Strategie e analisi dell'errore per problemi di ottimizzazione vincolati regolati da equazioni di evoluzione

Claudia Bonomi Edoardo Arbib

POLITECNICO DI MILANO

Progetto per il corso di Analisi Numerica per le Equazioni a Derivate Parziali II

Contenuti

Setting

dominio $\Omega \times I$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $I = (0, T)$, $U_{ad} \subset U = L^2(I, \mathbb{R}^D)$

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, u \in U_{ad}} \quad & J(y,u) = \frac{1}{2}||y - y_d||^2{}_{L^2(I,L^2(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}||u||^2{}_U \\ \text{s.t.} \quad & y = S(Bu, y_0) \end{aligned} \tag{1}$$

Equazione di stato

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{y} - \triangle \overline{y} = f \quad & \text{in I} \times \Omega \\ \overline{y} = 0 \quad & \text{in I} \times \Omega \\ \overline{y}(0) = \kappa \quad & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

Condizione di ottimalità

$$\overline{u} = P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\alpha}B'\overline{p}\right)$$

$\overline{p}$ è la soluzione del problema aggiunto

$$\begin{aligned} -\partial_t \overline{p} - \triangle \overline{p} = \overline{y} - y_d \quad & \text{in } I \times \Omega \\ \overline{p} = 0 \quad & \text{in } I \times \partial\Omega \\ \overline{p}(T) = 0 \quad & \text{su } \Omega \end{aligned} \tag{2}$$

Spazio e operatore di controllo

Spazio di controllo

$$U_{ad} = \{u \in U | a_i \leq u_i(t) \leq b_i \forall i = 1 : d\} \quad (3)$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ t.c. $a_i < b_i \ \forall i = 1 : d$
Operatore di controllo

$$B : U \to L^2(I, H^{-1}(\Omega)), \ u \mapsto \left(t \mapsto \sum_{i=1}^{d} u_i(t) g_i \right) \quad (4)$$

con funzionali noti $g_i \in H^{-1}(\Omega)$

Discretizzazione temporale

Partizione di $[0, T)$ in sottointervalli $I_m = [t_{m-1}, t_m)$, dove
$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_M = T \longrightarrow$ griglia primale
Seconda partizione di $[0, T)$ in intervalli $I_m^* = [t_{m-1}^*, t_m^*)$, con
$0 = t_0^* < t_1^* < \cdots < t_M^* = T$ e
$t_m^* = \frac{t_{m-1}+t_m}{2}$ per $m = 1, \ldots, M \longrightarrow$ griglia duale
Ambientazione funzionale

$$P_k := \left\{ v \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \middle| v|_{I_m} \in \mathcal{P}_1(I_m, H_0^1(\Omega)) \right\},$$
$$P_k^* := \left\{ v \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \middle| v|_{I_m^*} \in \mathcal{P}_1(I_m^*, H_0^1(\Omega)) \right\},$$
$$Y_k := \left\{ v : [0, T] \to H_0^1(\Omega) \middle| v|_{I_m} \in \mathcal{P}_0(I_m, H_0^1(\Omega)) \right\}.$$

Operatori di interpolazione

1. $\mathcal{P}_{Y_k} : L^2(I, H^1_0(\Omega)) \to Y_k$

$$\mathcal{P}_{Y_k} v|_{I_m} := \frac{1}{k_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m} v dt \text{ for } m = 1, \dots, M, \text{ e } \mathcal{P}_{Y_k} v(T) := 0$$

2. $\Pi_{Y_k} : C([0,T], H^1_0(\Omega)) \to Y_k$

$$\Pi_{Y_k} v|_{I_m} := v(t^*_m) \quad \text{per } m = 1, \dots, M, \quad \Pi_{Y_k} v(T) := v(T)$$

