Chapitre 10

Calcul intégral

Le but de ce chapitre est de se donner les bases du calcul intégral pour calculer des intégrales (plus ou moins) simples mais aussi pour pouvoir calculer des primitives. C'est un chapitre avant tout technique : nous ne définirons pas rigoureusement l'intégrale et certains résultats (comme la linéarité de l'intégrale) ne seront pas démontrés (nous le ferons au chapitre 22).

Dans ce chapitre, on se donne I un intervalle d'intérieur non vide.

I Notion de primitive

I.1 Généralités

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Une primitive de f est une fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Remarques :

- La définition d'une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{C}$ est la même que pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$. Nous la reverrons dans le chapitre 14, mais vu que les règles sont les mêmes que sur $\mathbb{R}$, on pourra travailler mécaniquement sans se poser de question, les justifications seront vues ultérieurement. Par exemple, si $\alpha \in \mathbb{C}$, la dérivée de $x \mapsto e^{\alpha x}$ est $x \mapsto \alpha e^{\alpha x}$. Par exemple, la dérivée de $x \mapsto e^{(1+i)x}$ est $x \mapsto (1+i)e^{(1+i)x}$.
- Attention, même si les fonctions sont à valeurs complexes, la variable est réelle ! Dériver une fonction de la variable complexe est furieusement hors programme (on parle alors de fonctions holomorphes). Il vous est par exemple strictement interdit de dire que $z \mapsto z$ est dérivable sur $\mathbb{C}$ de dérivée égale à 1. La bonne nouvelle est que, par conséquent, on ne vous le demandera jamais. Par conséquent, même lorsque les fonctions seront à valeurs complexes, la variable x désignera un réel.

Exemples :

- $x \mapsto x^2$ est une primitive de $x \mapsto 2x$.
- Si $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $x \mapsto x^n$.
- sin est une primitive de cos.
- $-\cos$ est une primitive de sin.
- exp est une primitive de exp.
- Si $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ est une primitive de $x \mapsto e^{\alpha x}$.
- ch est une primitive de sh (pas de signe $-$ ici).
- sh est une primitive de ch.
- $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $x \mapsto \ln(-x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{-*}$.
- ⚠ $x \mapsto \ln|x|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ (qui n'est pas un intervalle).
- Arctan est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

Si $\alpha = 0$, alors $x \mapsto e^{\alpha x}$ est la fonction constante égale à 1, dont une primitive est $x \mapsto x$.

- Arcsin et $-$Arccos sont des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$ (qui n'est pas un intervalle) : cf. paragraphe III.2.

On a deux primitives : c'est cohérent avec ce qui suit car on a prouvé dans le chapitre 5 qu'elles diffèrent d'une constante.

Cas particulier important : primitive d'une composée. Rappelons que si $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ sont dérivables, alors $g \circ f$ est dérivable et $(g\circ f)' = f' \times g' \circ f$. En d'autres termes, $g \circ f$ est une primitive de $f' \times g' \circ f$. Par exemple, une primitive de $x \mapsto -2xe^{-x^2}$ est $x \mapsto e^{-x^2}$. Il faut les repérer au premier coup d'oeil ! Les cas les plus fréquents sont :

- $\dfrac{u'}{u}$: une primitive est $\ln|u|$.
- $\alpha u' u^{\alpha-1}$: une primitive de u^α.
- Plus généralement (voir ci-dessous), pour $u'u^\alpha$ (avec $\alpha \neq -1$) : une primitive est $\dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.
- Si $a \neq 0$, une primitive de $x \mapsto f'(ax+b)$ est $x \mapsto \dfrac{f(ax+b)}{a}$.
- $u'e^u$: une primitive est e^u.
- $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$: une primitive est $\sqrt{u}$
- etc.

Remarque : Comme on vient de le voir, si on n'a pas exactement $f' \times g \circ f$, on peut « compenser et rajouter ce qui manque », mais cela ne marche qu'avec les constantes ! Par exemple, une primitive de $x \mapsto xe^{-x^2}$ est $x \mapsto \dfrac{-e^{-x^2}}{2}$, ou encore : si $\alpha \neq 0$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^2}$ est $x \mapsto \dfrac{-1}{\alpha\,(1+e^{\alpha x})}$. Cependant, attention : en général, $\dfrac{g \circ f}{f'}$ n'est pas une primitive de $g' \circ f$! Par exemple, $x \mapsto \dfrac{e^{-x^2}}{2x}$ n'est pas une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$! On peut montrer que les primitives de $x \mapsto e^{-x^2}$ ne peuvent pas s'exprimer en fonction des fonctions usuelles, mais ça, c'est une autre histoire !

Se poser la question quand on a « presque » $f' \times g' \circ f$. Mais attention, en général, cela ne marche que lorsqu'il manque des constantes.

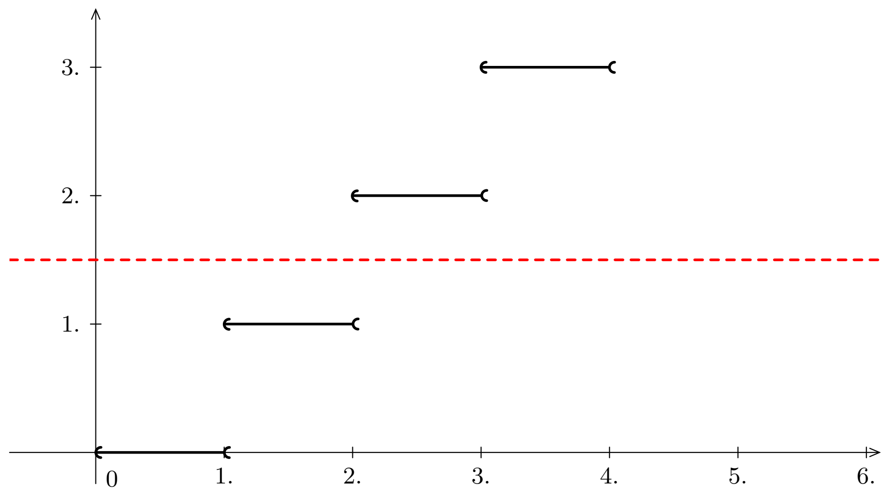
Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Alors f admet une primitive sur I.

