Chapitre 20

Fractions rationnelles

On note dans la suite $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Comme dans le chapitre précédent, nous suivons le cadre du programme et nous nous restreignons au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais tous les résultats de ce chapitre sont encore valables en remplaçant $\mathbb{K}$ par un corps quelconque (à part un ou deux, mais nous le dirons alors explicitement)

I Le corps $\mathbb{K}(X)$

I.1 Construction de $\mathbb{K}(X)$ (HP)

Bien que cela soit HP, construisons $\mathbb{K}(X)$ de la même façon qu'on a construit $\mathbb{Q}$ dans le chapitre 16. Nous résumerons dans le paragraphe suivant ce qu'il suffit de retenir.

Lemme. Soit $E = \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$. On définit sur E la relation $\equiv$ par :

$$(P_1, Q_1) \equiv (P_2, Q_2) \iff P_1Q_2 = P_2Q_1$$

La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Démonstration.
- Soit $(P, Q) \in E$. Alors $P \times Q = P \times Q$ donc $(P, Q) \equiv (P, Q)$: $\equiv$ est réflexive.
- Soient (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) deux éléments de E tels que $(P_1, Q_1) \equiv (P_2, Q_2)$. Alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$ donc $P_2Q_1 = P_1Q_2$ donc $(P_2, Q_2) \equiv (P_1, Q_1)$: $\equiv$ est symétrique.
- Soient $(P_1, Q_1), (P_2, Q_2)$ et (P_3, Q_3) trois éléments de E tels que $(P_1, Q_1) \equiv (P_2, Q_2)$ et $(P_2, Q_2) \equiv (P_3, Q_3)$. Alors $P_1Q_2 = P_2Q_1$ donc, en multipliant par Q_3, $P_1Q_2Q_3 = P_2Q_1Q_3$. Or, $P_2Q_3 = P_3Q_2$ donc cette égalité devient $P_1Q_2Q_3 = P_3Q_2Q_1$ donc $Q_2(P_1Q_3 - P_3Q_1) = 0$. Or, $Q_2 \neq 0$ et $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre donc $P_1Q_3 - P_3Q_1 = 0$ c'est-à-dire que $P_1Q_3 = P_3Q_1$. En d'autres termes, $(P_1, Q_1) \equiv (P_3, Q_3)$: $\equiv$ est transitive.

Définition. On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\equiv$. Si $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]^*$, on note sa classe d'équivalence P/Q. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés des fractions rationnelles à coefficients dans K.

Ne pas confondre une fraction rationnelle, de la même façon qu'on ne confond pas un polynôme et une fonction polynomiale, cf. paragraphe II.3.

Proposition/Définition. On définit une addition, notée $+$, et un produit, noté $\times$, sur $\mathbb{K}(X)$, définis par :

$$\forall \left(\frac{A}{B}, \frac{C}{D}\right) \in \mathbb{K}(X)^2, \qquad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD} \qquad \text{et} \qquad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Alors les lois $+$ et $\times$ sont bien définies et munissent $\mathbb{K}(X)$ d'une structure de corps.

On peut de la même façon créer un corps à partir de n'importe quel anneau intègre, et ce corps est appelé le corps des fractions de l'anneau. Ainsi, $\mathbb{K}(X)$ est le corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$, et $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de $\mathbb{Z}$.

Remarque : Avant la démonstration, expliquons encore une fois (cf. chapitre 16) pourquoi les lois $+$ et $\times$ pourraient ne pas être définies. Rappelons que la notation A/B n'est qu'une façon d'écrire la classe d'équivalence d'un couple de polynômes (A, B) avec B non nul. Cependant, il peut y avoir d'autres couples de polynômes dans cette classe d'équivalence, disons un couple $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$. De même, il peut y avoir un autre couple $(\tilde{C}, \tilde{D})$ dans la classe d'équivalence de (C, D), et alors on a $A/B = \tilde{A}/\tilde{B}$ et $C/D = \tilde{C}/\tilde{D}$. Pour que les lois soient bien définies, l'image ne doit pas dépendre du représentant choisi (cf. chapitre 16), il faut donc avoir

$$\frac{AD + BC}{BD} = \frac{\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{B}\tilde{D}} \qquad \text{et} \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{\tilde{A}\tilde{C}}{\tilde{B}\tilde{D}}$$

c'est-à-dire que les couples $(AD+BC, BD)$ et $(\tilde{A}\tilde{D}+\tilde{B}\tilde{C}, \tilde{B}\tilde{D})$ sont équivalents, et idem pour le produit. On voit au moins qu'il y a quelque-chose à montrer.

Démonstration.

