Chapitre 7

Nombres complexes

I Introduction

Au commencement était $\mathbb{N}$, mais certaines équations très simples du type $x+1=0$ n'admettaient pas de solution dans $\mathbb{N}$: il était donc nécessaire de créer un autre ensemble, plus grand, dans lequel ce genre d'équations admettrait des solutions.

L'existence et les propriétés de $\mathbb{N}$ découlent en effet de l'axiomatique.

On a alors construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ (cf. chapitre 16), ce qui a permis de résoudre ce genre d'équations, mais d'autres problèmes se sont posés, comme résoudre l'équation $2x+1=0$.

On a alors construit l'ensemble $\mathbb{Q}$ (cf. chapitre 16), mais, ensuite, ce sont les équations du type $x^2-2=0$ qui ont posé problème.

La résolution d'équations du type $x^2-2=0$ n'est pas la seule raison qui a motivé la construction de $\mathbb{R}$: par exemple, $\mathbb{Q}$ n'a pas la propriété de la borne supérieure, cf. chapitres 12 et 16, et il lui manque encore d'autres propriétés intéressantes.

On a alors construit l'ensemble $\mathbb{R}$ (cf. chapitre 16), mais certaines équations résistent encore et toujours à l'envahisseur, comme par exemple $x^2+1=0$.

On a alors construit (cf. chapitres 18 et 21) un ensemble $\mathbb{C}$ dans lequel cette équation admet une solution, et c'est cet ensemble que nous allons étudier dans ce chapitre.

Remarque : On pourrait se demander l'utilité de construire toujours de nouveaux ensembles : pourquoi ne se contente-t-on pas de ceux qu'on a déjà ? Cela tient-il du vice ou de l'artifice de créer sans cesse de nouveaux ensembles ? En effet, cela donne l'impression de ne jamais s'arrêter.

D'une part, cela ne tient pas du vice, on ne crée de nouveaux ensembles que pour répondre à un besoin déjà existant et somme toute assez naturel : si on a un ensemble E, on se demande si les équations à coefficients dans E (donc dans un ensemble déjà existant) ont des solutions dans E (par exemple, l'équation à coefficients entiers $2x+1$ admet-elle des solutions entières ? l'équation à coefficients réels $x^2+1=0$ admet-elle des solutions réelles ?). Si ce n'est pas le cas, on crée un ensemble plus grand dans lequel elles admettent des solutions, et rebelote.

D'où le « d'autre part » : cela s'arrête car on peut montrer (vous le ferez l'an prochain) qu'une équation polynomiale à coefficients complexes admet forcément des solutions complexes (cf. chapitre 19). En d'autres termes, cette chaîne infernale s'arrête avec $\mathbb{C}$: inutile de créer encore un ensemble, on a tout ce qu'il faut avec $\mathbb{C}$!

II Définition et manipulations

II.1 Ensemble $\mathbb{C}$

Définition. On admet l'existence d'un ensemble noté $\mathbb{C}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et est muni d'opérations $+$ et $\times$ qui prolongent celles de $\mathbb{R}$ et vérifient les mêmes propriétés : commutativité, associativité, distributivité du produit sur la somme.
- $\mathbb{C}$ contient un élément i vérifiant $i^2=-1$. De plus, pour tout $z\in\mathbb{C}$, il existe $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ unique tel que $z=x+iy$. En d'autres termes, $\mathbb{C}$ est l'ensemble formé des éléments de la forme $x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{C}=\left\{x+iy\,|\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés « complexes » ou « nombres complexes ». $\mathbb{C}$ est appelé ensemble des nombres complexes. Enfin, on note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des complexes non nuls.

Nous prouverons l'existence d'un tel ensemble $\mathbb{C}$ dans les chapitres 18 et 21.

On dit parfois aussi que $\mathbb{C}$ est le corps des complexes : cf chapitre 18.

Rédaction : Dans ce chapitre et les suivants, quand nous écrirons « Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ », cela signifiera : « Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'unique couple de réels tel que $z = x + iy$ ». En particulier, cela signifiera que x et y sont réels.

Remarques :

- $i \notin \mathbb{R}$. En effet, le carré d'un nombre réel est positif et $i^2 = -1$.
- $i^3 = -i, i^4 = 1$.
- De l'unicité de l'écriture $z = x + iy$, on en déduit que si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont des complexes, alors :

$$z_1 = z_2 \iff x_1 = x_2 \qquad \text{et} \qquad y_1 = y_2$$

En particulier : $z = x + iy = 0 \iff x = y = 0$.

Nous dirons au paragraphe VI que i est une racine quatrième de l'unité.

II.2 Extension à $\mathbb{C}$ des règles de calcul sur $\mathbb{R}$

L'idée de ce paragraphe est très simple : l'addition et le produit vérifient les mêmes propriétés que sur $\mathbb{R}$. En d'autres termes, on peut travailler sur $\mathbb{C}$ comme sur $\mathbb{R}$. Par exemple, si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ sont deux complexes, alors :

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

et

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2) \end{aligned}$$

Il découle du calcul précédent que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

- $z + 0 = z$: 0 est encore le neutre pour l'addition.
- $z \times 1 = z$: 1 est encore le neutre pour le produit.
- Et beaucoup d'autres propriétés que vous utiliserez naturellement sans vous poser de questions car ce sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$. On zappe.

On a également $0 + z = z$ et $1 \times z = z$: l'addition et le produit sont commutatifs.

Définition.

- Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $-z$ le complexe $(-1) \times z$: $-z$ est appelé l'opposé de z. Enfin, si z_1 et z_2 sont deux complexes, on pose $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$.
- Si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, on note :

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2}$$

$1/z$ est appelé l'inverse de z. Enfin, si z_1 et z_2 sont deux complexes avec z_2 non nul, on pose :

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$$

- On définit les puissances positives et négatives de la même façon que sur $\mathbb{R}$, cf. chapitre 2.

L'inverse est bien défini car, si z est non nul, alors x et y sont non tous nuls donc $x^2 + y^2 \neq 0$. En pratique, on ne retient pas cette définition, on la retrouve avec l'expression conjuguées, cf. III.1.

Remarque : ⚠ Attention, même si on pourra parler de racines n-ièmes sur $\mathbb{C}$ (cf. paragraphe VI), on ne peut pas définir les puissances non entières pour les complexes qui ne sont pas des réels positifs car la définition de ces puissances nécessite l'utilisation du ln ou du TVI. En particulier, les notations $z^{1/n}$, z^α ou $\sqrt[n]{z}$ sont interdites (sauf si z est un réel positif ou si $\alpha \in \mathbb{Z}$) !

Remarque : Il découle de la définition toute une série de règles de calcul toutes aussi intuitives (car les mêmes que sur $\mathbb{R}$) que faciles mais fastidieuses à démontrer. Par exemple :

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z - z = 0$.
- $-z - z = (-2) \times z$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ est régulier pour la somme, c'est-à-dire que si z_1, z_2, z_3 sont trois complexes et si $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$ alors $z_2 = z_3$.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $z \times \dfrac{1}{z} = 1$.
- De même, dans un produit, on peut simplifier par un complexe non nul.
- Un produit est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.
- Et beaucoup d'autres encore que vous utiliserez naturellement sans vous poser de questions car ce sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$. On zappe.

Remarque : La somme et le produit étant commutatifs et associatifs, on peut définir les notations $\sum$ et $\prod$ pour les complexes de la même façon que pour les réels (la seule chose à laquelle il faut faire attention est qu'il ne faut pas choisir i comme indice de sommation ou de produit) et ces notations vérifient les mêmes propriétés (par exemple, la somme est toujours linéaire). Pour faire simple : le chapitre 3 est encore valable en remplaçant « réels » par « complexes ». Par exemple, avec des démonstration tout à fait analogues :

On évitera également de prendre j comme indice, cf. paragraphe VI.2.b.

Proposition. Soit $q \in \mathbb{C}$, soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

Théorème (Formule du binôme de Newton). Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

$$a^n - b^n = (a-b) \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right)$$

Nous verrons des exemples d'applications de ces formules à des complexes dans la suite du cours.

II.3 Partie réelle, partie imaginaire

Définition. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Le **réel** x est appelé partie réelle de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$. Le **réel** y est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.

On peut donc reformuler le dernier résultat du paragraphe II.1 de la façon suivante : deux complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Exemple : $\mathrm{Re}(1+2i) = 1$ et $\mathrm{Im}(1+2i) = 2$ et non pas $2i$! La partie imaginaire est le coefficient devant i, ce n'est pas « tout le morceau imaginaire ». On vérifiera à chaque fois (par exemple quand on linéarisera des sinus et des cosinus, cf. paragraphe IV.2) qu'on donne bien une partie réelle et une partie imaginaire **réelles**.

Remarque : À l'aide des calculs du paragraphe précédent, il vient :

Proposition. $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$,

$$\mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2)$$

Remarque : ⚠ C'est faux pour le produit ! On n'a pas forcément $\mathrm{Re}(z_1 \times z_2) = \mathrm{Re}(z_1) \times \mathrm{Re}(z_2)$! Par exemple, $\mathrm{Re}(i) = 0$ mais $\mathrm{Re}\,(i \times i) = -1 \neq \mathrm{Re}(i) \times \mathrm{Re}(i)$. C'est également faux pour le quotient (voir plus loin). Cependant, on a tout de même le résultat suivant :

Proposition. Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors : $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z)$.

En d'autres termes, on peut sortir les constantes **réelles**.

Démonstration. $\rightsquigarrow$ Exercice.

Corollaire. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Re}(z_k) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Im}(z_k)$$

On dit que la partie réelle et la partie imaginaire sont $\mathbb{R}$-linéaires.

⚠ Les λ_k doivent être **réels** !

Démonstration. exo (par récurrence).

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$.

Démonstration. Notons $z = x + iy$: on a donc $y = \mathrm{Im}(z)$. Si $y = 0$ alors $z = x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, supposons que $z \in \mathbb{R}$. Si $y \neq 0$ alors $i = \dfrac{z - x}{y} \in \mathbb{R}$ car quotient de réels, ce qui est absurde, donc $y = 0$.

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $\mathrm{Re}(z) = 0$, on dit que z est un imaginaire pur.

Remarques :

- En d'autres termes, un complexe est un imaginaire pur s'il est de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$. L'ensemble des imaginaires purs est donc noté $i\mathbb{R}$.
- Seul 0 est à la fois réel et imaginaire pur.
- On ne confondra pas les termes « complexe », « non réel » et « imaginaire pur ». Tout élément de $\mathbb{C}$ est un complexe (en particulier, un réel est un complexe !), un complexe non réel est un complexe... non réel (donc de la forme $x + iy$ avec $y \neq 0$), et, enfin, un imaginaire pur est un complexe de la forme iy. Par exemple, $1 + i$ est un complexe non réel mais n'est pas un imaginaire pur : un complexe peut n'être ni réel, ni imaginaire pur, ce n'est pas l'un ou l'autre !

Ci-contre, il est sous-entendu que y est un réel...

II.4 Représentation géométrique des nombres complexes

Définition. On appelle plan complexe un plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. L'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathscr{P} \\ z = x + iy & \longmapsto & \text{Le point } M \text{ de coordonnées } (x, y) \end{array} \right.$$

est une bijection : on pourra donc identifier ces objets.

Définition.

- L'affixe d'un point M de coordonnées (x, y) est le complexe $z_M = x + iy$. Le point M est alors noté $M(z)$.

- L'affixe d'un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est le complexe $z_{\vec{u}} = x + iy$.

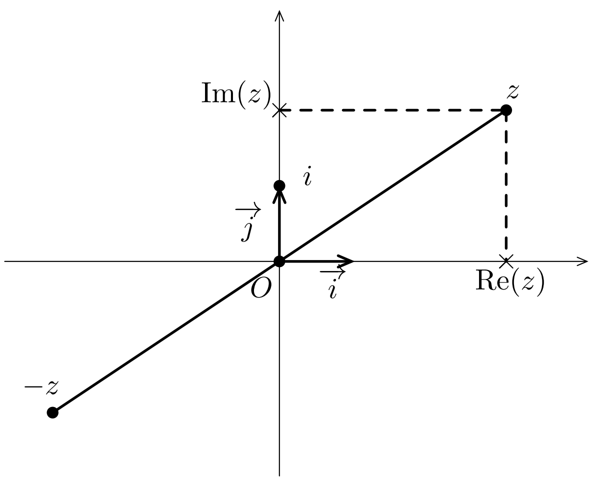
Proposition. Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.

Démonstration. Découle de la définition.

Monde merveilleux des complexes	**Monde merveilleux de la géométrie**
$\mathbb{C}$	Le plan $\mathscr{P}$
$z = x + iy$	$M(x, y)$
$-z$	Symétrique de M par rapport à l'origine
$z_B - z_A$	$\overrightarrow{AB}$
Partie réelle	Abscisse
Partie imaginaire	Ordonnée
$\mathbb{R}$	Axe des abscisses
$i\mathbb{R}$	Axe des ordonnées

Remarque : Nous irons même parfois plus loin : au lieu de parler du point M d'affixe z, nous identifierons ces deux objets et parlerons tout simplement du point z. Par exemple, ci-dessous nous avons représenté les points i et $z = 3 + 2i$.

On ne confondra pas le complexe i avec le vecteur $\vec{i}$.



Il est très important d'être très à l'aise avec cette représentation graphique. Dans la suite, nous donnerons l'interprétation géométrique de chaque objet que nous définirons.

On en déduit par exemple un critère d'alignement ou d'orthogonalité :

Nous verrons d'autres critères avec les arguments dans le paragraphe V.4.

- z_A, z_B, z_C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires, si et seulement si $(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) = 0$.
- Le triangle formé par les complexes z_A, z_B, z_C est rectangle en A si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux, si et seulement si $(x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 0$.

Nous utiliserons ces critères dans l'exercice 86.

III Module et conjugaison

III.1 Conjugaison

Définition. La fonction

$$\sigma : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z = x+iy & \longmapsto & x-iy \end{array} \right.$$

est appelée conjugaison. L'image d'un complexe z est appelée conjugué de z et est notée $\overline{z}$.

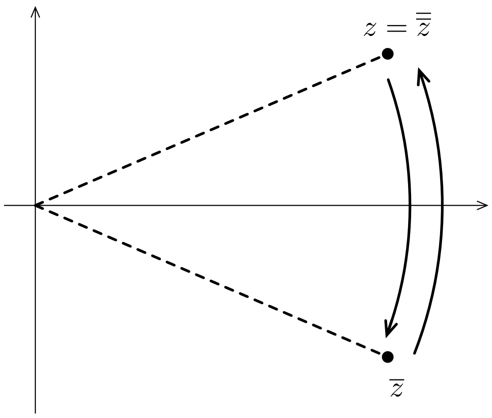
Proposition.

1. La conjugaison est une involution de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$) et donc est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$.

   - $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
   - $z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$

Démonstration. ⇝ Exercice.

Interprétation géométrique : Géométriquement, la conjugaison est la symétrie par rapport à l'axe des abscisses. On retrouve bien le fait que la conjugaison est une involution.



