Correction du DM n°12

Problème

1 On cherche donc l'ensemble $A^s = \{y \in \mathbb{Z} \,|\, 0 \equiv y[2]\}$.

$$\boxed{\text{L'ensemble cherché est l'ensemble des entiers pairs.}}$$

2 Soit $x \in A$. Alors $x \sim x$ par réflexivité donc il existe bien un élément de A (x lui-même) en relation avec x.

$$\boxed{\text{Pour toute partie A de E, } A \subset A^s.}$$

> Il n'y a pas forcément égalité, comme on le voit dans la question précédente.

3 D'après la question précédente, $E \subset E^s$, et l'inclusion réciproque est vraie par définition (E^s est une partie de E).

$$\boxed{E^s = E}$$

4 L'inclusion $A^s \subset (A^s)^s$ découle de la question 2 (avec A^s à la place de A, penser à « truc »). Montrons l'inclusion réciproque. Soit $y \in (A^s)^s$. Il existe alors $x \in A^s$ tel que $x \sim y$. Mais puisque $x \in A^s$, il existe $z \in A$ tel que $z \sim x$ donc, par transitivité, $z \in y$: il existe $z \in A$ tel que $z \sim y$ donc $y \in A^s$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

$$\boxed{A^s = (A^s)^s}$$

5.(a) Soit $y \in A^s$. Il existe $x \in A$ tel que $y \sim x$ donc tel que $y \in \mathrm{cl}(x)$, d'où l'inclusion

$$A^s \subset \bigcup_{x \in A} \mathrm{cl}(x)$$

Réciproquement, soit y dans cette union. Il existe alors $x \in A$ tel que $y \in \mathrm{cl}(x)$ c'est-à-dire tel que $y \sim x$: $y \in A^s$. D'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

$$\boxed{A^s = \bigcup_{x \in A} \mathrm{cl}(x)}$$

> C'est cohérent avec le résultat de la première question.

5.(b) A^s est elle-même une partie de S(E) (d'après la question 4) qui contient A (d'après la question 2). En d'autres termes, A^s est une des parties sur lesquelles est prise l'intersection donc contient l'intersection (c'est du cours : une intersection est incluse dans toutes les parties intersectées). Si on note I l'intersection, on a donc $I \subset A^s$. Prouvons l'inclusion réciproque. Soit $y \in A^s$ et prouvons que $y \in I$. Pour cela, il faut et il suffit que y appartienne à tous les ensembles intersectés. Soit donc $B \in S(E)$ tel que $A \subset B$. Puisque $y \in A^s$, il existe $x \in A$ tel que $x \sim y$. Or, $x \in A \subset B$ donc $x \in B$: il existe $x \in B$ tel que $x \sim y$ si bien que $y \in B^s = B$ puisque $B \in S(E)$. y appartient à tous les B formant l'intersection donc à l'intersection, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{A^s = \bigcap_{B \in S(E), A \subset B} B}$$

6.(a) Soit $y \in (A \cup B)^s$. Alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $x \sim y$. Si $x \in A$ alors $y \in A^s$ tandis que si $x \in B$ alors $y \in B^s$. Dans les deux cas, $y \in A^s \cup B^s$: d'où l'inclusion $(A \cup B)^s \subset A^s \cup B^s$. Réciproquement, soit $y \in A^s \cup B^s$. Alors $y \in A^s$ ou $y \in B^s$. Si $y \in B^s$ alors il existe $x \in B$ tel que $x \sim y$, et si $y \in A^s$, alors il existe $x \in A$ tel que $x \sim y$. Dans tous les cas, il existe $x \in A \cup B$ tel que $x \sim y$ si bien que $y \in (A \cup B)^s$: d'où l'inclusion réciproque, d'où l'égalité.

$$\boxed{(A \cup B)^s = A^s \cup B^s}$$

6.(b) Soit $y \in (A \cap B)^s$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $x \sim y$, et puisque $x \in A$, alors $y \in A^s$, et puisque $x \in B$, alors $y \in B^s$, d'où l'inclusion

$$\boxed{(A \cap B)^s \subset A^s \cap B^s}$$

La réciproque est fausse en général : prenons $A = \{0\}$ et $B = \{2\}$ sur $\mathbb{Z}$ muni de la congruence modulo 2. Comme à la première question, on a $A^s = 2\mathbb{Z}$, $B^s = 2\mathbb{Z}$ donc $A^s \cap B^s = 2\mathbb{Z}$ mais $A \cap B = \varnothing$ donc $(A \cap B)^s = \varnothing$.

$$\boxed{\text{L'inclusion réciproque est fausse en général.}}$$

7 Soit $y \in \overline{A^s}$. Montrons que $y \in \overline{A}^s$. On sait que $y \notin A^s$ et puisque $A \subset A^s$ (question 2) alors $y \notin A$ donc $y \in \overline{A}$: il existe un élément de $\overline{A}$ (y lui-même) en relation avec y donc $y \in \overline{A}^s$.

$$\boxed{\overline{A^s} \subset \overline{A}^s}$$

8 Soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Soit $x \in A$. Alors $x \sim x$ donc il existe un élément de A (x lui-même) en relation avec x. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{ARA : R est réflexive.}}$$

