Chapitre 2.5

Fonctions usuelles.

Dans cette partie, nous redéfinissons la plupart des fonctions de référence, nous redonnons la plupart de leurs propriétés, et plus encore. Nous allons donc redéfinir ou redémontrer des choses que nous connaissons déjà ou que nous avons déjà utilisées. Certains résultats seront démontrés, la plupart non car ils l'ont été au lycée ou car nous le ferons dans des chapitres ultérieurs.

I Exponentielle.

Théorème (existence de l'exponentielle, admise). Il existe une unique fonction à valeurs réelles, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vaut 1 en 0 et qui coïncide avec sa dérivée sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est appelée exponentielle et on la note exp. On a donc :

- $\exp(0) = 1$.
- exp est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

L'existence est admise pour l'instant : nous en prouverons une partie dans les chapitres 25 et 35, et vous finirez de prouver l'existence l'année prochaine !

Définition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note aussi e^x au lieu de $\exp(x)$.

Corollaire.

- $\dfrac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
- La fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $n \in \mathbb{R}$, $\exp^{(n)} = \exp$.

e est un nombre (il s'agit de $\exp(1)$) et non pas une fonction. La fonction exponentielle se note exp ou $x \longmapsto e^x$.

Démonstration.
Puisque exp est dérivable en 0, on a :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow[x \to 0]{} \exp'(0) = \exp(0) = 1.$$ □

- On montre par une récurrence immédiate que, pour tout $n \geqslant 1$, exp est dérivable n fois et que $\exp^{(n)} = \exp$: $\rightsquigarrow$ Exercice.

Proposition.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x)\exp(-x) = 1$.
- exp est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Nous ne démontrons pas ces résultats qui sont des rappels de lycée.

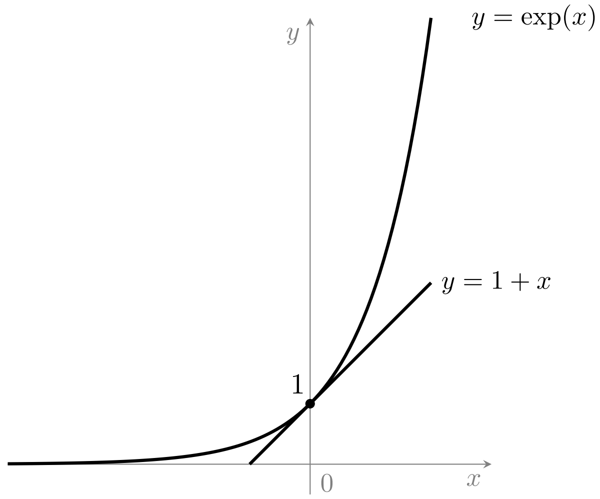
Corollaire.

- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$.

Démonstration.
- La fonction exponentielle est dérivable deux fois et sa dérivée seconde (elle-même) est positive.
- La fonction exponentielle est convexe donc au-dessus de ses tangentes et sa tangente en 0 est la droite d'équation $y = x + 1$.

Proposition. $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ et $e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Ce résultat sera démontré dans le chapitre 13.



Proposition. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$e^{x+y} = e^x e^y, \qquad e^{-y} = \frac{1}{e^y}, \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \qquad e^{nx} = (e^x)^n.$$

Ces propriétés sont similaires à celles des puissances entières. C'est précisément pour cela que l'on note $\exp(x)$ sous la forme e^x. Nous ne démontrons pas ces résultats car ils sont au programme du lycée.

Remarque : ⚠ Erreurs à ne jamais faire : $e^{xy} = e^x e^y$, $e^{xy} = e^x + e^y$ ou pire $e^{x+y} = e^x + e^y$.

Corollaire. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels, alors

$$\exp(x_1 + \cdots + x_n) = \exp(x_1) \times \cdots \times \exp(x_n).$$

Remarque : A retenir : « l'exponentielle transforme les sommes en produits. » Nous verrons une forme condensée avec les symboles $\sum$ et $\prod$ dans le chapitre 3.

Activité : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable non nulle telle que pour tous réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout x, $f(x) = e^{ax}$.

Ce résultat est toujours vrai si f est seulement supposée continue, mais c'est plus difficile à montrer.

Pour tous x et y, on a par hypothèse $f(x+y) = f(x) \times f(y)$. Fixons x et dérivons par rapport à y, ce qui donne, pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f'(x+y) = f'(y) \times f(x)$. Ceci étant vrai pour tout y, c'est vrai pour $y = 0$, donc $f'(x) = f'(0) \times f(x)$. Le réel x étant quelconque :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f'(0) \times f(x)$$

Posons $a = f'(0)$. Par conséquent, f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout x, $f(x) = \lambda e^{ax}$. Si on prend $x = y = 0$ dans l'égalité initiale, il vient $f(0) = f(0)^2$, donc $f(0) = 0$ ou 1. Or, $f(0) = \lambda$. Si $f(0) = 0$ alors f est la fonction nulle, ce qui est exclu, donc $f(0) \neq 0$, si bien que $f(0) = 1 = \lambda$. Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}$.

Remarque : On a utilisé ici une méthode que nous reverrons souvent quand nous verrons des équations fonctionnelles faisant intervenir deux variables : fixer une variable et dériver par rapport à l'autre (parfois on intégrera par rapport à l'autre). Si x est fixé, alors les deux fonctions (de variable y) $g_x : y \mapsto f(x+y)$ et $h_x : y \mapsto f(x) \times f(y)$ sont égales donc ont la même dérivée donc ${g_x}'(y) = {h_x}'(y)$. Inutile de rédiger autant en pratique : on dérive par rapport à une variable et on considère l'autre comme une constante.

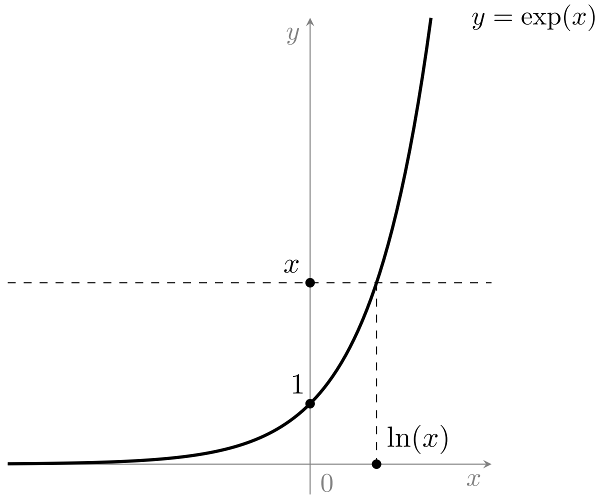
Nous dirons au chapitre 37 qu'on a calculé la dérivée partielle par rapport à y, c'est-à-dire qu'on a calculé $\dfrac{\partial}{\partial y}(f(x+y))$ et $\dfrac{\partial}{\partial y}(f(x) \times f(y))$.

II Logarithme népérien.

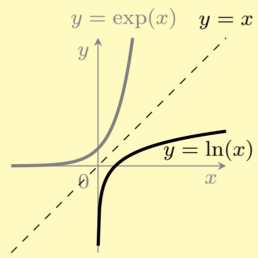
Théorème. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un unique réel y tel que $e^y = x$. On le note $\ln(x)$. On a donc :

- Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $e^x = y$ si et seulement si $x = \ln(y)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\ln(e^y) = y$.

Remarque : En d'autres termes, si $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut x. Par exemple, $\ln(2)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut 2. On a environ $\ln(2) \approx 0.693\dots$ On a également $\ln(e) = 1$. Graphiquement, on trouve $\ln(x)$ de la façon suivante (rappelons qu'on trouve les antécédents éventuels de x en traçant la droite horizontale d'ordonnée x et en regardant les points d'intersection éventuels avec la courbe) :



On dit que ln est la réciproque de exp (nous en reparlerons dans les chapitres 4 et 13. Graphiquement cela se traduit par une symétrie des deux courbes par la première bissectrice des axes :



Définition. La fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \ln(x)$ est appelée logarithme népérien

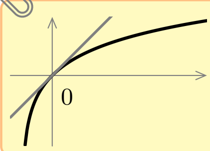
Proposition.

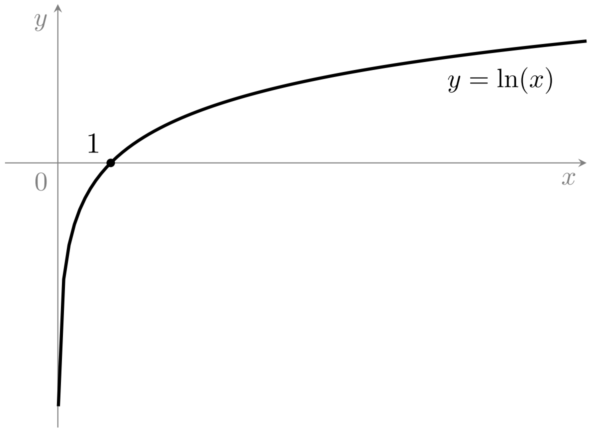
1. ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. $\ln(1) = 0$, ln est strictement négative sur $]\,0\,;1\,[$ et strictement positive sur $]\,1\,;+\infty\,[$.
3. $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $\ln(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.
4. ln est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
5. $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
6. La fonction ln est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.
7. $\forall x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Démonstration. La propriété 2 a été vue au lycée. Les propriétés 1, 3 et 4 seront vues ultérieurement. Pour la 5 :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

où $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0, donc $\dfrac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} f'(0) = 1$. Enfin, la fonction ln est concave car dérivable deux fois et sa dérivée seconde est $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ qui est négative. De même, la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave donc en-dessous de ses tangentes, et la droite d'équation $y = x$ est sa tangente en 0 (voir graphe ci-contre : le graphe de $x \mapsto \ln(1+x)$ s'obtient à partir du graphe du ln par une translation de vecteur $-\overrightarrow{i}$). □





Proposition. Pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\quad \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,

$$\ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y), \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y), \qquad \ln(x^n) = n\ln(x).$$

Tout a été prouvé au lycée.

⚠ Erreurs à ne jamais faire : $\ln(xy) = \ln(x)\ln(y)$, $\ln(x+y) = \ln(x)\ln(y)$ ou pire $\ln(x+y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Corollaire. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs, alors

$$\ln(x_1 \times \cdots \times x_n) = \ln(x_1) + \cdots + \ln(x_n).$$

À retenir : « le logarithme transforme les produits en sommes. » cf. chapitre 3.

III Fonctions hyperboliques.

Définition. On définit les trois fonctions suivantes :

- La fonction cosinus hyperbolique, notée ch :

$$\mathrm{ch} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

- La fonction sinus hyperbolique, notée sh :

$$\mathrm{sh} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right.$$

- La fonction tangente hyperbolique, notée th :

$$\mathrm{th} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \end{array} \right.$$

On trouve parfois les notations cosh, sinh et tanh dans des sujets plus anciens (ou dans Geogebra). Il n'y a a priori aucun lien avec les fonction trigonométriques sinus, cosinus et tangente. Le nom de ces fonctions vient des formules d'Euler que nous verrons dans le chapitre 5. Certaines formules et relations ressemblent à celles de la trigo classique, mais il y a beaucoup de différences (des signes −) par exemple. Attention aux confusions !

Remarque : La fonction th est bien définie sur $\mathbb{R}$ car la fonction ch ne s'annule pas. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$ car son numérateur est une somme de deux exponentielles.