Proposition. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
3. Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
4. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Par exemple, si $z \in \mathbb{C}$, alors $\overline{2+iz} \neq 2 - iz$ car z n'est pas forcément réel ! En utilisant les propriétés de ce paragraphe, $\overline{2+iz} = 2 - i \times \overline{z}$, et si on veut être plus précis, on note $z = x+iy$, et on a finalement $\overline{2+iz} = 2 - ix - y$. Morale de l'histoire : pour « changer le + en − », il faut impérativement que b soit réel. Dans le même ordre d'idée, $\overline{i+3} = -i+3$ et non pas $i-3$: c'est la partie imaginaire qu'on multiplie par -1, pas « le deuxième morceau ».

Démonstration. Notons $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ donc $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ et $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$.

1. D'une part, $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ donc $\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$ et, d'autre part, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$, d'où le résultat.
2. ⇝ Exercice.
3. D'une part,

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \times \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} \\
&= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} \times \frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + i \times \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right)
\end{aligned}
$$

si bien que

$$
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} - i \times \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right)
$$

D'autre part :

$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \times \frac{z_2}{z_2} \\
&= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2} \times \frac{x_2 + iy_2}{y_2 + iy_2} \\
&= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} - i \times \left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \right) \qquad \square
\end{aligned}
$$

ce qui permet de conclure.

4. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Remarque : Nous avons vu dans cette démonstration une méthode particulièrement importante : la méthode de l'expression conjuguée. Quand on a un quotient z_1/z_2 (avec évidemment $z_2 \neq 0$), elle consiste à multiplier au numérateur et au dénominateur par $\overline{z_2}$, c'est-à-dire par le conjugué du dénominateur. Cette méthode doit devenir un réflexe ! Elle est d'une grande utilité car elle permet de se ramener à un dénominateur réel. En effet, si $z_2 = x_2 + iy_2$, alors $z_2 \times \overline{z_2} = {x_2}^2 + {y_2}^2 \in \mathbb{R}_+^*$ (car x_2 et y_2 sont non tous nuls puisque $z_2 \neq 0$). En particulier, c'est un réel ! Cela peut s'avérer utile, par exemple pour donner la partie réelle ou imaginaire d'un quotient.

Nous dirons dans le paragraphe suivant que $z_2 \times \overline{z_2} = |z_2|^2$.

Exemple : Donnons la partie réelle de $z = \dfrac{1+2i}{3+i}$.

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{(1+2i) \times (3-i)}{3^2 + 1^2} \\
&= \frac{5 + 5i}{10} \\
&= \frac{1+i}{2}
\end{aligned}
$$

Attention à ne pas écrire $3^2 + i^2$! Si $z = x + iy$, le produit $z \times \overline{z}$ est égal à $x^2 + y^2$, c'est-à-dire à la partie réelle au carré + la partie imaginaire au carré ! Il n'y a que des termes positifs dans l'histoire !

En particulier, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 1/2$. En particulier, on voit qu'en général $\mathrm{Re}(z_1/z_2) \neq \mathrm{Re}(z_1)/\mathrm{Re}(z_2)$, et même chose pour les parties imaginaires. D'où l'importance de l'expression conjuguée !

Cas particulier important : $\dfrac{1}{i} = -i$.

Corollaire.

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$ et $\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}$. En particulier : $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \overline{z}^n$.
2. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

DÉMONSTRATION.
1. exo, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ (le cas $n = 0$ pour la puissance vient du fait que $z^0 = 1$ par convention).
2. Vu le résultat précédent, il suffit de prouver le résultat pour les entiers négatifs. Soient $n \in \mathbb{Z}, n < 0$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} \overline{z^n} &= \overline{\left(\frac{1}{z^{-n}}\right)} \\ &= \frac{\overline{1}}{\overline{z^{-n}}} \\ &= \frac{1}{\overline{z}^{-n}} \\ &= \overline{z}^n \end{aligned}$$

□

Propriété 3 ci-dessus.

Car $-n > 0$ donc on applique le résultat précédent.

III.2 Module

Définition. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On définit le module de z, noté $|z|$, par : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Là aussi, c'est la partie imaginaire qui est mise au carré, pas « le morceau imaginaire » : le module de z n'est pas $\sqrt{x^2 + (iy)^2} = \sqrt{x^2 - y^2}$ qui n'existe pas si $|y| > |x|$!

Exemples : $|1 + i| = \sqrt{2}$, $|i| = 1$.

Remarque : ⚠ Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z|$ est un réel positif. Par exemple, cela implique que $\sqrt{|z|^2} = |z|$ et si z_1 et z_2 sont deux complexes tels que $|z_1|^2 = |z_2|^2$, alors $|z_1| = |z_2|$.

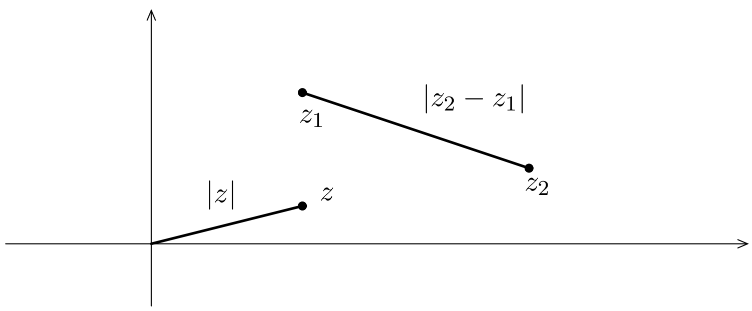
Remarque : Si $z \in \mathbb{R}$, alors :

$$\underbrace{|z|}_{\text{module}} = \sqrt{z^2} = \underbrace{|z|}_{\text{valeur absolue}}$$

Par exemple, le module de 2 et de -2 vaut 2. Le module est donc une généralisation de la valeur absolue aux complexes (c'est pour cela qu'on les note de la même façon). Attention, cela n'aurait aucun sens de dire que $|z| = z$ si z est positif ou $|z| = -z$ si z est négatif (sauf si $z \in \mathbb{R}$ évidemment) : il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$, dire qu'un complexe est plus grand qu'un autre n'a aucun sens, en particulier dire qu'un complexe est positif n'a aucun sens. Par exemple, sur la base de quel critère pourrait-on affirmer que $1 - i$ est positif ?

Bon, on peut munir $\mathbb{C}$ de relations d'ordre, cf. chapitre 16, mais il n'y en a pas de plus naturel que les autres, et on peut montrer (cf. exercice 12 du chapitre 16) qu'il n'existe aucun ordre « gentil » sur $\mathbb{C}$.

Interprétation géométrique : Géométriquement, comme pour la valeur absolue (cf. chapitre 2), $|z|$ est la distance de z à l'origine, et $|z_2 - z_1|$ est la distance entre z_1 et z_2 ou, ce qui revient au même, la norme du vecteur $\overrightarrow{z_1 z_2}$.



Rappel : Si $\Omega(x_0, y_0)$ est un point du plan et si $R \geqslant 0$, le cercle de centre Ω et de rayon R admet pour équation :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

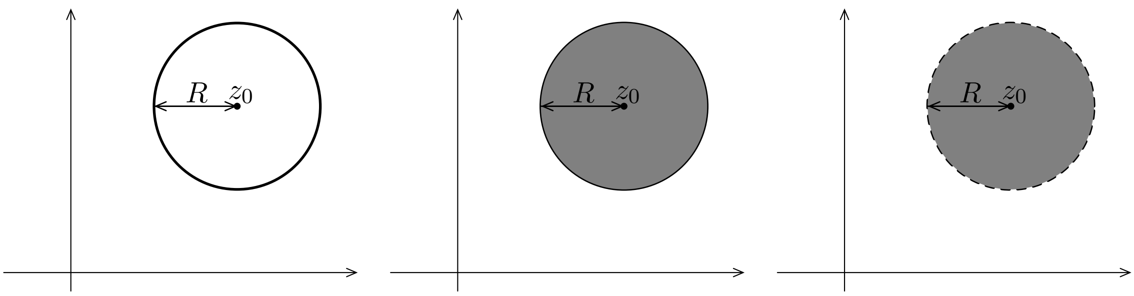
Les définitions suivantes sont alors intuitives, étant donnée la correspondance entre complexes et points du plan.

Définition. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$, soit $R \in \mathbb{R}_+$. On définit les ensembles suivants :

- $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| = R\}$ est le cercle de centre z_0 de rayon R. On le note parfois $C(z_0, R)$.
- $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| \leqslant R\}$ est le disque (fermé) de centre z_0 de rayon R. On le note parfois $D_F(z_0, R)$.
- $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - z_0| < R\}$ est le disque ouvert (c'est-à-dire privé du cercle) de centre z_0 de rayon R. On le note parfois $D_O(z_0, R)$.

Les notations ne sont pas universelles, on les redéfinira à chaque fois. Par exemple, par analogie avec la dimension 3, on parlera parfois de la boule au lieu du disque et de la sphère au lieu du cercle. Par conséquent, on trouve parfois les notations $S(z_0, R)$, $B_F(z_0, R)$ et $B_O(z_0, R)$ pour les ensembles ci-contres. Morale de l'histoire : retenir les ensembles entre accolades, et les interprétations géométriques ci-contre.

Interprétation géométrique :



Cercle — Disque fermé — Disque ouvert

Remarque : Lorsque $z_0 = 0$ et $R = 1$, on parlera respectivement du cercle unité (qu'on notera $\mathbb{U}$, cf. paragraphe IV.1), du disque unité fermé ou du disque unité ouvert.

Exemple : Donner l'ensemble des complexes z tels que

$$A = \frac{z+2}{1+iz} \in \mathbb{R}$$

Soit $z \in \mathbb{C}$. Tout d'abord, A est bien défini si seulement si $iz \neq -1$ si et seulement si $z \neq -1/i = i$. On supposera donc $z \neq i$ dans la suite. Notons $z = x + iy$. Alors :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x + iy + 2}{1 + ix - y} \\ &= \frac{(x+iy+2)(1-y-ix)}{(1-y)^2 + x^2} \end{aligned}$$

En développant, il vient : $\mathrm{Im}(A) = \dfrac{-x^2 - 2x + y - y^2}{(1-y)^2 + x^2}$. Finalement :

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{R} &\iff \mathrm{Im}(A) = 0 \\ &\iff -x^2 - 2x + y - y^2 = 0 \\ &\iff x^2 + 2x - y + y^2 = 0 \\ &\iff (x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ &\iff (x+1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul.

Il en découle que l'ensemble cherché est le cercle de centre $z_0 = -1 + \frac{i}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$ privé du point i car i appartient à ce cercle.

On aurait aussi pu parler du cercle de centre $\Omega(-1, 1/2)$: tout dépend de si on privilégie le point de vue complexe ou le point de vue géométrique.

Proposition. Soient $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $z \in \mathbb{C}$.

1. $|z| = 0 \iff z = 0$.
2. $|\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$.
3. $|\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$ avec égalité si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$.
4. $z \times \overline{z} = |z|^2$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. En particulier : $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$, si λ est de module 1, alors $|\lambda z| = |z|$, et si $\lambda \in \mathbb{R}_+$, alors $|\lambda z| = \lambda |z|$.
6. $|\overline{z}| = |z|$.
7. Si $z \neq 0$, alors $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.
8. ⚠ **(Inégalité triangulaire)** $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

Nous étudierons le cas d'égalité dans le paragraphe V.3.

Démonstration. Notons $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Raisonnons par équivalences.

« Un module, c'est fait pour être mis au carré ».

Une somme de termes **positifs** est nulle ssi tous les termes sont nuls.

$$\begin{aligned} |z| = 0 &\iff |z|^2 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 = 0 \\ &\iff x^2 = y^2 = 0 \\ &\iff x = y = 0 \\ &\iff z = 0 \end{aligned}$$

2. La racine carrée étant strictement croissante, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x| = |\operatorname{Re}(z)|$, avec égalité si et seulement si $x^2 + y^2 = x^2$ ssi $y^2 = 0$ ssi $y = 0$ i.e. $x \in \mathbb{R}$.
3. Idem.
4. Déjà fait dans le paragraphe précédent. C'est ce qui fait que la méthode de l'expression conjuguée est si intéressante !
5. On rappelle que $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2)^2 + (x_1 y_2 + x_2 y_1)^2 \\ &= {x_1}^2 {x_2}^2 + {y_1}^2 {y_2}^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 + {x_1}^2 {y_2}^2 + {x_2}^2 {y_1}^2 + 2x_1 x_2 y_1 y_2 \\ &= {x_1}^2 {x_2}^2 + {y_1}^2 {y_2}^2 + {x_1}^2 {y_2}^2 + {x_2}^2 {y_1}^2 \end{aligned}$$

   De plus, $|z_1|^2 \times |z_2|^2 = \left({x_1}^2 + {y_1}^2\right) \times \left(|x_2|^2 + |y_2|^2\right)$ et, en développant, on trouve $|z_1 \times z_2|^2 = |z_1|^2 \times |z_2|^2$ et puisqu'un module est positif, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
6. exo.
7. D'après la propriété 5, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z}\right|$. Or, $\left|z \times \frac{1}{z}\right| = |1| = 1$ donc $|z| \times \left|\frac{1}{z}\right| = 1$ ce qui permet de conclure.
8. D'après la propriété 4 :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \times \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) \times (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \times \overline{z_1} + z_2 \times \overline{z_2} + z_1 \times \overline{z_2} + \overline{z_1} \times z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) \end{aligned}$$

Or, un réel est inférieur à sa valeur absolue donc $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2}) \leqslant |\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2})| \leqslant |z_1 \times \overline{z_2}|$ d'après la propriété 2. Or, d'après les propriétés 5 et 6, $|z_1 \times \overline{z_2}| = |z_1| \times |\overline{z_2}| = |z_1| \times |z_2|$. Finalement, $\mathrm{Re}\,(z_1 \times \overline{z_2}) \leqslant |z_1| \times |z_2|$ si bien que :

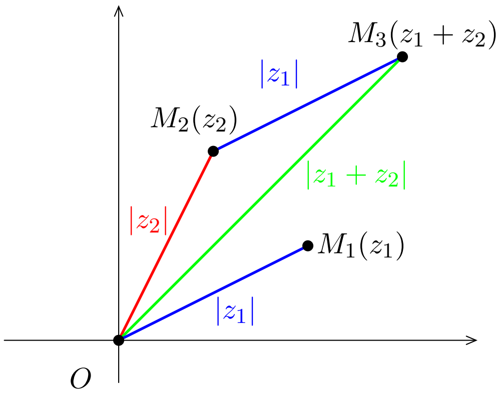
$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \times |z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$$

□

Par croissance de la racine carrée, et un module étant positif, on a le résultat voulu.

La racine carrée est croissante donc $\sqrt{|z_1+z_2|^2} \leqslant \sqrt{(|z_1|+|z_2|)^2}$ et un module est positif donc $\sqrt{|z_1+z_2|^2} = |z_1+z_2|$ et idem pour l'autre. On peut retenir la méthode, utile pour des modules (mais pas que) : comparer deux nombres **positifs** revient à comparer leurs carrés.

