Chapitre 25

Séries numériques

Si rien n'est précisé, les suites sont à valeurs complexes.

I Généralités sur les séries numériques

I.1 Définitions

Les séries numériques sont des cas particuliers des suites. Cependant elles possèdent de nombreuses propriétés particulières que nous allons étudier dans ce chapitre.

On parle ici de séries numériques par opposition aux séries de fonctions, qui sont au programme en deuxième année.

Définition. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. On appelle série (numérique) de terme général u_n, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall N\in\mathbb{N},\qquad S_N=\sum_{n=0}^{N}u_n.$$

- Si $n\in\mathbb{N}, u_n$ est appelé terme d'ordre (ou d'indice, ou de rang) n de la série.
- Si $N\in\mathbb{N}$, S_N est appelée somme partielle d'ordre (ou d'indice, ou de rang) N de la série.

L'indice est muet : on parlera aussi de la série $\sum u_k$, de la série $\sum u_p$ etc. ainsi que de la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\forall n\geqslant 0,\ S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

Remarque : Comme pour les suites, une série peut être définie à partir du rang $0,1,2$ ou plus généralement à partir d'un rang $n_0\in\mathbb{N}$ (par exemple, les séries du type $\sum 1/n^\alpha$ sont définies à partir du rang 1). En général, il n'y a aucune ambiguïté : on prend le plus petit n à partir duquel la suite de terme général u_n est définie (par exemple, pour $u_n=1/n$, on démarre à partir du rang 1, et pour $u_n=\ln(n-1)$, à partir du rang 2). Dans la suite, on supposera que les séries commencent en 0, les autres cas s'y ramenant facilement comme dans le chapitre sur les suites.

Pour lever toute ambiguïté, on trouve dans certains sujets la notation $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0}u_n$, mais cette notation est dangereuse car il y a confusion avec la somme de la série (voir ci-dessous).

Remarque : On a $u_0=S_0$ et, pour tout $n\geqslant 1$, $u_n=S_n-S_{n-1}$.

Exemples :

- Si $q\in\mathbb{C}$, la série $\sum q^n$ est appelé série géométrique de raison q. C'est la suite de terme général $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}q^n$ ou encore la série de terme général q^n et, si $N\in\mathbb{N}$, S_N est sa somme partielle d'ordre N.
- Si $z\in\mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum\frac{z^n}{n!}$ est appelé série exponentielle (cf. paragraphe IV.4.).
- La série $\displaystyle\sum\frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.

La série harmonique est un exemple de série définie à partir du rang 1.

On se donne dans la suite du chapitre une série $\sum u_n$.

I.2 Séries convergentes et divergentes

Définition (nature d'une série).

- On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ converge, c'est-à-dire s'il existe $S\in\mathbb{R}$ tel que $S_N=\displaystyle\sum_{n=0}^{N}u_n\xrightarrow[N\to+\infty]{}S$.
  La limite est appelée la somme de la série, et on note $S=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
- Si la suite $(S_N)_{N\geqslant 0}$ diverge (c'est-à-dire si elle tend vers $\pm\infty$ ou si elle n'admet pas de limite), on dit que la série $\sum u_n$ diverge.
- Étudier la nature d'une série consiste à déterminer si elle converge ou diverge. Deux

On la note parfois $S=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ ou encore $S=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_n$

séries numériques sont dites de même nature si elles convergent toutes les deux ou si elles divergent toutes les deux.

Remarque : En d'autres termes, une série converge si la suite de ses sommes partielles converge, et la somme de la série est (quand elle existe) la limite des sommes partielles.

Exemples :

- On a déjà vu dans en DM que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$ converge vers $\dfrac{\pi^2}{6}$: par conséquent, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et sa somme est égale à $\dfrac{\pi^2}{6}$. On note donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite constante égale à $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = (N+1)\lambda$$
qui converge si et seulement si $\lambda = 0$. Ainsi la série $\sum \lambda$ converge si et seulement si $\lambda = 0$.
- Séries géométriques (cf. III.3) : soit $q \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ (on sait déjà par l'exemple précédent que la série diverge pour $q = 1$). Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$
  - ⋆ Si $|q| < 1$, alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1}{1-q}$. Par conséquent la série $\sum q^n$ converge et sa somme est égale à $\dfrac{1}{1-q}$. On note donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.
  - ⋆ Si $|q| > 1$ ou $|q| = 1, q \neq 1$, alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge donc $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge. Par conséquent la série $\sum q^n$ diverge.
- Série harmonique : pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. On a
$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} \geqslant \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$
Si $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, alors $(S_{2N}-S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. L'inégalité large passe à la limite donc $0 \geqslant 1/2$, ce qui est absurde. Ainsi $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ diverge. Cela signifie que la série harmonique $\sum 1/n$ diverge.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $(-1)^n$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } N \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } N \text{ est impair} \end{cases}.$$
La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite : ainsi la série $\sum(-1)^n$ diverge.

Remarque : Si la série $\sum u_n$ converge et si $p \geqslant 1$, alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{n=p}^{N} u_n\right)_{N\geqslant p}$ converge et sa limite est notée $\displaystyle\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$. La convergence éventuelle d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite : seul compte ce qui se passe « au voisinage de $+\infty$ ».

⚠ Ne pas confondre la notation $\sum u_n$ qui désigne une série (il s'agit d'une suite), la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ qui désigne la somme partielle d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de la série (il s'agit d'un nombre) et la notation $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série dans le cas où elle converge. On n'utilisera la dernière notation que lorsque l'on aura montré au préalable que la série converge (de la même manière que l'on ne parle de limite d'une suite que lorsque l'on a montré que celle-ci existe).

⚠ Sur $\mathbb{R}$, dire que $q < 1$ ne suffit pas, il faut dire que $|q| < 1$ ou $q \in \,]-1\,;1\,[$.

Vous direz l'année prochaine que la série entière $\sum x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

⚠ Une série réelle peut diverger sans que les sommes partielles tendent vers $\pm\infty$! Elles peuvent aussi ne pas avoir de limite !

En particulier, deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes sont de même nature.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Méthode : si on veut montrer un résultat concernant une somme infinie (linéarité, etc.), on le montre pour une somme finie et (si c'est possible) on passe à la limite.

Démonstration. Soit $p \geqslant N+1$. On a

$$\sum_{n=0}^{p} u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{p} u_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Par unicité de la limite, on a le résultat. $\square$

Remarque : On a dit que la convergence éventuelle ne dépendait pas des premiers termes de la série, mais la somme oui : en effet, par exemple, si $u_1 = 2023$ et si, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1/n^2$ alors la série $\sum u_n$ converge (la convergence ne dépend pas des premiers termes) et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = u_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 2023 + \frac{\pi^2}{6} - 1 = \frac{\pi^2}{6} + 2022.$$

Alors que la limite d'une suite ne dépend pas des premiers termes de la suite.

Définition. Soit $\sum u_n$ une série **convergente** de somme S. Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle reste d'ordre N, noté R_N, la quantité

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Le reste n'existe que lorsque la série converge.

La somme définissant le reste d'ordre N commence en $N+1$.

Remarques :

- En d'autres termes, le reste d'ordre N est la différence entre la somme et la somme partielle d'ordre N, et on a également $S = S_N + R_N$ c'est-à-dire que la somme est égale à la somme partielle plus le reste.
- Par convention (rarement), on pose parfois $R_{-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S$.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $R_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. En d'autres termes, le reste d'une série convergente tend vers 0.

Démonstration. Immédiat car $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$ $\square$

Théorème (linéarité). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

On généralise aisément à un nombre (fini !) quelconque de séries convergentes.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

car les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

En d'autres termes, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge (car la suite des sommes partielles converge) et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$
□

Remarque : ⚠ Attention, il faut impérativement montrer que **les deux** séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **avant** de casser la somme. Par exemple
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$
Ainsi $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ converge. Pourtant, écrire
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$$
n'a aucun sens car les deux séries $\sum \dfrac{1}{n}$ et $\sum \dfrac{1}{n+1}$ divergent.

⚠ Cependant, une somme de séries divergentes peut converger : toujours penser en termes de limites. Par exemple, les deux séries $\sum 1/n$ et $\sum -1/n$ divergent mais la série nulle converge.

Remarque : Si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et si $\sum \lambda u_n$ converge alors $\sum u_n = \sum \dfrac{1}{\lambda} \times \lambda u_n$ converge. En particulier, $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ sont de même nature.

Proposition. Soit $\sum u_n$ une série complexe. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si les deux séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent.

Démonstration. Vient du fait qu'une suite converge si et seulement si la suite de ses parties réelles et la suite de ses parties imaginaires convergent (cf. chapitre 12). Dès lors, la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les suites des sommes partielles des séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, ce qui permet de conclure.

Proposition. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries réelles convergentes et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$. Si, de plus, il existe n_0 tel que $u_{n_0} < v_{n_0}$ alors l'inégalité est stricte.

En particulier, la somme d'une série positive convergente est positive (prendre $u_n = 0 \leqslant v_n$).

⇝ Exercice.

Remarque : En conclusion, toutes les propriétés vraies pour les sommes finies sont encore valables pour les sommes infinies, **à condition que** toutes les sommes infinies existent bien, c'est-à-dire que toutes les séries convergent. Il faut donc montrer leur convergence **avant** d'appliquer ces résultats.

⚠ Il y a deux exceptions !

- Une somme infinie de fonctions continues n'est pas forcément continue ! En particulier, on ne peut pas passer à la limite dans une somme infinie, par exemple on ne peut pas affirmer directement que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \xrightarrow[q\to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} 0^n = 1$$
(on rappelle que $0^0 = 1$). De même pour dérivable etc.
- On ne peut pas intervertir une intégrale et une somme infinie, ni deux sommes infinies, c'est-à-dire qu'en général,
$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \neq \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}.$$

Pour montrer qu'une somme infinie de fonctions continues est continue, vous aurez des théorèmes très puissants l'an prochain.

Idem, vous aurez des théorèmes l'interversion série-intégrale l'an prochain. Pour les sommes doubles, on en reparle dans le chapitre 35.

I.3 Une condition NÉCESSAIRE importante

Théorème. Si $\sum u_n$ converge alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En d'autres termes, le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Démonstration. Notons S la somme de la série. Alors $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ et $S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc $u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

⚠ LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE ! ! ! ! ! !

