Chapitre 9

Décomposition en éléments simples.

Ce chapitre est essentiellement technique : tous les résultats seront admis (nous en démontrerons certains dans les chapitres 19 et 20, d'autres resteront admis conformément au programme), il est plus important de bien retenir les méthodes utilisées et de s'entraîner avec des exemples explicites et les exercices du TD. Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Introduction aux fonctions polynomiales.

I.1 Fonctions polynomiales.

Définition. Soit $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On dit que P est une fonction polynôme ou une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbb{K}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$$

On fera attention de ne pas oublier le mot « fonction » : un polynôme est un objet qui n'est pas une fonction (même si, parfois, on peut confondre les deux) : cf. chapitre 19.

Remarques :

- Attention, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les éléments de $\mathbb{K}$ sont plus souvent notés z, mais il serait fastidieux de noter x les éléments de $\mathbb{K}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et de les noter z lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: le but de la notation $\mathbb{K}$ est justement de ne pas donner les mêmes résultats deux fois, une fois pour $\mathbb{R}$ et une fois pour $\mathbb{C}$!
- On rappelle que $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$: ainsi, on considérera parfois que les fonctions polynomiales à coefficients réels sont des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Proposition. Les coefficients d'une fonction polynôme sont uniques (on pourra donc parler « du » coefficient devant x^n par exemple). En particulier, la fonction constante égale à 0 est l'unique fonction polynomiale dont tous les coefficients sont nuls.

Par conséquent, une fonction polynôme est non nulle si et seulement si elle a au moins un coefficient non nul.

Remarque : ⚠ Une fonction non nulle peut s'annuler ! Par exemple, $x \mapsto x - 1$ est une fonction polynôme non nulle mais s'annule en 1.

Définition. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$. On dit que α est racine de P si $P(\alpha) = 0$.

Remarque : ⚠ Le fait qu'une fonction polynomiale admette des racines ou non dépend de $\mathbb{K}$. Par exemple, $P : x \mapsto x^2 + 1$ admet des racines sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

I.2 Degré d'une fonction polynomiale.

Définition. Soit P une fonction polynôme non nulle.

- On appelle degré de P, noté $\deg(P)$, le plus grand entier n_0 tel que le coefficient devant x^{n_0} soit non nul.
- Ce coefficient est appelé le coefficient dominant de P.

Un coefficient dominant est donc non nul par définition.

Par convention, on dit que la fonction nulle est de degré $-\infty$.

Exemples :

- $x \mapsto 2x^5 + x - 5$ est de degré 5 et de coefficient dominant égal à 2.
- Une fonction constante non nulle est de degré 0.
- Les fonctions affines sont exactement les fonctions polynômes de degré **inférieur ou égal** à 1 (et non pas de degré 1 : rappelons qu'une fonction constante est affine).

Remarque : Le degré peut ne pas sauter aux yeux. Par exemple, ce n'est qu'en développant qu'on réalise que $P : x \mapsto (x+1)^4 - (x-1)^4$ est de degré 3 et de coefficient dominant égal à 8.

Théorème. Soient P_1 et P_2 deux fonctions polynomiales. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\deg(P_1 \times P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2)$. En d'autres termes, le degré d'un produit est égal à la somme des degrés.
- $\deg(P^n) = n \times \deg(P)$.

Exemple : Soient $P_1 : x \mapsto 3x^2 + x + 1$ et $P_2 : x \mapsto x^3 - 5$. Alors $P_1 \times P_2$ est de degré 5 et $(P_1)^3$ est de degré 6.

I.3 Division euclidienne.

Théorème (théorème de division euclidienne.). Soient A et B deux fonctions polynomiales avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de fonctions polynomiales tel que $A = B \times Q + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. On appelle Q le quotient de la division euclidienne de A par B, et R est le reste.

Ce théorème est à rapprocher du théorème de division euclidienne sur $\mathbb{Z}$. On peut définir des notions analogues à celles que l'on trouve sur $\mathbb{Z}$ grâce à cette division euclidienne : on peut parler exemple parler de PPCM et de PGCD, cf. chapitre 19.