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire :



Dans le triangle OM_2M_3, la longueur OM_3 est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Corollaire. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, soit $z \in \mathbb{C}$.

1. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.
3. Si $z \neq 0$: $\forall n \in \mathbb{Z}, |z^n| = |z|^n$.
4. Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$. En particulier, si $|z| = 1$, alors $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$ ⚠ .
5. Si $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, alors :

$$\max(|z_1|, \dots, |z_n|) = 0 \iff \forall i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!], z_i = 0$$

Pour faire simple : tout marche avec la conjugaison (somme, produit, quotient, puissances) et tout marche pour le module, SAUF LA SOMME, et pour la somme, on a l'inégalité triangulaire.

Démonstration. Pour le premier :

$$\begin{aligned} \left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \left|z_1 \times \frac{1}{z_2}\right| \\ &= |z_1| \times \left|\frac{1}{z_2}\right| \\ &= |z_1| \times \frac{1}{|z_2|} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \end{aligned}$$

Propriété 5.

Propriété 7.

□

Le reste est laissé en exo.

Corollaire. Soit $n \geqslant 2$, soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors :

$$\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Là aussi, nous étudierons le cas d'égalité dans le paragraphe V.3.

Démonstration. exo (récurrence).

Corollaire. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. On a les inégalités suivantes :

- $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$.
- $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 + z_2|$.
- $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$.
- $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|$.

On dira « d'après l'inégalité triangulaire », qu'on applique l'inégalité triangulaire proprement dite ou les deux derniers corollaires ci-contre.

Démonstration. $z_1 = z_1 + z_2 - z_2$ donc, d'après l'inégalité triangulaire, $|z_1| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_2|$, d'où la première inégalité. De même pour les autres.

Remarque : On peut encore généraliser le dernier corollaire : puisque $|\pm z_1| = |z_1|$ et idem pour z_2, alors $|\pm z_1 \pm z_2| \leqslant |\pm z_1| + |\pm z_2| = |z_1| + |z_2|$ et $|\pm z_1 \pm z_2| \geqslant |\pm z_1| - |\pm z_2| = |z_1| - |z_2|$ et $|\pm z_1 \pm z_2| \geqslant |z_2| - |z_1|$. En clair : **si on veut majorer, on casse on met un $+$, et si on veut minorer, on casse on met un $-$.**

Remarque : On a les deux minorations $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 - z_2|$ et $|z_2| - |z_1| \leqslant |z_1 - z_2|$. Laquelle utiliser ? Cela dépend des cas. On utilisera celle qui permettra de se ramener à ce qu'on veut prouver. Par exemple, si on veut une inégalité du type $|z_1| \leqslant \cdots$, alors on utilisera la première (et on mettra le $|z_2|$ à droite), tandis que si on veut une inégalité du type $|z_1| \geqslant \cdots$, on utilisera la seconde : on mettra $|z_1|$ à droite et $|z_1 - z_2|$ à gauche. En gros, faites les deux dans votre tête, et demandez-vous laquelle vous permet, en changeant de côté les différents termes, d'obtenir ce que vous voulez.

IV Complexes de module 1

IV.1 $\mathbb{U}$

Définition. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

En particulier, $0 \notin \mathbb{U}$. On pourra donc parler de quotient sur $\mathbb{U}$ sans préciser que le dénominateur est non nul.

Exemples : ± 1 et $\pm i$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

Proposition. $\mathbb{U}$ est stable par produit, par passage à l'inverse, par quotient et par conjugaison (en particulier, c'est un groupe pour la multiplication, cf. chapitre 18).

Démonstration. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} |z_1 \times z_2| &= |z_1| \times |z_2| \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

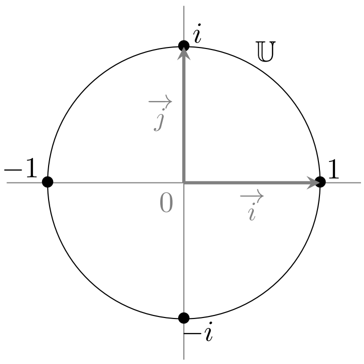
Car z_1 et z_2 appartiennent à $\mathbb{U}$.

□

donc $z_1 \times z_2 \in \mathbb{U}$, c'est-à-dire que $\mathbb{U}$ est stable par produit. Le reste est laissé en exo.

$\mathbb{U}$ n'est pas stable par somme ! Par exemple, $1 + 1 = 2 \notin \mathbb{U}$.

Interprétation géométrique : L'image de $\mathbb{U}$ dans le plan complexe est le cercle trigonométrique, c'est-à-dire le cercle de centre O de rayon 1.



IV.2 Exponentielle d'un imaginaire pur

Rappel : Soient a et b deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) = a$ et $\sin(\theta) = b$. De plus, θ est unique sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

cf. chapitre 5.

Proposition. Soit $z \in \mathbb{U}$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = z$. De plus, θ est unique sur tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.

Démonstration. On note $z = x + iy$ et on applique le rappel puisque $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$.

Définition. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On définit le complexe $e^{i\theta}$ par $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarque : Pour l'instant, ce n'est qu'une notation ! Il n'y a a priori aucun lien avec la fonction exponentielle réelle ! Il est hors de question d'écrire

$$e^{i\theta} = \underbrace{e \times \cdots \times e}_{i\theta \text{ fois}}$$

Le fait que l'exponentielle d'un réel et d'un imaginaire pur soient notées de la même façon découle en fait d'une définition plus générale de l'exponentielle que nous verrons au chapitre 25. Pour l'instant : aucun lien entre les deux, ce n'est qu'une coïncidence !

Exemples : $i = e^{i\pi/2}$, $-1 = e^{i\pi}$ (la fameuse formule d'Euler : $e^{i\pi} + 1 = 0$) et $1 = e^{i\times 0} = e^{2i\pi}$ et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $1 = e^{2in\pi}$.

Proposition.

1. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π-périodique, à valeurs dans $\mathbb{U}$ (c'est-à-dire que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = 1$) et surjective.
2. Soit $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$.
   - $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
   - $\dfrac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
   - $\overline{e^{i\theta_1}} = e^{-i\theta_1}$.
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0[2\pi]$.

Démonstration.

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Par définition, $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ donc

$$\begin{aligned} |e^{i\theta}| &= \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   donc $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$. La surjectivité découle de la proposition précédente, et la 2π-périodicité de celle du sinus et du cosinus.
2. Exo, en utilisant les formules de trigo.
3. Travaillons par équivalences :

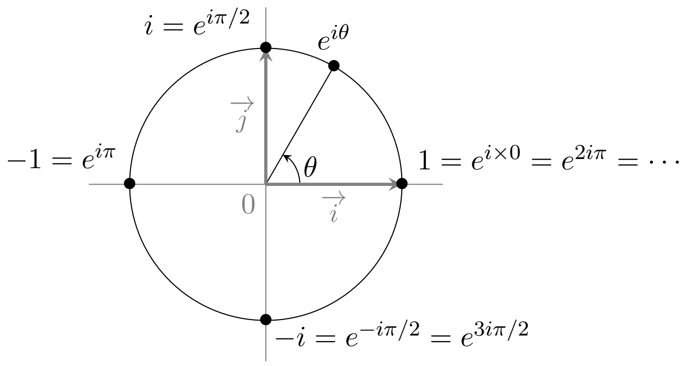
$$\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 &\iff \cos(\theta) + i\sin(\theta) = 1 \\ &\iff \cos(\theta) = 1 \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = 0 \\ &\iff \theta \equiv 0[2\pi] \end{aligned}$$

□

Corollaire. $\forall (\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Démonstration. Par récurrence pour $n \geqslant 0$ puis passer à l'inverse pour $n < 0$.

Interprétation géométrique : Géométriquement, le complexe $e^{i\theta}$ correspond au point du cercle trigo formant un angle θ avec l'axe des abscisses.



Corollaire. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. $\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$ et $\sin(\theta) = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$.
2. **(Formules d'Euler)** $\cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{i\theta}}{2i}$.
3. **(Formule de Moivre)** $\forall n \in \mathbb{N}, (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Ne pas confondre le sinus (avec un i) et le sh (sans i) !

Démonstration.
1. Découle de la définition.
2. Vient des formules : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.
3. En utilisant la proposition précédente, par une récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

D'où le résultat. □

Activité : linéariser/délinéariser. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) \times \cos^2(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \times \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} \times \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} \\
&= \frac{e^{5ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} - 3e^{3ix} - 6e^{ix} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} + 6e^{-ix} + 3e^{-3ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix} - e^{-5ix}}{-32i} \\
&= \frac{e^{5ix} - e^{-5ix} - \left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 2\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{-32i} \\
&= \frac{2i\sin(5x) - 2i\sin(3x) - 4i\sin(x)}{-32i} \\
&= -\frac{\sin(5x)}{16} + \frac{\sin(3x)}{16} + \frac{\sin(x)}{8}
\end{aligned}$$

Le résultat initial étant un réel, le résultat final doit aussi en être un ! Si ce n'est pas le cas, c'est qu'on a fait une erreur !

On dit qu'on a linéarisé $\sin^3(x)\cos^2(x)$ (il n'y a plus de puissances). Cela permet, par exemple, de primitiver la fonction $x \mapsto \sin^3(x)\cos^2(x)$. La même méthode fonctionne évidemment pour toute quantité de la forme $\sin^p(x)\cos^q(x)$.

On peut vouloir faire le chemin inverse (« délinéariser », si l'on veut) : on peut vouloir exprimer $\sin(nx)$ ou $\cos(nx)$ à l'aide de puissances de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$. Ici, c'est la formule de Moivre qui va nous être utile.

D'après la formule de Moivre, $\cos(nx) = \mathrm{Re}\left((\cos(x) + i\sin(x))^n\right)$. Or, d'après le binôme de Newton,

$$(\cos(x) + i\sin(x))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x)$$

Or, $i^2 = -1$ si bien que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad i^{2p} = (-1)^p \qquad \text{et} \qquad i^{2p+1} = (-1)^p \times i$$

Finalement :

$$\begin{aligned}
\cos(nx) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x)\right) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k \times \sin^k(x) \times \cos^{n-k}(x) \\
&= \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} \binom{n}{2p} i^{2p} \times \sin^{2p}(x) \times \cos^{n-2p}(x) \\
&= \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} \binom{n}{2p} (-1)^p \times \sin^{2p}(x) \times \cos^{n-2p}(x)
\end{aligned}$$

Les termes pour k impair sont imaginaires purs.

On aurait aussi pu écrire $\displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}$.

De plus, si on cherche uniquement des cosinus, on peut écrire :

$$\cos(nx) = \sum_{0 \leqslant 2p \leqslant n} \binom{n}{2p} (-1)^p \times (1 - \cos^2(x))^p \times \cos^{n-2p}(x)$$

et on peut faire pareil pour le sinus. On vient en particulier de prouver qu'il existe une fonction T_n polynomiale telle que, pour tout x, $\cos(nx) = T_n(\cos(x))$. La fonction T_n est appelée fonctions polynomiale de Tchebychev de première espèce : cf. chapitre 19.

Après l'exercice 35 du chapitre 5 : Tchebychev, stage two.

IV.3 Méthode de l'angle moitié.

La méthode de l'angle moitié consiste à factoriser par $e^{i\theta/2}$ quand on a une expression de la forme $\pm 1 \pm e^{i\theta}$, ce qui donne :

$$\pm 1 \pm e^{i\theta} = e^{i\theta/2} \times \left(\pm e^{-i\theta/2} \pm e^{i\theta/2}\right)$$

On factorise par l'exponentielle de la moitié de ce qu'il y a déjà dans l'exponentielle, donc par l'exponentielle de la moitié de l'angle : d'où le nom de la méthode.

et ensuite on utilise les formules d'Euler. On peut utiliser cette méthode pour factoriser les quantités de la forme $\pm e^{ip} \pm e^{iq}$: on factorise par e^{ip} et on appliquer la formule de l'angle moitié, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\pm e^{ip} \pm e^{iq} &= e^{ip} \times \left(\pm 1 \pm e^{i(q-p)}\right) \\
&= e^{ip} \times e^{i(q-p)/2} \left(\pm e^{-i(q-p)/2} \pm e^{i(q-p)/2}\right) \\
&= e^{i(q+p)/2} \left(\pm e^{-i(q-p)/2} \pm e^{i(q-p)/2}\right)
\end{aligned}$$

Plutôt que d'apprendre des formules qu'on risque de mal donner le jour J, il suffit de retenir ce qui précède et de continuer ensuite au cas par cas.

On risque de s'embrouiller avec les signes...

Activité : retour aux formules de trigo. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Utilisons ce qui précède pour retrouver $\cos(a) - \cos(b)$.

$$\begin{aligned}\cos(a)-\cos(b) &= \operatorname{Re}\left(e^{ia}\right)-\operatorname{Re}\left(e^{ib}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(e^{ia}-e^{ib}\right)\end{aligned}$$

Or, en utilisant la méthode de l'angle moitié :

$$\begin{aligned}e^{ia}-e^{ib} &= e^{ia}\times\left(1-e^{i(b-a)}\right)\\ &= e^{ia}\times e^{i(b-a)/2}\times\left(e^{-i(b-a)/2}-e^{-i(b-a)/2}\right)\\ &= e^{i(a+b)/2}\times -2i\sin\left(\frac{b-a}{2}\right)\\ &= \left(\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)+i\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\times 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\end{aligned}$$

Il y a un $-$ car, dans la formule d'Euler, on a $e^{i\theta}-e^{-i\theta}$, et ici on a $e^{-i\cdots}-e^{i\cdots}$.

par imparité du sinus. Finalement, en prenant la partie réelle, on retrouve le résultat connu :

$$\cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Activité : somme de sinus et de cosinus. Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{R}$. Calculons $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $T_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$.

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=0}^{n}\operatorname{Re}\left(e^{ikx}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $S_n=\operatorname{Re}(U_n)$ où $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}$. De même, $T_n=\operatorname{Im}(U_n)$. Or, $U_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ix}\right)^k$ et : $e^{ix}=1\iff x\equiv 0[2\pi]$.

- Premier cas : $x\equiv 0[2\pi]$. Alors $U_n=(n+1)$ donc $S_n=n+1$ et $T_n=0$.
- Deuxième cas : $x\not\equiv 0[2\pi]$.

$$\begin{aligned}U_n &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}\\ &= \frac{e^{i(n+1)x/2}\times\left(e^{-i(n+1)x/2}-e^{i(n+1)x/2}\right)}{e^{ix/2}\times\left(e^{-ix/2}-e^{ix/2}\right)}\\ &= e^{inx/2}\times\frac{-2i\sin((n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)}\\ &= e^{inx/2}\times\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}\end{aligned}$$

Finalement :

$$S_n=\cos\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\qquad\text{et}\qquad T_n=\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

V ArgumentS d'un complexe non nul

V.1 Généralités

Lemme. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $\dfrac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Méthode classique : pour qu'un élément (non nul) soit de norme 1, diviser par sa norme. Vous ferez ça souvent en deuxième année !