Soient A, B, C trois parties de E telles que ARB et BRC. Soit $x \in A$. Puisque ARB, il existe $y \in B$ tel que $x \sim y$. De plus, BRC donc il existe $z \in C$ tel que $y \sim z$ donc, par transitivité, $x \sim z$:

$$\boxed{\text{ARC : C est transitive.}}$$

Cependant, si on se replace sur $E = \mathbb{Z}$ muni de la congruence modulo 2, si $A = \{0\}$ et $B = \{2\}$, alors ARB et BRA mais on n'a pas $A = B$:

$$\boxed{\text{R n'est pas forcément antisymétrique.}}$$

De plus, si $A = \{0\}$ et $B = \mathbb{Z}$, on a ARB mais pas BRA :

$$\boxed{\text{R n'est pas forcément symétrique.}}$$

Problème - Conjuguée de Fenchel d'une fonction convexe

Partie I. Exemples

1 f est dérivable deux fois (et même $\mathscr{C}^\infty$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = x$ et $f''(x) = 1 \geqslant 0$ donc

$$\boxed{f \text{ est bien convexe.}}$$

Montrons à présent que $I^* = \mathbb{R}$. Soit $s \in \mathbb{R}$. Il faut donc montrer que l'ensemble $\{sx - x^2/2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré. Or, la fonction $x \mapsto sx - x^2/2$ est un trinôme du second degré de coefficient dominant strictement négatif donc est majoré (et atteint son maximum en $-b/2a = s$, tracez la courbe de cette fonction, une parabole tournée vers le bas, pour vous en convaincre). On en déduit donc que, pour tout s, l'ensemble $\{sx - x^2/2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré :

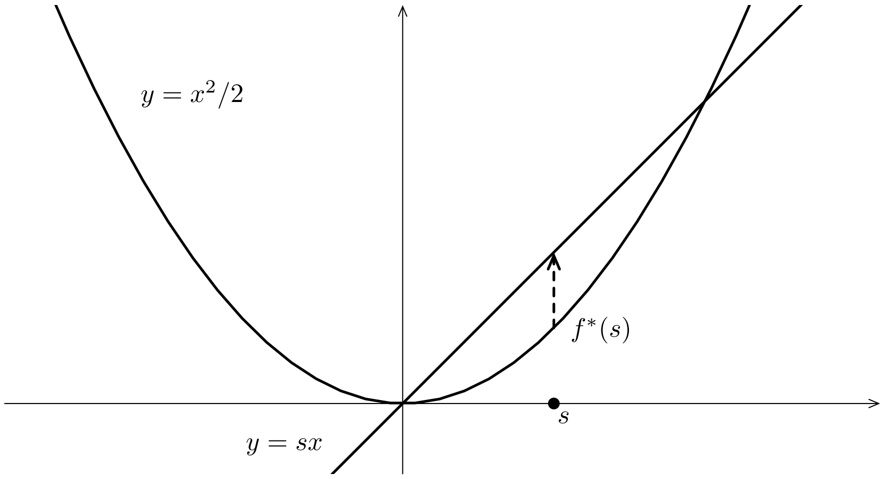
$$\boxed{I^* = \mathbb{R}}$$

Soit $s \in \mathbb{R}$. On a dit ci-dessus que le maximum (qui est en particulier la borne supérieure, réciproque fausse) de l'ensemble $\{sx - x^2/2 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$, est atteint en s et vaut donc $s^2 - s^2/2 = s^2/2$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{f^* \text{ est la fonction } f^* : s \mapsto s^2/2}$$

> Ci-dessous un dessin, analogue à celui de l'énoncé : on a tracé le graphe de $x \mapsto x^2/2$, la droite d'équation $y = sx$. L'écart est maximal pour $x = s$ (mais ce ne sera pas toujours le cas à l'avenir, voir les exemples suivants), et on a

représenté $f^*(s)$ (en pointillés) sur le graphe :



2.(a) Fait dans la question 1 de l'exercice 13 du chapitre 15.

2.(b) On sait que, si on note φ la valeur absolue, alors φ est convexe sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (cf. cours, mais cela se démontre facilement avec l'inégalité triangulaire) et que $g : x \mapsto x^p$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (dérivable deux fois de dérivée seconde $x \mapsto p(p-1)x^{p-2}$) et croissante donc, d'après la question précédente, $g \circ \varphi = f$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}.}$$

On a légèrement arnaqué : p n'étant pas forcément un entier, g n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$, mais comme $p > 0$, alors on peut prolonger g par continuité en 0 et, comme en classe, g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ (car dérivable deux fois de dérivée seconde positive, comme dit ci-dessus) et continue sur $\mathbb{R}_+$ donc g est convexe sur $\mathbb{R}_+$.

2.(c) Montrons à que $\mathrm{I}^* = \mathbb{R}$. Comme dans la question 1, on se donne un réel s et on va prouver que l'ensemble $\{sx - f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$sx - f(x) = sx - \frac{|x|^p}{p}$$

Suivons l'indication de l'énoncé et appliquons l'inégalité de Young à $|x|^p$ et $|s|^q$ (à la place de x et y) qui sont bien des réels positifs, avec $\alpha = 1/p$ (et donc $1 - \alpha = 1/q$ par définition de q) :

$$(|x|^p)^{1/p} \times (|s|^q)^{1/q} = |xs| \leqslant \frac{|x|^p}{p} + \frac{|s|^q}{q}$$

Or, $sx \leqslant |sx|$ donc :
$$sx - \frac{|x|^p}{p} \leqslant \frac{|s|^q}{q}$$

En d'autres termes :
$$\boxed{\text{L'ensemble } \{sx - f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \text{ est majoré : } \mathrm{I}^* = \mathbb{R}.}$$

2.(d) Soit encore $s \in \mathrm{I}^* = \mathbb{R}$. On a montré que $|s|^q/q$ est un majorant de $\{sx - f(x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$. Il suffit de montrer que cet élément appartient à l'ensemble pour montrer que c'est son maximum, et donc sa borne supérieure.

