Correction du DM n°1

Problème :

Partie I. Préliminaires

1

$$\boxed{F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55}$$

2.(a) Démontrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, on note

$$H_n : \text{« } \sum_{k=1}^{n} {F_k}^2 = F_n F_{n+1} \text{ »}$$

et $S_n = \sum_{k=1}^{n} {F_k}^2$.

- D'une part $S_1 = {F_1}^2 = 1$ et d'autre part $F_1F_2 = 1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} {F_k}^2 \\ &= S_n + {F_{n+1}}^2 \\ &= F_n F_{n+1} + {F_{n+1}}^2 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1}) \\ S_{n+1} &= F_{n+1} F_{n+2} \end{aligned}$$

car $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ par définition de la suite (F_n). Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} {F_k}^2 = F_n F_{n+1}}$$

2.(b) Démontrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geqslant 0$, on note

$$H_n : \text{« } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ »}$$

et $S_n = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1}$.

- D'une part $S_0 = F_1 = 1$ et d'autre part $F_2 = 1$ donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} \\ &= S_n + F_{2n+3} \\ &= F_{2n+2} + F_{2n+3} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= F_{2n+4} \\ S_{n+1} &= F_{2(n+1)+2} \end{aligned}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$:

$$\boxed{\forall n \geqslant 0 \qquad \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}}$$

2.(c) Démontrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, on note

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{F}_n{}^2 - \mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_{n+1} = (-1)^{n+1} \text{ »}$$

- Pour $n = 1$, d'une part $\mathrm{F}_1{}^2 - \mathrm{F}_0\mathrm{F}_2 = 1$ et d'autre part $(-1)^{1+1} = 1$ donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{n+1}{}^2 - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+2} &= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 - \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_{n+1} + \mathrm{F}_n) \\
&= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n{}^2 \\
&= \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n) - \mathrm{F}_n{}^2 \\
&= \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n-1} - \mathrm{F}_n{}^2 && \text{(car } \mathrm{F}_{n+1} - \mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1}\text{)} \\
&= -(-1)^{n+1} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\
\mathrm{F}_{n+1}{}^2 - \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+2} &= (-1)^{n+2}
\end{aligned}$$

  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{F}_n{}^2 - \mathrm{F}_{n-1}\mathrm{F}_{n+1} = (-1)^{n+1}}$$

2.(d) Démontrons le résultat par récurrence.

- Si $n \geqslant 1$, on note

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{F}_{2n} = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_{2n+1} = \mathrm{F}_n{}^2 + \mathrm{F}_{n+1}{}^2 \text{ »}$$

- Pour $n = 1$, d'une part $\mathrm{F}_2 = 1$, d'autre part $\mathrm{F}_1(\mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_0) = 1$ d'où $\mathrm{F}_2 = \mathrm{F}_1(\mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_0)$. De plus, on a également $\mathrm{F}_3 = 2$ et $\mathrm{F}_1{}^2 + \mathrm{F}_2{}^2 = 2$. En d'autres termes, H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{2n+2} &= \mathrm{F}_{2n} + \mathrm{F}_{2n+1} \\
&= \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n+1}) + \mathrm{F}_n{}^2 + \mathrm{F}_{n+1}{}^2 && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}) + \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_n) \\
&= \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n+2} + \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+1} \\
\mathrm{F}_{2n+2} &= \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+2})
\end{aligned}$$

  Ensuite

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{2n+3} &= \mathrm{F}_{2n+1} + \mathrm{F}_{2n+2} \\
&= \mathrm{F}_n{}^2 + \mathrm{F}_{n+1}{}^2 + \mathrm{F}_{n+1}(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+2}) \\
&\quad \text{(par hypothèse de récurrence pour } \mathrm{F}_{2n+1}\text{, et d'après ce qui précède pour } \mathrm{F}_{2n+2}\text{)} \\
&= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 + \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}) + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n+2} \\
&= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 + \mathrm{F}_n\mathrm{F}_{n+2} + \mathrm{F}_{n+1}\mathrm{F}_{n+2} \\
&= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 + \mathrm{F}_{n+2}(\mathrm{F}_n + \mathrm{F}_{n+1}) \\
\mathrm{F}_{2n+3} &= \mathrm{F}_{n+1}{}^2 + \mathrm{F}_{n+2}{}^2
\end{aligned}$$

