Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Premier semestre - Préliminaires - Chapitres 0 à 9.

« Vous qui entrez laissez toute espérance. »
Dante, La Divine Comédie.

Table des matières

Chapitre 0

Prépa begins

« Tel un enseignement fondé sur une tradition minée par le doute, [. . .] elle lançait dans toutes les directions des regards de jeune gazelle effarouchée [. . .] La vue de Sitā dans un tel état troubla Hanumān, de même que l'ignorant des voies de la concentration mentale est jeté dans la perplexité par la connaissance des Veda. Il avait du mal à la reconnaître sans ses ornements, devenue pareille à une phrase incorrectement construite qui prête à contresens. »

Vālmīki, Le Rāmāyaṇa.

0.1 Logique.

0.1.1 Logique propositionnelle.

Exercice 1 : ✪ Soit A une assertion. Montrer les équivalences (intuitives !) suivantes :

1. $\text{non}(\text{non}(A)) \iff A$.
2. $(A \text{ et } A) \iff A$.
3. $(A \text{ ou } A) \iff A$.

Exercice 2 : ✪ Soient A, B, C trois assertions.

1. $((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$ est-elle équivalente à $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$?
2. $((A \Rightarrow B) \text{ ou } C)$ est-elle équivalente à $((A \Rightarrow C) \text{ ou } B)$?
3. $((A \Rightarrow B) \text{ et } C)$ est-elle équivalente à $(A \text{ et } C) \Rightarrow (B \text{ et } C)$?
4. $A \Rightarrow B$ est-elle équivalente à $(\text{non}(A)) \text{ ou } B$?
5. $((A \text{ ou } B) \Rightarrow C)$ est-elle équivalence à $((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow C))$?

Exercice 3 - Le connecteur de Sheffer : ✪✪ On définit un nouveau connecteur logique, noté $\uparrow$ (parfois appelé connecteur de Sheffer, ou nand) en posant, lorsque p et q sont des assertions : $p \uparrow q \iff \text{non}(p \text{ et } q)$.

1. Dire « en français » quand $p \uparrow q$ est vraie.
2. Construire sans démonstration la table de vérité de $\uparrow$. La suite de l'exercice se fera sans table de vérité, mais en utilisant les lois de Morgan et l'exercice 1.
3. Simplifier $p \uparrow p$, ainsi que $(p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$.
4. En déduire une assertion équivalente à p et q ne contenant que p, q et $\uparrow$ (éventuellement plusieurs fois). Par conséquent, toute assertion contenant les connecteurs non, ou, et peut être réécrite en utilisant uniquement le connecteur $\uparrow$. On dit qu'il forme un système complet.

0.1.2 Quantificateurs, négation et contraposée.

Exercice : ✪ Le dialogue suivant [1] est tiré de l'excellent film de Bertrand Blier : Les Acteurs.

- Jacques Villeret : « On ne va pas jeter la pierre à un acteur qui boit. Un bon acteur, ça boit ! »
- Jean-Pierre Marielle : « Gérard Philipe ne buvait pas ! »
- André Dussollier : « Laurence Olivier non plus. »
- Jacques Villeret : « Carmet buvait. »
- Jean-Pierre Marielle : « Carmet, d'accord, Carmet... »
- Jacques Villeret : « Depardieu boit. »

1. L'abus d'alcool est dangereux pour la santé, à consommer avec modération.

- Jean-Pierre Marielle : « Ah, Depardieu, d'accord ! »

En donnant des exemples pour étayer leur position, qui, parmi Jacques Villeret, Jean-Pierre Marielle et André Dussollier, a un raisonnement rigoureux ?

Exercice 4 : ✪ Nier toutes les affirmations suivantes, et donner la contraposée des affirmations 1 à 5 :

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Tous les colleurs de mauvaise humeur mettent en-dessous de la moyenne.
3. À chaque fois qu'un élève connaît son cours, cela rend le professeur content.
4. Si $r \in \mathbb{Q}$ alors $r^2 \in \mathbb{Q}$.
5. Si f est dérivable alors f est continue.
6. Tous les garçons de la classe ont une mère qui a au moins un frère.
7. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ vraie $\Rightarrow P(n+1)$ vraie.
8. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow (\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0)$
9. $\forall (a,b) \in A^2, ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$
10. $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \exists N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), MN = I_n$.
11. $\exists x \in G, \forall y \in G, xy = yx$
12. $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y$.
13. $\forall (P,Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, PQ = QP$.
14. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.
15. $\forall A > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n \geq A$.
16. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$.
17. $\forall (x,y) \in I^2, x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$.
18. $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, \exists \alpha \in A, \forall y \in B(x, \varepsilon), y \in O_\alpha$.
19. $(\exists x \in \mathbb{R}, e^x = 2)$ et $(\forall y \in \mathbb{R}, e^y = 2 \Rightarrow y = x)$

Exercice 5 : ✪ Écrire les propositions suivantes, ainsi que leurs négations, avec des quantificateurs :

1. f est l'identité de $\mathbb{R}$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ envoie les rationnels sur des rationnels.
3. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.
4. Il y a une valeur que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend deux fois.
5. n est un nombre pair.
6. f est positive sur $\mathbb{R}^+$.
7. f est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
8. f s'annule sur $\mathbb{R}$.
9. f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.
10. f est constante sur $\mathbb{R}$.
11. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
12. f est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et strictement négative sur $\mathbb{R}^{-*}$.
13. Il existe un réel ayant deux antécédents par f.
14. Il existe un réel n'ayant aucun antécédent par f.
15. f est à valeurs dans $[-1\,;1]$.
16. Tous les éléments de $[-1\,;1]$ sont atteints par f.
17. Tout réel admet un unique antécédent par f.
18. Tout réel admet une unique image par f.
19. Tout réel positif est le carré d'un réel.
20. Tout entier naturel est la somme de quatre carrés d'entiers naturels.

Exercice 6 - Critère de Miller-Rabin : ✪✪ Donner la contraposée de l'affirmation suivante : « Si $2^s \times t + 1$ est premier, alors pour tout $a \in [\![1\,;\, 2^s \times t]\!], a^t \equiv 1 [2^s \times t + 1]$ ou il existe $i \in [\![0\,;\, s-1]\!]$ tel que $a^{2^i t} \equiv -1 [2^s \times t + 1]$. »

Exercice 7 - Un peu de théorie des ensembles : ✪✪ Nier les axiomes suivants :

- **Axiome d'extensionnalité :** $\forall E, \forall F, \forall x, (x \in E \iff x \in F) \Rightarrow E = F$
- **Axiome de la somme :** $\forall E, \exists F, \forall x, [x \in F \iff \exists a (a \in E$ et $x \in a)]$
- **Axiome de l'ensemble des parties :** $\forall E, \exists F, \forall G, G \in F \iff G \subset E$
- **Axiome de l'infini :** $\exists E, [0 \in E$ et $\forall x, (x \in E \Rightarrow x + 1 \in E)]$

0.1.3 Premiers modes de raisonnement.

Exercice 8 : ✪ Déterminer si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse (en le démontrant).

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq x^2 \leq M$.
2. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq x^2 \leq M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, m \leq \sin(x) \leq M$.
4. $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq \sin(x) \leq M$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y < x$.
6. $\exists x \in [\,0\,;1\,], \forall y \in [\,0\,;1\,], x \leq y$.
7. $1+1=2 \Rightarrow 1+1=3$.
8. $1+1=3 \Rightarrow 1+1=2$.
9. $1=0 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}, 3=2k$.
10. $\forall x \in \mathbb{R}, x > 2 \Rightarrow x \geq 3$.
11. $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^*)^2, x < y \Rightarrow \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$.
12. $\exists x \in \mathbb{R}_+, x < \sqrt{x}$.
13. $\exists ! x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 0$.
14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+m$ soit impair.
15. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \times m$ soit impair.
16. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
17. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
18. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
19. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x+y > 0$.
20. $\forall (x,y) \in \mathbb{N}^2, \exists z \in \mathbb{N}, \sqrt{z} > x+y$.
21. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \ln(\ln(y)) > x$.
22. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0 \Rightarrow (x=y=0)$.
23. Il existe f et g croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f-g$ soit la fonction nulle (une fonction différence de deux fonctions croissantes est dite à variations bornées).

Exercice 9 - Autour de la conjecture de Goldbach : ✪

- La conjecture de Goldbach est : « Tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers ».
- La conjecture de Goldbach faible est : « Tout nombre impair supérieur ou égal à 7 est somme de trois nombres premiers ».

1. Montrer que la conjecture implique la conjecture faible.
2. En 2013, Harald Helfgott a démontré la conjecture de Goldbach faible (enfin, il a proposé une preuve qui est encore en cours de vérification, mais bon...). Que peut-on en déduire concernant la conjecture ?

Exercice 10 : ✪✪ Soit $r \in \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence suivante, vue en cours :

$$\exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, r = \frac{p}{q} \iff \exists (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, r = \frac{p}{q}$$

Exercice 11 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Prouver l'équivalence suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) = f(y) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda$$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et soit $L \in \mathbb{R}$. Prouver les équivalences suivantes :

1. $(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq \varepsilon) \iff (\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - L| \leq 2\varepsilon)$.
2. $(\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A) \iff (\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A)$.

0.2 Pour s'amuser.

Exercice 13 : ✪ Pierre le fermier sait prévoir à l'avance le temps qu'il fera en regardant son chat se passer la patte derrière les oreilles. S'il pleut, il reste chez lui. Cependant, s'il fait beau, parfois, comme tout ancien élève de prépa, il est atteint de flemmingite aiguë et ne sort pas non plus. Si Pierre le fermier ne sort pas, que puis-je en conclure ? Et s'il sort ?

Exercice 14 : ✪ Il y a fort fort longtemps, dans un lycée fort fort lointain, il y avait deux classes de première année, notées S1A et S1B, et deux classes de deuxième année, notées S2A et S2B. La seule règle pour l'affectation des élèves est la suivante : les élèves ne faisant pas anglais LV1 vont en B (S1B puis S2B).

1. Que peut-on affirmer au sujet d'un élève de première année :

   (a) se trouvant en S1B ? (b) se trouvant en S1A ? (c) faisant anglais LV1 ? (d) faisant allemand LV1 ?

2. Dans chacun des cas ci-dessus, peut-on dire dans quelle classe se trouvera l'élève en seconde année ?

Exercice 15 - Tâche de sélection de Wason : ✪ On dispose de quatre cartes, chacune comportant un chiffre sur un côté et une lettre sur l'autre. On place les quatre cartes sur la table :

D **F** **3** **7**

On nous dit :

« Si une carte a un D sur l'un des côtés, alors elle a un 3 sur l'autre. »

Quelles sont les cartes qu'il faut retourner pour savoir si cette règle est vraie ?

Exercice 16 : ✪✪ Une feuille de papier comporte les cent affirmations suivantes :
- Cette feuille contient exactement une phrase fausse.
- Cette feuille contient exactement deux phrases fausses.

  $\vdots$
- Cette feuille contient exactement cent phrases fausses.

Quelles sont les affirmations vraies écrites sur cette feuille ?

0.3 Notation d'ensembles.

Exercice 17 : ✪ Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1. L'ensemble des entiers naturels divisibles par 7.
2. L'ensemble des fractions d'entiers (relatifs) dont le dénominateur est une puissance de 3.
3. L'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés d'entiers.
4. L'ensemble des inverses d'entiers naturels (non nuls).
5. L'ensemble des carrés parfaits.

Exercice 18 : ✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit

$$A = \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,\middle|\, (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$$

Écrire l'assertion « $x \in A$ » avec des quantificateurs. Les réels $0, 1/6$ et 1 appartiennent-ils à A ?

0.4 Divers.

Exercice 19 : ✪ A votre avis, quelle(s) phrase(s) ai-je envie de lire dans une copie ?

1. S'il fait beau, alors la fonction sinus est nulle.
2. La fonction $\sin x$ s'annule en π.
3. Si $x = \pi$ alors la fonction sinus est nulle.
4. Si $x = \pi$ alors $\sin x = 0$.
5. $\sin x = 0$.
6. La fonction $x \mapsto \sin(x)$ s'annule en π.

Exercice 20 - Un peu de calcul : ✪

1. Donner le signe des quantités suivantes :

   (a) $e^{-1} + \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} - 1$

   (b) $3 - 4\ln(2)$

   (c) $\dfrac{\pi^2}{16} - \dfrac{1}{2}$

   (d) $\dfrac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

   (e) $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} - 2$

   (f) $e^2 - 10$

   (g) $\ln(3) - 1$

   (h) $\dfrac{\dfrac{120}{119} - \dfrac{1}{239}}{1 + \dfrac{120}{119 \times 239}} - 1$

2. Donner la valeur de $32 \times 28, 25^2, 26^2, 94^2$.
3. Donner en comptant sur ses doigts le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n > 100000$.

Exercice 21 : ✪ Donner une CNS sur $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fraction

$$f(a,b) = \frac{\dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b^2}{a-b}}{\dfrac{a+b}{2} - \dfrac{ab}{a+b}}$$

soit bien définie. Cette condition étant supposée remplie, simplifier $f(a,b)$ au maximum.

0.5 Bonus : l'alphabet grec et la conjugaison du verbe résoudre.

Présent :
Je résous
Tu résous
Il résout
Nous résolvons
Vous résolvez
Ils résolvent

Passé composé :
J'ai résolu
Tu as résolu
Il a résolu
Nous avons résolu
Vous avez résolu
Ils ont résolu

Impératif :
Résous
Résolvons
Résolvez

Minuscule	Majuscule	Français
α	A	alpha
β	B	bêta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	zêta
η	H	êta
θ	Θ	thêta
ι	I	iota
κ	K	kappa
λ	Λ	lambda
μ	M	mu
ν	N	nu
ξ	Ξ	xi
o	O	omicron
π	Π	pi
ρ	P	rhô
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Υ	upsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ	X	chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	oméga

Futur :
Je résoudrai
Tu résoudras
Il résoudra
Nous résoudrons
Vous résoudrez
Ils résoudront

Conditionnel présent :
Je résoudrais
Tu résoudrais
Il résoudrait
Nous résoudrions
Vous résoudriez
Ils résoudraient

Subjonctif présent :
Que je résolve
Que tu résolves
Qu'il résolve
Que nous résolvions
Que vous résolviez
Qu'ils résolvent

Chapitre 1

Différents types de raisonnements

« Ne dites donc point qu'une chose est possible, quand il est impossible qu'elle soit autrement. »

Gaston Leroux, Le mystère de la chambre jaune.

Exercice 1 : ✪ Pierre le fermier souhaite acheter un billet de loterie. Le buraliste, logicien à ses heures perdues, vous en présente cinq numérotés de 1 à 5 et lui déclare :

- Si 5 est perdant, alors 1 est gagnant.
- Si 4 est perdant, alors 2 est gagnant.
- Si 3 est perdant, alors 5 aussi.
- Si 1 est gagnant, alors 2 aussi.
- Si 3 est gagnant, alors 4 perdant.

Quel billet Pierre le fermier devrait-il prendre ?

Exercice 2 : ✪ Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Montrer : $(\forall \varepsilon > 0, A < B + \varepsilon) \Rightarrow A \leq B$. Réciproque ?

Exercice 3 : ✪ Montrer que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de façon unique sous la forme $f = g + h$ où h est constante et g est continue et vérifie $\displaystyle\int_0^{2023} g(t)dt = 0$.

Exercice 4 : ✪ Montrer que $\ln 5/\ln 2$ est irrationnel. En déduire que $\ln 10/\ln 2$ l'est également.

Exercice 5 - Inégalité de Bernoulli : ✪ Montrer que pour tout $x \geq -1$ et tout $n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 6 : ✪

1. Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{{u_n}^2}{u_{n-1}}$. Montrer que la suite (u_n) est bien définie puis exprimer u_n en fonction de n.
2. **Remake :** Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times {u_n}^2$. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 7 : ✪ Où sont les erreurs de raisonnement dans ce qui suit ?

- On va montrer par récurrence sur $n \geq 2$ que n points distincts quelconques du plan sont toujours alignés. C'est trivialement vrai pour $n = 2$. Soit $n \geq 2$. Supposons le résultat vrai au rang n et donnons nous $n+1$ points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ dans le plan. Par hypothèse de récurrence les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont sur une même droite, de même que les points $A_2, \ldots, A_{n+1}$. Or les deux droites sont égales car elles contiennent A_2 et A_3 qui sont distincts. Il en résulte que $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés ce qui termine la récurrence.
- On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que n crayons de couleur sont toujours de même couleur. C'est trivialement vrai pour $n = 1$. Soit $n \geq 1$. Supposons le résultat vrai au rang n et donnons nous $n+1$ crayons numérotés de 1 à $n+1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux n premiers crayons et aux n derniers, les n premiers crayons sont de la même couleur, et les n derniers également. Or, le crayon 2 est à la fois de la même couleur que les n premiers et que les n derniers, donc tous les n premiers crayons ainsi que les n derniers ont la même couleur que le crayon 2 donc tous les crayons ont la même couleur, ce qui clôt la récurrence.

Exercice 8 : ✪✪ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

Exercice 9 : ✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 0, n < 2^n$.

Exercice 10 : ✪✪ On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 \in]\,0\,;1\,[$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = 1 + \dfrac{u_{n-1}}{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (i.e. il existe a et b appartenant à $\mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$).

Exercice 11 : ✪✪ Soient r et s deux rationnels strictement positifs tels que $\sqrt{r}$ et $\sqrt{s}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{r}+\sqrt{s}$ est irrationnel.

Exercice 12 : ✪✪ Soit A une partie de $\mathbb{R}$ contenant n réels distincts. En raisonnant par récurrence, montrer que l'ensemble $B = \{x+y \mid (x,y) \in A^2\}$ contient au moins $2n-1$ éléments distincts.

Exercice 13 - Équation de Pell-Fermat : ✪✪

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers naturels $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(3+2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(3-2\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2}$ (où a_n et b_n sont les mêmes qu'à la question précédente).
3. Montrer qu'il existe une infinité de couple d'entiers naturels $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 14 : ✪✪ Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0, u_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} = {u_n}^2 + {u_{n+1}}^2.$$

Exercice 15 - La suite de Fibonacci : ✪✪ La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 & F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

On pose également $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

1. Montrer que φ et ψ sont racines d'un trinôme du second degré à coefficients entiers que l'on déterminera.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0, F_n = \dfrac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$.

Exercice 16 - Multiplication russe : ✪✪✪ Soient m et n deux entiers strictement positifs. Sur une première ligne (voir ci-contre un exemple avec $n = 11$ et $m = 17$), on écrit m et n. Sur la ligne suivante, on écrit le quotient (on oublie les décimales et le reste) de la division de n par 2 sous la valeur de n, on écrit $2m$ sous la valeur de m, et on recommence jusqu'à obtenir 1 sous la colonne de n.

$$\begin{array}{crr} & 11 & 17 \\ + & 5 & 34 \\ & \cancel{2} & \cancel{68} \\ + & 1 & 136 \\ \hline & & 187 \end{array}$$

En d'autres termes : à chaque ligne, dans la colonne de n, on divise par 2 (et on enlève les décimales) et dans la colonne de m, on multiplie par 2. Quand on a terminé, on barre les lignes dont le nombre situé en colonne des n (la première colonne dans notre exemple) est pair. Finalement, on somme les termes de la colonne de m (la seconde colonne dans notre exemple) non barrés, et on note $\varphi(n,m)$ l'entier obtenu. Montrer que pour tous n et m strictement positifs, $\varphi(n,m) = n \times m$.

