Correction du DM n°11

Problème 1 :

Partie I. Premiers exemples.

$\boxed{1}$ cf cours.

$\boxed{2}$

$$\boxed{\forall y \in \mathrm{F}, \exists (x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2, x_1 \neq x_2, f(x_1) = f(x_2) = y}$$

$\boxed{3}$ Si $y > 0$ alors y a deux antécédents par la fonction carré : $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$ qui sont bien distincts. Ainsi, tout élément de $\mathbb{R}_+$ sauf 0 (qui en admet un seul mais on n'est même pas obligé de le préciser), admet au moins deux antécédents.

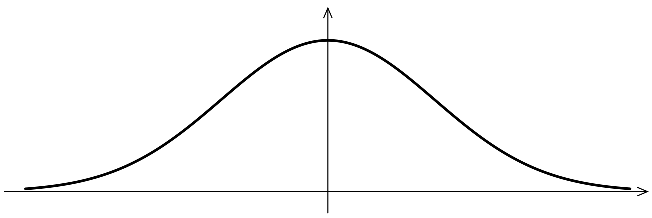
$$\boxed{\text{La fonction carré est doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}_+.}$$

$\boxed{4}$ Supposons que f est continue presque surjective de $\mathbb{R}$ dans $]\,0\,;1\,[$ et non surjective. Ainsi, tous les éléments de $]\,0\,;1\,[$ admettent un antécédent, sauf un qu'on note y. Puisque $y \in \,]\,0\,;1\,[$, on a $0 < y < 1$ et donc il existe $y_1 \in \,]\,0\,;y\,[$ et $y_2 \in \,]\,y\,;1\,[$. Par hypothèse, y_1 et y_2 admettent un antécédent par f, qu'on note respectivement x_1 et x_2. On a donc $f(x_1) < y < f(x_2)$. La fonction f étant continue, d'après le TVI, il existe $x \in \,]\,x_1\,;x_2\,[$ tel que $f(x) = y$ c'est-à-dire que y admet un antécédent par f : c'est absurde.

$$\boxed{\text{Une application } f : \mathbb{R} \to \,]\,0\,;1\,[\text{ continue presque surjective est surjective.}}$$

$\boxed{5}$ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ convient. Même s'il n'était pas demandé de le démontrer, démontrons-le. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. On en déduit le tableau de variations et le graphe de f.

	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Montrons donc que f est presque surjective non surjective de $\mathbb{R}$ dans $[\,0\,;1\,]$. Elle n'est évidemment par surjective car 0 n'a aucun antécédent par f (inutile de justifier davantage, une exponentielle n'est jamais nulle). Soit $y \in \,]\,0\,;1\,]$. Puisque $f(0) = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et f étant continue, d'après le TVI, y admet un antécédent par f sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$. Tout élément de $[\,0\,;1\,]$ sauf un admet donc un antécédent par f :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto e^{-x^2} \text{ est presque surjective non surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } [\,0\,;1\,].}$$

$\boxed{6}$ Soit $z \in \mathbb{U}$. D'après le cours, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{i\theta} = z$. De plus, on a également $e^{i(\theta+2\pi)} = z$ et $e^{i(\theta+4\pi)} = z$: z a au moins trois antécédents par cette fonction d'où

$$\boxed{\text{La fonction } \theta \mapsto e^{i\theta} \text{ est doublement surjective mais pas exactement doublement surjective.}}$$

$\boxed{7}$ La fonction f atteint un minimum (si $a > 0$) ou un maximum (si $a < 0$) en $-b/2a$. En d'autres termes, f est minorée ou majorée : il existe donc une infinité de réels n'ayant aucun antécédent par f.

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ n'est pas presque surjective, et donc pas presque doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.}$$

$\boxed{8}$ Soit $z \in \mathbb{C}$. $az^2 + bz + c = y \iff az^2 + bz + (c - y) = 0$. Ainsi, le nombre de solutions de l'équation de l'énoncé est le nombre de solutions de l'équation $az^2 + bz + (c - y) = 0$. Or, sur $\mathbb{C}$, il n'y a que deux cas : si le discriminant est non nul, il y a deux solutions simples distinctes, et si le discriminant est nul, il y a une solution double. Or, $\Delta = b^2 - 4a(c - y)$ donc

$\Delta = 0 \iff y = c - \dfrac{b^2}{4a}$ (on a bien $a \neq 0$). En d'autres termes, $c - \dfrac{b^2}{4a}$ admet un seul antécédent par f et tout autre complexe en admet deux.

$$\boxed{f \text{ est presque doublement surjective, seul } y = c - \dfrac{b^2}{4a} \text{ admet un seul antécédent par } f.}$$

Partie II. Fonctions exactement doublement surjectives.