  Ainsi, H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{F}_{2n} = \mathrm{F}_n(\mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_{2n+1} = \mathrm{F}_n{}^2 + \mathrm{F}_{n+1}{}^2}$$

3 Démontrons par récurrence que la suite (F_n) est croissante, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{F}_{n+1} \geqslant \mathrm{F}_n$.

- Si $n \geqslant 0$, on note

$$\mathrm{H}_n : \text{« } \mathrm{F}_{n+1} \geqslant \mathrm{F}_n \text{ »}$$

> Écrire H_n : « La suite $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante » n'aurait aucun sens ! L'hypothèse H_n serait en effet indépendante de n ! En effet, dans l'écriture $(\mathrm{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'indice n est muet. On peut alors écrire H_n : « La suite $(\mathrm{F}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante » et on voit mieux alors que l'hypothèse est indépendante de n.

- On a $F_1 = 1$ et $F_0 = 0$ donc H_0 est vraie. De plus, $F_2 = 1$ et $F_1 = 1$ donc H_1 est aussi vraie.

> On va effectuer une récurrence double, comme en classe, il faut donc montrer l'initialisation pour au moins deux valeurs de n.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$F_{n+1} \geqslant F_n \qquad \text{et} \qquad F_n \geqslant F_{n-1}$$

Par somme $$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \geqslant F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$$

Ainsi, H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{La suite } (F_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

> On aurait pu également utiliser le fait que la suite (F_n) est positive (qu'on démontre aussi par récurrence double, cf cours) ce qui fait que pour tout $n \geqslant 1, F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \geqslant 0$ (mais il ne faut alors pas oublier de vérifier que $F_{n+1} - F_n \geqslant 0$ aussi pour $n = 0$).

Démontrons la minoration demandée par récurrence.

- Si $n \geqslant 0$, on note

$$H_n : \text{« } F_n \geqslant n - 1 \text{ »}$$

- On a $F_0 = 0 \geqslant -1$ et $F_1 = 1 \geqslant 0$ donc H_0 et H_1 sont vraies. Cette double initialisation est suffisante pour effectuer une récurrence double, mais ici on va avoir besoin (voir plus loin) de H_2 et de H_3. Or, $F_2 = 1 \geqslant 2-1$ et $F_3 = 2 \geqslant 3-1$ donc H_2 et H_3 sont vraies.
- Soit $n \geqslant 3$. Supposons H_n et H_{n-1} vraies et montrons que H_{n+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$F_n \geqslant n - 1 \qquad \text{et} \qquad F_{n-1} \geqslant n - 2$$

Par somme $$F_{n+1} = F_{n+1} + F_n \geqslant n - 1 + n - 2 = 2n - 3$$

Or, on cherche à montrer que $F_{n+1} \geqslant n$. Il <u>suffit</u> donc d'avoir $2n - 3 \geqslant n$ pour conclure, et c'est le cas puisque $n \geqslant 3$. En d'autres termes, H_{n+1} est vraie.

> C'est à ce moment qu'on se rend compte qu'il faut avoir $n \geqslant 3$. Si on a montré l'initialisation uniquement pour $n = 0$ et $n = 1$ et si on a supposé uniquement $n \geqslant 1$ dans l'hérédité, on revient sur ses pas, on démontre que H_2 et H_3 sont vraies et on suppose ensuite que $n \geqslant 3$ dans l'hérédité.