Exercice 17 - $\mathbb{Q}$-liberté de $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$: ✪✪✪ On admet que $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels (nous le montrerons dans le chapitre 6).

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Q}^3$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$. Montrer que $a = b = c = 0$.
2. Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
3. L'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par deux points à coordonnées rationnelles recouvre-t-il $\mathbb{R}^2$?

Exercice 18 : ✪✪✪ Déterminer les réels x pour lesquels l'assertion suivante est vraie : $\forall y \in [\,0\,;1\,], (x \geq y \Rightarrow x \geq 2y)$.

Exercice 19 : ✪✪✪ Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit comme une somme de puissances de 2 distinctes.

Exercice 20 : ✪✪✪ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, f \circ f(n) < f(n+1)$.

1. Montrer que : $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, k \geq n \Rightarrow f(k) \geq n$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.
3. Montrer que f est strictement croissante.
4. Conclure.

Exercice 21 : ✪✪✪ On appelle taille d'une formule propositionnelle le nombre de connecteurs logiques (i.e. et, ou, non) qu'elle contient. Par exemple, « $x \leq y$ » est de taille 0 et « $(x = 2)$ou$((a = 1)$ et $(a = 4)$ ou non $(y \leq 2))$ » est de taille 4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, toute formule de taille n ne contenant que les connecteurs logiques ci-dessus est équivalente à une formule contenant au plus $3 \times 2^n - 3$ connecteurs $\uparrow$ (cf. exercice 3 du chapitre 0) et aucun autre connecteur logique.

Exercice 22 - Fonction 91 de MacCarthy : ✪✪✪ On définit sur $\mathbb{Z}$ la fonction f par :

$$f(n) = \begin{cases} n - 10 & \text{si } n > 100 \\ f(f(n+11)) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $f(101), f(100), f(99)$.
2. Montrer que pour tout $n \leq 101, f(n) = 91$.

Exercice 23 : ✪✪✪ Pierre le fermier a deux enclos, un rouge et un bleu, et il aimerait répartir ses poules dans chacun des enclos. Pour cela, il attribue des numéros à ses poules et attribue à chaque entier strictement positif la couleur rouge ou la couleur bleue (il enverra ensuite chaque poule dans l'enclos de même couleur qu'elle). Il suit la règle suivante : si trois entiers (distincts ou non) ont la même couleur, leur somme a également cette couleur. On sait que la couleur rouge a été attribuée à la poule numéro 59 et qu'il y a au moins une poule dans l'enclos bleu. Donner la couleur de chaque entier strictement positif.

Exercice 24 : ✪✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On écrit sur une ligne les entiers entre 0 et n. On écrit sur une seconde ligne les sommes de deux entiers consécutifs de la première ligne. On fait de même pour construire la ligne suivante, et on continue jusqu'à n'obtenir qu'un seul entier. Quelle est la valeur de cet entier ?

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 \;\dots & n-2 & & n-1 & & n \\
& 1 & & 3 & & 5 & & 7 & \dots & & 2n-3 & & 2n-1 & \\
& & 4 & & 8 & & 12 & & \dots & & & 4n-4 & & \\
& & & \ddots & & & & & & & \iddots & & & \\
& & & & & & & & ? & & & & &
\end{array}$$

Chapitre 2

Fonctions

« But I would walk 500 miles,
And I would walk 500 more. »

The Proclaimers, I'm gonna be (500 miles).

2.1 Divers.

Exercice 1 : ✪ Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$.

1. $x^2 = 9 \ldots x = 3$
2. $\ln x = -3 \ldots x = e^{-3}$
3. $x \geq x^2 \ldots x \geq 0$
4. $\sqrt{x}$ existe $\ldots x \geq 0$
5. $|x| \leq 3 \ldots 0 \leq x \leq 3$
6. $|x| \geq 5 \ldots 5 \leq x$
7. $x^2 \geq 4 \ldots x \geq 2$

Exercice 2 : ✪ Résoudre les équations suivantes :

1. $-\sqrt{x+2} = x$
2. $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$
3. $\sqrt{x^2+1} - 1 = 0$
4. $|x^2 - 8x + 11| = 4$
5. $|3x - 1| = \dfrac{3}{2}$
6. $\sqrt{x} + 1 = 2x$
7. $e^x + e^{-x} = 2$
8. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - x + 1}{x - 1} = 2 - x + x^2$
9. $(\ln x)^2 = -2 - 3\ln x$
10. $|x+1| + |2x+1| = 0$
11. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$
12. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$
13. $\dfrac{\ln(x)}{\ln(y)} = \dfrac{\ln(y)}{\ln(x)}$
14. $\ln(x) - \log(x) = 1.$

Exercice 3 : ✪ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Vérifier les égalités suivantes :

1. $\mathrm{ch}(x+y) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y) + \mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.

Exercice 4 : ✪✪ Résoudre les inéquations suivantes (x est un réel, n un entier) :

1. $|4 - 2x| \leq 8$
2. $15x^2 - 22x + 8 \leq 0$
3. $\dfrac{x}{x+1} \leq \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{1}{x(x-1)} \leq 1$
5. $\ln(3x+1) \leq \ln(2x-1)$
6. $\dfrac{\ln(n)}{\ln(3)} < \dfrac{\ln(7)}{\ln(2)}$
7. $\sqrt{x+5} \geq \sqrt{x^2-4}$.
8. $5 \times \dfrac{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{3}} \geq 7$
9. $2x - 7 - \sqrt{4x - 11} < 0.$
10. $x^6 + \dfrac{36}{x^2} > 13x^2.$

Exercice 5 : ✪✪ Soit a un réel strictement positif différent de 1. Résoudre l'inéquation : $\log_a(x) > \log_{a^2}(2 - 3x)$.

Exercice 6 : ✪✪ Soit $y \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations (d'inconnue x) $\mathrm{ch}(x) = y, \mathrm{sh}(x) = y$ et $\mathrm{th}(x) = y$. Illustrer par un dessin.

Exercice 7 : ✪✪ Vrai ou faux ? $\sqrt{208} + \sqrt{89} = \sqrt{569}$.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $y \leq x^2$. Montrer que

$$\sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - y}}{2}} + \sqrt{\frac{x - \sqrt{x^2 - y}}{2}}$$

Exercice 9 : ✪✪ Soit $a > 0$. Déterminer une constante C telle que, pour tous x et y appartenant à $[\,a\,;+\infty\,[$,

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq C|x - y|$$

Existe-t-il une constante C telle que l'inégalité précédente soit valable pour tous x et y appartenant à $\mathbb{R}_+$?

Exercice 10 : ✪✪✪ Donner les réels $a > 0$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x \geq x + 1$.

Exercice 11 : ✪✪✪ Soient a et b deux réels. Montrer que l'équation $x^2 - ax + b = 0$ admet des racines réelles qui appartiennent toutes à l'intervalle $[\,0\,;1\,]$ si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

- $a^2 - 4b \geq 0$
- $b \geq 0$
- $1 - a + b \geq 0$
- $0 \leq a \leq 2$

Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'ensemble des couples (a, b) vérifiant ces quatre conditions.

2.2 Ordre.

Exercice 12 : ✪✪ Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A, a_n > n$. Montrer que A n'est pas majorée.

Exercice 13 : ✪✪ Soient a et b deux réels. Préciser si les ensembles suivants sont majorés ou minorés et donner, lorsque c'est possible, leur plus petit et leur plus grand élément :

1. $]\,0\,;1\,[$
2. $\{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\}$
4. $\left\{ a + \dfrac{b}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
5. $\left\{ \dfrac{1}{n} + (-1)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
6. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
7. $\left\{ \dfrac{p}{n+p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$
8. $\left\{ \dfrac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$
9. $\left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^p}{p} \;\middle|\; (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}$

Exercice 14 - Preuve de Cauchy de l'inégalité arithmético-géométrique : ✪✪✪ Soit H_n une propriété dépendant de $n \geq 2$. On suppose que :

- H_2 est vraie.
- $\forall n > 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{n-1}$ vraie.
- $\forall n \geq 2$, H_n vraie $\Rightarrow H_{2n}$ vraie.

1. Montrer que H_n est vraie pour tout $n \geq 2$.
2. Appliquer à la proposition

$$H_n : \text{« } \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^n \geq x_1 \dots x_n \text{ »}$$

Pour montrer la première implication, on pourra prendre $x_n = \dfrac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

2.3 Convexité.

Exercice 15 : ✪ En utilisant la concavité du ln, montrer que pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $\ln(1 + x) \geq x/2$.

Exercice 16 : ✪ Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1 + e^x}}$. Montrer que f admet un point d'inflexion que l'on explicitera.

Exercice 17 : ✪ Tracer le graphe de $x \mapsto e^{-x^2}$. On fera apparaître les éventuels points d'inflexion.

2.4 Valeur absolue :

Exercice 18 : ✪ Résoudre les (in)équations suivantes :

1. $|x^2 + 3x - 4| \leq 1$.
2. $|x^2 + 3x - 4| = |x^2 + 2x - 1|$.

Exercice 19 : ✪ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2|x-1| - |x+1|$. Donner la valeur de $f(x)$ selon la valeur de x sans utiliser la valeur absolue. Tracer le graphe de f. Même question avec $g : x \mapsto x|x-1| + |2-x| - x^2$.

Exercice 20 - Une inégalité de Kolmogorov : ✪✪✪ Soit f dérivable sur $\mathbb{R}$ bornée par un réel M_0 (c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_0$).

1. Soit $M_2 \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $h > 0$,
$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{2M_0}{h} + \dfrac{hM_2}{2}$. En déduire un majorant de $|f'|$ qui ne dépend pas de h.
2. (a) On suppose de plus que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$,
$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{2}$$
Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq h^2 M_2$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $h > 0$, $|f'(x)| \leq \dfrac{hM_2}{2} + \dfrac{M_0}{h}$. En déduire un majorant de $|f'|$ qui ne dépend pas de h.
3. Lequel des deux majorants est le meilleur ?

2.5 Partie entière :

Exercice 21 : ✪ Montrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Montrer que $\lfloor x+y \rfloor$ peut prendre chacune de ces deux valeurs.

Exercice 22 : ✪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$. Montrer que cet encadrement est optimal.

Exercice 23 : ✪✪ Soit $(a,x,T) \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$. Montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + kT \in [\, a\,; a+T\, [$. Exprimer k à l'aide de la fonction partie entière.

Exercice 24 : ✪✪ Si $x \in \mathbb{R}$, la partie entière par excès de x est notée $\lceil x \rceil$ et est l'unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k-1 < x \leq k$.

1. Montrer l'existence et l'unicité de $\lceil x \rceil$. Donner $\lceil \pi \rceil$ et $\lceil -\pi \rceil$.
2. Exprimer selon les cas $\lceil x \rceil$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.
3. Exprimer $\lceil -x \rceil$ en fonction de $\lfloor x \rfloor$.

Exercice 25 : ✪✪ Montrer que la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. En quel(s) réel(s) est-il atteint ? Est-elle majorée ?

Exercice 26 : ✪✪ Donner le domaine de définition de
$$f : x \mapsto 2x \times \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2x}} \right\rfloor - \frac{1}{\left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor}$$

Exercice 27 : ✪✪✪ Résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$.

Exercice 28 - Développement en fraction égyptienne : ✪✪✪ Soit $r = a/b$ un rationnel appartenant à $]\, 0\,; 1\, [$.

1. Montrer qu'il existe un unique $k \geq 2$ que l'on explicitera tel que :
$$\frac{1}{k} \leq \frac{a}{b} < \frac{1}{k-1}$$

2. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ et $d_1, \ldots, d_n$ entiers naturels distincts tels que :

$$r = \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}$$

On pourra raisonner par récurrence sur a. Donner une telle écriture dans le cas où $r = 11/12$.

Remarque : Une telle écriture est appelée écriture en fraction égyptienne de r. En utilisant l'égalité

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

à partir d'une écriture

$$r = \frac{1}{d_1} + \cdots + \frac{1}{d_n}$$

on peut en obtenir une infinité d'autres : à chaque étape, on modifie $1/d_n$ en $1/2d_n + 1/3d_n + 1/6d_n$. Par exemple, on a

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

L'intérêt d'une telle écriture est que, si on souhaite partager 5 objets en 6 parts égales, l'écriture

$$5 = 6 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{1}{3}$$

suggère de couper trois de ces objets en deux parts égales (pour qu'il y ait 6 demi-objets puisqu'on retrouve le terme $6 \times 1/2$) et de couper les deux objets restants en trois parts égales (pour qu'il y ait 6 tiers d'objets puisqu'on retrouve le terme $6 \times 1/3$), et on donne à chacun un demi-objet et un tiers d'objet. La construction nécessite alors $3 + 2 \times 2 = 7$ coupes, alors que le découpage de chaque objet en 6 parts égales (et on donnerait à chacun 5 sixièmes d'objet) en demande 25.

Exercice 29 - The significand function : ✪✪✪ Si $x > 0$, on pose $S(x) = x \times 10^k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ bien choisi) l'unique produit de x et d'une puissance de 10 appartenant à l'intervalle $[\,1\,;10\,[$. Par exemple :

- $S(2023) = 2,023 \quad (k = -3)$
- $S(\pi) = \pi \quad (k = 0)$
- $S(0,0000017) = 1,7 \quad (k = 6)$

1. Montrer effectivement l'existence et l'unicité de k.
2. Exprimer $S(x)$ en fonction de x uniquement.

Exercice 30 : ✪✪✪✪ Donner une CNS sur le réel $a > 1$ pour qu'on ait :

$$\forall x \geq 1, \qquad \lfloor \log_a(x) \rfloor = \lfloor \log_a(\lfloor x \rfloor) \rfloor$$

2.6 Généralité sur les fonctions.

Vrai ou Faux ?

1. La partie entière est une fonction impaire.
2. La composée de deux fonctions impaires est paire.
3. Si f est paire et g impaire alors $f \circ g$ est impaire.
4. Si f est continue alors $|f|$ est continue.
5. Si $|f|$ est continue alors f est continue.
6. La fonction $x \mapsto \cos(\pi x)$ est 1-périodique.
7. Si f et g sont discontinues en x_0 alors $f + g$ l'est également.
8. Une fonction monotone sur un segment est bornée sur ce segment.
9. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors f est constante.
10. La composée de deux fonctions croissantes est croissante.
11. La composée de deux fonctions décroissantes est décroissante.

Exercice 31 : ✪ Donner, sans calcul, l'allure des graphes des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1 + \sin(2x)$.
2. $2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
3. $x \mapsto -\ln(1+x)$.
4. $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x}$.

Exercice 32 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Prouver que $x \mapsto f(\omega x)$ est périodique, et préciser une période.

Exercice 33 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 34 - Fonctions antipériodiques : ✪ Soit $T > 0$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite antipériodique d'antipériode T si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = -f(x)$.

1. Donner un exemple de fonction antipériodique non constante.
2. Montrer qu'une fonction antipériodique est périodique.
3. Soit f une fonction paire antipériodique d'antipériode T. Donner la valeur de $f(T/2)$.

Exercice 35 : ✪ Calculer les limites suivantes lorsqu'elles existent.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos\left(x^2\right) e^{-x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (2+\sin(x))x$
3. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)^x}{x^{\ln(x)}}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2|x|}{x}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x-\cos(x)}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \times \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$.
10. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\sin(x)}{(x+1)^2}$.
11. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1}$.
12. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-\ln(x)^2}$.

Exercice 36 : ✪ Soit f continue en 0. Montrer que $x \mapsto xf(x)$ est dérivable en 0.

Exercice 37 : ✪ Dériver les fonctions suivantes sans préciser où elles sont dérivables[1] :

1. $f : x \mapsto 1/\ln(\ln(x))$
2. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.
3. $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$
4. $f : x \mapsto 2x\sqrt{x} - x^2 e^{\cos x}$
5. $f : x \mapsto x^x$
6. $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$
7. $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x^2+1}}}$

Exercice 38 : ✪

1. Donner les dérivées successives de la fonction ln.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Donner les dérivées successives de $x \mapsto (x-a)^n$.

Exercice 39 : ✪ Tracer le graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+e^x)$. Montrer que f admet une asymptote en $+\infty$, dont on déterminera l'équation, et qu'on fera apparaître sur le graphe de f.

Exercice 40 : ✪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1+x) \geq x - \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 41 : ✪ Montrer que la fonction 1/ch a un unique point fixe.

Exercice 42 : ✪✪ Montrer qu'une fonction périodique monotone est constante.

Exercice 43 : ✪✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^2}$ est paire.

Exercice 44 : ✪✪ Pour tout réel m, on note Γ_m le graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x+m}{x^2+1}$. Lorsque m parcourt $\mathbb{R}$:

1. Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 0 sont toutes parallèles.
2. Montrer que les tangentes à Γ_m au point d'abscisse 1 sont toutes concourantes.

1. Non, franchement, vous y avez cru ?

Exercice 45 : ✪✪ Etudier les fonctions suivantes (domaines de définition, tableaux de variations et limites). On s'intéressera aux éventuels prolongements par continuité, et on se demandera si les fonctions ainsi prolongées sont dérivables.

1. $f : x \mapsto e^{-e^{-x}}$.
2. $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}-1}$
3. $f : x \mapsto e^{(x-1)/x^2}$
4. $f : x \mapsto x^x$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$
6. $f : x \mapsto \left(x^2-1\right) \times \ln\left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)$.
7. $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2-1}$.
8. $f : x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x(x+2)}$.
9. ✪✪✪ $f : x \mapsto (x-a)^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 46 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = f(x-3)f(x+3)$.

1. Si $f(x) \neq 0$, montrer que $f(x+9) \neq 0$ et montrer que $f(x) = 1/f(x+9)$.
2. Si $f(x) = 0$, montrer que $f(x+9) = 0$.
3. En déduire que f est périodique.

Exercice 47 : ✪✪ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est croissante et que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
2. On suppose que f est décroissante et que $f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Montrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
3. Donner un contre-exemple pour chacune des questions précédentes si on enlève l'hypothèse de monotonie.

Exercice 48 : ✪✪✪ Soit $a > 0$. Donner le nombre de points fixes de $x \mapsto a^x$ selon la valeur de a.

Exercice 49 : ✪✪✪

1. Donner le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \ln(x)/x$.
2. Qui est le plus grand entre e^π et π^e ?
3. En utilisant la première question, déterminer les couples (a,b) d'entiers non nuls tels que $a < b$ et $a^b = b^a$.
4. Montrer que l'ensemble $\{\sqrt[n]{n} \mid n \geq 1\}$ admet un maximum que l'on explicitera.

Exercice 50 : ✪✪✪ Donner le nombre de solutions de l'équation $\sin(x) = \ln(x)$.

Exercice 51 - Tiré de projecteuler.net : ✪✪✪ 4150 possède une propriété remarquable : il est égal à la somme des puissances cinquièmes de ses chiffres, c'est-à-dire que

$$4150 = 4^5 + 1^5 + 5^5 + 0^5$$

En utilisant le fait que $9^5 = 59049$ et $\ln(10) \approx 2.3$, montrer qu'un nombre vérifiant cette propriété est inférieur ou égal à 10^6.

