Programme de colle - Semaine n°13

Chapitre 12 - Suites numériques

- cf. semaines 10 et 11.

Chapitre 13 - Limites et continuité

- cf. semaines 11 et 12.

Chapitre 14 - Dérivation

- Définition d'une fonction dérivable en a, nombre dérivé, fonction dérivée (la dérivabilité est une notion ponctuelle), fonction $\mathscr{C}^1$, notations $D(I,\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, exemples (fonctions constantes, identité, racine carrée, valeur absolue).
- Interprétation géométrique, définition de la tangente en a lorsque f est dérivable en a. Cas où $\tau_a(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$, tangente verticale.
- Une fonction dérivable en a est continue en a, réciproque fausse.
- Dérivabilité à gauche, à droite, notion de demi-tangente. Lien avec la dérivabilité. Application aux fonctions définies « par cas », au problème de raccordement d'équations différentielles (rapidement).
- Opérations sur les fonctions dérivables. Attention, ce sont des conditions suffisantes : par exemple, une somme de fonctions non dérivables peut être dérivable.
- Dérivabilité, caractère $\mathscr{C}^1$ des fonctions usuelles (fonctions polynômes, fonctions rationnelles, fonction exponentielle, fonction ln, fonctions trigonométriques). Application du théorème de dérivation d'une composée : exemple de $x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{\cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)}}$.
- Dérivabilité de $x \mapsto |x|^3$. La fonction $x \mapsto x + x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ est prolongeable en une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathscr{C}^1$ (et, en plus, on a $f'(0)=1$ mais f n'est croissante sur aucun voisinage de 0).
- Extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur. Ce n'est pas une condition suffisante, et c'est faux si ce n'est pas un point intérieur. Définition d'un point critique.
- Théorème de Rolle, interprétation géométrique. Utilisations successives : par exemple, si f est dérivable deux fois et s'annule n fois, alors f'' s'annule au moins $n-2$ fois.
- Égalité des accroissements finis, interprétation géométrique, interprétation cinématique. CNS de monotonie pour une fonction continue sur I dérivable sur $\mathring{I}$, CNS de stricte monotonie (« la fonction ne fait pas de palier »). Corollaire : une fonction monotone dont la dérivée s'annule un nombre fini de fois est strictement monotone.
- Inégalités des accroissements finis. Interprétation géométrique. Applications : si f est bornée et f' admet une limite L alors $L=0$; si $f' \geq 1/2$ alors f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; si f' est bornée sur $]\,0\,;1\,[$ alors f est bornée sur $]\,0\,;1\,[$. Caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables.
- Application aux suites récurrentes lorsque f est contractante (note aux colleurs : le théorème du point fixe est HP mais la démarche générale a été vue, il faudra quelques questions intermédiaires lorsque vous donnerez des exercices la semaine prochaine ; en particulier, l'existence et l'unicité du point fixe est en général prouvée grâce au théorème de la bijection et ne découle pas du fait que f est contractante).
- Certaines notions (EAF, caractérisation de la monotonie à l'aide de la dérivée) ne sont vraies que sur un intervalle, d'autres peuvent être étendues à une union d'intervalles (définition de la dérivabilité).
- Théorème de la limite de la dérivée, version dérivable, version $\mathscr{C}^1$, version où $f'(x) \xrightarrow[x\to a]{} \pm\infty$ (dans ce cas la réponse est négative). Attention, si f' n'a pas de limite en a, on ne peut pas conclure que f n'est pas dérivable. Attention, on ne prolonge pas f' par continuité ! Application : $x \mapsto e^{-1/x^2}$ est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (note aux colleurs : on prouvera que ce prolongement est en fait $\mathscr{C}^\infty$ dans le chapitre 19).
- Dérivabilité des fonctions réciproques.
- Dérivées successives, fonctions $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$. Opérations. La réciproque d'une fonction bijective dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$) dont la dérivée ne s'annule pas est dérivable n fois (respectivement $\mathscr{C}^n$, $\mathscr{C}^\infty$). Une solution de l'équation différentielle $y' = 1+y^2$ est $\mathscr{C}^\infty$. Fonctions usuelles. Dérivées successives de $x \mapsto x^n$, la dérivée n-ième du sinus est $x \mapsto \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{2}\right)$ (résultat analogue pour le cosinus).
- Formule de Leibniz. Exemple : dérivée n-ième de $x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.

