5a Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios selecionados do livro "Cálculo Vol. 1, do James Stewart, 7a edição"

Fazer os seguintes exercícios.

Página 194, Exercício: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 25, 35.
Página 195, Exercícios: 49, 51, 53, 55, 59.
Página 201, Exercícios: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.
Página 229, Exercícios: 1, 3.
Página 230, Exercícios: 11, 13, 15, 17, 19, 21.
Página 254, Exercícios: 5, 15, 17, 19, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53.
Página 261, Exercícios: 1, 3, 9, 11.
Página 269, Exercício: 9, 11, 13, 15, 17.
Página 270, Exercícios: 19, 21, 33, 35, 37, 39, 45, 47.
Página 278, Exercícios: 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35.
Página 286, Exercícios: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.
Página 287, Exercícios: 61, 63.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart ;
[tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo :
Cengage Learning, 2013.

Título original: Cauculus : early
transcendentals
7. ed. americana.
Bibliografia.
ISBN 978-85-221-1461-0

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios
etc. I. Título.

13-04310 CDD-515-515.076

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

3.5 Exercícios

1–4

(a) Encontre y' derivando implicitamente.

(b) Resolva a equação explicitamente isolando y e derive para obter y' em termos de x.

(c) Verifique que suas soluções para as partes (a) e (b) são consistentes substituindo a expressão por y na sua solução para a parte (a).

1. $xy + 2x + 3x^2 = 4$

2. $4x^2 + 9y^2 = 36$

3. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

4. $\cos x + \sqrt{y} = 5$

5–20 Encontre dy/dx por derivação implícita.

5. $x^3 + y^3 = 1$

6. $2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$

7. $x^2 + xy - y^2 = 4$

8. $2x^3 + x^2y - xy^3 = 2$

9. $x^4(x + y) = y^2(3x - y)$

10. $xe^y = x - y$

11. $x^2y^2 + x \operatorname{sen} y = 4$

12. $1 + x = \operatorname{sen}(xy^2)$

13. $4 \cos x \operatorname{sen} y = 1$

14. $e^y \operatorname{sen} x = x + xy$

15. $e^{x/y} = x - y$

16. $\sqrt{x + y} = 1 + x^2y^2$

17. $\operatorname{tg}^{-1}(x^2y) = x + xy^2$

18. $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 1$

19. $e^y \cos x = 1 + \operatorname{sen}(xy)$

20. $\operatorname{tg}(x - y) = \dfrac{y}{1 + x^2}$

21. Se $f(x) + x^2[f(x)]^3 = 10$ e $f(1) = 2$, encontre $f'(1)$.

22. Se $g(x) + x \operatorname{sen} g(x) = x^2$, encontre $g'(0)$.

23–24 Considere y como a variável independente e x como a variável dependente e use a derivação implícita para encontrar dx/dy.

23. $x^4y^2 - x^3y + 2xy^3 = 0$

24. $y \sec x = x \operatorname{tg} y$

25–32 Use a derivação implícita para encontrar uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

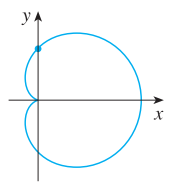
25. $y \operatorname{sen} 2x = x \cos 2y$, $(\pi/2, \pi/4)$

26. $\operatorname{sen}(x + y) = 2x - 2y$, (π, π)

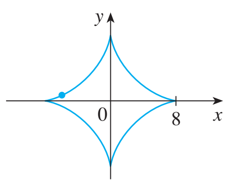
27. $x^2 + xy + y^2 = 3$, $(1, 1)$ (elipse)

28. $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2$, $(1, 2)$ (hipérbole)

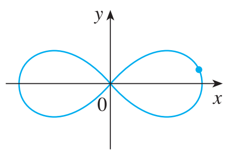
29. $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$
$(0, \frac{1}{2})$
(cardioide)



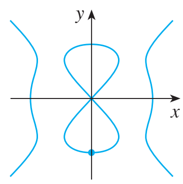
30. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$
$(-3\sqrt{3}, 1)$
(astroide)



31. $2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$
$(3, 1)$
(lemniscata)



32. $y^2(y^2 - 4) = x^2(x^2 - 5)$
$(0, -2)$
(curva do diabo)



33. (a) A curva com equação $y^2 = 5x^4 - x^2$ é chamada **kampyle** (do grego, curvado) **de Eudoxo**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 2)$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente em uma tela comum. (Se sua ferramenta gráfica puder traçar curvas definidas implicitamente, então use esse recurso. Caso não seja possível, você pode ainda criar o gráfico dessa curva traçando suas metades superior e inferior separadamente.)

34. (a) A curva com equação $y^2 = x^3 + 3x^2$ é denominada **cúbica de Tschirnhausen**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, -2)$.

(b) Em que pontos essa curva tem uma tangente horizontal?

(c) Ilustre as partes (a) e (b) traçando a curva e as retas tangentes sobre uma tela comum.

35–38 Encontre y'' por derivação implícita.

35. $9x^2 + y^2 = 9$

36. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

37. $x^3 + y^3 = 1$

38. $x^4 + y^4 = a^4$

39. Se $xy + e^y = e$, encontre o valor de y'' no ponto onde $x = 0$.

40. Se $x^2 + xy + y^3 = 1$, encontre o valor de y''' no ponto onde $x = 1$.

41. Formas extravagantes podem ser criadas usando-se a capacidade de traçar funções definidas implicitamente de um SCA.

(a) Trace a curva com equação

$$y(y^2 - 1)(y - 2) = x(x - 1)(x - 2)$$

Em quantos pontos essa curva tem tangentes horizontais? Estime as abscissas desses pontos.

(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(0, 1)$ e $(0, 2)$.

(c) Encontre as abscissas exatas dos pontos da parte (a).

(d) Crie curvas ainda mais extravagantes modificando a equação da parte (a).

42. SCA (a) A curva com equação

$$2y^3 + y^2 - y^5 = x^4 - 2x^3 + x^2$$

foi comparada com um "vagão sacolejante". Use um SCA para traçar essa curva e descubra o porquê desse nome.

(b) Em quantos pontos essa curva tem retas tangentes horizontais?

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA Requer sistema de computação algébrica

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

Encontre as coordenadas x desses pontos.

43. Encontre os pontos sobre a lemniscata do Exercício 31 onde a tangente é horizontal.

44. Mostre, fazendo a derivação implícita, que a tangente à elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) é

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

45. Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0).

46. Mostre que a soma das coordenadas das intersecções com os eixos x e y de qualquer reta tangente à curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ é igual a c.

47. Mostre, usando a derivação implícita, que qualquer reta tangente em um ponto P a um círculo com centro O é perpendicular ao raio OP.

48. A Regra da Potência pode ser demonstrada usando a derivação implícita para o caso onde n é um número racional, $n = p/q$, e $y = f(x) = x^n$ é suposta de antemão ser uma função derivável. Se $y = x^{p/q}$, então $y^q = x^p$. Use a derivação implícita para mostrar que

$$y' = \frac{p}{q} x^{(p/q)-1}$$

49–60 Encontre a derivada da função. Simplifique quando possível.

