Geometria Analítica e Vetores

Geometria Analítica - Um tratamento vetorial

Sistema de Coordenadas

Docente: Prof$^{\text{a}}$. Dr$^{\text{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

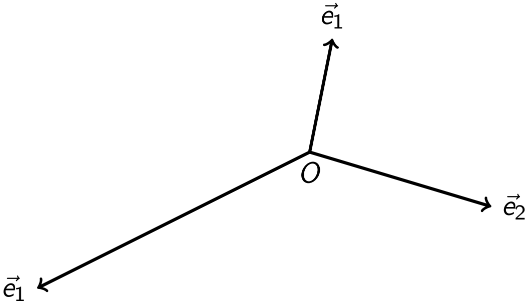
Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Sistema de Coordenadas

Sistema de coordenadas

Definição

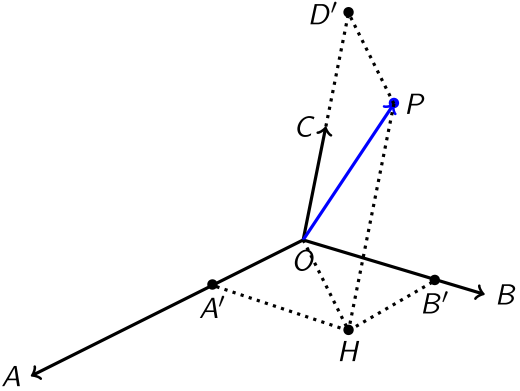
No espaço, sejam O um ponto e $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base. O sistema do ponto O e três vetores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ da base B, denotado por $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, é chamado de sistema de coordenadas.



Considerar o sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço.

Dado P um ponto, podemos escrever: $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$

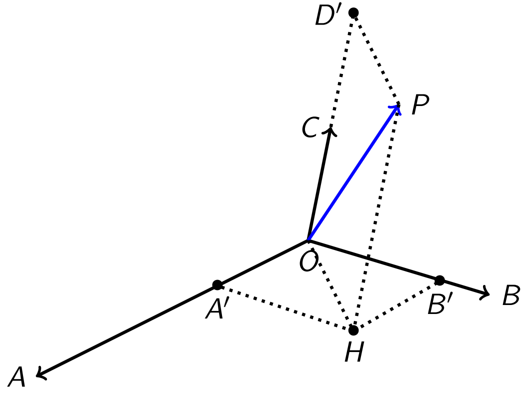
Ponha $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{e}_3.$



Considerar o sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço.

Dado P um ponto, podemos escrever: $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_1 + z\vec{e}_3$.

Ponha $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{OC} = \vec{e}_3.$



$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Definição

Considerar o sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço. Dado P um ponto, podemos escrever: $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_1 + z\vec{e}_3$. Os números x, y, z são chamados de coordenadas do ponto P relativamente ao sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$P = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

Considerar o sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço.

$$P = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$

Propriedade 1

Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ então

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

De fato,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Considerar o sistema $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ no espaço.

Propriedade 1

Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ então

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Exemplo 1 : Sejam $A = (-1, 4, 7)$ e $B = (0, 1, 1)$.

1. Ache as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$;
2. Ache as coordenadas do ponto médio do segmento AB.

Propriedade 2

Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ e M é o ponto médio do segmento AB, então

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

Exemplo 2 : Quais são as coordenadas do ponto P', simétrico do ponto $P(1, 0, 3)$ em relação ao ponto $M(1, 2, -1)$?

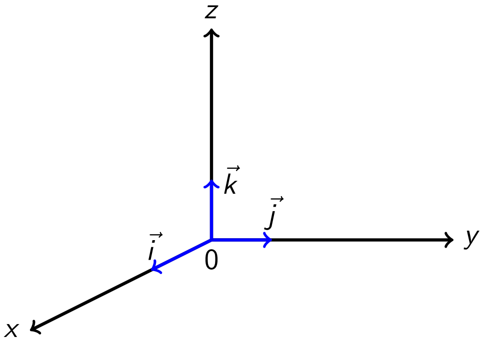
Sistema Ortogonal

Sistema ortogonal

Definição

O sistema de coordenadas $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, onde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal é chamado de sistema ortogonal.

Exemplo: O sistema $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ no espaço cartesiano $0xyz$ é um sistema ortogonal.



Observação

As propriedades 1 e 2 valem também para qualquer sistema ortogonal.

A partir de agora, consideramos um sistema ortogornal.

Exemplo: Dados $A = (1, 0, 1)$, $B = (-1, 0, 2)$ e $C = (1, 1, 1)$.

1. Mostre que ABC é um triângulo retângulo.
2. Calcule as medidas (comprimentos) das arestas AB, BC e AC do triângulo ABC.
3. Calcule os ângulos do triângulo ABC.

Exemplo: Mostre que o triângulo ABC é equilátero, sendo $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (2, 0, 0)$.

Exercícios

Nos exercícios a seguir admita que o sistema de coordenadas é ortogonal.

Exercício 1

Determine m para que seja equilátero o triângulo ABC, sendo $A = (1, 2, -1)$, $B = (0, 1, 1)$ e $C = (m, 0, 0)$.

Exercício 2

Verifique se os pontos $A = (2, 6, -5)$, $A = (6, 9, 7)$, $C = (5, 5, 0)$ e $D = (3, 10, 2)$ são vértices de um paralelogramo.

Exercício 3

Mostre que os pontos $E = (3, 0, -1)$, $F = (0, 3, 0)$, $G = (5, 1, -2)$ e $H = (-4, 1, 2)$ são vértices de trapézio.

Bom estudo!!