Correction du DM n°10

Partie I. Où l'on définit $\zeta(3)$

$\boxed{1}$ Soit $k \geqslant 2$. $k^2 \geqslant k^2 - k = k(k-1) > 0$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}}$$

$\boxed{2}$ Le résultat est évident si $n = 1$ (il y a même égalité). Soit $n \geqslant 2$. Sommons l'inégalité de la question précédente pour k allant de 2 (attention, ce n'est pas valable si $k = 1$ sinon on divise par 0) à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$$

Or, si $k \geqslant 2$, en décomposant en éléments simples (quitte à introduire une fonction), on trouve que

$$\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

Par conséquent, par télescopage :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

Il suffit d'ajouter 1 des deux côtés pour conclure.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}}$$

$\boxed{3}$ La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ est croissante. De plus, pour tout $k \geqslant 1$, $1/k^3 \leqslant 1_k^2$ donc, par somme, et d'après la question précédente,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

On a une suite croissante majorée : elle converge.

$$\boxed{\text{La suite de terme général } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \text{ converge.}}$$

> Attention, il fallait impérativement majorer par une constante, majorer par $2-1/n$ ne suffit pas. Nous prouverons au second semestre que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ converge si et seulement $s > 1$.

Partie II. Où l'on donne une approximation rationnelle de $\zeta(3)$

$\boxed{1}$ Supposons que $m \neq n$. Alors $\binom{n}{m} \geqslant \binom{n}{1} = n$ d'après l'exercice 44 du chapitre 3. De plus, $\binom{n+m}{m} \geqslant n + m \geqslant n + 1$, ce qui donne le résultat par produit (on peut multiplier les inégalités positives). Si $n = m$, alors

$$\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} = \binom{2n}{n} \geqslant \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) \geqslant n(n+1)$$

si $2n - 1 \geqslant n + 1$ i.e. si $n \geqslant 2$, et si $n \geqslant 1$, alors on a égalité.

$$\binom{n}{m}\binom{n+m}{m} \geqslant n(n+1)$$

2 D'après l'inégalité triangulaire,

$$\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right|=\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right|\leqslant\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

D'après la question précédente,

$$\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right|\leqslant\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{2m^3n(n+1)}=\frac{1}{2n(n+1)}\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^3}$$

Or, la suite de terme général $\displaystyle\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{m^3}$ est croissante donc est majorée par sa limite qui est $\zeta(3)$ donc

$$\boxed{\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right|\leqslant\frac{\zeta(3)}{2n(n+1)}\leqslant\frac{\zeta(3)}{2n^2}}$$

3 D'une part, $\zeta(3)/2n^2\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc il existe n_0 tel que, pour tout $n\geqslant n_0$, $\zeta_3/2n^2\leqslant\varepsilon$ si bien que

$$\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right|\leqslant\varepsilon$$

D'autre part,

$$\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\zeta(3)$$

Il existe donc n_1 tel que, pour tout $n\geqslant n_1$,

$$\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right|\leqslant\varepsilon$$

Soit donc $n_2=\max(n_0,n_1)$ et soit $n\geqslant n_2$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$|c_{n,k}-\zeta(3)|=\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}+\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right|\leqslant\left|c_{n,k}-\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}\right|+\left|\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3}-\zeta(3)\right|\leqslant 2\varepsilon$$

ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Il existe } n_2 \text{ tel que, pour tout } n\geqslant n_2,\ \zeta(3)-2\varepsilon\leqslant c_{n,k}\leqslant\zeta(3)+2\varepsilon}$$

4 Soit $n\geqslant n_2$. Par définition de b_n,

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2c_n,k$$

D'après la question précédente :

$$a_n(\zeta(3)-2\varepsilon)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2(\zeta(3)-2\varepsilon)b_n\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2(\zeta(3)+2\varepsilon)=a_n(\zeta(3)+2\varepsilon)$$

En d'autres termes, il existe n_2 tel que, pour tout $n\geqslant n_2$, $\zeta(3)-2\varepsilon\leqslant b_n/a_n\leqslant\zeta(3)+2\varepsilon$, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{b_n/a_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\zeta(3)}$$