Remarque : Avec un algorithme (puisqu'il est hors de question d'effectuer à la main un million de calculs), on peut montrer finalement que les seuls nombres vérifiant cette propriété sont 4150, 4151, 54748, 92727, 93084 et 194979 (on ne compte pas 1 car $1 = 1^5$ n'est pas vraiment une somme).

Remake : Donner la valeur maximale que peut prendre un entier égal à la somme des factorielles de ses chiffres. On peut montrer (idem, un algorithme fait ça très bien) que les seuls nombres vérifiant cette propriété sont 145 et 40585.

Chapitre 3

Sommes et produits

« Non, pas différent ! Juste différent dans ton esprit. »

L'Empire contre-attaque.

3.1 Sommes.

Exercice 1 : ✪ En écrivant cette somme comme une somme télescopique, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=(n+1)^2$.

Exercice 2 : ✪ Calculer (on dit aussi : clore) les sommes suivantes :

- $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$
- $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}$
- $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(n+1-k)$
- $S=\displaystyle\sum_{k=-217}^{2023}\frac{3^{k+1}}{2^{k-12}}$
- $S=2+6+10+\cdots+2022$
- $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$
- $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$

Exercice 3 : ✪ Pour tout $n\geq 1$ on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

1. Soit $n\geq 1$. Exprimer S_{2n} en fonction de S_n et T_n.
2. On admet que les suites (S_{2n}) et (S_n) convergent vers une même limite L. Montrer que la suite (T_n) converge vers une limite L' que l'on exprimera en fonction de L.

Remarque : On montrera plusieurs fois dans l'année que $L=\pi^2/6$.

Exercice 4 : ✪ À l'aide de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-k^5\right)$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^4$. Généraliser.

Exercice 5 : ✪ Soit n un entier non nul. On pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k$. Montrer que

$$S_n=\frac{4\times 5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$$

Exercice 6 : ✪ Montrer par récurrence les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad\text{et}\qquad\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 7 - Un avant-goût des séries géométriques : ✪✪ En dérivant l'expression de la somme d'une suite géométrique, calculer, pour tout x réel et tout $n\geq 1$, la quantité $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}kx^k$.

Exercice 8 : ✪✪ Soient $x\in\mathbb{R}$ et $n\geq 1$. En calculant de deux façons la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k-1}x^k$, retrouver le résultat de l'exercice précédent.

Exercice 9 - Interversions en vrac : ✪✪ Compléter les interversions suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=?}^{?}\sum_{i=?}^{?} a_{ij} = \sum_{?} a_{ij}$

Exercice 10 : ✪✪ En calculant de deux manières la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n} k$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 11 - Quelques sommes multiples : ✪✪ Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\displaystyle a_n = \sum_{(i,j)\in\llbracket 1\,;\,n\rrbracket^2} \min(i,j)$

2. $\displaystyle b_n = \sum_{(i,j)\in\llbracket 1\,;\,n\rrbracket^2} \max(i,j)$

3. $\displaystyle c_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$

4. $\displaystyle d_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i+j$

5. $\displaystyle e_n = \sum_{\substack{1\leq i\leq j\leq n\\ |i-j|=1}} ij$

6. $\displaystyle f_n = \sum_{\substack{0\leq i,j\leq n\\ i+j=n}} ij$

7. $\displaystyle g_n = \sum_{1\leq i<j\leq n} 2^{i-j}$

8. $\displaystyle h_n = \sum_{1\leq j\leq i\leq n} \frac{j}{i+1}$

9. $\displaystyle i_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} i2^{j+k}$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx \rfloor$$

   est $\dfrac{1}{n}$-périodique.

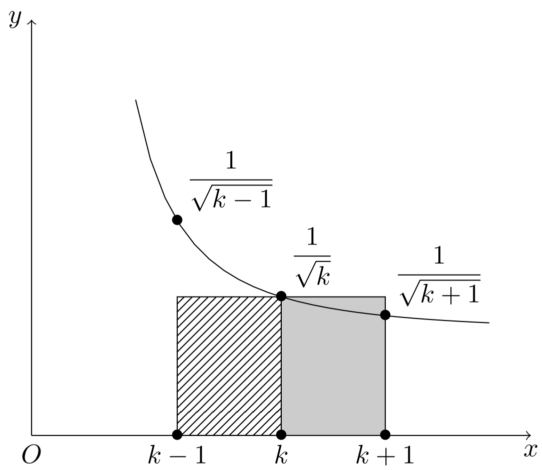
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx \rfloor$.

Exercice 13 - Une méthode à connaître : ✪✪

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a l'inégalité

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$$

   On pourra pour cela s'inspirer du dessin suivant :



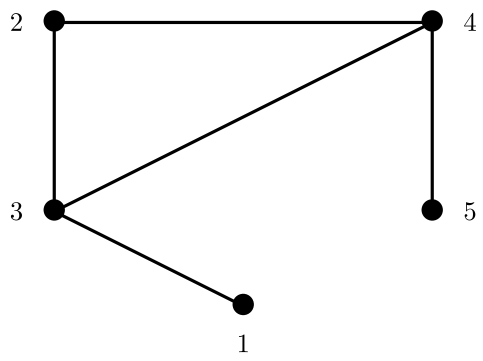
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\left\lfloor \sum_{k=1}^{9999} \frac{1}{\sqrt{k}} \right\rfloor$.

Exercice 14 - Fonctions symétriques élémentaires : ✪✪ Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $k \in [\![0\,;\,n]\!]$, on pose

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

Expliciter $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{n-1}$ et σ_n.

Exercice 15 - Introduction à la théorie des graphes : ✪✪ Un graphe (simple, fini, sans boucle) est un couple (S, A), où S est un ensemble fini et où A est une partie de $\mathscr{P}_2(S)$, où $\mathscr{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties de S à 2 éléments. Les éléments de S sont représentés par des points et les arêtes par des segments reliant les deux points qui les composent. Ci-dessous on a représenté le graphe (S, A) avec $S = [\![1\,;\,5]\!]$ et $A = \{\{1;3\};\{2;3\};\{2;4\};\{3;4\};\{4;5\}\}$:



On se donne donc un graphe. Si $s \in S$, on appelle degré de s, qu'on note $d(s)$, le nombre d'arêtes issues de s. Par exemple, sur le graphe de gauche ci-dessus, $d(4) = 3$ et $d(5) = 1$. Enfin, si a est une arête, on pose $f(a, s) = 1$ si a est issue de s et 0 sinon. En calculant $\displaystyle\sum_{(a,s) \in A \times S} f(a, s)$ de deux façons différentes, prouver que :

$$\sum_{s \in S} d(s) = 2 \times \operatorname{card}(A)$$

Exercice 16 - Autour de la suite harmonique : ✪✪ Si $n \geq 1$, on définit le n-ième nombre harmonique $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Il n'en existe pas de forme close.

1. Soit $n \geq 2$. Exprimer la somme $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et de H_n.
2. Soit $n \geq 1$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} H_k$ en fonction de n et de H_n.

Exercice 17 : ✪✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Exercice 18 - Lemme de Gronwall discret : ✪✪✪ Soient trois suites $(t_n), (\theta_n), (\varepsilon_n)$. On suppose que (θ_n) est une suite à termes positifs et qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n on ait la majoration :

$$\theta_{n+1} \leq (1 + A(t_{n+1} - t_n))\,\theta_n + |\varepsilon_n|$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 1 + x \leq e^x$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$,

$$\theta_n \leq e^{A(t_n - t_0)}\theta_0 + \sum_{k=0}^{n-1} e^{A(t_n - t_{k+1})}|\varepsilon_k|$$

Exercice 19 : ✪✪✪ Soient $p \geq 1$ et $(n_1, \ldots, n_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble

$$F_n = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{N}^p \,|\, x_1 n_1 + \cdots + x_p n_p = n\}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Expliciter le produit

$$\left(\sum_{k=0}^{N} x^{n_1 \times k}\right) \times \cdots \times \left(\sum_{k=0}^{N} x^{n_p \times k}\right)$$

Plus précisément, on l'écrira sous la forme d'une somme $\displaystyle\sum_{k=?}^{?} c_k x^k$ où l'on exprimera les coefficients c_k en fonction des ensembles $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20 : ✪✪✪✪ Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer l'égalité suivante :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) = n\sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$

3.2 Produits.

Exercice 21 : ✪ La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m z_{ij} = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^n z_{ij}$$

On la démontrera si elle est vraie, on donnera un contre-exemple explicite (un argument du type : « ben c'est pas la même chose » est insuffisant !) si elle est fausse. Plus généralement, parmi les propriétés suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^n (\lambda + a_k) = \lambda + \sum_{k=1}^n a_k$.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$.
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$.
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n b_k$.
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^n {a_k}^p = \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^p$.
6. $\displaystyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j}$.
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^n k a_k = k \sum_{k=1}^n a_k$.
8. $\displaystyle\prod_{k=1}^n (\lambda + a_k) = \lambda^n + \prod_{k=1}^n a_k$.
9. $\displaystyle\prod_{k=1}^n (a_k + b_k) = \prod_{k=1}^n a_k + \prod_{k=1}^n b_k$.
10. $\displaystyle\prod_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \prod_{k=1}^n a_k$.
11. $\displaystyle\prod_{k=1}^n a_k b_k = \prod_{k=1}^n a_k \times \prod_{k=1}^n b_k$.
12. $\displaystyle\prod_{k=1}^n {a_k}^p = \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^p$.
13. $\displaystyle\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{i,j} = \prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n a_{i,j}$.
14. $\displaystyle\prod_{k=1}^n k a_k = n! \prod_{k=1}^n a_k$.

Exercice 22 - Les nombres de Fermat : ✪ Pour tout n on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat.

1. Donner F_0, F_1, F_2, F_3.
2. Montrer que pour tout n, $\displaystyle\prod_{k=0}^n F_k = F_{n+1} - 2$.

Remarque : F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 sont premiers, F_5 jusque F_{32} sont composés, et d'autres encore (par exemple F_{73}) mais on ne sait pas s'il existe d'autres nombres premiers parmi les F_n (Fermat conjecturait qu'ils étaient tous premiers mais Euler a montré que F_5 était composé). Ils interviennent de plus dans la construction des polygones réguliers à la règle et au compas.

Exercice 23 : ✪ Prouver que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle n!^{n+1} = \prod_{k=1}^n k! \times \prod_{k=1}^n k^k$.

Exercice 24 : ✪✪ Écrire les quantités suivantes à l'aide de puissances et de factorielles (n, p, q, N, k, b sont des entiers naturels, avec $p \leq n$ et $k \leq b+1$) :

- $A = n \times (n-1) \times \cdots \times p$
- $B = 10 \times 9 \times \cdots \times 4$.
- $I = \dfrac{-1}{q+1} \times \dfrac{-1}{q+2} \times \cdots \times \dfrac{-1}{q+p} \times \dfrac{2^{p+q+1}}{p+q+1}$
- $P = \dfrac{b}{N} \times \dfrac{b-1}{N} \times \cdots \times \dfrac{b-(k-2)}{N} \times \dfrac{b-(k-1)}{N}$.
- $W = \dfrac{2n}{2n+1} \times \dfrac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{3}$.
- $\alpha_p = \dfrac{1}{(-p) \times (-p+1) \times \cdots \times (-1) \times 1 \times 2 \times \cdots (-p+n)}$

Exercice 25 : ✪✪ Simplifier les produits suivants :

- $P_n = \prod_{k=42}^{n} \frac{k+4}{k+3}$
- $P_n = \prod_{p=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{p} 2^{p! \times k} \right)$
- $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right)$
- $P_n = \prod_{k=1}^{n} 4^{k^2+1}$
- $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$
- $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$

Exercice 26 : ✪✪ On admet (c'est l'exercice 26 du chapitre 15) que, pour tous réels positifs $x_1, \dots, x_n$:

$$1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k \right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^{n} (1+x_k)^{1/n}$$

Prouver que pour tous $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ réels positifs on a

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k \right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k \right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k) \right)^{1/n}$$

Exercice 27 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\prod_{1 \leq i,j \leq n} ij$. En déduire la valeur de $\prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Exercice 28 : ✪✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\prod_{k=1}^{n} ((2k)!) \geq ((n+1)!)^n$.

Exercice 29 : ✪✪✪ Exprimer la somme suivante avec uniquement des factorielles :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

3.3 Coefficients binomiaux et binôme de Newton.

Exercice 30 : ✪ Soit $m = \binom{n}{2}$. Montrer que $\binom{m}{2} = 3\binom{n+1}{4}$.

Exercice 31 - Les nombres de Catalan, stage one : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit le n-ième nombre de Catalan par :

$$C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

Si $n \in \mathbb{N}$, écrire C_n comme une différence de coefficients binomiaux. En déduire que les nombres de Catalan sont des entiers naturels.

Exercice 32 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. En écrivant ce quotient comme un produit de coefficients binomiaux, montrer que

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3} \in \mathbb{N}$$

Exercice 33 : ✪ Quel est le coefficient de $x^7y^3z^2$ dans $(x+2y+3z)^{12}$?

Exercice 34 : ✪ Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Calculer les sommes suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{1-k} \qquad \text{et} \qquad T_n = \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{p} k^p$$

Exercice 35 : ✪ Montrer qu'il existe deux suites d'entiers relatifs (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \geq 0$, $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.

Exercice 36 : ✪✪ Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k+1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{p+k}{p+1}$$

En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}$.

Exercice 37 - Identité de Vandermonde : ✪✪ Soit $(n,p,q) \in \mathbb{N}^3$. On admet que si deux fonctions polynomiales sont égales, alors elles ont les mêmes coefficients. En utilisant le fait que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(1+x)^{n+p} = (1+x)^n \times (1+x)^p$, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \times \binom{p}{q-k}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $k \geq 1$. Montrer que le produit de k entiers relatifs consécutifs est toujours divisible par $k!$.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $n \geq 4$. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.

1. Montrer que $u_n = 2 + \dfrac{2}{n} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}}$
2. En déduire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. On pourra utiliser l'exercice 44.

Exercice 40 : ✪✪ On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto (1+e^x)^n$. En dérivant deux fois f, donner la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 41 : ✪✪ Soit $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$
3. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 42 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe a_n et $b_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$. Trouver une relation analogue pour $(2-\sqrt{3})^n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \in \mathbb{N}^*$$
3. Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.
4. **Remake : ✪✪✪** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p_n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{p_n} + \sqrt{p_n+1}$.

Exercice 43 : ✪✪✪ Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,
$$\binom{2n}{n} < \frac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$$

Remarque : On montrera au second semestre (true story) que
$$\binom{2n}{n} \times \frac{\sqrt{n}}{4^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Exercice 44 - Monotonie des coefficients binomiaux : ✪✪✪ Soient $n \geq 1$ et $m \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$.

1. Simplifier le quotient de $\dbinom{n}{m+1}$ par $\dbinom{n}{m}$.
2. En déduire que $\dbinom{n}{0} \leq \dbinom{n}{1} \leq \cdots \leq \dbinom{n}{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$. Que se passe-t-il après $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 45 - Produit d'une ligne du triangle de Pascal : ✪✪✪ Soit $n \geq 0$. On note $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Montrer que
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 46 - Formule d'inversion de Pascal : ✪✪✪

1. Montrer que $\dbinom{n}{k}\dbinom{k}{j} = \dbinom{n}{j}\dbinom{n-j}{n-k}$ pour tous $0 \leq j \leq k \leq n$.
2. Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$b_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} a_j$$

Chapitre 4

Ensembles et applications

« J'ai connu une Polonaise qui en prenait au petit-déjeuner. »

Les tontons flingueurs

Sauf indication contraire, E, F, G et H désignent des ensembles non vides.

4.1 Ensembles.

Exercice 1 : ✪ Vrai ou faux ?

1. $0 \in \mathbb{R}$.
2. $\{0\} \in \mathbb{R}$.
3. $0 \subset \mathbb{R}$.
4. $\{0\} \subset \mathbb{R}$.
5. $0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
6. $\{0\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
7. $0 \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
8. $\{0\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : ✪ Vrai ou Faux ?

1. $\{2\} \in \{3; 2; \{\{4\}\}; \varnothing\}$.
2. $\{2\} \subset \{3; 2; \{\{4\}\}; \varnothing\}$.
3. $\{1\} = \{\{1\}\}$.
4. $\{1\} \subset \{\{1\}\}$.
5. $3 \in \varnothing$.
6. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.
7. $\varnothing \subset \mathscr{P}(\{1\})$.
8. $\varnothing \in \{1\}$.

Exercice 3 - B.A.-BA : ✪

1. Montrer que si $A \subset E$ alors $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(E)$.
2. Montrer que si $A \subset E$ et $B \subset F$ alors $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 4 : ✪ Deux ensembles disjoints sont-ils nécessairement distincts ?

Exercice 5 : ✪ Calculer l'ensemble $(\{1; 2; 3\} \times \{1; 2\}) \setminus (\{1; 2\} \times \{1; 2; 3\})$.

Exercice 6 : ✪ Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que : $(A = B) \iff (A \cap B = A \cup B)$.

Exercice 7 : ✪ Expliciter l'ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\varnothing)))$.

Exercice 8 : ✪ Soient A, B et C des parties d'un ensemble E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$
2. $A \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$
3. $A \setminus (A \setminus B)$.

Exercice 9 : ✪ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que

$$(A \cup B \cup C) \cap \left(A \cup B \cup \overline{C}\right) \cap \left(A \cup \overline{B} \cup C\right) = A \cup (B \cap C)$$

Exercice 10 : ✪✪ Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $B_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$. Montrer que pour tout $n \geq 0, B_n \subset B_{n+1}$ et que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Exercice 11 : ✪✪ Comparer (on commencera par faire un dessin) :

1. $(E \times G) \cap (F \times G)$ et $(E \cap F) \times G$.
2. $(E \times G) \cup (F \times G)$ et $(E \cup F) \times G$.

Exercice 12 : ✪✪ Soit $E = \{0; 1; \{0\}; \{0; 1\}\}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\{0\} \in E$.
2. $\{0\} \in \mathscr{P}(E)$.
3. $\{\{1\}\} \subset E$.
4. $\{0; 1\} \subset E$.
5. $\{\{0\}; 0\} \subset \mathscr{P}(E)$.
6. $\{\{0\}; \varnothing\} \in \mathscr{P}(E)$.
7. $\{\{1; \{0; 1\}\}; \{0\}; E\} \subset \mathscr{P}(E)$.
8. $\{\{\{0; 1\}\}\} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Exercice 13 : ✪✪ On rappelle que si A et B sont deux parties de E, on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

1. Soient A_1, A_2, B_1, B_2 des parties de E. A-t-on : $(A_1 \subset A_2)$ et $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow (A_1 \Delta B_1) \subset (A_2 \Delta B_2)$?
2. Soit $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que $A \Delta B = \varnothing \iff A = B$.
3. Soit $n \geq 2$. Si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties de E, montrer que $A_1 \Delta \cdots \Delta A_n$ est l'ensemble des $x \in E$ qui appartiennent à un nombre impair de A_i.
4. Existe-t-il un élément neutre pour la différence symétrique, c'est-à-dire une partie B de E telle que, pour tout $A \in \mathscr{P}(E), A \Delta B = A$?
5. Montrer que la différence symétrique est régulière, c'est-à-dire que :

$$\forall (A, B, C) \in \mathscr{P}(E)^3, A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$$

On pourra utiliser les questions 2 et 4 et on rappelle que la différence symétrique est associative.

