Correction du DS n°6

Sujet groupe A

3 Tout d'abord, le produit est bien défini car on a deux matrices carrées de même taille. Soit $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$.

$$\begin{aligned}(AB)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (i^2+k)\times(kj) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(i^2kj + k^2j) \\ &= i^2j\sum_{k=1}^{n}k + j\sum_{k=1}^{n}k^2\end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\text{Le terme général de AB est } i^2j\times\dfrac{n(n+1)}{2} + j\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

4 On écrit $A = 2I_3 + N$ avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et que $N^3 = 0$ (N est nilpotente, d'où son nom... mais cela marchait aussi si vous l'appeliez autrement !). Dès lors, $N^k = 0$ si $k \geqslant 3$. Soit donc $n \geqslant 2$. $2I_3$ et N commutent donc, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}A^n &= \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}N^k(2I_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2}\tbinom{n}{k}2^{n-k}N^k \\ &= \tbinom{n}{0}2^nI_3 + \tbinom{n}{1}2^{n-1}N + \tbinom{n}{2}2^{n-2}N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n2^{n-1} & n2^{n-1}\times 2 \\ 0 & 0 & n2^{n-1}\times 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2}\times 2^{n-2}\times\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En conclusion $\boxed{\forall n \geqslant 2, A^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n2^n + n(n-1)2^{n-3}\times 3 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\times 3 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$

5.(a) On trouve comme en DM :

$$\boxed{X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ sont solutions.}}$$

5.(b) On fait comme d'habitude et on trouve :

$$\boxed{\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$$

5.(c) Après calculs

$$\boxed{\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

D est inversible car diagonale et ses termes diagonaux sont tous non nuls. Or, $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$ et un produit de matrices inversibles donc A est inversible. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{A est inversible.}}$$

La matrice D étant diagonale, il vient, d'après le cours :

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \mathrm{D}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

De même qu'en TD :

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2\mathrm{A} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^3\mathrm{P}^{-1}$$

Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. Tous calculs faits :

$$\boxed{\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 3 + 2^n & 3(-1)^n - 5 + 2^{n+1} & (-1)^{n+1} + 2 - 2^n \\ 3(-1)^{n+1} + 6 - 3 \times 2^n & 3(-1)^{n+1} + 10 - 3 \times 2^{n+1} & (-1)^n - 4 + 3 \times 2^n \\ 3(-1)^{n+1} + 9 - 6 \times 2^n & 3(-1)^{n+1} + 15 - 6 \times 2^{n+1} & (-1)^n - 6 + 6 \times 2^n \end{pmatrix}}$$

> Encore une fois, il ne coûte pas très cher de vérifier qu'on retrouve A en prenant $n = 1$.

6 Fait dans l'exercice 24 du chapitre 22.

7 Il suffit de majorer la fonction intégrée (on ne peut pas passer à la limite dans une intégrale).

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

D'après le théorème d'encadrement $\boxed{\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

8 Appliquons la fonction ln (u_n est bien strictement positif) :

$$\ln(u_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2k}{n}\right)$$

$\ln(u_n)$ est la somme de Riemann à pas constant associée à la fonction $fx \mapsto \ln(1+2x)$ qui est continue par morceaux donc

$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I} = \int_0^1 \ln(1+2x)\,\mathrm{d}x$$

Faisons le changement de variable $u = 1 + 2x, x = (u-1)/2,\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u/2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \int_1^3 \ln(u) \times \frac{\mathrm{d}u}{2} \\ &= \frac{1}{2}[u\ln(u) - u]_1^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(3\ln(3) - 3 - (1\ln(1) - 1)\right) \\ &= \frac{3}{2}\ln(3) - 1 \end{aligned}$$

La fonction exponentielle étant continue, $\boxed{u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{3}{2}\ln(3)-1} = 3^{3/2}e^{-1} = \frac{3\sqrt{3}}{e}.}$

9 Soit $x \in [\,0\,;\pi\,]$. On applique la formule de Taylor reste intégral à la fonction sin (qui est $\mathscr{C}\infty$) avec $a=0, b=x$ et $n=5$ (rappelons que la somme avant l'intégrale est la série de Taylor i.e. la partie principale du DL, c'est-à-dire le DL sans le o) :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + \int_0^x \frac{\sin^{(6)}(t)(x-t)^5}{5!}\,\mathrm{d}t$$

Or, $\sin^{(6)} = -\sin$ donc :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} - \int_0^x \frac{\sin(t)(x-t)^5}{5!}\,\mathrm{d}t$$

L'intégrale est positive puisque le sinus est positif sur $[\,0\,;\pi\,]$ et les bornes sont dans l'ordre croissant. On en déduit l'inégalité voulue.

$$\boxed{\forall x \in [\,0\,;\pi\,], \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}}$$

10 Fait dans le chapitre 23.

11 Faisons un DL : l'équivalent sera le premier terme non nul. Le cos étant équivalent à 1, le $\ln(1+x)$ à x et le sinus aussi, on a une différence de deux termes équivalents à x : il faut pousser les DL plus loin. Mettons deux termes dans chaque DL, nous verrons bien si c'est suffisant.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) \times \left(x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}(x^4) - x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\
&= -\frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)
\end{aligned}$$

puisque tous les autres termes sont négligeables devant x^2. On en déduit que :

$$\boxed{\cos(x)\ln(1+x) - \sin(x) \sim \frac{-x^2}{2}}$$

12 On a un quotient et des produits : il suffit donc de donner un équivalent de chacun des termes (plusieurs petits calculs valent mieux qu'un gros). Plaçons-nous tout d'abord en 0 : $\mathrm{Arctan}\,(x^2) \sim x^2$, $\sqrt[5]{1+x^2} \sim 1$, $\ln(1+x+x^2) \sim (x+x^2) \sim x$ et $e^x \sim 1$, si bien que :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } 0,\ f(x) \sim \frac{x^2 \times 1}{x \times 1} = x.}$$

