Correction du DS n°2

Préliminaires

$\boxed{3}$ Appelons A la quantité de gauche. La fonction Arctan étant strictement croissante,

$$\text{Arctan}\,(0) + \text{Arctan}\,(0) = 0 < \text{A} < \text{Arctan}\,(1) + \text{Arctan}\,(1) = \frac{\pi}{2}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\tan(\text{A}) &= \frac{\tan(\text{Arctan}\,(1/2)) + \tan(\text{Arctan}\,(1/3))}{1 - \tan(\text{Arctan}\,(1/2))\tan(\text{Arctan}\,(1/3))} && \tan(a+b) \\
&= \frac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}}{1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}} && \forall x \in \mathbb{R}, \tan(\text{Arctan}\,(x)) = x \\
&= \frac{\dfrac{5}{6}}{1 - \dfrac{1}{6}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Or, Arctan (1) est l'unique $y \in \left] -\dfrac{\pi}{2}\,; \dfrac{\pi}{2} \right[$ tel que $\tan(y) = 1$, et A vérifie ces mêmes propriétés, si bien que

$$\boxed{\text{A} = \text{Arctan}\,(1) = \frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{4}$ Précisons (cf. cours) que la fonction Arccos n'est ni paire ni impaire. Tout d'abord, la fonction Arccos est définie sur $[-1\,;1]$, si bien que cette expression a un sens sur $[-1\,;1]$. Soit donc $x \in [-1\,;1]$. Comme souvent, deux méthodes (au moins) possibles. Je précise évidemment qu'une seule suffisait dans votre copie.

- **Première méthode :** par une étude de fonction. Notons $f(x)$ la quantité de l'énoncé. La fonction Arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$ donc f également ($-x$ vaut 1 ou -1 si et seulement si x vaut -1 ou 1). Si $x \in]-1\,;1[$, en n'oubliant pas de sortir un -1 en dérivant le premier terme (dérivée d'une composée) :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(-1) \times -1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

  On en déduit que f est constante sur $]-1\,;1[$ et, puisqu'elle est continue sur $[-1\,;1]$ (l'Arccos est continue sur $[-1\,;1]$, même si elle n'est pas dérivable en ± 1), alors elle est constante sur $[-1\,;1]$, et $f(0) = 2\,\text{Arccos}\,(0) = 2 \times \pi/2 = \pi$.

- **Deuxième méthode :** en notant encore $f(x)$ la quantité de l'énoncé, il vient :

$$\begin{aligned}
\cos(f(x)) &= \cos(\text{Arccos}\,(-x))\cos(\text{Arccos}\,(x)) - \sin(\text{Arccos}\,(-x))\sin(\text{Arccos}\,(x)) \\
&= (-x) \times x - \sqrt{1-(-x)^2} \times \sqrt{1-x^2} && \sin(\text{Arccos}\,(u)) = \sqrt{1-u^2} \\
&= -x^2 - (1-x^2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

  Or, la fonction Arccos est à valeurs dans $[0\,;\pi]$ donc $f(x) \in [0\,;2\pi]$ et, sur cet intervalle, le seul réel à avoir un cosinus égal à -1 est π.

$$\boxed{\forall x \in [-1\,;1]\,, \text{Arccos}\,(-x) + \text{Arccos}\,(x) = \pi}$$

Exercice - Nombres pseudo-premiers par rapport à a

1 Il existe une infinité de nombres premiers, et un nombre fini de nombres premiers qui divisent a^2-1 (auxquels il faut éventuellement ajouter 2 car on veut que p soit impair).

$$\boxed{\text{Il existe une infinité de nombres premiers qui conviennent.}}$$

De plus, à l'aide de la factorisation de $x^n - y^n$ avec $x = a^2$, $y = 1$ et $n = p$, il vient :

$$a^{2p} - 1 = (a^2)^p - 1^p = (a^2-1) \times \sum_{k=0}^{p-1} a^{2k}$$

Le y^{p-1-k} n'apparaît pas car il vaut 1. La somme étant un entier, a^2-1 divise a^{2p-1} donc

$$\boxed{m \text{ est un entier.}}$$

2 Par définition de m, on a $a^{2p} - 1 = m(a^2-1)$ donc $a^{2p} = 1 + m(a^2-1)$.

$$\boxed{a^{2p} \equiv 1[m]}$$

3 Par définition de m, on a : $(a^2-1) \times m = a^{2p} - 1$ donc

$$(a^2-1) \times (m-1) = a^{2p} - 1 - (a^2-1) = a^{2p} - a^2$$

À l'aide d'une identité remarquable, on obtient : $(a^2-1) \times (m-1) = (a^p - a)(a^p + a)$ et il suffit de factoriser par a dans la première parenthèse pour conclure.

$$\boxed{(a^2-1) \times (m-1) = a(a^{p-1} - 1)(a^p + a)}$$

4.(a) D'après le petit théorème de Fermat (p est premier), $a^{p-1} \equiv 1[p]$ donc

$$\boxed{p \text{ divise } a^{p-1} - 1}$$

4.(b) $p-1$ étant pair, il existe k tel que $p - 1 = 2k$ donc $a^{p-1} - 1 = (a^2)^k - 1^k$ et la factorisation de $x^n - y^n$ (avec $x = a^2$, $y = 1$ et $n = k$) donne :

$$a^{p-1} - 1 = (a^2)^k - 1^k = (a^2-1) \times \textstyle\sum_{i=0}^{k-1} a^{2i}$$

