Programme de colle - Semaine n°21

- **Groupe A :** Ilyes BENFERHAT, Hamza BOURAS, Julien DENEUBOURG, Célian FORET, Maxime LE BLAN, Pierre LESAGE, Vishwaraj SHABADI, Julien STEVENART, Mohamed Jibril TROUGOUTY, Félix VANDENBROUCKE.
- **Groupe B :** Lucas AGBOTON, Vladislas BANCOD, Pierre CATHELAIN, Matthieu CHARETTE, Célien CHAZAL, Jarode COQUEL, Félix CORDONNIER-PORTIER, Maxime DANIEL, Baptiste DAULE SIGAUT, Raphaël DEPUYDT, Ethan DUMONT, Houdayfa EL HAJJIOUI, Gabriel HARENDARZ, Victor KRAWCZIK, Thibaut LAMARQUE, Juliette LECOUTRE, Mohamed-Yassine LOKMANE, Alexandre MARTINSSE, Clément MONCHIET, Mathieu POULAIN, Clarissa VALLAEYS.
- **Groupe C :** Ilan AKADJI, Orane BERTOUT, Nathan BISKUPSKI, Pierre BODET, Marc BURGHGRAEVE, Noelien DUTILLEUL, Douae EL FANI, Julien GERY, Paul LEONARD, Noam THIBAUT-GESNEL, Clément TURPIN.

Chapitre 22 - Intégration sur un segment

- cf. semaine 19.

Chapitre 23 - Formules de Taylor

- cf. semaine 20.

Chapitre 24 - Analyse asymptotique et Développements Limités

- cf. semaine 20.
- Développements asymptotiques (définition intuitive). Exemple de $\ln(n!)$. Application aux asymptotes. Développement asymptotique à deux termes de

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

lorsque f est $\mathscr{C}^2$, développement asymptotique à trois termes de l'unique réel x_n vérifiant $x_n + \mathrm{Arctan}(x_n) = n$, développement asymptotique à deux termes de f^{-1} en $+\infty$, avec f^{-1} la bijection réciproque de $f : x \mapsto xe^{x^2}$.

Chapitre 25 - Séries numériques

- Série de terme général u_n, notation $\sum u_n$. Somme partielle, exemples (série géométrique, série exponentielle, série harmonique).
- Série convergente, série divergente. Somme d'une série convergente. Premiers exemples. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes (mais sa somme, oui). Reste d'une série convergente, le reste d'une série convergente tend vers 0.
- Linéarité de la somme infinie (si les séries convergent), une série complexe converge si et seulement si les séries de sa partie réelle et de sa partie imaginaire convergent, sommation des relations d'ordre (si les séries convergent).
- Condition NÉCESSAIRE importante : le terme général d'une série convergente tend vers 0, contre-exemple pour la réciproque. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 diverge grossièrement.
- Série télescopique associée à une suite, CNS de convergence.
- Convergence absolue. Une série qui converge absolument converge, et on peut appliquer l'inégalité triangulaire.
- La réciproque du théorème précédent est fausse : une série peut converger sans converger absolument : exemple. Séries semi-convergente. Critère des séries alternées (avec signe et majoration du reste !). Application : convergence, signe et majoration de la somme de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$.
- Séries à termes positifs : une série à termes positifs converge si et seulement si ses sommes partielles sont majorées, et sinon la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Théorèmes de comparaison. Théorème de comparaison avec $\mathrm{o}()$ et $\mathrm{O}()$ pour les séries complexes (seul compte le fait que la quantité dans le $\mathrm{o}()$ ou le $\mathrm{O}()$ soit positive).
- En pratique, il est fréquent de devoir pousser le DL plus loin lorsqu'on a une série alternée : exemple de $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)$.

- Transformation d'Abel (HP) : exemple de $\sum e^{in\theta}/n$. Le cas général a été distribué en poly mais n'a pas été lu en classe.
- Constante d'Euler (encore). Formule de Stirling.

Chapitres au programme

Chapitres 22 (exercices uniquement), chapitre 23 (cours et exercices), chapitres 24 et 25 (cours uniquement).

Questions de cours

Groupes A - B - C :

1. Formule de Taylor avec reste intégral (démonstration).
2. Inégalité de Taylor-Lagrange (sans démonstration).
3. Définition d'une suite négligeable devant une autre, de deux suites négligeables.
4. Opérations légales/illégales pour les équivalents (sans démonstration pour les opérations légales, mais avec un contre-exemple pour les opérations illégales).
5. Donner un équivalent de $\sin(1/n) + \tan(1/n)$ et un équivalent de $\ln(\sin(1/n))$.
6. CNS d'existence d'un DL à l'ordre 0, à l'ordre 1 en 0 (énoncé précis, sans démonstration).
7. Formule de Taylor-Young en 0 (sans démonstration).
8. Les 11 DL de base.
9. Condition nécessaire de convergence d'une série (démonstration). Contre-exemple pour la réciproque. Définition de la divergence grossière.
10. Série télescopique associée à une suite. CNS de convergence (sans démonstration).
11. Critère des séries alternées (sans démonstration).
12. Nature de la série $\sum \frac{n+1}{n^2}$ et de la série $\sum e^{-n^2}$ (démonstration). Note aux colleurs : nous n'avons pas encore vu les séries de Riemann donc, dans cette question et les suivantes, un élève peut donner sans justification les natures des séries $\sum 1/n$ et $\sum 1/n^2$, qui ont été vues dans des exercices ou des devoirs antérieurs.
13. Formule de Stirling (sans démonstration).

Groupes B - C :

1. Unicité du DL (démonstration).
2. Théorème de primitivation d'un DL en 0 (énoncé précis, sans démonstration).
3. Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + x^2) - \sin^2(x)$.
4. Si α et β sont deux réels non nuls [1] alors la fonction [2]

$$f\colon \begin{cases}]\,0\,;\pi\,] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad t & \longmapsto \dfrac{\alpha t^2 + \beta t}{2\sin(t/2)} \end{cases}$$

   est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$.
5. Convergence, signe et majoration de la somme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$.
6. Nature de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$.

Groupe C :

1. Limite et équivalent de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$$

1. Changement par rapport à la semaine dernière, pour éviter les risques de donner des équivalents à 0...
2. Nous avons traité en classe le cas $\alpha = 1/2\pi$ et $\beta = -1$ pour suivre le sujet des Mines MPI 2023 mais le résultat est toujours vrai pour des réels quelconques. On traitera donc cette question de cours avec des réels quelconques (non nuls).

2. Si $\theta \not\equiv 0[2\pi]$, nature de la série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$ (démonstration : on pourra utiliser la valeur de T_n sans démonstration, mais l'examinateur pourra demander de la redémontrer s'il le souhaite).
3. Il existe $K > 0$ tel que $n! \sim K n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ (démonstration).
4. Valeur de K (démonstration, en admettant la question précédente). L'examinateur rappellera la relation de récurrence des intégrales de Wallis, ainsi que la valeur des intégrales de Wallis de rang pair.

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des séries numériques.
- Début des probabilités.

Exercices à préparer

Exercices 25, 26, 28, 30, 31, 32, 33, 39, 40, 41, 44, 45, 48, 53, 54, 56, 57, 58, 59, 60, 64, 67 du chapitre 24.

Cahier de calcul

Chapitre 22.