Exemple : $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

En d'autres termes, une série diverge grossièrement (et en particulier elle diverge) quand son terme général ne tend pas vers 0.

Théorème. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 alors la série $\sum u_n$ diverge : on dit qu'elle diverge grossièrement (DVG).

Démonstration. C'est la contraposée du théorème précédent. □

Exemples : $\sum(-1)^n$ diverge, $\sum e^{-1/n^2}$ diverge et, si $\lambda \neq 0$, $\sum \lambda$ diverge.

I.4 Série télescopique associée à une suite

Proposition. La **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la **série** $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, et si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L, alors la série converge vers $L-u_0$. La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est appelée série télescopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a évidemment des résultats analogues pour les séries $\sum(u_n - u_{n+1})$ et $\sum(u_n - u_{n-1})$, qui sont parfois plus simples à étudier.

Remarque : Avoir $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ne suffit pas pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

On peut évidemment généraliser au cas d'une suite qui ne démarre pas en 0. Par exemple, $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge, et si la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers L, alors la série converge vers $L-u_1$.

Démonstration. Il suffit de voir que pour tout $N \geqslant 0$,

$$\sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0.$$

Ainsi, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_{N+1}-u_0)_{N\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge. □

Remarque : La simplification télescopique est l'"analogue discret du théorème fondamental de l'analyse. La suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tout comme la dérivée f' définie par la limite du taux d'accroissement est la dérivée de la fonction f. De plus, la somme est l'équivalent discret de l'intégrale (une intégrale n'est d'ailleurs qu'un S stylisé) : il y a donc un lien étroit entre les formules

$$\int_a^d f'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_0$$

Nous reparlerons un peu de cette idée dans le paragraphe II.4.b, lorsque nous nous intéresserons à la transformation d'Abel.

I.5 Convergence absolue

I.5.a Définition et lien avec la convergence

Définition. La série $\sum u_n$ converge absolument (CVA) si la série $\sum |u_n|$ converge.

En d'autres termes, la série converge absolument lorsque la série des modules (ou la série des valeurs absolue lorsqu'on est sur $\mathbb{R}$) converge.

Théorème. Si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n$ converge et

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Pour une série à termes positifs (réels, donc), la convergence absolue est équivalente à la convergence.

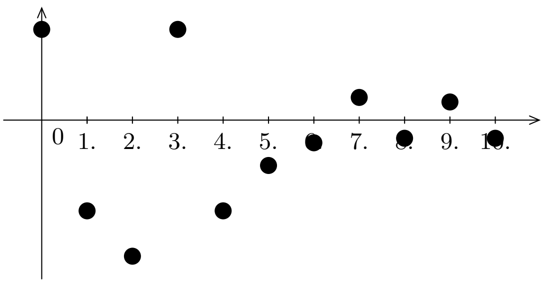
Remarque : Pour pouvoir appliquer l'inégalité triangulaire, il faut prouver **avant** que la série converge absolument, i.e. que la somme de droite existe bien. Comme on l'a déjà dit : ne jamais manipuler une somme infinie avant d'avoir montré son existence.

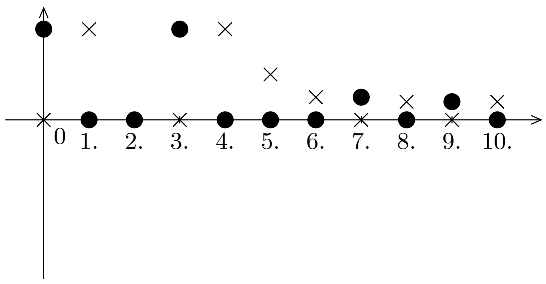
Démonstration. Supposons dans un premier temps que (u_n) soit à valeurs réelles.

On définit deux nouvelles suites : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \max(u_n, 0) \qquad \text{et} \qquad w_n = \max(-u_n, 0)$$

Pour être clair : quand $u_n \geqslant 0$, alors $v_n = u_n$ et $w_n = 0$, tandis que si $u_n \leqslant 0$, alors $v_n = 0$ et $w_n = 0$. Faisons un dessin : ci-dessous, à gauche, on a représenté la suite (u_n), et à droite, les suites (v_n) (avec des ronds) et la suite (w_n) (avec des croix).





On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n - w_n$ et $|u_n| = v_n + w_n$. En effet :

- Si $u_n \geqslant 0$ alors $v_n = u_n = |u_n|$ et $w_n = 0$ donc $u_n = v_n - w_n$ et $|u_n| = v_n + w_n$.
- Si $u_n \leqslant 0$ alors $v_n = 0$ et $w_n = -u_n = |u_n|$ donc $u_n = v_n - w_n$ et $|u_n| = v_n + w_n$.

Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^{N} |u_n| = \sum_{n=0}^{N} v_n + \sum_{n=0}^{N} w_n.$$

Or, les deux sommes du membre de droite sont positives (car $v_n \geqslant 0$ et $w_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |u_n| \geqslant \sum_{n=0}^{N} v_n$. Or, la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N} |u_n|\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, convergente (car la série $\sum u_n$ converge absolument) donc est majorée par sa limite. En particulier, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| \geqslant \sum_{n=0}^{N} v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, la suite $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante, et puisqu'elle est majorée, elle converge, c'est-à-dire que la série $\sum v_n$ converge De même, $\sum w_n$ converge. Puisque $\sum u_n = \sum (v_n - w_n)$, la série $\sum u_n$ converge.

Rappelons qu'une série converge, par définition, quand la suite de ses sommes partielles converge.

Revenons au cas général i.e. au cas où (u_n) est à valeurs complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\operatorname{Re}(u_n)| \leqslant |u_n|$ et $|\operatorname{Im}(u_n)| \leqslant |u_n|$. Les suites $(|\operatorname{Re}(u_n)|)$ et $(|\operatorname{Im}(u_n)|)$ étant positives, on montre de même que ci-dessus que les séries $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$ et $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$ convergent (la suite des sommes partielles est croissante et majorée par la somme de la série $\sum |u_n|$). En d'autres termes, les séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$ convergent absolument donc convergent d'après ce qui précède (ce sont des séries réelles). On en déduit que la série $\sum u_n$ converge.

Montrons enfin l'inégalité triangulaire. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire (pour un nombre fini de termes, cf. chapitre 7),

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{N} |u_n| \qquad \square$$

On conclut en disant que l'inégalité large passe à la limite.

I.5.b Séries semi-convergentes et Critère des Séries Alternées

⚠ La réciproque du théorème précédent est fausse ! Par exemple, on a montré en TD que

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln(2)$$

Ainsi, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$, alors que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge. En d'autres termes, la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument. Cela justifie la définition suivante.

Définition. Une série $\sum u_n$ est dite semi-convergente lorsqu'elle converge mais ne converge pas absolument.

Exemple : La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Multiplier une série par un scalaire non nul ne modifie pas la nature de cette série. En particulier, multiplier une série par -1 ne change pas sa nature.

Dans le cas des séries **réelles**, nous disposons d'un résultat puissant et très important pour prouver qu'une série converge lorsqu'elle ne converge pas absolument.

Théorème (Critère des Séries Alternées). Soit $\sum(-1)^n u_n$ une série vérifiant les deux conditions suivantes :

- $u_n \geqslant 0$ pour tout n (et donc $(-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^n$: on dit qu'elle est alternée).
- La suite (u_n) décroît vers 0 (c'est-à-dire que le terme général de la série $\sum(-1)^n u_n$ décroît en valeur absolue vers 0).

Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge. De plus, pour tout N, le reste R_N est du signe de $(-1)^{N+1}$ et $|R_N| \leqslant u_{N+1}$.

⚠ Le critère des séries alternées est un théorème pour les séries **réelles**.

Si $N \in \mathbb{N}$, rappelons que

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$$

Ainsi, la dernière partie du critère des séries alternées se reformule ainsi : « le reste est du signe du premier terme négligé, et est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé ». En particulier, si on note S la somme de la série, alors S est du signe du premier terme de la série, et est majorée en valeur absolue par a_0.

Démonstration. Notons comme d'habitude $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n u_n$. Montrons que les deux suites $(S_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit $N \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord,

$$\begin{aligned} S_{2N+2} - S_{2N} &= \sum_{n=0}^{2N+2} (-1)^n u_n - \sum_{n=0} (-1)^n u_n \\ &= (-1)^{2N+2} u_{2N+2} + (-1)^{2N+1} u_{2N+1} \\ &= u_{2N+2} - u_{2N+1} \qquad \square \end{aligned}$$

  La suite (u_n) étant décroissante, $u_{2N+2} - u_{2N+1} \leqslant 0$: la suite (S_{2N}) est décroissante.
- De même on montre que $S_{2N+3} - S_{2N+1} \geqslant 0$: la suite (S_{2N+1}) est croissante.

- Enfin, $S_{2N+2} - S_{2N+1} = u_{2N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

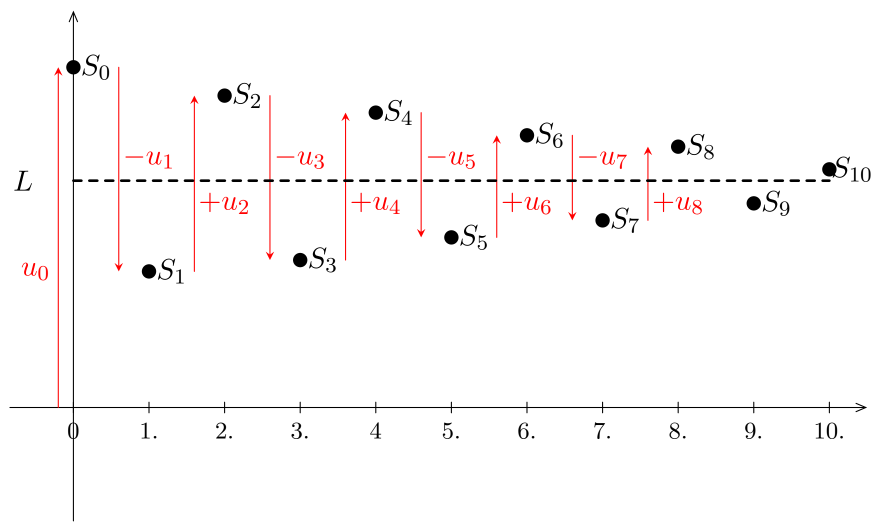
Les deux suites sont donc adjacentes : par conséquent, elles convergent et ont la même limite, qu'on note S. On en déduit que (S_N) converge vers S : la suite des sommes partielles converge, la série converge.