Proposition. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.

C'est l'une des différences dont on parlait : il y a un signe − !

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

□

Proposition.

- La fonction ch est paire, strictement positive, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$. De plus, ch est convexe, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\operatorname{ch}(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$.
- La fonction sh est impaire, donc nulle en 0, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. De plus, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$, concave sur $\mathbb{R}_-$ (donc admet un point d'inflexion en 0), strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\operatorname{sh}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$.
- La fonction th est impaire, donc nulle en 0, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement négative sur $\mathbb{R}_-^*$, $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2$. De plus, elle est convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $\mathbb{R}_+$ (donc admet un point d'inflexion en 0), strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et $\operatorname{th}(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$.

Contrairement au cosinus classique, il n'y a pas de signe $-$ dans la dérivée du ch, et il y a un $-$ dans la dérivée de th.

Par conséquent, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{ch}^{(2n)} = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}^{(2n+1)} = \operatorname{sh}$, $\operatorname{sh}^{(2n)} = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}^{(2n+1)} = \operatorname{ch}$: les dérivées du ch et du sh alternent entre ch et sh, les dérivées d'ordre pair du ch sont égales au ch etc. En particulier, ch et sh sont solutions de l'équa-diff $y'' = y$, et forment même une base de l'ensemble des solutions, cf. chapitre 11.

Démonstration. La fonction ch est $\mathscr{C}^\infty$ car somme et composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Tout d'abord, $\operatorname{ch}(x) > 0$ car $e^x > 0$ et $e^{-x} > 0$. De plus,

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}(-x) &= \frac{e^{-x}+e^x}{2} \\
&= \operatorname{ch}(x)
\end{aligned}
$$

donc la fonction ch est paire. De plus, $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x)$. Or :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{ch}'(x) \geqslant 0 &\iff e^x \geqslant e^{-x} \\
&\iff x \geqslant -x \qquad \text{(car la fonction ln est strictement croissante)} \\
&\iff 2x \geqslant 0 \\
&\iff x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

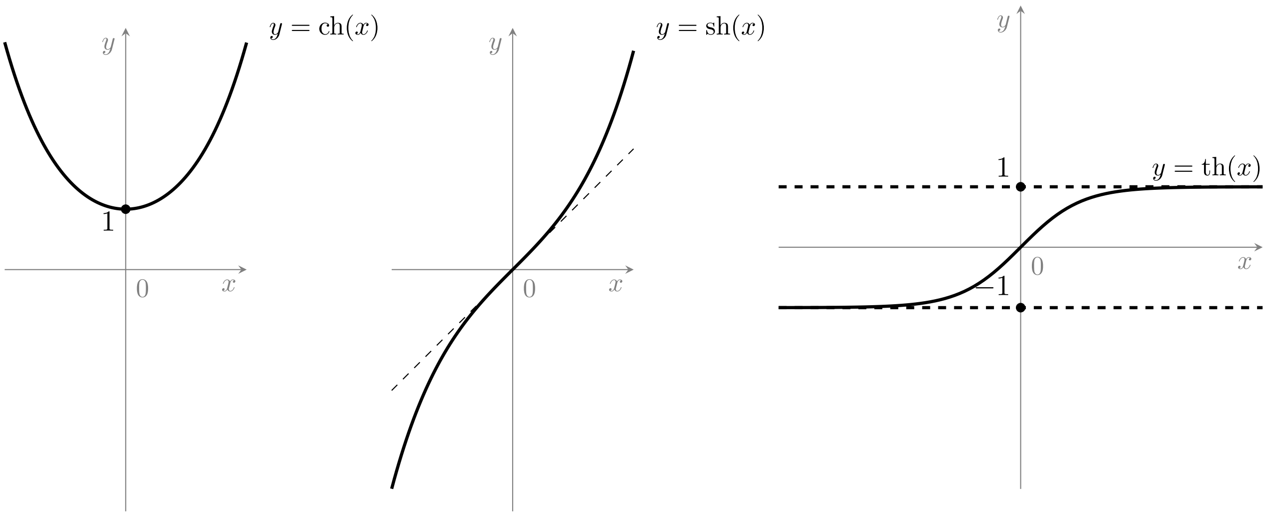
On en déduit le tableau de variations de ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

□

Les limites sont immédiates. En dérivant encore une fois, il vient $\operatorname{ch}''(x) = \operatorname{ch}(x) \geqslant 0$ donc la fonction ch est bien convexe. Les résultats concernant le sh et la th sont analogues et laissés en exo.

Ci-dessous les graphes des fonctions ch, sh et th (on a tracé la tangente en 0 du sh, tangente d'équation $y = x$ traversée par le graphe car le sh admet un point d'inflexion en 0)



IV Fonctions puissances.

IV.1 Rappels sur les puissances entières.

Nous ne démontrerons pas les résultats de ce paragraphe.

Définition (puissance entière). Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on appelle puissance $n^{\text{ième}}$ de x, et note x^n, le réel $x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}}$. On pose $x^0 = 1$.

Si $n \in \mathbb{Z}, n \leqslant 0$ et $x \neq 0$, on définit $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$. Par exemple, $x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ et $x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$.

En particulier, on pose aussi $0^0 = 1$. La convention $x^0 = 1$ est naturelle : si $x \neq 0$ alors, pour passer de x^3 à x^2, on divise par x, puis pour passer de x^2 à x^1 on divise encore par x, donc pour passer de x^1 à x^0, il est naturel de vouloir diviser par x et on obtient alors $x^0 = 1$. Une autre façon de voir : on a envie de dire que, pour tous $(n,p) \in \mathbb{Z}^2$ et $x \neq 0$, $\dfrac{x^n}{x^p} = x^{n-p}$ donc, en prenant $n = p$, pour que cette formule soit vraie, il est nécessaire de poser $x^0 = 1$.

Proposition. Soient n et p deux entiers relatifs et x et y deux réels non nuls. Nous avons :

- $(xy)^n = x^n y^n$
- $x^{n+p} = x^n x^p$
- $(x^n)^p = x^{np}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
- $x^{n-p} = \dfrac{x^n}{x^p}$
- $x^{-n} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$.

Remarque : Il est essentiel de ne pas apprendre ces formules par coeur sans les comprendre. Elles sont très simples ! Par exemple, si n et p sont positifs, alors :

$$x^n x^p = \underbrace{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{p \text{ termes}}}_{n+p \text{ termes}} = x^{n+p}$$

$$\begin{aligned}(x^n)^p &= \underbrace{x^n \times x^n \times \cdots \times x^n}_{p \text{ termes}} \\ &= \underbrace{\underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}} \times \cdots \times \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}}_{p \text{ fois}} \\ &= \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{np \text{ termes}} = x^{np}.\end{aligned}$$

Remarque : Cette formule est valable pour tous n et p. Que ceux-ci soient eux-mêmes des puissances ne change rien à l'affaire ! Par exemple (cf. exercice 22 du chapitre 3), si $n \in \mathbb{N}$, alors $\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^n \times 2} = 2^{2^{n+1}}$ et non pas $\left(2^{2^n}\right)^2 = 2^{2^{2 \times n}} = 2^{2^{2n}}$!

Il faut faire attention : x^{n^p} est égal à $x^{(n^p)}$ et non pas à $(x^n)^p$. Par exemple, $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

IV.2 Cas particulier des puissances de (-1).

Proposition. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ est pair,} \\ -1 & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$

Remarque : En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors

- $(-1)^{2n+1} = (-1)^{2n-1} = -1$,
- $(-1)^{2n} = (-1)^{2n+2} = (-1)^{2n-2} = 1$,
- $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1} = -(-1)^n = (-1)^{n+3} = (-1)^{n+2023} = \cdots$,
- $(-1)^n = (-1)^{n+2} = (-1)^{n-2} = (-1)^{n+2022} = \cdots$.

Enfin, puisque $(-1)^{2n} = 1$, alors $(-1)^n \times (-1)^n = 1$, d'où $(-1)^n = \dfrac{1}{(-1)^n} = (-1)^{-n}$. Si k et n sont deux entiers, on pourra donc écrire (par exemple) $(-1)^{n+k} = (-1)^{n-k}$.

C'est bien sûr faux avec un autre nombre que (-1).

IV.3 Les fonctions puissances entières

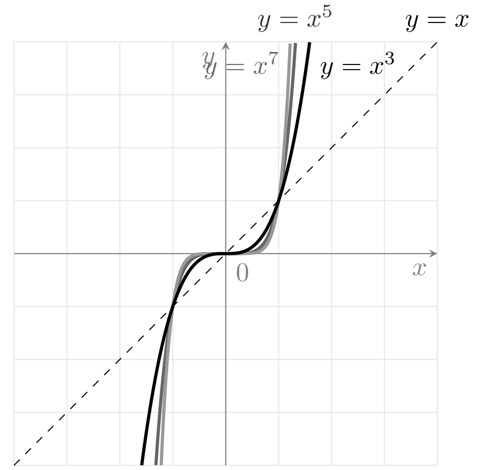
Définition. Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $x \longmapsto x^n$ est appelée fonction puissance $n^{\text{ième}}$.

Si $n = 2$, c'est la fonction carré. Si $n = 3$, c'est la fonction cube. Si $n = -1$, c'est la fonction inverse. Enfin, si $n = 0$, c'est la fonction constante égale à 1.

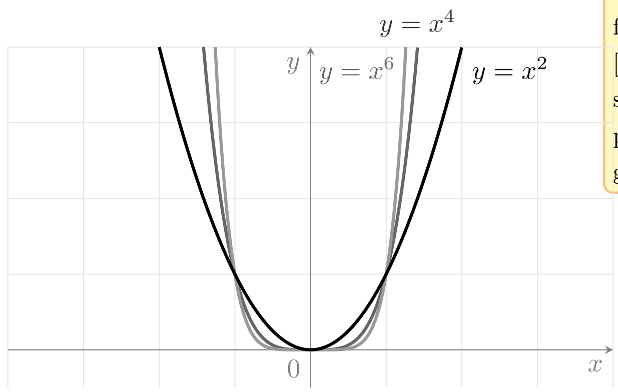
Proposition. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. De plus :

- Si n est pair (respectivement impair), alors elle est paire (respectivement impaire).
- Si n est impair, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si n est pair, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Plus n est grand, plus la fonction est écrasée sur $[\,0\,;1\,[$ et plus elle est raide sur $]\,1\,;+\infty\,[$. Nous en reparlerons dans le paragraphe IV.7.



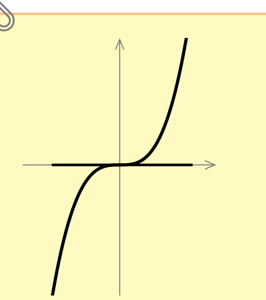
Cas où $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.



Cas où $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $x^n \xrightarrow[x \to -\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $x \longmapsto x^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :
  - ⋆ Si $n = 0$, sa dérivée est la fonction nulle.
  - ⋆ Si $n \in \mathbb{N}^*$, sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$.
- Si n est pair, la fonction $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Si n est impair, elle est convexe sur $\mathbb{R}_+$ et concave sur $\mathbb{R}_-$ (donc admet un point d'inflexion en 0). Par exemple, la fonction carré est convexe et la fonction cube admet un point d'inflexion en 0 (ci-contre son graphe avec sa tangente).



