

# POLITECNICO DI MILANO

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE  
Corso di Laurea in Ingegneria Matematica

PROGETTO PER IL CORSO DI ANALISI NUMERICA PER LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

**Titolo**

sottotitolo

Candidati:

**Claudia Bonomi matr. 804378**

**Edoardo Arbib matr.**

Relatori:

**Simona Perotto**

**Ilario Mazzieri**

## **Abstract**

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analisi del problema continuo</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Analisi del problema discreto</b>	<b>7</b>
3.1	Semidiscretizzazione temporale . . . . .	7
3.1.1	Caratteristiche dello schema numerico . . . . .	7
3.1.2	Semidiscretizzazione del problema di stato . . . . .	8
3.1.3	Semidiscretizzazione del problema aggiunto . . . . .	9
3.2	Discretizzazione variazionale . . . . .	10
3.2.1	Il caso generale . . . . .	10
3.2.2	Il caso in oggetto . . . . .	11
3.3	Metodo di punto fisso . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Descrizione Implementazione</b>	<b>15</b>
<b>5</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>17</b>
5.1	Test Case 01 . . . . .	17
5.2	Test Case 02 . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>21</b>
	<b>Bibliography</b>	<b>23</b>



# Chapter 1

## Introduzione

Il lavoro qui presentato tratta lo studio di un problema di controllo ottimo parabolico attraverso l'analisi proposta da [NMM15].

Per l'equazione di stato in tempo viene utilizzato uno schema Petrov-Galerkin con un approccio costante a tratti per la funzione di stato ed uno lineare a tratti per la funzione test. Questa scelta degli spazi funzionali ha una ripercussione sullo schema di discretizzazione temporale sia del problema di stato che del problema aggiunto. Per entrambi, infatti, sarà utilizzata una variante dello schema di Crank-Nicolson consistente con la teoria di Rannacher descritta in [Ran84]. In [NMM15] viene provato analiticamente che questa scelta permette di raggiungere un ordine due di convergenza temporale sia per l'errore di controllo che per l'errore dello stato proiettato sulla griglia duale. Per la discretizzazione spaziale si è fatto riferimento all'analisi proposta in [MV11].

Attraverso l'utilizzo del software **FreeFem++** l'approccio teorico proposto precedentemente è stato implementato. I risultati numerici ottenuti confermano quelli teorici e sono consistenti con quelli presentati in [NMM15]. Per il calcolo dell'errore di controllo è stato utilizzato inizialmente il metodo di Cavalieri-Simpson. In seguito è stato calcolato un secondo algoritmo meno soggetto agli errori di approssimazione, con esso si trova un ordine di convergenza maggiore di 2 per l'errore di controllo.

Il report è strutturato nel seguente modo. Nel Capitolo 2 viene analizzata la soluzione teorica del problema di controllo ottimo ed introdotti i risultati di regolarità per l'equazione di stato e per l'equazione aggiunta. Nel Capitolo 3 viene analizzata la regolarità del problema discontinuo e introdotte la semi-discretizzazione temporale e la discretizzazione spaziale. Nel Capitolo 4 sono contenute le informazioni riguardanti l'implementazione dell'algoritmo. Nel Capitolo 5 sono raccolti i risultati numerici. Nel Capitolo 6 sono contenute le conclusioni e spunti per lavori futuri.



## Chapter 2

# Analisi del problema continuo

In questo studio vengono considerati un dominio poligonale convesso  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  dove  $n = 2, 3$ , il cui bordo viene indicato con  $\partial\Omega$ , ed un intervallo temporale  $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ ,  $T < \infty$ . Per l'analisi seguente viene introdotta la terna hilbertiana  $(H_1^0(\Omega), L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega))$ . Il problema di controllo ottimo lineare quadratico analizzato è definito come:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, u \in U_{ad}} \quad & J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(I, L^2(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_U^2 \\ \text{s.t.} \quad & y = S(Bu, y_0) \end{aligned} \quad (\mathbb{P})$$

dove  $y_d$  è una funzione scelta  $\in L^2(I, L^2(\Omega))$ .

### Problema di Stato

Il problema di stato è definito in forma forte e in forma debole rispettivamente in 2.1 e 2.2.

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= f && \text{in } I \times \Omega \\ y &= 0 && \text{in } I \times \Omega \\ y(0) &= \kappa && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

$y \in W(I)$  con  $y(0) = \kappa$  e con  $(f, \kappa) \in L^2(I, H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$  tale che:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t y(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_1^0(\Omega)} dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) dt \\ = \\ \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_1^0(\Omega)} dt \quad \forall v \in L^2(I, H_1^0(\Omega)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove  $y(t) \in H_1^0(\Omega)$  e la forma bilineare  $a(y(t), v(t)) : H_1^0(\Omega) \times H_1^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  è definita come:

$$a(y, v) = \int_{\Omega} \nabla y(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (2.3)$$

Lo spazio dello stato  $Y$  è definito come:

$$Y = W(I) = \{v \in L^2(I, H_1^0(\Omega)), \partial_t v \in L^2(I, H^{-1}(\Omega))\} \quad (2.4)$$

ed in particolare vale che:

$$Y \hookrightarrow C([0, T], L^2(\Omega)) \quad (2.5)$$

l'operatore associato alla soluzione debole di 2.4 è

$$S : L^2(I, H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\Omega) \rightarrow Y, (f, \kappa) \mapsto y = S(f, \kappa) \quad (2.6)$$

