Polycopié d'exercices.

MP2I - Lycée Faidherbe

Second semestre - Algèbre - Chapitres 28 à 34.

Table des matières

Chapitre 28

Espaces vectoriels

« The original title was "A Rederivation of Maxwell's Equations Regarding Electromagnetism". I dumbed it down because some of the more religious people in town were starting to say I was a witch. »

The Big Bang Theory

On se donne $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et on pourra au besoin identifier familles libres (respectivement génératrices) et parties libres (respectivement génératrices).

Vrai ou Faux ?

1. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Le complémentaire de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices non inversibles de taille n) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
3. L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. Si trois vecteurs forment une famille liée, alors deux d'entre eux (au moins) sont proportionnels.
5. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille libre et si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires tous non nuls, alors $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ est une famille libre.
6. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice et si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille de scalaires tous non nuls, alors $(\lambda_i e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice.
7. Si (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont deux familles libres, alors (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille libre.
8. Si (e_1, e_2) et (e_3, e_4) sont deux familles génératrices, alors (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille génératrice.
9. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre alors, pour tout $x \in E$, $(e_1 + x, \dots, e_n + x)$ est une famille libre.
10. Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont des familles libres alors $(e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n)$ est une famille libre.
11. Tout élément de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ est combinaison linéaire de n de ces vecteurs.
12. Les fonctions $x \mapsto x, x \mapsto -x$ et $x \mapsto |x|$ forment une famille libre.
13. La famille $(1, X+1, X^2+X+1)$ est libre.
14. La famille (X^2, X^2+X, X^2+X+1) est libre.
15. La famille $(X^2, X^2+X, X^2+X+1, X^2+2X+2)$ est libre
16. Une famille de vecteurs est soit libre soit génératrice.
17. La suite constante égale à 1 appartient à l'espace engendré par les suite $(\delta_{k,n})_n$ pour $k \in \mathbb{N}$.
18. Si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 + E_3 \subset E_2 + E_3$.
19. Si $E_1 + E_3 \subset E_2 + E_3$ alors $E_1 \subset E_2$.
20. Si $E_1 + E_3 = E_2 + E_3$ alors $E_1 = E_2$.
21. Si $E_1 + E_2 = E_1$ alors $E_1 = E_2$.
22. Si F_1 et F_2 sont deux supplémentaires de F_3 alors $F_1 \cap F_2 \neq \{0\}$.
23. Deux espaces vectoriels sont en somme directe si et seulement si ils sont disjoints.
24. Si $E = E_1 \oplus E_2$ et si F est un sev de E alors $F = (E_1 \cap F) \oplus (E_2 \cap F)$.

28.1 Autour de la définition d'espace vectoriel

Exercice 1 : ✪✪

1. On définit une loi interne + et une loi externe . sur $E = \mathbb{R}^2$ par :
   - $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, x + y = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \lambda.x = (\lambda x_1, 0)$.

   Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}^2$ d'une structure d'espace vectoriel ?
2. On définit une loi interne + et une loi externe . sur $E = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ par :
   - $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, x + y = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$.
   - $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \lambda.x = ({x_1}^\lambda, \lambda x_2)$.

   Ces lois munissent-elles $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ d'une structure d'espace vectoriel ?

Exercice 2 - Complexifié d'un espace vectoriel réel : ✪✪ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle :

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par :

$$(a + ib).(x, y) = (a.x - b.y, b.x + a.y)$$

Montrer que $E \times E$, muni de ces deux lois, est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

28.2 Être ou ne pas être un espace vectoriel ?

Exercice 3 : ✪ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

1. L'ensemble des suites convergentes.
2. L'ensemble des suites qui divergent.
3. L'ensemble des suites positives.
4. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 + u_1 = 0$.
5. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 u_1 = 0$.
6. L'ensemble des suites qui convergent vers 0.
7. L'ensemble des suites qui convergent vers 1.
8. L'ensemble des suites qui admettent 0 comme valeur d'adhérence.
9. L'ensemble des suites bornées.
10. L'ensemble des suites arithmétiques.
11. L'ensemble des suites géométriques.
12. L'ensemble des suites croissantes.
13. L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
14. L'ensemble $\{(a(-1)^n + b\cos(n))_{n\in\mathbb{N}} \,|\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.
15. ✪✪ $\ell^2(\mathbb{N}) = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum {u_n}^2 \text{ converge } \right\}$.
16. ✪✪ L'ensemble des suites monotones.
17. ✪✪ L'ensemble des suites périodiques.

Exercice 4 : ✪ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions dérivables en 2024.
2. L'ensemble des fonctions continues en 2024.
3. L'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) + f(1) = f'(0)$.
4. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$.
5. L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^1$ mais pas $\mathscr{C}^2$.
6. L'ensemble des fonctions convexes.
7. L'ensemble des fonctions convexes ou concaves.
8. L'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, nulles en 1 et de dérivée nulle en π.
9. L'ensemble des fonctions non dérivables en 0.
10. L'ensemble des fonctions f telles que $f(0) = 1$.
11. L'ensemble des fonctions f telles que $f(1) = 0$.
12. L'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
13. L'ensemble des fonctions qui s'annulent.
14. L'ensemble des fonctions qui ne s'annulent pas.
15. L'ensemble des fonctions nulles en 0 et en 1.
16. L'ensemble des fonctions nulles en 0 ou en 1.
17. L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie en $+\infty$.
18. ✪✪ L'ensemble des fonctions lipschitziennes.
19. ✪✪ L'ensemble des fonctions uniformément continues.
20. L'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle.
21. L'ensemble des fonctions majorées.
22. L'ensemble des fonctions bornées.
23. L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + e^{-t}y = 0$.
24. L'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle $y' + y = 1$.

25. L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1-x)$.
26. L'ensemble des fonctions f vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + f(-x)$.
27. ✪✪ L'ensemble des fonctions qui ont une limite finie ou infinie en $+\infty$.
28. ✪✪ L'ensemble des fonctions qui sont différence de deux fonctions croissantes (ces fonctions sont dites à variations bornées).

Exercice 5 : ✪ Déterminer parmi les parties suivantes lesquelles sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

1. $\mathbb{R} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{R}$.
2. $\mathbb{Z}^2$.
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| = |y|\}$.
4. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 2y\}$.

Exercice 6 : ✪ Les sous-ensembles constitués des triplets (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$? Le cas échéant, en donner une base.

1. $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
2. $x_3 = 0$
3. $x_3 = 1$
4. $|x_1| = |x_2| = |x_3|$
5. $x_1 + x_2 + x_3 \geq 0$
6. $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
7. $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) = 0$.
8. ${x_1}^2 + x_2 + x_3 = 0$
9. $x_1 x_2 x_3 = 0$
10. $x_1 = x_2 = x_3$
11. $|x_1 + x_2| + x_3 = 0$
12. $x_1 x_2 = x_2 x_3 = 0$
13. $\sin(x_1) + e^{x_2} - {x_3}^3 = 0$
14. $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$
15. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
16. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ \text{ou} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Exercice 7 : ✪✪ Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces vectoriels de E. On suppose que cette suite est une filtration, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n$ est inclus dans E_{n+1}. Montrer que pour tous $n \leq p, E_n$ est inclus dans E_p, puis montrer que $F = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8 : ✪✪ Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\mathbb{R}.\omega = \{x \times \omega \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $\mathbb{R}.\omega$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel. À quelle condition $\mathbb{R}.\omega$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ? Illustrer par un dessin.

Exercice 9 : ✪✪✪ Montrer que l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\sup \sqrt[n]{|u_n|} < +\infty$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

28.3 Premières manipulations d'espaces vectoriels

Exercice 10 : ✪✪ Si $z \in E$ et H est un sev de E, on note $z + H = \{z + h \,|\, h \in H\}$. Soient $(x_0, y_0) \in E^2$ et E_1 et E_2 deux sev de E. Montrer que $x_0 + E_1 = y_0 + E_2$ si et seulement si $x_0 - y_0 \in E_1$ et $E_1 = E_2$.

Exercice 11 : ✪✪✪ Le but de l'exercice est de montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, si $F_1, \dots, F_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E, alors $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i \neq E$.

1. Faire un dessin dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$.
2. Montrer l'initialisation.
3. On suppose que le résultat est vrai au rang n, montrons qu'il est vrai au rang $n+1$. Soient donc $F_1, \dots, F_{n+1}$ des sous-espaces vectoriels stricts de E. Ainsi, par hypothèse de récurrence $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i \neq E$. Que se passe-t-il si F_{n+1} est inclus dans $F_1 \cup \dots \cup F_n$? On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.
4. Soit $x \in F_{n+1} \backslash (F_1 \cup \dots \cup F_n)$ et soit $y \in E \backslash F_{n+1}$. Justifier l'existence de x et de y.
5. Montrer que $\lambda x + y \notin F_{n+1}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
6. Montrer que, pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.
7. Conclure.
8. Adapter le résultat au cas d'un corps $\mathbb{K}$ quelconque (on séparera les cas $\mathbb{K}$ fini et $\mathbb{K}$ infini).

28.4 Familles libres, génératrices, bases

Exercice 12 : ✪ Dans chacun des cas suivant, dire si les vecteurs u, v, w sont libres dans $\mathbb{R}^4$, donner une base de $\mathrm{Vect}(u, v, w)$ puis caractériser cet espace à l'aide d'une ou de plusieurs équations.

1. $u = (1, 1, 0, -1), v = (2, 1, -1, 2), w = (1, -1, -2, 3)$.
2. $u = (1, 0, 1, 1), v = (-1, -2, 3, -1), w = (-5, -3, 1, -5)$.

Exercice 13 : ✪ Les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices ?

1. $(x \mapsto x^2, \cos, \exp, \ln)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{+*}}$.
2. $(\cos, \sin, x \mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. $(\cos^2, x \mapsto \cos(2x), x \mapsto 1)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
4. $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \sin^2, \cos^2, x \mapsto \cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
5. $(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}, \sin, \cos, x \mapsto \cos(2x))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
6. $((1, 0, 0, 2), (0, 2, 0, 3), (1, 0, 1, 0))$ dans $\mathbb{R}^4$.
7. $((3, 2, 1, 4), (1, 1, 1, 3), (4, 2, 0, 3))$ dans $\mathbb{R}^4$.
8. $((1, 5, 6), (2, 3, 0), (3, 8, 6), (1, 0, 0))$ dans $\mathbb{R}^3$.
9. $((2, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
10. $((1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5))$ dans $\mathbb{R}^3$.
11. $((1, 2, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
12. $((1, 0, 1), (2i, 2, 0), (0, 1, -i))$ dans $\mathbb{C}^3$.
13. $((2^n), ((-1)^n), (1))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
14. $((2^n), ((-1)^n), (-1)^{n+1})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
15. $\left(\left(n^k\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
16. $((1), (n), (2^n), (3^n))$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
17. $(\cos, \sin, \mathrm{ch}, \mathrm{sh})$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
18. $(t \mapsto e^{int})_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
19. $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1+x^k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.
20. $\left(x \mapsto x^k e^{kx}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
21. $\left(x \mapsto e^{-kx^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
22. $\left(x \mapsto \cos^k(x)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 14 : ✪✪ Soit I un intervalle non trivial et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue non constante. Montrer que $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre.

Exercice 15 : ✪ Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille libre de E. Les familles suivantes sont-elles libres ?

1. (x_3, x_1) (si $n \geq 3$)
2. $(x_1, 2x_1 + x_4, x_4)$ (si $n \geq 4$)
3. $(x_1, 2x_2, x_3)$ (si $n \geq 3$)
4. $(x_1, x_1+x_2, \ldots, x_1+x_2+\cdots+x_n)$
5. $(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_n - x_1)$
6. ✪✪ $(x_1+x_2, x_2+x_3, \ldots, x_n+x_1)$

Exercice 16 : ✪ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donner une CNS pour que $(1, e^{i\theta})$ soit une famille libre dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Et dans $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 17 : ✪

1. Donner une base de l'espace vectoriel $S = \{y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \,|\, y'' + y' + y = 0\}$.
2. Déterminer une base sur $\mathbb{R}$ de S.
3. Déterminer une base du sous-espace vectoriel S' de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $f'' + 4f = 0,\ f(\pi) = 0$.

Exercice 18 : ✪ Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en donner une base.

1. $F = \{x \mapsto A\cos(x + \varphi) \,|\, (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + z = 0\}$.
3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, P\left(X^2\right) = (X^3 + 1)P\}$.
4. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x{+}y = z{+}t \text{ et } 2x{-}y{-}z{+}t = 0\}$.
5. $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \,|\, P(0) = P(1) = P(2)\}$.
6. $C = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \,|\, M \times \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \times M\right\}$.

Exercice 19 : ✪✪ Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on définit la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = |x - a|$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Est-ce une base de cet espace ?

Exercice 20 : ✪✪ Soit $(a, b, c) \in E^3$. On pose $u = b+c, v = a+c, w = a+b$. Montrer que (a, b, c) est libre si et seulement si (u, v, w) est libre.

Exercice 21 : ✪

1. Montrer que $((-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $(8, 4, 2)$ dans cette base.
2. Montrer que $(X^3 + X^2 - X - 1, X^3 - X^2 + 1, X^3 - X^2 + X, X^3 + 2X + 1)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

3. Pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on pose $u_k = (k, k-1, \dots, 2, 1, 0, \dots, 0)$. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 22 - Familles orthonormales de $\mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$: ✪✪ On dit qu'une famille de fonctions F appartenant à $\mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ forment une famille orthonormale si

$$\forall f \in F, \int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{d}t = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall (f,g) \in F^2, f \neq g \Rightarrow \int_0^1 f(t) \times g(t) \,\mathrm{d}t = 0$$

1. Montrer qu'une famille orthonormale est libre.
2. Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille libre (respectivement génératrice) d'un espace vectoriel E, et $(\alpha_i)_{i \in I}$ des scalaires tous non nuls. Montrer que $(\alpha_i x_i)_{i \in I}$ est une famille libre (respectivement génératrice).
3. Si $k \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[\,0\,;1\,]$ la fonction f_k par $f_k(x) = \sin(\pi k x)$. Montrer que $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre.

Exercice 23 - Fonction génératrice des moments : ✪✪ Si X est une variable aléatoire, on appelle fonction génératrice de moments de X la fonction $M_X : t \mapsto E\left(e^{tX}\right)$.

1. Expliciter la fonction génératrice des moments d'une loi binomiale de paramètres (n, p).
2. Montrer que la fonction génératrice des moments caractérise la loi, c'est-à-dire que si on a deux variables X et Y telles que $M_X = M_Y$, alors X et Y ont la même loi.
3. Montrer que, dans le cas de deux variables aléatoires X et Y suivant une loi binomiale, cette condition peut être affaiblie. Montrer plus précisément que X et Y ont la même loi si et seulement si M_X et M_Y sont équivalentes en $+\infty$. Peut-on remplacer $+\infty$ par $-\infty$?

Exercice 24 - Souvenirs : ✪✪✪ On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.
2. Montrer qu'un cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ et de rayon $R > 0$ possède au plus un point à coordonnées rationnelles.
3. L'ensemble des droites de $\mathbb{R}^2$ passant par deux points à coordonnées rationnelles recouvre-t-il $\mathbb{R}^2$?

Exercice 25 - Indépendance des caractères d'un groupe : ✪✪✪✪

1. Soit G un groupe.
   (a) Rappeler comment $\mathbb{C}^G$, l'ensemble des applications de G dans $\mathbb{C}$, est muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
   (b) Soient $\chi_1, \dots, \chi_n$ des morphismes de groupe distincts de G dans $\mathbb{C}^*$ (ce sont des *caractères* de G). Montrer que les χ_i sont linéairement indépendants.
2. **Remake (lemme de Dedekind) :** On se donne dans cette question $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps quelconques. La définition d'espace vectoriel se généralisant sans mal à un corps quelconque, on montrerait de même que $\mathbb{L}^{\mathbb{K}}$ est muni d'une structure de $\mathbb{L}$-espace vectoriel. Montrer que des morphismes de corps distincts de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{L}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{L}$.

28.5 Espaces vectoriels engendrés

Exercice 26 : ✪ Soient $(x, y, z) \in E^3$ et $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tels que $ax + by + cz = 0$ avec a et b non nuls. Montrer que $\mathrm{Vect}(x, z) = \mathrm{Vect}(y, z)$.

Exercice 27 : ✪

1. **Matheux vs physiciens :** Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{sh}, \mathrm{ch}) = \mathrm{Vect}(\exp, x \mapsto e^{-x})$.
2. Dans $\mathbb{R}^{[\,-1\,;1\,]}$, montrer que $\mathrm{Vect}(x \mapsto 1, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arcsin})$ peut s'écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(f, g)$ pour deux fonctions f et g de $[\,-1\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ bien choisies.

Exercice 28 : ✪

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)\cos(x)$. Montrer que E est un espace vectoriel et en donner une base.
2. **✪✪ Remake :** Montrer que $E = \{x \mapsto P(x)\cos(x) + Q(x)\sin(x) \,|\, (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2\}$ est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 29 : ✪

1. Soient a et b deux réels. Soient, dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs suivants :

$$e_1 = (1,1,-1), e_2 = (1,2,4), e_3 = (3,-1,a) \qquad \text{et} \qquad e_4 = (2,3,b)$$

   Déterminer a et b pour qu'on ait $\text{Vect}(e_1,e_2) = \text{Vect}(e_3,e_4)$.
2. **Remake :** Soient $E_1 = \text{Vect}((2,3,-1),(1,-1,-2))$ et $E_2 = \text{Vect}((3,7,0),(5,0,-7))$. A-t-on $E_1 = E_2$?

Exercice 30 : ✪✪ Donner $\text{Vect}(\text{GL}_n(\mathbb{K}))$.

Exercice 31 : ✪✪

1. Soit $F = \{P \in \mathbb{K}_4[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.
2. **Remake :** Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $F = \{P \in \mathbb{K}_5[X] \mid P(a) = P(b) = 0\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et en donner une base.

Exercice 32 : ✪✪ Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Comme en probabilités, on note $\overline{F}$ le complémentaire de F, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E n'appartenant pas à F.

1. $\overline{F}$ est-il un espace vectoriel ?
2. Montrer que pour tous $x \in F$ et $y \in \overline{F}, x + y \in \overline{F}$. En déduire que $E = \text{Vect}\left(\overline{F}\right)$. Illustrer par un dessin.

Exercice 33 : ✪✪

1. Soient A et B deux parties de E. Montrer que $\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
2. Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $(E_1 \cap E_2) + (E_1 \cap E_3) \subset E_1 \cap (E_2 + E_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
3. Montrer que $E_1 + (E_2 \cap E_3) \subset (E_1 + E_2) \cap (E_1 + E_3)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte. Montrer que si $E_1 \subset E_2$, alors il y a égalité.

Exercice 34 - Polynômes trigonométriques pairs : ✪✪✪ Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ définis par :

$$F = \text{Vect}\,(x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{N}) \qquad \text{et} \qquad G = \text{Vect}\,(x \mapsto \cos^n(x) \mid n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que $F = G$.
2. Les familles $(x \mapsto \cos(nx))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x \mapsto \cos^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ forment-elles des bases de $F = G$?

28.6 Sommes de sous-espaces vectoriels

Exercice 35 : ✪ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que

$$E_1 + E_2 = E_1 \cap E_2 \iff E_1 = E_2$$

Exercice 36 : ✪ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n + 1$.

1. Montrer que l'ensemble F des multiples de P est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
2. Montrer que F et $\mathbb{K}_n[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 37 : ✪ Soient F_1, F_2, G trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.
2. Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ sont-ils supplémentaires dans G ?

Exercice 38 : ✪ Dans $E = \mathbb{R}^3$, soient $E_1 = \{(x,y,z) \mid x + y - z = 0\}$ et $E_2 = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer $E_1 \cap E_2$.
3. Établir que $E_1 + E_2 = E$. La somme est-elle directe ?

