Correction du DM n°9

Exercice 1 :

$\boxed{1}$ L'unique domaine d'intégration est $\mathbb{R}_+^*$ (le terme devant y' ne s'annule jamais, mais il ne faut pas oublier que le ln n'est défini que sur $\mathbb{R}_+^*$). L'équation homogène associée est

$$(\mathrm{H}) : y' - \frac{2t}{t^2+1} y = 0$$

et donc d'après le théorème du cours, on obtient :

$$\mathrm{S_H} = \left\{ x \mapsto \lambda \exp\left(\ln\left(x^2+1\right)\right), \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \mapsto \lambda(x^2+1), \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Cherchons donc maintenant une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution particulière y_0 sous la forme $y_0(x) = \lambda(x)(x^2+1)$ avec λ dérivable. On a de plus $y_0'(x) = \lambda'(x)(x^2+1) + 2x\lambda(x)$. y_0 est solution de (E_1) si et seulement si, pour tout $x > 0$ on a :

$$y_0'(x) - \frac{2x}{x^2+1} y_0(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2+1} \iff (x^2+1)\lambda'(x) = \frac{x\ln(x)}{x^2+1} \iff \lambda'(x) = \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$$

Il faut donc trouver une primitive de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Nous avons trouvé dans l'exercice 20 du chapitre 10 qu'une fonction qui convient est la fonction λ définie par :

$$\lambda(x) = -\frac{\ln(x)}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1).$$

Donc une solution particulière est donnée par

$$y_0(x) = \lambda(x)(x^2+1) = -\frac{\ln(x)}{2} + \frac{1}{2} \times \ln(x)(x^2+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) \times (x^2+1) = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) \times (x^2+1)$$

D'où

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{ x \mapsto \lambda(x^2+1) + \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) \times (x^2+1), \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Or, une solution de (E) tend vers λ en 0^+ (le premier terme tend évidemment vers λ, le deuxième tend vers 0 par croissance comparée, et le troisième tend vers 0 car produit de deux termes tendant vers 0). La seule solution admettant 0 comme limite en 0^+ est donc la solution définie par $\lambda = 0$, donc la solution particulière y_0.

$\boxed{2}$ Application directe du cours. On va chercher à appliquer le principe de superposition. On note $(\mathrm{H}) : y'' - 2y' + 10y = 0$ l'équation homogène associée et $(\mathrm{R}) : r^2 - 2r + 10 = 0$ l'équation caractéristique associée. Les racines de cette équations sont les deux complexes conjugués $1 \pm 3i$. Par le théorème du cours, on a :

$$\mathrm{S_H} = \left\{ x \mapsto e^x\left(\lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)\right), \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

On veut appliquer le principe de superposition, soient donc les deux nouvelles équations suivantes :

$$\mathcal{E}_1 : y'' - 2y' + 10y = \cos(2t) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{E}_2 : y'' - 2y' + 10y = (t+1)e^{3t}$$

On cherche y_1 et y_2 deux solutions particulières de, respectivement, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ et une solution particulière de (E_2) sera donc donnée par $y_0 = y_1 + y_2$. Pour $\mathcal{E}_1$, on se ramène à l'équation complexifiée $(\mathrm{E}_3) : y'' - 2y' + 10y = e^{2it}$. Comme $2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière y_1 sous la forme $y_1(x) = \mathrm{A}e^{2ix}$, et on prendra ensuite la partie réelle, et comme 3 n'est pas non plus solution de cette équation, on cherche une solution particulière y_2 sous la forme $y_2(x) = (cx+d)e^{3x}$. Des calculs classiques comme en TD nous donnent $c = \dfrac{1}{13}$ et $d = \dfrac{9}{169}$, et

$$x \mapsto -\frac{1}{13}\sin(2x) + \frac{3}{26}\cos(2x)$$

comme solution particulière de (E_1). Donc, on a enfin

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{ x \mapsto e^x\left(\lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)\right) + \frac{3}{26}\cos(2x) - \frac{1}{13}\sin(2x) + \left(\frac{x}{13} + \frac{9}{169}\right)e^{3x}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

$\boxed{3.(a)}$ Question classique. Si f est une solution dérivable sur $\mathbb{R}$ de l'équation, alors on a pour tout x : $y'(x) = 1 - 2xy(x)$ ce qui montre que y' est continue. Donc y est $\mathscr{C}^1$. Si on suppose f $\mathscr{C}^n$ avec $n \geqslant 1$ alors, par l'égalité ci-dessus, f' est $\mathscr{C}^n$ car produit de fonctions $\mathscr{C}^n$ donc f est $\mathscr{C}^{n+1}$: par récurrence, on vient de prouver que f est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n donc