Exercice 14 : ✪✪ Expliciter les ensembles suivants :

1. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n} ; \frac{1}{n} \right[$.
2. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n} ; \frac{2n+1}{n} \right[$.
3. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left(\left[-n ; -\frac{1}{n} \right[\cup \left] \frac{1}{n} ; n \right] \right)$.
4. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n} ; 2023 - \frac{1}{n} \right]$.
5. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n} ; 2023 + \frac{1}{n} \right]$.
6. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n} ; 2023 - \frac{1}{n} \right]$.
7. $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n} ; 2023 + \frac{1}{n} \right]$.
8. $\displaystyle\bigcup_{x \in [\,0\,;2\,]} [\,x\,; x+1\,]$.
9. $\displaystyle\bigcap_{x \in [\,0\,;2\,]} [\,x\,; x+1\,]$.
10. $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{x \in \mathbb{R} \,|\, nx \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 15 : ✪✪ Soit I un ensemble d'indices non vide. Pour tout $i \in I$, soient O_i et U_i deux parties de E, d'intersection vide. Parmi les trois affirmations suivantes, lesquelles sont vraies ?

1. $\displaystyle\left(\bigcap_{i \in I} O_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \varnothing$
2. $\displaystyle\left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \varnothing$
3. $\displaystyle\left(\bigcap_{i \in I} O_i \right) \cap \left(\bigcap_{i \in I} U_i \right) = \varnothing$

Exercice 16 : ✪✪ Étudier les inclusions entre les ensembles suivants :

1. $\mathscr{P}(E \cup F)$ et $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$.
2. $\mathscr{P}(E \cap F)$ et $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$.
3. $\mathscr{P}(E \times F)$ et $\mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(F)$.

Exercice 17 - Une équation dans $\mathscr{P}(E)$: ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{P}(E)$. Discuter et résoudre l'équation suivante d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$:

$$(A \cap X) \cup \left(B \cap \overline{X}\right) = \emptyset.$$

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$ et soient $A_1, \dots, A_n$ des parties de E. Montrer que :

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = (A_1 \backslash A_2) \cup (A_2 \backslash A_3) \cup \cdots \cup (A_{n_1} \backslash A_n) \cup (A_n \backslash A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

Exercice 19 : ✪✪✪ Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de parties de E. On définit leur limite inférieure et leur limite supérieure [1] par :

$$\liminf_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k$$

1. Nous verrons une interprétation de ces ensembles au second semestre.

1. Montrer que $\liminf\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \limsup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
2. Expliciter ces deux ensembles lorsque $E=\mathbb{R}$ et lorsque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n = [\,n\,;+\infty\,[$.
3. Expliciter ces deux ensembles lorsque $E=\mathbb{R}$ et lorsque, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A_n = [\,(-1)^n\times n\,;+\infty\,[$.

Exercice 20 - Paradoxe de Russel : ✪✪✪ Soit E un ensemble.

1. Montrer qu'il existe une injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de surjection $f : E \to \mathscr{P}(E)$ (on pourra s'intéresser aux antécédents de la partie $X = \{x\in E \,|\, x\notin f(x)\}$).
3. En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

Remarque : En d'autres termes, la collection formée par tous les ensembles n'est pas un ensemble ! Ce paradoxe montre l'insuffisance de la définition d'un ensemble comme collection d'objets, cf. chapitre 0.

4.2 Applications.

Exercice 21 : ✪ Reformuler chacun des énoncés suivants par une phrase du type : « L'application de ... vers ... qui à ... associe ... est (ou n'est pas) injective (ou surjective, ou bijective) ».

1. Dans cette classe, il y a plusieurs élèves nés le même mois.
2. Dans cette classe, aucun élève n'est né en janvier.
3. Chaque élève est assis sur une chaise différente (enfin j'espère...).
4. Tous les élèves ont un prénom différent.
5. Pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, il existe un unique $y\in\mathbb{R}^+$ tel que $y^{2023}=x$.
6. ✪✪ On peut avoir $a+b=c+d$ sans avoir $a=c$ et $b=d$.
7. ✪✪ Si (a,b,c,d) sont quatre rationnels tels que $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ alors $a=c$ et $b=d$.

Exercice 22 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{N}^2$ par $f(p,q)=p+q$. Donner $f(\mathbb{N}\times\{0\}), f(2\mathbb{N}\times 2\mathbb{N}), f^{-1}(\{4\}), f^{-1}(2\mathbb{N})$.

Exercice 23 : ✪ Notons f la fonction partie entière. Expliciter $f([\,0\,;1\,])$, $f([\,0\,;1\,[)$, $f(]\,0\,;1\,])$, $f(]\,0\,;1\,[)$, $f^{-1}([\,0\,;1\,])$, $f^{-1}([\,0\,;1\,[)$, $f^{-1}(]\,0\,;1\,])$, $f^{-1}(]\,0\,;1\,[)$ et enfin $f\left(f^{-1}\left([\,0\,;1\,]\right)\right)$ et $f^{-1}\left(f\left([\,0\,;1\,]\right)\right)$.

Exercice 24 : ✪ Soit f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(n)=\dfrac{n}{3}$ si n est divisible par 3, $f(n)=\dfrac{n+2}{3}$ si $n-1$ est divisible par 3 et $f(n)=\dfrac{n-2}{3}$ sinon. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 25 : ✪ Notons E l'ensemble des suites réelles convergentes. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \end{array} \right.$$

f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 26 : ✪ Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ?

1. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y$.
2. $f:\mathbb{Q}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x+y\sqrt{2}$.
3. $f:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$.
4. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y)=(x+y,x-y)$.
5. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(y,z,x)$.
6. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z)=(0,x,y)$.
7. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(0,xy)$.
8. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x)=(x^2,x^3)$.
9. $f:\mathbb{N}\to\mathscr{P}(\mathbb{N})$ définie par $f(n)=[\![\,0\,;n\,]\!]$.
10. $\varphi:\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(f)=f(0)$.
11. Dans cette question, g désigne la fonction carré.
    (a) $\varphi:\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f)=f\times g$.
    (b) $\varphi:\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f)=f\times g$.
    (c) $\varphi:\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f)=f\circ g$.
    (d) $\varphi:\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f)=g\circ f$.

Exercice 27 : ✪ Soit $f : E \to F$. Que dire des assertions suivantes ?

1. $\forall x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
2. $\forall x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.
3. $\exists x \in E, \forall y \in F, y = f(x)$.
4. $\exists x \in E, \exists y \in F, y = f(x)$.
5. $\forall y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
6. $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.
7. $\exists y \in F, \forall x \in E, y = f(x)$.
8. $\exists y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$.

Exercice 28 : ✪ Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. On démontrera les affirmations vraies et on donnera un contre-exemple pour les affirmations fausses.

1. f et g surjectives implique $g \circ f$ surjective.
2. f surjective implique $g \circ f$ surjective.
3. g surjective implique $g \circ f$ surjective.
4. $g \circ f$ surjective implique g et f surjectives.
5. $g \circ f$ surjective implique g surjective.
6. $g \circ f$ surjective implique f surjective.
7. $g \circ f$ injective implique f injective.
8. $g \circ f$ injective implique g injective ou f non injective.
9. Si f et g vont de E dans E et si $f \circ g = \mathrm{Id}_E$ alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Exercice 29 : ✪ Soit $f : E \to E$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est injective.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f^n est injective.
3. $\exists n \in \mathbb{N}^*$, f^n est injective.

Recommencer avec « surjective » au lieu de « injective ». On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 30 : ✪

1. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ des applications. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g, h le sont aussi. On pourra utiliser l'exercice 28.
2. **Remake :** Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$. Montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective, alors f et g le sont.

Exercice 31 : ✪✪

1. Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \leq n$.
2. **Remake :** Déterminer les surjections $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.

Exercice 32 - Régularité à droite et à gauche : ✪✪ On répond ici à la question : quand peut-on « simplifier » dans une composition ?

1. (a) Soit $f : F \to G$ une application injective. Montrer que :

$$\forall (g,h) \in (\mathscr{F}(E,F))^2, f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$$

   (b) Réciproquement, montrer que si $f : F \to G$ satisfait la propriété ci-dessus, alors f est injective.
2. (a) Soit $f : E \to F$ une application surjective. Montrer que :

$$\forall (g,h) \in (\mathscr{F}(F,G))^2, g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$$

   (b) Étudier aussi la réciproque.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. Montrer que

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(E) \times \mathscr{P}(E) \\ X & \mapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right.$$

n'est pas surjective.

Exercice 34 : ✪✪

1. Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur union ?
2. Soit $f : E \to F$ et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E, croissante pour l'inclusion, et d'union E tout entier. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{|A_n}$ est injective, alors f l'est.

Exercice 35 : ✪✪ Soient $f : E \to F$, $(A_1, A_1) \in \mathscr{P}(E)^2$ et $(B_1, B_2) \in \mathscr{P}(F)^2$.

1. Montrer que $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
2. Montrer que : $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$. Réciproque ?
3. (a) Montrer que $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
   (b) Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall (A_1, A_2) \in \mathscr{P}(E)^2, f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
4. Montrer que f est bijective si et seulement si : $\forall A_1 \in \mathscr{P}(E), \overline{f(A_1)} = f\left(\overline{A_1}\right)$.
5. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
6. Montrer que $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
7. Montrer que : $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$. Réciproque ?
8. Montrer que $\overline{f^{-1}(B_1)} = f^{-1}\left(\overline{B_1}\right)$.
9. Montrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.

Exercice 36 : ✪✪

1. Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
2. **Remake :** Soit $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective alors $p = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 37 : ✪✪ Les fonctions suivantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ sont-elles injectives ? surjectives ?

$$f : n \mapsto n+1 \qquad g : \begin{cases} 0 \mapsto 2023 \\ \\ n \mapsto n-1 \text{ sinon} \end{cases} \qquad f \circ g \qquad g \circ f$$

Exercice 38 : ✪✪

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Construire une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admette exactement p antécédents.
2. Construire une surjection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, n admette une infinité d'antécédents.

Exercice 39 : ✪✪ Une application $f : E \to F$ est dite presque injective s'il existe $C \in \mathbb{N}$ tel que tout $x \in F$ admet au plus C antécédents.

1. Montrer qu'une application injective est presque injective. Montrer que la fonction carré est presque injective mais n'est pas injective.
2. Donner un exemple graphique de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui ne soit pas presque injective mais telle que tout réel admette un nombre fini d'antécédents.

Exercice 40 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_a par $f_a(x) = x + a$ si $x \geq 0, f_a(x) = x - a$ sinon. Montrer que f_a est injective non surjective si $a > 0$, et surjective non injective si $a < 0$. Que dire si $a = 0$?

Exercice 41 : ✪✪✪

1. Montrer que la fonction $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de $\mathscr{P}(E)$ dans $\{0;1\}^E$. En déduire (à l'aide de l'exercice 20) qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\{0;1\}^E$.
2. Soient A et B deux parties de E. Montrer les propriétés suivantes :
   - $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
   - $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$.
   - $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.
   - $\mathbb{1}_{A \Delta B} \equiv \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B [2]$.
3. Redémontrer à l'aide des résultats précédents la distributivité de l'intersection sur l'union, la distributivité de l'union sur l'intersection, et l'associativité de la différence symétrique.

Exercice 42 : ✪✪✪ Soit f de E dans F. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.
- f est surjective si et seulement s'il existe g de F dans E telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Exercice 43 : ✪✪✪ Soit f de E dans F. Montrer les équivalences suivantes :

- f est injective si et seulement si : $\forall A \in \mathscr{P}(E), f^{-1}(f(A)) = A$.

- f est surjective si et seulement si : $\forall B \in \mathscr{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 44 - Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$: ✪✪✪ Montrer que la fonction $n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. Illustrer par un dessin.

Exercice 45 : ✪✪✪ Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ si $x \in \mathbb{Q}, f(x) = x^3$ sinon, et $g(x) = x^3$ si $x \in \mathbb{Q}, g(x) = x$ sinon. f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

Exercice 46 : ✪✪✪ Soient f et g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. On suppose que f est surjective, que g est injective, et que $f \geq g$. Montrer que $f = g$.

Exercice 47 : ✪✪✪ Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$. Définissons :

$$h : \begin{cases} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{cases}$$

1. Montrer que si f ou g est injective, alors h l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que si h est surjective, alors f et g le sont. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 48 : ✪✪✪ Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy) \end{cases}$$

n'est ni injective, ni surjective, et donner $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 49 : ✪✪✪ Soient A et B deux parties de E. Définissons

$$\varphi : \begin{cases} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \mapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{cases}$$

1. Montrer que φ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Trouver une CNS pour que φ soit surjective.
3. Lorsque φ est bijective, expliciter φ^{-1}.

Exercice 50 : ✪✪✪ Soit φ une application de F dans G. On définit l'application Γ suivante :

$$\Gamma : \begin{cases} F^E & \to & G^E \\ f & \mapsto & \varphi \circ f \end{cases}$$

Montrer que Γ est injective (respectivement surjective) si et seulement si φ est injective (respectivement surjective).

Exercice 51 : ✪✪✪✪

1. À l'aide du théorème de Cantor-Bernstein, montrer qu'il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $]\,0\,;1\,[$.
2. En déduire qu'il existe une bijection de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{R}$ mais pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser l'exercice 20).

4.3 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 52 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est périodique alors f n'est pas injective.
2. Montrer que si f est majorée ou minorée alors f n'est pas surjective.

Exercice 53 : ✪ Donner une bijection de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même non strictement monotone.

Exercice 54 : ✪ Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ monotone. Montrer que f est strictement monotone si et seulement si f est une bijection de D sur $f(D)$.

Exercice 55 : ✪ Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{x^3+1}$ est une bijection de $[-1\,;+\infty[$ dans sur un ensemble que l'on précisera, et expliciter la bijection réciproque.

Exercice 56 : ✪ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans un ensemble que l'on précisera, et expliciter sa bijection réciproque.

Exercice 57 : ✪ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-x^2}{x^2+1}$. Montrer que f n'est pas injective mais induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un ensemble que l'on précisera, et donner le tableau de variations de f^{-1}.

Exercice 58 : ✪ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 59 : ✪

1. Montrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I que l'on précisera. On note g son application réciproque, définie donc sur I.
2. Montrer que $\text{th}' = 1 - \text{th}^2$.
3. Montrer que g est dérivable sur I et expliciter g' :
   (a) en appliquant le théorème de dérivation de l'application réciproque.
   (b) en explicitant g.
4. Soient $a < b$ deux réels. Donner une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]\,a\,;b\,[$ et une bijection de $]\,a\,;b\,[$ dans $\mathbb{R}$. Que répondre à quelqu'un disant : « A est inclus strictement dans E donc a strictement moins d'éléments que E donc il n'y a pas de bijection de A dans E » ?

Exercice 60 : ✪✪ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = (e^x - 1)/x$.

1. Montrer que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f ainsi prolongée est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera et donner le tableau de variations de f^{-1}.

Exercice 61 : ✪✪ Montrer par l'absurde qu'une involution strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est égale à l'identité.

Exercice 62 : ✪✪ Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est une bijection de $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ dans un ensemble que l'on explicitera, étudier la dérivabilité de f^{-1} et expliciter sa dérivée.

Exercices 63 - Fonctions (presque) (exactement) (doublement) surjectives [2] : ✪✪

Soit $f : E \to F$. On dit que f est :

- presque surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet un antécédent par f dans E.
- doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet au moins deux antécédents par f dans E.
- exactement doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet exactement deux antécédents par f dans E.
- presque doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet au moins deux antécédents par f dans E.

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Écrire avec des quantificateurs la proposition « f est doublement surjective de E dans F ».
2. Montrer que la fonction carré est presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to]\,0\,;1\,[$ continue presque surjective est surjective (évidemment de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$).
4. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to [\,0\,;1\,]$ continue, presque surjective mais non surjective.
5. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est-elle presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? presque surjective ?

---

2. Rayer les mentions inutiles...

Exercice 64 - Début de Centrale - Supélec 2001 : ✪✪✪

1. Démontrer que la fonction u définie sur $]\,0\,;1\,]$ par $u(t) = \dfrac{1+\ln(t)}{t}$ est une bijection strictement croissante de $]\,0\,;1\,]$ dans $]\,-\infty\,;1\,]$. Montrer que sa fonction réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,-\infty\,;1\,[$.
2. En déduire l'existence d'une fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel θ, $r(\theta) \in \,]\,0\,;1\,]$ et $r(\theta)e^{-r(\theta)\cos(\theta)} = \dfrac{1}{e}$.
3. Estimer de manière simple $r(0)$ et $r\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.
4. Montrer que r est une fonction continue, 2π-périodique et paire. Montrer qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;2\pi\,[$ et que :
$$\forall \theta \in \,]\,0\,;2\pi\,[\,, r'(\theta) = \frac{r(\theta)^2\sin(\theta)}{r(\theta)\cos(\theta)-1}$$

Exercice 65 : ✪✪✪

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. Calculer f' et f''. Étudier les variations de f et représenter son graphe. Préciser la concavité et les points d'inflexion éventuels.
2. Soit φ la réciproque de la restriction de f à l'intervalle $]\,0\,;e\,]$. Justifier l'existence de φ et donner son tableau de variations.
3. Soit $\theta = \varphi \circ f$. Montrer que θ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $\theta(x)$ lorsque $0 < x \leq e$?
4. Montrer que, pour tout $x > e$, $\theta(x)$ est l'unique $z > 0$ différent de x tel que $z^x = x^z$. Donner une construction géométrique de $\theta(x)$ à partir de x sur le graphe de la question 1.
5. Montrer que θ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]\,0\,;e\,[\,\cup\,]\,e\,;+\infty\,[$. Montrer que pour tout $x \neq e$:
$$\theta'(x) = \frac{\theta(x)^2(1-\ln(x))}{x^2(1-\ln(\theta(x)))}$$
6. Dresser le tableau de variations de θ. Préciser notamment les limites en 0 et $+\infty$.

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit α un réel strictement positif. Montrer que pour tout réel x strictement positif, il existe un unique réel strictement positif noté $f(x)$ tel que $f(x)e^{f(x)} = x^\alpha$. Étudier ensuite la dérivabilité de f, et exprimer f' en fonction de f le cas échéant.

Exercice 67 : ✪✪✪ Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que tout réel admette exactement deux antécédents. On cherchera une fonction non continue... [3]

4.4 Exercices plus théoriques.

Exercice 68 : ✪✪ Soit E un ensemble dont tous les éléments sont des ensembles. On dit que E est transitif si : $\forall x \in E, x \subset E$.

1. Quels sont les ensembles transitifs parmi $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$ et $\{\{\varnothing\}\}$?
2. Montrer que si E est transitif alors $\mathscr{P}(E)$ est transitif.
3. Montrer que si E est transitif, alors $E \cup \{E\}$ l'est aussi.

Exercice 69 - L'axiome de fondation : ✪✪✪ L'axiome de fondation est un axiome de la théorie des ensembles qui s'énonce comme suit : pour tout ensemble E, il existe $X \in E$ tel que $X \cap E = \emptyset$.

