Devoir Surveillé n°7 - Sujet groupes B et C

Préliminaires

1. (Question de cours) Théorème du rang (énoncé précis, démonstration).
2. (Question de cours) Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (3z, x-2y, x) \end{array} \right.$
- $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x, y-1, x+z) \end{array} \right.$
- $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x^2, x-y, y-z) \end{array} \right.$

3. Donner la nature des séries $\sum \left(n^{1/n} - 1\right)$ et $\sum \dfrac{n^{2024}}{2^n}$.
4. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{(n+1)(n+3)}$ converge et donner la valeur de sa somme.
5. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante d'entiers tous supérieurs ou égaux à 2. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{x_0 \times \cdots \times x_n}$ converge et que sa somme est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{x_0 - 1}$.

Problème 1 - Développement en série de Engel

On dit qu'un réel $x \in \,]\,0\,;1\,]$ admet un développement en série de Engel s'il existe une suite croissante $(x_n)_{n\geq 0}$ d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_0 \cdots x_n}$$

On a montré la convergence d'une telle série dans les préliminaires, et toutes les séries utilisées dans ce problème seront de ce type. Ainsi, aucune justification concernant la convergence d'une série n'est attendue dans cet exercice, on pourra manipuler les sommes infinies directement.

Partie I – Analyse

On se donne dans cette partie un réel $x \in \,]\,0\,;1\,]$ et on suppose qu'il admet un développement en série de Engel, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ croissante d'entiers supérieurs ou égaux à 2 telle que l'égalité ci-dessus soit vérifiée.

1. Montrer que $x > 1/x_0$. En utilisant les préliminaires, montrer que $x_0 = \lfloor 1/x \rfloor + 1$.
2. Donner la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x_1 \cdots x_n}$ en fonction de x et de x_0. En déduire, à l'aide de la question précédente, une expression de x_1 en fonction de ces mêmes paramètres.
3. Expliquer rapidement comment calculer x_2, puis pourquoi la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est unique. On autorisera pour une fois une rédaction pas très formelle...

Partie II – L'algorithme de Briggs : la synthèse

On se donne dans cette partie un réel $x \in \,]\,0\,;1\,]$. L'algorithme de Briggs consiste à définir deux suites, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_n = \left\lfloor \dfrac{1}{u_n} \right\rfloor + 1 \\ \\ u_{n+1} = x_n u_n - 1 \end{array} \right.$$

1. Montrer que $x_0 \geq 2$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Les deux suites sont donc bien définies.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0 x_1} + \cdots + \frac{1}{x_0 \cdots x_n} + \frac{u_{n+1}}{x_0 \cdots x_n}$$

4. En déduire que $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x_0 \cdots x_n}$.

Partie III – Exemples explicites et caractérisation des rationnels

On se donne dans cette partie un réel $x \in \,]\,0\,;1\,]$ ainsi que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associées définies dans la partie précédente.

1. Donner la valeur de x lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante égale à 1789, puis lorsque $x_n = n+2$ pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est stationnaire, alors x est rationnel.
3. On souhaite montrer que la réciproque est vraie et on suppose donc dans la suite que x est un rationnel, que l'on note a/b avec a et b deux entiers naturels. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = a_n/b$.
4. Conclure. On rappelle (cf. chapitre 12) qu'une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ est stationnaire.
5. Redémontrer l'irrationnalité de e.

Problème 2 - Autour de la convergence en proba

Dans tout le problème, on dit qu'une suite[1] de variables aléatoires réelles[2] $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité (en abrégé : converge en proba) vers une variable aléatoire X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Avec les mains : « quand n est grand, il y a très peu de chances pour que X_n soit éloigné de X ».

Lorsque X sera une variable aléatoire constante presque sûrement, on pourra faire un (léger) échec de type et dire que (X_n) converge en loi vers la constante en question. Par exemple, on dire qu'une suite qui converge en proba vers 0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad P(|X_n| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Partie I - Premiers exemples

Les quatre questions de cette partie sont indépendantes.

1. On se donne une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et X une variable aléatoire.
   (a) Soit p un réel supérieur ou égal à 1. On suppose dans cette question uniquement que $E(|X_n - X|^p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que la suite (X_n) converge en proba vers X.
   (b) On suppose à présent que $E(X_n - X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $V(X_n - X) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. À l'aide de la formule de König-Huygens et de la question précédente, montrer que (X_n) converge en proba vers X.
   (c) Pour tout $n \geq 1$, on se donne une variable aléatoire X_n définie par $X_n(\Omega) = \{0; n\}$, $P(X_n = n) = 1/n$ et $P(X_n = 0) = 1 - 1/n$. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en proba vers 0 mais que la suite de terme général $E(|X_n - 0|)$ ne tend pas vers 0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes et $p \in [\,0\,;1\,]$. Pour tout $n \geq 1$, on suppose que $X_n \sim B(p)$ et on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Rappeler sans démonstration la loi de la variable aléatoire S_n, et prouver que la suite (S_n/n) converge en proba vers p.
3. Soit $X \sim B(1/2)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = 1 - X$. Montrer que, pour tout n, $X_n \sim X$ mais que la suite (X_n) ne converge pas en proba vers X.
4. Soit f uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Prouver que si (X_n) converge en proba vers X, alors $(f(X_n))$ converge en proba vers $f(X)$.

