Chapitre 23

Formules de Taylor

On se donne dans ce chapitre un intervalle I d'intérieur non vide. Si rien n'est précisé, les fonctions sont à valeurs complexes.

I Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème (formule de Taylor avec reste intégral). Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(b-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\,.$$

Remarque : On a $f(a) = \dfrac{f^{(0)}(a)}{0!}(b-a)^0$, $f'(a)(b-a) = \dfrac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a)^1$ et enfin $\dfrac{f''(a)}{2}(b-a)^2 = \dfrac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2$. Par conséquent, une autre formulation de la formule de Taylor avec reste intégral est :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Raisonnons par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}$, notons H_n : « Si f est $\mathscr{C}^{n+1}$, alors $f(b) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$ ».
- Si $n = 0$: supposons f de classe $\mathscr{C}^1$. Le membre de droite est égal à

$$f(a) + \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$

  donc H_0 est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons H_n vraie et montrons que H_{n+1} est vraie. Supposons donc f de classe $\mathscr{C}^{n+2}$. Par hypothèse de récurrence,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,\mathrm{d}t\,.$$

  Faisons une IPP avec les fonctions $u = f^{(n+1)}$ et $v : t \longmapsto -\dfrac{(b-t)^{n+1}}{n+1}$ de classe $\mathscr{C}^1$ (u car f est $\mathscr{C}^{n+2}$ par hypothèse et v car c'est une fonction polynôme). On a $u'(t) = f^{(n+2)}$ et $v' : t \longmapsto (b-t)^n$:

$$\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n+1}(b-t)^{n+1}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)(b-t)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Or, le crochet vaut $\dfrac{f^{(n+1)}(a)}{n+1}(b-a)^{n+1}$ et, en se souvenant que $n!\times(n+1)=(n+1)!$, il vient :

Le terme pour $t=b$ est nul.

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} \\ &\qquad + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+2)}(t)(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

□

c'est-à-dire que H_{n+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Remarque : Ce résultat est évidemment à rapprocher de la formule de Taylor vue dans le chapitre 19 : soit $P\in\mathbb{K}[X]$ et soit $\alpha\in\mathbb{K}$. Alors

$$P=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{P^{(k)}(\alpha)\times(X-\alpha)^k}{k!}$$

En particulier, si P est de degré n, alors

$$P=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(\alpha)\times(X-\alpha)^k}{k!}$$

Nous démontrerons ce résultat dans le chapitre 29 dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ (ou dans le cas d'un corps de caractéristique nulle quelconque), mais il découle de la formule de Taylor reste intégral dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: en effet (en assimilant polynôme et fonction polynomiale), $P^{(n+1)}=0$ donc le reste intégral est nul, donc la formule de Taylor pour les polynômes découle immédiatement de la formule de Taylor avec reste intégral.

II Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème (inégalité de Taylor-Lagrange). Soit $n\in\mathbb{N}$.Soit f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I. Alors, pour tout $(a,b)\in I^2$,

$$\left|f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)-\frac{f''(a)}{2}(b-a)^2\cdots-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right| \leqslant \max_{c\in[\,a\,;b\,]}\left|f^{(n+1)}(c)\right|\times\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Cette formule de Taylor, comme la précédente, est valable avec $a\leqslant b$ et également avec $a\geqslant b$. En général, on l'applique avec $a=0$ et $b=x$.

Remarques :

Comme f est $\mathscr{C}^{n+1}$, pour tout $(a,b)\in I^2$, $f^{(n+1)}$ est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$, d'où l'existence du maximum ci-contre.

- Là aussi, sous forme condensée :
$$\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right|\leqslant\max_{c\in[\,a\,;b\,]}\left|f^{(n+1)}(c)\right|\times\frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
- Pour $n=0$, cette inégalité devient : $|f(b)-f(a)|\leqslant\max\limits_{[\,a\,;b\,]}|f'|\times|b-a|$. C'est l'inégalité des accroissements finis ! L'inégalité de Taylor-Lagrange est une généralisation de cette inégalité à un ordre plus grand, quand la fonction est plus régulière.
- Puisque l'inégalité de Taylor-Lagrange est une généralisation de l'inégalité des accroissements finis, on peut se demander s'il existe une généralisation de l'égalité des accroissements finis qu'on nommera l'égalité des accroissements finis. La réponse est oui, mais elle est HP. Nous la verrons cependant en exercice : cf. exercice 6.