- Bonne définition des lois : soient (A, B) et $(\tilde{A}, \tilde{B})$ deux éléments de E équivalents, et soient (C, D) et $(\tilde{C}, \tilde{D})$ deux éléments de E équivalents, c'est-à-dire qu'on a $A\tilde{B} = \tilde{A}B$ et $C\tilde{D} = \tilde{C}D$. Dès lors :

$$\begin{aligned}(AD+BC) \times \tilde{B}\tilde{D} &= A\tilde{B} \times D\tilde{D} + B\tilde{B} \times C\tilde{D} \\ &= \tilde{A}B \times D\tilde{D} + B\tilde{B} \times \tilde{C}D \\ &= BD \times (\tilde{A}\tilde{D} + \tilde{B}\tilde{C})\end{aligned}$$

  c'est-à-dire que les couples $(AD+BC, BD)$ et $(\tilde{A}\tilde{D}+\tilde{B}\tilde{C}, \tilde{B}\tilde{D})$ sont équivalents, et donc que les fractions rationnelles

$$\frac{AD+BC}{BD} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{A}\tilde{D}+\tilde{B}\tilde{C}}{\tilde{B}\tilde{D}} \qquad \square$$

  sont égales : la valeur de la somme ne dépend pas des représentants choisis, la somme est bien définie. De même pour le produit.
- La commutativité et l'associativité découlent de celles de la somme et du produit sur $\mathbb{K}[X]$. Idem pour la distributivité du produit sur la somme.
- Si $A/B \in \mathbb{K}(X)$, $-A/B$ est le symétrique de A/B pour la loi $+$: $\rightsquigarrow$ Exercice.
- $0/1$ est neutre pour l'addition, et $1/1$ est neutre pour le produit.
- Enfin, $A/B = 0/1$ si et seulement si $(A, B) \equiv (0, 1)$ c'est-à-dire si et seulement si $A \times 1 = B \times 0$ i.e. $A = 0$. En d'autres termes, une fraction rationnelle est nulle si et seulement si son numérateur est nul. Si ce n'est pas le cas, alors $A/B \times B/A = 1/1$ donc tout élément non nul i.e. différent du neutre de l'addition admet un inverse : $\mathbb{K}(X)$ est bien un corps.

Proposition (admis). La fonction $\varphi : P \mapsto P/1$ est un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Nous l'admettons car nous avons fait suffisamment de HP comme ça.

Remarque : On peut donc en déduire que φ est un isomorphisme d'anneaux entre $\mathbb{K}[X]$ et son image, donc que $\mathbb{K}(X)$ contient « une copie conforme de $\mathbb{K}[X]$ » qu'on identifie naturellement à $\mathbb{K}[X]$, tout comme on identifie un polynôme P à son image $P/1$. Par conséquent, dans la suite, on pourra se permettre d'écrire que $\mathbb{K}[X]$ est inclus dans $\mathbb{K}(X)$ et que $P/1 = P$. En particulier, $0/1 = 0$ et $1/1 = 1$, c'est-à-dire qu'on peut considérer que 0 est le neutre de l'addition, et 1 celui du produit.

I.2 Et en pratique ?

Comme on l'a dit, la construction ci-dessus est HP et n'est donnée qu'à titre culturel. Elle est cependant nécessaire pour faire les choses proprement : en effet, on a envie de parler du quotient de deux polynômes, mais à présent qu'un polynôme n'est plus une fonction mais une suite presque nulle, comment définir son quotient ? Par exemple, comment définir le quotient $1/X$ c'est-à-dire le quotient $(1, 0, \dots, 0, \dots)/(0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$? On commence à se rendre compte de la nécessité d'une définition rigoureuse.

Cependant, pas de panique : en pratique, il suffit de retenir les points suivants :

- Une fraction rationnelle est un objet qu'on ne cherchera pas à décrire précisément et qu'on écrit sous la forme d'une fraction de polynômes P/Q On travaille également avec la convention que deux fractions rationnelles P_1/Q_1 et P_2/Q_2 sont égales si et seulement si $P_1Q_2 = P_2Q_1$. On peut donc faire des produits en croix avec des fractions rationnelles !
- On peut travailler avec des fractions rationnelles comme avec des fractions classiques : produit en croix (on vient de le voir), somme, produit, quotient, et même simplification par un facteur commun au numérateur et au dénominateur. En effet, Si P, Q, R sont trois polynômes avec Q et R non nuls, alors $P \times QR = Q \times PR$ donc $PR/QR = P/Q$: les deux fractions rationnelles sont bien égales. Par exemple :

