Devoir Maison n$^{\text{o}}$ 9

Dans ce devoir, on donnera les solutions réelles.

Exercice 1 - Du classique :

1. Donner l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'équation différentielle $(E_1) : (t^2+1)y' - 2ty = t\ln(t)$ admettant 0 comme limite en 0^+.
2. Résoudre l'équation $(E_2) : y'' - 2y' + 10y = \cos(2t) + (t+1)e^{3t}$.
3. Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2xy = 1$. Le but de cette question est de prouver que (E) admet une unique solution impaire avec une autre méthode que celle utilisée en classe.
   (a) Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$.
   (b) Montrer que la fonction D définie sur $\mathbb{R}$ par $D(x) = e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est solution de (E). En déduire toutes les solutions de (E) et montrer l'existence d'une unique solution impaire.

Exercice 2 - Une équation de Ricatti.

Le but de cet exercice est de résoudre l'équation suivante :

$$(R) : \quad y' + \frac{x^2}{1-x^3}\times y + \frac{1}{1-x^3}\times y^2 = \frac{2x}{1-x^3}$$

1. Montrer que la fonction carré est solution particulière sur $\mathbb{R} - \{1\}$. On la note y_0 dans la suite, et on se donne un intervalle I d'intérieur non vide ne contenant pas 1.
2. Soit y dérivable sur I. On pose $z = y - y_0$. Montrer que y est solution de (R) sur I si et seulement si z est solution sur I d'une équation différentielle homogène (H) (c'est-à-dire sans second membre, mais pas forcément linéaire) que l'on précisera.
3. On admet dans cette question qu'il y a unicité au problème de Cauchy dans la question précédente, c'est-à-dire que si z_1 et z_2 sont solutions de (H) et coïncident en un point, alors elles coïncident là où elles sont définies [1]. Montrer que si z est une solution non nulle de (H) sur I, alors z ne s'annule pas sur I.
4. On se donne dans la suite une fonction z dérivable sur I qui ne s'annule pas, et on pose $w = 1/z$. Montrer que z est solution de (H) si et seulement si w est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on déterminera.
5. Donner les solutions de (R) différentes de la solution particulière y_0.

Problème (facultatif) - Caractérisation des équations linéaires.

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur $I\times\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : z' = f(x,z)$ et on cherche une condition géométrique pour que cette équation soit linéaire, c'est-à-dire pour qu'il existe a, b telles que $f(x,z) = a(x)z + b(x)$. Une fois n'est pas coutume, on notera les inconnues des équations différentielles z au lieu de y, la notation y sera réservée à aux ordonnées dans les coordonnées ou dans les équations de droites.

1. On s'intéresse dans cette question uniquement au cas particulier de l'équation différentielle vérifiée par la fonction tan.
   (a) Expliciter f dans l'équation différentielle vérifiée par la tangente (c'est normal qu'il n'y ait pas de x, c'est ce qu'on appelle une équation différentielle autonome). Plus précisément, on attend une réponse du genre : la tangente est solution de l'équation différentielle ... [2] donc de l'équation différentielle $z' = f(x,z)$ avec :

1. On ne peut pas en effet appliquer le résultat du cours puisque (H) n'est pas linéaire.
2. En n'oubliant pas de noter z l'inconnue de l'équation différentielle.

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, z) & \mapsto & \dots \end{array} \right.$$

Est-ce une équation différentielle linéaire ?

(b) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction tangente en $\frac{\pi}{4}$ (ici, vous avez le droit à la variable y).