Idem, on définit une fonction continue à valeurs complexes de la même façon qu'une fonction à valeurs réelles, les fonctions usuelles sont continues (en particulier $x \mapsto e^{\alpha x}$ est continue pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$) et on pourra travailler sans se poser de question, cf. chapitre 13.

Remarque : Ce résultat découle directement du théorème fondamental de l'analyse ci-dessous (que nous démontrerons au chapitre 22). La réciproque est fausse, c'est-à-dire qu'une fonction discontinue peut admettre des primitives. En effet, il existe (cf. chapitre 14) un exemple de fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ mais non $\mathscr{C}^1$. Si on note $f = F'$, alors f admet une primitive alors qu'elle n'est pas continue.

Savoir si une fonction donnée f admet ou non une primitive est en général un problème difficile. Heureusement, on ne se posera la question que pour les fonctions continues, et le théorème ci-dessus permet de répondre directement pour l'affirmative.

À titre culturel, donnons une fonction qui n'admet pas de primitive : nous verrons en TD (c'est l'exercice 25 du chapitre 14) le théorème de Darboux : « si φ est dérivable sur I alors φ' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (même si φ n'est pas continue) ». Par contraposée, si une fonction ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires, alors ce n'est pas une dérivée, donc elle n'admet pas de primitive. Par exemple, la partie entière n'admet pas de primitive :



Proposition. Soient $(f_1, \dots f_n)$ continues de I dans $\mathbb{C}$, $(F_1, \dots, F_n)$ des primitives respectivement de $(f_1, \dots, f_n)$, et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors $\lambda_1 F_1 + \cdots + \lambda_n F_n$ est une primitive de $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n$.

On peut remplacer « Soient $(f_1, \dots, f_n)$ continues sur I » par « Soient $f_1, \dots, f_n$ de I dans $\mathbb{C}$ admettant une primitive », mais cela compliquerait la rédaction, et en pratique on appliquera ce résultat uniquement à des fonctions continues. C'est la même chose dans tout le paragraphe : on peut remplacer « fonction continue » par « fonction admettant une primitive ».

DÉMONSTRATION. Découle de la linéarité de la dérivation.

Exemple : Si $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynôme, la fonction $Q : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ est une primitive de P.

Remarques :

- Si f_1 et f_2 sont continues de I dans $\mathbb{R}$ et si F_1 et F_2 sont des primitives de f_1 et de f_2 respectivement, alors $F_1 + iF_2$ est une primitive de $f_1 + if_2$. En particulier, si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, primitiver f revient à primitiver $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
- On peut faire également le chemin inverse : si F est une primitive de f, alors $\mathrm{Re}(F)$ est une primitive de $\mathrm{Re}(f)$, et $\mathrm{Im}(F)$ est une primitive de $\mathrm{Im}(f)$. En effet, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} F' &= (\mathrm{Re}(F) + i\,\mathrm{Im}(F))' \\ &= \mathrm{Re}(F)' + i\,\mathrm{Im}(F)' \end{aligned}$$

  et puisque $F' = f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$, par unicité de l'écriture d'un complexe, $\mathrm{Re}(F)' = \mathrm{Re}(f)$ et idem pour la partie imaginaire. Il est donc parfois plus simple (par exemple quand il y a du sinus ou du cosinus, comme lorsqu'on calcule des sommes) de passer par les complexes pour primitiver certaines fonctions. Examinons un exemple.

Exemple : Donner une primitive de $\varphi : x \mapsto e^{2x}\sin(3x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\varphi(x) = \mathrm{Im}(f(x))$ où $f(x) = e^{(2+3i)x}$. Une primitive de f est

$$F : x \mapsto \frac{e^{(2+3i)x}}{2+3i}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{e^{2x} \times e^{3ix}}{2+3i} \\ &= \left(e^{2x} \times (\cos(3x) + i\sin(3x))\right) \times \frac{2-3i}{2^2+3^2} \\ &= \frac{e^{2x}}{13} \times [(2\cos(3x) + 3\sin(3x)) + i(-3\cos(3x) + 2\sin(3x))] \end{aligned}$$

si bien que $\mathrm{Im}(F)$ est une primitive de φ, c'est-à-dire qu'une primitive de φ est

$$x \mapsto \frac{e^{2x} \times (-3\cos(3x) + 2\sin(3x))}{13}$$

On trouve de même une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos(3x)$ en prenant la partie réelle et, plus généralement, une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et de $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ avec a et b réels non nuls.

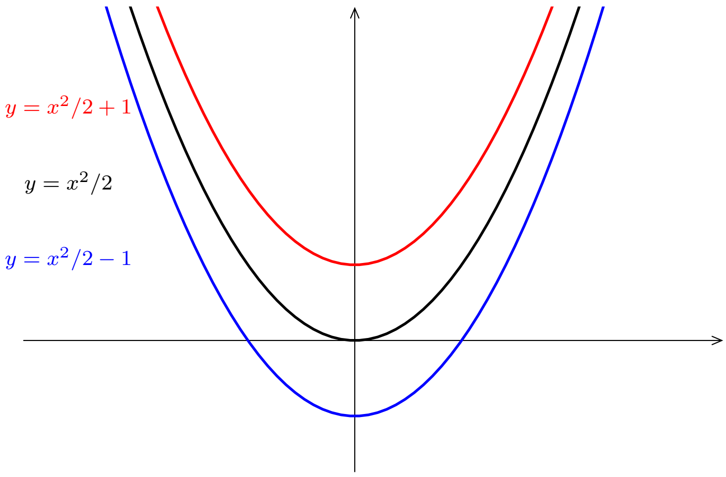
Le cas $a = 0$ ou $b = 0$ étant évident et ne nécessitant pas de passer par les complexes.