$$\frac{X(X+1)}{X^2(X+1)} = \frac{1}{X}$$

- Précisons que tout ce à quoi on peut penser comme analogie avec des fractions classiques est vrai : par exemple, une fraction rationnelle est non nulle si et seulement si son numérateur est non nul. En effet, $A/B = 0/1$ si et seulement si $A \times 1 = B \times 0$ c'est-à-dire si et seulement si $A = 0$.
- ⚠ Attention cependant : un polynôme et une fraction rationnelle ne sont pas des fonctions, parler de domaine de définition ou de valeur interdites n'aurait aucun sens, la notation P/Q n'est qu'une notation pour désigner (la classe d'équivalence de) le couple (P, Q) : il n'y a aucun problème pour parler du couple $(1, X)$, donc il n'y a aucun problème pour parler de la fraction rationnelle $1/X$. Comme dans le chapitre précédent, dire « cherchons quand $X \neq 0$ » ou toute autre ânerie analogue est passible de châtiments corporels !
- Quand on munit $\mathbb{K}(X)$ des lois du paragraphe précédent, on le munit d'une structure de corps (appelé le corps des fractions rationnelles). C'est assez intuitif si on retient qu'on peut travailler comme avec des fractions classiques : si on a une fraction rationnelle non nulle P/Q, en la multipliant par Q/P, on tombe sur $1/1$ qui est le neutre de la multiplication, donc tout élément non nul est inversible.
- C'est tout ce qui manquait à l'anneau $\mathbb{K}[X]$. Tant qu'on en parle, on a envie de dire que $\mathbb{K}[X]$ est inclus dans $\mathbb{K}(X)$ de la même façon que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{Q}$. On a également envie de dire que le neutre de l'addition est 0 et pas $0/1$, et idem pour le neutre de la multiplication, et c'est le cas grâce au dernier résultat du paragraphe précédent.

C'est un objet que l'on peut représenter par un couple de polynômes (P, Q) avec $Q \neq 0$, et on l'écrit sous la forme plus pratique P/Q, avec la convention que deux couples (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) représentent la même fraction rationnelle lorsque $P_1Q_2 = P_2Q_1$. C'est comme pour les rationnels : il y a un rationnel noté $1/2$ qui est unique mais qui est représenté à la fois par les couples $(1, 2)$ et $(2, 4)$. Ce sont deux cas particuliers d'un même objet appelé corps des fractions d'un anneau intègre.

Pour la n-ième fois : inutile de retenir le paragraphe précédent, de toute façon HP.

Morale de l'histoire : on peut travailler avec les fractions rationnelles comme avec des fractions normales, et $\mathbb{K}(X)$ est un corps qui contient $\mathbb{K}[X]$.

Exemples :

- Comme avec des fractions classiques :

$$\begin{aligned} \frac{1-X^2}{2X} \times \left(\frac{1}{1-X} - \frac{1}{1+X}\right) &= \frac{1-X^2}{2X} \times \frac{1+X-1+X}{(1-X)(1+X)} \\ &= \frac{1-X^2}{2X} \times \frac{2X}{1-X^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Si $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité suivante :

$$1 + X + \cdots + X^n = \frac{1-X^{n+1}}{1-X}$$

Comme dit ci-dessus, ce n'est rien d'autre qu'une égalité formelle, elle ne signifie rien d'autre que :

⚠ Il faut simplement faire attention : de la même façon qu'un polynôme n'est pas une fonction, une fraction rationnelle n'est pas une fonction. On peut considérer qu'une fraction rationnelle est un couple de polynômes avec la convention que deux couples (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) représentent la même fraction lorsque $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Cependant, en pratique, on utilisera exclusivement la notation sous forme de fraction et donc on pourra travailler sans se poser de questions, il suffit juste de se souvenir qu'une fraction rationnelle est un « objet formel » et pas une fonction !

$$(1+X+\cdots+X^n)\times(1-X)=(1-X^{n+1})$$

Ne pas chercher de domaine de définition ou de valeur interdite dans l'histoire ! On dispose d'une plus grande liberté avec ces objets formels qu'avec les fonctions associées !

I.3 Représentant irréductible

Proposition/Définition. Soit $R\in\mathbb{K}(X)$. Il existe un couple $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]^*$ de polynômes premiers entre eux tel que $R=\dfrac{P}{Q}$. Cette écriture est unique à une même constante multiplicative non nulle près pour P et Q. Une telle écriture est appelée écriture irréductible de la fraction rationnelle R. De plus, si $R\neq 0$, alors toute écriture de R est de la forme $\dfrac{PT}{QT}$ avec $T\in\mathbb{K}[X]^*$.

Ainsi, si R est une fraction rationnelle, on peut toujours écrire R sous la forme $\dfrac{P}{Q}$ avec P et Q premiers entre eux. Attention, il n'y a pas unicité mais unicité à une constante multiplicative (non nulle) près. Certains ouvrages prennent la convention que P est unitaire (lorsque P n'est pas nul) ce qui assure l'unicité de la représentation irréductible, mais ce n'est pas une convention universelle donc nous ne la prendrons pas dans ce cours.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle effectuée pour les rationnels dans le chapitre 6 : soit $R\in\mathbb{K}(X)$. Il existe donc A et B tels que $R=A/B$. notons $D=A\wedge B$. Il existe donc P et Q premiers entre eux tels que $A=DP$ et $B=DQ$ si bien que

$$R=\frac{DP}{DQ}=\frac{P}{Q}\qquad\square$$

D'où l'existence. Supposons qu'on ait une autre écriture irréductible $R=\tilde{P}/\tilde{Q}$ avec $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ premiers entre eux. Alors $P\tilde{Q}=\tilde{P}Q$ donc Q divise $P\tilde{Q}$ et Q est premier avec P donc, d'après le théorème de Gauß, Q divise $\tilde{Q}$. Par symétrie des rôles, $\tilde{Q}$ divise Q : Q et $\tilde{Q}$ sont associés donc il existe $\lambda\neq 0$ tel que $\tilde{Q}=\lambda Q$. Il en découle que $\lambda PQ=\tilde{P}\times\lambda Q$ et Q est non nul donc régulier si bien que $\lambda P=\tilde{P}$. La dernière partie se montre de la même façon que dans le chapitre 6.

