3a lista de exercícios de Cálculo Diferencial e Integral

Exercícios selecionados do livro "Cálculo Vol. 1, do James Stewart, 7a edição”.

Fazer os seguintes exercícios:

Página 88, Exercício: 4.

Página 89, Exercícios: 5, 6, 11, 12.

Página 90, Exercícios: 29, 31, 33, 35, 37, 38(a).

Página 98, Exercícios: 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31.

Página 99, Exercícios: 36, 37, 39, 41, 43, 45, 48, 57, 58, 62.

Página 117, Exercícios: 4, 11, 17, 19.

Página 118, Exercícios: 22, 23, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47(a)-(b), 49, 51.

Página 128, Exercício: 4.

Página 129, Exercícios: 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 41, 43, 45.

Página 130, Exercícios: 53, 55.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Stewart, James
Cálculo, volume I / James Stewart ;
[tradução EZ2 Translate]. -- São Paulo :
Cengage Learning, 2013.

Título original: Cauculus : early
transcendentals
7. ed. americana.
Bibliografia.
ISBN 978-85-221-1461-0

1. Cálculo 2. Cálculo - Problemas, exercícios
etc. I. Título.

13-04310 CDD-515-515.076

Índices para catálogo sistemático:
1. Cálculo : Matemática 515
2. Exercícios : Cálculo : Matemática 515.076
3. Problemas : Cálculo : Matemática 515.076

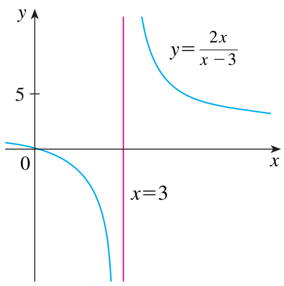


FIGURA 15

Analogamente, se x está próximo a 3 mas é menor que 3, então $x - 3$ é um número negativo pequeno, mas $2x$ ainda é um número positivo (próximo a 6). Portanto, $2x/(x - 3)$ é um número *negativo* grande. Assim,

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$$

O gráfico da curva $y = 2x/(x - 3)$ está dado na Figura 15. A reta $x = 3$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 10 Encontre as assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$.

SOLUÇÃO Como

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

existem assíntotas verticais em potencial nos pontos nos quais $\cos x = 0$. De fato, como $\cos x \to 0^+$ quando $x \to (\pi/2)^-$ e $\cos x \to 0^-$ quando $x \to (\pi/2)^+$, enquanto $\operatorname{sen} x$ é positivo quando x está próximo de $\pi/2$, temos

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \operatorname{tg} x = \infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(\pi/2)^+} \operatorname{tg} x = -\infty$$

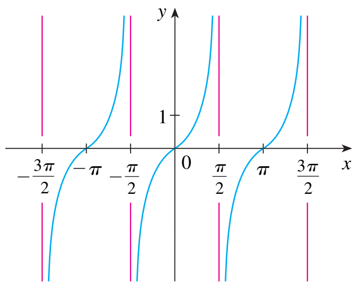


FIGURA 16
$y = \operatorname{tg} x$

Isso mostra que a reta $x = \pi/2$ é uma assíntota vertical. Um raciocínio similar mostra que as retas $x = (2n + 1)\pi/2$, onde n é um número inteiro, são todas assíntotas verticais de $f(x) = \operatorname{tg} x$. O gráfico da Figura 16 confirma isso.

Outro exemplo de uma função cujo gráfico tem uma assíntota vertical é a função logaritmo natural $y = \ln x$. Da Figura 17, vemos que

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$$

e, assim, a reta $x = 0$ (o eixo y) é uma assíntota vertical. Na realidade, isso é válido para $y = \log_a x$ desde que $a > 1$. (Veja as Figuras 11 e 12 na Seção 1.6.)

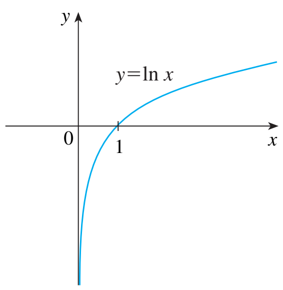


FIGURA 17
O eixo y é uma assíntota vertical da função logaritmo natural.

2.2 Exercícios

1. Explique com suas palavras o significado da equação

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 5$$

É possível que a equação anterior seja verdadeira, mas que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique o que significa dizer que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 3 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 7$$

Nesta situação, é possível que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista? Explique.