1.(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ distinct de a et b. M étant un maximum, $f(x) \leqslant \mathrm{M}$ et puisque M est atteint en uniquement a et b, on a $f(x) \neq \mathrm{M}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ distinct de } a \text{ et } b,\ f(x) < \mathrm{M}.}$$

1.(b) f est continue sur le segment $[\,a\,;b\,]$ donc est bornée et atteint ses bornes : en particulier, elle atteint sa borne inférieure :

$$\boxed{f \text{ admet un minimum sur } [\,a\,;b\,].}$$

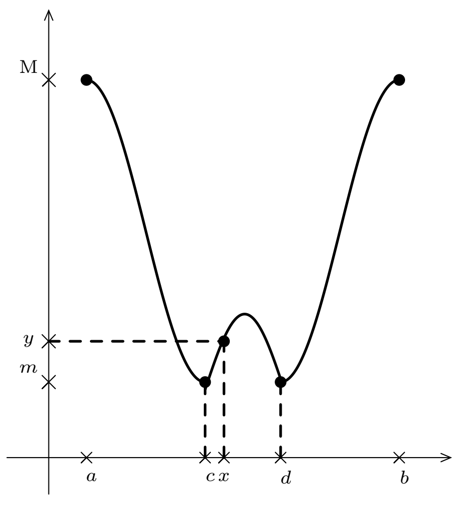
On a évidemment $m \leqslant \mathrm{M}$. Si $m = \mathrm{M}$ alors f est constante égale à M sur $[\,a\,;b\,]$, et en particulier M admet une infinité d'antécédents : c'est absurde.

$$\boxed{m < \mathrm{M}}$$

1.(c) m étant un minimum, il est atteint, c'est-à-dire qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = m$. Soit $y \in \,]\,m\,;\mathrm{M}\,[$. On a $f(a) = \mathrm{M} > y > f(c) = m$. D'après le TVI ($f$ est continue), il existe $x_1 \in \,]\,a\,;c\,[$ tel que $f(x_1) = y$. De même, il existe $x_2 \in \,]\,c\,;b\,[$ tel que $f(x_2) = y$. Puisque $x_1 < c < x_2$ on a en particulier $x_1 \neq x_2$.

$$\boxed{\text{Il existe } x_1 \neq x_2 \text{ dans }]\,a\,;b\,[\text{ tels que } f(x_1) = f(x_2) = y.}$$

1.(d) Commençons par faire un dessin.



On sait déjà que m admet au moins un antécédent, noté c dans $[\,a\,;b\,]$. Supposons que m admette au moins deux antécédents $c < d$ dans $[\,a\,;b\,]$.

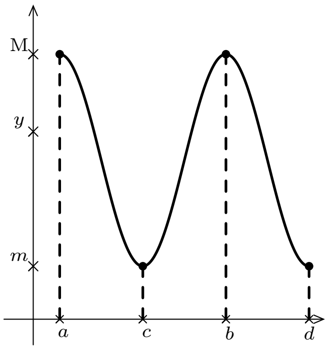
Soit $x \in \,]\,c\,;d\,[$. Puisque m n'admet que deux antécédents par f, de la même façon qu'à la question 1.(a), m étant le minimum de f sur $[\,a\,;b\,]$, on a $m < f(x) < \mathrm{M}$. Notons $y = f(x)$. y admet donc un antécédent, x, par f sur $]\,c\,;d\,[$, et de la même façon qu'à la question précédente, y admet également un antécédent sur $]\,a\,;c\,[$ et un autre sur $]\,d\,;b\,[$: y admet donc au moins trois antécédents, c'est absurde.

$$\boxed{m \text{ admet un unique antécédent par } f \text{ dans } [\,a\,;b\,].}$$

1.(e)

Puisque m admet exactement deux antécédents par f et un seul sur $[\,a\,;b\,]$, son autre antécédent, qu'on notera d, est soit strictement inférieur à a, soit strictement supérieur à b. Supposons que $d > b$ (raisonnement analogue dans l'autre cas). Là, aussi, commençons par faire un dessin.

Soit $y \in \,]\,m\,;\mathrm{M}\,[$. D'après la question 1.(c), y admet deux antécédents $x_1 \neq x_2$ dans $]\,a\,;b\,[$. De plus, $f(b) = \mathrm{M} > y > f(d) = m$ donc, f étant continue, d'après le TVI, il existe $x_3 \in \,]\,b\,;d\,[$ tel que $f(x_3) = y$. y admet donc un troisième antécédent : c'est absurde.