1. Soit E un ensemble. Montrer que $E \notin E$ (on pourra s'intéresser à l'ensemble $\{E\}$).
2. Généraliser. Plus précisément, montrer que si $E_1, \dots, E_n$ sont des ensembles, on ne peut pas avoir $E_1 \in E_2, \dots, E_{n-1} \in E_n$ et $E_n \in E_1$.

3. On peut montrer (on le fera peut-être en devoir plus tard dans l'année) que ce n'est pas possible si f est continue.

Chapitre 5

Fonctions circulaires/Trigonométrie

« Don't know much about geography,
Don't know much trigonometry,
Don't know much about algebra,
Don't know what a slide rule is for.
But I do know that one and one is two,
And if this one could be with you,
What a wonderful world this would be. »

Sam Cooke, (What a) Wonderful world.

5.1 Fonctions circulaires.

Exercice 1 : ✪ Vrai ou faux ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \sin x = ax^2 + bx + c.$
2. ✪✪ $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \sin x = ax^2 + bx + c.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \cos 2x = a\cos^2 x + b\cos x + c.$
4. $\exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, \cos 2x = a\cos^2 x + b\cos x + c.$

Exercice 2 : ✪ Donner les valeurs de $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right), \cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right), \sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right), \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 : ✪ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, 4\cos(x) + \cos(2x) + 3 \geq 0$. Préciser les cas d'égalité.

Exercice 4 : ✪ Dériver trois fois la fonction tangente sur son domaine de définition.

Exercice 5 : ✪ Étudier (domaine de définition, etc.) la fonction cotangente définie (quand c'est possible) par :

$$\operatorname{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

Montrer que la restriction de cotan à $]\,0\,;\pi\,[$ est une bijection de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}$, et étudier la dérivabilité de sa réciproque, notée Arccotan.

Exercice 6 : ✪ Dériver les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$
2. $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sin^2(2023x)}$
3. $f : x \mapsto \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan(x)}}\right)$

Exercice 7 : ✪ Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x)$ et $g(x) = -\sin(x)$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$ puis montrer qu'en le point d'abscisse $\pi/2$, les courbes des fonctions f et g sont tangentes.

Exercice 8 : ✪ Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que $\cos^{-1}(A)$ (l'image réciproque de A, cf. chapitre 3) est un domaine 2π-périodique, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \cos^{-1}(A) \Rightarrow x \pm 2\pi \in \cos^{-1}(A)$.

Exercice 9 : ✪

1. Montrer que : $\forall x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq x - \dfrac{x^2}{\pi}$.

2. Montrer sans nouvelle étude de fonction que le résultat est en fait valable sur $[\,0\,;\pi\,]$.

Exercice 10 : ✪✪ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $\cos x < \dfrac{1}{2}$
2. $\tan(x) \geq 1$
3. $\cos(3x) + \dfrac{1}{2} = 0$
4. $\left(\cos^2 x + \left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\sin^2 x + \left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$
5. $\sin(x+y) = \sin(x) + \sin(y)$.

Exercice 11 : ✪✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'équation (d'inconnue $x \in \mathbb{R}$) : $a\cos(x) + b\sin(x) = c$.

Exercice 12 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + 3\cos(x)$.

1. Tracer la courbe représentative de f.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = 1$.
3. Expliciter $f(\mathbb{R})$.
4. Étudier le signe de f sur $[\,0\,;2\pi\,]$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f(x) < 0$.

Exercice 13 : ✪✪ Soient $n \geq 2$ et $x \notin \pi\mathbb{Z}$. Montrer que $|\sin(nx)| < n|\sin(x)|$.

Exercice 14 : ✪✪ Donner la valeur de $\alpha = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)}$.

Exercice 15 - Formule de Viète : ✪✪

1. Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$.
   (a) En utilisant la formule $\sin(2y) = 2\sin(y)\cos(y)$, simplifier, pour $n \geq 1$, le produit suivant :
   $$P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$$
   (b) Montrer que $\dfrac{\sin(u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$.
   (c) En appliquant la question précédente à $u_n = x/2^n$, donner la limite de $P_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ par
   $$u_n = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$
   où il y a n radicaux. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.
3. En utilisant la première question, montrer la formule de Viète (1593) :
   $$\prod_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

Exercice 16 - Variante de la formule de Viète : ✪✪

1. Soit $y \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Exprimer $\sin(3y)/\sin(y)$ en fonction de $\cos(2y)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. En déduire une expression simplifiée, pour $n \geq 1$, de
   $$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+2\cos(2x/3^k)}{3}$$
3. En s'inspirant de l'exercice précédent, donner la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 17 : ✪✪✪ Résoudre l'équation $2^{4\cos^2(x)+1} + 16 \times 2^{4\sin^2(x)-3} = 20$.

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation (d'inconnue x) $\cos(x)\cos(3x) = b$ admet des solutions si et seulement si $b \in \left[-\dfrac{9}{16}\,;1\right]$.

Exercice 19 :

1. ✪ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$ est périodique.
2. ✪✪ Soit $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ a-t-on $f(x) = f'(x) = 0$? En déduire que f n'est pas périodique.
3. ✪✪✪✪ Donner une somme de fonctions périodiques qui n'est pas périodique.

Exercice 20 : ✪✪✪✪

1. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Combien de fois la fonction sinus s'annule-t-elle sur $]\,a\,;b\,]$?
2. Redémontrer que la fonction $f : x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ n'est pas périodique.

5.2 Fonctions circulaires réciproques.

Exercice 21 : ✪ Montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{Arctan}(x) > \frac{x}{1+x^2}$$

Exercice 22 : ✪ Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad x - \frac{x^3}{3} \leq \mathrm{Arctan}(x) \leq x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

Exercice 23 : ✪

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{x-1}{x}\right)$$

En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$.

2. **Remake :** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right) = \mathrm{Arctan}(x+1) - \mathrm{Arctan}(x)$$

En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$.

Exercice 24 : ✪ Montrer que

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{2023 - \dfrac{1}{2023}}{2}\right) + 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2023}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 25 : ✪✪ Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout x réel

$$\mathrm{Arctan}^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{n/2}} \sin\left(n \times \mathrm{Arctan}(x) + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Exercice 26 : ✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier (quand elles ont un sens) les expressions suivantes :

$$f(x) = \tan(2\mathrm{Arctan}(x)), \qquad g(x) = \cos(4\mathrm{Arctan}(x)) \qquad \text{et} \qquad h(x) = \sin(3\mathrm{Arctan}(x))$$

Exercice 27 : ✪✪ Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Simplifier l'expression $\mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.

Exercice 28 : ✪✪ Montrer les égalité suivantes :

1. $\mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{5}{13}\right) + \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{3}{5}\right) = \mathrm{Arcsin}\left(\dfrac{56}{65}\right)$.

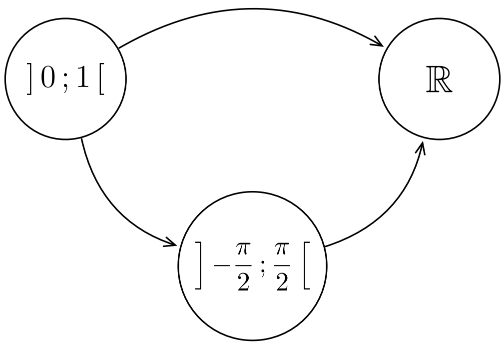
2. $\text{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{16}{65}\right) = \frac{\pi}{2}$.
3. $\text{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{\pi}{4}$.
4. $\text{Arctan}(1) + \text{Arctan}(2) + \text{Arctan}(3) = \pi$.

Exercice 29 : ✪✪ Étudier la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(1 - x^3\right)$.

Exercice 30 : ✪✪ Soient $a < b$ deux réels quelconques. Donner une bijection continue :

1. de $]\,0\,;1\,[$ dans $\mathbb{R}$.
2. de $]\,a\,;b\,[$ dans $\mathbb{R}$
3. de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$.
4. de $\mathbb{R}$ dans $]\,a\,;b\,[$.

On pourra s'inspirer du diagramme suivant :



Exercice 31 : ✪✪ Discuter et résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x\sqrt{3}) = \frac{7\pi}{12}$.
2. $\text{Arccos}(x) = \text{Arcsin}(2x)$.
3. $\text{Arcsin}(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{4}{5}\right) + \text{Arcsin}\left(\frac{5}{13}\right)$.
4. $\sin(2\text{Arccos}(2\text{Arctan}(x))) = 0$.

Exercice 32 : ✪✪ Montrer de deux façons différentes que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \qquad \text{Arcsin}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \times \text{Arcsin}(2x-1)$$

Exercice 33 - Formule de Machin : ✪✪ On rappelle le résultat suivant, vu en classe : soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $xy \neq 1$. Alors :

$$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(y) = \text{Arctan}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) + k\pi$$

où

- $k = 0$ si $xy < 1$.
- $k = 1$ si $xy > 1$ et $x, y > 0$.
- $k = -1$ si $xy > 1$ et $x, y < 0$.

1. Calculer $4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)$ (on rappelle (toujours revenir aux fondamentaux...) que $4 = 2 + 2$ et que $2 = 1 + 1$).
2. Démontrer la formule de Machin : $\frac{\pi}{4} = 4\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right) - \text{Arctan}\left(\frac{1}{239}\right)$.

Remarque : C'est avec cette formule que John Machin, un mathématicien anglais, fut le premier à calculer les 100 premières décimales de π en 1706.

Exercice 34 - un peu d'irrationnalité : ✪✪ Le but de l'exercice est de montrer que si n est impair supérieur ou égal à 3, alors le nombre suivant est irrationnel :

$$A_n = \frac{1}{\pi}\text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

1. Montrer que $A(1), A(2), A(4)$ sont rationnels.

2. On suppose donc dans la suite que n est impair et supérieur ou égal à 3. On pose

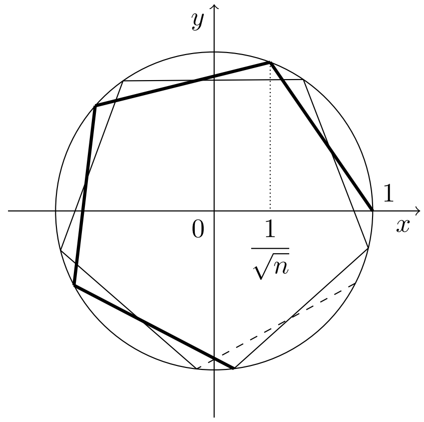
$$\varphi_n = \pi A(n) = \text{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

   (a) Soit $k \geq 1$. Exprimer $\cos((k+1)\varphi_n)$ en fonction de $\cos(k\varphi_n)$ et $\cos((k-1)\varphi_n)$.

   (b) Montrer que pour tout $k \geq 1$, il existe un entier α_k non divisible par n tel que $\cos(k\varphi_n) = \dfrac{\alpha_k}{\sqrt{n}^k}$ (il faut utiliser le théorème de Gauß, cf. chapitre 6 : si a divise bc et si a et b n'ont aucun diviseur commun, alors a divise c).

3. Conclure.

4. Interprétation géométrique : montrer que l'arc polygonal construit entre les points du cercle d'abscisses 1 et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (voir figure), et dont toutes les cordes ont même longueur, ne se referme jamais sur lui-même.



Remarque : Ce résultat n'est pas seulement intéressant en lui-même, il a permis à Max Dehn de résoudre le troisième problème de Hilbert (plus précisément de prouver que la réponse à ce problème était négative). Étant donnés deux polygones de même aire, il est toujours possible de découper le premier en triangles et de les réarranger de manière à obtenir le deuxième polygone (théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien), mais ce n'est pas possible avec des polyèdres : on peut exhiber deux tétraèdres ayant même volume mais tels qu'il est impossible de découper le premier en petits tétraèdres pour obtenir le second, et l'argument clef de Max Dehn pour montrer que c'est impossible... est l'irrationnalité de A_3 !

Exercice 35 - Tchebychev, stage one : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $[-1\,;1]$ la fonction $f_n = x \mapsto \cos(n\text{Arccos}(x))$.

1. Montrer que f_n est une fonction polynomiale.
2. Expliciter (sans fonctions cos ni Arccos) les fonctions f_1, f_2 et f_3.
3. Résoudre l'équation $f_n(x) = 0$.
4. Montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

Exercice 36 : ✪✪✪ Simplifier et tracer la courbe représentative des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.
2. $f : x \mapsto \text{Arcsin}(\sin(x))$.
3. $f : x \mapsto \text{Arccos}(\cos(x))$.
4. $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$.
5. $f : x \mapsto \text{Arccos}\left(4x^3 - 3x\right)$.
6. $f : x \mapsto \text{Arcsin}\left(\sqrt{\dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{2}}\right)$.

Exercice 37 : ✪✪✪

1. Soit $x \not\equiv \pi/2[\pi]$. Exprimer $\text{Arctan}(\tan(x))$ en fonction de x et de la fonction partie entière.
2. **Remake :** Donner $\text{Arcsin}(\sin(2023))$.

Exercice 38 - « Eh bien, j'ai coupé trois parts » : ✪✪✪ Soient 7 réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_7$. Montrer qu'il existe $i \in [\![1\,;6]\!]$ tel que

$$0 < \frac{x_{i+1} - x_i}{1 + x_i x_{i+1}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

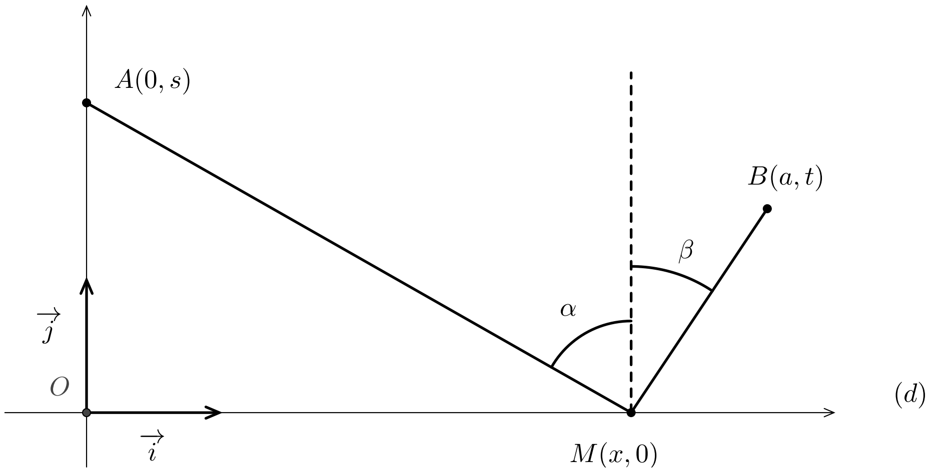
Exercice 39 : ✪✪✪ Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner une expression plus simple de

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + \text{Arccos}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

5.3 Exercices plus géométriques.

Exercice 40 - Pacman et cornet de frites : ✪✪ On découpe, dans un cercle de rayon $R > 0$, un secteur angulaire d'angle $x \in [\,0\,; 2\pi\,]$, avec lequel on confectionne un cône. Pour quelle valeur de x le cône a-t-il un volume maximal ?

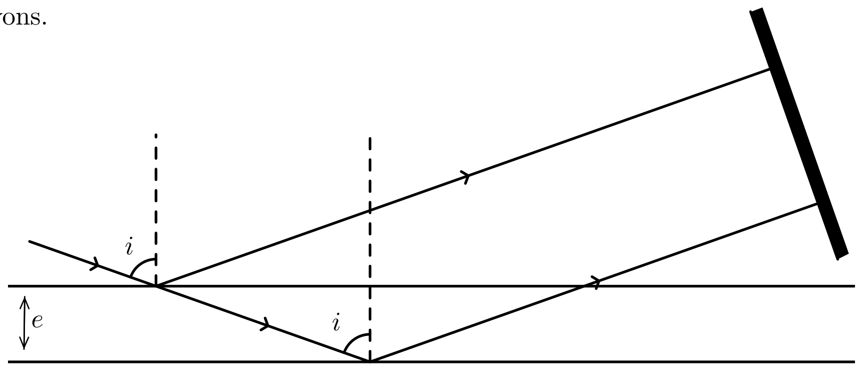
Exercice 41 - Réflexion d'un rayon lumineux : ✪✪ Un rayon issu du point A se réfléchit sur un miroir plan et atteint le point B. Le principe de Fermat indique que le chemin suivi par le rayon lumineux est celui qui minimise le temps total de parcours. On suppose que le milieu est homogène, c'est-à-dire que la vitesse de la lumière ne dépend pas de la position. Le temps de parcours est alors proportionnel à la longueur du chemin parcouru et il faut donc trouver le point M sur la droite (d) tel que la somme $AM + BM$ (voir ci-dessous) soit minimale.



On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ comme sur la figure. Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(0,s)$ et (a,t) avec s, a, t strictement positifs. Le point M a pour coordonnées $(x,0)$ avec $x \in [\,0\,; a\,]$. On désigne par α et β les angles géométriques (donc positifs) entre $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{j}$ d'une part, entre $\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{j}$ d'autre part (voir la figure).

1. Exprimer $AM + MB$ en fonction de x, s, a et t.
2. Montrer que cette quantité atteint un minimum en un réel x_0 que l'on explicitera, et que pour cette valeur x_0, on a $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$. Que peut-on en déduire ?

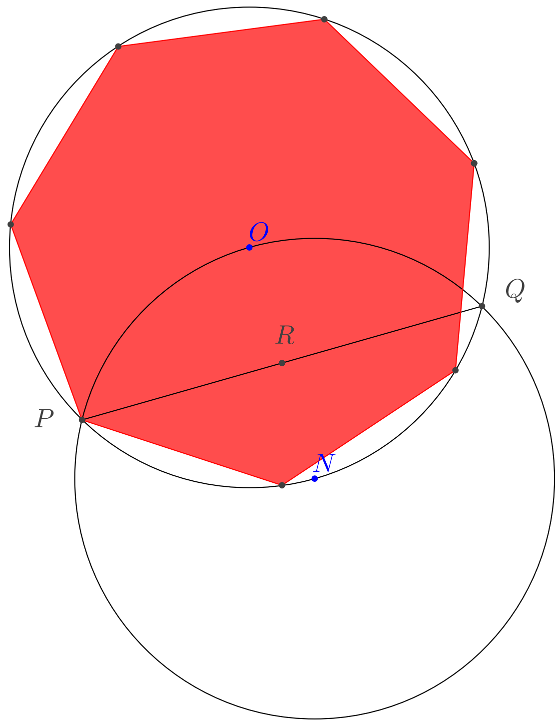
Exercice 42 - Différence de marche pour l'interféromètre de Michelson : ✪✪ Un rayon lumineux arrive sur un miroir (d'épaisseur négligeable) avec un angle d'incidence i et une partie de ce rayon est réfléchie, l'autre partie traverse le miroir (bon, un rayon lumineux ne passe pas au travers d'un miroir... C'est un schéma équivalent au schéma réel : vous verrez ça l'an prochain !) et rencontre un deuxième miroir, parallèle au premier et distant de celui-ci d'une distance e. Le rayon lumineux est entièrement réfléchi sur ce deuxième miroir (voir figure ci-dessous). Les deux rayons arrivent sur un écran perpendiculaire à ces rayons.



On appelle différence de marche la différence δ entre les distances parcourues par ces deux rayons. Montrer que $\delta = 2e\cos(i)$.