Démonstration. Il suffit de voir que $\left|\dfrac{z}{|z|}\right| = \dfrac{1}{|z|} \times |z| = 1$.

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On dit que θ est **un** argument de z si $e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}$.

Remarques :

- 0 n'a par définition aucun argument.
- D'après la proposition précédente, la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ étant surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$, tout complexe non nul admet au moins un argument.

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Soit $\theta_1 \in \mathbb{R}$ un argument de z. Soit $\theta_2 \in \mathbb{R}$. Alors θ_2 est un argument de z si et seulement si $\theta_2 \equiv \theta_1 [2\pi]$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\theta_2 \text{ est un argument de } z \quad & \iff \quad e^{i\theta_2} = \frac{z}{|z|} \\
& \iff \quad e^{i\theta_2} = e^{i\theta_1} \\
& \iff \quad e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 1 \\
& \iff \quad \theta_2 - \theta_1 \equiv 0[2\pi]
\end{aligned}$$

Car θ_1 est un argument de z.

□

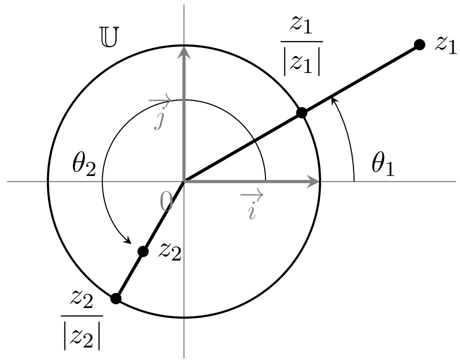
ce qui donne le résultat voulu.

Remarques :

- Il en découle que tout complexe $z \in \mathbb{C}^*$ admet une infinité d'arguments qui diffèrent les uns des autres d'un multiple entier de 2π. En particulier, z admet un unique argument dans $]-\pi\,;\pi]$ appelé argument principal. Plus généralement, z admet un unique argument dans tout intervalle semi-ouvert de longueur 2π.
- Puisque tout complexe non nul z admet une infinité d'arguments, on ne parlera jamais de l'argument de z mais d'**un** argument de z.
- Selon les sources, la notation $\arg(z)$ peut désigner :
  - ⋆ un argument de z (lequel, on ne sait pas).
  - ⋆ l'argument principal de z.
  - ⋆ l'ensemble des arguments de z, c'est-à-dire que $\arg(z) = \left\{\theta \in \mathbb{R} \,\middle|\, e^{i\theta} = \dfrac{z}{|z|}\right\}$.

  Pour éviter toute confusion, on évitera cette notation et on se contentera de dire : soit θ un argument de z.

Interprétation géométrique : Si $z \in \mathbb{C}$, un argument de z est l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{OM_z}$ (avec M_z le point d'affixe z) avec l'axe des abscisses.



Proposition. Soient z_1 et z_2 deux complexes non nuls et soient θ_1 et θ_2 des arguments de z_1 et z_2, respectivement.

1. $\theta_1+\theta_2$ est un argument de $z_1\times z_2$.
2. $\theta_1-\theta_2$ est un argument de z_1/z_2.
3. $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
4. Si $\theta_1\equiv\theta_2[2\pi]$, alors θ_1 est un argument de z_1+z_2.
5. $z_1\in\mathbb{R}_+^* \iff \theta_1\equiv 0[2\pi]$.
6. $z_1\in\mathbb{R}_-^* \iff \theta_1\equiv \pi[2\pi]$.
7. $z_1\in\mathbb{R}^* \iff \theta_1\equiv 0[\pi]$.
8. $z_1\in i\mathbb{R} \iff \theta_1\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

En d'autres termes, quand deux complexes ont les mêmes arguments, leur somme est non nulle et a les mêmes arguments qu'eux. Il n'y a pas de formule générale pour un argument de z_1+z_2, déjà parce que, dans le cas général, z_1+z_2 peut être nul donc ne pas admettre d'argument. Une seule solution : le cas par cas, et le faire à la main.

DÉMONSTRATION.

1.
$$\begin{aligned} e^{i(\theta_1+\theta_2)} &= e^{i\theta_1}\times e^{i\theta_2}\\ &= \frac{z_1}{|z_1|}\times\frac{z_2}{|z_2|}\\ &= \frac{z_1\times z_2}{|z_1\times z_2|}\end{aligned}$$

2. exo.
3. exo.
4. Tout d'abord,
$$\begin{aligned} |z_1+z_2| &= \left|e^{i\theta_1}\times|z_1|+e^{i\theta_2}\times|z_2|\right|\\ &= \left|e^{i\theta_1}\times|z_1|+e^{i\theta_1}\times|z_2|\right|\\ &= \left|e^{i\theta_1}\times(|z_1|+|z_2|)\right|\\ &= |z_1|+|z_2|\end{aligned}$$
car $|e^{i\theta}|=1$ et car $|z_1|+|z_2|$ est un réel positif. Ensuite :
$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= e^{i\theta_1}\times|z_1|+e^{i\theta_2}\times|z_2|\\ &= e^{i\theta_1}\times|z_1|+e^{i\theta_1}\times|z_2|\\ &= e^{i\theta_1}\times(|z_1|+|z_2|)\\ &= e^{i\theta_1}\times|z_1+z_2|\end{aligned}$$

Nous venons de prouver que, si z_1 et z_2 ont les mêmes arguments, alors il y a égalité dans l'inégalité triangulaire. Nous généraliserons ce résultat dans le paragraphe V.3.

5.
$$\begin{aligned} z_1\in\mathbb{R}_+^* &\iff z_1=|z_1|\\ &\iff |z_1|e^{i\theta_1}=|z_1|\\ &\iff e^{i\theta_1}=1\\ &\iff \theta_1\equiv 0[2\pi]\end{aligned}$$
$\square$

Le reste : exo.

V.2 Écriture exponentielle d'un complexe

Remarque : Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $r = |z|$. Soit θ un argument de z. Par définition d'un argument, $z = re^{i\theta}$.

Définition. Avec les notations ci-dessus, l'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z.

Remarques :

- Les écritures $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z = x + iy$ sont respectivement appelées écriture trigonométrique et écriture algébrique de z.
- 0 n'admet pas d'écriture exponentielle ou trigonométrique car n'admet pas d'argument. En revanche, il admet une écriture algébrique.
- L'écriture algébrique est unique (cf. paragraphe II.1). Il n'y a pas unicité de l'écriture exponentielle, mais « presque ».

La forme trigonométrique est juste une réécriture de la forme exponentielle. Quand on fera un exercice, on se demandera toujours quelle est la forme la plus adaptée : la forme algébrique ou la forme exponentielle ? La première est plus adaptée pour des sommes, la seconde pour des produits ou des calculs de puissances.

Proposition. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On suppose qu'il existe un réel $A > 0$ et un réel α quelconque tels que $z = Ae^{i\alpha}$. Alors $A = |z|$ et α est un argument de z.

Démonstration. $|z| = |A| \times |e^{i\alpha}| = A$ car $A \in \mathbb{R}_+^*$ et car $|e^{i\alpha}| = 1$. De plus :

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \frac{z}{A} \\ &= \frac{z}{|z|} \end{aligned}$$

□

donc α est un argument de z.

Remarque : En particulier : si $z = r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2}$ avec r_1 et r_2 **strictement positifs**, alors $r_1 = r_2 = |z|$ et θ_1 et θ_2 sont des arguments de z donc $\theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi]$. Il en découle que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $r > 0$ et un unique $\theta \in \,]-\pi\,;\pi\,]$ tels que $z = re^{i\theta}$. En d'autres termes, l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi\,;\pi\,] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r, \theta) & \longmapsto & re^{i\theta} \end{array} \right.$$

est bijective

De la même façon que lorsqu'on écrit $z = x + iy$, x et y désignent des réels (cf. paragraphe II.1) et plus précisément la partie réelle et la partie imaginaire de z, dans la suite, quand on écrira « Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ », cela signifiera : « Soit $z \in \mathbb{C}^*$, soit $r = |z| > 0$ et soit θ un argument de z ».

Remarque : ⚠ r doit être strictement positif ! Par exemple, si $x \in \mathbb{R}_-^*$, alors la forme exponentielle de x n'est pas $xe^{i \times 0}$ (ça c'est pour les réels strictement positifs) mais bien $(-x) \times e^{i\pi}$.

Question : Comment passer de la exponentielle à la forme algébrique, et réciproquement ? Pour passer de la forme exponentielle à la forme algébrique, il suffit de développer.

Exemple : $\sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 1 + i$.

Dans le sens inverse, c'est-à-dire si on a l'écriture $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$, calculer $r = |z|$ ne pose aucune difficulté, et si on reprend les notations précédentes, alors $z = |z| \times (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ donc :

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Il suffit ensuite de trouver une valeur de θ qui convienne (quitte à utiliser les fonctions Arctan, Arcsin ou Arccos si on ne retombe pas sur une valeur connue, mais attention aux domaines de définition et aux ensembles d'arrivée de ces fonctions !).

cf. chapitre 5, paragraphe V.

Exemple : Donner la forme exponentielle de $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Tout d'abord, $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\theta \text{ est un argument de } z \quad &\iff \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \\
&\iff \quad \cos(\theta) = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\iff \quad \theta \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]
\end{aligned}$$

Finalement, $-1 - i\sqrt{3} = 2e^{-2i\pi/3}$.

Exemple : Donner la forme exponentielle de $z = 3 - 5i$.

Tout d'abord, $|z| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\theta \text{ est un argument de } z \quad &\iff \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|} \\
&\iff \quad \cos(\theta) = \frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = -\frac{5}{\sqrt{34}} \\
&\iff \quad \theta \equiv \mathrm{Arcsin}\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = -\mathrm{Arcsin}\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)[2\pi]
\end{aligned}$$

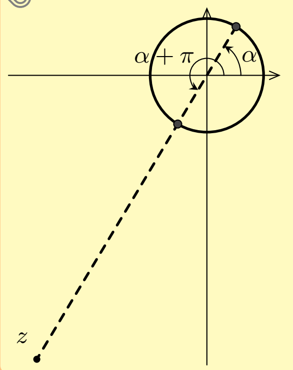
En effet, $\mathrm{Arcsin}\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}\right)$ est l'unique réel θ dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(\theta) = \frac{-5}{34}$, et alors $\cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)}$ (car $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ donc $\cos(\theta) \geqslant 0$) ce qui donne le résultat. Finalement, $3 - 5i = \sqrt{34} \times e^{-i\,\mathrm{Arcsin}(5/\sqrt{34})}$.

Et là, ça ne tombe pas juste : on va utiliser la fonction Arcsin ou la fonction Arccos. Rappelons que la fonction Arccos est la réciproque de la restriction du cos à $[0\,;\pi]$ et que la fonction Arcsin est la réciproque de la restriction du sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Il faut d'abord commencer par dire à quel intervalle peut appartenir θ : si θ convient, alors il appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ (modulo 2π) car son cosinus est négatif et son sinus positif : on pense donc plutôt à de l'Arcsin.

Exemple : Donner la forme exponentielle de $z = -3 - 5i$. On arrive de même à :

$$\theta \text{ est un argument de } z \iff \cos(\theta) = -\frac{3}{\sqrt{34}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = -\frac{5}{\sqrt{34}}$$

Le problème est que les θ qui conviendront sont dans $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ modulo 2π donc ne sont ni dans le domaine image de l'Arccos ni de l'Arcsin. Il suffit de multiplier les images par -1 pour se ramener à un intervalle sur lequel on pourra utiliser ces fonctions : soit $\alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$. Alors $\cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{34}}$ et $\sin(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{34}}$ donc $\cos(\alpha+\pi) = \frac{-3}{\sqrt{34}}$ et $\sin(\alpha+\pi) = \frac{-5}{\sqrt{34}}$. Finalement, θ est un argument de z si et seulement si $\theta \equiv \alpha + \pi[2\pi]$ si bien que $-3 - 5i = \sqrt{34}e^{i(\pi + \mathrm{Arccos}(3/\sqrt{34}))}$.



V.3 Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (semi HP)

Définition.

- On dit que deux complexes z_1 et z_2 sont positivement colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou tel que $z_2 = \lambda z_1$.
- Une famille de complexe est positivement colinéaire si les éléments de cette famille sont positivement colinéaires deux à deux.

Proposition. Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$.

- Si $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$, alors z_1 et z_2 sont positivement colinéaires.

- Si $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$, alors :

$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont positivement colinéaires} &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, z_1 = \lambda z_2 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, z_2 = \lambda z_1 \end{aligned}$$

Démonstration. Si $z_1 = 0$ alors $z_1 = 0 \times z_2$ donc z_1 et z_2 sont positivement colinéaires, de même dans l'autre cas. Supposons à présent z_1 et z_2 non nuls.

Par définition, s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $z_1 = \lambda z_2$, alors z_1 et z_2 sont positivement colinéaires. Réciproquement, supposons que z_1 et z_2 soient positivement colinéaires : il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou $z_2 = \lambda z_1$.

Dans le premier cas, $\lambda \neq 0$ car $z_1 \neq 0$. Dans le deuxième cas, $\lambda \neq 0$ car $z_2 \neq 0$ donc $z_1 = (1/\lambda) z_2$ avec $1/\lambda > 0$. Dans tous les cas, on a le résultat voulu. Par symétrie des rôles, on a la deuxième équivalence.

Corollaire. Une famille de complexes est positivement colinéaire si et seulement si les éléments non nuls de cette famille forment une famille positivement colinéaire.

Démonstration. Une sous-famille d'une famille positivement colinéaire est positivement colinéaire par définition, et le vecteur nul étant positivement colinéaire à tout vecteur, en rajoutant des complexes nuls à une famille positivement colinéaire, elle reste positivement colinéaire.

Proposition. Une famille de complexes est positivement colinéaire si et seulement si les éléments non nuls de cette famille ont les mêmes arguments.

Démonstration. D'après le corollaire, il suffit de prouver qu'une famille de complexes non nuls est positivement colinéaire si et seulement si ses éléments ont les mêmes arguments. De plus, puisqu'une famille est positivement colinéaire si et seulement si ses éléments le sont deux à deux, il suffit de prouver que deux complexes non nuls sont positivement colinéaires si et seulement si ils ont les mêmes arguments.

Soient donc z_1 et z_2 deux complexes non nuls, soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. Alors $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de z_1/z_2 donc :

$$\begin{aligned} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont positivement colinéaires} &\iff \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}_{+*} \\ &\iff \theta_1 - \theta_2 \equiv 0[2\pi] \\ &\iff \theta_1 \equiv \theta_2[2\pi] \end{aligned}$$ □

Proposition ci-dessus.

ce qui permet de conclure.

Théorème (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire). Soit $n \geqslant 2$ et soit $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^n |z_k|$ si et seulement si les z_k sont positivement colinéaires, si et seulement si les z_k non nuls ont les mêmes arguments.