Exercice 39 : ✪✪ Soient E_1, E_2, E_3 trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que si $E = E_1 \oplus E_2$ et $E_1 \subset E_3$ alors $E_3 = E_1 \oplus (E_2 \cap E_3)$.
2. Montrer que l'on est dans cette situation si $E = \mathbb{R}^3$, $E_1 = \text{Vect}(1,0,0)$ et si E_2 et E_3 sont les plans d'équations $x - 3y + 4z = 0$ et $y = z$ respectivement.

Exercice 40 : ✪✪ Soient $(u, v) \in E^2$ et F un sev de E. Montrer que $F + \text{Vect}(u) = F + \text{Vect}(v)$ si et seulement s'il existe $x \in F$ et deux scalaires α et β non nuls tels que $x + \alpha u + \beta v = 0$.

Exercice 41 : ✪✪ Notons $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout a, notons E_a l'ensemble des fonctions de E s'annulant en a.

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, E_a est un sous-espace vectoriel de E.
2. Soient $a \neq b$. Montrer que $E = E_a + E_b$.
3. La somme de E_a et E_b peut-elle être directe ?

Exercice 42 : ✪ Montrer à chaque fois que E_1 et E_1 sont supplémentaires dans E.

1. $E_1 = \text{Vect}(1, 2)$ et $E_2 = \text{Vect}(-1, 1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2. $E_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3. $E_1 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x + y, x + y, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}(0, 1, 0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5. $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ et $E_2 = \text{Vect}(1, 2, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
6. $E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
7. E_1 l'ensemble des fonctions affines et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E = D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
8. E_1 l'ensemble des fonctions linéaires et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(1) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. E_1 l'ensemble des fonctions nulles en 0 et $\pi/2$ et $E_2 = \text{Vect}(\sin, \cos)$ dans $E = \mathscr{C}([\,0\,;\pi\,], \mathbb{R})$.
10. $E_1 = \text{Vect}(1, \dots, 1)$ et $E_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
11. ✪✪ $E_1 = \text{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$ et $E_2 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
12. E_1 l'ensemble des suites constantes et E_2 l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans E l'ensemble des suites convergentes.
13. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et E_2 l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
14. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et
$$E_2 = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
15. ✪✪ $E_1 = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ et
$$E_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$.

Exercice 43 : ✪ On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On pose $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (1, 1, 0, 0), e_3 = (1, 1, 1, 0)$ et $e_4 = (1, 1, 1, 1)$. Soient enfin $E_1 = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $E_2 = \text{Vect}(e_3, e_4)$. Exprimer E_1 et E_2 à l'aide d'une ou de plusieurs équations, et prouver que E_1 et E_2 sont supplémentaires.

Exercice 44 : ✪✪ Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E_1 + E_2 = E$. Soit E_3 un supplémentaire de $E_1 \bigcap E_2$ dans E_1. Montrer que $E_2 \oplus E_3 = E$.

Exercice 45 : ✪✪✪ Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![\,1\,;\,p\,]\!]}$ p réels distincts de $[\,0\,;1\,]$ et soit

$$E_1 = \{f \in \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \mid f(\alpha_i) = 0 \quad \forall i\}\,.$$

Montrer que c'est un espace vectoriel et en trouver un supplémentaire dans $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ (on pourra chercher un ensemble de fonctions polynômes).

Chapitre 29

Applications linéaires

« I would prefer not to. »

Herman Melville, Bartleby le scribe

Si rien n'est précisé, E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Vrai ou Faux ?

1. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(2x) = 2f(x)$.
2. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(2x) = f(2) \times f(x)$.
3. Si $f : E \longrightarrow F$ est linéaire alors, pour tout $x \in E$, $f(x+2) = f(x) + f(2)$.
4. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est vide.
5. Une application linéaire d'un espace dans lui-même est bijective.
6. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire et injective, alors f est bijective.
7. Soit $f : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x_2, 0) \in \mathbb{R}^2$. Alors f est linéaire et $f^2 = 0$.
8. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ constante égale à 1 est un projecteur.
9. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\ker(f) \neq \mathrm{Im}(f)$.
10. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\ker(f) \subset \ker(f^2)$.
11. Si $f : E \longrightarrow E$ est linéaire alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^2)$.
12. Dans cette question et les suivantes, on se donne (e_1, e_2, e_3) une base de E. Si $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3) = 0$ alors f est la fonction nulle.
13. Si f est un endomorphisme de E vérifiant $f(e_1) = e_2, f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = e_1$, alors f est un automorphisme.
14. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$.
15. Soit $(f_1, f_2, f_3) \in E^3$. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = f_1$, $f(e_2) = f_2$, $f(e_3) = f_3$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = f_1 + f_2 + f_3$.
16. Soit $(f_1, f_2, f_3) \in E^3$. Il existe un unique endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = e_3$, $f(e_1 + e_2 + e_3) = 5e_1 + 3e_2 - e_3$.
17. Si u et v appartiennent à $\mathscr{L}(E, F)$, alors $\mathrm{Im}(u + v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$.
18. Un projecteur n'est pas injectif.
19. La somme de deux projecteurs est un projecteur.
20. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $-p$ est un projecteur.
21. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur si et seulement si $\mathrm{Id}_E - p$ est un projecteur.
22. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie si et seulement si $-s$ est une symétrie.

29.1 Être ou ne pas être une application linéaire ?

Exercice 1 : ✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de E ?

1. $f \mapsto \exp \circ f$
2. $f \mapsto f \circ \exp$
3. $f \mapsto \exp \times f'$
4. $f \mapsto f'' - f$.

Exercice 2 : ✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$?

1. $f \mapsto f(2024)$.
2. $f \mapsto f(1) - 1$.
3. $f \mapsto f''(3)$.
4. $f \mapsto (f'(2))^2$.
5. $f \mapsto \displaystyle\int_{-\pi}^{\sqrt{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 : ✪ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$? Le cas échéant, donner une base de son image et de son noyau.

1. $u : (x,y,z) \mapsto (x, xy, x-z)$
2. $u : (x,y,z) \mapsto (x+y, 2x+5, 0)$
3. $u : (x,y,z) \mapsto (x-y, x+y, 0)$.
4. $u : (x,y,z) \mapsto (x-3, x+y, z+2)$
5. $u : (x,y,z) \mapsto (y+z, x-2024z, -3x-4y)$
6. $u : (x,y,z) \mapsto (-x+z, -y+z, x-2y+z)$
7. $u : (x,y,z) \mapsto (x+2y, z-x, x+4y+z)$

Exercice 4 : ✪ Parmi les applications suivantes, lesquelles sont linéaires ? Le cas échéant, préciser leur noyau et leur image, et préciser si ce sont des endo/iso/automorphismes.

1. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n) \longmapsto (u_0,u_1,u_2) \end{cases}$.
2. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$.
3. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$.
4. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+1 \end{cases}$.
5. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \longmapsto (y,x,x+y) \end{cases}$.
6. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \min(x,y) \end{cases}$.
7. $u\colon \begin{cases} \mathscr{C}^n(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f^{(n)} \end{cases}$ (où $n \in \mathbb{N}$).
8. $u\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_n) \longmapsto \lim u_n \end{cases}$ (E étant l'ensemble des suites convergentes)
9. $u\colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \mathrm{Re}\,(3z + i\overline{z}) \end{cases}$ ($\mathbb{C}$ étant considéré comme un $\mathbb{C}$ puis comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel)
10. ✪✪ $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) \longmapsto (u_{n^2}) \end{cases}$.
11. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) \longmapsto \left({u_n}^2\right) \end{cases}$.
12. ✪✪ $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) \longmapsto (u_{n+2} + 2u_{n+1} + u_n) \end{cases}$.
13. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \longmapsto (f(1), f(-1)) \end{cases}$.

29.2 Manipulation d'applications linéaires, noyaux et images

Exercice 5 : ✪ Soit $n \geq 1$. Déterminer le noyau et l'image des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ suivants :

1. $P \mapsto P'$.
2. $P \mapsto XP'$.
3. ✪✪ $P \mapsto P - P'$.

Exercice 6 : ✪ Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par $f(P) = P - (X+1)P'$. Montrer que f est linéaire et donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 7 : ✪ Soient $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$ qui commutent. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Exercice 8 : ✪ Soient U et V deux sous-espaces vectoriels de E et soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $f(U+V) = f(U) + f(V)$ (oui, il y a quelque-chose à montrer : il ne suffit pas de dire que f est linéaire !).
2. Montrer que si U et V sont en somme directe et si f est injective, alors $f(U \oplus V) = f(U) \oplus f(V)$.

Exercice 9 : ✪

1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = -u$. Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. **Remake :** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u^3 = u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im} u^2$.
3. **Remake :** Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,E)$ tels que $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\ker(v) \oplus \mathrm{Im}(u) = F$.

Exercice 10 : ✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et soit g une application (pas forcément linéaire) de F dans G. Montrer que si $g \circ f$ est linéaire alors g est linéaire.

Exercice 11 - Crochet de Lie : ✪ Soient u et v dans $\mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = u$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k \circ v - v \circ u^k = ku^k$.

Exercice 12 : ✪ On considère dans cet exercice $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1. Soit

$$u \colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + i\overline{z} \end{cases}$$

Montrer que u est linéaire et donner une base de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.

2. **Remake :** Mêmes questions avec :

$$u \colon \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto iz - i\overline{z} \end{cases}$$

Exercice 13 : ✪ On définit les deux applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto (x, 2x+y, y)$, ainsi que $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto (x+z, 5x-2y+z)$.

1. Montrer que f et g sont linéaires. Déterminer leur noyau et leur image.
2. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Qu'en est-il de $f \circ g$?

Exercice 14 : ✪ Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que $f(\ker(g \circ f)) = \ker(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 15 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$. Montrer que f est soit nulle soit surjective.

Exercice 16 : ✪✪ Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $p \in [\![1\,;\,n]\!]$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!], f(e_i) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![p+1\,;\,n]\!], f(e_i) \neq 0$$

1. Donner une inclusion entre $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $\ker(f)$. Montrer qu'en général il n'y a pas égalité.
2. Montrer que si $n = p+1$ alors il y a égalité.

Exercice 17 : ✪✪ Les applications suivantes sont-elles injectives ?

1. $\varphi \colon \begin{cases} \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \longrightarrow (\mathbb{R}^3)^3 \\ u \longmapsto (u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \end{cases}$, où (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $D \colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{cases}$, où $E = \mathrm{Vect}(\cos \times \sin, \cos^2, \sin^2)$.

Exercice 18 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et soient V, W deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $f(V) \subset f(W)$ si et seulement si $V + \ker f \subset W + \ker f$.

Exercice 19 : ✪✪ On considère l'application T définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $T(P) = 3XP + X^2P' - X^3P''$.

1. Montrer que T est linéaire.
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Donner le degré de P' en fonction de celui de P.
3. Donner le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P.
4. T est-elle injective ? surjective ?

Exercice 20 : ✪✪ Soient $(u,v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Montrer les quatre équivalences suivantes :

1. $\ker(u) = \ker(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) \cap \ker(u) = \{0\}$
2. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \iff \mathrm{Im}(u) + \ker(u) = E$
3. $\ker(v \circ u) = \ker(u) \iff \ker(v) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$
4. $\mathrm{Im}(v \circ u) = \mathrm{Im}(v) \iff \ker(v) + \mathrm{Im}(u) = E$

Exercice 21 : ✪✪✪ Soient F un sous-espace vectoriel de E et $h \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si B est une partie de E, rappeler la définition de $h^{-1}(B)$, ainsi qu'une CNS pour qu'un élément $x \in E$ appartienne à $h^{-1}(B)$.

2. Montrer que $h^{-1}(h(F)) = F + \ker(h)$.
3. Exprimer de la même manière $h\left(h^{-1}(F)\right)$ en fonction de F et de $\mathrm{Im}(h)$.
4. Pour quels endomorphismes $h \in \mathscr{L}(E)$ a-t-on $h^{-1}(h(F)) = h\left(h^{-1}(F)\right)$?

Exercice 22 : ✪✪✪ Soient E, F_1, F_2 et G quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soient f_1, f_2, g_1, g_2 et u cinq applications linéaires. On suppose qu'elles vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{tikzcd}
& F_1 \arrow[dd, "u"] \arrow[dr, "g_1"] & \\
E \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "f_2"'] & & G \\
& F_2 \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

- f_1 va de E dans F_1, f_2 de E dans F_2, u de F_1 dans F_2, g_1 de F_1 dans G et g_2 de F_2 dans G.
- $u \circ f_1 = f_2$ et $g_2 \circ u = g_1$.
- f_1 et f_2 sont injectives.
- g_1 et g_2 sont surjectives.
- $\ker(g_1) = \mathrm{Im}(f_1)$ et $\ker(g_2) = \mathrm{Im}(f_2)$.

Montrer que u est un isomorphisme.

Exercice 23 - Les espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe : ✪✪✪ Soient $n \geq 1$, $u \in \mathscr{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires deux à deux distincts, et $(x_1, \dots, x_n)$ des vecteurs non nuls tels que, pour tout i, $u(x_i) = \lambda_i x_i$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre.

Exercice 24 : ✪✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que $E = \ker(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que

$$\ker(f - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(f^2 + f + \mathrm{Id}_E) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}_E) = \ker(f^2 + f + \mathrm{Id}_E)$$

29.3 Détermination d'applications linéaires

Exercice 25 : ✪ Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E distinct de E. Soit u une application de E dans F telle que la restriction de u à $\overline{E_1}$ (le complémentaire de E_1) soit nulle.

1. Montrer que u est linéaire si et seulement si u est nulle. On pourra utiliser l'exercice 32 du chapitre 28.
2. Comment expliquer ce résultat alors qu'il existe un résultat dans le cours donnant l'existence et l'unicité d'une application linéaire connaissant ses restrictions sur deux sous-espaces supplémentaires ?

Exercice 26 : ✪ On se place dans $E = \mathbb{K}^3$. Soient $E_1 = \mathrm{Vect}(1,0,0)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$. Montrer qu'il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que :

$$\forall x \in E_1, u(x) = 2x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E_2, u(x) = -x$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 27 : ✪ Montrer qu'il unique une unique application linéaire u de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$u(1,0,0) = (0,1), u(1,1,0) = (1,0) \qquad \text{et} \qquad u(1,1,1) = (1,1)$$

Déterminer u et donner une base de son noyau et de son image.

Exercice 28 : ✪ Soit (e_1, e_2, e_3) une base de E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

   - $f(e_1) = e_1 + e_2$
   - $f(e_1 + e_2) = e_1 - e_2$
   - $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1 + \lambda e_3$

   Comment choisir λ pour que f soit injective ?
2. Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

- $f(e_1) = 2e_2 + e_3$
- $f(e_2) = e_1 - e_3$
- $f(e_3) = 0$
- $f(e_1+e_2+e_3) = e_1+2e_2$

3. ✪✪ Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que

- $f(e_2 + e_3) = e_2$
- $f(e_1 + e_2) = e_3$
- $f(e_1 - e_3) = e_1$

29.4 Projecteurs et symétries

Exercice 29 : ✪✪ Montrer à chaque fois que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2, ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

1. $E_1 = \text{Vect}(1,2)$ et $E_2 = \text{Vect}(-1,1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
2. $E_1 = \{(x,y,z) \mid x+z=0\}$ et $E_2 = \{(x,y,z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
3. $E_1 = \{(x,2x,3x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x+y, x+y, y) \,|\, (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
4. $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}(0,1,0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
5. $E_1 = \text{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$ et $E_2 = \text{Vect}(1,2,3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
6. $E_1 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0\}$ et $E_2 = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,|\, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
7. E_1 l'ensemble des fonctions affines et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(0) = f'(0) = 0\}$ dans $E = D(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
8. E_1 l'ensemble des fonctions linéaires et $E_2 = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(1) = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. E_1 l'ensemble des fonctions nulles en 0 et $\pi/2$ et $E_2 = \text{Vect}(\sin,\cos)$ dans $E = \mathscr{C}([\,0\,;\pi\,],\mathbb{R})$.
10. $E_1 = \text{Vect}(1,\dots,1)$ et $E_2 = \{(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \,|\, a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
11. $E_1 = \text{Vect}(1,2,\dots,2n)$ et $E_2 = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \,|\, x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.
12. E_1 l'ensemble des suites constantes et E_2 l'ensemble des suites qui convergent vers 0 dans E l'ensemble des suites convergentes.
13. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et E_2 l'ensemble des fonctions nulles en 0 dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
14. E_1 l'ensemble des fonctions constantes et
$$E_2 = \left\{ f \in E \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
15. $E_1 = \{x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \,|\, (a_0,a_1,a_2) \in \mathbb{R}^3\}$ et
$$E_2 = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0, f(0) = f'(1) = 0 \right\}$$
dans $E = \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$.

Exercice 30 : ✪ Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{Id}_E$. Montrer que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer la décomposition associée. En déduire sans calcul que $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$.

Exercice 31 : ✪ Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$. Montrer que f et g sont deux projecteurs puis qu'ils ont la même direction.

Exercice 32 : ✪ Soit $n \geq 1$. Prouver que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$ en exhibant une certaine symétrie.

Exercice 33 : ✪ On note $\text{Proj}(E)$ l'ensemble des projecteurs de E. On définit une relation $\preccurlyeq$ sur $\text{Proj}(E)$ par :

$$p \preccurlyeq q \iff p \circ q = q \circ p = p$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\text{Proj}(E)$.
2. Montrer que pour tous p et q dans $\text{Proj}(E)$ qui commutent, $p \circ q = \inf\{p,q\}$.

Exercice 34 : ✪ Soient p et q deux projecteurs de E distincts et non nuls. Montrer que (p,q) est une famille libre de $\mathscr{L}(E)$.

Exercice 35 : ✪✪

1. Montrer que $(x,y,z) \mapsto (x,-z,-y)$ est une symétrie de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

2. Montrer que

$$P \mapsto \frac{2}{3}(P(-1)+P(0)+P(1)) - P$$

est une symétrie de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

3. Montrer que $P \mapsto X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est une symétrie de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 36 : ✪✪ Soit p un projecteur de E. On définit

$$C(p) = \{u \in \mathscr{L}(E) \,|\, p \circ u = u \circ p\}$$

1. Montrer que $C(p)$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathscr{L}(E)$ (on dit que c'est une sous-algèbre). Donner un élément de $C(p)$ distinct de l'application nulle.
2. Montrer que $u \in C(p)$ si et seulement si u laisse stables le noyau et l'image de p.

Exercice 37 : ✪✪ Montrer que deux projecteurs ayant la même image et qui commutent sont égaux.

Exercice 38 : ✪✪ Soient $\lambda \in \mathbb{K}\backslash\{1\}$, et E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E. On appelle **affinité** de base E_1, de direction E_2 et de rapport λ l'application

$$u\colon \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 \longrightarrow & E \\ x = x_1 + x_2 \longmapsto & x_1 + \lambda x_2 \end{cases}$$

1. Que sont les affinités vectorielles de rapport 0 ? de rapport -1 ? de base $\{0_E\}$?
2. (a) Soit u l'affinité de base E_1, de direction E_2 et de rapport λ. Montrer que $u \in \mathscr{L}(E)$ et que $E_1 = \ker(u - \mathrm{Id}_E)$ et $E_2 = \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$.
   (b) Montrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $E = \ker(u - \mathrm{Id}_E) \oplus \ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$, alors u est l'affinité vectorielle de base $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$, de direction $\ker(u - \lambda\,\mathrm{Id}_E)$ et de rapport λ.
3. Montrer que $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x, 3x-2y, -3x+3y+z)$, est une affinité vectorielle. Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 39 : ✪✪ Soient deux projecteurs p et q sur le même espace vectoriel E_1 (mais de directions différentes) et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda p + (1-\lambda)q$ est un projecteur sur E_1.