Rappelons qu'une suite converge vers une limite L si et seulement si la suite de ses termes d'indice pair et la suite de ses termes d'indices impairs convergent vers la même limite L.

De plus, la suite (S_{2N}) étant décroissante, et la suite (S_{2N+1}) croissante, $S_{2N+1} \leqslant S \leqslant S_{2N}$. En d'autres termes : les sommes d'indice pair sont supérieures à la somme de la série, et c'est le contraire pour les sommes d'indice impair. Dès lors, si N est pair, alors $S \leqslant S_N$ donc $R_N = S - S_N \leqslant 0$ et $(-1)^{N+1}$ est négatif car $N+1$ est impair donc R_{N+1} est du signe de $(-1)^{N+1}$. De même si N est impair.

Enfin, que N soit pair ou impair, S est compris entre S_N et S_{N+1} donc la distance entre S et S_N est inférieure à la distance entre S_N et S_{N+1} donc $|S - S_N| \leqslant |S_{N+1} - S_N|$ c'est-à-dire que $|R_{N+1}| \leqslant |(-1)^{N+1}u_{N+1}| = u_{N+1}$.

Si on veut s'en convaincre, on peut séparer les cas selon la parité de N (par exemple, si N est pair, alors $S_{N+1} \leqslant S \leqslant S_N$ donc $|S - S_N| = S_N - S \leqslant S_N - S_{N+1} = |S_N - S_{N+1}|$) mais ce n'est pas nécessaire et cela se voit très bien sur le dessin ci-dessous.



Exemples : Les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ convergent (alors qu'aucune ne converge absolument, cf. paragraphes III.2 et III.5.c).

Remarque : Comme on l'a dit ci-dessus, on peut appliquer le critère des séries alternées pour donner le signe d'une série alternée, et la majorer en valeur absolue. En effet, si $\sum(-1)^n u_n$ vérifie les hypothèses du CSA, alors la somme de la série est du signe du premier terme et est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme.

Exemple : Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$ converge, donner le signe de sa somme et la majorer en valeur absolue.

On a une série qui vérifie les conditions du critère des séries alternées : on a une série de signe alterné, et $\left(\frac{1}{n\ln(n-1)}\right)$ converge en décroissant vers 0. La somme est donc du signe du premier terme, à savoir du terme d'indice $n = 3$ (premier terme pour lequel le terme de la suite est défini) donc la somme est négative, et la somme est majorée en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme, donc

Parfois, ce n'est pas aussi simple : la suite ne décroît pas dès le début, donc il faut couper la somme infinie pour la faire commencer au moment où la suite décroît, cf. exercice 29.

$$\left|\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}\right| \leqslant \frac{1}{3\ln(3-1)} = \frac{1}{3\ln(2)}$$

I.5.c Introduction à la sommabilité, sommation par paquets

Nous parlerons de ce sujet plus en détails dans le chapitre 35. Pour l'instant, contentons-nous de dire que lorsque la série converge ABSOLUMENT, on peut « sommer par paquets », le cas le plus fréquent étant la séparation termes pairs/termes impairs. Par exemple, la série $\sum 1/n^2$ converge donc converge absolument (nous dirons au chapitre 35 que la famille $(1/n^2)_{n\geqslant 1}$ est sommable) car elle est à termes positifs si bien que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1,\ n \text{ pair}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1,\ n \text{ impair}}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Bref, quand la série converge ABSOLUMENT (en particulier lorsqu'elle converge et est à termes positifs), c'est la fête !

La convergence ne suffit pas ! La raison est que si la série converge mais pas absolument, on peut réorganiser les termes pour que la somme ait une valeur différente (même si c'est contre-intuitif). Pour l'instant, croyez-moi sur parole (même si vous pouvez jeter un oeil à l'exercice 42), on en reparle.

II Séries à termes positifs

Pour montrer qu'une série $\sum u_n$ dont les termes ne sont pas de signe constant converge, on étudie $\sum |u_n|$ pour montrer la convergence absolue. On se ramène donc à l'étude d'une série à termes positifs.

Sous-entendu : réels !

II.1 Condition nécessaire et suffisante de convergence

Théorème. Une série $\sum u_n$ à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée, et si ce n'est pas le cas, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.

Démonstration. Il suffit de voir que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante puisque $\sum u_n$ est à termes positifs.

On a un résultat analogue pour les séries à termes négatifs (mais elles sont plus rares) : une série à termes négatifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est minorée, et si ce n'est pas le cas, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$.

Remarque : On a déjà vu avec $\sum(-1)^n$ que c'est faux si la série n'est pas à termes positifs.

II.2 Théorèmes de comparaison

Théorème (admis). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs. Si $\sum v_n$ converge et si $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. Soit n_0 tel que pour tout $n\geqslant n_0, u_n\leqslant v_n$. Soit $N\geqslant n_0$.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}u_n &= \sum_{n=0}^{n_0-1}u_n+\sum_{n=n_0}^{N}u_n\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{n_0-1}u_n+\sum_{n=n_0}^{N}v_n\end{aligned}$$

Or, $\sum v_n$ est une série à termes positifs convergente, donc la suite $\left(\sum_{n=n_0}^{N}v_n\right)_{N\geqslant n_0}$ est croissante et converge, donc est majorée par sa limite. Dès lors,

$$\sum_{n=0}^{N}u_n\leqslant\sum_{n=0}^{n_0-1}u_n+\sum_{n=n_0}^{+\infty}v_n.$$

Finalement, la série $\sum u_n$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée. D'après le paragraphe précédent, la série $\sum u_n$ converge. $\square$

Corollaire. Avec les mêmes hypothèses sur $\sum u_n$ et $\sum v_n$, si la série $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum v_n$ diverge.

En clair : « plus petit qu'un truc convergent, c'est convergent, et plus grand qu'un truc divergent, c'est divergent » (évidemment, pour les séries à termes positifs). Par contre, « plus petit qu'un truc divergent ou plus grand qu'un truc convergent », on ne peut pas conclure.

Remarques :

- Si $\sum u_n$ converge ou si $\sum v_n$ diverge, on ne peut pas conclure. Par exemple, si $u_n = 0$ et $v_n = 1/n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $u_n \leqslant v_n$, $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.
- C'est faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, pour tout $n \geqslant 1, -\dfrac{1}{n} \leqslant 0$ mais $\sum -\dfrac{1}{n}$ diverge et $\sum 0$ converge.

Corollaire. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.

Démonstration. Supposons que $u_n \sim v_n$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n/2 \leqslant u_n \leqslant 2v_n$.

Rappelons que si λ est un réel non nul, alors $\sum \lambda v_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

- Premier cas : $\sum u_n$ converge. Alors $\sum v_n/2$ converge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, donc $\sum v_n$ converge.
- Deuxième cas : $\sum u_n$ diverge. Alors $\sum 2v_n$ diverge d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, donc $\sum v_n$ diverge. □

Supposons à présent que $u_n = \mathrm{o}(v_n)$. Alors $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et on conclut de la même manière. Enfin, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, il existe M tel que $u_n \leqslant M v_n$ à partir d'un certain rang, et on conclut encore de la même manière.

Exemple : Nature de la série $\sum \dfrac{n+1}{n^2}$. On a $\dfrac{n+1}{n^2} \sim \dfrac{1}{n}$. **On a des séries à termes positifs équivalents donc elles sont de même nature.** Puisque $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique) alors $\sum \dfrac{n+1}{n^2}$ diverge.

Rédaction type, à connaître absolument. En particulier, le mot « positif » doit apparaître. Dire « par théorème de comparaison » est insuffisant et sera sanctionné, à l'écrit comme à l'oral.

Exemple : Déterminons la nature de la série $\sum e^{-n^2}$. On a $n^2 e^{-n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ donc $e^{-n^2} = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Or, la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc, d'après le thórème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum e^{-n^2}$ converge.

Remarques :

- La méthode que l'on vient d'employer est classique : on sait que l'exponentielle tend vers 0 « plus vite que toute puissance de $1/\ n$ » par croissances comparées. On se dit que la série va converger : on veut donc dire que e^{-n^2} est négligeable devant une puissance de $1/n$ dont la série converge. On montre donc que e^{-n^2} est négligeable devant $1/n^2$. On pourrait presque dire qu'on « force » la convergence en multipliant par n^2. Y penser quand on a une exponentielle !
- ⚠ Les théorèmes de comparaison sont faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, on a vu dans le paragraphe I.5.b que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge et on verra dans le paragraphe iv.5.c que la série $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge. Il s'ensuit que la série $\sum \left(\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n\ln(n)}\right)$ diverge. Pourtant $\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1}{n\ln(n)} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge. Nous verrons un autre exemple dans l'exercice 27.

  La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Toujours penser en termes de limites.
- Ce corollaire est toujours vrai pour les séries à termes négatifs car si $u_n \leqslant 0$ alors $-u_n \geqslant 0$ et on applique le corollaire à $\sum -u_n$. Attention, comme on vient de le voir, il n'est pas valide quand les séries ne sont pas de signe constant (typiquement, quand il y a un $(-1)^n$).

Rappelons que $\sum u_n$ et $\sum -u_n$ sont de même nature.

II.3 Retour aux séries complexes

Proposition. Soient $\sum u_n$ une série à termes complexes, $\sum v_n$ une série à termes positifs. On suppose que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Démonstration. Il suffit de voir que $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$ et on applique le corollaire du paragraphe précédent.

Rappelons que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si et seulement s'il existe M tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$ à partir d'un certain rang. En particulier, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ alors $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$ et $u_n = \mathrm{O}(|v_n|)$ (pour le corollaire).

Corollaire. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries (complexes). On suppose que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge absolument. Alors $\sum u_n$ converge absolument et donc converge.

Démonstration. $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ donc $u_n = \mathrm{O}(|v_n|)$ ce qui permet de conclure.

Remarque : Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Les deux résultats précédents sont donc encore valables avec un $\mathrm{o}()$ à la place d'un $\mathrm{O}()$.

II.4 Quatre applications

On rappelle que la série $\sum 1/n^2$ converge. On généralisera ce résultat dans le paragraphe iv.2.

