POLITECNICO DI MILANO

FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
Corso di Laurea in Ingegneria Matematica

Progetto per il corso di Analisi Numerica per le Equazioni a Derivate Parziali

Titolooo

sottotitolo

Candidati:
Claudia Bonomi matr. 804378
Edoardo Arbib matr.

Relatori:
Simona Perotto
Ilario Mazzieri

Anno Accademico 2015-2016

Abstract

Contents

Chapter 1

Introduzione

Il lavoro qui presentato tratta lo studio di un problema di controllo ottimo parabolico attraverso l'analisi proposta da [NMM15].

Per l'equazione di stato in tempo viene utilizzato uno schema Petrov-Galerkin con un approccio costante a tratti per la funzione di stato ed uno lineare a tratti per la funzione test. Questa scelta degli spazi funzionali ha una ripercussione sullo schema di discretizzazione temporale sia del problema di stato che del problema aggiunto. Per entrambi, infatti, sarà utilizzata una variante dello schema di Crank-Nicolson consistente con la teoria di Rannacher descritta in [Ran84]. In [NMM15] viene provato analaticamente che questa scelta permette di raggiungere un ordine due di convergenza temporale sia per l'errore di controllo che per l'errore dello stato proiettato sulla griglia duale. Per la discretizzazione spaziale si è fatto riferimento all'analisi proposta in [MV11].

Attraverso l'utilizzo del software **FreeFem++** l'approccio teorico proposto precedentemente è stato implementato. I risultati numerici ottenuti confermano quelli teorici e sono consistenti con quelli presentati in [NMM15]. Per il calcolo dell'errore di controllo è stato utilizzato inizialmente il metodo di Cavalieri-Simpson. In seguito è stato calcolato un secondo algoritmo meno soggetto agli errori di approssimazione, con esso si trova unordine di convergenza maggiore di 2 per l'errore di controllo.

Il report è strutturato nel seguente modo. Nel Capitolo 2 viene analizzata la soluzione teorica del problema di controllo ottimo ed introdotti i risulati di regolarita per l'equazione di stato e per l'equazione aggiunta. Nel Capitolo 3 viene analizzata la regolità del problema discontinuo e introdotte la semi-discretizzazione temporale e la discretizzazione spaziale. Nel Capitolo 4 sono contenute le informazioni riguardanti l'implementazione dell'algoritmo. Nel Capitolo 5 sono raccolti i risultati numerici. Nel Capitolo 6 sono contenute le conclusioni e spunti per lavori futuri.

Chapter 2

Analisi del problema continuo

In questo studio vengono considerati un dominio poligonale convesso $\Omega \in \mathbb{R}^n$ dove $n = 2, 3$, il cui bordo viene indicato con $\partial\Omega$, ed un intervallo temporale $I = (0, T) \subset \mathbb{R}$, $T < \infty$. Per l'analisi seguente viene introdotta la terna hilbertiana (V,H,V^*) dove $V = H^0{}_1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ e $V^* = H^{-1}(\Omega)$. Il problema di controllo ottimo lineare quadratico analizzato è defnito come:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{y \in Y, u \in U_{ad}} & J(y,u) = \frac{1}{2}||y - y_d||^2{}_{L^2(I,H)} + \frac{\alpha}{2}||u||^2{}_U \\ \text{s.t.} & y = S(Bu, y_0) \end{array} \tag{$\mathbb{P}$}$$

dove y_d è una funzione scelta $\in L^2(I, H)$.

Problema di Stato

Il problema di stato è definito in forma forte e in forma debole rispettivamente in 2.1 e 2.2.

$$\begin{array}{cc} \partial_t y - \triangle y = f & \text{in I} \times \Omega \\ y = 0 & \text{in I} \times \Omega \\ y(0) = \kappa & \text{in } \Omega \end{array} \tag{2.1}$$

?$y \in W(I)$ con $y(0) = \kappa$ e con (f,κ) $\in L^2(I, V^*) \times H$
tale che:

$$\begin{array}{c} \int_0^T \langle \partial_t y(t), v(t) \rangle_{V^*V} \; dt + \int_0^T a(y(t), v(t))\, dt \\ = \\ \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{V^*V} \; dt \quad \forall v \in L^2(I, V) \end{array} \tag{2.2}$$

dove $y(t) e v(T) \in V$ e la forma bilineare $a(y(t), v(t)) : V \times V \to \mathbb{R}$ è definita come:

$$a(y, v) = \int_\Omega \triangledown y(x) \triangledown v(x)\, dx \tag{2.3}$$

Lo spazio dello stato Y è definito come:

$$Y = W(I) = \left\{ v \in L^2(I, V), \partial_t v \in L^2(I, V^*) \right\} \tag{2.4}$$

ed in particolare vale che:

$$Y \hookrightarrow C([0,T], H) \tag{2.5}$$

l'operatore associato alla soluzione debole di 2.4 è $S : L^2(I, V^*) \times H \to Y$, $(f, \kappa) \longmapsto y = S(f, \kappa)$

Applicando l'integrazione per parti sul 2.2 si ricava che:

$$A(y,v) = \int_0^T \langle f(t), v(t) \rangle_{V^*V} \, dt + (\kappa, v(0))_H \tag{2.6}$$

dove $y \in Y$ è la soluzione di 2.2, $v \in Y$ è la funzione test e la forma bilineare $A(y,v) : Y \times Y \to \mathbb{R}$ è definita come:

$$A(y,v) = \int_0^T - \langle \partial_t v(t), y(t) \rangle_{V^*V} \, dt + \int_0^T a(y(t), v(t)) \, dt + (y(T), v(T))_H \tag{2.7}$$

Per i risultati di stabilità, la consistenza e la convergenza di 2.1,noti in letteratura, si definisce y come soluzione unica di 2.6. L'equazione 2.7 è necessaria per la definire lo schema di approsimazione numerica per l'equazione di stato come descritto nel Capitolo 3.

