Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 11

Problème 1 - Fonctions (presque) (exactement) (doublement) surjectives [1]

Pour tous ensembles non vides E et F et toute application $f : E \to F$, on dit que f est

- presque surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet un antécédent par f dans E.
- doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet au moins deux antécédents par f dans E.
- exactement doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F admet exactement deux antécédents par f dans E.
- presque doublement surjective (de E dans F) si tout élément de F (sauf peut-être un) admet au moins deux antécédents par f dans E.

Partie I - Premiers exemples.

Les questions de cette partie sont indépendantes.

1. Rappeler la définition d'une application $f : E \to F$ surjective.
2. Écrire avec des quantificateurs la proposition « f est doublement surjective de E dans F ».
3. Montrer que la fonction carré est presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$.
4. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R} \to \left]\, 0\,;1 \,\right[$ continue presque surjective est surjective (évidemment de $\mathbb{R}$ dans $\left]\, 0\,;1 \,\right[$).
5. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to [\, 0\,;1\,]$ continue, presque surjective mais non surjective. Un dessin suffira (penser à une fonction « en cloche »), mais une expression explicite, sans démonstration [2], sera valorisée.
6. On rappelle (cf cours) que la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Montrer qu'elle est doublement surjective. Est-elle exactement doublement surjective ?
7. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{R}^2$. La fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ est-elle presque doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? presque surjective ?
8. Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $(b,c) \in \mathbb{C}^2$. Soit $y \in \mathbb{C}$. Donner, selon la valeur de y, <u>le nombre</u> de solutions de l'équation (d'inconnue z) $az^2 + bz + c = y$. En déduire que la fonction $f : z \mapsto az^2 + bz + c$ est presque doublement surjective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On explicitera le seul complexe y n'admettant qu'un seul antécédent par f.

Partie II - Fonctions exactement doublement surjectives continues de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$ (ou pas).

Le but de cette partie est de montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R})$ continue exactement doublement surjective, c'est-à-dire telle que toute valeur y prise par f l'est exactement deux fois, ou encore que toute image y admet exactement deux antécédents par f, ou encore [3] que tout réel est atteint soit exactement deux fois par f, soit aucune. On effectue pour cela un raisonnement par l'absurde et on suppose donc dans cette partie que toute valeur y atteinte par f admet exactement deux antécédents par f.

Je précise que f n'a aucune raison d'être monotone sur quelque intervalle que ce soit [4]. Ainsi, le mot monotone (ou le mot croissante ou le mot décroissante) ne doit pas apparaître dans votre copie [5], si je le vois dans cette partie j'arrête de lire.

Dans la suite, on pourra penser à faire un dessin [6] pour illustrer chacun de ses raisonnements (un dessin est fourni à titre d'exemple pour la question 1.(c)). Bien sûr, un dessin ne remplace en aucune façon une preuve...

1. On suppose dans cette question que f admet un maximum noté M, atteint donc en exactement deux réels $a < b$.

---

1. Rayer les mentions inutiles...
2. On appliquera suffisamment de fois comme ça le TVI dans la partie II...
3. Après tout, l'enseignement est l'art de la répétition...
4. Il existe des fonctions continues qui ne sont monotones sur aucun intervalle d'intérieur non vide... Même si c'est difficile à visualiser !
5. Bien sûr, il ne faudra pas appliquer le théorème de la bijection ou le corollaire du TVI mais bien le TVI simple, basique...
6. Par contre, inutile de faire les dessins les plus compliqués possibles, vous pouvez évidemment dessiner des fonctions monotones.

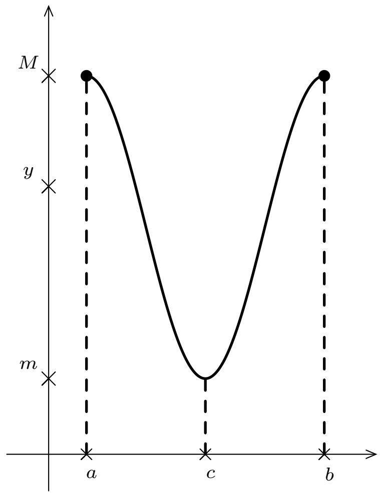
(a) Montrer que pour tout réel x distinct de a et b, on a $f(x) < M$.