Suivons l'indication de l'énoncé et cherchons une valeur de x pour laquelle il y a égalité dans la question précédente. L'inégalité de la question précédente découle de l'inégalité de Young et de l'inégalité $sx \leqslant |sx|$. Or :

- L'inégalité $sx \leqslant |sx|$ est une égalité si (et seulement si) $sx \geqslant 0$ donc si s et x sont de même signe.
- Il y a égalité dans l'inégalité de Young (au moins) quand $x = y$ (avec les notations de l'exercice 17) donc (avec les notations de notre question) lorsque $|x|^p = |s|^q$ donc lorsque $|x| = |s|^{q/p}$.

Dès lors, prenons x le réel parmi $\pm |s|^{q/p}$ qui est de même signe que s. Alors $sx \geqslant 0$ donc $sx = |sx| = |s| \times |s|^{p/q}$ si bien que (précisons qu'il n'y a pas de $\pm$ dans le terme de droite car, quand on calcule $f(x)$, on prend la valeur absolue) :

$$\begin{aligned} sx - f(x) &= |s|^{1+\frac{q}{p}} - \frac{\left(|s|^{\frac{q}{p}}\right)^p}{p} \\ &= |s|^{1+q\left(1-\frac{1}{q}\right)} - \frac{|s|^q}{p} \\ &= |s|^q \times \left(1 - \frac{1}{q}\right) \\ &= \frac{|s|^q}{q} \end{aligned}$$

et donc cet élément appartient bien à l'ensemble voulu : c'est donc son maximum, donc sa borne supérieure.

$$\boxed{\text{On a bien } f^* : s \mapsto \frac{|s|^q}{q}}$$

Cette question est une généralisation de la question précédente : en effet, la question 1 n'est rien d'autre que le cas particulier $p = 2$ (et donc $q = 2$ également).

> Le graphe est donc tout à fait analogue.

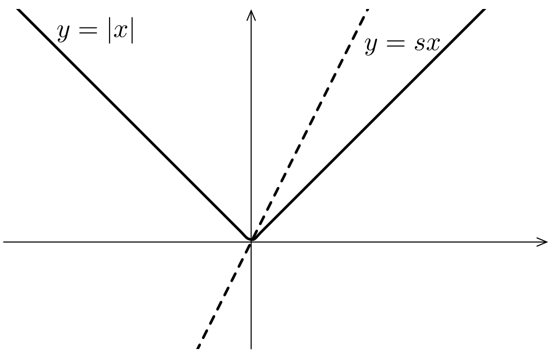
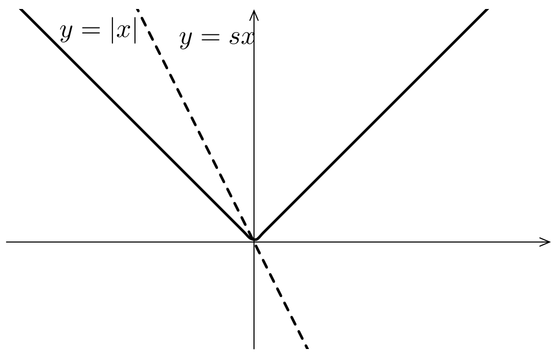
3 Ici, il faut prouver que $\mathrm{I}^* = [-1\,;1]$ et nous allons raisonner par double inclusion.

- Soit $s \in [-1\,;1]$. Montrons que l'ensemble $\{sx - f(x)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$ est majoré. Soit donc $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$sx - f(x) = sx - |x|$$
Or, $sx \leqslant |sx| = |s| \times |x| \leqslant 1 \times |x|$ car $|s| \leqslant 1$. On en déduit que $sx - f(x) \leqslant 0$: cet ensemble est bien majoré, si bien que $\mathrm{I}^* \subset [-1\,;1]$.
- Soit à présent $s \notin [-1\,;1]$ et prouvons que ce même ensemble n'est pas majoré. On a donc $|s| > 1$. Supposons dans un premier temps $s > 0$ (et donc $s > 1$). Si $x \geqslant 0$, on a :
$$sx - f(x) = sx - x = (s-1)x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$
Si $s < -1$, et si $x < 0$, on a :
$$sx - f(x) = sx + x = (s+1)x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$$
Dans les deux cas, cet ensemble n'est pas majoré donc $x \notin \mathrm{I}^*$. D'où l'inclusion réciproque (par contraposée).

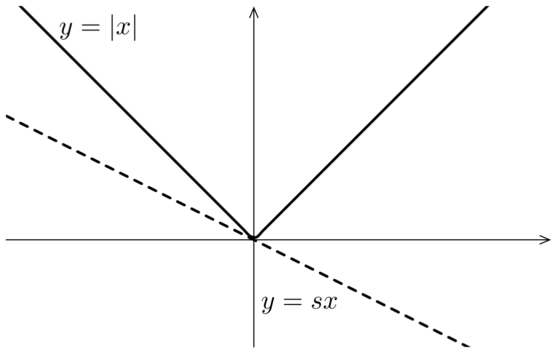
$$\boxed{\mathrm{I}^* = [-1\,;1]}$$

Soit donc $s \in \mathrm{I}^* = [-1\,;1]$. De même que dans les questions précédentes, on a prouvé que 0 est majorant de l'ensemble $\{sx - f(x)\,|\,x \in \mathbb{R}\}$, et il est évident (en prenant $x = 0$) que 0 appartient à cet ensemble. C'est donc encore un maximum, donc la borne supérieure.

