Corrigé du DM n°24

Exercice :

1 Suivons l'indication de l'énoncé et appliquons la formule de Taylor reste intégral et l'inégalité de Taylor Lagrange.

- <u>Première méthode :</u> f étant de classe $\mathscr{C}^n$ on peut appliquer la formule de Taylor reste intégral entre $f(x_0)$ et $f(x_0+k)$:

$$f(x_0+k)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i f^{(i)}(x_0)}{i!}+\int_{x_0}^{x_0+k}\frac{(x_0+k-t)^{n-1}f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i f^{(i)}(x_0)}{i!}+\mathrm{R}_k$$

avec
$$\mathrm{R}_k=\int_{x_0}^{x_0+k}\frac{(x_0+k-t)^{n-1}f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t$$

et donc
$$|\mathrm{R}_k|\leqslant\int_{x_0}^{x_0+k}\left|\frac{(x_0+k-t)^{n-1}f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\right|\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{x_0}^{x_0+k}\frac{k^{n-1}\mathrm{M}_n}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t=\frac{k^n\mathrm{M}_n}{(n-1)!}$$

- <u>Deuxième méthode :</u> appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange (c'est encore possible car f est de classe $\mathbb{C}^n$) :

$$\left|f(x_0+k)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{k^i f^{(i)}(x_0)}{i!}\right|=|\mathrm{R}_k|\leqslant\frac{k^n\mathrm{M}_n}{n!}$$

On voit donc que la deuxième majoration est la plus efficace. C'est celle qu'on prendra dans la suite, le raisonnement étant exactement le même pour l'autre.

$$\boxed{|\mathrm{R}_k|\leqslant\frac{k^n\mathrm{M}_n}{n!}}$$

2 En faisant le produit de matrices on obtient

$$\boxed{z_1=\sum_{i=1}^{n}y_i=f(x_0+1)-\mathrm{R}_1}$$

et donc d'après la question précédente

$$\boxed{|z_1|\leqslant|f(x_0+1)|+|\mathrm{R}_1|\leqslant\mathrm{M}_0+\frac{\mathrm{M}_n}{n!}}$$

De même
$$\boxed{z_2=\sum_{k=1}^{n}2^{i-1}y_i=f(x_0+2)-\mathrm{R}_2}$$

et on obtient encore par la question précédente

$$\boxed{|z_2|\leqslant\mathrm{M}_0+\frac{2^n\mathrm{M}_n}{n!}}$$

3 De même, pour tout $k\in[\![1\,;\,n]\!]$

$$|z_k|\leqslant\mathrm{M}_0+\frac{k^n\mathrm{M}_n}{n!}$$

et donc tous les coefficients de Z sont bornés par $\mathrm{M}_0+(n^n\mathrm{M}_n)/(n!)$. D'après le cours (ce n'est pas au programme, on vous le ferait redémontrer à l'écrit ou à l'oral), la matrice A est inversible car c'est la transposée d'une matrice de Vandermonde dont tous les coefficients sont distincts. Notons son inverse $\mathrm{A}^{-1}=(a_{ij})$ et

$$\mathrm{T}=\sup_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{i,j}|$$

le sup des valeurs absolues des coefficients de A. Par hypothèse, $\mathrm{Y}=\mathrm{A}^{-1}\mathrm{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $i\in[\![1\,;\,n-1]\!]$

$$f^{(i)}(x_0) = (i-1)!\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} z_j$$

et on a par l'inégalité triangulaire

$$\left|f^{(i)}(x_0)\right| \leqslant (i-1)!\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} z_j| \leqslant n!\sum_{j=1}^{n} \mathrm{T}\left(\mathrm{M}_0 + \frac{n^n \mathrm{M}_n}{n!}\right) = n! \times \mathrm{T} \times n \times \left(\mathrm{M}_0 + \frac{n^n \mathrm{M}_n}{n!}\right)$$

ce qui est le résultat cherché, étant donné que x_0 est quelconque.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in [\![1\,;\, n-1]\!], f^{(i)} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.}$$

Problème :

Partie A :

1 Supposons que F soit stable par f. Dans ce cas, pour tout $x \in \mathrm{F}, f(x) \in \mathrm{F}$. En particulier, $f(u) \in \mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u)$. En d'autres termes, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$: u est vecteur propre. Réciproquement, supposons que u soit un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrons que F est stable par f. Soit $x \in \mathrm{F}$. Puisque F est engendré par u, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $x = \alpha u$. f étant linéaire

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\alpha u) \\ &= \alpha f(u) \\ f(x) &= \alpha\lambda u \in \mathrm{F} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que F est stable par f.

