

# POLITECNICO DI MILANO

---

FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE  
Corso di Laurea in Ingegneria Matematica

PROGETTO PER IL CORSO DI ANALISI NUMERICA PER LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

**Titolo**

sottotitolo

Candidati:

**Claudia Bonomi matr. 804378**

**Edoardo Arbib matr.**

Relatori:

**Simona Perotto**

**Ilario Mazzieri**

## **Abstract**

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Analisi del problema continuo</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Analisi del problema discreto</b>	<b>7</b>
3.1	Semi-discretizzazione temporale . . . . .	7
3.2	Discretizzazione spaziale-temporale . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Descrizione Implementazione</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Risultati numerici</b>	<b>11</b>
5.1	Test Case 01 . . . . .	11
5.2	Test Case 02 . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>15</b>



# Chapter 1

## Introduzione

Il lavoro qui presentato tratta lo studio di un problema di controllo ottimo parabolico attraverso l'analisi proposta da [MAIN].

Per l'equazione di stato in tempo viene utilizzato uno schema Petrov-Galerkin con un approccio costante a tratti per la funzione di stato ed uno lineare a tratti per la funzione test. Questa scelta degli spazi funzionali ha una ripercussione sullo schema di discretizzazione temporale sia del problema di stato che del problema aggiunto. Per entrambi, infatti, sarà utilizzata una variante dello schema di Crank-Nicolson consistente con la teoria di Rannacher descritta in [Ran84]. In [MAIN] viene provato analiticamente che questa scelta permette di raggiungere un ordine due di convergenza temporale sia per l'errore di controllo che per l'errore dello stato proiettato sulla griglia duale. Per la discretizzazione spaziale si è fatto riferimento all'analisi proposta in [MV11].

Attraverso l'utilizzo del software **FreeFem++** l'approccio teorico proposto precedentemente è stato implementato. I risultati numerici ottenuti confermano quelli teorici e sono consistenti con quelli presentati in [MAIN]. Per il calcolo dell'errore di controllo è stato utilizzato inizialmente il metodo di Cavalieri-Simpson. In seguito è stato calcolato un secondo algoritmo meno soggetto agli errori di approssimazione, con esso si trova un ordine di convergenza maggiore di 2 per l'errore di controllo.

Il report è strutturato nel seguente modo. Nel Capitolo 2 viene analizzata la soluzione teorica del problema di controllo ottimo ed introdotti i risultati di regolarità per l'equazione di stato e per l'equazione aggiunta. Nel Capitolo 3 viene analizzata la regolarità del problema discontinuo e introdotte la semi-discretizzazione temporale e la discretizzazione spaziale. Nel Capitolo 4 sono contenute le informazioni riguardanti l'implementazione dell'algoritmo. Nel Capitolo 5 sono raccolti i risultati numerici. Nel Capitolo 6 sono contenute le conclusioni e spunti per lavori futuri.



## Chapter 2

# Analisi del problema continuo

In questo studio vengono considerati un dominio poligonale convesso  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  dove  $n = 2, 3$ , il cui bordo viene indicato con  $\partial\Omega$ , ed un intervallo temporale  $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$ ,  $T < \infty$ . Per l'analisi seguente viene introdotta la terna hilbertiana  $(V, H, V^*)$  dove  $V = H^0_1(\Omega)$ ,  $H = L^2(\Omega)$  e  $V^* = H^{-1}(\Omega)$ . Il problema di controllo ottimo lineare quadratico analizzato è definito come:

$$\begin{aligned} \min_{y \in Y, u \in U_{ad}} \quad & J(y, u) = \frac{1}{2} \|y - y_d\|_{L^2(I, H)}^2 + \frac{\alpha}{2} \|u\|_U^2 \\ \text{s.t.} \quad & y = S(Bu, y_0) \end{aligned} \quad (\mathbb{P})$$

dove  $y_d$  è una funzione scelta  $\in L^2(I, H)$ .