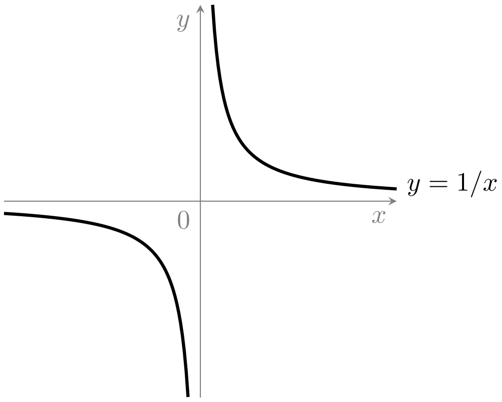
Démonstration. Les deux premiers points seront prouvés dans les chapitres 13 et 14. Pour la convexité, il suffit de voir que la dérivée seconde de $x \mapsto x^n$ est $x \mapsto n(n-1)x^{n-2}$ dont le signe est trivial à donner (selon la parité de n).

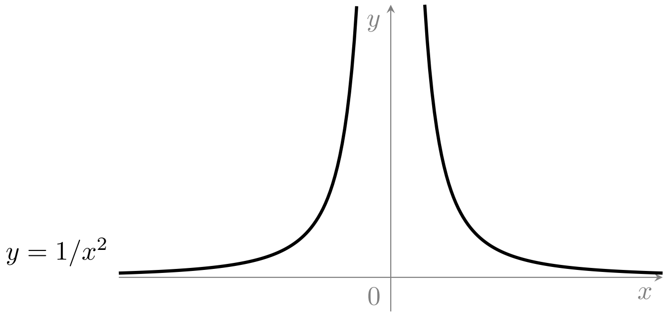
IV.4 Cas où $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$

Proposition. Si $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, la fonction $x \longmapsto x^n$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

- Si n est pair (respectivement impair), alors elle est paire (respectivement impaire) sur $\mathbb{R}^*$.
- Si n est impair, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$. Si n est pair, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.





Proposition. Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$.

- $x^n \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$, $x^n \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $x^n \xrightarrow[x\to 0^-]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $x \longmapsto x^n$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est la fonction $x \longmapsto nx^{n-1}$ (définie, donc, sur $\mathbb{R}^*$).
- Si n est pair, alors $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est le cas par exemple de $x \mapsto 1/x^2$), et si n est impair, alors $x \mapsto x^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et concave sur $\mathbb{R}_-^*$ (c'est le cas par exemple pour la fonction inverse).

Démonstration. Les deux premiers points seront prouvés dans les chapitres 13 et 14. Pour le troisième point, il suffit de donner le signe de la dérivée seconde.

Attention, la fonction inverse n'admet pas de point d'inflexion en 0 car n'est pas définie en 0 ! De plus, cela n'a pas de sens de dire que la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^*$: on ne parle de fonction convexe que sur un intervalle, sinon dire que le graphe est sous la corde n'a aucun sens, puisqu'il n'y a pas de graphe !

IV.5 Cas particulier des fonctions polynomiales et fonctions rationnelles.

Définition. Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que P est une fonction polynomiale s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Définition. Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Elle est définie là où son dénominateur n'est pas nul.

Exemple : La fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1/\sqrt{2}\}$.

Théorème. Une fonction polynomiale est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Une fonction rationnelle est $\mathscr{C}^\infty$ sur son domaine de définition, c'est-à-dire là où son dénominateur ne s'annule pas.

On cherche souvent les limites en $\pm\infty$ d'un polynôme ou d'une fonction rationnelle, mais ce sont souvent des formes indéterminées (par exemple, si on veut la limite en $+\infty$ de $P : x \mapsto x^3 - x^2$, on a une forme indéterminée du type $+\infty - \infty$). Cependant, il est facile de lever l'indétermination : il suffit de factoriser à chaque fois par la plus grande puissance.

Intuitivement, il suffit de retenir que « c'est la plus grande puissance qui gagne ». Attention, en attendant d'avoir les équivalents au chapitre 24, il faut faire cela proprement et faire comme ci-contre.

Exemple : Donner les limites en $\pm\infty$ de $P : x \mapsto -5x^3 + 100x^2 - 10x + 3$ et de $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{2x^2-1}$.
Soit $x \neq 0$ (ce qu'on peut supposer car on cherche la limite en $\pm\infty$. Alors

$$P(x) = x^3\left(-5 + \frac{100}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$$

En $\pm\infty$, le terme entre parenthèses tend vers -5. De plus, $x^3 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x^3 \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ donc, par produit, $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ et $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

De plus,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

IV.6 Racines n-ièmes.

Proposition/Définition. Soit $x \geqslant 0$ et soit $n \geqslant 1$. Il existe un unique réel $y \geqslant 0$ tel que $y^n = x$. Le réel y est appelé racine n-ième de x et est noté $\sqrt[n]{x}$.

Démonstration. La fonction $f : t \mapsto t^n$ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $f(0) = 0$ et $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$. On conclut avec le corollaire du TVI.

Remarque : Si $n = 2$, on écrit $\sqrt{x}$ au lieu de $\sqrt[2]{x}$, et on dit que $\sqrt{x}$ est la racine carrée de x. Ainsi, par définition, la racine carrée de x est l'unique nombre **positif** qui au carré donne x. Si $n = 3$, $\sqrt[3]{x}$ est appelé racine cubique de x.

Remarque : Attention, il n'y a unicité que parce que l'on se restreint aux réels positifs ! Si n est pair, on montre de la même façon qu'il y a une unique solution sur $\mathbb{R}_-$, et puisque $-\sqrt[n]{x}$ est solution, alors c'est l'unique solution sur $\mathbb{R}_-$. Ainsi, si n est pair et x non nul, il y a deux solutions réelles (si $x = 0$, il n'y a qu'une solution, 0) : $\pm\sqrt[n]{x}$. Par exemple, sur $\mathbb{R}$: $x^4 = 2 \iff x = \pm\sqrt[4]{2}$.

Par contre, il y a bien unicité si n est impair.

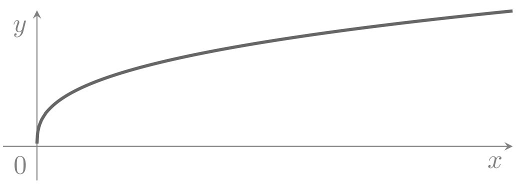
Si x est positif : $y^2 = x \iff y = \pm\sqrt{x}$. Deux nombres ont le même carré si et seulement s'ils sont égaux, ou opposés ! Si on veut affirmer qu'ils sont égaux, il faut d'abord prouver qu'ils sont de même signe.

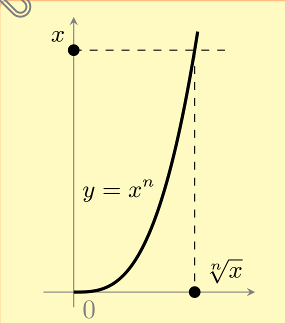
Remarque : Si n est impair, on pourrait aussi définir la racine n-ième d'un nombre négatif, mais on se restreint aux nombres positifs pour ne pas avoir à distinguer les cas selon la parité de n.

Définition. Soit $n \geqslant 1$. On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction racine n-ième par :

$$\left\{\begin{array}{lll} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{l'unique } y \text{ positif tel que } y^n = x \end{array}\right.$$

Allure du graphe :





Remarque : Nous dirons au chapitre 4 que la fonction racine n-ième est la réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Son graphe est alors le symétrique du graphe de $x \mapsto x^n$ par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$). De plus, si $n \geqslant 2$, alors il y a une tangente verticale en 0 : la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ n'est pas dérivable en 0, mais nous reparlons de tout ça dans le paragraphe suivant.

IV.7 Puissances exotiques.

Définition. Soit $x > 0$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

Remarque : Si $\alpha \in \mathbb{Z}$ et si $x > 0$, cette définition coïncide avec la notation puissance que l'on connaît déjà. Cette nouvelle définition étend la notion de puissance aux exposants non entiers. Qui irait sérieusement dire que $2^\pi = \underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{\pi \text{ fois}}$? Maintenant, on sait que, par définition, $2^\pi = e^{\pi \ln(2)}$.

Remarque : ⚠ Si $\alpha \notin \mathbb{Z}$, x^α n'a de sens que si $x > 0$ (même si, en prolongeant par continuité, nous pourrons donner un sens à 0^α lorsque $\alpha \geqslant 0$). En particulier, $(-1)^\alpha$ n'a pas de sens si α n'est pas un entier ! On ne peut pas étendre le paragraphe précédent aux exposants non entiers. Cependant, toutes les propriétés du paragraphe IV.1 sont encore valables.

Proposition. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

1. $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
2. $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.
3. $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$.
4. $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\times\beta}$.
5. La fonction
$$\varphi_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{cases}$$
est $\mathscr{C}^\infty$, de dérivée ${\varphi_\alpha}' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.
6. ⚠ Si u est une fonction dérivable et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors u^α est dérivable, de dérivée $\alpha \times u' \times u^{\alpha-1}$.

Démonstration. Il suffit d'utiliser les propriétés de l'exponentielle et du ln : exo.

Proposition (Comparaison). Soient $\alpha < \beta$ deux réels et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $x \leqslant 1$, alors $x^\alpha \geqslant x^\beta$, et l'inégalité est stricte si $x < 1$.
- Si $x \geqslant 1$, alors $x^\alpha \leqslant x^\beta$, et l'inégalité est stricte si $x > 1$.

En résumé, si $\alpha < \beta$, x^α est supérieur à x^β sur $]\,0\,;1\,]$, et c'est le contraire sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Par exemple, sur $]\,0\,;1\,]$, $x \geqslant x^2$, et sur $[\,1\,;+\infty\,[$, $x \leqslant x^2$.

Démonstration. Supposons $x \leqslant 1$. Alors $\ln(x) \leqslant 0$ donc $\alpha \ln(x) \geqslant \beta \ln(x)$. La fonction exponentielle est croissante donc $e^{\alpha \ln(x)} = x^\alpha \geqslant e^{\beta \ln(x)} = x^\beta$. Le cas $x \geqslant 1$ et les inégalités strictes sont laissées en exo.

Proposition (Monotonie). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha > 0$, φ_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, tandis que si $\alpha < 0$, φ_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha = 0$, φ_α est constante égale à 1.

Démonstration. Immédiat en utilisant l'expression de ${\varphi_\alpha}'$ donnée plus haut.

Proposition (Comportement aux bornes). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 0$, alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. Par convention, on pose alors $0^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, alors $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $x^\alpha \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$.

En d'autres termes, si $\alpha > 0$, φ_α est prolongeable par continuité en 0 et prend la valeur 0. En conclusion, les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 quand l'exposant est positif. Seules les puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.

Démonstration. Supposons $\alpha > 0$. Alors $y = \alpha\ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, et $e^y \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$. Par composition de limites, $e^{\alpha\ln(x)} = x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. De même pour le reste.

Remarque : Si $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, la fonction $\varphi_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ est prolongée par continuité en 0 mais ce prolongement n'est pas dérivable en 0. En effet, si $x > 0$, alors

$$\frac{\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(0)}{x - 0} = x^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

car $\alpha - 1 < 0$. Géométriquement, cela se traduit par une tangente verticale en 0, ce qu'on voit bien sur le dessin ci-dessous (lorsque $\alpha \in \left]0\,;1\right[$) et sur le graphe de la racine n-ième lorsque $n \geqslant 2$ (voir ci-dessous : c'est le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha = 1/n$). En particulier, si $n \geqslant 2$, la fonction racine n-ième n'est pas dérivable en 0.

