Geometria Analítica e Vetores

Dependência linear, Base e Coordenadas

de Vetores no Espaço

Docente: $\mathrm{Prof^a. Dr^a.}$ Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Recordação

Base, combinação linear, coordenadas no Plano

No plano, dados dois vetores não colineares $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, então para qualquer que seja $\vec{v}$, existem sempre dois números reais a_1 e a_2 tais que

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2}.$$

1. Dizemos que $\vec{v}$ é uma *combinação linear* de dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$.
2. O conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ de dois vetores (não colineares) $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é chamado *base* do plano.
3. Os números a_1 e a_2 são chamados de *coordenadas* do vetor $\vec{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$. **Notação:** $\vec{v} = (a_1, a_2)_{\mathcal{B}}$.

Recordação: Dependência linear, Independência linear

No plano $\mathbb{R}^2$, se dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não são colineares, dizemos que $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são *linearmente independente* (LI) ou o conjunto $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LI. Caso contrário, dizemos que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é *linearmente dependente* (LD).

Definição

Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$ ou o espaço $\mathbb{R}^3$.

1. Consideremos o conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ $(n \geqslant 1)$. Se

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

   dizemos que $\vec{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

2. Um conjunto de n vetores é LI se nenhum vetor deste conjunto pode ser escrito como uma combinação linear dos demais vetores neste conjunto.

Definição

Consideremos o plano $\mathbb{R}^2$ ou o espaço $\mathbb{R}^3$.

1. Consideremos o conjunto de vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ $(n \geqslant 1)$. Se

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n, \qquad a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

   dizemos que $\vec{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.
2. Um conjunto de n vetores é LI se nenhum vetor deste conjunto pode ser escrito como uma combinação linear dos demais vetores neste conjunto.

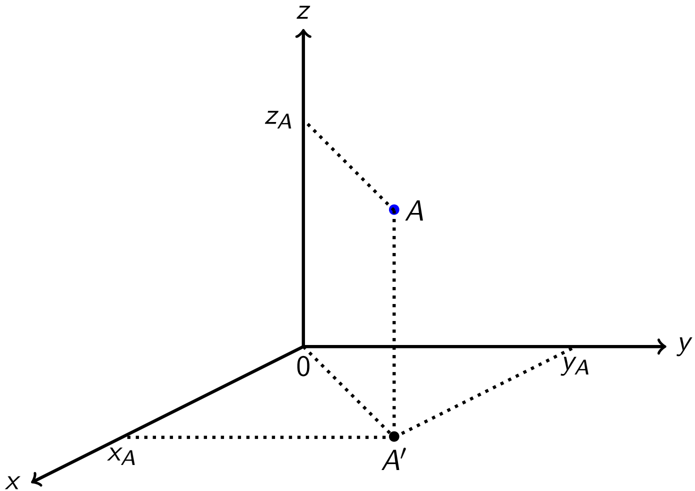
Observação

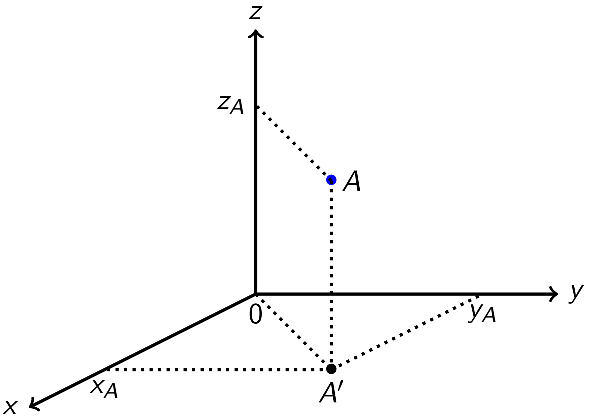
No espaço, três vetores não coplanares $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ sempre estão LI.

Pergunta: No espaço, dados três vetores não coplanares $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Qualquer que seja vetor $\vec{v}$, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3\,?$$

Pergunta - Recordação: No sistema cartesiano $0xyz$, como determinar as coordenadas de um ponto dado A?

