Chapitre 36

Introduction aux espaces affines

Le but de ce chapitre est de donner une introduction à la géométrie affine, après avoir passé plusieurs chapitres dans le monde merveilleux de la géométrie vectorielle. On se contentera parfois de définitions « avec les mains », comme par exemple la définition d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou la définition d'un espace affine (qu'on ne donnera pas), l'important étant de se forger une intuition géométrique solide.

On note comme d'habitude $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Comme d'habitude, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ car on se restreint au cadre du programme mais les résultats de ce chapitre sont encore valables sur un corps quelconque.

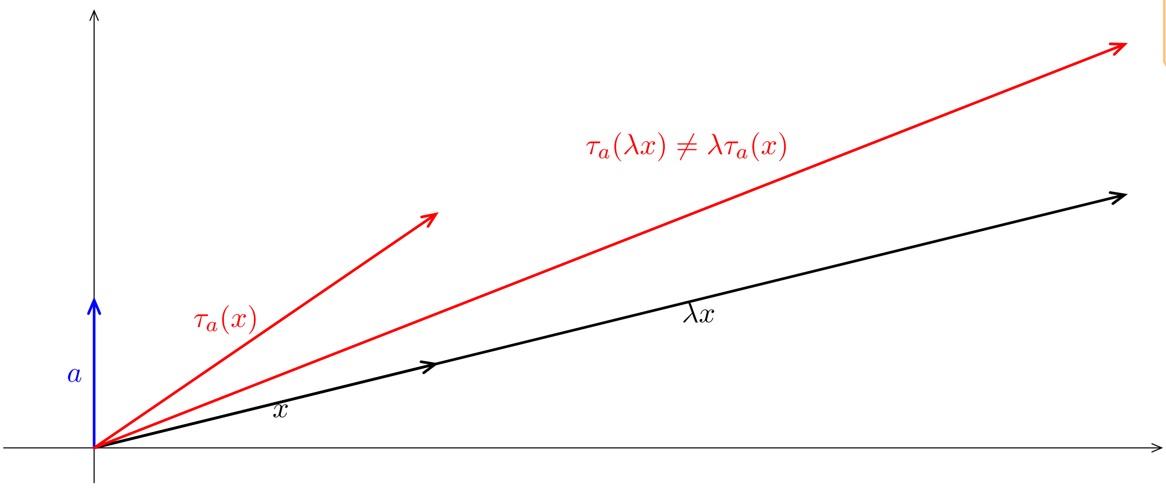
I Translations

Définition. Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a la fonction

$$\tau_a : \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x + a \end{cases}$$

Remarque : Si $a \neq 0$, une translation n'est pas linéaire car n'envoie pas 0_E sur 0_E :

On dit qu'une translation est une application affine, mais cela dépasse le cadre du programme.



Définition. Soit S une partie de E et soit $a \in E$. On définit l'ensemble $S + a$ par :

$$S + a = \{s + a \,|\, s \in S\}$$

S n'est pas forcément un sev de E mais, en pratique, on appliquera cette définition à un sous-espace vectoriel S de E qu'on notera E_1 ou E_2 ou etc.

Remarques :

- ⚠ Écriture avec des quantificateurs : si $x \in E$, alors on a l'équivalence suivante :

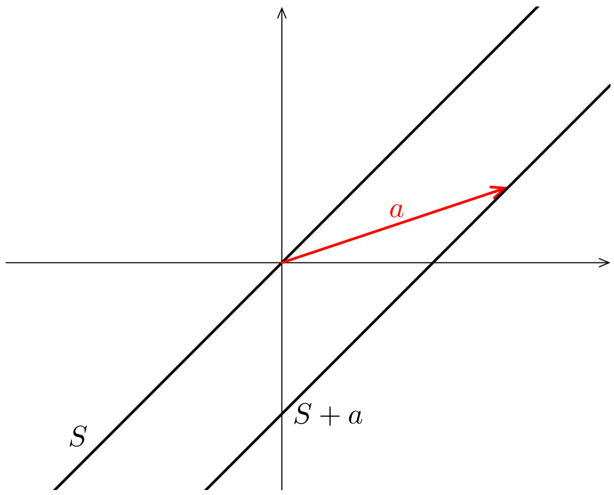
$$x \in S + a \iff \exists s \in S, x = s + a$$

- La variable étant muette, on a aussi l'équivalence suivante (on peut évidemment adapter à l'infini selon les cas, selon les variables dont on dispose déjà) :

$$y \in S + a \iff \exists x \in S, y = x + a$$

- On définit de même $a + S$, et la loi $+$ étant commutative sur E, on a : $a + S = S + a$. Ainsi, dans la suite, on utilisera l'une ou l'autre écriture.

