Programme de colle - Semaine n°11

Chapitre 10 - Calcul intégral

- cf. semaines 8 et 9.

Chapitre 11 - Équations différentielles

- cf. semaine 9.

Chapitre 12 - Suites numériques

- cf. semaine 10.
- Comparaison des suites usuelles, croissances comparées.
- Méthode pour lever l'indétermination : factoriser par le terme prépondérant, faire apparaître un taux d'accroissement. Limite de la suite de terme général $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Suites (strictement) monotones. Opérations : somme, produit par un scalaire. Attention, le produit de deux suites monotones ne l'est pas forcément.
- Comment montrer qu'une suite est monotone : différence, quotient (ne marche que pour les suites à termes strictement positifs), étude de fonction lorsque le terme est de la forme $u_n = f(n)$ (exemple de $u_n = e^{-n}\sqrt{n}$).
- Théorème de la limite monotone, cas croissant et cas décroissant.
- Suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite. Exemple :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

  Application : e est irrationnel.
- Traduction séquentielle de certaines propriétés : borne supérieure, densité.
- Suites extraites, notation $(u_{\varphi(n)})$ avec φ une extractrice, ou $(u_{n_k})_k$ avec $(n_k)_k$ suite strictement croissante d'entiers (note aux colleurs : nous utiliserons surtout cette deuxième écriture). Une suite extraite d'une suite extraite est une suite extraite.
- Exemple de suites extraites construites terme à terme : une suite non minorée admet une sous-suite qui tend vers $-\infty$, qui décroît vers $-\infty$, une suite minorée qui n'atteint pas sa borne inférieure admet une sous-suite qui décroît vers sa borne inférieure, une suite admet une sous-suite monotone.
- Une suite extraite d'une suite admettant une limite admet la même limite. Conséquence : si une suite a deux suites extraites qui ont des limites différentes, alors la suite n'admet pas de limite. Exemples des suites de TG $(-1)^n, (-2)^n$ et $(-1)^n \times n$. CNS de convergence à l'aide des suites d'indices pairs et impairs.
- Théorème de Bolzano-Weierstraß.
- Introduction aux systèmes dynamiques $u_{n+1} = f(u_n)$: on se limite au cas où f est continue et croissante. Les limites éventuelles sont des points fixes de f. Exemples : $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$, $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$, $u_{n+1} = u_n + \ln(1+u_n)$.
- Suites complexes.

Chapitre 13 - Limites et continuité

Sauf indication contraire, on se place sur D union d'intervalles non vides, non réduits à un point.

- Limites en un point adhérent. 9 limites à connaître, selon que $a \in \mathbb{R}, a = \pm\infty$ et idem pour L. Libertés relatives concernant les quantificateurs (on peut arriver à 2ε etc., cf. chapitre 12).
- Exemples : une fonction constante égale à L tend vers L en $+\infty$, $\dfrac{1}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, exponentielle, ln en $+\infty$, $1/x^n$ en 0 lorsque n est un entier pair, exponentielle en 0, limite de x^n en $\pm\infty$ selon la parité de n.

Chapitres au programme

Chapitres 10 et 11 (exercices uniquement), chapitre 12 (cours, exercices uniquement sur les bornes inférieure et supérieure, sur la densité et sur des suites explicites, du type des exercices 16 jusque 38 du poly).

Questions de cours

1. Définition de la borne supérieure d'un ensemble A. Caractérisation de la borne supérieure (avec des ε, sans démonstration).
2. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (les deux démonstrations : celle avec la partie de $\mathbb{Z}$ et celle en utilisant la caractérisation séquentielle de la densité).
3. Définition d'une suite arithmétique, géométrique, et terme général à chaque fois (sans démonstration).
4. L'examinateur donne une suite arithmético-géométrique explicite et en demande le terme général.
5. L'examinateur donne une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels (avec $\Delta \geq 0$) explicite et en demande le terme général.
6. Définition d'une suite convergente (vers une limite L). L'examinateur demande, au choix, de prouver que $1/n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\alpha > 0$, ou que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $q \in \,]-1\,;1\,[$.
7. Unicité de la limite (démonstration).
8. Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge est stationnaire (démonstration, la réciproque découle d'un résultat prouvé précédemment et n'est pas demandée).
9. Définition d'une suite qui tend vers $+\infty$, d'une suite qui tend vers $-\infty$. L'examinateur demande, au choix, de prouver que $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\alpha > 0$, ou que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $q > 1$ (cette dernière propriété n'a pas été traitée en classe : à préparer, donc).
10. Théorème de Cesàro (démonstration uniquement dans le cas $L \in \mathbb{R}$).
11. Théorème de la limite monotone, cas croissant (démonstration).
12. Définition de deux suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite (démonstration).
13. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure, de la densité (sans démonstration). Deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur une partie dense sont égales (démonstration). Contre-exemple sans la continuité ?
14. Étude de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
15. Étude de la suite définie par $u_0 \in [\,0\,;\pi/2\,]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.
16. Théorème de Bolzano-Weierstraß (démonstration du cas complexe en admettant le cas réel, et sans faire de faute à Weierstraß).
17. L'examinateur demande trois écritures de limites du type $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ parmi les 9 possibles.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin de la continuité.
- Début de la dérivation ?

Exercices à préparer

Exercices 50, 52, 53, 59, 60, 62, 63, 64, 66, 68, 72, 73, 74, 77, 78, 81 (questions 1 et 2.(a)) du chapitre 12.

Cahier de calcul

Chapitre 21.