# Devoir Surveillé n°6 - Sujet groupe A

1. (Question de cours) Indépendance de deux événements, indépendance mutuelle de $n$ événements. Que faut-il prouver pour prouver que trois événements $A, B, C$ sont mutuellement indépendants ?
2. (Question de cours) Définition de la covariance. Variance d'une somme de deux, de $n$ variables aléatoires (sans démonstration). Cas où les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes (toujours sans démonstration).
3. Soient $A = (i^2 + j)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B = (ij)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Donner le terme général de la matrice $AB$.
4. Si $n \geq 2$, donner la puissance $n$-ième de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.
   (a) Donner trois vecteurs $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ non nuls vérifiant respectivement $AX_1 = -X_1, AX_2 = X_2$ et $AX_3 = 2X_3$.
   (b) Soit $P$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont dans l'ordre $X_1, X_2$ et $X_3$. Inverser $P$.
   (c) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. $A$ est-elle inversible ? En déduire $A^n$ pour tout $n \geq 1$.
6. Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \sin\left(\lfloor x \rfloor \times \frac{\pi}{4}\right) \mathrm{d}x$.
7. Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1 + e^{t^2}} \mathrm{d}t$.
8. Calculer la limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^{1/n}$.
9. Montrer que pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $\sin(x) \leq x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.
10. Montrer que : $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}\,;0\right], \left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\right| \leq \dfrac{x^2}{2\sqrt{2}}$.
11. Donner un équivalent en 0 de $f(x) = \cos(x) \times \ln(1+x) - \sin(x)$.
12. Donner un équivalent en 0 et en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{Arctan}\left(x^2\right) \times \sqrt[5]{1+x^2}}{\ln(x^2+x+1) \times e^x}$.
13. À l'aide de la formule de Taylor-Young, donner les dérivées de $f : x \mapsto \dfrac{x^4}{1+x^2}$ en 0 jusqu'à l'ordre 6.
14. Donner le DL de $f : x \mapsto \sin(x) \times e^{x^2}$ à l'ordre 5 en 0.
15. Donner le DL de $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 en 0.
16. Montrer que $f : x \mapsto e^{1/x} \times \sqrt{x^2+x}$ admet une asymptote en $+\infty$ et donner les positions relatives.
17. Donner la nature de la série $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
18. Donner la nature de la série $\sum \dfrac{(n^2+n+1)}{2^{n-1}}$.
19. Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge, donner le signe et un encadrement de sa somme.
20. Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(n+5)}$ converge et calculer sa somme.