49. $y = \text{tg}^{-1}\sqrt{x}$

50. $y = \sqrt{\text{tg}^{-1} x}$

51. $y = \text{sen}^{-1}(2x + 1)$

52. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,\sec^{-1} x$

53. $G(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\arccos x$

54. $y = \text{tg}^{-1}\left(x - \sqrt{1 + x^2}\right)$

55. $h(t) = \text{cotg}^{-1}(t) + \text{cotg}^{-1}(1/t)$

56. $F(\theta) = \text{arcsen}\sqrt{\text{sen}\,\theta}$

57. $y = x\,\text{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$

58. $y = \cos^{-1}(\text{sen}^{-1} t)$

59. $y = \arccos\left(\dfrac{b + a\cos x}{a + b\cos x}\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \ a > b > 0$

60. $y = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$

61–62 Encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

61. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,\text{arcsen}\, x$

62. $f(x) = \text{arctg}(x^2 - x)$

63. Demonstre a fórmula para $(d/dx)(\cos^{-1}x)$ pelo mesmo método usado para $(d/dx)(\text{sen}^{-1}x)$.

64. (a) Uma maneira de definir $\sec^{-1}x$ é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y < \pi/2$ ou $\pi \leqslant y < 3\pi/2$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

(b) Outra maneira de definir $\sec^{-1}x$ que é às vezes usada é dizer que $y = \sec^{-1}x \iff \sec y = x$ e $0 \leqslant y \leqslant \pi$, $y \neq 0$. Mostre que, com essa definição,

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

65–68 Duas curvas são **ortogonais** se suas retas tangentes forem perpendiculares em cada ponto de intersecção. Mostre que as famílias dadas de curvas são **trajetórias ortogonais** uma em relação a outra, ou seja, toda curva de uma família é ortogonal a toda curva da outra família. Esboce ambas as famílias de curvas no mesmo sistema de coordenadas.

65. $x^2 + y^2 = r^2, \quad ax + by = 0$

66. $x^2 + y^2 = ax, \quad x^2 + y^2 = by$

67. $y = cx^2, \quad x^2 + 2y^2 = k$

68. $y = ax^3, \quad x^2 + 3y^2 = b$

69. Mostre que a elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ e a hipérbole $x^2/A^2 - y^2/B^2 = 1$ são trajetórias ortogonais se $A^2 < a^2$ e $a^2 - b^2 = A^2 + B^2$ (logo, a elipse e a hipérbole possuem os mesmos focos).

70. Encontre o valor do número a de tal modo que as famílias das curvas $y = (x + c)^{-1}$ e $y = a(x + k)^{1/3}$ sejam trajetórias ortogonais.

71. (a) A *Equação de van der Waals* para n mols de um gás é

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

onde P é a pressão, V é o volume e T é a temperatura do gás. A constante R é a constante de gás universal e a e b são constantes positivas que são características de um gás em particular. Se T permanece constante, use a derivação implícita para encontrar dV/dP.

(b) Encontre a taxa de variação de volume em relação à pressão de 1 mol de dióxido de carbono em um volume de $V = 10$ L e uma pressão de $P = 2{,}5$ atm. Use $a = 3{,}592$ $\text{L}^2\text{-atm/mol}^2$ e $b = 0{,}04267$ L/mol.

SCA **72.** (a) Use a derivação implícita para encontrar y' se $x^2 + xy + y^2 + 1 = 0$.

(b) Trace a curva da parte (a). O que você observa? Demonstre que o que você observa está correto.

(c) Em vista da parte (b), o que você pode dizer sobre a expressão para y' que você encontrou na parte (a)?

73. A equação $x^2 - xy + y^2 = 3$ representa uma "elipse girada", isto é, uma elipse cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados. Encontre os pontos nos quais essa elipse cruza o eixo x e mostre que as retas tangentes nesses pontos são paralelas.

74. (a) Onde a reta normal à elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ no ponto $(-1, 1)$ intersecta a elipse uma segunda vez?

(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da elipse e da reta normal.

75. Encontre todos os pontos sobre a curva $x^2y^2 + xy = 2$ onde a inclinação da reta tangente é -1.

76. Encontre as equações de ambas as retas tangentes para a elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que passem pelo ponto $(12, 3)$.

77. (a) Suponha que f seja uma função injetora, derivável e que sua função inversa f^{-1} seja também derivável. Use a derivação implícita para mostrar que

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

desde que o denominador não seja 0.

(b) Se $f(4) = 5$ e $f'(4) = \frac{2}{3}$, encontre $(f^{-1})'(5)$.

3.6 Exercícios

1. Explique por que a função logarítmica natural $y = \ln x$ é usada mais vezes no cálculo do que as outras funções logarítmicas $y = \log_a x$.

2–22 Derive a função.

2. $f(x) = x \ln x - x$
3. $f(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$
4. $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$
5. $f(x) = \sqrt[5]{\ln x}$
6. $f(x) = \ln \sqrt[5]{x}$
7. $f(x) = \log_{10}(x^3 + 1)$
8. $f(x) = \log_5(xe^x)$
9. $f(x) = \operatorname{sen} x \ln(5x)$
10. $f(u) = \dfrac{u}{1 + \ln u}$
11. $g(x) = \ln\left(x\sqrt{x^2 - 1}\right)$
12. $h(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
13. $G(y) = \ln \dfrac{(2y + 1)^5}{\sqrt{y^2 + 1}}$
14. $g(r) = r^2 \ln(2r + 1)$
15. $F(s) = \ln \ln s$
16. $y = \ln|1 + t - t^3|$
17. $y = \operatorname{tg}[\ln(ax + b)]$
18. $y = \ln|\cos(\ln x)|$
19. $y = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
20. $H(z) = \ln\sqrt{\dfrac{a^2 - z^2}{a^2 + z^2}}$
21. $y = 2x \log_{10}\sqrt{x}$
22. $y = \log_2(e^{-x}\cos \pi x)$

23–26 Encontre y' e y''.

23. $y = x^2 \ln(2x)$
24. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$
25. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$
26. $y = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$

27–30 Derive f e encontre o domínio de f.

27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - \ln(x - 1)}$
28. $f(x) = \sqrt{2 + \ln x}$
29. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
30. $f(x) = \ln \ln \ln x$

31. Se $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$, encontre $f'(1)$.

32. Se $f(x) = \ln(1 + e^{2x})$, encontre $f'(0)$.

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \ln(x^2 - 3x + 1)$, $(3, 0)$
34. $y = x^2 \ln x$, $(1, 0)$

35. Se $f(x) = \operatorname{sen} x + \ln x$, encontre $f'(x)$. Verifique se sua resposta é razoável comparando os gráficos de f e f'.

36. Encontre as equações das retas tangentes para a curva $y = (\ln x)/x$ nos pontos $(1, 0)$ e $(e, 1/e)$. Ilustre fazendo o gráfico da curva e de suas retas tangentes.

37. Seja $f(x) = cx + \ln(\cos x)$. Para qual valor de c ocorre $f'(\pi/4) = 6$?

38. Seja $f(x) = \log_a(3x^2 - 2)$. Para qual valor de a ocorre $f'(1) = 3$?

39–50 Use a derivação logarítmica para achar a derivada de função.

