Chapitre 7 – Suites et séries de fonctions

Dans tout le chapitre,

E et F sont des $\mathbb{R}$-EV de dimension finie,

$A \subset E \ (avec\ A \neq \emptyset)$

Pour la dérivation et l'intégration, $E = \mathbb{R}$ et $I \subset R$ est un intervalle.

I – Modes de convergence d'une suite de fonctions

$Soient\ (f_n)_n \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}\ et\ g \in \mathcal{F}(A,F).$

Définitions :

- $(f_n)_n$ *converge simplement vers* g *sur* A *si* :

$$\boxed{\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(x)}$$

- $(f_n)_n$ *converge uniformément vers* g *sur* A *si* :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n - g \text{ est bornée (à partir d'un certain rang)} \\ \|f_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \ \left(\text{où } \|\cdot\|_\infty : \begin{array}{l} \mathcal{F}(A,F) \to \mathbb{R} \\ f \mapsto \sup\limits_{x\in A} \|f\|_F \end{array}\right) \end{cases}$$

Propositions :

- (f_n) *CVU vers* g *sur* A *si* :

$$\forall \mathcal{E} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \left| \begin{array}{c} \|f_n - g\|_\infty \leq \mathcal{E} \\ \forall x \in A, \|f_n(x) - g(x)\|_F \leq \mathcal{E} \end{array} \right.$$

- $CVU \Rightarrow CVS$

II – Stabilité des propriétés par passage à la limite

Soient $(f_n)_n \in \mathcal{F}(A,F)^{\mathbb{N}}$ *et* $g \in \mathcal{F}(A,F)$.

1) Continuité

Théorème :

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n\ C^0\ sur\ A \\ (H_2)\ (f_n)_n\ CVU\ vers\ g\ sur\ A \end{matrix} \Rightarrow (C_1)\ g\ est\ C^0\ sur\ A}$$

Théorème de la double limite :

Soit $a \in \overline{A}$.

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, \exists l_n \in F, f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \\ (H_2)\ (f_n)\ CVU\ vers\ g\ sur\ A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ (l_n)_n\ converge\ dans\ F \\ (C_2)\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \end{cases}}$$

Remarque : la conclusion est équivalente à

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

2) Intégration (sur un segment)

Théorème :

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ *un segment.*

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n\ est\ C^0\ sur\ [a;b] \\ (H_2)\ (f_n)_n\ CVU\ vers\ g\ sur\ [a;b] \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ g\ est\ C^0\ sur\ [a;b] \\ (C_2)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \int_a^b g \end{cases}}$$

Corollaire :

Soient $a, b \in I$.

Si $n \in \mathbb{N}$, *on note* $F_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$ *et* $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$.

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n\ est\ C^0\ sur\ le\ \underline{segment}\ [a;b] \\ (H_2)\ (f_n)\ CVU\ vers\ g\ sur\ [a;b] \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ G\ et\ les\ F_n\ sont\ correctement \\ définies\ et\ g\ C^0\ sur\ [a;b] \\ (C_2)\ (F_n)\ CVU\ vers\ G\ sur\ [a;b] \end{cases}}$$

3) Dérivation

Théorème :

$$\left.\begin{array}{c}(H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n\ est\ C^1\ sur\ I \\ (H_2)\ (f_n)\ CVS\ vers\ g\ sur\ I \\ (H_3)\ (f_n')\ CVU\ vers\ h\ sur\ I\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ h\ est\ C^0\ sur\ I \\ (C_2)\ g\ est\ C^1\ sur\ I\ et\ g' = h \\ \forall [a;b] \subset I, (f_n)\ CVU\ vers\ g\ sur\ [a;b] \end{cases}$$

Théorème version C^k :

$Soit\ k \in \mathbb{N}.$

$$\begin{array}{c}(H_1)\ \forall n \in \mathbb{N}, f_n\ est\ C^k\ sur\ I \\ (H_2)\ \forall p \in [\![0;k-1]\!], \left(f_n^{(p)}\right)_n\ CVS\ vers\ g_p \\ (H_3)\ \left(f_n^{(k)}\right)_n\ CVU\ vers\ g_k\ sur\ I\end{array} \Rightarrow \begin{cases} g_k\ est\ C^0\ sur\ I \\ g_0\ est\ C^k\ sur\ I \\ \forall p \le k, g_0^{(p)} = g \\ \forall [a;b] \subset I, \forall p \le k, \left(f_n^{(p)}\right)_n\ CVU\ vers\ g_p \\ sur\ [a;b] \end{cases}$$

III – Extension aux séries de fonctions

Définition :

$$\sum_n f_n\ CVS\ sur\ A\ si : \forall x \in A, \sum_n f_n(x)\ CV$$

$$\forall x \in A, on\ note\ S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, on\ note\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \ et\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

$$\sum_k f_k\ CVU\ sur\ A \Leftrightarrow \begin{array}{l} \Leftrightarrow (S_n)_n\ CVU\ vers\ S\ sur\ A \\ \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ S - S_n\ est\ bornée\ sur\ A \\ \|S - S_n\|_{+\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, R_n\ est\ bornée\ sur\ A \\ \|R_n\|_{+\infty} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases} \end{array}$$