Dès lors

$$\boxed{a^2 - 1 \text{ divise } a^{p-1} - 1.}$$

Enfin, on rappelle que p ne divise pas $a^2 - 1$ et p est premier donc p est premier avec $a^2 - 1$ et ces deux nombres divisent $a^{p-1} - 1$ donc :

$$\boxed{p(a^2-1) \text{ divise } a^{p-1} - 1}$$

4.(c) Enfin, a^p et a ont la même parité donc $a^p + a$ est pair.

$$\boxed{2 \text{ divise } a^p + a.}$$

5 D'après la question précédente, il existe k et q tels que $a^{p-1} - 1 = k \times p(a^2-1)$ et $a^p - a = 2q$ si bien que :

$$(a^2-1) \times (m-1) = a \times 2q \times k \times p(a^2-1)$$

et $a^2 - 1 \neq 0$ donc $m - 1 = 2p \times akq$ c'est-à-dire que :

$$\boxed{2p \text{ divise } m-1.}$$

6 D'après la question précédente, il existe b tel que $m - 1 = 2p \times b$. D'après la question 2, $a^{2p} \equiv 1[m]$ donc

$$\boxed{a^{m-1} \equiv \left(a^{2p}\right)^b [m] \equiv 1^b[m] \equiv 1[m]}$$

> m est appelé un nombre pseudo-premier par rapport à a : c'est un nombre composé car
>
> $$m = \frac{a^p-1}{a-1} \times \frac{a^p+1}{a+1}$$

> et il vérifie pourtant l'égalité du théorème de Fermat pour la valeur de a choisie. On a vu en classe que la réciproque du théorème de Fermat est fausse, mais les nombres de Carmichael sont des objets assez compliqués. Ici, en faisant varier p, on obtient une infinité de nombres composés m qui mettent en défaut le petit théorème de Fermat pour un a donné. L'inconvénient est que m ne convient que pour la valeur de a choisie, et non pas pour tout a comme les nombres de Carmichael, mais il est infiniment plus simple de prouver qu'il existe une infinité d'entiers m qui conviennent (c'est ce qu'on vient de faire) que de prouver qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Problème - Dénombrabilité de $\mathbb{Q}$

Partie I. Préliminaires

$\boxed{1}$ Prouvons que

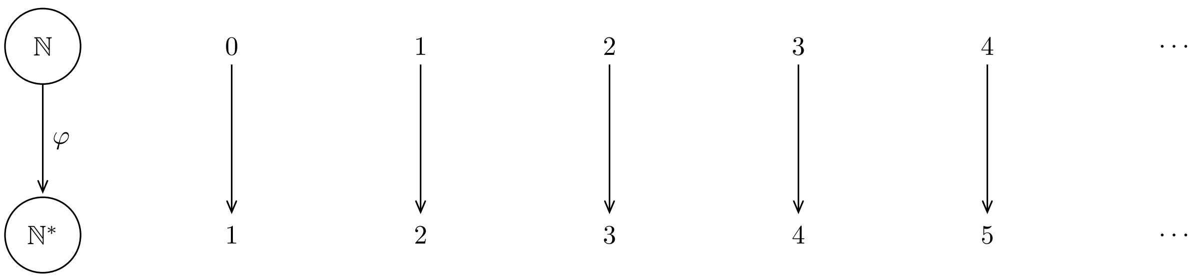
$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n \longmapsto n+1 \end{cases}$$

est bijective. Remarquons tout d'abord qu'elle est bien à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

- Soient n et p deux entiers naturels. Si $f(n) = f(p)$ alors $n+1 = p+1$ donc $n = p$: f est injective.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $n \geqslant 1$ donc $n - 1 \in \mathbb{N}$: $n - 1$ est dans le domaine de définition de f (ce ne serait pas le cas par exemple si n était nul) et $f(n-1) = n$: $n-1$ est un antécédent de n par f, f est surjective.

$$\boxed{\text{Il existe une bijection de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathbb{N}^* : \mathbb{N}^* \text{ est dénombrable.}}$$

Ci-dessous un dessin illustrant ce résultat :



$\boxed{2}$ $\mathbb{N}$ étant inclus dans $\mathbb{Q}$, il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ (appelée injection canonique, cf. cours) :

$$i : \begin{cases} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ n \longmapsto n \end{cases}$$

Cette fonction est bien injective (attention, ce n'est pas exactement l'identité de $\mathbb{N}$ car le domaine d'arrivée n'est pas le même, même si, évidemment, son image est $\mathbb{N}$). D'après le théorème de Cantor-Bernstein, s'il existe une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$, alors il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ donc $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Le cas $\mathbb{N}^*$ est analogue puisque $\mathbb{N}^*$ est aussi inclus dans $\mathbb{Q}$.

$$\boxed{\text{S'il existe une injection de } \mathbb{Q} \text{ dans } \mathbb{N} \text{ ou dans } \mathbb{N}^*, \text{ alors } \mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$$

$\boxed{3}$ Elle n'est pas injective puisque $f(1,1) = f(2,2)$ et elle n'est pas surjective car -1 n'est pas atteint (les images sont toutes positives car quotients d'entiers naturels).

$$\boxed{f \text{ n'est ni injective ni surjective.}}$$

$\boxed{\textbf{4.(a)}}$ Il faut donc prouver que h est injective et surjective.