Remarque : Dans la suite, quand on écrira « soit $R=P/Q\in\mathbb{K}(X)$ », il sera sous-entendu que P et Q sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $Q\neq 0$. De plus, quand on écrire que cette écriture est irréductible, cela signifiera que P et Q sont premiers entre eux.

II Extension et généralisation aux fractions rationnelles de quelques notions définies pour les polynômes

II.1 Degré d'une fraction rationnelle

On adjoint à $\mathbb{Z}$ un élément noté $-\infty$ qui n'appartient pas à $\mathbb{Z}$.

On fait comme dans le chapitre précédent, mais on autorise les degrés à être négatifs, même lorsqu'ils ne sont pas égaux à $-\infty$.

Définition. On prolonge la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ en posant :

$$-\infty\leqslant-\infty\qquad\text{et}\qquad\forall x\in\mathbb{Z},\qquad -\infty<x$$

Définition. On prolonge l'addition usuelle de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ en posant :

$$\forall x\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\},\qquad(-\infty)+x=-\infty$$

Comme dans le chapitre précédent, le fait qu'il n'y ait pas $+\infty$ simplifie beaucoup les choses, et en particulier évite les formes indéterminées.

Lemme. Soient (P_1,Q_1) et (P_2,Q_2) deux éléments de $\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}[X]^*$ tels que $P_1Q_2=P_2Q_1$. Alors $\deg(P_1)-\deg(Q_1)=\deg(P_2)-\deg(Q_2)$.

Démonstration. Puisque $P_1Q_2=P_2Q_1$, alors $\deg(P_1)+\deg(Q_2)=\deg(Q_1)+\deg(P_2)$. Or, Q_1 et Q_2 sont non nuls donc leurs degrés sont des entiers naturels si bien qu'on en déduit le résultat voulu.

Définition. Soit $R = P/Q \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de R et on note $\deg(R)$ la quantité $\deg(P) - \deg(Q)$.

Il n'est pas nécessaire que la fraction soit sous forme irréductible.

Remarque : Le lemme ci-dessus nous permet de définir le degré d'une fraction rationnelle puisque cette différence ne dépend pas des deux polynômes A et B tels que $R = A/B$. Tous les couples (A, B) tels que $R = A/B$ donnent la même différence, on peut donc définir le degré de la fraction comme la différence commune du degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

- La fraction nulle a aussi un degré égal à $-\infty$. En effet, $0 = 0/1$ donc $\deg(0) = \deg(0) - \deg(1) = -\infty - 0 = -\infty$. De façon générale, si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P = P/1$ donc le degré de P en tant que fraction rationnelle est égal à $\deg(P) - \deg(1) = \deg(P)$ c'est-à-dire qu'on obtient le même degré pour P, qu'on le considère comme un polynôme ou comme une fraction rationnelle.
- $\deg \dfrac{X^3+X}{X^2-X-1} = 1$
- $\deg \dfrac{X-1}{X^2} = -1$
- Si $R = P/Q \neq 0$, alors $\deg(1/R) = \deg(1) - \deg(R) = -\deg(R)$.

J'ai envie de dire : encore heureux ! Sinon on ne les noterait même pas de la même façon.

Remarque : ⚠ Si $Q \mid P$ et si $P \neq 0$ alors $\deg(Q) \leqslant \deg(P)$ donc $\deg(P/Q) \geqslant 0$ mais la réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce que $\deg(P/Q) \geqslant 0$ que $Q \mid P$! Par exemple, $X^2 - X - 1$ ne divise pas $X^3 + X$ alors que le degré de leur quotient est positif.

Proposition. Soient R_1 et R_2 deux fractions rationnelles. Alors :

$$\deg(R_1 \times R_2) = \deg(R_1) + \deg(R_2) \qquad \text{et} \qquad \deg(R_1 + R_2) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2))$$

Pas de cas d'égalité pour la somme ici.

Démonstration. Notons $R_1 = P_1/Q_1$ et $R_2 = P_2/Q_2$ si bien que $R_1R_1 = P_1P_2/Q_1Q_1$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
\deg(R_1R_2) &= \deg(P_1P_2) - \deg(Q_1Q_2) \\
&= \deg(P_1) - \deg(Q_1) + \deg(P_2) - \deg(Q_2) \\
&= \deg(R_1) + \deg(R_2)
\end{aligned}$$

De plus :

$$R_1 + R_2 = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\deg(R_1 + R_2) &= \deg(P_1Q_2 + P_2Q_1) - \deg(Q_1Q_2) \\
&\leqslant \max(\deg(P_1Q_2), \deg(P_2Q_1)) - \deg(Q_1Q_2) \\
&\leqslant \max(\deg(P_1) + \deg(Q_2), \deg(P_2) + \deg(Q_1)) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2)
\end{aligned}$$

Si le maximum ci-dessus est égal à $\deg(P_1) + \deg(Q_2)$, alors

$$\deg(R_1 + \mathbb{R}_2) \leqslant \deg(P_1) + \deg(Q_2) - \deg(Q_1) - \deg(Q_2) = \deg(P_1) - \deg(Q_1) = \deg(R_1)$$

□

Dans l'autre cas, on trouve $\deg(R_1 + R_2) \leqslant \deg(R_2)$. Dans les deux cas, on a le résultat voulu.