Exercice 40 : ✪✪ Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \qquad f(x,y,z) = \big(-x-2y-2z, 4x+5y+4z, -x-y\big)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Vérifier que $f^2 = 3f - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) En déduire que f est un automorphisme et expliciter f^{-1}.
3. Posons $p = f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ et $q = 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3} - f$.
   (a) Exprimer f en fonction de p et q.
   (b) Montrer que p et q sont des projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = 2^n p + q$.

Exercice 41 : ✪✪ Soit A un polynôme non nul. Montrer que l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui à un polynôme associe le reste de sa division euclidienne par A est un projecteur et en donner le noyau et l'image.

Exercice 42 : ✪✪ Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que $\ker p = \ker q$ si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

Exercice 43 : ✪✪ Soient p et q deux projecteurs de E. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes
- $p + q$ est un projecteur.
- $p \circ q = -q \circ p$.
- $p \circ q = q \circ p = 0$ (on pourra composer par p).

Montrer que dans ce cas on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 44 - Introduction au lemme des noyaux : ✪✪ Soient a et b deux scalaire distincts et soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $(u - a\,\mathrm{Id}_E) \circ (u - b\,\mathrm{Id}_E) = 0$.

1. Simplifier $(u - a\mathrm{Id}) - (u - b\mathrm{Id})$.
2. Montrer que $E = \ker(u - a\mathrm{Id}) \oplus \ker(u - b\mathrm{Id})$.
3. Déterminer une expression simple de la projection p sur $\ker(u - a\,\mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\ker(u - b\,\mathrm{Id}_E)$.
4. Vérifier que $u = ap + b(\mathrm{Id}_E - p)$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u^n.

Exercice 45 - Théorème de Maschke : ✪✪✪ Soient G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ de cardinal n, F un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G, et p un projecteur d'image F.

1. Montrer que

$$q = \frac{1}{n}\sum_{g\in G} gpg^{-1}$$

est un projecteur d'image F.

2. Montrer que F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de E.

Remarque : On a prouvé le théorème de Maschke : si G est un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$ et si F est un sev de E stable par tous les éléments de G, alors F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G. Cette démonstration est vraie en dimension quelconque (finie ou infinie) et sur un corps quelconque (même si le programme nous impose de nous restreindre à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Nous verrons une autre démonstration (valable uniquement sur $\mathbb{R}$ et en dimension finie) dans l'exercice 50 du chapitre 34.

29.5 Cas particulier des espaces de suites et de fonctions

Exercice 45 - Le shift : ✪✪ Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit l'application S suivante :

$$S\colon \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ (u_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\geq 0}\end{cases}$$

1. Montrer que c'est un endomorphisme de E et donner son image et son noyau.
2. Montrer que $\left(\ker(S^k)\right)_{k\geq 1}$ est une suite strictement croissante de sous-espaces de E. Que vaut la réunion $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} \ker\left(S^k\right)$?
3. Quel est le sous-espace $\ker(S^p - \mathrm{Id})$ pour $p \in \mathbb{N}^*$?

Exercice 46 - La dérivation discrète : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ on note $\Delta(f)$ l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$.

1. Montrer que $\Delta \in \mathscr{L}(E)$ et donner son noyau. Δ est-elle injective ?
2. Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*, x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f \in E$

$$\Delta^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(x+k)$$

3. On se donne dans cette question $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.
   (a) Montrer qu'il existe $\theta_1 \in \left]0\,;1\right[$ tel que $\Delta(f)(x) = f'(x+\theta_1)$.
   (b) Montrer qu'il existe $\theta_2 \in \left]0\,;1\right[$ tel que $\Delta^2(f)(x) = f''(x+2\theta_2)$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $\theta_n \in \left]0\,;1\right[$ tel que

$$\Delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x+n\theta_n)$$

   On pourra faire une récurrence et remarquer que $\Delta^{n+1} = \Delta^n \circ \Delta$.
4. Le but de cette question est de montrer que si $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ alors $c \in \mathbb{N}$. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que $c \notin \mathbb{N}$ et que $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
   (a) On pose $f : x \mapsto x^c$. Montrer que $f \in E$.
   (b) Montrer que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}, \Delta^n(f)(p) \in \mathbb{Z}$.
   (c) Soit $n = \lfloor c \rfloor + 1$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\theta_n \in \left]0\,;1\right[$

$$\Delta^n(f)(p) = c(c-1)\cdots(c-n+1)(p+n\theta_n)^{c-n}$$

(d) Montrer que $p + n\theta_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ (attention, θ_n dépend de p) puis que $\Delta^n(f)(p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$.

(e) Montrer que $\Delta^n(f)(p) \neq 0$ pour tout p et conclure.

Remarque : Ainsi, il n'existe pas de réel non entier c tel que $p^c \in \mathbb{N}$ pour tout entier p. On peut se poser une question apparemment plus simple : un tel réel c existe-t-il si l'on ne considère qu'un nombre fini d'entiers p ?

Le résultat est trivial pour un seul entier, par exemple, $2^{\ln(2024)/\ln(2)} = 2024 \in \mathbb{N}$, mais que se passe-t-il si on prend plusieurs entiers ? On peut montrer (mais c'est très difficile, il faut parler de nombres transcendants, cf DS n° 5B de l'année 2021/2022) qu'il n'existe pas de réel c non entier tel que $2^c, 3^c$ et 5^c soient entiers et donc a fortiori la réponse est négative si on prend plus de trois entiers.

Cependant, on ne sait pas s'il existe un réel c non entier tel que 2^c et 3^c soient entiers (mais on conjecture qu'un tel réel c n'existe pas). Ces deux résultats (dans le cas de trois entiers et de deux entiers) sont des conséquences respectives du théorème des six exponentielles, et de la conjecture des quatre exponentielles (si elle est vraie) et, malgré leur simplicité apparente, sont d'une complexité bien supérieure à tout ce qui est nécessaire pour la résolution de notre exercice.

Exercice 47 : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On considère les endomorphismes de E

$$D : f \mapsto f' \qquad \text{et} \qquad P : f \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Montrer rapidement que ce sont bien des endomorphismes de E.
2. Expliciter $D \circ P$ et $P \circ D$.
3. Donner les noyaux de $D, P, P \circ D$ et $D \circ P$.
4. Montrer que l'image de P est l'ensemble des fonctions de E nulles en 0.
5. Donner les images de $D, P \circ D$ et $D \circ P$.

Exercice 48 : ✪✪ On considère l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}^{[0;1]} \\ f & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1. Montrer que φ est linéaire.
2. Soit $f \in \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$. On note $g = \varphi(f)$. Exprimer $g(x)$ sans utiliser de min (on pourra couper l'intégrale en deux).
3. Montrer que g est $\mathscr{C}^2$ et calculer g''. φ est-elle surjective ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \left\{ g \in \mathscr{C}^2([0;1],\mathbb{R}) \mid g(0) = g'(1) = 0 \right\}$.
5. Montrer que φ est injective.

Exercice 49 : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $T(f)$ la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$T(f)(x) = \left\{ \begin{array}{ll} f(0) & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{sinon} \end{array} \right.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E.
2. Montrer que T est injective.
3. Soit $g \in \mathrm{Im}(T)$. Montrer que g est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $xg'(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$. T est-elle surjective ?
4. ✪✪✪ Donner $\mathrm{Im}(T)$.

Exercice 50 - Sans les petites roues : ✪✪✪ Soit $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer le noyau et l'image des deux endomorphismes suivants :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xf(x) \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \psi : \left\{ \begin{array}{l} E \to E \\ f \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Chapitre 30

Espaces vectoriels de dimension finie

« - Hum ! visage de traître !
Quand la bouche dit oui, le regard dit peut-être. »

Victor Hugo, Ruy Blas

Comme dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si rien n'est précisé, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Vrai ou Faux ?

1. Une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace de dimension n est génératrice.
2. Une famille de $n-1$ vecteurs dans un espace de dimension n est libre.
3. Tout vecteur d'un espace vectoriel de dimension finie peut-être complété en une base.
4. L'espace des fonctions de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 est de dimension finie.
5. L'espace des polynômes de degré au plus 3 s'annulant en 0 et en 1 est de dimension 2.
6. Un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension infinie est lui-même de dimension infinie.
7. Si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille libre, alors $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est de dimension n.
8. Si $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, alors c'est une base.
9. Si u est un endomorphisme de E, qui est de dimension finie, alors $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont supplémentaires.
10. Si u est un endomorphisme injectif de E, alors u est surjectif.
11. Si u est un endomorphisme injectif de E, qui est de dimension finie, alors u est surjectif.
12. Si $u : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire surjective, alors u est injective.

Exercice 1 : ✪ Montrer que

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & \mathbb{K} \times \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & (P(0), P') \end{cases}$$

est un isomorphisme. En déduire une nouvelle démonstration du fait que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 2 : ✪ Montrer que $\varphi : P \mapsto (P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0))$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Exercice 3 : ✪ Déterminer une base et la dimension des espaces vectoriels suivants :

1. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + 3y + z = 0\}$.
2. $\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0 \text{ et } x - 3y = 0\}$.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ c & 0 & a+b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
4. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \exists (a, b) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ae^x + bx\}$.
5. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(2) = P(3) = 0\}$.

Exercice 4 : ✪ Déterminer le noyau des applications linéaires suivantes. En déduire, sans plus de calcul, leur image, et leur éventuel caractère injectif/surjectif/bijectif.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z,\ x + y,\ x - z)$.
2. $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z, t) \mapsto (2x + y + z - t,\ -3x - y + 2t,\ 4x + z - t)$.

3. $h : \mathscr{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} M$.
4. $\Phi : \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \to (\mathbb{R}^3)^3$, $p \mapsto (p(u),\, p(v),\, p(w))$, où (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $D : E \to E$, $f \mapsto f'$, où $E = \mathrm{Vect}(\cos^2, \sin^2, \sin\cos, \sin, \cos)$.

Exercice 5 : ✪ Donner la dimension de :

1. $D_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices diagonales (de taille n, à coefficients dans $\mathbb{K}$).
2. ${T_n}^+(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.
3. ${T_n}^-(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.
4. ${T_n}^{++}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes (i.e. avec une diagonale nulle).
5. ${T_n}^{--}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes.

Exercice 6 : ✪ Que pensez-vous de la proposition suivante : si $m \leq n$ alors $\mathbb{R}^m$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Corrigez-la.

Exercice 7 : ✪ On pose $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (2, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (n, n-1, n-2, \dots, 1)$ (les vecteurs étant dans $\mathbb{R}^n$). Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 8 : ✪ Montrer que l'ensemble des suites arithmétiques est un espace vectoriel. Donner sa dimension et en donner une base.

Exercice 9 : ✪ Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F)+\dim(G) > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice 10 - Lemme d'échange : ✪ Soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Montrer qu'il existe $p \in [\![1\,;\, n]\!]$ tel que $(e_1, \dots, e_{n-1}, f_p)$ soit une base de E.

Exercice 11 : ✪ On note $C(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid u \circ v = v \circ u\}$. Montrer que $C(u)$ est un espace vectoriel stable par composition de dimension supérieure ou égale à 1.

Exercice 12 : ✪ Un sev F de E est dit stable par automorphisme si, pour tout u automorphisme de E, $u(F) \subset F$.

1. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer que pour tout vecteur y non nul, il existe un automorphisme u de E tel que $u(x) = y$.
2. Montrer qu'un sev F de E est stable par automorphisme si et seulement si $F = \{0\}$ ou $F = E$.

Exercice 13 : ✪

1. Soit $E_1 = \mathrm{Vect}((0, 1, 1), (1, 0, 2))$. Trouver $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 \oplus \mathrm{Vect}(x) = \mathbb{R}^3$.
2. Soit $E_2 = \mathrm{Vect}(1, 0, 1)$. Trouver x et $y \in \mathbb{R}^3$ tels que $E_2 \oplus \mathrm{Vect}(x, y) = \mathbb{R}^3$.
3. Trouver un supplémentaire de $F = \mathrm{Vect}(1, X + 1, X^3 - X^2)$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Dans chacun des cas suivants, prouver (à l'aide d'arguments de dimension) que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E.
   (a) $E_1 = \mathrm{Vect}(1, 2)$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(-1, 1)$ dans $E = \mathbb{R}^2$.
   (b) $E_1 = \{(x, y, z) \mid x + z = 0\}$ et $E_2 = \{(x, y, z) \mid x = 2y = z\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (c) $E_1 = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $E_2 = \{(x + y, x + y, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (d) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(0, 1, 0)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (e) $E_1 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0))$ et $E_2 = \mathrm{Vect}(1, 2, 3)$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
   (f) $E_1 = \mathrm{Vect}(1, \dots, 1)$ et $E_2 = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ dans $E = \mathbb{K}^n$.
   (g) $E_1 = \mathrm{Vect}(1, 2, \dots, 2n)$ et $E_2 = \{(x_1, \dots, x_{2n}) \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \cdots + x_{2n-1} - x_{2n} = 0\}$ dans $E = \mathbb{R}^{2n}$.

Exercice 14 : ✪ On considère les 4 hyperplans H_1, H_2, H_3, H_4 de $\mathbb{R}^5$ d'équations respectives dans la base canonique : $(H_1) : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$; $(H_2) : x_1 = x_2 + x_3 - 3x_5$; $(H_3) : x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0$ et $(H_4) : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0$. Quelle est la dimension de $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$?

Exercice 15 : ✪ Soit $n \geq 1$. Montrer que $\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1)\}$ est un espace vectoriel, donner sa dimension et en donner une base.

Exercice 16 : ✪ Soient $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1, \dots, f_p)$ des familles libres. On suppose que pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$, $e_i \in \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_i)$. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$, $f_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$.

Exercice 17 : ✪ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \exists ! P \in \mathbb{R}_n[X], Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)} \left(\frac{X}{2^i}\right)$$

Exercice 18 : ✪✪ Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Montrer que :

$$\forall A \in \mathbb{C}[X], \exists ! P \in \mathbb{C}[X], P(X - \alpha) + P(X - \beta) = A$$

Exercice 19 : ✪✪ Montrer que $\varphi : P \mapsto P(X) + P(X+1)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20 : ✪✪ On ne suppose plus que E est de dimension finie, mais on se donne E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie. Redémontrer la formule de Graßmann à l'aide de l'application linéaire :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E_1 \times E_2 & \to & E \\ & & \\ (x_1, x_2) & \mapsto & x_1 + x_2 \end{array} \right.$$

Exercice 21 : ✪✪ Soit $n \geq 1$. On note :

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \,|\, P(-X) = P(X)\} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{I} = \{P \in \mathbb{K}_{2n}[X] \,|\, P(-X) = -P(X)\}$$

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont des sev de $\mathbb{K}_{2n}[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont en somme directe.
3. Montrer que $\dim(\mathscr{P}) \geq n+1$ et $\dim(\mathscr{I}) \geq n$.
4. En déduire que ces inégalités sont des égalités, et prouver que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}_{2n}[X]$.

Exercice 22 : ✪✪ Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base constituée de matrices inversibles.

Exercice 23 : ✪✪ Pour quels (a, b, c) les trois fonctions $f_a : x \mapsto \sin(a + x)$, $f_b : x \mapsto \sin(b + x)$, $f_c : x \mapsto \sin(c + x)$ forment-elles une famille libre ?

Exercice 24 : ✪✪ Montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ (cf exercice 32 du chapitre 25) n'est pas de dimension finie.

Exercice 25 : ✪✪ Soient $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ des éléments d'un espace vectoriel E (pas forcément de dimension n dans cet exercice). On suppose que $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ est libre. Montrer qu'il y a au moins n vecteurs libres parmi $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$.

Exercice 26 - Bien essuyer ses lunettes (ou en acheter le cas échéant...) : ✪✪ On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u^m(x) = 0$. Montrer que u est nilpotent. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 27 : ✪✪ Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si F est inclus dans $u(F)$ alors $F = u(F)$.
2. A l'aide de $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$ et de la dérivation, montrer que le résultat n'est plus valable si E n'est pas supposé de dimension finie.

Exercice 28 : ✪✪ Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $E = \ker u + \ker v = \mathrm{Im} u + \mathrm{Im} v$. Montrer que ces sommes sont directes. Donner un contre-exemple en dimension infinie.

Exercice 29 : ✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\dim(f(E_1)) = \dim(E_1) - \dim(E_1 \cap \ker(f))$.
2. Montrer que $\dim(f^{-1}(E_1)) = \dim(E_1 \cap \mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$.

Exercice 30 : ✪✪ Soient E_1 et E_2 des sous-espaces vectoriels de E de même dimension. Montrer qu'il existe un automorphisme f de E tel que $f(E_1) = E_2$.

Exercice 31 : ✪✪ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que
$$T: \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P'' + \omega^2 P \end{cases}$$
est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En calculant $T(1), T(X), T(X^2), \dots, T(X^n)$, montrer que T est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = x^n$ possède une unique solution polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction polynomiale f telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + \omega^2 f(x) = x^n$$
Attention, il n'y a a priori aucune condition sur le degré d'une éventuelle solution !

Exercice 32 : ✪✪ Soit $E = D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles de dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble F des solutions de l'équation différentielle $y'' - (1+x^2)y = 0$.

1. Peut-on appliquer le résultat du cours ?
2. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que si v et w appartiennent à F, alors la fonction $v'w - vw'$ est constante sur $\mathbb{R}$.
4. Soient f et g les applications définies par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{x^2/2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
Montrer que f et g appartiennent à F.
5. Soit $h \in F$. Montrer que h est combinaison linéaire de f et g (on pourra dériver h/f). En déduire la dimension de F.

Exercice 33 : ✪✪ Soit $p \geq 1$. Montrer que l'ensemble des suites réelles p-périodiques est un espace vectoriel de dimension p et en donner une base.

Exercice 34 : ✪✪ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ stabilisant tous les hyperplans. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 35 : ✪✪ Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\dim \ker u^k \leq k \times \dim \ker u$ et $\mathrm{rg}(u^k) \geq k \times \mathrm{rg}(u) - n(k-1)$.

Exercice 36 : ✪✪

1. Montrer qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\ker f = \mathrm{Im} f$ si et seulement si E est de dimension paire.
2. **Remake :** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. À quelle CNS sur $\dim(F)$ et $\dim(G)$ existe-t-il $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}(u) = F$ et $\ker(u) = G$?

Exercice 37 - Interpolation d'Hermite ✪✪ Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts, et $(b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^{2n}$ (pas forcément distincts). Montrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{K}_{2n-1}[X]$ tel que, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$ et $P'(a_i) = c_i$. Illustrer par un dessin.

Exercice 38 : ✪✪ Soit $\sigma : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ une subdivision du segment $[\,0\,;1\,]$. On note E_σ l'ensemble des fonctions continues de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $[\,x_i\,;x_{i+1}\,]$ est affine. Montrer que E_σ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}^{[\,0\,;1\,]}$ et calculer sa dimension. On pourra commencer par faire un dessin. Même question pour F_σ, l'ensemble des fonctions (pas forcément continues) de $[\,0\,;1\,]$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à chaque intervalle $]\,x_i\,;x_{i+1}\,[$ est affine.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose
$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$$
et on dit que $P(A)$ est un polynômes en A. On note enfin $K[A]$ l'ensemble $\{P(A) \,|\, P \in \mathbb{K}[X]\}$.

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$ est un espace vectoriel.
2. À l'aide de l'application $M \mapsto AM$, montrer que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 40 - Une infinité de supplémentaires : ✪✪ On suppose $n \geq 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E différent de E et de $\{0\}$.

