe de récurrence, H_p est vraie pour tout $p \geqslant n_0$:

$$\boxed{\forall p \geqslant n_1 \qquad \mathrm{Im}\ u^p = \mathrm{Im}\ u^{p+1}}$$

5 Il suffit de prendre n_2 le maximum entre n_0 et n_1, le résultat découle des deux questions précédentes.

$$\boxed{\text{Il existe } n_2 \text{ tel que pour tout } p \geqslant n_2, \mathrm{Ker}\ u^p = \mathrm{Ker}\ u^{n_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} u^p = \mathrm{Im} u^{n_2}}$$

6 Montrons que l'intersection est nulle. Soit $x \in \mathrm{Ker}\ u^{n_2} \cap \mathrm{Im}\ u^{n_2}$. Par hypothèse, $u^{n_2}(x) = 0$ et il existe $t \in \mathrm{E}$ tel que $x = u^{n_2}(t)$. Ainsi

$$u^{n_2}(x) = u^{n_2}\left(u^{n_2}(t)\right) = u^{2n_2}(t) = 0$$

donc $t \in \mathrm{Ker}\ u^{2n_2} = \mathrm{Ker}\ u^{n_2}$ ce qui implique que $x = u^{n_2}(t) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}\ u^{n_2} \cap \mathrm{Im}\ u^{n_2} = \{0\}}$$

> Si on suppose de plus que E est de dimension finie, alors d'après le théorème du rang nous, $\dim(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{Ker}\ u^{n_2} + \dim \mathrm{Im}\ u^{n_2}$ ce qui, ajouté au résultat de la question précédente, assure que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ u^{n_2} \oplus \mathrm{Im}\ u^{n_2}$.

Exercice 3 :

1.(a)

- La fonction nulle appartient à E_1. Dès lors, E_1 n'est pas vide.
- Soient f et g deux éléments de E_1, et λ et μ deux réels. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x+1) &= \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) \\ &= \lambda f(x) + \mu g(x) \\ (\lambda f + \mu g)(x+1) &= (\lambda f + \mu g)(x)\end{aligned}$$

puisque f et g sont deux éléments de E_1. En d'autres termes, $\lambda f + \mu g \in \mathrm{E}_1$: E_1 est stable par combinaison linéaire.
- Enfin, E_1 est inclus dans E qui est un espace vectoriel de référence.

En conclusion $\boxed{\mathrm{E}_1 \text{ est espace vectoriel.}}$

1.(b) D'après le théorème de dérivation des bornes variables (cf chapitre d'intégration sur un segment), qu'on peut appliquer car f est continue, g est dérivable de dérivée $x \mapsto f(x+1) - f(x)$, qui est continue car f l'est.

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E} \qquad \mathrm{T}(f) \text{ est de classe } \mathrm{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de dérivée } x \mapsto f(x+1) - f(x)}$$

1.(c) Soit $f \in \mathrm{E}$. $\mathrm{T}(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue, c'est-à-dire que $\mathrm{T}(f) \in \mathrm{E}$.

$$\boxed{\text{T est à valeurs dans E.}}$$

Cependant, $T(f)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Si g est une fonction qui n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier (comme la valeur absolue, mais il y a beaucoup d'autres exemples), alors g n'a aucun antécédent par T :

$$\boxed{\text{T n'est pas surjectif.}}$$

1.(d) On a déjà montré que T est à valeurs dans E. Il ne reste à montrer que la linéarité de T, et cela a été fait en exemple en classe.

$$\boxed{\text{T est linéaire, ainsi c'est un endomorphisme de E.}}$$

1.(e) g étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est constante si et seulement si sa dérivée est nulle. D'après la question 1.(b), g est constante si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+1) - f(x) = 0$$

D'où
$$\boxed{g \text{ est constante si et seulement si } f \in \mathrm{E}_1.}$$

1.(f) Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(\pi x + \pi) = -\sin(\pi x)$, la fonction f est périodique de période 1. Il en découle, d'après la question précédente, que g est constante. Pour trouver sa valeur, il suffit de calculer sa valeur en 0.