- Montrons que h est injective. Soient n_1 et n_2 deux éléments de $\mathbb{N}$ et supposons que $n_1 \neq n_2$. Si l'un des deux est nul, alors son image est e et l'autre est non nul donc son image est dans A ou B qui ne contiennent pas e par hypothèse donc les deux images sont distinctes. Si l'un est pair et l'autre impair, alors une image est dans A et l'autre dans B qui sont disjoints donc les deux images sont encore distinctes. Il reste à regarder les cas où n_1 et n_2 sont de même parité. Sans perte de généralité, on peut supposer n_1 et n_2 pairs (non nuls). Alors $n_1 - 2 \neq n_2 - 2$ et donc $(n_1-2)/2 \neq (n_2-2)/2$ et g est injective donc

$$g\left(\frac{n_1 - 2}{2}\right) \neq g\left(\frac{n_2 - 2}{2}\right)$$

c'est-à-dire que $h(n_1) \neq h(n_2)$: h est injective.

- Soit $y \in \mathrm{E} = \mathrm{A} \cup \{e\} \mathrm{B}$. Si $y = e$ alors 0 est un antécédent de y par h. Supposons ensuite $y \in \mathrm{A}$ (raisonnement analogue dans le cas $y \in \mathrm{B}$). f étant bijective de $\mathbb{N}$ dans A, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = y$ et donc

$$h(2n+1) = f\left(\frac{2n+1-1}{2}\right) = f(n) = y$$

c'est-à-dire que $2n+1$ est un antécédent de y par h : h est bien surjective.

$$\boxed{h \text{ est une bijection de } \mathbb{N} \text{ dans } \mathrm{A} \cup \{e\} \cup \mathrm{B}}$$

4.(b) Supposons que $\mathbb{Q}_+^*$ soit dénombrable et prouvons que $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Il existe donc une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+^*$. Puisque la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{Q}_+^* \longrightarrow \mathbb{Q}_-^* \\ x \longmapsto -x \end{cases}$$

est évidemment (on peut l'affirmer directement pour une fonction aussi simple, surtout qu'on a déjà prouvé deux fois que deux fonctions sont bijectives) une bijection de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{Q}_-^*$, et puisqu'une composée de bijections est une bijection, la fonction $\varphi \circ f$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}_-^*$: $\mathbb{Q}_-^*$ est dénombrable. D'après la question précédente (on a bien deux ensembles dénombrables disjoints et un élément n'étant dans aucun des deux, donc on peut appliquer la question précédente), cela implique que $\mathbb{Q}_+^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-^* = \mathbb{Q}$ est dénombrable.

$$\boxed{\text{Il suffit de prouver que } \mathbb{Q}_+^* \text{ est dénombrable pour prouver que } \mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$$

Partie II. Première preuve

1 Cette écriture est unique d'après le cours, donc il n'y a aucune ambiguïté sur p et q donc sur $f(p/q)$. On demande également de prouver que f est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$: q étant positif, 5^q est un entier naturel. Si $r \geqslant 0$ alors $p \geqslant 0$ donc $3^p \in \mathbb{N}$ et, si $r < 0$, c'est que $p < 0$ donc $3^{-p} \in \mathbb{N}$. Dans tous les cas, $f(p/q) \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{f \text{ est bien définie.}}$$

2 Prouvons Soient $r_1 = p_1/q_1$ et $r_2 = p_2/q_2$ deux rationnels (qu'on écrit évidemment sous forme irréductible) tels que $f(r_1) = f(r_2)$. Ces deux entiers ont donc la même parité. Supposons (raisonnement analogue dans l'autre cas) que $f(r_1)$ et $f(r_2)$ soient pairs. Alors (par définition de f), il en découle que r_1 et r_2 sont strictement négatifs, donc que $2 \times 3^{-p_1} \times 5^{q_1} = 2 \times 3^{-p_2} \times 5^{q_2}$. Par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, $-p_1 = -p_2$ donc $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$ donc $r_1 = r_2$:

$$\boxed{f \text{ est injective.}}$$

3 Elle n'est pas bijective : 0 n'est pas atteint, ni aucun nombre (par exemple) divisible par 7, donc f n'est pas surjective.

$$\boxed{f \text{ n'est pas surjective donc n'est pas bijective.}}$$

Partie III. En passant par $\mathbb{N}^2$

1.(a) Raisonnons par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « Il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2^q + 1)$ ».
- $1 = 2^0(2^0 + 1)$ donc le couple $(0, 0)$ convient : H_1 est vraie.

> Au cas où il y aurait un doute : on ne s'intéresse pas du tout à l'unicité dans cette question.

- Soit $n \geqslant 1$. Supposons $\mathrm{H}_1, \dots, \mathrm{H}_n$ vraies (on verra plus bas pourquoi il est impératif de faire une récurrence forte) et prouvons que H_{n+1} est vraie. Si $n+1$ est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2k+1$ c'est-à-dire $n+1 = 2^0 \times (2k+1)$: le couple $(0, k)$ convient.

