Correction du DM n°8

Exercice 1 :

Partie A :

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la formule de récurrence vue en classe, on obtient :

$$(n+1)\mathrm{W}_{n+1} = n\mathrm{W}_{n-1}$$

En multipliant des deux côtés par W_n, il vient $(n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1}) \text{ est constante égale à son premier terme } 1 \times \mathrm{W}_1 \times \mathrm{W}_0 = \frac{\pi}{2}}$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [0\,;\pi/2]$. Etant donné que $0 \leqslant \sin(t) \leqslant 1$, en multipliant ces inégalités par $\sin^n(t)$, positif, donc on ne change pas le sens, on obtient

$$\sin^{n+1}(t) \leqslant \sin^n(t)$$

En intégrant cette inégalité sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, par croissance de l'intégrale, il vient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n : \text{la suite } (\mathrm{W}_n) \text{ est décroissante.}}$$

Soit $n \geqslant 1$. D'après ce qui précède et en utilisant encore une fois la relation de récurrence vue en classe :

$$1 \geqslant \frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n-1}} \geqslant \frac{\mathrm{W}_{n+1}}{\mathrm{W}_{n-1}} = \frac{n}{n+1}$$

Le membre de droite (et celui de gauche...) tendent vers 1 quand n tend vers l'infini. D'après le théorème d'encadrement

$$\boxed{\frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}$$

> La suite (W_n) est décroissante positive donc minorée. Ainsi, elle converge vers un réel L. Cependant on ne peut pas dire que
>
> $$\frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}} = 1$$
>
> car L peut être égal à 0. D'ailleurs, on pourra déduire de la question suivante que L est bien égal à 0.

3 D'après la question 1, pour tout $n \in \mathbb{N}, n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} = \pi/2$. Étant donné qu'une suite constante converge vers sa valeur,

$$n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

D'après la question précédente

$$n{\mathrm{W}_n}^2 = n\mathrm{W}_n\mathrm{W}_{n-1} \times \frac{\mathrm{W}_n}{\mathrm{W}_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Par continuité de la fonction racine carrée :

$$\boxed{\mathrm{W}_n \times \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$$

Partie B :

1 Si $k = 0$, on intègre la fonction constante égale à 1, l'intégrale vaut alors 2π. Supposons à présent k non nul.

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{ik\theta}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

D'où
$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = 2\pi \text{si } k=0 \text{ et } 0 \text{ sinon}}$$

2 Appliquons le binôme de Newton dans l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{2n}{k} e^{ik\theta} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{2n}{k} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{2n} \tbinom{2n}{k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)\theta}\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{I}_n &= 2\pi\tbinom{2n}{n}
\end{aligned}$$

(la troisième ligne est obtenue par linéarité de l'intégrale, et la dernière en utilisant la question précédente : le seul terme non nul de la somme est le n^{e} et il vaut 2π). Finalement :

$$\boxed{\mathrm{I}_n = 2\pi\tbinom{2n}{n}}$$

3 Utilisons la méthode de l'angle-moitié

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right)\right)^{2n} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i\theta/2}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right)^{2n} e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} 2^{2n} \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-in\theta}\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{I}_n &= 2^{2n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

Or, la fonction $\cos^{2n}$ est paire, ce qui implique, d'après le cours, que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta = 2\int_{0}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

En conclusion
$$\boxed{\mathrm{I}_n = 2^{2n+1}\int_{0}^{\pi} \cos^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta}$$

4 Faisons le changement de variable $u=\theta/2, \theta=2u$, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta/2$ (la fonction $u \mapsto 2u$ est $\mathscr{C}^1$) :

$$\mathrm{I}_n = 2^{2n+2}\int_{0}^{\pi/2} \cos^{2n}(u)du$$

En faisant le changement de variable $t=(\pi/2)-u$ (cf l'exercice 23 du poly), on trouve le résultat voulu

$$\boxed{\mathrm{I}_n = 2^{2n+2}\mathrm{W}_{2n}}$$

5 D'après la question précédente et la question 2 :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \qquad \mathrm{W}_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}}$$

Exercice 2 :

Partie I. Définition et prolongement de f.

