Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 22

Exercice 1 - Divers

1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

   - $f_1 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (3z, x-2y, x) \end{array} \right.$
   - $f_2 : \left\{ \begin{array}{l} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto e^4 \times \varphi^{(3)}(2) \end{array} \right.$
   - $f_3 : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (xy, x-y, y-z) \end{array} \right.$

   Les applications f_1 et f_2 sont-elles injectives ?
2. Soit E un espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^3 = u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im} u^2$.

Exercice 2 - Cœur et nilespace

Soit E un espace vectoriel et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1, \ker u^n \subset \ker u^{n+1}$.
2. Démontrer une inclusion analogue pour les images. Dans la suite on suppose qu'il existe $n_0 \geq 1$ et $n_1 \geq 1$ tels que $\ker u^{n_0} = \ker u^{n_0+1}$ et $\mathrm{Im} u^{n_1} = \mathrm{Im} u^{n_1+1}$.
3. Montrer que $\ker u^{n_0+1} = \ker u^{n_0+2}$ puis que pour tout $p \geq n_0, \ker u^p = \ker u^{p+1}$.
4. Montrer un résultat analogue pour les images.
5. Montrer qu'il existe n_2 tel que pour tout $p \geq n_2, \ker u^{n_2} = \ker u^p$ et $\mathrm{Im} u^{n_2} = \mathrm{Im} u^p$.
6. Montrer que $\ker u^{n_2} \cap \mathrm{Im} u^{n_2} = \{0\}$.

Exercice 3

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, E_1 le sous-ensemble de E constitué des fonctions périodiques de période 1, T l'application qui, à une fonction f de E fait correspondre la fonction $T(f) = g$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. (a) Montrer que E_1 est un espace vectoriel.
   (b) Montrer que pour tout $f \in E$, la fonction $g = T(f)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner sa dérivée.
   (c) En déduire que T est à valeurs dans E. T est-il surjectif ?
   (d) Montrer que T est un endomorphisme de E.
   (e) Montrer que g est constante si et seulement si $f \in E_1$.
   (f) Expliciter g dans le cas où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = |\sin(\pi t)|$.

   On appelle *vecteur propre de* T associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ toute fonction $f \in E$, autre que la fonction nulle, telle que $T(f) = \lambda f$. Un réel λ est *valeur propre de* T s'il existe un vecteur propre associé à λ. Par exemple, un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est tout simplement un élément non nul du noyau.

2. (a) Montrer que : $f \in \ker T \iff f \in E_1$ et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. L'application T est-elle injective ?
   (b) Vérifier que pour tout réel a, la fonction $h_a : t \mapsto e^{ta}$ est vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.
   (c) Justifier que l'ensemble des valeurs propres de T contient $\mathbb{R}^+$.

3. On suppose qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Montrer que $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L$. Que dire de la réciproque (on pourra simplement prendre $L = 0$) ?

Problème (facultatif) - Formes linéaires positives

Partie A - Formes linéaires positives.

On se donne dans cette partie deux réels $0 < a < b$ et on pose $I = [a, b]$. On note $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ et on rappelle que E est un espace vectoriel de référence.

Une application $\mu : E \to \mathbb{R}$ est appelée une forme linéaire positive si elle est linéaire et si $\mu(f) \geq 0$ pour toute fonction $f \in E$ positive sur $[a, b]$.

1. (a) Montrer que

$$\mu_1 : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto f(a) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu_2 : \begin{cases} E \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)dt \end{cases}$$

sont des formes linéaires positives.

(b) μ_1 et μ_2 sont-elles injectives ? surjectives ?

Dans la suite de cette partie et dans la suivante, on se donne
- μ une forme linéaire positive.
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\varphi_x : t \mapsto e^{-xt}$ définie sur I.
- la fonction $\tilde{\mu}$ définie sur I par $\tilde{\mu}(x) = \mu(\varphi_x)$.

2. Expliciter $\tilde{\mu}$ quand $\mu = \mu_1$ puis quand $\mu = \mu_2$. Dans la suite, μ est de nouveau quelconque, ces deux formes linéaires n'étant prises qu'à titre d'exemple.
3. Montrer que si $f \leq g$ sont des éléments de E alors $\mu(f) \leq \mu(g)$ (attention, f et g ne sont pas forcément positives).
4. Montrer que $\tilde{\mu}$ est positive et décroissante sur I.
5. En se souvenant que $f \leq |f|$ et que $-f \leq |f|$, montrer que $|\mu(f)| \leq \mu(|f|)$.
6. Soit $f \in E$. Justifier l'existence de $M = \max_{[a,b]} |f|$. En déduire que $\mu(|f|) \leq M \times \mu(g)$ où g est la fonction constante égale à 1.

En particulier, si on veut majorer $\mu(|f|)$, il suffit de donner un majorant de la fonction $|f|$ (indépendant de t, naturellement, mais qui peut dépendre d'autres paramètres, comme $x, n, x_0 \dots$). Cette question est importante dans la partie suivante. À chaque fois qu'on l'utilisera, on n'oubliera pas de la citer, ainsi que de rappeler la définition de la fonction g.

Partie B - Lien avec les fonctions CM.

On reprend dans cette partie les notations de la partie précédente $(\mu, \varphi_x, \tilde{\mu})$. Dans toute la partie on se donne $x_0 \in I$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in I, |\tilde{\mu}(x) - \tilde{\mu}(x_0)| \leq \mu\left(|\varphi_x - \varphi_{x_0}|\right)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in I$ et tout $t \in I$, $|\varphi_x(t) - \varphi_{x_0}(t)| \leq be^{-a^2} \times |x - x_0|$.

(c) En déduire que $\tilde{\mu}$ est continue en x_0 et donc sur I.

2. On se donne dans cette question un entier naturel n.

(a) Montrer que pour tout réel $u, |e^u - 1 - u| \leq (1 + e^u) \times \dfrac{u^2}{2}$.

(b) En déduire que pour tout $t \in I$ et tout $x \in I$

$$\left|\frac{t^n e^{-xt} - t^n e^{-x_0 t}}{x - x_0} + t^{n+1} e^{-x_0 t}\right| \leq \frac{t^{n+2} e^{-x_0 \times t}}{2} \times \left(1 + e^{(x_0 - x)t}\right)|x_0 - x| \leq \frac{b^{n+2} e^{-x_0 \times a}}{2} \times \left(1 + e^{|x_0 - x| b}\right)|x_0 - x|$$

On mettra le membre de gauche au même dénominateur et on mettra $t^n e^{-x_0 t}$ en facteur (mais on aurait dû y penser tout seul si le prof de maths n'était pas si gentil). On définit dans la suite la fonction $h_{n,x}$ sur I par $h_{n,x}(t) = t^n e^{-xt}$ et on note enfin $\Delta(x) = \mu(h_{n,x})$ (définie donc sur I également).

(c) Montrer à l'aide de la question précédente que Δ est dérivable et que pour tout $x_0 \in I, \Delta'(x_0) = -\mu(h_{n+1,x_0})$.

(d) Montrer par récurrence que $\tilde{\mu}$ est $\mathscr{C}^\infty$ et que pour tout $n, \tilde{\mu}^{(n)}(x) = (-1)^n \mu(h_{n,x})$.

3. Montrer finalement que $\tilde{\mu}$ est complètement monotone, c'est-à-dire (cf. exercice 56 du chapitre 14) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\mu}^{(n)}$ est du signe de $(-1)^n$.