Seul le cas $n = 2$ est au programme : il y a égalité pour deux complexes z_1 et z_2 si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$ (ou le contraire).

Démonstration. D'après ce qui précède, il suffit de prouver la deuxième équivalence. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \geqslant 2$, notons H_n : « $\forall (z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n, \left|\displaystyle\sum_{k=1}^n z_k\right| = \displaystyle\sum_{k=1}^n |z_k|$ si et seulement si les z_k ont les mêmes arguments. ».

- Soient z_1 et z_2 non nuls, soient θ_1 et θ_2 des arguments respectifs de z_1 et z_2. L'inégalité triangulaire résulte des deux inégalités $\operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) \leqslant |\operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2})| \leqslant |z_1 \times \overline{z_2}|$. Ainsi, on a égalité si et seulement si ces deux inégalités sont des égalités. La première est une égalité si et seulement si $\operatorname{Re}(z_1 \times \overline{z_2}) \in \mathbb{R}_+$ (un réel est égal à sa valeur absolue si et seulement s'il est positif) et la deuxième si et seulement si $z_1 \times \overline{z_2} \in \mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| & \iff z_1 \times \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+ \\ & \iff z_1 \times \overline{z_2} \in \mathbb{R}_+^* \\ & \iff \theta_1 - \theta_2 \equiv 0[2\pi] \\ & \iff \theta_1 \equiv \theta_2[2\pi] \end{aligned}$$

z_1 et z_2 sont non nuls.

En d'autres termes, H_2 est vraie.

- Soit $n \geqslant 2$. Supposons H_2 vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soient donc $z_1, \dots, z_{n+1}$ des complexes non nuls.

Supposons qu'il existe θ un argument commun à $z_1, \dots, z_{n+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| & = \left|\sum_{k=1}^{n+1} |z_k| e^{i\theta}\right| \\ & = \left|e^{i\theta} \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|\right| \\ & = \left|\sum_{k=1}^{n+1} |z_k|\right| \\ & = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| \end{aligned}$$

$|e^{i\theta}| = 1$

Car cette somme est un réel positif.

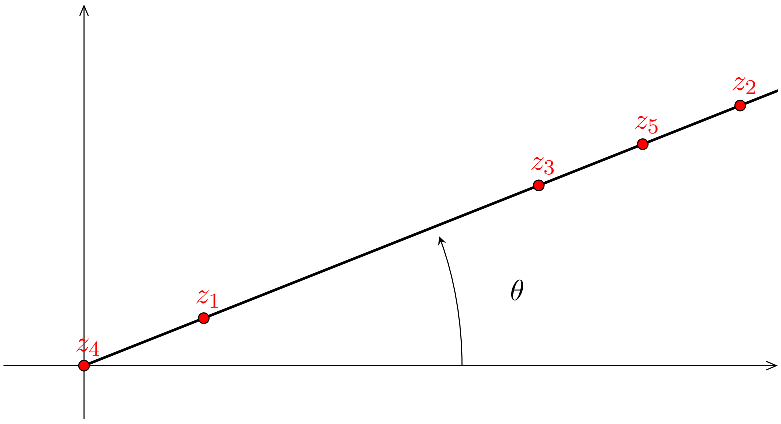
Réciproquement, supposons que $\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$. D'après l'inégalité triangulaire :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} z_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} z_k + z_{n+1}\right| \underbrace{\leqslant}_{1} \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| + |z_{n+1}| \underbrace{\leqslant}_{2} \sum_{k=1}^{n} |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

□

Ainsi, 1 et 2 sont des égalités. Puisque 2 est une égalité, par hypothèse de récurrence, il existe θ un argument commun à $z_1, \dots, z_n$. θ est donc un argument de $\sum_{k=1}^{n} z_k$ (quand des complexes ont les mêmes arguments, leur somme également). De plus, 1 est une égalité donc, H_2 étant vraie, cette somme et z_{n+1} ont les mêmes arguments donc θ est aussi un argument de z_{n+1}, ce qui permet de conclure.

Interprétation géométrique : Il y a égalité si et seulement si tous les z_k sont sur une même demi-droite issue de 0. Cela se voit bien pour deux points (cf. paragraphe III.2 pour le dessin) : il y a égalité si et seulement si le triangle est plat !

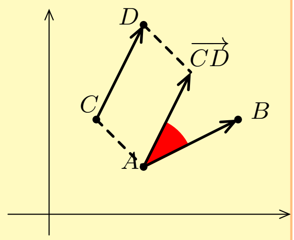


V.4 Extension aux vecteurs, conditions d'alignement et d'orthogonalité

Proposition. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$. On note A l'image de a, B l'image de b etc.

- Géométriquement, la quantité $\left|\dfrac{d-c}{b-a}\right|$ est égal au quotient de deux longueurs $\dfrac{CD}{AB}$.
- Géométriquement, un argument de $\dfrac{d-c}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

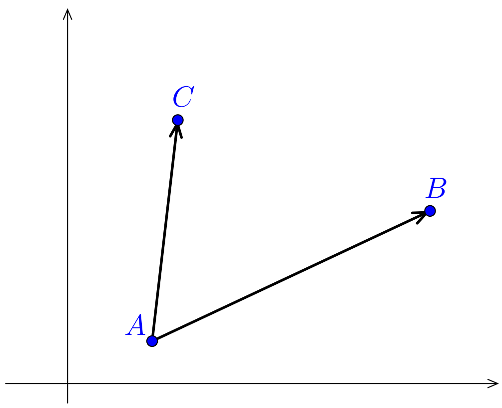
Avec les mains : l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ est l'angle obtenu en « faisant partir les deux vecteurs du même point » et en allant de $\overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{CD}$.



Démonstration. Découle de l'interprétation géométrique du module comme distance, et du fait que l'interprétation géométrique de l'argument d'un complexe z est l'angle formé par le vecteur $\overrightarrow{OM_z}$ avec l'axe des abscisses : quand on fait le quotient, on soustrait les arguments, et une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{CD})$ moins une mesure de l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$ donne une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Corollaire. Soient a, b, c trois complexes, avec $a \neq b$ et $a \neq c$. Soit θ un argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$. Alors, géométriquement, θ est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$. En particulier :

- A, B, C sont alignés $\iff \theta \equiv 0[\pi] \iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux $\iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi] \iff \dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.



Exemple : Donner l'ensemble des complexes z tel que le triangle z, z^2 et z^3 soit rectangle en z.

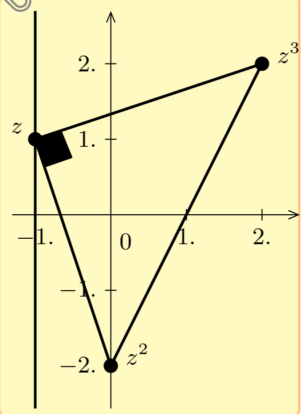
Notons M_1, M_2, M_3 les points d'affixes z, z^2 et z^3 respectivement. Les trois points sont confondus si $z = 0$ ou $z = 1$: on peut alors considérer que le triangle est rectangle (par convention). On suppose dans la suite que $z \neq 0$ et $z \neq 1$.

$$
\begin{aligned}
\text{Le triangle est rectangle en } z &\iff \overrightarrow{M_1M_2} \text{ et } \overrightarrow{M_1M_3} \text{ sont orthogonaux}\\
&\iff \frac{z^3-z}{z^2-z} \in i\mathbb{R}\\
&\iff \frac{z^2-1}{z-1} \in i\mathbb{R}\\
&\iff z+1 \in i\mathbb{R}\\
&\iff \mathrm{Re}(z+1) = 0\\
&\iff \mathrm{Re}(z) = -1
\end{aligned}
$$

Car $z \neq 0$.

Car $z - 1 \neq 0$.

Finalement, l'ensemble des complexes z tels que z, z^2, z^3 soit rectangle en z est la droite verticale d'équation $x = -1$ (à laquelle on rajoute 0 et 1). Ci-contre un dessin pour $z = -1 + i$.



VI Racines n-ièmes

On se donne dans cette partie un entier $n \geqslant 1$.

VI.1 Cas général

Définition. Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $y \in \mathbb{C}$ est une racine n-ième de z si $y^n = z$.

Remarque : Si $n = 2$, on dit que y est une racine carrée de z ; si $n = 3$, on dit que y est une racine cubique de z.

Exemple : $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$. En d'autres termes, $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$ sont deux racines carrées de i.

Remarque : Si $x \in \mathbb{R}_+$, il existe deux réels opposés dont le carré vaut x, et on **choisit** d'appeler $\sqrt{x}$ celui de ces deux réels qui est positif. Plus généralement, si $x \in \mathbb{R}_+$, on choisit de noter $\sqrt[n]{x}$ l'unique réel positif y tel que $y^n = x$. Cependant, sur $\mathbb{C}$, parler de complexe positif ou, plus généralement, de complexe plus grand qu'un autre n'a pas de sens (sauf si on manipule des réels) : par exemple, qui est le plus grand entre $1-i$ et $-1+i$? Pour cette raison, ce qui nous permettait de faire un choix parmi les racines carrées ou les racines n-ièmes (réelles) de $x \in \mathbb{R}_+$ n'est plus valable sur $\mathbb{C}$, aucune racine ne se distingue par rapport aux autres, et donc la notation $\sqrt[n]{z}$ est interdite (sauf, encore une fois, lorsque z est un réel positif). On dira donc : « soit y une racine carrée de z » ou « soit y tel que $y^2 = z$ » mais jamais « soit $y = \sqrt{z}$ ».

Bon, on peut définir un ordre sur $\mathbb{C}$, cf. chapitre 16, mais ce serait tout de même assez artificiel de s'en servir dans le problème qui nous intéresse.

Remarque : Si $z = 0$, alors z n'a qu'une seule racine n-ième : lui-même. On s'intéressera donc uniquement au cas $z \neq 0$ dans la suite.

Théorème. Soit $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Les racines n-ièmes de z sont exactement les complexes

$$y_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, \qquad k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$$

En particulier, tout complexe non nul admet exactement n racines n-ièmes distinctes.

Aucun problème pour la notation $\sqrt[n]{\ }$ ici : r est un réel strictement positif !

Remarque : Si $n = 2$, alors les deux racines carrées de z sont $y_0 = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ et

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{r}e^{i(\theta/2+\pi)} \\ &= y_0 \times e^{i\pi} \\ &= -y_0 \end{aligned}$$

En particulier, tout complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.

DÉMONSTRATION. 0 n'est pas racine n-ième de z car $z \neq 0$. Soit $y = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$.

$$\begin{aligned} y^n = z &\iff \rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta} \\ &\iff \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad n\varphi \equiv \theta[2\pi] \\ &\iff \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \varphi \equiv \frac{\theta}{n}\left[\frac{2\pi}{n}\right] \\ &\iff \rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{et} \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{aligned}$$

Cas d'égalité de la forme exponentielle, cf. paragraphe V.2.

Les racines n-ièmes de z sont donc les complexes de la forme $\sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$,avec $k \in \mathbb{Z}$. Cherchons, parmi ces racines, lesquelles sont égales. Si $k \in \mathbb{Z}$, notons $y_k = \sqrt[n]{r}e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$. Soit $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2$.

$$\begin{aligned} y_{k_1} = y_{k_2} &\iff \frac{\theta}{n} + \frac{2k_1\pi}{n} \equiv \frac{\theta}{n} + \frac{2k_2\pi}{n}[2\pi] \\ &\iff k_1 \equiv k_2[n] \end{aligned}$$

□

Par conséquent, $y_0, \dots, y_{n-1}$ sont distinctes et, si $k \in \mathbb{Z}$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0\,;n-1]\!]$ tels que $k = nq + r$ donc $y_k = y_r$ car $k \equiv r[n]$. En conclusion, $y_0, \dots, y_{n-1}$ sont distinctes et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $r \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $y_k = y_r$: les racines n-ièmes de z sont donc exactement $y_0, \dots, y_{n-1}$, et celles-ci sont distinctes donc z admet exactement n racines n-ièmes.

Par exemple, $y_{n+1} = y_1$ et $y_{n+2} = y_2$: seule compte la congruence modulo n. Ce sera encore plus frappant avec les racines de l'unité dans le paragraphe suivant.

Exemple : $-2 = 2e^{i\pi}$ donc les racines quatrièmes de -2 sont $\sqrt[4]{2}e^{i\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{3i\pi/4}$, $\sqrt[4]{2}e^{5i\pi/4}$ et $\sqrt[4]{2}e^{7i\pi/4}$. Nous donnerons l'interprétation géométrique de ce résultat dans le paragraphe suivant.

VI.2 Cas particulier des racines de l'unité

VI.2.a Cas général

Définition. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On dit que ω est une racine n-ième de l'unité si $\omega^n = 1$.

Théorème. Les racines n-ièmes de l'unité sont exactement les

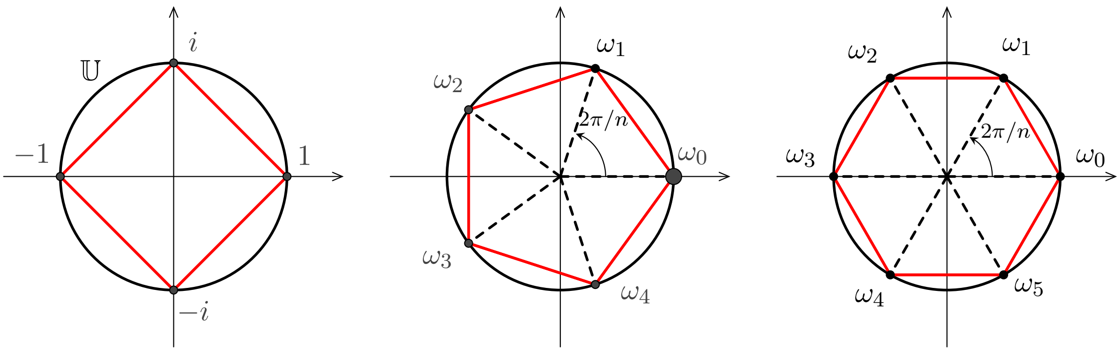
$$\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \qquad k \in [\![0\,;n-1]\!]$$

Avec des quantificateurs : ω est une racine n-ième de l'unité $\iff \exists k \in [\![0\,;n-1]\!], \omega = e^{2ik\pi/n}$.

Remarque : Si $k = 0$, on trouve $\omega_0 = 1 = e^{2i\pi} = e^{2i\pi/n}$. Ainsi, on pourra écrire également que les racines n-ièmes de l'unité sont les ω_k, pour $k \in [\![1\,;n]\!]$. Encore une fois, seule compte la congruence modulo n !