$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'application } f \text{ continue exactement doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } f(\mathbb{R}) \text{ avec un maximum.}}$$

2 Soit $y \in (-f)(\mathbb{R})$. Par hypothèse sur f, $-y \in f(\mathbb{R})$ donc admet exactement deux antécédents par f. Or, x est un antécédent de $-y$ par f si et seulement si x est un antécédent de y par $-f$ ($f(x) = -y \iff -f(x) = y$). Il en découle que tout élément de $(-f)(\mathbb{R})$ admet également exactement deux antécédents par $-f$, c'est-à-dire que

$$\boxed{-f \text{ est également exactement doublement surjective.}}$$

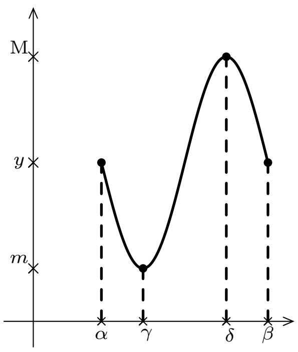
Or, si f est minorée, alors $-f$ est majorée, ce qui est absurde par la question précédente.

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'application } f \text{ continue exactement doublement surjective de } \mathbb{R} \text{ dans } f(\mathbb{R}) \text{ avec un minimum.}}$$

3.(a) f étant continue sur le segment $[\,\alpha\,;\beta\,]$, f est bornée et atteint ses bornes.

$$\boxed{\text{M et } m \text{ existent bien.}}$$

3.(b)



Supposons que $y \neq m$ et $y \neq \mathrm{M}$. Ainsi, on a $m < y < \mathrm{M}$. Les réels m et M étant atteints, il existe $\gamma \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ et $\delta \in [\,\alpha\,;\beta\,]$ tels que $f(\gamma) = m$ et $f(\delta) = \mathrm{M}$. Là aussi, faisons un dessin (on n'a pas forcément $\gamma < \delta$ comme sur le dessin, on peut très bien avoir $\delta < \gamma$).

De la même façon que précédemment, y admet un antécédent dans $]\,\gamma\,;\delta\,[$ ce qui fait un troisième antécédent par f avec α et β, ce qui est absurde.

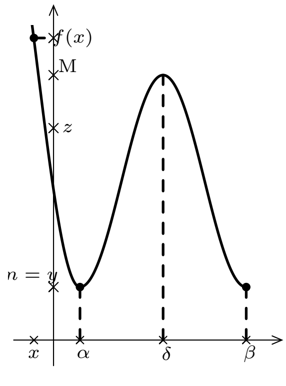
$$\boxed{\text{On a } m = y \text{ ou } y = \mathrm{M}.}$$

3.(c) Soit $x < \alpha$. Si $f(x) = m$ alors x est un troisième antécédent de $y = m$: absurde. Supposons à présent $f(x) > m$. Là encore faisons un dessin.

Le problème est qu'on ne sait pas si $f(x) > \mathrm{M}$ ou non, et donc on ne peut pas raisonner comme précédemment pour trouver trois antécédents de $f(x)$. Il suffit de prendre un réel inférieur strict à M.

Soit z tel que $m < z < \min(f(x), \mathrm{M})$. De même que précédemment, z admet un antécédent sur $]\,x\,;\alpha\,[$, un autre sur $]\,\alpha\,;\delta\,[$ (avec δ un antécédent de M) et un troisième sur $]\,\delta\,;\beta\,[$ ce qui est absurde.

On a donc $f(x) < m$. L'autre inégalité (pour $x > \beta$) se démontre de façon analogue.



$$\boxed{\forall x < \alpha, m > f(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x > \beta, m > f(x)}$$

3.(d) Il découle des questions précédentes que M est un maximum de f : en effet, il est atteint, et f est (par définition de M) majorée par M sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$, et majorée par $m < \mathrm{M}$ sur $]\,-\infty\,;\alpha\,[\,\cup\,]\,\beta\,;+\infty\,[$ d'après la question précédente. D'après la question 1,

$$\boxed{\text{Une telle fonction } f \text{ n'existe pas.}}$$

Convergence uniforme de polynômes

Partie I. Norme infinie de convergence uniforme

1 La borne supérieure est par définition le plus petit des majorants. Si $\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{M}$ alors, $\|f\|_\infty$ étant un majorant, pour tout $x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \leqslant \mathrm{M}$ donc $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$. Réciproquement, si pour tout x, $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$, alors M est un majorant donc est supérieur à la borne supérieure $\|f\|_\infty$.

$$\boxed{\|f\|_\infty \leqslant \mathrm{M} \iff \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leqslant \mathrm{M}}$$

> Attention, ce n'est pas une égalité ! Si $|f(x)| \leqslant \mathrm{M}$ pour tout x, on peut affirmer que M est un majorant mais pas forcément que c'est la borne supérieure.