II.4.a Développement asymptotique d'une série alternée :

Les cas où il faut appliquer directement le Critère des Séries Alternées sont nombreux, à l'écrit comme à l'oral. Cependant, à l'oral, on verra souvent le cas de figure un peu moins simple suivant : on a une série alternée, mais le terme général ne décroît pas en valeur absolue, ou alors la décroissance est difficile à prouver. Le raisonnement est alors toujours le même : faire un DL ou un développement asymptotique jusqu'à avoir une quantité dominée ou négligeable devant le terme général d'une série qui converge absolument : on applique le CSA pour les premiers termes, et le corollaire précédent donne la nature du $\mathrm{O}()$ ce qui donne la nature de la série étudiée.

Exemple : Donner la nature de la série $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Soit $n \geqslant 1$. Puisque $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en faisant un DL du ln :

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le premier terme est le terme général d'une série convergente, et $\sum 1/n^2$ est une série à termes positifs convergente donc le $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ est le terme général d'une série convergente : par somme, la série $\displaystyle\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$ converge.

La série est alternée puisque le terme général est du signe de $(-1)^n$. On a envie d'appliquer le CSA, mais la décroissance du terme général en valeur absolue ne semble pas simple à donner. Il est plus simple d'appliquer la méthode évoquée ci-dessus.

II.4.b Transformation d'Abel (HP mais très classique)

Le cas de figure suivant se produit assez souvent : on dispose d'une suite (a_n) qui décroît vers 0 (donc une suite réelle) et d'une série $\sum b_n$ (qui peut être à valeurs complexes) dont les sommes partielles sont bornées, et on s'intéresse à la série $\sum a_n \times b_n$. Commençons par un exemple.

Exemple : Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Donnons la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$.

Ce paragraphe est HP et plutôt difficile mais le relire régulièrement pourra vous faire progresser (sans mentionner le fait que la transformation d'Abel est un classique des concours, à l'écrit comme à l'oral).

Lorsque $\theta \equiv 0[2\pi]$, la série est la série harmonique, qui diverge. Lorsque $\theta \equiv \pi[2\pi]$, la série est la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui converge d'après le critère des séries alternées (et on l'a aussi prouvé en TD). Supposons à présent $\theta \not\equiv 0[\pi]$. Si $N \geqslant 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n} \qquad \text{et} \qquad T_N = \sum_{n=1}^{N} e^{in\theta}$$

Soit $N \geqslant 1$. Toute l'astuce de la transformation d'Abel consiste à voir que, si $n \geqslant 1$, $e^{in\theta} = T_n - T_{n-1}$ (avec la convention $T_0 = 0$).

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n - T_{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{T_{n-1}}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{T_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T_n}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} T_n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{T_N}{N} \end{aligned}$$

On cherche à prouver que la suite (S_N) converge. On montre facilement (cf. chapitre 7) que, puisque $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, alors, pour tout $n \geqslant 1$,

$$T_n = e^{i\theta} \times \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

En particulier, $|T_n| \leqslant 1/|\sin(\theta)|$: la suite (T_n) est bornée. Dès lors, $T_N/N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. De plus, pour tout n,

$$\left| T_n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| = |T_n| \times \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right|$$

Or, la suite $(1/n)$ est décroissante si bien que $1/n \geqslant 1/(n+1)$ donc :

$$\left| T_n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right| = |T_n| \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Or, la **suite** de terme général $1/n$ converge vers 0 donc la série télescopique associée converge. Dès lors,

Multiplier par une constante non nulle ne change pas la nature de la série.

$$\frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général

$$\left| T_n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)\right|$$

converge absolument et donc converge. En d'autres termes, la somme apparaissant dans l'expression de S_N ci-dessus admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$. Finalement, (S_N) admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$: la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.

Remarque : En conclusion, la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge pour tout $\theta \not\equiv 0[2\pi]$. La transformation d'Abel est un moyen puissant de prouver la convergence d'un certain type de série :

Vous direz l'année prochaine que la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$ converge sur le cercle de convergence, sauf en $x = 1$.

par exemple, ici, la série ne converge pas absolument (le module du terme général vaut $1/n$ qui est le terme général d'une série divergente) et la série est complexe donc aucune chance d'appliquer le critère des séries alternées.

Le cas général se démontre de façon tout à fait analogue : on se donne une suite (a_n) qui décroît vers 0 et une série $\sum b_n$ dont les sommes partielles sont bornées. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, notons

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \times b_n \qquad \text{et} \qquad B_N = \sum_{n=0}^{N} b_n$$

Là aussi, toute l'astuce consiste à voir que pour tout $n \geqslant 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$. La suite est analogue : soit $N \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} S_N &= a_0b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \times (B_n - B_{n-1}) \\ &= a_0b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_nB_n - \sum_{n=1}^{N} a_nB_{n-1} \\ &= a_0b_0 + \sum_{n=1}^{N} a_nB_n - \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1}B_n \\ &= a_0b_0 + \sum_{n=1}^{N-1} B_n \times (a_n - a_{n+1}) + a_NB_N \end{aligned}$$

La suite (B_n) est bornée donc il existe M tel que, pour tout n, $|B_n| \leqslant M$. Dès lors, $a_NB_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. De plus, pour tout n,

$$|B_n \times (a_n - a_{n+1})| = |T_n| \times |a_n - a_{n+1}|$$

Or, la suite (a_n) est décroissante si bien que $a_n \geqslant a_{n+1}$ donc :

$$|B_n \times (a_n - a_{n+1})| = |B_n| \times (a_n - a_{n+1}) \leqslant M \times (a_n - a_{n+1})$$

Or, la **suite** de terme général a_n converge vers 0 donc la série télescopique associée converge. Dès lors, $M(a_n - a_{n+1})$ est le terme général d'une série convergente. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $B_n(a_{n+1} - a_n)$ converge absolument et donc converge. En d'autres termes, la somme apparaissant dans l'expression de S_N ci-dessus admet une limite finie lorsque $N \to +\infty$. Finalement, (S_N) admet une limite finie lorsque N tend vers $+\infty$: la série $\sum a_n \times b_n$ converge.

Il est inutile de retenir le résultat général puisqu'il est de toute façon HP, vous n'avez qu'à retenir la marche à suivre : cf. exercice 10.

Remarque : Cette méthode s'appelle donc transformation d'Abel, du nom du mathématicien danois Niels Abel qui utilisa cette méthode pour la première fois en 1826, c'est une méthode extrêmement puissante dans le domaine des séries, comme on vient de le voir. C'est l'équivalent discret de l'intégration par parties. L'équivalent discret de l'intégration est la somme, tandis que l'équivalent discret de la dérivation est la différence (cf. paragraphe I.4). On voit qu'on a « intégré » une suite (la suite des b_n) et qu'on a « dérivé » l'autre (la suite des a_n), et enfin on a le produit des deux « primitives » (les deux termes devant la somme).

II.4.c La constante d'Euler

Montrons que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

converge. Étudions pour cela la série télescopique associée. Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \ln(n) + \ln(n-1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

À l'aide du DL de $\ln(1+u)$ avec $u = -\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{n} - \left(-\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est à termes positifs et converge donc, d'après les théorèmes de comparaison, la série télescopique $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge donc la suite $(u_n)_{\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ et est appelée constante d'Euler.

On utilise le résultat suivant, analogue à celui plus haut : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum(u_n - u_{n-1})$ converge.

Rappelons (cf. paragraphe II.3) que le terme général dans le $\mathrm{O}\,()$ doit être positif, mais pas forcément l'autre (ici $u_n - u_{n-1}$). On pourrait d'ailleurs prouver en poussant le DL plus loin que $u_n - u_{n-1} \sim -1/2n^2$. On dirait alors qu'on a des la séries à termes négatifs équivalents donc de même nature, et on conclurait de la même façon.

Remarques :

- $\gamma \approx 0.577\dots$
- On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \ln(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \gamma$ donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{=} \ln(N) + \gamma + \mathrm{o}\,(1)$. On vient de donner le développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$ à la précision $\mathrm{o}\,(1)$. En particulier, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \ln(N)$.

cf. paragraphe IV.1 pour une généralisation.

II.4.d La formule de Stirling

Soit $n \geqslant 1$. On pose $u_n = \dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}$, $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_{n+1} - v_n$.
Montrons que la série $\sum w_n$ converge. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} w_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}e^{-n-1}}\right) - \ln\left(\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!} \times \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \times \frac{e^{-n}}{e^{-n-1}}\right) \\ &= \ln\left((n+1) \times \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{n+1} \times e\right) \end{aligned}$$

On cherche à appliquer les théorèmes vus dans le paragraphe précédent : on cherche donc à donner un équivalent de w_n ou à dominer w_n.

On simplifie par $n+1$ et on casse le ln ce qui donne :

$$\begin{aligned} w_n &= \ln(e) - \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Faisons un DL du ln (avec $u_n = 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). À quel ordre ? Dans le doute, à l'ordre $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ car on a déjà vu que cela permettait souvent de donner la nature d'une série :

$$\begin{aligned} w_n &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ce qui ne permet pas de conclure (et surtout pas que $w_n \sim -1/2n$). Pourquoi ? Car tous les termes sont des $\mathrm{O}\left(1/n\right)$ mais on ne sait pas lequel est prépondérant, ou (ce qui revient au même) lequel est négligeable devant l'autre, et donc on ne peut pas donner un équivalent de w_n. Tout ce que l'on peut affirmer est que $w_n = \mathrm{O}\left(1/n\right)$, ce qui ne permet pas de conclure quant à la nature de la série $\sum w_n$ puisque la série $\sum 1/n$ diverge. Puisque l'on n'a pas assez d'informations, on fait un DL à un ordre plus grand.

Rappelons que « plus petit qu'un truc divergent » ne permet pas de conclure, cf. paragraphe II.2.

$$\begin{aligned} w_n &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right). \\ &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est à termes positifs (ne pas l'oublier !) et converge donc la série $\sum w_n$ converge, c'est-à-dire que la série télescopique $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge, donc la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Notons L sa limite, c'est-à-dire que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$. L'exponentielle étant continue, $u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^L > 0$ c'est-à-dire (revenir à la définition de u_n) que $n! \sim e^L \times n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. Posons $K = e^L$, et donc $n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$. Donnons la valeur de K.

w_n n'est pas équivalent à $1/4n^2$! Le $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$ n'est pas négligeable devant $1/n^2$, il contient encore du $1/n^2$. En faisant un DL à l'ordre supérieur, on trouve que $w_n \sim -1/12n^2$ (exo).

