Geometria Analítica e Vetores

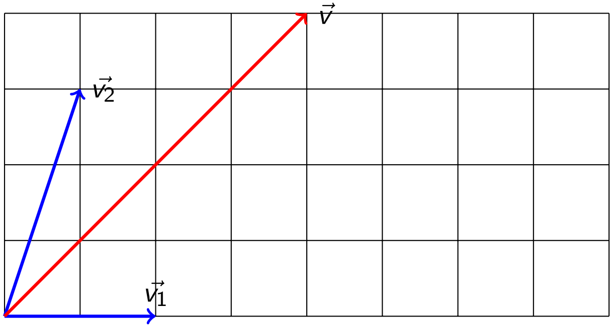
Dependência linear, Base e Coordenadas

de Vetores no Plano

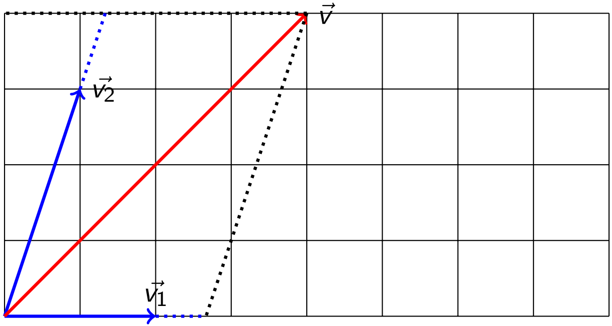
Docente: Prof$^{\mathrm{a}}$. Dr$^{\mathrm{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

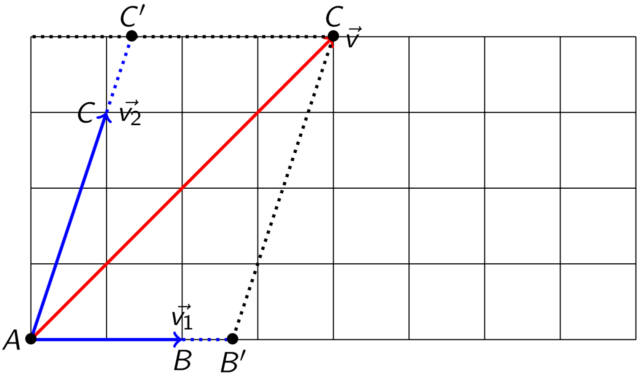
Exercício 1: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



Exercício 1: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



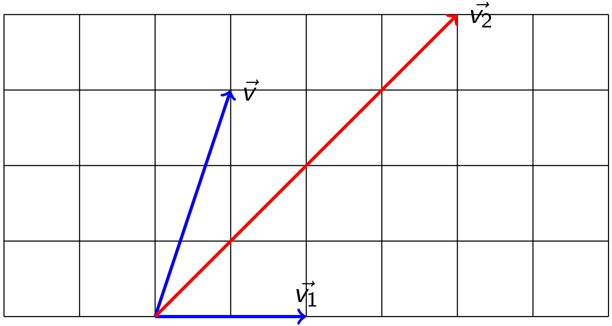
Exercício 1: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



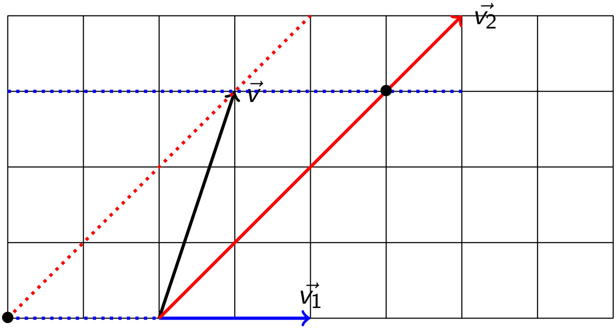
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{4}{3}\vec{v_1} + \frac{4}{3}\vec{v_2}.$$

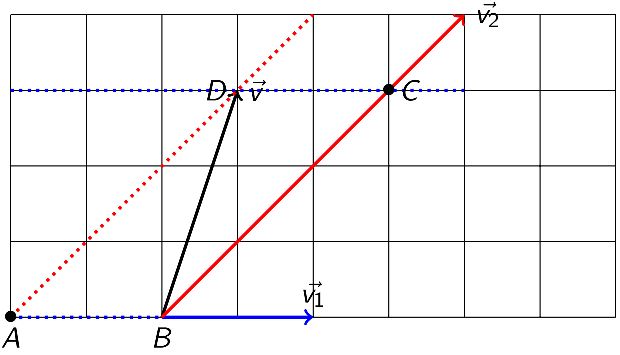
Exercício 2: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



Exercício 2: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



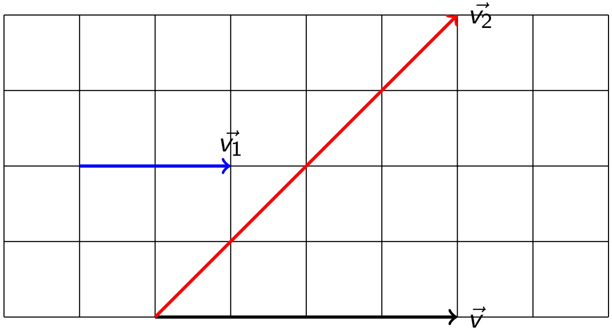
Exercício 2: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



$$\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = -\vec{v_1} + \frac{3}{4}\vec{v_2}.$$

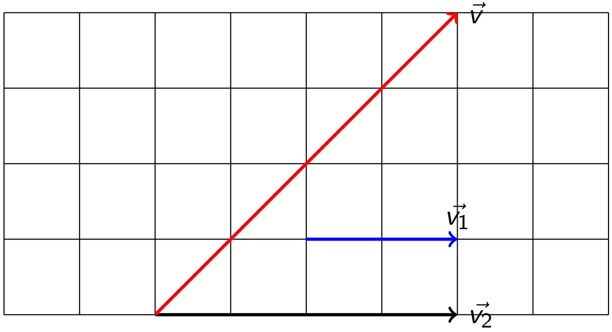
Exercício 3: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Determine os números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$.