Corollaire. Soit $R \in \mathbb{K}(X)^*$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\deg(R^n) = n \times \deg(R)$.

Si $R = 0$ et $n = 0$, alors tout dépend des conventions. On zappe...

Démonstration. Par récurrence si $n \geqslant 0$, et si $n < 0$, vient du fait qu'en passant à l'inverse, on multiplie le degré par -1 : $\rightsquigarrow$ Exercice.

II.2 Zéros et pôles

Définition. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle sous forme irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $n \geqslant 1$. On dit que :

- α est un zéro de R de multiplicité n si α est racine de P de multiplicité n.
- α est un pôle de R de multiplicité n si α est racine de Q de multiplicité n.

Remarques :

- On définit de même que pour les polynômes la notion de zéro simple, zéro double, zéro multiple et idem pour les pôles. Par convention, on dit que α est un zéro ou un pôle de multiplicité zéro lorsque α n'est pas un zéro ou un pôle de R. On définit de même la notion de zéros ou de pôles comptés avec multiplicité.
- Par convention, on ne parle de racine que pour les polynômes. Pour les fractions rationnelles, on parle plutôt de zéros.
- Si on prend une autre écriture irréductible de R, celle-ci ne diffère que d'une constante non nulle au numérateur et au dénominateur, c'est-à-dire que celle-ci est de la forme $\lambda P/\lambda Q$: λP et P ayant les mêmes racines avec les mêmes multiplicités, et idem pour Q et λQ, prendre une autre écriture irréductible ne change ni les zéros, ni les pôles, ni les multiplicités.
- ⚠ Il est indispensable que la fraction soit sous forme irréductible. En effet, sinon, le fait qu'un élément de $\mathbb{K}$ soit un zéro ou non (respectivement un pôle ou non) peut dépendre de l'écriture de R i.e. des représentants P et Q choisis, sans parler du fait que leur multiplicité peut aussi varier. Par exemple, si on considère la fraction rationnelle (sous forme non irréductible)

  $$\frac{X^2(X-1)^3}{X(X-1)(X-2)}$$

  alors on pourrait être tenté de croire que 0 est un zéro double et que 1 est un zéro triple, et que $0, 1$ et 2 sont des pôles simples, ce qui est faux puisque cette fraction est égale à :

  $$\frac{X(X-1)^2}{X-2}$$

  On en déduit donc que 0 est zéro simple, 1 est zéro double et 2 est un pôle simple.
- Comme on vient de le voir, l'ensemble des zéros et des pôles sont disjoints : en effet, si $R = P/Q$ est sous forme irréductible et s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ qui soit à la fois un zéro et un pôle, alors α est racine de P et de Q donc P et Q sont divisibles par $X - \alpha$ si bien que P et Q ne sont pas premiers entre eux ce qui est absurde car l'écriture est irréductible.
- Un polynôme non nul admettant un nombre fini de racines, une fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles, et une fraction rationnelle admet un nombre infini de zéros si et seulement si c'est la fraction nulle.
- ⚠ Attention, une fraction rationnelle peut admettre un nombre de zéros strictement supérieur à son degré sans être la fraction nulle ! Par exemple, la fraction rationnelle

  $$\frac{X(X-1)^2}{(X-2)^3}$$

est de degré 0 mais admet trois zéros comptés avec multiplicité (ainsi que trois pôles). On peut se dire que le degré est égal au nombre de zéros moins le nombre de pôles, mais c'est valable seulement lorsque P et Q sont écrits sous forme scindée. Cela n'est pas toujours possible, cela dépend de $\mathbb{K}$, on ne donnera donc pas un résultat général reliant degré et nombre de zéros ou de pôles. Retenez juste que le nombre de zéros n'est pas forcément inférieur au degré pour une fraction rationnelle.

II.3 Fonction rationnelle

Définition. Soit $R = P/Q$ une fraction rationnelle sous forme irréductible. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les pôles éventuels de R. On définit la fonction rationnelle associée $\tilde{R}$ par :

$$\tilde{R} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}\backslash\{\alpha_1; \dots; \alpha_n\} & \to & \mathbb{K} \\ & & \\ x & \mapsto & \dfrac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)} \end{array} \right.$$

où $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont les fonctions polynomiales associées respectivement à P et Q.

