Correction du DM n°13

Exercice :

1 Soit $\mathrm{F} = \{\mathrm{A}_1 ; \dots ; \mathrm{A}_n\}$ une chaîne.

- Puisque A_1 a un seul élément, il y a n choix possibles pour cet élément.
- Puisque A_2 a 2 éléments et contient A_1, il suffit de choisir l'autre élément de A_2 : $n-1$ choix possibles.
- Idem, il y a $n-3$ choix possibles pour le troisième élément de A_3, l'unique élément qui n'est pas dans A_2.
- Et ainsi de suite jusqu'à A_n.

Par principe multiplicatif $\boxed{\text{Il y a } n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n! \text{ chaînes.}}$

2 Une chaîne $\mathrm{F} = \{\mathrm{A}_1 ; \dots ; \mathrm{A}_n\}$ contient A si et seulement si :

- $\mathrm{A}_k = \mathrm{A}$ puisque A a k éléments.
- $\{\mathrm{A}_1 ; \dots ; \mathrm{A}_k\}$ est une chaîne de $\mathrm{A}_k = \mathrm{A}$: d'après la question précédente, il y a $k!$ choix possibles.
- $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}_{k+1} \subset \cdots \subset \mathrm{A}_n$ avec A_{k+1} de cardinal $k+1$ etc. Il y a $n-k$ choix possibles pour l'unique élément de A_{k+1} qui n'est pas dans A etc. : $(n-k) \times \cdots \times 1 = (n-k)!$ choix possibles.

Par principe multiplicatif $\boxed{\text{Il y a } k! \times (n-k)! \text{ chaînes qui contiennent A.}}$

3 Immédiat : si on a deux éléments d'une même antichaîne, l'un des deux ne peut pas être inclus dans l'autre, ce qui n'est pas compatible avec le fait d'appartenir à une même chaîne.

$$\boxed{\text{Deux éléments d'une même antichaîne ne peuvent pas appartenir à une même chaîne.}}$$

4 Soit donc $k \in [\![0 ; n]\!]$. D'après la question 2si A est un élément de F de cardinal k, il y a $k!(n-k)!$ chaînes contenant A. D'après la question précédente, tous les éléments de F de cardinal k sont dans des chaînes distinctes, et il y a m_k tels ensembles, donc il y a $m_k \times k! \times (n-k)!$ chaînes contenant un élément de F de cardinal k car toutes les chaînes en question sont distinctes.

Or, les différents cas de figure sont incompatibles : deux éléments d'une même antichaîne ne peuvent pas appartenir à une même chaîne. En particulier, une même chaîne ne peut pas contenir un élément de F à 1 élément et un élément de F à 2 éléments, par exemple. Par principe additif, le nombre de chaînes contenant un élément de F est égal à

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)!$$

Or, ce nombre est évidemment inférieur au nombre total de chaînes ce qui nous donne

$$\sum_{k=0}^{n} m_k k!(n-k)! \leqslant n!$$

et en divisant par $n!$ on a le résultat voulu.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \leqslant 1}$$

4 Soit $n \in [\![0 ; n]\!]$. Supposons dans un premier temps $k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$.

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(\lfloor n/2 \rfloor)!(n - \lfloor n/2 \rfloor)!}{n!} \\
&= \frac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \times \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \times \cdots \times (k+1)}{(n-k) \times (n-k+1) \times \left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right)}
\end{aligned}$$

Il est immédiat qu'on a autant de termes au numérateur et au dénominateur ($\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - k$ pour être précis) et que tous les termes du dénominateurs sont supérieurs à ceux du numérateur. Donc cette quantité est inférieure à 1 ce qui montre le résultat pour $k \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. De plus, pour tout k on sait que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ donc le résultat est aussi prouvé dans l'autre cas.

$$\boxed{\forall k \in [\![0\,;\,n]\!], \binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

6 D'après les deux questions précédentes,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{m_k}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}} \leqslant 1$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} m_k \leqslant \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$$

Or, $\mathrm{Card}\,(\mathrm{F}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k$, d'où la majoration du théorème de Sperner. De plus, le cours nous dit qu'il y a $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ sous-ensembles de E à $\lfloor n/2 \rfloor$ éléments et il est évident que si on prend deux tels ensembles distincts, il n'y en a pas un qui contient l'autre. Donc l'ensemble des sous-ensembles de E à $\lfloor n/2 \rfloor$ éléments est une antichaîne avec le bon nombre d'éléments donc c'est bon.

$$\boxed{\text{Le théorème de Sperner est démontré.}}$$

Problème 1 : Marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

Partie I. Chemins

1 Un chemin à n pas peut être modélisé par un élément de $\{\pm 1\}^n$: 1 pour une montée, -1 pour une descente. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{Il y a } 2^n \text{ chemins possibles issus de } (0,0) \text{ et effectuant } n \text{ pas.}}$$

2.(a) $m+d$ est le nombre de montées plus le nombre de descentes : comme, à chaque étape, il y a forcément une montée ou une descente (ou exclusif), alors $m+d$ est égal à n, le nombre de pas, c'est-à-dire que $m+d=n$. De même, $m-d$ est le nombre de montées moins le nombre de descentes, donc « l'altitude finale », c'est-à-dire que $m-d=k$.

$$\boxed{m+d=n \qquad \text{et} \qquad m-d=k}$$

Par somme, $n+k=2m$ donc $n+k$ est pair donc n et k ont la même parité. En effet, s'ils sont de parités différentes, alors leur somme est impaire (un nombre impair plus un nombre pair égale un nombre impair), ce qui est exclu.

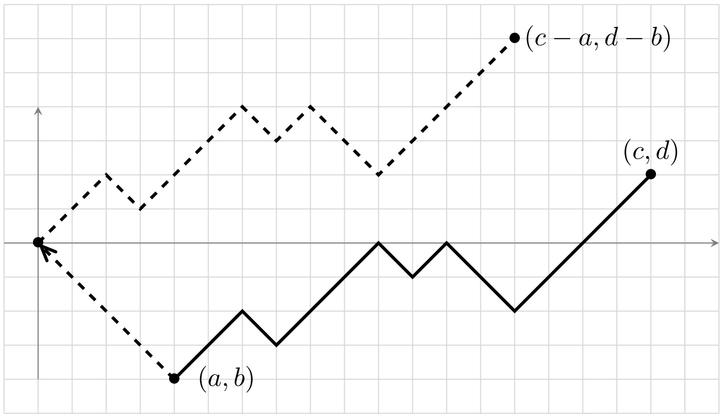
$$\boxed{n \text{ et } k \text{ sont de même parité.}}$$

2.(b) RAISONNEMENT CLASSIQUE ! Un chemin est entièrement déterminé par l'emplacement de ses montées : en effet, si on sait quand les montées se produisent, alors on sait également quand les descentes se produisent (ce sont les autres instants). Par exemple, si on sait que, dans l'exemple du sujet, les montées se produisent aux instants $1, 2, 4, 5, 6, 9, 14, 17, 18, 19, 20$ alors on sait que les descentes ont lieu aux instants $3, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16$ et donc on sait construire le chemin. L'ordre dans lequel on pioche les montées ne compte pas (c'est-à-dire que si on prend d'abord l'instant 1 puis l'instant 2 ou le contraire, cela ne change rien, on aura des montées aux instants 1 et 2) et on ne peut pas prendre plusieurs fois le même moment donc on a un coefficient binomial. Enfin, d'après la question précédente, $m=(n+k)/2$, d'où le résultat.

$$\boxed{\text{Le nombre de chemins reliant } (0,0) \text{ à } (n,k) \text{ est } \binom{n}{\frac{n+k}{2}}.}$$

> On pouvait bien sûr dire qu'un chemin est entièrement déterminé par son nombre des descentes, qui vaut (d'après la question précédente) $(n-k)/2$ si bien que le nombre de chemins recherché est $\binom{n}{\frac{n-k}{2}}$: heureusement, c'est le même nombre que ci-dessus par symétrie des coefficients binomiaux.

