Programme de colle - Semaine n°19

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Nathan BISKUPSKI, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 19 - Polynômes

- cf. semaines 17 et 18.

Chapitre 20 - Fractions rationnelles

- cf. semaine 18.

Chapitre 21 - Matrices

- cf. semaine 18.
- Matrices symétriques, antisymétriques. Toute matrice s'écrit de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont stables par somme et par multiplication par un scalaire.
- Matrices diagonales. $D_n(\mathbb{K})$ est stable par somme et par multiplication par un scalaire. Produit de deux matrices diagonales, puissances d'une matrice diagonale.
- Matrices triangulaires. Stabilité par somme, par multiplication par un scalaire. Produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures).
- Matrices inversibles. Un inverse à gauche ou à droite est un inverse (admis provisoirement). Groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Opérations sur les matrices inversibles. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Matrices nilpotentes, somme, produit de matrices nilpotentes qui commutent.
- Système linéaire, écriture matricielle. Ensemble des solutions.
- Systèmes de Cramer, unicité de la solution. Cas particulier des systèmes homogènes de Cramer. Si le système $AX = 0$ admet une solution non nulle, alors A n'est pas inversible (la réciproque sera vue au second semestre). Application : si A a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles (en particulier, si A a une ligne ou une colonne nulle), alors A n'est pas inversible (réciproque fausse).
- CNS d'inversibilité d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire. Application : toute matrice est somme de deux matrices inversibles.
- Opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes. Matrices de transvection, de permutation, de dilatation. Traduction matricielle des opérations élémentaires.
- Méthode du pivot de Gauß pour inverser une matrice (inversible, même si cette méthode permet d'affirmer si la matrice est inversible ou non).

Chapitre 22 - Intégration sur un segment

- Définition d'une subdivision, de la subdivision à pas constant. Subdivision plus fine qu'une autre, pas d'une subdivision, la relation « être plus fine que » est une relation d'ordre.
- Fonctions en escalier (à valeurs réelles). Une fonction en escalier ne prend qu'un nombre fini de valeurs et donc est bornée. Subdivision adaptée à une fonction en escalier. Si f et g sont en escalier, il existe une subdivision adaptée à f et g. L'ensemble des fonctions en escalier est un anneau commutatif, il est stable par somme et par multiplication par un réel.

- Fonctions continues par morceaux (à valeurs réelles). Exemples de fonctions continues par morceaux, de fonctions non continues par morceaux. Activité : une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais n'atteint pas forcément ses bornes). Subdivision adaptée à une fonction en escalier. Si f et g sont en escalier, il existe une subdivision adaptée à f et g. L'ensemble des fonctions en escalier est un anneau commutatif, il est stable par somme et par multiplication par un réel.
- Intégrale d'une fonction en escalier. Si deux fonctions en escalier coïncident sauf en un nombre fini de points alors leurs intégrales sont égales.
- Relation de Chasles, linéarité de l'intégrale, positivité et croissance de l'intégrale, inégalité triangulaire (pour des fonctions en escalier).
- Densité des fonctions en escalier : si f est continue par morceaux, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe φ et ψ en escalier telles que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\psi - \varphi \leq \varepsilon$.
- Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux. Extension des propriétés vues pour les fonctions en escalier aux fonctions continues par morceaux. Activité : lemme de Riemann-Lebesgue (cas $\mathscr{C}^1$, cas continu par morceaux).
- Deux opérations interdites sur les intégrales : le passage à la limite, et la continuité d'une intégrale à paramètre.
- Valeur moyenne.
- Extension de la définition d'une intégrale au cas où $a \geq b$. Attention : pour la positivité ou la croissance de l'intégrale, ou pour l'inégalité triangulaire, les bornes doivent être dans l'ordre croissant.
- Théorème fondamental de l'analyse. Toute fonction continue admet des primitives. Expression de l'intégrale d'une fonction continue en fonction d'une de ses primitives.
- Activités : comparaison à une intégrale (constante d'Euler), la norme infinie est la limite des normes p.
- Cas d'égalité de la positivité de l'intégrale lorsque la fonction est continue.
- Sommes de Riemann à pas constant (ce qui est le cadre du programme). Somme des rectangles à gauche, à droite. Interprétation géométrique, convergence vers l'intégrale lorsque la fonction est continue par morceaux. Exemples de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, de $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{1/n}$. Sommes de Riemann générales (HP), lorsque le pas tend vers 0, une somme de Riemann quelconque tend vers l'intégrale.
- Méthodes de calcul approché d'intégrales (évoquées rapidement en classe et sans aucune démonstration) : méthode des trapèzes, méthode du point milieu, méthode de Simpson.
- Extension au cas d'une fonction à valeurs complexes.