- En clair, on translate de a tous les éléments de l'ensemble S, c'est-à-dire qu'on fait de a « la nouvelle origine » : $a+S$ est parfois appelé « translaté de S de vecteur a », ou « image de S par la translation de vecteur a » :



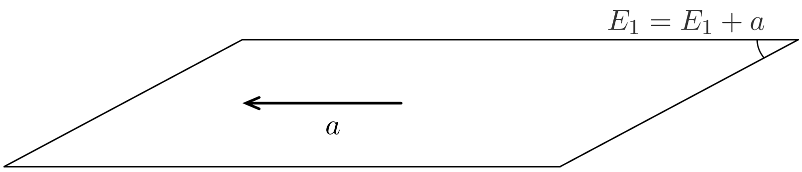
- Il est immédiat que, si $a = 0_E$, alors $a+S = S$. La réciproque est fausse : si $a+S = S$, on n'a pas forcément $a = 0_E$, voir ci-dessous.
- Si T est une partie de E, alors : $T = S + a \iff S = T - a$.

Cela se montre par une double inclusion immédiate, mais c'est intuitif : T est obtenu à partir de S par une translation de vecteur a, on retrouve S à partir de T e, effectuant la translation dans le sens inverse.

Exemple : Soit $a \in E$. Montrons que $a + E = E$. L'inclusion $a + E \subset E$ est évidente. Soit $x \in E$. Alors $x = a+(x-a)$. Or, $x-a \in E$ donc $x \in a+E$ ce qui permet de conclure. C'est intuitif ! Quand on translate tout l'espace, celui-ci ne change pas, on ne fait que translater l'origine. Cependant, cette égalité est fausse en général :

Proposition. Soient $a \in E$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors $a + E_1 = E_1$ si et seulement si $a \in E_1$.

Remarque : Cela se voit bien sur un dessin :



Démonstration. Supposons que $a \in E_1$. Soit $x \in E_1$. E_1 étant stable par CL, $x_1 - a \in E_1$ donc

$$x_1 = a + \underbrace{(x-a)}_{\in E_1} \in a + E_1$$

□

D'où l'inclusion $E_1 \subset a + E_1$. Réciproquement, soit $x \in a + E_1$: il existe $x_1 \in E_1$ tel que $x = a + x_1$, mais a et x_1 appartiennent à E_1 qui est stable par somme donc $x \in E_1$, d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

Réciproquement, supposons que $a + E_1 = E_1$. $0_E \in E_1$ donc $a = a + 0_E \in a + E_1 = E_1$, ce qui est le résultat voulu.

Remarque : On a vu plus haut qu'on avait l'égalité $a+S = S+a$, ainsi que l'équivalence : $T = S+a \iff S = T-a$. Attention à ne pas conclure trop rapidement que cette notation vérifie toutes les propriétés de la somme sur $\mathbb{R}$ ou, plus généralement, sur tout espace vectoriel (par exemple, tout élément est régulier). Ainsi, il est faux de dire : $a + E_1 = E_1$ si et seulement si $a = 0_E$, il faut tout de même être prudent avec cette notation.

Mais on pourra dire que $a+E_1 = a+E_2$ si et seulement si $E_1 = E_2$, cf. paragraphe suivant.

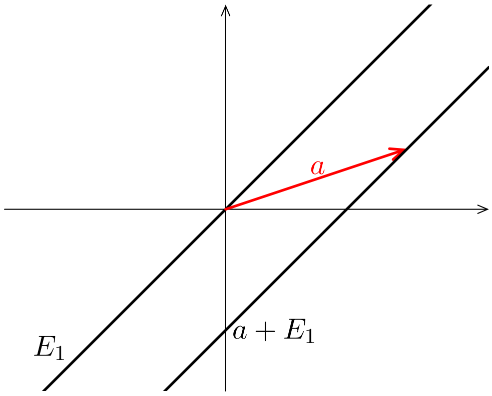
II Sous-espaces affines

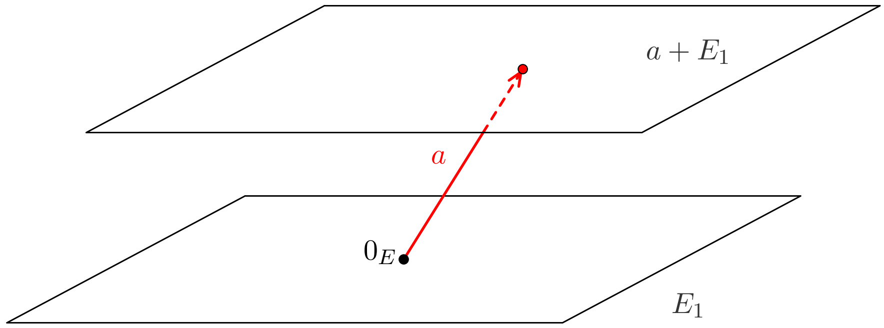
II.1 Définition

Définition. Soit A une partie de E. On dit que A est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E tel que $A = a + E_1$.