3 Une simple translation de vecteur $(-a,-b)$ nous montre que le nombre de chemins reliant (a,b) à (c,d) est le même que le nombre de chemins reliant $(0,0)$ à $(c-a, d-b)$:



En conclusion $\boxed{\text{Le nombre de chemins reliant } (a, b) \text{ à } (c, d) \text{ est } \binom{c-a}{\frac{c-a+d-b}{2}}.}$

Partie II. Problème du scrutin et principe de réflexion

$\boxed{1}$ Comme ci-dessus, un élément de Ω est entièrement déterminé par l'emplacement des éléments valant 1, les autres éléments valant automatiquement -1. Puisqu'on trouve a fois le nombre 1 sur $a+b$ emplacements, le résultat en découle.

$$\boxed{\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{a+b}{a}}$$

$\boxed{2}$ À tout chemin reliant $(1, 1)$ à $(a+b, a-b)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée nulle, on associe un chemin reliant $(1, -1)$ de la façon suivante : si on note α le premier moment où le chemin touche l'axe des abscisses, on lui associe le chemin « miroir » entre l'instant 1 et l'instant α, c'est-à-dire le symétrique par rapport à l'axe des abscisses entre les instants 1 et α, le chemin étant inchangé après l'instant α. Montrons que cela définit bien une bijection entre les chemins reliant $(1, 1)$ à $(a+b, a-b)$ passant au moins une fois par un point d'ordonnée nulle, et les chemins quelconques reliant $(1, -1)$ à $(a+b, a-b)$:

- si deux chemins ont la même image, alors ils sont égaux car, avant α, le premier contact avec l'axe des abscisses, ils sont opposés au chemin image, donc égaux, et après, ils sont égaux au chemin image, donc égaux entre eux. On a donc bien une injection.
- tout chemin reliant $(1, -1)$ à $(a+b, a-b)$ a un antécédent : le chemin qui coïncide avec lui à partir de α, le premier moment où ce chemin touche l'axe des abscisses (puisqu'on relie un point d'ordonnée négative à un point d'ordonnée positive, car $a-b > 0$, on touche forcément l'axe des abscisses, inutile de déranger le TVI pour ça...) et qui est symétrique par rapport à l'axe des abscisses avant α : d'où la surjectivité.

> Dessinez un chemin reliant $(1, -1)$ à $(a+b, a-b)$ et donnez son unique antécédent : vous verrez que vous n'avez pas le choix !

On a une bijection donc $\boxed{\text{C'est bon.}}$

> Il est écrit dans le programme qu'utiliser des bijections dans des problèmes de dénombrement n'est pas, justement, un attendu du programme, mais je pense que dans cette question, il faut au moins justifier rapidement que les deux nombres sont égaux en disant que deux chemins ne peuvent pas avoir la même image, et que tous les chemins sont atteints (i.e. parler d'injectivité et de surjectivité sans le dire).

$\boxed{3}$ Notons E l'événement « A est toujours strictement en tête lors du dépouillement ». Il en découle que le scrutin commence automatiquement par un bulletin pour A (sinon A n'est pas en tête à l'instant 1). On cherche donc le nombre de chemins de $(1, 1)$ à $(a+b, a-b)$ qui ne touchent jamais l'axe des abscisses, c'est-à-dire $\operatorname{Card}(\mathrm{E})$. Notons $\overline{\mathrm{E}}$ le complémentaire de E. Les éléments de $\overline{\mathrm{E}}$ sont de deux types :

- Ceux qui commencent par une descente, mais comme ils finissent encore au point $(a+b, a-b)$, ce sont les chemins reliant $(1, -1)$ à $(a+b, a-b)$.

- Ceux qui commencent par une montée, mais qui ensuite touchent à un moment donné l'axe des abscisses. On a vu à la question précédente qu'il y avait autant de tels chemins que de chemins reliant $(1,-1)$ à $(a+b, a-b)$.

Par conséquent, si on note N le nombre de chemins reliant $(1,-1)$ à $(a+b,a-b)$, alors $\mathrm{Card}\,(\overline{\mathrm{E}}) = 2\mathrm{N}$ (car les deux cas de figure ci-dessus sont incompatibles). Par conséquent,

$$\mathrm{Card}\,(\Omega) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) + 2\mathrm{N}$$

Or, il découle de la question 1 et de la partie précédente que $\mathrm{Card}\,(\Omega) = \binom{a+b}{a}$ et $\mathrm{N} = \binom{a+b-1}{a}$ (prendre 1 à la place de a, -1 à la place de b, $a+b$ à la place de c et $a-b$ à la place de d) donc

$$\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = \binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a}$$

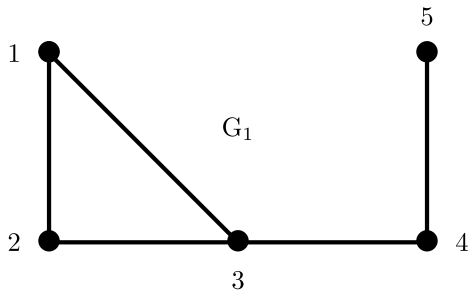
Finalement
$$\begin{aligned}\mathrm{P(E)} &= \frac{\mathrm{Card}\,(\mathrm{E})}{\mathrm{Card}\,(\Omega)} \\ &= \frac{\binom{a+b}{a} - 2\binom{a+b-1}{a}}{\binom{a+b}{a}} \\ &= 1 - 2 \times \frac{(a+b-1)!}{a!(b-1)!} \times \frac{a!b!}{(a+b)!} \\ &= 1 - 2\times\frac{b}{a+b}\end{aligned}$$

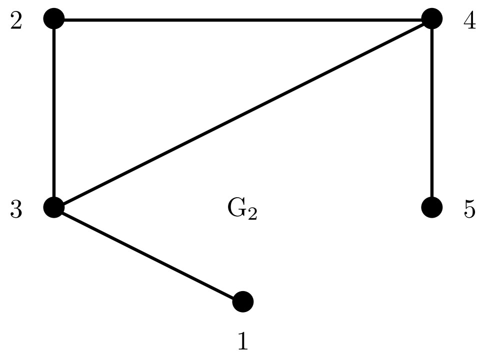
En conclusion
$$\boxed{\mathrm{P(E)} = \frac{a-b}{a+b}}$$

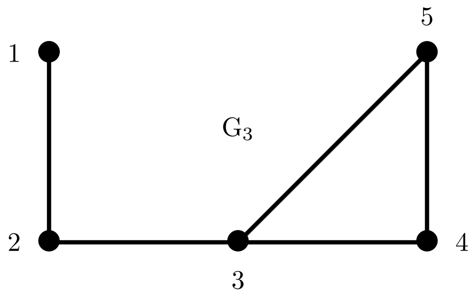
> On pouvait calculer Card (E) autrement : E est constitué des chemins qui commencent par une montée et qui ne touchent pas l'axe des abscisses. Or, un chemin qui commence par une montée peut être envoyé de façon bijective sur un chemin qui relie $(1,1)$ à $(a+b,a-b)$, donc il y a autant de chemins qui commencent par une montée que de chemins reliant $(1,1)$ à $(a+b,a-b)$, auxquels il faut enlever ceux qui touchent l'axe des abscisses, et on a vu qu'il y en avait autant que de chemins reliant $(1,-1)$ à $(a+b,a-b)$. On a donc
> $$\mathrm{Card}\,(\mathrm{E}) = \binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{a}$$
> (ce qu'on aurait aussi pu trouver à l'aide de la formule du triangle de Pascal) et on trouve la même probabilité pour E.