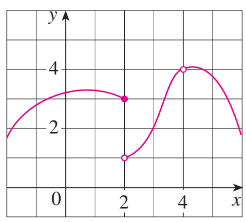
3. Explique o significado de cada uma das notações a seguir.

(a) $\lim_{x\to -3} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = -\infty$

4. Use o gráfico dado de f para dizer o valor de cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

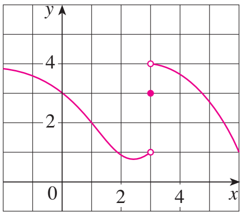
(d) $f(2)$ (e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ (f) $f(4)$



5. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga o valor de cada quantidade indicada, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 3} f(x)$ (e) $f(3)$



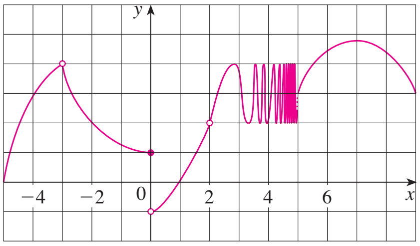
6. Para a função h cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to -3^-} h(x)$ (b) $\lim_{x\to -3^+} h(x)$ (c) $\lim_{x\to -3} h(x)$

(d) $h(-3)$ (e) $\lim_{x\to 0^-} h(x)$ (f) $\lim_{x\to 0^+} h(x)$

(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$ (h) $h(0)$ (i) $\lim_{x\to 2} h(x)$

(j) $h(2)$ (k) $\lim_{x\to 5^+} h(x)$ (l) $\lim_{x\to 5^-} h(x)$

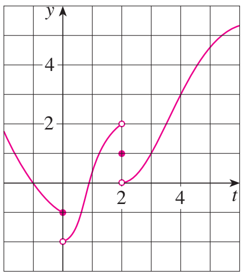


7. Para a função g cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{t\to 0^-} g(t)$ (b) $\lim_{t\to 0^+} g(t)$ (c) $\lim_{t\to 0} g(t)$

(d) $\lim_{t\to 2^-} g(t)$ (e) $\lim_{t\to 2^+} g(t)$ (f) $\lim_{t\to 2} g(t)$

(g) $g(2)$ (h) $\lim_{t\to 4} g(t)$

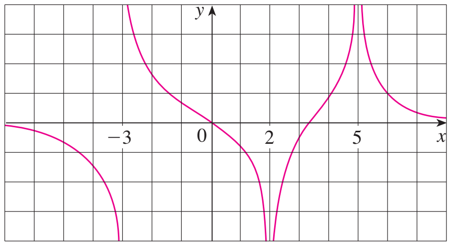


8. Para a função R, cujo gráfico é mostrado a seguir, diga quem são:

(a) $\lim_{x\to 2} R(x)$ (b) $\lim_{x\to 5} R(x)$

(c) $\lim_{x\to -3^-} R(x)$ (d) $\lim_{x\to -3^+} R(x)$

(e) As equações das assíntotas verticais.

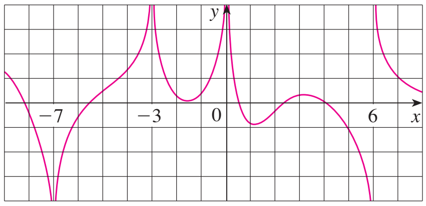


9. Para a função f cujo gráfico é mostrado a seguir, determine o seguinte:

(a) $\lim_{x\to -7} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -3} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

(d) $\lim_{x\to 6^-} f(x)$ (e) $\lim_{x\to 6^+} f(x)$

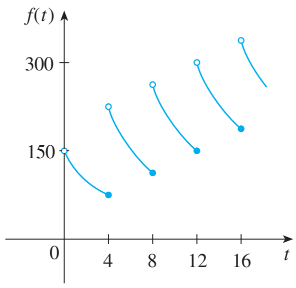
(f) As equações das assíntotas verticais.



10. Um paciente recebe uma injeção de 150 mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade $f(t)$ da droga na corrente sanguínea após t horas. Encontre

$$\lim_{t\to 12^-} f(t) \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 12^+} f(t)$$

e explique o significado desses limites laterais.



11–12 Esboce o gráfico da função e use-o para determinar os valores de a para os quais $\lim_{x\to a} f(x)$ existe:

11. $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leqslant x < 1 \\ 2 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen} x & \text{se } x < 0 \\ \cos x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ \operatorname{sen} x & \text{se } x > \pi \end{cases}$

13–14 Use o gráfico da função f para dizer o valor de cada limite, se existir. Se não existir, explique por quê.