### Problema di Stato

Il problema di stato è definito in forma forte e in forma debole rispettivamente in 2.1 e 2.2.

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= f && \text{in } I \times \Omega \\ y &= 0 && \text{in } I \times \Omega \\ y(0) &= \kappa && \text{in } \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

$y \in W(I)$  con  $y(0) = \kappa$  e con  $(f, \kappa) \in L^2(I, V^*) \times H$  tale che:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t y(t), v(t) \rangle_{V^* V} dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) dt \\ = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{V^* V} dt \quad \forall v \in L^2(I, V) \end{aligned} \quad (2.2)$$

dove  $y(t) \in V$  e la forma bilineare  $a(y(t), v(t)) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è definita come:

$$a(y, v) = \int_{\Omega} \nabla y(x) \cdot \nabla v(x) dx \quad (2.3)$$

Lo spazio dello stato  $Y$  è definito come:

$$Y = W(I) = \{v \in L^2(I, V), \partial_t v \in L^2(I, V^*)\} \quad (2.4)$$

ed in particolare vale che:

$$Y \hookrightarrow C([0, T], H) \quad (2.5)$$

l'operatore associato alla soluzione debole di 2.4 è  $S : L^2(I, V^*) \times H \rightarrow Y$ ,  $(f, \kappa) \mapsto y = S(f, \kappa)$

Applicando l'integrazione per parti sul 2.2 si ricava che:

$$A(y, v) = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{V^*V} dt + (\kappa, v(0))_H \quad (2.6)$$

dove  $y \in Y$  è la soluzione di 2.2,  $v \in Y$  è la funzione test e la forma bilineare  $A(y, v) : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  è definita come:

$$A(y, v) = \int_0^T -\langle \partial_t v(t), y(t) \rangle_{V^*V} dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) dt + (y(T), v(T))_H \quad (2.7)$$

Per i risultati di stabilità, la consistenza e la convergenza di 2.1, noti in letteratura, si definisce  $y$  come soluzione unica di 2.6. L'equazione 2.7 è necessaria per la definire lo schema di approssimazione numerica per l'equazione di stato come descritto nel Capitolo 3.

### Spazio del Controllo

Nello scenario descritto precedentemente la scelta per lo spazio di controllo non è unica. Seguendo le linee guida di [MAIN] questo viene definito come  $U = L^2(I, \mathbb{R}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Presi dunque  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$  t.c.  $a_i < b_i \forall i = 1 : d$  la regione ammissibile, costituita da un insieme chiuso e convesso, è definita come:

$$U_{ad} = \{u \in U \mid a_i \leq u_i(t) \leq b_i \forall i = 1 : d\} \quad (2.8)$$

in questo caso, introdotti i funzionali  $g_i \in V^*$  l'operatore di controllo  $B$ , lineare e limitato, è definito da 2.9.

$$B : U \rightarrow L^2(I, V^*), u \mapsto \left( t \mapsto \sum_{i=1}^d u_i(t) g_i \right) \quad (2.9)$$

Si nota che l'operatore di controllo  $B$  può essere sostituito con l'operatore lineare affine  $\tilde{B}$  definito come:

$$\tilde{B} : U \rightarrow L^2(I, V^*), u \mapsto g_0 + Bu \quad (2.10)$$

Affinchè non si perda la validità dei risultati che verranno esposti in seguito si suppone  $g_0 \in L^2(I, H)$  ed  $g_0(0) \in V$ . È quindi possibile introdurre l'operatore di proiezione ortogonale

$$P_{U_{ad}} : L^2(I, \mathbb{R}^d) \rightarrow U_{ad} \quad (2.11)$$



### Problema Aggiunto

Il problema  $\mathbb{P}$  ammette un'unica soluzione  $(\bar{y}, \bar{u}) \in Y \times U$  dove  $\bar{y} = S(B\bar{u}, y_0)$ . Intodotti ora la variabile aggiunta  $(\bar{p}, \bar{q}) \in L^2(I, V \times H)$ , soluzione unica di 2.14, e l'operatore aggiunto  $B' : L^2(I, V) \rightarrow L^2(I, \mathbb{R}^d)$  definito da:

$$B'q(t) = (\langle g_1, q(t) \rangle_{V^*V}, \dots, \langle g_d, q(t) \rangle_{V^*V})^T \quad (2.12)$$