1. Soit G un supplémentaire de F de base $(e_1, \dots, e_p)$. Montrer que pour tout $a \in F$, la famille $(a + e_1, \dots, a + e_p)$ est une famille libre. On appelle G_a l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2. Montrer que G_a est un supplémentaire de F.
3. Soient $a \neq b$ deux éléments de F. Montrer que $a + e_1 \notin G_b$. Montrer cependant que si $p \geq 2$, alors $G_a \cap G_b \neq \{0\}$.
4. En déduire que F admet une infinité de supplémentaires. Illustrer par un dessin.

Exercice 41 - Composition d'endomorphismes nilpotents : ✪✪

1. Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, montrer que $\mathrm{Im} u$ et $\ker u$ sont stables par v.
2. Soient u_1 et u_2 deux endomorphismes nilpotents qui commutent. Montrer que $\mathrm{rg}(u_2 \circ u_1) \leq n - 2$.
3. Soient $u_1, \dots, u_n$ n endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que $u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

Remarque : Si u est un endomorphisme nilpotent, en appliquant la dernière question à $u_1 = \cdots = u_n = u$, on vient donc de redémontrer le fait (cf. cours) que $u^n = 0$, c'est-à-dire que l'indice de nilpotence est inférieur à la dimension de l'espace.

Exercice 42 - Familles positivement génératrices : ✪✪ Une famille $(e_1, \dots, e_p)$ est dite positivement génératrice si

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^p \qquad x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

1. Montrer que pour $(e_1, \dots, e_p) \in E^p$ on a équivalence entre
   (a) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est positivement génératrice.
   (b) $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est génératrice et il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}^{+*})^p$ tels que
   $$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i = 0$$
2. Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est positivement génératrice alors $p \geq n+1$. Existe-t-il une famille positivement génératrice de cardinal $n+1$?
3. On se donne une famille positivement génératrice $(e_1, \dots, e_p)$ avec $p \geq 2n+1$.
   (a) Montrer qu'il existe $I \subset [\![1 \,;\, p]\!]$ tel que $(e_i)_{i \in I}$ soit une base de E.
   (b) On pose $J = [\![1 \,;\, p]\!] \backslash I$. Montrer que $(e_j)_{j \in J}$ est une famille liée.

Exercice 43 : ✪✪ Soit $\omega > 0$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = \lambda \cos(\omega x)$ (on fera attention au cas $\omega = 1$).
2. Prouver que l'ensemble des fonctions $f \in D^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ solutions de $f'' + f = f(0)\cos(\omega x)$ est un espace vectoriel et donner sa dimension.

Exercice 44 : ✪✪ On suppose que E est de dimension n et que F est de dimension p, avec $n > p$. Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$. Montrer que $v \circ u$ est un projecteur de rang p. Que vaut $\ker(v \circ u)$?

Exercice 45 - Générateur automatique d'exercices : ✪✪ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 11/2, u_1 = 61/11$ et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+2} = 111 - \frac{1130}{u_{n+1}} + \frac{3000}{u_n u_{n+1}}$$

1. Donner u_2, u_3, u_4 sous forme irréductible (bon, là, d'accord, une calculatrice peut être utile). Que remarque-t-on au niveau des numérateurs et des dénominateurs ?
2. Démontrer ce résultat. Pour cela, on écrira pour commencer une récurrence à trous de la forme :

Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $d_0 = 2, d_1 = 11$ et ... Montrons le résultat suivant par récurrence : $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad H_n : « \; u_n = \frac{d_{n+1}}{d_n} \; »$$

et on remplira les trous au fur et à mesure du calcul.

3. Exprimer d_n en fonction de n (allez je vous aide : 100 est racine « évidente »). On prouvera le résultat utilisé concernant les suites récurrentes d'ordre 3.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. Mais comment ai-je fait pour construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ semblant si compliquée, mais pouvant en fait s'écrire de façon si simple ?
   (a) Donner un polynôme de degré 3 admettant $3, 11$ et 2024 pour racines.
   (b) En déduire une relation de récurrence linéaire d'ordre 3 vérifiée par la suite (d_n) définie par
   $$d_n = 1 \times 3^n + 1 \times 11^n + 0 \times 2024^n$$
   (c) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = d_{n+1}/d_n$. Donner la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par $u_0 = 7, u_1 = 65/7$ et
   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 2038 - \frac{28369}{u_{n+1}} + \frac{66792}{u_n u_{n+1}}$$
   (e) Ça vous a plu ? Alors essayez d'inventer un autre exercice pour mes élèves de l'an prochain (parce que j'aime en faire le moins possible).

Exercice 46 - Racine carrée de la dérivation : ✪✪ Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit D l'opérateur de dérivation. Le but de cet exercice est de montrer que D n'a pas de racine carrée, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'endomorphisme $T \in \mathscr{L}(E)$ tel que $D = T \circ T$.

1. Donner la dimension de $K = \ker(D^2)$.
2. Montrer que K est stable par D et par T.
3. Montrer que t, la restriction de T à K, est nilpotente.
4. Conclure à une absurdité.

Exercice 47 - Représentation des formes linéaires : ✪✪✪

1. Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$$
2. **Remake :** Montrer qu'il existe un unique $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P'(2024) = \sum_{k=0}^{n} P(k)A(k)$$

Exercice 48 - Théorème de multiplicativité des degrés : ✪✪✪ Soient K, L, V trois corps tels que $\mathbb{K} \subset L \subset V$. On rappelle (cf. chapitre 28) que L est muni d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel, que V est muni d'une structure de L espace vectoriel ainsi que d'une structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel. On suppose que $\dim_{\mathbb{K}}(L) = p$ et $\dim_L(V) = q$. Montrer que $\dim_{\mathbb{K}}(V) = p \times q$.

Exercice 49 : ✪✪✪ Soit $n \geq 1$. On pose $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_{2n}[X] \;\middle|\; \int_1^4 P(x)\,\mathrm{d}x\ = 0 \right\}$. Montrer que c'est un espace vectoriel, donner sa dimension et en donner une base.

Exercice 50 : ✪✪✪ Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels distincts.

1. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on note φ_k la forme linéaire définie sur E par $\varphi_k(P) = P(a_k)$. Montrer que $(\varphi_k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ est une base de $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in E$ tel que :
$$\forall P \in E, \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\ = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)P(a_k)$$
3. **Remake :** Prouver qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \qquad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t\ = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(k)$$
Donner une expression des coefficients $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ à l'aide des polynômes de Lagrange.

Exercice 51 : ✪✪✪ Soit H un hyperplan de E.

1. Soit $x_1 \notin H$. Montrer qu'on peut compléter x_1 en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.
2. Plus généralement, si $p \leq n$ et $x_1, \dots, x_p$ sont des vecteurs libres n'appartenant pas à H, montrer qu'on peut compléter la famille $(x_1, \dots, x_p)$ en base de E avec des éléments n'appartenant pas à H.

Exercice 52 : ✪✪✪ Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'il existe un isomorphisme g de E et un projecteur p tel que $f = g \circ p$.

Exercice 53 : ✪✪✪ Soient p, q, r appartenant à $[\![1 ; n]\!]$. Montrer qu'il existe F et G deux sev de E tels que $\dim(F) = p, \dim(G) = q$ et $\dim(F \cap G) = r$ si et seulement si : $p + q - n \leq r \leq \min(p, q)$.

Exercice 54 : ✪✪✪

1. Montrer que la famille $(\ln(p))_{p \in \mathbb{P}}$ est libre sur $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension infinie.
3. En déduire que $\ln(p)$ est rationnel pour au plus une valeur de p.

Remarque : On peut même montrer (on le fera peut-être en DM cette année) que $\ln(r)$ est irrationnel pour tout r strictement positif différent de 1. Le résultat de cet exercice en découle, mais il est beaucoup plus facile à obtenir !

Exercice 55 : ✪✪✪ On pose $P_0 = 1$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P_k = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_k(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
2. Montrer que $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}[X]$.
3. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 56 - Cardinal d'un corps fini : ✪✪✪ Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Soit $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(n) = \underbrace{1_{\mathbb{K}} + \cdots + 1_{\mathbb{K}}}_{n \text{ fois}}$ si $n \geq 0$, et $\varphi(n) = \underbrace{-1_{\mathbb{K}} - \cdots - 1_{\mathbb{K}}}_{-n \text{ fois}}$ sinon. On rappelle (cf chapitre 18) que φ est un morphisme d'anneaux.

1. Montrer qu'il existe p premier tel que $\ker(\varphi) = p\mathbb{Z}$.
2. Montrer que $\mathbb{K}_0 = \varphi(\mathbb{Z})$ est un sous corps de $\mathbb{K}$ de cardinal p (on dit que $\mathbb{K}_0$ est le sous-corps premier de $\mathbb{K}$).
3. En regardant $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{K}_0$-espace vectoriel, montrer que le cardinal de $\mathbb{K}$ est une puissance de p.

Remarque : Ainsi, le cardinal d'un corps fini est toujours une puissance d'un nombre premier. Par exemple, il n'existe aucun corps à 6 ou 10 éléments. Réciproquement, on peut prouver (mais c'est plus difficile) que si p est premier et $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) un unique corps à $q = p^n$ éléments noté $\mathbb{F}_q$. Par exemple, il existe un unique corps à 4 ou à 8 éléments. On prouvera dans l'exercice 47 du chapitre 33 l'existence d'un corps à p^2 éléments pour tout p premier impair.

Exercice 57 - Une suite qui s'essouffle : ✪✪✪

1. Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^6\right)$ tel que $\operatorname{rg}\left(u^2\right) = 3$. Montrer que $\operatorname{rg}(u) = 3$ ou 4. On pourra s'intéresser à $u_{|\operatorname{Im}(u)}$.
2. **Remake :** Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg}(f) = 1$.
3. On se replace dans le cas général i.e. u est un endomorphisme de E qui est un espace vectoriel de dimension n. Montrer que la suite $(\dim(\ker(u^p)))_p$ est croissante mais s'essouffle, c'est-à-dire que la suite $(\dim(\ker(u^{p+1})) - \dim(\ker(u^p)))_p$ est décroissante.

Exercice 58 : ✪✪✪ Soient u et v deux endomorphismes de E tels que $u^2 \circ v = u$ et $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(v)$. Le but de l'exercice est de montrer que $v^2 \circ u = v$.

1. Montrer que $\ker(u) = \ker(v)$ et que $\operatorname{Im}(u \circ v - \operatorname{Id}_E) \subset \ker u$.
2. En déduire que $v \circ u \circ v = v$.
3. Soit $p = u \circ v$. Montrer que p est un projecteur de E.
4. Montrer que $\ker(p) = \ker(v)$, puis que $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(u)$.
5. En déduire que $u \circ v \circ u = u$ et conclure.

Exercice 59 : ✪✪✪ On suppose dans cet exercice que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $u^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$. On suppose que $(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_{p-1}))$ est une famille libre. Montrer que $(x_1, \dots, x_p, u(x_1), \dots, u(x_p))$ est également une famille libre.
2. (a) Soit $x_1 \neq 0$. Montrer que $(x_1, u(x_1))$ est une famille libre.
   (b) Montrer que si $n \neq 2$, alors il existe x_2 tel que $(x_1, x_2, u(x_1))$ soit une famille libre.
   (c) En déduire que $n \geq 4$.
3. Montrer que n est pair. On s'inspirera de la démonstration du théorème de la base incomplète.
4. Donner un exemple de tel endomorphisme u dans le cas où $n = 2$.

Exercice 60 : ✪✪✪ Soient u et v deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $|\mathrm{rg}\ u - \mathrm{rg}\ v| \leq \mathrm{rg}\ (u+v) \leq \mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}\ u + \mathrm{rg}\ v - n \leq \mathrm{rg}\ u \circ v$.
3. On suppose que $u + v$ est injective et $uv = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(E)$.

Exercice 61 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2-1})$ est liée. On pourra utiliser l'exercice 31 du chapitre 21.

Remarque : On peut même montrer (c'est le théorème de Cayley-Hamilton, au programme de deuxième année) que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^n)$ est liée. Pourquoi est-ce un résultat plus fort ?

Exercice 62 - Suites exactes : ✪✪✪ Soient $E_0, E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On dispose pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$ d'une application linéaire f_k de E_k dans E_{k+1}.

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \xrightarrow{f_1} E_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

On suppose que $\ker f_0 = \{0\}$, que $\mathrm{Im} f_{n-1} = E_n$ et enfin que pour tout $k \in [\![0\,;\,n-2]\!]$, $\mathrm{Im} f_k = \ker f_{k+1}$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim E_k = 0$$

Exercice 63 : ✪✪✪ Soit $n \geq 2$. On pose $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $E^* = \mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$. Soit H un hyperplan de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le but de cette question est de montrer que H contient une matrice inversible.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}^{n^2}$ non tous nuls tels que :

$$M \in H \iff \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_{ij} M_{ij} = 0$$

2. On suppose dans cette question qu'il existe $i \neq j$ tels que $\lambda_{ij} \neq 0$. Montrer que H contient une matrice inversible.
3. On suppose à présent que $\lambda_{ij} = 0$ pour tous $i \neq j$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$$

   Calculer J^2. En déduire que J est inversible et conclure.

Exercice 64 - Dénombrement : ✪✪✪ On suppose que $\mathbb{K}$ est un corps fini de cardinal q et que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

1. Quel est le cardinal de E ?
2. Combien y a-t-il de droites (vectorielles) dans E ?
3. Soit $p \in [\![1\,;\,n]\!]$ et soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p.
   (a) Montrer que le nombre de bases possibles (en tenant compte de l'ordre des vecteurs) de F est

$$(q^p - 1) \times (q^p - q) \times \cdots \times \left(q^p - q^{p-1}\right)$$

(b) En déduire que le nombre de sous-espaces vectoriels de E de dimension p est :

$$\frac{(q^n-1)\times(q^n-q)\times\cdots\times\left(q^n-q^{p-1}\right)}{(q^p-1)\times(q^p-q)\times\cdots\times\left(q^p-q^{p-1}\right)}$$

Exercice 65 : ✪✪✪ Deux couples (F_1,G_1) et (F_2,G_2) de sev de E sont dits équivalents lorsqu'il existe un automorphisme φ de E tel que $\varphi(F_1)=F_2$ et $\varphi(G_1)=G_2$.

1. Montrer que la relation « être équivalents » est une relation d'équivalence.
2. Montrer que deux couples (F_1,G_1) et (F_2,G_2) sont équivalents si et seulement si $\dim(F_1)=\dim(F_2)$, $\dim(G_1)=\dim(G_2)$ et $\dim(F_1\cap G_1)=\dim(F_2\cap G_2)$.

Exercice 66 : ✪✪✪✪ Soient f et g deux endomorphismes de E. On considère les propriétés suivantes :

1. $f\circ g\circ f=f$
2. $g\circ f\circ g=g$
3. $\mathrm{rg}(f)=\mathrm{rg}(g)$

Montrer que deux des trois propriétés impliquent la troisième. Si f est fixé, existe-t-il g tel que les trois propriétés soient vérifiées ?

Exercice 67 : ✪✪✪✪

1. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ de dimension $n\geq 1$. Déterminer le cardinal de $\{\deg(P)\,|\,P\in E, P\neq 0\}$.
2. Trouver les $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P\left(X^2\right)=(X^n+1)\times P$.

Exercice 68 : ✪✪✪✪ Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et soit $(X_i)_{i\in[\![1\,;\,n+1]\!]}$ une famille de parties non vides de $[\![1\,;\,n]\!]$. Montrer qu'il existe deux sous-ensembles disjoints non vides I et J de $[\![1\,;\,n]\!]$ tels que :

$$\bigcup_{i\in I}X_i=\bigcup_{j\in J}X_j$$

Chapitre 31

Matrix Reloaded

« I love French wine, like I love the French language. I have sampled every language, French is my favorite - fantastic language, especially to curse with. »

Matrix Reloaded

On notera comme dans le cours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si rien n'est précisé, on suppose que n est un entier supérieur ou égal à 2, que E est un espace vectoriel de dimension n, et que les matrices appartiennent à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Vrai ou Faux ?

1. L'espace des matrices de trace nulle est de dimension $n-1$.
2. La matrice de l'application identité d'un espace de dimension n est I_n quelle que soit la base choisie.
3. S'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PB$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
4. Deux matrices équivalentes sont semblables.
5. Deux matrices semblables sont équivalentes.
6. Deux matrices semblables ont même rang.
7. Deux matrices de rang 1 sont semblables.
8. Une matrice de rang 1 est équivalente à la matrice dont tous les coefficients valent 1.
9. L'ensemble des matrices de rang au plus $r \in [\![1\,;\, n-1]\!]$ est un groupe pour l'addition.
10. Une matrice et sa transposée ont même rang.
11. Une matrice et sa transposée ont même noyau.
12. Si M a une seule colonne non nulle alors $\mathrm{rg}(M) = 1$.
13. Si M a exactement deux colonnes non nulles alors $\mathrm{rg}(M) = 2$.
14. Si M est triangulaire et si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
15. Si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
16. Si tous les coefficients de M sont non nuls alors $\mathrm{rg}(M) = n$.
17. $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une base composée de matrices de rang 1.
18. Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.
19. Le rang d'une matrice triangulaire est égal au nombre de ses coefficients diagonaux non nuls.
20. $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A) \times \mathrm{rg}(B)$.
21. $\mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(B)$.
22. $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(BA)$.
23. Si A et B sont de rang 1 alors $A+B$ est de rang 1.
24. Si A et B sont de rang 1 alors $A+B$ est de rang 2.
25. ✪✪ Si A et B sont de rang 1 alors $A+B$ est de rang inférieur ou égal à 2.

31.1 Matrices et applications linéaires, stage one

Exercice 1 : ✪ Donner la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$ défini par $u(P) = P(X+1) - P(X)$. Est-il injectif/surjectif/bijectif ?

Exercice 2 : ✪ Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}_4[X]$ défini par $u(P) = P(1-X)$. Donner la matrice A canoniquement associée à u et donner A^{-1} sans calcul.

Exercice 3 : ✪ Soit A la matrice de $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux en ligne et colonne n qui valent 1. Calculer A^2.

Exercice 4 - Opérateur de dérivation : ✪ Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par $B = (\cos, \sin, \mathrm{sh}, \mathrm{ch})$ et soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Montrer que B est une base de E et que E est stable par D. On notera d la restriction de D à E.
2. Donner la matrice M de d sur B.
3. Montrer que M est inversible et donner M^{-1}.
4. Donner M^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 : ✪ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, soit $r \in [\![1\,;\, n]\!]$. On se donne dans tout l'exercice un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ et on note $M = \mathrm{Mat}_B(u)$. Déterminer quelles propriétés de u traduisent le fait que M présente les formes suivantes. Quand une matrice est présentée « par blocs », il sera toujours sous-entendu que le premier « paquet » de lignes (respectivement de colonnes) est composé de r lignes (respectivement r colonnes).

1. $M = 0_n$.
2. $M = I_n$.
3. $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
4. $M = \left(\begin{array}{cccc} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & & & \vdots \\ * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right)$
5. $M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$
6. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$
7. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right)$

Exercice 6 : ✪ Pour tout $P \in \mathbb{K}_3[X]$, on pose

$$f(P) = \frac{1}{2}\left(X^2 - 1\right) P'' - XP' + P$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{K}_3[X]$.
2. Donner sa matrice canoniquement associée.
3. Montrer que f est une projection et déterminer ses éléments caractéristiques.

Exercice 7 : ✪ Soit $A = X^2 - 3X + 1$. Soit φ l'application linéaire de $\mathbb{K}_4[X]$ dans $\mathbb{K}_1[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de sa division euclidienne par A (c'est bien une application linéaire d'après l'exercice 41 du chapitre 29).

1. Déterminer la matrice de φ dans les bases canoniques de $\mathbb{K}_4[X]$ et de $\mathbb{K}_1[X]$.
2. En déduire le reste dans la division euclidienne de $P = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ par A.