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ (b) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (c) $\lim_{x\to 0} f(x)$

13. $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ **14.** $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x^3 + x^2}}$

15–18 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

15. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2, \quad f(1) = 2$

16. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1, \quad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 0,$
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(0)$ não está definido

17. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 4, \quad \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 2,$
$f(3) = 3, \quad f(-2) = 1$

18. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2, \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = 3,$
$\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = 0, \quad f(0) = 2, \quad f(4) = 1$

19–22 Faça uma conjectura sobre o valor do limite (se ele existir) por meio dos valores da função nos números dados (com precisão de seis casas decimais).

19. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$
$x = 2{,}5,\ 2{,}1,\ 2{,}05,\ 2{,}01,\ 2{,}005,\ 2{,}001,$
$1{,}9,\ 1{,}95,\ 1{,}99,\ 1{,}995,\ 1{,}999$

20. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2},$
$x = 0,\ -0{,}5,\ -0{,}9,\ -0{,}95,\ -0{,}99,\ -0{,}999,$
$-2,\ -1{,}5,\ -1{,}1,\ -1{,}01,\ -1{,}001$

21. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad x = \pm 1,\ \pm 0{,}5,\ \pm 0{,}1,\ \pm 0{,}05,\ \pm 0{,}01$

22. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x + x^2), \quad x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}001$

23–26 Use uma tabela de valores para estimar o valor do limite. Se você tiver alguma ferramenta gráfica, use-a para confirmar seu resultado.

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$ **24.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

25. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^6 - 1}{x^{10} - 1}$ **26.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{9^x - 5^x}{x}$

27. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\cos 2x - \cos x)/x^2$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a), calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

28. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} \pi x}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = (\operatorname{sen} x)/(\operatorname{sen} \pi x)$. Forneça sua resposta com precisão de duas casas decimais.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximem de 0.

29–37 Determine o limite infinito.

29. $\lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x + 2}{x + 3}$ **30.** $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x + 2}{x + 3}$

31. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2 - x}{(x - 1)^2}$ **32.** $\lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{e^x}{(x - 5)^3}$

33. $\lim\limits_{x \to 3^+} \ln(x^2 - 9)$ **34.** $\lim\limits_{x \to \pi^-} \cot x$

35. $\lim\limits_{x \to 2\pi^-} x \csc x$ **36.** $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$

37. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$

38. (a) Encontre as assíntotas verticais da função

$$y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2x^2}$$

(b) Confirme sua resposta da parte (a) fazendo o gráfico da função.

39. Determine $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^3 - 1}$ e $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^3 - 1}$
(a) calculando $f(x) = 1/(x^3 - 1)$ para valores de x que se aproximam de 1 pela esquerda e pela direita,
(b) raciocinando como no Exemplo 9, e
(c) a partir do gráfico de f.

40. (a) A partir do gráfico da função $f(x) = (\operatorname{tg} 4x)/x$ e dando *zoom* no ponto em que o gráfico cruza o eixo y, estime o valor de $\lim_{x \to 0} f(x)$.
(b) Verifique sua resposta da parte (a) calculando $f(x)$ para valores de x que se aproximam de 0.

41. (a) Estime o valor do limite $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$ com cinco casas decimais. Esse número lhe parece familiar?
(b) Ilustre a parte (a) fazendo o gráfico da função $y = (1 + x)^{1/x}$.

42. (a) Faça o gráfico da função $f(x) = e^x + \ln|x - 4|$ para $0 \leqslant x \leqslant 5$. Você acha que o gráfico é uma representação precisa de f?
(b) Como você faria para que o gráfico represente melhor f?

43. (a) Avalie a função $f(x) = x^2 - (2^x/1.000)$ para $x = 1,\ 0{,}8,\ 0{,}6,\ 0{,}4,\ 0{,}2,\ 0{,}1$ e $0{,}05$, e conjecture qual o valor de

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 - \frac{2^x}{1.000} \right)$$

(b) Avalie $f(x)$ para $x = 0{,}04,\ 0{,}02,\ 0{,}01,\ 0{,}005,\ 0{,}003$ e $0{,}001$. Faça uma nova conjectura.