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty.}$$

2 Le fait que D est solution de (E) est immédiat. D est donc une solution particulière de (E). Trouvons maintenant les solutions de l'équation homogène associée (H) : $y' + 2xy = 0$. Par le théorème du cours

$$\mathrm{S_H} = \left\{x \mapsto \lambda e^{-x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Donc
$$\mathrm{S_E} = \left\{x \mapsto \mathrm{D}(x) + \lambda e^{-x^2}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

La fonction D est impaire. En effet, pour tout x réel :

$$\mathrm{D}(-x) = e^{x^2} \int_0^{-x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t = -e^{x^2} \int_{-x}^{0} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

Or, la fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est paire donc, d'après le cours :

$$\mathrm{D}(-x) = -e^{x^2} \int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{D}(x).$$

Finalement, $x \mapsto \mathrm{D}(x) + \lambda e^{x^2}$ est impaire si et seulement si $x \mapsto \lambda e^{x^2}$ est impaire donc si et seulement si $\lambda = 0$. D est donc l'unique solution impaire de (E).

$$\boxed{\text{E admet une unique solution impaire.}}$$

Exercice 2 :

1 Immédiat.

2 On pose donc, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $z(x) = y(x) - x^2$ donc $y(x) = x^2 + z(x)$, donc (comme z est dérivable), y est dérivable et $y'(x) = z'(x) + 2x$. Dès lors :

$$\begin{aligned} y \text{ est solution sur I} &\iff \forall x \in \mathrm{I}, y'(x) + \frac{x^2}{1-x^3}y(x) + \frac{1}{1-x^3}y^2(x) = \frac{2x}{1-x^3} \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, z'(x) + 2x + \frac{x^2}{1-x^3}(z(x)+x^2) + \frac{1}{1-x^3}(z(x)+x^2)^2 = \frac{2x}{1-x^3} \end{aligned}$$

En développant et en simplifiant on obtient que y est solution sur I de (R) si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a

$$z'(x) + \frac{3x^2}{1-x^3}z(x) + \frac{1}{1-x^3}z^2(x) = 0$$

ce qui est bien une équation homogène du premier ordre.

$$\boxed{y \text{ est solution de (R) si et seulement si } z \text{ est solution de (H) : } z' + \frac{3x^2}{1-x^3}z + \frac{1}{1-x^3}z^2 = 0.}$$

3 On commence à avoir l'habitude de ce genre de raisonnements. La solution nulle est solution de l'équation précédente et si z s'annule en un réel x_0, comme la solution nulle est solution de cette équation et s'annule aussi en x_0, alors z est la solution nulle par unicité au problème de Cauchy.

$$\boxed{\text{Une solution de (H) non nulle ne s'annule pas sur I.}}$$

4 w est définie sur le même intervalle I que z, car z ne s'annule jamais. w est également non nulle (car son numérateur est égal à 1, pas besoin de déranger Cauchy pour ça) et on a $z = \dfrac{1}{w}$. w est dérivable donc $z' = -\dfrac{w'}{w^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de H} &\iff \forall x \in \mathrm{I}, z'(x) + \frac{3x^2}{1-x^3}z(x) + \frac{1}{1-x^3}z^2(x) = 0 \\ &\iff \forall x \in \mathrm{I}, -\frac{w'(x)}{w^2(x)} + \frac{3x^2}{1-x^3} \times \frac{1}{w(x)} + \frac{1}{1-x^3} \times \frac{1}{w^2(x)} = 0 \end{aligned}$$

En multipliant par $w^2(x)$ qui est non nul on obtient : z est solution de l'équation différentielle de la question 3 si et seulement si w est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{(\mathrm{E}) : \quad w' - \frac{3t^2}{1-t^3}w = \frac{1}{1-t^3}}$$

5 C'est une équation différentielle linéaire de degré 1, qu'on sait résoudre (résolution de l'équation homogène associée puis variation de la constante) et on trouve

$$\mathrm{S_E} = \left\{ x \mapsto \frac{\lambda + x}{1 - x^3}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Les fonctions z associées sont donc :

$$\mathrm{S_Z} = \left\{ x \mapsto \frac{1 - x^3}{\lambda + x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc on a finalement :

$$\boxed{\mathrm{S_R} = \left\{ x \mapsto x^2 + \frac{1 - x^3}{\lambda + x}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