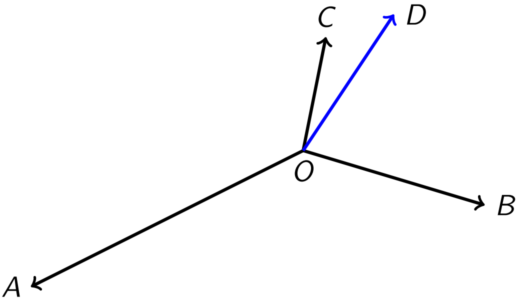




Recordação

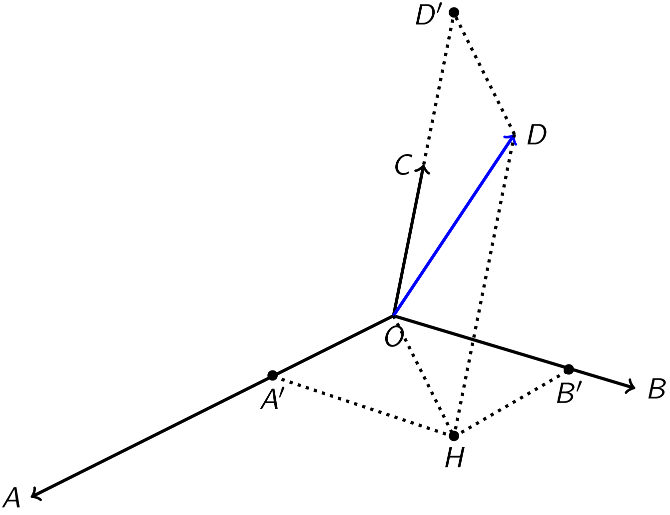
No sistema cartesiano 0xyz, o ponto A tem coordenadas x_A, y_A e z_A.
Notação: $A(x_A, y_A, z_A)$.
x_A: abscissa; y_A: ordenada; z_A: cota.

Voltamos à pergunta: No espaço, dados três vetores não coplanares $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Qualquer que sejam vetor $\vec{v}$, existem $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$?

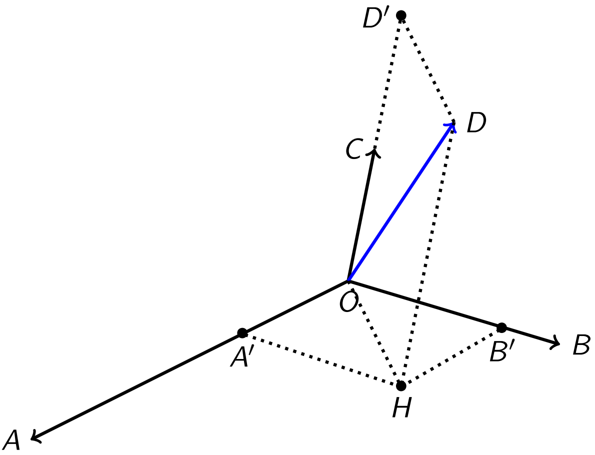


$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OD}.$$

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OD}.$$



$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \vec{v}_2 = \overrightarrow{OB}, \quad \vec{v}_3 = \overrightarrow{OC}, \quad \vec{v} = \overrightarrow{OD}.$$



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3$$

com $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Definição

No espaço $\mathbb{R}^3$, dados três vetores não coplanares $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$. Então:

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sempre é LI. Dizemos que o conjunto $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é uma base para o espaço.
2. Para qualquer que seja $\vec{v}$, existem sempre três números reais a_1, a_2, a_3 tais que

$$\overrightarrow{v} = a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + a_3\vec{v}_3.$$

   Os números a_1, a_2, a_3 são chamados de *coordenadas* do vetor $\vec{v}$ em relação à base $\mathcal{B}$. **Notação:** $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)_{\mathcal{B}}$.