Remarques :

- En particulier, un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace affine de E : si E_1 est un sev de E, alors $E_1 = 0 + E_1$. Attention, en général, la réciproque est fausse, un sous-espace affine n'est pas un sous-espace vectoriel car ne contient pas 0_E : voir des contre-exemples dans la suite.
- En d'autres termes, un espace affine est un espace vectoriel translaté :





- Un espace affine n'est jamais vide. En effet, avec les notations ci-dessus, on a toujours $0_E \in E_1$ car E_1 est un sev de E donc $a = a + 0_E \in a + E_1$.
- De même que, dans le chapitre 7, écrire « soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ » signifiait « soient a et b deux réels et $z = a + ib$ », quand on écrira dans la suite « soit $A = a + E_1$ un sous-espace affine de E », cela signifiera « soient $a \in E$, E_1 un sev de E et A l'espace affine $A = a + E_1$ ».

II.2 Direction d'un sous-espace affine

Il est légitime de se demander si a et E_1 sont uniques, et sinon, à quelle condition on a $a + E_1 = b + E_2$. Pour E_1, la situation est simple :

Proposition/Définition. Avec les notations de la définition, le sous-espace vectoriel E_1 est unique, et on l'appelle la direction du sous-espace affine A.

C'est intuitif : l'espace vectoriel E_1 est obtenu en soustrayant un élément de E i.e. en le translatant de manière à ce qu'il contiennent 0_E et donc est unique (voir le dessin ci-dessous).

Démonstration. Soient a et b appartenant à E et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $A = a + E_1 = b + E_2$, et montrons que $E_1 = E_2$. Soit $x_1 \in E_1$. Alors $a + x_1 \in A = b + E_2$ donc il existe $x_2 \in E_2$ tel que $a + x_1 = b + x_2$. Or, $a \in a + E_1 = b + E_2$ donc il existe $y_2 \in E_2$ tel que $a = b + y_2$ si bien que

$$\begin{aligned} x_1 &= b + x_2 - a \\ &= x_2 - y_2 \in E_2 \end{aligned}$$

□

En effet, E_2 est un sev de E donc est stable par CL. On en déduit que E_1 est inclus dans E_2. Par symétrie des rôles, on a l'inclusion réciproque, d'où l'égalité $E_1 = E_2$.

a, lui, n'est pas unique ! Voir ci-dessous.

Exemples :

- Si $a \in E$, $\{a\} = a + \{0_E\}$ donc le singleton $\{a\}$ est un sous-espace affine de direction $\{0_E\}$.
- E est un sous-espace affine de E de direction E lui-même.

Définition. On appelle droite, plan ou hyperplan affine un sous-espace affine dont la direction est une droite vectorielle, un plan vectoriel, ou un hyperplan vectoriel.

On pourrait de façon analogue définir la dimension d'un espace affine comme la dimension de sa direction, mais cela dépasse le cadre du programme.

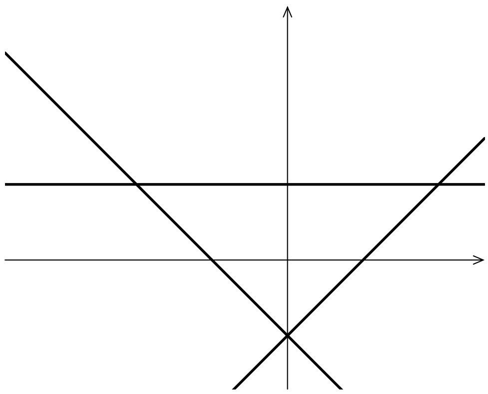
Proposition.

- Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont exactement les singletons, les droites affines et $\mathbb{R}^2$ tout entier.
- Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont exactement les singletons, les droites affines, les plans affines et $\mathbb{R}^3$ tout entier.

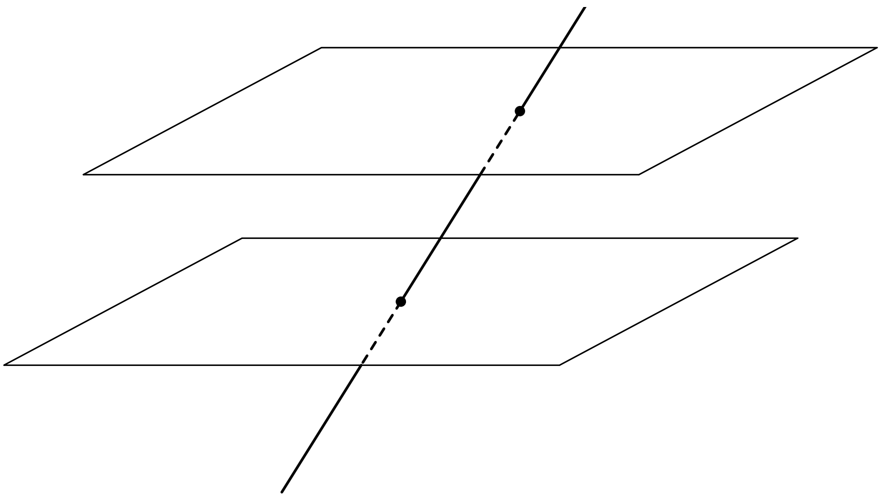
Démonstration. Découle du résultat donnant tous les sev de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ vu dans le chapitre 28 et démontré dans le chapitre 30.