(c) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la fonction $\tan_\lambda$ définie (quand c'est possible) par :

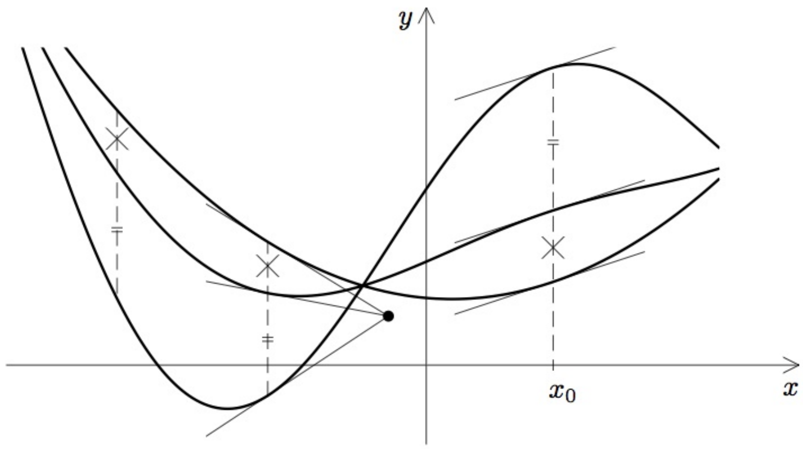
$$\tan_\lambda(x) = \tan(x + \lambda)$$

est solution de la même équation différentielle. On ne demande pas de donner explicitement le domaine de définition de $\tan_\lambda$, qu'on pourra simplement noter D_λ.

(d) Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de $\tan_\lambda$ en $\frac{\pi}{4}$ pour $\lambda = -\frac{\pi}{4}, \lambda = \frac{\pi}{2}$.

(e) Montrer que les trois tangentes, pour respectivement $\lambda = 0, \lambda = -\frac{\pi}{4}, \lambda = \frac{\pi}{2}$ ne sont ni parallèles ni concourantes. Il n'est pas forcément nécessaire de chercher les points d'intersection des droites.

On revient dans la suite au cas général, i.e. à une équation différentielle $(E) : z' = f(x, z)$ sur un intervalle I. Le but de l'exercice est de montrer le résultat suivant : l'équation différentielle (E) est linéaire si et seulement si, pour tout x_0 de I, toutes les tangentes aux solutions de (E) en x_0 sont soit parallèles soit concourantes (voir figure ci-dessous).



2. On se donne dans la suite un réel $x_0 \in I$. Donner une équation de la droite passant par le point (x_0, y_0) de coefficient directeur $f(x_0, z_0)$.
3. On suppose dans cette question que (E) est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe a et b deux fonctions continues telles que, pour tout $(x, z) \in I \times \mathbb{R}$, $f(x, z) = a(x)z + b(x)$.

   (a) Montrer que si $a(x_0) = 0$ alors les tangentes aux courbes représentatives des solutions de (E) au point d'abscisse x_0 sont parallèles.

   (b) Montrer que si $a(x_0) \neq 0$. Justifier que deux solutions distinctes z_1 et z_2 de (E) n'ont pas la même valeur en x_0. En déduire que les tangentes aux courbes de z_1 et z_2 ne sont pas parallèles, puis qu'elles sont concourantes.
4. Réciproquement, on suppose dans cette question que, pour tout $x_0 \in I$, les tangentes aux courbes représentatives des solutions de (E) au point d'abscisse x_0 sont concourantes ou parallèles. On suppose également que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une solution z telle que $z(x_0) = y_0$ (on ne la suppose pas unique a priori, le théorème de Cauchy ne s'appliquant pas ici). On veut donc montrer qu'il existe deux fonctions a et b telles que pour tout $z \in \mathbb{R}$ et tout $x_0 \in I, f(x_0, z) = a(x_0)z + b(x_0)$. Soit donc $x_0 \in I$ quelconque.

   (a) Soit $y_0 \in \mathbb{R}$ et soit z une solution de (E) vérifiant $z(x_0) = y_0$ (une telle fonction existe par hypothèse). Justifier que $f(x_0, y_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de z au point d'abscisse x_0.

   (b) Soient $y_0 \neq y_1$ deux réels. Montrer que la quantité suivante ne dépend ni de y_0 ni de y_1 mais seulement de x_0 :

   $$\frac{f(x_0, y_0) - f(x_0, y_1)}{y_0 - y_1}.$$

   On la note $a(x_0)$.

   (c) Montrer que si $a(x_0) \neq 0$ alors la quantité $f(x_0, y_0) - a(x_0)y_0$ ne dépend pas de y_0.

   (d) Conclure.