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(u) \text{ est stable par } f \text{ si et seulement si } u \text{ et un vecteur propre de } f.}$$

2.(a) Ne pas trop se casser la tête...

$$\boxed{\mathrm{E} \text{ et } \{0\} \text{ sont stables par } f.}$$

2.(b) M envoie le vecteur $(1,0)$ sur $(0,1)$ et le vecteur $(0,1)$ sur $(-1,0)$. En d'autres termes, f est la rotation de centre O d'angle $\pi/2$. Rappelons que les seuls sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles (c'est-à-dire passant par 0) et $\mathbb{R}^2$ tout entier (c'est-à-dire les espaces de dimension 0, 1, 2). Cette rotation ne laisse aucune droite stable donc

$$\boxed{f \text{ ne laisse stables que E et } \{0\}.}$$

2.(c) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$. Alors $f(x) = 0 \in \mathrm{Ker}\, f$ (car c'est un espace vectoriel, mais on n'a même pas besoin de justifier). Soit à présent $x \in \mathrm{Im}\,(f)$. Alors $f(x)$ est une image donc appartient également à $\mathrm{Im}\,(f)$. En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Ker}\,(f) \text{ et } \mathrm{Im}\,(f) \text{ sont stables par } f.}$$

2.(d) D'après les questions précédentes, on a $\mathrm{E}, \{0\}, \mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$: encore faut-il montrer que les quatre espaces sont distincts !

$\mathrm{E} \neq \{0\}$ par hypothèse. $\mathrm{Ker}\, f \neq \{0\}$ car f n'est pas injective et $\mathrm{Ker}\, f \neq \mathrm{E}$ car f n'est pas l'application nulle. Cela fait donc un troisième espace stable. D'après la question précédente, $\mathrm{Im}\,(f)$ est aussi stable. Pour montrer que cela donne un quatrième espace stable, il faut montrer qu'il est distinct des trois autres. Pour cela, appliquons le théorème du rang.

$$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{Ker}\ f) + \dim(\mathrm{Im}\ f)$$

- f n'est pas l'application nulle donc $\mathrm{Im}\,(f) \neq \{0\}$.
- $\mathrm{Ker}\ f \neq 0$ donc sa dimension est non nulle, ce qui implique, d'après le théorème du rang, que $\dim(\mathrm{Im}\ f) < \dim \mathrm{E}$, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\ f \neq \mathrm{E}$.
- Enfin, si $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Im}\ f$ alors ils ont la même dimension, et d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{E}) = 2\dim(\mathrm{Ker}\ f)$ ce qui est absurde car la dimension est impaire.

$$\boxed{\text{Dans ces conditions, } f \text{ admet au moins quatre sous-espaces stables.}}$$

3.(a) Soit $x \in \mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$. Alors il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Or, f est linéaire et par hypothèse, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \\ f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i x_i \in \mathrm{F} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si F est engendré par une famille de vecteurs propres, F est stable par } f.}$$

3.(b) Si tous les sous-espaces de E sont stables par f, alors en particulier toutes les droites sont stables par f. Cela implique que pour tout $x \in \mathrm{E}, \mathrm{Vect}\,(x)$ est stable par f, donc $f(x) \in \mathrm{Vect}\,(x)$, c'est-à-dire que x et $f(x)$ sont liés. D'après l'exercice fait en TD,

$$\boxed{f \text{ est une homothétie : il existe } \alpha \in \mathbb{K} \text{ tel que } f = \alpha \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}.}$$

4 Soit F un sous-espace vectoriel de E. On se donne $(v_1, \ldots, v_p)$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette base avec $n - p$ vecteurs de la base de E. Quitte à les renuméroter, on peut supposer que ce sont $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. Posons alors

$$\mathrm{G} = \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

Alors, d'après le théorème de concaténation des bases, G est un supplémentaire de F et est engendré par une famille de vecteurs propres : d'après la question 3.(a), G est stable par f.

$$\boxed{\text{Tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable.}}$$

Partie B :