Exercice 8 : ✪ Soit E un espace vectoriel ayant pour base $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Reconnaître l'application linéaire u vérifiant :

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 9 : ✪ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On définit l'application suivante

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) & \rightarrow & \mathscr{M}_2(\mathbb{K}) \\ \\ M & \mapsto & A \times M \end{array} \right.$$

Montrer que u est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique en fonction des coefficients de A.

Exercice 10 : ✪✪ Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes dans les bases B_1 (base de départ) et B_2 (base d'arrivée).

1. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad P \quad \longmapsto P(1) \end{cases}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}$.
2. $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad P \quad \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}$.
3. $u\colon \begin{cases} \mathbb{C}_3[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P+P' \end{cases}$ avec B_1 et B_2 égales à la base canonique de $\mathbb{C}_3[X]$.
4. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec $B_1 = (1, X-a, (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec B_1 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $B_2 = (1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\dots+X^n)$.
6. $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ avec $B_1 = (1, 1+X, 1+X+X^2, \dots, 1+X+\dots+X^n)$ et B_2 la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. $u\colon \begin{cases} \mathbb{C}_1[X] \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \quad P \quad \longmapsto \left(\overline{P(1+i)}, \mathrm{Re}(P(i))\right) \end{cases}$, $B_1 = (1, i, X, iX)$ et $B_2 = ((1,0), (i,0), (0,1), (0,i))$ (on considère $\mathbb{C}_1[X]$ et $\mathbb{C}^2$ comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels).

Exercice 11 : ✪✪ Soit F l'espace vectoriel des suites réelles vérifiant l'équation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Donner une base B de F.
2. Montrer que

$$T\colon \begin{cases} \quad F \quad \longrightarrow \quad F \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

   est un endomorphisme de F.
3. Donner $\mathrm{Mat}_B(T)$ et en déduire que T est un automorphisme de F.

Exercice 12 : ✪✪

1. Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection sur le plan d'équation $x+y-z=0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(1,1,1)$. Comment vérifier le résultat obtenu ?
2. **Remake :** Donner la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ de la symétrie par rapport au plan d'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_i = 0$ parallèlement à la droite $\mathrm{Vect}(1,\dots,1)$.

Exercice 13 : ✪✪

1. Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui prend les valeurs $0, 1, 2$ avec les probabilités p_0, p_1 et p_2 respectivement. On suppose que $E(Y) = 1$ et $E(Y^2) = 5/3$. Calculer p_0, p_1 et p_2.
2. Soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(n+1)$ réels distincts et soit φ l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ qui, à tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, associe le $(n+1)$-uplet $(Q(x_0), Q(x_1), \dots, Q(x_n))$.
   (a) Montrer que φ est une application linéaire bijective.
   (b) Déterminer la matrice Φ de φ dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$.
3. Soit X une variable aléatoire discrète qui prend les valeurs $x_0, x_1, \dots, x_n$. On suppose que $E(X), E\left(X^2\right), \dots, E\left(X^n\right)$ sont connus. Peut-on déterminer la loi de X ?

Exercice 14 : ✪✪ Soient

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (3x-4y-2z, 4x-7y-4z, -5x+10y+6z) \end{cases}$$

et

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (5x-8y-4z, 8x-15y-8z, -10x+20y+11z) \end{cases}$$

Montrer que f (respectivement g) est un projecteur (respectivement une symétrie) et donner une base dans laquelle la matrice de f (respectivement g) est diagonale.

Exercice 15 : ✪✪✪ Dans cet exercice, n et p désignent des entiers naturels non nuls, E désigne un ensemble à n éléments et F un ensemble à p éléments (pas des espaces vectoriels !). On note $F(n,p)$ le nombre d'applications de E dans F et $S(n,p)$ le nombre de surjections de E dans F.

1. Donner A, la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.
2. Déterminer A^{-1}.
3. Montrer que $F(n,p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} S(n,k)$.
4. Vérifier que : $\begin{pmatrix} 0 & F(n,1) & \cdots & F(n,n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & F(n,1) & \cdots & F(n,n) \end{pmatrix} \times A$.
5. En déduire la valeur de $S(n,p)$ sous forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.

31.2 Rang, image et noyau

Exercice 16 : ✪ Donner sans calculs le rang des matrices suivantes (a et b sont deux réels) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a & 0 & \dots & 0 & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \dots & 0 & b \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 : ✪ La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Exercice 18 - Savoir lire une matrice : ✪ Donner une base du noyau et de l'image des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associés aux matrices

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 19 : ✪ Soient $\alpha \in \mathbb{K}, A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ tels que

$$ABC = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

Trouver α.

Exercice 20 : ✪ Donner à chaque fois le rang de $M - \lambda I_3$ selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de λ la matrice $M - \lambda I_3$ est-elle non inversible ? Donner alors la dimension de son noyau.

- $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
- $M = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 10 \\ -2 & -5 & 10 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Exercice 21 : ✪ Donner le rang des familles suivantes.

1. $((0,1,2,-1),(1,2,2,-1),(0,2,-1,1),(4,6,1,3))$.
2. $((0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0))$.
3. $((0,1,0,1),(1,-1,1,-1),(1,-1,-1,1),(1,1,1,1))$.
4. $((1,-1,1),(-1,1,-1),(0,1,1),(1,0,2))$.
5. $((1,1,0,1),(1,-1,1,0),(2,0,1,1),(0,-2,1,-1))$.
6. $((1,0,2,3),(7,4,2,-1),(5,2,4,7))$.

Exercice 22 : ✪ Donner une base du noyau de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 23 : ✪ Déterminer, en fonction de $m \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-m \\ 1+m & -1 & 2 \\ 2 & -m & 3 \end{pmatrix}$$

et, dans chacun des cas, donner une base du noyau de A.

Exercice 24 : ✪ Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. Donner le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & ac & ad & bd \end{pmatrix}$$

Exercice 25 : ✪ Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Donner $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
2. En déduire le noyau et l'image de $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ canoniquement associée à A.

Exercice 26 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z + a\overline{z} \end{cases}$$

1. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$.
3. Déterminer les noyau et image de f.

Exercice 27 : ✪✪ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner selon la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de $A - \lambda I_3$.
2. Lorsque $\ker(A - \lambda I_3) \neq \{0\}$, en donner une base.
3. Expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = P^{-1}DP$. En déduire A^n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. **Remake :** Recommencer l'exercice avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 28 : ✪✪ Soit $a \in \mathbb{K}$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par : $A_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $A_{i,j} = a$ sinon. Donner le rang de A en fonction de a et de n.

Exercice 29 - Ou pourquoi les professeurs de mathématiques doivent avoir de l'imagination : ✪✪ Donner le rang de la matrice $n \times n$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & n+1 & 2n+1 & \cdots & (n-1)n+1 \\ 2 & n+2 & 2n+2 & \cdots & (n-1)n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 30 - Le rang est invariant par extension de corps : ✪✪

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ sont égaux.
2. Plus généralement, soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ deux corps quelconques. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{L})$. Montrer que le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et le rang de M comme élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{L})$ sont égaux.

Exercice 31 - Sur les matrices de rang 1 : ✪✪✪

1. Donner toutes les matrices qui commutent avec toutes les matrices de rang 1.
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe X et Y deux vecteurs colonnes non nuls de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tels que $A = XY^\top$.
3. Soient $A_1 = X_1Y_1^\top$ et $A_2 = X_2Y_2^\top$ deux matrices de rang 1. À quelle condition nécessaire et suffisante A_1 et A_2 sont-elles colinéaires ? sont-elles égales ?
4. Soit $A = XY^\top$ de rang 1. Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$. Plus précisément, exprimer A^p à l'aide de A et de $\mathrm{tr}\,(A)$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $(I_n + A)^k$.

Exercice 32 : ✪✪✪

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donner le rang de la matrice $A_\alpha \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $\cos((i+j-2)\alpha)$.
2. **Remake :** Calculer le rang de la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général est égal à $\sin(i+j)$.

Exercice 33 : ✪✪✪ Soient S une famille de n vecteurs de rang s et S' une sous-famille de S de n' vecteurs de rang s'. Montrer que $n - s \geq n' - s'$.

Exercice 34 : ✪✪✪✪

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini. Donner le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. Si p est un nombre premier et G est un groupe fini de cardinal $n = p^\alpha \times m$ avec $m \wedge p = 1$ et $\alpha \geq 1$ (cf. DM nº 13), un p-Sylow de G est un sous-groupe S de G de cardinal p^α, c'est-à-dire qu'un p-Sylow est un sous-groupe dont le cardinal est égal à la plus grande puissance de p possible. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ admet un p-Sylow.

31.3 Trace

Exercice 35 : ✪

1. Montrer que, pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), AB - BA \neq I_n$.
2. On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$u \colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto f' \end{cases} \qquad \text{et} \qquad v \colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ f \longmapsto \mathrm{Id}_E \times f \end{cases}$$

Vérifier que u et v sont des endomorphismes de E vérifiant $uv - vu = \mathrm{Id}_E$. Comment expliquer l'apparent paradoxe entre cette question et la précédente ?

Exercice 36 : ✪✪ Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Calculer la trace de l'endomorphisme u de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $u(P) = P(aX + b)$.

Exercice 37 - Le dual de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\mathrm{tr}\left(A \times A^\top\right)$. En déduire que

$$f\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \quad A \quad \longmapsto \quad f_A \end{cases}$$

où f_A est l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_A(M) = \mathrm{tr}\,(AM)$, est un isomorphisme.

Exercice 38 - Matrice d'un projecteur : ✪✪ Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Soit

$$P = \frac{1}{\mathrm{card(G)}} \sum_{g \in G} g$$

Montrer que $P^2 = P$. En déduire que si $\mathrm{tr}\,(P) = 0$ alors $P = 0$.

Exercice 39 : ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle. Soit T définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par $T(M) = M - \mathrm{tr}\,(M)\,A$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Donner une CNS sur $\mathrm{tr}\,(A)$ pour que T soit bijective.
3. Lorsque T n'est pas bijective, montrer que T est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques.

Exercice 40 : ✪✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

1. $X + \mathrm{tr}\,(X)\,A = B$.
2. $X + X^\top = \mathrm{tr}\,(X)\,A$.

Exercice 41 : ✪✪✪ Soit $p \geq 1$. Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Soit

$$\psi\colon \begin{cases} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ \quad M \quad \longmapsto \quad AMB \end{cases}$$

Montrer que $\mathrm{tr}\,(\psi) = \mathrm{tr}\,(A) \times \mathrm{tr}\,(B)$.

Exercice 42 : ✪✪✪✪ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant : $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer que f est proportionnelle à la trace.

31.4 Matrices équivalentes et semblables

Exercice 43 : ✪

1. Que dire d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_B(u) = I_n$ pour une certaine base B ?
2. Que dire d'un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{B',B}(u) = I_n$ pour deux bases B et B' de E ?

Exercice 44 : ✪ Les matrices suivantes sont-elles semblables ?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 45 : ✪✪ Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont pas semblables.

Exercice 46 : ✪✪ Trouver P et Q inversibles telles que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

Exercice 47 - A et $A^\top$ sont semblables, le cas $n=2$: ✪✪ Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que $b \neq 0$. On considère le système linéaire (S) : $A^\top P = PA$, où l'inconnue est $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

1. Montrer que (S) est équivalent à $y = z$ et une seconde équation en x, y, t que l'on explicitera. Achever la résolution et donner une base de solutions.
2. Vérifier que (S) admet une solution P qui est inversible.
3. Déduire de cette étude que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est semblable à sa transposée.

Exercice 48 : ✪✪ Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 49 : ✪✪ Soient A et B appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = -BA$ et $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 50 : ✪✪

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang r. Montrer que f est la somme de r endomorphismes de rang 1.
2. On se donne dans cette question un idéal bilatère de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire que I est un sous-groupe de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +)$ absorbant des deux côtés i.e. :

$$\forall M \in I, \forall (P,Q) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, PM \in I \qquad \text{et} \qquad MQ \in I$$

   (a) Montrer que I est non vide et que si $M \in I$, alors toute matrice de même rang que M appartient aussi à I.
   (b) Montrer plus généralement que si $M \in I$, alors toute matrice de rang inférieur ou égal à $\mathrm{rg}(M)$ appartient aussi à I.
   (c) En déduire que $I = \{0_n\}$ ou $I = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 51 : ✪✪✪ Déterminer les $(A, C) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tels que :

$$\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), ABC = 0_n$$

Exercice 52 : ✪✪✪ Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $r < n$. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ soit de rang n.

Exercice 53 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe B inversible telle que $(AB)^2 = AB$.
2. Supposons que $\mathrm{rg}(A) < n$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que AB soit nilpotente.

Exercice 54 : ✪✪✪ Soit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ non constante et multiplicative, c'est-à-dire que pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), f(AB) = f(A) \times f(B)$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $f(A) \neq 0$.

Exercice 55 : ✪✪✪✪ Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2$. Lorsque cela a un sens, donner l'inverse de la matrice $I_n + aE_{i,j}$. À l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes de M, expliciter :

$$(I_n + aE_{i,j})M(I_n - aE_{i,j})$$

2. Montrer que M est semblable à une matrice dont la première colonne est nulle sauf éventuellement les coefficients en position $(1,1)$ et $(2,1)$.
3. Montrer que M est semblable à une matrice dont tous les coefficients en-dessous de la sous-diagonale sont nuls.
4. **Remake :** Montrer que si M est de trace nulle alors M est semblable à une matrice de diagonale nulle. On pourra commencer par se demander ce qui se passe lorsque M admet un coefficient non nul sur sa première ligne ou sa première colonne en dehors du coefficient en position $(1,1)$, puis lorsque M admet un coefficient non diagonal non nul, et enfin lorsque M est diagonale.

31.5 Changements de bases

Exercice 56 : ✪ On note $a = (1,-1,1), b = (2,1,-1)$ et $c = (-1,3,1)$.

1. Montrer que (a,b,c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées de X dans la base (a,b,c).

Exercice 57 : ✪ Dans chacun des cas suivants, on donner la matrice A canoniquement associée à un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Donner à chaque fois la matrice de u relativement aux bases B_1 (base de départ) et B_2 (base d'arrivée).

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_1 = B_2 = ((1,1),(1,2))$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_1 = ((1,1),(2,-3))$, $B_2 = ((1,1),(-1,-2))$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B_1 = B_2 = ((1,0,1),(1,2,0),(0,1,1))$.

Exercice 58 : ✪ Soit

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x-y, y-z, -z+2x) \end{cases}$$

On note (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la famille $f_1 = e_2 - e_3, f_2 = -e_1 + e_3, f_3 = e_1 + e_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 59 : ✪ Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $B = (e_1,e_2,e_3)$ est

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 \\ -1 & -7 & -4 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f^3 = 0$.
2. On pose $\varepsilon_1 = e_1, \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2)$.
   (a) Montrer que $B' = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer la matrice A' de f dans la base B'.

Exercice 60 : ✪ On note $B = (1,X,X^2,X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que la famille $B' = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de passage de B à B'.
3. Déterminer la matrice de passage de B' à B.
4. Soit D l'endomorphisme de dérivation, c'est-à-dire :

$$D\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$$

   Déterminer la matrice de D dans la base B puis la matrice de u dans la base B'.

Exercice 61 : ✪✪ Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2 où $B_1 = ((1,2,1),(2,3,3),(3,7,1))$ et $B_2 = ((3,1,4),(5,3,2),(1,-1,7))$.

31.6 Matrices et applications linéaires, stage two

Exercice 62 : ✪✪ On suppose que E est de dimension 3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^2 = u^3$.

1. Montrer que $E = \ker(u^2) \oplus \ker(u - \mathrm{Id}_E)$.
2. Montrer que si $\ker(u - \mathrm{Id}_E)$ est de dimension 1, alors il existe une base dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Plus généralement, montrer à l'aide d'une activité du cours que dans une certaine base de E, u a pour matrice l'une des matrices suivantes :

$$0_3, I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et montrer que ces matrices sont deux à deux non semblables.

Exercice 63 : ✪✪ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Le but de cet exercice est de montrer d'une autre façon que dans l'exercice 13 du chapitre 21 qu'il n'existe pas de matrice $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$. On fait encore une fois un raisonnement par l'absurde et on suppose donc qu'une telle matrice B existe.

1. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Conclure à une absurdité.

Exercice 64 - De l'art de bien choisir ses espaces : ✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\binom{j-1}{i-1} 2024^{j-i}$. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

Exercice 65 : ✪✪ On identifie dans cet exercice polynômes et fonctions polynomiales. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $T(P)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, T(P)(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la restriction de T à $\mathbb{R}_n[X]$ définit un endomorphisme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. L'endomorphisme T_n est-il bijectif ?
4. L'endomorphisme T est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 66 : ✪✪✪ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = P(x)e^x$. On note, pour tout $i \in [\![0 ; n]\!]$, b_i la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $b_i(x) = x^i e^x$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel, et que $B = (b_0, \dots, b_n)$ en est une base. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E, et donner sa matrice relativement à la base B. D est-il un isomorphisme ?
3. Déterminer une base C de E dans laquelle la matrice de D est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. Déterminer $M^{-1}1$.
5. En déduire une primitive de la fonction b_n.

6. En déduire la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 67 : ✪✪✪ Soit $E = \mathbb{K}^n$ et soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base B est :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{pmatrix}$$

Soit $B' = ({e_1}', \dots, {e_n}')$ définie par : $\forall j \in [\![1\,;\, n]\!], {e_j}' = \displaystyle\sum_{k=1}^{j} e_k$. Montrer que B' est une base de E et donner la matrice de f dans la base B'.

Exercice 68 : ✪✪✪ On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est positive (ce qu'on note $A \geq 0$) si tous ses coefficients sont positifs. On dit qu'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est monotone si A est inversible et si A^{-1} est positive.

1. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et monotone si et seulement si : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}), AX \geq 0 \Rightarrow X \geq 0$.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. On note

$$A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$$

   (a) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX \geq 0$. On suppose qu'il existe i tel que $X_i < 0$ et note $i_0 = \min\{i \,|\, X_i < 0\}$. Montrer que pour tout $i \geq i_0$, $X_i \leq X_{i-1}$.
   (b) Montrer que A est monotone.

Exercice 69 : ✪✪✪ Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $f(e_p) = e_{p+1}$ si $p < n$ et $f(e_n) = 0$. Montrer que f est nilpotent et donner sa matrice dans la base B. Donner les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ stables par f.

Exercice 70 : ✪✪✪ Soient $n \geq 1, E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}^*$. Soit u l'application définie sur E par $u(P) = P(X+\alpha)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E et déterminer A, la matrice canoniquement associée à u.
2. Montrer que A est inversible de deux façons différentes et déterminer A^{-1} sans calcul d'inverse.
3. Montrer que pour tous $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$ tels que $i < j$,

$$\sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0$$

Exercice 71 - Théorème de Graham et Pollak : ✪✪✪✪ On fait disputer à n joueurs m matchs de balle au prisonnier : lors du k-ième match, on forme deux équipes : la bleue B_k et la rouge R_k ; ces deux équipes n'ont pas nécessairement le même nombre de joueurs, et tous les joueurs ne jouent pas tous les matchs (mais les équipes sont toujours non vides). On suppose qu'au bout des m matchs, chaque joueur aura affronté chaque autre une et une seule fois.

1. On définit la matrice M_k dont le coefficient $(M_k)_{i,j}$ vaut 1 si, lors du k-ième match, le i-ème joueur était bleu et le j-ième rouge, et 0 dans tous les autres cas. Déterminer son rang.
2. On pose $M = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} M_k$. Montrer que $M + M^\top$ est la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients non diagonaux valent 1, et tous les coefficients diagonaux sont nuls.
3. Montrer que si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a un rang inférieur ou égal à $n-2$, alors il existe un vecteur x non nul, mais dont la somme des coordonnées est nulle, dans le noyau de A.
4. En considérant la fonction

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^\top \times (M + M^\top) \times x \end{cases}$$

   déduire de ce qui précède que $m \geq n-1$.
5. Montrer que si, pour tout k, la partie k consiste à opposer le k-ième joueur aux joueurs numérotés de $k+1$ à n, alors la contrainte de l'énoncé est vérifiée. La borne $n-1$ est-elle optimale ?