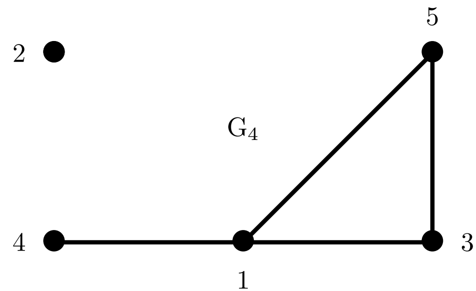
Problème 2 :

$\boxed{\mathbf{1}}$ Représentons les graphes $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{G}_3, \mathrm{G}_4$:









> On remarque que dans G_4 le sommet 2 est tout seul dans son coin. On dit que le graphe est *connexe* si le graphe est « en un seul morceau ». G_1, G_2, G_3 sont connexes mais G_4 ne l'est pas.

2.(a) Soit φ l'application de S_1 dans S_3 définie par $\varphi(1) = 5, \varphi(2) = 4, \varphi(3) = 3, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 1$. C'est bien une bijection de S_1 dans S_3. Montrons que φ est un isomorphisme de G_1 sur G_3. Il faut pour cela montrer que la condition sur les arêtes est vérifiée. Les arêtes de G_1 sont $\{1;2\}, \{1;3\}, \{2;3\}, \{3;4\}$ et $\{4;5\}$ et les arêtes $\{\varphi(s);\varphi(t)\}$ associées sont $\{5;4\}, \{5;3\}, \{4;3\}, \{2;3\}, \{1;2\}$ qui sont des arêtes de G_3. Donc $\{s;t\} \in A_1 \Rightarrow \{\varphi(s);\varphi(t)\} \in A_3$. Comme les ensembles A_1 et A_3 ont le même cardinal, on a l'implication réciproque donc c'est bien un isomorphisme.

$$\boxed{G_1 \text{ et } G_3 \text{ sont bien isomorphes.}}$$

2.(b) $V_G(s)$ est l'ensemble des voisins de s d'où son nom. Soit φ un isomorphisme de G dans G′. Soit $s \in S$. Pour tout $t \in S, \{s;t\} \in A \iff \{\varphi(s);\varphi(t)\} \in A'$. Donc t est un voisin de s si et seulement si $\varphi(t)$ est un voisin de $\varphi(s)$. φ est donc une bijection de $V_G(s)$ dans $V_{G'}(\varphi(s))$ donc ces deux ensembles ont le même cardinal, c'est ce qu'on voulait démontrer.

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

2.(c) On suppose qu'il existe un isomorphisme de G_2 dans G_1. Soit φ un tel isomorphisme de S_2 dans S_1. D'après la question précédente, $\varphi(1)$ (en tant que sommet de G_1) et 1 (en tant que sommet de G_2) ont le même nombre de voisins, c'est-à-dire 1. Or, le seul sommet de G_1 qui a un unique voisin est 5 donc $\varphi(1) = 5$. De même, $\varphi(5) = 5$, ce qui est absurde car φ est injective. Donc :

$$\boxed{\text{Ces deux graphes ne sont pas isomorphes.}}$$

3.(a) Un p-coloriage est une façon de colorier les sommets avec au plus p couleurs différentes, on numérote juste les couleurs de 1 à p. Un bon p-coloriage est une façon de colorier les sommets du graphe avec p couleurs telle que deux sommets reliés par une arête aient deux couleurs différentes. Si on comprend ça, les résultats qui suivent ne sont pas difficiles à voir. On rappelle que n_G est le nombre de sommets de G. Pour que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs différentes, il suffit (condition suffisante mais non nécessaire) de colorier tous les sommets avec une couleur différente, qu'ils soient reliés ou pas. Disons cela rigoureusement : notons $S(G) = \{x_1; \ldots; x_{n_G}\}$ et soit

$$\psi : \begin{cases} S(G) \longrightarrow [\![1\,;\, n_G]\!] \\ x_i \longmapsto i \end{cases}$$

c'est-à-dire que $\psi(x_1) = 1, \psi(x_2) = 2$ etc. Donc $\psi(s) \neq \psi(t)$ pour deux sommets distincts s, t donc en particuliers pour deux sommets s, t tels que $\{s;t\} \in A$. Donc ψ est un bon p-coloriage donc $\psi \in B(n_G, G)$ donc $f_G(n_G) \geqslant 1$ ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{n_G \in E(G)}$$

3.(b) On suppose que $p \in E(G)$ donc il existe un bon p-coloriage de G qu'on appelle ψ. Cela veut dire qu'on peut colorier les sommets de G avec p couleurs de telle façon que deux sommets reliés aient une couleur différente. Comment colorier de cette façon ces sommets avec $p+1$ couleurs ? Il suffit de ne pas toucher au coloriage, il est déjà bon, il suffit de ne pas utiliser la nouvelle couleur. Rigoureusement, soit l'application $\widetilde{\psi}$ de S dans $[\![1\,;\, p+1]\!]$ par $\widetilde{\psi}(s) = \psi(s)$ pour tout s de S. Or, ψ est un bon coloriage donc pour tous s, t tels que $\{s;t\} \in A$, $\psi(s) \neq \psi(t)$. Or, $\psi(s) = \widetilde{\psi}(s)$ et $\psi(t) = \widetilde{\psi}(t)$. Donc $\widetilde{\psi}(s) \neq \widetilde{\psi}(t)$ donc $\widetilde{\psi}$ est un bon $p+1$-coloriage donc $f_G(p+1) \geqslant 1$ donc $p+1 \in E(G)$.

$$\boxed{\text{Si } p \in E(G) \text{ alors } p+1 \in E(G).}$$

3.(c) Si θ_G existe, c'est le plus petit élément de E(G) donc il est unique. Montrons qu'il existe un tel élément. E(G) est une partie non vide de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément q. Par une récurrence immédiate et par la question précédente, pour tout $n \geqslant q, n \in E(G)$. Donc $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant q\} \subset E(G)$. S'il existe p tel que $p \in E(G) \backslash \{n \in \mathbb{N}, n \geqslant q\}$ alors $p < q$ et $p \in E(G)$ c'est absurde car q est le plus petit élément de E(G) donc $E(G) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geqslant q\}$. $\theta_G = q$ convient. On a montré l'existence et l'unicité, c'est bon.

$$\boxed{\text{Il existe un unique } \theta_G \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } E(G) = \{p \in \mathbb{N}^* \,|\, p \geqslant \theta_G\}.}$$