1 Soit $x \in \mathrm{F}$. D'après l'écriture de F comme somme directe, il existe $(x_1, \ldots, x_p)$ appartenant à $(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_1) \times \cdots \times (\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_p)$ (uniques, mais ce n'est pas utile ici) tels que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Or, de même que dans la partie précédente, f est linéaire et pour tout k, on a $f(x_k) = \lambda_k x_k$. Dès lors,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Or, pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!], x_k \in \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_k$, c'est-à-dire que $f(x) \in \bigoplus_{k=1}^{n} (\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_k) = \mathrm{F}$:

$$\boxed{\text{F est stable par } f.}$$

2 x est un élément de F, et a fortiori un élément de E qui est somme directe des E_k. Le résultat découle de la définition d'une somme directe rappelée dans l'énoncé.

$$\boxed{x_1, \ldots, x_p \text{ existent et sont uniques.}}$$

3 Par définition, c'est une famille génératrice de V_x. Montrons qu'ils forment une famille libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ des scalaires tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r = 0$, c'est-à-dire tels que

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_r x_r + 0.x_{r+1} + \cdots + 0.x_p = 0$$

Or, on a également $0.x_1 + \cdots + 0.x_p = 0$. Puisque les espaces sont en somme directe, il y a unicité de l'écriture donc tous les λ_i sont nuls : la famille est libre.

$$\boxed{\mathrm{B}_x \text{ est une base de } \mathrm{V}_x.}$$

En particulier, V_x est de dimension r.

4 Soit $k \in [\![1 \,;\, r]\!]$. Une récurrence immédiate nous dit que pour tout $j \in [\![1 \,;\, r]\!]$, $f^{j-1}(x_k) = {\lambda_k}^{j-1} x_k$. f étant linéaire,

$$\boxed{f^{j-1}(x) = \sum_{k=1}^{r} f(x_k) = \sum_{k=1}^{r} {\lambda_k}^{j-1} x_k \in \mathrm{V}_x}$$

Les coordonnées de $f^{j-1}(x)$ sont donc ${\lambda_1}^{j-1}, \dots, {\lambda_r}^{j-1}$. La matrice recherchée est donc

$$\boxed{\mathrm{VDM} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & {\lambda_1}^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & {\lambda_2}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \dots & {\lambda_r}^{r-1} \end{pmatrix}}$$

5 C'est une matrice de Vandermonde et les λ_k sont distincts par hypothèse. D'après le résultat vu en cours (hors programme, on vous le ferait redémontrer à l'écrit),

$$\boxed{\text{La matrice VDM est inversible.}}$$

Or, une matrice est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base.

$$\boxed{\left(f^{j-1}(x)\right)_{j \in [\![1 \,;\, r]\!]} \text{ est une base de } \mathrm{V}_x}$$

6 Le résultat est immédiat si $i \geqslant r+1$ car $x_i = 0$. Soit à présent $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$. x_i appartient à V_x par hypothèse, donc d'après la question précédente, il est combinaison linéaire des $f^{j-1}(x)$. En d'autres termes, il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$x_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j f^{j-1}(x)$$

Or, $x \in \mathrm{F}$ et F est stable par f dont pour tout $j, f^{j-1}(x) \in \mathrm{F}$. F étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. D'où

$$\boxed{\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!], \qquad x_i \in \mathrm{F}}$$

Tout élément de F s'écrit comme somme d'éléments de $\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_i$ (les x_i) et ces espaces sont en somme directe car les E_i le sont donc

$$\mathrm{F} \subset \textstyle\bigoplus_{k=1}^{p} (\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_k)$$

L'inclusion réciproque étant évidente, on a l'égalité.

$$\boxed{\text{Si F est stable par } f\text{, alors } \mathrm{F} = \textstyle\bigoplus_{k=1}^{p} (\mathrm{F} \cap \mathrm{E}_k)}$$

Partie C :

1 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, c'est-à-dire que $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n$. Alors $\mathrm{D}(\mathrm{P})$ est de degré inférieur ou égal à $\deg(\mathrm{P}) - 1$ (ne pas oublier le cas où P est constant). En d'autres termes, $\deg(\mathrm{D}(\mathrm{P})) \leqslant n - 1 \leqslant n : \mathrm{D}(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ est stable par D.}}$$