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue. Soit F_1 une primitive de f et soit F_2 définie sur I. F_2 est une primitive de f si et seulement si $F_1 - F_2$ est constante. En d'autres termes, l'ensemble des primitives de f est l'ensemble $\{F_1 + \lambda \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. On dit qu'une primitive est définie « à une constante près ».

DÉMONSTRATION.

$$\begin{aligned}
F_2 \text{ est une primitive de } f &\iff F_2 \text{ est dérivable et } F_2{}' = f \\
&\iff F_2 \text{ est dérivable et } F_2{}' = F_1{}' \\
&\iff F_2 \text{ est dérivable et } F_2{}' - F_1{}' = 0 \\
&\iff F_1 - F_2 \text{ est constante sur } I \text{ (on rappelle que } I \text{ est un intervalle)}
\end{aligned}$$

Remarque : Géométriquement, quand on étudie les primitives à valeurs réelles, cela signifie que les graphes des différentes primitives d'une fonction sont obtenus les uns par rapport aux autres par translation verticale. Ci-dessous le graphe de trois primitives de $x \mapsto x$:



Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soient $x_0 \in I, y_0 \in \mathbb{C}$. Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$.

Remarque : Géométriquement (toujours quand on manipule des fonctions à valeurs réelles), cela signifie que par un point du plan (d'abscisse appartenant à I mais d'ordonnée quelconque) passe le graphe d'une et d'une seule primitive de f.

DÉMONSTRATION.
- **Existence :** Soit F_1 une primitive de f. La fonction $F : x \mapsto F_1(x) + y_0 - F_1(x_0)$ convient.
- **Unicité :** Si F et $\tilde{F}$ conviennent alors $F - \tilde{F}$ est constante et nulle en x_0 donc est la fonction nulle.

Remarque : En particulier, deux primitives d'une même fonction qui coïncident en un point sont égales.

Exemple : Si $P : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est une fonction polynôme alors $Q : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0, tandis que $\tilde{Q} : x \mapsto 2022 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui vaut 2022 en 0.

I.2 Lien avec les intégrales

I.2.a Rappels de quelques propriétés

Nous ne donnons pas ici la définition d'une intégrale : nous le ferons au chapitre 22. Nous manipulerons cet objet sans nous intéresser à sa définition précise. En tout cas, précisons juste que la définition d'une intégrale n'est pas l'aire sous la courbe, mais on pourra conserver cette idée en tant qu'**interprétation intuitive**. Elle permet d'avoir une bonne intuition des résultats que l'on veut montrer. Encore une fois, attention : ce n'est pas la définition, ce n'est pas rigoureux et ce ne sera jamais une justification suffisante.

Pourquoi ne garde-t-on pas la définition au programme de terminale ?

- Car elle n'est pas pratique pour travailler (montrer la linéarité, etc.)
- Car il n'est pas évident que l'aire sous la courbe existe ! Certaines parties du plan n'ont pas d'aire (cela peut mener à des paradoxes, type Banach-Tarski).

Théorème (Relation de Chasles). Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soit $(a,b,c) \in I^3$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque :

- Attention, on n'a pas forcément $a < b < c$! Rappelons que, par définition :

$$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- Nous étendrons tous les résultats de ce paragraphe aux fonctions continues par morceaux au chapitre 22. Attention, le théorème fondamental de l'analyse, lui, n'est valable que pour les fonctions continues.

Exemple :

$$\int_2^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soit $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$. Alors

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : En particulier, si f est continue sur $[\,1\,;+\infty\,[$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème. Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ continues et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad \int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

On dit que l'intégrale est linéaire.

Corollaire. Soient $f_1, \dots, f_n$ continues de I dans $\mathbb{C}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^n \lambda_i \int_a^b f_i(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Attention, on n'a pas $\displaystyle\int_a^b f(t) \times g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$!!

I.2.b Le théorème fondamental de l'analyse

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse). Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soit $a \in I$. Alors l'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable et est l'unique primitive de f qui s'annule en a. En particulier, elle est $\mathscr{C}^1$.

Attention, comme dit plus haut, ce théorème (ainsi que le corollaire qui en découle) est faux pour des fonctions continues par morceaux (cf. chapitre 22).

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soit F une primitive de f sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

Remarques :

- Dire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f est un magnifique échec de type : une intégrale est un nombre, pas une fonction !
- Ce résultat est valable pour $a < b, a = b$ ou $a > b$. On a par exemple

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

- Cela ne dépend pas de la primitive choisie. Soit en effet $\tilde{F}$ une autre primitive de f : il existe donc λ tel que $\tilde{F} = F + \lambda$.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \tilde{F}(b) - \lambda - (\tilde{F}(a) - \lambda) \\ &= \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a) \end{aligned}$$

  d'où :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$$

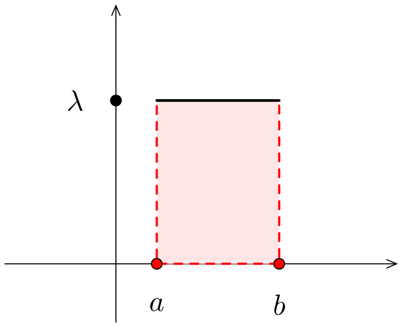
Exemples :

- Si f est constante égale à λ alors, pour tous $(a,b) \in I^2$,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t &= [\lambda t]_a^b \\ &= \lambda(b-a) \end{aligned}$$

  En d'autres termes, la valeur de l'intégrale d'une fonction constante est égale à la valeur de la constante multipliée par la longueur de l'intervalle : direct ! Avec l'interprétation intuitive de l'intégrale comme étant l'aire sous la courbe, on retrouve le fameux :

« aire d'un rectangle = longueur × largeur = $\lambda \times (b-a)$ ».