39. $y = (2x + 1)^5(x^4 - 3)^6$
40. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2}(x^2 + 1)^{10}$
41. $y = \sqrt{\dfrac{x - 1}{x^4 + 1}}$
42. $y = \sqrt{x}\, e^{x^2 - x}(x + 1)^{2/3}$
43. $y = x^x$
44. $y = x^{\cos x}$
45. $y = x^{\operatorname{sen} x}$
46. $y = \sqrt{x}^{\,x}$
47. $y = (\cos x)^x$
48. $y = (\operatorname{sen} x)^{\ln x}$
49. $y = (\operatorname{tg} x)^{1/x}$
50. $y = (\ln x)^{\cos x}$

51. Encontre y' se $y = \ln(x^2 + y^2)$.

52. Encontre y' se $x^y = y^x$.

53. Encontre uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ se $f(x) = \ln(x - 1)$.

54. Encontre $\dfrac{d^9}{dx^9}(x^8 \ln x)$.

55. Use a definição da derivada para demonstrar que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

56. Mostre que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$ para qualquer $x > 0$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

3.7 Taxas de Variação nas Ciências Naturais e Sociais

Sabemos que se $y = f(x)$, então a derivada dy/dx pode ser interpretada como a taxa de variação de y em relação a x. Nesta seção examinaremos algumas das aplicações dessa ideia na física, química, biologia, economia e em outras ciências.

Vamos nos recordar da Seção 2.7, que apresentou a ideia básica das taxas de variação. Se x variar de x_1 a x_2, então a variação em x será

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

e a variação correspondente em y será

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

complicadas pode ser impossível calcular exatamente Δy. Nesses casos, a aproximação por diferenciais é especialmente útil.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear $\boxed{1}$ pode ser escrita como

$$f(a + dx) \approx f(a) + dy$$

Por exemplo, para a função $f(x) = \sqrt{x + 3}$ do Exemplo 1, temos

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{dx}{2\sqrt{x + 3}}$$

Se $a = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então

$$dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1 + 3}} = 0{,}0125$$

e $$\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$$

exatamente como encontramos no Exemplo 1.

Nosso exemplo final ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em virtude de medidas aproximadas.

EXEMPLO 4 O raio de uma esfera foi medido e descobriu-se que possui 21 cm com uma possibilidade de erro na medida de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo usando esse valor de raio para computar o volume da esfera?

SOLUÇÃO Se o raio da esfera for r, então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial

$$dV = 4\pi r^2\,dr$$

Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos

$$dV = 4\pi(21)^2 0{,}05 \approx 277$$

O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm³.

OBSERVAÇÃO Embora o erro possível no Exemplo 4 possa parecer muito grande, uma ideia melhor é dada pelo **erro relativo**, que é calculado dividindo-se o erro pelo volume total:

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2\,dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\,\frac{dr}{r}$$

Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. No Exemplo 4, o erro relativo no raio é de aproximadamente $dr/r = 0{,}05/21 \approx 0{,}0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também poderiam ser expressos como **erros percentuais** de 0,24% no raio e 0,7% no volume.

3.10 Exercícios

1–4 Encontre a linearização $L(x)$ da função em a.

1. $f(x) = x^4 + 3x^2, \quad a = -1$

2. $f(x) = \text{sen}\, x, \quad a = \pi/6$

3. $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

4. $f(x) = x^{3/4}, \quad a = 16$

5. Encontre a aproximação linear da função $f(x) = \sqrt{1 - x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt{0{,}9}$ e $\sqrt{0{,}99}$. Ilustre fazendo os gráficos de f e da reta tangente.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

6. Encontre a aproximação linear da função $g(x) = \sqrt[3]{1 + x}$ em $a = 0$ e use-a para aproximar os números $\sqrt[3]{0,95}$ e $\sqrt[3]{1,1}$. Ilustre, fazendo os gráficos de g e da reta tangente.

7–10 Verifique a aproximação linear dada em $a = 0$. A seguir, determine os valores de x para os quais a aproximação linear tem precisão de 0,1.

7. $\ln(1 + x) \approx x$

8. $\operatorname{tg} x \approx x$

9. $1/(1 + 2x)^4 \approx 1 - 8x$

10. $e^x \cos x \approx 1 + x$

11–14 Encontre a diferencial da função.

11. (a) $y = x^2 \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \ln\sqrt{1 + t^2}$

12. (a) $y = s/(1 + 2s)$ (b) $y = e^{-u} \cos u$

13. (a) $y = \operatorname{tg} \sqrt{t}$ (b) $y = \dfrac{1 - v^2}{1 + v^2}$

14. (a) $y = e^{\operatorname{tg} \pi t}$ (b) $y = \sqrt{1 + \ln z}$

15–18 (a) Encontre a diferencial dy e (b) avalie dy para os valores dados de x e dx.

15. $y = e^{x/10}$, $x = 0$, $dx = 0,1$

16. $y = \cos \pi x$, $x = \frac{1}{3}$, $dx = -0,02$

17. $y = \sqrt{3 + x^2}$, $x = 1$, $dx = -0,1$

18. $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $x = 2$, $dx = 0,05$

19–22 Compute Δy e dy para os valores dados de x e $dx = \Delta x$. A seguir, esboce um diagrama como o da Figura 5, mostrando os segmentos de reta com comprimentos dx, dy e Δy.

19. $y = 2x - x^2$, $x = 2$, $\Delta x = -0,4$

20. $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $\Delta x = 1$

21. $y = 2/x$, $x = 4$, $\Delta x = 1$

22. $y = e^x$, $x = 0$, $\Delta x = 0,5$

23–28 Use uma aproximação linear (ou diferencial) para estimar o número dado.

23. $(1,999)^4$

24. $e^{-0,015}$

25. $\sqrt[3]{1001}$

26. $1/4,002$

27. $\operatorname{tg} 44°$

28. $\sqrt{99,8}$

29–31 Explique, em termos de aproximações lineares ou de diferenciais, por que a aproximação é razoável.

29. $\sec 0,08 \approx 1$

30. $(1,01)^6 \approx 1,06$

31. $\ln 1,05 \approx 0,05$

32. Sejam $f(x) = (x - 1)^2$, $g(x) = e^{-2x}$

e $h(x) = 1 + \ln(1 - 2x)$.

(a) Encontre as linearizações de f, g e h em $a = 0$. O que você percebe? Como explicar o que aconteceu?

(b) Faça os gráficos de f, g e h, e de suas aproximações lineares. Para qual função a aproximação é melhor? Para qual é pior? Explique.

33. A aresta de um cubo tem 30 cm, com um possível erro de medida de 0,1 cm. Use diferenciais para estimar o erro máximo possível no cálculo (a) do volume do cubo e (b) da área da superfície do cubo.

34. O raio de um disco circular é 24 cm, com um erro possível de 0,2 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada do disco.

(b) Qual o erro relativo? Qual o erro percentual?

35. A circunferência de uma esfera mede 84 cm, com erro possível de 0,5 cm.

(a) Use diferenciais para estimar o erro máximo na área calculada da superfície. Qual o erro relativo?