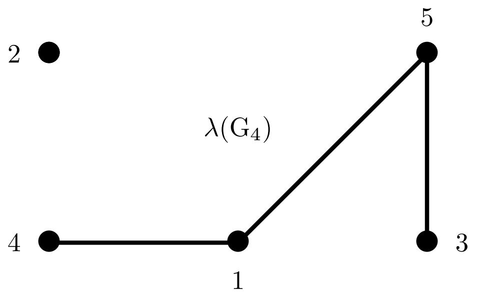
4 On cherche une façon de colorier n_{G} sommets avec p couleurs tels que deux sommets reliés n'aient pas la même couleur. Or, il n'y a aucune arête, donc deux sommets ne sont jamais reliés, donc on cherche une façon de colorier n_{G} sommets avec p couleurs. N'importe quel coloriage convient. De façon formelle : un bon p-coloriage est une application de S dans $[\![1\,;\,p]\!]$ telle que $\psi(s) \neq \psi(t)$ si $\{s;t\} \in \mathrm{A}$. Or, il n'y a aucune arête donc la deuxième condition est inutile. Il ne reste donc que la première condition : un bon p-coloriage est uniquement une application de S dans $[\![1\,;\,p]\!]$ donc un élément de $[\![1\,;\,p]\!]^{\mathrm{S}}$ et, comme les ensembles sont finis, le cours nous dit que le nombre d'éléments de $[\![1\,;\,p]\!]^{\mathrm{S}}$ est $p^{n_{\mathrm{G}}}$. Finalement :

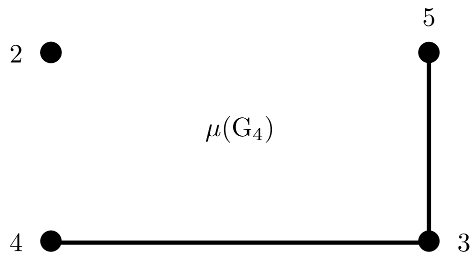
$$\boxed{f_{\mathrm{G}}(p) = p^{n_{\mathrm{G}}}}$$

5 $\sigma(\mathrm{G})$ est le premier sommet (c'est-à-dire le sommet avec le plus petit numéro) qui n'est pas isolé, c'est-à-dire qui fait partie d'une arête. Le nombre $\tau(\mathrm{G})$ est le plus petit sommet relié à $\sigma(\mathrm{G})$ (il existe par définition de $\sigma(\mathrm{G})$ c'est-à-dire le sommet avec le plus petit numéro relié à $\sigma(\mathrm{G})$. Avec ces définitions, il est facile de voir que :

$$\boxed{\sigma(\mathrm{G}_4) = 1 \text{ et } \tau(\mathrm{G}_4) = 3}$$

6 Étant donné le graphe G, le graphe $\lambda(\mathrm{G})$ est le graphe avec les mêmes sommets que G et avec les mêmes arêtes que G moins l'arête $\{\sigma(\mathrm{G});\tau(\mathrm{G})\}$ c'est-à-dire l'arête reliant le plus petit sommet appartenant à une arête à son plus petit voisin. Ensuite, le graphe $\mu(\mathrm{G})$ est obtenu à partir de $\lambda(\mathrm{G})$ en enlevant le sommet $\sigma(\mathrm{G})$ et en modifiant les arêtes de la façon suivante : si $\sigma(\mathrm{G})$ n'appartient pas à l'arête, on la garde, si l'arête est $\{\sigma(\mathrm{G});t\}$, on la transforme en $\{\tau(\mathrm{G});t\}$. Une fois ces précisions faites (qui je le rappelle n'étaient pas demandées) on donne les deux graphes demandés ci-dessous :





7.(a) Les éléments de $\mathrm{B}(p,\mathrm{G})$ sont des applications définies sur S_{G} et les éléments de $\mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$ sont des applications définies sur $\mathrm{S}_{\mu(\mathrm{G})}$. Les applications ne sont pas définies sur le même ensemble, donc

$$\boxed{\text{Ces deux ensembles sont bien d'intersection vide.}}$$

7.(b) Soit ψ un bon p-coloriage de G. C'est une application de S_{G} qui est égal à $\mathrm{S}_{\lambda(\mathrm{G})}$ dans $[\![1\,;\,p]\!]$ donc ψ est une application de $\mathrm{S}_{\lambda(\mathrm{G})}$ dans $[\![1\,;\,p]\!]$. Soit $\{s;t\} \in \mathrm{A}_{\lambda(\mathrm{G})}$. Or, l'ensemble des arêtes de $\lambda(\mathrm{G})$ est inclus dans celui des arêtes de G. Donc $\{s;t\} \in \mathrm{A}_{\mathrm{G}}$. Comme ψ est un bon p-coloriage de G, $\psi(s) \neq \psi(t)$. Donc ψ est un bon p-coloriage de $\lambda(\mathrm{G})$. En d'autres termes :

$$\boxed{\mathrm{B}(p,\mathrm{G}) \subset \mathrm{B}(p,\lambda(\mathrm{G})).}$$

7.(c) Que fait cette fonction ? Elle donne à $\sigma(\mathrm{G})$ la couleur de $\tau(\mathrm{G})$ et ne change pas les couleurs des autres sommets. Il est immédiat que c'est une application de $\mathrm{S}_{\lambda(\mathrm{G})}$ dans $[\![1\,;\,p]\!]$. Montrons que deux arêtes reliées ont deux couleurs différentes, c'est-à-dire que si $s,t \in \mathrm{S}_{\lambda(\mathrm{G})}$ avec $\{s;t\} \in \mathrm{A}_{\lambda(\mathrm{G})}$ alors $\widetilde{\psi}(s) \neq \widetilde{\psi}(t)$. Comme s et t sont deux sommets distincts, il y a deux cas.

- **Premier cas :** $s,t \neq \sigma(\mathrm{G})$. Or, les arêtes de $\lambda(\mathrm{G})$ ne contenant pas $\sigma(\mathrm{G})$ sont également dans $\mu(\mathrm{G})$. Donc $\{s;t\}$ est une arête de $\mu(\mathrm{G})$. Donc $\widetilde{\psi}(s) = \psi(s) \neq \psi(t) = \widetilde{\psi}(t)$ (on rappelle que ψ est un bon p-coloriage de $\mu(\mathrm{G})$).

  Deuxième cas : $s = \sigma(\mathrm{G}), t \neq \sigma(\mathrm{G})$. Alors $\widetilde{\psi}(s) = \psi(\tau(\mathrm{G})), \widetilde{\psi}(t) = \psi(t)$. $\{s;t\}$ est une arête de $\lambda(\mathrm{G})$ avec $s = \sigma(\mathrm{G})$. Or, on obtient $\mu(\mathrm{G})$ à partir de $\lambda(\mathrm{G})$ en envoyant toutes les arêtes $\{\sigma(\mathrm{G});t\}$ sur $\{\tau(\mathrm{G});t\}$. Donc $\{\tau(\mathrm{G});t\}$ est une arête de $\mu(\mathrm{G})$ et ψ est un bon p-coloriage de $\mu(\mathrm{G})$ donc $\psi(\tau(\mathrm{G})) \neq \psi(t)$.

Dans tous les cas, on a $\widetilde{\psi}(s) \neq \widetilde{\psi}(t)$:

$$\boxed{\text{C'est bien un bon } p\text{-coloriage de } \lambda(\mathrm{G}).}$$

7.(d) Par la question précédente, cette application est bien définie. Montrons qu'elle est bijective.

- **Première étape : l'injectivité.** Soient $\psi_1 \neq \psi_2$ deux éléments de $\mathrm{B}(p,\mathrm{G}) \cup \mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$. Montrons qu'ils n'ont pas la même image par γ.