> Les solutions sont définies sur des intervalles du type $]-\infty\,;-\lambda\,[$ ou $]\,\lambda\,;+\infty\,[$. Elles peuvent donc être définies en 1, mais ne sont pas solutions en 1 car il n'y a pas d'équation différentielle en 1. Cela dépend de la condition initiale. Par exemple, la seule solution de (R) vérifiant $f(2) = 0$ est la fonction définie sur $]\,1/4\,;+\infty\,[$ pour $\lambda = -\dfrac{1}{4}$. Comme l'équation n'est pas linéaire, il n'y a aucune raison que les solutions soient définies sur $]-\infty\,;1\,[$ ou sur $]\,1\,;+\infty\,[$. L'unicité au problème de Cauchy peut s'interpréter géométriquement comme suit : par tout point du plan différent du point $(1, 1)$ passe le graphe d'une unique solution de (R).
>
> Les équations de Ricatti sont les équations de la forme $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ avec $a, b, c : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continues. On sait résoudre ces équations dès qu'on en connaît une solution particulière. En effet, il suffit de faire comme dans l'exercice. Si y_0 est une solution particulière, on pose $y = y_0 + z$ donc y est solution de l'équation de Ricatti si et seulement si z est solution de $z' = (2a(x)y_0(x) + b(x))z + a(x)z^2$. On pose $w = \dfrac{1}{z}$ (possible car z ne s'annule pas grâce au résultat d'unicité au problème de Cauchy) et on se ramène à une équation linéaire du premier ordre que l'on sait résoudre.

Problème :
Exercice 4 - Caractérisation des équations linéaires.

1.(a) La tangente est solution de l'équation différentielle $z' = 1 + z^2$ donc de l'équation différentielle $z' = f(t, y)$ avec

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, z) & \longmapsto 1 + z^2 \end{cases}$$

Comme il y a un carré,

$$\boxed{\text{Ce n'est pas une équation linéaire.}}$$

1.(b) On rappelle que la tangente à la courbe représentative d'une fonction f dérivable au point d'abscisse x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Cette tangente a donc pour équation

$$\boxed{y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}}$$

1.(c) En appliquant le théorème de dérivation des fonctions composées (qui n'apporte aucun terme mais il faut quand même le faire proprement) on trouve qu'en tout x où $\tan_\lambda$ est définie, on a :

$$\tan_\lambda'(x) = 1 + \tan^2(x + \lambda) = 1 + \tan_\lambda^2(x)$$

et c'est bien la même équation différentielle que la tangente : $z' = 1 + z^2$.

$$\boxed{\tan_\lambda \text{ est solution de la même équation différentielle que la tangente.}}$$

1.(d) C'est immédiat :

$$\boxed{\text{Ces deux droites ont respectivement pour équations } y = x - \frac{\pi}{4} \text{ et } y = 2x - \frac{\pi}{2} - 1.}$$

1.(e) Il n'est pas utile ici de chercher les points d'intersection ! Deux droites parmi les trois sont parallèles et distinctes (elles ont le même coefficient directeur et pas le même terme constant). La troisième ne leur est pas parallèle, donc les trois droites ne sont pas parallèles, et comme deux de ces droites sont parallèles, elles ne sont pas concourantes.

$$\boxed{\text{Ces trois tangentes ne sont ni parallèles ni concourantes.}}$$

2 C'est immédiat :

$$\boxed{\text{Cette droite a pour équation } y = f(x_0, z_0)(x - x_0) + y_0.}$$

3.(a) Soit φ une solution de (E). Donc $\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0)) = a(x_0)\varphi(x_0) + b(x_0) = b(x_0)$ car $a(x_0) = 0$. Par la question précédente, la tangente au graphe de φ en $(x_0, \varphi(x_0))$ est d'équation $y = b(x_0)(x - x_0) + \varphi(x_0)$. Le coefficient directeur de cette tangente ne dépend pas de φ, donc les tangentes aux courbes représentatives des solutions ont toutes même coefficient directeur donc sont parallèles (et non confondues car, comme il y a unicité au problème de Cauchy, $\varphi(x_0) \neq \psi(x_0)$ si φ et ψ sont deux solutions distinctes).

$$\boxed{\text{Si } a(x_0) = 0, \text{ les tangentes aux courbes des solutions au point d'abscisse } x_0 \text{ sont parallèles.}}$$