Exemple : Ci-dessous, trois sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$:

On voit que des sous-espaces affines peuvent être disjoints (contrairement à des sous-espaces vectoriels), cf. paragraphe II.4.



et ci-dessous, trois sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$:

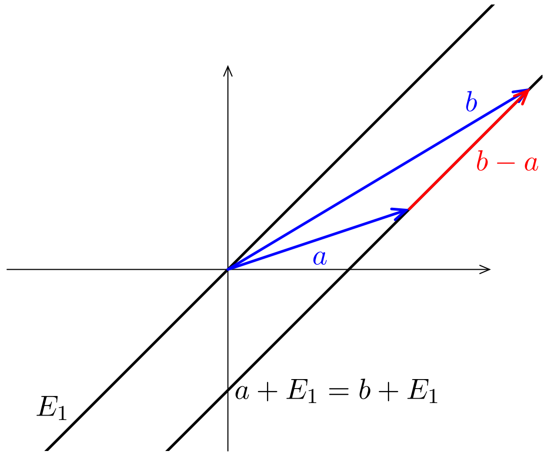


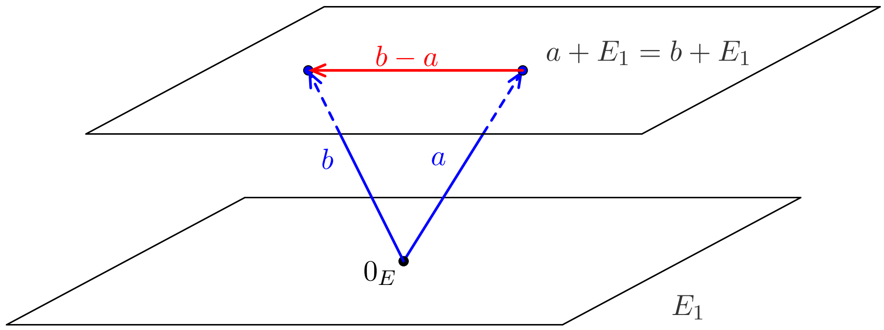
II.3 Égalité de deux sous-espaces affines

Corollaire.

- Soient $a \in E$ et E_1, E_2 deux sev de E. Alors $a + E_1 = a + E_2 \iff E_1 = E_2$.
- Plus généralement, soient $(a, b) \in E^2$ et E_1, E_2 deux sev de E. Alors $a + E_1 = b + E_2 \iff E_1 = E_2$ et $b - a \in E_1 = E_2$.

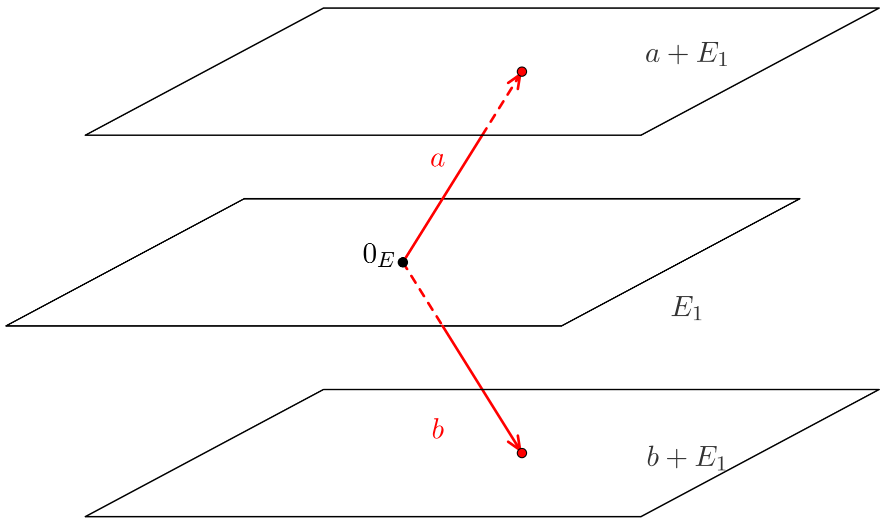
Remarque : Cela se voit bien sur le dessin ci-dessous : si on ajoute b à la place de a, avec $b - a \in E_1$, cela ne change pas le sous-espace affine.