3. $\pi_{P^*_k} : C([0,T], H^1_0(\Omega)) \cup Y_k \to P^*_k$

$$\pi_{P^*_k} v|_{I^*_1 \cup I^*_2} := v(t^*_1) + \frac{t - t^*_1}{t^*_2 - t^*_1}(v(t^*_2) - v(t^*_1)),$$

$$\pi_{P^*_k} v|_{I^*_m} := v(t^*_{m-1}) + \frac{t - t^*_{m-1}}{t^*_m - t^*_{m-1}}(v(t^*_m) - v(t^*_{m-1})),$$

$$\pi_{P^*_k} v|_{I^*_M \cup I^*_{M+1}} := v(t^*_{M-1}) + \frac{t - t^*_{M-1}}{t^*_M - t^*_{M-1}}(v(t^*_M) - v(t^*_{M-1})).$$

Operatori di interpolazione

1. $\mathcal{P}_{Y_k} : L^2(I, H_0^1(\Omega)) \to Y_k$

$$\mathcal{P}_{Y_k} v|_{I_m} := \frac{1}{k_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} v dt \text{ for } m = 1, \ldots, M, \text{ e } \mathcal{P}_{Y_k} v(T) := 0$$

2. $\Pi_{Y_k} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \to Y_k$

$$\Pi_{Y_k} v|_{I_m} := v(t_m^*) \quad \text{per } m = 1, \ldots, M, \quad \Pi_{Y_k} v(T) := v(T)$$

3. $\pi_{P_k^*} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cup Y_k \to P_k^*$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_1^* \cup I_2^*} := v(t_1^*) + \frac{t - t_1^*}{t_2^* - t_1^*}(v(t_2^*) - v(t_1^*)),$$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_m^*} := v(t_{m-1}^*) + \frac{t - t_{m-1}^*}{t_m^* - t_{m-1}^*}(v(t_m^*) - v(t_{m-1}^*)),$$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_M^* \cup I_{M+1}^*} := v(t_{M-1}^*) + \frac{t - t_{M-1}^*}{t_M^* - t_{M-1}^*}(v(t_M^*) - v(t_{M-1}^*)).$$

Operatori di interpolazione

1. $\mathcal{P}_{Y_k} : L^2(I, H_0^1(\Omega)) \to Y_k$
$$\mathcal{P}_{Y_k} v|_{I_m} := \frac{1}{k_m}\int_{t_{m-1}}^{t_m} v dt \text{ for } m = 1, \dots, M, \text{ e } \mathcal{P}_{Y_k} v(T) := 0$$
2. $\Pi_{Y_k} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \to Y_k$
$$\Pi_{Y_k} v|_{I_m} := v(t_m^*) \quad \text{per } m = 1, \dots, M, \quad \Pi_{Y_k} v(T) := v(T)$$
3. $\pi_{P_k^*} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cup Y_k \to P_k^*$
$$\pi_{P_k^*} v|_{I_1^* \cup I_2^*} := v(t_1^*) + \frac{t - t_1^*}{t_2^* - t_1^*}(v(t_2^*) - v(t_1^*)),$$
$$\pi_{P_k^*} v|_{I_m^*} := v(t_{m-1}^*) + \frac{t - t_{m-1}^*}{t_m^* - t_{m-1}^*}(v(t_m^*) - v(t_{m-1}^*)),$$
$$\pi_{P_k^*} v|_{I_M^* \cup I_{M+1}^*} := v(t_{M-1}^*) + \frac{t - t_{M-1}^*}{t_M^* - t_{M-1}^*}(v(t_M^*) - v(t_{M-1}^*)).$$

Equazione di stato

Formulazione debole trovare $y_k \in Y_k$ tale che

$$\int_0^T - \langle \partial_t v(t), y(t) \rangle_{H^{-1} H_0^1} \, dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) dt + (y(T), v(T))_{L^2}$$
$$= \int_0^T \langle f(t), v_k(t) \rangle_{H^{-1} H_0^1} \, dt + (\kappa, v_k(0))_{L^2} \ \forall v_k \in P_k. \quad (5)$$

$\Rightarrow$ variante di CN con passo di Rannacher. Lo schema è consistente, stabile, convergente.

Analisi errore

$y_k \in Y_k \Rightarrow$ ordine $\mathcal{O}(k)$, ma $\pi_{P_k^*} y_k$ converge con ordine due

Lo studio dell'equazione aggiunta è analogo, solo con spazi di soluzione e test scambiati. Lo schema risultante è una variante di CN.

