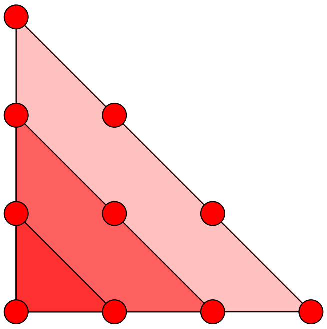
# Devoir Maison n°3

## Exercice 1 - Nombres polygonaux.

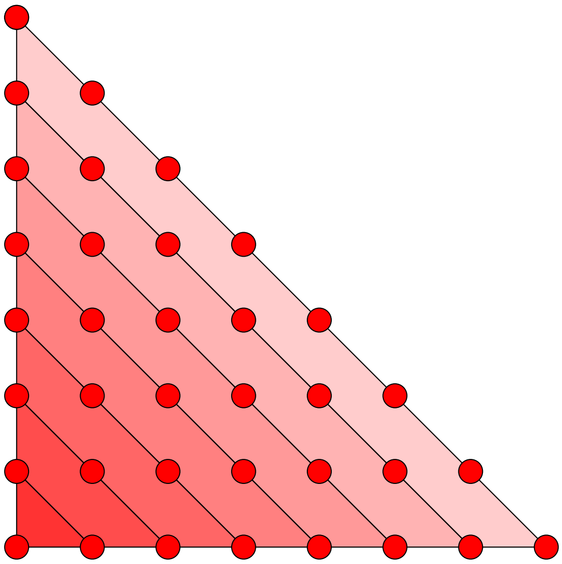
### Introduction :

Le nombre 10 a une propriété intéressante : on peut « l'écrire » sous forme de triangle, c'est-à-dire que si on prend 10 boules, on peut les disposer de façon à obtenir une suite croissante de triangles, comme sur la figure ci-contre : le premier « triangle » est juste le point en bas à gauche (« l'origine »), les côtés du deuxième triangle sont composés de deux boules, ceux du troisième triangle sont composés de trois boules, et ceux du quatrième triangle sont composés de quatre boules. On dit que 10 est un *nombre triangulaire*. Par contre, on ne peut pas l'écrire sous forme d'une suite croissante de carrés contrairement à 9 par exemple. On dit que 9 est un *nombre carré*. Mais ce n'est pas un nombre triangulaire.

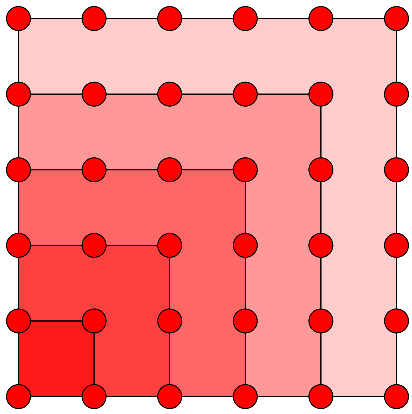


$n = 10$

36, par contre, est à la fois un nombre carré et un nombre triangulaire, ce qu'on peut voir sur la figure ci-dessous.



$n = 36$



Bien sûr, on peut continuer et définir les nombres pentagonaux, hexagonaux, heptagonaux... De tels nombres sont appelés *nombres polygonaux*, et le but de cet exercice est de donner leur valeur.

### Partie I - Questions de cours :

Donner les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} k, \sum_{k=1}^{n} k^2$ et de $\sum_{k=1}^{n} k^3$ (démonstration uniquement pour la première).

### Partie II - Nombres triangulaires :

Soit $n \geq 1$. Le $n^e$ nombre triangulaire, noté $T_n$, est le nombre obtenu par une suite croissante de $n$ triangles, sur le même modèle que ci-dessus (le $n^e$ triangle ayant des côtés constitués de $n$ boules). Par exemple, $T_4 = 10$ et $T_8 = 36$.