(b) Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo no volume calculado. Qual o erro relativo?

36. Use as diferenciais para estimar a quantidade de tinta necessária para aplicar uma camada de 0,05 cm de tinta a um domo com diâmetro de 50 m.

37. (a) Use as diferenciais para encontrar uma fórmula para o volume aproximado de uma fina camada cilíndrica com altura h, raio interno r e espessura Δr.

(b) Qual é o erro envolvido no uso da fórmula da parte (a)?

38. Sabe-se que um lado de um triângulo retângulo mede 20 cm de comprimento e o ângulo oposto foi medido como 30º, com um erro possível de $\pm 1°$.

(a) Use diferenciais para estimar o erro no cálculo da hipotenusa.

(b) Qual é o erro percentual?

39. Se uma corrente I passar por um resistor com resistência R, a Lei de Ohm afirma que a queda de voltagem é $V = RI$. Se V for constante e R for medida com um certo erro, use diferenciais para mostrar que o erro relativo no cálculo de I é aproximadamente o mesmo (em módulo) que o erro relativo em R.

40. Quando o sangue flui ao longo de um vaso sanguíneo, o fluxo F (o volume de sangue por unidade de tempo que passa por um ponto dado) é proporcional à quarta potência do raio R do vaso:

$$F = kR^4$$

(Esta equação é conhecida como a Lei de Poiseuille; mostraremos porque isso é verdadeiro na Seção 8.4.) Uma artéria parcialmente obstruída pode ser alargada por uma operação chamada angioplastia, na qual um cateter-balão é inflado dentro da artéria a fim de aumentá-la e restaurar o fluxo normal do sangue.

Mostre que uma variação relativa em F é cerca de quatro vezes a variação relativa em R. Como um aumento de 5% no raio afeta o fluxo do sangue?

41. Estabeleça as seguintes regras para trabalhar com as diferenciais (onde c denota uma constante e u e v são funções de x).

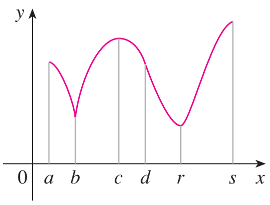
(a) $dc = 0$ (b) $d(cu) = c\,du$

(c) $d(u + v) = du + dv$ (d) $d(uv) = u\,dv + v\,du$

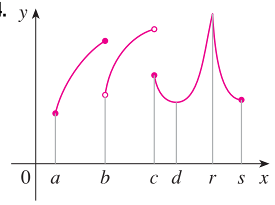
(e) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ (f) $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$

42. Na página 431 de *Physics: Calculus,* 2. ed., por Eugene Hecht (Pacific Grove, CA, 2000), durante a dedução da Fórmula $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ para o período de um pêndulo de comprimento L, o autor obtém a equação $a_T = -g \operatorname{sen} \theta$ para a aceleração tangencial do peso do pêndulo. Ele então afirma: "para ângulos pe-

3.

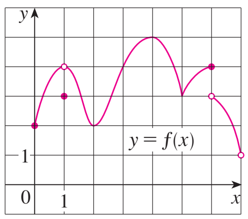


4.

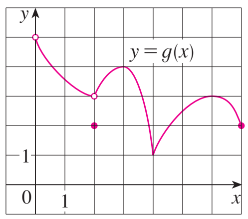


5–6 Use o gráfico para dizer quais os valores máximos e mínimos locais e absolutos da função.

5.



6.



7–10 Esboce o gráfico de uma função f que seja contínua em [1, 5] e tenha as propriedades dadas.

7. Máximo absoluto em 3, mínimo absoluto em 2, mínimo local em 4.

8. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 1, máximo local em 2 e mínimo local em 4.

9. Máximo absoluto em 5, mínimo absoluto em 2, máximo local em 3 e mínimo local em 2 e 4.

10. f não tem máximos ou mínimos locais, mas 2 e 4 são números críticos.

11. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja derivável em 2.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e seja contínua, mas não derivável em 2.
(c) Esboce o gráfico de uma função que tenha um máximo local em 2 e não seja contínua em 2.

12. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha máximo absoluto, mas não tenha máximo local.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo local, mas não tenha máximo absoluto.

13. (a) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que tenha um máximo absoluto, mas não tenha mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função em $[-1, 2]$ que seja descontínua, mas tenha tanto máximo absoluto como mínimo absoluto.

14. (a) Esboce o gráfico de uma função que tenha dois máximos locais e um mínimo local, mas nenhum mínimo absoluto.
(b) Esboce o gráfico de uma função que tenha três mínimos locais, dois máximos locais e sete números críticos.

15–28 Esboce o gráfico de f à mão e use seu esboço para encontrar os valores máximos e mínimos locais e absolutos de f. (Use os gráficos e as transformações das Seções 1.2 e 1.3.)

15. $f(x) = \frac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$

16. $f(x) = 2 - \frac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$

17. $f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$

18. $f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$

19. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$

20. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$

21. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$

22. $f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

23. $f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$

24. $f(x) = |x|$

25. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

26. $f(x) = e^x$

27. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 4 & \text{se } 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$

28. $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{se } -2 \leqslant x < 0 \\ 2x - 1 & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$

29–44 Encontre os números críticos da função.

29. $f(x) = 5x^2 + 4x$

30. $f(x) = x^3 + x^2 - x$

31. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$

32. $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$

33. $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$

34. $g(t) = |3t - 4|$

35. $g(y) = \dfrac{y - 1}{y^2 - y + 1}$

36. $h(p) = \dfrac{p - 1}{p^2 + 4}$

37. $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$

38. $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$

39. $F(x) = x^{4/5}(x - 4)^2$

40. $g(\theta) = 4\theta - \operatorname{tg}\theta$

41. $f(\theta) = 2\cos\theta + \operatorname{sen}^2\theta$

42. $h(t) = 3t - \operatorname{arcsen} t$

43. $f(x) = x^2e^{-3x}$

44. $f(x) = x^{-2}\ln x$

45–46 É dada uma fórmula para a *derivada* de uma função f. Quantos números críticos f tem?

45. $f'(x) = 5e^{-0{,}1|x|}\operatorname{sen} x - 1$

46. $f'(x) = \dfrac{100\cos^2 x}{10 + x^2} - 1$

47–62 Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado.

47. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

48. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

49. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [-2, 3]$

50. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5, \quad [-3, 5]$

51. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1, \quad [-2, 3]$

52. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

53. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad [0{,}2; 4]$

54. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x + 1}, \quad [0, 3]$

55. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

56. $f(t) = \sqrt[3]{t}\,(8 - t), \quad [0, 8]$

57. $f(t) = 2\cos t + \operatorname{sen} 2t, \quad [0, \pi/2]$

58. $f(t) = t + \operatorname{cotg}(t/2), \quad [\pi/4, 7\pi/4]$

59. $f(x) = xe^{-x^2/8}, \quad [-1, 4]$

60. $f(x) = x - \ln x, \quad \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

61. $f(x) = \ln(x^2 + x + 1), \quad [-1, 1]$

62. $f(x) = x - 2\operatorname{tg}^{-1}x, \quad [0, 4]$

EXEMPLO 6 Demonstre a identidade $\operatorname{tg}^{-1}x + \operatorname{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

SOLUÇÃO Embora não seja necessário o cálculo para demonstrar essa identidade, a demonstração usando cálculo é bem simples. Se $f(x) = \operatorname{tg}^{-1}x + \operatorname{cotg}^{-1}x$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$

para todos os valores de x. Portanto $f(x) = C$, uma constante. Para determinar o valor de C, fazemos $x = 1$ (porque podemos calcular $f(1)$ exatamente). Então

$$C = f(1) = \operatorname{tg}^{-1}1 + \operatorname{cotg}^{-1}1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Assim, $\operatorname{tg}^{-1}x + \operatorname{cotg}^{-1}x = \pi/2$.