Partie III. Où l'on s'intéresse à une relation de récurrence

1.(a) $\sqrt{2}+1>\sqrt{2}$, et les fonctions $x\mapsto x^4$ et ln sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ donc

$$\ln\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^4\right)>\ln\left(\sqrt{2}^4\right)=\ln(4)$$

Dès lors, pour n assez grand, $\ln(x_n)/n\geqslant\ln(4)$ donc $\ln(x_n)\geqslant n\ln(4)=\ln(4^n)$. Par croissance de l'exponentielle,

$$\boxed{x_n \geqslant 4^n \text{ pour } n \text{ assez grand.}}$$

Or, $4 > 1$ donc la suite géométrique (4^n) tend vers $+\infty$. D'après le théorème de minoration,

$$\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

1.(b) De même, $\left(\sqrt{2}-1\right)^4 < 1/2$ (et on est large) donc, pour n assez grand, $0 \leqslant y_n \leqslant (1/2)^n$ et on conclut de la même façon, à l'aide du théorème d'encadrement.

$$\boxed{y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

1.(c) Soit (u_n) une suite bornée vérifiant (R). Il existe donc λ et μ tels que, pour tout n, $u_n = \lambda x_n + \mu y_n$. On sait que $\mu x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Dès lors, si $\lambda = 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ selon le signe de λ ce qui est absurde car (u_n) est bornée. On en déduit que $\lambda = 0$. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{Une suite bornée qui vérifie la relation de récurrence (R) est proportionnelle à } (y_n).}$$

2.(a) On a successivement

- $a_0 = \binom{0}{0}^2\binom{0}{0}^2 = 1$
- $a_1 = \binom{1}{0}^2\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2\binom{2}{1}^2 = 5$
- $b_0 = 0$ car, lorsque $n = 0$, $k = 0$, les sommes définissant $c_{n,k}$ sont indexées par l'ensemble vide donc sont nulles.
- $b_1 = \binom{1}{0}^2\binom{1}{0}^2 c_{1,0} + \binom{1}{1}^2\binom{2}{1}^2 c_{1,1} = 4c_{1,1}$. Or, $c_{1,k} = 1$ (la première somme vaut 1 et la deuxième est nulle) et

$$c_{1,1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{1} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{1}{m}\binom{1+m}{m}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{a_0 = 1, a_1 = 5, b_0 = 0 \text{ et } b_1 = 6}$$

2.(b) Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, notons H_n : « $b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1} = 6/n^3$ ».
- H_1 est vraie d'après la question précédente.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
b_{n+1}a_n - a_{n+1}b_n &= \frac{1}{(n+1)^3}\left((34n^3+51n^2+27n+5)b_n - n^3 b_{n-1}\right)a_n - \frac{1}{(n+1)^3}\left((34n^3+51n^2+27n+5)a_n - n^3 a_{n-1}\right)b_n \\
&= \frac{-n^3}{(n+1)^3}a_n b_{n-1} + \frac{n^3}{(n+1)^3}a_{n-1}b_n \\
&= \frac{n^3}{(n+1)^3}(b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1}) \\
&= \frac{n^3}{(n+1)^3} \times \frac{6}{n^3} && \text{(HR)} \\
&= \frac{6}{(n+1)^3}
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, b_n a_{n-1} - a_n b_{n-1} = \frac{6}{n^3}}$$

3 La suite (a_n) est à valeurs strictement positives. D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant 1$, en divisant par $a_n a_{n-1}$:

$$\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{6}{n^3 a_n a_{n-1}} > 0$$

si bien que la suite (b_n/a_n) est strictement croissante. Puisqu'elle converge vers $\zeta(3)$, $\zeta(3) > b_n/a_n$ pour tout n donc $(a_n > 0)$ $a_n\zeta(3) > b_n$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{a_n\zeta(3) - b_n > 0 \text{ pour tout } n}$$

4 Les suites (a_n) et (b_n) vérifient la relation de récurrence (R). Soit $n \geqslant 1$. On a :

$(n+1)^3 a_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)a_n + n^3 a_{n-1} = 0$ et $(n+1)^3 b_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)b_n + n^3 b_{n-1} = 0$

Il suffit de multiplier la première égalité par $\zeta(3)$ et de faire la différence :

$$(n+1)^3(a_{n+1}\zeta(3) - b_{n+1}) - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5)(a_n\zeta(3) - b_n) + n^3(a_{n-1}\zeta(3) - b_{n-1}) = 0$$