1. Donner (sans démonstration) $T_2, T_3$ et $T_5$ (par convention, $T_1 = 1$).
2. En comptant les boules par colonnes, écrire $T_n$ sous la forme d'une somme de référence. Dans cette question et dans la suite de l'exercice, les sommes pourront être données sans démonstration (car il n'y a pas grand chose à montrer, en particulier pour $T_n$...), mais que cela ne devienne pas une habitude. En particulier, à part pour $T_n$ qui est une somme de référence, les calculs permettant de donner les valeurs explicites de ces sommes devront figurer sur la copie.

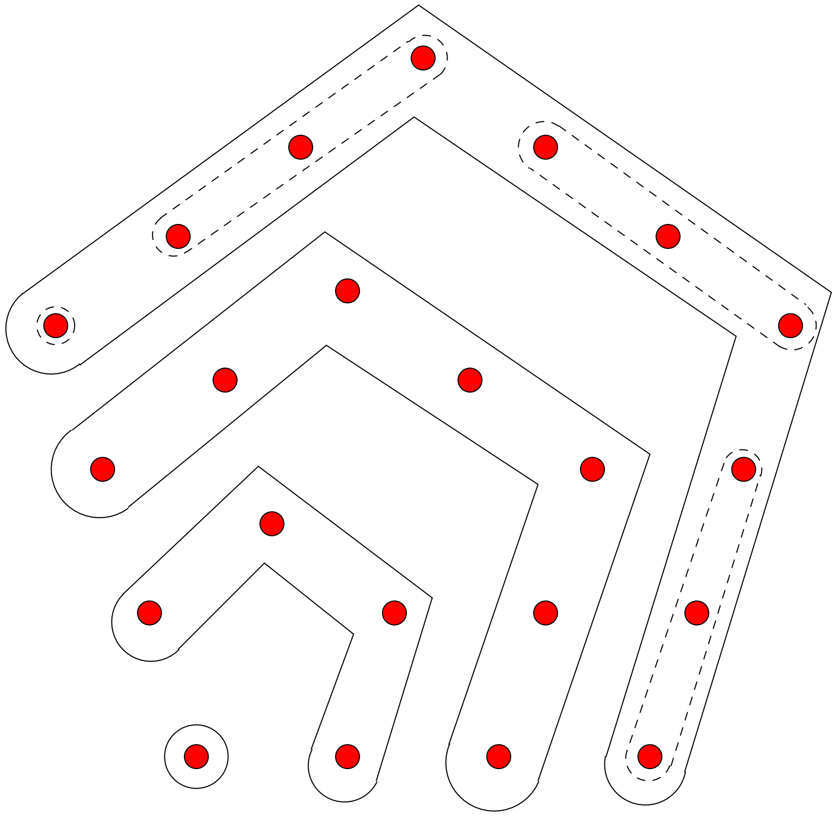
3. Donner la valeur de $T_n$ pour tout $n \geq 1$ (il est fortement recommandé de vérifier au brouillon que cela donne effectivement les bonnes valeurs de $T_4$ et $T_8$). Donner la valeur de $T_{100}$ (mais ce n'est pas la peine de le dessiner...).

## Partie III - Nombres pentagonaux & Cie :

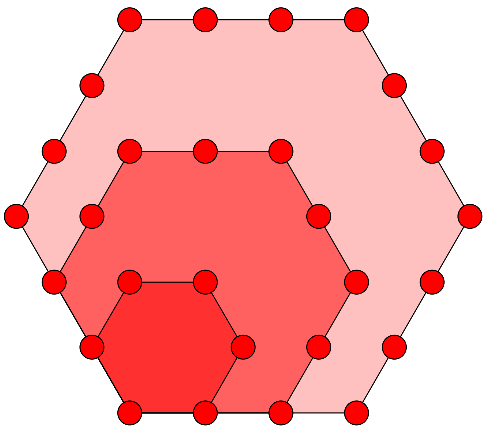
Puisqu'il est évident que le $n^e$ nombre carré est $n^2$, passons à présent aux nombres pentagonaux.

