Geometria Analítica e Vetores

Produto misto

de Vetores no Espaço

Docente: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Recordação - Produto escalar

Produto escalar

O produto escalar de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (no plano ou no espaço), denotado por $\vec{u}.\vec{v}$, é definido por

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

onde $\theta = \text{âng}(\vec{u}, \vec{v})$.

Recordação - Produto escalar

1. No plano, considere a base ortonormal $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm coordenadas, respectivamente, em relação à esta base:

$$\vec{u} = (x_1, y_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2),$$

então

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

2. No espaço, considere a base ortonormal $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm coordenadas, respectivamente, em relação à esta base:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

então

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Recordação - Produto escalar

Recordação

1. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

2. A norma ou o módulo (a medida/o comprimento) do vetor $\vec{u}$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}.$$

3. Considere E a base ortonormal e $\vec{u} = (x, y, z)_E$, então:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Recordação - Produto vetorial

Definição

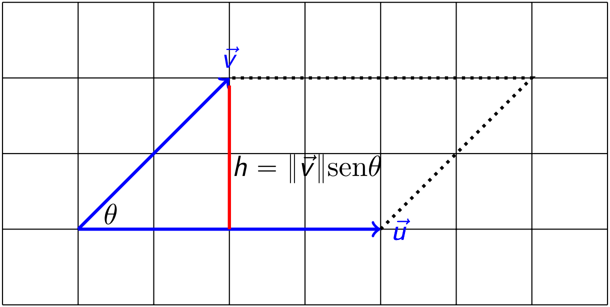
No espaço $\mathbb{R}^3$, dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, definimos $\vec{u} \wedge \vec{v}$, o *produto vetorial* de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, da seguinte maneira:

1. se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem *linearmente dependentes*,
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0},$$
2. se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem *linearmente independentes*, $\vec{u} \wedge \vec{v}$ será o vetor com as seguintes características:
   - a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é ortogonal a ambos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;
   - b) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}\}$ é uma base positiva;
   - c) A norma do vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é: $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\mathrm{sen}\theta$, onde $\theta = \text{âng}(\vec{u}, \vec{v})$.

Recordação - Produto vetorial

Recordação

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ estão LI, então o módulo do $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é a área do paralelogramo formado pelos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Recordação - Produto vetorial

Recordação

No espaço, considere a base ortonormal positiva $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm coordenadas, respectivamente, em relação à esta base:

$$\vec{u} = (x_1, x_2, x_3), \quad \vec{v} = (y_1, y_2, y_3)$$

então

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Produto misto

Produto misto

Definição

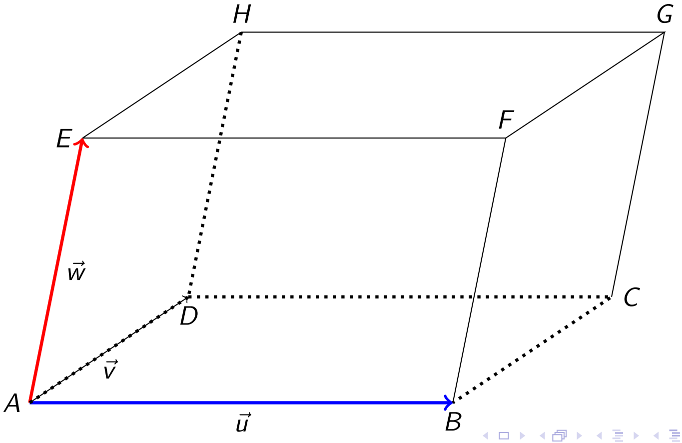
O *produto misto* de três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, é definido por

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}.$$

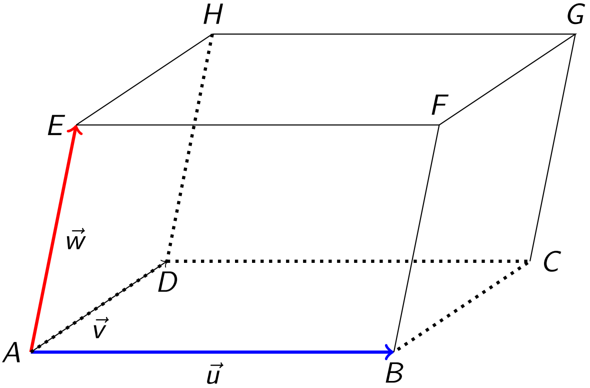
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

Observação

O valor absoluto do produto misto de três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é o volume do paralelepípedo formado pelos estes três vetores.