Applicando l'integrazione per parti sul 2.2 si ricava che:

$$A(y, v) = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) H_1^0(\Omega)} dt + (\kappa, v(0))_{L^2(\Omega)} \quad (2.7)$$

dove  $y \in Y$  è la soluzione di 2.2,  $v \in Y$  è la funzione test e la forma bilineare  $A(y, v) : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  è definita come:

$$A(y, v) = \int_0^T -\langle \partial_t v(t), y(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) H_1^0(\Omega)} dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) dt + (y(T), v(T))_{L^2(\Omega)} \quad (2.8)$$

Per i risultati di stabilità, la consistenza e la convergenza di 2.1, noti in letteratura, si definisce  $y$  come soluzione unica di 2.7. L'equazione 2.8 è necessaria per la definire lo schema di approssimazione numerica per l'equazione di stato come descritto nel Capitolo 3.

### Spazio del Controllo

Nello scenario descritto precedentemente la scelta per lo spazio di controllo non è unica. Seguendo le linee guida di [NMM15] questo viene definito come  $U = L^2(I, \mathbb{R}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Presi dunque  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  t.c.  $a_i < b_i \forall i = 1 : d$  la regione ammissibile, costituita da un insieme chiuso e convesso, è definita come:

$$U_{ad} = \{u \in U | a_i \leq u_i(t) \leq b_i \forall i = 1 : d\} \quad (2.9)$$

in questo caso, introdotti i funzionali  $g_i \in H^{-1}(\Omega)$  l'operatore di controllo  $B$ , lineare e limitato, è definito da 2.10.

$$B : U \rightarrow L^2(I, H^{-1}(\Omega)), u \mapsto \left( t \mapsto \sum_{i=1}^d u_i(t) g_i \right) \quad (2.10)$$

Si nota che l'operatore di controllo  $B$  può essere sostituito con l'operatore lineare affine  $\tilde{B}$  definito come:

$$\tilde{B} : U \rightarrow L^2(I, H^{-1}(\Omega)), u \mapsto g_0 + Bu \quad (2.11)$$

Affinchè non si perda la validità dei risultati che verranno esposti in seguito si suppone  $g_0 \in L^2(I, L^2(\Omega))$  ed  $g_0(0) \in H_1^0(\Omega)$ . È quindi possibile introdurre l'operatore di proiezione ortogonale

$$P_{U_{ad}} : L^2(I, \mathbb{R}^d) \rightarrow U_{ad} \quad (2.12)$$



### Problema Aggiunto

Il problema  $\mathbb{P}$  ammette un'unica soluzione  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$  dove  $\bar{y} = S(B\bar{u}, y_0)$ . Intodotti ora la variabile aggiunta  $(\bar{p}, \bar{q}) \in L^2(I, H_1^0(\Omega) \times L^2(\Omega))$ , soluzione unica di 2.15, e l'operatore aggiunto  $B' : L^2(I, H_1^0(\Omega)) \rightarrow L^2(I, \mathbb{R}^d)$  definito da:

$$B'q(t) = (\langle g_1, q(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)H_1^0(\Omega)}, \dots, \langle g_d, q(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)H_1^0(\Omega)})^T \quad (2.13)$$

Il controllo ottimo, utilizzando l'operatore di proiezione ortogonale 2.12, è caratterizzato dalla seguente condizione necessaria e sufficiente di prim'ordine:

$$\bar{u} = P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{\alpha} B' \bar{p} \right) \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t \tilde{y}(t), \bar{p}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)H_1^0(\Omega)} dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \bar{p}(t)) dt + (\tilde{y}(0), \bar{q})_{L^2(\Omega)} \\ = \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y}(t, x) - y_d(t, x)) \tilde{y}(t, x) dx dt \quad \forall \tilde{y} \in Y \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si nota che per  $v \in L^2(I, \mathbb{R}^d)$  vale che:

$$P_{U_{ad}}(v)(t) = (P_{[a_i, b_i]}(v_i(t)))_{i=1}^d \quad (2.16)$$

considerati  $a, b, z \in \mathbb{R}$   $P_{[a, b]}(z) = \max(a, \min(z, b))$ . Poichè  $\bar{y} - y_d \in L^2(I, L^2(\Omega))$  in 2.15, si ha  $\bar{p} \in Y$  ed integrando per parti con funzione di  $Y$  si trova che:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\partial_t \bar{p}(t), \tilde{y}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega)H_1^0(\Omega)} dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \bar{p}(t)) dt \\ + (\tilde{y}(0), \bar{q})_{L^2(\Omega)} + (\tilde{y}(T), \bar{p}(T))_{L^2(\Omega)} - (\tilde{y}(0), \bar{p}(0))_{L^2(\Omega)} \\ = \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\bar{y}(t, x) - y_d(t, x)) \tilde{y}(t, x) dx dt \quad \forall \tilde{y} \in Y$$

Il problema 2.17 può essere riscritto in forma forte come:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{p} - \Delta \bar{p} &= h && \text{in } I \times \Omega \\ \bar{p} &= 0 && \text{in } \times \partial \Omega \\ \bar{p}(T) &&& \text{su } \Omega \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove  $h = \bar{y} - y_d$  e  $\bar{q} = \bar{p}(0)$ .

