4a Lista de Exercícios de Cálculo Diferencial e Integral I

Exercícios selecionados do livro "Cálculo Vol. 1, do James Stewart, 7a edição".
Fazer os seguintes exercícios.

Página 137, Exercício: 5, 7.
Página 138, Exercícios: 19, 20, 23, 27, 29, 31, 33, 35, 37.
Página 148, Exercícios: 21, 23, 25.
Página 149, Exercícios: 37, 39.
Página 150, Exercícios: 53, 56.
Página 164, Exercícios: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27.
Página 165, Exercícios: 29, 3, 35, 43, 48(a)-(b), 51, 53, 55, 57, 59, 63.
Página 166, Exercício: 65, 67, 69(a), 73, 75.
Página 171, Exercícios: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 33, 41, 43, 45.
Página 172, Exercícios: 53, 55, 59.
Página 178, Exercícios: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 29, 31, 33.
Página 179, Exercícios: 39, 41, 43, 45.
Página 185, Exercícios: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 61.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart ;
[tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo :
Cengage Learning, 2013.

Título original: Cauculus : early
transcendentals
7. ed. americana.
Bibliografia.
ISBN 978-85-221-1461-0

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios
etc. I. Título.

13-04310 CDD-515-515.076

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

2.7 Exercícios

1. Uma curva tem por equação $y = f(x)$.
(a) Escreva uma expressão para a inclinação da reta secante pelos pontos $P(3, f(3))$ e $Q(x, f(x))$.
(b) Escreva uma expressão para a inclinação da reta tangente em P.

2. Faça o gráfico da curva $y = e^x$ nas janelas $[-1, 1]$ por $[0, 2]$, $[-0{,}5; 0{,}5]$ por $[0{,}5; 1{,}5]$, e $[-0{,}1; 0{,}1]$ por $[0{,}9; 1{,}1]$. Dando um *zoom* no ponto $(0, 1)$, o que você percebe na curva?

3. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à parábola $y = 4x - x^2$ no ponto $(1, 3)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça os gráficos da parábola e da reta tangente. Como verificação, dê um *zoom* em direção ao ponto $(1, 3)$ até que a parábola e a reta tangente fiquem indistinguíveis.

4. (a) Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = x - x^3$ no ponto $(1, 0)$
(i) usando a Definição 1. (ii) usando a Equação 2.
(b) Encontre a equação da reta tangente da parte (a).
(c) Faça um gráfico da curva e da reta tangente em janelas retangulares cada vez menores centrados no ponto $(1, 0)$ até que a curva e a tangente pareçam indistinguíveis.

5–8 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

5. $y = 4x - 3x^2$, $(2, -4)$

6. $y = x^3 - 3x + 1$, $(2, 3)$

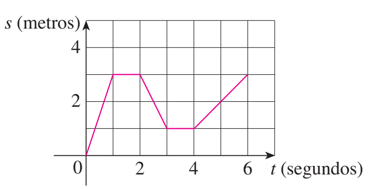
7. $y = \sqrt{x}$, $(1, 1)$

8. $y = \dfrac{2x + 1}{x + 2}$, $(1, 1)$

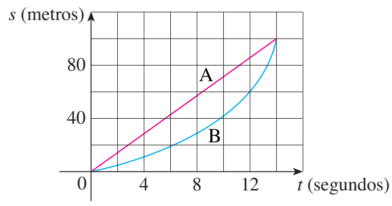
9. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 3 + 4x^2 - 2x^3$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 5)$ e $(2, 3)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

10. (a) Encontre a inclinação da tangente à curva $y = 1/\sqrt{x}$ no ponto onde $x = a$.
(b) Encontre as equações das retas tangentes nos pontos $(1, 1)$ e $\left(4, \frac{1}{2}\right)$.
(c) Faça o gráfico da curva e de ambas as tangentes em uma mesma tela.

11. (a) Uma partícula começa se movendo para a direita ao longo de uma reta horizontal; o gráfico de sua função posição está mostrado. Quando a partícula está se movendo para a direita? E para a esquerda? Quando está parada?
(b) Trace um gráfico da função velocidade.



12. São dados os gráficos das funções das posições de dois corredores, A e B, que correm 100 metros rasos e terminam empatados.



(a) Descreva e compare como os corredores correram a prova.
(b) Em que instante a distância entre os corredores é maior?
(c) Em que instante eles têm a mesma velocidade?

13. Se uma bola for atirada ao ar com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) depois de t segundos é dada por $y = 10t - 4{,}9t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

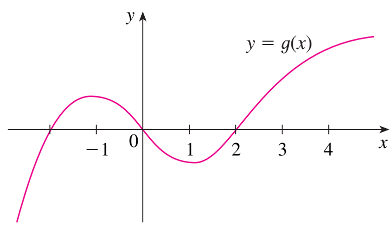
14. Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 10t - 1{,}86t^2$.
(a) Encontre a velocidade da pedra após um segundo.
(b) Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.
(c) Quando a pedra atinge a superfície?
(d) Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

15. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação do movimento $s = 1/t^2$, onde t é medido em segundos. Encontre a velocidade da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$ e $t = 3$.

16. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo de uma reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.
(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:
(i) $[3, 4]$ (ii) $[3{,}5; 4]$
(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4; 4{,}5]$
(b) Encontre a velocidade instantânea quando $t = 4$.
(c) Faça o gráfico de s como uma função de t e desenhe as retas secantes cujas inclinações são as velocidades médias da parte (a), e a reta tangente cuja inclinação é a velocidade instantânea da parte (b).

17. Para a função g cujo gráfico é dado, arrume os seguintes números em ordem crescente e explique seu raciocínio:

$$0, \quad g'(-2), \quad g'(0), \quad g'(2), \quad g'(4).$$



18. Encontre uma equação para a reta tangente ao gráfico de $y = g(x)$ em $x = 5$ se $g(5) = -3$ e $g'(5) = 4$.

19. Se uma equação de uma reta tangente à curva $y = f(x)$ no ponto onde $a = 2$ é $y = 4x - 5$, encontre $f(2)$ e $f'(2)$.

20. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em (4, 3) passar pelo ponto (0, 2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

21. Esboce o gráfico de uma função f para a qual $f(0) = 0$, $f'(0) = 3$, $f'(1) = 0$ e $f'(2) = -1$.

22. Esboce o gráfico de uma função g para a qual $g(0) = g(2) = g(4) = 0$, $g'(1) = g'(3) = 0$, $g'(0) = g'(4) = 1$, $g'(2) = -1$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ e $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$.

23. Se $f(x) = 3x^2 - x^3$, encontre $f'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 3x^2 - x^3$ no ponto (1, 2).

24. Se $g(x) = x^4 - 2$, encontre $g'(1)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = x^4 - 2$ no ponto $(1, -1)$.

25. (a) Se $F(x) = 5x/(1 + x^2)$, encontre $F'(2)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 5x/(1 + x^2)$ no ponto (2, 2).
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente na mesma tela.

26. (a) Se $G(x) = 4x^2 - x^3$, encontre $G'(a)$ e use-o para encontrar uma equação da reta tangente à curva $y = 4x^2 - x^3$ nos pontos (2, 8) e (3, 9).
(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e as retas tangentes na mesma tela.

27–32 Encontre $f'(a)$.

27. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

28. $f(t) = 2t^3 + t$

29. $f(t) = \dfrac{2t + 1}{t + 3}$

30. $f(x) = x^{-2}$

31. $f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

32. $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{1 - x}}$

33–38 Cada limite representa a derivada de certa função f em certo número a. Diga o que são f e a em cada caso.

33. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{(1 + h)^{10} - 1}{h}$

34. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{16 + h} - 2}{h}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{2^x - 32}{x - 5}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \pi/4}$

37. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) + 1}{h}$

38. $\displaystyle\lim_{t\to 1} \frac{t^4 + t - 2}{t - 1}$

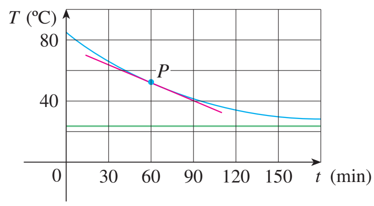
39–40 Uma partícula se move ao longo de uma reta com equação de movimento $s = f(t)$, onde s é medido em metros e t em segundos. Encontre a velocidade e a velocidade escalar quando $t = 5$.