  Premier cas : ψ_1 et ψ_2 sont dans $\mathrm{B}(p,\mathrm{G})$. $\gamma(\psi_1) = \psi_1 \neq \psi_2 = \gamma(\psi_2)$ d'où le résultat.

  Deuxième cas : ψ_1 et ψ_2 sont dans $\mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$. $\gamma(\psi_1) = \widetilde{\psi_1}$ et $\gamma(\psi_2) = \widetilde{\psi_2}$. Or, $\psi_1 \neq \psi_2$ donc il existe un sommet s de $\mu(\mathrm{G})$ tel que $\psi_1(s) \neq \psi_2(s)$. $s \neq \sigma(\mathrm{G})$ donc $\widetilde{\psi_1}(s) = \psi_1(s) \neq \psi_2(s) = \widetilde{\psi_2}(s)$ donc $\widetilde{\psi_1} = \gamma(\psi_1) \neq \gamma(\psi_2) = \widetilde{\psi_2}$.

  Troisième cas : $\psi_1 \in \mathrm{B}(p,\mathrm{G})$ et $\psi_2 \in \mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$. ψ_1 est un bon p-coloriage de G donc $\psi_1(\sigma(\mathrm{G})) \neq \psi_1(\tau(\mathrm{G}))$ (car, par définition, $\sigma(\mathrm{G})$ et $\tau(\mathrm{G})$ sont reliés par une arête). De plus, $\gamma(\psi_2) = \widetilde{\psi_2}$ et par définition de $\widetilde{\psi_2}$ on a $\widetilde{\psi_2}(\sigma(\mathrm{G})) = \widetilde{\psi_2}(\tau(\mathrm{G}))$ donc $\psi_1 \neq \widetilde{\psi_2}$ (une des deux images met la même couleur sur les deux sommets tandis que l'autre met deux couleurs différentes).

- **Deuxième étape : la surjectivité.** Soit ψ un élément de $\mathrm{B}(p,\lambda(\mathrm{G}))$. On vient de voir que les images des éléments de $\mathrm{B}(p,\mathrm{G})$ mettent deux couleurs différentes sur $\sigma(\mathrm{G})$ et $\tau(\mathrm{G})$ tandis que les éléments de $\mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$ mettent la même couleur sur ces deux sommets. Cela va être la condition clef.

  Premier cas : $\psi(\sigma(\mathrm{G})) \neq \psi(\tau(\mathrm{G}))$. Soient s,t tels que $\{s;t\}$ soit une arête de G. Si ce n'est pas l'arête $\{\sigma(\mathrm{G});\tau(\mathrm{G})\}$, c'est une arête de $\lambda(\mathrm{G})$. Or, ψ est un bon p-coloriage de $\lambda(\mathrm{G})$ donc $\psi(s) \neq \psi(t)$. Si $s = \sigma(\mathrm{G})$ et $t = \tau(\mathrm{G})$ on a aussi $\psi(s) \neq \psi(t)$ par hypothèse. Dans tous les cas $\psi(s) \neq \psi(t)$ donc $\psi \in \mathrm{B}(p,\mathrm{G})$ donc $\gamma(\psi) = \psi$. ψ est son propre antécédent.

  Deuxième cas : $\psi(\sigma(\mathrm{G})) = \psi(\tau(\mathrm{G}))$. Soit χ l'application de $\mathrm{S}_{\mu(\mathrm{G})}$ dans $[\![1\,;\,p]\!]$ définie par $\chi(s) = \psi(s)$. Il est immédiat (par définition de $\widetilde{\chi}$) que $\widetilde{\chi} = \gamma(\chi) = \psi$.

  γ est bien surjective.

Elle est donc bijective. Les ensembles $\mathrm{B}(p,\mathrm{G}) \cup \mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$ et $\mathrm{B}(p,\lambda(\mathrm{G}))$ étant finis, ils ont même cardinal. Or, les ensembles $\mathrm{B}(p,\mathrm{G})$ et $\mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))$ étant d'intersection vide, le cardinal de leur union est égal à la somme de leurs cardinaux. En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathrm{B}(p,\mathrm{G})) + \mathrm{Card}\,(\mathrm{B}(p,\mu(\mathrm{G}))) = f_{\mathrm{G}}(p) + f_{\mu(\mathrm{G})}(p) = \mathrm{Card}\,(\mathrm{B}(p,\lambda(\mathrm{G}))) = f_{\lambda(\mathrm{G})}(p)}$$

8 D'après la question précédente :

$$\boxed{f_{\lambda(\mathrm{G})}(p) - f_{\mu(\mathrm{G})} = f_{\mathrm{G}}(p)}$$

9

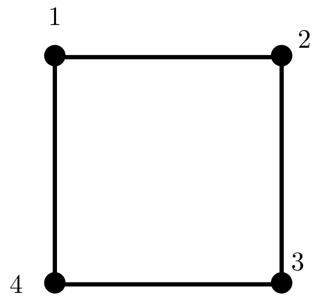
- Si $n \geqslant 0$, notons H_n : « Si G est un graphe à n arêtes, f_{G} est polynomiale à coefficients entiers, c'est-à-dire qu'il existe un entier q et $a_0,\dots,a_q \in \mathbb{Z}$ tels que $f_{\mathrm{G}}(p) = a_q p^q + \cdots + a_0$ ».
- Étant donné que si G est un graphe sans arête, la question 4 nous dit que $f_{\mathrm{G}}(p) = p^{n_{\mathrm{G}}}$ qui est bien une fonction polynomiale à coefficients entiers, on vient de montrer que H_0 est vraie.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathrm{H}_0,\dots,\mathrm{H}_n$ vraies (on fait donc une récurrence forte) et montrons que H_{n+1} est vraie. Soit G un graphe à $n+1$ arêtes. On a $f_{\mathrm{G}}(p) = f_{\lambda(\mathrm{G})}(p) - f_{\mu(\mathrm{G})}(p)$. Or, $\lambda(\mathrm{G})$ a une arête de moins que G donc en a n et $\mu(\mathrm{G})$ a au plus autant d'arêtes que $\lambda(\mathrm{G})$ donc au plus n. Or, par hypothèse de récurrence, $f_{\lambda(\mathrm{G})}$ et $f_{\mu(\mathrm{G})}$ sont polynomiales à coefficients entiers, et comme une différence de fonctions polynomiales à coefficients entiers est polynomiale à coefficients entiers, f_{G} l'est. Donc H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout n.

$$\boxed{\text{Pour tout G, } f_{\mathrm{G}} \text{ est polynomiale à coefficients entiers.}}$$

10 Si on veut le faire proprement, la méthode précédente (récurrence sur le nombre d'arêtes) est ce qui marche le mieux (deux graphes isomorphes ont le même nombre d'arêtes). Étant donné qu'on vient d'en faire une, on peut démontrer l'initialisation et dire de même pour l'hérédité. Montrons donc l'initialisation c'est-à-dire le résultat pour deux graphes isomorphes sans arête. Ils ont le même nombre de sommets car sont isomorphes donc on a $f_{\mathrm{G}_1}(p) = f_{\mathrm{G}_2}(p) = p^{n_{\mathrm{G}}}$. Une récurrence immédiate montre le résultat.