Cependant, deux espaces affines peuvent avoir la même direction sans être égaux : on dit alors qu'ils sont parallèles.

Plus précisément, on dit que A est parallèle à B si la direction de A est incluse dans celle de B (penser à une droite parallèle à un plan) et que A et B sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction, mais cela dépasse le cadre du programme.



Démonstration. La première équivalence découle de la proposition précédente. Montrons la seconde.

Supposons que $a+E_1=b+E_2$. Par unicité de la direction d'un sous-espace affine, $E_1=E_2$. De plus, $b=b+0_E\in b+E_2=a+E_1$ donc il existe $x_1\in E_1$ tel que $b=a+x_1$ donc $b-a=x_1\in E_1$.

Réciproquement, supposons que $E_1=E_2$ et $b-a\in E_1=E_2$. Soit $x\in a+E_1$: il existe $x_1\in E_1$ tel que $x=a+x_1$. Par conséquent, $x=b+(a-b+x_1)$. Or, $b-a\in E_1$ donc $a-b\in E_1$ et $x_1\in E_1$ si bien que $a-b+x_1\in E_1=E_2$ donc $x\in b+E_2$: d'où l'inclusion $a+E_1\subset b+E_2$. L'inclusion réciproque est analogue.

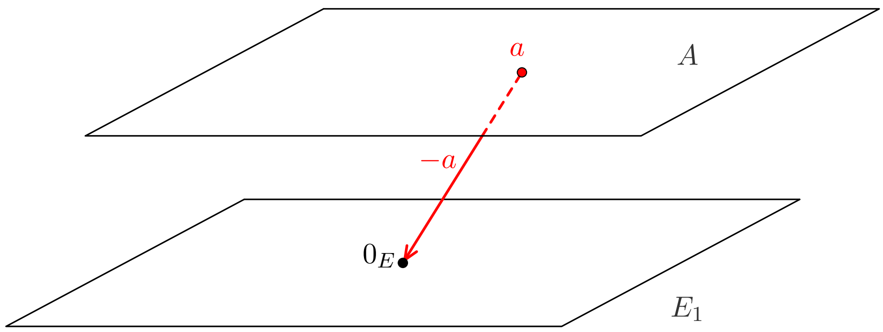
Corollaire. Soit $A=a+E_1$ un sous-espace affine de E. Alors on peut remplacer a par n'importe quel élément de A, i.e. : $\forall b\in A, A=b+E_1$.

En particulier, une partie A est un sous-espace **affine** de E si et seulement si pour tout $a\in A$, $A-a=\{x-a\,|\,x\in A\}$ est un sous-espace **vectoriel** de E. Ce sous-espace vectoriel est alors la direction de A.

En particulier, un espace affine contient 0_E si et seulement si c'est un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $b\in A$. Alors il existe $x_1\in E_1$ tel que $b=a+x_1$ si bien que $b-a\in E_1$: d'après le corollaire précédent, on a bien $A=b+E_1$.

Remarque : En d'autres termes, comme dit précédemment, on obtient la direction en soustrayant un élément de A ce qui a pour effet de « changer a en l'origine » et, ce qui est fort (mais intuitif tout de même) est qu'on peut faire ça avec n'importe quel élément de l'espace affine !

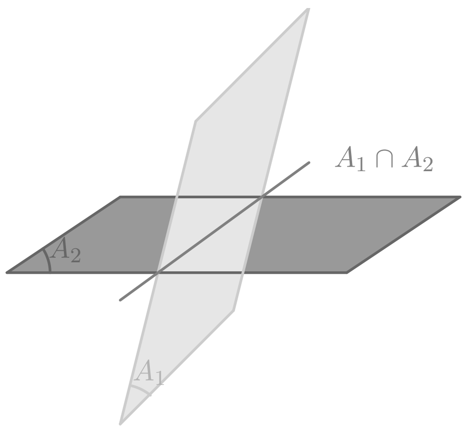


II.4 Intersection de sous-espaces affines

On a vu au paragraphe II.2 que, contrairement à ce qui se passe avec des espaces vectoriels, des espaces affines peuvent avoir une intersection vide :

Proposition. L'intersection d'une famille de sous-espaces affines est soit vide, soit un espace affine de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines. En d'autres termes, si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces affines, dont les directions sont données par la famille $(E_i)_{i\in I}$, alors soit $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$, soit $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ est un sous-espace affine de direction $\displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$.

Remarque : Cela se voit bien sur le dessin ci-dessous : l'intersection des deux plans affines ci-dessous est une droite affine.