4.2 Exercícios

1–4 Verifique que a função satisfaz as três hipóteses do Teorema de Rolle no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfazem à conclusão do Teorema de Rolle.

1. $f(x) = 5 - 12x + 3x^2, \quad [1, 3]$

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2, \quad [0, 3]$

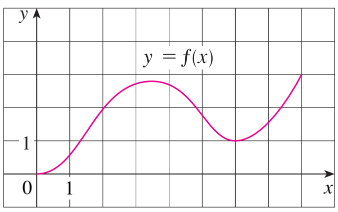
3. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x, \quad [0, 9]$

4. $f(x) = \cos 2x, \quad [\pi/8, 7\pi/8]$

5. Seja $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Mostre que $f(-1) = f(1)$, mas não existe um número c em $(-1, 1)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

6. Seja $f(x) = \operatorname{tg} x$. Mostre que $f(0) = f(\pi)$, mas não existe um número c em $(0, \pi)$ tal que $f'(c) = 0$. Por que isso não contradiz o Teorema de Rolle?

7. Use o gráfico de f para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[0, 8]$.



8. Use o gráfico de f dado no Exercício 7 para estimar os valores de c que satisfaçam à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo $[1, 7]$.

9–12 Verifique se a função satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo dado. Então, encontre todos os números c que satisfaçam a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1, \quad [0, 2]$

10. $f(x) = x^3 + x - 1, \quad [0, 2]$

11. $f(x) = e^{-2x}, \quad [0, 3]$

12. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [1, 4]$

13–14 Encontre o número c que satisfaça à conclusão do Teorema do Valor Médio para o intervalo dado. Desenhe o gráfico da função, a reta secante passando pelas extremidades, e a reta tangente em $(c, f(c))$. A reta secante e a reta tangente são paralelas?

13. $f(x) = \sqrt{x}, \quad [0, 4]$

14. $f(x) = e^{-x}, \quad [0, 2]$

15. Seja $f(x) = (x - 3)^{-2}$. Mostre que não existe um valor c em $(1, 4)$ tal que $f(4) - f(1) = f'(c)(4 - 1)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

16. Seja $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Mostre que não existe um valor c tal que $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Por que isso não contradiz o Teorema do Valor Médio?

17-18 Mostre que a equação tem exatamente uma raiz real.

17. $2x + \cos x = 0$

18. $x^3 + e^x = 0$

19. Mostre que a equação $x^3 - 15x + c = 0$ tem no máximo uma raiz no intervalo $[-2, 2]$.

20. Mostre que a equação $x^4 + 4x + c = 0$ tem no máximo duas raízes reais.

21. (a) Mostre que um polinômio de grau 3 tem, no máximo, três raízes reais.

(b) Mostre que um polinômio de grau n tem, no máximo, n raízes reais.

22. (a) Suponha que f seja derivável em $\mathbb{R}$ e tenha duas raízes. Mostre que f' tem pelo menos uma raiz.

(b) Suponha que f seja duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ e tenha três raízes. Mostre que f'' tem pelo menos uma raiz real.

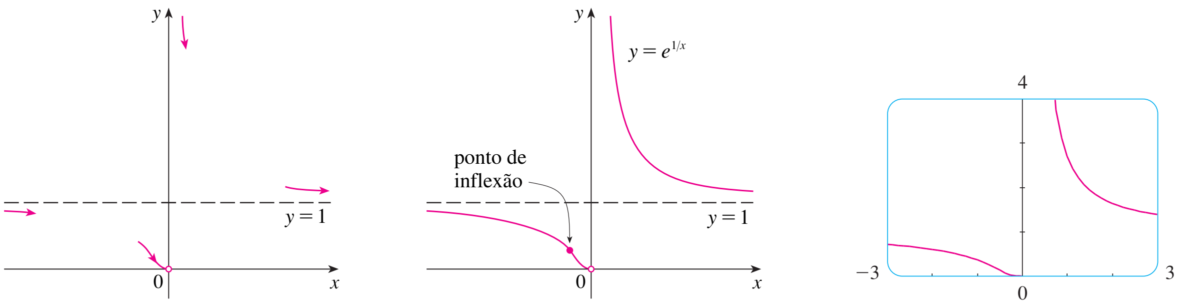
(c) Você pode generalizar os itens (a) e (b)?

23. Se $f(1) = 10$ e $f'(x) \geqslant 2$ para $1 \leqslant x \leqslant 4$, quão pequeno $f(4)$ pode ser?

24. Suponha que $3 \leqslant f'(x) \leqslant 5$ para todos os valores de x. Mostre que $18 \leqslant f(8) - f(2) \leqslant 30$.

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homeworks Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com



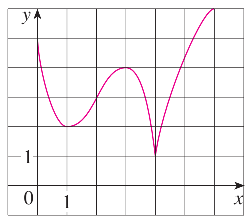
(a) Esboço preliminar (b) Esboço acabado (c) Confirmação computacional

FIGURA 13

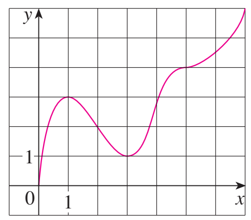
4.3 Exercícios

1–2 Usar o gráfico dado de f para encontrar o seguinte:
(a) Os intervalos abertos nos quais f é crescente.
(b) Os intervalos abertos nos quais f é decrescente.
(c) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para cima.
(d) Os intervalos abertos nos quais f é côncava para baixo.
(e) As coordenadas dos pontos de inflexão.

1.



2.

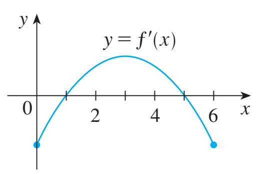


3. Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função f.
(a) Como você determina onde f é crescente ou decrescente?
(b) Como você determina onde o gráfico de f é côncavo para cima ou para baixo?
(c) Como você localiza os pontos de inflexão?

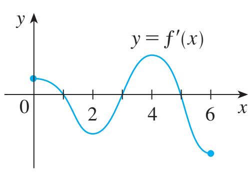
4. (a) Enuncie o Teste da Primeira Derivada.
(b) Enuncie o Teste da Segunda Derivada. Em que circunstância ele é inconclusivo? O que você faz se ele falha?

5-6 O gráfico da *derivada* f' de uma função f está mostrado.
(a) Em quais intervalos f é crescente ou decrescente?
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local?