Au voisinage de $+\infty$: $\mathrm{Arctan}\,(x^2) \sim \pi/2$, $x^2+1 \sim x^2$ et l'équivalent passe à la puissance fixe donc $\sqrt[5]{1+x^2} \sim x^{2/5}$. Pour le ln, on factorise par le terme prédominant :

$$\begin{aligned}
\ln(x^2+x+1) &= \ln(x^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \\
&= 2\ln(x) + \mathrm{o}(1)
\end{aligned}$$

et donc $\ln(x^2+x+1) \sim 2\ln(x)$. Enfin, on ne peut pas donner un équivalent plus simple de e^x, si bien que :

$$\boxed{\text{Au voisinage de } +\infty,\ f(x) \sim \frac{\pi x^{2/5}}{4\ln(x)e^x}.}$$

13 D'après la formule de Taylor-Young, f étant $\mathscr{C}^\infty$, elle est en particulier $\mathscr{C}^6$ donc admet un DL à l'ordre 6 donné par :

$$f(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(0)x^4}{4!} + \frac{f^{(5)}(0)x^5}{5!} + \frac{f^{(6)}(0)x^6}{6!} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Or, avec le DL de $1/(1+u)$, on obtient également $f(x) = x^4(1-x^2+\text{o}(x^2)) = x^4 - x^6 + \text{o}(x^6)$. Par unicité du DL, $f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$, $f^{(4)}(0)/4! = 1$ et $f^{(6)}(0)/6! = -1$. En conclusion :

$$\boxed{f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(5)}(0) = 0,\ f^{(4)}(0) = 4! = 24 \text{ et } f^{(6)}(0) = -6! = -720.}$$

14 Cf. préliminaires du sujet des groupes B et C.

15 Idem.

16 On veut un développement asymptotique à la préciser $\text{o}(1/x)$ pour avoir les précisions relatives. Puisqu'on multiplie par x (voir ci-dessous), on va à l'ordre $1/x^2$ dans les développements asymptotiques de l'exponentielle et de la racine carrée (donc à l'ordre 2 dans les DL). Soit $x > 0$ (on cherche une asymptote en $+\infty$, et donc $\sqrt{x^2} = x$).

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{1/x} x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \text{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \times x \times \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} + \frac{(1/2)(1/2-1)}{2} \times \frac{1}{x^2} + \text{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \left(x + 1 + \frac{1}{2x} + \text{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \text{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} + \text{o}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

En particulier, $f(x) - (x+3/2) \sim 7/(8x)$. On en déduit que $f(x) - (x+3/2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc la droite d'équation $y = x + 3/2$ est asymptote en $+\infty$, et deux quantités équivalentes en $+\infty$ ont même signe pour x assez grand, donc $f(x) - (x+3/2) > 0$ pour x assez grand. Finalement :

$$\boxed{\text{La droite d'équation } y = x + 3/2 \text{ est asymptote en } +\infty, \text{ et la courbe est au-dessus de l'asymptote.}}$$

17 Notons u_n le terme général. Il faut faire un DL à l'ordre 3 (possible car $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$) car les termes à l'ordre 1 se simplifient. On a :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \text{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \text{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{2n^3} + \text{o}\left(\frac{1}{n^3}\right) \end{aligned}$$

si bien que $u_n \sim -1/2n^3$: on a des séries à termes négatifs (ou de signe constant, mais attention, pas positifs) équivalents donc de même nature. Or, la série $\sum 1/n^3$ converge (série de Riemann de paramètre $3 > 1$).

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

18 Idem, notons u_n le terme général. On peut dire que $u_,n \sim n^2/2^{n-1}$ (attention, pas $n^2/2^n$) mais cela ne nous arrange pas beaucoup car ce n'est pas le terme général d'une série convergente. On pense à la méthode habituelle :

$$n^2 u_n \sim \frac{n^4}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

par croissances comparées, si bien que $u_n = \text{o}(1/n^2)$. Or, $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$) et est à termes positifs donc

$$\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$$

19 La série $\sum (-1)^n/\ln(n)$ est alternée, et son terme général décroît en valeur absolue vers 0 d'après le critère des séries alternées.

$$\boxed{\text{La série converge.}}$$

Toujours d'après le critère des séries alternées, la somme est du signe de son premier terme, c'est-à-dire pour $n = 2$ (car les termes pour $n = 0$ et $n = 1$ ne sont pas définis) et est majorée en valeur absolue par le premier terme. En d'autres termes :

$$\boxed{\text{La somme de la série est positive et majorée (on peut retirer la valeur absolue car elle est positive) par } 1/\ln(2).}$$

20 Notons u_n le terme général. On peut montrer comme d'habitude que $u_n \sim 1/n^2$ donc la série converge, mais puisqu'on nous demande de calculer la somme, on va faire d'une pierre deux coups. Soit $\mathrm{N} \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{S_N} &= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n(n+5)} \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{5n} - \frac{1}{5(n+5)} && \text{Décomposition en éléments simples} \\
&= \frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{n} - \frac{1}{5}\sum_{k=6}^{\mathrm{N}+5} \frac{1}{k} && k = n+5 \\
&= \left(\sum_{k=6}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k}\right) \times \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5}\right) + \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{\mathrm{N}+1} - \frac{1}{\mathrm{N}+2} - \frac{1}{\mathrm{N}+3} - \frac{1}{\mathrm{N}+4} - \frac{1}{\mathrm{N}+5}\right)
\end{aligned}$$