En d'autres termes :

$$\boxed{\text{La suite de terme général } a_n\zeta(3) - b_n \text{ vérifie la relation de récurrence (R).}}$$

5.(a) D'après la question 2.(b), en divisant par a_k et a_{k-1} :

$$\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} = \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}}$$

Il suffit ensuite de sommer de $n+1$ à N en remarquant qu'on obtient à gauche une somme télescopique :

$$\boxed{\frac{b_{\mathrm{N}}}{a_{\mathrm{N}}} - \frac{b_n}{a_n} = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{6}{k^3 a_k a_{k-1}}}$$

5.(b) Un coefficient binomial étant positif, d'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$,

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \geqslant \binom{n}{k}$$

Si $k = 0$, il y a égalité (les deux coefficients binomiaux valent 1) donc l'inégalité est encore valable. On aurait pu également calculer le quotient des deux coefficients binomiaux, simplifier les factorielles, et voir que le rapport est supérieur à 1 ce qui permet de conclure **car les termes sont strictement positifs**.

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\, n]\!], \binom{n}{k} \leqslant \binom{n+1}{k}}$$

Dès lors, par produit de termes positifs :

$$\forall k \in [\![0\,;\, n]\!], \binom{n}{k} \times \binom{n+k}{k} \leqslant \binom{n+1}{k} \times \binom{n+1+k}{k}$$

Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ puis par somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \times \binom{n+k}{k}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}^2 \times \binom{n+1+k}{k}^2$$

Enfin, en ajoutant $\binom{n+1}{n+1}^2 \binom{n+1+n+1}{n+1}^2$ positif au membre de droite :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \times \binom{n+k}{k}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k}^2 \times \binom{n+1+k}{k}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}^2 \times \binom{n+1+k}{k}^2$$

c'est-à-dire que $a_n \leqslant a_{n+1}$: $\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est croissante.}}$

En multipliant l'égalité de la question précédente par a_n il vient :

$$a_n \times \frac{b_{\mathrm{N}}}{a_{\mathrm{N}}} - b_n = \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{6}{k^3} \times \frac{a_n}{a_k a_{k+1}}$$

La suite (a_n) étant croissante et strictement positive, pour tout $k \geqslant n+1$, $a_n \leqslant a_k$ donc $a_n/a_k \leqslant 1$ et $a_{k+1} \geqslant 1$ donc $a_n/(a_k a_{k+1}) \leqslant 1$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{a_n \times \frac{b_\mathrm{N}}{a_\mathrm{N}} - b_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{6}{k^3}}$$

5.(c) Si $k \geqslant 2$, alors $k^3 \geqslant k^2 \geqslant k^2 - k = k(k-1)$ puis l'inégalité demandée découle de la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. Par somme et d'après la question précédente :

$$a_n \times \frac{b_\mathrm{N}}{a_\mathrm{N}} - b_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{6}{k^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{6}{k(k-1)} = 6\sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{6}{n} - \frac{6}{\mathrm{N}} \leqslant \frac{6}{n}$$

L'inégalité large passant à la limite (quand $\mathrm{N} \to +\infty$), on en déduit que $a_n\zeta(3) - b_n \leqslant 6/n \leqslant 6$ donc

$$\boxed{\text{La suite de terme général } (a_n\zeta(3) - b_n) \text{ est bornée.}}$$

> Mieux : elle tend vers 0 d'après le théorème d'encadrement, puisqu'on a montré que, pour tout n, $0 < a_n\zeta(3) - b_n \leqslant 6/n$, et en particulier elle est bornée (car une suite convergente est bornée).