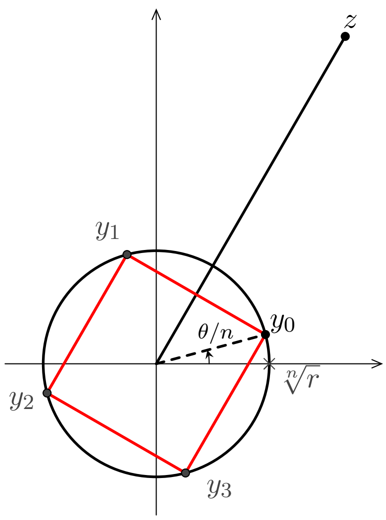
Interprétation géométrique : Les racines n-ièmes de l'unité « partagent le cercle unité $\mathbb{U}$ en n parts égales d'angle $2\pi/n$ » et forment donc un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique/le cercle unité.

Pas comme Obélix, donc...



$n=4$ $n=5$ $n=6$

On peut à présent donner l'interprétation géométrique des racines n-ièmes d'un complexe $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ quelconque.



On prend la racine n-ième du module, on divise θ par n pour obtenir une racine n-ième. On obtient ensuite les autres par rotation d'angle $2\pi/n$, c'est-à-dire que les racines n-ièmes de z forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et qui « débute » en la première racine, c'est-à-dire $y_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\theta/n}$.

Exemples :

- Les racines carrées de l'unité sont 1 et -1.
- Les racines quatrièmes de l'unité sont 1, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{3i\pi/2} = -i$.
- 1 est une racine n-ième de l'unité pour tout n. En revanche, -1 est une racine n-ième de l'unité si et seulement si n est pair (voir le cas $n = 3$ dans le paragraphe suivant).
- Si n est impair, 1 est la seule racine n-ième de l'unité réelle, et si n est pair, 1 et -1 sont les seules racines n-ièmes de l'unité réelles.

Proposition. Soit ω une racine n-ième de l'unité.

- On a successivement $\omega^{n+1} = \omega, \omega^{n+2} = \omega^2$, $\omega^{n+3} = \omega^3$ etc. Plus généralement, si $k_1 \equiv k_2[n]$, alors $\omega^{k_1} = \omega^{k_2}$.
- Si $\omega \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.

Si on ajoute ou enlève n, on parcourt le cercle dans un sens ou dans l'autre, et donc la valeur de la puissance de ω ne change pas : nous dirons dans le chapitre 18 que $\mathbb{U}_n$ est cyclique. Par conséquent, pour connaître ω^k, il suffit de connaître la congruence de k modulo n.

Démonstration. Il suffit d'utiliser le fait que $\omega^n = 1$. De plus, si $\omega \neq 1$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{1-\omega^n}{1-\omega} = 0$ car $\omega \neq 1$.

Exemple : Résoudre l'équation (d'inconnue $z \in \mathbb{C}$) : $(z+i)^n = (z-i)^n$.

Soit $z \in \mathbb{C}$. i n'est pas solution (car $(2i)^n \neq 0$) : on peut donc supposer $z \neq i$.

$$\begin{aligned}
(z+i)^n = (z-i)^n &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{z+i}{z-i} \text{ est une racine } n\text{-ième de l'unité.} \\
&\iff \exists k \in [\![0 \,;\, n-1]\!], \qquad \frac{z+i}{z-i} = e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0 \,;\, n-1]\!], \qquad z+i = (z-i)e^{2ik\pi/n} \\
&\iff \exists k \in [\![0 \,;\, n-1]\!], \qquad z\left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) = i \times \left(-1 - e^{2ik\pi/n}\right)
\end{aligned}$$

> Méthode à retenir : se ramener à une équation du type « machin$^n = 1$ ». Machin sera alors une racine de l'unité.

Si $k = 0$, alors le membre de gauche vaut 0 et celui de droite vaut 0 : $k = 0$ n'est pas solution. On peut donc supposer $k \neq 0$ si bien que $1 - e^{2ik\pi/n} \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(z+i)^n = (z-i)^n &\iff \exists k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], \qquad z\left(1 - e^{2ik\pi/n}\right) = i \times \left(-1 - e^{2ik\pi/n}\right) \\
&\iff \exists k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], \qquad z = i \times \frac{-1 - e^{2ik\pi/n}}{1 - e^{2ik\pi/n}} \\
&\iff \exists k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], \qquad z = i \times \frac{e^{ik\pi/n} \times \left(-e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}\right)}{e^{ik\pi/n} \times \left(e^{-ik\pi/n} - e^{ik\pi/n}\right)} \\
&\iff \exists k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], \qquad z = i \times \frac{-2\cos(k\pi/n)}{-2i\sin(k\pi/n)} \\
&\iff \exists k \in [\![1 \,;\, n-1]\!], \qquad z = \frac{\cos(k\pi/n)}{\sin(k\pi/n)}
\end{aligned}$$

> Il faut résister à l'envie d'écrire $1/\tan(k\pi/n)$: il peut y avoir un problème de définition car $k\pi/n$ peut être égal à $\pi/2$ (par exemple si $n = 4$ et $k = 2$), même si ce n'est pas très grave car alors on pourrait poser par convention « $1/\pm\infty = 0$ ». On pourrait écrire $\text{cotan}(k\pi/n)$ (cf. exercice 5 du chapitre 5) mais la cotangente est hors programme.

VI.2.b j

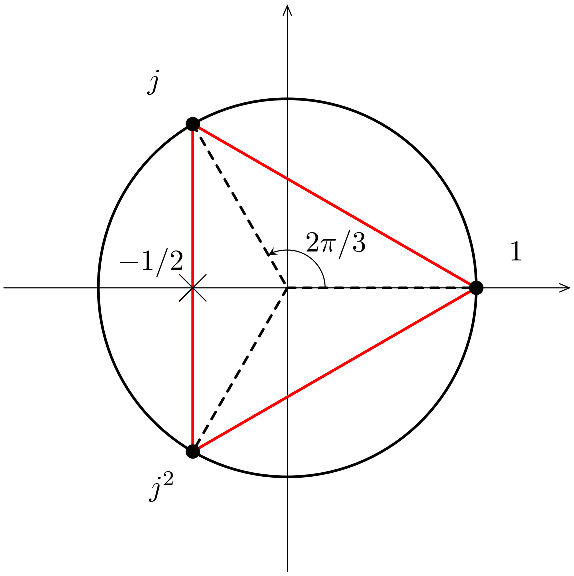
Définition. On pose $j = e^{2i\pi/3} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$. C'est une racine cubique de l'unité.

Remarque : On évitera donc de prendre j comme indice de sommation quand on manipulera des complexes.

Proposition.
- $j^3 = 1, j^4 = j, j^5 = j^2, j^6 = 1$ etc. Plus généralement, si $k_1 \equiv k_2[3]$ alors $j^{k_1} = j^{k_2}$.
- $1 + j + j^2 = 0$, $1 + j = -j^2$, $1 + j^2 = -j$ etc.
- Les trois racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2.
- $j^2 = \overline{j} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

DÉMONSTRATION. $\rightsquigarrow$ EXERCICE.

Interprétation géométrique :



VI.2.c $\mathbb{U}_n$

Définition. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition. $\mathbb{U}_n$ est un ensemble à n éléments qui est stable par produit, par inverse et par conjugaison.

En particulier, puisque $1 \in \mathbb{U}_n$, $\mathbb{U}_n$ est un groupe à n éléments pour le produit (cf. chapitre 18).

Démonstration. Soit $(z_1, z_2) \in {\mathbb{U}_n}^2$. Alors

$$\begin{aligned}(z_1 z_2)^n &= {z_1}^n {z_2}^n \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$ □

c'est-à-dire que $z_1 z_2 \in U_n$: $\mathbb{U}_n$ est stable par produit. Le reste est laissé en exo.

Remarque : ⚠ $\mathbb{U}_n$ n'est pas stable par somme. Par exemple, $1 + 1 = 2 \notin \mathbb{U}_n$. En effet, une racine n-ième de l'unité est de module 1 (réciproque fausse, cf. exercice 68).

Proposition. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{U}_d \subset \mathbb{U}_n \iff d|n$.

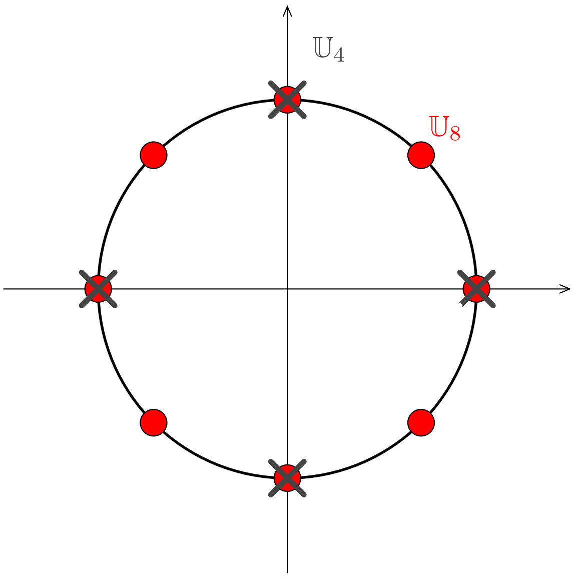
⚠ Avoir $d \leqslant n$ ne suffit pas ! Nous montrerons dans le chapitre 18 que les seuls sous-groupes de $\mathbb{U}_n$ sont les $\mathbb{U}_d$ avec d divisant n.

Démonstration. Supposons que d divise n. Alors $n/d \in \mathbb{N}$: on peut donc parler de puissance n/d (rappelons que, même si on a défini des racines n-ièmes, on ne peut parler que de puissance entières). Soit $z \in \mathbb{U}_d$.

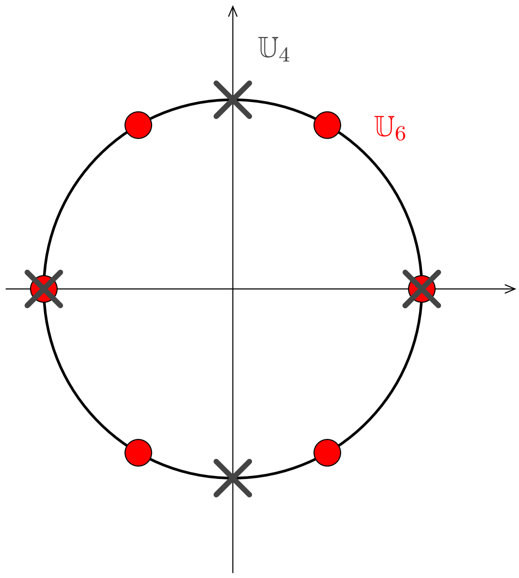
$$\begin{aligned}z^n &= \left(z^d\right)^{n/d} \\ &= 1^{n/d} \\ &= 1\end{aligned}$$ □

donc $z \in \mathbb{U}_n$. D'où l'inclusion voulue. Réciproquement, supposons que d ne divise pas n. Soit $\omega = e^{2i\pi/d}$. Alors $\omega^n = e^{2in\pi/d}$. Puisque $n \not\equiv 0[d]$, $2n\pi/d \not\equiv 0[2\pi]$ donc $\omega^n \neq 1$. En d'autres termes, $\omega \in \mathbb{U}_d$ mais $\omega \notin \mathbb{U}_n$: $\mathbb{U}_d$ n'est pas inclus dans $\mathbb{U}_n$.

Exemples :



$\mathbb{U}_4 \subset \mathbb{U}_8$



$\mathbb{U}_4 \not\subset \mathbb{U}_6$

Si d ne divise pas n, $\mathbb{U}_d$ n'est pas inclus dans $\mathbb{U}_n$ mais cela ne signifie pas que ces deux ensembles soient disjoints ! Par exemple, $\mathbb{U}_4 \cap \mathbb{U}_6 = \{\pm 1\}$. De toute façon, $1 \in \mathbb{U}_n$ pour tout n donc $\mathbb{U}_d$ et $\mathbb{U}_n$ ne sont jamais disjoints. On peut montrer (cf. exercice 73) que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_d = \mathbb{U}_{n\wedge d}$.

VI.3 Résolution des équations du second degré, et plus encore

VI.3.a Cas où les coefficients sont réels

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. On définit sur $\mathbb{C}$ la fonction $f : z \mapsto az^2+bz+c$.

Proposition (Racines). Cela dépend uniquement du signe de Δ.

- Si $\Delta < 0$, f admet deux racines simples complexes conjuguées z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, f admet une unique racine double réelle $z_0 = -b/2a$.
- Si $\Delta > 0$, f admet deux racines simples réelles z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Proposition (Factorisation).

- Si $\Delta \neq 0$, alors pour tout complexe z, $f(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$ où z_1 et z_2 sont les deux racines simples de f.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout complexe z, $f(z) = a(z-z_0)^2$ où z_0 est l'unique racine double de f.

Ce résultat est valable si $\Delta > 0$ ou $\Delta < 0$. Bien sûr, les expressions de z_1 et z_2, elles, dépendent du signe de Δ.

Démonstration. Les démonstrations de ce paragraphe et du suivant sont analogues au cas réel et laissées en exo.

Exemple : Les solutions de $z^2 - z + 2 = 0$ sont $z_{1,2} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

Le i est en dehors de la racine carrée, et on ne calcule pas $\sqrt{\Delta}$ mais $\sqrt{-\Delta}$ lorsque $\Delta < 0$! Toujours faire attention au fait de prendre la racine d'un réel positif !

VI.3.b Cas général

On s'intéresse dans ce paragraphe au cas où a, b, c sont complexes (avec toujours $a \neq 0$). Plus précisément : soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On note encore f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = az^2+bz+c$.

Rappel : il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$, parler de complexe positif ou négatif n'a pas de sens (sauf si ce sont des réels). De plus, la notation $\sqrt{}$ est interdite (sauf, encore une fois, quand on manipule des réels positifs).

Proposition (Racines).

- Si $\Delta = 0$, f admet une racine double $z_0 = -b/2a$.
- Si $\Delta \neq 0$, f admet deux racines simples z_1 et z_2 avec

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$$

où δ est une racine carrée de Δ (i.e. l'un des deux complexes vérifiant $\delta^2 = \Delta$).

Sur $\mathbb{C}$, il n'y a pas trois cas (strictement positif, strictement négatif, nul), mais deux : nul et non nul.

Notation $\sqrt{\Delta}$ interdite si Δ n'est pas un réel positif ! De plus, cela ne dépend pas de la racine carrée choisie : Δ admet deux racines carrées opposées, ce qui donnera les même racines (changer δ en $-\delta$ renverra le même couple de solutions).

Remarque : Lorsque les coefficients ne sont pas réels, les deux racines simples ne sont pas forcément conjuguées ! Ce n'est le cas que lorsque les coefficients sont réels (et le discriminant strictement négatif). Voir l'exemple ci-dessous.

Proposition (Factorisation).

- Si $\Delta = 0$, alors pour tout complexe z, $f(z) = a(z-z_0)^2$ où z_0 est l'unique racine double de f.
- Si $\Delta \neq 0$, alors pour tout complexe z, $f(z) = a(z-z_1)(z-z_2)$ où z_1 et z_2 sont les deux racines simples de f.