(b) Montrer l'existence de $m = \min_{[\,a\,;b\,]} f$ et montrer que $m < M$.

(c) Montrer que pour tout $y \in \left]\, m\,; M \,\right[$, il existe $x_1 \neq x_2$ dans $\left]\, a\,; b\,\right[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = y$. On commencera par écrire avec des quantificateurs le fait que m est atteint (par exemple, en c)[7]. On pourra s'inspirer du dessin ci-contre (mais encore une fois, un dessin n'est pas une preuve).

(d) Montrer que m admet un unique antécédent sur $[\,a\,;b\,]$ (on raisonnera par l'absurde).

(e) Aboutir à une absurdité.



2. Montrer que $-f$ est également exactement doublement surjective de $\mathbb{R}$ dans $(-f)(\mathbb{R})$. Aboutir à une absurdité dans le cas où f admet un minimum.
3. On revient ici au cas général. Soit $y \in f(\mathbb{R})$ atteint en exactement deux réels $\alpha < \beta$.
   (a) Justifier l'existence de $M = \max_{[\,\alpha\,;\beta\,]} f$ et de $m = \min_{[\,\alpha\,;\beta\,]} f$.
   (b) Montrer par l'absurde que $y = m$ ou que $y = M$.
   (c) On suppose que $y = m$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Montrer les deux résultats suivants :
   - $\forall x < \alpha, m > f(x)$
   - $\forall x > \beta, m > f(x)$

   (d) Conclure.

Problème 2 (facultatif) - Convergence uniforme de polynômes

Partie I - Norme infinie et convergence uniforme

Si f est une fonction bornée définie sur un ensemble D et à valeurs réelles, on note $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$.

1. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, et soit $M \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\|f\|_\infty \leq M \iff \forall x \in D, |f(x)| \leq M$$

2. (a) Soit

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^{-x^2} \end{cases}$$

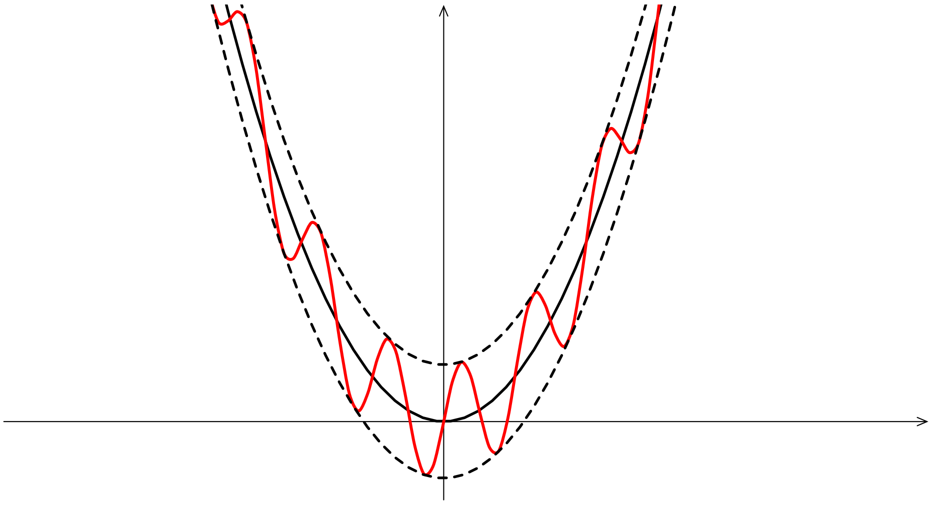
Donner $\|f\|_\infty$. Existe-t-il $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$?

   (b) Donner un exemple de fonction f bornée pour laquelle la norme infinie n'est pas atteinte, c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas de réel x_0 avec $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

3. (a) Soient $a < b$ et $c < d$ quatre réels. Exhiber une bijection affine φ de $[\,c\,;d\,]$ dans $[\,a\,;b\,]$, et montrer que φ^{-1} est aussi affine.
   (b) Soit $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ bornée. À l'aide de la question 1, justifier que $\|f \circ \varphi\|_{\infty,[\,c\,;d\,]} \leq \|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$ (où l'on a noté, de façon transparente, $\|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} = \sup\limits_{x \in [\,a\,;b\,]} |f(x)|$ et idem pour l'autre).
   (c) En remarquant que, pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$, $|f(x)| = \left|f \circ \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right|$, montrer que l'inégalité de la question précédente est en fait une égalité. En d'autres termes, on vient de prouver qu'on ne change pas la norme infinie quand on compose par une bijection (ce qui est totalement intuitif).