- D'après le principe de principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \geqslant 0$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad F_n \geqslant n - 1}$$

Enfin, $n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Partie II. Représentation de Zeckendorff

$\boxed{1}$

$$\left\{\begin{array}{l} 37 = 34 + 3 = v_7 + v_2 \\ 37 = 34 + 2 + 1 = v_7 + v_1 + v_0 \\ 37 = 21 + 13 + 3 = v_6 + v_5 + v_2 \\ 37 = 21 + 13 + 2 + 1 = v_6 + v_5 + v_1 + v_0 \\ 37 = 21 + 8 + 5 + 3 = v_6 + v_4 + v_3 + v_2 \\ 37 = 21 + 8 + 5 + 2 + 1 = v_6 + v_4 + v_3 + v_1 + v_0 \end{array}\right.$$

et seule la première est une Z-représentation.

$\boxed{2}$ Par récurrence sur p.

- Si $p \geqslant 1$, notons H_p : « pour tous $u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_p$ entiers non deux à deux consécutifs, $v_{u_p} + \cdots + v_{u_1} < v_{u_p+1}$ ».

> Il est impératif de définir les u_i dans H_p ! Définir H_p par : « $v_{u_p} + \cdots + v_{u_1} < v_{u_p+1}$ » ne suffit pas : qui sont les u_i ? Et pour l'hérédité, que sera H_{p+1} ?

- Soit u_1 un entier naturel. La suite (v_n) étant strictement croissante (on prouve par récurrence immédiate que $v_n > 0$ pour tout n et donc $v_{n+1} - v_n = v_{n-1} > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ et on a aussi $v_1 > v_0$), $v_{u_1} < v_{u_1+1}$: H_1 est vraie.
- Soit $p \geqslant 1$. Supposons H_p vraie et prouvons que H_{p+1} est vraie. Soient donc $u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_{p+1}$ des entiers non deux à deux consécutifs. Par hypothèse de récurrence,
$$v_{u_1} + \cdots + v_{u_p} < v_{u_p+1}$$
si bien que
$$v_{u_1} + \cdots + v_{u_p} + v_{u_{p+1}} < v_{u_p+1} + v_{u_{p+1}}$$
Or, $u_{p+1} \geqslant u_p + 2$ (les entiers sont deux à deux non consécutifs) donc $u_p + 1 \leqslant u_{p+1} - 1$. Ainsi, la suite (v_n) étant croissante,
$$v_{u_1} + \cdots + v_{u_p} + v_{u_{p+1}} < v_{u_{p+1}-1} + v_{u_{p+1}} = v_{u_{p+1}+1}$$
par définition de la suite (v_n), c'est-à-dire que H_{p+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_p est vraie pour tout $p \geqslant 1$.

$\boxed{3}$ $v_k = \mathrm{F}_{k+2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$ donc $v_k > m$ pour k assez grand. On peut même être plus précis : d'après la partie I, $v_k = \mathrm{F}_{k+2} \geqslant k+1$ pour tout k donc $v_k \geqslant m+1$ pour tout $k \geqslant m$. Par conséquent, $\{k \,|\, v_k \leqslant m\}$ ne contient qu'un nombre fini de termes : c'est une partie non vide (car $v_0 = 1 \leqslant m$ donc cette partie contient 0) et finie donc admet un maximum. On peut aussi dire que tous les entiers k tels que $v_k \leqslant m$ sont inférieurs ou égaux à m donc cette partie est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ donc admet un maximum.

$\boxed{4}$ Par récurrence sur m.

- Si $m \geqslant 1$, notons H_m : « m admet une unique Z-représentation ».
- H_1 est vraie car $1 = v_1$ qui est une Z-représentation (une F-représentation ne contenant qu'un seul terme est évidemment une Z-représentation) et celle-ci est unique car tous les autres termes de la suite (v_n) sont strictement supérieurs à 1 et ne peuvent donc pas intervenir dans une représentation (Z ou F) de 1.
- Soit $m \geqslant 1$. Supposons $\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_m$ vraies (on fait une récurrence forte) et montrons que H_{m+1} est vraie. Prouvons d'abord l'existence.