2.(a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2)$. On en déduit le tableau de variations de f (les limites en $\pm\infty$ venant des théorèmes de croissances comparées) :

	$-\infty$		$-1/\sqrt{2}$		$1/\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0

Or, $f(x_2) = e^{-1/2}/\sqrt{2} = -f(x_1)$. Il en découle que $|f(x_1)| = |f(x_2)|$ et donc que $\|f\|_\infty = f(x_2)$. En d'autres termes :

$$\boxed{\|f\|_\infty = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}}, \text{ cette quantité étant atteinte en } \pm 1/\sqrt{2}.}$$

2.(b) Posons $f = \mathrm{Arctan}$: $\|f\|_\infty = \pi/2$ et pourtant il n'existe aucun réel x tel que $|\mathrm{Arctan}\,(x)| = \pi/2$.

$$\boxed{\text{La fonction Arctan convient.}}$$

3.(a) On cherche donc une fonction affine φ vérifiant $\varphi(c) = a$ et $\varphi(d) = b$: prenons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccl} [\,c\,;d\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{b-a}{d-c} \times (x-c) + a \end{array} \right.$$

> Si on cherche un point de vue plus géométrique, on cherche une droite passant par les points (c,a) et (d,b), et on sait qu'on peut donner facilement une équation de droite connaissant son coefficient directeur et un point de la droite. Le résultat en découle immédiatement.
>
> Précisons qu'on ne dit pas encore que φ est à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$ car on ne l'a pas encore prouvé.

φ est bien une bijection de $[\,c\,;d\,]$ dans $[\,a\,;b\,]$ car est continue, strictement croissante (fonction affine de coefficient dominant strictement positif) et vérifie $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ (théorème de la bijection).

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ ci-dessus est une bijection continue de } [\,c\,;d\,] \text{ dans } [\,a\,;b\,].}$$

Mais on cherche également φ^{-1}. Soit $y \in [\,a\,;b\,]$. Soit $x \in [\,c\,;d\,]$. Alors :

$$\begin{aligned} y = \varphi(x) &\iff y = \frac{b-a}{d-c} \times (x-c) + a \\ &\iff x = \frac{d-c}{b-a}(y-a) + c \end{aligned}$$

Finalement $$\boxed{\varphi^{-1} \text{ est la fonction } y \mapsto \frac{d-c}{b-a}(y-a)+c \text{ donc est également affine.}}$$

> On pouvait très bien prouver la bijectivité de φ de cette façon et ne pas utiliser le théorème de la bijection, mais il ne fallait pas oublier de prouver que φ était à valeurs dans $[\,a\,;b\,]$ (ou, ce qui revient au même, que l'équation $y = f(x)$ n'admettait pas de solution si $y \notin [\,a\,;b\,]$).

3.(b) $\|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$ est, par définition, un majorant de $|f|$ (sur $[\,a\,;b\,]$). Soit $x \in [\,c\,;d\,]$, si bien que $\varphi(x) \in [\,a\,;b\,]$ et donc $|f(\varphi(x))| \leqslant \|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$. D'après la question 1, cela implique que :

$$\boxed{\|f \circ \varphi\|_{\infty,[\,c\,;d\,]} \leqslant \|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}}$$

3.(c) L'autre inégalité est analogue : soit $x \in [\,a\,;b\,]$. On a :

$$|f(x)| = \left|f \circ \varphi\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right| \leqslant \|f \circ \varphi\|_{\infty,[\,c\,;d\,]}$$

Toujours d'après la question 1, cela donne l'autre inégalité, d'où l'égalité.

$$\boxed{\|f \circ \varphi\|_{\infty,[\,c\,;d\,]} = \|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}}$$

4 Il suffit d'écrire avec des quantificateurs que la suite de terme général $\|f - f_n\|_\infty$ tend vers 0, et d'utiliser la question 1, c'est-à-dire que : $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon \iff \forall x \in \mathrm{D}, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in \mathrm{D}, |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon}$$

5 Soit donc $x \in \mathrm{D}$. On sait que $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f - f_n\|_\infty$ puisque la norme infinie est un majorant de $|f_n - f|$. Il y a CVU donc la norme infinie tend vers 0 donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\forall x \in \mathrm{D}, f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)}$$

6 Si $x = 0$ alors, pour tout n, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Soit $x > 0$. Alors $y = nx \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $\operatorname{Arctan}(y) \xrightarrow[y \to +\infty]{} \pi/2$ donc, par composition de limites, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \pi/2$. Le dernier cas est analogue.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)}$$

Cependant, prouvons que la convergence n'est pas uniforme. Posons $\varepsilon = 1$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $x > 0$,

$$f(x) - f_n(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(nx) \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{\pi}{2} > 1$$

En particulier, il existe x tel que $f(x) - f_n(x) > 1$. En d'autres termes, on a prouvé le résultat suivant :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon : \text{il n'y a pas convergence uniforme.}}$$

Partie II. Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass

1 f est continue sur un segment donc est bornée et atteint ses bornes.

$$\boxed{\|f\|_\infty \text{ est bien définie et est atteinte.}}$$

2.(a) Soit $x \in [\,0\,;1\,]$. Supposons donc que f soit constante égale à 1. Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= (x+1-x)^n && \text{Binôme de Newton} \\
&= 1
\end{aligned}$$