Rappel (cf. chapitre 10) : Si on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$ et $W_{2n} = \dfrac{\pi (2n)!}{2^{2n+1} \times (n!)^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ donc $(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n$: en d'autres termes, la suite de terme général $(n+1)W_{n+1}W_n$ est constante égale à son premier terme qui vaut $1 \times W_1 \times W_0 = \pi/2$. De plus,

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)(\sin(t) - 1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$$

par positivité de l'intégrale, si bien que la suite (W_n) est décroissante, et donc $W_{n+2} \leqslant W_{n+1} \leqslant W_n$. Or, $W_n > 0$ car intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, donc :

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

Dès lors, d'après le théorème d'encadrement, $W_{n+1}/W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $W_{n+1} \sim W_n$. Or, $(n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$ donc $\pi/2 \sim n{W_n}^2$ si bien que $W_n \sim \sqrt{\pi/2n}$.

Nous avions déjà fait ce raisonnement, et donc donné cet équivalent sans le dire, dans le DM n° 8. C'est un énorme classique : voir par exemple le sujet Mines MPI Maths 2 2023.

Par conséquent, en appliquant résultat à W_{2n} :

$$\frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}\times(n!)^2}\sim\sqrt{\frac{\pi}{4n}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

D'après ce qui précède (l'équivalent de $n!$ donné plus haut, et aussi valable pour $(2n)!$ en adaptant, penser à truc), il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}} &\sim \frac{\pi\times K(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{2^{2n+1}K^2n^{2n+1}e^{-2n}}\\ &\sim \frac{\pi 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n+1}Kn^{2n+1}}\\ &\sim \frac{\pi}{K\sqrt{2n}}\end{aligned}$$

et donc $2\pi\sim K\sqrt{2\pi}$. Or, deux constantes sont équivalentes si et seulement si elles sont égales, donc $K=\sqrt{2\pi}$. On en déduit la formule de Stirling :

> On a déjà posé en question de cours à Centrale en concours MP. Pourquoi les mathématiques ne seraient-elles pas ce qu'elles sont sans les intégrales de Wallis ? La réponse attendue était : car on les utilise dans la démonstration de la formule de Stirling.

Théorème (formule de Stirling). $n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$.

> On trouve aussi la notation $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ mais elle est moins pratique pour les calculs.

III Séries de référence

III.1 Comparaison à une intégrale

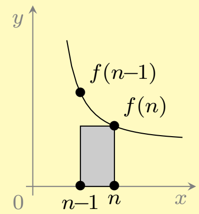
Lemme. Soit f continue, positive, décroissante sur $[1\,;+\infty[$. Alors la série de terme général $\displaystyle\int_{n-1}^{n}f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$ est convergente.

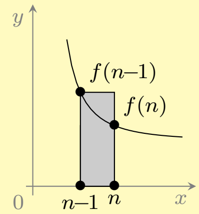
Démonstration. Soit $n\geqslant 2$. Posons $u_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n}f(t)\,\mathrm{d}t-f(n)$. Comparons à une intégrale. Soit $t\in[n-1\,;n]$. Comme f est décroissante, $f(n)\leqslant f(t)\leqslant f(n-1)$. Par croissance de l'intégrale,

$$f(n)=\int_{n-1}^{n}f(n)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^{n}f(t)\,\mathrm{d}t\leqslant\int_{n-1}^{n}f(n-1)\,\mathrm{d}t=f(n-1).$$

Il en découle que $0\leqslant u_n\leqslant f(n-1)-f(n)$. Ainsi, la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Or, f est décroissante minorée (car positive) donc admet une limite finie en $+\infty$. Ainsi, la suite $(f(n))_{n\geqslant 1}$ converge donc la série télescopique associée $\sum(f(n)-f(n-1))$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge. □

> On retrouve la méthode, les dessins, et plus généralement le raisonnement que l'on a déjà vus de nombreuses fois, par exemple au chapitre 22.





Lemme. Avec les mêmes hypothèses sur f, la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_N$ sont de même nature.

Remarque : L'année prochaine, vous direz : la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Démonstration. Soit $N\geqslant 2$.

- Supposons que la série $\sum f(n)$ converge. Alors $\displaystyle\sum_{n=2}^{N}f(n)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{n=2}^{+\infty}f(n)$. De plus, d'après le lemme précédent (avec les mêmes notations),

$$\sum_{n=2}^{N}u_n\xrightarrow[N\to+\infty]{}\sum_{n=2}^{+\infty}u_n$$

donc

$$\begin{aligned}\int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=2}^N u_n + \sum_{n=2}^N f(n) \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{n=2}^{+\infty} u_n + \sum_{n=2}^{+\infty} f(n)\end{aligned}$$

En d'autres termes, la suite $\left(\displaystyle\int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_N$ converge.

- La réciproque est tout-à-fait analogue et laissée en exercice. $\square$

Remarque : Dans le cas où tout diverge (vers $+\infty$ puisque la série est à termes positifs), on peut même affirmer que

$$\sum_{n=1}^N f(n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t$$

En effet, d'après ce qui précède,

$$\int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\sum_{n=2}^N u_n}_{\text{converge donc borné}} + \underbrace{\sum_{n=1}^N f(n)}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty} - \underbrace{f(1)}_{\text{borné}}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_1^N f(t)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^N f(n) + \mathrm{o}\left(\sum_{n=1}^N f(n)\right) \\ &\underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^N f(n)\end{aligned}$$

Cela peut permettre de donner un équivalent d'une somme qu'on ne sait pas calculer explicitement. Il est en effet plus facile de travailler avec des intégrales qu'avec des sommes parce qu'on dispose d'outils puissants sur les intégrales (primitivation, intégration par parties, changement de variable etc.). Voir un exemple ci-dessous.

En d'autres termes, dans le cas où la série diverge, on a un équivalent des sommes partielles. On peut donner de la même façon un équivalent du reste dans le cas convergent, mais cela nécessite de pouvoir intégrer jusqu'à $+\infty$, chose que vous verrez l'année prochaine.

III.2 Séries de Riemann

Définition. Les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (où α est un réel **fixe**) sont appelées séries de Riemann.

Par exemple (cf. exercice 1) la série $\sum \left(\frac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ n'est pas une série de Riemann car la puissance est variable.

Théorème. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. **Premier cas : $\alpha \leqslant 0$.** Alors la suite de terme général $1/n^\alpha$ ne tend pas vers 0 (vers 1 si $\alpha = 0$ et vers $+\infty$ si $\alpha < 0$) : la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge donc grossièrement.

Deuxième cas : $\alpha > 0$. On pose $f : t \in [1\,;+\infty[\longmapsto f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ de telle sorte que $\frac{1}{n^\alpha} = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est continue, positive, décroissante donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ et la suite $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right)_N$ sont de même nature. Il suffit donc de prouver que cette suite converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Supposons dans un premier temps $\alpha = 1$. Alors

$$\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \ln(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

- Supposons à présent que $\alpha \neq 1$ (avec toujours $\alpha > 0$). Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} &= \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^N \\ &= \frac{N^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\text{La suite } \left(\int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}\right)_N \text{ converge} &\iff \text{la suite } (N^{1-\alpha})_N \text{ converge} \\ &\iff 1-\alpha \leqslant 0 \\ &\iff 1-\alpha < 0 \qquad\qquad (\text{car } \alpha \neq 1) \\ &\iff \alpha > 1\end{aligned}$$

□

ce qui permet de conclure.

Remarque : Dans le cas où $\alpha \leqslant 1$, on a un équivalent des sommes partielles grâce au paragraphe précédent. Par exemple, si $\alpha = 1/2$, lorsque $N \to +\infty$:

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \sim 2\sqrt{N}$$

III.3 Séries géométriques

Théorème. Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration. Déjà faite au paragraphe I.

Corollaire. Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$$

En d'autres termes, une série de terme général q^n (pour $|q| < 1$) a une somme égale à :

$$S = \frac{\text{premier terme}}{1 - \text{raison}}$$

Par exemple (toujours avec $|q| < 1$) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q^n = \frac{q^2}{1-q}$$

Démonstration. On sait déjà que la série converge. Faisons le changement de variable $p = n - n_0$ si bien que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \sum_{p=0}^{+\infty} q^{p+n_0}$$

□

Il suffit de sortir le q^{n_0} de la somme et d'appliquer le résultat précédent pour conclure.

III.4 Série exponentielle

Théorème. Soit $x \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Démonstration. Déjà faite dans le chapitre 23.

Théorème (Partiellement admis provisoirement). Plus généralement, pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc converge, et $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}$. Cette série converge absolument car, d'après ce qui précède, $|z|$ étant un réel, la série $\sum \frac{|z|^n}{n!}$ converge. Notons $z = x + iy$. D'après ce qui précède,

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

et (d'après le chapitre 23) :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k} y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(y) + i\sin(y) \\
&= e^{iy}
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
e^z &= e^x \times e^{iy} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \right)
\end{aligned}$$

□

Il reste à prouver que le membre de droite est égal à $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Cela peut se faire dès à présent avec des calculs un peu ignobles, mais un moyen plus simple et plus naturel consiste à le prouver avec un résultat au programme de deuxième année appelé produit de Cauchy : nous verrons cela au chapitre 35.

Exemples :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n \times n!} = e^{1/2}.$$

Exemple : Montrer que la série $\sum \frac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$ converge et calculer sa somme.