6 Il en découle que la suite $(a_n\zeta(3) - b_n)$ est bornée et vérifie la relation de récurrence (R). D'après la question 1.(c), il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n\zeta(3) - b_n = \mu y_n$. Or, les suites (y_n) (par hypothèse) et $(a_n\zeta(3) - b_n)$ (d'après la question 3) sont strictement positives donc $\mu > 0$. Soit $n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}(a_n\zeta(3) - b_n)^{1/n} &= e^{\frac{1}{n}\ln(a_n\zeta(3) - b°n)} \\ &= e^{\frac{1}{n}(\ln(\mu) + \ln(y_n))}\end{aligned}$$

Or, $\ln(\mu)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(y_n)/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left((\sqrt{2}-1)^4\right)$. On en déduit que

$$\frac{\ln(\mu) + \ln(y_n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left((\sqrt{2}-1)^4\right)$$

Le résultat en découle par continuité de l'exponentielle.

$$\boxed{(a_n\zeta(3) - b_n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\sqrt{2}-1\right)^4}$$

Partie IV. Où l'on montre que $2{\Delta_n}^3 b_n$ est un entier

1 Supposons que pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} \in \mathbb{Z}$. Un coefficient binomial étant un entier, et un produit d'entiers étant un entier, pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$,

$$\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 2{\Delta_n}^3 c_{n,k} = 2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}c_{n,k} \times \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k} \in \mathbb{Z}$$

Une somme d'entiers étant un entier, $2{\Delta_n}^3 b_n \in \mathbb{Z}$.

$$\boxed{\text{Si on arrive à prouver que, pour tout } k \in [\![0 ; n]\!],\ 2{\Delta_n}^3\tbinom{n+k}{k}c_{n,k} \in \mathbb{Z}, \text{ alors c'est bon.}}$$

2 Soit $m \in [\![1 ; n]\!]$. Alors m divise Δ_n donc m^3 divise ${\Delta_n}^3$ (car il existe k tel que $\Delta_n = km$ donc ${\Delta_n}^3 = k^3m^3$) si bien que ${\Delta_n}^3/m^3 \in \mathbb{Z}$. Par somme,

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{{\Delta_n}^3}{m^3} \in \mathbb{Z}$$

En multipliant par $2\binom{n+k}{k}$ qui est un entier, on en déduit que

$$\boxed{2\binom{n+k}{k}{\Delta_n}^3 \times \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} \in \mathbb{Z}}$$

3.(a) Il suffit de l'écrire avec des factorielles.

$$\boxed{\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{n}{m}\binom{k}{m}}}$$

3.(b) Notons V la valuation p-adique de gauche. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} &= v_p\left(\frac{{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k-m}}{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}\right)\\
&= v_p\left({\Delta_n}^3\right) + v_p\left(\binom{n+k}{k}\right) - v_p\left(m^3\right) - v_p\left(\binom{n}{m}\right) - v_p\left(\binom{k}{m}\right)\\
&= 3v_p\left(\Delta_n\right) + v_p\left(\binom{n+k}{k}\right) - 3v_p\left(m\right) - v_p\left(\binom{n}{m}\right) - v_p\left(\binom{k}{m}\right)
\end{aligned}$$

Il suffit de voir que $v_p\left(\binom{n+k}{k}\right) \geqslant 0$ puisque $\binom{n+k}{k}$ est un entier.

$$\boxed{v_p\left(\frac{{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right) \geqslant 3v_p(\Delta_n) - 3v_p(m) - v_p\left(\binom{n}{m}\right) - v_p\left(\binom{k}{m}\right)}$$

4.(a) Soit $i \leqslant v_p(m)$. Alors p^i divise m donc m/p^i est un entier donc est égal à sa partie entière. Dès lors (rappelons qu'on peut sortir les constantes **additives** de la partie entière lorsque ce sont des **entiers**),

$$\boxed{\text{Si } i \leqslant v_p(m),\ \left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n-m}{p^i} + \frac{m}{p^i}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + \frac{m}{p^i} = \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor}$$

Supposons à présent que $i > v_p(m)$. Alors

$$\frac{n-m}{p^i} < \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{m}{p^i} < \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor + 1$$

Par somme

$$\frac{n}{p^i} < \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor + 2$$

Or, par définition de la partie entière, $\lfloor n/p^i\rfloor \leqslant n/p^i$ si bien que

$$\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor < \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor + 2$$

Or, on manipule des entiers, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Si } i > v_p(m),\ \left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor \leqslant \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor + 1}$$

> On n'a utilisé nulle part le fait que $i > v_p(m)$, ce résultat est donc toujours vrai (cf. exercice 21 du chapitre 2). Là où comparer i à $v_p(m)$ est utile, c'est dans la première partie de la question.

