Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Épilogue - Chapitres 35 à 37.

Table des matières

Chapitre 35

Familles sommables

« Je vous ordonne de vous taire !
Et j'adresse un défi collectif au parterre !
J'inscris les noms ! Approchez-vous, jeunes héros !
Chacun son tour ! Je vais donner des numéros !
Allons, quel est celui qui veut ouvrir la liste ?
Vous, Monsieur ? Non ! Vous ? Non ! Le premier duelliste,
Je l'expédie avec les honneurs qu'on lui doit !
Que tous ceux qui veulent mourir lèvent le doigt.
La pudeur vous défend de voir ma lame nue ?
Pas un nom ? Pas un doigt ? C'est bien. Je continue. »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac

La fonction ζ jouant un rôle dans plusieurs exercices de cette feuille, on rappelle que :

- la fonction ζ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

- $\zeta(2) = \pi^2/6$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12}$.

On admettra également que $\zeta(4) = \pi^4/90$. Enfin, on rappelle que lorsque les termes sommés ne sont pas positifs, il est indispensable de justifier l'existence des sommes infinies.

35.1 Produits de Cauchy

Exercice 1 : ✪ Soit $x \in \,]-1\,;1\,[$. On rappelle (cf. cours) que : $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$. Écrire de même $1/(1-x)^3$ sous forme de série.

Exercice 2 : ✪ Soient a et b deux complexes de module strictement inférieur à 1. Montrer que, si $a \neq b$:

$$\frac{1}{(1-a)(1-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

Exercice 3 : ✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la série de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 4 : ✪✪ Pour tout $n \geq 1$, on pose $\displaystyle H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ le n-ième nombre harmonique. Montrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \times n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

Exercice 5 - Série génératrice des nombres de Catalan : ✪✪✪ On rappelle que les nombres de Catalan $(C_n)_{n\geq 0}$ sont définis par :

$$\forall n \geq 0, \qquad C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$$

et que la suite (C_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geq 1, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \times C_{n-1-k}$$

Pour tout z réel « convenable », on pose $C(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} C_k z^k$.

1. Donner le domaine de définition de C.
2. On admet que C est continue sur son domaine de définition (vous pourrez le prouver l'année prochaine). Prouver que, pour tout $z \neq 0$ appartenant au domaine de définition de C :

$$C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$$

Exercice 6 : ✪✪✪ On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensembles des familles sommables $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$. Pour tout $(u,v) \in \ell^1(\mathbb{Z})^2$, on note $u * v = \left(\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k \times v_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note :

$$(u*v)_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

1. Montrer que la famille $u * v$ est bien définie et qu'elle est sommable. Montrer enfin que :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (u*v)_n = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n\right) \times \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} v_n\right)$$

2. Montrer que la loi $*$ ainsi définie est commutative, associative et possède un élément neutre.
3. $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ est-il un groupe ?

35.2 Familles sommables

Exercice 7 : ✪ Les familles suivantes sont-elles sommables ? Le cas échéant, calculer leur somme. On pourra discuter selon les paramètres $z, a, b \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\left(\dfrac{(-1)^k}{k^3}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2, 1\leq n\leq k}$.
2. $((-1)^p(\zeta(p)-1))_{p\geq 2}$.
3. $\left(\dfrac{\zeta(2p)}{2^{2p}}\right)_{p\in\mathbb{N}^*}$.
4. $\left(\dfrac{z^p}{q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
5. $\left(\dfrac{a^p b^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
6. $\left(\dfrac{q^p z^q}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
7. $\left(\dbinom{p+q}{p} z^{p+q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
8. $\left(\dfrac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap\,]\,0\,;+\infty\,[}$.
9. $\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)_{(k,n)\in\mathbb{N}^2, 1\leq n<k}$.

Exercice 8 : ✪

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} 2^k u_k$$

   Montrer que la famille $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. **Remake :** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que la famille $\left(\dfrac{ku_k}{n(n+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}^*, 1\leq k\leq n}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la série $\sum u_n$.

Exercice 9 : ✪

1. Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. Montrer que la famille $\left(q^{|n|}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.
2. **Remake :** Soit $r \in [\,0\,;1\,[$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}$.

Exercice 10 : ✪ Prouver que la famille $\left(\dfrac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 11 : ✪ Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ bijective. Donner les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)}$$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$,

$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}$$

2. Étudier la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

Exercice 13 : ✪✪ Généraliser le résultat de la question 8 de l'exercice 7 : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que la famille $(f(r))_{r\in\mathbb{Q}}$ est sommable si et seulement si f est la fonction nulle.

Exercice 14 : ✪✪ On rappelle (cf. DM 17) que, pour tout $x \in \,]-1\,;1\,]$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$. Exprimer la

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\zeta(p)-1}{p}$$

à l'aide de la constante d'Euler.