La première somme est multipliée par 0, et les termes en $1/(\mathrm{N}+\cdots)$ tendent vers 0. On en déduit que $\mathrm{S_N} \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 137/300$. La suite des sommes partielles admet une limite finie, donc

$$\boxed{\text{La série converge, et sa somme vaut } 137/300.}$$

Sujet groupes B et C

Préliminaires

3 Réfléchissons aux ordres (il est inutile d'écrire tout ça sur votre copie). Le sinus est multiplié par 1 (le premier terme de l'exponentielle) donc, pour le sinus, pas le choix, on va à l'ordre 5, et l'exponentielle est multipliée par x (le premier terme du sinus) donc, pour l'exponentielle, l'ordre 4 suffit.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)\right) \times \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\
&= x + x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Finalement
$$\boxed{f(x) = x + \frac{5x^3}{6} + \frac{41x^5}{120} + \mathrm{o}\left(x^5\right)}$$

Passons maintenant à g. On va commencer par simplifier par x donc on va, au numérateur et au dénominateur, à l'ordre 3. Ainsi :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}\left(x^3\right)}{x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)} \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \times \frac{1}{1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \mathrm{o}\left(x^2\right)} \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \times \left(1 - \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) && \text{DL de } \frac{1}{1+u} \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \\
&= \left(1 + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right) \times \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)\right)
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$

En conclusion
$$\boxed{g(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \mathrm{o}\left(x^2\right)}$$

Problème

Partie I. Premières propriétés des polynômes P_n et définition de la suite (a_n)

1.(a) C'est immédiat.

$$\boxed{\mathrm{P}_n(0) = 1}$$

1.(b) En dérivant P_{n+1}, il vient :

$$\mathrm{P}_{n+1}{}' = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k\mathrm{X}^{k-1}}{k!}$$

Le terme d'indice $k = 0$ est nul donc la somme commence en fait en 1, donc on peut simplifier par k ce qui donne :

$$\mathrm{P}_{n+1}{}' = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathrm{X}^{k-1}}{(k-1)!}$$

Le changement d'indice $j = k - 1$ donne :
$$\boxed{\mathrm{P}_{n+1}{}' = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^j}{j!} = \mathrm{P}_n}$$

| C'est cette relation qui sera très utile pour la récurrence.

2.(a) Attention, il y a deux choses à prouver ! D'une part, $\mathrm{P}_0 = 1$ n'a aucune racine réelle, d'autre part, $\mathrm{P}_1 = \mathrm{X} + 1$ a une unique racine réelle (à savoir -1).

$$\boxed{\text{L'initialisation est vérifiée.}}$$

| Bien sûr, personne n'a osé écrire dans sa copie : « $\mathrm{X} + 1 = 0 \iff \mathrm{X} = -1$ » ou toute autre horreur du même genre...

2.(b) Par hypothèse de récurrence, P_{2n+1} ne s'annule qu'en a_n donc ne s'annule pas sur cet intervalle, et puisque P_{2n+1} est continu (c'est un polynôme, et on identifie sans scrupule polynôme et fonction polynomiale), on a le résultat (si la fonction change de signe, alors elle s'annule d'après le TVI par continuité).

$$\boxed{\mathrm{P}_{2n+1} \text{ ne s'annule pas sur l'intervalle }]\, a_n \,; +\infty\, [.}$$

On sait qu'un polynôme est équivalent à son terme dominant en $+\infty$ donc :

$$\boxed{\mathrm{P}_{2n+1}(x) \sim_{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty}$$

En particulier, P_{2n+1} tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et P_{2n+1} ne change pas de signe sur l'intervalle $]\, a_n \,; +\infty\, [$ donc P_{2n+1} est positif sur cet intervalle. On a le même équivalent en $-\infty$ et la puissance est impaire donc P_{2n+1} tend vers $-\infty$ en $-\infty$. De même, P_{2n+1} ne change pas de signe donc est négatif sur $]\, -\infty \,; a_n\, [$ si bien que le tableau de signes de P_{2n+1} est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		a_n		$+\infty$
$\mathrm{P}_{2n+1}(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{2.(c)}}$ D'après la question 1.(b), ${\text{P}_{2n+2}}' = \text{P}_{2n+1}$ dont on a le tableau de signes, d'où le tableau de variations de P_{2n+2} :

x	$-\infty$		a_n		$+\infty$
P_{2n+2}		$\searrow$		$\nearrow$	

Or
$$\text{P}_{2n+2}(a_n) = \text{P}_{2n+1}(a_n) + \frac{{a_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{{a_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} \geqslant 0$$

Il suffit donc de prouver que a_n est non nul. Or, d'après la question 1.(a), $\text{P}_{2n+1}(0) = 1$ donc $a_n \neq 0$ ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{\text{P}_{2n+2}(a_n) > 0}$$

$\boxed{\textbf{2.(d)}}$ D'après la question précédente, P_{2n+2} admet un minimum strictement positif si bien que P_{2n+2} ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Toujours d'après la question 1.(b), $\text{P}'_{2n+3} = \text{P}_{2n+2} > 0$ donc P_{2n+3} est strictement croissante et, d'après la question 2.(b) (qu'on peut appliquer à P_{2n+3}, penser à « truc »), P_{2n+3} tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$, et P_{2n+3} est continue donc, d'après le théorème de la bijection, P_{2n+3} s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$ en un réel noté a_{n+1} ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{Le résultat est démontré.}}$$

Partie II. Monotonie et limite de (a_n)