  > Remarquons que nous n'avons pas utilisé l'hypothèse de récurrence dans ce cas de figure.

  Supposons à présent $n+1$ pair : il existe donc k tel que $n+1 = 2k$. Or, $n+1 \geqslant 2$ (car $n \geqslant 1$) donc $k \geqslant 1$ si bien que H_k est vraie (d'où l'importance de la récurrence forte : on applique l'hypothèse à k et pas à n) : il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k = 2^p(2q+1)$ si bien que $n+1 = 2k = 2^{p+1}(2q+1)$: H_{n+1} est vraie.
- D'après le principe de récurrence, H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (p,q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q+1)}$$

1.(b) Supposons donc qu'il existe deux couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) qui conviennent, c'est-à-dire tels que $n = 2^{p_1}(2q_1+1) = 2^{p_2}(2q_2+1$ Si $p_1 \neq p_2$ alors l'un des deux est strictement supérieur à l'autre : sans perte de généralité, supposons $p_1 > p_2$ si bien qu'on peut simplifier par 2^{p_2}, ce qui donne :

$$2^{p_1 - p_2}(2q_1+1) = 2q_2+1$$

Or, $p_1 - p_2 > 0$ donc le membre de gauche est pair et le membre de droite impair : absurde. On en déduit que $p_1 = p_2$, on peut donc simplifier par $2^{p_1} = 2^{p_2}$, si bien que $2q_1 + 1 = 2q_2 + 1$ donc $q_1 = q_2$: les couples (p_1, q_1) et (p_2, q_2) sont bien égaux, d'où l'unicité.

$$\boxed{\text{Le couple } (p,q) \text{ trouvé à la question précédente est unique.}}$$

1.(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En écrivant la décomposition de n en produit de facteurs premiers, il existe $p \in \mathbb{N}$ (éventuellement nul si 2 ne divise pas n, i.e. si n est impair), $p_1, \dots, p_k$ premiers impairs (supérieurs ou égaux à 3) distincts, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geqslant 1$ tels que

$$n = 2^p \times {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k}$$

Or, $p_1, \dots, p_k$ sont impairs donc $\times {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k}$ est impair : il existe q tel que ce nombre soit égal à $2q+1$, et donc $n = 2^p(2q+1)$.

$$\boxed{\text{On a encore prouvé l'existence d'un tel couple.}}$$

1.(d) D'après les questions précédentes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi : \begin{cases} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (p,q) & \longmapsto 2^p(2q+1) \end{cases} \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^2 \text{ dans } \mathbb{N}^*.}$$

> En particulier, $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. Nous verrons une illustration de ce résultat dans le chapitre 17.

2 Précisons tout de suite qu'elle n'est pas surjective puisque le couple $(0,0)$ (par exemple) n'est pas atteint : p et q ne sont pas nuls car on est sur $\mathbb{Q}_+^*$. L'injectivité est évidente : si $r_1 = p_1/q_1$ et $r_2 = p_2/q_2$ sont deux rationnels ayant la même image, alors $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ donc $p_1 = p_2$ et $q_1 = q_2$ donc $r_1 = r_2$.

$$\boxed{f \text{ est injective non surjective.}}$$

3 Une composée d'injections étant une injection, la fonction

$$\varphi \circ f : \begin{cases} \mathbb{Q}_+^* & \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ r = \dfrac{p}{q} & \longmapsto 2^p(2q+1) \end{cases}$$

est une injection de $\mathbb{Q}_+^*$ dans $\mathbb{N}^*$: d'après la question 2 de la partie I, il en découle que $\mathbb{Q}_+^*$ est dénombrable, donc (question 4 de la partie I) $\mathbb{Q}$ est lui-même dénombrable.

$$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$$

Partie IV. Arbre de Calkin-Wilf et théorème de Newman

1 En appliquant l'algorithme de l'énoncé, on trouve que :

$$\boxed{\text{La quatrième ligne est (de gauche à droite) : } 1/4, 4/3, 3/5, 5/2, 2/5, 5/3, 3/4, 4/1.}$$

2 Raisonnons par récurrence.

- Si $n \in \mathbb{N}^*$, notons H_n : « si un rationnel r/s apparaît à la n-ième ligne, alors r et s sont premiers entre eux. »
- À la première ligne, on ne trouve que le rationnel $1/1$, donc avec $r = s = 1$, et 1 et 1 sont premiers entre eux, donc H_1 est vraie.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons H_n vraie et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit r/s un élément de la $(n+1)$-ième ligne. Notons son père (ou sa mère) i/j. Par hypothèse de récurrence, $r \wedge s = 1$. Ses deux fils sont $r/(r+s)$ et $(r+s)/s$. Soit d un diviseur positif de r et $r+s$. Alors d divise $(r+s) - r = s$ donc d est un diviseur positif commun à r et s donc $d = 1$: on en déduit que r et $r+s$ sont premiers entre eux. De même, $r+s$ et s sont premiers entre eux. En d'autres termes, tous les fils des éléments de la n-ième ligne vérifient le résultat, donc la $(n+1)$-ième ligne vérifie ce résultat : H_{n+1} est vraie, ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{Toutes les fractions de l'arbre sont irréductibles.}}$$