### Regolarità

Per lo studio della regolarità di 2.1 e 2.16 è importante assumere che:

- i)  $y_d \in H^1(I, L^2(\Omega))$  e  $y_d(T) \in H_1^0(\Omega)$  ed  $g_i \in H_1^0(\Omega) \forall i = 1 : d$  e  $y_0 \in H_1^0(\Omega)$  con  $\Delta y_0 \in H_1^0(\Omega)$ .

Per le dimostrazioni dei risultati esposti in questa sezione si rimanda a [NMM15] o [MV11]



## Chapter 3

# Analisi del problema discreto

### 3.1 Semidiscretizzazione temporale

#### 3.1.1 Caratteristiche dello schema numerico

La sezione inizia introducendo la griglia e gli spazi funzionali utilizzati per la semidiscretizzazione temporale dei problemi di stato e aggiunto.

Si partizioni l'intervallo  $[0, T)$  in sottointervalli  $I_m = [t_{m-1}, t_m)$ , dove  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_M = T$  sono punti appartenenti al segmento  $[0, T)$ . Inoltre si affianchi a tale griglia una seconda partizione dell'intervallo  $[0, T)$ , fondamentale per ottenere i risultati di convergenza dei problemi semidiscretizzati, detta *griglia duale*; essa è composta dagli intervalli  $I_m^* = [t_{m-1}^*, t_m^*)$ , con  $0 = t_0^* < t_1^* < \dots < t_M^* = T$  e  $t_m^* = \frac{t_{m-1} + t_m}{2}$  per  $m = 1, \dots, M$ . Riassumendo si può contare su due suddivisioni dell'intervallo  $[0, T)$  tali che  $[0, T) = \bigcup_{m=1}^{M+1} I_m$  e  $[0, T) = \bigcup_{m=1}^{M+1} I_m^*$ .

Chiaramente la griglia primale avrà un parametro che ne descrive "l'accuratezza" che per noi sarà

$$k = \max_{1 \leq m \leq M} k_m, \quad k_m = t_m - t_{m-1} \quad \text{per } m = 1, \dots, M.$$

Per quanto riguarda l'ambientazione funzionale definiamo

$$\begin{aligned} P_k &:= \left\{ v \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \mid v|_{I_m} \in \mathcal{P}_1(I_m, H_0^1(\Omega)) \right\} \hookrightarrow W(I), \\ P_k^* &:= \left\{ v \in C([0, T], H_0^1(\Omega)) \mid v|_{I_m^*} \in \mathcal{P}_1(I_m^*, H_0^1(\Omega)) \right\} \hookrightarrow W(I), \\ Y_k &:= \left\{ v : [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega) \mid v|_{I_m} \in \mathcal{P}_0(I_m, H_0^1(\Omega)) \right\} \hookrightarrow W(I). \end{aligned}$$

Qui,  $\mathcal{P}_i(J, H_0^1(\Omega))$ ,  $J \subset \bar{I}$ ,  $i \in \{0, 1\}$ , denota l'insieme dei polinomi in tempo al più di grado  $i$  sull'intervallo  $J$  a valori in  $H_0^1(\Omega)$ .

Nei risultati che si menzioneranno in seguito si farà spesso uso dei seguenti operatori di interpolazione:

$$1. \mathcal{P}_{Y_k} : L^2(I, H_0^1(\Omega)) \rightarrow Y_k$$

$$\mathcal{P}_{Y_k} v|_{I_m} := \frac{1}{k_m} \int_{t_{m-1}}^{t_m} v dt \quad \text{for } m = 1, \dots, M, \quad \text{e } \mathcal{P}_{Y_k} v(T) := 0$$

$$2. \Pi_{Y_k} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \rightarrow Y_k$$

$$\Pi_{Y_k} v|_{I_m} := v(t_m^*) \quad \text{per } m = 1, \dots, M, \quad \Pi_{Y_k} v(T) := v(T)$$

$$3. \pi_{P_k^*} : C([0, T], H_0^1(\Omega)) \cup Y_k \rightarrow P_k^*$$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_1^* \cup I_2^*} := v(t_1^*) + \frac{t - t_1^*}{t_2^* - t_1^*} (v(t_2^*) - v(t_1^*)),$$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_m^*} := v(t_{m-1}^*) + \frac{t - t_{m-1}^*}{t_m^* - t_{m-1}^*} (v(t_m^*) - v(t_{m-1}^*)), \quad \text{per } m = 3, \dots, M-1,$$

$$\pi_{P_k^*} v|_{I_M^* \cup I_{M+1}^*} := v(t_{M-1}^*) + \frac{t - t_{M-1}^*}{t_M^* - t_{M-1}^*} (v(t_M^*) - v(t_{M-1}^*)).$$

### 3.1.2 Semidiscretizzazione del problema di stato

Uno degli elementi di novità del lavoro DHV è dato proprio dallo schema adottato per la discretizzazione in tempo dell'equazione di stato, che è totalmente variazionale di tipo Petrov-Galerkin. Verranno infatti utilizzati uno spazio di funzioni costanti a tratti per la soluzione e continue lineari a tratti per le test.