39. $f(t) = 100 + 50t - 4{,}9t^2$

40. $f(t) = t^{-1} - t$

41. Uma lata de refrigerante morna é colocada na geladeira. Esboce o gráfico da temperatura do refrigerante como uma função do tempo. A taxa de variação inicial da temperatura é maior ou menor que a taxa de variação após 1 hora?

42. Um peru assado é tirado de um forno quando a sua temperatura atinge 85 ºC e colocado sobre uma mesa, em uma sala na qual a temperatura é 24 °C. O gráfico mostra como a temperatura do peru diminui e finalmente chega à temperatura ambiente. Por meio da medida da inclinação da reta tangente, estime a taxa de variação da temperatura após 1 hora.



43. A tabela mostra o número de passageiros P que chegaram à Irlanda por avião, em milhões.

Ano	2001	2003	2005	2007	2009
P	8,49	9,65	11,78	14,54	12,84

(a) Determine a taxa média de crescimento de P
(i) de 2001 a 2005 (ii) de 2003 a 2005
(iii) de 2005 a 2007
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2005, tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?

44. O número N de franquias de uma certa cadeia popular de cafeteiras é mostrada na tabela. (São dados os números de franquias no dia 01 de outubro.)

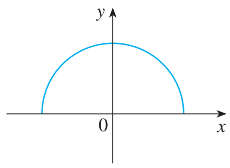
Ano	2004	2005	2006	2007	2008
N	8.569	10.241	12.440	15.011	16.680

(a) Determine a taxa média de crescimento
(i) de 2006 a 2008 (ii) de 2006 a 2007
(iii) de 2005 a 2006
Em cada caso, inclua as unidades.
(b) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 tomando a média de duas taxas médias de variação. Quais são suas unidades?
(c) Dê uma estimativa da taxa de crescimento instantânea em 2006 medindo a inclinação de uma tangente.
(d) Estime a taxa instantânea de crescimento em 2007 e compare-a com a taxa de crescimento em 2006. O que você pode concluir?

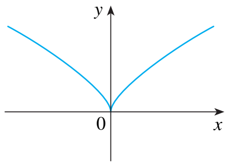
45. O custo (em dólares) de produzir x unidades de uma certa mercadoria é $C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$.
(a) Encontre a taxa média da variação de C em relação a x quando os níveis de produção estiverem variando
(i) de $x = 100$ a $x = 105$
(ii) de $x = 100$ a $x = 101$
(b) Encontre a taxa instantânea da variação de C em relação a x quando $x = 100$. (Isso é chamado *custo marginal*. Seu significado será explicado na Seção 3.7.)

46. Se um tanque cilíndrico comporta 100.000 litros de água, que podem escoar pela base do tanque em uma hora, então a Lei de Torricelli fornece o volume V de água que restou no tanque após t minutos como

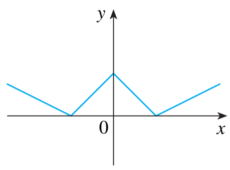
7.



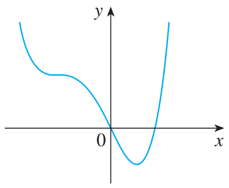
8.



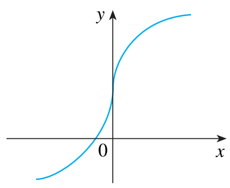
9.



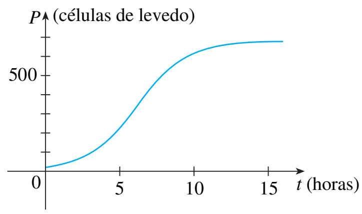
10.



11.



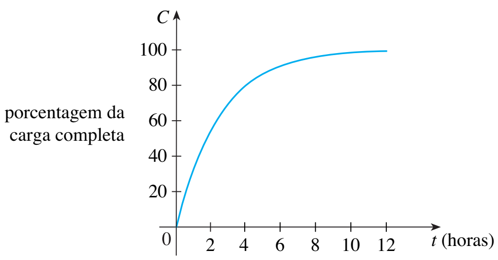
12. O gráfico mostrado corresponde ao da função população $P(t)$ de cultura em laboratório de células de levedo. Use o método do Exemplo 1 para obter o gráfico da derivada $P'(t)$. O que o gráfico de P' nos diz sobre a população de levedo?



13. Uma pilha recarregável é colocada no carregador. O gráfico mostra $C(t)$, a porcentagem de capacidade total que a pilha alcança conforme a função de tempo t passa (em horas).

(a) Qual o significado da derivada $C'(t)$?

(b) Esboce o gráfico de $C'(t)$. O que o gráfico diz?

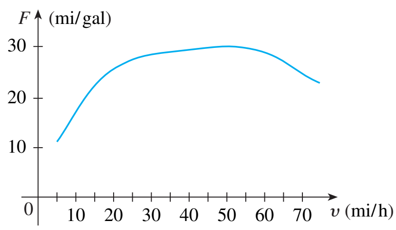


14. O gráfico (do Departamento de Energia dos EUA) mostra como a velocidade do carro afeta o rendimento do combustível. O rendimento do combustível F é medido em milhas por galão e a velocidade v é medida em milhas por hora.

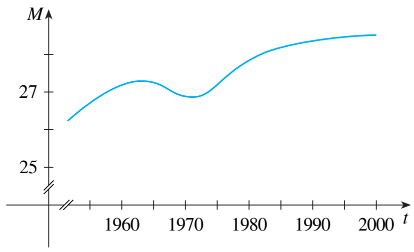
(a) Qual o significado da derivada $F'(v)$?

(b) Esboce o gráfico de $F'(v)$.

(c) Em qual velocidade você deve dirigir se quer economizar combustível?



15. O gráfico mostra como a idade média dos homens japoneses quando se casam pela primeira vez variou na última metade do século XX. Esboce o gráfico da função derivada $M'(t)$. Em quais os anos a derivada foi negativa?



16–18 Faça um esboço cuidadoso de f e abaixo dele esboce o gráfico de f', como foi feito nos Exercícios 4–11. Você pode sugeir uma fórmula para $f'(x)$ a partir de seu gráfico?

16. $f(x) = \operatorname{sen} x$

17. $f(x) = e^x$

18. $f(x) = \ln x$

19. Seja $f(x) = x^2$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1)$ e $f'(2)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use a simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1)$ e $f'(-2)$.

(c) Utilize os resultados de (a) e (b) para conjecturar uma fórmula para $f'(x)$.

(d) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (c) está correta.

20. Seja $f(x) = x^3$.

(a) Estime os valores de $f'(0), f'(\frac{1}{2}), f'(1), f'(2)$ e $f'(3)$ fazendo uso de uma ferramenta gráfica para dar *zoom* no gráfico de f.

(b) Use simetria para deduzir os valores de $f'(-\frac{1}{2}), f'(-1), f'(-2)$ e $f'(-3)$.

(c) Empregue os valores de (a) e (b) para fazer o gráfico de f'.

(d) Conjecture uma fórmula para $f'(x)$.

(e) Use a definição de derivada para demonstrar que sua conjectura em (d) está correta.

21–31 Encontre a derivada da função dada usando a definição. Diga quais são os domínios da função e da derivada.

21. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

22. $f(x) = mx + b$

23. $f(t) = 5t - 9t^2$

24. $f(x) = 1{,}5x^2 - x + 3{,}7$

25. $f(x) = x^3 - 3x + 5$

26. $f(x) = x + \sqrt{x}$

27. $g(x) = \sqrt{9 - x}$

28. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x - 3}$

29. $G(t) = \dfrac{1 - 2t}{3 + t}$

30. $f(x) = x^{3/2}$

31. $f(x) = x^4$

32. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = \sqrt{6 - x}$ começando pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$ e usando as transformações da Seção 1.3.
(b) Use o gráfico da parte (a) para esboçar o gráfico de f'.
(c) Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$. Quais os domínios de f e f'?
(d) Use uma ferramenta gráfica para fazer o gráfico de f' e compare-o com o esboço da parte (b).