$$\boxed{f^* \text{ est la fonction nulle (sur } [-1\,;1]).}$$

> Cela se voit bien sur un dessin : si $|s| > 1$ alors l'écart tend vers $+\infty$ d'un côté ou de l'autre :
>
> 
>
> 
>

tandis que, si $|s| \leqslant 1$, alors la fonction affine est toujours en dessous de la valeur absolue, donc l'écart est majoré par 0 (encore une fois, quand on parle d'écart qui tend ou non vers $+\infty$, on ne parle pas en valeur absolue !), et puisque les deux fonctions coïncident en 0, alors l'écart y est nul, donc l'écart maximum vaut 0 :



$\boxed{4}$ Soit $s \in \mathbb{R}$. Cherchons si l'ensemble $\{sx - f(x)\, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré. Soit donc $x \in \mathbb{R}$, si bien que $sx - f(x) = (s - \alpha)x$. La fonction $x \mapsto sx - f(x)$ est affine : elle est donc majorée si et seulement si son coefficient directeur est nul, i.e. si et seulement si $s = \alpha$. On en déduit donc que $\mathrm{I}^* = \{\alpha\}$. De plus, si $s = \alpha$, alors $sx - f(x) = 0$ pour tout x donc $f^*(s) = 0$.

$$\boxed{\mathrm{I}^* = \{\alpha\} \text{ et } f^* \text{ est la fonction nulle (sur } \{\alpha\} \text{ donc cela n'a pas un grand intérêt).}}$$

Le graphe est laissé à votre charge : si $s \neq \alpha$, alors les deux fonctions linéaires sont distinctes donc l'écart tend vers $+\infty$ d'un côté ou de l'autre, tandis que si $s = \alpha$, les deux fonctions sont les mêmes, donc l'écart est constant égal à 0 (et donc le maximum est nul).

$\boxed{5}$ Soit $s \in \mathbb{R}$. Cherchons si l'ensemble $\{sx - f(x)\, x \in \mathbb{R}\}$ est majoré. Soit donc $x \in \mathbb{R}$, si bien que $sx - f(x) = sx - e^x$. Différencions les cas selon le signe de s.

- Si $s < 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ donc cet ensemble n'est pas majoré : $s \notin \mathrm{I}^*$.
- Si $s = 0$ alors $sx - e^x = -e^x \leqslant 0$: cet ensemble est majoré, $0 \in \mathrm{I}^*$.
- Si $s > 0$, alors une rapide de fonction montre que $g : x \mapsto sx - e^x$ atteint un maximum en $x = \ln(s)$ donc en particulier cet ensemble est majoré : $s \in \mathrm{I}^*$.

Ainsi $$\boxed{\mathrm{I}^* = \mathbb{R}_+}$$

De plus, si $s = 0$, alors $\sup\{-e^x \,|\, x \in \mathbb{R}\} = 0$ (mais ce n'est pas un maximum) si bien que $f^*(s) = 0$ et, si $s > 0$, alors le tableau de variations (que je n'ai pas fait mais que vous avez dû faire) montre que g admet un maximum atteint en $\ln(s)$ qui vaut $s\ln(s) - s$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall s > 0, f^*(s) = s\ln(s) - s \qquad \text{et} \qquad f^*(0) = 0}$$

Pour l'illustration graphique, voir le sujet : on a pris $f(x) = e^x$, et sur le graphe de gauche, on a pris $s = 2$ et, à droite, $s = -2$.

Partie II. Quelques propriétés des dérivées à droite et à gauche des fonctions convexes

$\boxed{1}$ cf. cours : attention, cela ne marche ici sur I tout entier que parce que I est ouvert.

$\boxed{2}$ Idem, cf. cours.

$\boxed{3}$ Soient donc $x < y$ deux éléments de I et on se donne deux éléments de I z et t vérifiant $x < z < y < t$ (possible car I est ouvert). Par croissance de la fonction τ_z (f est croissante), $\tau_z(x) \leqslant \tau_z(y)$. Or,

$$\tau_z(x) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \tau_x(z)$$

De même (nous utiliserons souvent ce résultat dans la suite), $\tau_z(y) = \tau_y(z)$, si bien que $\tau_x(z) \leqslant \tau_y(z) \leqslant \tau_y(t)$ car τ_y est croissante. En faisant tendre d'abord (on ne peut pas faire tendre deux variables en même temps) z vers x^+, l'inégalité large passant à la limite, on obtient ${f_d}'(x) \leqslant \tau_y(t)$. En faisant ensuite tendre t vers y^+, on trouve (idem, inégalité large...) que ${f_d}'(x) \leqslant {f_d}'(y)$. De même, avec deux réels z et t vérifiant $z < x < t < y$, on prouve que ${f_g}'$ est croissante.

$$\boxed{{f_d}' \text{ et } {f_g}' \text{ sont croissantes.}}$$

4.(a) Rappelons qu'une fonction g croissante sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$ admet une limite (finie ou infinie) en b et qu'elle est inférieure à cette limite (cf. chapitre 13). Puisque ${f_g}'(y)$ est la limite, quand $x \to y^-$, de $\tau_y(x)$, alors on en déduit la première inégalité :

$$\boxed{\tau_y(x) \leqslant {f_g}'(x)}$$

La fonction ${f_g}'$ étant croissante, elle admet en ${x_0}^-$ une limite finie ou égale à $+\infty$. Pour montrer que celle-ci est finie, il suffit de prouver que ${f_g}'$ est majorée. Or, ${f_g}'$ étant croissante, elle est majorée par ${f_g}'(x_0)$ à gauche de x_0, d'où le résultat.