Remarques :

- En d'autres termes, la fonction rationnelle associée est définie en tout élément de $\mathbb{K}$ qui n'est pas un pôle c'est-à-dire qui n'est pas racine du dénominateur.
- Là aussi, il est indispensable d'écrire R sous forme irréductible pour obtenir le domaine de définition le plus grand possible. Sinon, on crée des pôles i.e. des valeurs interdites artificielles. Il faut donc simplifier avant d'évaluer. C'est plus naturel qu'il n'y paraît : qui oserait sérieusement dire (à part une calculatrice) que la fonction rationnelle associée à X^2/X n'est pas définie en 0 ? En effet, on commence par écrire que $X^2/X = X$ donc que la fonction rationnelle associée est définie sur $\mathbb{K}$ tout entier.
- Attention, comme on l'a dit plus haut, cela n'a aucun sens de parler de domaine de définition ou de valeur interdite pour une fraction rationnelle, on ne le fait que pour les fonctions rationnelles associées. Cela n'a aucun sens de parler de valeur interdite pour $R = (X-1)/(X-2)$, mais cela a du sens de dire que 2 est valeur interdite de la fonction rationnelle associée.
- De la même façon qu'on ne confondra pas polynôme et fonction polynomiale associée, on ne confondra pas fraction rationnelle et fonction rationnelle associée. Cependant, de même que dans le chapitre précédent, on pourra les noter de façon identique par souci de simplicité. Par exemple, on pourra définir la fraction rationnelle $R = (X-1)/(X-2)$ et dire que $R(1) = 0$ (et non pas écrire $\tilde{R}(1)$).
- Attention, ceci n'est qu'une simplification d'écriture, une fraction rationnelle n'est pas une fonction, même si on pourra parfois identifier fraction rationnelle et fonction rationnelle associée, mais cela n'est vrai que parce que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis. Sur un corps quelconque, comme pour les polynômes, s'il n'est pas infini, ce n'est pas possible (cf. chapitre 19).

III Décomposition en éléments simples

III.1 Partie entière

Proposition/Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(F - E) < 0$. Le polynôme E est appelé la partie entière de la fraction rationnelle F.

Il n'y a pas de notations usuelle pour cette partie entière, et certainement pas $\lfloor F \rfloor$. De toute façon (voir ci-dessous), la partie entière n'est rien d'autre que le quotient du numérateur par le dénominateur.

DÉMONSTRATION.

- **Existence :** notons $F = A/B$ (attention, si on note $F = P/Q$, Q ne peut pas également désigner le quotient, et si on note la fraction rationnelle R, R ne peut pas désigner le reste). D'après le théorème de division euclidienne (qu'on peut appliquer car $B \neq 0$), il existe Q et R (uniques mais cela ne servira pas ici) tels que $A = BQ+R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Dès lors : $F - Q = R/B$ si bien que $\deg(F-Q) = \deg(R) - \deg(B) < 0$: Q convient.
- **Unicité :** Soient E_1 et E_2 deux polynômes qui conviennent. Alors :

$$\deg(E_1 - E_2) = \deg((E_1 - F) + (F - E_2)) \leqslant \max(\deg(F - E_1), \deg(F - E_2)) \qquad \square$$

Le degré d'une somme de fractions rationnelles est inférieur ou égal au max des degrés, et $\deg(E_1 - F) = \deg(F - E_1)$.

Or, les deux degrés $\deg(F - E_1)$ et $\deg(F - E_2)$ sont strictement négatifs donc leur maximum l'est aussi : il en découle que $\deg(E_1 - E_2) < 0$. Or, E_1 et E_2 sont des polynômes donc $E_1 - E_2$ également, et le seul polynôme ayant un degré strictement négatif est le polynôme nul, si bien que $E_1 - E_2 = 0$ donc $E_1 = E_2$.

Remarques :

- On a donc montré que la partie entière d'une fraction rationnelle n'est rien d'autre que le quotient dans la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
- Attention, la partie entière est, par définition, un polynôme ! Il ne suffit pas d'avoir une fraction rationnelle de degré positif.
- Lorsqu'il est positif ou nul, le degré d'une fraction rationnelle est égal au degré de sa partie entière. En effet, si on reprend les notations ci-dessus, $\deg(F) = \deg(A) - \deg(B)$ et on sait que $\deg(R) < \deg(B)$. Dès lors, si $\deg(F) \geqslant 0$, alors $\deg(A) \geqslant \deg(B)$ donc $Q \neq 0$ (car sinon $A = R$ ce qui est impossible compte tenu des degrés). On en déduit que $\deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) > \deg(R)$ donc $\deg(A) = \deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q)$ si bien que $\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B) = \deg(F)$. Enfin, lorsque le degré d'une fraction rationnelle est strictement négatif, alors sa partie entière est nulle. En effet, 0 convient (i.e. vérifie $\deg(F - E) < 0$) et par unicité on a le résultat.
- Bon, pour faire simple : « fraction rationnelle = polynôme + truc de degré strictement négatif ».

Exemple : On a :

$$\frac{X(X-1)^2}{X-2} = X^2 + 1 + \underbrace{\frac{2}{X-2}}_{\text{de degré } -1 < 0}$$

c'est-à-dire que la partie entière de $\dfrac{X(X-1)^2}{X-2}$ est $X^2 + 1$.

