Geometria Analítica - Um tratamento vetorial

Posições relativas entre duas retas no espaço

Docente: $\mathrm{Prof^a. Dr^a.}$ Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

No espaço $Oxyz$, considere duas retas r e s. Temos dois casos:

1. r e s estão num mesmo plano;
2. Não existe nehum plano que contém duas retas r e s.

No caso em que r e s estão num mesmo plano, temos três casos:

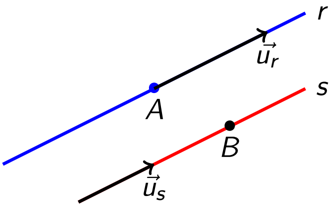
1. r e s são paralelas;
2. r e s são coincidentes;
3. r e s se interceptam (r e s são *concorrentes*).

Dadas equações das retas r e s, sabemos sempre:

1. Um ponto $A \in r$ e um vetor de direção $\vec{u}_r$ da reta r;
2. Um ponto $B \in s$ e um vetor de direção $\vec{u}_s$ da reta s;

Problema: *Baseando em pontos $A \in r, B \in s$ e os vetores de direção $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$, determine a posição relativa entre duas retas r e s.*

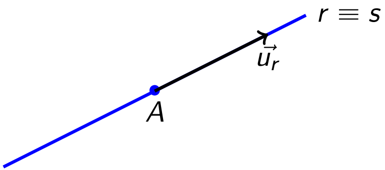
Caso 1: r e s são paralelas.



Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ são paralelos;
2. O ponto A não pertence à reta s
   (ou o ponto B não pertence à reta r).

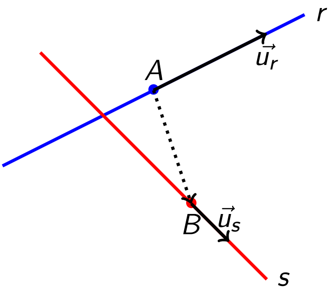
Caso 2: r e s são coincidentes.



Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ são paralelos;
2. O ponto $A \in r$ pertence também à reta s
   (ou o ponto $B \in s$ pertence também à reta r).

Caso 3: r e s se interceptam: Neste caso, dizemos que duas retas r e s são *concorrentes*.

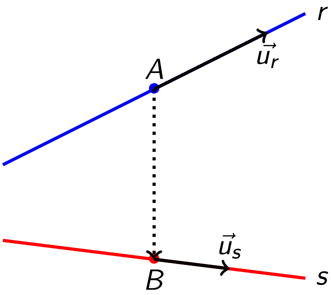


Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ não são paralelos;
2. $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$ e $\overrightarrow{AB}$ são coplanares, ou seja, $[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AB}] = 0$.

Caso 4: r e s não estão num mesmo plano

Caso 4: *Se não existir nenhum plano que contém ambas retas r e s*, dizemos que duas retas r e s são *reversas*.



Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ não são paralelos;
2. $\vec{u}_r$, $\vec{u}_s$ e $\overrightarrow{AB}$ não são coplanares, ou seja, $[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AB}] \neq 0$.

Resumo: relações relativas entre duas retas no espaço

No espaço $Oxyz$, dadas retas r e s:
$A \in r$, $\vec{u}_r$: vetor de direção de r; $B \in s$, $\vec{u}_s$: vetor de direção de s.

1. **r e s são paralelas:** quando
   i) $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ são paralelos;
   ii) O ponto A não pertence à reta s
   (ou o ponto B não pertence à reta r).
2. **r e s são coincidentes:** quando
   i) $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ são paralelos;
   ii) O ponto $A \in r$ pertence à reta s
   (ou o ponto $B \in s$ pertence à reta r).
3. **r e s são concorrentes:** quando
   i) $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ não são paralelos;
   ii $[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AB}] = 0$.
4. **r e s se são reversas:** quando
   i) $\vec{u}_r$ e $\vec{u}_s$ não são paralelos;
   ii $[\vec{u}_r, \vec{u}_s, \overrightarrow{AB}] \neq 0$.

Exemplo 1: No espaço $0xyz$, estude a posição relativa das retas

$$(r): \ (x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(0,1,3) \ (\lambda \in \mathbb{R})$$

e a reta s nos casos:

1. $(s): \ \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{1} \ (t \in \mathbb{R})$;
2. $(s): \ (x,y,z) = (1,3,6) + t(0,2,6) \ (t \in \mathbb{R})$;
3. $(s): \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 - t \\ z = t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$

Exemplo 2: Dar a posição relativa das retas r e s dadas pelas equações abaixo. No caso em que as retas sejam concorrentes, dar as coordenadas do ponto de interseção.

1. $r: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad$ e $\quad s: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$
2. $r: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{5} \quad$ e $\quad s: \dfrac{x-4}{6} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z-2}{15}$
3. $r: X = (1,0,1) + t(2,1,3),\ t \in \mathbb{R} \quad$ e
   $s: \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+2}{6}$
4. $r: \begin{cases} y = x + 2 \\ z = 3x - 1 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad$ e $\quad s: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-2}.$

Exercícios

Exercício 1

Dadas as retas

$$r : \begin{cases} z = 3 \\ \dfrac{x-1}{2} = -y \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Encontrar equações reduzidas da reta que passa por $A = (0, 1, 0)$ e pelo ponto de intersecção de r com s.

Exercício 2

Considere as retas $r : \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

Mostre que as retas r e s são concorrentes, determine o ponto comum e obtenha uma equação geral do plano determinado por elas.

Bom estudo!