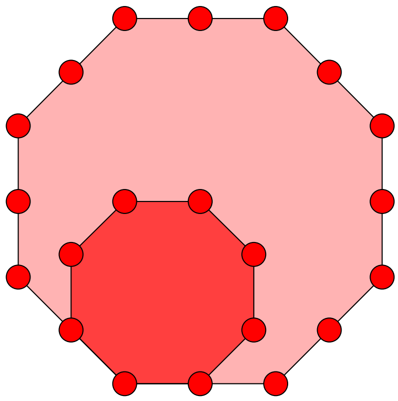
Le $n^e$ nombre pentagonal, appelé $P_n$, est le nombre obtenu par une suite croissante de pentagones construits sur le même modèle que dans les parties précédentes. Par exemple, $P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12$ et $P_4 = 22$ comme on peut le voir ci-contre.

Voyons comment exprimer $P_n$ à l'aide d'une somme en examinant le cas particulier de $P_4$. On voit que $P_4$ est la somme des 4 « couronnes » entourées en traits pleins, et que (par exemple) la 4$^e$ couronne peut être décomposée comme un point (le point de départ d'un nouveau pentagone) et 3 côtés de 3 boules (le nombre de boules de chaque côté, moins le sommet déjà compté car appartenant au côté précédent).



1. Exprimer (en s'inspirant du cas $n = 4$) $P_n$ sous forme d'une somme, et donner la valeur de $P_n$ pour $n \geq 1$.
2. Donner de même la valeur de $H_n$ et $O_n$, respectivement le $n$-ième nombre hexagonal et le $n^e$ nombre octogonal (ci-dessous, les nombres $H_4 = 28$ et $O_3 = 21$).





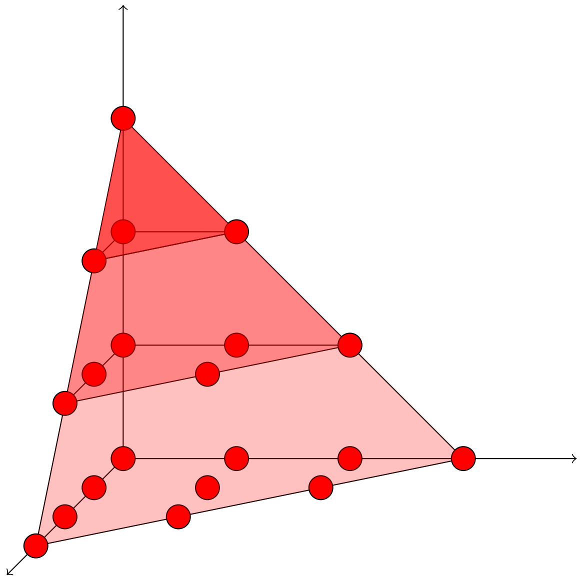
3. Soit $C \geq 3$ un entier. Donner la valeur de $X_n$, nombre représenté par une suite de $n$ polygones pleins à $C$ côtés (idem, somme puis valeur). Quel est le 10$^e$ nombre triskaidécagonal[1] ($C = 13$) ?
4. On suppose de nouveau que $C$ est quelconque supérieur ou égal à 3. Donner la limite de la suite $\left(X_n/n^2\right)_{n\geq 1}$ en fonction de $C$.

## Partie IV - Points du tétraèdre à coordonnées entières :

Soit $n \geq 1$. On note $\theta_n$ le nombre de points à coordonnées entières à l'intérieur (au sens large, donc y compris les points sur les faces et les arêtes) du tétraèdre de sommets $(0,0,0), (n-1,0,0), (0,n-1,0)$ et $(0,0,n-1)$. Ci-dessous, on a représenté ces points et les étages du tétraèdre pour $n = 4$, et on voit que $\theta_4 = 20$.