Supponendo di estendere la forma bilineare  $A$  di [NMM15] in una mappa  $A : W(I) \cup Y_k \times \rightarrow \mathbb{R}$ , si tratta dunque di risolvere il seguente problema:

dati  $(f, \kappa) \in L^2(I, H^{-1}(\Omega)) \times L^2(\Omega)$ , trovare  $y_k \in Y_k$  tale che

$$A(y_k, v_k) = \int_0^T \langle f(t), v_k(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) H_0^1(\Omega)} dt + (\kappa, v_k(0))_{L^2(\Omega)} \quad \forall v_k \in P_k. \quad (3.1)$$

Data la scelta dello spazio  $Y_k$  per la soluzione, essa può essere espressa come

$$y_k = \alpha_{M+1} \chi_{\{T\}} + \sum_{i=1}^M \alpha_i \chi_{I_i}, \quad \alpha_i \in H_0^1(\Omega) \quad \text{per } i = 1, \dots, M+1,$$

e attraverso facili calcoli si arriva alla formulazione del problema (3.1) in termini delle funzioni  $\alpha_i$ :

1. Trovare  $\alpha_1$  tale che

$$\frac{1}{t_1 - t_0} (\alpha_1 - \kappa, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} a(\alpha_1, g) = \frac{1}{2} (f(0), g)_{L^2(\Omega)} \quad \forall g \in H_0^1(\Omega), \quad (3.2)$$

2. Trovare  $\alpha_i, i = 2, \dots, M$  tale che

$$\frac{1}{t_i - t_{i-1}} (\alpha_i - \alpha_{i-1}, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} a(\alpha_i + \alpha_{i+1}, g) = \frac{1}{2} (f(t_{i-1}), g)_{L^2(\Omega)} \quad \forall g \in H_0^1(\Omega), \quad (3.3)$$

3. Trovare  $\alpha_{M+1}$  tale che

$$\frac{1}{t_M - t_{M-1}}(\alpha_{M+1} - \alpha_M, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(\alpha_M, g) = \frac{1}{2}(f(t_M), g)_{L^2(\Omega)} \quad \forall g \in H_0^1(\Omega), \quad (3.4)$$

Alla luce di questa seconda formulazione si evince che lo schema di Petrov-Galerkin introdotto è equivalente ad una variante del metodo di Crank-Nicolson con primo e ultimo passo temporale di Rannacher, e sempre dalla seconda formulazione risulta chiaro che il problema semidiscretizzato ammette unica soluzione  $y_k \in Y_k$ .

A questo punto vengono enunciati senza dimostrazione alcuni risultati tratti da [NMM15] che garantiscono la stabilità e convergenza del metodo di Petrov-Galerkin. Per la stabilità:

**Lemma 1.** *Sia  $y_k \in Y_k$  la soluzione di (3.1) con  $f \in L^2(I, L^2(\Omega))$  e  $\kappa \in L^2(\Omega)$  assegnati. Allora esiste una costante  $C > 0$  indipendente dal parametro di griglia  $k$  tale che*

$$\|y_k\|_I \leq C(\|f\|_I + \|\kappa\|_{L^2(\Omega)})$$

Passando ora all'analisi di convergenza è normale aspettarsi un'approssimazione di ordine  $\mathcal{O}(k)$ , poiché la  $y_k$  è costante a tratti in tempo; tuttavia la proiezione di  $y_k$  tramite l'operatore  $\pi_{P_k^*}$  permette di ottenere stime di ordine  $\mathcal{O}(k^2)$ . Infatti,

**Lemma 2.** *Siano  $f \in H^1(I, L^2(\Omega))$ ,  $f(0) \in H_0^1(\Omega)$  e  $\kappa \in H_0^1(\Omega)$  con  $\Delta\kappa \in H_0^1(\Omega)$  e siano  $y, y_k$  le soluzioni dei problemi 2.1 e (3.1) con dati  $(f, \kappa)$ . Allora vale*

$$\|\pi_{P_k^*} y_k - y\|_I \leq Ck^2(\|\partial_t^2 y\|_I + \|\partial_t^2 \Delta y\|_I)$$

### 3.1.3 Semidiscretizzazione del problema aggiunto

Anche il problema aggiunto viene affrontato con uno schema in tempo di tipo Petrov-Galerkin, dove però vengono scambiati gli spazi funzionali delle soluzioni e delle test. Poiché tale scelta conduce ad un metodo di Crank-Nicolson all'indietro, la sua analisi è standard. Si riportano qui di seguito la formulazione e risultati principali.