Pour se donner la matrice canoniquement associée à une application linéaire, il faut se donner l'image de la base canonique. On a $\mathrm{D}(1) = 0, \mathrm{D}(\mathrm{X}) = 1, \mathrm{D}(\mathrm{X}^2) = 2\mathrm{X}, \dots,$ jusque $\mathrm{D}(\mathrm{X}^n) = n\mathrm{X}^{n-1}$. On a donc

$$\boxed{\mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

2.(a) Les P_i formant une base de F, tous les éléments de F sont combinaison linéaire de ces polynômes, c'est-à-dire que pour tout $\mathrm{P} \in \mathrm{F}$, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$\mathrm{P} = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \mathrm{P}_i$$

Or, tous les P_i sont de degré inférieur ou égal à n par définition de n, et le degré d'une somme est inférieur ou égal au maximum des degrés, c'est-à-dire que $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

$$\boxed{\mathrm{F} \subset \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$$

2.(b) Pour tout $i \in [\![0\,;\, n]\!], \deg(\mathrm{D}^i(\mathrm{R})) = n - i$. C'est donc une famille echelonnée en degré, en particulier :

$$\boxed{\text{C'est une famille libre.}}$$

2.(c) F contient une famille libre de cardinal $n+1$ donc est de dimension supérieure ou égale à $n+1$. Or, F est inclus dans $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ de dimension $n+1$ donc F est de dimension inférieure ou égale à $n+1$. Dès lors, F est de dimension $n+1$. Ainsi, F et $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ ont même dimension et l'un est inclus dans l'autre : ils sont par conséquent égaux.

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$$

3.(a) S'il existe n tel que tous les éléments de F soient de degré inférieur strictement à n, alors F est inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, ce qui est absurde car F est de dimension infinie (un sous-espace d'un espace de dimension finie est lui-même de dimension finie).

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{P} \in \mathrm{F}, \deg(\mathrm{P}) \geqslant n}$$

3.(b) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F contient un polynôme P de degré supérieur à n. On montre de la même manière qu'à la question 2 que F contient $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Ceci étant vrai pour tout n,

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

Récapitulons : si F est un espace vectoriel de dimension finie non nulle stable par D, il existe n tel que $\mathrm{F} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, tandis que si F est de dimension infinie, $\mathrm{F} = \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Il ne faut pas oublier l'espace $\{0\}$. En conclusion

$$\boxed{\text{Les sous-espaces stables de } \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ sont } \{0\}, \mathbb{R}[\mathrm{X}] \text{ et les } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

4 On vient de voir qu'en diminuant le degré, on peut avoir des sous-espaces vectoriels de dimension finie non nulle stables. Essayons en augmentant le degré. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ qui à P associe $\mathrm{X} \times \mathrm{P}$ (il est immédiat que c'est un endomorphisme). Supposons qu'il existe F un sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle stable. De même que dans la question 2.(a), il existe P un polynôme de degré maximal. Alors $u(\mathrm{P})$ est de degré strictement supérieur à celui de P qui est maximal, donc $u(\mathrm{P}) \notin \mathrm{F}$, c'est-à-dire que F n'est pas stable par u, ce qui est absurde.

$$\boxed{u \text{ ne laisse aucun sous-espace vectoriel de dimension finie non nulle stable.}}$$

Par contre, si $\mathrm{P}(0) = 0$, alors c'est toujours le cas de $\mathrm{Q} = u(\mathrm{P})$.

$$\boxed{u \text{ laisse stable l'espace vectoriel } \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = 0\}.}$$

> Cet espace vectoriel est un hyperplan car c'est le noyau de la forme linéaire (non nulle) $\varphi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(0)$. Ce n'est pas absurde avec ce qui précède car un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension infinie est lui-même de dimension infinie (en effet, une somme directe de deux espaces de dimension finie est de dimension finie, cf cours, donc si un

espace E est de dimension infinie et si on a $E = H \oplus \mathrm{Vect}\,(a)$, avec H un hyperplan et $a \neq 0$, alors H est de dimension infinie car $\mathrm{Vect}\,(a)$ est de dimension 1).