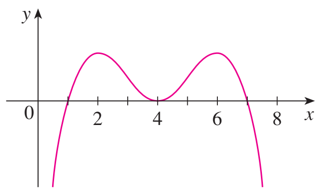
5.



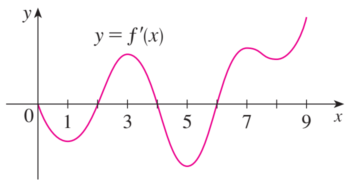
6.



7. Em cada item, indique as coordenadas x dos pontos de inflexão de f. Dê razões para suas escolhas.
(a) Esta curva é o gráfico de f.
(b) Esta curva é o gráfico de f'.
(c) Esta curva é o gráfico de f''.



8. O gráfico da primeira derivada f' de uma função f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? Explique.
(b) Em que valores de x a função f tem um mínimo ou máximo local? Explique.
(c) Em que intervalos f é côncava para cima ou para baixo? Explique.
(d) Quais são as coordenadas dos pontos de inflexão de f? Por quê?



9–18
(a) Encontre os intervalos nos quais f é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximo e mínimo locais de f.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.

9. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$

10. $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

12. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 3}$

13. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

14. $f(x) = \cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

15. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

16. $f(x) = x^2 \ln x$

17. $f(x) = x^2 - x - \ln x$

18. $f(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$

19–21 Encontre os valores máximo e mínimo locais de f usando os Testes da Primeira e da Segunda Derivadas. Qual método você prefere?

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador   SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

19. $f(x) = x^5 - 5x + 3$

20. $f(x) = \dfrac{x^2}{x - 1}$

21. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$

---

22. (a) Encontre os números críticos de $f(x) = x^4(x - 1)^3$.
(b) O que o Teste da Segunda Derivada mostra para você sobre o comportamento de f nesses números críticos?
(c) O que mostra o Teste da Primeira Derivada?

23. Suponha que f'' seja contínua em $(-\infty, \infty)$.
(a) Se $f'(2) = 0$ e $f''(2) = -5$, o que podemos dizer sobre f?
(b) Se $f'(6) = 0$ e $f''(6) = 0$, o que podemos dizer sobre f?

24–29 Esboce o gráfico de uma função que satisfaça a todas as condições dadas.

24. Assíntota vertical $x = 0$, $\quad f'(x) > 0$ se $x < -2$,
$f'(x) < 0$ se $x > -2 \ (x \neq 0)$,
$f''(x) < 0$ se $x < 0$, $\quad f''(x) > 0$ se $x > 0$

25. $f'(0) = f'(2) = f'(4) = 0$,
$f'(x) > 0$ se $x < 0$ ou $2 < x < 4$,
$f'(x) < 0$ se $0 < x < 2$ ou $x > 4$,
$f''(x) > 0$ se $1 < x < 3$, $\quad f''(x) < 0$ se $x < 1$ ou $x > 3$

26. $f'(1) = f'(-1) = 0$, $\quad f'(x) < 0$ se $|x| < 1$,
$f'(x) > 0$ se $1 < |x| < 2$, $\quad f'(x) = -1$ se $|x| > 2$,
$f''(x) < 0$ se $-2 < x < 0$, $\quad$ ponto de inflexão $(0, 1)$

27. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $\quad f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(-2) = 0$, $\quad \lim_{x \to 2} |f'(x)| = \infty$, $\quad f''(x) > 0$ se $x \neq 2$

28. $f'(x) > 0$ se $|x| < 2$, $\quad f'(x) < 0$ se $|x| > 2$,
$f'(2) = 0$, $\quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\quad f(-x) = -f(x)$,
$f''(x) < 0$ se $0 < x < 3$, $\quad f''(x) > 0$ se $x > 3$

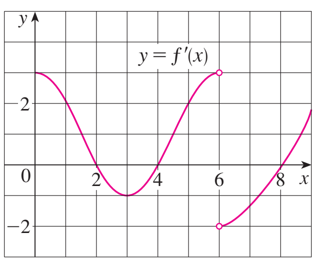
29. $f'(x) < 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x

---

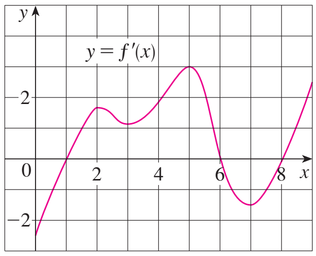
30. Suponha que $f(3) = 2$, $f'(3) = \frac{1}{2}$ e $f'(x) > 0$ e $f''(x) < 0$ para todo x.
(a) Esboce um gráfico possível de f.
(b) Quantas soluções a equação $f(x) = 0$ tem? Por quê?
(c) É possível que $f'(2) = \frac{1}{3}$? Por quê?

31–32 O gráfico da derivada f' de uma função contínua f está mostrado.
(a) Em que intervalos f está crescendo? E decrescendo?
(b) Em que valores de x a função f tem um máximo local? E no mínimo local?
(c) Em que intervalos f é côncava para cima? E côncava para baixo?
(d) Diga as coordenadas x dos pontos de inflexão.
(e) Supondo que $f(0) = 0$, esboce o gráfico de f.

31.



32.



33–44
(a) Encontre os intervalos em que a função é crescente ou decrescente.
(b) Encontre os valores máximos ou mínimos locais.
(c) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(d) Use as informações das partes (a)–(c) para esboçar o gráfico. Verifique seu trabalho com uma ferramenta gráfica, se você tiver uma.

33. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

34. $f(x) = 2 + 3x - x^3$

35. $f(x) = 2 + 2x^2 - x^4$

36. $g(x) = 200 + 8x^3 + x^4$

37. $h(x) = (x + 1)^5 - 5x - 2$

38. $h(x) = 5x^3 - 3x^5$

39. $F(x) = x\sqrt{6 - x}$

40. $G(x) = 5x^{2/3} - 2x^{5/3}$

41. $C(x) = x^{1/3}(x + 4)$

42. $f(x) = \ln(x^4 + 27)$

43. $f(\theta) = 2\cos\theta + \cos^2\theta$, $\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

44. $S(x) = x - \operatorname{sen} x$, $\quad 0 \leqslant x \leqslant 4\pi$

45–52
(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais.
(b) Encontre os intervalos nos quais a função é crescente ou decrescente.
(c) Encontre os valores máximos e mínimos locais.
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão.
(e) Use a informação das partes (a)–(d) para esboçar o gráfico de f.

45. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$

47. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

48. $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$

49. $f(x) = e^{-x^2}$

50. $f(x) = x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{2}{3}\ln x$

51. $f(x) = \ln(1 - \ln x)$

52. $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$

---

53. Suponha que a derivada da função f seja $f'(x) = (x + 1)^2(x - 3)^5(x - 6)^4$. Em qual intervalo f está crescendo?

54. Use os métodos desta seção para esboçar a curva $y = x^3 - 3a^2x + 2a^3$, onde a é uma constante positiva. O que os membros desta família de curvas têm em comum? Como eles diferem entre si?