Discretizzazione variazionale

Problema di controllo ottimo discretizzato

$$\begin{aligned} \min_{y_k \in Y_k, u \in U_{ad}} \quad & J(y_k, u) = \frac{1}{2}\|y_k - y_d\|^2_{L^2(I, L^2(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_U \\ \text{s.t.} \quad & y_k = S_k(Bu, y_0) \end{aligned} \qquad (\mathbb{P}_k)$$

dove S_k è la discretizzazione di S tramite lo schema di PG.

Osservazioni

1. Il metodo si basa sulla discretizzazione dei soli spazi di stato e aggiunto, utilizzando implicitamente le condizioni di ottimalità del primo ordine per la discretizzazione del controllo.
2. Il metodo permette di disaccoppiare l'approssimazione dell'*active set* dalla scelta della griglia temporale
3. Il metodo è ben posto e convergente con ordine 2 rispetto al controllo u.

Discretizzazione variazionale

Problema di controllo ottimo discretizzato

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{y_k \in Y_k, u \in U_{ad}} & J(y_k, u) = \dfrac{1}{2}\|y_k - y_d\|^2_{L^2(I, L^2(\Omega))} + \dfrac{\alpha}{2}\|u\|^2_U \\ \text{s.t.} & y_k = S_k(Bu, y_0) \end{array} \qquad (\mathbb{P}_k)$$

dove S_k è la discretizzazione di S tramite lo schema di PG.

Osservazioni

1. Il metodo si basa sulla discretizzazione dei soli spazi di stato e aggiunto, utilizzando implicitamente le condizioni di ottimalità del primo ordine per la discretizzazione del controllo.
2. Il metodo permette di disaccoppiare l'approssimazione dell'*active set* dalla scelta della griglia temporale
3. Il metodo è ben posto e convergente con ordine 2 rispetto al controllo u.

Discretizzazione variazionale

Problema di controllo ottimo discretizzato

$$\begin{aligned} \min_{y_k \in Y_k, u \in U_{ad}} \quad & J(y_k, u) = \frac{1}{2}\|y_k - y_d\|^2_{L^2(I, L^2(\Omega))} + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2_U \\ \text{s.t.} \quad & y_k = S_k(Bu, y_0) \end{aligned} \qquad (\mathbb{P}_k)$$

dove S_k è la discretizzazione di S tramite lo schema di PG.

Osservazioni

1. Il metodo si basa sulla discretizzazione dei soli spazi di stato e aggiunto, utilizzando implicitamente le condizioni di ottimalità del primo ordine per la discretizzazione del controllo.
2. Il metodo permette di disaccoppiare l'approssimazione dell'*active set* dalla scelta della griglia temporale
3. Il metodo è ben posto e convergente con ordine 2 rispetto al controllo u.

Punto fisso

La CNES di ottimalità del problema discreto è sempre $\bar{u}_k = P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\alpha}B'\bar{p}_k\right)$. Le iterazioni di punto fisso si applicano proprio a quest'equazione $\Rightarrow$

Algoritmo

1. Inizializzare $u_h^0 \in U_{ad}$, $n := 0$.
2. Ripetere fino a convergenza
    1. calcolare Bu_h^n,
    2. calcolare $y_h^n = S_h(y_0, Bu_h^n)$,
    3. calcolare $p_h^n = S_h^*(y_h^n - y_d)$,
    4. calcolare $u_h^{n+1} = P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\alpha}B'p_h^n\right)$,
    5. porre n=n+1.

Criterio di arresto: $\|B'(p_h^{n+1} - p_h^n)\|_{L^\infty(\Omega\times I)} < \epsilon$

Non converge per α piccoli

Semi-Newton

Metodo di Newton con minimizzazione monodimensionale (Armijo)
$\Rightarrow$ formulazione del problema tramite Lagrangiana primale e duale

$$\phi(w) = -\inf_{u,y \in L^2(I,L^2)} \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2}\|y - y_d\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2 + \chi_{U_{ad}}(u) - (w, y - S_h u)}_{\mathcal{L}(u,y,w)} \Bigg) \tag{6}$$

che diventa quindi un caso di minimizzazione non vincolata $\min_{w \in L^2(I,L^2(\Omega))} \phi(w)$.