$$\boxed{{f_g}' \text{ admet une limite finie en } {x_0}^-.}$$

De plus, f étant continue car convexe (sur un intervalle ouvert) :

$$\tau_y(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \xrightarrow[y \to {x_0}^-]{} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = \tau_{x_0}(x)$$

En passant à la limite dans l'inégalité prouvée ci-dessus, lorsque $y \to {x_0}^-$, et puisque l'inégalité large passe à la limite (on a bien prouvé que les deux limites existent bien), on obtient l'inégalité voulue :

$$\boxed{\tau_{x_0}(x) \leqslant \lim_{y \to {x_0}^-} {f_g}'(y)}$$

4.(b) L'inégalité ${f_g}'(x) \leqslant {f_d}'(x)$ découle de la question 2, et l'inégalité ${f_d}'(x) \leqslant \tau_{x_0}(x)$ se prouve comme ci-dessus : puisque $\tau_{x_0}(x) = \tau_x(x_0)$ et que ${f_d}'(x)$ est la limite de τ_x (fonction croissante) en x^+, alors ${f_d}'(x) \leqslant \tau_x(x_0)$ (une fonction croissante sur $]\,a\,;b\,[$ est supérieure à sa limite en a).

$$\boxed{{f_g}'(x) \leqslant {f_d}'(x) \leqslant \tau_{x_0}(x) \lim_{y \to {x_0}^-} {f_g}'(y)}$$

En particulier
$$ {f_g}'(x) \leqslant \tau_{x_0}(x) \leqslant \lim_{y \to {x_0}^-} {f_g}'(y)$$

En faisant tendre x vers ${x_0}^-$, et l'inégalité large passant à la limite (et les limites existent de même que précédemment) :

$$\lim_{x \to {x_0}^-} {f_g}'(x) \leqslant {f_g}'(x_0) \leqslant \lim_{y \to {x_0}^-} {f_g}'(y)$$

Or, la variable de la limite est muette, donc on a égalité :

$$\boxed{\lim_{x \to {x_0}^-} {f_g}'(x) = {f_g}'(x_0) : {f_g}' \text{ est continue à gauche.}}$$

> Attention, on n'applique pas le théorème d'encadrement : tout ce que celui-ci nous apporterait, ce serait que
>
> $$\tau_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to {x_0}^-]{} \lim_{y \to {x_0}^-} {f_g}'(y)$$
>
> Pour conclure, il faut encore dire que $\tau_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to {x_0}^-]{} {f_g}'(x_0)$ puis utiliser l'unicité de la limite. Le fait que l'inégalité large passe à la limite permet donc de conclure plus rapidement, mais n'oublions pas qu'il faut prouver au préalable l'existence des limites.
>
> Précisons également que ${f_g}'$ n'est pas forcément continue : par exemple, si f est la valeur absolue (qui est donc convexe), alors ${f_g}'$ vaut -1 sur $\mathbb{R}_-$ et 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ donc n'est pas continue en 0 (mais elle est bien continue à gauche).

Si f est dérivable, alors ${f_g}' = {f_d}' = f'$ et, d'après ce qui précède, cette fonction est continue à droite et à gauche donc est continue.

$$\boxed{\text{Une fonction convexe dérivable est automatiquement } \mathscr{C}^1.}$$

5.(a) Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ et soit $x \in \mathrm{I}, x \leqslant x_0$ (on cherche la limite en $-\infty$). D'après l'IAF (numéro 1, mais inutile de l'écrire dans votre copie, je le fais juste ici pour que vous voyiez de laquelle je parle) avec $a = x, b = x_0$ (on a bien $a \leqslant b$), il vient :

$$f(x_0) - f(x) \leqslant \mathrm{M}(x_0 - x)$$

et donc $f(x) \geqslant f(x_0) - \mathrm{M}(x_0 - x) = f(x_0) + \mathrm{M}(x - x_0)$. $\mathrm{M} < 0$ donc $f(x_0) + \mathrm{M}(x - x_0) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ et on conclut à l'aide du théorème de minoration.

$$\boxed{\text{Le résultat est prouvé si } f \text{ est dérivable.}}$$

5.(b) Idem que dans la question 4.(b) : la limite en b d'une fonction croissante sur $]\,a\,;b\,[$ est supérieure à cette fonction, donc la limite en $x_0{}^-$ de τ_{x_0}, croissante, est supérieure à cette fonction. On en déduit que $f_g{}'(x_0) \geqslant \tau_{x_0}(x)$, et on conclut à l'aide de la question 2 : $f_d{}'(x_0) \geqslant f_g{}'(x_0)$.

$$\boxed{f_d{}'(x_0) \geqslant \tau_{x_0}(x)}$$

5.(c) Reprenons donc $x < x_0$. D'après la question précédente :

$$\mathrm{M} \geqslant f_d{}'(x_0) \geqslant \tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Or, $x - x_0 < 0$ donc, en multipliant par $x - x_0$, il vient : $\mathrm{M}(x - x_0) \leqslant f(x) - f(x_0)$. On conclut ensuite comme à la question 5.(a).

$$\boxed{\text{On a bien } f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty}$$