33. (a) Se $f(x) = x^4 + 2x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

34. (a) Se $f(x) = x + 1/x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável, comparando os gráficos de f e f'.

35. A taxa de desemprego $U(t)$ varia com o tempo. A tabela fornece a porcentagem de desempregados na força de trabalho australiana em meados de 1995 a 2004.

t	$U(t)$	t	$U(t)$
1995	8,1	2000	6,2
1996	8,0	2001	6,9
1997	8,2	2002	6,5
1998	7,9	2003	6,2
1999	6,7	2004	5,6

(a) Qual o significado de $U'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $U'(t)$.

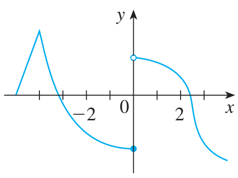
36. Seja $P(t)$ a porcentagem da população das Filipinas com idade maior que 60 anos no instante t. A tabela fornece projeções dos valores desta função de 1995 a 2020.

t	$P(t)$	t	$P(t)$
1995	5,2	2010	6,7
2000	5,5	2015	7,7
2005	6,1	2020	8,9

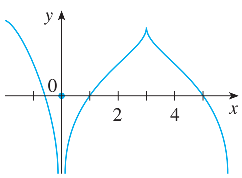
(a) Qual o significado de $P'(t)$? Quais são suas unidades?
(b) Construa uma tabela de valores para $P'(t)$.
(c) Faça os gráficos de P e P'.

37–40 O gráfico de f é dado. Indique os números nos quais f não é diferenciável.

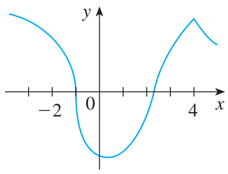
37.



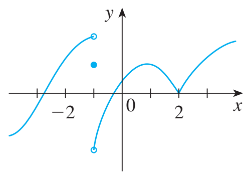
38.



39.



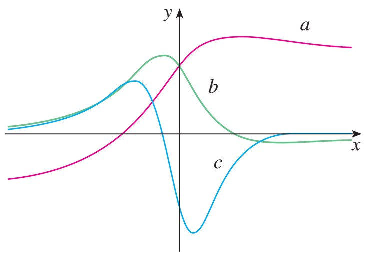
40.



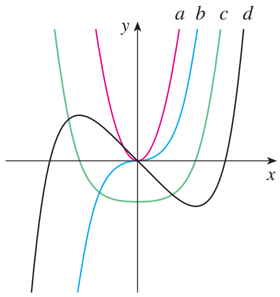
41. Faça o gráfico da função $f(x) = x + \sqrt{|x|}$. Dê *zoom* primeiro em direção ao ponto $(-1, 0)$ e, então, em direção à origem. Qual a diferença entre os comportamentos de f próximo a esses dois pontos? O que você conclui sobre a diferenciabilidade de f?

42. Dê *zoom* em direção aos pontos $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$ sobre o gráfico da função $g(x) = (x^2 - 1)^{2/3}$. O que você observa? Explique o que você viu em termos da diferenciabilidade de g.

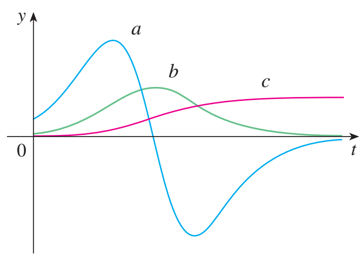
43. A figura mostra os gráficos de f, f' e f''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



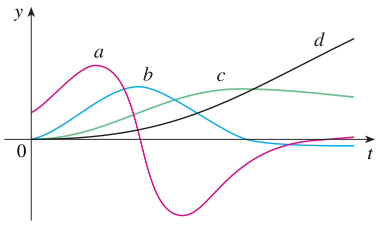
44. A figura mostra os gráficos de f, f', f'' e f'''. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



45. A figura mostra os gráficos de três funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro e outra é sua aceleração. Identifique cada curva e explique suas escolhas.



46. A figura mostra os gráficos de quatro funções. Uma é a função da posição de um carro, outra é a velocidade do carro, outra é sua aceleração e outra é seu *jerk*. Identifique cada curva e explique suas escolhas.

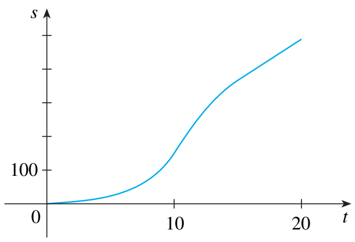


47–48 Use a definição de derivada para encontrar $f'(x)$ e $f''(x)$. A seguir, trace f, f' e f'' em uma mesma tela e verifique se suas respostas são razoáveis.

47. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ **48.** $f(x) = x^3 - 3x$

49. Se $f(x) = 2x^2 - x^3$, encontre $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ e $f^{(4)}(x)$. Trace f, f', f'' e f''' em uma única tela. Os gráficos são consistentes com as interpretações geométricas destas derivadas?

50. (a) É mostrado o gráfico da função posição de um veículo, onde s é medido em metros e t, em segundos. Use-o para traçar a velocidade e a aceleração do veículo. Qual é a aceleração em $t = 10$ segundos?



(b) Use a curva da aceleração da parte (a) para estimar o *jerk* em $t = 10$ segundos. Qual a unidade do *jerk*?

51. Seja $f(x) = \sqrt[3]{x}$.
(a) Se $a \neq 0$, use a Equação 2.7.5 para encontrar $f'(a)$.
(b) Mostre que $f'(0)$ não existe.
(c) Mostre que $y = \sqrt[3]{x}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$. (Relembre o formato do gráfico de f. Veja a Figura 13 na Seção 1.2.)

52. (a) Se $g(x) = x^{2/3}$, mostre que $g'(0)$ não existe.
(b) Se $a \neq 0$, encontre $g'(a)$.
(c) Mostre que $y = x^{2/3}$ tem uma reta tangente vertical em $(0, 0)$.
(d) Ilustre a parte (c) fazendo o gráfico de $y = x^{2/3}$.

53. Mostre que a função $f(x) = |x - 6|$ não é diferenciável em 6. Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

54. Onde a função maior inteiro $f(x) = [\![x]\!]$ não é diferenciável? Encontre uma fórmula para f' e esboce seu gráfico.

55. (a) Esboce o gráfico da função $f(x) = x|x|$.
(b) Para quais valores de x é f diferenciável?
(c) Encontre uma fórmula para f'.

56. As derivadas **à esquerda** e **à direita** de F em a são definidas por

$$f'_-(a) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

e

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se esses limites existirem. Então $f'(a)$ existe se, e somente se, essas derivadas unilaterais existirem e forem iguais.
(a) Encontre $f'_-(4)$ e $f'_+(4)$ para a função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 5 - x & \text{se } 0 < x < 4 \\ \dfrac{1}{5 - x} & \text{se } x \geqslant 4 \end{cases}$$

(b) Esboce o gráfico de f.
(c) Onde f é descontínua?
(d) Onde f não é diferenciável?

57. Lembre-se de que uma função f é chamada *par* se $f(-x) = f(x)$ para todo x em seu domínio, e *ímpar* se $f(-x) = -f(x)$ para cada um destes x. Demonstre cada uma das afirmativas a seguir.
(a) A derivada de uma função par é uma função ímpar.
(b) A derivada de uma função ímpar é uma função par.

58. Quando você abre uma torneira de água quente, a temperatura T da água depende de quanto tempo a água está fluindo.
(a) Esboce um gráfico possível de T como uma função do tempo t que decorreu desde que a torneira foi aberta.
(b) Descreva como é a taxa de variação de T em relação a t quando t está crescendo.
(c) Esboce um gráfico da derivada de T.