Chapitre 32

Groupe symétrique

« Je le vis, je rougis, je pâlis à sa vue ;
Un trouble s'éleva dans mon âme éperdue ;
Mes yeux ne voyaient plus, je ne pouvais parler ;
Je sentis tout mon corps et transir et brûler ; »

Racine, Phèdre

Comme en cours, n est un entier supérieur ou égal à 3.

32.1 Permutations explicites

Exercice 1 : ✪

1. La permutation $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle un cycle ?
2. Montrer que $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ est la composée de deux cycles à supports disjoints.
3. Expliciter la permutation $\sigma_3 = (1\,2\,7\,4\,3) \circ (6\,4\,3\,5\,2) \circ (8\,1\,3\,7\,6)$ puis l'écrire comme composée de cycles à supports disjoints.
4. Même question avec $\sigma_4 = (1\,2\,4\,3) \circ (6\,4\,5\,2) \circ (8\,6\,3\,7) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.
5. Donner les signatures de σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4.
6. Écrire σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4. comme produit de transpositions de deux manières différentes.

Exercice 2 : ✪✪ Donner toutes les permutations qui commutent avec le n-cycle $(1\,2\,\ldots\,n)$.

Exercice 3 : ✪✪ Déterminer la signature de la permutation σ définie par : $\forall k \in [\![1\,;\,n]\!], \sigma(k) = n+1-k$.

32.2 Permutations générales

Exercice 4 - Une autre définition de la signature : ✪ Si $\sigma \in S_n$, on appelle inversion de σ tout couple $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ tel que $i<j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Montrer que $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I_\sigma}$, où I_σ est le nombre d'inversions de σ.

Exercice 5 : ✪✪ Soient c_1 et c_2 deux cycles de supports respectifs S_1 et S_2. Montrer que si c_1 et c_2 commutent, alors $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ ou $S_1 = S_2$. Réciproque ?

Exercice 6 : ✪✪ Soit $\sigma \in S_n$ telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$. Que dire de la décomposition de σ en produit de cycles à supports disjoints ? En déduire que si n est impair, alors σ admet un point fixe.

Exercice 7 : ✪✪ Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-f-c}$ où f est le nombre de points fixes de σ et c le nombre de cycles dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.

Exercice 8 - Ordre d'une permutation : ✪✪✪

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$. On appelle **ordre** de la permutation σ, et on note $\omega(\sigma)$, le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie cette propriété.

2. Justifier que l'ordre d'une permutation est bien défini.
3. Soit $\sigma \in S_n$ et soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sigma^k = \mathrm{Id}_{[\![1\,;\,n]\!]}$ si et seulement si $\omega(\sigma) | k$. En déduire que si τ et σ sont deux permutations à supports disjoints, alors $\omega(\sigma \circ \tau) = \omega(\sigma) \vee \omega(\tau)$.
4. Soit $\sigma \in S_n$. Calculer $\omega(\sigma)$ en fonction des ordres des cycles apparaissant dans sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
5. Calculer les ordres des permutations σ_1, σ_2, σ_3 et σ_4 de l'exercice 1.
6. Combien S_7 contient-il d'éléments d'ordre 12 ? On pourra utiliser l'exercice 11.

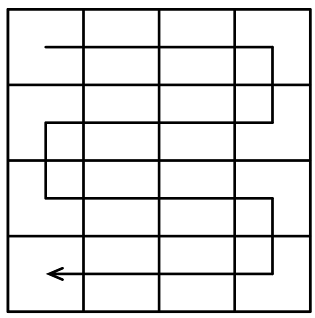
Exercice 9 - Jeu du taquin et problème de Sam Loyd : ✪✪✪✪ Le jeu du taquin est formé d'un plateau 4×4 formé de cases numérotées de 1 à 15 et d'une case laissée vide, dont l'état initial est donné ci-dessous (à gauche).

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Les seuls mouvements possibles sont le déplacement d'une case vers la case vide. Le but de l'exercice est de répondre à la question suivante, posée par Sam Loyd il y a plus d'un siècle : peut-on [1] arriver à la position de droite ci-dessus ? Peut-on se ramener à la position qui ne diffère de la position initiale que par l'interversion des cases numérotées 14 et 15 ?

À toute position du jeu du taquin, on peut associer une permutation de $[\![1\,;\,15]\!]$ obtenue en lisant tous les numéros suivant le parcours fléché (sans tenir compte du trou) ci-dessous :



c'est-à-dire que l'image de 1 est le premier numéro, l'image de 2 est le deuxième numéro etc. Par exemple, la permutation associée à la configuration de départ du taquin est la permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

Le rangement des nombres de 1 à 15 ne détermine pas complètement la configuration du taquin, car il ne donne pas d'information sur la position de la case vide. Mais comme on peut promener la case vide le long du chemin par les mouvements autorisés du taquin, peu importe : si l'on peut arriver à l'une des configurations donnant un certain rangement, on pourra aussi arriver à toutes les configurations donnant le même rangement. On se demande donc si on peut réaliser la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix}$$

à l'aide des mouvements autorisés au jeu du taquin.

1. Montrer que, si la case vide n'est pas sur un des bords du plateau, effectuer un mouvement autorisé revient à composer la permutation avant mouvement par un 3-cycle, un 5-cycle, ou par l'identité.
2. Que se passe-t-il si la case vide est au bord du tableau, mais n'est pas un coin ?
3. Conclure.

32.3 Combinatoire et probabilités

Exercice 10 : ✪ Dénombrer les permutations $\sigma \in S_{2n}$ telles que :

$$\sigma(1) < \sigma(2) < \cdots < \sigma(n) \qquad \text{et} \qquad \sigma(2n) < \sigma(2n-1) < \cdots < \sigma(n+1)$$

1. Uniquement à l'aide de mouvements autorisés : l'usage d'une petite cuiller pour démonter le jeu est formellement interdit...

Exercice 11 : ✪✪

1. Soit $p \in [\![2\,;\, n]\!]$. Combien S_n contient-il de p-cycles ?
2. Combien y a-t-il de permutations dans S_{20} dont la décomposition en produit de cycles à supports disjoints comporte trois 4-cycles, deux 3-cycles et deux points fixes ?

Exercice 12 - Points fixes d'une permutation aléatoire : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma \in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme.

1. Expliciter un espace probabilisé fini qui modélise cette expérience. On note dans la suite de cet exercice N_n la variable aléatoire égale à son nombre de points fixes.
2. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, notons X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si k est un point fixe de σ, et qui vaut 0 sinon. Expliciter la loi de X_k. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Exprimer N_n en fonction de $X_1, \dots, X_n$ et en déduire $E(X_n)$ ainsi que $V(X_n)$.

Exercice 13 : ✪✪ Soit $\sigma \in S_n$ et soit $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On dit que σ bat un record en k si : $\forall i < k, \sigma(i) < \sigma(k)$. Donner la probabilité que σ batte un record en k.

Exercice 14 - Permutation sans grand cycle : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma_n \in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme. On note p_n la probabilité que σ_n n'ait aucun cycle de longueur strictement supérieure à $n/2$ dans sa décomposition en cycles à supports disjoints.

1. Par un raisonnement combinatoire, prouver que

$$p_n = 1 - \frac{1}{n!} \sum_{k=m+1}^{n} \binom{n}{k} (k-1)!(n-k)!$$

   où $m = \lfloor n/2 \rfloor$.
2. Donner la limite de (p_n) quand $n \to +\infty$. On rappelle (cf. cours) que :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)$$

Exercice 15 - Espérance du nombre de cycles : ✪✪ On choisit dans cet exercice une permutation $\sigma_n \in S_n$ aléatoirement et de façon uniforme, et on note C_n la variable aléatoire qui donne le nombre de cycles de σ_n (en comptant les points fixes comme des cycles de longueur 1).

1. On note L_1 la longueur du cycle contenant 1. À l'aide d'un raisonnement combinatoire, calculer $P(L_1 = k)$ pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$ et en déduire la loi de L_1 ainsi que son espérance. Il est immédiat (par symétrie des rôles), et donc on l'admettra, que si $i \in [\![2\,;\, n]\!]$ et si L_i est la longueur du cycle contenant i, alors L_i suit la même loi que L_1.
2. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, on note N_k le nombre de k-cycles de σ. Justifier que

$$N_k = \frac{1}{k} \left(\mathbb{1}_{L_1 = k} + \cdots + \mathbb{1}_{L_n = k} \right)$$

3. En déduire $E(C_n)$ et en donner (sans démonstration) un équivalent quand $n \to +\infty$.

Exercice 16 - Algorithme de Fischer-Yates-Knuth : ✪✪✪ Pour tout $i \in [\![1\,;\, n]\!]$, on se donne $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i, U_i suive une loi uniforme sur $[\![1\,;\, i]\!]$, et on note

$$X_n = (1 \;\; U_1) \circ (2 \;\; U_2) \circ \cdots (n \;\; U_n)$$

Le but de cet exercice est de prouver par récurrence sur $n \geq 1$ que X_n suit une loi uniforme sur S_n.

1. Prouver l'initialisation.
2. On se donne dans la suite un entier $n \geq 1$ et on suppose que le résultat est vrai au rang n, et on cherche à prouver que le résultat est vrai au rang $n+1$. Justifier qu'on peut considérer que $X_n \in S_{n+1}$ et donner $X_n(n+1)$.
3. Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n.
4. Soit $\sigma \in S_n$.
   (a) Justifier que :

$$P(X_{n+1} = \sigma) = \sum_{k=1}^{n+1} P_{U_{n+1}=k}(X_{n+1} = \sigma) \times P(U_{n+1} = k)$$

(b) Prouver que $[X_{n+1} = \sigma]$ et $[U_{n+1} = k]$ sont incompatibles si $k \neq \sigma^{-1}(n+1)$. En déduire que :

$$P(X_{n+1} = \sigma) = P_{U_{n+1}=\sigma^{-1}(n+1)}(X_{n+1} = \sigma) \times P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1))$$

(c) Justifier que X_n et U_{n+1} sont indépendantes, et en conclure que

$$P(X_{n+1} = \sigma) = P(X_n = \sigma') \times P(U_{n+1} = \sigma^{-1}(n+1))$$

où σ' est une permutation que l'on exprimera en fonction de σ et de $\sigma^{-1}(n+1)$.

5. Conclure.

32.4 Conjugaison

Exercice 17 - Conjugaison : ✪✪ Deux éléments s_1 et s_2 de S_n sont dits conjugués s'il existe $\sigma \in S_n$ tel que $s_2 = \sigma \circ s_1 \circ \sigma^{-1}$.

1. Montrer que la relation « être conjugué » est une relation d'équivalence.
2. Soient $\sigma \in S_n$, $p \in [\![2 \,; n]\!]$ et $(a_1\, a_2\, \dots\, a_p)$ un p-cycle. Montrer que :

$$\sigma \circ (a_1\, a_2\, \dots\, a_p) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(a_1)\, \sigma(a_2)\, \dots\, \sigma(a_p))$$

3. En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur.
4. ✪✪✪ Soient s_1 et $s_2 \in S_n$. Donner une CNS portant sur les longueurs des cycles apparaissant dans les décompositions de s_1 et s_2 en produit de cycles à supports disjoints pour que s_1 et s_2 soient conjuguées.

Exercice 18 - Caractérisation de la signature : ✪✪ Soit $\varphi : S_n \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes (on parle d'un caractère).

1. Soit $\tau \in S_n$ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau) = \pm 1$.
2. Montrer que toutes les transpositions ont la même image. On pourra utiliser l'exercice précédent.
3. En déduire que la signature est l'unique morphisme non trivial (i.e. non constant égal à 1) de S_n dans $\mathbb{C}^*$.

Exercices 19 - Générateurs de S_n : ✪✪✪ On pourra dans tout l'exercice utiliser la question 2 de l'exercice 17.

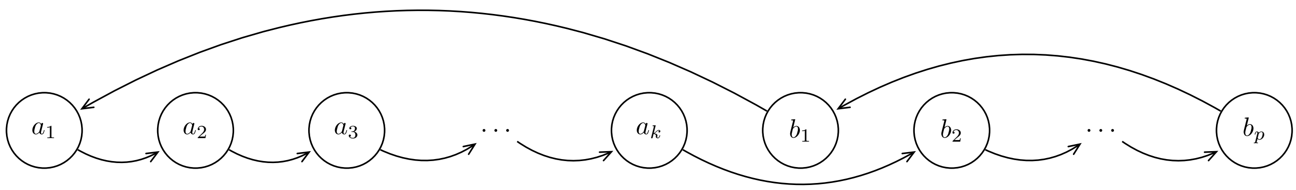
1. Soient i et j dans $[\![1 \,; n]\!]$. Calculer $(1\, i) \circ (1\, j) \circ (1\, i)$. En déduire que les transpositions $(1\,2), (1\,3), \dots, (1\, n)$ engendrent S_n, c'est-à-dire que tout élément de S_n s'écrit comme produit de ces transpositions. Donner une telle écriture du n-cycle $(1\,2\, \dots\, n)$. Le résultat est-il toujours vrai si l'on retire une de ces transpositions ?
2. Montrer que les transpositions $(1\,2), (2\,3), \dots, (n-1\; n)$ engendrent S_n.
3. Montrer que la transposition $(1\,2)$ et le n-cycle $(1\,2\, \dots\, n)$ engendrent S_n. Montrer que l'un de ces deux éléments ne peut engendrer S_n à lui seul (on rappelle que S_n est non abélien si $n \geq 3$).

Exercice 20 : ✪✪✪✪ Le but de cet exercice (qui ne traite à pas à proprement parler de conjugaison) est de prouver qu'un n-cycle ne peut pas s'écrire comme produit de $n-2$ transpositions. Le résultat du cours disant qu'un élément de S_n peut s'écrire comme produit d'au plus $n-1$ transpositions est donc optimal.

Dans tout l'exercice, on dira qu'un point fixe est un 1-cycle, et si $\sigma \in S_n$, on note $f(\sigma)$ le nombre de cycles (y compris les 1-cycles) apparaissant dans la décomposition de cycles en produit de cycles à supports disjoints.

1. Donner $f\left(\mathrm{Id}_{[\![1 \,; n]\!]}\right)$.
2. On se donne dans cette question une permutation $\sigma \in S_n$ et une transposition $\tau = (i\, j)$ avec $i \neq j$.

(a) Montrer que si i et j appartiennent à deux cycles distincts de σ, alors $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma) - 1$. On pourra noter $i = a_k$ et $j = b_1$ et s'inspirer du dessin ci-dessous :



(b) Montrer que si i et j appartiennent au même cycle, alors $f(\sigma \circ \tau) = f(\sigma) + 1$.

3. Montrer qu'un n-cycle ne peut pas se décomposer en produit de $n-2$ transpositions.

Chapitre 33

Déterminants

« Les cons ça ose tout. C'est même à ça qu'on les reconnaît. »

Les tontons flingueurs

Sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n est un entier supérieur ou égal à 1, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, les déterminants sont de taille n, et les divers paramètres (a, b, c, x, $a_1, \dots a_n$ etc.) sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Vrai ou Faux ?

1. $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
2. $\exists (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
3. $\forall (A,B) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})^2, \det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
4. $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \det\left(A \times A^\top\right) \geq 0$.
5. $\det(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})) = \mathbb{K}^*$.
6. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \det(\lambda I_n) = \lambda$.
7. Deux matrices semblables ont même déterminant.
8. Deux matrices équivalentes ont même déterminant.
9. Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.
10. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes diagonaux.
11. Le déterminant de la matrice de taille n dont tous les coefficients valent 1 vaut 1.
12. Le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}$ est dans $\mathbb{Z}$.
13. Le déterminant d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}_+$ est dans $\mathbb{R}_+$.
14. $\exists A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}), A^2 = -I_n$.

33.1 Retour de l'Homo Calculus

Exercice 1 : ✪ Montrer que le déterminant d'une matrice nilpotente est nul.

Exercice 2 : ✪ Donner un exemple de matrices non semblables de même taille, même rang, même trace et même déterminant.

Exercice 3 : ✪ Soit $p < n$ et soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer $\det(AB)$.

Exercice 4 : ✪ Que dire du déterminant d'une matrice antisymétrique de taille impaire ?

Exercice 5 : ✪ Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 56413 & 56513 \\ 29413 & 29513 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 92 & 74 \\ 72 & 59 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 7 & 30 & 37 \\ 10 & 38 & 50 \\ 3 & 12 & 15 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} a & \pi & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & b & 0 & 1543 \\ \sqrt{2} & -217 & c & 2024 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b & d & f \\ -a & -b & -c & g \\ -a & -b & 0 & d \end{vmatrix}$

11. ✪✪ $\begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n & \dots & n & n \end{vmatrix}$

Exercice 6 : ✪ Soit $a \in \mathbb{K}$. Étudier l'inversibilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : ✪

1. Calculer :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $f \in \mathscr{L}(E)$ est tel que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$, que peut-on dire de n ?

Exercice 8 : ✪ Soit $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. Sans développer le déterminant suivant, prouver que

$$\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1 + a + b + c$$

Exercice 9 : ✪ Soient

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -10 & 11 \\ -3 & 6 & 5 \\ -6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Expliciter la matrice $B = TA$ et en déduire le déterminant de A.
2. En déduire le déterminant de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 55 \\ -9 & -3 & 25 \\ -18 & -6 & 40 \end{pmatrix}$$

Exercice 10 : ✪ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$, on note $A(x)$ la matrice de terme général $A_{i,j} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction affine.
2. Soient a et b deux scalaire distincts, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$. Donner la valeur de :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}$$

Exercice 11 : ✪ Montrer que pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1 \\ \vdots & s_2 & \dots & s_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix} = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \cdots (s_n - s_{n-1})$$

Exercice 12 : ✪✪ Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos(c) & \cos(b) \\ 1 & \cos(c) & 1 & \cos(a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(a) & 1 \end{vmatrix} = -16\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)\sin^2\left(\frac{c}{2}\right)$$

Exercice 13 : ✪✪ Calculer le déterminant de la matrice de terme général $(-1)^{i+j}$. Recommencer avec la matrice de terme général $\min(i,j)$.

Exercice 14 : ✪

1. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\overline{A}$ la matrice de taille n dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A. Montrer que $\det\left(\overline{A}\right)=\overline{\det(A)}$.
2. ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Montrer que $\det\left(A^2+B^2\right)\geq 0$.

Exercice 15 : ✪✪ Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $B=\left((-1)^{i+j}A_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$. Calculer $\det(B)$.

Exercice 16 : ✪✪ Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer :

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & & \\ x & 1+x^2 & x & & (0) & \\ & x & 1+x^2 & x & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & x & 1+x^2 & x \\ & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

Exercice 17 : ✪✪✪ Soit $p\geq n$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\binom{p+i-1}{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 18 : ✪✪✪ Soit $n\geq 2$ et soit $P\in\mathbb{K}_{n-2}[X]$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} P(1) & P(2) & \dots & P(n) \\ P(2) & P(3) & \dots & P(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P(n) & P(n+1) & \dots & P(2n-1) \end{vmatrix}=0$$

Exercice 19 :

1. ✪ Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent ± 1. Prouver que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.
2. ✪✪✪ Soit $C=\{A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,|\,\forall(i,j),|A_{i,j}|\leq 1\}$. On admet que le déterminant admet un maximum sur C : montrer que ce maximum est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 20 : ✪✪✪ On suppose $n\geq 2$. Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \det(A+B)=\det(A)+\det(B)$. Montrer que $B=0$.

33.2 Quelques déterminants classiques

Exercice 21 - Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon : ✪✪ Soit $P=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0\in\mathbb{K}[X]$. Soit

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On dit que C est la matrice compagnon de P. Montrer que $\det(XI_n-C)=P$.