Semi-Newton II

Lemma

La funzione $\phi : L^2(I, L^2(\Omega)) \to \mathbb{R}$ è fortemente convessa e Frechet-differenziabile con gradiente lipschitziano

$$\nabla\phi(w) = y(w) - S_h u(w), \tag{7}$$

dove $y_h(w) = w + y_d$ e $u(w) = P_{U_{ad}}(-\frac{1}{\alpha} S_h^* w)$ sono gli unici punti di minimo della lagrangiana $\mathcal{L}(u, y, w)$ per ogni $w \in L^2(I, L^2(\Omega))$ data.

Ma allora calcolato l'Hessiano generalizzato di ϕ, ogni iterazione di Newton risolve

$$\left(I + \frac{1}{\alpha} S_h \mathbb{1}_{S_h^* w} S_h^*\right)\delta w = -(w + y_d) + S_h P U_{ad}\left(-\frac{1}{\alpha} S_h^* w\right). \tag{8}$$

Semi-Newton III

Algoritmo

1. Inizializzare $w^0 \in L^2(I, L^2(\Omega))$, $\beta \in (0,1)$, $k = 0$,
2. Ripetere fino a convergenza
   1. Risolvere l'equazione (8) per δw^k tramite CG,
   2. Porre $\lambda := 1$,
   3. Finché risulta vera la condizione $\phi(w^k + \lambda\delta w^k) > \phi(w) + \frac{1}{3}\lambda(\nabla\phi(w^k), \delta w^k)_{L^2(I,L^2(\Omega))}$, porre $\lambda := \beta\lambda$,
   4. Porre $w^{k+1} = w^k + \lambda\delta w^k$
   5. Porre $k := k + 1$.

criterio di arresto: $\|\nabla\phi(w^k)\| \leq t_0$

L'algoritmo converge e il criterio di arresto è plausibile.

Significato della simbologia

χU_{ad}

Indica la funzione caratteristica dell'insieme U_{ad} nel senso dell'analisi convessa, ovvero

$$\chi U_{ad} = \begin{cases} 0, & \text{su } U_{ad}, \\ \infty & \text{su } L^2(I, L^2(\Omega)) \setminus U_{ad}. \end{cases} \tag{9}$$

$\mathbb{1}_{p_h(v)}$

Introdotto l'*inactive set* della funzione p_h come l'insieme $\mathcal{I}(p_h) = \left\{ \omega \in \Omega \times [0, T] \;\middle|\; \left(-\frac{1}{\alpha} p_h(v) \right)(\omega) \in (a(\omega), b(\omega)) \right\}$ e $\mathbb{1}_{\mathcal{I}(p_h)}$ come la funzione indicatrice di tale insieme con $\mathbb{1}_{p_h(v)}$ si denota l'endomorfismo auto-aggiunto in $L^2(I, L^2(\Omega))$ dato dalla moltiplicazione puntuale con $\mathbb{1}_{\mathcal{I}(p_h)}$.

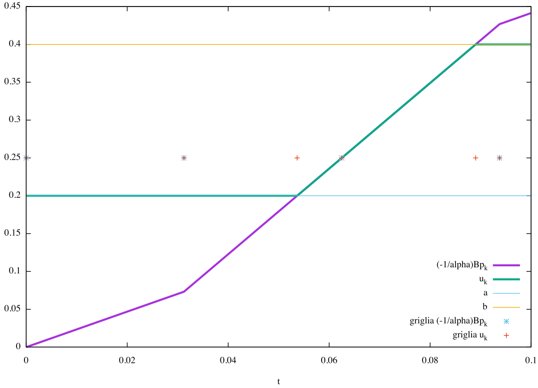
Implementazione

Gli strumenti di sviluppo utilizzati sono **Freefem++** e **GitHub**.

i parametri e le funzioni che definiscono/risolvono il problema di controllo, aggiunto e di stato sono contenuti in appositi script.