59. Seja ℓ a reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $(1, 1)$. O *ângulo de inclinação* de ℓ é o ângulo ϕ que ℓ faz com a direção positiva do eixo x. Calcule ϕ com a precisão de um grau.

2 Revisão

Verificação de Conceitos

1. Explique o significado de cada um dos limites a seguir e ilustre com um esboço.
(a) $\lim_{x \to a} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$
(c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (d) $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$
(e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

2. Descreva as várias situações nas quais um limite pode não existir. Ilustre-as com figuras.

3. Enuncie cada uma das seguintes Propriedades dos Limites.
(a) Propriedade da Soma (b) Propriedade da Diferença
(c) Propriedade do Múltiplo (d) Propriedade do Produto Constante
(e) Propriedade do Quociente (f) Propriedade da Potência
(g) Propriedade da Raiz

4. O que afirma o Teorema do Confronto?

5. (a) O que significa dizer que uma reta $x = a$ é uma assíntota vertical da curva $y = f(x)$? Trace curvas que ilustrem cada uma das várias possibilidades.

TEC *Visual 3.1* usa um escopo de inclinação para ilustrar essa fórmula.

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Assim, a função exponencial $f(x) = e^x$ tem a propriedade de ser sua própria derivada. O significado geométrico desse fato é que a inclinação da reta tangente à curva $y = e^x$ é igual à coordenada y do ponto (veja a Figura 7).

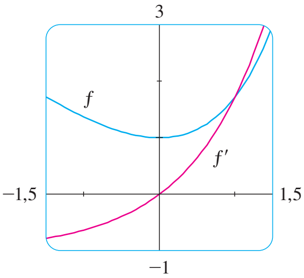


FIGURA 8

EXEMPLO 8 Se $f(x) = e^x - x$, encontre f' e f''. Compare os gráficos de f e f'.

SOLUÇÃO Usando a Regra da Diferença, temos

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

Na Seção 2.8 definimos a segunda derivada como a derivada de f', de modo que

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(e^x - 1) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(1) = e^x$$

A Figura 8 exibe os gráficos da função f e sua derivada f'. Observe que f tem uma tangente horizontal quando $x = 0$, o que corresponde ao fato de que $f'(0) = 0$. Observe também que, para $x > 0$, $f'(x)$ é positivo e f é crescente. Quando $x < 0$, $f'(x)$ é negativo e f é decrescente.

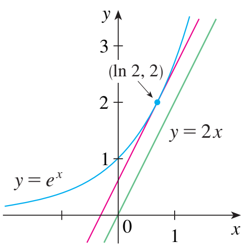


FIGURA 9

EXEMPLO 9 Em que ponto da curva $y = e^x$ sua reta tangente é paralela à reta $y = 2x$?

SOLUÇÃO Uma vez que $y = e^x$, temos $y' = e^x$. Seja a coordenada x do ponto em questão a. Então a inclinação da reta tangente nesse ponto é e^a. Essa reta tangente será paralela à reta $y = 2x$ se ela tiver a mesma inclinação, ou seja, 2. Igualando as inclinações, obtemos

$$e^a = 2 \qquad a = \ln 2$$

Portanto, o ponto pedido é $(a, e^a) = (\ln 2, 2)$ (veja a Figura 9).

3.1 Exercícios

1. (a) Como é definido o número e?
(b) Use uma calculadora para estimar os valores dos limites

$$\lim_{h \to 0} \frac{2{,}7^h - 1}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0} \frac{2{,}8^h - 1}{h}$$

com precisão até a segunda casa decimal. O que você pode concluir sobre o valor de e?

2. (a) Esboce, à mão, o gráfico da função $f(x) = e^x$, prestando particular atenção em como o gráfico cruza o eixo y. Que fato lhe permite fazer isso?
(b) Que tipos de funções são $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^e$? Compare as fórmulas de derivação para f e g.
(c) Qual das funções da parte (b) cresce mais rapidamente quando x é grande?

3–32 Derive a função.

3. $f(x) = 186{,}5$

4. $f(x) = \sqrt{30}$

5. $f(x) = 5x - 1$

6. $F(x) = -4x^{10}$

7. $f(x) = x^3 - 4x + 6$

8. $f(t) = 1{,}4t^5 - 2{,}5t^2 + 6{,}7$

9. $g(x) = x^2(1 - 2x)$

10. $h(x) = (x - 2)(2x + 3)$

11. $y = x^{-2/5}$

12. $B(y) = cy^{-6}$

13. $A(s) = -\dfrac{12}{s^5}$

14. $y = x^{5/3} - x^{2/3}$

15. $R(a) = (3a + 1)^2$

16. $h(t) = \sqrt[4]{t} - 4e^t$

17. $S(p) = \sqrt{p} - p$

18. $y = \sqrt{x}\,(x - 1)$

19. $y = 3e^x + \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

20. $S(R) = 4\pi R^2$

21. $h(u) = Au^3 + Bu^2 + Cu$

22. $y = \dfrac{\sqrt{x} + x}{x^2}$

23. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{\sqrt{x}}$

24. $g(u) = \sqrt{2}\,u + \sqrt{3u}$

25. $j(x) = x^{2{,}4} + e^{2{,}4}$

26. $k(r) = e^r + r^e$

27. $H(x) = (x + x^{-1})^3$

28. $y = ae^v + \dfrac{b}{v} + \dfrac{c}{v^2}$

É necessário uma calculadora gráfica ou computador

1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

29. $u = \sqrt[5]{t} + 4\sqrt{t^5}$

30. $v = \left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

31. $z = \dfrac{A}{y^{10}} + Be^y$

32. $y = e^{x+1} + 1$

33–34 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

33. $y = \sqrt[4]{x}$, $(1, 1)$

34. $y = x^4 + 2x^2 - x$, $(1, 2)$

35–36 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto dado.

35. $y = x^4 + 2e^x$, $(0, 2)$

36. $y = x^2 - x^4$, $(1, 0)$

37–38 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado Ilustre com o gráfico da curva e da reta tangente na mesma tela.

37. $y = 3x^2 - x^3$, $(1, 2)$

38. $y = x - \sqrt{x}$, $(1, 0)$

39–40 Encontre $f'(x)$. Compare os gráficos de f e f' e use-os para explicar por que sua resposta é razoável.

39. $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$

40. $f(x) = x^5 - 2x^3 + x - 1$

41. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 7x + 30$ na janela retangular $[-3, 5]$ por $[-10, 50]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de f' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com seu esboço da parte (b).

42. (a) Use uma calculadora gráfica ou computador para fazer o gráfico da função $g(x) = e^x - 3x^2$ na janela retangular $[-1, 4]$ por $[-8, 8]$.
(b) Usando o gráfico da parte (a) para estimar as inclinações, faça um esboço, à mão, do gráfico de g' (veja o Exemplo 7 na Seção 2.8).
(c) Calcule $g'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de g'. Compare com seu esboço da parte (b).

43–44 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função

43. $f(x) = 10x^{10} + 5x^5 - x$

44. $G(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$

45–46 Encontre a primeira e a segunda derivadas da função. Verifique se suas respostas são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

45. $f(x) = 2x - 5x^{3/4}$

46. $f(x) = e^x - x^3$

47. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^3 - 3t$, em que x está em metros e t, em segundos. Encontre
(a) a velocidade e a aceleração como funções de t,
(b) a aceleração depois de 2 s e
(c) a aceleração quando a velocidade for 0.

48. A equação de movimento de uma partícula é $s = t^4 - 2t^3 + t^2 - t$, em que s está em metros e t, em segundos.
(a) Encontre a velocidade e a aceleração como funções de t.
(b) Encontre a aceleração depois de 1 s.
(c) Trace o gráfico das funções de posição, velocidade e aceleração na mesma tela.

49. A Lei de Boyle diz que, quando uma amostra de gás é comprimida em uma pressão contante, a pressão P do gás é inversamente proporcional ao volume V do gás.
(a) Suponha que a pressão de uma amostra de ar que ocupa 0,106 m^3 a 25 ºC seja de 50 kPa. Escreva V como uma função de P.
(b) Calcule dV/dP quando $P = 50$ kPa. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades?