$$\boxed{\text{Deux graphes isomorphes ont même fonction } f_{\mathrm{G}}.}$$

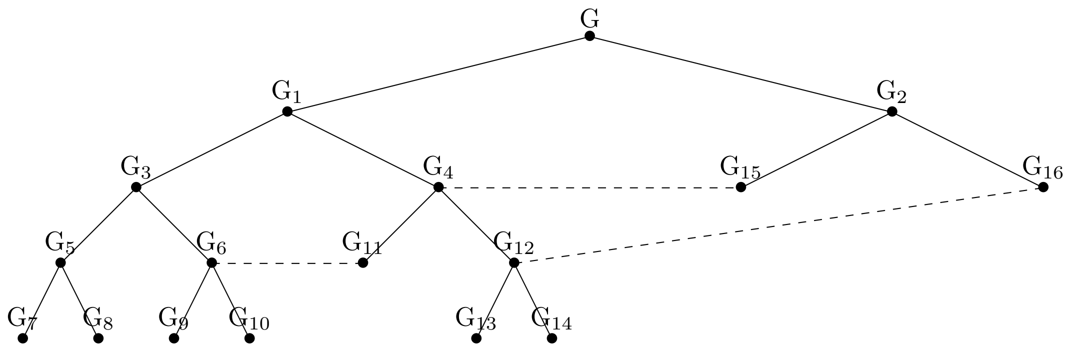
11.(a) Une représentation du graphe G est donnée par



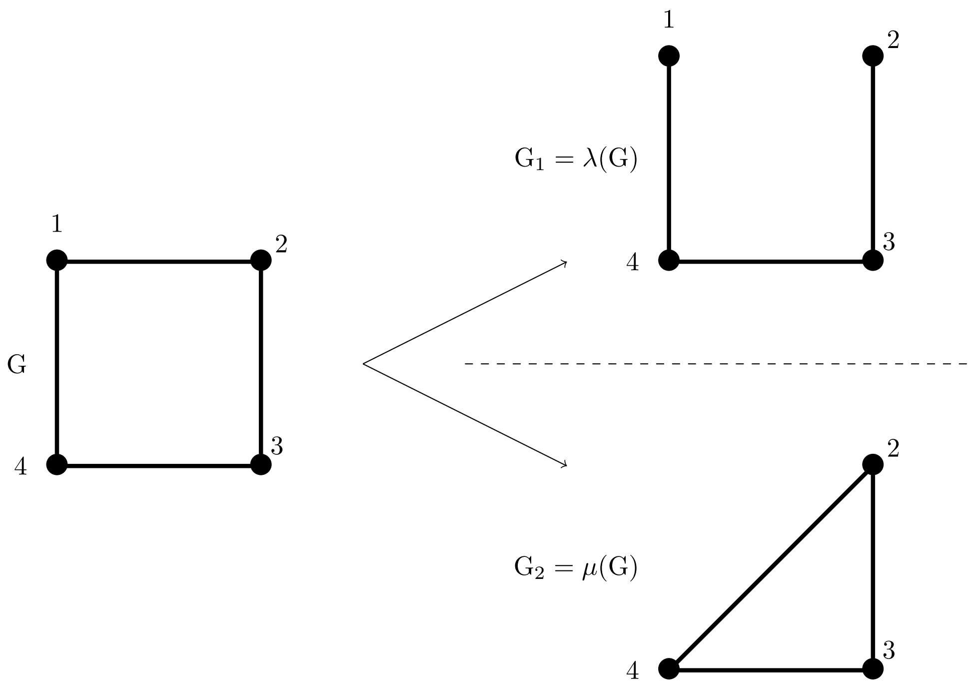
Puisqu'on demande f_{G} sans justification, donnons le sans justification : pour tout $p \geqslant 1$ on a

$$f_{\mathrm{G}}(p) = p^4 - 4p^3 + 6p^2 - 3p$$

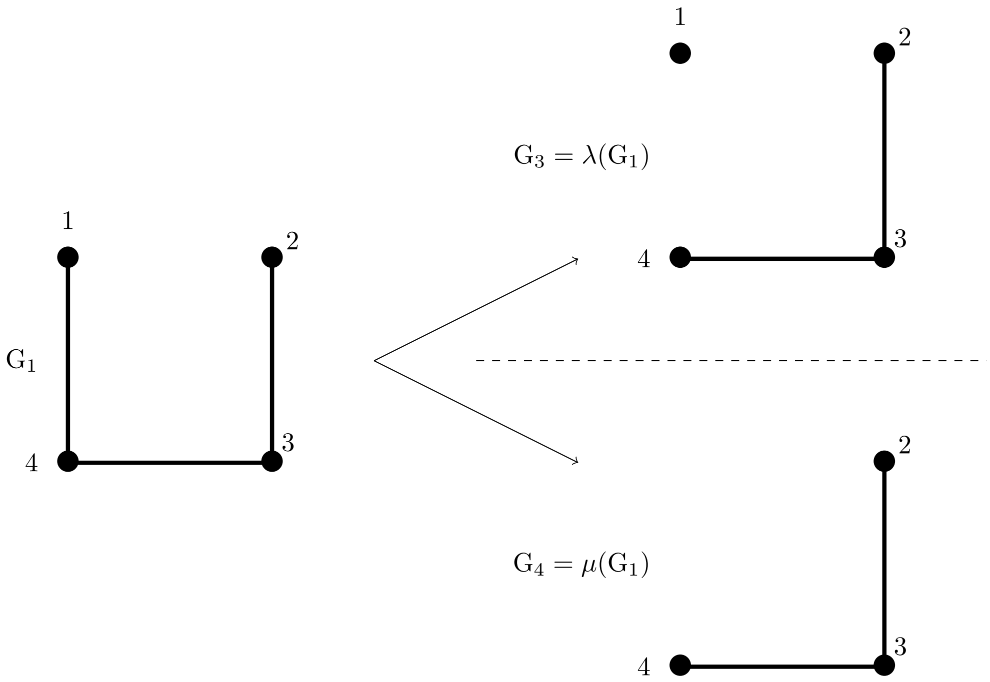
C'est pourtant évident... Non ? Vous êtes sûrs ? OK je le démontre alors. C'est une question assez longue, mais pas compliquée, il suffit d'avoir de la méthode. On sait que $f_{\mathrm{G}} = f_{\lambda(\mathrm{G})} - f_{\mu(\mathrm{G})}$ donc il suffit de calculer ces deux autres fonctions. Il faut itérer le processus, jusqu'à se ramener à un graphe dont la fonction f_{G} associée est facile à calculer. Il faut itérer jusqu'à se ramener à un graphe sans aucune arête, puisqu'on rappelle que si A_{G} est vide et si le graphe G a n_{G} sommets, alors $f_{\mathrm{G}}(p) = p^{n_{\mathrm{G}}}$. Commençons. Attention, on va définir un grand nombre de graphes, il ne faut pas se perdre en route. A chaque fois, ci-dessous, on donne un graphe et son graphe λ et son graphe μ associés. On va avoir en fait le mini arbre généalogique suivant (pour chaque paire, celui de gauche est λ et celui de droite est μ) et les traits en pointillés joignent deux graphes isomorphes :