Il controllo ottimo, utilizzando l'operatore di proiezione ortogonale 2.11, è caratterizzato dalla seguente condizione necessaria e sufficiente di prim ordine:

$$\bar{u} = P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{\alpha} B' \bar{p} \right) \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \partial_t \tilde{y}(t), \bar{p}(t) \rangle_{V^*V} dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \bar{p}(t)) dt + (\tilde{y}(0), \bar{q})_H \\ = \\ \int_0^T \int_\Omega (\bar{y}(t, x) - y_d(t, x)) \tilde{y}(t, x) dx dt \quad \forall \tilde{y} \in Y \end{aligned} \quad (2.14)$$

Si nota che per  $v \in L^2(I, \mathbb{R}^d)$  vale che:

$$P_{U_{ad}}(v)(t) = (P_{[a_i, b_i]}(v_i(t)))_{i=1}^d \quad (2.15)$$

dove considerati  $a, b, z \in \mathbb{R}$   $P_{[a, b]}(z) = \max(a, \min(z, b))$ . Poichè  $\bar{y} - y_d \in L^2(I, H)$  in 2.14, si ha  $\bar{p} \in Y$  ed integrando per parti con funzione di  $Y$  si trova che:

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle -\partial_t \bar{p}(t), \tilde{y}(t) \rangle_{V^*V} dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \bar{p}(t)) dt \\ + (\tilde{y}(0), \bar{q})_H + (\tilde{y}(T), \bar{p}(T))_H - (\tilde{y}(0), \bar{p}(0))_H \\ = \\ \int_0^T \int_\Omega (\bar{y}(t, x) - y_d(t, x)) \tilde{y}(t, x) dx dt \quad \forall \tilde{y} \in Y \end{aligned} \quad (2.16)$$

Il problema 2.16 può essere riscritto in forma forte come:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{p} - \Delta \bar{p} &= h && \text{in } I \times \Omega \\ \bar{p} &= 0 && \text{in } I \times \partial\Omega \\ \bar{p}(T) & && su \Omega \end{aligned} \quad (2.17)$$

dove  $h = \bar{y} - y_d$  e  $\bar{q} = \bar{p}(0)$ .

### Regolarità

Per lo studio della regolarità di 2.1 e 2.15 è importante assumere che:

- i)  $y_d \in H^1(I, H)$  e  $y_d(T) \in V$  ed  $g_i \in V \forall i = 1 : d$  e  $y_0 \in V$  con  $\Delta y_0 \in V$ .

Per le dimostrazioni dei risultati esposti in questa sezione si rimanda a [MAIN] o [MV11]



## Chapter 3

# Analisi del problema discreto

3.1 Semi-discretizzazione temporale

3.2 Discretizzazione spaziale-temporale



## Chapter 4

# Descrizione Implementazione



## Chapter 5

# Risultati numerici

In questo capitolo verranno esposti i risultati numerici ottenuti. I primi due esempi sono stati presi da [MAIN]. In entrambi questi esempi verrà considerato l'operatore lineare affine  $\tilde{B}$  2.10.