50. Os pneus de automóveis precisam ser inflados corretamente porque uma pressão interna inadequada pode causar um desgaste prematuro. Os dados na tabela mostram a vida útil do pneu L (em milhares de quilômetros) para um certo tipo de pneu em diversas pressões P (em kPa).

P	179	193	214	242	262	290	311
L	80	106	126	130	119	113	95

(a) Use uma calculadora gráfica ou computador para modelar a vida do pneu como uma função quadrática da pressão.
(b) Use o modelo para estimar dL/dP quando $P = 200$ e quando $P = 300$. Qual o significado da derivada? Quais são suas unidades? Qual é o significado dos sinais das derivadas?

51. Ache os pontos sobre a curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ onde a tangente é horizontal.

52. Que valores de x fazem com que o gráfico de $f(x) = e^x - 2x$ tenha uma reta tangente horizontal?

53. Mostre que a curva $y = 2e^x + 3x + 5x^3$ não tem reta tangente com inclinação 2.

54. Encontre uma equação para a reta tangente à curva $y = x\sqrt{x}$ que seja paralela à reta $y = 1 + 3x$.

55. Encontre equações para ambas as retas que são tangentes à curva $y = 1 + x^3$ e que são paralelas à reta $12x - y = 1$.

56. Em qual ponto sobre a curva $y = 1 + 2e^x - 3x$ a reta tangente é paralela à reta $3x - y = 5$? Ilustre fazendo o gráfico da curva e de ambas as retas.

57. Encontre uma equação para a reta normal à parábola $y = x^2 - 5x + 4$ que seja paralela à reta $x - 3y = 5$.

58. Onde a reta normal à parábola $y = x - x^2$ no ponto $(1, 0)$ intercepta a parábola uma segunda vez? Ilustre com um esboço.

59. Trace um diagrama para mostrar que há duas retas tangentes à parábola $y = x^2$ que passam pelo ponto $(0, -4)$. Encontre as coordenadas dos pontos onde essas retas tangentes interceptam a parábola.

60. (a) Encontre as equações de ambas as retas pelo ponto $(2, -3)$ que são tangentes à parábola $y = x^2 + x$.
(b) Mostre que não existe nenhuma reta que passe pelo ponto $(2, 7)$ e que seja tangente à parábola. A seguir, desenhe um diagrama para ver por quê.

61. Use a definição de derivada para mostrar que, se $f(x) = 1/x$, então $f'(x) = -1/x^2$. (Isso demonstra a Regra da Potência para o caso $n = -1$.)

62. Encontre a n-ésima derivada de cada função calculando algumas das primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.
(a) $f(x) = x^n$ (b) $f(x) = 1/x$

63. Encontre um polinômio de segundo grau P tal quer $P(2) = 5$, $P'(2) = 3$ e $P''(2) = 2$.

64. A equação $y'' + y' - 2y = x^2$ é chamada **equação diferencial**, pois envolve uma função desconhecida y e suas derivadas y' e y''. Encontre as constantes A, B e C tais que a função $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaça essa equação. (As equações diferenciais serão estudadas no Capítulo 9, no Volume II.)

65. Encontre uma função cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cujo gráfico tenha tangentes horizontais nos pontos $(-2, 6)$ e $(2, 0)$.

66. Encontre uma parábola com a equação $y = ax^2 + bx + c$ que tenha inclinação 4 em $x = 1$, inclinação -8 em $x = -1$, e passe pelo ponto $(2, 15)$.

67. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ x + 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

f é derivável em 1? Esboce gráficos de f e f'.

68. Em quais números a seguinte função g é derivável?

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2x - x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Dê uma fórmula para g' e esboce os gráficos de g e g'.

69. (a) Para quais valores de x a função $f(x) = |x^2 - 9|$ é derivável? Ache uma fórmula para f'.
(b) Esboce gráficos de f e f'.

70. Onde a função $h(x) = |x - 1| + |x + 2|$ é derivável? Dê uma fórmula para h' e esboce os gráficos de h e h'.

71. Encontre a parábola com equação $y = ax^2 + bx$ cuja reta tangente em $(1, 1)$ tem equação $y = 3x - 2$.

72. Suponha que a curva $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenha uma reta tangente quando $x = 0$ com equação $y = 2x + 1$, e uma reta tangente quando $x = 1$ com equação $y = 2 - 3x$. Encontre os valores de a, b, c e d.

73. Para quais valores de a e b a reta $2x + y = b$ é tangente à parábola $y = ax^2$ quando $x = 2$?

74. Encontre o valor de c tal que a reta $y = \frac{3}{2}x + 6$ seja tangente à curva $y = c\sqrt{x}$.

75. Considere

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Encontre os valores de m e b que tornem f derivável em toda parte.

76. Uma reta tangente à hipérbole $xy = c$ é traçada em um ponto P.
(a) Mostre que o ponto médio do segmento de reta cortado dessa reta tangente pelos eixos coordenados é P.
(b) Mostre que o triângulo formado pela reta tangente e pelos eixos coordenados sempre têm a mesma área, não importa onde P esteja localizado sobre a hipérbole.

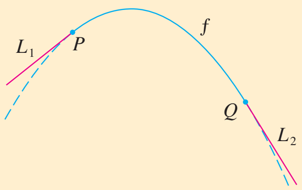
77. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{1.000} - 1}{x - 1}$

78. Trace um diagrama ilustrando duas retas perpendiculares que se interceptam sobre o eixo y, ambas tangentes à parábola $y = x^2$. Onde essas retas se interceptam?

79. Se $c > \frac{1}{2}$, quantas retas pelo ponto $(0, c)$ são normais à parábola $y = x^2$? E se $c \leqslant \frac{1}{2}$?

80. Esboce as parábolas $y = x^2$ e $y = x^2 - 2x + 2$. Você acha que existe uma reta que seja tangente a ambas as curvas? Em caso afirmativo, encontre sua equação. Em caso negativo, explique por que não.

PROJETO APLICADO — CONSTRUINDO UMA MONTANHA-RUSSA MELHOR



Flashon Studio/Shutterstock

Suponha que lhe peçam para projetar a primeira subida e descida de uma montanha-russa. Estudando fotografias de suas montanhas-russas favoritas, você decide fazer a subida com inclinação 0,8, e a descida com inclinação $-1{,}6$. Você decide ligar esses dois trechos retos $y = L_1(x)$ e $y = L_2(x)$ com parte de uma parábola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, em que x e $f(x)$ são medidos em metros. Para o percurso ser liso, não pode haver variações bruscas na direção, de modo que você quer que os segmentos L_1 e L_2 sejam tangentes à parábola nos pontos de transição P e Q (veja a figura). Para simplificar as equações, você decide colocar a origem em P.

1. (a) Suponha que a distância horizontal entre P e Q seja 30 m. Escreva equações em a, b e c que garantam que o percurso seja liso nos pontos de transição.
(b) Resolva as equações da parte (a) para a, b e c para encontrar uma fórmula para $f(x)$.
(c) Trace L_1, f e L_2 para verificar graficamente que as transições são lisas.
(d) Encontre a diferença de elevação entre P e Q.

2. A solução do Problema 1 pode *parecer* lisa, mas poderia não ocasionar a sensação de lisa, pois a função definida por partes [que consiste em $L_1(x)$ para $x < 0$, $f(x)$ para $0 \leqslant x \leqslant 30$, e $L_2(x)$ para $x > 30$] não tem uma segunda derivada contínua. Assim, você decide melhorar seu projeto, usando uma função quadrática $q(x) = ax^2 + bx + c$ apenas no intervalo $3 \leqslant x \leqslant 27$ e conectando-a às funções lineares por meio de duas funções cúbicas:

$$g(x) = kx^3 + lx^2 + mx + n \qquad 0 \leqslant x < 3$$
$$h(x) = px^3 + qx^2 + rx + s \qquad 27 < x \leqslant 30$$

(a) Escreva um sistema de equações em 11 incógnitas que garanta que as funções e suas primeiras duas derivadas coincidam nos pontos de transição.
SCA (b) Resolva as equações da parte (a) com um sistema de computação algébrica para encontrar fórmulas para $q(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.
(c) Trace L_1, g, q, h e L_2, e compare com o gráfico do Problema 1(c).

