Programme de colle - Semaine n°10

Chapitre 8 - Systèmes linéaires et méthode du pivot de Gauß

- cf. semaine 8.

Chapitre 9 - Décomposition en éléments simples

- cf. semaine 8.

Chapitre 10 - Calcul intégral

- cf. semaines 8 et 9.

Chapitre 11 - Équations différentielles

- cf. semaine 9.

Chapitre 12 - Suites numériques

- Borne supérieure, borne inférieure. Un maximum est une borne supérieure, idem pour le minimum et la borne inférieure. Propriété de la borne supérieure sur $\mathbb{R}$. Caractérisation de la borne supérieure (avec des ε : la caractérisation séquentielle n'a pas encore été vue).
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. Les intervalles sont les parties convexes de $\mathbb{R}$.
- Voisinage d'un élément de $\overline{\mathbb{R}}$, point intérieur, point adhérent à un ensemble.
- Partie dense. Tout intervalle ouvert contient une infinité d'éléments d'une partie dense. Exemples de parties denses : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ensemble des nombres dyadiques (HP), décimaux (au programme).
- Suites réelles (note aux colleurs : les suites complexes seront vues à la fin du chapitre), suite minorée, majorée, bornée. Une suite est bornée ssi elle est majorée en valeur absolue.
- Modes de définition d'une suite : explicite, par récurrence, implicite.
- Suites constantes, stationnaires, périodiques, arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants (note aux colleurs : le cas réel avec $\Delta < 0$ n'a pas encore été abordé).
- Suites convergentes, définitions équivalentes (on peut remplacer ε par 2ε etc.). Exemples fondamentaux : suites de terme général $1/n^\alpha$ avec $\alpha > 0$, suites géométriques de raison $q \in \,]-1\,;1\,[$, suites constantes, stationnaires.
- Unicité de la limite. Une suite convergente est bornée, une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.
- Limites infinies. définitions équivalentes (on peut remplacer A par $2A$ etc.). Exemples fondamentaux : suites de terme général n^α avec $\alpha > 0$, $\ln(n)^\beta$ avec $\beta > 0$, suites géométriques de raison $q > 1$, $n!$ (les croissances comparées n'ont pas encore été vues).
- Opérations sur les limites (somme, produit, combinaison linéaire, quotient, composition par une fonction admettant une limite, composition par une fonction continue).
- Théorème de Cesàro.
- Limite et relation d'ordre : l'inégalité large passe à la limite, théorème d'encadrement.

Chapitres au programme

Chapitres 8 et 9 (exercices uniquement), chapitres 10 et 11 (cours et exercices), chapitre 12 (cours uniquement).

Questions de cours

1. Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} t^2 \cos(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Intégrales de Wallis : donner la relation de récurrence (évidemment avec démonstration).

3. Intégrales de Wallis : l'examinateur rappelle la formule de récurrence et demande de retrouver la valeur des intégrales d'indice pair et d'indice impair.
4. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$.
5. Calcul de $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{x^2}\right) \mathrm{Arctan}(x)\,\mathrm{d}x$.
6. L'examinateur demande de calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$ dans un cas explicite.
7. L'examinateur demande de calculer une primitive d'une fonction du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ (oui, un numérateur égal à 1) dans un cas explicite (avec $\Delta = b^2-4ac<0$).
8. Ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène de la forme $y'+a(x)y=0$ où a est une fonction continue (démonstration).
9. L'examinateur demande de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre dans un cas explicite (simple).
10. L'examinateur demande de résoudre une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dans un cas explicite (simple) en précisant s'il demande les solutions réelles ou complexes.
11. Définition de la borne supérieure d'un ensemble A. Caractérisation de la borne supérieure (avec des ε, sans démonstration).
12. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ (démonstration).
13. Définition d'une suite arithmétique, géométrique, et terme général à chaque fois (sans démonstration).
14. L'examinateur donne une suite arithmético-géométrique explicite et en demande le terme général.
15. L'examinateur donne une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants réels (avec $\Delta \geq 0$) explicite et en demande le terme général.
16. Définition d'une suite convergente (vers une limite L). L'examinateur demande, au choix, de prouver que $1/n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $\alpha>0$, ou que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ si $q \in \,]-1\,;1[$.
17. Unicité de la limite (démonstration).
18. Une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$ qui converge est stationnaire (démonstration, la réciproque découle d'un résultat prouvé précédemment et n'est pas demandée).
19. Définition d'une suite qui tend vers $+\infty$, d'une suite qui tend vers $-\infty$. L'examinateur demande, au choix, de prouver que $n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $\alpha>0$, ou que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ si $q>1$ (cette dernière propriété n'a pas été traitée en classe : à préparer, donc).
20. Théorème de Cesàro (démonstration uniquement dans le cas $L \in \mathbb{R}$).

Prévisions pour la semaine prochaine

- Fin des suites.
- Début de la continuité ?

Exercices à préparer

Exercice 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 21, 22, 23, 29, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 46, 48, 54, 55, 56 du chapitre 12.

Cahier de calcul

Rien cette semaine.