Lo script che permette l'esecuzione del programma è denominato main.edp

Per il calcolo di ogni norma e prodotto scalare il metodo numerico di integrazione in tempo utilizzato è il metodo di Cavalieri Simpson.



L'operazione di proiezione $P_{U_{ab}}$ non garantisce che i nodi della griglia temporale utilizzata corrispondano a i punti di non derivabilità della funzione proiettata

Implementazione: Schema Problema di Stato

Considerato la matrice di Stiffness ed il temine noto al passo k:

$$A(y_k, y_{test}) = \int_\Omega \frac{y_k y_{test}}{\Delta t}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_1 \bigtriangledown y_k \bigtriangledown y_{test}\, d\Omega$$

$$\begin{aligned} b(y_{test}) = & \int_\Omega \frac{y_{k-1} y_{test}}{\Delta t}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_2 \bigtriangledown y_{k-1} \bigtriangledown y_{test}\, d\Omega \\ & + \int_\Omega \gamma_3 (f_k + u_k) y_{test}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_4 (f_{k-1} + u_{k-1}) y_{test}\, d\Omega \end{aligned}$$

Schema	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
EI	0.5	0	0	0.5
CN	0.5	0.5	0	1
EA	0	0.5	0.5	0

Implementazione: Forzante del Problema Aggiunto

Anche per il problema aggiunto è stato utilizzato un metodo di Crank-Nicolson con la matrice di Stiffness ed il termine noto al passo i:

$$A(p_i, p_{test}) = \int_\Omega \frac{p_i p_{test}}{\Delta t}\, d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2} \bigtriangledown p_i \bigtriangledown p_{test}\, d\Omega$$

$$\begin{aligned} b(p_{test}) = \int_\Omega \frac{p_{i+1} p_{test}}{\Delta t}\, d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{2} \bigtriangledown p_{i+1} \bigtriangledown p_{test}\, d\Omega \\ + \int_\Omega \frac{1}{2} h_i p_{test}\, d\Omega + \int_\Omega \frac{1}{2} h_{i+1} p_{test}\, d\Omega \end{aligned}$$

dove:

$$h_i = y_{k\,i} - y_d(t_i), \quad h_{i+1} = y_{k\,i} - y_d(t_{i+1})$$

Implementazione Semi-Newton

Per risolvere l'equazione:

$$(I + \frac{1}{\alpha} S_h \mathbb{1}_{S_h^* w} S_h^*) \delta w = -(w + y_d) + S_h P U_{ad} \left(-\frac{1}{\alpha} S_h^* w \right).$$

è stato implementato il metodo del gradiente coniugato.

La funzione `adjCG(real[int,int] &xx)` implementa l'operatore S_h^*;

Funzioni per l'operatore di stato

Per la soluzione dell'operatore di stato son state implementate due diverse funzioni. `stateCG(real[int] &xx)` risolve l'operatore S_h applicato a $P_{U_{ad}}(xx)$ con termine noto al passo k:

$$b(y_{test}) = \int_\Omega \frac{y_k y_{test}}{\Delta t}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_2 \nabla y_{k-1} \nabla y_{test}\, d\Omega$$

$$+ \int_\Omega \gamma_3 (f_k + P_{U_{ad}}(xx_k)) y_{test}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_4 (f_{k-1} + P_{U_{ad}}(xx_{k-1})) y_{test}\, d\Omega$$

`mat1(real[int] &xx, real[int] &ww)` risolve l'operatore $S_h \mathbb{1}_{S_h^* w}$ considerato con termine noto al passo k:

$$b(y_{test}) = \int_\Omega \frac{y_k y_{test}}{\Delta t}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_2 \nabla y_{k-1} \nabla y_{test}\, d\Omega$$

$$+ \int_\Omega \gamma_3 \chi_{U_{ad}} xx_k y_{test}\, d\Omega + \int_\Omega \gamma_4 \chi_{U_{ad}} xx_{k-1} y_{test}\, d\Omega$$