Exercice 43 : ✪✪✪ On fait l'approximation que Lille se trouve à une latitude de 45° et que la Terre est une sphère parfaite de 6400 km de rayon. Lors d'un voyage de classe, nous allons 1000 km au Nord, puis 1000 km à l'Est. Pour le retour, un élève dont on taira le nom propose de faire 1000 km au Sud et 1000 km à l'Ouest, pour voir du pays. Qu'en pensez-vous ?

Exercice 44 - Construction de l'heptagone régulier ? ✪✪✪



La figure ci-contre a été réalisée de la façon suivante : N est un point du cercle de centre O ; on a tracé le cercle de même rayon et de centre N qui coupe le premier cercle en P et Q ; R est le milieu de $[PQ]$. On a reporté 7 fois la distance PR sur le premier cercle pour obtenir un heptagone régulier. Cette construction est-elle exacte ? On pourra montrer que si elle l'est, alors

$$\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

et prouver ensuite que les nombres

$$\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right), \cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)$$

sont rationnels et en déduire une contradiction.

Remarque : On peut en fait montrer que l'heptagone régulier ne peut pas être construit à l'aide d'une règle et d'un compas (cas particulier du théorème de Gauß - Wantzel, 1837) mais ça c'est une autre histoire !

Chapitre 6

Arithmétique

« - Tu mets un tiers de Curaçao. Fais attention hein : un tout petit tiers. Un tiers de citron. Tu vois. Un bon tiers de Picon. Tu vois. Et alors, un grand tiers d'eau. Voilà.
- Ça fait quatre tiers.
- Et alors ?
- Et ben dans un verre, y a que trois tiers.
- Mais imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers.
- Et non, ça dépend pas.
- Pourquoi ?
- Et ben, c'est de l'arithmétique, ça. »

Marcel Pagnol, Marius.

Vrai ou Faux ?

1. Si $n \equiv 1[35]$, alors n est impair.
2. Si a et b divisent d, alors ab aussi.
3. Si d divise ab, alors d divise a ou b.
4. L'intervalle d'entiers $[\![1\,;\, 1000]\!]$ contient 140 multiples de 7.
5. Si p et q sont premiers et vérifient $p - q = 11$ alors $p = 13$ et $q = 2$.
6. Si d divise n^2 alors d divise n.
7. Si $a^2 \equiv 1[n]$ alors $a \equiv \pm 1[n]$.
8. Si $4a \equiv 4b[13]$ alors $a \equiv b[13]$.
9. Si $4a \equiv 4b[6]$ alors $a \equiv b[6]$.
10. 0 divise tout entier n.
11. 131234567890987654321265439873182734654524132209876543212345678922116253748271538494 est divisible par 11.
12. Si $n \equiv 3[4]$, alors n n'est pas somme de deux carrés.
13. S'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 2$ alors $a \wedge b = 2$.
14. Soit $(k, n) \in \mathbb{Z}^2$. Si k ne divise pas n alors $k \wedge n = 1$.
15. $1789 \wedge 1515 = 1$.
16. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b \wedge c = 1$. Alors $a \wedge b = 1$.
17. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \wedge b = a$. Alors b divise a.
18. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \vee b = a$. Alors b divise a.
19. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $a \wedge b = 1$ et c divise ab. Alors c divise a ou c divise b.
20. Le système $a \wedge b = 14$ et $a \vee b = 114$ n'admet pas de solution.
21. Si n est impair, alors n et $n + 2$ sont premiers entre eux.
22. Le PPCM de deux entiers naturels premiers entre eux est leur produit.
23. 111 est premier.
24. Si $n \equiv 0[2]$ alors $n + 1 \equiv 1[3]$.
25. Il y a une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 4.
26. Deux entiers m et n ont même valuation 2-adique si et seulement s'il existe x et y impairs tels que $mx = ny$.
27. L'équation $3x \equiv 2[25]$ admet une infinité de solutions.
28. L'équation $3x \equiv 2[24]$ admet une infinité de solutions.
29. $x \equiv 1[72]$ si et seulement si $x \equiv 1[8]$ et $x \equiv 1[9]$.

6.1 Écriture en base b

Exercice 1 : ✪ Écrire 17 dans les bases $2, 3, \ldots, 9$.

Exercice 2 : ✪ Existe-t-il une base b dans laquelle $\overline{34}^b + \overline{14}^b = \overline{104}^b$?

Exercice 3 : ✪ Écrire 10043 en base 2.

Exercice 4 : ✪ Démontrer la règle pour mettre au carré un nombre se terminant par 5 vue en début d'année.

Exercice 5 : ✪ Pour quelle valeur de $a \in [\![0\,;\,9]\!]$ le nombre d'écriture décimale $123a4$ est-il divisible par 12 ?

Exercice 6 : ✪✪ Soit $abcdef$ l'écriture en base 10 d'un entier divisible par 13. Montrer que l'entier dont l'écriture est $bcdefa$ est encore divisible par 13.

Exercice 7 : ✪✪ Soit x un nombre à (au plus) deux chiffres. Montrer que le nombre à (au plus) six chiffres obtenu en juxtaposant trois fois x est divisible par 37.

6.2 Division euclidienne

Exercice 8 : ✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $b \neq 0$. Expliciter la division euclidienne de $-a$ par b en fonction de la division euclidienne de a par b.

Exercice 9 : ✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $0 < b \leq a$. Soit r le reste de la division euclidienne de a par b. Montrer que $a > 2r$.

6.3 Divisibilité

Exercice 10 : ✪ Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1$ divise $n^2 + 1$.

Exercice 11 : ✪✪ Soient m, n, k trois entiers strictement supérieurs à 1 tels que $m = nk$. Montrer que $(n!)^k \vee (k!)^n$ divise $m!$. On pourra utiliser l'exercice 38 du chapitre 3.

Exercice 12 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n + 1$ et $2n + 1$ sont premiers entre eux. Simplifier $(n+1)\binom{2n+1}{n+1}$ et en déduire que $n + 1$ divise $\binom{2n}{n}$.

Exercice 13 : ✪ Soit $n \geq 2$. Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors n est la puissance 6-ième d'un entier.

Exercice 14 : ✪ Soient a, b, c trois entiers relatifs non nuls tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que $a \wedge bc = a \wedge c$.

Exercice 15 : ✪✪ Soient a et b deux entiers naturels.

1. Montrer que si a^2 divise b^2 alors a divise b.
2. Montrer que si a et b sont premiers entre eux et si ab est un carré, alors a et b sont des carrés. Le résultat est-il encore vrai si a et b ne sont pas supposés premiers entre eux ?
3. Généraliser au cas d'une puissance k-ième avec $k \geq 2$. En déduire que le produit de trois entiers consécutifs non nuls n'est jamais une puissance k-ième.

Exercice 16 - Théorème de Lamé (1844) : ✪✪ On rappelle que la suite de Fibonacci est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{llcl} F_0 = 0 & F_1 & = & 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} & F_{n+2} & = & F_n + F_{n+1} \end{array} \right.$$

On se donne dans cet exercice deux entiers a et b vérifiant $1 < b < a$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si l'algorithme d'Euclide donnant $a \wedge b$ s'arrête au bout de n étapes, alors $a \geq dF_{n+2}$ et $b \geq dF_{n+1}$, où on a noté $d = a \wedge b$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} \geq \varphi^{n-1}$ où $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. En déduire que le nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide donnant $a \wedge b$ est inférieur ou égal à $\dfrac{\ln(b)}{\ln(\varphi)} + 1$.
4. On donne $\dfrac{\ln(10)}{\ln(\varphi)} \approx 4.78$. Montrer que $n \leq 5N$ où N est le nombre de chiffres de b en base 10.

Exercice 17 : ✪✪ Si $n \geq 1$, on note $D_+(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n.

1. Soient a et b deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Montrer que la fonction « produit »
$$\left\{\begin{array}{ccc} D_+(a) \times D_+(b) & \to & D_+(ab) \\ (x,y) & \mapsto & x \times y \end{array}\right.$$
est bijective.
2. Si $n \geq 1$, on note $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n. Montrer que la fonction σ est semi-multiplicative, c'est-à-dire que pour tous a et b premiers entre eux, $\sigma(ab) = \sigma(a) \times \sigma(b)$.

Exercice 18 : ✪✪ Soit $\theta = 2\pi/7$. En exprimant $\cos(3\theta)$ et $\cos(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$, montrer que $\cos(\theta)$ est irrationnel.

Exercice 19 : ✪✪ Soit $n \geq 2$ et soit $k \in [\![1\,;\, n-1]\!]$. Montrer que n divise $\dbinom{n-1}{k} - (-1)^k$.

Exercice 20 : ✪✪✪ Montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers n divisibles par tous les entiers d vérifiant $1 < d \leq \sqrt{n}$ puis donner tous ces entiers.

6.4 Congruences

Exercice 21 : ✪ Quel est le chiffre des unités de 1789^{1789} ? de 1515^{1515} ? de 2022^{2022} ? de 2023^{2023} ? de $2017^{2021^{2023}}$?

Exercice 22 : ✪ Donner les deux derniers chiffres de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{2023} k!$.

Exercice 23 : ✪ Montrer que $3333^{4444} + 4444^{3333}$ est divisible par 5.

Exercice 24 : ✪ Montrer que 7 divise $3^{105} + 4^{105}$.

Exercice 25 : ✪ Montrer que pour tout n impair, $n(n^2-1)$ est divisible par 24.

Exercice 26 : ✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que : $3 \mid a^2 + b^2 \iff 3 \mid a$ et $3 \mid b$.

Exercice 27 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Montrer que : $6 \mid a+b+c \iff 6 \mid a^3+b^3+c^3$.

Exercice 28 : ✪ Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $3x \equiv 4[7]$.

Exercice 29 : ✪ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
2. $2^{2n+1} + 3^{2n+1}$ est divisible par 5.
3. $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ est divisible par 17.
4. $2^{4^n} + 5$ est divisible par 21.
5. $n^{2023}(n^{2024} - 1)$ est divisible par 8.

Exercice 30 : ✪ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que $n^7 \equiv n[42]$.

Exercice 31 : ✪ Soit $n \geq 1$, soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que si $a \equiv b[n]$, alors $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 32 : ✪

1. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que si 7 divise $a^3+b^3+c^3$ alors 7 divise abc.
2. **Remake :** Soit $(x,y) \in \mathbb{N}^3$. Montrer que x^2+y^2 est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.

Exercice 33 : ✪ Montrer qu'il n'existe aucun $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ soient entiers.

Exercice 34 : ✪ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{23n}{35} \in \mathbb{N}$$

Exercice 36 : ✪ Pierre le fermier multiplie son jour de naissance par 13 et son mois de naissance par 14. Il somme les deux nombres obtenus et obtient 230. Quel est son anniversaire ?

Exercice 37 : ✪✪ Montrer que, parmi les 101 dalmatiens, on peut en choisir 11 tels que le nombre **total** de leurs taches est un multiple de 11.

Exercice 38 - Cas particulier du théorème de Catalan-Mihailescu : ✪✪ Donner tous les couples d'entiers $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^n - 3^m = 1$.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $a^k \equiv 1[b]$ si et seulement si a et b sont premiers entre eux. En déduire qu'il existe un multiple de 2023 qui ne s'écrit qu'avec des 1. Et pour 2024 ?

Exercice 40 : ✪✪✪ On pouse $u_0 = 9$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3{u_n}^4 + 4{u_n}^3$. Montrer que l'écriture décimale de u_{11} comporte plus de 2023 fois le chiffre 9.

Exercice 41 : ✪✪✪ On se donne 2023 entiers dont la somme est nulle. Montrer que la somme de leurs puissances 37-ièmes est divisible par 399.

Exercice 42 - Nombres de Fermat, le retour : ✪✪✪ Si $n \in \mathbb{N}$, on note $F_n = 2^{2^n} + 1$ le n-ième nombre de Fermat.

1. Donner selon la valeur de n les deux derniers chiffres de F_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un facteur premier de F_n.
   (a) Montrer que l'ensemble $E = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^k \equiv 1[p]\}$ admet un plus petit élément noté d.
   (b) Montrer que tout élément de E est divisible par d et en déduire que $d = 2^{n+1}$.
   (c) Montrer que $p \equiv 1 \left[2^{n+1}\right]$. Pourquoi était-il naturel pour Euler d'essayer 641 lorsqu'il cherchait les diviseurs de F_5 ?

Exercice 43 : ✪✪✪✪ Donner la somme des chiffres de la somme des chiffres de la somme des chiffres de 4444^{4444}.

6.5 Équations diophantiennes

Exercice 44 : ✪ Donner les solutions entières de l'équation $29x - 11y = 1$.

Exercice 45 : ✪ En réduisant modulo un entier bien choisi, montrer que les équations suivantes n'ont pas de solution $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$:

- $x^2 - 4y^2 = 1791$
- $x^2 + 6y^2 = 1112$
- $x^2 + y^2 = 1791$

Exercice 46 : ✪ En raisonnant modulo 8, montrer que l'équation diophantienne $x^2 - 2y^2 = 3$ n'a pas de solution entière.

Exercice 47 : ✪✪ Donner les couples d'entiers naturels (x,y) solutions de $x \wedge y + x \vee y = y + 4$.

Exercice 48 : ✪✪ Résoudre l'équation $5x - 3y + 8z = 1$ dans $\mathbb{Z}^3$.

Exercice 49 - Triplets pythagoriciens : ✪✪ Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $x^2 + y^2 = z^2$ et on suppose que $x \wedge y = 1$. Dans tout l'exercice, on pourra utiliser l'exercice 15.

1. (a) Montrer que $y \wedge z = 1$.
   (b) Montrer que x ou y est pair. Quitte à les permuter, on suppose que y est pair.
   (c) Montrer que $z - x$ et $z + x$ sont pairs et que $(z-x)/2$ et $(z+x)/2$ sont premier entre eux.
   (d) Justifier qu'il existe u et v premier entre eux tels que $x = u^2 - v^2, y = 2uv$ et $z = u^2 + v^2$.
2. Donner finalement tous les triplets $(x,y,z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2$.

Remarque : Le grand théorème de Fermat affirme que l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a aucune solution non triviale (i.e. avec x, y et z non nuls) dès que $n \geq 3$. Il a été démontré par Andrew Wiles en 1994.

Exercice 50 : ✪✪ Montrer, en raisonnant modulo 3, que l'équation $x^2 + y^2 = 3z^2$ n'a pas de solution entière.

Exercice 51 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer que l'équation diophantienne $y^2 = x^3 + 7$ n'a pas de solution.

1. Montrer que cette équation n'a pas de solution si x est pair.
2. On suppose par l'absurde que cette équation admet une solution (x, y) avec x impair qu'on écrit sous la forme $x = 2k + 1$.
   (a) Montrer que tout facteur premier de $y^2 + 1$ est congru à 1 modulo 4.
   (b) En remarquant que $y^2 + 1 = x^3 + 8 = (x + 2) \times (x^2 - 2x + 4)$, aboutir à une absurdité.

6.6 PPCM et PGCD

Exercice 52 :

1. ✪ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fraction $\dfrac{21n + 4}{14n + 3}$ est irréductible.
2. ✪✪✪ Même question avec $\dfrac{31n + 4}{14n + 3}$.

Exercice 53 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le PGCD de $n! + 1$ et de $(n + 1)! + 1$.

Exercice 54 : ✪ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 6^n + 5^n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \wedge u_n = 1$.

Exercice 55 : ✪ Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 3$ divise $2n^2 - n - 6$.

Exercice 56 : ✪ Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $28 \vee n = 140$.

Exercice 57 : ✪

1. Donner $9100 \wedge 1848$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $n^3 + 2n \wedge n^4 + 3n^2 + 1$.

Exercice 58 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(2n + 4) \wedge (3n + 3) \in \{1; 2; 3; 6\}$.

Exercice 59 : ✪ Soit $(a, m, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ avec $a \geq 2$. Montrer que $(a^n - 1) \wedge (a^m - 1) = a^{n \wedge m} - 1$. On pourra remarquer que si q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par m, alors $a^n - 1 = a^r \times (a^{qm} - 1) + a^r - 1$.

Exercice 60 : ✪✪ Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) tels que $a \wedge b = 42$ et $a \vee b = 1680$.

Exercice 61 : ✪✪

1. Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 4373 et 826 par n donnent pour restes 8 et 9.
2. **Remake :** Déterminer tous les entiers naturels non nuls n tels que les divisions euclidiennes de 6381 et 3954 par n donnent pour restes 9 et 6.

Exercice 62 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe a_n et b_n appartenant à $\mathbb{N}$ tels que $(1 + \sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 63 : ✪✪ Soient M et m deux entiers naturels non nuls. Donner une CNS sur M et m pour qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $ab = M$ et $a \vee b = m$.

Exercice 64 : ✪✪ Soient a et b supérieurs ou égaux à 2.

1. On suppose que a et b sont premiers entre eux. Déterminer le PGCD de $a + b$ et de ab.
2. Dans le cas général, quel est le PGCD de $a + b$ et de $a \vee b$?

Exercice 65 - Suite de Fibonacci : ✪✪✪ On note encore $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+1} \times F_{n-1} - {F_n}^2 = (-1)^n$. En déduire que deux termes successifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
2. Montrer que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $F_{n+m} = F_{n+1}F_m + F_nF_{m-1}$.
3. En déduire que pour tout $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, F_{n+m} \wedge F_m = F_n \wedge F_m$ puis que $F_n \wedge F_m = F_{n \wedge m}$.

Exercice 66 : ✪✪✪✪ On dit qu'une partie non vide E de $\mathbb{N}^*$ est sympathique si :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \frac{x+y}{x \wedge y} \in E$$

1. Montrer que toute partie sympathique contient 2 et que $\{2\}$ est une partie sympathique.
2. Déterminer toutes les parties sympathiques qui contiennent 1.
3. Soit E une partie sympathique non réduite à $\{2\}$ et ne contenant pas 1.
   (a) Montrer que le plus petit élément de $E \backslash \{2\}$ est impair.
   (b) Montrer que $E = \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$.

6.7 Valuation p-adique

Exercice 67 : ✪ Déterminer le nombre et la somme des diviseurs positifs de 5544.

Exercice 68 : ✪

1. Donner le nombre de diviseurs de 36000000000.
2. ✪✪ Quel est le plus petit entier admettant exactement 15 diviseurs ?

Exercice 69 : ✪✪ Soit $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Quel est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que b divise an ?

Exercice 70 : ✪✪ En utilisant la formule de Legendre, montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, $\dfrac{(2n)!(2m)!}{n!m!(n+m)!}$ est un entier.

Exercice 71 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $v_2\left(5^{2^n} - 1\right) = n + 2$.

6.8 Nombres premiers

Exercice 72 : ✪ Les nombres $1, 11, 111, 1111$ et 111111 sont-ils premiers ?

Exercice 73 : ✪ En s'inspirant de la démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers, montrer que pour tout $n \geq 1$, le n-ième nombre premier est inférieur strict à 2^{2^n}.

Exercice 74 - Un cas élémentaire du théorème de Dirichlet : ✪✪

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. **Remake :** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Remarque : Le théorème de Dirichlet affirme que pour tous a et b appartenant à $\mathbb{N}^*$ premiers entre eux (pourquoi doivent-ils être premiers entre eux ?), il existe une infinité de nombres premiers congrus à a modulo b.