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 |\sin(\pi t)| \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sin(\pi t) \, \mathrm{d}t \qquad \text{(le sinus est positif sur } [\,0\,;\pi\,]) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\cos(\pi t)\right]_0^1 \\ g(0) &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

Dès lors
$$\boxed{g \text{ est la fonction constante égale à } \frac{2}{\pi}.}$$

2.(a) g est la fonction nulle si et seulement si g est constante et $g(0) = 0$ ce qui permet de conclure en appliquant la question 1.(e).

$$\boxed{f \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{T} \iff f \in \mathrm{E}_1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t = 0}$$

La question $t \mapsto \cos(2\pi t)$ vérifie ces conditions, elle appartient par conséquent au noyau de T. Puisque ce n'est pas la fonction nulle, le noyau de T n'est pas réduit à $\{0\}$ donc

$$\boxed{\text{L'application T n'est pas injective.}}$$

2.(b) Explicitons la fonction g_a associée à la fonction h_a. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$g_a(x) = \int_x^{x+1} e^{at} \, \mathrm{d}t$$

Deux cas se présentent.

- <u>Premier cas : $a = 0$.</u> h_a est alors la fonction constante égale à 1 et

$$\begin{aligned} g_a(x) &= \int_x^{x+1} 1 \, \mathrm{d}t \\ &= 1 \\ g_a(x) &= h_a(x) \end{aligned}$$

Par suite
$$\boxed{h_a \text{ est vecteur propre pour la valeur propre 1.}}$$

- Deuxième cas : $a \neq 0$. Il vient :

$$\begin{aligned} g_a(x) &= \left[\frac{e^{at}}{a}\right]_x^{x+1} \\ &= \frac{e^{ax+a} - e^{ax}}{a} \\ g_a(x) &= \left(\frac{e^a - 1}{a}\right) h_a(x) \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{h_a \text{ est vecteur propre pour la valeur propre } \dfrac{e^a - 1}{a}.}$

2.(c) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors φ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ et, au voisinage de 0

$$\varphi(x) = \frac{1 + x + \mathrm{o}(x) - 1}{x} = 1 + \mathrm{o}(1) \xrightarrow[x \to 0]{} 1 = f(0)$$

Elle est par conséquent également continue en 0. De plus

$$\varphi(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

par croissances comparées. φ étant continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(x) = \lambda$, c'est-à-dire que λ est une valeur propre. D'après la question 2.(a), 0 est également une valeur propre. Finalement

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres contient } \mathbb{R}_+.}$$

3 C'est l'exercice 19 du chapitre d'intégration sur un segment. Par définition d'une limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{A} > 0, \forall t \geqslant \mathrm{A} \qquad \mathrm{L} - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{L} + \varepsilon$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$,

$$\int_x^{x+1} \mathrm{L} - \varepsilon \,\mathrm{d}t = \mathrm{L} - \varepsilon \leqslant \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x) \leqslant \int_x^{x+1} \mathrm{L} + \varepsilon \,\mathrm{d}t = \mathrm{L} + \varepsilon$$

En conclusion $\boxed{g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \mathrm{L}}$

Cependant, d'après la question 2.(a), si on prend f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(\pi x)$, la fonction g associée est nulle, donc tend vers 0 en $+\infty$, mais f n'a pas de limite en $+\infty$.

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

Problème

Partie A. Formes linéaires positives.

1.(a) Montrons tout d'abord que ce sont des applications linéaires. Soient f et g deux éléments de E et soient λ et μ deux réels. On a

$$\mu_1(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)(a) = \lambda f(a) + \mu g(a) = \lambda \mu_1(f) + \lambda \mu_1(g)$$

ce qui implique que μ_1 est linéaire. De même, par linéarité de l'intégrale,

$$\mu_2(\lambda f + \mu g) = \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \mu_2(f) + \lambda \mu_2(g)$$

et μ_2 est également linéaire. De plus, si f est une fonction positive sur $[\,a\,;b\,]$, en particulier $\mu_1(f) = f(a) \geqslant 0$ et par positivité de l'intégrale,

$$\mu_2(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

D'où $\boxed{\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont des formes linéaires positives.}}$

