Devoir Maison n°1

Problème - La suite de Fibonacci.

On définit la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$

Partie I - Préliminaires

1. Donner $F_2, \dots, F_{10}$ (bon... dans cette question, ce n'est peut-être pas la peine de faire une récurrence...).
2. Montrer par récurrence les relations suivantes :

   (a) $\forall n \geq 1, \quad {F_1}^2 + \cdots + {F_n}^2 = F_n F_{n+1}$

   (b) $\forall n \geq 0, \quad F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$

   (c) $\forall n \geq 1, \quad {F_n}^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$

   (d) $\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1}) \\ F_{2n+1} = {F_n}^2 + {F_{n+1}}^2 \end{cases}$

3. Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}, F_n \geq n - 1$. En déduire la limite de $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie II - Théorème de Zeckendorff (1952)

Dans cette partie, on note $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci usuelle privée de ses deux premiers termes, c'est-à-dire la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \qquad v_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite d'entiers dont les premiers termes sont $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$ etc.

On dit qu'un entier $m \geq 1$ admet une représentation de Fibonacci (que l'on pourra abréger en F-représentation) si m est somme d'éléments distincts de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple

$$\begin{aligned} 30 &= 21 + 5 + 3 + 1 \\ &= v_6 + v_3 + v_2 + v_0 \end{aligned}$$

On appelle représentation de Zeckendorff de m (en abrégé : Z-représentation) toute représentation de Fibonacci de m où n'apparaissent pas deux nombres consécutifs de la suite (v_n). En d'autres termes, m admet une Z-représentation s'il existe $p \geq 1$ et des entiers $u_1 \leq \cdots \leq u_p$ tels que :

$$m = v_{u_p} + \cdots + v_{u_1} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1\,; p-1]\!], \qquad u_{i+1} \geq u_i + 2$$

Par exemple, $v_6 + v_3 + v_2 + v_0$ n'est pas une Z-représentation du nombre 30 puisqu'elle contient v_3 et v_2 qui sont consécutifs dans la suite (v_n). Cependant,

$$\begin{aligned} 30 &= 21 + 8 + 1 \\ &= v_6 + v_5 + v_0 \end{aligned}$$

en est une.

1. Donner toutes les F-représentations du nombre 37 en précisant pour chacune si elle est ou non une Z-représentation. Il n'est pas demandé de justification.
2. Montrer par récurrence sur $p \geq 1$ que pour tous $u_1 \leq \cdots \leq u_p$ entiers non deux à deux consécutifs,

   $$v_{u_p} + \cdots + v_{u_1} < v_{u_p+1}$$

   On surveillera sa main pour qu'elle ne confonde pas v_{u_p+1} et $v_{u_p} + 1$.
3. Soit $m \geq 1$. Prouver l'existence de $n = \max\{k \,|\, v_k \leq m\}$.

4. Montrer que tout entier $m \geq 1$ admet une unique Z-représentation.
5. Expliquer comment calculer la Z-représentation d'un entier m.
6. Donner la Z-représentation de 272.

Voici des points sur lesquels je râle quand je corrige un devoir. La liste n'est pas exhaustive, mais regroupe une bonne part des dangers de ce devoir, niveau rédaction et présentation. Pour chacun des points, indiquez si vous avez le sentiment d'avoir fait attention (Oui - Non - Bof). Cette page est à joindre à votre copie.

1. Souligner/encadrer les résultats.

   O - N - B.

2. Écrire « Soit $n \in \dots$ » ou « Soit $n \geq \dots$ » avant de manipuler un entier n.

   O - N - B.

3. Ne pas écrire « la suite F_n ».

   O - N - B.

4. Ne pas écrire d'équivalence quand on déroule les calculs, les garder pour une résolution d'(in)équations.

   O - N - B.

5. Faire attention à l'hypothèse de récurrence, ne pas écrire d'horreur du type H_n : « $\forall n \in \mathbb{N}, \dots$ ».

   O - N - B.

6. Faire attention lors de l'initialisation : ne pas écrire l'égalité que l'on souhaite montrer au rang initial, écrire plutôt « d'une part ... » et « d'autre part ... »

   O - N - B.

7. Faire attention lors de l'hérédité, ne pas écrire : « Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}, H_n$ est vraie et montrons que H_{n+1} est vraie ».

   O - N - B.

8. Montrer l'initialisation pour suffisamment de valeurs quand on fait une récurrence double.

   O - N - B.

9. Ne pas utiliser le fait que H_0 est vraie quand on a supposé uniquement H_n vraie.

   O - N - B.

10. Conclure proprement une récurrence en disant « d'après le principe de récurrence ».

    O - N - B.