- $$\begin{aligned}\int_{-1}^{-2} \frac{\mathrm{d}t}{t} &= [\ln(-t)]_{-1}^{-2} \\ &= \ln(2)\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin(t)\,\mathrm{d}t &= [-\cos(t)]_0^{\pi} \\ &= 2\end{aligned}$$

- $$\int_1^1 e^t\,\mathrm{d}t = 0$$

- $$\begin{aligned}\int_2^1 e^{2t}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_2^1 \\ &= \frac{e^2-e^4}{2}\end{aligned}$$

Remarque : La variable est muette, c'est-à-dire que, comme dans les sommes, on peut la changer sans changer la valeur de l'intégrale (à ne pas confondre avec un changement de variable, cf II.3).

Exemple :

$$\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u\,\mathrm{d}u = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

I.3 « Primitive générique »

Remarque : On a vu que, si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue, alors, pour tout $a \in I$, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de a. Or, la plupart du temps, on cherche juste UNE primitive de f (même s'il ne sera pas rare de vouloir aussi calculer une intégrale précise, avec des bornes fixes) et, d'après la relation de Chasles, changer la borne inférieure de l'intégrale ne fait qu'ajouter une constante. Plus précisément, pour tous a, b, x dans I :

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Les primitives d'une fonction étant définies à une constante près, « changer la borne inférieure de l'intégrale ne fait que changer la valeur de la constante » et, encore une fois, celle-ci n'a aucune importance si tout ce qu'on demande est UNE primitive de f. Pour cette raison, on pourra l'omettre en pratique. Plus précisément :

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Sous réserve d'existence, on note $x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ UNE primitive générique de f.

En particulier, si f est continue, une telle primitive existe toujours donc on pourra utiliser cette notation sans se poser de question.

Remarque : Il faut bien comprendre cette notation, et que c'est en fait un abus de notation. Pour faire simple : quand on écrit une égalité du type

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = g(x)$$

cela signifie simplement : g, ou $x \mapsto g(x)$ est UNE primitive de f, ce n'est pas une égalité au sens strict du terme. Par exemple, on peut écrire sans aucun scrupule

$$\begin{aligned}\int^x e^t\,\mathrm{d}t &= e^x - 1\\ &= e^x\end{aligned}$$

Avec des termes savants (cf. chapitre 16) $x \mapsto \int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ représente la classe d'équivalence de toutes les primitives de f.

ce qui ne signifie pas que $0 = -1$! Tout ce qu'on écrit, c'est : « $x \mapsto e^x - 1$ et $x \mapsto e^x$ sont toutes les deux des primitives de l'exponentielle », et comme on cherche UNE primitive, on garde en général la plus simple, c'est-à-dire celle où la constante est nulle. La linéarité de l'intégrale est encore valable avec cette notation (mais la relation de Chasles n'a plus vraiment de sens).

II Méthodes de calcul d'intégrales.

II.1 Bornes variables.

On se donne J un autre intervalle non vide, non réduit à un point.

Théorème. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue et $\alpha, \beta : J \to I$ dérivables. Alors la fonction

$$\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est dérivable sur J, et :

$$\forall x \in J, \qquad \varphi'(x) = \beta'(x) f(\beta(x)) - \alpha'(x) f(\alpha(x))$$

Démonstration. Soit F une primitive de f. Soit $x \in J$.

$$\varphi(x) = F(\beta(x)) - F(\alpha(x))$$

□

ce qui permet de conclure avec le théorème de dérivation d'une composée.

Exemple : La dérivée de $x \mapsto \int_{x^2}^{x^3} e^t\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto 3x^2 e^{x^3} - 2x e^{x^2}$.

Exemple : Soit $T \neq 0$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue T-périodique. Montrons que la fonction $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante, c'est-à-dire que l'intégrale d'une fonction périodique est la même sur tout intervalle de longueur T. φ est dérivable car f est continue et

Grand classique, à l'oral comme à l'écrit !

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 1 \times f(x+T) - 1 \times f(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

car f est T-périodique.

II.2 Intégration par parties

Théorème. Soient u, v de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : On a évidemment

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Morale de l'histoire : on dérive l'une, on intègre l'autre, on met un signe $-$ et on met les deux primitives dans le crochet.

Démonstration. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$, $(uv)'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (uv)'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^b u'(t)v(t) + u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

ce qui permet de conclure.

Remarque : Dans le cas où on ne cherche qu'une primitive, avec la notation du paragraphe I.3, ce résultat devient :

$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples :

- Calculons $I = \displaystyle\int_0^\pi e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t$.

  Notons

$$\begin{aligned} u(t) &= e^t & \rightarrow \quad u'(t) &= e^t \\ v(t) &= \sin(t) & \rightarrow \quad v'(t) &= \cos(t) \end{aligned}$$

  u et v sont $\mathscr{C}^1$: faisons une intégration par parties (IPP).

$$\begin{aligned} I &= \left[e^t \sin(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\pi e^t \sin(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

  Notons

$$\begin{aligned} u(t) &= e^t & \rightarrow \quad u'(t) &= e^t \\ v(t) &= -\cos(t) & \rightarrow \quad v'(t) &= \sin(t) \end{aligned}$$

  u et v sont $\mathscr{C}^1$ $\rightarrow$IPP.

$$\begin{aligned} I &= -\left(\left[-e^t \cos(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi e^t \cos(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= -\left(e^\pi - 1 + I\right) \\ &= -e^\pi + 1 - I \end{aligned}$$

  donc $I = \dfrac{-e^\pi + 1}{2}$.

Il n'est pas rare de devoir faire plusieurs IPP à la suite. Dans ce cas, il faut toujours dériver la même et toujours intégrer la même, sinon on tourne en rond !

Cas de figure fréquent : faire une IPP (ou un changement de variable, voir plus bas), faire apparaître à droite la même intégrale (avec un signe $-$), la mettre à gauche puis diviser par 2.