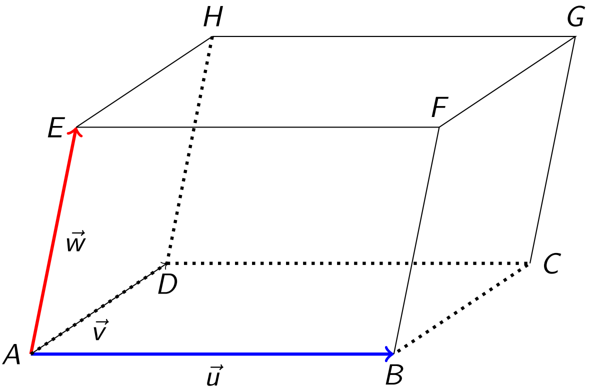
O valor absoluto do produto misto de três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é o volume do paralelepípedo formado pelos estes três vetores.



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta,$$

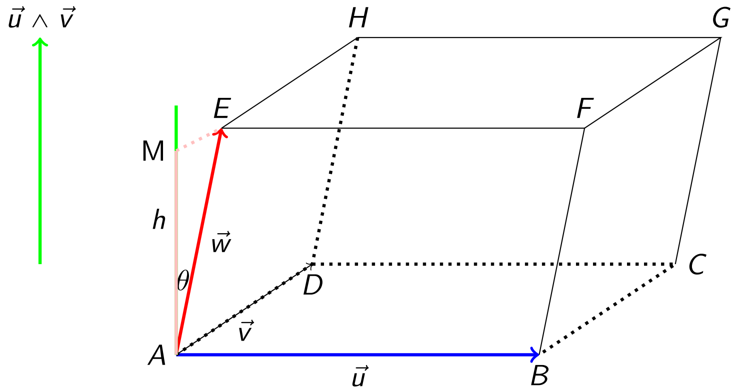
onde θ é o ângulo entre dois vetores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$.

O valor absoluto do produto misto de três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é o volume do paralelepípedo formado pelos estes três vetores.



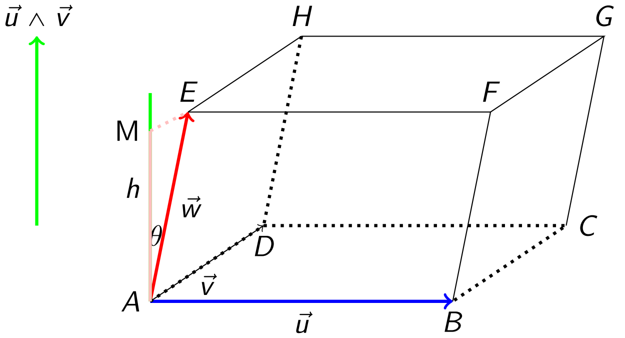
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta = S_{ABCD}.\|\vec{w}\|\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre dois vetores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$.



$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos\theta = S_{ABCD}.\|\vec{w}\|\cos\theta$$

onde θ é o ângulo entre dois vetores $\vec{u} \wedge \vec{v}$ e $\vec{w}$



$$
\begin{aligned}
[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w} \\
&= \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos\theta \\
&= S_{ABCD}.\|\vec{w}\| \cos\theta \\
&= S_{ABCD}.h = V_{ABCDEFGH}.
\end{aligned}
$$

Em geral, temos

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos\theta| = V_{ABCDEFGH}.$$

Produto misto:

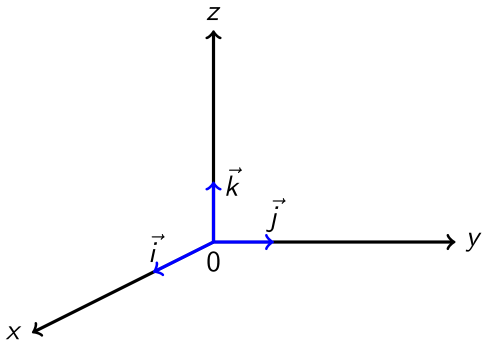
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}$$

O valor absoluto do produto misto de três vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ é o volume do paralelepípedo formado pelos estes três vetores.