Corollaire. Soient $\alpha < \beta$ deux réels. Alors :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{x^\alpha}{x^\beta} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

Remarque : En résumé, en $+\infty$, x^α est d'autant plus grand que x est grand, et en 0^+, x^α est d'autant plus grand que α est petit.

Au chapitre 24, nous dirons qu'au voisinage de $+\infty$, x^α est négligeable devant x^β, tandis qu'au voisinage de 0, x^β est négligeable devant x^α.

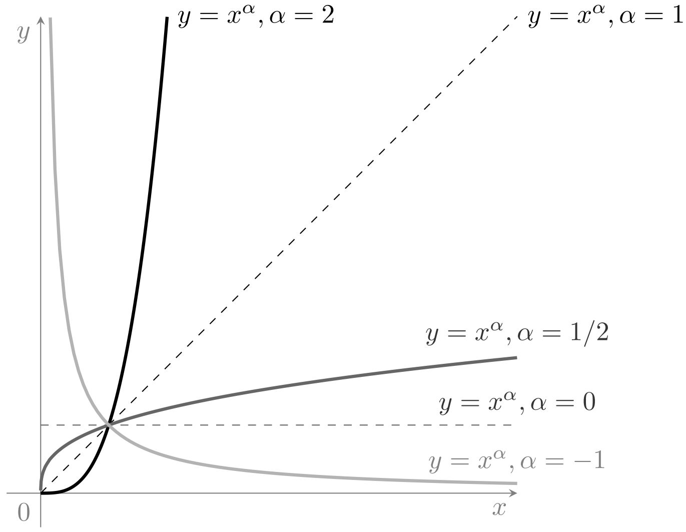
Proposition (Racines n-ièmes). Soit $x \geqslant 0$, soit $n \geqslant 1$. Alors $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$.

Démonstration. Rappelons que $\sqrt[n]{x}$ est l'unique réel positif qui, à la puissance n, vaut x. Or, $x^{1/n}$ est un nombre positif et, d'après les propriétés vues plus haut, $\left(x^{1/n}\right)^n = x$. Par unicité, on a le résultat voulu.

Exemple : Par exemple, si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

Ne pas confondre $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ avec $\sqrt{x^n} = x^{n/2}$. Par exemple, $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ et $\sqrt{x^3} = x^{3/2}$!

Ci-dessous les graphes de $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ (fonction carré), $\alpha = 1/2$ (fonction racine carrée), $\alpha = 0$ (fonction constante égale à 1) et $\alpha = -1$ (fonction inverse).



Définition (Puissances variables). Soient u et v deux fonctions définies sur D. On suppose que u est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit la fonction u^v par :

$$u^v : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{v(x)\times\ln(u(x))} \end{array} \right.$$

D est une union d'intervalles non vides, non réduits à un point.

Exemple : Par exemple, $x^x = e^{x\ln(x)}$. La fonction $x \mapsto x^x$ est donc définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée n'est PAS $x \mapsto x \times x^{x-1}$, cf. exercice 45

Morale de l'histoire : Quand la puissance est variable, mettre sous forme exponentielle, et réfléchir après.

IV.8 Croissances comparées.

Théorème. Soit $\alpha > 0$. Alors :

$$\frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Réflexe : ne jamais laisser une exponentielle au dénominateur, cela facilite les calculs, en particulier lorsqu'il faut dériver.

Démonstration. Notons

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^\alpha}{e^x} = x^\alpha e^{-x} \end{array} \right.$$

f_α est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} {f_\alpha}'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}e^{-x} - x^\alpha e^{-x} \\ &= x^{\alpha-1}e^{-x}(\alpha - x) \end{aligned}$$

x	0		α		$+\infty$
${f_\alpha}'$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$f_\alpha(x)$		$\nearrow$	M_α	$\searrow$	

Posons $M_\alpha = f_\alpha(\alpha)$ le maximum de f_α. La fonction f_α étant à valeurs positives, $0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant M_\alpha$. Or,

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= \frac{1}{x} \times x^{\alpha+1}e^{-x} \\ &= \frac{f_{\alpha+1}(x)}{x} \end{aligned}$$

Or, α étant un réel positif quelconque, ce qui précède est aussi valable pour $\alpha + 1$ (qui est aussi un réel positif), si bien que $f_{\alpha+1}$ admet aussi un maximum noté $M_{\alpha+1}$, d'où : $0 \leqslant f_{\alpha+1}(x) \leqslant M_{\alpha+1}$. Par conséquent, en divisant par $x > 0$,

$$0 \leqslant \frac{f_{\alpha+1}(x)}{x} = f_\alpha(x) \leqslant \frac{M_{\alpha+1}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

D'après le théorème d'encadrement, $f_\alpha(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. La deuxième limite se démontre de façon analogue en étudiant

$$g_\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,1\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(x)}{x^\alpha} \end{array} \right.$$

$\square$

Corollaire. Soit $\alpha > 0$. Alors :

$$(-x)^\alpha e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \qquad \text{et} \qquad x^\alpha \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

Démonstration. $y = (-x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$ et, d'après ce qui précède, $y^\alpha e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$. Par composition de limite, $(-x)^\alpha e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. De même, $y = 1/x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et

$$\frac{\ln(1/y)}{y^\alpha} = \frac{-\ln(y)}{y^\alpha} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$$

□

On évite la notation X, que l'on réservera aux polynômes, cf. chapitre 19.

Par composition de limites, on a le résultat.

Remarque : ⚠ Attention à ne pas inventer de croissances comparées ! Dire « par croissances comparées » n'est pas une formule magique qu'il faut employer à tort et à travers ! Elles font référence aux résultats ci-dessus. Les arguments du type « l'exponentielle l'emporte tout le temps » sont faux ! Par exemple, $x^2 e^{-\ln(x)} = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$! Il faut se ramener aux résultats ci-dessus, la quantité dans l'exponentielle doit être du même type que celle devant, à une puissance près. Cela ne marche pas avec l'exemple précédent car x^2 et $\ln(x)$ ne sont pas du même type ! L'un est polynomial, l'autre logarithmique. Dans le doute, tout mettre dans l'exponentielle, et étudier la limite de l'exposant.

Voir un exemple dans l'exercice 37.

Exemples :

- Donner la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto x^2 e^{-\sqrt{x}}$.
  $y = \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $y^4 e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, $x^2 e^{-\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner la limite en 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n} \times e^{-1/x^2}$.
  $y = 1/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ et $y^{n/2} e^{-y} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0$ donc, par composition de limites, $\dfrac{1}{x^n} \times e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

IV.9 Logarithme en base a.

Définition. Soit $a > 1$. La fonction

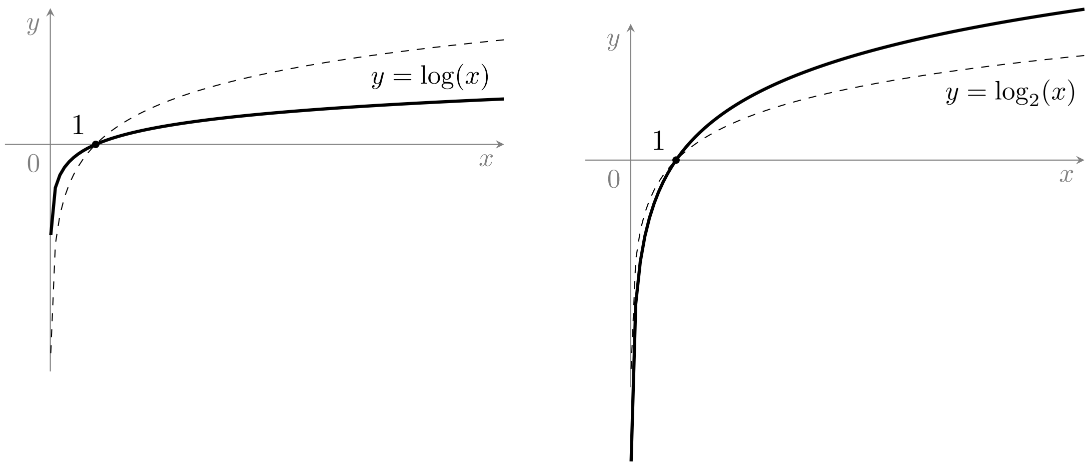
$$\log_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} \end{cases}$$

est appelée logarithme en base a.

La fonction ln est donc la fonction logarithme en base e.

Exemples : En physique, on utilise beaucoup le logarithme en base 10 qui est donc la fonction $\log_{10} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$. On la note souvent log au lieu de $\log_{10}$. En informatique, puisqu'on travaille souvent en binaire, on utilise souvent la fonction logarithme en base 2 qui est donc la fonction $\log_2 : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Remarque : Le graphe de $\log_a$ s'obtient donc à partir du graphe de la fonction ln par dilatation d'un facteur $1/\ln(a)$. Ci-dessous les graphes du logarithme décimal (à gauche), donc pour $a = 10$, et le graphe du logarithme en base 2 (à droite), donc pour $a = 2$. Le graphe de la fonction ln est à chaque fois en pointillés.



Proposition. Soit $a > 1$. Soit $(x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$.

- La fonction $\log_a$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(a)}$.
- La fonction $\log_a$ est concave, strictement croissante, strictement positive sur $]\,1\,;+\infty\,[$, strictement négative sur $]\,0\,;1\,[$, $\log_a(1) = 0$, $\log_a(a) = 1$, $\log_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $\log_a(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$.
- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a(1/x) = -\log_a(x)$.
- $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log_a(x^n) = n\log_a(x)$.

Cela aurait du sens de définir le logarithme en base a pour $a \in]\,0\,;1\,[$, mais les variations, les limites, la convexité et le signe ne seraient plus les mêmes, et on utilise surtout les cas $a = 2$ et $a = 10$.

Démonstration. Découle de la définition et des propriétés de la fonction ln et du fait que $\ln(a) > 0$ puisque $a > 1$.

Proposition. Soit $a > 1$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors : $a^x = y \iff x = \log_a(y)$.

Nous dirons plus tard que la fonction $\log_a$ est la réciproque de la fonction (définie sur $\mathbb{R}$) $x \mapsto a^x$ appelée exponentielle en base a.

Démonstration.

$$\begin{aligned} y = a^x &\iff y = e^{x\ln(a)} \\ &\iff \ln(y) = x\ln(a) \\ &\iff x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} \end{aligned} \qquad \square$$

ce qui est le résultat voulu.

V Autour du second degré.

Dans tout cette partie on se donne une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont trois réels avec $a \neq 0$. On définit alors le discriminant de f par $\Delta = b^2 - 4ac$.

V.1 Forme canonique.

Définition. L'expression $a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$ est appelée forme canonique de $ax^2 + bx + c$.

Remarque : Il est inutile d'apprendre cette expression par coeur, c'est le meilleur moyen de se planter. Il suffit de retenir la marche à suivre.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la forme canonique de $-5x^2 + 3x - 1$.

- **Première étape :** Mettre le coefficient dominant en facteur.

$$-5x^2 + 3x - 1 = -5\left(x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}\right)$$

- **Deuxième étape :** Faire apparaître un double produit.

$$-5x^2 + 3x - 1 = -5\left(x^2 - 2 \times x \times \frac{3}{10} + \frac{1}{5}\right)$$

- **Troisième étape :** Faire apparaître une identité remarquable, et compenser.

$$\begin{aligned} -5x^2 + 3x - 1 &= -5\left(\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{5}\right) \\ &= -5\left(\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 - \frac{9}{100} + \frac{1}{5}\right) \\ &= -5\left(\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{100}\right) \end{aligned}$$

- **Quatrième étape :** Développer le coefficient dominant.