1. Nous débordons un peu du programme de première année : l'univers Ω étant fini en première année, on ne peut pas forcément construire des suites de variables aléatoires intéressantes (par exemple indépendantes, ou suivant chacune une loi donnée). Mais bon : Ω jouant comme d'habitude un rôle inerte, on ne soulèvera aucune difficulté sur ce point. On pourra donc sans problème manipuler des suites de variables aléatoires vérifiant les propriétés qui nous intéressent sans se poser de questions (et utiliser également sans se poser de questions les résultats du cours, même si les choses sont loin d'être aussi simples sur un univers infini, cf. cours de deuxième année).
2. Toutes les variables aléatoires de ce problème seront réelles, nous ne le préciserons plus dans la suite.

Partie II - « Unicité de la limite »

On se donne dans cette partie une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge en proba vers deux variables aléatoires X et Y. Le but de cette partie est de prouver que $X = Y$ presque sûrement, c'est-à-dire que $P(X = Y) = 1$.

1. (a) Soit $p \geq 1$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $|X - Y| \leq |X - X_n| + |X_n - Y|$ et en déduire que :

$$\left[|X-Y| \geq \frac{1}{p}\right] \subset \left(\left[|X - X_n| \geq \frac{1}{2p}\right] \cup \left[|X_n - Y| \geq \frac{1}{2p}\right]\right)$$

   (b) En déduire que $P\left(|X - Y| \geq \dfrac{1}{p}\right) = 0$.

2. Justifier par double inclusion que : $[|X - Y| > 0] = \displaystyle\bigcup_{p=1}^{+\infty} \left[|X - Y| \geq \frac{1}{p}\right]$.

3. Conclure. On pourra utiliser le résultat suivant, qui découle de la question précédente et du cours de deuxième année [3] :

$$P(|X - Y| > 0) \leq \sum_{p=1}^{+\infty} P\left(|X - Y| \geq \frac{1}{p}\right)$$

4. S'inspirer des questions précédentes pour prouver que, si (X_n) converge en proba vers X et (Y_n) converge en proba vers Y, alors $(X_n + Y_n)$ converge en proba vers $X + Y$.

Partie III - Convergence en proba dans un jeu de Pile ou Face

On joue à Pile ou Face (de façon indépendante, et avec une pièce équilibrée). Pour tout $n \geq 1$, on note e_n la variable aléatoire qui vaut 1 si on a obtenu un nombre pair de Pile parmi les n premiers lancers, et qui vaut 0 sinon. De plus, pour tout n, on note X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si le n-ième lancer donne Pile, et qui donne 0 sinon.

1. (a) Soit $n \geq 2$. Exprimer $P(e_n = 1)$ en fonction de $P(e_{n-1} = 0)$ et de $P(e_{n-1} = 1)$.
   (b) En conclure que, pour tout $n \geq 1$, $e_n \sim B(1/2)$.
2. Soit $n \geq 3$.
   (a) Soit $(x_1, \dots, x_{n-2}) \in \{0;1\}^{n-2}$. Justifier que :

   $$[e_1 = x_1] \cap \dots \cap [e_{n-2} = x_{n-2}] \cap [e_{n-1} = 1] \cap [e_n = 1] = [e_1 = x_1] \cap \dots \cap [e_{n-2} = x_{n-2}] \cap [e_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]$$

   En déduire que :

   $$P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1, e_n = 1) = P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = 1) \times P(e_n = 1)$$

   (b) On peut aisément généraliser le résultat de la question précédente (et donc on l'admettra) : pour tout $n \geq 2$ et tout $(x_1, \dots, x_n) \in \{0;1\}^n$,

   $$P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = x_{n-1}, e_n = x_n) = P(e_1 = x_1, \dots, e_{n-2} = x_{n-2}, e_{n-1} = x_{n-1}) \times P(e_n = x_n)$$

   Justifier que la suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

   (c) Utiliser la partie I pour prouver que la suite (de variables aléatoires) de terme général $\dfrac{e_1 + \dots + e_n}{n}$ converge en proba vers un réel ℓ que l'on précisera.

3. Dans cette question, on se donne un entier $n \geq 1$ et on pose $T_n = \dfrac{e_1e_2 + \dots + e_ne_{n+1}}{n}$.
   (a) Prouver que $E(T_n) = 1/4$.
   (b) Justifier que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $V(e_ie_{i+1}) = 3/16$.
   (c) Calculer $V(T_n)$.
   (d) Prouver que (T_n) converge en proba vers $1/4$.

Fin

3. On a dit qu'on ne soulèverait aucune difficulté à ce sujet. De plus, c'est une généralisation de ce que nous avons vu, cela ne devrait pas vous choquer.