En d'autres termes, B_n est constant égal à 1 donc $\mathrm{B}_n - f$ est la fonction nulle. On en déduit que $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$: la suite (B_n) converge bien uniformément vers f. Supposons à présent que f soit la fonction identité. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} && \text{Le terme pour } k=0 \text{ est nul} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \times x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \times x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \times x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \times x^{j+1} (1-x)^{n-1-j} && j=k-1, k=j+1 \\
&= x\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \times x^{j} (1-x)^{n-1-j} && j=k-1, k=j+1 \\
&= x \times (x+1-x)^{n-1}
\end{aligned}$$

et donc $\mathrm{B}_n = x$ et on montre de même qu'il y a encore convergence uniforme.

$$\boxed{\text{Si } f=1 \text{ ou } f=\mathrm{Id}_{[\,0\,;1\,]},\ (\mathrm{B}_n) \text{ CVU vers } f.}$$

2.(b) Soit donc $n \geqslant 1$. Suivons l'indication de l'énoncé et utilisons le fait que $k^2 = k(k-1)+k$ pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{B}_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k(k-1)+k}{n^2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k(k-1)}{n} \times x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k(k-1)}{n} \times x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-2)!(n-k)!} \times x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \times \frac{k}{n}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-1)\times(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!}\times x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\times\frac{k}{n}$$

et cela donne le résultat voulu

$$\boxed{\mathrm{B}_n = \frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}\times x^k(1-x)^{n-k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\times\frac{k}{n}}$$

On remarque que la somme de droite (sans compter le $1/n$ devant) est la somme de la question précédente donc est égale à x. Pour la première, on fait le changement de variable $j = k-2$, $k = j+2$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_n &= \frac{(n-1)}{n}\times\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^{j+2}(1-x)^{n-2-j} + \frac{x}{n}\\ &= \frac{n-1}{n}\times x^2\times\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j} + \frac{x}{n}\\ &= \frac{n-1}{n}\times x^2\times(x+1-x)^{n-2} + \frac{x}{n}\\ &= \frac{n-1}{n}\times x^2 + \frac{x}{n}\end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$|\mathrm{B}_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n}\times|x-x^2| \leqslant \frac{2}{n}$$

puisque $x\in[\,0\,;1\,]$. On en déduit que $\mathrm{B}_n - f$ est bornée et que $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty \leqslant 2/n$: d'après le théorème d'encadrement, $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$$\boxed{\text{La suite } (\mathrm{B}_n) \text{ converge uniformément vers } f.}$$

> Après le chapitre 27, nous pourrons aller plus vite dans les calculs : nous pourrons dire que, d'après le théorème de transfert, si X suit une loi binomiale de paramètres n et x alors $\mathrm{B}_n(x) = \dfrac{1}{n^2}\times \mathrm{E}(\mathrm{X}^2)$ et, d'après la formule de König-Huygens, $\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{V}(\mathrm{X}) + \mathrm{E}(\mathrm{X})^2 = nx(1-x) + (nx)^2$ et on trouve évidemment le même résultat. De même, si on reprend le cas où f est l'identité, alors $\mathrm{B}_n(x) = \dfrac{1}{n}\times\mathrm{E}(\mathrm{X}) = x$. Essayez de refaire cette question quand on aura fini le chapitre 27, vous verrez que vous gagnerez du temps !

3 Découle du théorème de Heine : f est continue sur un segment donc est uniformément continue.

$$\boxed{\text{Un tel } \eta \text{ existe bien.}}$$

4 Notons $\mathrm{T}_n(x)$ la somme de droite, il suffit donc de prouver qu'elle est égale à $f(x) - \mathrm{B}_n(x)$. Par linéarité de la somme,

$$\mathrm{T}_n(x) = f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{n}{k}\right)$$

La somme de gauche (sans compter le $f(x)$) est égale à $(x+1-x)^n = 1$ d'après la formule du binôme de Newton, et la somme de droite est égale à $\mathrm{B}_n(x)$ par définition de B_n.

$$\boxed{f(x) - \mathrm{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)}$$

Séparons la somme selon que $|x-k/n| > \eta$ ou $|x-k/n| \leqslant \eta$ (pour utiliser un terme savant : on fait un regroupement par paquets), c'est-à-dire que :

$$f(x) - \mathrm{B}_n(x) = \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|\leqslant\eta}}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

D'après l'inégalité triangulaire (et en sortant les coefficients binomiaux et x^k et $(1-x)^k$ qui sont positifs) :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(x)| \leqslant \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|\leqslant\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

Or, d'après la question précédente, si $|x-k/n|\leqslant\eta$, alors $|f(x)-f(k/n)|\leqslant\varepsilon$ si bien que :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(x)| \leqslant \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|\leqslant\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\times\varepsilon + \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geqslant 0$ donc on peut rajouter les termes manquants dans la première somme et cela donne une somme plus grande, donc :

$$|f(x)-\mathrm{B}_n(x)| \leqslant \varepsilon\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} + \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$$

ce qui permet de conclure (la première somme vaut 1 d'après la formule du binôme de Newton).