Démonstration. Notons $V = \displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i$ et $G = \displaystyle\bigcap_{i\in I} E_i$. G est un sev de E car intersection de sev. Supposons donc que V soit non vide, et soit $x \in V$. Il suffit donc de montrer que $V = a + G$. Tout d'abord, $a \in V$ donc, pour tout $i \in I$, $a \in A_i$ si bien que $A_i = a + E_i$.

Soit $x \in V$. Soit $i \in I$. Alors $x \in A_i = a + E_i$ donc il existe $e_i \in E_i$ tel que $x = a + e_i$. Or, $e_i = x - a$ donc $x - a \in E_i$: i étant quelconque, $x - a \in G$ et $x = a + (x - a) \in a + G$. D'où l'inclusion $V \subset a + G$.

Rappelons que, par définition, un élément est dans une intersection si et seulement s'il est dans tous les ensembles intersectés.

Réciproquement, soit $x \in a + G$. Alors il existe $g \in G$ tel que $x = a + g$. $g \in G$ donc, pour tout i, $g \in E_i$ donc $x = a + g \in a + E_i = A_i$ et ceci est vrai pour tout i donc $x \in V$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

II.5 Exemples « concrets » (grrrr) et méthode

Rappelons le résultat vu au paragraphe II.3 :

Proposition. Soit $A = a + E_1$ un sous-espace affine de E. Alors on peut remplacer a par n'importe quel élément de A, i.e. : $\forall b \in A, A = b + E_1$.

En particulier, une partie A est un sous-espace **affine** de E si et seulement si pour tout $a \in A$, $A - a = \{x - a \,|\, x \in A\}$ est un sous-espace **vectoriel** de E. Ce sous-espace vectoriel est alors la direction de A.

En particulier, un espace affine contient 0_E si et seulement si c'est un espace vectoriel.

Remarque : En d'autres termes, on obtient un espace affine si et seulement si, en faisant la translation « à l'envers », on retombe sur un espace vectoriel, qui est donc la direction de l'espace affine. Par conséquent, si on cherche à prouver qu'un ensemble est un espace affine et si on veut sa direction, il suffit de :

- Trouver un élément de A quelconque explicite, noté a.
- De prouver que $A - a$ est un espace vectoriel.

On peut voir a comme une solution particulière : en soustrayant, on se ramène à « du linéaire », qu'on maîtrise beaucoup mieux (c'est d'ailleurs l'idée du paragraphe II.6).

Cela ressemble à une méthode que nous avons souvent vue : pour les similitudes complexes, les suites arithmético-géométriques, les équations différentielles etc. Ce n'est pas un hasard : cf. paragraphe II.6.

Exemples :

- Montrer que $A = \{P \in \mathbb{K}[X] \,|\, XP' + P = 2X\}$ est un espace affine dont on précisera la direction.

  On commence par trouver un élément de A : on remarque que X est solution « évidente ». Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} P \in A &\iff XP' + P = 2X \\ &\iff XP' + P = X(X)' + X \\ &\iff X(P-X)' + (P-X) = 0 \\ &\iff P - X \in E_1 \end{aligned}$$

Linéarité de la dérivation.

  où $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \,|\, XP' + P = 0\}$. On montre aisément que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$: on a donc montré que $A - X = E_1$ qui est un espace vectoriel donc A est un espace affine de direction E_1 et $A = X + E_1$.

- Montrer que l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$M + M^\top = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

  est un sous-espace affine de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont on précisera la direction.

  Notons S cet ensemble. La matrice A dont tous les coefficients valent $1/2$ est solution évidente. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\begin{aligned} M \in S &\iff M + M^\top = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &\iff M + M^\top = A + A^\top \\ &\iff (M-A) + (M-A)^\top = 0 \\ &\iff M - A \in A_n(\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Linéarité de la transposition.

où on rappelle que $A_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices antisymétriques qui est un espace vectoriel (cf. chapitre 28). On a donc montré que $S - A = A_n(\mathbb{K})$ qui est un espace vectoriel donc S est un espace affine de direction $A_n(\mathbb{K})$ et $S = A + A_n(\mathbb{K})$.

- Cependant, l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$M + M^\top = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$$

n'est pas un sous-espace affine de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ car est vide : en effet, si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $M + M^\top$ est une matrice symétrique donc il n'existe aucune matrice M solution du problème.

II.6 Notion d'équation linéaire

Le but de ce paragraphe est de donner un cadre aux exemples du paragraphe précédent.

Définition. Soient $a \in F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'équation (d'inconnue $x \in E$) $u(x) = a$ est appelée une équation linéaire.

Rappelons que F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. Soient $a \in F$ et $u \in \mathscr{L}(E, F)$. L'ensemble des solutions de l'équation linéaire $u(x) = a$ est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de E dirigé par $\ker(u)$.

Plus précisément, cet ensemble est non vide si et seulement si $a \in \operatorname{Im}(u)$, et alors c'est un sous-espace affine de direction $\ker(u)$.