3.(a) Notons i/j son père. On en déduit que $r/s = i/(i+j)$ ou $(i+j)/j$. Puisque i et j sont strictement positifs, dans tous les cas, $r/s \neq 1$ donc $r \neq s$. On en déduit que la fraction $1/1$ n'apparaît que dans la racine. Soit donc r/s une fraction irréductible avec $r+s = 2$, si bien que $r = s = 1$ (r et s sont des entiers non nuls) donc $r/s = 1$: on a vu que cette fraction n'apparaît qu'une seule fois ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{\text{Le résultat est vrai au rang 2.}}$$

3.(b) Si $r = s$ alors $r = s = 1$ puisque la fraction r/s est irréductible, ce qui est exclu puisque $r + s = n + 1 \geqslant 3$ (car $n \geqslant 2$). On en déduit que $r \neq s$ donc

$$\boxed{r > s \text{ ou } s > r.}$$

3.(c) $r/s \neq 1$ donc r/s n'est pas la racine : notons i_1/j_1 et i_2/j_2 ses deux pères. On en déduit que $r/s = i_1/(i_1+j_1)$ ou $(i_1+j_1)/j_1$ mais $s > r$ donc on est dans le premier cas, c'est-à-dire que $r/s = i_1/(i_1+j_1)$. Par symétrie des rôles, $r = i_2/(i_2+j_2)$ et donc

$$\frac{r}{s} = \frac{i_1}{i_1+j_1} = \frac{i_2}{i_2+j_2}$$

Par unicité d'une fraction irréductible, $i_1 = i_2 = r$ et $i_1 + j_1 = i_2 + j_2 = s$ donc $j_1 = j_2 = s - r$:

$$\boxed{\text{Les deux pères sont égaux, et leur expression commune est } \frac{r}{s-r}}$$

3.(d) On déduit de la question précédente que la fraction $\dfrac{r}{s-r}$ apparaît (au moins) deux fois. Cependant, $r+s-r = s < s+r = n+1$ et $s > r \geqslant 1$ donc $s \in [\![2\,;\, n]\!]$: H_s est vraie (et c'est là qu'on voit qu'il faut faire une récurrence forte) donc $r/(s-r)$ apparaît au plus une fois : c'est absurde. On en déduit que r/s apparaît au plus une fois, c'est-à-dire que le résultat est vrai au rang $n+1$, ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{Toute fraction irréductible apparaît au plus une fois.}}$$

4 Idem, raisonnons par récurrence forte sur $r + s$.

- Si $n \geqslant 2$, notons H_n : « toute fraction irréductible de la forme r/s avec $r + s = n$ apparaît dans l'arbre ».
- Soit r/s une fraction irréductible avec $r + s = 2$ si bien que $r = s = 1$ donc $r/s = 1/1$: cette fraction apparaît dans l'arbre donc H_2 est vraie.
- Soit $n \geqslant 2$. Supposons $\mathrm{H}_2, \dots, \mathrm{H}_n$ vraies et prouvons que H_{n+1} est vraie. Soit donc r/s une fraction irréductible avec $r + s = n + 1$. De même que ci-dessus, on a $s \neq r$ et on peut supposer sans perte de généralité que $s > r$. Attention, on ne peut pas parler de son père puisqu'on ne sait pas encore que cette fraction est dans l'arbre. Cependant, si elle a un père, alors c'est $r/(s-r)$ (voir ci-dessus). Or, $r + s - r = s$ et H_s est vraie donc $r/(s-r)$ apparaît dans l'arbre et son fils gauche est r/s qui apparaît donc aussi dans l'arbre : H_{n+1} est vraie, ce qui clôt la récurrence.

$$\boxed{\text{Chaque fraction irréductible apparaît dans l'arbre.}}$$

5.(a) Le fils gauche de x est $a = x/(x+1)$. Son fils gauche à lui est

$$\begin{aligned}\frac{a}{a+1} &= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} \\ &= \frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x+x+1}{x+1}} \\ &= \frac{x}{2x+1}\end{aligned}$$

On montre de même que son fils gauche est $x/(3x+1)$. On en déduit par récurrence immédiate (y compris pour $k=0$) que le k-ième fils gauche de x est $x/(kx+1)$. Pour le fils droit, c'est plus simple : le fils droit de x est $x+1$, son fils droit à lui est $x+1+1 = x+2$, et par récurrence immédiate (y compris pour $k=0$), on trouve que le k-ième fils droit est $x+k$.

$$\boxed{\text{Le } k\text{-ième fils gauche de } x \text{ est } \frac{x}{kx+1} \text{ et son } k\text{-ième fils droit est } x+k.}$$

5.(b) Le fils gauche de y est $y/(y+1)$ et u_n est son k-ième fils droit donc, d'après la question précédente,

$$\boxed{u_n = \frac{y}{y+1} + k}$$

De même, le fils droit de y est $y+1$ et u_{n+1} est son k-ième fils gauche donc :

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{y+1}{k(y+1)+1}}$$

6 Puisque $0 \leqslant y/(y+1) < 1$, alors $k \leqslant u_n < k+1$ ce qui permet de conclure (cf. chapitre 2 : truc entier etc.).