6.(a) Le résultat étant évident si $x = x_0$ (il y a même égalité), on suppose $x > x_0$. De même que précédemment :

$$s \leqslant f_d{}'(x_0) \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ce qui permet de conclure en multipliant par $x - x_0 > 0$. Supposons enfin $x < x_0$. De même (fonction croissante sur $]\,a\,;b\,[$ majorée par sa limite en b) :

$$\tau_{x_0}(x) = ff(x) - f(x_0)x - x_0 \leqslant f_g{}'(x_0) \leqslant s$$

et on conclut en multipliant par $x - x_0 < 0$ (et donc l'inégalité change de sens).

$$\boxed{\text{Si } s \in \left[\, f_g{}'(x_0)\,; f_d{}'(x_0) \,\right] \text{ alors : } \forall x \in \mathrm{I}, f(x) \geqslant s(x - x_0) + f(x_0)}$$

6.(b) Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $s < f_g{}'(x_0)$. Par définition d'une limite, pour x assez proche de $x_0{}^-$, $s < \tau_{x_0}(x)$ donc :

$$\exists x < x_0, s < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il suffit de multiplier par $x - x_0 < 0$ (et donc le sens de l'inégalité change) pour conclure. Le cas $s > f_d{}'(x_0)$ est analogue.

$$\boxed{\text{Si } s \notin \left[\, f_g{}'(x_0)\,; f_d{}'(x_0) \,\right] \text{ alors : } \exists x \in \mathrm{I}, f(x) < s(x - x_0) + f(x_0)}$$

> L'ensemble $\left[\, f_g{}'(x_0)\,; f_d{}'(x_0) \,\right]$ est appelé le sous-différentiel de f en x_0. C'est donc l'ensemble des pentes pour lesquelles les fonctions affines qui passent par le point $(x_0, f(x_0))$ sont en-dessous du graphe de f (cela se voit bien sur le dessin de l'énoncé).

Partie III. Étude de I*

1.(a) Découle de la croissance de $f_d{}'$ et de $f_g{}'$ (cf. question 3 de la partie II).

$$\boxed{\alpha \text{ et } \beta \text{ existent.}}$$

1.(b) La première inégalité vient du fait que α est la borne inf de $f_d{}'$ sur $]\,a\,;b\,[$ (la limite en a d'une fonction croissante sur $]\,a\,;b\,[$ est sa borne inf, cf. chapitre 13). La deuxième est supposée par l'énoncé. La troisième est analogue à la première : β est la borne sup de $f_g{}'$. Enfin, τ_x est une fonction croissante et $f_d{}'(x)$ est sa limite en x^+ donc $\tau_x(y) \geqslant f_d{}'(x)$ (une fonction croissante à droite de x est supérieure à sa limite en x^+). De même, $\tau_y(x) \leqslant {f_g}'(y)$ et on conclut en remarquant que $\tau_x(y) = \tau_y(x)$.

$$\boxed{{f_d}'(x) \geqslant \alpha \geqslant \beta \geqslant {f_g}'(y) \geqslant {f_d}'(x)}$$

Les inégalités ci-dessus sont donc toutes des égalités : en particulier, $\alpha = \beta$. Soit $x \in \,]\,a\,;b\,[$ et soit $y > x$, alors ${f_d}'(x) = \alpha$. En d'autres termes, ${f_d}'$ est constante égale à α.

Mais puisque le résultat précédent est vrai pour tous x et y vérifiant $x < y$, on peut très bien choisir y d'abord : soit donc $y \in \mathrm{I}$ et soit $x < y$. Alors ${f_g}'(y) = \alpha$. En d'autres termes, ${f_g}'$ est constante égale à α. En particulier, ${f_g}'$ et ${f_d}'$ sont égales, donc f est dérivable, et f' est constante égale à α, ce qui est absurde car f n'est pas affine.

$$\boxed{\text{On a } \alpha < \beta : \text{J est un intervalle ouvert non vide.}}$$

2.(a) Une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure : il suffit donc de prouver que $\mathrm{E} = \{t \in \mathrm{I} \,|\, {f_d}'(x_0)\}$ est non vide minoré.

Par hypothèse, $s < \beta$ qui est la borne sup de ${f_g}'$ (voir ci-dessus) : il existe donc t tel que $s \leqslant {f_g}'(t)$ et on sait (question 2 de la partie II) que ${f_g}'(t) \leqslant {f_d}'(t)$. En d'autres termes, $t \in \mathrm{E}$: E est non vide.

Pour le côté minoré : attention de ne pas minorer par a car on peut avoir $a = -\infty$. Il suffit de voir que $\alpha < s$ donc, par définition d'une borne inf, il existe x_1 tel que ${f_d}'(x_1) < s$. La fonction ${f_d}'$ étant croissante, tout $t \leqslant x_1$ vérifie ${f_d}'(t) < s$ donc n'appartient pas à E. En d'autres termes, tous les éléments de E sont supérieurs stricts à x_1 i.e. x_1 minore E, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\text{Un tel } x_0 \text{ existe bien.}}$$

2.(b) Attention, il ne suffit pas de dire que x_0 est la borne inf : ce n'est pas parce qu'un élément est la borne inf d'un ensemble que tout élément plus grand lui appartient : cet ensemble n'est pas forcément un intervalle, il peut « avoir des trous » ! Mais, ici, ça va marcher car ${f_d}'$ est croissante. Supposons donc qu'il existe n tel que ce ne soit pas le cas. ${f_d}'$ étant croissante, pour tout $t \leqslant x_0 + 1/n, {f_d}'(t) \leqslant {f_d}'(x_0 + 1/n) < s$. En d'autres termes, il n'existe aucun élément de E dans l'intervalle $[\,x_0\,; x_0 + 1/n\,]$ ce qui contredit la définition d'une borne inférieure (pour tout $\varepsilon > 0$, il existe...).