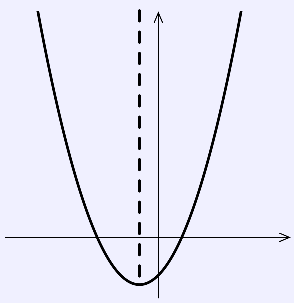
$$-5x^2 + 3x - 1 = -5\left(x - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{11}{20}$$

V.2 Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur le second degré (sans jamais oser le demander).

Proposition (Variations). Cela dépend uniquement du signe de a (et pas de Δ, pour une fois).

- Si $a > 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty\,; -b/2a\,]$ et strictement croissante sur $[\,-b/2a\,; +\infty\,[$. Ci-dessous son graphe et son tableau de variations :

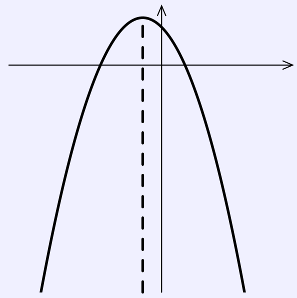
x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$f(-b/2a)$	$\nearrow$	



- Si $a < 0$: la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty\,; -b/2a\,]$ et strictement décroissante sur $[\,-b/2a\,; +\infty\,[$. Ci-dessous son graphe et son tableau de variations :

Il est donc inutile de dériver un trinôme (même si on peut le faire pour se rassurer), on peut donner les variations directement.

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-b/2a)$	$\searrow$	



Dans tous les cas, on dit que la courbe représentative de f est une parabole, et qu'elle atteint son sommet en $-b/2a$. De plus, la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -b/2a$ (droite verticale).

Proposition (Racines). Cela dépend uniquement du signe de Δ.

- Si $\Delta < 0$, f n'admet aucune racine réelle.
- Si $\Delta = 0$, f admet une racine double (voir la partie factorisation ci-dessous) $x_0 = -b/2a$.
- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines simples x_1 et x_2 avec

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nous reverrons la notion de racine double et de racine simple dans le chapitre 19.

Proposition (Factorisation). Cela dépend encore du signe de Δ.

- Si $\Delta < 0$ on ne peut rien faire, c'est-à-dire qu'on ne peut pas écrire f sous une forme plus simple.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-x_0)^2$ où x_0 est l'unique racine double (voir ci-dessus) de f.
- Si $\Delta > 0$, alors pour tout réel x, $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ où x_1 et x_2 sont les deux racines simples (voir ci-dessus) de f.

Proposition (Signe). Cela dépend du signe de Δ et du signe de a.

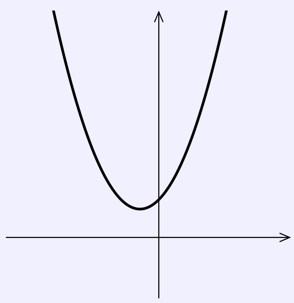
- Si $\Delta > 0$ alors f est du signe de a « en dehors » des racines et du signe opposé à celui de a « à l'intérieur » des racines.
  - ⋆ Si $a > 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

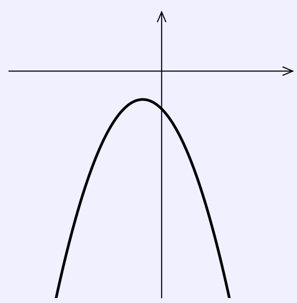
    Pour le graphe, voir le premier graphe de la proposition sur les variations.
  - ⋆ Si $a < 0$:

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

    Pour le graphe, voir le second graphe de la proposition sur les variations.
- Si $\Delta < 0$ alors f est du signe de a. Ci-dessous les allures du graphe
  - ⋆ Si $a > 0$:



  - ⋆ Si $a < 0$:

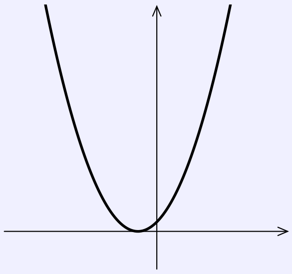


En particulier, si f est positive ou nulle, alors $\Delta \leqslant 0$. En effet, si Δ est strictement positif, alors f n'est pas de signe constant. On utilisera ce résultat au chapitre 34 dans la démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- Si $\Delta = 0$, alors f est du signe de a et est nulle en $x_0 = -b/2a$.

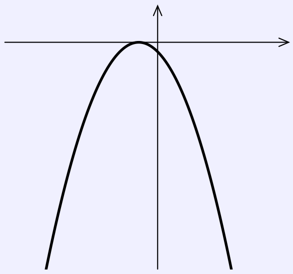
  ⋆ Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	



  ⋆ Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-b/2a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	



Morale de l'histoire (pour le signe) : f est du signe de a sauf entre ses racines éventuelles.

Remarque : Il est des cas où il est inutile, chronophage, et générateur d'erreurs de calculer un discriminant :

- Les cas où $b = 0$, donc les cas où $f(x) = ax^2 + c$. On a alors : $f(x) = 0 \iff x^2 = -c/a$ et cela dépend alors du signe. Par exemple, inutile de calculer un discriminant pour résoudre les équations $x^2 + 1 = 0$ et $x^2 - 2 = 0$! La première n'a pas de solution, et pour la deuxième : $x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$.

  Ne pas oublier la solution négative !

- Les cas où $c = 0$: il suffit alors de factoriser par x et, si on veut le signe, de faire un tableau de signes. Inutile de calculer un discriminant pour trouver les racines et le signe de $f : x \mapsto x^2 - 4x$! Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-4)$ donc les racines sont 0 et 4, et on trouve aisément le tableau de signes suivant :

  Factoriser doit devenir un réflexe !

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$x-4$		$-$			0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Enfin, les cas où on reconnaît une identité remarquable. Par exemple, inutile de calculer un discriminant pour le signe et les racines éventuelles de $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$!

V.3 Somme et produit des racines

Proposition. Le produit des racines éventuelles de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ vaut c/a, et la somme de ces racines vaut $-b/a$.

Quand on parle de produit ou somme des racines, il est sous-entendu : « comptées avec multiplicité », c'est-à-dire qu'on compte une fois les racines simples, et deux fois les racines doubles. Avec les notations précédentes, cela signifie que $x_1 + x_2 = -b/a$ lorsque $\Delta > 0$, et que $x_0 + x_0 = -b/a$ lorsque $\Delta = 0$, et idem pour le produit.

Démonstration. Découle du théorème de factorisation ci-dessus : si $\Delta > 0$ alors, pour tout x,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x - x_1)(x - x_2) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2) \end{aligned} \qquad \square$$

donc, en s'intéressant au coefficient devant x, il vient $b = -a(x_1 + x_2)$ et, à l'aide du coefficient constant, $c = a \times (x_1 \times x_2)$. Le cas $\Delta = 0$ se traite de façon similaire en écrivant $f(x) = a(x - x_0)(x - x_0)$.

Remarques :

- Nous généraliserons ce résultat dans le chapitre 19.
- Nous avons arnaqué par anticipation : pourquoi le fait que $ax^2+bx+c = a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\times x_2)$ pour tout x permet-il d'affirmer que $b=-a(x_1+x_2)$? Pourquoi a-t-on le droit « d'identifier » (grrr je hais ce mot) ? Cela vient du fait que les coefficients d'une fonction polynomiale sont uniques, nous le prouverons dans le chapitre 19.
- Ce résultat permet (entre autres) de trouver facilement une racine lorsqu'on connaît l'autre : par exemple, 1 est racine évidente (car la somme des coefficients est nulle, cf. chapitre 19) de $x^2+2x-3=0$, donc l'autre racine est -3 car le produit des racines vaut $c/a=-3$.

Réciproquement, l'égalité (valable pour tout x) $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ permet de trouver α et β lorsqu'on connaît leur somme et leur produit. Plus précisément :

Proposition. Soit $(s,p)\in\mathbb{R}^2$. Les solutions du système (d'inconnues α et β)

$$\left\{\begin{array}{ccc}\alpha+\beta & = & s\\ \\ \alpha\beta & = & p\end{array}\right.$$

sont les solutions de l'équation $x^2-sx+p=0$. En particulier, si cette équation n'admet pas de solution, de tels α et β n'existent pas.

On verra ce principe dans l'exercice 48 du chapitre 4.

Exemple : Il n'existe pas de réels x et y tels que $x+y=-1$ et $xy=1$. En effet, x et y conviennent si et seulement si x et y sont solutions de $x^2+x+1=0$. Or, cette équation n'a pas de solution réelle car son discriminant est strictement négatif. Par contre, si on s'autorise des solutions complexes, alors j et j^2 conviennent (cf. chapitre 7)

VI Valeur absolue.

VI.1 Définition, premières propriétés.

Définition. Soit $x\in\mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x le réel $\max(-x,x)$. On le note $|x|$. La fonction

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x|\end{array}\right.$$

est appelée fonction valeur absolue.

Puisqu'un ensemble fini ou une famille finie de réels admet toujours un maximum, le maximum ci-contre existe bien : la valeur absolue est bien définie.

Remarque : On rappelle (cf. chapitre 2.1) que : $y\geqslant \max_{x\in E} x \iff \forall x\in E, y\geqslant x$. Ainsi, si A et α sont des réels : $A\geqslant|\alpha| \iff A\geqslant\alpha$ et $A\geqslant-\alpha$. En particulier, pour montrer une inégalité du type $A\geqslant|\alpha|$, il suffit de montrer les deux inégalités $A\geqslant\alpha$ et $A\geqslant-\alpha$.

Comme on le dira plusieurs fois cette année : la première chose à faire quand on a une valeur absolue, c'est de tenter de s'en débarrasser. On pourra le faire dès qu'on connaîtra le signe de la quantité à laquelle on l'applique (voir ci-contre), quitte à différencier les cas.

Proposition. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

1. $|x|=x \iff x\geqslant 0$.
2. $|x|=-x \iff x\leqslant 0$.
3. $|x|=|-x|\geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x=0$.
4. $|xy|=|x|\times|y|$.
5. Si $y\neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
6. $\forall p\in\mathbb{N}, |x^p|=|x|^p$.
7. Si $x\neq 0$: $\forall p\in\mathbb{Z}, |x^p|=|x|^p$.

8. $|x| = \sqrt{x^2}$.
9. La valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée égale à 1 sur $\mathbb{R}_+^*$, à -1 sur $\mathbb{R}_-^*$, et n'est pas dérivable en 0.
10. $|x| \leqslant y \iff -y \leqslant x \leqslant y$.
11. Supposons $y \geqslant 0$. Alors : $x^2 \leqslant y \iff |x| \leqslant \sqrt{y}$.

Attention, $\sqrt{x^2} \neq x$ en général ! Par exemple, $\sqrt{(-1)^2} \neq -1$! Pour affirmer que $\sqrt{x^2} = x$, il faut que x soit positif ! C'est un réflexe à prendre : ne jamais simplifier une racine carrée et un carré sans regarder le signe de la quantité.