$\boxed{\textbf{1}}$ Déjà fait dans la partie précédente : P_{2n+1} et P_{2n+3} sont strictement croissants sur $\mathbb{R}$, tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ et vers $-\infty$ en $-\infty$. Le tableau de signes de P_{2n+1} est ci-dessus, et celui de P_{2n+3} est analogue en remplaçant n par $n+1$:

x	$-\infty$		a_{n+1}		$+\infty$
$\text{P}_{2n+3}(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{2}}$ $\text{P}_{2n+1}(0) = 1 > 0$ (cf. partie I) donc, d'après le tableau de signes de P_{2n+1}, cela implique que :

$$\boxed{a_n < 0}$$

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$ Notons cette quantité u_p. En factorisant :

$$u_p = \frac{(2p+3)^{2p}}{(2p)!}\left(1 - \frac{2n+3}{2p+1}\right)$$

Et puisque $p \leqslant n$, on en déduit que $2p+1 < 2n+3$ donc $(2n+3)/(2p+1) > 1$ si bien que :

$$\boxed{u_p < 0}$$

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$ On a :

$$\text{P}_{2n+1}(-2n-3) = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-2n-3)^k}{k!}$$

D'après la question précédente, il semble naturel de séparer les cas selon la parité de k :

$$\text{P}_{2n+1}(-2n-3) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{(-2n-3)^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{(-2n-3)^k}{k!}$$

Dans la première somme, on pose $k = 2p$ et $k = 2p+1$ dans la seconde, si bien que :

$$\text{P}_{2n+1}(-2n-3) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2n-3)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{n} \frac{(-2n-3)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

Or, les puissances de la première somme sont paires, donc les termes sont positifs, et les puissances de la deuxième somme sont impaires, donc les termes sont négatifs, si bien que :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{2n+1}(-2n-3) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(2n+3)^{2p}}{(2p)!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{(2n+3)^{2p+1}}{(2p+1)!} \\ &= \sum_{p=0}^{n} \left(\frac{(2n+3)^{2p}}{(2p)!} - \frac{(2n+3)^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, tous les termes de cette somme sont strictement négatifs donc

$$\boxed{\mathrm{P}_{2n+1}(-2n-3) < 0}$$

D'après le tableau de signes de P_{2n+1}, cela implique que :

$$\boxed{-2n-3 < a_n}$$

3.(c) Tout d'abord, de même que dans la question 2.(c) de la partie précédente, $\mathrm{P}_{2n+1}(a_n) = 0$ donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{2n+3}(a_n) &= \mathrm{P}_{2n+1}(a_n) + \frac{{a_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{{a_n}^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= \frac{{a_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{{a_n}^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= \frac{{a_n}^{2n+2}}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{a_n}{2n+3} \right) \end{aligned}$$

D'après la question précédente, $a_n/(2n+3) > -1$ donc :

$$\boxed{\mathrm{P}_{2n+3}(a_n) > 0}$$

D'après le tableau de signes de P_{2n+3}, on en déduit que $a_{n+1} < a_n$ c'est-à-dire que :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n) \text{ est décroissante.}}$$

4 Suivons l'indication de l'énoncé : supposons que la suite converge vers une limite L. La suite (a_n) étant décroissante, $\mathrm{L} \leqslant a_n$ pour tout n si bien que $\mathrm{P}_{2n+1}(\mathrm{L}) \leqslant 0$ d'après le tableau de signes de P_{2n+1}. Or (cf. chapitres 23 et 25), $\mathrm{P}_{2n+1}(\mathrm{L}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\mathrm{L}}$ et l'inégalité large passe à la limite donc $e^{\mathrm{L}} \leqslant 0$ ce qui est absurde. La suite (a_n) est décroissante et diverge donc

$$\boxed{a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty}$$

Partie III. Une application de la (variante de la) méthode de Laplace

1 Notons

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto te^{1+t} \end{cases}$$

φ est dérivable et, si $t \in \mathbb{R}$, $\varphi'(t) = e^{1+t}(t+1)$. On en déduit le tableau de variations de φ (la limite en $-\infty$ est obtenue par croissances comparées) :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	
φ	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Attention, φ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$! Cependant, pour tout $t \leqslant 0$, $\varphi(t) \leqslant 0$ donc $\varphi(t) \neq 1$ et φ est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection, il existe un unique réel $y > 0$ tel que $\varphi(y) = 1$ et puisque φ est négative sur $\mathbb{R}_-$, y est le seul réel (tout court) qui convient.

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } y \text{ tel que } ye^{1+y} = 1.}$$

On a $y \approx 0.278$.

2 On pose $u = x/n$, $x = nu$ et $\mathrm{d}x = n\,\mathrm{d}u$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &= \frac{1}{n!}\int_0^{y+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} e^{nu} \times n^n u^n n\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{y+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} e^{nu} \times e^{n\ln(u)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu (car $-n(-u-\ln(u)) = nu + n\ln(u)$) :

$$\boxed{\mathrm{I}_n = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^{y+\alpha\ln(n)/n+\beta/n} e^{-n(-u-\ln(u))}\,\mathrm{d}u}$$

3 D'après la formule de Stirling :

$$\boxed{\frac{n^{n+1}}{n!} \sim \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} = e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}}$$

4 On applique le théorème avec $f(x) = 1$, $g(x) = -x - \ln(x)$, $c = y$ (le réel trouvé à la question 1) : vérifions que les conditions sont bien vérifiées.

- f est continue.
- g est $\mathscr{C}^2$.
- c est bien strictement positif et g est strictement décroissante sur $]\,0\,;c\,]$ (pas besoin de dériver : g est somme de fonctions strictement décroissantes) avec $g'(c) = -1 - 1/y < 0$ et $f(c) = 1 \neq 0$.