Soit $n \geqslant 2$. Notons $u_n = \dfrac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$. On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{3n(n-1)+3n+n+5}{n!} \times 7^n \\
&= \frac{3n(n-1)+4n+5}{n!} \times 7^n \\
&= 3 \times 7^2 \times \frac{7^{n-2}}{(n-2)!} + 4 \times 7 \times \frac{7^{n-1}}{(n-1)!} + 5 \times \frac{7^n}{n!}.
\end{aligned}$$

La série $\sum 7^n/n!$ converge (série exponentielle) donc u_n est une combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes : la série $\sum u_n$ converge donc, et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= 5 + 9 \times 7 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n \\
&= 68 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(3 \times 7^2 \times \frac{7^{n-2}}{(n-2)!} + 4 \times 7 \times \frac{7^{n-1}}{(n-1)!} + 5 \times \frac{7^n}{n!} \right) \\
&= 68 + 3 \times 7^2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7^{n-2}}{(n-2)!} + 4 \times 7 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7^{n-1}}{(n-1)!} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7^n}{n!} \\
&= 68 + 3 \times 7^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{7^p}{p!} + 4 \times 7 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{7^k}{k!} + 5 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{7^n}{n!} \\
&= 68 + 3 \times 7^2 \times e^7 + 4 \times 7 \times \left(e^7 - 1\right) + 5 \times \left(e^7 - 1 - 7\right) \\
&= 180e^7
\end{aligned}$$

Il faut penser à la série exponentielle car il y a de la factorielle au dénominateur. L'idée est de procéder à des simplifications successives à l'aide des égalités suivantes :

$$\forall n \geqslant 1, \ \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

Pour faire apparaître celle-ci, on écrit

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

Ces égalités n'étant valables que pour $n \geqslant 2$, on doit isoler les termes $n = 0$ et $n = 1$ dans le calcul de la somme. Vous ferez ce genre de calculs en deuxième année, quand vous ferez des séries entières ou quand vous vous intéresserez à la variance d'une loi de Poisson.

III.5 Applications

III.5.a Règle de d'Alembert

Théorème (règle de d'Alembert (deuxième année)). Soit $\sum u_n$ une série à termes tous non nuls. On suppose qu'il existe $L \in [\,0\,;1\,[$ tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$. Alors la série $\sum u_n$ converge absolument (et donc converge).

L'intervalle est ouvert en 1 !

Démonstration. Soit $r = \dfrac{L+1}{2} < 1$. Puisque $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n \to +\infty]{} L < r$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant r$ pour n assez grand : il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leqslant r$. Ainsi, $|u_{n_0+1}| \leqslant r|u_{n_0}|$, puis $|u_{n_0+2}| \leqslant r|u_{n_0+1}| \leqslant r^2|u_{n_0}|$, puis $|u_{n_0+3}| \leqslant r|u_{n_0+2}| \leqslant r^3|u_{n_0}|$ etc. Par une récurrence immédiate, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant r^{n-n_0}|u_{n_0}|$. Or, la série $\sum r^{n-n_0}|u_{n_0}|$ est une série géométrique de raison $r < 1$ donc converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. □

Encore une fois, r est le « milieu » entre L et 1 donc $r < 1$.

On montre de façon analogue que si $L > 1$, alors la série DVG (on minore par $r^{n-n_0}|u_{n_0}|$ et $r > 1$). On ne peut pas conclure avec ce critère si $L = 1$.

III.5.b La fonction ζ de Riemann

Définition (HP). La fonction ζ (zeta) de Riemann est définie quand c'est possible par

$$\zeta : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Quand on dit « quand c'est possible », cela signifie « quand la somme infinie existe » c'est-à-dire quand la série associée converge.

Remarque : D'après ce qui précède, la fonction ζ est définie sur $]\,1\,;+\infty\,[$.

Proposition (HP). La foncion ζ est strictement décroissante sur $]\,1\,;+\infty\,[$, et :,

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1, \qquad \zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty \qquad \text{et} \quad \zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \frac{1}{x-1}.$$

On ne peut pas dériver une somme infinie : il faut donc montrer la stricte monotonie à la main. Ici il faut dans un premier temps supposer $n \geqslant 2$ car, si $n=1$, il y a égalité entre n^x et n^y car les deux valent 1. Rappelons également que, quand les séries convergent, on peut sommer les inégalités, et que, quand il y a au moins une inégalité stricte, alors l'inégalité finale est aussi stricte.

Démonstration. • Débutons avec la monotonie. Soient $1 < x < y$ et $n \geqslant 2$. $n^x < n^y$ donc $\dfrac{1}{n^x} > \dfrac{1}{n^y}$. Par somme, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} > \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^y}$ et en ajoutant 1, il vient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x) > \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^y} = \zeta(y).$$

La fonction ζ est bien strictement décroissante.

• Comparons à une intégrale pour donner les limites. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Soit $t \in [\,n-1\,;n\,]$. On a $\dfrac{1}{t^x} \geqslant \dfrac{1}{n^x}$ et par croissance de l'intégrale

$$\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \geqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{n^x} = \frac{1}{n^x}$$

donc

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \left[\frac{1}{1-x} \times t^{1-x}\right]_{n-1}^{n} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$$

Notons v_n le membre de droite de l'inégalité ci-dessus. La série $\sum v_n$ est la série télescopique associée à la suite de terme général $\dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$. Cette suite converge (vers 0 car $x > 1$) donc la série télescopique associée converge : on peut donc sommer l'inégalité ci-dessus ce qui donne (puisque $\sum 1/n^x$ converge)

De la même manière, on ne peut pas passer à la limite dans une somme infinie : il faut donc prouver les limites et la continuité à la main.

Ne jamais écrire de somme infinie avant d'avoir montré que la série associée converge !

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty} v_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{(n-1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right) = \frac{1}{x-1}.$$

De même,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)}\left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \frac{1}{x-1} \times \frac{1}{2^{x-1}}.$$

Ce sont des sommes télescopiques : on peut donner leur valeur directement.

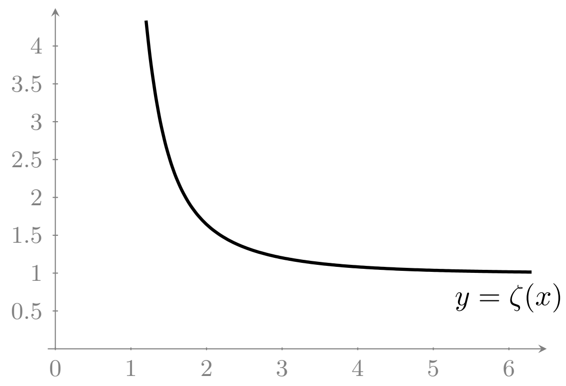
En ajoutant 1, il vient $1 + \dfrac{1}{x-1} \times \dfrac{1}{2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$. D'après le théorème d'encadrement, $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. De plus, en multipliant par $x-1$, il vient

$$(x-1) + \frac{1}{2^{x-1}} \leqslant \zeta(x) \times (x-1) \leqslant 1 + (x-1).$$

On a $x-1>0$.

□

D'après le théorème d'encadrement, $\zeta(x) \times (x-1) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 1$ donc $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$ et, en particulier, $\zeta(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} +\infty$.



III.5.c Séries de Bertrand

Définition (HP). Les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ (où α et β sont deux réels fixes) sont appelées séries de Bertrand.

Cherchons quand les séries de Bertrand convergent. Soient $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $n \geqslant 2$. On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$. Méthode générale : multiplier par $t^{\frac{\alpha+1}{2}}$. En effet, on se dit que la puissance de t l'emporte mais on ne peut pas donner un équivalent plus simple de u_n. On va donc « forcer la convergence (ou la divergence !) » en comparant avec une série de Riemann, comme avec une exponentielle.

Les séries de Bertrand sont définies à partir du rang 2. Ce sont des énormes classiques. Mais elles sont HP, donc il faut redémontrer le résultat à chaque fois.

- **Premier cas : $\alpha < 0$.** Alors $u_n = \frac{n^{-\alpha}}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par croissances comparées, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- **Deuxième cas : $\alpha \in [\,0\,;1\,[$.** Multiplions par $n^{\frac{\alpha+1}{2}}$:

$$u_n \times n^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

car $\alpha < 1$. Donc $u_n \times n^{\frac{\alpha+1}{2}} \geqslant 1$ pour n assez grand, i.e. $u_n \geqslant \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$. Or, $\frac{\alpha+1}{2} < 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.

Rappelons que $\frac{\alpha+1}{2}$ est le « milieu » entre α et 1 et puisque $\alpha < 1$ alors il est lui aussi strictement inférieur à 1

- **Troisième cas : $\alpha > 1$.** De même :

$$u_n \times n^{\frac{\alpha+1}{2}} = \frac{(\ln(n))^{-\beta}}{n^{\frac{\alpha-1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $\alpha > 1$. Donc $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}\right)$. Or, $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ donc la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ converge. D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

Remarque : Mais pourquoi $\frac{\alpha+1}{2}$? En s'inspirant de l'exemple précédent mais dans le cas général avec γ au lieu de $\frac{\alpha+1}{2}$, on voit que deux conditions sont requises :

⋆ $u_n \times n^\gamma = \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Il faut donc que $\alpha - \gamma > 0$, i.e. $\gamma < \alpha$.

⋆ $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ converge. Il faut donc que $\gamma > 1$.

Le choix le plus immédiat de réel γ compris entre 1 et α est bien le milieu du segment $[\,1\,;\alpha\,]$, i.e. $\frac{\alpha+1}{2}$.

- **Quatrième cas :** $\alpha = 1$. Si $\beta \leqslant 0$ alors $u_n = \dfrac{(\ln(n))^{-\beta}}{n} \geqslant \dfrac{1}{n}$ pour n assez grand (car $(\ln(n))^{-\beta} = 1$ si $\beta = 0$ et $(\ln(n))^{-\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\beta < 0$). Or, la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum u_n$ diverge (théorème de comparaison pour les séries à termes positifs). Supposons à présent $\beta > 0$. Alors le raisonnement précédent ne permet pas de conclure : on montrerait que $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ce qui ne suffit pas (négligeable devant le terme général d'une série divergente). On définit

$$f : x \in [\,2\,;+\infty\,[\longmapsto \frac{1}{x(\ln(x))^\beta} = \frac{(\ln(x))^{-\beta}}{x}.$$

La fonction f est dérivable sur $[\,2\,;+\infty\,[$. Pour tout $x \geqslant 2$,

$$f'(x) = \frac{-1}{x^2(\ln(x))^\beta} - \frac{\beta}{x(\ln(x))^{\beta+1}} < 0$$

La fonction f est positive, continue, décroissante, donc la série $\sum f(n) = \sum u_n$ et la suite $\left(\displaystyle\int_2^N f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{N\geqslant 2}$ sont de même nature. Soit $N \geqslant 2$. À l'aide du changement de variable $t = e^u$, $u = \ln(t)$, $\mathrm{d}t = e^u\,\mathrm{d}u$, on a :

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln(t))^\beta} = \int_{\ln(2)}^{\ln(N)} \frac{e^u\,\mathrm{d}u}{e^u u^\beta} = \int_{\ln(2)}^{\ln(N)} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$$

De même que dans le paragraphe III.2, l'intégrale de droite se calcule, et on prouve qu'elle admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$.