$$\boxed{|f(x)-\mathrm{B}_n(x)| \leqslant \varepsilon + \sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|}$$

5 Par définition de cette somme, si k intervient dans cette somme, $|x-k/n|\geqslant\eta$ (une inégalité stricte est aussi large). Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $(x-k/n)^2\geqslant\eta^2$ ce qui donne le résultat voulu en divisant par η^2 (strictement positif donc on ne change pas le sens de l'inégalité).

$$\boxed{\text{Pour tout } k \text{ intervenant dans cette somme, } \frac{1}{\eta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\geqslant 1}$$

6 Soit k intervenant dans cette somme. D'après l'inégalité triangulaire, et puisque $\|f\|_\infty$ est un majorant de f, il vient :

$$|f(x)-f(k/n)|\leqslant|f(x)|+|f(k/n)|\leqslant 2\|f\|_\infty$$

Dès lors, et en utilisant à droite la question précédente :

$$\mathrm{S}_n(x)\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{\substack{k=0\\|x-k/n|>\eta}}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\frac{1}{\eta^2}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

Enfin, la somme de droite ci-dessus est inférieure à la somme pour k allant de 0 à n puisqu'on rajoute des termes positifs. En conclusion :

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f)\leqslant\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2}$$

7 Calculons explicitement le membre de droite ci-dessus, que l'on note $\mathrm{A}_n(x)$. Tout d'abord, en développant le carré, il vient :

$$\mathrm{A}_n(x)=\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\times(-2x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\times\frac{k}{n}+\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\times\frac{k^2}{n^2}$$

Or, on a calculé ces sommes explicitement aux questions 3.(a) et 3.(b) : elles valent respectivement $1, x$ et $\dfrac{n-1}{n}x^2+\dfrac{x}{n}$ si bien que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_n(x) &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty x^2}{\eta^2}-\frac{4\|f\|_\infty x^2}{\eta^2}+\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\times\left(\frac{n-1}{n}\times x^2+\frac{x}{n}\right)\\
&\leqslant -\frac{2\|f\|_\infty x^2}{\eta^2}+\frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\times\left(x^2-\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}\right)\\
&\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{\eta^2}\times\frac{x-x^2}{n}\leqslant\frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}
\end{aligned}$$

puisque $0 \leqslant x - x^2 \leqslant x \leqslant 1$ car $x \in [\,0\,;1\,]$. Attention, puisqu'on veut une majoration indépendante de x (cf. l'écriture de la convergence uniforme avec des quantificateurs), il est impératif d'avoir une majoration indépendante de x. Si on reprend depuis le début, on a donc prouvé que :

$$\boxed{|f(x) - \mathrm{B}_n(x)| \leqslant \varepsilon + \frac{2\|f\|_\infty}{n\eta^2}}$$

Puisque le membre de droite tend vers ε (ε plus une quantité qui tend vers 0), il existe n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|f(x) - \mathrm{B}_n(x)| \leqslant 2\varepsilon$, et cette majoration est valable pour tout x donc, d'après la question 1 de la partie I, $\|f - \mathrm{B}_n\|_\infty \leqslant 2\varepsilon$ pour n assez grand. En d'autres termes :

$$\boxed{\|f - \mathrm{B}_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 : \text{la suite } (\mathrm{B}_n) \text{ converge uniformément vers } f.}$$

8 Soit donc f continue sur $[\,a\,;b\,]$ et soit $\varphi : [\,0\,;1\,] \to [\,a\,;b\,]$ une bijection affine (donc continue). D'après la question 3 de la partie I, $\|f \circ \varphi\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} = \|f\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$. La fonction $f \circ \varphi$ étant continue (car composée de fonctions continues) sur $[\,0\,;1\,]$, d'après la question précédente, elle est limite uniforme d'une suite de polynômes (B_n) (la suite des polynômes de Bernstein, mais associée à la fonction $f \circ \varphi$). Dès lors,

$$\|f \circ \varphi - \mathrm{B}_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Toujours d'après la partie I, $\|f\circ\varphi - \mathrm{B}_n\|_{\infty,[\,0\,;1\,]} = \|f - \mathrm{B}_n \circ \varphi^{-1}\|_{\infty,[\,a\,;b\,]}$ (on ne change pas la norme infinie quand on compose par une bijection). Puisque φ est affine, φ^{-1} l'est aussi donc $\mathrm{B}_n \circ \varphi^{-1}$ est aussi polynomiale, et $\|f - \mathrm{B}_n \circ \varphi^{-1}\|_{\infty,[\,a\,;b\,]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui est le résultat voulu.