Exemple : Faisons la division euclidienne de $5x^4 - 2x^3 + 16x^2 - x - 1$ par $2x^2 + 3$. On la pose comme la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrr|l}
 & 5x^4 & - & 2x^3 & + & 16x^2 & - & x & -\ 1 & 2x^2 + 3 \\
- & (5x^4 & & & + & 15x^2/2) & & & & \hline 5x^2/2 - x + 17/4 \\
\hline
 & & - & 2x^3 & + & 17x^2/2 & - & x & -\ 1 & \\
 & - & (- & 2x^3 & & & - & 3x) & & \\
\hline
 & & & & & 17x^2/2 & + & 2x & -\ 1 & \\
 & & & & - & (17x^2/2 & & & +\ 51/4) & \\
\hline
 & & & & & & & 2x & -\ 55/4 &
\end{array}
$$

Ainsi, pour tout x,

$$\underbrace{5x^4 - 2x^3 + 16x^2 - x - 1}_{A(x)} = \underbrace{(2x^2+3)}_{B(x)} \times \underbrace{\left(\frac{5}{2}x^2 - x + \frac{17}{4}\right)}_{Q(x)} + \underbrace{2x - \frac{55}{4}}_{R(x)}$$

Méthode : on multiplie B par le terme nécessaire pour que les termes dominants soient les mêmes, on soustrait, et on recommence. Par exemple, on multiplie $B(x)$ par $5x^2/2$ au départ, car $2x^2 \times 5x^2/2 = 5x^4$, qui est le terme dominant de $A(x)$. Ensuite, on multiplie $B(x)$ par $-x$ car $2x^2 \times -x = -2x^3$, ce qui est le terme dominant de la fonction polynôme obtenue après différence, et ainsi de suite. On s'arrête quand on obtient une fonction polynôme de degré inférieur strictement au degré de B.

Remarque : Ci-dessus et ci-contre, nous avons fait un léger abus de langage, nous avons parlé de la division euclidienne de $5x^4 - \cdots$ par $2x^2 + 3$, et nous n'avons mis que des éléments de ce type dans le processus de division ci-dessus (nous avions d'ailleurs fait la même chose quand nous divisions par $z - \alpha$ dans le chapitre 7). Or, ces quantités sont des éléments de $\mathbb{K}$ et non des fonctions (échec de type !). Tant pis, c'est ce que nous ferons en pratique : écrire $x \mapsto \cdots$ à toutes les lignes rendrait la division ci-dessus illisible, le processus très lourd et ne ferait que compliquer inutilement un algorithme somme toute assez intuitif. De plus, dans le chapitre 19, quand nous manipulerons des polynômes (que nous ne confondrons pas avec les fonctions polynômes), nous utiliserons la notation X qui nous permettra de faire tout ceci rigoureusement.

Remarque : Si $\deg(B) > \deg(A)$, alors Q est le polynôme nul. En effet, on a $A = 0 \times B + A$ avec $\deg(A) < \deg(B)$. Le couple $(0, A)$ convient, et par unicité, c'est le seul.

I.4 Factorisation des fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

Sur $\mathbb{C}$, c'est assez simple :

Théorème. Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes. Alors P peut s'écrire comme un produit de fonctions polynômiales de degré 1.

Remarque : On dit qu'une fonction polynomiale est scindée sur $\mathbb{C}$. Quand on écrit une fonction polynomiale sous cette forme, on dit qu'on l'écrit sous forme factorisée.

Sur $\mathbb{R}$, il faut rajouter les fonctions polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Théorème. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels. Alors P peut s'écrire comme un produit de fonctions polynomiales de degré 1 et de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Remarque : Quand on écrit une fonction polynomiale réelle sous cette forme, on dit qu'on l'écrit sous forme factorisée. C'est la même chose que sur $\mathbb{C}$: on cherche à écrire P comme un produit de fonctions polynômes les plus simples possibles : sur $\mathbb{C}$, les fonctions polynômes de degré 1 suffisent, tandis que sur $\mathbb{R}$, il faut rajouter les fonctions polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif.