Exercice 75 - Nombres premiers jumeaux : ✪✪

1. Soit $p \geq 5$ (pas forcément premier). Montrer que parmi $p, p+2$ et $p+4$, il y a au moins un multiple de 3.

   Il en découle que $p, p+2$ et $p+4$ ne peuvent pas être tous les trois premiers. Cependant, il n'y a aucune raison pour que p et $p+2$ ne soient pas premiers tous les deux : deux nombres premiers p et q tels que $|p-q| = 2$ sont dits jumeaux. C'est le cas par exemple de 3 et 5, de 5 et 7, de 11 et 13, de 17 et 19 etc.

2. Soient p et q deux nombres premiers. Montrer qu'ils sont jumeaux si et seulement si $pq+1$ est un carré.
3. Montrer que si p et q sont premiers jumeaux et supérieurs ou égaux à 5, alors $p+q$ est divisible par 12.

Remarque : L'existence d'une infinité de nombres premiers jumeaux est un célèbre problème ouvert. Pour l'instant, on sait seulement qu'il existe une infinité de couples de nombres premiers (p,q) tels que $|p-q| \leq 600$. Les recherches s'activent pour faire descendre la borne, mais il semble que les techniques employées ne puissent faire descendre la borne sous 12.

Exercice 76 - Fonction de Yéléhada : ✪✪

1. Soit $n \geq 2$ et soit $k \in [\![2\,;\, n-1]\!]$. Montrer que $\left\lfloor \dfrac{n}{k} - \left\lfloor \dfrac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor = 1$ si $k \mid n$ et vaut 0 sinon.
2. Pour tout $n \geq 2$, on pose

$$t(n) = 2 + (n-2) \times \left\lfloor \frac{1}{1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left\lfloor \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right\rfloor} \right\rfloor$$

Montrer que $\{t(n) \,|\, n \geq 2\} = \mathbb{P}$.

Exercice 77 - Produit des nombres premiers inférieurs ou égaux à n : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\dbinom{2m+1}{m} \leq 4^m$.
2. Soit p un nombre premier vérifiant $m+1 < p \leq 2m+1$. Montrer que p divise $\dbinom{2m+1}{m}$. En déduire que

$$\prod_{m+1 < p \leq 2m+1} p \leq 4^m$$

où le produit ne porte que sur les nombres premiers.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$.

Remarque : On peut en fait montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\prod_{p \leq n} p \leq c^n$ où $c = 2.76278\ldots$ (résultat montré par Rosser et Schoenfeld en 1962).

Exercice 78 - Théorème de Wilson : ✪✪✪

1. Soit $p \geq 2$ un nombre premier.
   (a) Montrer que pour tout $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$, il existe un unique élément de $[\![1\,;\, p-1]\!]$ que l'on notera $f(x)$ tel que $x \times f(x) \equiv 1[p]$. Expliciter $f(f(x))$.
   (b) Soit $x \in [\![1\,;\, p-1]\!]$. Donner le cardinal de $\{x; f(x)\}$.
   (c) Soit $(x, y) \in [\![1\,;\, p-1]\!]^2$. Montrer que les ensembles $\{x; f(x)\}$ et $\{y; f(y)\}$ sont soit disjoints soit égaux.
   (d) Montrer finalement que $(p-1)! \equiv 1[p]$.
2. Soit $n \geq 5$ composé. Montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
3. Nous avons donc montré le théorème de Wilson : un entier $p \geq 5$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$. Ce critère de primalité présente-t-il un intérêt pratique ?
4. Si $n \geq 2$, on note $f(n)$ le plus petit nombre strictement positif congru à $2 + 2n!$ modulo $n+1$. Montrer que $\{f(n) \,|\, n \geq 2\} = \mathbb{P}$.

WHEN PEOPLE ASK FOR STEP-BY-STEP DIRECTIONS, I WORRY THAT THERE WILL BE TOO MANY STEPS TO REMEMBER, SO I TRY TO PUT THEM IN MINIMAL FORM.

Chapitre 7

Nombres complexes

« A little messy ? The Mandelbrot set of complex numbers is a little messy, this is chaos ! »

The Big Bang Theory.

On considère $\mathbb{C}$ en bijection avec le plan complexe par la bijection habituelle.

Vrai ou Faux ?

1. La partie réelle de $\dfrac{1}{2+i}$ est $\dfrac{1}{2}$.
2. La partie réelle de $(3+2i)^2$ est 5.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \notin \mathbb{R}$ alors $z^2 \notin \mathbb{R}$.
4. Soient z_1 et z_2 deux complexes. Alors $|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2|$.
5. Soient z_1 et z_2 deux complexes. Alors $|z_1 - z_2| \leq \max(|z_1| - |z_2|, |z_2| - |z_1|)$.
6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le module de e^z est $e^{|z|}$.
7. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le conjugué de e^z est $e^{\overline{z}}$.
8. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Le produit scalaire des vecteurs d'affixes z_1 et z_2 est $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2})$.
9. Soit $\theta \notin 2i\pi\mathbb{Z}$. La fonction $z \mapsto e^{i\theta}z + 1$ est une écriture complexe de la rotation d'angle θ de centre d'affixe 1.
10. Soit $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$. La fonction $z \mapsto \lambda z + 1$ est une écriture complexe d'une homothétie.
11. j est une racine 2023-ième de l'unité.
12. $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{U}_{666}$.
13. Si d ne divise pas n, alors $\mathbb{U}_d \cap \mathbb{U}_n = \{1\}$.
14. Les ensembles $\mathbb{U}_n$ et $\{\omega \,|\, \omega^n = -1\}$ sont en bijection.
15. $\{\overline{\omega} \,|\, \omega \in \mathbb{U}_n\} = \mathbb{U}_n$.
16. Si $n > 1$, $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.
17. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\mathrm{Re}\,(1/z) = -\mathrm{Re}(z)$.
18. Soient z_1 et z_2 de parties réelles positives. Alors $z_1 + z_2$ est de partie réelle positive.
19. Soient z_1 et z_2 de parties réelles positives. Alors $z_1 z_2$ est de partie réelle positive.
20. Un argument de $e^{i\pi/6} + e^{i9\pi/6}$ est $10\pi/6$.
21. Soit $z \in \mathbb{C}$. La partie réelle de iz est la partie imaginaire de z.
22. $\exists (a, b) \in \mathbb{C}^2, \forall z \in \mathbb{C}, \overline{z} = az + b$.

7.1 Calculs dans $\mathbb{C}$

Exercice 1 : ✪ Montrer que l'application $z \mapsto \dfrac{z-1}{z-2}$ est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{2\}$ sur un ensemble que l'on précisera, et trouver la bijection réciproque.

Exercice 2 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. Montrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 : ✪

1. Soit S l'ensemble des entiers qui sont somme de deux carrés parfaits, c'est-à-dire $S = \{x^2+y^2 \mid (x,y)\in\mathbb{Z}^2\}$. Montrer que S est stable par produit.
2. On pose $S' = \{x^2+y^2+z^2 \mid (x,y,z)\in\mathbb{Z}^3\}$. Montrer que $15 \notin S'$ et en déduire que S' n'est pas stable par produit.

Exercice 4 - Identité du parallélogramme : ✪ Soit $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$. Montrer que $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$. Expliquer le nom de cet exercice.

Exercice 5 - Inégalité de Cauchy-Schwarz, stage one : ✪

1. Soient $z_1 = x_1+iy_1$ et $z_2 = x_2+iy_2$ deux complexes. Expliciter la partie réelle de $z_1\times\overline{z_2}$.
2. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x_1,x_2,y_1,y_2)\in\mathbb{R}^4, \qquad |x_1x_2+y_2y_2| \leq \sqrt{{x_1}^2+{y_1}^2}\times\sqrt{{x_2}^2+{y_2}^2}$$

Exercice 6 : ✪ Soient a et b appartenant à $\mathbb{U}$ distincts. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$, $\dfrac{z+ab\overline{z}-(a+b)}{a-b}\in i\mathbb{R}$.

Exercice 7 : ✪✪ Soient $n>1$ et $z_1,\dots,z_n$ des complexes non nuls de même module. Montrer que

$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\cdots z_n}\in\mathbb{R}$$

Exercice 8 : ✪✪ Soient $(a,b,c)\in\mathbb{U}^3$. Montrer que $|ab+bc+ac| = |a+b+c|$.

Exercice 9 : ✪✪ Soit $u\in\mathbb{C}\backslash\{1\}$ et soit $z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Montrer que : $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u}\in\mathbb{R} \iff |u|=1$.

Exercice 10 : ✪✪ Soit $z\in\mathbb{C}$. Exprimer $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de $|z|$ et $\mathrm{Re}(z)$.

Exercice 11 : ✪✪ Résoudre dans $\mathbb{U}$ le système $\begin{cases} a+b+c &= 1 \\ abc &= 1\end{cases}$ (on pourra s'intéresser à la fonction $f : z\mapsto (z-a)(z-b)(z-c)$).

Exercice 12 : ✪✪ Le but de l'exercice est de déterminer toutes les applications $\varphi : \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\forall (z_1,z_2,\lambda)\in\mathbb{C}^2\times\mathbb{R}, \begin{cases} \varphi(z_1+z_2) &= \varphi(z_1)+\varphi(z_2) \\ \varphi(z_1\times z_2) &= \varphi(z_1)\times\varphi(z_2) \\ \varphi(\lambda z_1) &= \lambda\varphi(z_1)\end{cases}$$

1. Montrer qu'une solution du problème est entièrement déterminée par ses images en 1 et en i.
2. En déduire toutes les solutions du problème.

Exercice 13 : ✪✪ Soit $z\in\mathbb{C}$. Montrer que $|z|\leq|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|\leq\sqrt{2}\times|z|$.

Exercice 14 : ✪✪✪ Soit f l'application de $\mathbb{C}-\{2\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z+2i}{z-2}$.

1. Montrer que f est injective. Quelle est son image ?
2. Exprimer f^{-1}.
3. Donner les ensembles suivants : $f^{-1}(\mathbb{R}), f^{-1}(i\mathbb{R}), f^{-1}(\mathbb{U})$ puis $f(\mathbb{R}-\{2\}), f(i\mathbb{R})$ et $f(\mathbb{U})$

Exercice 15 : ✪✪✪ Soit $z = x+iy\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Montrer que l'argument principal de z est égal à $2\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$.

Exercice 16 : ✪✪✪ Soit f définie de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}$ par $f(z) = z-\frac{1}{z}$.

1. Soit $u\in\mathbb{C}$. Donner selon u le nombre d'antécédents de u par f.
2. Donner l'image de $\mathbb{U}$ par f et son interprétation géométrique.
3. Montrer que f est une bijection entre $D^*(0,1)$ (disque ouvert de rayon 1 privé de son centre) et son image.

Exercice 17 - Le demi-plan de Poincaré : ✪✪✪✪ On définit le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Im}(z)>0\}$. Soient $a,b,c,d\in\mathbb{Z}$ tels que $ad-bc=1$, on définit la fonction f par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{H}$.
2. Soit $z \in \mathbb{H}$. Montrer que $\operatorname{Im}(f(z)) = \dfrac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$.
3. En déduire que f est une bijection de $\mathbb{H}$ dans lui-même.

7.2 Inégalité triangulaire

Exercice 18 : ✪ Pierre le fermier part en vacances. Sur l'autoroute, il voit écrit : « Paris : 46 km, Versailles : 43km ». Il se dit : « Tiens, je ne savais pas qu'il n'y avait que 3 km entre Paris et Versailles ». Expliquer son erreur à Pierre le fermier, et encadrer la distance réelle entre Paris et Versailles.

Exercice 19 : ✪ Soient $z_1, \dots, z_n$ des complexes de module 1. On pose $z = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$. Montrer que z est un réel, et que $0 \leq z \leq n^2$.

Exercice 20 : ✪ Soient z_1 et z_2 deux complexes. Montrer que

- $1 \leq |z_1+z_2| + |1+z_1| + |z_2|$
- $|z_1+z_2|^2 \leq \left(1+|z_1|^2\right)\left(1+|z_2|^2\right)$

Exercice 21 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $z \in \mathbb{C} - \mathbb{U}$. Montrer que $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

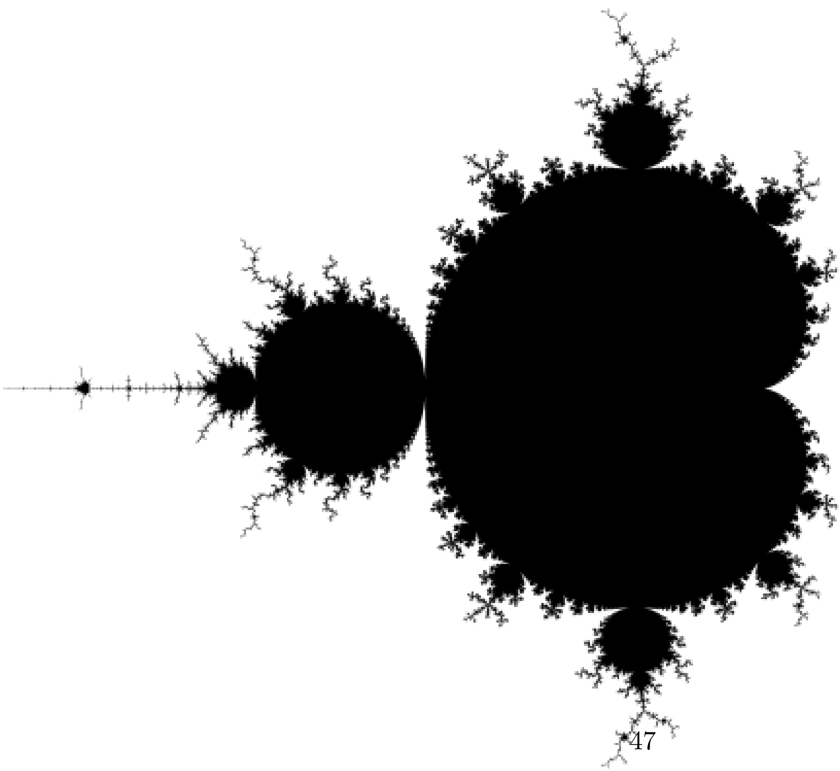
Exercice 22 : ✪ Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. Simplifier les quantités $(a+b)+(a-b)$ et $(a+b)-(a-b)$. En déduire que $|a|+|b| \leq |a+b|+|a-b|$. Cas d'égalité ?

Exercice 23 - Introduction à l'ensemble de Mandelbrot : ✪✪✪ Soit $c \in \mathbb{C}$. On définit la suite (z_n) par

$$z_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = {z_n}^2 + c$$

La suite (z_n) dépend évidemment de c, mais on ne l'écrit pas pour ne pas alourdir les notations.

1. On suppose que $|c| > 2$.
   (a) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1, |z_n| \geq \dfrac{|c|^n}{2^{n-1}}$.
   (b) En déduire que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. On suppose à présent que $|c| \leq 2$ et qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|z_{n_0}| > 2$. On pose alors $\alpha = |z_{n_0}|$.
   (a) Montrer que pour tout $n \geq n_0, |z_n| \geq \alpha$ puis que $|z_{n+1}| \geq |z_n| \times \left(\alpha - \dfrac{|c|}{\alpha}\right)$.
   (b) En déduire que $|z_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On pourra minorer $(|z_n|)$ par une suite géométrique de raison strictement supé-



Remarque : L'ensemble de Mandelbrot peut être défini par : $M = \{c \in \mathbb{C} \mid |z_n| \nrightarrow +\infty\}$, c'est-à-dire l'ensemble des c tels que la suite (z_n) associée ne tend pas vers $+\infty$ en module. L'ensemble M est un ensemble d'une grande complexité, qui a beaucoup de propriétés intéressantes, dont l'allure est donnée ci-contre. On vient de montrer que M était inclus dans le disque de centre O de rayon 2. Plus précisément, en abscisses, il va de -2 à $1/4$ et, en ordonnées, de (environ) -1 à 1.

La deuxième partie de cet exercice nous fournit un algorithme très pratique pour tracer l'allure de cet ensemble : on prend un complexe c, on calcule les premiers termes de la suite (z_n) associée, disons les cinquante premiers (elle converge ou diverge très vite en général), et si un des termes est de module strictement supérieur à 2, alors c n'appartient pas à M, et on ne fait rien, sinon on colorie le pixel correspondant en noir.

7.3 Résolution d'équations

Exercice 24 : ✪ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

Exercice 25 : ✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Montrer que $f : z \mapsto az^2 + bz + c$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Plus précisément, si $y \in \mathbb{C}$, donner le nombre d'antécédents de y par f.

Exercice 26 : ✪✪ Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 + (2 - 4i)z^2 - (2 + 4i)z + 16 + 8i = 0$ sachant que cette équation admet une racine imaginaire pure.
2. $z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 11i)z - 2(1 + 7i) = 0$ sachant que cette équation admet une racine réelle.
3. $z^3 - (2 + 3i)z^2 - (3 - 5i)z + (6 + 2i) = 0$.
4. $(z^2 - 4z + 5)^2 + (z + 1)^2 = 0$.
5. $\overline{z} = z^n$ $(n \geq 2)$.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$. Trouver deux **réels** p et q tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Exercice 28 : ✪✪ Résoudre le système suivant, où x et y sont deux réels positifs :

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(1 + \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) = 2 \\ \\ y\left(1 - \dfrac{1}{x^2 + y^2}\right) = 3 \end{array}\right.$$

On pourra calculer la quantité très difficile qu'est $2 + 3i \ldots$

Exercice 29 : ✪✪✪ Soit $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Montrer que l'équation

$$z^4 + 2\lambda^2 z^2 (1 + \cos(\theta)) \cos(\theta) + \lambda^4 (1 + \cos(\theta))^2 = 0$$

admet exactement quatre racines notées z_1, z_2, z_3, z_4 que l'on explicitera.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} {z_k}^n$.

Exercice 30 : ✪✪✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. Donner une CNS sur a, b et c pour que les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ soient toutes imaginaires pures.

7.4 Calcul de sommes

Exercice 31 : ✪ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2, x \not\equiv \pi/2[\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb)$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2(a) \cos(ka)$
3. $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$
4. $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(ka)$
5. $V_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^3(kx)$.

Exercice 32 : ✪ Soient $x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ et $n \geq 1$. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx)$
2. $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{2023} \binom{2023}{k} j^k$
3. ✪✪ $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(z + e^{2ik\pi/n}\right)^n$.

Exercice 33 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\alpha\pi}\right| \leq \frac{1}{|\sin(\alpha\pi)|}$$

Exercice 34 : ✪ Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in \,]-1\,;1\,[$.

1. Soit $n \in \mathbb{R}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k)$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x\sin(\omega)}{1 - 2x\cos(\omega) + x^2}$.

Exercice 35 : ✪✪ En utilisant le fait que $1/\sin(1) \approx 1.18$, montrer que, pour tout $n \geq 3$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos^2(k) \geq \frac{n}{4}$$

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\cos(k)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Exercice 36 : ✪✪ Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^{8} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{19}\right)$$

Exercice 37 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide du complexe $(1+i)^{2n}$, donner la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k}$.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k}, \qquad B = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+1} \qquad \text{et} \qquad C = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k+2}$$

1. Calculer $A + B + C, A + jB + j^2C$ et $A + j^2B + jC$.
2. En déduire la valeur de A.

7.5 Exponentielle complexe, écriture exponentielle d'un complexe

Exercice 39 : ✪ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2ix} = i$.