1. Exprimer $\theta_n$ à l'aide des nombres triangulaires.
2. En déduire la valeur de $\theta_n$ en fonction de $n$ puis donner la limite de la suite $\left(\theta_n/n^3\right)_{n\geq 1}$.

1. C'est un mot qu'on a rarement l'occasion de placer dans une conversation...



# Exercice 2 - Inégalité de Carleman

On se donne dans tout cet exercice une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de nombres positifs, et on pose, pour tout entier $j \geq 1$,

$$w_j = \sum_{k=1}^{j} k \times u_k$$

Les questions 1, 2 et 3 sont totalement indépendantes, et la question 4 dépend des trois questions précédentes.

1. (a) Donner deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $j \geq 1$,

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{a}{j} + \frac{b}{j+1}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{j(j+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \frac{w_n}{n+1}$$

   (c) Conclure que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{j(j+1)} \leq \sum_{j=1}^{n} u_j$.

2. (a) Montrer que pour tout $x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

   (b) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leq e$.

   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}$. En déduire que $\dfrac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n$ puis une minoration de $(n!)^{1/n}$.

3. Soit $j \geq 1$. On définit les réels $a_1, \ldots, a_j$ par $a_k = k \times u_k$ pour tout $k \in [\![ 1\,;\, j ]\!]$.

   (a) Montrer que

$$a_1 \times \cdots \times a_j = j! \times (u_1 \times \cdots \times u_j)$$

   (b) Exprimer $\dfrac{a_1 + \cdots + a_j}{j}$ en fonction de $w_j$.

   (c) En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique (cf. exercice 14 du chapitre 2) aux $a_k$, en déduire que

$$(u_1 \cdots u_j)^{1/j} \leq \frac{w_j}{j \times (j!)^{1/j}}$$

4. En combinant les résultats des questions 1.(c), 2.(c) et 3.(c), montrer l'inégalité de Carleman :

$$\sum_{j=1}^{n} (u_1 \cdots u_j)^{1/j} \leq e \sum_{j=1}^{n} u_j$$

# Problème - Des calculs de complexité.

En informatique, les calculs de complexité (temporelle, par opposition à la complexité spatiale) consistent à évaluer certains « coûts » d'algorithmes : temps de calcul, nombre de comparaisons dans un tableau, nombre d'opérations élémentaires... Tout cela conduit à l'étude d'une suite $(C_n)_{n\geq 0}$ dont on essaye de donner un ordre de grandeur, ou qu'on essaye tout simplement de majorer. Par exemple, la méthode naïve vue à l'école primaire pour multiplier deux nombres à $n$ chiffres a une complexité de l'ordre de $n^2$. On va voir ici quelques calculs de complexité classiques. Même si l'introduction et le titre des parties font un peu peur, je vous rassure : aucune connaissance en informatique n'est nécessaire pour traiter ce problème, il ne s'agit que d'un exercice de récurrences, de suites et de sommes !

Toutes les parties sont indépendantes. En particulier, toutes les suites $(C_n)$ sont distinctes !

## Partie A - Un cas simple : le tri par sélection.

Dans cette partie, on suppose qu'il existe $a, b, c$ tels que :

$$\forall n \geq 2, \qquad C_n = a + \sum_{i=0}^{n-2} \left( b + \sum_{j=i+1}^{n-1} c \right)$$

Exprimer $C_n$ en fonction de $n, a, b$ et $c$ pour tout $n \geq 2$.

## Partie B - L'exponentiation rapide à coûts bilinéaires.

On suppose dans cette partie que $C_0 = C_1 = 0$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ :

$$\begin{cases} C_{2p} & = & C_p + p^2 \\ C_{2p+1} & = & C_p + p^2 + 2p \end{cases}$$

1. Calculer $C_2, C_3, C_4$ et $C_5$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n > 0, C_n < C_{n+1}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, C_n \leq \dfrac{n^2+2n}{3}$.