Les cas précédents doivent être faits sans indication. Ce cas est plus difficile et il y aurait des questions intermédiaires à l'écrit.

On utilise le lemme de la partie III.1 : on montre en effet de la même façon qu'il est encore valable sur $[\,2\,;+\infty\,[$.

En conclusion :

Théorème (HP). $\sum \dfrac{1}{n^\alpha(\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

On a montré le résultat du II.2 : $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

III.5.d Développement décimal d'un réel

Cette partie est HP et assez difficile mais cela permet de définir rigoureusement la notion d'écriture décimale que vous manipulez depuis l'école primaire, en plus de vous donner des méthodes qui reviennent souvent.

Proposition. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. Il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers appartenant à $[\![\,0\,;9\,]\!]$, **non stationnaire à** 9 telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

Démonstration. Tout d'abord, toute série de la forme $\sum x_n/10^n$ avec $x_n \in [\![\,0\,;9\,]\!]$ converge, et donc on pourra manipuler les sommes infinies sans se poser de questions. En effet, pour tout n, $0 \leqslant x_n/10^n \leqslant 9/10^n$. Or, $1/10 \in \,]-1\,;1\,[$ donc la série $\sum 1/10^n$ converge en tant que série géométrique, et on conclut à l'aide du théorème de comparaison pour les séries positives.

Commençons par donner un résultat qui nous sera utile tout le long de la démonstration : si $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} &= 9\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{n+N+1}} \\
&= \frac{9}{10^{N+1}} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} \\
&= \frac{9}{10^{N+1}} \times \frac{1}{1-\dfrac{1}{10}} \\
&= \frac{9}{10^{N+1}} \times \frac{10}{9} \\
&= \frac{1}{10^N}
\end{aligned}$$

Série géométrique de raison $1/10 \in \left]-1\,;1\right[$.

Procédons par analyse-synthèse.

Analyse : Supposons qu'une telle suite existe. Alors

$$x = \frac{x_1}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

En multipliant par 10 et en faisant un changement d'indice, il vient :

$$10x = x_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{n+1}}{10^n}$$

Or, les (x_n) sont inférieurs ou égaux à 9 donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{n+1}}{10^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 1$$

d'après le résultat au début de la démonstration. De plus (cf. paragraphe I.2), il y a égalité si et seulement si tous les x_{n+1}, pour $n \geqslant 1$, sont égaux à 9, ce qui est exclu car la suite n'est pas stationnaire égale à 9. Dès lors, l'inégalité est stricte, c'est-à-dire que cette somme est strictement inférieure à 1. De plus, cette somme est positive (ou nulle). On en déduit que $x_1 \leqslant 10x < x_1 + 1$. Par conséquent, $x_1 = \lfloor 10x \rfloor$.

Recommençons : on a

$$10x - x_1 = \frac{x_2}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_{n+1}}{10^n}$$

En multipliant par 10 et en faisant un changement d'indice :

$$100x - 10x_1 = x_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{n+2}}{10^n}$$

De même, la somme de droite est positive (car les x_i le sont) et strictement inférieure à 1 (car la suite n'est pas stationnaire égale à 9) donc on montre de même que $x_2 = \lfloor 100x - 10x_1 \rfloor$. On a ensuite :

$$100x - 10x_1 - x_2 = \frac{x_3}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x_{n+2}}{10^n}$$

On prouve de même que $x_3 = \lfloor 1000x - 100x_1 - 10x_2 \rfloor$ et ainsi de suite : on met la décimale précédente à gauche, on multiplie par 10 et on prend la partie entière. On voit bien qu'on n'a pas le choix des x_k, ils sont déterminés de façon unique à partir des termes précédents, ce qui conclut l'analyse. Pour le faire rigoureusement, on prouve par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} = \lfloor 10^{n+1}x - 10^n x_1 - \cdots - 10x_n \rfloor$$

ce qui définit bien par récurrence une suite unique, ce qui clôt l'analyse.

Synthèse : Prouvons que cette suite convient effectivement. Puisqu'elle est assez lourde à manipuler, introduisons une suite auxiliaire. On définit donc les deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$a_0 = x \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & \lfloor 10a_n \rfloor \\ a_{n+1} & = & 10a_n - x_{n+1} \end{array} \right.$$

Montrons que la suite (x_n) est solution du problème.

- Une récurrence simple (faites-la !) prouve que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x = \frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}}$$

Pour l'initialisation, il suffit d'utiliser le fait que

$$x = a_0 = \frac{x_1}{10} + \frac{a_1}{10}$$

et, pour l'hérédité, il suffit d'utiliser le fait que

$$a_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{10} + \frac{a_{n+2}}{10}$$

Or, par définition de la partie entière, $10a_n \geqslant x_{n+1} > 10a_n - 1$ donc $0 \leqslant a_{n+1} < 1$ si bien que

$$0 \leqslant \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^{n+1}}$$

D'après le théorème d'encadrement, $\dfrac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que

$$\frac{x_1}{10} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

Par définition d'une somme infinie (c'est la limite des sommes partielles),

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

- Prouvons à présent que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est à valeurs dans $[\![0\,;9]\!]$. Or, d'après ce qui précède, $a_n \in [\,0\,;1\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on l'a prouvé pour tout $n \geqslant 1$ mais c'est aussi valable pour $a_0 = x$). Dès lors, $10a_n \in [\,0\,;10\,[$ et donc $x_{n+1} \in [\![0\,;9]\!]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui est le résultat voulu.
- Prouvons enfin que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire à 9. Supposons par l'absurde qu'il existe $N \geqslant 1$ tel que $x_n = 9$ pour tout $n \geqslant N$. Dès lors,

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{n=N}^{\infty} \frac{9}{10^n} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{N-1}} \end{aligned}$$

ce qui est absurde puisqu'on a prouvé plus haut (voir au début de la synthèse) que

$$x = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}}$$

□

et que $a_{N+1} < 1$.

Remarques :

- On peut généraliser à n'importe quel entier $b \geqslant 2$: tout réel $x \in [\,0\,;1\,[$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

avec $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers de $[\![\,0\,;\,b-1\,]\!]$ non stationnaire à $b-1$. Si $b=2$, on parle de développement dyadique et si $b=3$, de développement triadique.

Par exemple, l'ensemble triadique de Cantor est l'ensemble des réels $x \in [\,0\,;1\,[$ dont le développement triadique ne comporte pas le chiffre 1. Il est par conséquent en bijection avec $\{0;2\}^{\mathbb{N}}$ et donc est indénombrable.

- On écrit symboliquement

$$x = 0,x_1x_2\dots x_n\dots$$

et on dit que le second membre est un développement décimal de x.

- Si on autorise la suite (x_n) à être stationnaire à 9, il n'y a alors plus unicité. En effet, puisque pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^N}$$

alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour toute famille finie $(x_1,\dots,x_N) \in [\![\,0\,;\,9\,]\!]^N$ avec $x_N \neq 9$,

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_N+1}{10^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

c'est-à-dire : $0,x_1\dots x_{N-1}(x_N+1)0000\dots = 0,x_1\dots x_N 11111\dots$ Par exemple,

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,50000\dots = 0,4999999\dots$$

cette égalité n'étant rien d'autre que l'égalité :

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

De plus, si $x_N = 9$, alors on a l'égalité

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_N-1}{10^N} + \frac{1}{10^N} = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

c'est-à-dire (puisque $x_N = 9$) : $0,x_1\dots x_{N-1}90000\dots = 0,x_1\dots x_{N-1}8999\dots$ Par exemple,

$$0,90000 = 0,89999\dots$$

cette égalité n'étant rien d'autre que l'égalité :

$$\frac{9}{10} = \frac{8}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

Dès lors, tout nombre ayant un développement décimal fini (i.e. avec un nombre fini de x_n non nuls) admet deux développements décimaux : un se terminant par une infinité de 0 (qu'on appelle développement décimal propre) et un se terminant par une infinité de 9 (qu'on appelle développement décimal impropre).

Montrons que ce sont les seuls cas où il n'y a pas unicité du développement décimal. Supposons en effet que x admette deux développement décimaux distincts notés $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ c'est-à-dire qu'il existe deux suites d'entiers compris entre 0 et 9 tels que

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y_n}{10^n}$$

Notons $N=\min\{n\geqslant 1\,|\,x_n\neq y_n\}$ (N existe car les deux développements sont supposés distincts). Si $k\leqslant N-1$, alors $x_k=y_k$ si bien que

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}=\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{y_n}{10^n}$$

Puisque $x_N\neq y_N$, l'un des deux est strictement inférieur à l'autre. Sans perte de généralité, supposons $x_N>y_N$ si bien que

$$\frac{x_N-y_N}{10^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{y_n}{10^n}$$

Or, $x_N>y_N$ et la somme de gauche est positive si bien que le membre de gauche est supérieur ou égal à $1/10^N$, avec égalité si et seulement si $x_N=y_N+1$ et tous les x_n sont nuls à partir de $N+1$. Or, on a déjà vu que le membre de droite est inférieur ou égal à $1/10^N$, avec égalité si et seulement si tous les y_n sont égaux à 9 à partir de $N+1$. On en déduit que

$$x=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_N}{10^N}=\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_N-1}{10^N}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}$$

En conclusion, les seuls cas de non unicité du développement décimal se produisent pour les réels ayant un développement décimal fini, et sont du type évoqué ci-dessus (développement décimal propre ou développement décimal impropre). De plus, les réels pour lesquels cela se produit sont exactement les nombres décimaux i.e. les rationnels de la forme $k/10^n$ avec $0\leqslant k<10^n$ (on s'intéresse aux réels $x\in[\,0\,;1\,[$ dans cette actIvité). En effet, en mettant au même dénominateur, tout réel admettant un développement décimal fini i.e. de la forme

$$\sum_{n=1}^{N-1}\frac{x_n}{10^n}$$

s'écrit sous cette forme donc est un nombre décimal, et tout décimal s'écrit comme une telle somme (finie) : il suffit d'écrire le numérateur k en base 10. En conclusion :

Pour ne pas avoir à distinguer les cas entre décimaux et non décimaux, on appellera développement décimal propre de x l'unique développement décimal de x si x n'est pas décimal, et le développement décimal propre de x si x est rationnel. Dans tous les cas, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire égale à 9.

Théorème.