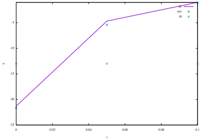
Test Case 01 ed 02: dati del problema

Per entrambi i test case considera $\Omega = (0,1)^2$. Viene utilizzata una mesh spaziale uniforme con 22801 nodi.
Processo di raffinamento temporale al livello `1`

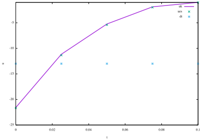
$$Nk = (2^1 + 1)$$

Parametro	TestCase01	TestCase02
I	(0,0.1)	(0,0.5)
U_{ad}	a=-25 ed b =-1	a=0.2 ed b=0.4
α	π^{-4}	1

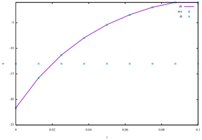
Test Case 01 Punto fisso $\bar{u}$ e u_k



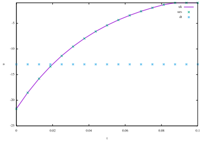
(a) l=1



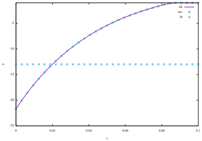
(b) l=2



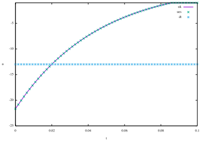
(c) l=3



(d) l=4



(e) l=5



(f) l=6

Test Case 01 Punto fisso

Tabella: Punto fisso per Test case 01: errori e EOC

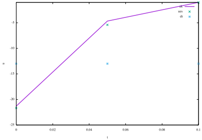
l	$\|\bar{u} - u_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{y} - y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	EOC_u	EOC_y
1	0.31667	0.981285	–	–
2	0.0835064	0.496296	2.60937	1.33449
3	0.0209608	0.248822	2.35165	1.17464
4	0.00500916	0.124494	2.25065	1.08882
5	0.00109219	0.0622586	2.29624	1.04473
6	0.000497644	0.0311327	1.15957	1.02236

Test Case 01 Punto fisso

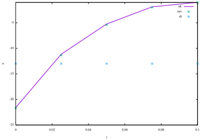
Tabella: Punto fisso per Test case 01: errori e EOC

1	$\|\bar{y} - \pi_{P_k^*} y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{p} - p_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$EOC_{\pi y}$	EOC_p
1	0.520894	0.00660747	–	–
2	0.15134	0.00173155	2.41965	2.6216
3	0.0393476	0.00043334	2.29181	2.35673
4	0.00970087	0.000103613	2.20164	2.24982
5	0.00221619	0.000022824	2.2259	2.28078
6	0.000432024	0.000010724	2.41203	1.11429

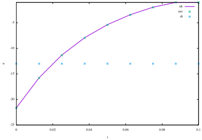
Test Case 01 Semi-Newton



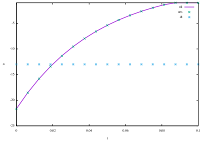
(g) l=1



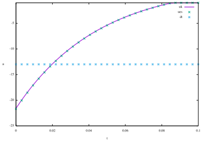
(h) l=2



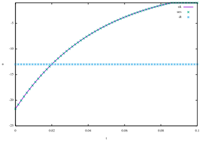
(i) l=3



(j) l=4



(k) l=5



(l) l=6

Test Case 01 Semi-Newton

Tabella: Newton per Test case 01: errori e EOC

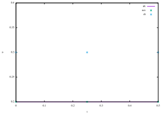
l	$\|\bar{u} - u_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{y} - y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	EOC_u	EOC_y
1	0.316669	0.981285	—	—
2	0.0835064	0.496296	2.60937	1.33449
3	0.0209612	0.248822	2.35161	1.17464
4	0.00500971	0.124494	2.25051	1.08882
5	0.00109312	0.0622586	2.29512	1.04473
6	0.000497833	0.0311327	1.16028	1.02236

Test Case 01 Semi-Newton

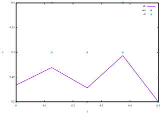
Tabella: Newton per Test case 01: errori e EOC