4.(b) Tout d'abord, à l'aide de l'expression du coefficient binomial à l'aide des factorielles, $v_p\left(\binom{n}{m}\right) = v_p(n!) - v_p(m!) - v_p((n-m)!)$. D'après la formule de Legendre,

$$v_p\left(\binom{n}{m}\right) = \sum_{i=1}^{\alpha_n}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor\right)$$

D'après la question précédente, cette somme est nulle lorsque $i \leqslant v_p(m)$ si bien que

$$v_p\left(\binom{n}{m}\right) = \sum_{i=v_p(m)+1}^{\alpha_n}\left(\left\lfloor\frac{n}{p^i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{m}{p^i}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{n-m}{p^i}\right\rfloor\right)$$

Toujours d'après la question précédente, tous les termes de cette somme sont inférieurs à 1 ce qui permet de conclure :

$$\boxed{v_p\left(\binom{n}{m}\right) \leqslant \sum_{i=v_p(m)+1}^{\alpha_n} 1 = \alpha_n - v_p(m)}$$

4.(c) L'inégalité $p^{v_p(\Delta_n)}$ a déjà été prouvée dans le DM n° 6. Supposons que $p^{v_p(\Delta_n)+1} \leqslant n$. Posons $m = p^{v_p(\Delta_n)+1}$. Alors $v_p(m) = v_p(\Delta_n) + 1 > v_p(\Delta_n)$ mais $m \leqslant n$ donc $v_p(\Delta_n) = \max(v_p(1), \dots, v_p(n)) \geqslant v_p(m)$ ce qui est absurde.

$$\boxed{p^{v_p(\Delta_n)} \leqslant n < p^{v_p(\Delta_n)+1}}$$

Par stricte croissance du ln, $v_p(\Delta_n)\ln(p) \leqslant \ln(n) < (v_p(\Delta_n)+1)\ln(p)$. En divisant par $\ln(p) > 0$, on obtient :

$$v_p(\Delta_n) \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(p)} < v_p(\Delta_n) + 1$$

ce qui permet de conclure puisque $v_p(\Delta_n)$ est un entier.

$$\boxed{v_p(\Delta_n) = \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor = \alpha_n}$$

4.(d) Notons encore v la valuation p-adique de gauche. D'après la question 3.(b) et la question 4.(b) :

$$\mathrm{V} \geqslant 3v_p(\Delta_n) - 3v_p(m) - \alpha_n - v_p(m) - \alpha_k - v_p(m) = 3v_p(\Delta_n) - v_p(m) - \alpha_n - \alpha_k$$

Or, d'après la question précédente, $v_p(\Delta_n) = \alpha_n$ donc $3v_p(\Delta_n) - \alpha_n = 2\alpha_n = \alpha_n + \alpha_n$ ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{v_p\left(\frac{{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right) \geqslant (v_p(\Delta_n) - v_p(m)) + \alpha_n - \alpha_k}$$

4.(e) m divise Δ_n puisque $m \leqslant n$ donc $v_p(m) \leqslant v_p(\Delta_n)$. De plus, $k \leqslant n$ et la fonction ln et la fonction partie entière sont croissantes (sans compter que $\ln(p) > 0$), si bien que

$$\alpha_n = \lfloor \ln(n) \rfloor \ln(p) \geqslant \lfloor \ln(k) \rfloor \ln(p) = \alpha_k$$

On en déduit que

$$v_p\left(\frac{{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right) \geqslant 0$$

c'est-à-dire que

$$\frac{{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \in \mathbb{Z}$$

Dès lors, la somme

$$\sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1} 2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

est un entier car est une somme d'entiers. Or,

$$2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k} = 2\binom{n+k}{k}{\Delta_n}^3 \times \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1} 2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}$$

D'après la question 2, le premier terme est un entier : cela permet d'affirmer que $2{\Delta_n}^3\binom{n+k}{k}$ est un entier, ce qui permet de conclure d'après la question 1.