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned} |x| = x &\iff x = \max(x, -x) \\ &\iff x \geqslant -x \\ &\iff 2x \geqslant 0 \\ &\iff x \geqslant 0 \end{aligned}$$

2. Idem.
3. Si $x \geqslant 0$ alors $|x| = x \geqslant 0$ et $-x \leqslant 0$ donc $|-x| = -(-x) = x = |x|$. De même si $x \leqslant 0$. Enfin, si $|x| = 0$ alors $|x| \leqslant 0$ donc $x \leqslant 0$ et $-x \leqslant 0$ (rappelons qu'une inégalité du type $|\alpha| \leqslant A$ est équivalente à $\pm\alpha \leqslant A$) donc $x \geqslant 0$. Finalement, $x = 0$, et la réciproque est immédiate.
4. Si $x \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ alors $xy \leqslant 0$ donc $|xy| = -xy$. Or, $|x| = x$ et $|y| = -y$ donc $|x| \times |y| = -xy = |xy$. De même dans les autres cas.
5. Tout d'abord, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} 1 &= |1| \\ &= \left| y \times \frac{1}{y} \right| \\ &= |y| \times \left| \frac{1}{y} \right| \end{aligned}$$

En particulier, $\left| \dfrac{1}{y} \right| = \dfrac{1}{|y|}$.

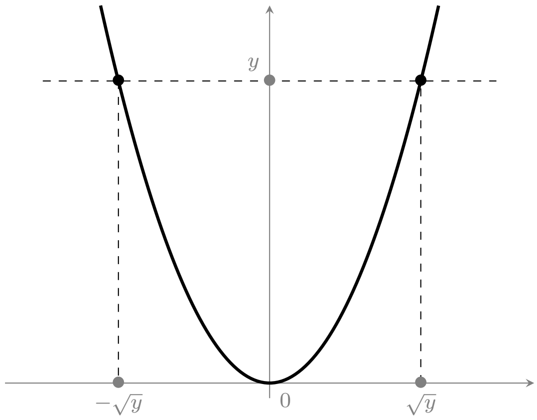
6. Récurrence immédiate en utilisant le point 4.
7. Si $p \geqslant 0$, le résultat découle du point précédent. Supposons $p < 0$. Alors $-p > 0$ donc, d'après le point précédent, $|x^{-p}| = |x|^{-p}$, si bien que :

$$\begin{aligned} |x^p| &= \left| \frac{1}{x^{-p}} \right| \\ &= \frac{1}{|x^{-p}|} \\ &= \frac{1}{|x|^{-p}} \\ &= |x|^p \end{aligned}$$

8. Il suffit d'utiliser la définition de la racine carrée : $\sqrt{x^2}$ est l'unique nombre positif qui, au carré, donne x^2. Or, $|x| = \pm x$ (selon le signe de x) donc $|x|^2 = x^2$, et $|x| \geqslant 0$. Par unicité, on a le résultat.
9. Démontré dans les chapitres 13 et 14.
10. Supposons que $|x| \leqslant y$. Alors $\max(x, -x) \leqslant y$ donc $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$ donc $x \geqslant -y$. La réciproque est analogue.

Ce résultat est immédiat avec l'interprétation de la valeur absolue comme distance, cf. VI.4.

11. Par stricte croissance de la racine carrée : $x^2 \leqslant y \iff \sqrt{x^2} \leqslant \sqrt{y}$ ce qui permet de conclure, voir dessin ci-dessous.



$\square$

Corollaire. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0 \iff \forall i \in [\![1\,;\,n]\!], |x_i| = 0$$

Ce résultat est toujours valable pour une famille quelconque de réels $(x_i)_{i\in I}$ si la famille $(|x_i|)_{i\in I}$ admet un maximum ou est simplement majorée par 0.

Démonstration. Remarquons que le maximum existe car on a un nombre fini de termes. Si le maximum est nul, alors tous les termes sont inférieurs ou égaux à 0 (cf. chapitre 2.1). Or, ils sont positifs car ce sont des valeurs absolues donc sont nuls. La réciproque est évidente.

Remarque : Nous utiliserons beaucoup ce résultat quand nous essayerons de montrer que des éléments $(x_1, \dots, x_n)$ sont tous nuls (notamment en algèbre linéaire au second semestre) : nous montrerons que le maximum en valeur absolue est nul (souvent par l'absurde).

Ce résultat est encore valable sur $\mathbb{C}$, cf. chapitre 7, en remplaçant la valeur absolue par le module.

VI.2 Inégalité triangulaire.

Théorème (Inégalité triangulaire). Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Ce résultat et les corollaires qui en découlent (que nous appellerons aussi « inégalité triangulaire ») sont très importants.

Démonstration. Rappel (l'enseignement est l'art de la répétition) : pour prouver une inégalité du type $|\alpha| \leqslant A$, il suffit de prouver que $\alpha \leqslant A$ et $-\alpha \leqslant A$. D'une part, $x \leqslant |x|$ et $y \leqslant |y|$ donc, par somme, $x + y \leqslant |x| + |y|$. D'autre part, $-x \leqslant |x|$ et $-y \leqslant |y|$ donc, par somme, $-x - y = -(x + y) \leqslant |x| + |y|$, ce qui permet de conclure.

Remarque : Attention, on ne peut pas majorer à l'intérieur de la valeur absolue car celle-ci n'est pas une fonction croissante ! Par exemple, on ne peut pas affirmer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x) + \cos(x)| \leqslant |1 + \cos(x)|$$

Il suffit en effet de prendre $x = \pi$. Si on veut majorer une valeur absolue, on peut parfois se débarrasser de la valeur absolue et donner le tableau de variations (cf. VI.3 pour un exemple) mais le plus simple est d'appliquer l'inégalité triangulaire et de majorer ensuite. Dans notre exemple, on écrirait donc :

$$|\sin(x) + \cos(x)| \leqslant |\sin(x)| + |\cos(x)| \leqslant 2$$

Attention, majorer une quantité par 1 ne suffit pas pour majorer sa valeur absolue par 1, il faut encadrer par 1 ! Par exemple, si on a $-2 \leqslant y \leqslant 1$, alors $|y| \leqslant 2$. Cela ne marche ici que parce que le sinus et le cosinus sont encadrés par -1 et 1.

Morale de l'histoire : Quand on veut majorer la valeur absolue d'une somme, on applique l'inégalité triangulaire et on réfléchit après.

Cela se généralise facilement à la somme d'un nombre quelconque de termes :

Corollaire. Soit $n \geqslant 1$ et soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors $|x_1 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + \cdots + |x_n|$.

Démonstration. Par récurrence : $\rightsquigarrow$ Exercice.

Remarque : L'inégalité triangulaire étant vraie pour tous réels x et y, on peut les appliquer également à $\pm x$ et $\pm y$, c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\pm x \pm y| \leqslant |\pm x| + |\pm y| = |x| + |y|$$

Par exemple, $|x - y| \leqslant |x| + |y|$. Et c'est la même chose pour le corollaire ci-dessus : si $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :

$$|\pm x_1 \pm \cdots \pm x_n| \leqslant |\pm x_1| + \cdots + |\pm x_n| = |x_1| + \cdots + |x_n|$$

On voit qu'il est facile de majorer une valeur absolue : « on casse et on met des + ». Peut-on minorer une valeur absolue ?

Cependant, cela n'est pas toujours suffisant, la majoration obtenue par inégalité triangulaire est parfois trop grossière. Par exemple, la majoration $|\sin(x) + \cos(x)| \leqslant 2$ n'est pas optimale, on peut en fait affirmer que $|\sin(x) + \cos(x)| \leqslant \sqrt{2}$, mais cela résulte d'un argument mathématique plus fin. Mais il est plus rentable de toujours appliquer l'inégalité triangulaire, quitte à se rendre compte dans un second temps que ça ne suffit pas et de réfléchir. D'où la morale de l'histoire ci-contre.

Corollaire. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|x + y| \geqslant |x| - |y| \qquad \text{et} \qquad |x + y| \geqslant |y| - |x|$$

Démonstration. Appliquons l'inégalité triangulaire à $x + y$ et $-y$:

$$|x| = |x + y - y| \leqslant |x + y| + |-y| = |x + y| + |y| \qquad \square$$

ce qui donne la première inégalité en mettant $|y|$ à gauche. Par symétrie des rôles, on a la deuxième inégalité.

Bien sûr, là aussi, on peut appliquer ce résultat à $\pm x$ et $\pm y$. Par exemple, $|x - y| \geqslant |x| - |y|$ et $|x - y| \geqslant |y| - |x|$.

Morale de l'histoire : Si on veut majorer une valeur absolue, « on casse, on met un + », et si on veut minorer une valeur absolue, « on casse, on met un $-$ ».

Remarque : On a les deux inégalités $|x| - |y| \leqslant |x + y|$ et $|y| - |x| \leqslant |x + y|$. Laquelle doit-on utiliser ? Ça dépend du résultat qu'on veut obtenir. L'étape d'après c'est mettre la valeur absolue avec un $-$ devant de l'autre côté de l'inégalité, pour obtenir $|x| \leqslant |x + y| + |y|$ ou $|y| \leqslant |x + y| + |x|$. Ainsi, on s'arrangera pour appliquer celle des deux qui permettra de mettre la quantité voulue à droite, et de laisser celle voulue à gauche. Un exemple vaut mieux qu'un long discours.

Exemple : On suppose que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$, $|f(1/2) - f(x)| \leqslant \left|x - \dfrac{1}{2}\right|$. Montrer que $|f|$ est majorée.

Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. On veut arriver à $|f(x)| \leqslant \cdots$: on va donc appliquer l'inégalité triangulaire (la minoration) en s'arrangeant pour laisser $|f(x)|$ à gauche et pour mettre l'autre à droite, donc on va mettre le signe $-$ devant l'autre terme. Plus précisément, d'après l'inégalité triangulaire :

$$|f(x)| - |f(1/2)| \leqslant |f(1/2) - f(x)| \leqslant \left|x - \frac{1}{2}\right| \leqslant x + \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

Avec l'interprétation de la valeur absolue comme distance (cf. VI.4), on a même $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ce qui donne une meilleure majoration.

La dernière inégalité vient du fait que $x \leqslant 1$, et la précédente vient de l'inégalité triangulaire (la majoration) en utilisant le fait que x et $1/2$ sont positifs (donc égaux à leur valeur absolue). Finalement,

$$|f(x)| \leqslant \left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \frac{3}{2}$$

c'est-à-dire que $|f|$ est majorée.

VI.3 Retour aux fonctions bornées.

Proposition. Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée. Si M est un majorant de $|f|$, on dit que f est bornée par M.

Ce résultat est utile car il permet de n'utiliser qu'une seule inégalité pour borner une fonction. Il permet également de travailler avec des nombres positifs, ce qui est toujours appréciable quand on travaille avec des inégalités. Il a cependant ses inconvénients : il est moins facile de faire passer des termes d'un côté de l'inégalité à l'autre, il faut utiliser l'inégalité triangulaire, et ce n'est parfois pas assez fin.

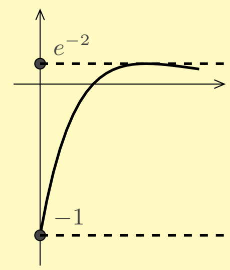
Démonstration.

Supposons $|f|$ majorée par M. Alors, pour tout $x \in E$, $|f(x)| \leqslant M$ donc $-M \leqslant f(x) \leqslant M$: f est bornée.