- Fonctions complexes de la variable réelle. Une fonction est dérivable si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont. La plupart des résultats sont encore valables (y compris le fait que $f' = 0$ si et seulement si f est constante). Attention, le théorème de Rolle n'est pas valable sur $\mathbb{C}$ (mais l'IAF avec une valeur absolue est encore valable, avec un module à la place). Dérivée n-ième de $x \mapsto e^x \times \sin(x)$ à l'aide de l'exponentielle complexe.

Chapitres au programme

Chapitre 12 (exercices uniquement), chapitre 13 (cours et exercices), chapitre 14 (cours uniquement).

Questions de cours

1. L'examinateur demande trois écritures de limites du type $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} L$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} L$ parmi les 6 possibles.
2. Lien entre limite à droite, limite à gauche, et limite en a (sans démonstration).
3. L'examinateur donne une fonction f explicite et demande de prouver qu'elle n'a pas de limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ à l'aide de deux suites.
4. Donner toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ (démonstration : l'élève peut aller vite sur certaines récurrences, sur la synthèse, ou « demêmiser », en étant conscient que l'examinateur peut lui demander de détailler : question à préparer, donc).
5. Définition d'une fonction uniformément continue. L'examinateur donne une fonction explicite simple et demande de prouver qu'elle n'est pas uniformément continue.
6. Théorème de Heine (sans démonstration).
7. Définition d'une fonction k-lipschitzienne, d'une fonction lipschitzienne (sans faire de faute à lipschitzienne). L'examinateur donne une fonction explicite simple et demande de prouver qu'elle n'est pas lipschitzienne.
8. TVI (démonstration avec la méthode de la borne supérieure).
9. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue admet un point fixe (démonstration, avec un joli dessin).
10. Théorème de la bijection (sans démonstration).
11. Image d'un segment par une fonction continue, théorème des bornes atteintes (sans démonstration).
12. Théorème de la limite monotone, cas croissant (sans démonstration mais avec un joli dessin).
13. Si f est dérivable en a alors f est continue en a (démonstration).
14. L'examinateur donne une fonction explicite (qui peut être très moche) et demande de calculer sa dérivée à l'aide du théorème de dérivation d'une composée (on peut avoir besoin de l'appliquer plusieurs fois, comme dans l'exemple vu en classe).
15. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur (démonstration). Contre-exemple si ce n'est pas un point intérieur, et un exemple qui prouve que ce n'est pas une condition suffisante.
16. Théorème de Rolle (démonstration, avec un joli dessin).
17. Si f est dérivable deux fois et s'annule n fois, alors f'' s'annule au moins $n-2$ fois (démonstration).
18. Égalité des accroissements finis (démonstration, avec un joli dessin).
19. Les deux inégalités des accroissements finis (sans démonstration).
20. Si f est dérivable et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et si f' admet une limite $L \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ alors $L = 0$ (démonstration).
21. Théorème de la limite de la dérivée, uniquement la version $\mathscr{C}^1$ (sans démonstration). Application à $x \mapsto e^{-1/x^2}$ (démonstration).
22. Formule de Leibniz (démonstration).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Vacances !!!
- Fonctions convexes.
- Relations binaires sur un ensemble.
- Début du dénombrement ?

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 39, 40, 42, 44, 45, 47, 48, 49, 51, 52, 54, 56, 57, 60, 65 du chapitre 14.

Cahier de calcul

Rien cette semaine.