$$\boxed{k = \lfloor u_n \rfloor}$$

7 On en déduit que $u_n = \dfrac{y}{y+1} + \lfloor u_n \rfloor$ et l'idée est d'exprimer y en fonction de u_n. On a $(y+1)(u_n - \lfloor u_n \rfloor) = y$ donc $y(u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1) = \lfloor u_n \rfloor - u_n$. Or, par définition de la partie entière, $u_n < \lfloor u_n \rfloor + 1$ donc $u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1 \neq 0$ et donc

$$y = \frac{\lfloor u_n \rfloor - u_n}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1}$$

Il suffit ensuite de réinjecter dans l'expression de u_{n+1} :

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \frac{\dfrac{\lfloor u_n \rfloor - u_n}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1} + 1}{\lfloor u_n \rfloor \times \left(\dfrac{\lfloor u_n \rfloor - u_n}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1} + 1 \right) + 1} \\ &= \frac{\dfrac{\lfloor u_n \rfloor - u_n + u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1}}{\lfloor u_n \rfloor \times \left(\dfrac{\lfloor u_n \rfloor - u_n + u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1} \right) + \left(\dfrac{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1}{u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1} \right)} \\ &= \frac{-1}{\lfloor u_n \rfloor \times (-1) + (u_n - \lfloor u_n \rfloor - 1)} && \text{On simplifie les dénominateurs.}\end{aligned}$$

En conclusion

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2\lfloor u_n \rfloor - u_n + 1}}$$

Partie V. Fraction continuée d'un rationnel

1 Appliquons cet algorithme à 2/7.

- On pose donc $x_0 = 2/7$ et $a_0 = \lfloor 2/7 \rfloor = 0$: on continue puisque $a_0 \neq x_0$.
- On pose donc $x_1 = \dfrac{1}{2/7 - 0} = 7/2$ et $a_1 = \lfloor 7/2 \rfloor = 3$: on continue puisque $a_1 \neq x_1$.
- On pose donc $x_2 = \dfrac{1}{7/2 - 3} = 2$ et $a_1 = \lfloor 2 \rfloor = 2$: on s'arrête donc puisque $a_2 = x_2$.

2 Par définition de la partie entière, $a_i = \lfloor x_i \rfloor \leqslant x_i < a_i + 1$ donc $a_i \leqslant p_i/q_i < a_i + 1$. Il suffit de multiplier par q_i (positif donc l'inégalité ne change pas de sens) et de soustraire $q_i a_i$ pour conclure.

$$\boxed{\text{Pour tout } i,\ 0 \leqslant p_i - a_i \times q_i < q_i}$$

Supposons donc que $a_i \neq x_i$ si bien que :

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{1}{\dfrac{p_i}{q_i} - a_i} \\ &= \frac{q_i}{p_i - a_i q_i} \end{aligned}$$

On a envie d'affirmer que $q_{i+1} = p_i - a_i q_i$ mais, pour cela, il faut vérifier que cette fraction est irréductible. Soit d un diviseur positif commun à q_i et $p_i - a_i q_i$. Il en découle que d divise $p_i - a_i q_i + a_i \times q_i = p_i$ donc d est un diviseur positif commun à p_i et q_i donc $d = 1$ car p_i et q_i sont premiers entre eux. On en déduit que la fraction ci-dessus est irréductible et donc, par unicité de l'écriture :

$$\boxed{q_{i+1} = p_i - a_i q_i < q_i}$$

> On pouvait également ne pas se casser la tête et dire que q_{i+1} était de toute façon un diviseur de $p_i - a_i q_i$ donc lui est inférieur ou égal, donc strictement inférieur à q_i.

De même, $p_{i+1} = q_i$ si bien que $x_{i+1} = q_i / q_{i+1} > 1$ donc sa partie entière est supérieure ou égale à 1.

$$\boxed{a_{i+1} \geqslant 1}$$

4 Il n'est pas possible d'avoir une suite (infinie) d'entiers naturels strictement décroissante donc

$$\boxed{\text{L'algorithme termine.}}$$

> On a donc $q_{i+1} = p_i - a_i q_i$ et, de même, $p_{i+1} = q_i$. Puisque q_{i+1} vérifie la double inégalité $0 \leqslant q_{i+1} < q_i$, alors q_{i+1} est le reste de la division euclidienne de p_i par q_i. En d'autres termes, à chaque étape, on effectue la division euclidienne de p_i par q_i et, à l'étape suivante, celle de p_{i+1} par q_{i+1}, c'est-à-dire celle de q_i par le reste : on applique tout simplement l'algorithme d'Euclide ! Et donc cet algorithme termine car l'algorithme d'Euclide termine.

4 Raisonnons par récurrence.

- Si $i \in [\![1\,;n]\!]$, notons H_i : « $r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{i-2} + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}}$ ».
- On a tout d'abord $r = x_0$ puis $x_0 - a_0 = 1/x_1$ si bien que $r = a_0 + \dfrac{1}{x_1}$: H_1 est vraie.