Exercice 15 : ✪✪ Justifier que $x \mapsto e^{e^x}$ est développable en série entière, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^{e^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Exercice 16 : ✪✪ Soit $z \in \mathbb{C}$ de module strictement inférieur à 1.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^p}{1-z^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{z^{2p-1}}{1-z^{2p-1}}$.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n$ où, pour tout n, $d(n)$ est le nombre de diviseurs strictement positifs de n.
3. Justifier que tout entier $n \geq 1$ s'écrit de façon unique sous la forme $n = 2^p(2m+1)$, où p et q appartiennent à $\mathbb{N}$. En déduire que : $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{z^{2^p}}{1-z^{2^{p+1}}} = \frac{z}{1-z}$.

Exercice 17 - Un peu de théorie des nombres : ✪✪ Pour tout $n \geq 1$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de n, et $\sigma(n)$ leur somme.

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2$$

2. Montrer que pour tout $\alpha > 2$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha) \times \zeta(\alpha-1)$$

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ (avec évidemment $-\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers négatifs ou nuls).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X(X+1)\cdots(X+n)}$$

2. En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\cdots(z+n)} = e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Exercice 19 : ✪✪✪ Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{m^2n^2}$.
2. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m<n} \frac{1}{m^2n^2}$.
3. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m|n} \frac{1}{m^2n^2}$.
4. $\displaystyle\sum_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2} \frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$.

Exercice 20 : ✪✪✪✪ Prouver que la famille $\displaystyle\left(\frac{1}{m^2n+mn^2+2mn}\right)_{(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 21 : ✪✪✪✪ On se donne une famille de complexes non nuls $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \neq p, |z_n - z_p| \geq 1$. Le but de l'exercice est de prouver que la série $\sum 1/{z_n}^3$ converge.

1. Faire un dessin.
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que le disque de centre 0 de rayon N contient au plus $(2N+1)^2$ termes de la suite (z_n).
3. Montrer que l'on peut permuter les termes de la suite (z_n) de manière à obtenir une suite dont les modules forment une suite croissante. Cette nouvelle suite est notée (y_n).
4. Montrer que, pour tout N, $|y_{(2N+1)^2+1}| > N$.
5. En déduire que, pour tout p, $|y_p| > \dfrac{\sqrt{p}-3}{2}$ et conclure.

Exercice 22 : ✪✪✪✪

1. Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose :

$$u_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}$$

Justifier l'existence et calculer les quantités suivantes :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

Conclusion ?

2. Pour tout $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u_{m,n} = \dfrac{1}{m^2-n^2}$ si $m \neq n$, et $u_{m,n} = 0$ sinon. Justifier l'existence et calculer la quantité suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

Montrer sans calcul de somme que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = -\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

Que peut-on en déduire ?

Exercice 23 : ✪ On se donne $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ c'est-à-dire que la série $\sum {u_n}^2$ converge. Soient σ une bijection de $\mathbb{N}$ et (v_n) la suite de terme général $v_n = u_{\sigma(n)}$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum {v_n}^2$.
2. Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$?
3. ✪✪✪✪ Déterminer les bornes supérieure et inférieure de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n|$ lorsque σ parcourt $S_{\mathbb{N}}$, l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$.

Chapitre 36

Introduction aux espaces affines

« - Couvrez ce sein, que je ne saurais voir :
Par de pareils objets, les âmes sont blessées,
Et cela fait venir de coupables pensées.
- Vous êtes donc bien tendre à la tentation,
Et la chair sur vos sens fait grande impression !
Certes, je ne sais pas quelle chaleur vous monte :
Mais à convoiter, moi, je ne suis point si prompte,
Et je vous verrais nu du haut jusques en bas,
Que toute votre peau ne me tenterait pas. »

Molière, Le Tartuffe

Si rien n'est précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 1 : ✪ Montrer que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1+2a-b & 0 \\ 2-a-b & a-b \end{pmatrix} \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, et donner une base de sa direction.

Exercice 2 : ✪ Soient $V = a+F$ et $W = b+G$ deux sous-espaces affines de E. Montrer que : $V \cap W \neq \varnothing \iff b-a \in F+G$.

Exercice 3 : ✪ Dans $E = \mathbb{R}^2$, soient D_1 la droite d'équation $x+y=2$ et D_2 la droite d'équation $x-2y=260$. Donner l'expression analytique (dans le repère canonique) de la projection sur D_1 parallèlement à D_2.

Exercice 4 : ✪ Soit $u \in E$ et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Donner une CNS pour que f commute avec la translation de vecteur u.

Chapitre 37

Fonctions de deux variables

« Today, it's a Chinese food retrieval robot. Tomorrow, it travels back in time and tries to kill Sarah Connor. »

The Big Bang Theory

37.1 Topologie

Exercice 1 : ✪✪ Montrer que le complémentaire d'une boule fermée est un ouvert.

37.2 Limites et continuité

Exercice 2 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ par $f(x,y)=\dfrac{2xy-x^2}{x^2+y^2}$. Étudier la limite quand $(x,y)\to(0,0)$ de la restriction de f aux droites d'application $y=mx$ pour $m\in\mathbb{R}$. En déduire que f n'a pas de limite à l'origine.