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador

SCA É necessário usar um sistema de computação algébrica

3.2 Exercícios

1. Encontre a derivada $f(x) = (1 + 2x^2)(x - x^2)$ de duas formas: usando a Regra do Produto e efetuando primeiro a multiplicação. As respostas são iguais?

2. Encontre a derivada da função
$$F(x) = \frac{x^4 - 5x^3 + \sqrt{x}}{x^2}$$
de duas formas: usando a Regra do Quociente e simplificando antes. Mostre que suas respostas são equivalentes. Qual método você prefere?

3–26 Derive.

3. $f(x) = (x^3 + 2x)e^x$

4. $g(x) = \sqrt{x}\, e^x$

5. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

6. $y = \dfrac{e^x}{1 + x}$

7. $g(x) = \dfrac{3x - 1}{2x + 1}$

8. $f(t) = \dfrac{2t}{4 + t^2}$

9. $H(u) = \left(u - \sqrt{u}\right)\left(u + \sqrt{u}\right)$

10. $J(\mathrm{v}) = (\mathrm{v}^3 - 2\mathrm{v})(\mathrm{v}^{-4} + \mathrm{v}^{-2})$

11. $F(y) = \left(\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{3}{y^4}\right)(y + 5y^3)$

12. $f(z) = (1 - e^z)(z + e^z)$

13. $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}$

14. $y = \dfrac{x + 1}{x^3 + x - 2}$

15. $y = \dfrac{t^2 + 2}{t^4 - 3t^2 + 1}$

16. $y = \dfrac{t}{(t - 1)^2}$

17. $y = e^p\left(p + p\sqrt{p}\right)$

18. $y = \dfrac{1}{s + ke^s}$

19. $y = \dfrac{\mathrm{v}^3 - 2\mathrm{v}\sqrt{\mathrm{v}}}{\mathrm{v}}$

20. $z = w^{3/2}(w + ce^w)$

21. $f(t) = \dfrac{2t}{2 + \sqrt{t}}$

22. $g(t) = \dfrac{t - \sqrt{t}}{t^{1/3}}$

23. $f(x) = \dfrac{A}{B + Ce^x}$

24. $f(x) = \dfrac{1 - xe^x}{x + e^x}$

25. $f(x) = \dfrac{x}{x + \dfrac{c}{x}}$

26. $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

27–30 Encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.

27. $f(x) = x^4 e^x$

28. $f(x) = x^{5/2} e^x$

29. $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + 2x}$

30. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

31–32 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto especificado.

31. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x + 1}$, $(1, 0)$

32. $y = \dfrac{e^x}{x}$, $(1, e)$

33–34 Encontre equações para a reta tangente e para a reta normal à curva no ponto especificado.

33. $y = 2xe^x$, $(0, 0)$

34. $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$, $(1, 1)$

35. (a) A curva $y = 1/(1 + x^2)$ é chamada **bruxa de Maria Agnesi**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

36. (a) A curva $y = x/(1 + x^2)$ é denominada **serpentina**. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto (3; 0,3).
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

37. (a) Se $f(x) = (x^3 - x)e^x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

38. (a) Se $f(x) = e^x/(2x^2 + x + 1)$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta em (a) é razoável, comparando os gráficos de f e f'.

39. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)/(x^2 + 1)$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

40. (a) Se $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique se suas respostas em (a) são razoáveis, comparando os gráficos de f, f' e f''.

41. Se $f(x) = x^2/(1 + x)$, encontre $f''(1)$.

42. Se $g(x) = x/e^x$, encontre $g^{(n)}(x)$.

43. Suponha que $f(5) = 1$, $f'(5) = 6$, $g(5) = -3$ e $g'(5) = 2$. Encontre os seguintes valores.
(a) $(fg)'(5)$ (b) $(f/g)'(5)$ (c) $(g/f)'(5)$

44. Suponha que $f(2) = -3$, $g(2) = 4$, $f'(2) = -2$ e $g'(2) = 7$. Encontre $h'(2)$.
(a) $h(x) = 5f(x) - 4g(x)$ (b) $h(x) = f(x)g(x)$
(c) $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (d) $h(x) = \dfrac{g(x)}{1 + f(x)}$

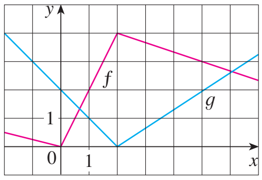
45. Se $f(x) = e^x g(x)$, onde $g(0) = 2$ e $g'(0) = 5$, encontre $f'(0)$.

46. Se $h(2) = 4$ e $h'(2) = -3$, encontre
$$\left.\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right)\right|_{x=2}$$

47. Se $g(x) = xf(x)$, onde $f(3) = 4$ e $f'(3) = -2$, encontre uma equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto onde $x = 3$.

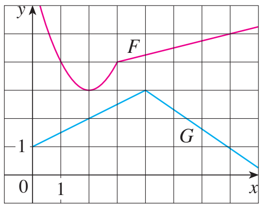
48. Se $f(2) = 10$ e $f'(x) = x^2 f(x)$ para todo x, encontre $f''(2)$.

49. Se f e g são as funções cujos gráficos estão ilustrados, sejam $u(x) = f(x)g(x)$ e $\mathrm{v}(x) = f(x)/g(x)$.
(a) Encontre $u'(1)$. (b) Encontre $v'(5)$.



50. Sejam $P(x) = F(x)G(x)$ e $Q(x) = F(x)/G(x)$, onde F e G são as funções cujos gráficos estão representados a seguir.

(a) Encontre $P'(2)$. (b) Encontre $Q'(7)$.



51. Se g for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = xg(x)$ (b) $y = \dfrac{x}{g(x)}$ (c) $y = \dfrac{g(x)}{x}$

52. Se f for uma função derivável, encontre uma expressão para a derivada de cada uma das seguintes funções.

(a) $y = x^2 f(x)$ (b) $y = \dfrac{f(x)}{x^2}$

(c) $y = \dfrac{x^2}{f(x)}$ (d) $y = \dfrac{1 + xf(x)}{\sqrt{x}}$

53. Quantas retas tangentes à curva $y = x/(x + 1)$ passam pelo ponto $(1, 2)$? Em quais pontos essas retas tangentes tocam a curva?

54. Encontre as equações de retas tangentes à curva

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

que sejam paralelas à reta $x - 2y = 2$.

55. Encontre $R'(0)$, onde

$$R(x) = \frac{x - 3x^3 + 5x^5}{1 + 3x^3 + 6x^6 + 9x^9}$$

Dica: em vez de encontrar $R'(x)$ primeiro, deixe $f(x)$ ser o numerador e $g(x)$, o denominador de $R(x)$, e compute $R'(0)$ de $f(0)$, $f'(0)$, $g(0)$ e $g'(0)$.

56. Use o método do Exercício 55 para computar $Q'(0)$, onde

$$Q(x) = \frac{1 + x + x^2 + xe^x}{1 - x + x^2 - xe^x}$$

57. Neste exercício, estimaremos a taxa segundo a qual a renda pessoal total está subindo na área metropolitana da cidade de Richmond-Petersburg, Virgínia. Em julho de 1999, a população dessa área era de 961.400, e estava crescendo aproximadamente em 9.200 pessoas por ano. O rendimento anual médio era de \$ 30.593 *per capita*, e essa média crescia em torno de \$ 1.400 por ano (bem acima da média nacional, de cerca de \$ 1.225 anuais). Use a Regra do Produto e os dados aqui fornecidos para estimar a taxa segundo a qual a renda pessoal total estava crescendo em Richmond-Petersburg em julho de 1999. Explique o significado de cada termo na Regra do Produto.