1.(b) Si f est la fonction $x \mapsto x - a$ alors $\mu_1(f) = 0$. En d'autres termes, $f \in \operatorname{Ker} \mu_1$ et μ_1 n'est pas injective. Elle est cependant surjective car, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est l'image... de la fonction constante égale à λ. Tous les réels admettant au moins un antécédent par μ_1,

$$\boxed{\mu_1 \text{ est surjective non injective.}}$$

On cherche à présent une fonction dans le noyau de μ_2, c'est-à-dire une fonction non nulle d'intégrale nulle. Avec un dessin, on pense à une fonction affine négative sur $[\,a\,;c\,]$, positive sur $[\,c\,;b\,]$ où c est le milieu de $[\,a\,;b\,]$. Si f est une telle fonction, $\mu_2(f) = 0$ et de même μ_2 n'est pas injective. Pour la surjectivité, on cherche de la même façon une fonction constante. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction constante égale à $\lambda/(b-a)$ a pour image λ. Dès lors,

$$\boxed{\mu_2 \text{ est surjective non injective.}}$$

> C'est cohérent avec le résultat vu en TD, selon lequel une forme linéaire non nulle est surjective.

2 Soit $x \in [\,a\,;b\,]$. On suppose que $\mu = \mu_1$.

$$\widetilde{\mu}(x) = \varphi_x(a) = e^{-x\times a}$$

D'où : $\boxed{\widetilde{\mu} \text{ est la fonction définie sur } [\,a\,;b\,] \text{ par } x \mapsto e^{-ax}.}$

Supposons à présent que $\mu = \mu_2$. x appartenant à $[\,a\,;b\,]$, x est strictement positif.

$$\widetilde{\mu}(x) = \int_a^b \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b e^{-x\times t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_a^b = \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$$

Finalement $\boxed{\widetilde{\mu} \text{ est la fonction définie sur } [\,a\,;b\,] \text{ par } \widetilde{\mu}(x) = \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}}$

3 Cette question et la question 5 sont immédiates si on se souvient de la démonstration dans le chapitre sur l'intégration. μ étant positive, $\mu(g-f) \geqslant 0$ car $g \geqslant f$. μ étant linéaire, $\mu(g-f) = \mu(g) - \mu(f)$ ce qui donne le résultat.

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \text{ alors } \mu(f) \leqslant \mu(g).}$$

4 Pour tout $x \in \mathrm{I}, \varphi_x$ est une fonction positive (de t) car c'est une exponentielle. μ étant une forme linéaire positive, $\mu(\varphi_x)$ est positive, c'est-à-dire que $\widetilde{\mu}(x) \geqslant 0$. Pour montrer qu'elle est décroissante, attention, on ne peut a priori pas dériver $\widetilde{\mu}$! Il faut le faire à la main. Ainsi, soient $x \leqslant y$ deux éléments de I et comparons $\widetilde{\mu}(x)$ et $\widetilde{\mu}(y)$. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,], -tx \geqslant -ty$ (car $t \geqslant a > 0$). Par croissance de l'exponentielle, $\varphi_x(t) \geqslant \varphi_y(t)$. En particulier, $\varphi_x \geqslant \varphi_y$. La question précédente donne $\mu(\varphi_x) \geqslant \mu(\varphi_y)$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\widetilde{\mu} \text{ est positive et décroissante.}}$$

5 D'après la question 3 et l'énoncé, $\mu(f) \leqslant \mu(|f|)$ et $\mu(-f) \leqslant \mu(|f|)$. μ étant linéaire, $\mu(-f) = -\mu(f)$. Ainsi, $-\mu(f) \leqslant \mu(|f|)$. Or, $|\mu(f)| = \pm\,\mu(f)$. Le résultat en découle.

$$\boxed{|\mu(f)| \leqslant \mu(|f|)}$$

6 f étant continue sur un segment, elle y est bornée et atteint des bornes, donc

$$\boxed{\text{M existe.}}$$

Par définition de M, pour tout $x \in [\,a\,;b\,], |f(x)| \leqslant \mathrm{M} = \mathrm{M}\times 1 = \mathrm{M}\times g(x)$ c'est-à-dire que $|f| \leqslant \mathrm{M}\times g$. La question 3 nous permet de conclure.

$$\boxed{\mu(|f|) \leqslant \mathrm{M}\times \mu(g)}$$

Partie B. Lien avec les fonctions CM.