Problema aggiunto semidiscretizzato in tempo:

Dato  $h \in L^2(I, H^{-1}(\Omega))$  trovare  $p_k \in P_k$  tale che

$$A(\tilde{y}, p_k) = \int_0^T \langle h(t), \tilde{y}(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega) H_0^1(\Omega)} dt \quad \forall \tilde{y} \in Y_k \quad (3.5)$$

Se si scrive  $p_k$  nella forma

$$p_k(t) = \sum_{i=0}^M \beta_i b_i(t)$$

con coefficienti  $\beta_i \in H_0^1(\Omega)$  e  $b_i \in C([0, T])$ ,  $b_i(t_j) = \delta_{ij}$  per  $i, j = 0, \dots, M$ , l'equazione (3.5) diventa equivalente a

1.  $\beta_M = 0$ ,
2. trovare  $\beta_i, i = 0, \dots, M-1$  tale che

$$\frac{1}{t_{i+1} - t_i}(\beta_i - \beta_{i+1}, g)_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}a(\beta_i + \beta_{i+1}, g) = \frac{1}{2}(h(t_i) + h(t_{i+1}), g)_{L^2(\Omega)} \quad \forall g \in H_0^1(\Omega) \quad (3.6)$$

Stabilità e convergenza:

**Lemma 3.** *Sia  $p_k \in P_k$  la soluzione di (3.5) con  $h \in L^2(I, L^2(\Omega))$ . Allora esiste una costante  $C > 0$  indipendente da  $k$  tale che*

$$\|p_k\|_{H^1(I, L^2(\Omega))} + \|p_k(0)\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|h\|_I.$$

**Lemma 4.** *Siano  $p, p_k$  le soluzioni di 2.18 e di (3.5) rispettivamente, con  $h \in L^2(I, L^2(\Omega))$ . Allora vale*

$$\|p_k - p\|_I \leq Ck^2(\|\partial_t^2 p\|_I + \|\partial_t \Delta p\|_I).$$

## 3.2 Discretizzazione variazionale

Per approssimare il problema di controllo ottimo [P] viene applicato un metodo detto di discretizzazione variazionale, introdotto da M. Hinze in [Hin05]. Nella prossima sezione viene brevemente presentato questo metodo nel caso generale di problemi di controllo quadratici, dopodiché lo si vedrà in azione per la risoluzione di [P].

### 3.2.1 Il caso generale

Si consideri il seguente problema di controllo ottimo quadratico

$$\min_{(y,u) \in Y \times U} J(y, u) \text{ s.t. } y = Su \text{ and } u \in U_{ad}, \quad (3.7)$$

dove  $U = U^*$  denota lo spazio di Hilbert del controllo,  $Y$  lo spazio di Banach dello stato,  $S : U \rightarrow Y \subseteq U$  l'operatore lineare e limitato tra controllo e stato, e  $U_{ad} \subseteq U$  l'insieme chiuso e convesso dei controlli ammissibili. Inoltre per  $\alpha > 0$  sia il funzionale  $J$  dato da

$$J(y, u) = \frac{1}{2}\|y - z\|_Z^2 + \frac{\alpha}{2}\|u\|_U^2, \quad (3.8)$$

dove  $Z = Z^*$  denota uno spazio di Hilbert,  $z \in Z$  e  $Y \hookrightarrow Z \hookrightarrow Y^*$ .

La presente discretizzazione di (3.7) si basa sulla discretizzazione dei soli spazi di stato e aggiunto, utilizzando implicitamente le condizioni di ottimalità del primo ordine per la discretizzazione del controllo. Tra i vantaggi di tale approccio si consideri, nel caso si utilizzino schemi ad elementi finiti, il disaccoppiamento dell'approssimazione dell'*active set* dai nodi della griglia per gli EF.

Per definire il controllo discreto sia  $S_h : U \rightarrow Y_h \subset Y \subseteq U$  l'operatore lineare limitato tra il controllo e lo stato discretizzato, dove  $Y_h \subseteq Y$  è uno sottospazio finito-dimensionale equipaggiato con la norma di  $Y$ .

**Definizione 1.**  $u_h^* \in U_{ad}$  è detto controllo discreto ottimale  $\iff$

$$(\hat{J}'_h(u_h^*), v - u_h^*)_U \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}, \quad (3.9)$$

dove  $\hat{J}'_h(u) := J(S_h u, u)$ .

*Osservazione 1.* Nel caso di problemi di controllo quadratici vincolati (come per il presente lavoro) la disuguaglianza variazionale (3.9) è condizione di ottimalità necessaria e sufficiente di

$$u_h^* = \arg \min_{u \in U_{ad}} J(S_h u, u). \quad (3.10)$$

. Se esprimiamo la condizione di ottimalità (3.9) qualora  $U_{ad} = U$  appare chiaro come sia possibile realizzare uno schema numerico per risolvere un problema di ottimizzazione senza discretizzare lo spazio di controllo:

$$u_h^* = \frac{-1}{\alpha} S_h^* (S_h u_h^* - z), \quad (3.11)$$

Infatti, sebbene  $u_h^*$  sia in  $U$ , esso è implicitamente un oggetto discreto per via dell'operatore aggiunto discreto.