- Cherchons une primitive du ln (une telle primitive existe car le ln est une fonction continue). Rappelons qu'une primitive générique est $\displaystyle\int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t$. Notons

$$\begin{array}{lcl} u(t)=\ln(t) & \rightarrow & u'(t)=\dfrac{1}{t} \\ v(t)=t & \rightarrow & v'(t)=1 \end{array}$$

  u et v sont $\mathscr{C}^1$ $\rightarrow$IPP.

$$\begin{aligned} \int^x \ln(t)\,\mathrm{d}t &= x\ln(x)-\int^x t\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln(x)-x \end{aligned}$$

  Une primitive du ln est donc $x\mapsto x\ln(x)-x$. Encore une fois, quand on manipule cette notation, on peut enlever les constantes sans aucun état d'âme : les primitives ne sont définies qu'à une constante près !

Remarques :

- Prendre l'habitude de faire une IPP quand il y a du ln ou de l'Arctan dans une intégrale : ces deux fonctions ont le point commun d'être « plus compliquées que leur dérivée ».
- Comme pour le binôme de Newton, quand il y a une seule fonction, on peut faire apparaître 1 et l'intégrer.

Exemple : $I=\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.
Notons

$$\begin{array}{lcl} u(t)=t^2 & \rightarrow & u'(t)=2t \\ v(t)=\sin(t) & \rightarrow & v'(t)=\cos(t) \end{array}$$

u et v sont $\mathscr{C}^1$: faisons une IPP.

$$\begin{aligned} I &= \left[t^2\sin(t)\right]_0^\pi-2\int_0^\pi t\sin(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int_0^\pi e^t\sin(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{array}{lcl} u(t)=t & \rightarrow & u'(t)=1 \\ v(t)=-\cos(t) & \rightarrow & v'(t)=\sin(t) \end{array}$$

u et v sont $\mathscr{C}^1$: IPP.

$$\begin{aligned} I &= -2\left(\left[-t\cos(t)\right]_0^\pi+\int_0^\pi\cos(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Remarque : Comme on vient de le voir, l'IPP est aussi particulièrement utile quand il y a des termes en t^n, puisqu'en « dérivant suffisamment de fois, ils finissent par disparaître ».

Exemple : À l'aide de 3 IPP (ce qu'on voit au premier coup d'oeil puisqu'il y a un t^3), montrer (exo) que

$$\int_0^1 t^3 e^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^2+3}{8}$$

Cas particulier important : Quand une intégrale dépend d'un paramètre, faire une IPP pour faire varier ce paramètre (en dérivant ou en intégrant, on peut en général augmenter ou diminuer ce paramètre) ce qui permet de donner une relation de récurrence entre les différentes intégrales. On donnera ensuite le terme général à l'aide de cette relation de récurrence et du terme initial (ou des termes initiaux quand la formule récurrence va « de 2 en 2 »).

Exemple : Les intégrales de Wallis.

Ultra-méga classique !

Soit $n \geqslant 1$. On note $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$ la n-ième intégrale de Wallis.

On a déjà posé en question de cours à Centrale en concours MP : « Pourquoi les mathématiques ne seraient-elles pas ce qu'elles sont sans les intégrales de Wallis ? » La réponse attendue était : car on les utilise dans la démonstration de la formule de Stirling (cf. chapitre 25).

Le calcul de W_0 et W_1 ne pose pas de difficulté :

$$W_0 = \frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_1 = 1$$

Donnons la valeur de W_n dans le cas général. Pour cela, comme dit plus haut, faisons une IPP pour donner une relation de récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par définition

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin(t) \times \sin^n(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Faisons une intégration par parties, en dérivant le $\sin^n$ et en intégrant le sinus. Cela donne (u et v sont bien $\mathscr{C}^1$) :

$$u(t) = \sin^n(t), u'(t) = n\cos(t)\sin^{n-1}(t) \qquad \text{et} \qquad v(t) = -\cos(t), v'(t) = \sin(t)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \left[-\cos(t)\sin^n(t)\right]_0^{\pi/2} + n\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + n\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= nW_{n-1} - nW_{n+1} \end{aligned}$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N} \qquad W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$. Donnons la valeur explicite des intégrales de Wallis. Puisque la formule de récurrence va « de 2 en 2 », séparons les cas termes pairs/termes impairs. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} \\ &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-3} W_{2n-5} \end{aligned}$$

De proche en proche :

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} \times W_1$$

En d'autres termes, W_{2n+1} est la fraction dont le numérateur est le produit de tous les nombres pairs de 2 à $2n+1$ et le numérateur le produit de tous les nombres impairs (puisque $W_1 = 1$). Bouchons les trous du dénominateur, comme dans le chapitre 3 :

$$\begin{aligned}
W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{2}{1} \times \frac{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2}{2n \times (2n-2) \times \cdots \times 4 \times 2} \\
&= \frac{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times (2n-4)^2 \cdots \times 4^2 \times 2^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^2 \times n^2 \times 2^2 \times (n-1)^2 \times 2^2 \times (n-2)^2 \cdots \times 2^2 \times (2)^2 \times 2^2 \times 1^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} W_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times W_0 \\
&= \frac{(2n)!}{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \cdots \times 4^2 \times 2^2} \times \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{(2n)!\pi}{2^{2n+1}(n!)2}
\end{aligned}$$

Remarquons que les termes d'ordre pair sont irrationnels et les termes d'ordre impair sont rationnels.

Remarque : Parfois, le paramètre est « caché ». En d'autres termes, parfois, plutôt que de calculer une intégrale explicite, il est plus facile de généraliser le problème, c'est-à-dire d'introduire un paramètre, et ensuite de le remplacer par la valeur initiale. L'intérêt est qu'avec un paramètre général, on peut parfois trouver une formule de récurrence, ce qu'on ne peut pas toujours faire (ou en tout cas ce qui saute moins aux yeux) avec un cas particulier.

Exemple : Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$.