- Soit $i \in \llbracket 1\,;\,n-1 \rrbracket$ (il faut s'arrêter à $n-1$ sinon H_{i+1} n'est pas définie). Supposons H_i vraie et prouvons que H_{i+1} est vraie. Par hypothèse de récurrence,

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{i-2} + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}}$$

Or, par définition, $x_{i+1} = 1/(x_i - a_i)$, c'est-à-dire que $x_i - a_i = 1/x_{i+1}$ donc $x_i = a_i + 1/x_{i+1}$, et donc :

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{i-2} + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{a_i + \cfrac{1}{x_{i+1}}}}}}}$$

c'est-à-dire que H_{i+1} est vraie.

- D'après le principe de récurrence, H_i est vraie pour tout $i \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$.

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket, r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{i-2} + \cfrac{1}{a_{i-1} + \cfrac{1}{x_i}}}}}}$$

> On a donc prouvé que tout rationnel admettait un développement en fraction continuée fini. Pour les irrationnels, voir le DS n° 1 d'il y a deux ans !

Partie VI. Écriture d'un entier en base 2 et familles admissibles

$\boxed{1}$ $100 = 64 + 32 + 4 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.

$$\boxed{\text{L'écriture en base 2 de 100 est } \overline{1100100}^2.}$$

$\boxed{2}$ D'après la question précédente, $a_0 = 0$ car l'écriture de 100 se termine par un 0, on enchaîne avec trois 0 consécutifs donc $a_1 = 3$, puis un seul 1 donc $a_2 = 1$, puis deux 0 consécutifs, donc $a_3 = 2$ et enfin deux 1 donc $a_4 = 2$.

$$\boxed{\varphi(100) = (0, 3, 1, 2, 2)}$$

Un nombre a pour image (1) si et seulement s'il ne contient qu'un seul 1 donc son antécédent est 1. De même, un nombre a pour image $(0, 3, 1, 1, 2)$ si et seulement s'il est pair (i.e. termine par un 0), puis enchaîne trois 0, puis un 1, puis un 0, puis deux 1, c'est-à-dire $\overline{1101000}^2 = 2^6 + 2^5 + 2^3 = 104$.

$$\boxed{\text{L'antécédent de (1) est 1 et celui de } (0, 3, 1, 1, 2) \text{ est 104.}}$$

$\boxed{3}$ Tout d'abord, φ est bien à valeurs dans l'ensemble des familles admissibles : si la famille ne contient qu'un terme, alors il est forcément non nul (car (0) signifie que le nombre est pair mais n'a pas d'autre chiffre que 0 ce qui est absurde puisque les entiers sont strictement positifs), et s'il y a strictement plus d'un terme, seul le premier peut être nul par construction de la famille (on compte des chiffres).

Montrons que φ est injective : si deux entiers ont la même image, alors on retrouve comme ci-dessus leurs développements en base 2, qui sont donc les mêmes, et donc les deux entiers sont égaux.

Enfin, pour toute famille admissible, on trouve comme ci-dessus son unique antécédent et en particulier cette famille admet un antécédent : φ est surjective.

$$\boxed{\varphi \text{ est une bijection de } \mathbb{N}^* \text{ dans l'ensemble des familles admissibles.}}$$

$\boxed{4}$ On a donc par définition :

$$\begin{aligned} r(1,2,2) &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \\ &= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{5}{2}} \\ &= \frac{7}{5} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} r(0,3,1,1,2) &= 0 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \\ &= \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{3}}} \\ &= \cfrac{1}{3 + \cfrac{3}{5}} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

$$\boxed{r(1,2,2) = \frac{7}{5} \qquad \text{et} \qquad r(0,3,1,1,2) = \frac{5}{18}}$$

$\boxed{5}$ Soit donc x un rationnel strictement positif. Notons encore n l'instant où l'algorithme de la partie précédente termine. Si $n = 0$ alors $x = a_0$ donc $x = r(s)$ avec $s = (a_0)$. Supposons donc que $n \geqslant 1$. D'après la partie précédente, x admet une écriture en fraction continuée : il existe $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

De plus, (cf. question 3 de la partie précédente), $a_{i+1} \geqslant 1$ pour tout i, c'est-à-dire que tous les a_k sont non nuls (à part éventuellement le premier), ce qui est la première condition pour être une famille admissible, la deuxième est d'avoir un nombre impair de termes.

- Si n est pair alors il existe m tel que $n = 2m$ donc $x = [a_0; a_1; \dots; a_{2m-1}; a_{2m}]$ si bien que $x = r(s)$ où $s = (a_0, \dots, a_{2m})$ qui est bien une famille admissible car contient un nombre impair de termes (on a vu que c'était la seule condition qu'il manquait encore).
- Si n est impair et $a_n > 1$ alors, comme le dit l'énoncé, il suffit d'écrire :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{(a_n - 1) + \cfrac{1}{1}}}}}} = [a_0; a_1; \dots; a_{n-1}; a_n - 1; 1]$$

et donc x admet une écriture avec un terme supplémentaire, donc avec un nombre de termes impairs. On en déduit que $x = \varphi(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1)$ (le fait que a_n soit strictement supérieur à 1 est indispensable pour avoir $a_n - 1 \neq 0$ pour que la suite reste admissible). Enfin, si $a_n = 1$ alors $1/a_n = 1$ et donc on a :

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{n-2} + \cfrac{1}{a_{n-1} + 1}}}} = [a_0; a_1; \dots; a_{n-1} + 1]$$

On a un terme de moins donc toujours un nombre impair.