$$\boxed{f \text{ est limite uniforme d'une suite de polynômes.}}$$

Partie III. Limites uniformes de polynômes sur $\mathbb{R}$

1.(a) Découle de l'écriture de la convergence uniforme avec des quantificateurs pour $\varepsilon = 1$ de la question 4 de la partie I (avec $\mathrm{D} = \mathbb{R}$ dans cette question) :

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{P}_n(x) - f(x)| \leqslant 1}$$

1.(b) Soient donc $n \geqslant n_0$ et $x \in \mathbb{R}$. Par inégalité triangulaire,

$$|\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n_0}(x)| = |\mathrm{P}_n(x) - f(x) + f(x) - \mathrm{P}_{n_0}(x)| \leqslant |\mathrm{P}_n(x) - f(x)| + |f(x) - \mathrm{P}_{n_0}(x)|$$

Puisque $n \geqslant n_0$ et $n_0 \geqslant n_0$, les deux valeurs absolues de droite sont majorées par 1, ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\forall n \geqslant n_0, \forall x \in \mathbb{R}, |\mathrm{P}_n(x) - \mathrm{P}_{n_0}(x)| \leqslant 2}$$

1.(c) D'après la question précédente, pour tout $n \geqslant n_0$, le polynôme $\mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n_0}$ est borné donc constant (en effet, un polynôme non constant n'est pas borné car tend vers $\pm\infty$ en $+\infty$ selon le signe de son coefficient dominant).

$$\boxed{\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \text{ le polynôme } \mathrm{P}_n - \mathrm{P}_{n_0} \text{ est constant.}}$$

2 D'après la question 5 de la partie I, $\mathrm{P}_n(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$, si bien que $\alpha_n = \mathrm{P}_n(0) - \mathrm{P}_{n_0}(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0) - \mathrm{P}_{n_0}(0)$.

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_n) \text{ converge.}}$$

3 Pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{P}_n(x) = \mathrm{P}_{n_0}(x) + \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{P}_{n_0}(x) + \mathrm{L}$. Or, toujours d'après la question 5 de la partie I, $\mathrm{P}_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Par unicité de la limite, on a le résultat voulu.

$$\boxed{f = \mathrm{P}_{n_0} + \mathrm{L}}$$

4 Si P est un polynôme alors, en prenant (P_n) constante égale à P, on obtient que, pour tout n, $\|\mathrm{P}_n - \mathrm{P}\|_\infty = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. En d'autres termes, (P_n) converge uniformément vers P : tout polynôme est limite uniforme d'une suite de polynômes.

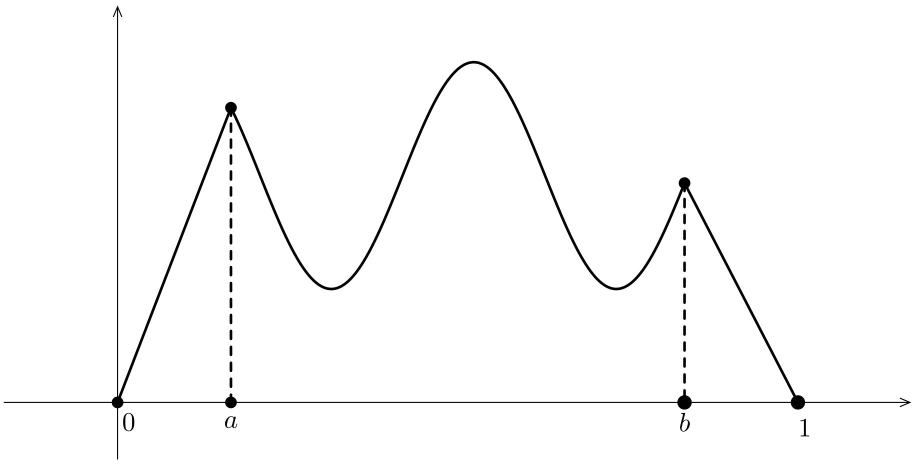
$$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}, \text{ les limites uniformes de polynômes sont exactement les polynômes.}}$$

Partie IV. Théorème de Chudnowski

$\boxed{1}$ On prolonge f de la façon suivante :

- f est affine sur $[\,0\,;a\,[$ pour avoir $f(0)=0$ et $f(x)\xrightarrow[x\to a^-]{}f(a)$, de manière à ce que f soit continue en a.
- f est affine sur $]\,b\,;1\,]$ pour avoir $f(1)=0$ et $f(x)\xrightarrow[x\to b^+]{}f(b)$, de manière à ce que f soit continue en b.

Ci-dessous un dessin de f ainsi prolongée :



> Il est bien évident que la valeur de 0 en 0 et 1 est totalement arbitraire, toute valeur entière (et même pas forcément la même en 0 et 1) convenait.