58. Um fabricante produz peças de tecido com tamanho fixo. A quantidade q de cada peça de tecido (medida em metros) vendida é uma função do preço p (em dólares por metro); logo, podemos escrever $q = f(p)$. Então, a receita total conseguida com o preço de venda p é $R(p) = pf(p)$.

(a) O que significa dizer que $f(20) = 10\,000$ e $f'(20) = -350$?

(b) Tomando os valores da parte (a), encontre $R'(20)$ e interprete sua resposta.

59. (a) Use duas vezes a Regra do Produto para demonstrar que, se f, g e h forem deriváveis, então $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

(b) Fazendo $f = g = h$ na parte (a), mostre que

$$\frac{d}{dx}[f(x)]^3 = 3[f(x)]^2 f'(x).$$

(c) Use a parte (b) para derivar $y = e^{3x}$.

60. (a) Se $F(x) = f(x)\,g(x)$, onde f e g têm derivadas de todas as ordens, mostre que $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

(b) Encontre fórmulas análogas para F''' e $F^{(4)}$.

(c) Conjecture uma fórmula para $F^{(n)}$.

61. Encontre expressões para as primeiras cinco derivadas de $f(x) = x^2e^x$. Você percebe um padrão nestas expressões? Crie uma fórmula para $f^{(n)}(x)$ e demonstre-a usando a indução matemática.

62. (a) Se g for derivável, a **Regra do Recíproco** diz que

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right] = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Use a Regra do Quociente para demonstrar a Regra do Recíproco.

(b) Use a Regra do Recíproco para derivar a função do Exercício 18.

(c) Use a Regra do Recíproco para verificar que a Regra da Potência é válida para os inteiros negativos, isto é,

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

para todo inteiro positivo n.

3.3 Exercícios

1–16 Derive.

1. $f(x) = 3x^2 - 2\cos x$

2. $f(x) = \sqrt{x}\,\operatorname{sen} x$

3. $f(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{cotg} x$

4. $y = 2\sec x - \operatorname{cossec} x$

5. $g(t) = t^3 \cos t$

6. $g(t) = 4\sec t + \operatorname{tg} t$

7. $h(\theta) = \operatorname{cossec}\theta + e^{\theta}\operatorname{cotg}\theta$

8. $y = e^u(\cos u + cu)$

9. $y = \dfrac{x}{2 - \operatorname{tg} x}$

10. $y = \operatorname{sen}\theta\,\cos\theta$

11. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \operatorname{sen} x}$

13. $y = \dfrac{t\,\operatorname{sen} t}{1 + t}$

14. $y = \dfrac{1 - \sec x}{\operatorname{tg} x}$

15. $f(x) = xe^x \operatorname{cossec} x$

16. $y = x^2 \operatorname{sen} x\,\operatorname{tg} x$

17. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cossec} x) = -\operatorname{cossec} x\,\operatorname{cotg} x$.

18. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\,\operatorname{tg} x$.

19. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{cotg} x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

20. Demonstre, pela definição de derivada, que se $f(x) = \cos x$, então $f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

21–24 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

21. $y = \sec x, \quad (\pi/3, 2)$

22. $y = e^x \cos x, \quad (0, 1)$

23. $y = \cos x - \operatorname{sen} x, \quad (\pi, -1)$

24. $y = x + \operatorname{tg} x, \quad (\pi, \pi)$

25. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2x\,\operatorname{sen} x$ no ponto $(\pi/2, \pi)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

26. **(a)** Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 3x + 6\cos x$ no ponto $(\pi/3, \pi + 3)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

27. (a) Se $f(x) = \sec x - x$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta para a parte (a) é razoável fazendo os gráficos de f e f' para $|x| < \pi/2$.

28. (a) Se $f(x) = e^x \cos x$, encontre $f'(x)$ e $f''(x)$.
(b) Verifique que suas respostas para a parte (a) são razoáveis fazendo os gráficos de f, f' e f''.

29. Se $H(\theta) = \theta\,\operatorname{sen}\theta$, encontre $H'(\theta)$ e $H''(\theta)$.

30. Se $f(t) = \operatorname{cossec} t$, encontre $f''(\pi/6)$.

31. (a) Use a Regra do Quociente para derivar a função

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$$

(b) Simplifique a expressão para $f(x)$ escrevendo-a em termos de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e, então, encontre $f'(x)$.
(c) Mostre que suas respostas para as partes (a) e (b) são equivalentes.

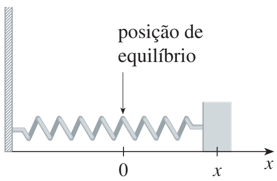
32. Suponha $f(\pi/3) = 4$ e $f'(\pi/3) = -2$, e faça $g(x) = f(x)\,\operatorname{sen} x$ e $h(x) = (\cos x)/f(x)$. Encontre
(a) $g'(\pi/3)$
(b) $h'(\pi/3)$

33–34 Para quais valores de x o gráfico de f tem uma reta tangente horizontal?

33. $f(x) = x + 2\operatorname{sen} x$

34. $f(x) = e^x \cos x$

35. Um corpo em uma mola vibra horizontalmente sobre uma superfície lisa (veja a figura). Sua equação de movimento é $x(t) = 8\operatorname{sen} t$, onde t está em segundos e x, em centímetros.
(a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
(b) Encontre a posição, velocidade e aceleração do corpo na posição de equilíbrio $t = 2\pi/3$. Em que direção ele está se movendo nesse momento?



36. Uma tira elástica é presa a um gancho e uma massa é presa na ponta inferior da tira. Quando o corpo é puxado para baixo e então solto, ele vibra verticalmente. A equação do movimento é $s = 2\cos t + 3\operatorname{sen} t$, $t \geqslant 0$, onde s é medido em centímetros e t, em segundos. (Consideremos o sentido positivo como para baixo.)
(a) Encontre a velocidade e a aceleração no tempo t.
(b) Faça os gráficos das funções velocidade e aceleração.
(c) Quando o corpo passa pela posição de equilíbrio pela primeira vez?
(d) A que distância da posição de equilíbrio o corpo chega?
(e) Quando a velocidade é máxima?

37. Uma escada com 6 m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Seja θ o ângulo entre o topo da escada e a parede e x, a distância do pé da escada até a parede. Se o pé da escada escorregar para longe da parede, com que velocidade x variará em relação a θ quando $\theta = \pi/3$?

38. Um objeto de massa m é arrastado ao longo de um plano horizontal por uma força agindo ao longo de uma corda atada ao objeto. Se a corda faz um ângulo θ com o plano, então a intensidade da força é

$$F = \frac{\mu m g}{\mu\,\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$$

onde μ é uma constante chamada *coeficiente de atrito*.
(a) Encontre a taxa de variação de F em relação a θ.
(b) Quando essa taxa de variação é igual a 0?
(c) Se $m = 20$ kg, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $\mu = 0{,}6$, faça o gráfico de F como uma função de θ e use-o para encontrar o valor de θ para o qual $dF/d\theta = 0$. Esse valor é consistente com a resposta dada na parte (b)?

39–48 Encontre o limite

39. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{x}$

40. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{\text{sen } 6x}$

41. $\lim_{t \to 0} \frac{\text{tg } 6t}{\text{sen } 2t}$

42. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\cos \theta - 1}{\text{sen } \theta}$

43. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x}{5x^3 - 4x}$

44. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 3x \text{ sen } 5x}{x^2}$

45. $\lim_{\theta \to 0} \frac{\text{sen } \theta}{\theta + \text{tg } \theta}$

46. $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^2)}{x}$

47. $\lim_{x \to \pi/4} \frac{1 - \text{tg } x}{\text{sen } x - \cos x}$

48. $\lim_{x \to 1} \frac{\text{sen}(x - 1)}{x^2 + x - 2}$

49–50 Encontre a derivada dada, encontrando as primeiras derivadas e observando o padrão que ocorre.

49. $\frac{d^{99}}{dx^{99}}(\text{sen } x)$

50. $\frac{d^{35}}{dx^{35}}(x \text{ sen } x)$

51. Encontre constantes A e B de forma que a função $y = A \text{ sen } x + B \cos x$ satisfaça a equação diferencial $y'' + y' - 2y = \text{sen } x$.