Dans la suite du problème, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de D dans $\mathbb{R}$ et si $f \in \mathbb{R}^D$, on dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Géométriquement, cela signifie que l'écart entre les graphes de f_n et de f soit être partout majoré par une quantité qui tend vers 0, ou encore que le graphe de f_n doit « partout être proche de celui de f » i.e. se trouver dans un cylindre formé autour du graphe de f, cylindre qui devient de plus en plus petit quand n tend vers $+\infty$.

7. Mais on aurait dû y penser tout seul si le concepteur du sujet n'était pas si gentil.

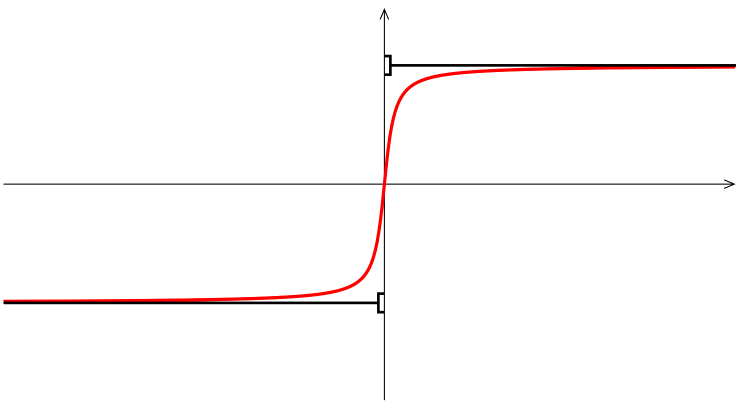


4. Écrire avec des quantificateurs le fait qu'une suite (f_n) converge uniformément vers f. L'écriture finale ne devra plus comporter de $\| \, \|_\infty$.
5. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f (aussi définie sur D). Prouver que, pour tout $x \in D$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ (on pourra commencer par justifier que $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$).
6. Le but de cette question est de prouver que la réciproque est fausse. Pour tout n, posons $f_n : x \mapsto \text{Arctan}(nx)$ et

$$f : x \mapsto \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ mais que (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

Comment expliquer cet apparent paradoxe ? Le fait que, pour tout x, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ s'appelle la convergence simple : il y a convergence en tout point, mais le graphe de f_n peut tout de même être éloigné de celui de f (dans notre exemple, cela se produit au voisinage de 0). Ci-dessous les graphes de f_n et de f :



Le but de ce problème est d'étudier, selon les ensembles D sur lesquels on se place, la convergence uniforme de suites de polynômes. On identifiera dans tout le problème polynôme et fonction polynomiale associée.

Partie II - Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstraß

Dans toute cette partie (sauf la dernière question), on se place sur $D = [\,0\,;1\,]$. Ainsi, toutes les fonctions seront supposées définies sur $[\,0\,;1\,]$ (et donc la norme infinie désignera la borne supérieure sur $[\,0\,;1\,]$). On se donne dans toute cette partie une fonction f continue sur $[\,0\,;1\,]$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$, évidemment).

1. Justifier l'existence de $\|f\|_\infty$ et montrer que celle-ci est atteinte, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[\,0\,;1\,]$ le n-ième polynôme[8] de Bernstein par :

$$B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2. (a) Calculer explicitement B_n et prouver que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f dans les cas particuliers suivants :

   - f est constante égale à 1.
   - f est la fonction $\mathrm{Id}_{[\,0\,;1\,]}$.

   (b) On suppose dans cette question uniquement que f est la fonction carré (enfin, sa restriction à $[\,0\,;1\,]$). En remarquant que, pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $k^2 = k(k-1)+k$, justifier que, pour tout $x \in [\,0\,;1\,]$:

$$B_n(x) = \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k}{n}$$

   En remarquant que la deuxième somme de droite a été calculée à la question précédente, expliciter encore une fois B_n et prouver encore une fois que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.

On revient dans la suite au cas général et on fixe un réel $\varepsilon > 0$, ainsi qu'un entier $n \geq 1$.

3. Justifier l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!], \left|x - \frac{k}{n}\right| \leq \eta \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$$

On se donne dans la suite de cette partie un réel $x \in [\,0\,;1\,]$ et un entier $n \geq 1$.