Par exemple, sur $\mathbb{R}$, la forme factorisée de $P : x \mapsto x^3 - 1$ est $P : x \mapsto (x-1)(x^2+x+1)$, tandis que son écriture factorisée sur $\mathbb{C}$ est $P : x \mapsto (x-1)(x-j)(x-j^2)$.

La notion sous-jacente est celle de polynôme irréductible... ainsi que de décomposition en produit de facteurs irréductibles. Encore un point commun avec $\mathbb{Z}$! Nous pouvons également prouver que cette écriture est unique (à l'ordre près des termes). Nous en reparlerons en détail dans les chapitres 19 et 20.

Nous verrons certaines méthodes pour écrire une fonction polynomiale (complexe ou réelle) sous forme factorisée dans le chapitre 19. Pour l'instant, tout ce qu'il faut retenir est que toute fonction polynôme peut s'écrire sous cette forme.

I.5 Introduction aux fonctions rationnelles.

Définition. Une fonction rationnelle est un quotient de deux fonctions polynomiales, celle au dénominateur étant non nulle.

Remarque : ⚠ Encore une fois, « non nulle » ne signifie pas « qui ne s'annule pas ». Le domaine de définition d'une fonction rationnelle est l'ensemble des éléments de $\mathbb{K}$ en lesquels le dénominateur ne s'annule pas.

Les racines du dénominateur sont appelés les pôles de la fonction rationnelle. Si le dénominateur est de degré n, nous montrerons dans le chapitre 19 qu'il admet au plus n racines distinctes : le domaine de définition d'une fonction rationnelle est donc $\mathbb{K}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points.

Exemple : La fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{x\,(x^2-1)}$ est définie sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{0;\pm 1\}$.

II Décomposition en éléments simples : résultats théoriques.

Dans cette partie, on se donne deux fonctions polynômes A et B, avec B non nulle, n'admettant aucune racine complexe commune, et on note Q le quotient de la division euclidienne de A par B.

Rappel : Si $\deg(A) < \deg(B)$, alors $Q = 0$.

II.1 Sur $\mathbb{C}$.

On suppose donc dans ce paragraphe que A et B sont à coefficients complexes et sont définies sur $\mathbb{C}$.

Notons B sous sa forme factorisée, c'est-à-dire $B : z \mapsto a_n(z-z_1)^{m_1} \times \cdots \times (z-z_q)^{m_q}$, où $z_1, \dots, z_q$ sont des complexes distincts et $m_1, \dots, m_q$ sont des entiers naturels non nuls.

Théorème. Il existe des complexes $a_{1,1}, \dots, a_{1,m_1}, \dots, a_{q,1}, \dots, a_{q,m_q}$ uniques tels que :

$$\forall z \neq z_1, \dots, z_q, \qquad \frac{A(z)}{B(z)} = Q(z) + \frac{a_{1,1}}{z - z_1} + \frac{a_{1,2}}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}}$$
$$+ \frac{a_{2,1}}{z - z_2} + \frac{a_{2,2}}{(z-z_2)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_2}}{(z-z_2)^{m_2}}$$
$$+ \cdots + \frac{a_{q,1}}{z - z_q} + \frac{a_{q,2}}{(z-z_q)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_q}}{(z-z_q)^{m_q}}$$

Exemple : Il existe $(a_1, \dots, a_9) \in \mathbb{C}^9$ unique tel que :

$$\forall z \neq \pm i, \quad \frac{1}{(z-i)^4(z+i)^5} = 0 + \frac{a_1}{(z-i)} + \frac{a_2}{(z-i)^2} + \frac{a_3}{(z-i)^3} + \frac{a_4}{(z-i)^4}$$
$$+ \frac{a_5}{(z+i)} + \frac{a_6}{(z+i)^2} + \frac{a_7}{(z+i)^3} + \frac{a_8}{(z+i)^4} + \frac{a_9}{(z+i)^5}$$

En effet, le quotient est nul puisque le numérateur est de degré 0 et le dénominateur de degré 9. Le but du paragraphe III va être de donner des méthodes pour trouver ces coefficients.