Démonstration. Soit S l'ensemble des solutions. Supposons donc que $S \neq \varnothing$. Soit $b \in S$. Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in S & \iff u(x) = a \\ & \iff u(x) = u(b) \\ & \iff u(x) - u(b) = 0 \\ & \iff u(x - b) = 0 \\ & \iff x - b \in \ker(u) \end{aligned}$$

Car b est solution.

Car u est linéaire.

□

si bien que $S = b + \ker(u)$ ce qui est le résultat voulu.

Remarque : En d'autres termes, une solution d'une équation $u(x) = a$ avec u linéaire est de la forme $b + y$ avec b une solution particulière et y un élément du noyau i.e. solution de l'équation $u(y) = 0$, équation qu'on appelle parfois équation homogène associée. On retrouve le principe que nous avons vu dans de nombreux chapitres (chapitres 11, 12 etc.) :

Solutions de l'équation linéaire = solution particulière + élément du noyau

Ce résultat n'est pas si surprenant qu'il en a l'air. En tout cas, on l'utilise sans le dire (et même en le disant dans le chapitre 11 par exemple) depuis le début de l'année : nombreux sont les exemples où on se donne une solution particulière et où on la soustrait pour se ramener à un problème plus simple et surtout linéaire (i.e. avec un second membre nul).

Exemples :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$: plus précisément, s'il existe une solution $X = (x_1, \dots, x_p)$, alors l'ensemble des solutions est le sous-espace affine $X + E_1$ où E_1 est l'ensemble des solutions du système homogène

$$(S_0)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

C'est bien un espace vectoriel car ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ car $(1,1,1)$ est solution évidente, et sa direction est la droite vectorielle (car intersection de deux plans vectoriels) d'équations

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

- Si $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq 1$, l'ensemble A des suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Plus précisément, si on note c la suite constante égale à $b/(1-a)$, alors une suite (u_n) appartient à A si et seulement si $(u_n) - c$ est géométrique de raison a. Or, l'ensemble des suites géométriques de raison a est un espace vectoriel égal à $\text{Vect}((a^n))$ donc $A = c + \text{Vect}((a^n))$. C'est bien un espace affine, et plus précisément une droite affine car de direction $\text{Vect}((a^n))$ qui est de dimension 1 (même si $a = 0$ car alors c'est la suite dont le terme d'indice 0 vaut 1 et les autres sont nuls).
- Soient $n \geqslant 1$, $a_1, \dots, a_n$ des éléments DISTINCTS de $\mathbb{K}$, et $b_1, \dots, b_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. Alors le polynôme

cf. chapitre 19.

$$L = \sum_{k=1}^{n} b_k \times \prod_{i \neq k} \frac{(X - a_i)}{(a_k - a_i)}$$

est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ vérifiant, pour tout i, $P(a_i) = b_i$. De plus, un polynôme Q vérifie $Q(a_1) = b_1, \dots, Q(a_n) = b_n$ si et seulement L est le reste de la division euclidienne de Q par $(X - a_1) \dots (X - a_n)$, si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$Q = A \times (X - a_1) \cdots (X - a_n) + L$$

En d'autres termes, l'ensemble des polynômes P vérifiant $P(a_i) = b_i$ pour tout i est égal à $P + E_1$ où $E_1 = \{A \times (X - x_1) \cdots (X - a_n) \,|\, A \in \mathbb{K}[X]\}$ est l'ensemble des multiples de $(X - x_1) \cdots (X - a_n)$, c'est donc un sous-espace affine de $\mathbb{K}[X]$ de direction E_1. On est bien dans le cadre d'une équation linéaire puisque chercher les polynômes P solutions du problème revient à trouver les polynômes P solutions de l'équation linéaire $u(P) = (b_1, \dots, b_n)$ où

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P \longmapsto (P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc égal à $L + \ker(u)$ i.e. les solutions sont de la forme $L + P$ où $P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$, ce qui est bien le résultat ci-dessus puisqu'un polynôme s'annule en $a_1, \dots, a_n$ (qui sont distincts) si et seulement s'il est multiple de $(X - a_1) \cdots (X - a_n)$.

- Si y_0 est solution particulière de l'équation linéaire du premier ordre $(E) : y' + ay = b$ (avec a et b continues), alors $S_E = y_0 + S_H$ où S_H est l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée (et donc est un espace vectoriel de dimension 1, cf. chapitre 30) donc S_E est une droite affine (de direction S_H qui est une droite vectorielle). De même, l'ensemble des solutions d'une EDL du second ordre à coefficients constants est un sous-espace affine, et plus précisément un plan affine, de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ de direction l'ensemble des solutions de l'équation homogène (qui, lui, est un plan vectoriel).