  Soit $n = \max\{k \,|\, v_k \leqslant m+1\}$ c'est-à-dire que v_n est le dernier terme de la suite inférieur ou égal à $m+1$. $v_n > 0$ (la suite (v_n) est à valeurs strictement positives) donc $m+1-v_n \leqslant m$. De plus, $m+1-v_n \geqslant 0$ car $v_n \leqslant m+1$ donc de deux choses l'une : soit $m+1-v_n = 0$ c'est-à-dire que $m+1 = v_n$ et cette écriture est une Z-représentation de $m+1$ (car il n'y a qu'un terme donc les indices sont deux à deux non consécutifs), soit $m+1-v_n \geqslant 1$ et donc, par hypothèse de récurrence au rang $m+1-v_n$ (c'est pour cela qu'il fallait faire une récurrence forte), $m+1-v_n$ admet une Z-représentation c'est-à-dire qu'il existe $p \geqslant 1$ et $u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_p$ deux à deux non consécutifs tels que

$$m+1-v_n = v_{u_p}+\cdots+v_{u_1}$$

et donc $m+1 = v_n + v_{u_p}+\cdots+v_{u_1}$. Il en découle que, pour tout $i \in [\![1\,;\, p]\!]$, $v_{u_i} \leqslant m+1$ donc, par définition de n, $v_{u_i} \leqslant v_n$ (v_n est le max des termes de la suite inférieurs ou égaux à $m+1$). En d'autres termes :

$$u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_p \leqslant n$$

Toujours par hypothèse de récurrence, les u_i sont deux à deux non consécutifs. Il suffit donc de prouver que $n \geqslant u_p+2$. Si ce n'est pas le cas alors $n = u_p$ ou $n = u_p+1$ donc $u_p \geqslant n-1$ et la suite (v_n) est positive est croissante donc :

$$m+1 = v_n + v_{u_p}+\cdots+v_{u_1} \geqslant v_n + v_{u_p} \geqslant v_n + v_{n-1} = v_{n+1}$$

ce qui est absurde car v_n est le dernier terme de la suite inférieur ou égal à $m+1$. Finalement, $n \geqslant u_p+2$: d'où l'existence.

Prouvons l'unicité. Notons $v_{a_k}+\cdots+v_{a_1}$ une Z-décomposition de $m+1$ avec $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$. Tout d'abord, $a_k \leqslant m+1$. De plus, d'après la question 2,

$$v_{a_{k-1}}+\cdots+v_{a_1} < v_{a_{k-1}+1} \leqslant v_{a_k-1}$$

puisque $a_k \geqslant a_{k-1}+2$. Ainsi, $m+1 < v_{a_k-1}+v_{a_k} = v_{a_{k+1}}$ c'est-à-dire que v_{a_k} est le plus grand des termes de la suite (v_n) inférieur ou égal à $m+1$ donc $a_k = n$ et $v_{a_k} = v_n$ (avec la même notation que ci-dessus). Ensuite, $v_{a_1}+\cdots+v_{a_{k-1}}$ et $v_{u_1}+\cdots+v_{u_p}$ sont deux Z-décompositions de $m+1-v_n$ donc sont égales car une telle Z-décomposition est unique par hypothèse de récurrence : on a $k-1 = p$ et $a_1 = u_1, \dots, a_{k-1} = u_p$ c'est-à-dire que la décomposition $v_{a_k}+\cdots+v_{a_1}$ est la même que la décomposition $v_n + v_{u_p}+\cdots+v_{u_1}$: il y a unicité de la Z-représentation. H_{m+1} est donc vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_m est vraie pour tout $m \geqslant 1$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Il découle de la démonstration précédente que pour obtenir la Z-représentation d'un entier m, il faut prendre le plus grand terme de la suite de Fibonacci inférieur ou égal à m, on le soustrait à m et on recommence (on a ce qu'on appelle un algorithme glouton) jusqu'à tomber sur un terme de la suite de Fibonacci.

$\boxed{\mathbf{6}}$ Les premiers termes de la suite sont $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233$. On soustrait 233 à 272 : il reste 39. On soustrait 34 à 39 : il reste 5 qui est un terme de la suite de Fibonacci et donc on s'arrête. Finalement :

$$\begin{aligned} 272 &= 233+34+5 \\ &= v_{11}+v_7+v_3 \end{aligned}$$