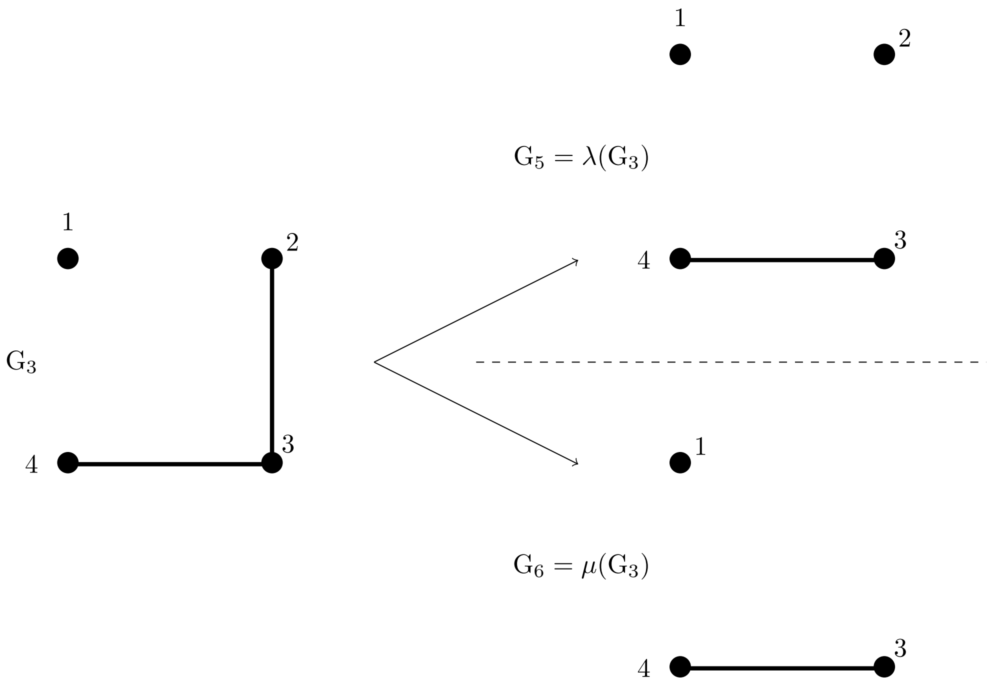
Commençons par donner les graphes $\lambda(\mathrm{G})$ et $\mu(\mathrm{G})$:



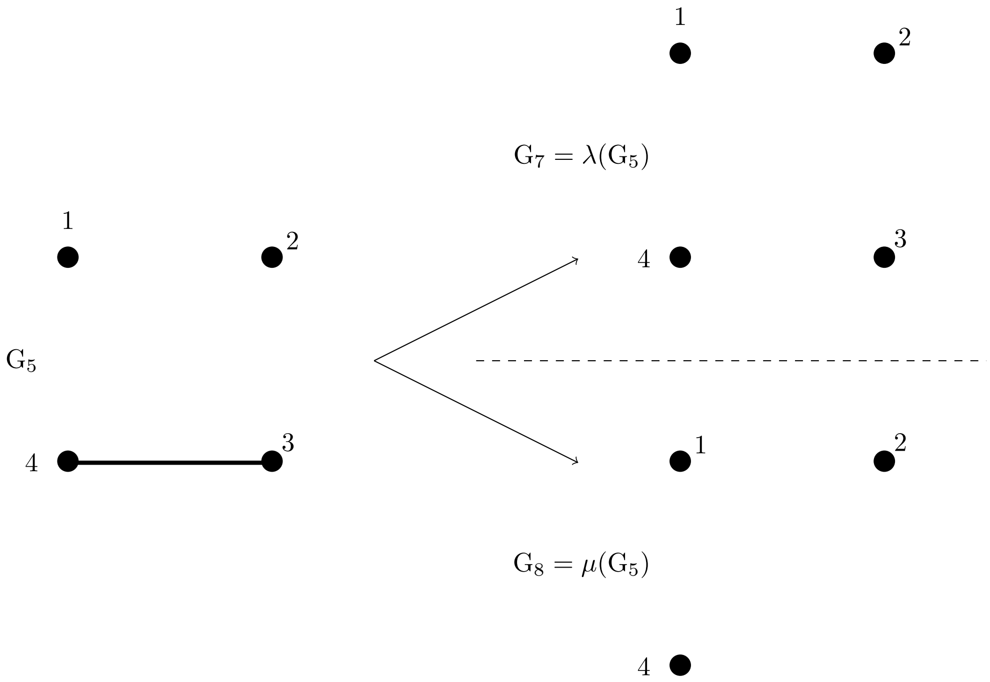
Maintenant, recommençons pour G_1 et G_2 et ainsi de suite jusqu'à avoir des graphes sans arêtes.



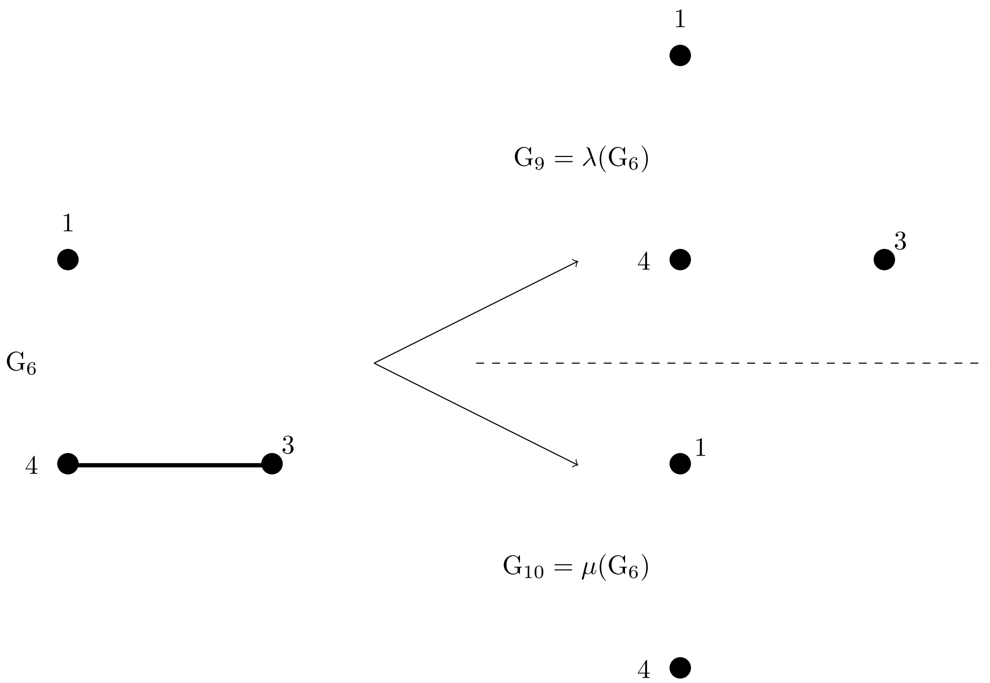
Intéressons-nous maintenant à G_3 et aux deux graphes que l'on peut construire :



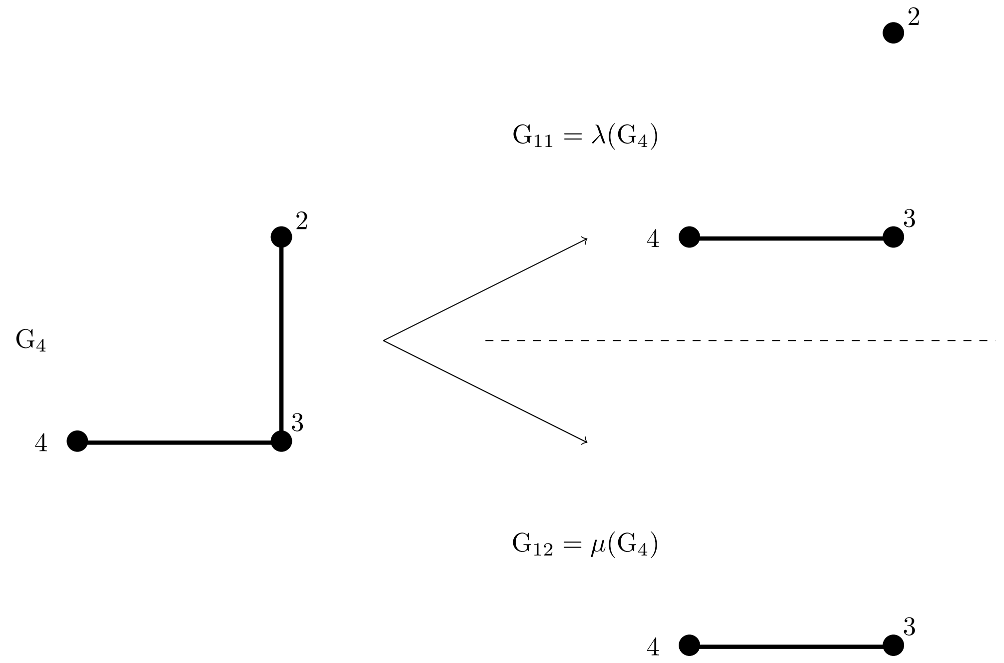
Etape suivante :