Spazio del Controllo

Nello scenario descritto precedentemente la scelta per lo spazio di controllo non è unica. Seguendo le linee guida di [NMM15] questo viene difinito come $U = L^2(I, \mathbb{R}^d), d \in \mathbb{N}$. Presi dunque $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ t.c. $a_i < b_i \forall i = 1 : d$ la regione ammissibile, costituita da un insieme chiuso e convesso, è definita come:

$$U_{ad} = \{u \in U | a_i \leq u_i(t) \geq b_i \forall i = 1 : d\} \tag{2.8}$$

in questo caso, introdotti i funzionali $g_i \in V^*$ l'operatore di controllo B, lineare e limitato, è definito da 2.9.

$$B : U \to L^2(I, V^*), u \mapsto \left(t \mapsto \sum_{i=1}^{d} u_i(t) g_i \right) \tag{2.9}$$

È quindi possibile introdurre l'operatore di proiezione ortogonale

$$P_{U_{ad}} : L^2(I, \mathbb{R}^d) \to U_{ad} \tag{2.10}$$

Problema Aggiunto

Il problema $\mathbb{P}$ ammette un unica soluzione $(\overline{y}, \overline{u}) \in Y \times U$ dove $\overline{y} = S(B\overline{u}, y_0)$. Intodotti ora la variabile aggiunta $(\overline{p}, \overline{q}) \in L^2(I, V \times H)$, soluzione unica di 2.13, e l'operatore aggiunto $B' : L^2(I, V) \to L^2(I, \mathbb{R}^d)$ definito da:

$$b' q(t) = (\langle g_1, q(t) \rangle_{V*V}, ..., \langle g_d, q(t) \rangle_{V*V})^T \tag{2.11}$$

Il controllo ottimo, utilizzando l'operatore di proiezione ortogonale 2.10, è caratterizatto dalla seguente condizione necessaria e suffciente di prim ordine:

$$\overline{u} = P_{U_{ad}}\left(-\frac{1}{\alpha}B'\overline{p}\right) \tag{2.12}$$

$$\begin{gathered} \int_0^T \langle \partial_t \tilde{y}(t), \overline{p}(t)\rangle_{V^*V}\, dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \overline{p}(t))\, dt + (\tilde{y}(0), \overline{q})_H \\ = \\ \int_0^T \int_\Omega (\overline{y}(t,x) - y_d(t,x))\tilde{y}(t,x)\, dx\, dt \quad \forall \tilde{y} \in Y \end{gathered} \tag{2.13}$$

Si nota che per $v \in L^2(I, \mathbb{R}^d)$ vale che:

$$P_{U_{ad}}(v)(t) = (P_{[a_i,b_i]}(v_i(t)))_{i=1}{}^d \tag{2.14}$$

dove considerati $a, b, z \in \mathbb{R}$ $P_{[a,b]}(z) = max(a, min(z, b))$. Poichè $\overline{y} - y_d \in L^2(I, H)$ in 2.13, si ha $\overline{p} \in Y$ ed integrando per parti con funzione di Y si trova che:

$$\begin{gathered} \int_0^T \langle -\partial_t \overline{p}(t), \tilde{y}(t)\rangle_{V^*V}\, dt + \int_0^T a(\tilde{y}(t), \overline{p}(t))\, dt \\ +(\tilde{y}(0), \overline{q})_H + (\tilde{y}(T), \overline{p}(T))_H - (\tilde{y}(0), \overline{p}(0))_H \\ = \\ \int_0^T \int_\Omega (\overline{y}(t,x) - y_d(t,x))\tilde{y}(t,x)\, dx\, dt \quad \forall \tilde{y} \in Y \end{gathered} \tag{2.15}$$

Il problema 2.15 può essere riscritto in forma forte come:

$$\begin{array}{ll} \partial_t \overline{p} - \triangle \overline{p} = h & in I \times \Omega \\ \overline{p} = 0 & in I \times \partial\Omega \\ \overline{p}(T) & su \Omega \end{array} \tag{2.16}$$

dove $h = \overline{y} - y_d$ e $\overline{q} = \overline{p}(0)$.

Regolarità

Per lo studio della regolarità di 2.1 e 2.15 è importante assumere che:

i) $y_d \in H^1(I, H) e y_d(T) \in V$ ed $g_i \in V \forall i = 1 : d$ e $y_0 \in V$ con $\triangle y_0 \in V$.

Per le dimostrazioni dei risultati esposti in questa sezione si rimanda a [NMM15] o [MV11]

Chapter 3

Analisi del problema discreto

3.1 Semi-discretizzazione temporale

3.2 Discretizzazione spaziale-temporale

Chapter 4

Descrizione Implementazione

Chapter 5

Risultati numerici

5.1 Test Case 01

5.2 Test Case 02

Chapter 6

Conclusioni

Bibliography

[MV11] D. Meidner and B. Vexler. "A priori error analysis of the Petrov Galerkin Crank Nicolson scheme for parabolic optimal control problems". In: *SIAM J. Control and Optimization* 49(5) (2011), pp. 2183–2211.

[NMM15] V. D. Nikolaus, H. Michael, and V. Morten. "Crank-Nicolson time stepping and variational discretization of control-constrained parabolic optimal control problems". In: *SIAM J. Control and Optimization* 53(3) (March 6, 2015), pp. 1182–1198.

[Ran84] R. Rannacher. "Finite Element Solution of Diffusion Problems with Irregular Data". In: *Numerische Mathematik* 43 (1984), pp. 309–32.

List of Figures

List of Tables