5.(a) Tout d'abord, pour que ce soit une famille libre, il faut que tous les termes soient non nuls (une partie contenant le vecteur nul est automatiquement liée, cf cours). Une condition nécessaire est donc $x \notin \mathrm{Ker}\ f^{n-1}$. C'est de plus une condition suffisante d'après l'exercice du poly. En effet, cet exercice dit que si $f^{n-1}(x) \neq 0$ alors cette famille est libre. Puisque c'est une famille libre à n élément dans un espace de dimension n, elle forme une base.

$$\boxed{\text{Cette famille est une base de E si et seulement si } f^{n-1}(x) \neq 0.}$$

5.(b) La matrice de f dans cette base est

$$\boxed{\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

5.(c) On cherche une base $(e_1, \dots, e_n)$ telle que

$$f(e_1) = 0, f(e_2) = e_1, f(e_3) = 2e_2, f(e_4) = 3e_3, \dots, f(e_n) = (n-1)e_{n-1}$$

On prend dans la suite un vecteur x vérifiant la condition obtenue en question 5.(a). Tout d'abord, on voit que $e_1 = f^{n-1}(x)$ et $e_2 = f^{n-2}(x)$ conviennent. On cherche à présent e_3 tel que $f(e_3) = 2e_2 = 2f^{n-2}(x)$. Il suffit de prendre $e_3 = 2f^{n-3}(x)$. Continuons, car on ne sait pas si $2 = 2^1$ ou $2 = 1+1$ ou $2 = 2!$. On cherche à présent e_4 tel que $f(e_4) = 3e_3 = 6f^{n-3}(x)$. Il suffit de prendre $e_4 = 6f^{n-4}(x)$. Ainsi, on pense à prendre, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$,

$$e_i = (i-1)!f^{n-i}(x)$$

Par définition, et par linéarité de f,

$$\begin{aligned} f(e_i) &= (i-1)!f^{n-i+1}(x) \\ &= (i-1) \times (i-2)!f^{n-(i-1)}(x) \\ f(e_i) &= (i-1)e_{i-1} \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{La matrice associée à } f \text{ dans la base } \big((i-1)!f^{n-i}(x)\big)_{i \in [\![1\,;\,n]\!]} \text{ est } \mathrm{A}_{n-1}}$$

Problème facultatif :

Partie 0. Préliminaires

C'est une somme télescopique :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = \sum_{i=1}^{p} (k_i - k_{i-1}) = k_p - k_0$$

Or, $\mathrm{K}_p = \mathrm{E}$ donc $k_p = n$ et $u^0 = \mathrm{Id}$ donc $\mathrm{K}_0 = \{0\}$ donc $k_0 = 0$. En conclusion :

$$\boxed{\text{La somme recherchée vaut } n.}$$

Partie 1. Un exemple en dimension 10

1 On a $k_3 = 10$ donc $k_2 = 8$ donc $k_1 = 4$.

$$\boxed{\dim(\mathrm{K}_1) = 4 \text{ et } \dim(\mathrm{K}_2) = 8.}$$

2 Soient α, β tels que $\alpha u(e_1) + \beta u(e_2) = 0$. Donc $u(\alpha e_1 + \beta e_2) = 0$ donc $\alpha e_2 + \beta e_1$ est dans le noyau, c'est-à-dire K_1 qui est inclus dans K_2 donc c'est un élément de K_2. Or, c'est un élément de H_2 donc un élément de $\mathrm{K}_2 \cap \mathrm{H}_2$ et cette intersection est nulle car ils sont supplémentaires. Donc $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$ et comme (e_1, e_2) est une famille libre, $\alpha = \beta = 0$ et on a le résultat voulu.

$$\boxed{u(e_1) \text{ et } u(e_2) \text{ forment une famille libre.}}$$

3 Soient a_1, a_2, a_3, a_4 tels que $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 u(e_1) + a_4 u(e_2) = 0$. On rappelle que $u^3 = 0$ donc on compose cette égalité par u^2 pour obtenir $u^2(a_1 e_1 + a_2 e_2) = 0$. Le même raisonnement qu'à la question précédente nous dit que $a_1 = a_2 = 0$. On a donc $a_3 u(e_1) + a_4 u(e_2) = 0$. En composant par u cette fois-ci on obtient $u^2(a_3 e_1 + a_4 e_2) = 0$ et toujours par le même raisonnement on obtient $a_3 = a_4 = 0$.

$$\boxed{(e_1, e_2, u(e_1), u(e_2)) \text{ est une famille libre.}}$$

4 Comme e_1 et e_2 ne sont pas dans K_2, $u^2(e_1) = u(u(e_1)) \neq 0$ donc $u(e_1)$ n'appartient pas à K_1 et de même $u(e_2)$ n'est pas dans K_1. Par contre, étant donné que $u^3 = 0$ alors $u^2(u(e_1)) = 0$ donc $u(e_1)$ est dans K_2 et de même $u(e_2)$ aussi.