Exemplo: Seja E uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sabendo que

$$\vec{u} = (2, 1, 4)_E, \quad \vec{v} = (2, -1, 3)_E, \qquad \vec{w} = (5, 4, 1)_E.$$

Exemplo: Qual é o volume do cubo determinado por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?



Proposição

Sendo $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ uma *base ortonormal positiva* relativamente à qual

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{w} = (x_3, y_2, z_3),$$

então

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo: Seja E uma base ortonormal positiva. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sabendo que

$$\vec{u} = (1, 3, 1)_E, \qquad \vec{v} = (2, 0, 4)_E, \qquad \vec{w} = (-2, 4, 3)_E.$$

Exemplo: Se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar:

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$
2. $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$
3. $[\vec{u} + 3\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]$
4. $[-2\vec{u} + 3\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]$

Propriedades: O produto misto é

1. trilinear, isto é:
$[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\alpha\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha\vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \beta\vec{v}_2, \vec{w}]$

$[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \beta\vec{w}_2]$.

2. alternado, isto é, permutado dois vetores entre si, ele muda de sinal:
$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$.

3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD.

4. $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = 0, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0.$

5. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ não se altera se a um fator se adiciona uma combinação linear dos outros dois, por exemplo:
$[\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Exemplo: Refazer o exemplo anterior: se $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determinar $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$, $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$, $[\vec{u} + 3\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]$ e $[-2\vec{u} + 3\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Propriedades

1. $[\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}] = [\alpha\vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w}] + [\beta\vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w}]$

   $[\vec{u}, \alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2, \vec{w}] = [\vec{u}, \alpha\vec{v}_1, \vec{w}] + [\vec{u}, \beta\vec{v}_2, \vec{w}]$

   $[\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1 + \beta\vec{w}_2] = [\vec{u}, \vec{v}, \alpha\vec{w}_1] + [\vec{u}, \vec{v}, \beta\vec{w}_2].$
2. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}].$
3. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são linearmente dependente (LD).
4. $[\vec{u}, \vec{u}, \vec{w}] = 0, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}] = 0, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}] = 0.$
5. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ não se altera se a um fator se adiciona uma combinação linear dos outros dois, por exemplo:
   $[\vec{u}, \vec{v} + \alpha\vec{u} + \beta\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}].$

Exemplo: Sendo $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] = 4$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = -2$ calcule:

1. $[\vec{u} - \vec{v}, \vec{w}, \vec{x}]$;
2. $[3\vec{u} - 4\vec{v}, 4\vec{w}, -\vec{x}]$;
3. $[4\vec{u}, 2\vec{w}, 5\vec{x}]$.

Exercícios

Exercício 1

Sabendo que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -1$ calcule:

1. $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}]$
2. $[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]$
3. $[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}]$
4. $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$
5. $\vec{u} \wedge \vec{w} \cdot \vec{v}$
6. $\vec{w} \wedge \vec{v} \cdot \vec{v}$

Exercício 2

Calcule $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ sendo $\vec{u} = (-1, -3, 1), \vec{v} = (1, 0, 1), \vec{w} = (2, 1, 1)$ relativamente a uma base ortonormal positiva.

Exercícios

Exercício 3

As coordenadas dos vetores neste exercício estão relativamente a uma base ortonormal positiva.

1. Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores
$$\vec{u} = (2, -2, 0), \quad \vec{v} = (0, 1, 0), \quad \vec{w} = (-2, -1, -1).$$
2. Calcule o volume do tetraedro $ABCD$ determinado pelos vetores
$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{AD} = (-4, 0, 0).$$

Exercício 4

Seja E uma base ortonormal positiva. Calcular o valor de m para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores

$$\vec{u} = (0, -1, 2)_E, \quad \vec{v} = (-4, 2, -1)_E, \quad \vec{w} = (3, m, -2)_E$$

seja igual a 33. Em seguida, calcular a altura deste paralelepípedo relativamente à base definida por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Bom estudo!!