### 5.1 Test Case 01

#### Set-up

Il primo esempio considerato, in accordo con l'ipotesi i) introdotta in Chapter ??, Preso il dominio spazio-temporale  $\Omega \times I = (0, 1)^2 \times (0, 0.01)$  e  $d=1$ , si considera l'operatore di controllo lineare affine  $\tilde{B}$  che può essere completamente caratterizzato da:

$$g_1(t, x_1, x_2) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2)$$

$$g_0(t, x_1, x_2) = -\pi^2 w_a(t, x_1, x_2) - BP_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} (\exp(a\pi^2 t) - \exp(a\pi^2 T)) \right) \quad (5.1)$$

dove

$$w_a(t, x_1, x_2) = \exp(a\pi^2 t) \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2), \quad a \in \mathbb{R} \quad (5.2)$$

In particolare vengono considerate le costanti  $a = -\sqrt{5}$  ed  $\alpha = \pi^{-4}$ . Come conseguenza di ciò si ha che 2.12 verrà riscritta, utilizzando l'aggiunto di B e non  $\tilde{B}$ , come:

$$(B'z)(t) = \int_{\Omega} z(t, x_1, x_2) g_1(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5.3)$$

Si definiscono ora:

$$\begin{aligned} y_a(t, x_1, x_2) &= \frac{a^2-5}{2+a} \pi^2 w_a(t, x_1, x_2) + 2\pi^2 w_a(T, x_1, x_2) \\ y_0(x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} \pi^2 w_a(0, x_1, x_2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

L'insieme ammissibile  $U_{ad}$  è limitato inferiormente da  $a_1 = -25$  e superiormente da  $b_1 = -1$ . Infine definiamo le soluzioni esatte per il problema di controllo ottimo  $\mathbb{P}$ :

$$\begin{aligned}\bar{u}(t, x_1, x_2) &= P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} (\exp(a\pi^2 t) - \exp(a\pi^2 T)) \right) \\ \bar{y}(t, x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} p i^2 w_a(0, x_1, x_2) \\ \bar{p}(t, x_1, x_2) &= w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.5}$$

## Numerical Results

### 5.2 Test Case 02

#### Set-up

Il primo esempio considerato, in accordo con l'ipotesi i) introdotta in Chapter ???. Preso il dominio spazio-temporale  $\Omega \times I = (0, 1)^2 \times (0, 0.5)$  e  $d=1$ , si considera l'operatore di controllo lineare affine  $\tilde{B}$  che può essere completamente caratterizzato da:

$$\begin{aligned}g_1(t, x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \\ g_0(t, x_1, x_2) &= g_1(t, x_1, x_2) 2\pi \left( -\frac{a}{T} \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \pi \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) \right) - B\bar{u}\end{aligned}\tag{5.6}$$

In particolare vengono considerate le costanti  $a = -2$  ed  $\alpha = 1$ . Si definiscono ora:

$$\begin{aligned}y_d(t, x_1, x_2) &= g_1 \left( \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) (1 - 2\pi^2) - \frac{2\pi a}{T} \sin\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + 2\pi^2 \cos(2\pi a) \right) \\ y_0(x_1, x_2) &= g_1(t, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.7}$$

L'insieme ammissibile  $U_{ad}$  è limitato inferiormente da  $a_1 = 0.2$  e superiormente da  $b_1 = 0.4$ . Infine definiamo le soluzioni esatte per il problema di controllo ottimo  $\mathbb{P}$ :

$$\begin{aligned}\bar{u}(t, x_1, x_2) &= P_{U_{ad}} \left( -\frac{1}{4\alpha} \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) + \frac{1}{4\alpha} \right) \\ \bar{y}(t, x_1, x_2) &= \frac{-1}{2+a} p i^2 w_a(0, x_1, x_2) \\ \bar{p}(t, x_1, x_2) &= w_a(t, x_1, x_2) - w_a(T, x_1, x_2)\end{aligned}\tag{5.8}$$

dove

$$w_a(t, x_1, x_2) = \cos\left(\frac{t}{T} 2\pi a\right) \cdot g_1(t, x_1, x_2)\tag{5.9}$$



**Numerical Results**



## Chapter 6

## Conclusioni



## List of Figures



## List of Tables