Exercice 22 - Déterminant de Cauchy (début de Mines MP 2009) : ✪✪✪ On considère deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ telles que $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le déterminant de Cauchy d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}$$

On définit également la fraction rationnelle :

$$R = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}$$

1. Montrer que si R est de la forme $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$ alors $A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$.

   On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par :

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}$$

2. En déduire que :

$$D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_j+b_j)}$$

Exercice 23 - Déterminant circulant : ✪✪✪ Soit $(a_0,\ldots,a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On note

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \ldots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}$$

1. Pour tout $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$, notons $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ et $C_k = \begin{pmatrix} 1 & \omega_k & {\omega_k}^2 & \ldots & \omega^{n-1} \end{pmatrix}^\top$. Montrer que $(C_0,\ldots,C_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
2. Donner la matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M dans cette nouvelle base. On pourra introduire le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$
3. En déduire le déterminant de M en fonction de P et des ω_k.
4. (a) Montrer que $1 - X^n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - X\omega_k)$.

   (b) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$,

$$\begin{vmatrix} 1 & a & \ldots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & \ldots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = (1-a^n)^{n-1}$$

33.3 Autour du déterminant de Vandermonde

Exercice 24 : ✪ Soit $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$. Donner une CNS pour que le système (d'inconnues x,y,z)

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & a^2z & = & a^4 \\ x & + & by & + & b^2z & = & b^4 \\ x & + & cy & + & c^2z & = & c^4 \end{array}\right.$$

admette une unique solution, et la donner le cas échéant.

Exercice 25 : ✪✪ Calculer le déterminant de la matrice $\left(i^j\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Exercice 26 - Déterminant de Vandermonde lacunaire : ✪✪ Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$.

1. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{n-2} & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{n-2} & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{n-2} & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{n-2} & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

2. Si $k \in [\![1\,;\,n]\!]$, généraliser à :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & {x_1}^{k-1} & {x_1}^{k+1} & \cdots & {x_1}^n \\ 1 & x_2 & \cdots & {x_2}^{k-1} & {x_2}^{k+1} & \cdots & {x_2}^n \\ 1 & x_3 & \cdots & {x_3}^{k-1} & {x_3}^{k+1} & \cdots & {x_3}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \cdots & {x_n}^{k-1} & {x_n}^{k+1} & \cdots & {x_n}^n \end{vmatrix}$$

Exercice 27 : ✪✪ Soit $(m_1,\dots,m_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Prouver que :

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & m_1(m_1-1) & \cdots & m_1(m_1-1)\cdots(m_1-n+2) \\ 1 & m_2 & m_2(m_2-1) & \cdots & m_2(m_2-1)\cdots(m_2-n+2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & m_n & m_n(m_n-1) & \cdots & m_n(m_n-1)\cdots(m_n-n+2) \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (m_j - m_i)$$

2. En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} k!$ divise $\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (m_j - m_i)$.

Exercice 28 : ✪✪ Dans les trois cas, montrer que la famille L est une famille libre de E à l'aide d'un déterminant de Vandermonde.

1. $L = ((X+a_k)^n)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ où $a_0,\dots,a_n$ sont des scalaires deux à deux distincts, dans $E = \mathbb{K}_n[X]$.
2. $L = \left(x \mapsto e^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
3. $L = (x \mapsto \sin(\lambda x))_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ dans $E = \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 29 : ✪✪✪ Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(x_1) & \cos(2x_1) & \dots & \cos((n-1)x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \cos(2x_2) & \dots & \cos((n-1)x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos(x_n) & \cos(2x_n) & \dots & \cos((n-1)x_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 30 : ✪✪✪✪ Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire. Montrer que T est nilpotente si et seulement si $\operatorname{tr}\left(A^k\right) = 0$ pour tout $k \geq 1$.
2. Soit D une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont deux à deux distincts. Montrer que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de l'espace vectoriel des matrices diagonales.

33.4 Utilisation de la comatrice

Exercice 31 : ✪✪

1. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Exprimer $\mathrm{Com}(M)$ à l'aide de M^{-1}.
2. Soit $(A, B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$.
3. Soient A et B deux matrices semblables inversibles. Montrer que leurs comatrices sont semblables.
4. Montrer que la comatrice d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.

Exercice 32 : ✪✪ Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ telles que $\det(A) \wedge \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe $(U, V) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})^2$ tel que $AU + BV = I_n$.

Exercice 33 : ✪✪✪ Supposons $n \geq 2$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation (d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) $\mathrm{Com}(X) = A$.

Exercice 34 : ✪✪✪ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner $\det(\mathrm{Com}(A))$ en fonction de $\det(A)$.
2. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A. On séparera les cas $\mathrm{rg}(A) = n, \mathrm{rg}(A) \leq n-2$ et enfin $\mathrm{rg}(A) = n-1$.
3. Si $n \geq 3$, donner $\mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A))$.

Exercice 35 : ✪✪✪✪ On note $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant 1.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M a un inverse dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) = \pm 1$.
2. Vérifier que $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un groupe pour le produit.
3. Soit $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. Donner le PGCD des coefficients d'une ligne ou d'une colonne.
4. Montrer que tout élément de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un produit de matrices de la forme $I_n \pm E_{i,j}$ $(i \neq j)$. Donner une telle décomposition pour la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

33.5 Déterminant d'un endomorphisme ou d'une famille de vecteurs

Exercice 36 : ✪ Dans chacun des cas suivants, calculer $\det(u)$ où u est l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par :

1. $u(P) = P + P'$.
2. $u(P) = P(X+1) - P(X)$.
3. $u(P) = XP' + P(1)$.

Exercice 37 : ✪

1. Pour quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{K}$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
est-il bijectif ?
2. **Remake :** Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{K}$ les trois vecteurs $e_1 = (1, 1, t)$, $e_2 = (1, t, 1)$ et $e_3 = (t, 1, 1)$ forment-ils une base de $\mathbb{K}^3$?

Exercice 38 : ✪ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. On définit l'application suivante :
$$f : \begin{cases} M_2(\mathbb{K}) & \to & M_2(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{cases}$$
Montrer que f est linéaire et donner son déterminant en fonction de celui de A.

Exercice 39 : ✪ Déterminer une CNS sur les réels x, y, z pour que les vecteurs $(yz, z, y), (z, xz, x)$ et (y, x, xy) soient libres.

Exercice 40 : ✪✪

1. Calculer le déterminant de l'endomorphisme transposition $f : M \mapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même.
2. Généraliser : si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, donner le déterminant de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 41 : ✪✪ Soit Φ l'application qui à tout polynôme P associe le polynôme $\Phi(P)$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer le déterminant de Φ_n.
3. Montrer que Φ réalise un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 42 : ✪✪ Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Enfin, on pose $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et, pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $v_i = u + e_i$. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est liée si et seulement si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \neq -1$.

Exercice 43 - Un lemme d'Abel : ✪✪✪ Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \det(u(x_1), x_2, \dots, x_n) + \det(x_1, u(x_2), \dots, x_n) + \cdots + \det(x_1, \dots, x_{n-1}, u(x_n))$$

Montrer que $\varphi = \mathrm{tr}(u)\det$.

33.6 Applications du déterminant

Exercice 44 : ✪✪ Soient M_1, M_2 et M_3 trois points du plan usuel $\mathcal{P}$, dont les coordonnées dans un repère quelconque de $\mathcal{P}$ sont (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_3) respectivement. Montrer l'équivalence :

$$\text{les points } M_1,\ M_2 \text{ et } M_3 \text{ sont alignés} \iff \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 45 - Autour du polynôme caractéristique : ✪✪✪ Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A, qu'on note χ_A, le déterminant de $XI_n - A$, c'est-à-dire que si

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

alors

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = \begin{pmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & X - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \dots & X - a_{n,n} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors χ_A est unitaire de degré n.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un nombre fini de réels x tels que $A + xI_n$ ne soit pas inversible. En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in \left]\,0\,;\varepsilon\,\right[$, $A + xI_n$ soit inversible.
3. **Remake :** Montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in [\,-\varepsilon\,;\varepsilon\,]$, $A + xB$ soit inversible.

Exercice 46 - Sous-espaces de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ sans matrice inversible : ✪✪✪ Si $a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4$, on note

$$M(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

On note F le sous-ensemble de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ constitué des matrices $M(a)$ lorsque a parcourt $\mathbb{R}^4$. Enfin, on pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

2. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Montrer que pour tout $i \in [\![1\,;\,4]\!]$, $M(e_i) + J$ est inversible et que la famille $(M(e_i) + J)_{i \in [\![1\,;\,4]\!]}$ est libre.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^4$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$ non nul, $M(a) + xJ$ est non inversible, alors $a = (0, 0, 0, 0)$.
4. Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ ne contenant aucune matrice inversible et qui contient J.
   (a) Déterminer $G \cap F$ et en déduire que $\dim(G) \leq 12$.
   (b) Cette borne est-elle atteinte ?

Exercice 47 - Corps à p^2 éléments : ✪✪✪ On se donne dans cet exercice $\mathbb{K}$ un corps quelconque.

1. Soit $a \in \mathbb{K}$. Prouver que l'ensemble

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & ay \\ y & x \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2 \right\}$$

   est un corps si est seulement si a n'est pas un carré dans $\mathbb{K}$.
2. On rappelle que, si p est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps à p éléments.
   (a) Prouver l'existence d'un corps à 25 éléments.
   (b) Plus généralement, si p est un nombre premier impair, prouver l'existence d'un corps à p^2 éléments.

Remarque : On a prouvé dans l'exercice 56 du chapitre 30 qu'un corps fini a comme cardinal une puissance d'un nombre premier. Cet exercice permet de construire effectivement un corps de cardinal p^2 lorsque p est un nombre premier impair.

Exercice 48 : ✪✪✪✪ On considère, dans le plan usuel, trois droites D_i d'équations $a_i x + b_i y + c_i = 0$, où $i \in [\![1\,;\,3]\!]$. Montrer que ces trois droites sont concourantes ou parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 49 : ✪✪✪✪ Soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables sur $\mathbb{C}$. Montrer qu'elles sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 50 - Le petit poucet : ✪✪✪✪

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. On note $\overline{A}$ la matrice de taille n dont les coefficients sont les congruences de ceux de A modulo 2. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2022 & 2023 \\ 2024 & 2025 \end{pmatrix}$ alors $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que $\det\left(\overline{A}\right) \equiv \det(A)[2]$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On suppose que les coefficients diagonaux de A sont nuls et que tous les autres valent ± 1. Montrer que A est inversible.
3. On dispose de $2n + 1$ cailloux, avec $n \geq 1$. On suppose que chaque sous-ensemble de $2n$ cailloux peut se partager en deux paquets de n cailloux de même masse totale. Montrer que tous les cailloux ont même masse.

Chapitre 34

Espaces préhilbertiens réels

« - Et votre écharpe blanche ?
- [...]
j'eus le bon esprit
De dénouer et de laisser couler à terre
L'écharpe qui disait mon grade militaire ;
En sorte que je pus, sans attirer les yeux,
Quitter les Espagnols, et revenant sur eux,
Suivi de tous les miens réconfortés, les battre !
— Eh bien ! que dites-vous de ce trait ?
- Qu'Henri quatre
N'eût jamais consenti, le nombre l'accablant,
À se diminuer de son panache blanc.
- L'adresse a réussi, cependant !
- C'est possible.
Mais on n'abdique pas l'honneur d'être une cible. »

Edmond Rostand, Cyrano de Bergerac

Comme en cours, si rien n'est indiqué, E est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel préhilbertien (donc pas forcément de dimension finie) dont le produit scalaire et la norme euclidienne associée sont notés comme en cours, n est un entier supérieur ou égal à 1 et a et b deux réels avec $a < b$.

Vrai ou Faux ?

1. Un produit scalaire sur E est une forme linéaire sur E^2 symétrique, définie positive.
2. La norme euclidienne associée à un produit scalaire est linéaire.
3. $\langle f,g\rangle \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}([-1\,;1\,],\mathbb{R})$.
4. $\langle f,g\rangle \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^{pm}([0\,;1\,],\mathbb{R})$.
5. $\langle P,Q\rangle \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
6. $\langle P,Q\rangle \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
7. La base canonique de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire précédent.
8. Si x et y sont de même norme, alors $x+y$ et $x-y$ sont orthogonaux.
9. Une famille orthogonale est libre.
10. Pour tout produit scalaire, $\mathbb{R}[X]$ admet une base orthonormale échelonnée en degré.
11. L'orthogonal d'un espace euclidien est l'ensemble vide.
12. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthogonale de F, alors le projeté orthogonal de x sur F est $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}\langle x,e_k\rangle e_k$.

34.1 Produits scalaires

Exercice 1 : ✪ Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur l'espace indiqué :

1. $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + 18x_2y_2 + \dfrac{3}{2}x_3y_3 + \dfrac{5}{2}x_4y_4$ sur $\mathbb{R}^4$.
2. $\langle x,y\rangle = 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (où $n \in \mathbb{N}$).
4. $\langle P,Q\rangle = -\displaystyle\int_0^1 P(x)Q''(x)\,\mathrm{d}x$ sur $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 2 : ✪ Soient f et $g \in \mathscr{L}(E)$ telles que : $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|g(x)\|$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x),f(y)\rangle = \langle g(x),g(y)\rangle$$

Exercice 3 : ✪✪

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que la série $\sum \dfrac{P(n)}{n!}$ converge.
2. Montrer que $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)Q(n)}{n!}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : ✪✪ Soient x et y deux vecteurs non nuls. Montrer que :

$$\left\|\frac{1}{\|x\|^2}x - \frac{1}{\|y\|^2}y\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\| \times \|y\|}$$

Exercice 5 : ✪✪ Déterminer l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonales de taille n à coefficients réels, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

Exercice 6 - Un lemme de confinement : ✪✪ Soient $u_1,\dots,u_n \in E$ unitaires, $R_1,\dots,R_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher, à savoir $P(R_k = 1) = P(R_k = -1) = 1/2$ pour tout k.

1. Calculer l'espérance de $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} R_iu_i\right\|^2$.
2. En déduire qu'il existe $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1;1\}^n$ tel que :

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_iu_i\right\| \leq \sqrt{n}$$

Exercice 7 : ✪✪✪ Soit $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8 : ✪✪✪ On se place sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ non nul.

1. Justifier l'existence de P et donner son degré.
2. Soit

$$\varphi : x \mapsto \int_0^1 P(t)t^x\,\mathrm{d}t$$

définie là où cette intégrale a un sens. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

3. Trouver φ à une constante multiplicative près.
4. En déduire les coefficients de P (à une constante multiplicative près).

5. En déduire une base orthogonale de E.

Exercice 9 - En dimension infinie : ✪✪✪

1. On se place sur $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire vu en classe. On note F l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang. Donner $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.
2. On se place sur $E = \mathscr{C}([-1\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel.
   (a) Donner l'orthogonal de $F = \{f \in E \,|\, \forall x \in [-1\,;0\,], f(x) = 0\}$.
   (b) Donner $F + F^\perp$.
3. On se place sur $E = \mathscr{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ (avec $a < b$) muni du produit scalaire habituel. On note A l'ensemble des fonctions positives sur E. Montrer que $A^\perp = \{0\}$.
4. On se place sur $E = \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel. On se donne $c \in \,]\,0\,;1\,[$ et on note

$$A = \left\{ f \in E \,|\, \int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$

   On cherche à prouver que $A^\perp = \{0\}$. On se donne donc $g \in A^\perp$ et on cherche à prouver que g est la fonction nulle.
   (a) Montrer que s'il existe $x_0 \in [\,c\,;1\,]$ tel que $g(x_0) \neq 0$, alors il existe $f \in A$ telle que $\langle f, g\rangle > 0$. Que peut-on en déduire ?
   (b) Soient

$$\psi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^c f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \varphi : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto \displaystyle\int_0^c f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

   Montrer que ψ et φ sont linéaires et que $\ker(\psi) \subset \ker(\varphi)$.
   (c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi = \lambda\psi$. En déduire que g est constante égale à λ et conclure.

34.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

Exercice 10 : ✪ Soient f et g continues positives sur $[\,0\,;1\,]$ telles que $f \times g \geq 1$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$$

Exercice 11 : ✪ Soit $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}_+$ continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, {I_{n+p}}^2 \leq I_{2n} \times I_{2p}$.

Exercice 12 : ✪ Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[\,a\,;b\,]$. Montrer que

$$\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \right)$$

existe et est atteint.

Exercice 13 : ✪✪ Soient a, b, c, d des réels positifs. Montrer que :

$$\sqrt{a+b+c+d} + \sqrt{b+c+d} + \sqrt{c+d} + \sqrt{d} \geq \sqrt{a+4b+9c+16d}$$

Exercice 14 : ✪✪ Montrer les inégalités suivantes :

1. $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)^2 \leq n \times \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right)$.
2. $n^2 \leq \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n {x_k}^2\right) \times \left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{{x_k}^2}\right)$, où les x_k sont des réels strictement positifs.
3. $-1/2 \leq ab + ac + bc \leq 1$, où a, b, c sont trois réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
4. $(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4)$, où a et b sont deux réels positifs.

5. $\displaystyle \frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{n-k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(n-k)^2}$.

6. $\displaystyle \forall k\in\mathbb{N}, n \leq \sum_{i=1}^{n}\sqrt[2^k]{i} \leq n\times\sqrt[2^k]{\frac{n+1}{2}}$.

7. $\displaystyle \sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{2^n(n+1)}$.

8. $\displaystyle \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{2^k}\right)^2 \leq \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2$, où les x_k sont des réels.

9. $\displaystyle \sum_{i=1}^{n}a_i a_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n}{a_i}^2$, où les a_i sont des réels et $\sigma\in S_n$.

10. $\displaystyle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k} \geq n^2$ où $x_1,\dots,x_n$ sont des réels strictement positifs de somme 1

Exercice 15 : ✪✪ Déterminer le maximum de

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2\end{cases}$$

sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ (pour la norme euclidienne usuelle).

Exercice 16 : ✪✪ Montrer que pour toute fonction $f\in\mathscr{C}([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$,

$$\left|\int_0^1\frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\int_0^1\frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \qquad \text{et} \qquad \left|\int_0^1\frac{f(t)\sqrt{t}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{2}\left(\int_0^1\frac{f(t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

Étudier les cas d'égalité.

Exercice 17 : ✪✪ Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n, \left\|\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^2$$

Exercice 18 : ✪✪✪ Les questions de cet exercice sont indépendantes, mais utilisent toutes le résultat suivant : si $f\in\mathscr{C}^1$ et si $f(0)=0$ alors, pour tout x,

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Soit $f\in\mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Montrer que :

$$\forall x\in[\,0\,;1\,], |f(x)| \leq \sqrt{\int_0^1(f'(t))^2\,\mathrm{d}t}$$

2. Soit $f\in\mathscr{C}^1([\,0\,;1\,],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f^2(u)\,\mathrm{d}u \leq \frac{1}{2}\int_0^1(f'(u))^2\,\mathrm{d}u$$

3. ✪✪✪✪ Soient $a>0$ et f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;a\,]$ telle que $f(0)=0$.

   (a) Montrer l'inégalité d'Opial :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{a}{2}\int_0^a(f'(t))^2\,\mathrm{d}t$$

   (b) Étudier les cas d'égalité.