1	$\|\bar{y} - \pi_{P_k^*} y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{p} - p_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$EOC_{\pi y}$	EOC_p
1	0.520894	0.00660747	–	–
2	0.15134	0.00173155	2.41965	2.6216
3	0.0393476	0.00043334	2.29181	2.35672
4	0.00970089	0.000103614	2.20164	2.24981
5	0.00221621	0.0000228246	2.22589	2.28078
6	0.000432023	0.0000107235	2.41204	1.11436

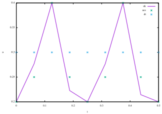
Test Case 02 Punto fisso $\bar{u}$ e u_k



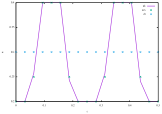
(m) l=1



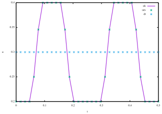
(n) l=2



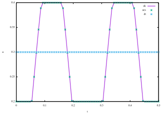
(o) l=3



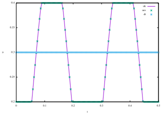
(p) l=4



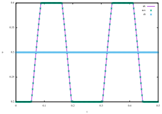
(q) l=5



(r) l=6



(s) l=7



(t) l=8

Figura:

Test Case 02 Punto fisso

Tabella: Punto fisso per Test case II: errori e EOC

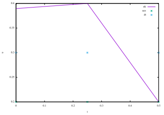
1	$\|\bar{u} - u_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{y} - y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	EOC_u	EOC_y
1	0.11547	0.577323	–	–
2	0.049267	0.463462	1.66741	0.430045
3	0.0229418	0.136413	1.30029	2.08074
4	0.0036817	0.0594452	2.87676	1.30605
5	0.000908002	0.0286805	2.1105	1.09882
6	0.000229782	0.0142118	2.02708	1.0358
7	0.0000652737	0.0070899	1.83615	1.01455
8	0.0000267529	0.003543	1.29406	1.00643

Test Case 02 Punto fisso

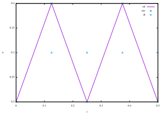
Tabella: Punto fisso per Test case II: errori e EOC

1	$\lVert \bar{y} - \pi_{P_k^*} y_{kh} \rVert_{L^2(L^2)}$	$\lVert \bar{p} - p_{kh} \rVert_{L^2(L^2)}$	$EOC_{\pi y}$	EOC_p
1	0.408219	0.57735	—	—
2	0.428289	0.181146	0.0939571	2.26916
3	0.108057	0.0846821	2.34293	1.29366
4	0.0223162	0.0224906	2.48014	2.08464
5	0.00443799	0.00571816	2.43498	2.06462
6	0.000929298	0.00145281	2.3065	2.02122
7	0.000203934	0.000385864	2.21269	1.93423
8	0.0000465654	0.000130114	2.14277	1.57715

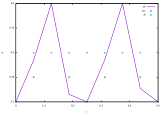
Test Case 02 Semi-Newton



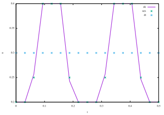
(a) l=1



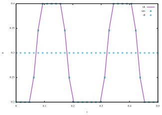
(b) l=2



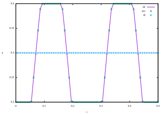
(c) l=3



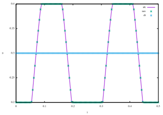
(d) l=4



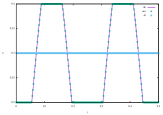
(e) l=5



(f) l=6



(g) l=7



(h) l=8

Test Case 02 Semi-Newton

Tabella: Newton per Test case II: errori e EOC

l	$\|\bar{u} - u_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{y} - y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	EOC_u	EOC_y
1	0.115495	0.579976	—	—
2	0.076157	0.462076	0.815213	0.444884
3	0.0127336	0.136402	3.04286	2.07579
4	0.00222359	0.0594457	2.74395	1.30591
5	0.000541362	0.0286803	2.12996	1.09884
6	0.000138463	0.0142117	2.01139	1.03579
7	0.0000349821	0.0070899	2.00717	1.01455
8	0.0000178053	0.003543	0.979797	1.00643