Chapitres au programme

Chapitres 19, 20 et 21 (cours et exercices), chapitre 22 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Théorème de d'Alembert-Gauß (sans démonstration puisqu'il est admis).
2. Factorisation (sur $\mathbb{C}$) de $X^n - 1$ (démonstration).
3. Théorème de factorisation sur $\mathbb{R}$ (sans démonstration).
4. Interprétation géométrique des polynômes d'interpolation de Lagrange. Expression explicite de l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange de degré $\leq n-1$ (sans démonstration). L'examinateur demande de donner un polynôme d'interpolation de Lagrange dans un cas explicite simple.
5. Décomposition éléments simples de $\dfrac{1}{X^n - 1}$ (démonstration).
6. Décomposition en éléments simples de P'/P lorsque P est scindé (sans démonstration).
7. Définition du produit matriciel. L'examinateur demande d'effectuer un produit matriciel dans un cas explicite simple (disons $\max(n, p, q) \leq 4$).
8. Démonstration de l'associativité du produit matriciel.
9. Produit de deux matrices élémentaires carrées (sans démonstration).
10. Toute matrice s'écrit de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique (démonstration).
11. Produit de deux matrices diagonales, produit de deux matrices triangulaires supérieures ou inférieures (énoncé précis, sans démonstration).
12. CNS d'inversibilité des matrices diagonales, triangulaires (énoncé précis, sans démonstration).
13. L'examinateur donne une matrice 3×3 explicite et demande au candidat si elle est inversible, et de l'inverser le cas échéant.

14. Définition d'une fonction en escalier, d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[\,a\,;b\,]$ (à chaque fois avec un joli dessin).
15. Définition d'une somme de Riemann à pas constant (les deux : rectangles à gauche ou à droite, avec à chaque fois un joli dessin).
16. Limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

Groupes B - C :

1. Existence et unicité des polynômes de Tchebychev (démonstration).
2. Décomposition en éléments simples de P'/P lorsque P est scindé (démonstration).
3. Puissances de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

4. Produit de deux matrices triangulaires supérieures et coefficients diagonaux (démonstration).
5. Définition d'une matrice de transvection, de dilatation, de permutation. Opérations élémentaires associées (sans démonstration).
6. Existence de la constante d'Euler, $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ (démonstration).
7. Limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n! \times n^n}\right)^{1/n}$.
8. Lemme de Riemann-Lebesgue (démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$).

Groupe C :

1. Factorisation sur $\mathbb{R}$ de $X^{2n} - 1$.
2. Produit de deux matrices élémentaires carrées (démonstration).
3. Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier (énoncé précis, démonstration uniquement dans le cas où f est continue, avec un joli dessin).
4. Lemme de Riemann-Lebesgue (démonstration dans le cas continu par morceaux).
5. La norme infinie est la limite des normes p (démonstration). Le cas où $||f||_\infty$ est atteinte aux bornes n'a pas été traité en classe : l'examinateur, s'il le souhaite, peut demander au candidat de traiter ce cas. Question à préparer, donc.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Formules de Taylor.
- Début de l'analyse asymptotique.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 17, 21, 24, 27, 30, 31, 32, 34, 35, 38 du chapitre 22.

Cahier de calcul

Chapitre 26.