- Supposons f bornée. Soit M un majorant de f et soit m un minorant. Par conséquent, pour tout $x \in E$, on a : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et donc on a également $-M \leqslant -f(x) \leqslant -m$. On cherche à majorer $|f(x)|$: comme dit précédemment, il suffit de majorer $f(x)$ et $-f(x)$. Soit $A = \max(M, -m)$. Alors, pour tout $x \in E$, $f(x) \leqslant M \leqslant A$ et $-f(x) \leqslant -m \leqslant A$ donc $|f(x)| \leqslant A$: $|f|$ est majorée.

Remarque : Comme on vient de le voir, majorer une fonction (par un réel M) ne suffit pas pour la borner, il faut aussi la minorer ! On a rapidement évoqué le fait que, pour prouver des inégalités, on peut faire des études de fonctions. Cependant, pour majorer $|f|$, il ne faut pas dériver de but en blanc, tout simplement car, en général, $|f|$ n'est pas dérivable (à cause de la valeur absolue). En fait, c'est tout simple ! Il suffit de donner le tableau de variations de f, la majoration de $|f|$ sera alors immédiate ! Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto (x-1)e^{-x}$, on trouve aisément que son tableau de variations est :

Ci-dessous le graphe de cette fonction :



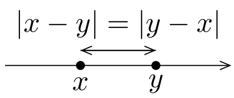
x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	e^{-2}	$\searrow$	0

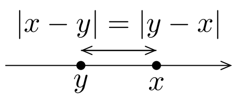
On peut alors affirmer directement que f est bornée par 1, et pas par e^{-2} car $e^{-2} < 1$.

Encore une fois, on voit que la chose à faire est de se débarrasser de la valeur absolue.

VI.4 Interprétation de la valeur absolue comme distance.

Si x et y sont deux réels, alors $|x-y| = |y-x|$ est la distance entre x et y.

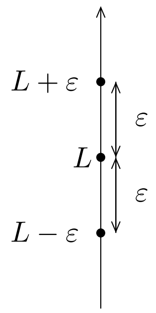




Deux équivalences qui reviendront souvent :

Les notations seront précisées dans des chapitres ultérieurs, mais elles sont assez transparentes...

- $$\begin{aligned} & |u_n - L| \leqslant \varepsilon \\ \iff \quad & L - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant L + \varepsilon \end{aligned}$$

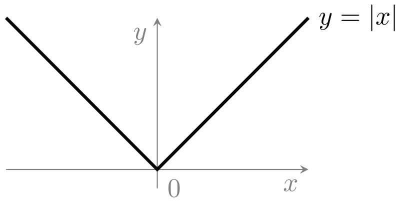


- $$\begin{aligned} & |f(x) - L| \leqslant \varepsilon \\ \iff \quad & L - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant L + \varepsilon \end{aligned}$$

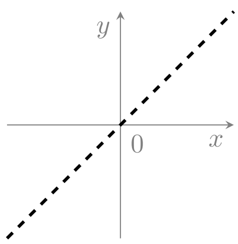
Les deux écritures ont leurs avantages : l'écriture avec des valeurs absolues est intéressante car elle ne fait intervenir qu'une inégalité (ce qui peut être intéressant pour appliquer le théorème d'encadrement), et celle sans valeur absolue est intéressante car elle est plus facile à manipuler (il est par exemple plus facile de passer des termes d'un côté de l'inégalité vers un autre).

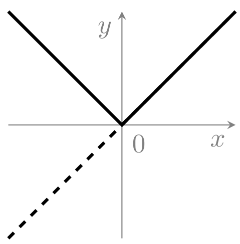
VI.5 Graphe, « fonction miroir ».

Donnons enfin le graphe de la valeur absolue :

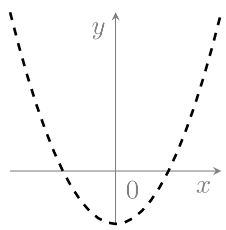


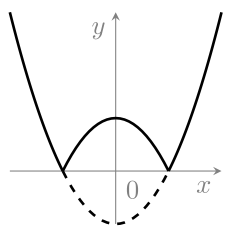
Remarque : Ci-dessous, à gauche, le graphe de $x \mapsto x$, et à droite, les deux graphes de $x \mapsto x$ (en pointillés) et de la valeur absolue (en traits pleins) :





La fonction valeur absolue est une sorte de « fonction miroir » (le miroir étant l'axe des abscisses) : quand la fonction dont on prend la valeur absolue passe en dessous, elle se « réfléchit » dans le miroir (cela vient du fait que, si $A \leqslant 0$, alors $|A| = -A$). Cela peut être très pratique pour tracer le graphe d'une valeur absolue. Par exemple, ci-dessous, le graphe de $x \mapsto x^2 - 1$ (en pointillés) et celui de $x \mapsto \left|x^2 - 1\right|$ (en traits pleins) :





Donnons un dernier exemple pour la route : exprimer la fonction $f : x \mapsto ||x| - 1|$ sans valeur absolue (on distinguera les cas selon la valeur de x) et tracer son graphe.

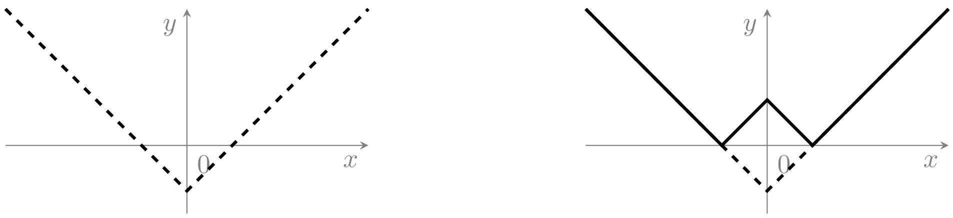
Soit $x \in \mathbb{R}$. Réflexe avec la valeur absolue : s'en débarrasser ! Puisqu'on a $|x|$ dans l'expression de f, séparons les cas selon le signe de x.

- Supposons $x \geqslant 0$. Alors $f(x) = |x-1|$. Séparons les cas selon le signe de $x-1$.
  - ⋆ Supposons $x \geqslant 1$. Alors $f(x) = x-1$.
  - ⋆ Supposons $x < 1$ (et donc $0 \leqslant x < 1$ car x est supposé positif). Alors $f(x) = 1-x$.
- Supposons $x < 0$. Alors $f(x) = |-x-1| = |x+1|$. Séparons les cas selon le signe de $x+1$.
  - ⋆ Supposons $x \geqslant -1$ (et donc $-1 \leqslant x < 0$ car x est supposé strictement négatif). Alors $f(x) = x+1$.
  - ⋆ Supposons $x < -1$. Alors $f(x) = -x-1$.

Finalement, on a :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ -x-1 & \text{si } x \leqslant -1 \end{cases}$$

Ci-dessous les graphes de $x \mapsto |x| - 1$ (en pointillés) et celui de f (en traits pleins).



VII Partie entière.

Proposition/Définition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$k \leqslant x < k+1$$

Cet entier est appelé partie entière de x et est noté $\lfloor x \rfloor$.

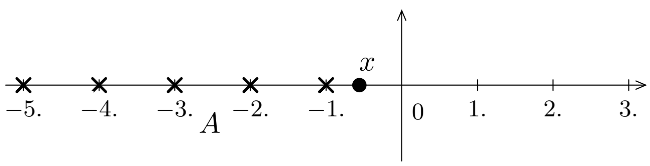
Exemples :

- $\lfloor 2.5 \rfloor = 2$.
- $\lfloor \pi \rfloor = 3$.
- $\lfloor 2 \rfloor = 2$.
- $\lfloor -\pi \rfloor = -4$.

Si x est positif, c'est « l'entier avant la virgule ». Attention, comme on vient de le voir avec $-\pi$, ce n'est plus vrai pour un nombre négatif !

Attention, le large et le strict sont très importants ! Il ne faut pas les confondre ! Ce sera la même chose dans le corollaire ci-dessous. Si on a un doute, il faut se poser la question : x peut-il être égal à sa partie entière ? à sa partie entière $+1$? Puisqu'un entier est égal à sa partie entière, x peut être égal à sa partie entière donc l'inégalité de gauche est large, et celle de droite est stricte.

Démonstration. Notons $A = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, k \leqslant x\}$.



Existence :

- $\mathbb{Z}$ n'est pas minoré donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x$. En d'autres termes, A est non vide.
- x est, par définition, un majorant de A.

- A est donc une partie non vide majorée de $\mathbb{Z}$: elle admet un plus grand élément noté n_0.
- Puisque $n_0 \in A$, alors $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_0 \leqslant x$. De plus, $n_0 + 1 > n_0$ et n_0 est le plus grand élément de A donc $n_0 + 1 \notin A$. En d'autres termes, $n_0 + 1 > x$.

On a finalement : $n_0 \leqslant x < n_0 + 1$. D'où l'existence.

Unicité : Soit $n_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $n_1 \leqslant x < n_1 + 1$. Puisque $n_0 \leqslant x < n_1 + 1$, alors $n_0 < n_1 + 1$ donc $n_0 \leqslant n_1$. De même, on déduit des inégalités $n_1 \leqslant x < n_0 + 1$ l'inégalité $n_1 \leqslant n_0$ donc $n_0 = n_1$. D'où l'unicité.

De la démonstration on déduit :

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. En particulier, si $n \in \mathbb{Z}$, alors on a l'équivalence : $n \leqslant x \iff n \leqslant \lfloor x \rfloor$.

Par exemple, un entier n est inférieur ou égal à π si et seulement s'il est inférieur ou égal à 3. C'est bien sûr faux si n n'est pas un entier.

Exemple : Par exemple, si $x \in \mathbb{R}$ et si $n \in \mathbb{Z}$, alors : $2n \leqslant x \iff n \leqslant \dfrac{x}{2} \iff n \leqslant \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor$. Cette inégalité sera utile dans le chapitre 3.

Remarque : On a utilisé le fait (intuitif) suivant, très pratique lorsqu'on travaille avec des entiers : si p et q sont des entiers, alors : $p < q + 1 \iff p \leqslant q$. Par exemple, un entier est strictement inférieur à 4 si et seulement s'il est inférieur ou égal à 3. C'est bien sûr faux si on ne manipule pas des entiers.

Remarque : On voit qu'introduire un ensemble A dont les éléments sont des entiers qui vérifient les conditions voulues (ou une seule des conditions voulues et montrer qu'alors le maximum vérifie les autres) et montrer qu'il admet un maximum est un moyen simple et efficace de prouver l'existence d'un objet. Nous reverrons plusieurs fois cette méthode (par exemple dans l'exercice 29 ou quand nous montrerons la densité de $\mathbb{Q}$ dans le chapitre 12) : y penser si on bloque !

Corollaire (de la proposition/définition). Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.

On utilisera chacune de ces chaînes d'inégalités selon qu'on essaye d'encadrer x ou sa partie entière. Si on veut encadrer sa partie entière, par exemple pour ensuite appliquer le théorème d'encadrement, on utilisera évidemment la seconde. On fera attention aux inégalités strictes ! Un moyen simple de ne pas se tromper est de se demander si on peut avoir égalité.

Remarque : De plus, puisqu'il y a unicité dans la définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor$ est le seul entier vérifiant les inégalités ci-dessus, c'est-à-dire que si on a un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < k + 1$ ou $x - 1 < k \leqslant x$, alors on peut affirmer directement que $k = \lfloor x \rfloor$. De manière encore plus claire : si on a une chaîne d'inégalités du type

$$\text{truc entier} \leqslant x < \text{truc entier} + 1 \qquad \text{ou} \qquad x - 1 < \text{truc entier} \leqslant x$$

alors on peut directement affirmer que truc entier $= \lfloor x \rfloor$.