Démonstration. On suppose $a \leqslant b$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &= \left|\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b \left|\frac{f^{(n+1)}(t)(b-t)^n}{n!}\right|\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

par inégalité triangulaire. Si $a \geqslant b$, on majore par l'intégrale de b à a et le reste de la démonstration est analogue. Continuons la démonstration (toujours avec $a \leqslant b$). Notons $M = \max\limits_{c\in[\,a\,;b\,]} |f^{(n+1)}(c)|$. Pour tout $t \in [\,a\,;b\,]$, $b-t \geqslant 0$ et $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$ donc

$$\begin{aligned}\left|f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| &\leqslant \int_a^b \frac{M(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant M\times\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

□

Il n'est pas toujours possible de calculer le maximum ci-dessus. Cependant, comme dans l'inégalité des accroissements finis, l'inégalité de Taylor-Lagrange est toujours valable avec un majorant. En effet, si M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[\,a\,;b\,]$ ou même sur I tout entier, $\max\limits_{[\,a\,;b\,]}|f^{(n+1)}| \leqslant M$ et donc on peut majorer le module par $M\times\dfrac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$: voir les applications ci-dessous.

Remarque : Le but des formules de Taylor est d'approcher f par la fonction polynôme

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Plus précisément, elles permettent en fait de donner des informations sur l'erreur commise en approchant f par P : l'erreur est-elle positive ? L'erreur tend-elle vers 0 ?

Question : Quand utiliser la formule de Taylor reste intégral, et quand utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange ?

- L'avantage de la formule de Taylor avec reste intégral (quand on travaille sur $\mathbb{R}$) est qu'on a une égalité et qu'il n'y a pas de valeur absolue. Ainsi, par exemple, on connaît le signe (rappelons qu'on se place sur $\mathbb{R}$ ici) du reste intégral (par exemple, en utilisant la positivité de l'intégrale), on sait comparer $f(x)$ et la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$: on sait qui est le plus grand entre f et P. L'inconvénient du reste intégral est qu'il est souvent impossible à calculer, et qu'il n'est pas toujours facile de prouver, le cas échéant, qu'une intégrale tend vers 0.
- L'avantage de l'inégalité de Taylor-Lagrange est que le membre de droite est beaucoup plus simple à calculer que le reste intégral, en particulier si l'on veut montrer qu'il tend vers 0. De plus, même si on ne sait pas le calculer exactement, il est plus facile de le majorer (voir remarque ci-dessus). L'inconvénient est qu'il ne donne qu'une majoration (mais cela peut suffire si, par exemple, on veut montrer que la différence entre $f(x)$ et la somme tend vers 0) et qu'il y a une valeur absolue : on ne peut donc pas comparer $f(x)$ et la somme car, avec une valeur absolue, on perd toute notion de signe.

III Applications

On connaît les limites suivantes, utiles pour lever certaines indéterminations :

$$\frac{\sin(u)}{u}\xrightarrow[u\to 0]{}1,\qquad \frac{\ln(1+u)}{u}\xrightarrow[u\to 0]{}1,\qquad \frac{\sqrt{1+u}-1}{u}\xrightarrow[u\to 0]{}\frac{1}{2}$$

Intuitivement , cela signifie qu'au voisinage de 0, $\sin(x)\approx x$, $\sqrt{1+x}\approx 1+\dfrac{x}{2}$ etc. On verra même (cf. chapitre 24) des approximations plus précises du type $\sin(x)\approx x-\dfrac{x^3}{6}$. Le problème est que ces approximations sont locales, i.e. valables au voisinage de 0. Cependant, on peut avoir envie de faire ces approximations pour un réel fixe « qui n'est pas petit » ou même sur tout un intervalle. L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de donner un ordre de grandeur de l'erreur commise en faisant l'approximation de (par exemple) $\ln(1+x)$ par x.

Les approximations ci-contre ne sont pas rigoureuses ! On verra une manière rigoureuse de les définir au chapitre 24.

III.1 Un exemple pas si bête mais pas si méchant

Majorer $x \longmapsto |\ln(1+x) - x|$ sur $\left[-\dfrac{1}{2}\,;1\right]$.

La fonction $f : x \longmapsto \ln(1+x)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $[-1/2\,;1]$.

- Pour tout $x \in [-1/2\,;1]$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$.
- Pour tout $x \in [-1/2\,;1]$, $f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ donc $|f''(x)| = \dfrac{1}{(1+x)^2}$. Or, $x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ est décroissante sur $[-1/2\,;1]$ donc atteint son maximum en $-1/2$, si bien que $|f''|$ est majorée par $|f''(-1/2)| = 4$.