$$\boxed{u(e_1) \text{ et } u(e_2) \text{ sont dans } \mathrm{K}_2 \text{ mais pas dans } \mathrm{K}_1.}$$

5 Soit x un élément de $\mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2)) \cap \mathrm{K}_1$. Donc $u(x) = 0$ et il existe λ, μ tels que $x = \lambda u(e_1) + \mu u(e_2) = u(\lambda e_1 + \mu e_2)$. Donc $u^2(\lambda e_1 + \mu e_2) = 0$ donc $\lambda e_1 + \mu e_2$ est un élément de K_2. Par le même raisonnement que précédemment on trouve que $\lambda = \mu = 0$ et donc que x est nul.

$$\boxed{\mathrm{Vect}\,(u(e_1), u(e_2)) \cap \mathrm{K}_1 = \{0\}}$$

6 Soit (f_1, f_2, f_3, f_4) une base de K_1. Par la question précédente, $(f_1, f_2, f_3, f_4, u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre de K_2 donc peut être complétée en une base de K_2 par le théorème de la base incomplète avec e_3, e_4. Les vecteurs $u(e_1), u(e_2), e_3$ et e_4 engendrent alors un supplémentaire de K_1 dans K_2 d'après le théorème de concaténation des bases.

$$\boxed{\text{On peut compléter } (u(e_1), u(e_2)) \text{ avec deux vecteurs } (e_3, e_4) \text{ de manière à obtenir un supplémentaire de } \mathrm{K}_1 \text{ dans } \mathrm{K}_2.}$$

7 Juste pour être sûrs, récapitulons : e_1, e_2 ne sont pas dans K_2, $u(e_1), u(e_2), e_3, e_4$ sont dans K_2 mais pas dans K_1. Et enfin, comme $u^3 = 0$ et que e_3, e_4 sont dans K_2, $u^2(e_1), u^2(e_2), u(e_3)$ et $u(e_4)$ sont dans K_1. Montrons que ces vecteurs sont libres. Soient donc $a_1, \dots, a_{10}$ tels que

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 u(e_1) + a_4 u(e_2) + a_5 e_3 + a_6 e_4 + a_7 u^2(e_1) + a_8 u^2(e_2) + a_9 u(e_3) + a_{10} u(e_4) = 0$$

Notons (E) cette égalité. En composant par u^2 on trouve $u^2(a_1 e_1 + a_2 e_2) = 0$ et le même raisonnement que précédemment nous donne $a_1 = a_2 = 0$. Ensuite, l'égalité (E) est équivalente à

$$a_3 u(e_1) + a_4 u(e_2) + a_5 e_3 + a_6 e_4 = -a_7 u^2(e_1) - a_8 u^2(e_2) - a_9 u(e_3) - a_{10} u(e_4)$$

L'élément de gauche est un élément de H_1 (cf question précédente) et l'élément de droite est un élément de K_1 donc ces deux éléments sont dans l'intersection, qui est nulle. Donc

$$a_3 u(e_1) + a_4 u(e_2) + a_5 e_3 + a_6 e_4 = -a_7 u^2(e_1) - a_8 u^2(e_2) - a_9 u(e_3) - a_{10} u(e_4) = 0$$

Or, $u(e_1), u(e_2), e_3, e_4$ forment une famille libre. Donc $a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$. Enfin, on a

$$a_7 u^2(e_1) + a_8 u^2(e_2) + a_9 u(e_3) + a_{10} u(e_4) = u\left(a_7 u(e_1) + a_8 u(e_2) + a_9 e_3 + a_{10} e_4\right) = 0$$

Donc $a_7 u(e_1) + a_8 u(e_2) + a_9 e_3 + a_{10} e_4$ appartient à K_1. Comme c'est aussi un élément de H_1 et que K_1 et H_1 sont en somme directe, il est nul. Donc $a_7 u(e_1) + a_8 u(e_2) + a_9 e_3 + a_{10} e_4 = 0$ et comme ces quatre vecteurs sont libres, on a $a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 0$. Donc c'est une famille libre à 10 éléments de $\mathbb{R}^{10}$ donc une base de $\mathbb{R}^{10}$.