Proposition. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
- Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

En particulier, si $x \notin \mathbb{Z}$, alors $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Ce dernier point n'étant pas explicitement au programme, il faut savoir le redémontrer !

Démonstration.
- Supposons que $x \in \mathbb{Z}$. Soit $k = x$. Alors $k \leqslant x < k + 1$ donc $k = \lfloor x \rfloor$ (on utilise l'unicité de la partie entière énoncée juste au-dessus). La réciproque est triviale.
- Tout d'abord, par définition de la partie entière, on a : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. En ajoutant p, il vient : $\lfloor x \rfloor + p \leqslant x + p < x + p + 1$. On a un encadrement du type $k \leqslant x < k + 1$ avec $k \in \mathbb{Z}$: on peut donc affirmer directement que $\lfloor x \rfloor + p = \lfloor x + p \rfloor$.

Remarque : Attention, la dernière égalité est fausse si $p \notin \mathbb{Z}$! En général, on ne peut rien dire concernant la partie entière d'une somme ou d'un produit, l'égalité ci-dessus est la seule vraie en toute généralité ! En général :

- $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$: prendre $x = y = 1.5$.
- Même si $p \in \mathbb{Z}$, $\lfloor p \times x \rfloor \neq p \times \lfloor x \rfloor$: prendre $p = 2$ et $x = 1.5$.
- $\lfloor x \times y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor \times \lfloor y \rfloor$: voir ci-dessus.
- $\lfloor -x \rfloor \neq -\lfloor x \rfloor$: prendre $x = \pi$.

Encore une fois, quand nous disons que c'est faux en général, c'est que ce n'est pas toujours vrai (donc un contre-exemple suffit), pas que ce n'est jamais vrai ! De plus, même si ce n'est pas égal en général, on peut quand même donner des résultats sur ces parties entières. Par exemple (cf. exercice 23), pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Mais il est inutile de retenir cela, il faut juste retenir qu'en général, rien ne marche.

Activité : Soient x et y strictement positifs. Combien l'intervalle $]0\,;x]$ (ouvert en 0 !) contient-il de multiples de y ?

Sot $p \in \mathbb{N}^*$ (on ne manipule que des réels strictement positifs dans cette activité). Alors : $py \leqslant x \iff p \leqslant x/y$. p étant un entier : $py \leqslant x \iff p \leqslant \lfloor x/y \rfloor$. Finalement, les multiples de y appartenant à $]0\,;x]$ sont exactement $y, 2y, \dots, py$ avec $p = \lfloor x/y \rfloor$ (qui sont distincts) et donc sont au nombre de p. En conclusion : l'intervalle $]0\,;x]$ contient $\left\lfloor \dfrac{x}{y} \right\rfloor$ multiples de y. Par exemple :

- L'intervalle $]0\,;x]$ contient exactement $\left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$ multiples de π donc la fonction sin s'annule exactement $\left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$ fois sur l'intervalle $]0\,;x]$ (cf. exercice 19 du chapitre 5).
- Si n et k sont des entiers strictement positifs, il y a $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ multiples de k (non nuls) inférieurs ou égaux à n. Nous utiliserons cela dans le chapitre 3 et dans le chapitre 6.

Activité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\varphi(n)$ son nombre de chiffres (en écriture décimale : par exemple, $\varphi(2022) = 4$). Exprimons $\varphi(n)$ en fonction de n.

Tout d'abord, un nombre a k chiffres si et seulement s'il est compris entre 10^{k-1} (au sens large) et 10^k (au sens strict). Puisque n a, par définition, $\varphi(n)$ chiffres :

Par exemple, l'entier n a trois chiffres si et seulement si $100 \leqslant n < 1000$.

$$10^{\varphi(n)-1} \leqslant n < 10^{\varphi(n)}$$

Par conséquent, $e^{(\varphi(n)-1)\ln(10)} \leqslant n < e^{\varphi(n)\ln(10)}$. La fonction ln étant strictement croissante, $(\varphi(n)-1)\ln(10) \leqslant \ln(n) < \varphi(n)\ln(10)$. Or, $\ln(10) > 0$ donc :

$$\varphi(n) - 1 \leqslant \frac{\ln(n)}{\ln(10)} < \varphi(n)$$

On a encore un encadrement du type $k \leqslant x < k+1$: on peut en déduire que $\varphi(n) - 1 = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor$ donc $\varphi(n) = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(10)} \right\rfloor + 1 = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$.

Ce résultat peut être utile en informatique : comment faire comprendre à un ordinateur que 2021 a quatre chiffres ? De plus, on généralise facilement au nombre de chiffres de n dans une base quelconque (cf. chapitre 6) : on montre de même (il suffit de remplacer 10 par b) que le nombre de chiffres de n en base b est $\lfloor \log_b(n) \rfloor + 1$. Par exemple, le nombre de chiffres de l'écriture binaire de n est $\lfloor \log_2(n) \rfloor + 1 = \lfloor \ln(n)/\ln(2) \rfloor + 1$.

Remarque : Parfois, les inégalités larges ou strictes ne seront pas au bon endroit (ou ne seront pas là du tout). Ce n'est parfois pas très grave : si on a un encadrement du type $k < x < k+1$ alors, en se souvenant qu'une inégalité stricte est aussi large, il vient : $k \leqslant x < k+1$ et on peut tout de même affirmer que $k = \lfloor x \rfloor$. Cependant, que faire si on arrive à un encadrement du type $k < x \leqslant k+1$? C'est à gauche qu'on veut une inégalité large ! Il suffit de changer le sens des inégalités en multipliant par -1 ! En effet, on a alors $-k-1 \leqslant -x < -k$ donc $-k-1 = \lfloor -x \rfloor$ si bien que $k = -\lfloor -x \rfloor - 1$. Attention, comme dit ci-dessus, $-\lfloor -x \rfloor \neq \lfloor x \rfloor$! On ne peut pas simplifier !

Morale de l'histoire : Se ramener à un encadrement du type $k \leqslant x < k+1$ (c'est-à-dire : truc entier $\leqslant x <$ truc entier $+ 1$) en faisant preuve de bon sens.

Terminons par la définition, quelques propriétés et surtout le graphe de la fonction partie entière.

Définition. La fonction

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}\right.$$

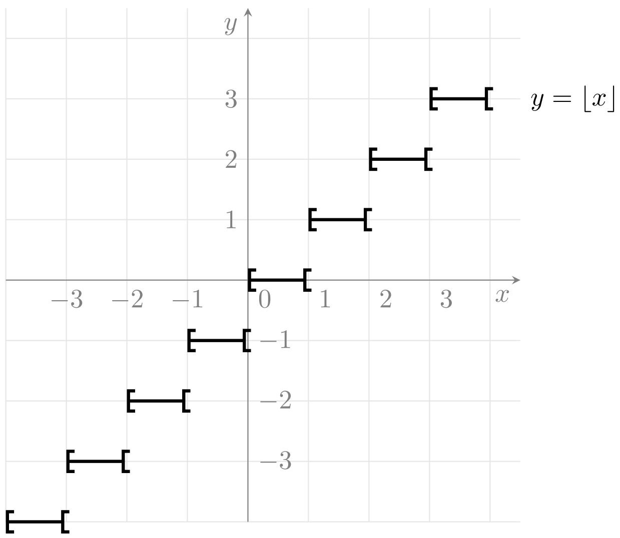
est appelée fonction partie entière.

Proposition.

- La partie entière est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $n \in \mathbb{Z}$, elle est constante égale à n sur l'intervalle $[\,n\,;n+1\,[$.
- Elle est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$ et continue à droite sur $\mathbb{R}$.

Remarques :

- On dit que la fonction partie entière est constante par morceaux (ci-dessous son graphe).
- ⚠ La partie entière n'est pas strictement croissante (par exemple, $1 < \sqrt{2}$ mais $\lfloor 1 \rfloor = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$) ! Si on a $x < y$, tout ce qu'on peut affirmer est que $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$!



Démonstration. • Il est hors de question de dériver la partie entière : celle-ci n'étant pas continue, elle n'est pas dérivable. Il faut revenir à la définition d'une fonction croissante. Soient donc $x \leqslant y$ deux réels. Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$. Puisque ce sont des entiers, $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$ ce qui est le résultat voulu.

Rappelons qu'être continu est nécessaire pour être dérivable, mais pas suffisant.

- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Soit $x \in [\,n\,;n+1\,[$. Alors $n \leqslant x < n+1$, si bien que $n = \lfloor x \rfloor$.
- Ce dernier point sera prouvé dans le chapitre 13.

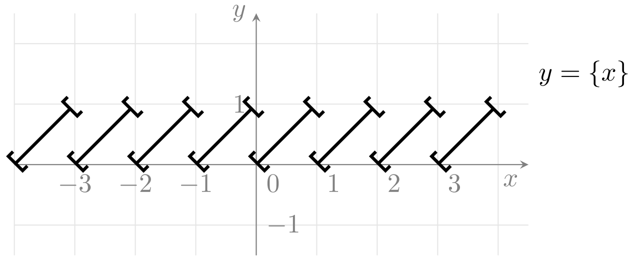
Activité : Si $x \in \mathbb{R}$, on définit sa partie fractionnaire par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ (à ne pas confondre avec sa partie décimale : $\{x\}$ n'est égal à « ce qu'il y a après la virgule » que lorsque x est positif !). Montrer que la fonction $x \mapsto \{x\}$ (appelée donc fonction partie fractionnaire) est affine par morceaux, périodique, et donner l'allure de son graphe.

La partie fractionnaire est un exemple de fonction périodique qui n'a rien à voir avec la trigonométrie.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{array}{rcl} \{x+1\} & = & x+1-\lfloor x+1 \rfloor \\ & = & x+1-(\lfloor x \rfloor + 1) \quad (\text{car } \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1) \\ & = & x - \lfloor x \rfloor \\ & = & \{x\} \end{array}$$

En d'autres termes, la partie fractionnaire est périodique de période 1. Comme on l'a vu, il suffit de l'étudier sur $[\,0\,;1\,[$. Or, si $x \in [\,0\,;1\,[$, $\lfloor x \rfloor = 0$ donc $\{x\} = x$. La fonction partie fractionnaire est affine sur $[0;1[$ donc, par périodicité, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle est affine sur l'intervalle $[n;n+1[$ donc est affine par morceaux sur $\mathbb{R}$. Ci-dessous son graphe (on trace celui de $x \mapsto x$ sur $[0;1[$ et on en déduit le graphe complet par périodicité).



Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in [n;n+1[$, $\{x\} = x - n$. Nous dirons plus tard (cf. chapitre 13) que la partie fractionnaire est continue à droite sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, elle tend vers 0 en n^+ et vers 1 en n^-.

Activité : Une dernière pour la route... Donner la partie entière de $\sqrt{3}$, de $\sqrt{5}$ et de $\sqrt{57}$. Le truc est d'encadrer notre entier entre deux carrés parfaits. Par exemple, $1 < 3 < 4$ et la racine carrée est strictement croissante donc $1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ donc $1 < \sqrt{3} < 2$ si bien que $\lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$. De même, $4 < 5 < 9$ et la racine carrée est strictement croissante donc $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$ si bien que $\lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$. On trouve de même que $\lfloor\sqrt{57}\rfloor = 7$.