III.2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

On suppose donc dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $F = A/B$ une fraction rationnelle irréductible, et soit E la partie entière de F. Notons B sous sa forme factorisée, c'est-à-dire :

$$B = a_n(X - z_1)^{m_1} \times \cdots \times (X - z_q)^{m_q}$$

Théorème (admis). Il existe des complexes $a_{1,1}, \dots, a_{1,m_1}, \dots, a_{q,1}, \dots, a_{q,m_q}$ uniques tels que :

On peut prouver ce théorème avec le théorème de Gauß et le théorème de Bézout, mais la démonstration est HP et ne nous sera pas utile en pratique.

$$
\begin{aligned}
F \quad = \quad E \qquad & + \frac{a_{1,1}}{X-z_1} + \frac{a_{1,2}}{(X-z_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(X-z_1)^{m_1}} \\
& + \frac{a_{2,1}}{X-z_2} + \frac{a_{2,2}}{(X-z_2)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_2}}{(X-z_2)^{m_2}} \\
& + \cdots + \frac{a_{q,1}}{X-z_q} + \frac{a_{q,2}}{(X-z_q)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_q}}{(X-z_q)^{m_q}}
\end{aligned}
$$

III.3 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

On suppose donc dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit $F = A/B$ une fraction rationnelle irréductible, et soit E la partie entière de F. Notons B sous sa forme factorisée, c'est-à-dire :

$$B = a_n(X-x_1)^{m_1} \times \cdots \times (X-x_r)^{m_r} \times {P_1}^{n_1} \times \cdots \times {P_s}^{n_s}$$

où $x_1, \dots, x_r$ sont des réels distincts, $P_1, \dots, P_s$ sont des polynômes distincts de degré 2 de discriminant strictement négatif, et $m_1, \dots, m_r, n_1, \dots, n_s$ sont des entiers naturels non nuls.

Théorème. Il existe des réels $a_{1,1}, \dots, a_{r,m_r}, b_{1,1}, c_{1,1}, \dots, b_{s,n_s}, c_{s,n_s}$ uniques tels que :

$$
\begin{aligned}
F \quad = \quad & E + \frac{a_{1,1}}{X-x_1} + \frac{a_{1,2}}{(X-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(X-x_1)^{m_1}} \\
& + \cdots + \frac{a_{r,1}}{X-x_r} + \frac{a_{r,2}}{(X-x_r)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_r}}{(X-x_r)^{m_r}} \\
& + \frac{b_{1,1}X + c_{1,1}}{P_1} + \frac{b_{1,2}X + c_{1,2}}{{P_1}^2} + \cdots + \frac{b_{1,n_1}X + c_{1,n_1}}{{P_1}^{n_1}} \\
& + \cdots + \frac{b_{s,1}X + c_{s,1}}{P_s} + \frac{b_{s,2}X + c_{s,2}}{{P_s}^2} + \cdots + \frac{b_{s,n_s}X + c_{s,n_s}}{{P_s}^{n_s}}
\end{aligned}
$$

Remarque : Attention, que ce soit sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, à ne pas oublier la partie entière/le quotient de la division euclidienne de A par B, et il ne faut pas non plus oublier que ce résultat ne s'applique qu'aux fractions rationnelles écrites sous forme irréductible.

III.4 Bon... Qu'est-ce qui change par rapport au chapitre 9 ?

Pas grand chose en fait, si ce n'est que les égalités des deux paragraphes précédents sont des égalités entre fractions rationnelles et non pas entre fonctions. On pourra évidemment se ramener à des fonctions rationnelles pour appliquer les méthodes vues au chapitre 9 (par exemple pour utiliser les limites en $\pm\infty$ ou la parité) mais un des avantages de l'écriture avec des fractions rationnelles plutôt qu'avec des fonctions rationnelles est qu'elle fait disparaître toute notion de valeur interdite.

En effet, pour trouver un coefficient, on multipliait par un terme du type $(x-\alpha)^n$ et on faisait tendre x vers α : on ne pouvait pas prendre $x = \alpha$ car α était une valeur interdite. Ce problème disparaît avec des fractions rationnelles !

Mais, en gros, on pourra continuer à travailler comme avant quand on manipulera des fonctions, par exemple pour calculer des primitives.

Exemple : Décomposer $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)}$ en éléments simples.

D'après ce qui précède, il existe a et b réels (les coefficients de F sont réels) uniques tels que :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-2}$$

En multipliant par $X-1$, il vient :

$$\frac{X}{X-2} = a + (X-1) \times \frac{b}{X-2}$$

Ce qui change par rapport au chapitre 9 est que 1 n'est pas pôle des deux fractions rationnelles ci-dessus, donc on peut les évaluer en 1 ce qui simplifie un peu la rédaction car il n'est pas nécessaire d'effectuer un passage à la limite. En évaluant en 1, on trouve que $a = -1$. De même on trouve que $b = 2$ c'est-à-dire que :

$$\frac{X}{(X-1)(X-2)} = \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X-1}$$

Comme dit dans le chapitre 19, interdit d'écrire « Prenons $X = 1$ » ou toute horreur du même genre !