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. f est définie en x si et seulement si $1-x>0$ et $x \neq 0$ donc si et seulement si $x<1$ et $x \neq 0$. En d'autres termes,

$$\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[.}$$

2 On rappelle que

$$\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$$

Il en découle que
$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{-x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

En d'autres termes $\boxed{\text{En posant } f(0)=-1,\ f \text{ est prolongée en une fonction continue en } 0.}$

3 La fonction f est $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$ car quotient de fonctions $\mathscr{C}^1$, celle au-dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x \in\,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,0\,;1\,[$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{-1}{x(1-x)} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}}$$

Partie II. La fonction Dilogarithme et prolongement en 1.

1 D'après la partie précédente, f est continue sur $]-\infty\,;0\,[$. Par conséquent, si $x \in\,]-\infty\,;0\,[$ alors f est continue sur le segment $[\,0\,;x\,]$ donc $\mathrm{L}(x)$ est bien définie, et puisque $\mathrm{L}(0)$ est l'intégrale de 0 à 0 de $-f$,

$$\boxed{\mathrm{L} \text{ est bien définie et } \mathrm{L}(0)=0.}$$

2 f étant continue, ceci découle du théorème fondamental de l'analyse.

$$\boxed{\mathrm{L} \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ et } \mathrm{L}'=-f \text{ et si } x\neq 0, \mathrm{L}'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.}$$

Donnons le tableau de signes de L' (on rappelle que $f(0)=-1<0$ donc $\mathrm{L}'(0)=1>0$: il n'y a pas de valeur interdite en 0).

	$-\infty$		0		1
$\ln(1-x)$		$+$	0	$-$	$\|$
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{L}'(x)$		$+$	$+$	$+$	$\|$
L			$\nearrow$		

3.(a) Tout d'abord, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(x) - \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) &= -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t \\
\mathrm{L}(x) - \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_x^{1/2} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Faisons une IPP. Posons $u(t)=\ln(1-t), u'(t) = \dfrac{-1}{1-t}, v(t)=\ln(t), v'(t)=\dfrac{1}{t}$. Les fonctions u et v sont $\mathscr{C}^1$: faisons une IPP.

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}(x)-\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) &= [\ln(1-t)\ln(t)]_x^{1/2}+\int_x^{1/2}\frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln\left(\frac{1}{2}\right)\times\ln\left(\frac{1}{2}\right)-\ln(x)\ln(1-x)+\int_x^{1/2}\frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il suffit de se souvenir que $\ln(1/2)=-\ln(2)$ pour conclure.

$$\boxed{\mathrm{L}(x)-\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(x)\ln(1-x)+(\ln(2))^2+\int_x^{1/2}\frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}$$

3.(b) Faisons apparaître un taux d'accroissement :

$$\ln(u)\times\ln(1-u)=-u\ln(u)\times\frac{\ln(1-u)}{-u}$$

D'une part, par croissances comparées, $u\ln(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$. D'autre part, $\dfrac{\ln(1-u)}{-u}\xrightarrow[u\to 0]{}1$. Par produit,

$$\boxed{\ln(u)\times\ln(1-u)\xrightarrow[u\to 0]{}0}$$

En posant $u=1-x\xrightarrow[x\to 1]{}0$ on a $-\ln(x)\times\ln(1-x)=-\ln(1-u)\ln(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$. Par composition de limites,

$$\boxed{-\ln(x)\times\ln(1-x)=\xrightarrow[x\to 1]{}0.}$$

3.(c) Posons $u=1-t\xrightarrow[t\to 1]{}0$. Dès lors, $t=1-u$ et donc

$$g(t)=\frac{\ln(1-u)}{u}\xrightarrow[u\to 0]{}-1$$

Par composition de limites, $g(t)\xrightarrow[t\to 1]{}-1$: g est prolongeable par continuité en 1 en posant $g(1)=-1$.

3.(d) La fonction g étant continue,

$$\boxed{g\text{ admet une primitive sur }]\,0\,;1\,].}$$

Par définition d'une intégrale,

$$\int_{1/2}^{x}\frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{G}(x)-\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}\right)\xrightarrow[x\to 1]{}\mathrm{G}(1)-\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}\right)$$

par continuité de G (G est en effet continue car dérivable car c'est une primitive de g). En d'autres termes,

$$\boxed{\int_{1/2}^{x}\frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t\xrightarrow[x\to 1]{}\mathrm{G}(1)-\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

3.(e) D'après les questions précédentes,

$$\boxed{\mathrm{L}(x)\xrightarrow[x\to 1]{}(\ln(2))^2-\mathrm{G}(1)+\mathrm{G}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Partie III. Équations fonctionnelles vérifiées par L.