1.(a) Soit $x \in \mathrm{I}$. Par linéarité de μ

$$|\widetilde{\mu}(x) - \widetilde{\mu}(x_0)| = |\mu(\varphi_x) - \mu(\varphi_{x_0})| = |\mu(\varphi_x - \varphi_{x_0})|$$

Il suffit ensuite d'appliquer la question 5 de la partie C.

$$\boxed{|\widetilde{\mu}(x) - \widetilde{\mu}(x_0)| \leqslant \mu\left(|\varphi_x - \varphi_{x_0}|\right)}$$

1.(b) À partir de là, les questions commencent à devenir difficiles. Cela sent l'inégalité des accroissements finis à plein nez... Remplaçons les fonctions φ par leur expression. On cherche donc à majorer $|e^{-xt} - e^{-x_0 t}|$. Comme on veut majorer par une constante multipliée par $|x - x_0|$, il faut appliquer l'IAF à la fonction dépendant de x, c'est-à-dire la fonction $f : x \mapsto e^{-tx}$ (où t est fixé). f est dérivable et $f'(x) = -te^{-tx}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{I}$ (on rappelle que $\mathrm{I} = [\,a\,;b\,]$ et $a > 0$) :

$$|f'(x)| \leqslant t \times e^{-xt} \leqslant be^{-xa} \leqslant be^{-a^2}$$

Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\boxed{|\varphi_x(t) - \varphi_{x_0}(t)| \leqslant be^{-a^2}|x - x_0|}$$

1.(c) D'après la question précédente, $be^{-a^2}|x - x_0|$ est un majorant (indépendant de t) de la fonction $|\varphi_x - \varphi_{x_0}|$. D'après la question 6 de la partie C,

$$\mu\left(|\varphi_x - \varphi_{x_0}|\right) \leqslant be^{-a^2}|x - x_0|\mu(g)$$

où l'on rappelle que g est la fonction constante égale à 1. D'après la question 1.(a),

$$0 \leqslant |\widetilde{\mu}(x) - \widetilde{\mu}(x_0)|| \leqslant be^{-a^2}\mu(g) \times |x - x_0|$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $x \to x_0$. D'après le théorème d'encadrement, le terme du milieu également. En d'autres termes, $\widetilde{\mu}(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \widetilde{\mu}(x_0)$:

$$\boxed{\widetilde{\mu} \text{ est continue en } x_0.}$$

2.(a) C'est du cours, on utilise l'inégalité de Taylor-Lagrange.

$$\boxed{\text{cf cours.}}$$

2.(b) Notons pour plus de commodité A le membre de gauche. Suivons l'indication de l'énoncé et mettons au même dénominateur et mettons $t^n e^{-x_0 t}$ en facteur.

$$\mathrm{A} = \left|\frac{t^n e^{-xt} - t^n e^{-x_0 t} + t^{n+1}e^{-x_0 t}(x - x_0)}{(x - x_0)}\right| = \left|\frac{t^n e^{-x_0 t}\left(e^{(x_0 - x)t} - 1 - t(x_0 - x)\right)}{(x - x_0)}\right|$$

Il suffit ensuite d'appliquer la question précédente avec $u = t(x_0 - x)$:

$$\mathrm{A} \leqslant \left|\frac{t^n e^{-x_0 t}}{x - x_0}\right| \times \left(1 + e^{(x_0 - x)t}\right)\frac{t^2(x_0 - x)^2}{2}$$

La première inégalité en découle en se souvenant que $\mathrm{K}^2/|\mathrm{K}| = |\mathrm{K}|$:

$$\boxed{\mathrm{A} \leqslant \frac{t^{n+2}e^{-x_0 t}}{2} \times \left(1 + e^{(x_0 - x)t}\right)|x_0 - x|}$$