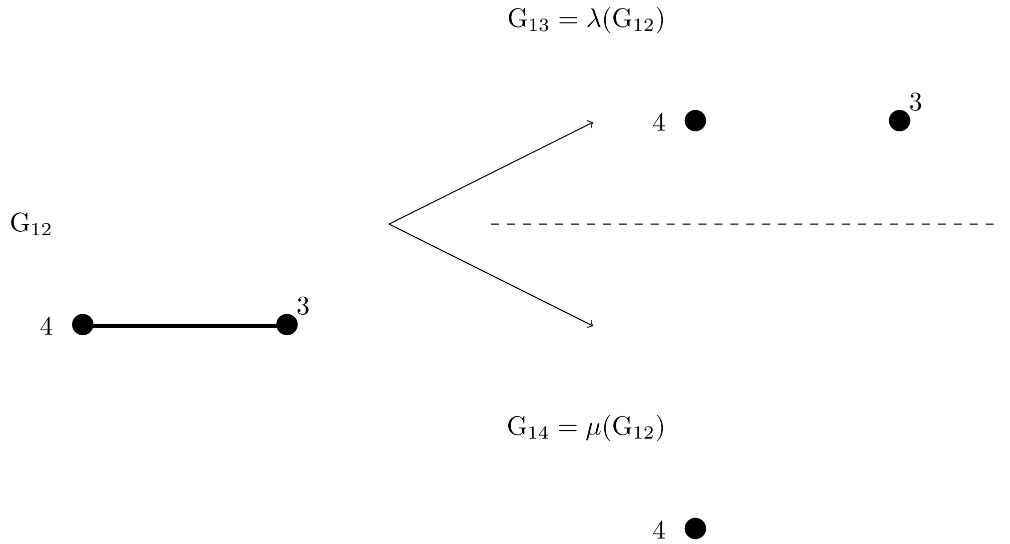
Et là on a fini pour cette branche : on a $f_{G_7}(p) = p^4, f_{G_8}(p) = p^3$ et par les questions précédentes, on a $f_{G_5} = p^4 - p^3$. Retournons maintenant à G_6.



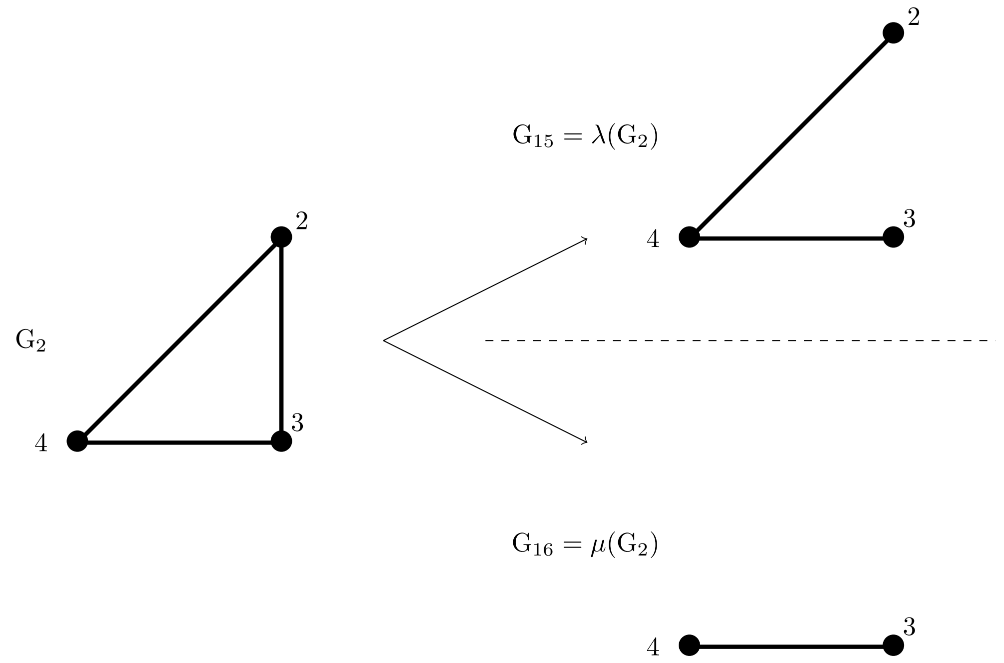
De même on a $f_{G_{10}}(p) = p^2, f_{G_9}(p) = p^3$ et donc $f_{G_6}(p) = p^3 - p^2$. Donc, étant donné que $f_{G_3}(p) = f_{G_5}(p) - f_{G_6}(p)$, il vient $f_{G_3}(p) = p^4 - 2p^3 + p^2$. Retournons maintenant à G_4. Le plus difficile dans cette question est de n'oublier aucun graphe intermédiaire en route.



Or, il est immédiat que G_{11} est isomorphe à G_6 donc, par la question précédente, $f_{G_{11}}(p) = p^3 - p^2$. Ensuite, pour G_{12} :



De même que précédemment, il est immédiat que $f_{G_{12}}(p) = p^2 - p$, et ensuite que $f_{G_4} = p^3 - 2p^2 + p$. On a donc $f_{G_1}(p) = f_{G_3}(p) - f_{G_4}(p) = p^4 - 2p^3 + p^2 - p^3 + 2p^2 - p = p^4 - 3p^3 + 3p^2 - p$. Trouvons maintenant f_{G_2}.



Il est immédiat que G_{12} et G_{16} sont isomorphes donc $f_{G_{16}}(p) = p^2 - p$. Il est non moins évident (en tordant un peu les arêtes) que G_{15} et G_4 sont isomorphes donc $f_{G_{15}}(p) = p^3 - 2p^2 + p$ donc $f_{G_2}(p) = f_{G_{15}}(p) - f_{G_{16}}(p) = p^3 - 3p^2 + 2p$. Enfin, on a :

$$\boxed{f_G(p) = f_{G_1}(p) - f_{G_2}(p) = p^4 - 4p^3 + 6p^2 - 3p.}$$

> C'était pourtant facile ! Bizarrement, dans le rapport, ils disent que cette question n'a pas été souvent traitée...

11.(b) Il est immédiat que $f_G(0) = f_G(1) = 0$ mais que $f_G(2) \neq 0$ donc

$$\boxed{\theta_G = 2}$$

En coloriant une diagonale en rouge et une autre en vert, on voit qu'on peut colorier ce graphe sans que deux sommets adjacents aient la même couleur.