On applique l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $n = 1$, $a = 0$ et $b = x$. Comme dit plus haut, on remplace $\displaystyle\max_{c \in [\,a\,;b\,]} |f''|$ par un majorant de $|f''|$ sur I tout entier. Pour reprendre les notations précédentes, on prend $M = 4$.

Finalement, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$|\ln(1+x) - x| \leqslant 4 \times \frac{x^2}{2!} = 2x^2 \leqslant 2.$$

III.2 Développements en série entière (ou pas)

Dans l'inégalité de Taylor-Lagrange, l'erreur commise en faisant l'approximation de $f(x)$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$ est majorée par $\displaystyle\max_{c \in [\,0\,;x\,]} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Dès lors, plus x est petit, plus petite est l'erreur et donc meilleure est l'approximation. On peut se poser la question suivante : est-ce que plus n est grand, plus l'erreur est petite, et meilleure est l'approximation ? Réponse : pas toujours ! Le problème est que, même si $(n+1)! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, cela peut aussi être le cas du maximum.

Donnons trois exemples où « tout se passe bien ».

- On rappelle que l'exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$ donc $\exp^{(n)}(0) = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

  $$\left|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant \max_{c \in [\,0\,;x\,]} e^c \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

  L'exponentielle étant croissante, $\displaystyle\max_{c \in [\,0\,;x\,]} e^c = e^x$ si $x \geqslant 0$ et $e^0 = 1$ si $x < 0$. Dans tous les cas, $\displaystyle\max_{c \in [\,0\,;x\,]} e^c \leqslant 1 + e^x$, si bien que

  On pourrait aussi majorer le max par $\max(1, e^x)$ qui, bien qu'étant inconnu, ne dépend pas de n et donc ne gêne pas la convergence vers 0.

  $$\left|e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n!}\right| \leqslant (1 + e^x) \times \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  Or, par croissances comparées (la factorielle l'emporte sur les suites géométriques), le membre de droite ci-dessus tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement, le membre de gauche également, d'où :

  $$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x.$$

  Ce résultat est important : on le reverra dans le chapitre 25 où on notera $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

- On rappelle que les fonctions cos et sin sont $\mathscr{C}^\infty$ et que leurs dérivées successives sont données par :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \sin^{(4n)} = \sin, \quad \sin^{(4n+1)} = \cos, \quad \sin^{(4n+2)} = -\sin, \quad \sin^{(4n+3)} = -\cos.$$

  Et pour le cosinus :

  $$\forall n \in \mathbb{N}, \cos^{(4n)} = \cos, \quad \cos^{(4n+1)} = -\sin, \quad \cos^{(4n+2)} = -\cos, \quad \sin^{(4n+3)} = \sin.$$

On montre par une récurrence immédiate que pour tout $p \in \mathbb{N}, \sin^{(2p)}(0) = 0$ et $\sin^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$. Soient donc $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| &= \left|\sin(x) - \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 2n+1\\ k \text{ impair}}} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \\ &= \left|\sin(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{\sin^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right|,\end{aligned}$$

avec le changement d'indice $k = 2p+1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\left|\sin(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{\sin^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right| &= \left|\sin(x) - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \\ &\leqslant \max_{c\in[\,0\,;x\,]} \left|\sin^{(2n+2)}(c)\right| \times \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!},\end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange (appliquée à l'ordre $2n+1$ avec $a = 0$ et $b = x$). Or, $\sin^{(2n+2)} = \pm\sin$ donc est majoré en valeur absolue par 1, d'où :

$$\left|\sin(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!}x^{2p+1}\right| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

De même que pour l'exponentielle, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x)$.

Ce qu'on notera

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sin(x)$$

et

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} = \cos(x)$$

dans le chapitre 25.

- On montre de même que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \cos(x)$.

$\rightsquigarrow$ Exercice.

Attention, si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathbb{R}$, on n'a pas forcément :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

Cela ne marche dans les trois exemples précédents que parce que les dérivées successives sont bornées indépendamment de n.

Une fonction f vérifiant cette égalité est dite développable en série entière. Les fonctions développables en série entière sont au programme en deuxième année.

Exemple : On a prouvé dans le chapitre 19 que $g : x \mapsto e^{-1/x^2}$ était prolongeable par continuité en 0, et que g ainsi prolongée était $\mathscr{C}^\infty$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)}(0) = 0$, si bien que, pour tout $x \neq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)x^k}{k!} = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \neq e^{-1/x^2} = g(x).$$

L'année prochaine, vous direz que g est $\mathscr{C}^\infty$ mais pas développable en série entière au voisinage de 0 : ce contre-exemple classique est dû à Cauchy (pour changer).