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

> La même preuve montre que, pour tout $t > x_0$, $t \in \mathrm{E}$. E est donc l'un des deux intervalles $[\,x_0\,;b\,[$ ou $]\,x_0\,;b\,[$. La question suivante prouve que E est fermé en x_0.

2.(c) Attention, x_0 n'est pas (encore) un minimum, mais une borne inf : partant, il n'appartient pas forcément à E donc on ne peut pas (encore) affirmer que $s \leqslant {f_d}'(x_0)$. Il suffit de prendre une suite (u_n) d'éléments de E qui converge vers x_0, et la suite de terme général $x_0 + 1/n$ convient d'après la question précédente. Pour tout n, $s \leqslant {f_d}'(x_0 + 1/n)$. Or, $x_0 + 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} {x_0}^+$ et ${f_d}'$ est continue à droite (question 4 partie II) donc ${f_d}'(x_0 + 1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} {f_d}'(x_0)$. L'inégalité large passant à la limite, $s \leqslant {f_d}'(x_0)$.

> En particulier, $x_0 \in \mathrm{E}$: c'est donc un minimum.

De plus, pour tout n, $x_0 - 1/n \notin \mathrm{E}$ donc :

$${f_g}'\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) \leqslant {f_d}'\left(x_0 - \frac{1}{n}\right) < s$$

De plus, $x_0 - 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} {x_0}^-$ et ${f_g}'$ est continue à gauche (question 4 partie II) donc ${f_g}'(x_0 - 1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} {f_g}'(x_0)$. L'inégalité large passant à la limite, ${f_g}'(x_0) \leqslant s$.

$$\boxed{{f_g}'(x_0) \leqslant s \leqslant {f_d}'(x_0)}$$

2.(d) D'après la question précédente, s appartient à l'intervalle $\left[\,{f_g}'(x_0)\,;{f_d}'(x_0)\,\right]$ (le sous-différentiel de f en x_0) donc, d'après la question 6.(a) de la question 2 :

$$\forall x \in \mathrm{I}, sx - f(x) \leqslant sx_0 - f(x_0)$$

En d'autres termes, l'ensemble $\{sx - f(x) \mid x \in \mathrm{I}\}$ est majoré par $sx_0 - f(x_0)$, et cet élément est atteint en $x = x_0$ donc c'est son maximum, donc sa borne supérieure.

$$\boxed{s \in \mathrm{I}^* \text{ et } f^*(s) = sx_0 - f(x_0)}$$

2.(e) Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $s < \alpha = \inf {f_d}'$ (en particulier, $\alpha \leqslant {f_d}'(x)$ pour tout x). Alors la fonction $g : x \mapsto sx - f(x)$ est dérivable à droite, de dérivée à droite $x \mapsto s - {f_d}'(x) \leqslant s - \alpha < 0$. D'après la question 5 de la partie II, cela implique que $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ (on peut prendre la limite en $-\infty$ car $\mathrm{I} = \mathbb{R}$) donc g n'est pas majorée : $s \notin \mathrm{I}^*$.

$$\boxed{\text{Si } s < \alpha \text{ alors } s \notin \mathrm{I}^*}$$

> On montrerait de même (en montrant au préalable qu'une fonction convexe dérivable à gauche dont la dérivée à gauche est minorée par une constante strictement positive tend vers $+\infty$ en $+\infty$, exo) que, si $b = +\infty$ (i.e. si I n'est pas majoré), si $\beta < +\infty$, et si $s > \beta$, alors $s \notin \mathrm{I}^*$. Si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, on en déduit donc que :
>
> $$]\,\alpha\,;\beta\,[\, \subset \mathrm{I}^* \subset [\,\alpha\,;\beta\,].$$
>
> On ne peut pas faire mieux : les bornes finies éventuelles de J peuvent ou non appartenir à I^*, il y a des exemples dans les deux cas. Par exemple, dans le cas où $f = \exp$, alors $\mathrm{J} = \mathbb{R}_+^*$ et on a déjà vu que $\mathrm{I}^* = \mathbb{R}_+$ donc $\alpha = 0 \in \mathrm{I}^*$ tandis que, si $f : x \mapsto -\sqrt{x}$, alors $\mathrm{J} = \,]-\infty\,;0\,[$ et on peut montrer (exo) que $\mathrm{I}^* = \mathrm{J}$. Dans ce cas, $\beta = 0 \notin \mathrm{I}^*$.

Partie IV. Convexité de f^*

1 C'est l'exercice 10 du chapitre 15.

$$\boxed{\text{Une borne supérieure de fonctions convexes est convexe.}}$$

Or, par définition, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $f^*(s) = \sup\{sx - f(x) \mid x \in \mathrm{I}\} = \sup\{f_x(s) \mid x \in \mathrm{I}\}$ où, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f_x(s) = sx - f(x)$. La fonction f_x étant convexe (c'est une fonction affine : la variable est s, pas x), on a le résultat voulu.

$$\boxed{f^* \text{ est convexe.}}$$

> On voit que la convexité de f n'est pas utile ! On peut donc définir la conjuguée d'une fonction quelconque, et celle-ci est convexe, même si f ne l'est pas !