Test Case 02 Semi-Newton

Tabella: Newton per Test case II: errori e EOC

1	$\|\bar{y} - \pi_{P_k^*} y_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$\|\bar{p} - p_{kh}\|_{L^2(L^2)}$	$EOC_{\pi y}$	EOC_p
1	0.410488	0.57748	—	—
2	0.427682	0.181205	0.080328	2.26897
3	0.108041	0.0846824	2.34076	1.29421
4	0.0223131	0.0224907	2.48014	2.08463
5	0.00443687	0.00571824	2.43516	2.06461
6	0.0009289	0.00145285	2.30675	2.02121
7	0.000203852	0.000385873	2.21265	1.93423
8	0.0000465544	0.000130118	2.14254	1.57714

Numero di iterazioni

Algoritmo	TestCase01	TestCase02
Punto Fisso	5-6	2
Semi Newton	2	2-3

Criteri di tolleranza aggiuntivi per Semi-Newton utilizzati nel TestCase 02

$$\|\nabla\phi(w^k)\| - \|\nabla\phi(w^{k+1})\| > t_0 \quad \|\nabla\phi(w^k) - \nabla\phi(w^{k+1})\| > t_0$$

dove t0 è una tolleranza fissata

Entrambi gli algoritmi implementati confermano i risultati teorici per l'ordine di convergenza dell'errore nei problemi di controllo ottimo parabolico se viene utilizzato uno schema di Petrov Galerkin. Per il primo test case, nel quale α è minore, il metodo di Newton converge più velocemente che quello di punto fisso.

Possibili lavori futuri:

1. analisi analitica di semi-Newton nel caso per i problemi di controllo ottimo parabolici
2. scrittura/lettura su/da file per le soluzioni dei problemi di stato ed aggiunto

Grazie Per L'Attenzione

APPENDICE

Test Case 01 dati del problema

funzione	TestCase01
$g_1(x_1, x_2)$	$sin(\pi x_1)sin(\pi x_2)$
$g_0(t, x_1, x_2)$	$-\pi^2 w_a(t, x_1, x_2) - BP_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{4\alpha}(e^{a\pi^2 t} - e^{a\pi^2 T})\right)$
$w_a(t, x_1, x_2)$	$e^{a\pi^2 t} sin(\pi x_1)sin(\pi x_2),\ a \in \mathbb{R}$
$y_d(t, x_1, x_2)$	$\frac{a^2-5}{2+a}\pi^2 w_a(t, x_1, x_2) + 2\pi^2 w_a(T, x_1, x_2)$
$y_0(x_1, x_2)$	$\frac{-1}{2+a}\pi^2 w_a(0, x_1, x_2)$
$\overline{u}(t, x_1, x_2)$	$P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{4\alpha}(e^{a\pi^2 t} - e^{a\pi^2 T}\right)$
$\overline{y}(t, x_1, x_2)$	$\frac{-1}{2+a}\pi^2 w_a(0, x_1, x_2)$
$\overline{p}(t, x_1, x_2)$	$w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2)$

Test Case 02 dati del problema

funzione	**TestCase02**
$g_1(x_1, x_2)$	$sin(\pi x_1) sin(\pi x_2)$
$g_0(t, x_1, x_2)$	$g_1(x_1, x_2) 2\pi \left(-\frac{a}{T} sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \pi cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right)\right) - B\overline{u}$
$w_a(t, x_1, x_2)$	$cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) \cdot g_1(t, x_1, x_2)$
$y_d(t, x_1, x_2)$	$g_1(cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right)(1 - 2\pi^2) +$ $- \frac{2\pi a}{T} sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + 2\pi^2 cos(2\pi a))$
$y_0(x_1, x_2)$	$g_1(x_1, x_2)$
$\overline{u}(t, x_1, x_2)$	$P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{4\alpha} cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \frac{1}{4\alpha}\right)$
$\overline{y}(t, x_1, x_2)$	$\frac{-1}{2+a} \pi^2 w_a(0, x_1, x_2)$
$\overline{p}(t, x_1, x_2)$	$w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2)$