Ora si riporta senza dimostrazione il risultato principale legato alla discretizzazione variazionale, che poi sarà utile in seguito:

**Teorema 1.** *Se gli operatori  $S_h, S_h^*$  soddisfano le condizioni*

- $\|(S^* - S_h^*)z\|_U \leq Ch^2 \|z\|_Z$
- $\|(S^* S - S_h^* S_h)u^*\|_U \leq Ch^2 \|u^*\|_U$

*allora per  $h > 0$  sufficientemente piccolo la disuguaglianza variazionale (3.9) ammette un'unica soluzione  $u_h^* \in U_{ad}$  che soddisfa*

$$\|u^* - u_h^*\|_U \leq Ch^2 \{\|u^*\|_U + \|z\|_Z\}. \quad (3.12)$$

*Qui,  $u^* \in U_{ad}$  denota l'unica soluzione del problema (3.7).*

### 3.2.2 Il caso in oggetto

Ora si vuole applicare il metodo di discretizzazione variazionale al problema [RIF] nei confronti della variabile tempo, dove gli operatori  $S_h$  e  $S_h^*$  sono individuati dagli schemi di Petrov-Galerkin esposti nei capitoli precedenti.

Dunque, il problema (semi)discretizzato da considerare è

$$\min_{y_k \in Y_k, u \in U_{ad}} J(y_k, u) = \frac{1}{2} \|y_k - y_d\|_{L^2(I, L^2(\Omega))}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_U^2, \quad (3.13)$$

$$\text{s.t. } y_k = S_k(Bu, y_0), \quad (3.14)$$

dove  $S_k$  è l'operatore delle soluzioni associato a [RIF]. Grazie ai risultati della precedente sezione questo problema ammette un'unica soluzione  $(\bar{y}_k, \bar{u}_k) \in Y_k \times U_{ad}$ , con  $\bar{y}_k = S_k(B\bar{u}_k, y_0)$  e la condizione di ottimalità del primo ordine recita

$$\bar{u}_k = P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{\alpha} B' \bar{p}_k \right), \quad (3.15)$$

dove  $\bar{p}_k \in P_k$  denota la variabile aggiunta discreta, che è l'unica soluzione di [RIF] con  $h := \bar{y}_k - y_d$ . A partire dalla formulazione del problema (??) è possibile ottenere delle stime di convergenza che somigliano alla stima standard ottenuta per problemi con discretizzazione variazionale. Per completezza vengono trascritti qui di seguito tali risultati.

**Teorema 2.** *Siano  $\bar{u}$  e  $\bar{u}_k$  le soluzioni di [RIF] e di (3.13) rispettivamente. Allora*

$$\begin{aligned} \alpha \|\bar{u}_k - \bar{u}\|_I &\leq Ck^2 (\|\bar{u}\|_{H^1(I, \mathbb{R}^D)} + \|\bar{u}(0)\|_{\mathbb{R}^D} + \\ &\quad \|y_d\|_{H^1(I, L^2(\Omega))} + \|y_d(T)\|_{H^1(\Omega)} + \|y_0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta y_0\|_{H^1(\Omega)}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

è soddisfatta.

**Teorema 3.** *Siano  $\bar{u}$  e  $\bar{u}_k$  le soluzioni di [RIF] e (3.13) rispettivamente. Allora vale*

$$\begin{aligned} \|\bar{y} - \pi_{P_k^*} \bar{y}_k\|_I &\leq (|a|_I + \|\bar{u}\|_{H^1(I, \mathbb{R}^D)} + \|\bar{u}(0)\|_{\mathbb{R}^D} + \\ &\quad \|y_d\|_{H^1(I, L^2(\Omega))} + \|y_d(T)\|_{H^1(\Omega)} + \|y_0\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta y_0\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

### 3.3 Metodo di punto fisso

L'equazione (3.15) è incline ad essere risolta numericamente nonostante il controllo non sia discretizzato esplicitamente; nel presente lavoro vengono scelti schemi di punto fisso e Newton con damping (semi-Newton).

Per quanto riguarda il metodo di punto fisso, se si indica con  $S_h^*$  l'operatore di soluzione dell'equazione [RIF], l'algoritmo è il seguente:

**Algoritmo 1.** 1. Inizializzare  $u_h^0 \in U_{ad}$ ,  $n := 0$ .

2. Ripetere fino a convergenza

- (a) calcolare  $Bu_h^n$ ,
- (b) calcolare  $y_h^n = S_h(y_0, Bu_h^n)$ ,
- (c) calcolare  $p_h^n = S_h^*(y_h^n - y_d)$ ,
- (d) calcolare  $u_h^{n+1} = P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{\alpha} B' p_h^n \right)$ ,
- (e) porre  $n = n+1$ .



Come criterio di arresto è stato scelto

$$\|B'(p_h^{n+1} - p_h^n)\|_{L^\infty(\Omega \times I)} < \varepsilon, \quad (3.18)$$

con  $\varepsilon$  tolleranza prefissata.

Seguendo [RIF] il metodo di punto fisso per l'equazione (3.15) converge globalmente per  $\alpha > \|S_h\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))}^2$ , motivo per cui è stato implementato anche lo schema semi-Newton, che ha invece la pretesa di convergere globalmente per qualsiasi valore di  $\alpha$ .



## Chapter 4

# Descrizione Implementazione

In questo capitolo la struttura di base e le funzioni principali del codice sviluppato verranno descritte. Per l'implementazione del codice si è utilizzato il solver `FreeFem++`<sup>1</sup> ed il relativo linguaggio di programmazione.

