Chapitre 2.6

Bilan

Encore une fois, le but de ce chapitre était de se donner les outils nécessaires à l'étude de fonctions et à la résolution d'inéquations (même si nous sommes loin d'avoir épuisé ce dernier point).

Quelques rappels et méthodes concernant la résolution d'inéquations :

- On raisonne en général par équivalences (même s'il est parfois plus simple de raisonner par analyse-synthèse : voir l'exemple ci-dessous, qu'on comparera avec le même exemple fait dans le chapitre 1).
- Pour justifier des équivalences, on précise le cas échéant que les fonctions par lesquelles on compose sont **strictement** monotones. Si elles ne le sont pas, l'équivalence n'est pas vérifiée, et on se débrouille autrement (disjonction de cas, analyse-synthèse etc.).
- On peut faire la différence et factoriser puis donner le signe à l'aide d'un tableau de signes.
- On peut faire la différence et donner les variations à l'aide d'une étude de fonctions : cela permet parfois de donner le signe. Par exemple, si f est croissante sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors f est négative.

On voit donc qu'on arrive naturellement à des études de fonction.

Méthode pour étudier une fonction f :

- On commence par donner le domaine de définition de f (noté D_f dans la suite). Si f est définie par une puissance variable, on commence par l'écrire sous forme exponentielle pour donner son domaine de définition.
- On regarde si f est paire, impaire ou périodique pour réduire le domaine d'étude.
- La plupart du temps, on dérive f pour trouver ses variations. ⚠ Toujours justifier l'existence de f' avant de dériver f ! En général, un simple « f est dérivable car produit, composée etc. de fonctions dérivables » suffit, mais parfois, il faut revenir à la définition i.e. étudier le taux d'accroissement.
- Ce qui nous intéresse dans la dérivée c'est son signe : on essaye donc de la factoriser au maximum. Par exemple, si le dénominateur est un carré (ce qui arrive souvent quand on dérive un quotient), on ne le développe pas !
- Si le signe de f' est difficile à donner, on peut la dériver une deuxième fois (ou juste son numérateur si on connaît le signe du dénominateur).
- De manière générale : plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros ! Il ne faut pas hésiter à définir des fonctions intermédiaires pour simplifier les calculs. Par exemple, si $f(x) = e^{x\ln(x)}$, on pose $g(x) = x\ln(x)$: la fonction exp étant strictement croissante, elle préserve les variations, i.e. f et g auront les mêmes variations. De même, si f est une fraction dont le dénominateur est positif, on peut appeler son numérateur $u(x)$ et étudier la fonction u : f et u ont le même signe ! ⚠ C'est décidé, on ne dira jamais « le signe de f dépend du signe de u » quand on voudra dire que f et u ont le même signe. Il suffit de savoir parler français pour comprendre que ce n'est pas la même chose !
- On donne ensuite les variations de f dans un tableau, avec les limites aux bornes de D_f. On utilise pour cela les opérations algébriques sur les limites, les limites des fonctions usuelles (qu'il faut connaître, ainsi que le graphe de ces mêmes fonctions, sur le bout des doigts) et on lève les indéterminations si besoin (croissances comparées, on factorise par les termes dominants dans une fonction rationnelle, on utilise les limites usuelles comme $\dfrac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ etc.) et il faut savoir composer des limites.

- Et ensuite on trace le graphe. Le bac est derrière vous : je me fiche complètement d'avoir une échelle exacte et d'avoir des croix placées à des endroits précis (et pourquoi pas sur du papier millimétré tant qu'on y est ?) : cela ne servira qu'à donner une allure hachée et affine par morceaux à votre courbe, et donc à la faire passer pour une fonction non dérivable (la pauvre). La plupart du temps, on cherche juste l'allure du graphe : on veut voir les variations, les limites éventuelles et, si on le demande, les asymptotes, les tangentes (plus tard : les demi-tangentes) et les éventuels points fixes. On réfléchira également aux x et aux y dont on a besoin (si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs négatives, on évitera de dessiner les axes au milieu de sa feuille).

Sans compter que ce sera très moche...

Donnons quelques exemples pour conclure.

Exemple : Reprenons l'exemple du chapitre 1 et résolvons l'équation $x = \sqrt{x^3+x^2-x}$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Comparer cette résolution avec celle du chapitre 1.