II.2 Sur $\mathbb{R}$.

Notons B sous sa forme factorisée, c'est-à-dire :

$$B : x \mapsto a_n(x-x_1)^{m_1} \times \cdots \times (x-x_r)^{m_r} \times {P_1}^{n_1} \times \cdots \times {P_s}^{n_s}$$

où $x_1, \dots, x_r$ sont des réels distincts, $P_1, \dots, P_s$ sont des fonctions polynômes distincts de degré 2 de discriminant strictement négatif, et $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$ sont des entiers naturels non nuls.

On suppose donc dans ce paragraphe que A et B sont à coefficients réels et sont définies sur $\mathbb{R}$. Comme dit plus haut, on pourra parfois considérer que A et B sont à coefficients complexes et définies sur $\mathbb{C}$: on appliquera alors le paragraphe précédent.

Théorème. Il existe des réels $a_{1,1}, \dots, a_{r,m_r}, b_{1,1}, c_{1,1}, \dots, b_{s,n_s}, c_{s,n_s}$ uniques tels que :

$$\forall x \neq x_1, \dots, x_r, \quad \frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{a_{1,1}}{x-x_1} + \frac{a_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}$$
$$+ \cdots + \frac{a_{r,1}}{x-x_r} + \frac{a_{r,2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_r}}{(x-x_r)^{m_r}}$$
$$+ \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{P_1(x)} + \frac{b_{1,2}x + c_{1,2}}{P_1(x)^2} + \cdots + \frac{b_{1,n_1}x + c_{1,n_1}}{P_1(x)^{n_1}}$$
$$+ \cdots + \frac{b_{s,1}x + c_{s,1}}{P_s(x)} + \frac{b_{s,2}x + c_{s,2}}{P_s(x)^2} + \cdots + \frac{b_{s,n_s}x + c_{s,n_s}}{P_s(x)^{n_s}}$$

Remarque : Bon, l'énoncé est un peu hardcore... Il suffit de retenir, quand on se trouve sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, qu'au numérateur des fonctions polynômes de degré 1 (élevés éventuellement à une certaine puissance), on trouve une constante, et, quand on se trouve sur $\mathbb{R}$, qu'au numérateur des fonctions polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif (idem), on trouve une fonction affine.

Exemple : Pour tout $x \neq 0, 1, 2$, on pose

$$F(x) = \frac{x^{19}}{(x-1)^3(x-2)^2(x^2+1)^3(x^2+x+1)^4}.$$

Le dénominateur est bien sous forme irréductible car les discriminants de x^2+1 et de x^2+x+1 sont bien strictement négatifs. De plus, le dénominateur est unitaire de degré

19 : en d'autres termes, il est de la forme $x^{19} + \cdots$, si bien que le quotient de la division euclidienne vaut 1. Finalement, il existe $a, b, \dots, s$ uniques tels que, pour tout $x \neq 0, 1, 2$:

i et j sont des réels quelconques et n'ont rien à voir avec les i et j complexes.

$$F(x) = 1 + \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{(x-2)} + \frac{e}{(x-2)^2} + \frac{fx+g}{x^2+1} + \frac{hx+i}{(x^2+1)^2} + \frac{jx+k}{(x^2+1)^3}$$

$$+ \frac{lx+m}{(x^2+x+1)} + \frac{nx+o}{(x^2+x+1)^2} + \frac{px+q}{(x^2+x+1)^3} + \frac{rx+s}{(x^2+x+1)^4}.$$

Remarque : Dans la pratique, on se restreindra aux cas où les fonctions polynomiales de degré 2 sont uniquement à la puissance 1. Place à la pratique !

III Décomposition en éléments simples : méthodes pratiques et exemples.

Il existe pléthore de méthodes pour trouver les coefficients intervenant dans une décomposition en éléments simples, nous ne verrons que les principales, largement suffisantes pour tout ce qu'on aura à faire en pratique.