Resposta: $a_1 = 2, a_2 = 0$, ou seja

$$\vec{v} = 2.\vec{v_1} + 0.\vec{v_2}.$$

Exercício 4: Sendo $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{v}$ representados na figura abaixo. Existem dois números reais a_1 e a_2 tais que $\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}$?



Resposta: *Não!*

Definição

No plano, dados dois vetores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, então para qualquer que seja $\vec{v}$, existem sempre dois números reais a_1 e a_2 tais que

$$\overrightarrow{v} = a_1 \overrightarrow{v_1} + a_2 \overrightarrow{v_2}.$$

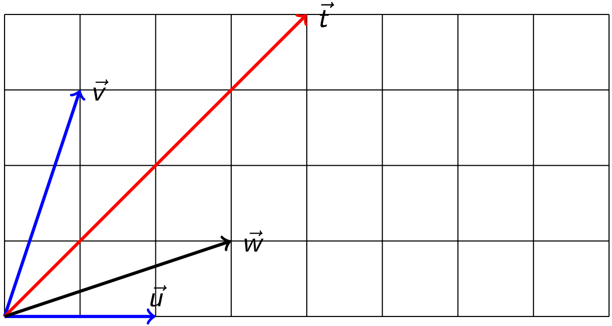
1. Dizemos que $\vec{v}$ é uma combinação linear de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
2. O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores (não colineares) $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é chamado *base* do plano.
3. Os números a_1 e a_2 são chamados de *coordenadas* do vetor $\vec{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$. **Notação:** $\vec{v} = (a_1, a_2)_{\mathcal{B}}$.

Observação

1. Quaisquer dois vetores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ formam uma base para o plano $\mathbb{R}^2$. Então existem infinitas bases para o plano $\mathbb{R}^2$.
2. Um vetor pode ter coordenadas diferentes em relação a bases diferentes.

Exercício 5: Sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\vec{w}$ e $\overrightarrow{t}$ representados na figura abaixo.

1. Determine as coordenadas do vetor $\vec{t}$ em relação à base $\mathcal{B} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.
2. Determine as coordenadas do vetor $\vec{t}$ em relação à base $\mathcal{B}' = \{\vec{v}, \vec{w}\}$.



Definição

1. Se dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são colineares, dizemos que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são *linearmente independente* (LI) ou o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI. Caso contrário, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é *linearmente dependente* (LD).

Observação

1. O conjunto $\{\vec{0}, \vec{v}\}$ é LD qualquer que seja o vetor $\vec{v}$.
2. Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LD e $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$, então existe sempre um número real k tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$.
3. O conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI se, e somente se, da igualdade

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 = \vec{0}$$

implica que $a_1 = a_2 = 0$.

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no plano $\mathbb{R}^2$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y) em relação à base $\mathcal{B}$.

Propriedades

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$, temos:

1. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2)$;
2. $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
3. $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$;
4. $k\vec{u} = (kx_1, ky_1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Exercícios

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no plano $\mathbb{R}^2$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y) em relação à base $\mathcal{B}$.

Exercícios

1. Sejam $\vec{u} = (x+1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y-6)$. Determine x e y sabemos que $\vec{u} = \vec{v}$.
2. Dados os vetores $\vec{u} = (4, 1)$ e $\vec{v} = (2, 6)$. Determine as coordenadas dos vetores $\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u}$.
3. Determine o vetor $\vec{w}$ na igualdade

$$3\vec{w} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$$

sendo dados $\vec{u} = (3, -1)$ e $\vec{v} = (-2, 4)$.
Se considerarmos a base $\mathcal{D} = \{\vec{u}, \vec{v}\}$, quais são as coordenadas do vetor $\vec{w}$ em relação a essa base?

Exercćicios

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no plano $\mathbb{R}^2$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y) em relação à base $\mathcal{B}$.

Exercícios

4) Expressar o vetor $\vec{w}$ como uma combinação linear dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sendo $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (4, -2)$ e $\vec{w} = (-1, 8)$.
5) Sejam $\vec{u} = (x + 1, 4)$ e $\vec{v} = (5, 2y - 6)$. Determine x e y sabemos que $\vec{u} = \vec{v}$.
6) Dois vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (3, 4)$ são LI ou LD?
7) Determine m e n tais que dois vetores $\vec{u} = (n, 1)$ e $\vec{v} = (2, n + 2m)$ são LD.
8) Dois vetores $\vec{u} = (1, 2)$ e $\vec{v} = (n, 0)$, onde n é um número real não nulo, são LI ou LD?

Exercício 9

Um conjunto de n vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n \geq 1)$ é LI se nenhum vetor deste conjunto pode ser escrito como uma combinação linear dos demais vetores neste conjunto. Mostre que um conjunto de três vetores quaisquer no plano $\mathbb{R}^2$ sempre está LD.

Bom estudo!!