Tout d'abord, cherchons quand cette écriture a un sens : si $x \in \mathbb{R}$, alors $x^3+x^2-x = x(x^2+x-1)$. Un rapide calcul de discriminant nous donne le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$(-1-\sqrt{5})/2$		0		$(-1+\sqrt{5})/2$		$+\infty$
x				$-$	0	$+$			
x^2+x-1		$+$	0		$-$		0	$+$	
x^3+x^2-x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Finalement, cette égalité a un sens si $x \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,;0\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$, ce qu'on supposera dans la suite. On veut travailler par équivalences (habituel quand on résout une équation) et mettre au carré pour se débarrasser de la racine : pour que l'équivalence soit juste, les deux membres doivent être de même signe. Or, une racine est positive : ainsi, si $x<0$, alors x n'est pas solution. On supposera donc $x \geqslant 0$ dans la suite, c'est-à-dire que $x \in \{0\} \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$. À présent, on peut travailler par équivalences :

Rappelons que deux nombres ont le même carré si et seulement s'ils sont égaux ou opposés : si on peut dire qu'ils sont égaux, il faut d'abord prouver qu'ils ont le même signe.

$$\begin{aligned} x = \sqrt{x^3+x^2-x} \quad & \iff \quad x^2 = x^3+x^2-x \qquad \text{(ces deux nombres sont positifs)} \\ & \iff \quad x^3 - x = 0 \\ & \iff \quad x(x^2-1) = 0 \\ & \iff \quad x(x-1)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, x est solution si et seulement si $x=0$, $x=1$ ou $x=-1$. Or, $-1 \notin \{0\} \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;+\infty\right[$ et 0 et 1 appartiennent à cet ensemble (immédiat pour 0, et 1 lui appartient car $2<\sqrt{5}<3$ donc $0<-1+\sqrt{5}<2$ ce qui permet de conclure) donc -1 n'est pas solution : les seules solutions sont 0 et 1.

Concluons ce chapitre par une étude de fonction.

Exemple : Étudier (i.e. donner son tableau de variations et tracer son graphe) la fonction

$$f : x \mapsto \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

On commencera par étudier son éventuelle parité (et on admettra que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^2$).

Soit $x \in \mathbb{R}$. Sous réserve d'existence,

Réflexe : puissance variable donc on passe à l'exponentielle.

$$f(x) = \exp\left(x \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)$$

Ainsi, f est définie en x si et seulement si $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$				$-$	0	$+$	0
$x+1$		$-$	0	$+$			
$\dfrac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

Ainsi, $D_f = \left]-\infty\,;-1\right[\cup\left]1\,;+\infty\right[$: D_f est symétrique par rapport à 0, on peut s'intéresser à la parité de f. Soit $x \in D_f$.

$$\begin{aligned}
f(-x) &= \exp\left(-x\ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)\right) \\
&= \exp\left(-x\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) \qquad \text{(on simplifie par } -1) \\
&= \exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) \qquad (\text{ car } \ln(1/u) = -\ln(u)) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

En d'autres termes : f est paire. On peut donc restreindre l'étude à $\left]1\,;+\infty\right[$. Supposons donc $x > 1$. Posons $u : x \mapsto x\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$. Alors f et u ont les mêmes variations car l'exponentielle est strictement croissante. u est dérivable car produit et composée de fonctions qui le sont. Or, $u(x) = x\left(\ln(x+1) - \ln(x-1)\right)$ (réflexe : casser le ln, c'est plus simple à dériver !) donc

Cela vient aussi du fait que $f' = u' \times e^u$ donc est du signe de u'.

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \ln(x+1) - \ln(x-1) + x \times \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \\
&= \ln(x+1) - \ln(x-1) - \frac{2x}{x^2-1}
\end{aligned}$$

Le signe de u' ne saute pas aux yeux : on dérive encore une fois (u est en fait $\mathscr{C}^\infty$ car produit et composée de fonctions qui le sont). Ainsi,

$$\begin{aligned}
u''(x) &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} - \frac{\left(x^2-1\right)\times 2 - 2x \times 2x}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{-2}{x^2-1} - \frac{-2-2x^2}{(x^2-1)^2} \\
&= \frac{4}{(x^2-1)^2} > 0
\end{aligned}$$

Ainsi, u' est strictement croissante (et, au passage, u est convexe). Or :

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2-1} &= \frac{2x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{2}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)} \\ &\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

On peut donner la limite directement si on est à l'aise, mais il faut savoir le prouver si besoin !

De même, $\dfrac{x+1}{x-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et le ln est une fonction continue donc

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(1) = 0$$

Ne pas oublier de préciser la continuité du ln !

Finalement, $u'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. La fonction u' étant strictement croissante, elle est strictement négative.

x	1		$+\infty$
u'	$\|\|$	$-$	
$u(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	

Pour la limite en 1 : $x+1 \xrightarrow[x\to 1]{} 2$, $x-1 \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0^+$ donc $y = \dfrac{x+1}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$. Or, $\ln(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$. Par composition de limite, $\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$, et cela ne change pas en multipliant par x qui tend vers 1 : d'où la limite en $+\infty$. Puisque $f = e^u$, alors f et u ont les mêmes variations et, par composition de limite, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. La limite de f en $+\infty$ est admise (on pourra la donner au second semestre). On en déduit le graphe de f (avec ses asymptotes horizontale et verticale) sur $]\,1\,;+\infty\,[$ et sur D_f par parité.

Encore une fois, on peut également dire que $f' = u' \times e^u$ donc f' et u' ont le même signe, et on peut en déduire le tableau de variations de f.