On peut donc bien appliquer le théorème de l'énoncé et l'équivalent trouvé à la question précédente (le produit est une opération légale) si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_n &\sim e^n\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times \frac{-1 \times e^{-\beta(-1-1/y)}}{-1-1/y} \times \frac{e^{-n(-y-\ln(y))}}{n^{1+\alpha(-1-1/y)}} \\
&\sim \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times \frac{\exp\left(\beta \times \dfrac{y+1}{y}\right)}{\dfrac{y+1}{y}} \times \frac{e^{n+ny+n\ln(y)}}{n^{1-\alpha-\alpha/y}}
\end{aligned}$$

On voit que le terme constant est égal à B. Le terme exponentiel est égal à :

$$\left(e^{1+y+\ln(y)}\right)^n = \left(ye^{1+y}\right)^n = 1$$

par définition de y. Enfin, on a :

$$\sqrt{n} \times \frac{1}{n^{1-\alpha-\alpha y}} = n^{\frac{1}{2}+\alpha\times\frac{y}{y+1}-1} = n^{\mathrm{A}}$$

Partie IV. Développement asymptotique de la suite (a_n)

1.(a) Appliquons la formule de Taylor reste intégral avec $a = 0, b = a_n$ et l'exponentielle à l'ordre n (la dérivée $(m+1)$-ième de l'exponentielle est elle-même) :

$$\begin{aligned} e^{a_n} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{{a_n}^k}{k!} + \int_0^{a_n} \frac{e^t (a_n - t)^m}{m!}\, \mathrm{d}t \\ &= \mathrm{P}_m(a_n) + \int_0^{a_n} \frac{e^t (a_n - t)^m}{m!}\, \mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^{a_n} \frac{e^t (a_n - t)^m}{m!}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

Posons $u = t/a_n, t = a_n u$, $\mathrm{d}t = a_n\, \mathrm{d}u$ si bien que :

$$\begin{aligned} e^{a_n} &= \int_0^1 \frac{e^t (a_n - a_n t)^m}{m!} a_n\, \mathrm{d}u \\ &= \int_0^1 \frac{e^t {a_n}^m (1-t)^m}{m!} a_n\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

En conclusion
$$\boxed{e^{a_n} = \frac{{a_n}^{m+1}}{m!} \int_0^1 e^{a_n t} (1-t)^m\, \mathrm{d}t}$$

1.(b) D'après la question précédente, en divisant par e^{a_n} il vient

$$1 = \frac{{a_n}^{m+1}}{m!} \int_0^1 e^{a_n (t-1)} (1-t)^m\, \mathrm{d}t$$

Il suffit de poser $u = 1 - t, t = 1 - u$, $\mathrm{d}t = -\, \mathrm{d}u$, ce qui donne le résultat voulu.

$$1 = \frac{{a_n}^{m+1}}{m!} \int_0^1 e^{-a_n u} u^m\, \mathrm{d}t$$

1.(c) Il suffit de poser $x = -a_n u, u = -x/a_n$, $\mathrm{d}x = -a_n\, \mathrm{d}u$.

$$\boxed{\frac{1}{m!} \int_0^{-a_n} x^m e^x\, \mathrm{d}x = 1}$$

2.(a) C'est du cours :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, |x_n| > \varepsilon}$$

2.(b) La suite (x_n) ne tend pas vers 0 donc prenons le réel $\varepsilon > 0$ dont l'existence est donnée ci-dessus. Par hypothèse, pour tout n_0, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $|x_n| > \varepsilon$. En d'autres termes, cela signifie qu'une infinité de termes de la suite (x_n) vérifient $|x_n| > \varepsilon$. Ces termes vérifient $x_n \leqslant -\varepsilon$ ou $x_n \geqslant \varepsilon$: il y a une infinité de termes vérifiant l'une ou l'autre (ou les deux) des inégalités, ce qui donne une suite extraite de la suite extraite donc une suite extraite de (x_n).

$$\boxed{\text{C'est bon.}}$$

2.(c) Puisque $x_{n_p} \geqslant \varepsilon$, alors $a_{n_p} + my + z\ln(m) + t \geqslant \varepsilon$ ce qui donne le résultat voulu (en mettant a_{n_p} à droite et ε à gauche). D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{ym + z\ln(m) + (t-\varepsilon)} e^x x^m\, \mathrm{d}x = \int_0^{-a_{n_p}} e^x x^m\, \mathrm{d}x + \int_{-a_{n_p}}^{ym + z\ln(m) + (t-\varepsilon)} e^x x^m\, \mathrm{d}x$$

Or, la dernière intégrale est positive par positivité de l'intégrale (car les bornes sont dans l'ordre croissant) ce qui donne l'inégalité voulue.

$$\frac{1}{m!} \int_0^{ym + z\ln(m) + (t-\varepsilon)} e^x x^m\, \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{m!} \int_0^{-a_{n_p}} e^x x^m\, \mathrm{d}x$$

2.(d) On applique la question précédente avec $\alpha = z$ et $\beta = t$: cette intégrale est donc équivalente à $m^{\mathrm{A}} \times \mathrm{B}$ avec

$$\mathrm{A} = z \times \frac{1+y}{y} - \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{y}{y+1} \times \exp\left((t-\varepsilon) \times \frac{1+y}{y}\right)$$

Il suffit donc de prouver que $\mathrm{A} = 0$ et que $\mathrm{B} < 1$. Par définition de z :

$$\mathrm{A} = \frac{y}{2(1+y)} \times \frac{1+y}{y} - \frac{1}{2} = 0$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{y}{y+1} \times \exp\left(\frac{y}{1+y} \ln\left(\sqrt{2\pi} \times \frac{1+y}{y}\right) \times \frac{1+y}{y} - \varepsilon \times \frac{1+y}{y}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{y}{y+1} \times \exp\left(\ln\left(\sqrt{2\pi} \times \frac{1+y}{y}\right) - \varepsilon \times \frac{1+y}{y}\right) \\ &= \exp\left(-\varepsilon \times \frac{1+y}{y}\right)\end{aligned}$$

Or, $\varepsilon > 0$ et $y > 0$ donc la quantité dans l'exponentielle est strictement négative, si bien que $\mathrm{B} < 1$.