$$\boxed{2{\Delta_n}^3 b_n \in \mathbb{Z}}$$

Partie V. Où l'on prouve le théorème d'Apéry

1 Soit $n \geqslant 1$. Puisque $\zeta(3) = p/q$ avec p et q entiers strictement positifs, alors $q\zeta(3) \in \mathbb{N}^*$ donc $2q{\Delta_n}^3 a_n \zeta(3) \in \mathbb{N}^*$ (rappelons que $a_n \in \mathbb{N}^*$ et $\Delta_n \in \mathbb{N}^*$ car c'est un PPCM). De plus, d'après la partie précédente, $2{\Delta_n}^3 b_n \in \mathbb{Z}$ donc

$$2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n) = 2q{\Delta_n}^3 a_n\zeta(3) - 2q{\Delta_n}^3 b_n \in \mathbb{Z}$$

Enfin, $a_n\zeta(3) - b_n > 0$ d'après la question 3 de la partie III, et $2q{\Delta_n}^3 > 0$, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant 1,\ 2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n) \text{ est un entier strictement positif donc supérieur ou égal à 1.}}$$

2 Soit $n \geqslant 1$. D'après le résultat prouvé au DM n° 6, $\Delta_n \leqslant e^{\pi(n)\ln(n)}$. Or, d'après le théorème des nombres premiers, $\pi(n) \times \ln(n)/n \leqslant \ln(3)$ pour n assez grand donc $\pi(n) \times \ln(n) \leqslant n\ln(3)$ pour n assez grand si bien que, l'exponentielle étant croissante :

$$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand, } \Delta_n \leqslant e^{n\ln(3)} = 3^n}$$

3 Soit $n \geqslant 1$. D'après la question précédente, pour n assez grand, $2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3)-b_n) \leqslant 2q27^n(a_n\zeta(3)-b_n)$ puisque $3^3 = 27$. La fonction $x \mapsto x^{1/n}$ étant croissante,

$$\left(2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n)\right)^{1/n} \leqslant (2q)^{1/n} \times 27 \times (a_n\zeta(3) - b_n)^{1/n}$$

Or, $(2q)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (il suffit de l'écrire sous forme exponentielle) et, d'après la question 5 de la partie III,

$$(a_n\zeta(3) - b_n)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(\sqrt{2} - 1\right)^4$$

Par conséquent,

$$\left(2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n)\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 27\left(\sqrt{2} - 1\right)^4$$

Soit m tel que $27\left(\sqrt{2} - 1\right)^4 < m < 1$ (prendre le milieu entre $27\left(\sqrt{2} - 1\right)^4$ et 1 par exemple). Pour n assez grand, $\left(2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n)\right)^{1/n} \leqslant m$ donc $0 \leqslant 2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n) \leqslant m^n$. Or, $m < 1$ donc la suite géométrique (m^n) tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{2q{\Delta_n}^3(a_n\zeta(3) - b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

ce qui est absurde car cette quantité est supérieure ou égale à 1 d'après la question 1.

$$\boxed{\zeta(3) \notin \mathbb{Q}}$$

Pourquoi ce nom bizarre $\zeta(3)$? En fait c'est la valeur d'une certaine fonction en 2, la fonction ζ de Riemann. On définit la fonction ζ par

$$\zeta(s) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

à condition, évidemment, que cette limite existe (la notation avec la somme infinie prendra tout son sens au deuxième semestre). On montrera également au deuxième semestre que la fonction ζ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$. On peut par exemple montrer (on le fera peut-être en DM plus tard dans l'année) que

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

Et ce n'est pas tout ! On peut montrer que si $p \geqslant 1$, il existe $r_p \in \mathbb{Q}$ (que l'on peut calculer, cf. chapitre 24) tel que $\zeta(2p) = r_p \times \pi^{2p}$ (Euler, 1755). Par contre, on ne sait rien ou presque de la limite quand l'exposant est un nombre impair supérieur ou égal à 3 (on ne connaît par exemple pas de forme close pour les $\zeta(2p+1)$). Ce qu'on sait pour l'instant est très modeste : on vient de prouver que $\zeta(3)$ est irrationnel (Apéry, 1978), on sait que parmi $(\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \zeta(11))$, il y a au moins un irrationnel (Zudilin, 2001) et qu'il y a une infinité d'irrationnels parmi les $\zeta(2p+1)$ (Rivoal, 2000). On conjecture (entre autres) que les $\zeta(2p+1)$ sont tous irrationnels.