55–56
(a) Use um gráfico de f para estimar os valores máximo e mínimo. Então, encontre os valores exatos.
(b) Estime o valor de x em que f cresce mais rapidamente. Então, encontre o valor exato.

4.4 Exercícios

1–4 Dado que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1$$

$$\lim_{x\to a} p(x) = \infty \quad \lim_{x\to a} q(x) = \infty$$

quais dos limites a seguir são formas indeterminadas? Para aqueles que não são formas indeterminadas, calcule o limite quando possível.

1. (a) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} \dfrac{h(x)}{p(x)}$

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} \dfrac{p(x)}{q(x)}$

2. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [h(x)p(x)]$

(c) $\lim_{x\to a} [p(x)q(x)]$

3. (a) $\lim_{x\to a} [f(x) - p(x)]$ (b) $\lim_{x\to a} [p(x) - q(x)]$

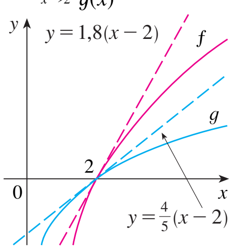
(c) $\lim_{x\to a} [p(x) + q(x)]$

4. (a) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)}$ (b) $\lim_{x\to a} [f(x)]^{p(x)}$ (c) $\lim_{x\to a} [h(x)]^{p(x)}$

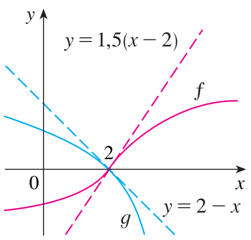
(d) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{f(x)}$ (e) $\lim_{x\to a} [p(x)]^{q(x)}$ (f) $\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

5–6 Use os gráficos de f e g e suas retas tangentes em (2, 0) para encontrar $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5.



6.



7-66 Encontre o limite. Use a Regra de l'Hôspital quando for apropriado. Se houver um método mais elementar, considere utilizá-lo. Se a Regra de l'Hôspital não se aplicar, explique o porquê.

7. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$

8. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$

9. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 1}$

10. $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{4x^2 + 16x - 9}$

11. $\lim_{x\to (\pi/2)^+} \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{tg} 5x}$

13. $\lim_{t\to 0} \dfrac{e^{2t} - 1}{\operatorname{sen} t}$

14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$

15. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{1 + \cos 2\theta}$

16. $\lim_{\theta\to \pi/2} \dfrac{1 - \operatorname{sen}\theta}{\operatorname{cossec}\theta}$

17. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{\operatorname{sen}\pi x}$

19. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x}$

20. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln \ln x}{x}$

21. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^8 - 1}{t^5 - 1}$

22. $\lim_{t\to 0} \dfrac{8^t - 5^t}{t}$

23. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - \sqrt{1 - 4x}}{x}$

24. $\lim_{u\to\infty} \dfrac{e^{u/10}}{u^3}$

25. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

26. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{senh} x - x}{x^3}$

27. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tgh} x}{\operatorname{tg} x}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{tg} x}$

29. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$

31. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x3^x}{3^x - 1}$

32. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos mx - \cos nx}{x^2}$

33. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x + \operatorname{sen} x}{x + \cos x}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{tg}^{-1}(4x)}$

35. $\lim_{x\to 1} \dfrac{1 - x + \ln x}{1 + \cos \pi x}$

36. $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{\ln x + x - 1}$

37. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^a - ax + a - 1}{(x - 1)^2}$

38. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

39. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$

40. $\lim_{x\to a^+} \dfrac{\cos x \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$

41. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi/x)$

42. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}\, e^{-x/2}$

43. $\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} 2x \operatorname{sen} 6x$

44. $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

45. $\lim_{x\to\infty} x^3 e^{-x^2}$

46. $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{tg}(1/x)$

47. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \operatorname{tg}(\pi x/2)$

48. $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \cos x \sec 5x$

49. $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$

50. $\lim_{x\to 0} (\operatorname{cossec} x - \operatorname{cotg} x)$

51. $\lim_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$

52. $\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg} x - \dfrac{1}{x}\right)$

53. $\lim_{x\to\infty} (x - \ln x)$

54. $\lim_{x\to 1^+} [\ln(x^7 - 1) - \ln(x^5 - 1)]$

55. $\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$

56. $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} 2x)^x$

57. $\lim_{x\to 0} (1 - 2x)^{1/x}$

58. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^{bx}$

59. $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

60. $\lim_{x\to\infty} x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

61. $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$

62. $\lim_{x\to\infty} (e^x + x)^{1/x}$

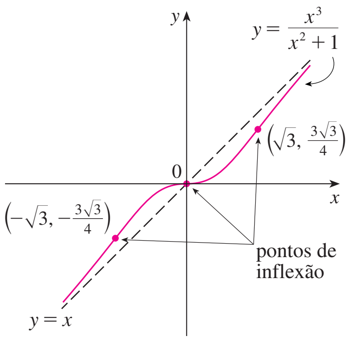


FIGURA 13

G. $$f''(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x^2+1)^2 - (x^4 + 3x^2) \cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2+1)^3}$$

Visto que $f''(x) = 0$ quando $x = 0$ ou $x = \pm\sqrt{3}$, montamos a seguinte tabela:

Intervalo	x	$3 - x^2$	$(x^2+1)^3$	$f''(x)$	f
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$-$	$+$	$+$	CC em $(-\infty, -\sqrt{3})$
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$+$	$+$	$-$	CB em $(-\sqrt{3}, 0)$
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	$+$	CC em $(0, \sqrt{3})$
$x > \sqrt{3}$	$+$	$-$	$+$	$-$	CB em $(\sqrt{3}, \infty)$

Os pontos de inflexão são $(-\sqrt{3}, -\frac{3}{4}\sqrt{3})$, $(0, 0)$ e $(\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3})$.

H. O gráfico de f está esboçado na Figura 13.

4.5 Exercícios

1–54 Use o roteiro desta seção para esboçar a curva.

1. $y = x^3 + x$

2. $y = x^3 + 6x^2 + 9x$

3. $y = 2 - 15x + 9x^2 - x^3$

4. $y = 8x^2 - x^4$

5. $y = x(x-4)^3$

6. $y = x^5 - 5x$

7. $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$

8. $y = (4 - x^2)^5$

9. $y = \dfrac{x}{x-1}$

10. $y = \dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$

11. $y = \dfrac{x - x^2}{2 - 3x + x^2}$

12. $y = \dfrac{x}{x^2-9}$

13. $y = \dfrac{1}{x^2-9}$

14. $y = \dfrac{x^2}{x^2+9}$

15. $y = \dfrac{x}{x^2+9}$

16. $y = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

17. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

18. $y = \dfrac{x}{x^3-1}$

19. $y = \dfrac{x^2}{x^2+3}$

20. $y = \dfrac{x^3}{x-2}$

21. $y = (x-3)\sqrt{x}$

22. $y = 2\sqrt{x} - x$

23. $y = \sqrt{x^2 + x - 2}$

24. $y = \sqrt{x^2 + x} - x$

25. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

26. $y = x\sqrt{2 - x^2}$

27. $y = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

29. $y = x - 3x^{1/3}$

30. $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$

31. $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

32. $y = \sqrt[3]{x^3 + 1}$

33. $y = \text{sen}^3 x$

34. $y = x + \cos x$

35. $y = x \, \text{tg}\, x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

36. $y = 2x - \text{tg}\, x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2$