C'est bon.

2.(e) L'intégrale de la question précédente a une limite (être équivalent à B signifie tendre vers B lorsque B est une constante non nulle) strictement inférieure à 1. Or, elle est plus grande qu'une intégrale (question 2.(c)) qui vaut 1 (question 1.(c)). L'inégalité large passe à la limite donc $\mathrm{B} \geqslant 1$: absurde.

La suite (a_n) tend vers 0.

En particulier, on obtient l'équivalent $a_n \sim -2ny$.

Partie V. Où l'on prend n assez grand et où l'on découpe J_n en trois intégrales

1.(a) Immédiat puisque le membre de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Pour n assez grand, $-1 \leqslant \dfrac{\alpha \ln(n)}{n^{1/4}} + \dfrac{\beta}{n^{1/4}}$.

1.(b) Soit $n \geqslant 1$. Travaillons par équivalences.

$$\begin{aligned} c_n \leqslant {c_n}' &\iff c - \frac{1}{n^{3/4}} \leqslant c + \frac{\alpha \ln(n)}{n} + \frac{\beta}{n} \\ &\iff -1 \leqslant \frac{\alpha \ln(n)}{n^{1/4}} + \frac{\beta}{n^{1/4}}\end{aligned}$$

en simplifiant par c et en multipliant par $n^{3/4}$ (positif) et on a vu que cette inégalité était vraie pour n assez grand. Puisqu'on a travaillé par équivalences :

${c_n} \leqslant {c_n}'$ pour n assez grand.

1.(c) On a $|c - c_n| = 1/n^{3/4}$ et $|c - {c_n}'| = \alpha \ln(n)/n + \beta/n$ donc $|c - {c_n}'| = \mathrm{o}(|c - c_n|)$ et donc on a le résultat voulu.

C'est bon.

2.(a) Puisque $g'(c) < 0$, alors $g'(c) < g'(c)/2$. On en déduit le résultat voulu par continuité de g' (car g est $\mathscr{C}^2$ donc g' est dérivable donc continue) et parce que $c > 0$.

$$\boxed{\text{Un tel } \eta \text{ existe bien.}}$$

2.(b) Découle du fait que (c_n) et $(c_n{}')$ tendent vers c.

$$\boxed{\text{On a le résultat voulu.}}$$

Partie VI. Où l'on montre que A_n et B_n sont négligeables

1.(a) g étant strictement décroissante sur $]\,0\,;c\,]$, $g(x) \geqslant g(c-\eta)$ sur $]\,0\,;c-\eta\,]$ et $g(c-\eta) > g(c)$, toujours par stricte décroissance de g. Il suffit de poser $r = g(c-\eta) - g(c)$.

$$\boxed{\text{Il existe } r>0 \text{ tel que } g(x) \geqslant g(c)+r \text{ sur }]\,0\,;c-\eta\,].}$$

1.(b) D'après l'inégalité triangulaire :

$$|\mathrm{A}_n| \leqslant \int_0^{c-\eta} |f(x)|e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x$$

Si $x \in]\,0\,;c-\eta\,]\,, -ng(x) \leqslant -ng(c) - nr$ donc, par croissance de l'exponentielle, par positivité de $|f(x)|$ puis croissance de l'intégrale :

$$|\mathrm{A}_n| \leqslant \int_0^{c-\eta} |f(x)|e^{-nr-ng(c)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{A}e^{-nr}e^{-ng(c)} \text{ avec } \mathrm{A} = \int_0^{c-\eta} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Enfin, $r>0$ donc, par croissances comparées, $e^{-nr} = \mathrm{o}(n^t)$ ce qui donne le résultat voulu par produit.

$$\boxed{\mathrm{A}_n = \mathrm{o}\left(n^t e^{-ng(c)}\right) \text{ pour tout réel } t.}$$

2.(a) Prouvons d'abord l'inégalité de gauche. D'après l'EAF (g est dérivable sur $]\,x\,;c\,[$, continue sur $[\,x\,;c\,]$), il existe $a \in]\,x\,;c\,[$ tel que :

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c} = g'(a) \leqslant \frac{g'(c)}{2}$$

puisque $g' \leqslant g'(c)/2$ sur cet intervalle (cf. partie précédente). En multipliant par $x-c<0$ (et donc on change le sens de l'inégalité) on a la première inégalité. De plus, $x \leqslant c_n$ donc $x-c \leqslant c_n - c = -1/n^{3/4}$ et $g'(c)<0$ donc $g'(c)(x-c) \geqslant -g'(c)/n^{3/4}$ ce qui donne l'autre inégalité.

$$\boxed{g(x) \geqslant g(c) + \frac{g'(c)}{2}(x-c) \geqslant g(c) - \frac{g'(c)}{2n^{3/4}}}$$