Remarque : On utilise souvent la condition sur R_n en cas de CCSA, presque jamais sinon.

$$\boxed{\sum_n f_n \; CVN \; sur \; A \; si \; : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, f_n \; est \; bornée \; sur \; A \\ \displaystyle\sum_n \|f_n\|_{+\infty} \; CV \end{cases}}$$

Proposition :

$$CVN \Rightarrow CVU \Rightarrow CVS$$

Théorème de continuité des séries de fonctions :

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1) \; \forall n \in \mathbb{N}, f_n \; C^0 \; sur \; A \\ (H_2) \; \sum_n f_n \; \; CVU \; sur \; A \end{matrix} \Rightarrow S \; C^0 \; sur \; A}$$

Théorème de la double limite pour les séries de fonctions :

$Soit \; a \in \bar{A}$.

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1) \; \forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_n \\ (H_2) \; \sum_n f_n \; CVU \; sur \; A \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1) \; \displaystyle\sum_n l_n \; \; CV \\ (C_2) \; S(x) \xrightarrow[x \to a]{} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} l_n \end{cases}}$$

$Remarque \; : \; (C_2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim\limits_{x \to a} f_n(x) \right)$

Théorème d'intégration sur un segment :

$Soient \; [a \, ; b] \subset \mathbb{R}, F \; un \; \mathbb{R} - EV \; de \; dimension \; finie, (f_n)_n \in \mathcal{F}([a \, ; b], F)^{\mathbb{N}}$.

$On \; a \; D_S = [a; b]$.

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1) \; \forall n \in \mathbb{N}, \; f_n \; C^0 \; sur \; D_S \\ (H_2) \sum_n f_n \; \; CVU \; sur \; D_S \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1) \; S \; est \; C^0 \; sur \; D_S \\ (C_2) \; \displaystyle\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x) dx \right) \end{cases}}$$

Théorème de « dérivation » des séries de fonctions (Version C^1) :

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1) \; \forall n \in \mathbb{N}, \; f_n \; est \; C^1 \; sur \; I \\ (H_2) \; \sum_n f_n \; \; CVS \; sur \; I \\ (H_3) \; \sum_n f_n' \; \; CVU \; sur \; I \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1) \; S \; est \; C^1 \; sur \; I \\ (C_2) \; \forall x \in I, S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) \end{cases}}$$

$Remarque \; : (H_2) \; peut \; être \; remplacée \; par \; : (H_2') \; \exists a \in I, \sum_n f_n(a) \; CV$

Théorème de « dérivation » des séries de fonctions (Version C^k) :

$$\boxed{\begin{matrix} (H_1)\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_n\ est\ C^k\ sur\ I \\ (H_2)\ \forall p \in [\![0;k-1]\!], \sum_n f_n^{(p)}\ CVS\ sur\ I \\ (H_3)\ \sum_n f_n^{(k)}\ CVU\ sur\ I \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} (C_1)\ S\ est\ C^k\ sur\ I \\ (C_2)\ \forall p \in [\![0;k]\!], \forall x \in I, S^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}(x) \end{cases}}$$

Lemme :

$Soient\ p \in \mathbb{N}\ et\ a \in]1;+\infty[$

$$\boxed{\sum_n \frac{(\ln n)^p}{n^a}\ CV}$$

IV – Approximation uniforme

Théorème :

Soit $f \in C^0([a;b],\mathbb{R})$.

Alors f peut être approximée uniformément ($pour$ $\|\cdot\|_\infty$) par des fonctions en escaliers. C'est-à-dire :

$$\boxed{\forall \mathcal{E} > 0, \exists g \in \mathcal{E}sc([a;b];\mathbb{R}), \begin{cases} \forall x \in [a;b], |f(x)-g(x)| \leq \mathcal{E} \\ \|f-g\|_\infty \leq \mathcal{E} \end{cases}}$$

ou

$$\boxed{\exists (g_n)_n \in \mathcal{E}sc([a;b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \|f-g_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (g_n)\ CVU\ vers\ f\ sur\ [a;b] \end{cases}}$$

Théorème de Weierstaß :

Toute fonction continue sur un segment peut être approximée uniformément par des fonctions polynômiales.

Soit $f \in C^0([a;b],\mathbb{R})$.

$$\boxed{\forall \mathcal{E} > 0, \exists Q \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} \forall x \in [a;b], |f(x)-Q(x)| \leq \mathcal{E} \\ \|f-Q\|_\infty \leq \mathcal{E} \end{cases}}$$

ou

$$\boxed{\exists (Q_n) \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}, \begin{cases} \|f-Q_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ (Q_n)_n\ CVU\ vers\ f\ sur\ [a;b] \end{cases}}$$

V – Bonus

Je ferai quand j’aurai le temps je mettrai tout ce qu’on a fait sur la fonction zeta de riemann ça arrive restez plug