### `FreeFem++`

`FreeFem++` è un software per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali. Ha il proprio linguaggio di scripting basato sul C++. Gli script permettono di risolvere sistemi non lineari di più variabili in un dominio 2D o 3D. `FreeFem++` è un software libero disponibile per i sistemi operativi *Linux*, *Solaris*, *OS X* and *MS Windows*.

### `GitHub`

`GitHub`<sup>2</sup> è un sistema di controllo versione utilizzabile direttamente da linea di comando, molto diffuso e utile per tenere traccia delle varie fasi di sviluppo del codice. `GitHub` gestisce in modo adeguato i contributi al codice provenienti da agenti esterni e permette la condivisione del codice.

Il codice del progetto è reperibile su `GitHub` ed è possibile scaricarlo e collaborare allo sviluppo clonando il codice dalla repository `GitHub`:

```
git clone https://github.com/ClaB90/Progetto_ANEDP
```

Nella cartella principale è contenuto anche un file `.gitignore`, in cui sono specificate le estensioni dei files e le sottocartelle che non devono essere visionati in una repository `GitHub`. In particolare non si è interessati ai files temporanei che vengono eventualmente generati dagli editor.

---

<sup>1</sup><http://www.freefem.org/>

<sup>2</sup><https://github.com/>



## Chapter 5

# Risultati numerici

In questo capitolo verranno esposti i risultati numerici ottenuti. I primi due esempi sono stati presi da [NMM15]. In entrambi questi esempi verrà considerato l'operatore lineare affine  $\tilde{B}$  2.11.

### 5.1 Test Case 01

#### Set-up

Il primo esempio considerato, in accordo con l'ipotesi i) introdotta in Chapter ??, Preso il dominio spazio-temporale  $\Omega \times I = (0, 1)^2 \times (0, 0.01)$  e  $d=1$ , si considera l'operatore di controllo lineare affine  $\tilde{B}$  che può essere completamente caratterizzato da:

$$\begin{aligned} g_1(t, x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ g_0(t, x_1, x_2) &= -\pi^2 w_a(t, x_1, x_2) - BP_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} (\exp(a\pi^2 t) - \exp(a\pi^2 T)) \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

dove

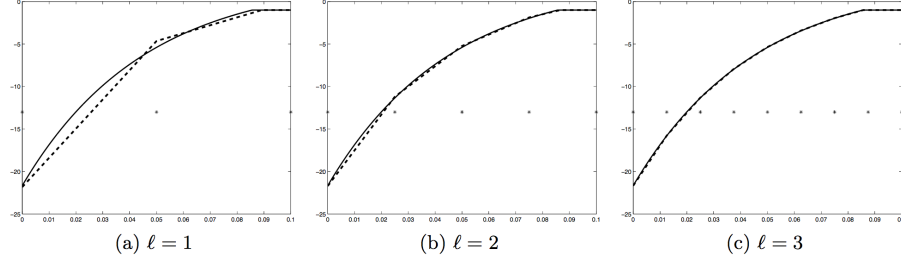
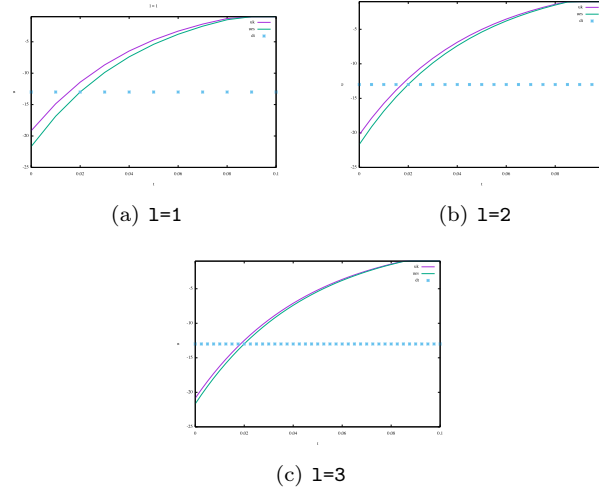
$$w_a(t, x_1, x_2) = \exp(a\pi^2 t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad a \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

In particolare vengono considerate le costanti  $a = -\sqrt{5}$  ed  $\alpha = \pi^{-4}$ . Come conseguenza di ciò si ha che 2.13 verrà riscritta, utilizzando l'aggiunto di B e non  $\tilde{B}$ , come:

$$(B'z)(t) = \int_{\Omega} z(t, x_1, x_2) g_1(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5.3)$$

Si definiscono ora:

$$\begin{aligned} y_a(t, x_1, x_2) &= \frac{a^2-5}{2+a} \pi^2 w_a(t, x_1, x_2) + 2\pi^2 w_a(T, x_1, x_2) \\ y_0(x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} \pi^2 w_a(0, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

Figure 5.1: Test Case 01  $\bar{u}$  e  $u_k$  risultati di [NMM15]Figure 5.2: Test Case 01  $\bar{u}$  e  $u_k$  risultati di questo studio

L'insieme ammissibile  $U_{ad}$  è limitato inferiormente da  $a_1 = -25$  e superiormente da  $b_1 = -1$ . Infine definiamo le soluzioni esatte per il problema di controllo ottimo  $\mathbb{P}$ :