2.(a) f' est strictement croissante car sa dérivée est strictement positive (réciproque fausse), continue (car dérivable : f est dérivable deux fois) donc, d'après le théorème de la bijection f' est une bijection de I dans $\mathrm{J} = f'(\mathrm{I})$ (et J est un intervalle, et g est monotone de même monotonie que f', et g est donc une bijection de $\mathrm{J} = f'(\mathrm{I})$ dans I).

$$\boxed{g \text{ est bien définie.}}$$

2.(b) Soit $s \in \mathrm{J}$. Soit $x \in \mathrm{I}$. Posons $\varphi(x) = sx - f(x)$, et donnons son tableau de variations pour prouver qu'elle est majorée et donner sa borne supérieure. φ est dérivable (deux fois) et $\varphi'(x) = s - f'(x)$.

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \geqslant 0 &\iff f'(x) \leqslant s \\ &\iff x \leqslant g(s) \end{aligned}$$

puisque g est strictement croissante et est la bijection réciproque de f'. On en déduit le tableau de variations de φ :

x		$g(s)$	
φ'	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\varphi(g(s))$	$\searrow$

On en déduit, d'une part, que φ est majorée donc que $s \in \mathrm{I}^*$, et d'autre part, que φ admet un maximum (donc une borne sup) égal à $\varphi(g(s))$ si bien que : $f^*(s) = \varphi(g(s)) = sg(s) - f(g(s))$.

$$\boxed{\text{Pour tout } s \in \mathrm{J}, f^*(s) = sg(s) - f(g(s))}$$

2.(c) f est dérivable et $s \mapsto s$ est dérivable. Pour prouver que f^* est dérivable, il suffit donc de prouver que g est dérivable, on pourra conclure avec les théorèmes généraux (f^* dérivable car somme, composée, produit de fonctions dérivables). Or, f' est dérivable et sa dérivée ne s'annule pas donc (cf. chapitre 14) sa réciproque est elle-même dérivable : g est dérivable, donc f^* est dérivable. Dès lors, si $s \in \mathrm{J}$ (rappelons que f' et g sont réciproques l'une de l'autre donc $f'(g(s)) = s$) :

$$\begin{aligned}
(f^*)'(s) &= sg'(s) + g(s) - f'(g(s)) + g'(s) \times f'(g(s)) \\
&= sg'(s) + g(s) - s + g'(s) \times s \\
&= g(s)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f^* \text{ est dérivable, de dérivée } g.}$$

2.(d) On a déjà dit que g est croissante : f^* est dérivable, de dérivée croissante, donc

$$\boxed{f^* \text{ est convexe.}}$$

Partie V. Biconjugaison

1 Si f est la fonction $x \mapsto |x|^p/p$ alors f^* est la fonction $x \mapsto |x|^q/q$ mais alors p est l'exposant conjugué de q donc f^{**} est la fonction $x \mapsto |x|^p/p$ c'est-à-dire que $f^{**} = f$.

Supposons enfin que $f = \exp$, si bien que f^* est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f^*(0) = 0$ et, pour tout $x > 0$, $f^*(x) = x\ln(x) - x$. Soit $s \in \mathbb{R}$ (on évalue f^* en x car on garde la variable s pour f^{**}) et soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $sx - f^*(x) = 0$ si $x = 0$ et $sx - f^*(x) = x(s+1) - x\ln(x)$. Notons cette quantité $g(x)$. g est dérivable et $g'(x) = s - \ln(x)$, d'où le tableau suivant :

x	0		e^s		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	e^s	$\searrow$	

On en déduit que $\mathrm{I}^* = \mathbb{R}$ et $f^{**} = \exp = f$.

$$\boxed{\text{Pour ces deux exemples, on a bien } f^{**} = f.}$$

2 Attention de bien lire la question : il n'est pas demandé de prouver que f^{**} et f ont le même domaine de définition, mais que f^{**} est définie en tout élément de I (donc que I est inclus dans le domaine de définition de f^{**}).

Soit donc $x \in \mathrm{I}$. Pour tout $x \in \mathrm{J}, f^*(x) = xg(x) - f(g(x))$. Calculons alors f^{**} : comme ci-dessus, s est réservée pour f^{**} et on garde x pour f^*. Soit donc $s \in \mathrm{I}$ et soit $x \in \mathrm{J}$. Posons $\varphi(x) = sx - f^*(x)$. On a alors :

$$\varphi(x) = sx - xg(x) + f(g(x))$$

On sait déjà que f^* est dérivable de dérivée g, si bien que $\varphi'(x) = s - g(x)$. On trouve de même que précédemment le tableau de variations de φ (rappelons que f' est strictement croissante donc préserve les inégalités) :

x		$f'(s)$	
φ'	$+$	0	$-$
$\varphi(x)$	$\nearrow$	$\varphi(f'(s))$	$\searrow$

On en déduit que φ est majorée, donc f^{**} est définie en s, et son maximum (donc sa borne supérieure) est

$$\begin{aligned}
\varphi(f'(s)) &= sf'(s) - f'(s)g(f'(s)) + f(g(f'(s))) \\
&= sf'(s) - f'(s) \times s + f(s) && g \text{ et } f' \text{ sont réciproques l'une de l'autre} \\
&= f(s)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f^{**} \text{ est définie sur I et } f^{**} = f}$$

> Ce n'est pas toujours le cas. On peut montrer que, si f est convexe, alors f^{**} est la fermeture de f, c'est-à-dire la fonction continue qui coïncide avec f sur l'intérieur de I. En particulier, si f est continue sur I tout entier, alors $f^{**} = f$.