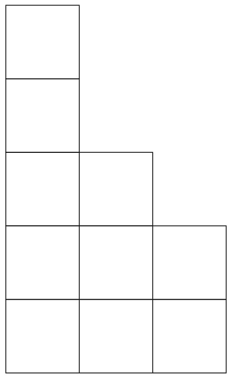
$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

8 La matrice dans cette base est

$$\boxed{\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}}$$

Partie 2. Tableaux de Young

1 Le tableau de Young de l'endomorphisme u est



Cette fois u est nilpotent d'indice 5 avec K_5 de dimension 10, K_4 de dimension 9, K_3 de dimension 8, K_2 de dimension 6 et K_1 de dimension 3. On se donne de la même façon une base de $\mathbb{R}^{10}$: tout d'abord e_1 dans K_5 mais pas dans K_4, ensuite $u(e_1)$ est dans K_4 mais pas dans K_3, ensuite $u^2(e_1)$ est dans K_3 mais pas dans K_2 et on prend un vecteur e_2 pour avoir un supplémentaire de K_2 dans K_3. Ensuite $u^3(e_1)$ et $u(e_2)$ sont dans K_2 mais pas dans K_1 et on prend un vecteur e_3 pour former un supplémentaire de K_1 dans K_2. Enfin, $u^4(e_1), u^2(e_2)$ et $u(e_3)$ forment une base de K_1. La famille $(e_1, u(e_1), u^2(e_1), u^3(e_1), u^4(e_1), e_2, u(e_2), u^2(e_2), e_3, u(e_3))$ est ensuite une base de $\mathbb{R}^{10}$. La matrice de u dans la base $(u^4(e_1), u^3(e_1), u^2(e_1), u(e_1), e_1, u^2(e_2), u(e_2), e_2, u(e_3), e_3)$ est la suivante :

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2.(a) Si A et B sont semblables, elles ont même rang (réciproque fausse bien sûr) donc Im (A) et Im (B) ont même dimension. Il suffit d'appliquer le théorème du rang pour conclure.

$$\boxed{\text{Si A et B sont semblables, alors Ker (A) et Ker (B) ont même dimension.}}$$

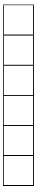
2.(b) Si N_1 et N_2 sont semblables alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $N_1 = PN_2P^{-1}$. En particulier, pour tout i, ${N_1}^i$ et ${N_2}^i$ sont semblables (cf. cours). Par la question précédente, $\mathrm{Ker}\,({N_1}^i)$ et $\mathrm{Ker}\,({N_2}^i)$ ont même dimension. Les tableaux de Young d'une matrice nilpotente étant totalement déterminés par les dimensions des noyaux des puissances de la matrice :

$$\boxed{\text{Deux matrices nilpotentes semblables ont bien même tableau de Young.}}$$

2.(c) Il suffit de montrer que si deux matrices nilpotentes ont même tableau de Young, alors elles sont semblables à la même matrice. Comme c'est une relation d'équivalence, la transitivité nous permettra de conclure que ces deux matrices sont semblables. Or, dans la question 1, on a montré que la matrice de l'endomorphisme u était semblable à la matrice qu'on a donnée ci-dessus. Donc toutes les matrices nilpotentes ayant même tableau de Young que cet endomorphisme sont semblables à cette matrice. C'est exactement la même chose dans le cas général.

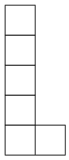
$$\boxed{\text{Deux matrices ayant même tableau de Young sont semblables.}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Il faut trouver toutes les façons d'écrire 6 en une somme décroissante d'entiers $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant ... \geqslant \lambda_p$. Donnons à chaque fois la suite décroissante (λ_i), le tableau de Young associé et la matrice dans une base bien choisie.



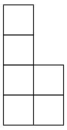
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_6 = 1$



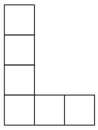
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \cdots = \lambda_5 = 1$



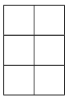
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \lambda_4 = 1$



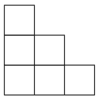
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$



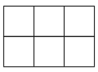
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$



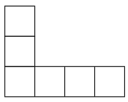
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 1$



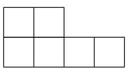
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$



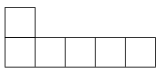
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$



$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$



$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 1$

Il en reste une : la matrice nulle, associée à la suite $\lambda_1 = 6$ et au tableau de Young .