III.1 RIP, « par identification ».

Disons-le une fois pour toutes : « par identification » ne veut rien dire ! Par exemple, qui oserait dire ça : « $1 + 3 = 2 + 2$ donc, par identification, $1 = 2$ et $3 = 2$ » ? Donc, c'est décidé, on ne dira plus jamais « par identification ».

Ah, donc on n'a plus le droit d'identifier.

Cependant, la méthode la plus intuitive (mais pas la plus simple) pour trouver des coefficients de décomposition en éléments simples consiste à mettre au même dénominateur, puis à « identifier » les coefficients.

Ah, donc on a le droit d'identifier ?

Donnons un exemple de ce qu'on ne fera pas en pratique, et expliquons rapidement pourquoi ce qui suit est juste.

Exemple : Décomposer en éléments simples la fraction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$.

Il existe a et b uniques tels que, pour tout $x \neq -1, -2$:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

Soit $x \neq -1, -2$. Alors

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} = \frac{x(a+b) + (2a+b)}{(x+1)(x+2)}$$

En particulier, $x(a+b) + (2a+b) = x$. Le fait que cette égalité soit vraie pour une infinité de valeurs de x permettra de dire que les deux fonctions polynomiales associées ont les mêmes coefficients, voir ci-contre.

Ceci étant valable pour tout $x \neq -1, -2$, alors $a + b = 1$ et $2a + b = 0$ donc on trouve $a = -1$ et $b = 2$. En d'autres termes :

$$\forall x \neq -1, -2, \qquad \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

Le raisonnement ci-dessus utilise le fait (que nous verrons dans le chapitre 19) que deux fonctions polynomiales qui coïncident sur un ensemble infini ont les mêmes coefficients : c'est un argument mathématique profond qui ne doit pas être confondu avec une bête identification qui peut s'avérer dangereuse, voir ci-dessus. Il est plus simple de prendre des valeurs explicites et de résoudre un système.

En plus, on ne peut utiliser cet argument que parce qu'on a cette égalité pour une infinité de x : si elle n'est valable que pour une valeur de x, alors ça ne marche pas.

Exemple : Décomposer en éléments simples la fraction $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$.

Il existe a et b uniques tels que, pour tout $x \neq -1, -2$:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

En prenant $x = 0$, on obtient $a + \dfrac{b}{2} = 0$ donc $b = -2a$. Ensuite, en prenant $x = 1$, il vient

$$\frac{1}{6} = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$$

donc (en multipliant par 6) $1 = 3a + 2b$ et puisque $b = -2a$, il vient $1 = -a$ donc $a = -1$ et $b = 2$.

On trouve la même chose... encore heureux : il y a unicité !

En conclusion : Il est à tout jamais interdit de dire « par identification » car cela ne veut rien dire. Suivant les contextes, on dira parfois « par unicité des ... », ou on prendra des valeurs explicites et on résoudra un système, mais c'est tout. Mais de toute façon, on ne fera pas cela en pratique la plupart du temps, car à partir de 3 coefficients, cela devient vite assez lourd et on dispose de moyens plus efficaces. On ne réservera cette méthode que lorsqu'il y a des pôles multiples ou des fonctions polynomiales de degré 2 et qu'on aura épuisé les méthodes ci-dessous.

III.2 Pour les pôles simples.

Quand il n'y a que des pôles simples, c'est-à-dire quand on a une décomposition de la forme

On a noté la variable x, mais on se place sur $\mathbb{K}$: le raisonnement ci-contre est bien valable sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$.