4. Justifier que

$$f(x) - B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

   En déduire que :

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon + \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

   Dans la suite, on note :

$$S_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ |x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

5. Justifier que, pour tous les k intervenant dans cette somme, $\dfrac{1}{\eta^2}\left(x - \dfrac{k}{n}\right)^2 \geq 1$.
6. Montrer que :

$$S_n(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(x - \frac{n}{k}\right)^2$$

7. À l'aide des questions 2.(a) et 2.(b), justifier que

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}$$

   et conclure que $(B_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.
8. Généraliser au cas d'une fonction continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$ avec $a < b$. Plus précisément, prouver que, si f est une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$, alors f est limite uniforme d'une suite de polynômes. On pourra utiliser la question 3 de la partie I.

8. Bon, il faudrait plutôt parler d'une fonction polynôme ou d'une fonction polynomiale mais, dans le chapitre 19, nous dirons que nous identifions un polynôme avec sa fonction polynomiale associée, et nous verrons pourquoi nous aurons le droit de le faire. Pour l'instant : chut, je n'ai rien dit.

On vient donc de prouver le théorème suivant, dit théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß (au programme de deuxième année) :

Théorème d'approximation polynomiale de Weierstraß : Toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de polynômes.

Cela signifie que, quand on prend une fonction continue sur un segment, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme « distant de f de moins de ε » (voir le graphe ci-dessus). La suite du problème a pour but d'étudier les limites uniformes éventuelles de polynômes dans des cas particuliers, ainsi qu'une généralisation aux « polynômes trigonométriques ».

Partie III - Limites uniformes de polynômes sur $\mathbb{R}$

On se propose dans cette partie de répondre à la question suivante : le théorème de Weierstraß est-il encore valable sur $\mathbb{R}$? En d'autres termes, toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ est-elle encore limite uniforme d'une suite de polynômes ? On va en fait répondre à la question plus générale suivante : quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui sont limites uniformes d'une suite de polynômes ?

On se donne dans la suite une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (pas nécessairement continue) et on suppose qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge uniformément vers f.

1. (a) Montrer qu'il existe n_0 tel que : $\forall n \geq n_0, \forall x \in \mathbb{R}, |P_n(x) - f(x)| \leq 1$.
   (b) En déduire que, pour tous $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $|P_n(x) - P_{n_0}(x)| \leq 2$.
   (c) Montrer finalement que, pour tout $n \geq n_0$, le polynôme $P_n - P_{n_0}$ est constant. On note cette quantité α_n, si bien que $P_n = P_{n_0} + \alpha_n$.
2. Justifier que la suite $(P_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge (on pourra utiliser la partie I), et en déduire que la suite (α_n) converge vers une limite que l'on notera L.
3. Montrer finalement que $f = P_{n_0} + L$: f est donc polynomiale.
4. Montrer la réciproque : toute fonction polynomiale est limite uniforme d'une suite de polynômes. On vient donc de prouver que, sur $\mathbb{R}$, les limites uniformes de suites de polynômes sont exactement les polynômes.

Partie IV - Théorème de Chudnowski

On se donne dans cette partie deux réels $a < b$ appartenant à $]\,0\,;1\,[$ et on se donne une fonction $f : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ continue.

1. Prolonger f en une fonction continue sur $[\,0\,;1\,]$ prenant des valeurs entières en 0 et en 1 (un dessin et une explication suffiront, il n'est pas demandé de donner la valeur explicite du prolongement sur les intervalles $[\,0\,;a\,[$ et $]\,b\,;1\,]$). f ainsi prolongée sera encore notée f dans la suite.
2. Soit $n \geq 1$. On définit sur $[\,0\,;1\,]$ le polynôme C_n par :
$$C_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right\rfloor x^k(1-x)^{n-k}$$
   Prouver que :
$$\forall x \in [\,0\,;1\,], |B_n(x) - C_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k}$$
   où B_n est le n-ième polynôme de Bernstein, défini dans la partie II.
3. Prouver que, pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, $\binom{n}{k} \leq n$.
4. À l'aide du binôme de Newton, prouver que :
$$\forall x \in [\,0\,;1\,], \sum_{k=1}^{n-1} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n}$$
5. Justifier que la suite $(C_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f.