Soit $n \geqslant 1$. Notons

$$f_n(x) = \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$$

une primitive générique de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ et on cherche donc f_3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donnons une relation de récurrence entre f_n et f_{n+1}. Notons

$$\begin{aligned}
u(t) &= \frac{1}{(1+t^2)^n} &\to\quad u'(t) &= \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \\
v(t) &= t &\to\quad v'(t) &= 1
\end{aligned}$$

u et v sont $\mathscr{C}^1$: IPP.

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int^x \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int^x \frac{1+t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t - 2n\int^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \\
f_n(x) &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nf_n(x) - 2nf_{n+1}(x)
\end{aligned}
$$

Méthode « du $+1-1$ » : classique ! y penser quand le dénominateur « ressemble » au numérateur !

donc

$$f_{n+1}(x) = \frac{1}{2n} \times \frac{x}{(1+x^2)^n} + \left(\frac{2n-1}{2n}\right) f_n(x)$$

Ainsi :

- $f_1(x) = \mathrm{Arctan}(x)$.
-

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \times f_1(x) \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{x}{1+x^2} + \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2}
\end{aligned}
$$

- Enfin,

$$
\begin{aligned}
f_3(x) &= \frac{1}{4} \times \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} \times f_2(x) \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \times \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \times \mathrm{Arctan}(x)
\end{aligned}
$$

c'est-à-dire qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ est

$$x \mapsto \frac{1}{4} \times \frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8} \times \frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8} \times \mathrm{Arctan}(x)$$

II.3 Changement de variable

Théorème. Soient $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ continue. Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Remarque : Dans le cas où on ne cherche qu'une primitive, avec la notation du paragraphe I.3, ce résultat devient :

$$\int^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Démonstration. Soit

$$F : \left\{ \begin{array}{ccc} \varphi(I) & \to & \mathbb{R} \\ & & \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

Soit

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ & & \\ x & \mapsto & F(\varphi(x)) \end{array} \right.$$

g est $\mathscr{C}^1$ par composition, et si $x \in [\,a\,;b\,]$:

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & \varphi'(x) \times F'(\varphi(x)) \\ & & \\ & = & \varphi'(x) \times f(\varphi(x)) \end{array}$$

Dès lors,

$$\int_a^b g'(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Enfin,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u & = & \displaystyle\int_a^b g'(u)\,\mathrm{d}u \\ & & \\ & = & g(b) - g(a) \\ & & \\ & = & F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ & & \\ & = & \displaystyle\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

□

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,\mathrm{d}t$. Montrer qu'il existe λ tel que $I = \lambda \displaystyle\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ et en déduire I.

Formellement : on aimerait avoir $u = 2t+3$ ie $t = \dfrac{u-3}{2}$. Soit $\varphi : u \mapsto \dfrac{u-3}{2}$. φ est $\mathscr{C}^1$. D'après le théorème :

$$\begin{array}{rcl} I & = & \displaystyle\int_3^9 \frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt{u}} \times \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\ & & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_3^9 \frac{u-3}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ & & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\int_3^9 \sqrt{u} - \frac{3}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \\ & & \\ & = & \displaystyle\frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}u\sqrt{u} - 3 \times 2\sqrt{u}\right]_3^9 \\ & & \\ & = & \sqrt{3} \end{array}$$

C'est la seule fois de l'année qu'on écrira la fonction φ : en pratique, on rédige de façon beaucoup plus simple !

En pratique : $t=\varphi(u)$ donc $\varphi'(u)=\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}$ qu'on réécrit $\mathrm{d}t = \varphi'(u)\,\mathrm{d}u$. Ainsi, dans l'intégrale, on remplace t par $\varphi(u)$ et $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$. Retour au calcul de $I=\displaystyle\int_0^3 \frac{t}{\sqrt{2t+3}}\,\mathrm{d}t$.

- On pose $u=2t+3$.
- $t=\dfrac{u-3}{2}$.
- $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{2}$ (« on dérive et on colle un $\mathrm{d}u$ »).

D'où $I=\displaystyle\int_3^9 \frac{\frac{u-3}{2}}{\sqrt{u}}\times\frac{\mathrm{d}u}{2}$ et on conclut de la même façon.

Il est même écrit dans le programme qu'en pratique, il n'est pas nécessaire de citer les hypothèses...

Il y a quatre étapes :

- Trouver le bon changement de variable.
- Remplacer t (la variable d'intégration) dans l'intégrale.
- Remplacer l'élément différentiel (le $\mathrm{d}t$).
- Remplacer les bornes (comme pour une somme : « quand t vaut ... alors u vaut ... »).

Exemple : Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrons que

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

Comment changer un sinus en cosinus... Méthode classique, à retenir ! Il fallait par exemple s'en servir dans l'épreuve des Mines 2023... qui portait sur les intégrales de Wallis !

ce qui fait qu'on trouve parfois l'autre écriture (celle avec des sinus, équivalente, donc) pour les intégrales de Wallis. Il suffit de poser $u=\pi/2-t, t=\pi/2-u$, $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{\pi/2}^{0}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-\,\mathrm{d}u)\\ &= \int_0^{\pi/2}\cos^n(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Exemple : Calculons $I=\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$. Une IPP pourrait donner le résultat, mais il faudrait décomposer en éléments simples et les calculs sont assez compliqués. Faisons un changement de variable. Les bornes sont inverses l'une de l'autre, on connaît le lien entre $\mathrm{Arctan}(x)$ et $\mathrm{Arctan}(1/x)$ et il y a du $1/x$ (au carré) dans l'intégrale : tout ça pour dire qu'il est légitime de poser $u=1/x$, $x=1/u$, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}u/u^2$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} I &= \int_2^{1/2}(1+u^2)\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{-\,\mathrm{d}u}{u^2}\\ &= \int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

Or, si $u\in[1/2\,;2]$, $u>0$ donc $\mathrm{Arctan}(u)+\mathrm{Arctan}(1/u)=\pi/2$. Dès lors :

$$\begin{aligned} I &= \int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\times\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\,(u)\right]\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\mathrm{d}u - \int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\mathrm{Arctan}\,(u)\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\mathrm{d}u - I\end{aligned}$$

et on en déduit donc que

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4}\int_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{u^2}+1\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{1/2}^{2} \\ &= \frac{\pi}{4}\left(-\frac{1}{2}+2-\left(-2+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Comme ci-dessus (classique !) on arrive à $I = \dots - I$ donc $2I = \dots$ et on trouve I en divisant par 2.