37. $y = \frac{1}{2}x - \text{sen}\, x, \quad 0 < x < 3\pi$

38. $y = \sec x + \text{tg}\, x, \quad 0 < x < \pi/2$

39. $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{1 + \cos x}$

40. $y = \dfrac{\text{sen}\, x}{2 + \cos x}$

41. $y = \text{arctg}(e^x)$

42. $y = (1 - x)e^x$

43. $y = 1/(1 + e^{-x})$

44. $y = e^{-x}\, \text{sen}\, x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

45. $y = x - \ln x$

46. $y = e^{2x} - e^x$

47. $y = (1 + e^x)^{-2}$

48. $y = e^x/x^2$

49. $y = \ln(\text{sen}\, x)$

50. $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$

51. $y = xe^{-1/x}$

52. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

53. $y = e^{3x} + e^{-2x}$

54. $y = \text{tg}^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

55. Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula é

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula, m é a massa quando a partícula se move com velocidade v em relação ao observador e c é a velocidade da luz. Esboce o gráfico de m como uma função de v.

56. Na teoria da relatividade, a energia de uma partícula é

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + h^2 c^2/\lambda^2}$$

em que m_0 é a massa de repouso da partícula, λ é seu comprimento de onda e h é a constante de Planck. Esboce o gráfico de E como uma função de λ. O que o gráfico mostra sobre a força?

57. Um modelo para dispersão de um rumor é dado pela equação

$$p(t) = \frac{1}{1 + ae^{-kt}}$$

onde $p(t)$ é a proporção da população que já ouviu o boato no tempo t e a e k são constantes positivas.

(a) Quando a metade da população terá ouvido um rumor?

(b) Quando ocorre a maior taxa de dispersão do boato?

(c) Esboce o gráfico de p.

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

58. Um modelo para a concentração no instante t de uma droga injetada na corrente sanguínea é

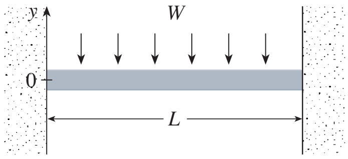
$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt})$$

onde a, b e K são constantes positivas e $b > a$. Esboce o gráfico da função concentração. O que o gráfico nos diz sobre como a concentração varia conforme o tempo passa?

59. A figura mostra uma viga de comprimento L embutida entre paredes de concreto. Se uma carga constante W for distribuída uniformemente ao longo de seu comprimento, a viga assumirá a forma da curva de deflexão

$$y = -\frac{W}{24EI}x^4 + \frac{WL}{12EI}x^3 - \frac{WL^2}{24EI}x^2$$

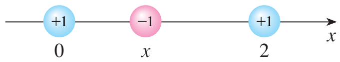
onde E e I são constantes positivas. (E é o módulo de elasticidade de Young, e I é o momento de inércia de uma secção transversal da viga.) Esboce o gráfico da curva de deflexão.



60. A Lei de Coulomb afirma que a força de atração entre duas partículas carregadas é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. A figura mostra partículas com carga 1 localizadas nas posições 0 e 2 sobre o eixo das coordenadas, e uma partícula com a carga -1 em uma posição x entre elas. Segue da Lei de Coulomb que a força resultante agindo sobre a partícula do meio é

$$F(x) = -\frac{k}{x^2} + \frac{k}{(x-2)^2} \qquad 0 < x < 2$$

onde k é uma constante positiva. Esboce o gráfico da função força resultante. O que o gráfico mostra sobre a força?



61–64 Ache a equação da assíntota oblíqua. Não desenhe a curva.

61. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

62. $y = \dfrac{2x^3 + x^2 + x + 3}{x^2 + 2x}$

63. $y = \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$

64. $y = \dfrac{5x^4 + x^2 + x}{x^3 - x^2 + 2}$

65–70 Use o roteiro desta seção para esboçar o gráfico da curva. No passo D, ache uma equação para a assíntota oblíqua.

65. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

66. $y = \dfrac{1 + 5x - 2x^2}{x - 2}$

67. $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$

68. $y = \dfrac{x^3}{(x + 1)^2}$

69. $y = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$

70. $y = 1 - x + e^{1+x/3}$

71. Mostre que a curva $y = x - \text{tg}^{-1}x$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + \pi/2$ e $y = x - \pi/2$. Use esse fato para esboçar a curva.

72. Mostre que a curva $y = \sqrt{x^2 + 4x}$ tem duas assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$. Use esse fato para esboçar a curva.

73. Mostre que as retas $y = (b/a)x$ e $y = -(b/a)x$ são assíntotas oblíquas da hipérbole $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$.

74. Seja $f(x) = (x^3 + 1)/x$. Mostre que

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - x^2] = 0$$

Isso mostra que o gráfico de f tende ao gráfico de $y = x^2$, e dizemos que a curva $y = f(x)$ é *assintótica* à parábola $y = x^2$. Use esse fato para ajudá-lo no esboço do gráfico de f.

75. Discuta o comportamento assintótico de $f(x) = (x^4 + 1)/x$ da mesma forma que no Exercício 74. Use então seus resultados para auxiliá-lo no esboço do gráfico de f.

76. Use o comportamento assintótico de $f(x) = \cos x + 1/x^2$ para esboçar seu gráfico sem seguir o roteiro de esboço de curvas desta seção.

4.6 Representação Gráfica com Cálculo e Calculadoras

O método usado para esboçar as curvas na seção precedente foi um auge dentro de nosso estudo de cálculo diferencial. O gráfico foi o objetivo final obtido por nós. Nesta seção, nosso ponto de vista é completamente diferente. *Começamos* aqui com um gráfico produzido por uma calculadora gráfica ou computador e então o refinamos. Usamos o cálculo para nos assegurar de que estão aparentes todos os aspectos importantes da curva. E com o uso de ferramentas gráficas podemos nos dedicar a curvas complicadas demais para tratar sem essa tecnologia. O objetivo aqui é a *interação* entre o cálculo e calculadoras.

Se você ainda não leu a Seção 1.4, deve fazê-lo agora. Ela explica como evitar algumas das armadilhas das ferramentas gráficas através da escolha de janelas retangulares apropriadas.

EXEMPLO 1 Faça o gráfico do polinômio $f(x) = 2x^6 + 3x^5 + 3x^3 - 2x^2$. Use os gráficos de f' e f'' para estimar todos os pontos de máximo e de mínimo e os intervalos de concavidade.

SOLUÇÃO Se especificarmos um domínio, mas não uma imagem, muitas ferramentas gráficas deduzirão uma imagem adequada a partir dos valores calculados. A Figura 1 mostra o gráfico obtido a partir de uma dessas ferramentas se especificarmos que $-5 \leqslant x \leqslant 5$. Embora essa janela retangular seja útil para mostrar que o comportamento assintótico (o comportamento nas extremidades) é o mesmo que o de $y = 2x^6$, é óbvio que estão omitidos os deta-