Nota: Nesta disciplina, usamos a notação $\mathbb{R}^3$ como o espaço euclidiano (de dimensão 3). Note que usamos também a notação $\mathbb{V}^3$ paro o conjunto dos vetores no espaço. Veremos que tem uma correspondência 1-1 entre o conjunto dos pontos ($\mathbb{R}^3$) e o conjunto do vetores (V^3) nas próximas aulas.
(A mesma obsevação para $\mathbb{R}^2$).

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no espaço $\mathbb{R}^3$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y, z)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y, z) em relação à base $\mathcal{B}$.

Propriedades

Sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos:

1. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (x_1 = x_2,\ y_1 = y_2 \text{ e } z_1 = z_2)$;
2. $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
3. $\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$;
4. $k\vec{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no espaço $\mathbb{R}^3$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y, z)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y, z) em relação à base $\mathcal{B}$.

Exercício 1: Sendo

$$\overrightarrow{u} = (1, -1, 3), \quad \overrightarrow{v} = (2, 1, 3), \quad \overrightarrow{w} = (-1, -1, 4).$$

Ache as coordenadas dos vetores:

1. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;
2. $\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}$;
3. $\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v} - 3\overrightarrow{w}$.

Observação

Dados dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ no espaço onde $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$. Então $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ é LD se, e somente se, existe um número real k tal que $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$.

Exercício 2: Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no espaço $\mathbb{R}^3$. A seguir, escrevemos $\vec{u} = (x, y, z)$ significa que o vetor $\vec{u}$ tem coordenadas (x, y, z) em relação à base $\mathcal{B}$. Verifique se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é L.I. ou L.D., nos seguintes casos:

1. $\overrightarrow{u} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{v} = (1, 0, 1)$,
2. $\overrightarrow{u} = (0, 1, 1)$, $\overrightarrow{v} = (0, 3, 1)$,
3. $\overrightarrow{u} = (1, -3, 14)$, $\overrightarrow{v} = (\frac{-1}{14}, \frac{3}{14}, -1)$.

Observação

Fixamos uma base $\mathcal{B}$ no plano $\mathbb{R}^3$. Sejam $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ três vetores que têm coordenadas em relação à base $\mathcal{B}$, respectivamente:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{v} = (x_3, y_3, z_3).$$

Então, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base se, e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Exercício 3: Verifique se $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$ é uma base:

1. $\overrightarrow{u} = (1, 2, 1)$, $\overrightarrow{v} = (1, -1, -7)$, $\overrightarrow{w} = (4, 5, -4)$,
2. $\overrightarrow{u} = (7, 6, 1)$, $\overrightarrow{v} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{w} = (1, -2, 1)$.

   No caso $\mathcal{B}$ é uma base, determine as coordenadas do vetor $\vec{t} = (0, 1, 2)$ em relação a essa base. Caso contrário, expresse um vetor desse conjunto como uma combinação dos outros dois vetores.

Exercícios

Exercício 1

Sejam $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base, $\vec{f_1} = 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{e_3}$, $\vec{f_2} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, $\vec{f_3} = 3\vec{e_3}$.

1. Mostre que $F = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ é uma base de V^3.
2. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u} = (0, 1, -1)_F$ na base E.
3. Calcule m para que $(0, m, 1)_E$ e $(0, 1, -1)_F$ sejam LD.

Exercício 2

Sejam $OABC$ um tetraedro e M o ponto médio de BC. Explique por que $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ é uma base do espaço $\mathbb{R}^3$ e determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AM}$ em relação desta base.

Exercício 3

Sejam $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base de V^3, e $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{f}_2 = m\vec{e}_1 + \vec{e}_3$, $\vec{f}_3 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

1. Para que valores de m, a tripla $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base de V^3?
2. Nas condições do item (a), calcule a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (1,1,1)_{\mathcal{B}}$ e $\vec{v} = (2, a, b)_{\mathcal{B}'}$ sejam LD.

Bom estudo!!