III Points, vecteurs et... flèches (le retour)

Dans les chapitres d'algèbre linéaire (et dans ce qui précède), quand on faisait un dessin, on représentait parfois les vecteurs sous forme de points, parfois sous forme de vecteur partant de l'origine : avec les notations du lycée, cela vient du fait qu'on identifiait sans le dire un point M avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ (où O était l'origine du repère).

Cependant, malgré cette identification, la notion de point avait un peu disparu cette année du cours d'algèbre linéaire : qu'on les représente par des points ou des flèches, on parlait de vecteurs (ce qui est normal : par définition, un vecteur est un élément d'un espace vectoriel).

Mais, quand on travaille dans E considéré comme un espace affine, il est plus fréquent de manipuler à la fois des points et des vecteurs, ou plutôt, puisqu'on manipule des éléments de E qui sont des vecteurs : de parler de certains objets comme étant des points, et de parler de certains objets comme étant des vecteurs. Cela vient du fait que, dans les espaces affines, les translations jouent un rôle important, et donc on parlera souvent de vecteur associé à une translation.

En résumé, quand on s'intéresse aux propriétés affines d'un espace vectoriel E, ses éléments sont parfois appelés points à la place de vecteurs, et notés avec des lettres majuscules plutôt que minuscules. Cela permet d'écrire des vecteurs avec des flèches « comme au bon vieux temps ». Plus précisément :

- On parlera plutôt de points quand on s'intéressera aux propriétés vectorielles de E, et de vecteurs quand on s'intéressera à ses propriétés affines (translations, sous-espaces affines, qui sont des outils n'apparaissant que dans le cadre affine et pas dans le cadre linéaire).
- Cela vient du fait que, dans le cadre affine, on reprend à peu près les notations du lycée : points vs vecteurs, même si ce sont tous en fait des éléments de E. Cela permet de mieux visualiser certains résultat.
- Mais quand faire l'un, et quand faire l'autre ? Pour faire simple : les points et les vecteurs sont des éléments de E, ce sont des objets de même nature, tout n'est qu'une histoire de convention (qui n'est pas la même qu'on travaille en géométrie affine ou en algèbre linéaire). Encore une fois, les noter différemment n'est pas une difficulté supplémentaire, et cela n'a rien d'une obligation, c'est une notation optionnelle qui permet de mieux visualiser certains résultats en reprenant des notations vues dans les petites classes.
- On différencie parfois l'ensemble des points de l'ensemble des vecteurs, qu'on note respectivement $\mathscr{E}$, de l'espace des points, qu'on note E.

La preuve : dans tout le chapitre, je n'ai pas fait cette distinction, et j'ai travaillé comme d'habitude. Nous verrons plus bas comment tout reformuler avec ces nouvelles notations, et vous verrez que, peut-être, certaines propriétés vous sembleront, grâce à cela, plus claires.

- En fait, la définition d'un espace affine (à la différence d'un sous-espace affine) est plus générale que celle donnée dans ce cours... On fait un peu ça avec les mains... Bon, on zappe, mais promis, tout va bien.
- On peut noter un élément de E indifféremment en majuscules qu'en minuscules quand il s'agit de points, et avec ou sans flèche quand il s'agit de vecteur même si, soyons honnête, un point est le plus souvent noté avec une majuscule et sans flèche, et un vecteur est le plus souvent noté en minuscule (sauf les vecteurs de la forme $\overrightarrow{AB}$, voir plus bas)

De façon explicite :

- Les éléments de E sont parfois appelés points et notés avec des lettres majuscules (A, B etc.).
- On note $\overrightarrow{AB} = B - A$. Comme dit ci-dessus : puisque E est un espace vectoriel, il est stable par différence i.e. A, B et $\overrightarrow{AB}$ sont tous des éléments de E mais les deux premiers sont appelés points et le dernier est appelé vecteur.
- Le neutre de $(E, +)$ est parfois appelé vecteur nul, noté $0_E, 0$ ou $\overrightarrow{0_E}$, $\overrightarrow{0}$, parfois origine de l'espace affine E et noté O. En particulier, si $A = B$, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$.
- Pour obtenir B à partir de A grâce à une translation, il faut ajouter le vecteur $B - A = \overrightarrow{AB}$: la translation qui envoie A sur B est donc appelée la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- La relation de Chasles vue au lycée est encore valide :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} &= B - A + C - B \\ &= C - A \\ &= \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

- On a aussi la relation suivante : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$.
- $\overrightarrow{aB} = \overrightarrow{CD} \iff \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
- Enfin, on a la relation suivante : $\forall A \in E, \forall! \overrightarrow{u} \in E, \exists B \in E, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire que : $B = A + \overrightarrow{u} \iff \overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Cela permet de reformuler le résultat du II.3 de façon plus simple : $A + E_1 = B + E_2 \iff E_1 = E_2$ et $\overrightarrow{AB} \in E_1 = E_2$.