- Tout réel $x\in[\,0\,;1\,[$ admet un unique développement décimal propre (i.e. non stationnaire à 9).
- Les nombres décimaux sont exactement les réels admettant deux développements décimaux : un développement décimal propre i.e. se terminant par une infinité de 0, et un impropre se terminant par une infinité de 9.
- Les nombres décimaux sont exactement les réels admettant un développement décimal propre fini.

Enfin, fixons $N\geqslant 1$, et notons (x_n) le développement décimal propre de x. On a :

$$10^N x = 10^{N-1}x_1 + \cdots + x_N + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_{n+N}}{10^n}$$

et on a déjà vu plusieurs fois que la somme de droite appartient à $[\,0\,;1\,[$ (car le développement est propre) si bien que

$$\lfloor 10^N x \rfloor = 10^{N-1}x_1 + \cdots + x_N$$

et donc

$$\frac{\lfloor 10^N x \rfloor}{10^N} = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_n}{10^n}$$

Dès lors, si on pose

cf. chapitre 12.

$$z_N = \frac{\lfloor 10^N x \rfloor}{10^N} \qquad \text{et} \qquad t_N = \frac{\lfloor 10^N x \rfloor + 1}{10^N}$$

alors $z_N = 0, x_1 \dots x_{N-1} x_N 0000\dots$ et $t_N = 0, x_1 \dots x_{N-1}(x_N + 1)0000\dots$ avec éventuellement une retenue si $x_N = 9$. En clair, z_N est le réel dont le développement décimal est obtenu à partir de celui de x en tronquant à la N-ième décimale (et donc il est inférieur à x) et t_N est le réel dont le développement décimal est obtenu à partir de celui de x en tronquant à la N-ième décimale et en l'augmentant de 1 (éventuellement avec une retenue), si bien qu'il est supérieur à x, c'est-à-dire que z_n est l'arrondi de x à la N-ième décimale inférieure, et t_n est l'arrondi de x à la N-ième décimale supérieure (éventuellement avec une retenue). Par exemple, si on prend $x = \sqrt{2}/2 = 0,707\dots$ alors $z_2 = 0,7000000\dots$ et $t_2 = 0,7100000$, ce qui justifie le nom vu dans le chapitre 12 de (respectivement) valeur décimale par défaut et par excès à la précision 10^n.

Montrons enfin une caractérisation des rationnels à l'aide de leur développement décimal propre.

Théorème. Soit $x \in [\,0\,;1\,[$. Alors x est rationnel si et seulement si le développement décimal propre de x est périodique à partir d'un certain rang.

Démonstration.

- Supposons que la suite (x_n) (le développement décimal propre de x) soit périodique à partir d'un certain rang. Plus précisément, supposons qu'il existe d et N supérieurs ou égaux à 1 tels que :

$$\forall n \geqslant N, x_{n+d} = x_n$$

On peut donc écrire :

$$x = 0, a_1 a_2 \dots a_{N-1} \underbrace{a_N \cdots a_{N+d-1}}_{\text{période}} \underbrace{a_N \cdots a_{N+d-1}}_{\text{période}} \cdots$$

Notons $D = a_N \times 10^{d-1} + a_{N+1} 10^{d-2} \cdots + a_{N+d-1}$. L'égalité ci-dessus devient (en faisant des paquets de d termes) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{10^{N-1}} + \underbrace{\frac{a_N}{10^N} + \cdots + \frac{a_{N+d-1}}{10^{N+d-1}}} + \underbrace{\frac{a_N}{10^{N+d}} + \cdots + \frac{a_{N+d-1}}{10^{N+2d-1}}} + \cdots \\ &= \frac{a_1}{10} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{10^{N-1}} + \frac{D}{10^{N+d-1}} + \frac{D}{10^{N+2d-1}} + \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{10^{N-1}}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{D}{10^{N+kd-1}}\\
&= \frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{10^{N-1}}+\frac{D}{10^{N-1}}\times\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^d}\right)^k\\
&= \frac{a_1}{10}+\cdots+\frac{a_{N-1}}{10^{N-1}}+\frac{D}{10^{N-1}}\times\frac{1}{10^d}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^d}}
\end{aligned}$$

si bien que $x \in \mathbb{Q}$.

- Réciproquement, supposons que $x \in \mathbb{Q}$ et notons $x = p/q$ son écriture irréductible, avec $p \in [\![0\,;\, q-1]\!]$ puisque $x \in [\,0\,;1\,[$. On sait que

$$x_1 = \left\lfloor \frac{10p}{q} \right\rfloor$$

□

c'est-à-dire, en notant $10p = b_1q + r_1$ la division euclidienne de $10p$ par q, que $x_1 = b_1$ et que $a_1 = 10x - x_1 = r_1/q$. Dès lors, $x_2 = \lfloor 10a_1 \rfloor = \lfloor 10r_1/q \rfloor$ et, si on note $b_2q + r_2$ la division euclidienne de $10r_1$ par q, on a $x_2 = b_2$ et donc $a_2 = r_2/q$, et ainsi de suite : on a à chaque fois $a_{n+1} = r_{n+1}/q$ où r_{n+1} est le reste de la division euclidienne de $10r_n$ par q. La suite (r_n) étant à valeurs dans $[\![0\,;\, q-1]\!]$, elle prend au moins deux fois la même valeur, et on en déduit qu'elle est périodique à partir de ce rang. En effet, si $r_n = r_p$, alors r_{n+1}, le reste dans la divsion de $10r_n$ par q, est égal à r_{p+1}, le reste dans la division de $10r_p$ par q, et ainsi de suite (on pourrait prouver que la suite est $p-n$ périodique mais l'idée générale se comprend très bien). La suite (r_n) étant périodique à partir d'un certain rang, la suite (a_n) également et donc la suite (x_n) également.

Exemples : À l'aide de la démonstration, on peut partir d'un développement décimal périodique à partir d'un certain rang et retrouver le rationnel associé, et réciproquement.

- Si

$$x = 0,123456745674567\dots$$

alors

$$\begin{aligned}
x &= \frac{123}{1000}+\frac{4}{10^4}+\frac{5}{10^5}+\frac{6}{10^6}+\frac{7}{10^7}+\frac{4}{10^8}+\frac{5}{10^9}+\frac{6}{10^{10}}+\frac{7}{10^{11}}+\cdots\\
&= \frac{123}{1000}+\frac{4\times 10^3+5\times 10^2+6\times 10+7}{10^7}+\frac{4\times 10^3+5\times 10^2+6\times 10+7}{10^{11}}+\cdots\\
&= \frac{123}{1000}+\frac{4567}{10^7}+\frac{4567}{10^{11}}+\cdots\\
&= \frac{123}{1000}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4567}{10^{4n+3}}\\
&= \frac{123}{1000}+\frac{4567}{10^3}\times\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{10^4}\right)^n\\
&= \frac{123}{1000}+\frac{4567}{10^3}\times\frac{1}{10^4}\times\frac{1}{1-\dfrac{1}{10^4}}\\
&= \frac{123}{1000}+\frac{4567}{10^3\times 9999}
\end{aligned}$$

- Réciproquement, pour avoir le développement décimal d'un rationnel p/q, on fait comme à l'école primaire : on multiplie par 10, on soustrait la partie entière, et on recommence. Par exemple : pour avoir la première décimale de $9/14$, on prend la partie entière de $90/14$, c'est-à-dire 6. Ensuite, on calcule $90/14 - 6 = 6/14$, on multiplie par 10 et on prend la partie entière, ce qui donne : $60/14$, dont la partie entière est 4, si bien que la deuxième décimale est 4 etc.

$$\frac{9}{14} = 0,6\underbrace{428571}_{\text{période}}\underbrace{428571}_{\text{période}}\dots$$

IV Comment aborder un exercice de séries

Quand on veut donner la nature d'une série $\sum u_n$ (i.e. dire si elle diverge ou si elle converge) :

- On regarde si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si ce n'est pas le cas, alors on peut dire directement que la série diverge grossièrement.
- On regarde si la série $\sum u_n$ est à termes positifs. Si ce n'est pas le cas, on regarde si elle est alternée, pour appliquer le théorème des séries alternées (ou, plus souvent, on donne un développement asymptotique du terme général : cf. paragraphe II.4.a). Sinon, on prend la valeur absolue ou le module pour étudier la convergence absolue. On se ramène donc à l'étude d'une série à termes positifs.
- Si la série est à termes positifs, on cherche à appliquer les théorèmes de comparaison, donc à comparer le terme général (et pas la série, voir point suivant) au terme général d'une série convergente (il y en a 3 : séries de Riemann, séries géométriques, série exponentielle). Pour cela :

  ⋆ on cherche en premier lieu à donner un équivalent de u_n, car alors on peut conclure dans tous les cas (qu'on soit dans le cas convergent ou divergent).

  ⋆ si ce n'est pas possible, pour montrer que $\sum u_n$ converge, on cherche à trouver une série $\sum v_n$ à termes positifs, convergente (en général une série de Riemann, cf. paragraphe III.2) telle que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n, ou $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ ou $\mathrm{O}\,(v_n)$,

  ⋆ pour montrer que $\sum u_n$ diverge, on cherche une série divergente v_n telle que $v_n \leqslant u_n$ pour tout n.

- Disons-le tout net : ON NE COMPARE PAS DES SÉRIES, ON COMPARE DES TERMES GÉNÉRAUX ! ! ! ! ! Écrire « $\sum \frac{n+1}{n^2} \sim \sum \frac{1}{n}$ » n'a aucun sens et est passible de châtiments corporels ! Il faut évidemment écrire : $\frac{n+1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$.
- Si on a une différence, on peut se demander si on a une série télescopique : dans ce cas, la série converge si et seulement si la suite associée converge.
- Si rien ne marche, on revient à la définition : on essaye de montrer que la suite des sommes partielles converge. Cependant, en général, on ne sait pas calculer la somme partielle : on ne s'intéressera aux sommes partielles que si rien ne marche. En général, on ne s'intéresse qu'au terme général.
- Pour les séries complexes, on peut aussi s'intéresser aux séries des parties réelles et des parties imaginaires.

Les séries de Bertrand sont un énorme classique mais ne sont pas au programme !

Les théorèmes avec $u_n = \mathrm{o}\,(v_n)$ et $\mathrm{O}\,(v_n)$ sont mêmes valables si $\sum u_n$ n'est pas à termes positifs, seul compte le fait que $\sum v_n$ soit à termes positifs.