52. (a) Avalie $\lim_{x \to \infty} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

(b) Avalie $\lim_{x \to 0} x \text{ sen } \frac{1}{x}$.

(c) Ilustre as partes (a) e (b) fazendo o gráfico de $y = x \text{ sen}(1/x)$.

53. Derive cada identidade trigonométrica para obter uma nova identidade (ou uma familiar).

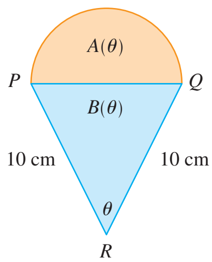
(a) $\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$

(b) $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

(c) $\text{sen } x + \cos x = \frac{1 + \text{cotg } x}{\text{cossec } x}$

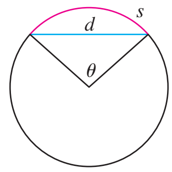
54. Um semicírculo com diâmetro PQ está sobre um triângulo isósceles PQR para formar uma região com um formato de sorvete, conforme mostra a figura. Se $A(\theta)$ é a área do semicírculo e $B(\theta)$ é a área do triângulo, encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{A(\theta)}{B(\theta)}$$



55. A figura mostra um arco de círculo com comprimento s e uma corda com comprimento d, ambos subentendidos por um ângulo central θ. Encontre

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{s}{d}$$



56. Seja $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$.

(a) Faça o gráfico de f. Que tipo de descontinuidade parece ocorrer em 0?

(b) Calcule os limites laterais de f em 0. Esses valores confirmam sua resposta para a parte (a)?

3.4 A Regra da Cadeia

Suponha que você precise derivar a função

$$F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Veja a Seção 1.3 para uma revisão das funções compostas.

As fórmulas de derivação que você aprendeu nas seções precedentes deste capítulo não lhe permitem calcular $F'(x)$.

Observe que F é uma função composta. Na realidade, se assumirmos $y = f(u) = \sqrt{u}$ e $u = g(x) = x^2 + 1$, então poderemos escrever $y = F(x) = f(g(x))$, ou seja, $F = f \circ g$. Sabemos como derivar ambas, f e g, então seria útil ter uma regra que nos dissesse como achar a derivada de $F = f \circ g$ em termos das derivadas de f e g.

O resultado é que a derivada da função composta $f \circ g$ é o produto das derivadas de f e g. Esse fato é um dos mais importantes das regras de derivação e é chamado *Regra da Cadeia*. Ela parece plausível se interpretarmos as derivadas como taxas de variação. Considere du/dx como a taxa de variação de u com relação a x, dy/du como a taxa de variação de y com relação a u, e dy/dx como a taxa de variação de y com relação a x. Se u variar duas vezes mais rápido que x, e y variar três vezes mais rápido que u, então parece plausível que y varie seis vezes mais rápido que x e, portanto, esperamos que logo, $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

Quando $\Delta x \to 0$, a Equação 8 mostra que $\Delta u \to 0$. Assim, $\varepsilon_1 \to 0$ e $\varepsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x \to 0$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} [f'(b) + \varepsilon_2][g'(a) + \varepsilon_1]$$

$$= f'(b)\,g'(a) = f'(g(a))\,g'(a)$$

Isso demonstra a Regra da Cadeia.

3.4 Exercícios

1–6 Escreva a função composta na forma $f(g(x))$. [Identifique a função de dentro $u = g(x)$ e a de fora $y = f(u)$.] Então, encontre a derivada dy/dx.

1. $y = \operatorname{sen} 4x$
2. $y = \sqrt{4 + 3x}$
3. $y = (1 - x^2)^{10}$
4. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sen} x)$
5. $y = e^{\sqrt{x}}$
6. $y = \sqrt{2 - e^x}$

7–46 Encontre a derivada da função.

7. $F(x) = (x^4 + 3x^2 - 2)^5$
8. $F(x) = (4x - x^2)^{100}$
9. $F(x) = \sqrt[4]{1 + 2x + x^3}$
10. $f(x) = (1 + x^4)^{2/3}$
11. $g(t) = \dfrac{1}{(t^4 + 1)^3}$
12. $f(t) = \sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} t}$
13. $y = \cos(a^3 + x^3)$
14. $y = a^3 + \cos^3 x$
15. $y = xe^{-kx}$
16. $y = e^{-2t} \cos 4t$
17. $f(x) = (2x - 3)^4(x^2 + x + 1)^5$
18. $g(x) = (x^2 + 1)^3(x^2 + 2)^6$
19. $h(t) = (t + 1)^{2/3}(2t^2 - 1)^3$
20. $F(t) = (3t - 1)^4(2t + 1)^{-3}$
21. $y = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$
22. $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2 + 1}{s^2 + 4}}$
23. $y = \sqrt{1 + 2e^{3x}}$
24. $y = 10^{1 - x^2}$
25. $y = 5^{-1/x}$
26. $G(y) = \dfrac{(y - 1)^4}{(y^2 + 2y)^5}$
27. $y = \dfrac{r}{\sqrt{r^2 + 1}}$
28. $y = \dfrac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}}$
29. $F(t) = e^{t \operatorname{sen} 2t}$
30. $F(v) = \left(\dfrac{v}{v^3 + 1}\right)^6$
31. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{tg} 2x)$
32. $y = \sec^2(m\theta)$
33. $y = 2^{\operatorname{sen} \pi x}$
34. $y = x^2 e^{-1/x}$
35. $y = \cos\left(\dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}\right)$
36. $y = \sqrt{1 + xe^{-2x}}$
37. $y = \cot^2(\operatorname{sen} \theta)$
38. $y = e^{k \operatorname{tg} \sqrt{x}}$
39. $f(t) = \operatorname{tg}(e^t) + e^{\operatorname{tg} t}$
40. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))$
41. $f(t) = \operatorname{sen}^2(e^{\operatorname{sen}^2 t})$
42. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
43. $g(x) = (2ra^{rx} + n)^p$
44. $y = 2^{3^{x^2}}$
45. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} \pi x)}$
46. $y = [x + (x + \operatorname{sen}^2 x)^3]^4$

47–50 Encontre y' e y''.

47. $y = \cos(x^2)$
48. $y = \cos^2 x$
49. $y = e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$
50. $y = e^{e^x}$

51–54 Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

51. $y = (1 + 2x)^{10}$, $(0, 1)$
52. $y = \sqrt{1 + x^3}$, $(2, 3)$
53. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$, $(\pi, 0)$
54. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$, $(0, 0)$

55. (a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = 2/(1 + e^{-x})$ no ponto $(0, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

56. (a) A curva $y = |x|/\sqrt{2 - x^2}$ é chamada *curva ponta de bala*. Encontre uma equação da reta tangente a essa curva no ponto $(1, 1)$.
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da curva e da tangente na mesma tela.

57. (a) Se $f(x) = x\sqrt{2 - x^2}$, encontre $f'(x)$.
(b) Verifique se sua resposta na parte (a) foi razoável comparando os gráficos de f e f'.

58. A função $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{sen} 2x)$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, aparece em aplicações à síntese de modulação de frequência (FM).
(a) Use um gráfico de f, feito por uma calculadora gráfica, para fazer um esboço rústico do gráfico de f'.
(b) Calcule $f'(x)$ e use essa expressão, com uma ferramenta gráfica, para fazer o gráfico de f'. Compare com o gráfico obtido no item (a).

59. Encontre todos os pontos do gráfico da função $f(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

60. Encontre as coordenadas x de todos os pontos sobre a curva $y = \operatorname{sen} 2x - 2 \operatorname{sen} x$ nos quais a reta tangente é horizontal.

61. Se $F(x) = f(g(x))$, onde $f(-2) = 8$, $f'(-2) = 4$, $f'(5) = 3$, $g(5) = -2$ e $g'(5) = 6$, encontre $F'(5)$.

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador
SCA Requer sistema de computação algébrica
1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com