Geometria Analítica e Vetores

Geometria Analítica - Um tratamento vetorial

Estudo da Reta no espaço

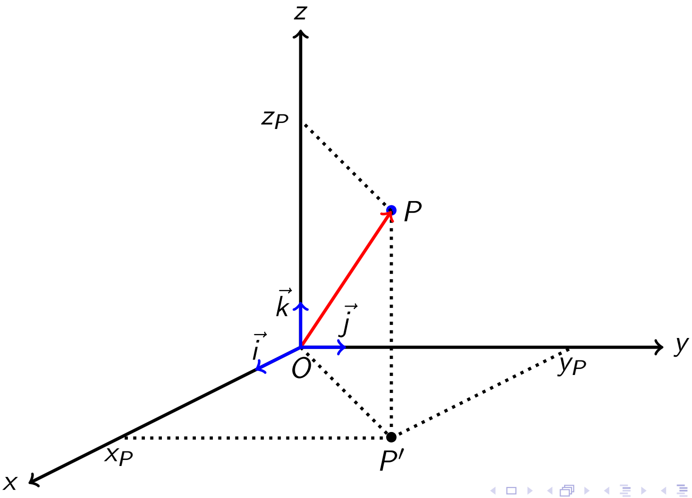
Docente: Prof$^{\mathrm{a}}$. Dr$^{\mathrm{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Recordação

No espaço $Oxyz$, considere o sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$P = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

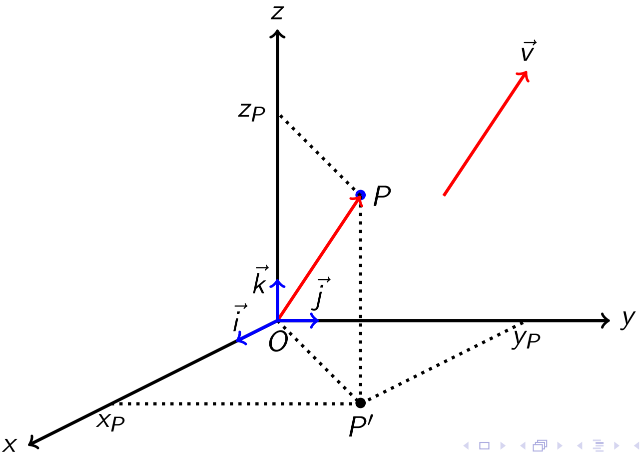


Recordação

No espaço $Oxyz$, considere o sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\vec{v} = (x, y, z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

onde $\overrightarrow{OP} = \vec{v}$.



No espaço $Oxyz$, considere o sistema ortogonal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Propriedade 1

Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ então

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

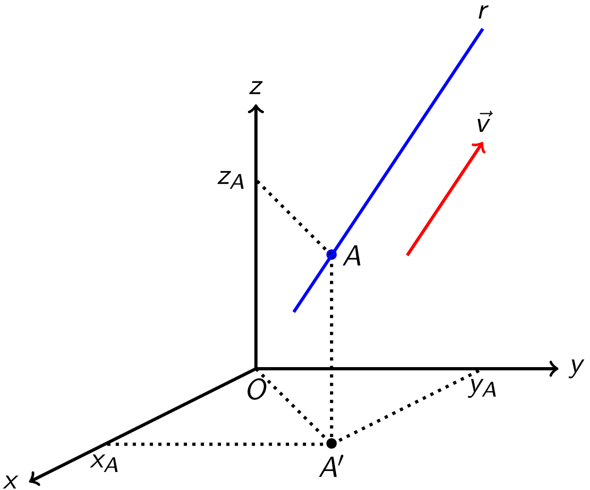
Propriedade 2

Se $A = (x_A, y_A, z_A)$ e $B = (x_B, y_B, z_B)$ e M é o ponto médio do segmento AB, então

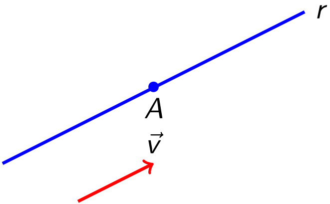
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

Estudo da Reta

No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Existe uma única reta r passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$.