1.(a) u est dérivable car somme, produit et composée de fonctions dérivables (L est $\mathscr{C}^1$). Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$.

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\mathrm{L}'(1-x) + \mathrm{L}'(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ &= f(1-x) - f(x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \qquad (\text{car } \mathrm{L}' = -f) \\ &= \frac{\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln(x)}{1-x} \\ u'(x) &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\boxed{u \text{ est constante.}}$

1.(b) La fonction L est continue en 1 donc $\mathrm{L}(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \mathrm{L}(1)$. Elle est aussi continue en 0 donc $\mathrm{L}(1-x) \xrightarrow[x\to 1]{} \mathrm{L}(0) = 0$. De plus, d'après la partie précédente, $\ln(x) \times \ln(1-x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Finalement,

$$\boxed{u(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \mathrm{L}(1)}$$

1.(c) La fonction u étant constante sur $]\,0\,;1\,[$, elle est égale à sa limite en 1, si bien que pour tout $x \in \,]\,0\,;1\,[\,, u(x) = \mathrm{L}(1)$. C'est le résultat voulu.

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;1\,[\,, \qquad \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(1-x) = \mathrm{L}(1) - \ln(x)\ln(1-x)}$$

2.(a) Tout d'abord,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{-x} \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

Faisons le changement de variable $u = -t$ dans l'intégrale de droite. On a $u = -t, t = -u$ et $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$, d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) &= -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{-u}(-\,\mathrm{d}u) \\ &= -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) &= -\int_0^x \frac{\ln(1-t) + \ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

et puisque $\ln(1-t) + \ln(1+t) = \ln((1-t)(1+t)) = \ln(1-t^2)$, on a le résultat voulu.

$$\boxed{\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = -\int_0^x \frac{\ln\left(1-t^2\right)}{t}\,\mathrm{d}t}$$

2.(b) Faisons le changement de variable $t = \sqrt{u}, u = t^2$, $\mathrm{d}t = \,\mathrm{d}u/2\sqrt{u}$ ce qui donne

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) &= -\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{\sqrt{u}} \times \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}} \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{\left(\sqrt{u}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) &= -\frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\ln(1-u)}{u}\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \dfrac{\mathrm{L}\left(x^2\right)}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ On va à présent utiliser les équations fonctionnelles démontrées précédemment. Si on applique la relation d'Euler (question 1.(c)) avec $x = 1/2$, il vient

$$\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

En se souvenant que $\ln(1/2) = -\ln(2)$, on obtient

$$\boxed{\mathrm{L}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(2))^2}{2}}$$

Cherchons à présent la valeur de $\mathrm{L}(-1)$. Le problème est qu'on ne peut pas prendre $x = 1$ dans la formule de duplication (question 2.(b)) car celle-ci est valable uniquement pour $x \in]\,0\,;1\,[$. Prenons alors $x \in]\,0\,;1\,[$. D'après la formule de duplication,

$$\mathrm{L}(x) + \mathrm{L}(-x) = \frac{\mathrm{L}\left(x^2\right)}{2}$$

Faisons tendre x vers 1. La fonction L étant continue, le membre de gauche tend vers $\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(-1)$. De plus, il est égal au membre de droite donc, toujours par continuité de L, il tend (toujours quand $x \to 1$) vers $\mathrm{L}(1)/2$. Par unicité de la limite,

$$\mathrm{L}(1) + \mathrm{L}(-1) = \frac{\mathrm{L}(1)}{2}$$

En conclusion

$$\boxed{\mathrm{L}(-1) = -\frac{\pi^2}{12}}$$

> À titre culturel, il n'y a que 4 autres réels dont on connaisse l'image par la fonction L (5 en comptant 0 car $\mathrm{L}(0) = 0$) :
>
> - $\mathrm{L}\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{15} - \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$
> - $\mathrm{L}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{\pi^2}{10} - \left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$
> - $\mathrm{L}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\pi^2}{15} + \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$
> - $\mathrm{L}\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = -\dfrac{\pi^2}{10} + \dfrac{1}{2}\left(\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right)^2$