## Partie C - Le tri rapide : complexité en moyenne.

On suppose dans cette partie qu'il existe $\lambda > 0$ tel que pour tout $n \geq 2$ :

$$C_n \leq \lambda \times n + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} (C_k + C_{n-k})$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que $C_n \leq \lambda \times n + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} C_k$. On définit une autre suite $(\alpha_n)$ par $\alpha_1 = C_1$ et pour $n \geq 2$ :

$$\alpha_n = \lambda \times n + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 1, C_n \leq \alpha_n$.
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $n\alpha_n = (n+1)\alpha_{n-1} + (2n-1)\lambda$.
4. On pose $\beta_n = \dfrac{\alpha_n}{n+1}$. Donner une relation entre $\beta_n$ et $\beta_{n-1}$.
5. Exprimer $\beta_2$ en fonction de $\beta_1$, puis $\beta_3$ en fonction de $\beta_1$.
6. Exprimer $\beta_n$ à l'aide de $\beta_1$ et d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
7. Donner le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x(x+1)}$ sur son domaine de définition.
8. Montrer qu'il existe $a$ et $b$ que l'on explicitera tels que pour tout $x$ différent de 0 et de $-1$ :

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

9. Montrer, en raisonnant comme dans l'exercice 16, que :

$$\sum_{k=3}^{n} f(k) \leq \int_{2}^{n} f(t)dt$$

Donner une majoration de $\beta_n$.

10. En déduire qu'il existe une constante $A$ que l'on explicitera telle que $\beta_n \leq 3\lambda \ln(n+1) + A$.
11. En remarquant que $n+1 \leq 2n$, montrer que $C_n \leq (6\lambda+2)n\ln(n)$ pour $n$ assez grand. On utilisera le fait (immédiat par définition d'une limite infinie) que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors $u_n \geq A$ pour $n$ assez grand.

## Partie D - L'algorithme de Karatsuba.

On suppose dans cette dernière partie que la suite $(C_n)$ est croissante, à valeurs positives et qu'il existe deux constantes $A$ et $B$ telles que pour tout $n \geq 1, C_{2n} \leq 3C_n + An + B$.

1. (a) Montrer que

$$C_8 \leq 27C_1 + 4A\left(1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) + B(1+3+9)$$

   (b) Donner par récurrence une majoration de $C_{2^k}$ en fonction de $k, A, B$ et $C_1$. On pourra faire toute la récurrence avec des sommes, mais la majoration finale ne devra plus contenir de signe $\sum$.

   (c) Notons $\alpha_k$ la majoration de $C_{2^k}$ obtenue à la question précédente. Montrer que la suite $(\alpha_k/3^k)$ converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de $C_1, A$ et $B$. On rappelle qu'une suite géométrique de raison $q \in \,]\,0\,;1\,[$ converge vers 0.

   (d) Montrer qu'il existe une constante $M$ telle que pour $k$ assez grand, $C_{2^k} \leq M \times 3^k$. On pourra utiliser le résultat suivant (découlant immédiatement de la définition d'une limite) : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$ alors $u_n \leq L+1$ pour $n$ assez grand.

   (e) On pose $n = 2^k$. Exprimer $k$ en fonction de $n$, puis en déduire l'existence d'un réel $\alpha$ que l'on explicitera tel que $3^k = n^\alpha$. On a donc montré que si $n$ est une puissance de 2 assez grande, $C_n \leq M \times n^\alpha$.

   (f) Donner le signe de $\alpha - 2$.

2. Soit $n$ quelconque supérieur ou égal à 1 (pas forcément une puissance de 2).

   (a) Prouver l'existence d'un entier $k$ tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$.

   (b) Donner un encadrement de $k$ en fonction de $n$.

   (c) En se rappelant que la suite $(C_n)$ est croissante, montrer que pour $n$ assez grand, $C_n \leq M \times (2n)^\alpha$.