Exercice 40 : ✪ Donner un argument de $z = a\left(\dfrac{1 - i\tan(\alpha)}{1 + i\tan(\alpha)}\right)$ en fonction de a, α réels, $a \neq 0, \alpha \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 41 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $z^2 \in \mathbb{R}^-$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

Exercice 42 : ✪ Déterminer les entiers n tels que $(\sqrt{6} + i\sqrt{2})^n$ soit réel.

Exercice 43 : ✪ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $z^2 - 2e^{i\theta}z + 1 = 0$.

Exercice 44 : ✪ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner le module et un argument de $1 + \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Exercice 45 : ✪ Résoudre l'équation $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = \mathrm{Im}\left(z^3\right)$ et représenter graphiquement l'ensemble des solutions.

Exercice 46 : ✪ Donner l'ensemble des complexes z vérifiant $z^4 \in \mathbb{R}$ et $|z|^4 \geq 2$ et le représenter géométriquement dans le plan complexe.

Exercice 47 : ✪ En utilisant les valeurs de $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ calculées lors d'un TD fort fort lointain, donner une expression simple de

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^8$$

Exercice 48 : ✪ Donner $\cos(6x)$ et $\sin(6x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

Exercice 49 : ✪ Donner les racines cubiques de $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

Exercice 50 : ✪ Retrouver les formules suivantes à l'aide de l'exponentielle complexe :

- $\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\cos(a)-\cos(b) = -2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$
- $\sin(a)-\sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$

Exercice 51 : ✪ Résoudre l'équation (d'inconnue $z\in\mathbb{C}$) : $e^z = 3\sqrt{3}-3i$.

Exercice 52 : ✪ Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$, $|e^z|\leq e^{|z|}$ et étudier les cas d'égalité.

Exercice 53 : ✪✪ Calculer

1. $(1-i)^{2023}$
2. $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2023}$
3. $\dfrac{(1+i)^4}{(1-i)^3}+\dfrac{(1-i)^4}{(1+i)^3}$
4. $(1+i)^n-(1-i)^n$
5. $\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

Exercice 54 : ✪✪

1. Linéariser $\sin^3(x)\cos^2(x)$.
2. Linéariser $\sin^4(x)$. En déduire la valeur de

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 55 : ✪✪ Si $\theta\in\mathbb{R}$, on note $f(\theta)$ et $g(\theta)$, respectivement, l'argument principal de $1+e^{i\theta}$ et celui de $1-e^{i\theta}$ (lorsqu'ils existent). Tracer les graphes de f et g en commençant par préciser les éventuels éléments de symétrie.

Exercice 56 : ✪✪ Donner une partie A de $\mathbb{C}$ telle que $\exp : A\to\mathbb{C}^*$ soit une bijection.

Exercice 57 : ✪✪

1. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left|e^{ix}-1\right|\leq|x|$.
2. Est-ce encore vrai pour tout $x\in\mathbb{C}$?

Exercice 58 : ✪✪ Soit $x\not\equiv\dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Mettre la fraction suivante sous une forme plus simple

$$S=\frac{1-\cos(2x)+\cos(4x)-\cos(6x)}{\sin(2x)-\sin(4x)+\sin(6x)}$$

Exercice 59 : ✪✪✪

1. Soit $\varphi>\pi$. Montrer que

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}]\,0\,;\pi\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \dfrac{\varphi-\theta}{\sin(\theta)}\times e^{\frac{\varphi-\theta}{\sin(\theta)}\times\cos(\theta)}\end{array}\right.$$

   est une surjection de $]\,0\,;\pi\,[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que $z\mapsto ze^z$ est surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 60 : ✪✪✪ Soit $[\,0\,;2\pi\,]$. Donner le module et un argument de $1+e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.

Exercice 61 : ✪✪✪ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation : $z+\overline{z}=z^5$. On pourra commencer par montrer que si z est solution, $\overline{z}$ et $-z$ le sont également.

7.6 Racines de l'unité

Exercice 62 : ✪ Calculer la valeur des expressions suivantes :

1. $i^{18} + i^{42} + i^{127} + i^{1789} + i^{2023}$.
2. $1 + i + i^2 + \cdots + i^n$, où $n \geq 1$.
3. $i \times i^2 \times i^3 \times \cdots \times i^{1000}$.

Exercice 63 : ✪ Soit $\alpha \neq 1$ une racine cinquième de l'unité. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha^3 + \alpha + 1)(\alpha^4 + \alpha + 1) = \alpha(\alpha + 1)$$

Exercice 64 : ✪ Simplifier les expressions suivantes, où a, b, c sont trois réels quelconques :

1. $(a + bj + cj^2)(a + bj^2 + cj)$
2. $(a + b)(a + bj)(a + bj^2)$
3. $(aj^2 + bj)(bj^2 + aj)$

Exercice 65 : ✪ Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C} \backslash \{-2i\}$:

$$\left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right)^3 + \left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right)^2 + \left(\frac{z - 2i}{z + 2i}\right) + 1 = 0$$

Exercice 66 : ✪ Soit $n \neq 0, 1$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 67 : ✪ Soit $n \geq 2$. Notons $A_0, \ldots, A_{n-1}$ les images dans le plan complexe des racines n-ièmes de l'unité. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\left\| \sum_{k=0}^{n-1} \overrightarrow{MA_k} \right\| = n$.

Exercice 68 : ✪✪ Donner un complexe de module 1 qui ne soit pas une racine de l'unité.

Exercice 69 : ✪✪ Soit $n \geq 1$, soit $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|^2$.

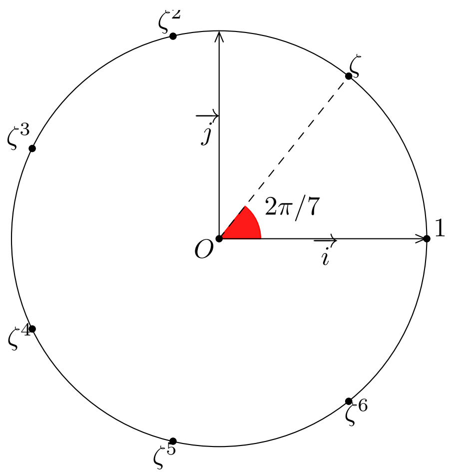
Exercice 70 - Introduction aux groupes de Prüfer : ✪✪ Soit $p \geq 2$. On pose

$$G_p = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists n \geq 1, z^{p^n} = 1\}$$

Montrer que G_p est inclus dans $\mathbb{U}$, stable par multiplication, par division, par conjugaison, et infini.

Exercice 71 : ✪✪ On pose

- $\zeta = e^{2i\pi/7}$
- $A = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$
- $B = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$



Calculer $A + B$ et AB. En déduire A et B.

Exercice 72 - Racines primitives de l'unité : ✪✪ Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On dit que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si n est le plus petit entier p supérieur ou égal à 1 tel que $\omega^p = 1$. Montrer que ω est une racine primitive n-ième de l'unité si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.

Exercice 73 : ✪✪ Soient n_1 et n_2 deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Montrer que $\mathbb{U}_{n_1} \cap \mathbb{U}_{n_2} = \mathbb{U}_{n_1 \wedge n_2}$. Illustrer par un dessin.

Exercice 74 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Résoudre l'équation $(1 + z)^{2n} = (1 - z)^{2n}$. Donner le produit des solutions non nulles.

Exercice 75 : ✪✪✪ En résolvant l'équation

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

de deux façons différentes, donner les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

Exercice 76 - Éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$: ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$.

1. Montrer que $\{\omega^p \,|\, p \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.
2. En déduire que $\{\omega^p \,|\, p \in [\![0\,;\, n-1]\!]\} = \mathbb{U}_n$ si et seulement s'il existe $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$ premier avec n tel que $\omega = e^{2ik\pi/n}$.

Remarque : En d'autres termes, les éléments générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont exactement les racines primitives n-ièmes de l'unité.

Exercice 77 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ définie par $\varphi(z) = z^2$.

1. Vérifier que φ définit bien une application.
2. Montrer que φ est injective si et seulement si n est impair.
3. Plus généralement, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\psi : z \mapsto z^p$ est une bijection de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même si et seulement si $p \wedge n = 1$.

Exercice 78 - Somme de Gauß ✪✪✪ On se donne dans tout l'exercice un entier $n \in \mathbb{N}$ **impair**. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$ et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$$

1. Écrire $|S_n|^2$ comme une somme double, puis montrer que $|S_n|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.
2. (a) Soit $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Montrer que la fonction

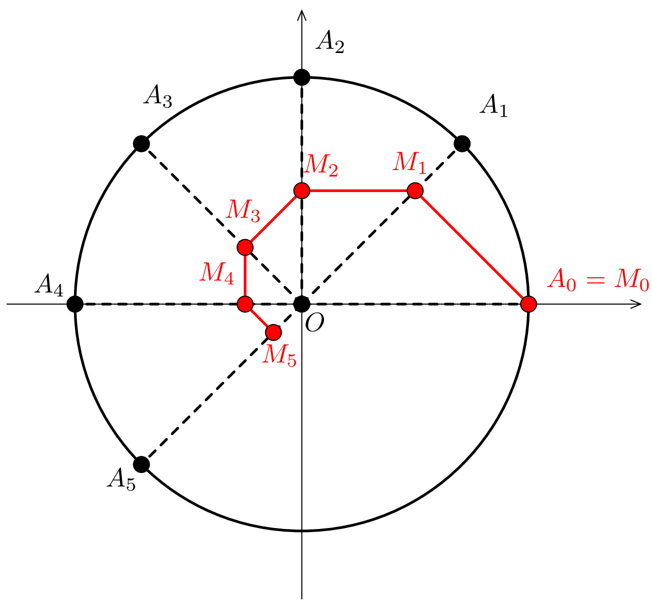
$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$$

   est n-périodique.

   (b) En déduire que, pour tout $k \in [\![0\,;\, n-1]\!]$, $\displaystyle\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2} = \sum_{p=0}^{n-1} \omega^{2pk+p^2}$.
3. Soit $p \in [\![0\,;\, n-1]\!]$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$.
4. En déduire que $|S_n| = \sqrt{n}$.

7.7 Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 79 : ✪



Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $e^{in\pi/4}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}). Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 80 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $k \in [\![0\,;\,n]\!]$. Calculer le module de $5^k \times (3+4i)^{n-k}$. En déduire qu'il existe un cercle contenant plus de n points à coordonnées entières.

Exercice 81 : ✪

1. Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.
2. Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une rotation, soit une translation.

Exercice 82 : ✪ Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que : z est réel $\iff \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$. En donner une interprétation géométrique.

Exercice 83 : ✪

1. Montrer qu'un triangle équilatéral non réduit à un point ne peut pas avoir ses trois sommets à coordonnées entières.
2. **Remake :** Soit $ABCD$ un carré. On suppose que C et D sont à coordonnées entières. Montrer que A et B sont aussi à coordonnées entières.

Exercice 84 : ✪ Montrer par le calcul et aussi par un raisonnement géométrique qu'une similitude directe est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et donner sa bijection réciproque.

Exercice 85 : ✪✪ Décrire géométriquement les ensembles suivants.

1. $A = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 0, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, $B = \{z^3 \,|\, z \in A\}$ et $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, z^3 \in A\}$.
2. $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-1| = |z-i|\}$.
3. $E = \{z \in \mathbb{C} \,|, 1 \leq |z-3| < 3\}$.

Exercice 86 : ✪✪ Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que :

1. les points d'affixe j, z et jz soient alignés.
2. les points d'affixe i, z, iz soient alignés.
3. les points d'affixe $1, z, 1+z^2$ soient alignés.
4. les points d'affixe i, z et iz forment un triangle isocèle rectangle en i.
5. les points d'affixe z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral (non réduit à un point). Illustrer par un dessin.

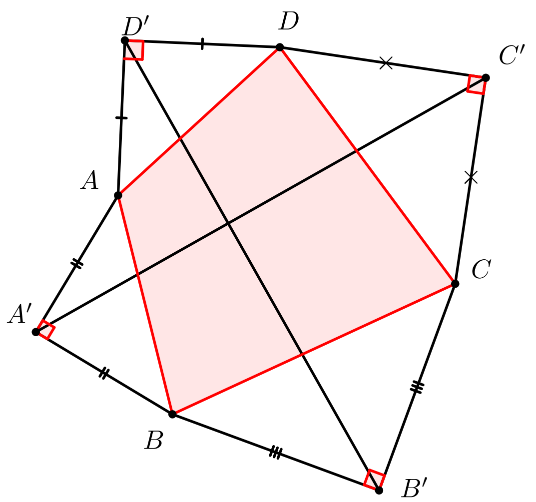
Exercice 87 : ✪✪ Trouver les complexes z non nuls tels que $z, 1/z$ et $1+z$ aient même module.

Exercice 88 : ✪✪ Soient A, B, C trois points du plan d'affixes a, b, c.

1. Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si $a + jb + j^2c = 0$. Les complexes a, b, c jouent-ils le même rôle ?
2. En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$.

Exercice 89 : ✪✪ Déterminer l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $|(1+i)z - 2i| = 2$. Retrouver ce résultat à l'aide de la similitude directe $f : z \mapsto (1+i)z - 2i$.

Exercice 90 : ✪✪✪ Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit les triangles isocèles $A'BA, B'CB, C'DC, D'AD$ rectangles en A', B', C', D' de sens direct. Montrer que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ sont perpendiculaires et de même longueur.



Exercice 91 : ✪✪✪✪ Trouver les complexes z tels que z et ses racines cubiques forment un parallélogramme.

Chapitre 8

Systèmes linéaires et pivot de Gauß

« Rigole donc, va. Tu verras, quand t'auras vingt ans de boutique mon petit, toi aussi t'auras tes petites manies. »

Maigret tend un piège.

Exercice 1 : ✪ Cet exercice doit être fait de tête.

1. Résoudre :

$$\begin{cases} x+y = -1 \\ x-y = 5 \end{cases}$$

2. L'un des deux systèmes suivants n'a pas de solution. Dire lequel, et résoudre l'autre.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2x + 3y - z + t = 2 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

3. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Exercice 2 : ✪ Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} y + z = -4 \\ 2x - y + 2z = -2 \\ -3x + y - z = -2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + y + 6z = 8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ 6x - 3y - z = 5 \end{cases}$

Exercice 3 : ✪✪ Une entreprise fait un bénéfice brut (avant impôts) de 50000 euros. Elle décide de verser 10% de son bénéfice net (après impôts) à une oeuvre caritative. Elle paye deux impôts : un impôt local égal à 5% du bénéfice (moins la donation, défiscalisée) et un impôt sur les sociétés égal à 40% (moins la donation et moins l'impôt local).

1. Calculer les montants de la donation et des deux impôts (on donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près, les valeurs exactes sont très moches...).
2. Quels seraient les impôts si l'entreprise ne faisait pas de donation ? En déduire le coût net de la donation.

Exercice 4 : ✪✪

- 9 boisseaux de chanvre, 7 de froment, 3 de haricots, 2 de fèves, 5 de millet coûtent 140 pièces de monnaie.
- 7 boisseaux de chanvre, 6 de froment, 4 de haricots, 5 de fèves, 3 de millet coûtent 128 pièces de monnaie.
- 3 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 7 de haricots, 6 de fèves, 4 de millet coûtent 116 pièces de monnaie.
- 2 boisseaux de chanvre, 5 de froment, 3 de haricots, 9 de fèves, 4 de millet coûtent 112 pièces de monnaie.
- 1 boisseau de chanvre, 3 de froment, 2 de haricots, 8 de fèves, 5 de millet coûtent 95 pièces de monnaie.

Combien coûte un boisseau de chaque denrée ? (Concours d'entrée à l'école mandarinale supérieure T'ai-hsueh de Xi'an, époque Han, 123 avant notre ère)

Exercice 5 : ✪✪ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes linéaires à paramètres suivants (d'inconnues x, y et z) :

1. $\begin{cases} z = \lambda x \\ y = \lambda y \\ x = \lambda z \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x - z = \lambda x \\ 2x + 4y + 2z = \lambda y \\ -x + 3z = \lambda z \end{cases}$

Exercice 6 : ✪✪✪ Soit $m \in \mathbb{R}$. Décrire l'intersection éventuelle des plans de $\mathbb{R}^3$ d'équations $x - y + (1+m)z = 2 - m$, $2x - my + 3z = 2 - m$ et $(1-m)x + y + 2z = 0$.

Exercice 7 : ✪✪✪ Soient $n, p \geq 1$, (S_0) un système linéaire homogène de n équations à p inconnues à coefficients rationnels. On suppose que (S_0) admet une solution non nulle dans $\mathbb{C}^p$. Montrer qu'il admet une solution non nulle dans $\mathbb{Z}^p$.

Exercice 8 : ✪✪✪

1. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Donner le nombre de solutions éventuelles ($x_1, \dots, x_n$ appartenant à $\mathbb{C}$) du système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & a_1 \\ x_2 + x_3 & = & a_2 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} + x_n & = & a_{n-1} \\ x_n + x_1 & = & a_n \end{cases}$$

2. On se donne n points du plan $A_1, \dots, A_n$. Existe-t-il un polygone à n côtés tel que les A_i soient les milieux des n côtés de ce polygone ?

Exercice 9 : ✪✪✪

1. Trouver a, b, c, d entiers relatifs non tous nuls tels que $20^a \times 24^b \times 25^c \times 27^d = 1$.
2. Soient $k \geq 1$ et $n_1, \dots, n_k$ des entiers supérieurs ou égaux à 2. On dit qu'ils sont multiplicativement dépendants s'il existe $(a_1, \dots, a_k) \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^k$ tel que

$$\prod_{i=1}^{k} {n_i}^{a_i} = 1$$

Montrer qu'une condition suffisante pour cela est que l'entier $m = n_1 \times \cdots \times n_k$ ait au plus $k - 1$ facteurs premiers.

3. Cette condition est-elle nécessaire ?

Chapitre 9

Décomposition en éléments simples

« [...] chaque fois que l'on se réunissait pour discuter, je sortais de ma poche une banane et je la mettais sur la table. Finalement, il me demande : "Pourquoi mettez-vous toujours cette banane sur la table ? Vous ne la mangez jamais ? — C'est pour me rappeler, lui dis-je. — Vous rappeler quoi ? — Écoutez Darryl, vous êtes habillé décemment, un pantalon, un veston, une cravate, vous avez même un visage et vous parlez notre langage, alors, chaque fois, je tombe dans le piège, j'oublie que vous êtes un gorille, et donc je place cette banane devant moi pour me rappeler à qui j'ai l'honneur." »

Romain Gary, La nuit sera calme.

Exercice 1 : ✪ Effectuer la division euclidienne de $A : x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $B : x \mapsto 2x^2 + x - 1$.

Exercice 2 : ✪ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{2x^4}{(x+1)(x-1)^3}$.
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}$.
3. $f : x \mapsto \dfrac{4x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$.
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^3 x(x-1)}$.

Exercice 3 : ✪ Calculer les limites des suites dont le terme général est donné ci-dessous :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{k^3+3k^2+2k}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

Exercice 4 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Soit f la fonction définie sur $[\, 1\,;+\infty\,[$ par

$$f(x) = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)\cdots(t+n)}$$

Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on exprimera cette limite sous forme d'une combinaison linéaires de logarithmes que l'on ne cherchera pas à calculer).