Remarque : Le paragraphe précédent est un cas particulier de celui-ci, mais il revient souvent, alors il est bon de connaître ces résultats : il serait chronophage et source d'erreurs de calcul d'appliquer la méthode qui suit lorsque Δ est un réel strictement négatif (même si ça marcherait, évidemment).

Exemple : Résoudre l'équation $z^2 - (1+2i)z + 3(1+i) = 0$.

On a $\Delta = -15 - 8i$. On cherche donc $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On pourrait utiliser les résultats du paragraphe VI.1 mais, la plupart du temps, Δ n'admet pas un argument « connu ». On cherche donc plutôt δ sous forme algébrique. Soit donc $\delta = a + ib \in \mathbb{C}$. Alors $\delta^2 = a^2 - b^2 + 2iab$.

$$\delta^2 = \Delta \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & -15 \\ \\ 2ab & = & -8 \end{array} \right.$$

Or, $|\delta|^2 = a^2 + b^2$ et $|\Delta| = \sqrt{289} = 17$. Dès lors :

$$\begin{aligned} \delta^2 = \Delta \quad & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 - b^2 & = & -15 \\ 2ab & = & -8 \\ a^2 + b^2 & = & 17 \end{array} \right. \\ & \iff \left\{ \begin{array}{lcl} a^2 & = & 1 \\ 2ab & = & -8 \\ b^2 & = & 16 \end{array} \right. \qquad (a \text{ et } b \text{ de signe contraire}) \\ & \iff \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \qquad \text{et} \qquad b = -4 \\ \qquad\qquad \text{ou} \\ a = -1 \qquad \text{et} \qquad b = 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ce système n'est pas forcément facile à résoudre. On cherche une équation supplémentaire. On pense au module pour avoir une autre équation faisant intervenir a^2 et b^2. L'équivalence est préservée car on a l'équivalence suivante : $\delta^2 = \Delta \iff (\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta|)$. On pensera donc toujours à ajouter cette équation, qui permet de trouver les solutions plus facilement. Méthode à retenir !

$\delta = 1 - 4i$ convient Les solutions sont donc

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b-\delta}{2a} \\ &= 3i \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} z_2 &= \frac{-b+\delta}{2a} \\ &= 1-i \end{aligned}$$

On voit qu'elles ne sont pas conjuguées !

On pourrait prendre l'autre racine carrée de Δ, à savoir $-1+4i$ et cela donnerait le même couple de solutions.

VI.3.c Somme et produit des racines

Proposition. Le produit des racines de l'équation $az^2+bz+c=0$ vaut c/a, et la somme de ces racines vaut $-b/a$.

Quand on parle de produit ou somme des racines, il est sous-entendu : « comptées avec multiplicité », c'est-à-dire qu'on compte une fois les racines simples, et deux fois les racines doubles. Avec les notations précédentes, cela signifie que $z_1+z_2=-b/a$ lorsque $\Delta\neq 0$, et que $z_0+z_0=-b/a$ lorsque $\Delta=0$, et idem pour le produit.

Démonstration. Découle du théorème de factorisation ci-dessus : si $\Delta\neq 0$ alors, pour tout $z\neq 0$,

$$\begin{aligned} az^2+bz+c &= a(z-z_1)(z-z_2) \\ &= a(z^2-(z_1+z_2)z+z_1\times z_2) \end{aligned}$$

□

donc, en s'intéressant au coefficient devant z, il vient $b=-a(z_1+z_2)$ et, à l'aide du coefficient constant, $c=a\times(z_1\times z_2)$. Le cas $\Delta=0$ se traite de façon similaire en écrivant $f(z)=a(z-z_0)(z-z_0)$.

Remarques :

- Nous généraliserons ce résultat dans le chapitre 19.
- Nous avons arnaqué par anticipation : pourquoi le fait que $az^2+bz+c=a(z^2-(z_1+z_2)z+z_1\times z_2)$ pour tout z permet-il d'affirmer que $b=-a(z_1+z_2)$? Pourquoi a-t-on le droit « d'identifier » (grrr je hais ce mot) ? Cela vient du fait que les coefficients d'une fonction polynomiale sont uniques, nous le prouverons dans le chapitre 19.
- Ce résultat permet (entre autres) de trouver facilement une racine lorsqu'on connaît l'autre : par exemple, 1 est racine évidente (car la somme des coefficients est nulle, cf. chapitre 19) de $z^2+iz-(i+1)=0$, donc l'autre racine est $-1-i$ car le produit des racines vaut $c/a=-1-i$.

Réciproquement, l'égalité (valable pour tout z) $(z-x)(z-y)=z^2-(x+y)z+xy$ permet de trouver x et y lorsqu'on connaît leur somme et leur produit. Plus précisément :

Proposition. Soit $(s,p)\in\mathbb{C}^2$. Les solutions du système (d'inconnues x et y)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& s \\ xy &=& p \end{array}\right.$$

sont les solutions de l'équation $z^2-sz+p=0$.

On a déjà vu ce principe dans l'exercice 48 du chapitre 4.

Exemple : Il n'existe pas de réels x et y tels que $x+y=-1$ et $xy=1$. En effet, x et y conviennent si et seulement si x et y sont solutions de $z^2+z+1=0$. Or, cette équation n'a pas de solution réelle car son discriminant est strictement négatif. Par contre, si on s'autorise des solutions complexes, alors j et j^2 conviennent.

VI.3.d Équations de plus haut degré

Les méthodes de résolution des équation du troisième et du quatrième degré ne sont pas au programme. En pratique, quand vous avez une équation de plus haut degré, trois possibilités s'offrent à vous :

- L'énoncé donne une indication.
- Il y a une solution évidente : 0, ± 1, $\pm i$, ± 2.
- Vous vous êtes plantés.

Dans les deux premiers cas, on trouve une racine et le théorème suivant (que nous prouverons dans le chapitre 19) nous permet d'abaisser le degré : soit on arrive à du degré 2, et on applique la méthode précédente, soit le degré est toujours strictement supérieur à 2, et on recommence.

Moyen simple de voir si 0 ou 1 est racine : 0 est racine si et seulement si le terme constant est nul, et 1 est racine si et seulement si la somme des coefficients est nulle, cf. chapitre 19.

Théorème. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f(\alpha) = 0$ si et seulement si $z - \alpha$ divise $f(z)$, c'est-à-dire s'il existe g polynomiale telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - a) \times g(z)$.

Nous reverrons les fonctions polynomiales plus en détail dans les chapitres 9 et 19. Pour l'instant, on se contente de prolonger à $\mathbb{C}$ la définition vue sur $\mathbb{R}$ au chapitre 2 et on se contentera d'une compréhension intuitive du degré.

Exemple : Résoudre l'équation $z^3 - (4 + 2i)z^2 + (4 + 10i)z + (4 - 8i) = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Si $z \in \mathbb{C}$, on pose $f(z)$ la quantité de l'énoncé. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(i\alpha) &= (i\alpha)^3 - (4 + 2i)(i\alpha)^2 + (4 + 10i)(i\alpha) + (4 - 8i) \\ &= -i\alpha^3 + 4\alpha^2 + 2i\alpha^2 + 4i\alpha - 10\alpha + 4 - 8i \\ &= (4\alpha^2 - 10\alpha + 4) + i(-\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8) \end{aligned}$$

Ainsi, puisque α est réel,

$$f(i\alpha) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4\alpha^2 - 10\alpha + 4 & = & 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 8 & = & 0 \end{array} \right.$$

Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Commençons par la partie réelle, puisqu'on sait résoudre une équation du second degré. Il vient $\Delta = 10^2 - 4 \times 4 \times 4 = 36$ ce qui implique que les solutions de $4a^2 - 10a + 4 = 0$ sont $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 1/2$. Or, 2 est solution de l'autre équation et $1/2$ ne l'est pas (α doit être solution des **deux** équations ci-dessus) : il en découle que $2i$ est solution de l'équation. Ainsi, on peut factoriser par $z - 2i$: il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + z^2(-4 - 2i) + z(4 + 10i) + 4 - 8i = (z - 2i)(az^2 + bz + c)$$

On factorise un terme de degré 3 par un terme de degré 1 : le terme après factorisation est donc de degré 2. Nous nous contentons de cette approche intuitive, nous en reparlerons dans les chapitres 9 et 19.

À l'aide des termes dominants et constants, il vient $a = 1$ et $c = 4 + 2i$. En développant et à l'aide des coefficients devant z^2, on obtient $-2i + b = -4 - 2i$ donc $b = -4$, c'est-à-dire que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - 2i)(z^2 - 4z + 4 + 2i)$. Or, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul. Dès lors,

$$f(z) = 0 \iff z = 2i \qquad \text{ou} \qquad z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$$

On résout la deuxième équation comme ci-dessus, et on trouve finalement que les solutions de l'équation sont $2i, 1 + i$ et $3 - i$.

VII Exponentielle complexe

VII.1 Cas général

Définition. On définit la fonction exponentielle complexe par :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \end{array} \right.$$

L'image d'un complexe z est notée e^z ou $\exp(z)$.

Pour faire simple : on définit l'exponentielle sur $\mathbb{C}$ à l'aide de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ et sur $i\mathbb{R}$.

Remarque : Si z est réel ou imaginaire pur, cette définition coïncide avec, respectivement, l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs.

Exemple : $e^{1+i\pi} = e \times e^{i\pi} = -e$.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de la définition et des résultats vérifiés par l'exponentielle réelle et l'exponentielle définie sur les imaginaires purs (cf. paragraphe IV.2) et leur preuve est donc laissée en exercice.

Proposition (Partie réelle, partie imaginaire, module et arguments). Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $\mathrm{Re}\left(e^z\right) = e^{\mathrm{Re}(z)} \times \cos(\mathrm{Im}(z))$.
- $\mathrm{Im}\left(e^z\right) = e^{\mathrm{Re}(z)} \times \sin(\mathrm{Im}(z))$.
- $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
- Soit θ un argument de e^z. Alors $\theta \equiv \mathrm{Im}(z)[2\pi]$.

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $z = e^{e^{i\theta}}$.

$$\begin{aligned} z &= e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} \\ &= e^{\cos(\theta)} \times e^{i\sin(\theta)} \end{aligned}$$

Il en découle que $|z| = e^{\cos(\theta)}$, que $\sin(\theta)$ est un argument de z, et enfin :

$$z = e^{\cos(\theta)} \times (\cos(\sin(\theta)) + i\sin(\sin(\theta)))$$

si bien que $\mathrm{Re}(z) = e^{\cos(\theta)} \times \cos(\sin(\theta))$ et $\mathrm{Im}(z) = e^{\cos(\theta)} \times \sin(\sin(\theta))$.

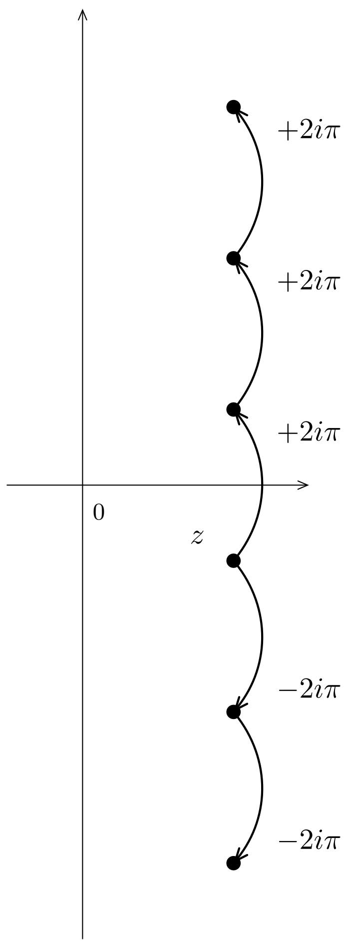
Proposition (Propriété d'addition). Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$.

Proposition (Cas d'égalité). Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Alors $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si $z_1 - z_2 \in 2i\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + 2ik\pi$.

Ne pas oublier le i !

Remarques :

- En d'autres termes, les complexes ayant même image que z par l'exponentielle s'obtiennent en ajoutant un multiple de $2i\pi$: géométriquement, cela se traduit par « des sauts verticaux d'amplitude 2π » :



- En particulier, l'exponentielle n'est pas injective. Par exemple, $e^0 = e^{2i\pi} = 1$.
- Elle n'est pas non plus surjective car 0 n'a pas d'antécédent. En effet, soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \neq 0$ car $e^{\mathrm{Re}(z)} \neq 0$ (c'est un réel strictement positif) et $e^{i\,\mathrm{Im}(z)} \neq 0$ (c'est un complexe de module 1). Mais, hormis 0, tout complexe admet une infinité d'antécédents (et donc l'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$). Plus précisément :

La non injectivité de l'exponentielle complexe n'est pas une surprise car elle prolonge l'exponentielle sur les imaginaires purs qui n'est pas injective.

Proposition (Résolution de l'équation $e^z = a$). Soit $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$e^z = a \iff \mathrm{Re}(z) = \ln(r) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) \equiv \theta[2\pi]$$

En d'autres termes : $e^z = a \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(|a|) + i\theta + 2ik\pi$ (où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de a).

Exemple : $e^z = 2i \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln(2) + \dfrac{i\pi}{2} + 2ik\pi$.

Exemple : Résoudre l'équation $e^z = 2 + 2i$.

Tout d'abord, de même que dans le paragraphe V.2, on obtient : $2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} e^z = 2 + 2i \quad &\iff \quad e^{\mathrm{Re}(z)} \times e^{i\,\mathrm{Im}(z)} = 2\sqrt{2} \times e^{i\pi/4} \\ &\iff \quad e^{\mathrm{Re}(z)} = 2\sqrt{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) \equiv \pi/4[2\pi] \\ &\iff \quad \mathrm{Re}(z) = \ln(2\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \times \ln(2) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) \equiv \pi/4[2\pi] \end{aligned}$$

Cas d'égalité de l'écriture exponentielle, cf. paragraphe V.2.

VII.2 Introduction au log complexe (HP)

Disons-le tout de suite : appliquer la fonction ln ou une quelconque fonction log sur autre chose qu'un réel strictement positif est passible de châtiments corporels.

Cependant, même si c'est HP, puisqu'on vient de généraliser la définition de l'exponentielle, il est naturel de se demander si on peut généraliser la définition du ln. Rappelons d'ailleurs sa définition : « la fonction ln est la bijection réciproque de l'exponentielle réelle, c'est-à-dire que, pour tout $y > 0$, $\ln(y)$ est l'unique réel dont l'exponentielle vaut y i.e. l'unique antécédent de y par l'exponentielle » .