Exercice 19 - Mines PC 2013 : ✪✪✪ Soient (b_n) une suite réelle et $\varepsilon \in \,]\,0\,;1\,[$. On suppose que la série $\sum {b_n}^2(1-\varepsilon)^{2n}$ converge. Montrer que pour tout $|z| \in [\,0\,;1-\varepsilon\,[$, la série $\sum b_n z^n$ converge absolument et que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} {b_n}^2(1-\varepsilon)^{2n}\right)^{1/2} \times \left(1-|z|^2/|1-\varepsilon|^2\right)^{-1/2}$$

Exercice 20 : ✪ On se place dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

1. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $|\mathrm{tr}\,(A)\,| \leq \sqrt{n} \times \|A\|$, et montrer que cette égalité est optimale.
2. ✪✪✪ Montrer que, pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Exercice 21 : ✪✪✪ Soient $n \geq 2$, $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs et $b_1, \dots, b_n$ des réels. Montrer que si $\displaystyle\sum_{i\neq j} a_i b_j = 0$ alors $\displaystyle\sum_{i\neq j} b_i b_j \leq 0$.

Exercice 22 : ✪✪✪ On rappelle (cf. cours) que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est encore valable pour l'application $(X,Y) \mapsto E(XY)$, même si ce n'est pas un produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)} \times \sqrt{E(Y^2)} \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X) \times \sigma(Y)$$

On se place dans tout l'exercice sur un espace probabilité fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$. Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soient A et B deux événements. Simplifier $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_A, \mathbb{1}_B)$ et en déduire l'inégalité de Kosmanek :
$$P(A\cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$$
2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance strictement positive. Montrer que $P(X \geq 1) \geq \dfrac{E(X)^2}{E(X^2)}$.
3. Soit $\eta \in [\,0\,;1\,]$ et soit X une variable aléatoire réelle positive avec $E(X^2) > 0$.
   (a) Montrer que $E(X\mathbb{1}_{[X\geq \eta E(X)]})^2 \leq E(X^2)P(X \geq \eta E(X))$.
   (b) En partant de $E(X)$, démontrer l'inégalité de Paley-Zygmund :
$$P(X \geq \eta E(X)) \geq (1-\eta)^2 \times \frac{E(X)^2}{E(X^2)}$$

34.3 Bases orthonormales

Exercice 23 : ✪ Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer qu'on définit sur E un produit scalaire avec
$$\langle P,Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$$
2. Donner une base orthonormale de $F = \mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 24 : ✪ Orthonormaliser, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, la famille formée des vecteurs $x_1 = (1,1,0), x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,1,1)$.

Exercice 25 : ✪ Orthonormaliser, pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^4$, la famille formée des vecteurs $x_1 = (0,1,1,1), x_2 = (1,0,1,1), x_3 = (1,1,0,1)$ et $x_4 = (1,1,1,0)$.

Exercice 26 : ✪ Montrer que l'application suivante est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$:

$$\langle\,,\rangle : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) & \longmapsto (x_1-2x_2)(y_1-2y_2) + x_2y_2 + (x_2+x_3)(y_2+y_3) \end{cases}$$

Orthonormaliser pour ce produit scalaire la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 27 : ✪✪✪ On suppose que E est un espace euclidien. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $\forall x \in E, \langle x,u(x)\rangle = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) = \ker(u)^\perp$.
2. Soit A la matrice de u dans une base B orthonormale.

(a) Soient x et y deux éléments de E. On note X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base B. Montrer que $\langle x,y\rangle = X^\top \times Y$.

(b) Montrer que A est antisymétrique. On pourra s'intéresser à $\langle u(x+y),x+y\rangle$.

Exercice 28 - Caractérisation des BON : ✪✪✪ On suppose que E est un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille d'éléments de E telle que :

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i\rangle^2$$

Le but de cet exercice est de prouver que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormale de E.

1. En s'intéressant à $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)^\perp$, montrer que $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E.
2. Montrer que les e_i sont unitaires.
3. Conclure. La réciproque de la propriété vue en classe est donc vraie.

Exercice 29 - Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien : ✪✪✪

1. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que, pour toute forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$, il existe un unique $u \in E$ tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle u,x\rangle$.
2. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
$$P(0) = \int_0^1 P(t)A(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que A est de degré n.

Exercice 30 : ✪✪✪

1. On suppose que E est de dimension finie. Soit B une base de E. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur E qui rende B orthonormale.
2. Déterminer ce produit scalaire lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et $B = ((1,2),(2,1))$.

Exercice 31 : ✪✪✪ Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient $a_0,\dots,a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Pour P et Q dans E, notons

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$$

1. Montrer que c'est un produit scalaire.
2. Pour tout $i \in [\![0\,;\,n]\!]$, montrer l'existence d'un unique élément de E vérifiant : $\forall j \in [\![0\,;\,n]\!], P_i(a_j) = \delta_{i,j}$.
3. Montrer que les P_i forment une base orthonormale de E. Est-ce la base obtenue à partir de la base canonique grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ?
4. Pour tout $P \in E$, calculer la distance de P à $H = \{P \in E \mid P(a_0) + \cdots + P(a_n) = 0\}$.

34.4 Projection orthogonale, distance etc.

Exercice 32 : ✪ On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique. On pose $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ avec $e_1 = (1,0,1,0)$ et $e_2 = (1,-1,1,-1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer l'orthogonal de F.
3. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique.
4. Calculer la distance du vecteur $(1,1,1,0)$ à F.

Exercice 33 : ✪ Calculer

$$A = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$$

Exercice 34 - Pour faire ses gammes : ✪✪

1. On se place dans $\mathbb{R}^4$. Quel est le projeté orthogonal du vecteur $u = (2,0,0,4)$ sur l'hyperplan H d'équation $x - y + 2z - 3t = 0$? Quelle est la distance du vecteur u à l'hyperplan H ?
2. Soit D la droite de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y/2 = z/3$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur D.
3. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit u un vecteur unitaire de coordonnées $(u_1, \dots, u_n)$ dans la base B. Écrire la matrice dans la base B de la projection orthogonale sur l'hyperplan $H = \mathrm{Vect}(u)^\perp$.
4. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ d'équations dans la base canonique :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + 2y + 3z + 4t = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner une base orthonormée de F.

   (b) Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

   (c) Montrer que $d(e_1, F) = \sqrt{\dfrac{7}{10}}$.

5. On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. Soit $H = \mathrm{Vect}((1,1,0,1), (-2,0,1,1), (0,1,0,1))$.

   (a) Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et en donner une équation.

   (b) Donner un vecteur normal à H unitaire (pour le produit scalaire canonique).

   (c) Donner la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur H.

6. On se place dans $E = \mathbb{R}^n$. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels non tous nuls. Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur H.
7. Déterminer la projection orthogonale sur H, l'hyperplan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y + 3z = 0$, et donner la matrice canoniquement associée.

Exercice 35 : ✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E et soit p la projection orthogonale sur F.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle$.
2. Montrer que pour tout base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E :

$$\sum_{k=1}^{n} \|p(e_k)\|^2 = \mathrm{rg}(p)$$

Exercice 36 : ✪✪ Considérons $E = \mathbb{R}_3[X]$ avec le produit scalaire défini, pour tous $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_iX^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} b_iX^i$, par :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{3} a_ib_i$$

1. Donner une base orthonormale de $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
2. Montrer que $d(X, H) = \dfrac{1}{2}$.
3. Montrer plus généralement que, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini, pour tous $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$ et $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_iX^i$, par :

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} a_ib_i$$

   si on note encore $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(1) = 0\}$, alors $d(X, H) = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$. On pourra commencer par prouver que $U = 1 + X + \cdots + X^n$ est un vecteur normal à H.

Exercice 37 : ✪✪

1. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que x et y sont orthogonaux si et seulement si : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.
2. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires. Montrer que E_1 et E_2 sont orthogonaux si et seulement si, pour tout x, $\|p(x)\| \leq \|x\|$, où p est la projection sur E_1 parallèlement à E_2. Ainsi, les projections orthogonales sont les seules qui diminuent les distances.

Exercice 38 : ✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.
2. Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, on note s_{E_1} la symétrie orthogonale par rapport à E_1. Montrer que si F et G sont orthogonaux, alors $s_F \circ s_G = s_{(F+G)^\perp}$.

Exercice 39 : ✪✪ On rappelle que, dans $\mathscr{C}([-1\,;1\,], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire habituel, P et I, respectivement les ensembles des fonctions paires et impaires, sont supplémentaires orthogonaux. Donner la distance de $f \mapsto \dfrac{1}{2+x}$ à P.

Exercice 40 : ✪✪ Déterminer

$$A = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_1^2 x^2 (\ln(x) - ax - b)^2 \,\mathrm{d}x$$

Exercice 41 : ✪✪ Donner la valeur de

$$A = \inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 \left(x^3 - a - bx - cx^2\right)^2 \,\mathrm{d}x$$

Exercice 42 : ✪✪✪✪ On suppose que $n \geq 2$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. Soit U la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer :

$$A = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bU\|$$

34.5 Polynômes orthogonaux

Exercice 43 - Polynômes orthogonaux : ✪✪✪ Soient $a < b$ deux réels et w continue sur $[\,a\,;b\,]$, strictement positive sur $]\,a\,;b\,[$.

1. Montrer que

$$\langle\, , \rangle : \begin{cases} \mathbb{R}[X]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_a^b P(t)Q(t)w(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

   est un produit scalaire.

2. Montrer qu'il existe une unique famille orthonormale $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \qquad \text{et} \qquad \langle P_n, X^n \rangle > 0$$

   Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et est scindé à racines simples toutes dans $]\,a\,;b\,[$. On pourra considérer $Q = (X - \alpha_1) \times \cdots \times (X - \alpha_r)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont les racines distinctes d'ordre impair de P qui appartiennent à $]\,a\,;b\,[$.

3. Montrer que Soit $n \geq 2$. Montrer que XP_{n-1} appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-3}[X]$. En déduire qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $aP_n + XP_{n-1} + bP_{n-1} + cP_{n-2} = 0$.

Remarque : Selon le choix de $[\,a\,;b\,]$ et de la fonction de poids w, on va obtenir différentes familles de polynômes orthogonaux. Les exercices suivants présentent quelques exemples.

Exercice 44 - Polynômes de Legendre : ✪✪✪ On prend les notations de l'exercice précédent avec $a = -1$, $b = 1$ et w la fonction constante égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n = \frac{1}{2^n \times n!} \times \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{dX}^n}\left[\left(X^2 - 1\right)^n\right] = \frac{1}{2^n \times n!} \times \left[\left(X^2 - 1\right)^n\right]^{(n)}$$

On surveillera bien sa main pour qu'elle ne confonde pas puissances et dérivées.

1. Calculer L_0, L_1, L_2. Pour tout n, préciser le degré de L_n, son coefficient dominant.
2. Montrer que, pour tout n pair (respectivement impair), L_n ne contient que des termes de degré pair (respectivement impair).
3. Soit $n \geq 1$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle L_n, P\rangle = 0$. Déterminer $\|L_n\|$. À l'aide de l'exercice précédent, montrer que L_n est scindé à racines simples toutes dans $]-1\,;1\,[$. Montrer ce résultat directement (on pourra commencer par trouver les racines de $\left[(X^2-1)^n\right]'$).
4. Pour tout $n \geq 1$, calculer $L_n(1)$.
5. Soit $n \geq 2$. On note $A = nL_n - (2n-1)XL_{n-1}$.
   (a) Justifier que $\deg(A) \leq n-2$ (on pourra utiliser la question 2).
   (b) Montrer que A est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-3}[X]$.
   (c) Montrer finalement que $nL_n = (2n-1)XL_{n-1} - (n-1)L_{n-2}$.
6. **Remake :** On prend $a = 0, b = 1$ et w constante égale à 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note L_k la dérivée k-ième de $[X(X-1)]^k$. Montrer que la famille $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\|L_k\|^2 = \dfrac{k!^2}{2k+1}$.

Exercice 45 - Polynômes de Tchebychev de seconde espèce : ✪✪✪ On prend les notations de l'exercice 43 avec $a = -1$, $b = 1$ et $w : x \mapsto \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\sin(\theta)Q_n(\cos(\theta)) = \sin((n+1)\theta)$. Donner le degré et le coefficient dominant de Q_n.
2. Montrer que les Q_n sont deux à deux orthogonaux.
3. Montrer que l'application

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

admet un minimum et dire en quel(s) point(s) il est atteint (il n'est pas demandé de donner sa valeur, sauf si on s'ennuie...).

34.6 Divers

Exercice 46 - Une construction du produit vectoriel : ✪✪ On se place dans $E = \mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique et de la base canonique B.

1. Pour $w \in E$, on note $\varphi_w : E \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $\varphi_w(x) = \langle x, w\rangle$. Montrer que $\Phi : w \mapsto \varphi_w$ est un isomorphisme de E dans $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.
2. En déduire que pour tous vecteurs u, $v \in E$, il existe un unique vecteur w de E qui vérifie :

$$\forall x \in E,\ \langle w, x\rangle = \det_B(u, v, x)$$

Ce vecteur w sera noté $u \wedge v$, et on a ainsi défini une loi $\wedge : E^2 \to E$ qui vérifie, pour tous vecteurs u, v et x :

$$\langle u \wedge v, x\rangle = \det_B(u, v, x)$$

3. Montrer les propriétés suivantes du produit vectoriel :
   (a) Si u et v sont colinéaires alors $u \wedge v = 0$.
   (b) Si (u, v) est libre alors $u \wedge v \neq 0$ et $(u, v, u \wedge v)$ est une base orientée dans le sens direct.
   (c) $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v.
   (d) $\wedge$ est bilinéaire.
   (e) $\wedge$ est anticommutative (c'est-à-dire $v \wedge u = -u \wedge v$).
   (f) La norme de $u \wedge v$ est égale à $\|u\| \times \|v\| \times |\sin\theta|$ où θ est l'angle entre les vecteurs u et v.
   (g) On a l'identité $\langle x \wedge y, z\rangle = \langle y \wedge z, x\rangle = \langle z \wedge x, y\rangle$.
4. Pour $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $u_2 = (a_2, b_2, c_2) \in E$, déterminer les coordonnées dans la base B de $u \wedge v$.
5. Cette construction du produit vectoriel est-elle adaptable à un espace de dimension différente de 3 ?

Exercice 47 - Déterminant de Gram (d'après CCP MP 2006) : ✪✪✪ On suppose que E est de dimension finie. Si $x_1, \dots, x_p$ sont p vecteurs de E, on appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_p$ la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ notée $G(x_1, \dots, x_p)$ de terme général $\langle x_i, x_j \rangle$, pour $(i, j) \in [\![1\,;\,p]\!]^2$:

$$G(x_1, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \langle x_2,x_1\rangle & \langle x_2,x_2\rangle & \cdots & \langle x_2,x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \langle x_p,x_2\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{pmatrix}$$

On notera $\Gamma(x_1, \dots, x_p)$ son déterminant.

1. (a) Que peut-on dire d'une matrice $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $Y^\top Y = 0$?
   (b) Soient n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $\ker(A^\top A) \subset \ker(A)$ et en déduire que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top \times A)$.
2. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ p vecteurs de E.
   (a) Si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E et si A est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base B, montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^\top A$.
   (b) Quel lien y a-t-il entre $\mathrm{rg}(G(x_1, \dots, x_p))$ et $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$?
   (c) On suppose que $p = n$. Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\Gamma(x_1, \dots, x_n) > 0$.
3. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et $x \in E$. Montrer que :

$$\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = \Gamma(x - p(x), x_1, \dots, x_p)$$

   où $p(x)$ est la projection orthogonale sur F. En déduire que $\Gamma(x, x_1, \dots, x_p) = d(x, F)^2 \times \Gamma(x_1, \dots, x_p)$.

Exercice 48 : ✪✪✪

1. Montrer que la norme $\|\ \|$ vérifie l'identité du parallélogramme, à savoir :

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

   Illustrer par un dessin. On cherche à présent à prouver que toute norme vérifiant cette propriété découle d'un produit scalaire. On se donne donc dans la suite de l'exercice une norme (c'est-à-dire, cf. cours, une application de E dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois conditions de séparation, d'absolue homogénéité et l'inégalité triangulaire) et vérifiant l'identité du parallélogramme, i.e. :

$$\forall (x, y) \in E^2, N(x + y)^2 + N(x - y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2)$$

   Le but de l'exercice est de prouver qu'il existe un produit scalaire dont N est la norme associée. Posons :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{N(x + y)^2 - N(x)^2 - N(y)^2}{2} \end{array} \right.$$

2. Pourquoi ce choix de φ est-il le seul possible ?
3. Prouver que φ est symétrique.
4. Prouver que φ est définie positive.
5. Il reste donc à montrer que φ est bilinéaire. Soit $(x, y, z) \in E^3$.
   (a) Montrer que $\varphi(-x, y) = -\varphi(x, y)$, et que $\varphi(x, 0) = 0$.
   (b) Montrer que $\varphi(x + y, z) + \varphi(x - y, z) = 2\varphi(x, z)$. En déduire que :

$$\varphi(x, z) + \varphi(y, z) = \varphi(x + y, z)$$

   (c) Justifier que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, $\varphi(rx, z) = r\varphi(x, z)$.
   (d) Justifier que $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$. En déduire que si (r_n) est une suite de réels convergeant vers un réel λ, alors $N(r_n x + z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(\lambda x + z)$.
   (e) Conclure que N est bilinéaire et donc un produit scalaire.

Exercice 49 - Adjoint d'un endomorphisme : ✪✪✪ On suppose que E est de $n \geq 1$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $\forall (x,y) \in E^2, \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. Si A est la matrice de u dans une base orthonormée, donner la matrice de u^* dans cette même base.
2. Déterminer $\ker(u^*)$ et $\mathrm{Im}(u^*)$.
3. Si $v \in \mathscr{L}(E)$, calculer $(u \circ v)^*$.

Exercice 50 - Théorème de Maschke : ✪✪✪✪ On suppose que E est de dimension finie. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est orthogonal pour le produit scalaire $\langle\,,\rangle$ si f préserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x,y) \in E^2, \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$.

1. Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ orthogonal pour le produit scalaire $\langle,\rangle$ et F est un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $f(F) = F$ et en déduire que $F^\perp$ est stable par f.
2. Montrer que $(\,|\,) : (x,y) \mapsto (x|y) = \displaystyle\sum_{g \in G} \langle g(x), g(y)\rangle$ est un produit scalaire sur E.
3. Montrer le théorème de Maschke : si F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G alors F admet un supplémentaire stable par tous les éléments de G.

Remarque : Nous avions déjà démontré le théorème de Maschke dans l'exercice 45 du chapitre 29. L'inconvénient de cette nouvelle démonstration est qu'elle n'est valable qu'en dimension finie, et sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51 - Familles obtusangles : ✪✪✪✪ Une famille de vecteurs $(e_1, \dots, e_q)$ est dite obtusangle si $\langle e_i, e_j\rangle < 0$ pour tous $i \neq j$.

1. Décrire les familles obtusangles en dimension 1.
2. Montrer que si E est de dimension n, alors E admet une famille obtusangle de cardinal $n+1$ (on pourra raisonner par récurrence, et penser à ce qui se passe quand le vent s'engouffre dans un parapluie).
3. Montrer que E n'admet pas de famille obtusangle de cardinal $n+2$ (là aussi on pourra travailler par récurrence, et on prouvera que si on projette orthogonalement une famille obtusangle sur l'orthogonal d'un de ses membres, on obtient encore une famille obtusangle).
4. Deuxième méthode : soit $e_1, \dots, e_q$ une famille obtusangle et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^q \lambda_i e_i = 0$. Montrer que les λ_i sont soit tous nuls, soit les λ_i sont tous non nuls et de même signe. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 52 - Matrices orthogonales : ✪✪✪✪ Soit $n \geq 1$. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M \times M^\top = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'une matrice de passage entre deux bases orthonormales (d'un même espace de dimension n) est orthogonale. Réciproque ?
3. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   (a) À l'aide de l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PT$.
   (b) Montrer l'inégalité d'Hadamard :
   $$\det(A)^2 \leq \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n {A_{i,j}}^2$$
   Est-elle encore valable si A n'est pas inversible ?