2.(b) De même qu'en 1.(b), on multiplie par $-n$ (et donc on change le sens de l'inégalité), inégalité triangulaire, croissance de l'exponentielle et croissance de l'intégrale (les bornes sont dans l'ordre croissant d'après la partie précédente) :

$$|\mathrm{B}_n| \leqslant \int_{c-\eta}^{c_n} |f(x)|e^{-ng(c)+n^{1/4}g'(c)/2}\,\mathrm{d}x = e^{n^{1/4}g'(c)/2}e^{-ng(c)}\int_{c-\eta}^{c_n} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Attention, l'intégrale dépend de n donc n'est pas constante, mais il suffit de la majorer par l'intégrale de 0 à c (la fonction intégrée est positive) donc :

$$|\mathrm{B}_n| \leqslant e^{n^{1/4}g'(c)/2}e^{-ng(c)}\int_{c-\eta}^{c} |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

ce qui permet de conclure (car $e^{n^{1/4}g'(c)} = \mathrm{o}(n^t)$ car $g'(c)<0$).

$$\boxed{\mathrm{B}_n = \mathrm{o}\left(n^t e^{-ng(c)}\right) \text{ pour tout réel } t.}$$

> On pouvait aussi majorer l'intégrale de $c-\eta$ à c_n de $|f|$ par $\mathrm{M}\times\eta$ où M est un majorant de $|f|$ qui existe d'après le théorème des bornes atteintes.

Partie VII. Où l'on donne un équivalent de C_n et donc de J_n

$\boxed{1}$ Découle de l'inégalité de Taylor-Lagrange (avec $a = c, b = x$ et $n = 1$) puisque g est $\mathscr{C}^2$, en posant $\mathrm{K} = \max_{\mathrm{I}_\delta} |g''|$ qui existe d'après le théorème des bornes atteintes car g'' est continue sur le segment I_δ (attention, K ne doit pas dépendre de x donc il ne fallait pas prendre $\mathrm{K} = \max_{[\,x\,;c\,]} |g''|$!).

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{I}_\delta, \qquad |g(x) - g(x) - g'(c)(x-c)| \leqslant \frac{\mathrm{K}(x-c)^2}{2}}$$

$\boxed{2}$ Soit $x \in [\,c_n\,;c_n{}'\,]$. En multipliant l'inégalité de la question précédente par $n = |-n|$ (possible car $[\,c_n\,;c_n{}'\,] \subset \mathrm{I}_\delta$) :

$$|-ng(x) + ng(x) + ng'(c)(x-c)| \leqslant \frac{\mathrm{K}n(x-c)^2}{2}$$

Or, $|x-c| \leqslant \max(|x-c_n|, |x-c_n{}'|) = |x-c_n|$ d'après la partie V et donc $|x-c| \leqslant 1/n^{3/4}$ et donc $(x-c)^2 \leqslant 1/n^{3/2}$ ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{|-ng(x) + ng(x) + ng'(c)(x-c)| \leqslant \frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}}}$$

$\boxed{\textbf{3.(a)}}$ Théorème des bornes atteintes (h est continue sur le segment $[\,c_n\,;c_n{}'\,] \subset \mathbb{R}_+^*$).

$\boxed{h \text{ admet un maximum et un minimum sur } [\,c_n\,;c_n{}'\,].}$

$\boxed{\textbf{3.(b)}}$ Toujours d'après le théorème des bornes atteintes, il existe a_n et b_n appartenant à $[\,c_n\,;c_n{}'\,]$ vérifiant $h(a_n) = \mathrm{M}_n$ et $h(b_n) = m_n$. Or, $c_n \leqslant a_n \leqslant c_n{}'$ et (c_n) et $(c_n{}')$ tendent vers c donc, théorème d'encadrement, (a_n) et (b_n) tendent vers c d'après le théorème d'encadrement. h étant continue, $h(a_n) = \mathrm{M}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} h(c) = 1$ et idem pour $h(b_n) = m_n$.

$\boxed{\text{Les suites } (\mathrm{M}_n) \text{ et } (m_n) \text{ convergent vers 1.}}$

$\boxed{\textbf{3.(c)}}$ Puisque m_n est le minimum de h et M_n est son maximum, alors $m_n \leqslant f(x)/f(c) \leqslant \mathrm{M}_n$ et, en multipliant par $f(c) > 0$, $m_n f(c) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}_n f(c)$. De plus, d'après la question 2 :

$$-\frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}} \leqslant -ng(x) + ng(c) + ng'(c)(x-c) \leqslant \frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}}$$

si bien que

$$-\frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}} - ng(c) - ng'(c)(x-c) \leqslant -ng(x) \leqslant \frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}} - ng(c) - ng'(c)(x-c)$$

Par croissance de l'exponentielle :

$$e^{-\frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}}} e^{-ng(c)-ng'(c)(x-c)} \leqslant e^{-ng(x)} \leqslant e^{\frac{\mathrm{K}}{2\sqrt{n}}} e^{-ng(c)-ng'(c)(x-c)}$$

Par produit d'inégalités positives, on a le résultat voulu.

$$\boxed{m_n f(c) \mathrm{F}_n(x) e^{-\mathrm{K}/2\sqrt{n}} \leqslant f(x) e^{-ng(x)} \leqslant \mathrm{M}_n f(c) \mathrm{F}_n(x) e^{\mathrm{K}/2\sqrt{n}}}$$