$$f(x) = \frac{a_1}{x - x_1} + \cdots + \frac{a_n}{x - x_n}$$

où les x_i sont des éléments de $\mathbb{K}$ distincts, la méthode est extrêmement simple : on multiplie par $x - x_k$ et on fait tendre x vers x_k. En effet, en multipliant par $x - x_k$, il vient, pour tout $x \neq x_1, \dots, x_n$:

$$a_k + (x - x_k) \sum_{i \neq k} \frac{a_i}{x - x_i} = (x - x_k) \times f(x)$$

Lorsque x tend vers x_k, la somme tend vers une limite finie car x_k n'est pas une valeur interdite (les x_i sont distincts) donc le membre de gauche tend vers a_k. Puisque le membre de gauche est égal au membre de droite, par unicité de la limite, la limite du membre de droite est également égale à a_k

Remarque : Pour l'instant, nous devons nous contenter de faire tendre x vers x_k, et nous devons nous retenir de prendre $x = x_k$, car l'égalité initiale n'est pas valable pour $x = x_k$. Cette difficulté sautera dans les chapitres 19 et 20.

Exemple : Décomposer en éléments simples la fraction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

Le numérateur est de degré 1 et le dénominateur de degré 3 : le quotient est nul. Il existe (a, b, c) uniques tels que :

$$\forall x \neq 1, 2, 3, \qquad \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$$

Soit $x \neq 1, 2, 3$. En multipliant par $x - 1$:

$$a + (x-1) \times \left(\frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3} \right) = \frac{2x-1}{(x-2)(x-3)}$$

En faisant tendre x vers 1, le membre de gauche tend vers a et le membre de droite tend vers $1/2$. Par unicité de la limite $a = 1/2$. En multipliant par $x - 2$:

On pourra aller plus vite en pratique.

$$b + (x-2) \times \left(\frac{a}{x-1} + \frac{c}{x-3} \right) = \frac{2x-1}{(x-1)(x-3)}$$

En faisant tendre x vers 2, on obtient $b = -3$. Enfin, on trouve de même $c = 5/2$.

III.3 Autres cas de figure.

III.3.a Pôles multiples.

Dans ce cas, la méthode ci-dessus permet uniquement de donner le coefficient de la plus grande puissance. Voyons ceci avec un exemple.

Exemple : Donner la décomposition en éléments simples de $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}$.

Le numérateur est de degré 1 et le dénominateur est de degré 4 donc le quotient est nul. Il existe alors a, b, c, d uniques tels que :

$$\forall x \neq 1, 2, \qquad \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3} + \frac{d}{x-2}$$

Soit $x \neq 1, 2$. De même que ci-dessus, en multipliant par $x-2$ et en faisant tendre x vers 2, on trouve $d = 3$. Multiplions par $(x-1)^3$:

$$c + (x-1)^3 \times \frac{d}{x-2} + (x-1)^2 \times a + (x-1) \times b = \frac{x+1}{x-2}$$

En faisant tendre x vers 1, il vient $c = -2$. Cependant, cette méthode ne marche pas pour trouver a ou b. Par exemple, si on multiplie par $x-1$, cela donne :

$$a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + (x-1) \times \frac{d}{x-2} = \frac{x+1}{(x-1)^2(x-2)}$$

et la limite en 1 est alors infinie et non pas égale à a !

Pour les autres coefficients, il faut donc utiliser d'autres méthodes : prendre des valeurs explicites et résoudre un système, ou utiliser ce qui suit.

Remarque : Attention à ne pas décomposer en éléments simples quand la fonction rationnelle est déjà sous la bonne forme ! Par exemple, si on a une fonction rationnelle f définie par

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$$

alors il est inutile d'écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{(x-1)^3}$$

puis de s'embêter à trouver a, b et c : f est déjà sous forme décomposée (avec $a = b = 0$ et $c = 1$) puisqu'il y a unicité !

III.3.b Parité.

Si f est paire ou impaire, il suffit d'écrire ce que cela signifie et d'utiliser l'unicité de la décomposition.