Exemple : $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$. On pose $t = \cos(u)$, $u = \mathrm{Arccos(t)}$ et $\mathrm{d}t = -\sin(u)\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{0}\sqrt{1-\cos^2(u)}\times(-\sin(u))\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin(u)\times\sqrt{\sin^2(u)}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(u) \geqslant 0$ donc

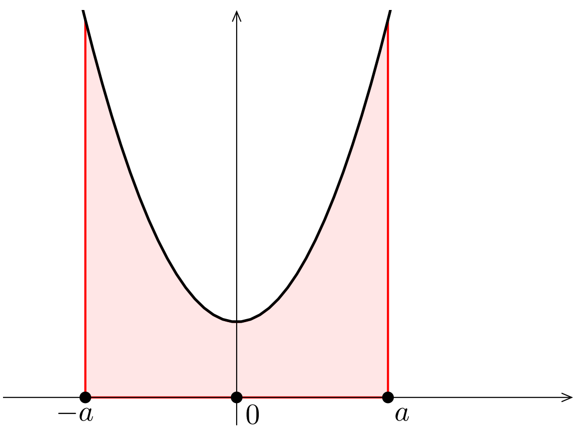
$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/2}^{0}\sin(u)\times\sin(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos(2u)}{2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

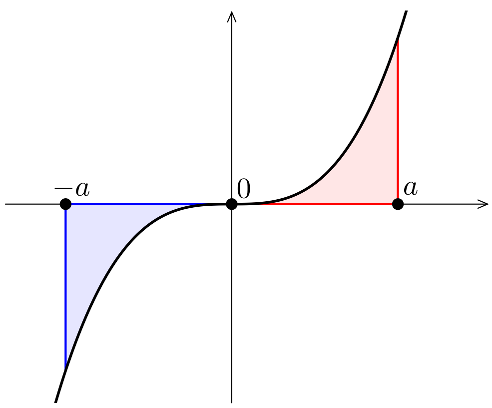
Méthode classique lorsqu'on a une racine carrée du type $\sqrt{a-\mathrm{truc}^2}$: on se ramène avec des factorisation à une racine du type $\sqrt{1-\mathrm{machin}^2}$ et on fait un changement de variable pour faire apparaître $\sqrt{1-\cos^2}$ ou $\sqrt{1-\sin^2}$. Lorsqu'il y a un $+$, c'est plus difficile, on se ramène à un sh mais il y aurait sans doute une indication.

Remarque : Dans le cas (plus rare) où on ne peut pas exprimer t en fonction de u, tant pis... Si le changement de variable est bien fait, tout doit se simplifier, cf TD. Donnons une dernière application (très pratique !) qu'on démontre avec des changements de variables.

Proposition. On suppose que I est symétrique par rapport à 0. Soit $a \in I$.

- Si f est paire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.





DÉMONSTRATION. Dans le cas où f est impaire (raisonnement analogue dans l'autre cas). D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = -t$ dans la deuxième intégrale : $u = -t, t = -u, u \mapsto -u$ est $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{-a} f(-u)(-\mathrm{d}u) \\
&= \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{0} f(-u)\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{0} -f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (f \text{ est impaire}) \\
&= \int_{-a}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{-a}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

Remarque : On a vu dans le chapitre 2 que la dérivée d'une fonction paire (dérivable...) est impaire, que la dérivée d'une fonction impaire est paire, et que la dérivée d'une fonction T-périodique est T-périodique. Examinons à présent les réciproque. Plus précisément, si f est une fonction continue paire/impaire/T-périodique, ses primitives sont-elles forcément impaires/paires/T-périodiques ?

- Une primitive d'une fonction paire n'est pas forcément impaire. Par exemple, $x \mapsto x^3 + 1$ n'est pas impaire (car vaut 1 en 0) mais est une primitive de $x \mapsto 3x^2$ qui est paire.
- Par contre, une primitive d'une fonction impaire est forcément paire. Soit en effet f impaire continue. Soit

$$F : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

  une primitive de f (plus précisément c'est l'unique primitive de f qui s'annule en 0). Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après ce qui précède, $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si bien que

$$\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

  Or, $\displaystyle\int_{-x}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t$ si bien que $\displaystyle\int_{0}^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ c'est-à-dire que F est paire. De plus, si $\tilde{F}$ est une primitive quelconque de f (pas forcément celle qui s'annule en 0), alors il existe λ tel que $\tilde{F} = F + \lambda$. Or, une fonction constante est paire donc $\tilde{F}$ est paire car somme de fonctions paires.
- Enfin, une primitive d'une fonction T-périodique n'est pas forcément T-périodique. Par exemple, $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ n'est pas périodique mais est une primitive de la fonction constante égale à 1 qui est périodique (tout réel étant une période).

Rappelons qu'une fonction impaire **définie en** 0 est nulle en 0 : c'est une condition nécessaire (mais non suffisante évidemment).

III Quelques méthodes pour primitiver des fonctions dans des cas particuliers (fréquents)

III.1 Cas des fonctions du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

Se ramener sur $\mathbb{C}$: cf. paragraphe I.1.

III.2 Cas des fonctions rationnelles

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction rationnelle. On commence par décomposer f en éléments simples. On se ramène donc à une combinaison linéaire de fonctions du type

$$x \mapsto \frac{1}{(x-a)^n} \qquad \text{et} \qquad x \mapsto \frac{ax+b}{(cx^2+dx+e)^n}$$

où $\Delta = d^2 - 4ce < 0$. Il suffit donc de savoir primitiver ce type de fonctions.