Dans tous les cas, x admet un antécédent : $\boxed{\varphi \text{ est surjective.}}$

$\boxed{\textbf{6.(a)}}$ Rappelons que $a_1, a_2, \dots \geqslant 1$ donc $a_1 + 1/(a_2 + \cdots) > 1$ et donc la grosse fraction est strictement inférieure à 1 et strictement positive donc n'est pas un entier.

$$\boxed{\text{Si } m = 0 \text{ alors } r(s) \notin \mathbb{N}.}$$

Supposons donc que $m = 0$ et que $r(s) = r(s')$. $m = 0$ donc $r(s) = a_0 \in \mathbb{N}$ donc $r(s') \in \mathbb{N}$ ce qui implique (contraposée de ce qui précède, encore valable pour s' par symétrie des rôles) que $p = 0$ et donc $s' = (b_0)$ si bien que $r(s') = b_0$. On a donc $a_0 = b_0$ donc $s = s'$.

$$\boxed{\text{Si } m = 0 \text{ et si } r(s) = r(s') \text{ alors } s = s'.}$$

$\boxed{\textbf{6.(b)}}$ On a vu dans la question précédente que, si on note la grosse fraction f, alors $r(s) = a_0 + f$ et $0 \leqslant f < 1$ donc $a_0 \leqslant r(s) < a_0 + 1$, ce qui donne le résultat voulu.

$$\boxed{a_0 = \lfloor r(s) \rfloor}$$

Par symétrie des rôles, $b_0 = \lfloor r(s') \rfloor$, et puisque $r(s) = r(s')$ alors ces deux nombres (égaux) ont même partie entière, d'où le résultat.

$$\boxed{a_0 = b_0}$$

$\boxed{\textbf{6.(c)}}$ Par définition d'une famille admissible, tous les entiers $a_2, \dots, a_{2m}, b_2, \dots, b_{2p}$ sont strictement positifs et les deux familles ont un nombre impair de termes donc

$$\boxed{s_1 \text{ et } {s_1}' \text{ sont encore des familles admissibles.}}$$

$\boxed{\textbf{6.(d)}}$ Par hypothèse, $r(s) = r(s')$ et on sait déjà (question 6.(b)) que $a_0 = b_0$ donc

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \, a_{2m-2} + \cfrac{1}{a_{2m-1} + \cfrac{1}{a_{2m}}}}}} = \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{\ddots \, b_{2p-2} + \cfrac{1}{b_{2p-1} + \cfrac{1}{b_{2p}}}}}}$$

Il suffit de prendre l'inverse, et de voir que les grosses fractions à droite de a_1 et b_1 sont, respectivement, $1/r(s_1)$ et $1/r({s_1}')$.

$$\boxed{a_1 + \frac{1}{r(s_1)} = b_1 + \frac{1}{r({s_1}')}}$$

Puisque a_2 et b_2 sont supérieurs ou égaux à 1, $r(s_1)$ et $r(s_2)$ sont supérieurs ou égaux à 1. Supposons que, pour l'un des deux, l'inégalité soit stricte. Sans perte de généralité, supposons que $r(s_1) > 1$. Alors $a_1 + 1/r(s_1)$ n'est pas un entier, c'est donc aussi le cas pour $b_1 + 1/r(s_1')$ ce qui implique que $r(s_1')$ ne peut pas être égal à 1 : l'inégalité est aussi stricte pour celui-ci. Dans ce cas, $a_1 = \lfloor a_1 + 1/r(s_1) \rfloor$ et idem pour b_1, donc $a_1 = b_1$ donc $1/r(s_1) = 1/r(s_1')$, d'où l'égalité voulue. Dans le cas où $r(s_1) = 1$, c'est encore plus simple : on a aussi $r(s_1') = 1$ (si l'inégalité est stricte pour l'un, elle l'est aussi pour l'autre, donc puisque les deux ne sont pas strictes, c'est qu'aucune n'est stricte) donc $r(s_1) = r(s_1') = 1$ et $a_1 + 1 = b_1 + 1$ donc $a_1 = b_1$.

$\boxed{\text{C'est bon.}}$

$\boxed{\textbf{6.(e)}}$ Les questions précédentes nous suggèrent de raisonner par récurrence sur m. Le cas $m = 0$ a été traité dans la question 6.(a). Supposons ensuite $m \geqslant 1$ et supposons le résultat vrai pour $m - 1$. Alors on est dans le cadre des questions précédentes : on a $r(s_1) = r(s_1')$ et s_1 a pour longueur $2(m-1)+1$ donc, par hypothèse de récurrence, $s_1 = s_1'$, et puisqu'on a déjà vu que $a_0 = b_0$ et $a_1 = b_1$, cela implique que $s = s'$: le résultat est vrai au rang m, ce qui clôt la récurrence.

$\boxed{r \text{ est injective.}}$

$\boxed{\textbf{7}}$ r est donc une bijection de l'ensemble des familles admissibles dans $\mathbb{Q}_+^*$ et φ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans l'ensemble des fonctions admissibles. $r \circ \varphi$ est donc bijective (car composée de bijections) de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Q}_+^*$: on a vu que cela suffisait pour prouver que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

$\boxed{\mathbb{Q} \text{ est dénombrable.}}$