- La première difficulté pour définir un logarithme complexe est que l'exponentielle n'est plus injective quand on la définit sur $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas définir un éventuel logarithme de z comme « l'unique antécédent de z par l'exponentielle ».
- Puisque l'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$, on pourrait abandonner l'unicité mais, si $z \in \mathbb{C}^*$, on pourrait définir tout de même le logarithme de z comme « un » antécédent de z par l'exponentielle. Seulement, il y a une deuxième difficulté : lequel choisir ? Il faut que en effet que cette fonction soit définie sans ambiguïté.
- Si $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$, alors $\ln(r) + i\theta$ est un antécédent de z par l'exponentielle, sauf qu'il n'y a pas unicité de θ : tous les complexes de la forme $\ln(r) + i\theta + 2ik\pi$ sont aussi des antécédents de z. On peut décider de choisir le θ « le plus simple, le plus naturel » : l'argument principal (comme, pour la racine carrée d'un réel positif, on décide arbitrairement de prendre celui des deux antécédents qui est positif). En d'autres termes, on a envie de poser $f(z) = \ln(|z|) + i\theta$ avec θ l'argument principal de z, i.e. l'unique argument de z dans $]-\pi\,;\pi]$. On a alors effectivement $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et on se dit qu'on a gagné.
- Mais il y a un dernier problème, fatal cette fois : cette fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{C}^*$.

Les fonctions continues de $\mathbb{C}$ (ou de $\mathbb{C}^*$) dans $\mathbb{C}$ ne sont au programme qu'en deuxième année, mais on n'utilisera ici que des propriétés intuitives et analogues au cas réel, à savoir :

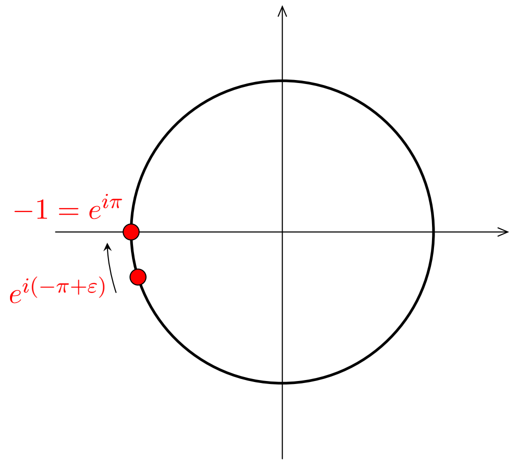
- ⋆ f est continue en a si et seulement si $f(z) \underset{z\to a}{\longrightarrow} f(a)$.
- ⋆ Une somme et composée de fonctions continues est continue.
- ⋆ $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

Ce dernier résultat concerne les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et donc sera vu dans le chapitre 13.

Montrons donc que la fonction f ci-dessus n'est pas continue en -1.

Tout d'abord, $-1 = e^{i\pi}$: l'argument principal de -1 est π donc $f(-1) = i\pi$. Cependant, si $\varepsilon \in \left]0\,;\pi\right]$, alors l'argument principal de $e^{i(-\pi+\varepsilon)}$ est $-\pi+\varepsilon$ donc $f\left(e^{i(-\pi+\varepsilon)}\right) = i(-\pi+\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} -i\pi \neq f(-1)$ alors que $e^{i(-\pi+\varepsilon)} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} e^{-i\pi} = -1$: f n'est pas continue en -1.

C'est la possibilité de « faire des tours » qui empêche la continuité d'un éventuel logarithme car, si on fait presque un tour, alors deux points sont très proches alors que leurs arguments principaux sont éloignés de presque 2π, et donc leurs logarithmes sont éloignés, ce qui contredit la continuité : des éléments proches qui ont des images éloignées.



- Montrons plus généralement qu'il n'existe pas de logarithme L qui soit continu sur $\mathbb{C}^*$ i.e. de fonction L continue sur $\mathbb{C}^*$ telle que, pour tout $z \neq 0$, $e^{L(z)} = z$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'une telle fonction existe.

  Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{L\left(e^{i\theta}\right)} = e^{i\theta}$ donc (cas d'égalité de l'exponentielle complexe) $L\left(e^{i\theta}\right) - i\theta \in 2i\pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire qu'il existe $\varphi(\theta) \in \mathbb{Z}$ tel que $L\left(e^{i\theta}\right) - i\theta = 2i\varphi(\theta)\pi$. En d'autres termes, la fonction

$$\varphi : \theta \mapsto \frac{L\left(e^{i\theta}\right) - i\theta}{2i\pi}$$

  va de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. De plus, elle est continue car somme et composée de fonctions continues donc est constante d'après le TVI. Or :

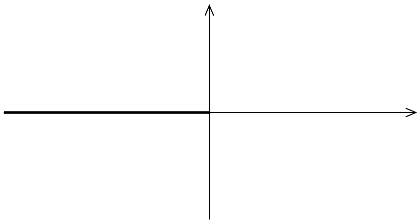
$$\varphi(0) = \frac{L(1)}{2i\pi} \qquad \text{et} \qquad \varphi(2\pi) = \frac{L(1) - 2i\pi}{2i\pi} \neq \varphi(0)$$

  ce qui est absurde. Tristement, cela signifie qu'il est impossible de définir une fonction logarithme qui soit continue sur $\mathbb{C}^*$.

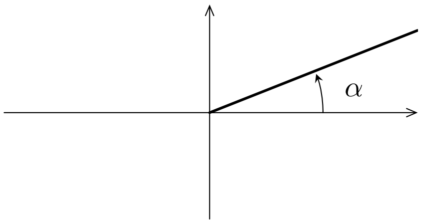
- Cependant, on peut faire une concession et définir la fonction f ci-dessus uniquement sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ i.e. on définit la fonction

$$\text{Log} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_- & \to & \mathbb{C} \\ & & \\ z & \mapsto & \ln(|z|) + i\theta \end{array} \right.$$

  où θ est l'unique argument de z dans $\left]-\pi\,;\pi\right[$ (ouvert car on a exclu l'ensemble des réels négatifs). On peut alors montrer que cette fonction est un logarithme (i.e. vérifie $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$) continu : on l'appelle la détermination principale du logarithme. Faites un test avec votre calculatrice : elle sait donner le logarithme de i mais pas de -1 !



- On l'appelle détermination **principale** car il y en a d'autres : $\mathbb{R}_-$ est pris par convention, on peut définir un logarithme sur $\mathbb{C}$ privé de n'importe quelle demi-droite issue de 0 (ce qui empêche de faire des tours permettant de mettre en défaut la continuité) :



Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note D_α la demi-droite faisant un angle α avec l'axe des abscisses. On peut alors définir un logarithme continu sur $\mathbb{C}\backslash D_\alpha$ en posant :

$$\mathrm{Log}_\alpha : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash D_\alpha & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \ln(|z|) + i\theta \end{cases}$$

avec θ l'unique argument de z dans $]\,\alpha\,;\alpha+2\pi\,[$ (idem, ouvert car on exclut la demi-droite).

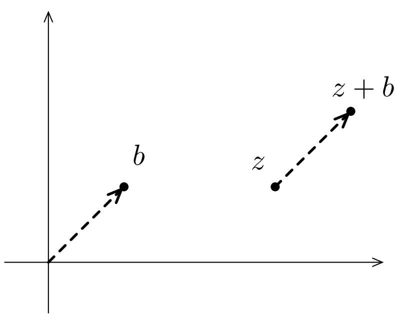
Morale de l'histoire : Définir un logarithme sur $\mathbb{C}^*$, c'est compliqué et violemment HP ! D'où la remarque en début de paragraphe...

VIII Similitudes directes

VIII.1 Translations, rotations, homothéties

Proposition. Soit $(z,b) \in \mathbb{C}^2$. Géométriquement, $z+b$ s 'obtient à partir de z par une translation de vecteur b (c'est-à-dire $\overrightarrow{OMb}$).

DÉMONSTRATION. Immédiat : on somme les coordonnées de z et celles de b.

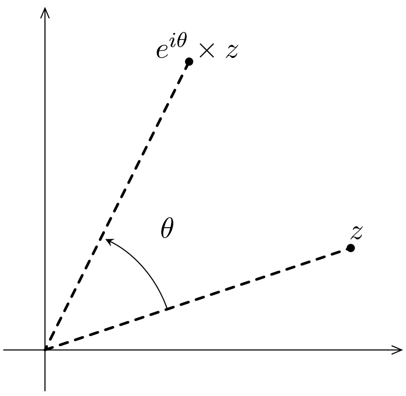


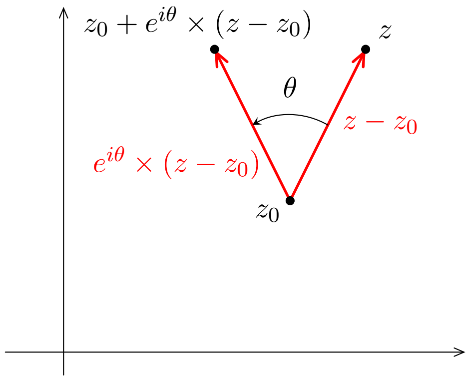
Proposition. Soit $(z, z_0, \theta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R}$.

- Géométriquement, $e^{i\theta} \times z$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ (et de centre O).
- Géométriquement, $z_0 + e^{i\theta} \times (z - z_0)$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ (et de centre z_0).

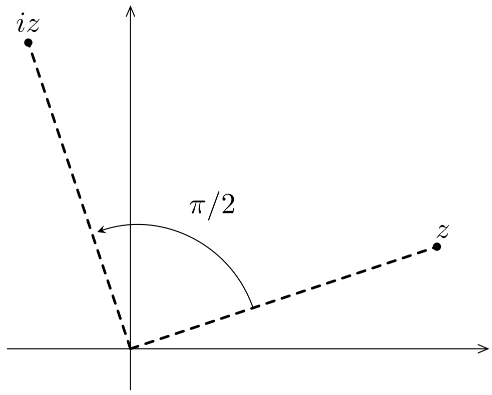
Démonstration. • $e^{i\theta} \times z$ a le même module que z et, si φ est un argument de z, alors $\theta + \varphi$ est un argument de $e^{i\theta} \times z$.

- On multiplie le vecteur $\overrightarrow{M_{z_0}M_z}$ par $e^{i\theta}$, ce qui donne un vecteur de même norme mais sur lequel on a fait une rotation d'angle θ, et on ajoute z_0 donc on fait partir ce vecteur depuis z_0.





Exemple : Multiplier par i revient à faire une rotation d'angle $\pi/2$ dans le sens direct.



Proposition. Soit $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$. Soit $(z, z_0) \in \mathbb{C}^2$.

- Géométriquement, $a \times z$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport $r = |a|$ (toutes les deux de centre O), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.
- Géométriquement, $z_0 + a \times (z - z_0)$ s'obtient à partir de z par une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport $r = |a|$ (toutes les deux de centre z_0), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.

Une homothétie de centre Ω et de rapport λ consiste à multiplier la distance $M\Omega$ par λ.

Démonstration. Il suffit de voir que :

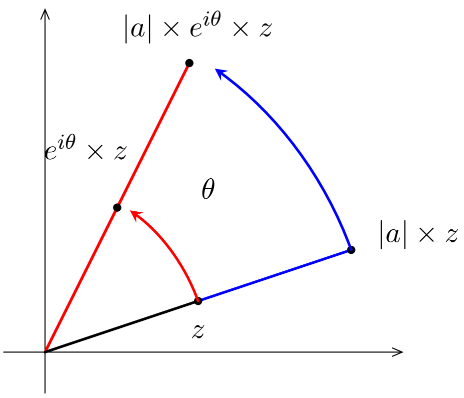
$$a \times z = \underbrace{|a| \times \underbrace{e^{i\theta} \times z}_{\text{rotation d'angle } \theta}}_{\text{homothétie de rapport } |a|} = \underbrace{e^{i\theta} \times \underbrace{|a| \times z}_{\text{homothétie de rapport } |a|}}_{\text{rotation d'angle } \theta}$$

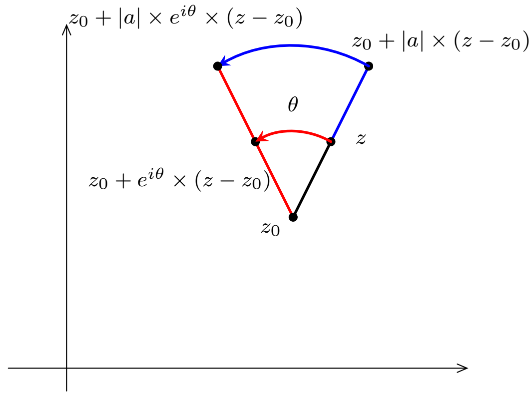
□

Le fait que l'ordre ne compte pas vient de la commutativité de la multiplication sur $\mathbb{C}$.

et c'est la même chose pour $a(z - z_0) + z_0$.

Ci-contre, deux exemples : qu'on fasse d'abord la rotation puis l'homothétie (en rouge) ou d'abord l'homothétie puis la rotation (en bleu), on arrive au même point.





VIII.2 Cas général

Définition. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. On dit que f est une similitude directe s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = az + b$$

On se donne dans la suite $f : z \mapsto az + b$ une similitude directe (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$). Si $a = 1$, alors, géométriquement, f est la translation de vecteur b. On suppose $a \neq 1$ dans la suite, et on note $a = re^{i\theta}$.

Proposition. Il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que f soit la composée de la rotation d'angle θ et de l'homothétie de rapport $|a|$ (toutes les deux de centre z_0), l'ordre de ces opérations n'ayant pas d'importance.

Démonstration. On commence par chercher le point fixe de f (i.e. le centre de ces opérations). Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$z_0 = az_0 + b \iff z_0 = \frac{b}{1-a}$$

On pose donc $z_0 = \dfrac{b}{1-a}$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

Nous reverrons cette méthode dans le chapitre 12 avec les suites arithmético-géométriques.

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & az + b \\ z_0 & = & az_0 + b \end{array}$$

□

En faisant la différence, $f(z) - z_0 = a(z - z_0)$ donc $f(z) = z_0 + a(z - z_0)$ ce qui donne le résultat voulu.

Remarque : Par conséquent, si $a \neq 1$, on peut donner directement le rapport de l'homothétie et l'angle de la rotation car ceux ci ne dépendent que de a (le rapport vaut $|a|$ est l'angle est un argument de a). La seule caractéristique qu'on ne peut pas donner à l'oeil nu et qui dépend de b est le centre de la similitude.

Si $a = 1$, c'est encore plus simple, c'est une translation de vecteur b.

Exemple : Donner les éléments caractéristiques de la similitude directe $f : z \mapsto (1+i)z+1$.

Pour poursuivre la remarque précédente : puisque $(1+i) = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, on peut déjà affirmer que f est la composée d'une rotation d'angle $\pi/4$ et d'une homothétie de rapport $\sqrt{2}$. Il ne reste qu'à trouver le centre.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

$$z_0 = (1+i)z_0 + 1 \iff z_0 = \frac{1}{-i} = i$$

On pose donc $z_0 = i$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{array}{rcl} f(z) & = & (1+i)z + 1 \\ z_0 & = & (1+i)z_0 + 1 \end{array}$$

En faisant la différence, $f(z)-z_0=(1+i)(z-z_0)$ donc $f(z)=z_0+(1+i)(z-z_0)$. Puisque $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, f est la composée de l'homothétie de rapport $\sqrt{2}$ et de la rotation d'angle $\pi/4$ et de centre $z_0=i$. Ci-dessous un dessin représentant l'égalité $f(1+2i)=3i$.