On en déduit la deuxième inégalité en se souvenant que $0 < a \leqslant t \leqslant b$, que $x_0 > 0$ et que $(x_0 - x) \leqslant |x_0 - x|$:

$$\boxed{\mathrm{A} \leqslant \frac{b^{n+2}e^{-x_0 \times a}}{2} \times \left(1 + e^{|x_0 - x|b}\right)|x_0 - x|}$$

2.(c) Calculons pour cela le taux d'accroissements. Soient $x_0 \in \mathrm{I}$ et $x \neq x_0$. Par linéarité de μ :

$$\left|\frac{\Delta(x) - \Delta(x_0)}{x - x_0} + \mu(h_{n+1,x_0})\right| = \left|\mu\left(\frac{h_{n,x} - h_{n,x_0}}{x - x_0} - h_{n+1,x_0}\right)\right|$$

Et en appliquant la question 5 de la partie C :
$$\left|\frac{\Delta(x)-\Delta(x_0)}{x-x_0}+\mu(h_{n+1,x_0})\right| \leqslant \mu\left(\left|\frac{h_{n,x}-h_{n,x_0}}{x-x_0}-h_{n+1,x_0}\right|\right)$$
Or, d'après la question précédente, la fonction à l'intérieur de μ dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus est majorée par
$$\frac{b^{n+2}e^{-x_0\times a}}{2}\times\left(1+e^{|x_0-x|b}\right)|x_0-x|$$
qui est bien indépendant de t. Ainsi, encore une fois d'après la question 6 de la partie C,
$$\left|\frac{\Delta(x)-\Delta(x_0)}{x-x_0}+\mu(h_{n+1,x_0})\right| \leqslant \frac{b^{n+2}e^{-x_0\times a}}{2}\times\left(1+e^{|x_0-x|b}\right)\times\mu(g)\times|x_0-x|$$
où, encore une fois, g est la fonction constante égale à 1. De même qu'à la question 1.(c), le membre de droite tend vers 0 quand $x\to x_0$. Par conséquent
$$\frac{\Delta(x)-\Delta(x_0)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}-\mu(h_{n+1,x_0})$$
ce qui est ce qu'on voulait montrer.

$$\boxed{\Delta \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } \Delta'(x_0)=-\mu(h_{n+1,x_0})}$$

2.(d) Raisonnons par récurrence.

- Si $n\geqslant 0$, soit l'hypothèse de récurrence
$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mu \text{ est dérivable } n \text{ fois et pour tout } x, \widetilde{\mu}^{(n)}=(-1)^n\mu(h_{n,x}) \text{ »}$$
- Tout d'abord, d'après la question 3.(c), $\widetilde{\mu}$ est continue et puisque $h_{0,x}=\varphi_x$, par définition de $\widetilde{\mu}$, $\widetilde{\mu}(x)=\mu(\varphi_x)=(-1)^0\mu(h_{0,x})$. En d'autres termes, H_0 est vraie.
- Soit n quelconque tel que H_n soit vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Soit $x\in\mathrm{I}$. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $\widetilde{\mu}$ est dérivable n fois et on a $\widetilde{\mu}^{(n)}(x)=(-1)^n\mu(h_{n,x})$. D'après la question précédente, $\widetilde{\mu}^{(n)}$ est dérivable et
$$\left(\widetilde{\mu}^{(n)}\right)'(x)=\widetilde{\mu}^{(n+1)}(x)=(-1)^n\times(-\mu(h_{n+1,x}))=(-1)^{n+1}\mu(h_{n+1,x})$$
Dès lors, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi, $\widetilde{\mu}$ est dérivable n fois pour tout n et sa dérivée n^e a la forme voulue.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

3 $h_{n,x}$ est positive pour tout x (c'est une exponentielle multipliée par une puissance de t, et $t\geqslant a>0$). μ étant une forme linéaire positive, $\mu(h_{n,x})\geqslant 0$ pour tout n et pour tout x. En particulier, $\widetilde{\mu}^{(n)}$ est du signe de $(-1)^n$.

$$\boxed{\widetilde{\mu} \text{ est CM.}}$$