No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Existe uma única reta r passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$.

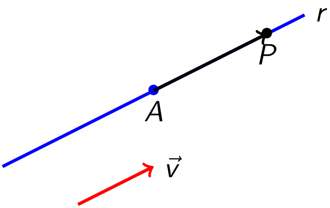


Problema: Escrever a equação r.

No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Existe uma única reta r passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$.

Problema: Escrever a equação r.

Solução: Tome um ponto $P(x, y, z)$, se $P \in r$, então o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo ao vetor $\vec{v}$.



Equação vetorial de um reta

No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Existe uma única reta r passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$.

Problema: Escrever a equação r.

Solução: Tome um ponto $P(x, y, z)$, se $P \in r$, então o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo ao $\vec{v}$. Então existe um número real t tal que

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}.$$

Assim:

$$(x - x_A, y - y_A, z - z_A) = t(a, b, c),$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

A equação (1) é chamada de equação vetorial da reta r.

Equações paramétricas de uma reta

Da equação vetorial (1)

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R}$$

temos

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad (2)$$

As equações (2) são chamadas de equações paramétricas da reta r. Cada valor t é chamado de parâmetro.

Equações simétricas de uma reta

Da equações paramétricas (2)

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

se $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, temos

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c} \qquad (3)$$

As equações (3) são chamadas de equações simétricas da reta r.

Equações reduzidas de uma reta

Das equações simétricas (3)

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c},$$

desenvolver duas igualdades dessas e simplicá-las, obtemos equações reduzidas da uma reta.

Exemplo: Dadas equações simétricas de uma reta:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+4}{2} = \frac{z+3}{-3},$$

temos

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+4}{2} \\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{z+3}{-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2) = y+4 \\ -3(x-2) = z+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ -3x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

As últimas equações $\begin{cases} 2x - y - 8 = 0 \\ -3x - z - 3 = 0 \end{cases}$ são equações reduzidas da reta dada.

Resumo

No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Seja r a reta passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$. A reta r tem:

1. **Equação vetorial:**
   $(r): \ (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R}.$
2. **Equações paramétricas:** $(r): \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$
3. **Equações simétricas:** $(r): \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}.$
4. **Equações reduzidas:** Das equações simétricas, desenvolver duas igualdades dessas e simplicá-las, obtemos um sistema de duas equações lineares que são equações reduzidas da uma reta.

Exemplo: Escrever a equação vetorial, as equações paramétricas, as equações simétricas e as equações reduzidas da reta r passando pelo ponto $A = (2, 3, -4)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

Exercícios

Exercício 1

Escrever a equação vetorial, as equações paramétricas, as equações simétricas e as equações reduzidas da reta r passando pelos dois pontos $A = (3, -1, -2)$ e $B = (1, 2, 4)$.

Exercício 2

Seja $A = (-2, 3, 4)$. Escrever a equação vetorial, as equações paramétricas e as equações reduzidas da reta r passando pelos dois pontos A e é paralela ao eixo:

1. Ox;
2. Oy;
3. Oz.

Exercício 3

Seja r a reta passando pelo ponto $A = (2, 3, -4)$ e tem direção do vetor $\vec{v} = (1, -2, 3)$.

1. Das equações paramétricas da reta r, encontre os pontos B e C pertencentes à r que têm parâmetros $t = 1$ e $t = 4$, respectivamente.
2. Determine o ponto de r cuja abscissa é 4.
3. Verifique se os pontos $D = (4, -1, 2)$ e $E = (5, -4, 3)$ pertencem à r.
4. Determine para que valores de m e n o ponto $F = (m, 5, n)$ pertence à r.
5. Escreva mais dois sistemas de equações paramétricas de r.
6. Escreva equações reduzidas da reta s que passa pelo ponto $G = (5, 2, -4)$ e é paralela à r.

Bom estudo!