Programme de colle - Semaine n°12

Chapitre 12 - Suites numériques

- cf. semaines 10 et 11.

Chapitre 13 - Limites et continuité

- cf. semaine 11.
- Unicité de la limite. Quand a est un réel appartenant au domaine de définition, la seule limite **éventuelle** est $f(a)$. Exemple de l'indicatrice de $\{0\}$.
- Limite à droite, limite à gauche, exemple de $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$, partie entière. Lien entre limite à gauche et limite à droite.
- Opérations sur les limites. Caractérisation séquentielle de la limite. Méthode pour montrer qu'une fonction f n'a pas de limite en a : exhiber deux suites (u_n) et (v_n) de limite a telles que $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ aient des limites distinctes. Exemple de $x \mapsto \cos(1/x)$ en 0.
- Limites et relation d'ordre : l'inégalité large passe à la limite, théorème d'encadrement.
- Continuité, continuité à droite, à gauche. Lien entre ces notions, écriture avec des quantificateurs. Application aux fonctions définies « par cas » : toujours examiner à part les points de recollement.
- Propriétés immédiates : si f est continue en a, alors f est bornée au voisinage de a ; si $f(a) > 0$ et si f est continue en a, alors f est strictement positive au voisinage de a etc.
- Caractérisation séquentielle de la continuité. Application : recherche des fonctions f continues vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous x et y. Généralisation : deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense sont égales.
- Opérations sur les fonctions continues, continues à gauches, à droite. Attention, une composée de fonctions continues à droite n'est pas forcément continue à droite, idem pour à gauche. Fonctions usuelles.
- Fonctions uniformément continues. Exemples : fonctions constantes, fonctions affines, racine carrée. Méthode pour prouver qu'une fonction f n'est pas UC : exhiber deux suites (x_n) et (y_n) telles que $x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $(f(x_n) - f(y_n))$ ne tende pas vers 0. Exemples : fonction carré, fonction exponentielle, fonction ln, fonction $x \mapsto \sin(x^2)$. Théorème de Heine. Itérations : si f est UC, si $\varepsilon > 0$ et si η est associé à ε alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $|x-y| \leq k\eta$ alors $|f(x) - f(y)| \leq k\varepsilon$.
- Fonctions lipschitziennes, interprétation géométrique (les pentes sont majorées par k, la fonction est dans le cône formé par les droites de pentes $\pm k$ passant par un point donné). Les fonctions affines, la valeur absolue sont lipschitziennes (en particulier, une fonction lipschitzienne n'est pas forcément dérivable). Une fonction lipschitzienne est uniformément continue, réciproque fausse (la racine carrée). Méthode pour prouver qu'une fonction f n'est pas lipschitzienne : exhiber deux suites (x_n) et (y_n) telles que

$$\left|\frac{f(x_n) - f(y_n)}{x_n - y_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

  Note aux colleurs : il a été évoqué qu'une fonction **dérivable** est k-lipschitzienne si et seulement si sa dérivée est bornée par k, mais cela sera démontré la semaine prochaine, dans le chapitre 14.
- TVI (démonstration par dichotomie, démonstration avec la borne supérieure). Application à la recherche de points fixes : une fonction f continue de $[\,0\,;1\,]$ dans lui-même admet un point fixe, une fonction f continue sur $[\,0\,;1\,]$ telle que $[\,0\,;1\,] \subset f([\,0\,;1\,])$ admet un point fixe.
- Autres versions du TVI (en particulier, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle), corollaire (unicité sous l'hypothèse de stricte monotonie). Théorème de la bijection. Une fonction injective continue est strictement monotone, contre-exemple sans l'hypothèse de continuité.
- Image d'un segment par une fonction continue, théorème des bornes atteintes. Exemples : une fonction strictement positive et continue sur un segment est minorée par une constante m strictement positive.
- Théorème de la limite monotone. En particulier, une fonction monotone admet en tout point intérieur à son domaine de définition une limite à gauche et une limite à droite finies.
- Fonctions de la variable réelle à valeurs complexes. Lien entre limite de la fonction et limite de sa partie réelle et de sa partie imaginaire.

Chapitres au programme

Chapitre 12 (cours et exercices), chapitre 13 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\left(1+\dfrac{\alpha}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\alpha$ (démonstration).
2. Théorème de la limite monotone, cas croissant (démonstration).
3. Définition de deux suites adjacentes. Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite (démonstration).
4. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure, de la densité (sans démonstration). Deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui coïncident sur une partie dense sont égales (démonstration). Contre-exemple sans la continuité ?
5. Étude de la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.
6. Étude de la suite définie par $u_0 \in [\,0\,;\pi/2\,]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.
7. Théorème de Bolzano-Weierstraß (démonstration du cas complexe en admettant le cas réel, et sans faire de faute à Weierstraß).
8. L'examinateur demande trois écritures de limites du type $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$ parmi les 9 possibles.
9. L'examinateur demande trois écritures de limites du type $f(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} L$ ou $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} L$ parmi les 6 possibles.
10. Lien entre limite à droite, limite à gauche, et limite en a (sans démonstration).
11. L'examinateur donne une fonction f explicite et demande de prouver qu'elle n'a pas de limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$ à l'aide de deux suites.
12. Donner toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)+f(y)$ (démonstration : l'élève peut aller vite sur certaines récurrences, sur la synthèse, ou « demêmiser », en étant conscient que l'examinateur peut lui demander de détailler : question à préparer, donc).
13. Définition d'une fonction uniformément continue. L'examinateur donne une fonction explicite simple et demande de prouver qu'elle n'est pas uniformément continue.
14. Théorème de Heine (sans démonstration).
15. Définition d'une fonction k-lipschitzienne, d'une fonction lipschitzienne (sans faire de faute à lipschitzienne). L'examinateur donne une fonction explicite simple et demande de prouver qu'elle n'est pas lipschitzienne.
16. TVI (démonstration avec la méthode de la borne supérieure).
17. Une fonction $f : [\,0\,;1\,] \to [\,0\,;1\,]$ continue admet un point fixe (démonstration, avec un joli dessin).
18. Théorème de la bijection (sans démonstration).
19. Image d'un segment par une fonction continue, théorème des bornes atteintes (sans démonstration).
20. Théorème de la limite monotone, cas croissant (sans démonstration mais avec un joli dessin).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Vacances !
- Dérivation.

Exercices à préparer

Exercices 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 57, 58, 59, 61, 62, 67, 68, 71, 72, 73, 74, 75, 79, 80, 83 et 84 du chapitre 13.

Cahier de calcul

Rien cette semaine.