3.(b) Soient deux solutions de (E) distinctes φ et ψ (donc elles n'ont pas la même valeur en x_0 car il y a unicité au problème de Cauchy). Montrons que les tangentes à leurs graphes au point d'abscisse x_0 sont sécantes. Ces deux tangentes ont pour équations respectives (toujours d'après la question 2 et parce que φ et ψ sont solutions de (E)) :

$$y = [a(x_0)\varphi(x_0) + b(x_0)]\,(x - x_0) + \varphi(x_0) \qquad \text{et} \qquad y = [a(x_0)\psi(x_0) + b(x_0)]\,(x - x_0) + \psi(x_0)$$

Comme $a(x_0) \neq 0$, les coefficients directeurs sont distincts et donc les droites ne sont pas parallèles. Soit x_1 l'abscisse du point d'intersection. On a donc :

$$[a(x_0)\varphi(x_0) + b(x_0)]\,(x_1 - x_0) + \varphi(x_0) = [a(x_0)\psi(x_0) + b(x_0)]\,(x_1 - x_0) + \psi(x_0)$$

donc
$$x_1 \times a(x_0) \times [\varphi(x_0) - \psi(x_0)] = (\psi(x_0) - \varphi(x_0)) - x_0 \times a(x_0) \times (\psi(x_0) - \varphi(x_0))$$

En simplifiant par $a(x_0)(\varphi(x_0) - \psi(x_0))$ qui est non nul ($a(x_0)$ par hypothèse et la différence car ψ et φ sont deux solutions distinctes) on obtient :

$$x_1 = x_0 - \frac{1}{a(x_0)}$$

Cette abscisse ne dépend pas de ψ. En d'autres termes, **toutes** les courbes des solutions de (E) coupent la courbe de φ au point d'abscisse x_0 donc passent par le point $(x_0, \varphi(x_0))$:

$$\boxed{\text{Toutes ces droites sont concourantes.}}$$

4.(a) Le coefficient de cette tangente est $z'(x_0)$ qui est égal à $f(x_0, z(x_0))$ car z est solution de (E), et $z(x_0) = y_0$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Le coefficient cherché est égal à } f(x_0, y_0).}$$

4.(b) Par hypothèse, il existe une solution de (E) y telle que $z(x_0) = y_0$. Comme z est solution de (E), $f(x_0, y_0) = z'(x_0)$ est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe de cette solution en le point d'abscisse x_0. Il y a deux cas de figure :

- **Premier cas : les tangentes en x_0 sont parallèles.** Les coefficients directeurs des tangentes sont égaux donc, $f(x_0, y_0) = f(x_0, y_1)$ donc cette quantité est nulle, donc elle ne dépend pas de y_0 ni de y_1.
- **Deuxième cas : elles sont concourantes.** On suppose qu'elles sont concourantes en un point de coordonnées (u, v). La tangente à la courbe au point d'abscisse x_0 relie les points de coordonnées (x_0, y_0) et (u, v). Le coefficient directeur m d'une droite reliant ces points vérifie

  $$m = \frac{v - y_0}{u - x_0}$$

  Or, ce coefficient directeur est $f(x_0, y_0)$. On obtient une égalité analogue pour y_1. En remplaçant, on montre que la quantité de l'énoncé est égale à

  $$\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_1)}{y_0 - y_1} = \frac{v - y_0 - v + y_1}{(u - x_0)(y_0 - y_1)} = -\frac{1}{u - x_0}$$

  ce qui est bien indépendant de y_0 et y_1.

$\boxed{\text{La quantité } a(x_0) \text{ est bien indépendante de } y_0 \text{ et de } y_1.}$

4.(c) Si $a(x_0) \neq 0$, cette quantité est égale à :

$$f(x_0, y_0) + \frac{y_0}{u - x_0} = \frac{v - y_0 + y_0}{u - x_0} = \frac{v}{u - x_0}$$

ce qui est bien indépendant de y_0.

$\boxed{\text{Si } a(x_0) \neq 0, \text{ la quantité } f(x_0, y_0) - a(x_0)y_0 \text{ ne dépend pas de } y_0.}$

4.(d) Si $a(x_0) = 0$, la quantité précédente est toujours égale à $f(x_0, y_0)$ qui est une constante car toutes les tangentes sont parallèles, donc elle ne dépend pas non plus de y_0. Dans tous les cas, il existe $a(x_0)$ et $b(x_0) = f(x_0, y_0) - a(x_0)y_0$ indépendants de y_0 tels que pour tout y, $f(x_0, y) = a(x_0)y + b(x_0)$. La fonction f définie ainsi par $(x, z) \mapsto f(x, z) = a(x)z + b(x)$ est donc linéaire en z donc l'équation différentielle associée est bien linéaire.

$\boxed{\text{D'où l'équivalence recherchée.}}$