- Si $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^n} &= \int^x (t-a)^{-n}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} \\ &= \frac{-1}{n-1} \times \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \end{aligned}$$

- Dans le cas où $n = 1$: $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t-a} = \ln|x-a|$. Cela permet par exemple de donner une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$. En effet, pour tout $x \neq \pm 1$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-x}$$

si bien qu'une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|1-x| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

À retenir ! Il faut souvent primitiver cette fonction ou une qui s'y ramène, et connaître une primitive fait gagner un temps précieux.

- Dans le deuxième cas (fonction rationnelle dont le dénominateur est la puissance d'un trinôme de discriminant strictement négatif), contentons-nous d'illustrer le cas $n = 1$ avec un exemple.

Exemple : Donnons une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{3x+2}{4x^2+2x+1}$.

⋆ **Première étape :** Faire apparaître du u'/u i.e. écrire

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = K\int^x \frac{8t+2}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t + \alpha\int^x \frac{\mathrm{d}t}{4t^2+2t+1}$$

$$\begin{aligned} \int^x f(t)\,\mathrm{d}t &= \int^x \frac{\frac{3}{8}\times 8t+2}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{8}\int^x \frac{8t+\frac{16}{3}}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{8}\int^x \frac{8t+2}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{3}{8}\int^x \frac{10/3}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{8}\int^x \frac{8t+2}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{5}{4}\int^x \frac{1}{4t^2+2t+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{8}\times\ln|4x^2+2x+1| + \frac{5}{4}\int^x \underbrace{\frac{1}{4t^2+2t+1}}_{g(t)}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Il est écrit dans le programme qu'il faut savoir calculer une primitive d'une fonction du type

$$x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$$

La méthode ci-contre doit être maîtrisée sur le bout des doigts !

Il suffit donc de calculer une primitive de g.

⋆ **Deuxième étape :** mettre le dénominateur de g sous forme canonique.

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{4\left(x^2+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{x^2+2\times x\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{1}{\dfrac{3}{16}+\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2}
\end{aligned}$$

⋆ **Troisième étape :** Faire apparaître du $\dfrac{1}{1+u^2}$.

$$\begin{aligned}
\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\dfrac{3}{16}+\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\times\frac{16}{3}\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\dfrac{16}{3}\left(t+\dfrac{1}{4}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\times\int^x \frac{\mathrm{d}t}{1+\left[\dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(t+\dfrac{1}{4}\right)\right]^2}
\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $u=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(t+\dfrac{1}{4}\right)$, $t=\dfrac{\sqrt{3}}{4}u-\dfrac{1}{4}$, $\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}u$. Finalement :

$$\begin{aligned}
\int^x g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{4}{3}\times\int^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+1/4)}\frac{1}{1+u^2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{Arctan}(u)\right]^{\frac{4}{\sqrt{3}}(x+1/4)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\times\ln|4x^2+2x+1|+\frac{5}{4\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right]$$

c'est-à-dire qu'une primitive de $x\mapsto\dfrac{3x+2}{4x^2+2x+1}$ est

$$x\mapsto\frac{3}{8}\times\ln|4x^2+2x+1|+\frac{5}{4\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left[\frac{4}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{4}\right)\right]$$

- Dans le cas où $n \neq 1$ (rare en pratique), on fait comme ci-dessus : on fait apparaître un terme de la forme u'/u^n et un autre de la forme $1/(ax^2+bx+x)^n$ et, comme ci-dessus, avec une forme canonique et un changement de variable, on se ramène à une primitive de $1/(1+u^2)^n$ et on procède alors par récurrence comme dans le paragraphe II.2. Mais bon, en pratique, ce cas arrive rarement...

III.3 Cas des fonctions trigonométriques

On suppose qu'on veut calculer $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonctions rationnelle en sinus ou cosinus. Dans ce cas, les règles de Bioche (HP, mais quand même bien pratiques) permettent de calculer ces intégrales.

C'est-à-dire que f est un quotient de combinaisons linéaires de puissances de sinus et de cosinus, voir l'exemple ci-dessous.

- Si $f(-t)\mathrm{d}(-t) = f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $u=\cos(t)$. Moyen mnémotechnique : $\cos(-t) = \cos(t)$.
- Si $f(\pi-t)\mathrm{d}(\pi-t) = f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $u=\sin(t)$. Moyen mnémotechnique : $\sin(\pi-t) = \sin(t)$.
- Si $f(\pi+t)\mathrm{d}(\pi+t) = f(t)\,\mathrm{d}t$, on pose $u=\tan(t)$. Moyen mnémotechnique : $\tan(\pi+t) = \tan(t)$.
- Dans le cas (rare !) où aucun de ces cas ne se produit, on pose $u = \tan(t/2)$ (et on utilise les formules de trigo exprimant $\sin(t), \cos(t)$ et $\tan(t)$ en fonction de $\tan(t/2)$).

Il existe des règles de Bioche pour les intégrales faisant intervenir des fonctions hyperboliques (par exemple remplacer cos par ch), mais il est plus simple de poser $u=e^x$ en général.

Exemple : Calculons $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos^2(t)}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\pi+t)}{2+\cos^2(\pi+t)} &= \frac{\mathrm{d}t}{2+(-\cos(t))^2}\\ &= \frac{\mathrm{d}t}{2+\cos^2(t)}\end{aligned}$$

On montre facilement qu'aucun des deux autres cas ne se produit.

Faisons donc le changement de variable $u=\tan(t)$. On pose $u=\tan(t), t = \mathrm{Arctan}(u)$ est $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Ainsi, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\cos^2(\mathrm{Arctan}(u))} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$. Or, pour tout $u \in \mathbb{R}$ (cf chapitre 5), $\cos(\mathrm{Arctan}(u)) = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$. D'où :

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1 \frac{1}{2+\dfrac{1}{1+u^2}} \times \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{2+2u^2+1}\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{3+2u^2}\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(u\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)^2}\\ &= \frac{1}{3}\left[\mathrm{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\times\sqrt{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\end{aligned}$$

On peut aussi faire le changement de variable $v = u\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.