$\boxed{\textbf{3.(d)}}$ En intégrant les inégalités de la question précédente entre $[\,c_n\,;c_n{}'\,]$ et par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{m_n f(c) e^{-\mathrm{K}/2\sqrt{n}} \int_{c_n}^{c_n{}'} \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \mathrm{C}_n \leqslant \mathrm{M}_n f(c) e^{\mathrm{K}/2\sqrt{n}} \int_{c_n}^{c_n{}'} \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Or, $(m_n), (\mathrm{M}_n)$ (cf. 3.(b)) et $(e^{\pm\,\mathrm{K}/2\sqrt{n}})$ tendent vers 1 donc les deux termes extrémaux sont équivalents à $f(c)\displaystyle\int_{c_n}^{c_n{}'} \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x$ ce qui permet de conclure d'après le théorème d'encadrement.

$$\boxed{\mathrm{C}_n \sim f(c) \int_{c_n}^{c_n{}'} \mathrm{F}_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$ Suivons l'indication de l'énoncé et faisons le changement de variable $u = -ng'(c)(x-c), x = c + u/(-ng'(c))$ et donc $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(-ng'(c))$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n &\sim f(c)\int_{-ng'(c)(c_n-c)}^{-ng'(c)(c_n{}'-c)} e^{-ng(c)+x} \times \frac{\mathrm{d}u}{-ng'(c)} \\
&\sim \frac{f(c)e^{-ng(c)}}{-ng'(c)}\int_{-ng'(c)(c_n-c)}^{-ng'(c)(c_n{}'-c)} e^{x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\mathrm{C}_n \sim \frac{f(c)e^{-ng(c)}}{-ng'(c)}\left(e^{-ng'(c)(c_n{}'-c)} - e^{-ng'(c)(c_n-c)}\right)}$$

$\boxed{\textbf{4.(d)}}$ On a :

$$\begin{aligned}
d_n - d_n{}' &= -ng'(c)(c_n-c) + ng'(c)(c_n{}'-c) \\
&= g'(c)n^{1/4} + \alpha\ln(n) + \beta \\
&\sim g'(c)n^{1/4}
\end{aligned}$$

ce qui donne la limite voulue puisque $g'(c) < 0$. On en déduit que $e^{d_n - d_n{}'} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si bien que $e^{d_n} = \mathrm{o}\left(e^{d_n{}'}\right)$. En d'autres termes, $e^{d_n{}'} - e^{d_n} \sim e^{d_n{}'}$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{C}_n &\sim \frac{-f(c)e^{-ng(c)}}{ng'(c)} \times e^{d_n{}'} \\
&\sim \frac{-f(c)e^{-ng(c)}}{ng'(c)} \times e^{-ng'(c)(c_n{}'-c)} \\
&\sim \frac{-f(c)e^{-ng(c)}}{ng'(c)} \times e^{-\alpha g'(c)\ln(n) - \beta g'(x)}
\end{aligned}$$

ce qui donne l'équivalent voulu :

$$\boxed{\mathrm{C}_n \sim \frac{-f(c)e^{-\beta g'(x)}}{g'(c)} \times \frac{e^{-ng(c)}}{n^{1+\alpha g'(c)}}}$$

$\boxed{\textbf{5}}$ $\mathrm{J}_n = \mathrm{A}_n + \mathrm{B}_n + \mathrm{C}_n$ avec C_n équivalent à la quantité voulue. De plus, d'après la partie précédente, A_n et B_n sont négligeables devant $n^{-1-\alpha g'(c)}e^{-ng(c)}$ (car négligeables devant $n^t e^{-ng(c)}$ pour tout t) donc devant C_n, si bien que :

$$\boxed{\mathrm{J}_n = \mathrm{C}_n + \mathrm{o}(\mathrm{C}_n) \sim \mathrm{C}_n \sim \frac{-f(c)e^{-\beta g'(x)}}{g'(c)} \times \frac{e^{-ng(c)}}{n^{1+\alpha g'(c)}}}$$

> On a dit « variante » de la méthode de Laplace car, précisément, la méthode de Laplace est le résultat suivant (plus difficile à prouver que ce que nous avons fait dans ce devoir) : soient $f, g : [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions suivantes :
>
> - g admet un minimum en un unique point $c \in \,]\,a\,;b\,[$.
> - g est $\mathscr{C}^2$ et $g''(c) > 0$.
> - f est continue et $f(c) \neq 0$.
>
> Alors :
>
> $$\mathrm{I}_n = \int_a^b f(x)e^{-ng(x)}\,\mathrm{d}x \sim f(c)e^{-ng(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{ng''(c)}}$$
>
> On peut donner une « démonstration » intuitive de ce résultat : si x est « loin de c », $g(x)$ est plus grand que $g(c)$ et $e^{-ng(x)}$ est négligeable devant $e^{-ng(c)}$. La contribution à l'intégrale va donc être négligeable et on peut donc se limiter à considérer des intervalles arbitrairement petits autour de c, sur lesquels (avec un DL à l'ordre 2 donné par

la formule de Taylor-Young) on peut approcher $e^{-ng(x)}$ par $e^{-ng(c)-ng''(c)(x-c)^2/2}$. On peut donc approcher I_n par :

$$\mathrm{I}_n \approx f(c)e^{-ng(c)} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} e^{-ng''(\alpha)(x-c)^2/2}\,\mathrm{d}x$$

Le changement de variable $t = \sqrt{ng''(c)/2} \times (x-c)$ donne :

$$\mathrm{I}_n \approx \int_{-\varepsilon\sqrt{ng''(c)/2}}^{\varepsilon\sqrt{ng''(c)/2}} e^{-t^2} \times \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{ng''(c)/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{ng''(c)/2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2\pi}{ng''(c)}}$$

puisque l'intégrale de e^{-t^2} sur $\mathbb{R}$ vaut $\sqrt{\pi}$ (ce qu'on peut prouver dès cette année avec des formules de Taylor). On en déduit l'équivalent voulu (avec les mains).