Remarque : Ce qui change également par rapport au chapitre 9 est qu'on dispose de méthodes plus élaborées pour mettre B sous forme factorisée grâce au chapitre précédent. Le principe est le même, mais les exercices seront moins automatiques puisqu'il faudra commencer par écrire B sous forme factorisée (cela dépendra donc de si on se place sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$).

III.5 Deux cas particuliers importants

Proposition. Soit $F = A/B$ une fraction rationnelle irréductible. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle **simple** de F. Alors le coefficient de $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de F est $A(\alpha)/B'(\alpha)$.

Démonstration. Puisque α est pôle simple de F, α est racine simple de B donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = (X-\alpha) \times Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$. Dès lors, $B' = Q + (X-\alpha)Q'$ si bien que $B'(\alpha) = Q(\alpha)$. De plus, la décomposition de F en éléments simples s'écrit sous la forme

$$F = \frac{a}{X-\alpha} + R$$

avec R une fraction rationnelle n'admettant pas α comme pôle.
En multipliant par $X - \alpha$, il vient :

$$\frac{A}{Q} = a + R \times (X-\alpha)$$

□

et en évaluant en α (qui n'est plus un pôle) on obtient $a = A(\alpha)/Q(\alpha) = A(\alpha)/B'(\alpha)$.

Remarque : On peut toujours utiliser la méthode vue en exemple au paragraphe précédent, ou les méthodes vues au chapitre 9. Cette formule est surtout utile pour gagner du temps dans le cas d'un polynôme de très grand degré pour lequel les calculs seraient fastidieux.

Exemple : Décomposons en éléments simples (sur $\mathbb{C}$) la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{X^n - 1}$.

Puisque $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$, il existe $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ uniques tels que :

$$\frac{1}{X^n - 1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha_k}{X - e^{2ik\pi/n}}$$

La méthode habituelle serait fastidieuse (essayez !). Appliquons ce qui précède : soit $k \in [\![0 \,;\, n-1]\!]$. $e^{2ik\pi/n}$ étant un pôle simple, si on note $A = 1$ et $B = X^n - 1$,

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{A\left(e^{2ik\pi/n}\right)}{B'\left(e^{2ik\pi/n}\right)} \\ &= \frac{1}{n\left(e^{2ik\pi/n}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

et puisque $\left(e^{2ik\pi/n}\right)^n = 1$, on en déduit que $e^{2ik\pi/n} = 1/\left(e^{2ik\pi/n}\right)^{n-1}$ si bien que :

$$\alpha_k = \frac{e^{2ik\pi/n}}{n}$$

Proposition. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul scindé, qu'on écrit sous la forme $P = a_n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (X-\alpha_k)^{n_k}$. Alors la décomposition de P'/P en éléments simples est :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n_k}{X-\alpha_k}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors le fait que P soit scindé est automatique et donc la proposition ci-contre est toujours vérifiée. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si P n'est pas scindé, la formule ci-contre n'est plus valide. Il est encore possible de donner la décomposition de P'/P, mais celle-ci sert moins souvent et il est plus rentable de retenir la marche à suivre pour la retrouver le cas échéant que de retenir une formule compliquée.

Démonstration. Comme dans le chapitre 3, mais il est inutile d'éviter les valeurs interdites puisque nous manipulons des objets formels, et il est même inutile de justifier la dérivabilité puisque nous manipulons des polynômes et non pas des fonctions polynomiales (et qu'on peut toujours définir la dérivée d'un polynôme, même lorsqu'on ne travaille pas sur $\mathbb{R}$, cf. chapitre précédent).

$$\begin{aligned}P' &= a_n \times n_1(X-a_1)^{n_1-1}(X-a_2)^{n_2}\cdots(X-a_p)^{n_p} \\ &\quad + a_n(X-a_1)^{n_1} \times n_2(X-a_2)^{n_2-1}(X-a_3)^{n_3}\cdots(X-a_p)^{n_p} \\ &\quad + \cdots + a_n(X-a_1)^{n_1}(X-a_2)^{n_2}\cdots(X-a_{p-1})^{n_{p-1}} \times n_p(X-a_p)^{n_p} \\ &= a_n \sum_{i=1}^{p} n_i(X-a_i)^{n_i-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(X-a_j)^{n_j}\right)\end{aligned}$$

En particulier :

$$\frac{P'}{P} = \frac{a_n \displaystyle\sum_{i=1}^{p} n_i(X-a_i)^{n_i-1} \times \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(X-a_j)^{n_j}}{a_n \displaystyle\prod_{j=1}^{p}(X-a_j)^{n_j}}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{P'}{P} &= \sum_{i=1}^{p} n_i(X-a_i)^{n_i-1} \times \frac{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p}(X-a_j)^{n_j}}{\displaystyle\prod_{j=1}^{p}(X-a_j)^{n_j}} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i(X-a_i)^{n_i-1}}{(X-a_i)^{n_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{p} \frac{n_i}{X-a_i}\end{aligned}$$

□

Par unicité de la décomposition en éléments simples, on a le résultat.