Exemple : Donner la décomposition en éléments simples de

$$g : x \mapsto \frac{2x^2+3}{(x^2-1)^2(x^2+1)} = \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)}$$

Il existe (a, b, c, d, e, f) uniques tels que :

$$\forall x \neq \pm 1, g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1}$$

Par conséquent,

$$\forall x \neq \pm 1, \quad g(-x) = \frac{a}{-x-1} + \frac{b}{(-x-1)^2} + \frac{c}{-x+1} + \frac{d}{(-x+1)^2} + \frac{-ex+f}{(-x)^2+1}$$

$$= \frac{-a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{-c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{-ex+f}{x^2+1}$$

Or, $g(-x) = g(x)$. Par unicité de la décomposition en éléments simples, $a = -c$, $b = d$, $e = -e$ et $f = f$, si bien que $a = -c$, $b = d$ et $e = 0$. Ensuite, on trouve les autres coefficients avec les méthodes précédentes.

III.3.c Utilisation des limites en $\pm\infty$.

On peut utiliser la limite en $\pm\infty$ pour conclure, également par unicité de la limite. Cependant, on garde cette méthode pour les cas où le quotient est nul (ce qui est le cas la plupart du temps, ne nous mentons pas), mais alors la limite sera nulle à chaque fois : il faut alors penser à multiplier par x (ou une autre puissance si cela n'apporte aucune information). Bon, ci-dessous la variable sera t donc on multipliera par une puissance de t, mais vous survivrez...

Remarque : Parfois, les fonctions dépendront d'un paramètre, comme en deuxième année quand vous dériverez sous l'intégrale, mais inutile de chercher aussi loin : on a un exemple ci-dessous avec la somme, la fonction dépendra de n. Cela ne change absolument rien !

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;\pm 1\}$ fixé jusqu'à la fin de l'exemple. Décomposer en éléments simples la fonction (de la variable t !)

x est donc une constante !

$$f_x : t \mapsto \frac{1}{(1+x^2t^2)\times(1+t^2)}$$

Il existe a, b, c, d uniques tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f_x(t) = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. f_x étant paire,

$$f_x(-t) = \frac{-at+b}{1+x^2t^2} + \frac{-ct+d}{1+t^2} = f_x(t)$$

Par unicité des coefficients, $a = 0$ et $c = 0$. Multiplions par t^2 et faisons tendre t vers $+\infty$:

Les limites sont obtenues comme d'habitude en factorisant par le terme dominant.

$$0 = \frac{b}{x^2} + d$$

donc $d = -b/x^2$. Enfin, en évaluant en 0, il vient : $b + d = 1$ donc $b = 1 - d$ donc

$$d = \frac{d-1}{x^2}$$

Il en découle que $d = \dfrac{1}{1-x^2}$ et donc $b = \dfrac{-x^2}{1-x^2}$. Finalement :

L'écriture décomposée permettra par exemple de trouver plus facilement une primitive de f_x, cf. chapitre suivant.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{(1+x^2t^2)\times(1+t^2)} = \frac{-x^2}{1-x^2}\times\frac{1}{1+x^2t^2} + \frac{1}{1-x^2}\times\frac{1}{1+t^2}$$

Remarque : On voudra souvent décomposer en éléments simples quand on manipulera des suites ou des sommes. Quand on voudra le faire proprement, on introduira une fonction (mais on pourra se contenter de le faire au brouillon « non proprement » pour gagner du temps.).

Chut, je n'ai rien dit...

Exemple : Soit $n \geqslant 2$. Simplifier la somme $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$ pour que le terme sommé ne dépende plus de n.

On veut casser la fraction en deux donc décomposer en éléments simples la quantité $\dfrac{1}{k(n-k)}$ (où la variable est k, l'indice de sommation, n étant fixé). Introduisons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(n-x)}$ et on se ramène au cas où il n'y a que des pôles simples. Ainsi, on trouve de même que dans le paragraphe III.2 que, pour tout $x \neq 0, n$,

$$\frac{1}{x(n-x)} = \frac{1}{nx} + \frac{1}{n(n-x)}$$

si bien que

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} && (j = n-k) \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} && \text{(indice muet)} \end{aligned}$$

L'écriture finale permettra (cf. chapitre 24) de donner un équivalent de u_n. Nous verrons d'autres exemples en TD où décomposer en éléments simples permettra de faire apparaître des sommes télescopiques.