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(t, x_1, x_2) &= P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} (\exp(a\pi^2 t) - \exp(a\pi^2 T)) \right) \\
 \bar{y}(t, x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} p i^2 w_a(0, x_1, x_2) \\
 \bar{p}(t, x_1, x_2) &= w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2)
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

### Risultati Numerici

## 5.2 Test Case 02

### Set-up

Il primo esempio considerato, in accordo con l'ipotesi i) introdotta in Chapter ??, Preso il dominio spazio-temporale  $\Omega \times I = (0, 1)^2 \times (0, 0.5)$  e  $d=1$ , si considera l'operatore di controllo lineare affine  $\tilde{B}$  che può essere completamente caratterizzato da:

$$g_1(t, x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \quad (5.6)$$

$$g_0(t, x_1, x_2) = g_1(t, x_1, x_2) 2\pi \left( -\frac{a}{T} \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \pi \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) \right) - B\bar{u}$$

In particolare vengono considerate le costanti  $a = -2$  ed  $\alpha = 1$ . Si definiscono ora:

$$\begin{aligned} y_d(t, x_1, x_2) &= g_1 \left( \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) (1 - 2\pi^2) - \frac{2\pi a}{T} \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + 2\pi^2 \cos(2\pi a) \right) \\ y_0(x_1, x_2) &= g_1(t, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

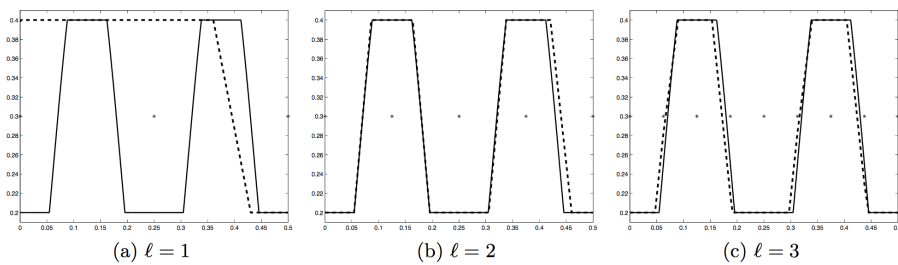
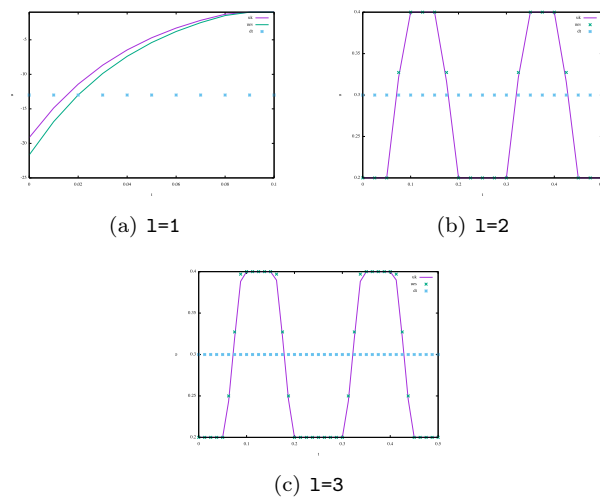
L'insieme ammissibile  $U_{ad}$  è limitato inferiormente da  $a_1 = 0.2$  e superiormente da  $b_1 = 0.4$ . Infine definiamo le soluzioni esatte per il problema di controllo ottimo  $\mathbb{P}$ :

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x_1, x_2) &= P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \frac{1}{4\alpha} \right) \\ \bar{y}(t, x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} p t^2 w_a(0, x_1, x_2) \\ \bar{p}(t, x_1, x_2) &= w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

dove

$$w_a(t, x_1, x_2) = \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) \cdot g_1(t, x_1, x_2) \quad (5.9)$$

### Risultati Numerici

Figure 5.3: Test Case 02  $\bar{u}$  e  $u_k$  risultati di [NMM15]Figure 5.4: Test Case 02  $\bar{u}$  e  $u_k$  risultati di questo studio



## Chapter 6

## Conclusioni



# Bibliography

- [MV11] D. Meidner and B. Vexler. “A priori error analysis of the Petrov Galerkin Crank Nicolson scheme for parabolic optimal control problems”. In: *SIAM J. Control and Optimization* 49(5) (2011), pp. 2183–2211.
- [NMM15] V. D. Nikolaus, H. Michael, and V. Morten. “Crank-Nicolson time stepping and variational discretization of control-constrained parabolic optimal control problems”. In: *SIAM J. Control and Optimization* 53(3) (March 6, 2015), pp. 1182–1198.
- [Qua13] A. Quarteroni. *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*. Springer Science and Business Media, 30 luglio 2013.
- [Ran84] R. Rannacher. “Finite Element Solution of Diffusion Problems with Irregular Data”. In: *Numerische Mathematik* 43 (1984), pp. 309–32.



# List of Figures

5.1	Test Case 01 $\bar{u}$ e $u_k$ risultati di [NMM15]	18
5.2	Test Case 01 $\bar{u}$ e $u_k$ risultati di questo studio	18
5.3	Test Case 02 $\bar{u}$ e $u_k$ risultati di [NMM15]	20
5.4	Test Case 02 $\bar{u}$ e $u_k$ risultati di questo studio	20



## List of Tables