Exercice 3 : ✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Étudier la limite quand $(x,y)\to(0,0)$ de la restriction de f aux droites d'application $y=mx$ pour $m\in\mathbb{R}$.
2. Calculer la limite à l'origine de la restriction de f à la parabole d'équation $y=x^2$.
3. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 4 : ✪ Pour une fonction f définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère trois types de limites :

- $(A)\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
- $(B)\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)$
- $(C)\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)$

1. Montrer que deux de ces limites peuvent exister et être égales sans que la troisième n'existe.
2. Montrer qu'une de ces limites peut exister sans que les deux autres n'existent.
3. (B) et (C) peuvent exister sans être égales.

On pourra s'intéresser aux fonctions suivantes :

$$f_1:(x,y)\mapsto\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\qquad f_2:(x,y)\mapsto\frac{xy}{x^2+y^2},\qquad f_3:(x,y)\mapsto\frac{\sin(x)}{y^2}\qquad\text{et}\qquad f_4(x,y)=\frac{\sin(y)}{x^2}$$

Exercice 5 : ✪✪ Étudier la limite à l'origine de $f:(x,y)\mapsto\dfrac{\sin(xy)}{xy}$.

Exercice 6 : ✪✪ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \xrightarrow[r\to 0^+]{} 0$. Interprétation géométrique ?
2. Montrer cependant que f n'est pas continue en 0. Comment expliquer cet apparent paradoxe ?

Exercice 7 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$F(x,y) = \frac{f\left(x^2+y^2\right) - f(0)}{x^2+y^2}$$

Montrer que $F(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} f'(0)$.

Exercice 8 : ✪✪ Étudier la continuité des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ci-dessous.

1. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^2+y)}{\sqrt{1+x^2e^y}}$
2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$
3. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
4. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
5. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
6. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
7. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
8. $f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

37.3 Calcul de dérivées partielles

Exercice 9 : ✪ Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes (on précisera le domaine de définition) :

1. $f : (x,y) \mapsto x^y$.
2. $f : (x,y) \mapsto \text{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.
3. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{e^{xy}}{x+y}$.

Exercice 10 : ✪ Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x,y) \mapsto \int_{x^2}^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ et calculer ses dérivées partielles.

Exercice 11 : ✪ Déterminer de deux façons différentes l'équation du plan tangent en X_0 des fonctions suivantes :

1. $f : (x,y) \mapsto \ln(y+\sin(xy)), X_0 = (0,1)$.
2. $f : (x,y) \mapsto (1+x)e^{\text{sh}(y)+x}, X_0 = (0,0)$.
3. $f : (x,y) = \sqrt{xy}, X_0 = (1,1)$.
4. **✪✪** $f : (x,y) \mapsto \dfrac{xy^3 - x^2 + 2xy}{3+x-x^2y}, X_0 = (2,1)$.
5. $f : (x,y) \mapsto 1 + x - \sqrt{1+x+y}, X_0 = (0,0)$.
6. $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2+x+\ln(1+y)}}, X_0 = (0,0)$.

Exercice 12 : ✪✪ On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \times \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13 : ✪✪ On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point.
3. Justifier que f n'est pas $\mathscr{C}^1$.

37.4 Règle de la chaîne

Exercice 14 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f\left(x^2+y, yz\right) = xf(y,z)$$

Dériver cette relation par rapport aux trois variables x, y, z.

Exercice 15 - Une équation aux dérivées partielles : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On dit que f est homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$ si pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda > 0$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x,y)$.

1. Montrer que si f est homogène de degré α, alors ses dérivées partielles sont aussi homogènes.
2. Montrer que si f est homogène de degré α, alors :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 16 : ✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. On définit

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f\left(e^t, t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$$

Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer sa dérivée à l'aide des dérivées partielles de f.

2. On définit

$$\psi \colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) \longmapsto f(u+v, uv) \end{cases}$$

Montrer que ψ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

Exercice 17 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Calculer la dérivée de $g : x \mapsto f(x, f(x,x))$.
2. Calculer les dérivées partielles de $h_1 : (x,y) \mapsto f(y,x)$ et $h_2 : (x,y) \mapsto f(x, f(x,y))$.

37.5 Recherche d'extrema

Exercice 18 : ✪✪ Étudier l'existence d'éventuels extrema locaux et globaux des fonctions suivantes.

1. $f : (x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.
2. $f : (x,y) \mapsto e^{x\sin(y)}$.
3. $f : (x,y) \mapsto 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$.
4. $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

Exercice 19 : ✪✪✪ Soit f la fonction définie sur $D = (\mathbb{R}_+^*)^2$ par

$$f(x,y) = e^{x^2+y^2} - \ln(x) - \ln(y)$$

1. Justifier que l'équation $te^t = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, et montrer que cette solution appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f admet sur D un unique point critique $A = (a,b)$ et que $a = b$ (il n'est pas demandé d'expliciter a).
3. En étudiant la convexité sur chaque direction partant de A, montrer que f admet en A un minimum global.