$\boxed{2}$ Soit donc $x\in[\,0\,;1\,]$. D'après l'inégalité triangulaire, et puisque $x^k(1-x)^{n-k}\geqslant 0$ pour tout k :

$$|\mathrm{B}_n(x)-\mathrm{C}_n(x)|=\left|\sum_{k=0}^n x^k(1-x)^{n-k}\left(\binom{n}{k}f\left(\frac{n}{k}\right)-\left\lfloor\binom{n}{k}f\left(\frac{n}{k}\right)\right\rfloor\right)\right|\leqslant\sum_{k=0}^n x^k(1-x)^{n-k}\left|\binom{n}{k}f\left(\frac{n}{k}\right)-\left\lfloor\binom{n}{k}f\left(\frac{n}{k}\right)\right\rfloor\right|$$

Il suffit d'utiliser le fait que, pour tout réel y, $|y-\lfloor y\rfloor\,|\leqslant 1$ (l'inégalité est même stricte) pour conclure.

$$\boxed{\forall x\in[\,0\,;1\,],|\mathrm{B}_n(x)-\mathrm{C}_n(x)|\leqslant\sum_{k=0}^n x^k(1-x)^{n-k}}$$

$\boxed{3}$ Précisons que la « monotonie » des coefficients binomiaux (croissants puis décroissants) n'est pas au programme donc il faut le redémontrer : cf. exercice 44 du chapitre 3 pour une preuve détaillée.

$$\boxed{\forall k\in[\![\,1\,;\,n-1\,]\!],\binom{n}{k}\leqslant\binom{n}{1}=n}$$

> On peut donner une preuve combinatoire de ce résultat (cf. chapitre 17 : relisez cette preuve quand nous aurons fait ce chapitre) : les ensembles
>
> $\{1;2;\dots;k\},\{2;3;\dots;k+1\},\dots,\{n-k+1;n-k+2;\dots;n\},\{n-k+2;n-k+2;\dots;n;1\},\dots,\{n;1;2;\dots;k-1\}$
>
> c'est-à-dire les ensembles contenant les k entiers consécutifs (modulo n) démarrant en $1,2,\dots,n$, forment n parties distinctes à k éléments, donc le nombre de parties de $[\![\,1\,;\,n\,]\!]$ à k éléments est au moins égal à n, ce qui donne le résultat voulu.

$\boxed{4}$ Soit $x\in[\,0\,;1\,]$. D'après la question précédente, pour tout $k\in[\![\,1\,;\,n-1\,]\!]$, (multiplier par $x^k(1-x)^{n-k}$ ne change pas le sens de l'inégalité puisque cette quantité est positive) $\binom{n}{k}/n\geqslant 1$ donc :

$$x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

Par somme : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + \underbrace{(1-x)^n}_{k=0} + \underbrace{x^n}_{k=n}\right)$

La dernière inégalité vient du fait que les deux termes rajoutés sont positifs. On rajoute les termes supplémentaires dans la somme (d'indices $k=0$ et $k=n$) si bien que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} x^k(1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{1}{n}}$$

5 Soit $x \in [\,0\,;1\,]$, soit $n \geqslant 1$. D'après l'inégalité triangulaire et la question précédente :

$$|\mathrm{C}_n(x) - f(x)| \leqslant |\mathrm{C}_n(x) - \mathrm{B}_n(x)| + |\mathrm{B}_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n} + \|\mathrm{B}_n - f\|_\infty$$

D'après la question 1 de la partie I, il en découle que :

$$\|\mathrm{C}_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} + \|\mathrm{B}_n - f\|_\infty$$

Or, d'après la partie III, $\|\mathrm{B}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc le membre de droite ci-dessus tend vers 0. D'après le théorème d'encadrement,

$$\boxed{\|\mathrm{C}_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 : (\mathrm{C}_n) \text{ CVU vers } f.}$$

On vient donc de prouver que f est limite uniforme d'une suite de polynômes à coefficients entiers. On peut généraliser ce résultat : si $[\,a\,;b\,]$ ne contient aucun entier, alors toute fonction continue f est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers. En effet, si on pose $g : x \mapsto f(x + \lfloor a \rfloor)$, alors g est continue sur $[\,a - \lfloor a \rfloor\,; b - \lfloor b \rfloor\,]$ (puisque $\lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$ car il n'y a aucun entier entre a et b) donc, d'après le théorème de Chudnowski que l'on vient de prouver, g est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers, donc f également.

Que se passe-t-il sur un intervalle plus grand, si $[\,a\,;b\,]$ contient des entiers ? On peut montrer, par exemple, que si f est continue sur $[\,0\,;1\,]$, alors f est limite uniforme de polynômes à coefficients entiers si et seulement si $f(0)$ et $f(1)$ sont entiers.

Il y a de nombreux cas de figure, nous étudierons dans le DM n° 15 le cas particulier où $b - a \geqslant 4$, c'est-à-dire le cas où la longueur de l'intervalle est supérieure ou égale à 4 et nous verrons que le résultat est bien différent dans ce cas de figure.