Programme de colle - Semaine n°6

Chapitre 4 - Ensembles et applications

- cf. semaines 3 et 4.

Chapitre 5 - Fonctions circulaires/trigonométrie

- cf. semaines n° 4 et 5.

Chapitre 6 - Arithmétique

- cf. semaine 5.
- PPCM : propriétés, lien avec le PGCD (le produit du PGCD et du PPCM donne le produit des deux entiers), un multiple commun à a et b est un multiple de leur PPCM.
- Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, deux à deux. Théorème de Bézout pour un nombre quelconque d'entiers.
- Nombres premiers : définition, test naïf de primalité (regarder tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$), tout nombre entier admet un diviseur premier, crible d'Eratosthène, infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Exercice : donner n nombres consécutifs non premiers.
- Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers.
- Valuation p-adique, propriétés (valuation p-adique d'un produit, CNS de divisibilité, CNS pour qu'un entier soit un carré). Notation $\prod_{p\in\mathbb{P}} p^{v_p(n)}$, irrationnalité de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt[3]{4/5}$, écriture en facteurs premiers des diviseurs d'un entier n, écriture du PGCD et du PPCM en produit de facteurs premiers, a et b sont premiers entre eux si et seulement si toute puissance de a est première avec toute puissance de b.
- Formule de Legendre (difficile, non traitée en classe).
- Nombres de Fermat et nombres de Mersenne.
- Congruences, congruence et divisibilité, résultats propres aux entiers (produits, puissances, lien avec la division euclidienne, simplification par un entier premier avec la congruence). Exemples : reste dans la division euclidienne de $12 \times 21 \times 28 \times 18 \times 75 \times 23$ par 11, $2^{2023} + 5^{2024}$ est divisible par 3, un carré n'est jamais congru à 2 modulo 3 et le carré d'un entier impair est congru à 1 modulo 8.
- Activité : congruence d'une puissance. Exemples : chiffre des unités de $7^{7^{7^{7^7}}}$, congruence de 2^{65362} modulo 7.
- Critères de divisibilité par $2, 3, 4, 5, 9$ et 11.
- Petit théorème de Fermat. Activité : nombres de Carmichael.

Chapitre 7 - Nombres complexes

- Existence de $\mathbb{C}$ (admise). Principales propriétés calculatoires (analogues à celles sur $\mathbb{R}$).
- Partie réelle, partie imaginaire, unicité. Un complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle. Définition d'un imaginaire pur. $\mathbb{R}$-linéarité de la partie réelle et de la partie imaginaire. Attention : la partie imaginaire et la partie réelle ne passent pas au produit ni au quotient.
- Représentation géométrique des nombres complexes : plan complexe, point représentant un complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.

Chapitres au programme

Chapitre 4 (exercices uniquement), chapitre 5 (cours et exercices), chapitres 6 et 7 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Domaine de définition, variations, parité éventuelle, graphe, dérivée de l'Arctangente, de l'Arcsinus, de l'Arccosinus, une parmi les trois au choix de l'examinateur (sans démonstration).
2. Valeur de $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(1/x)$ selon la valeur de x (démonstration).

3. $\forall x \in [-1;1], \text{Arcsin}(x) + \text{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}$ (démonstration, méthode au choix de l'élève).
4. Théorème de division euclidienne (énoncé uniquement).
5. L'examinateur demande d'appliquer l'algorithme d'Euclide pour donner le PGCD de deux entiers naturels dans un cas explicite.
6. Théorème de Bézout pour deux entiers (sans démonstration).
7. L'examinateur demande d'appliquer l'algorithme d'Euclide étendu pour trouver deux entiers u et v tels que $au + bv = a \wedge b$ dans un cas explicite.
8. Théorème de Gauß (énoncé précis, démonstration).
9. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sqrt{n}$ est soit un entier, soit un irrationnel (démonstration).
10. L'examinateur demande si une équation du type $ax + by = c$ admet des solutions, et de les trouver le cas échéant, dans un cas explicite.
11. L'ensemble des nombres premiers est infini (démonstration, méthode au choix de l'élève).
12. Petit théorème de Fermat (énoncé précis, démonstration en admettant la proposition précédente : si p est premier, alors pour tous a et b, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p [p]$).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Vacances !!!!!
- Fin des complexes.
- Systèmes linéaires ?

Exercices à préparer

Exercices 9, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 33, 36, 37, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 52, 53, 56, 57, 58, 60, 61, 69, 71, 72, 73, 74, 77 du chapitre 6.

Cahier de calcul

Chapitre 20.