44. (a) Avalie $h(x) = (\operatorname{tg} x - x)/x^3$ para $x = 1,\ 0{,}5,\ 0{,}1,\ 0{,}05,\ 0{,}01$ e $0{,}005$.
(b) Estime o valor de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^3}$.
(c) Calcule $h(x)$ para valores sucessivamente menores de x até finalmente atingir um valor de 0 para $h(x)$. Você ainda está confiante que a conjectura em (b) está correta? Explique como finalmente obteve valores 0. (Na Seção 4.4 veremos um método para calcular esse limite.)
(d) Faça o gráfico da função h na janela retangular $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Dê *zoom* até o ponto onde o gráfico corta o eixo y para estimar o limite de $h(x)$ quando x tende a 0. Continue

2.3 Exercícios

1. Dado que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 2} h(x) = 0$$

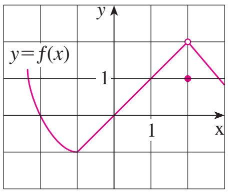
encontre, se existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

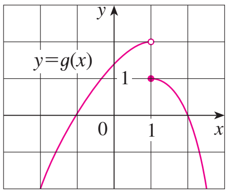
(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + 5g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 2} [g(x)]^3$

(c) $\lim_{x\to 2} \sqrt{f(x)}$ (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{3f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ (f) $\lim_{x\to 2} \dfrac{g(x)h(x)}{f(x)}$

2. Os gráficos de f e g são dados. Use-os para calcular cada limite. Caso não exista, explique por quê.





(a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ (b) $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

(c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ (d) $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

(e) $\lim_{x\to 2} [x^3 f(x)]$ (f) $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$

3–9 Calcule o limite justificando cada passagem com as Propriedades dos Limites que forem usadas.

3. $\lim_{x\to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

4. $\lim_{x\to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

5. $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

6. $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

7. $\lim_{x\to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

8. $\lim_{t\to 2} \left(\dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5}\right)^2$

9. $\lim_{x\to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

10. (a) O que há de errado com a equação a seguir?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

(b) Em vista de (a), explique por que a equação

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} (x + 3)$$

está correta.

11–32 Calcule o limite, se existir.

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

12. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

14. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

16. $\lim_{x\to -1} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

17. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

18. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

19. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x + 2}{x^3 + 8}$

20. $\lim_{t\to 1} \dfrac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

21. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

22. $\lim_{u\to 2} \dfrac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

23. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{x}}{4 + x}$

24. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^4 - 1}$

25. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + t} - \sqrt{1 - t}}{t}$

26. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

27. $\lim_{x\to 16} \dfrac{4 - \sqrt{x}}{16x - x^2}$

28. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

29. $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t}\right)$

30. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 5}{x + 4}$

31. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

32. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x + h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h}$

33. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

traçando o gráfico da função $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para x próximo de 0 e estime qual será o valor do limite.

(c) Use as Propriedades dos Limites para mostrar que sua estimativa está correta.

34. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ com duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com quatro casas decimais.

(c) Use as Propriedades dos Limites para encontrar o valor exato do limite.

35. Use o Teorema do Confronto para mostrar que $\lim_{x\to 0} (x^2 \cos 20\pi x) = 0$. Ilustre, fazendo os gráficos das funções $f(x) = -x^2$, $g(x) = x^2 \cos 20\pi x$ e $h(x) = x^2$ na mesma tela.

É necessário o uso de uma calculadora gráfica ou computador **1.** As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

36. Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\ \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$$

Ilustre, fazendo os gráficos das funções f, g e h (como no Teorema do Confronto) na mesma tela.

37. Se $4x - 9 \leqslant f(x) \leqslant x^2 - 4x + 7$ para $x \geqslant 0$, encontre $\lim_{x \to 4} f(x)$.

38. Se $2x \leqslant g(x) \leqslant x^4 - x^2 + 2$ para todo x, avalie $\lim_{x \to 1} g(x)$.

39. Demonstre que $\lim_{x \to 0} x^4 \cos \dfrac{2}{x} = 0$.

40. Demonstre que $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\, e^{\operatorname{sen}(\pi/x)} = 0$.

41-46 Encontre, quando existir, o limite. Caso não exista, explique por quê.

41. $\lim_{x \to 3} (2x + |x - 3|)$

42. $\lim_{x \to -6} \dfrac{2x + 12}{|x + 6|}$

43. $\lim_{x \to 0{,}5^-} \dfrac{2x - 1}{|2x^3 - x^2|}$

44. $\lim_{x \to -2} \dfrac{2 - |x|}{2 + x}$

45. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

46. $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

---

47. A função sinal, denotada por sgn, é definida por

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

(a) Esboce o gráfico dessa função.
(b) Encontre ou explique por que não existe cada um dos limites a seguir.

(i) $\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x$ (ii) $\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x$
(iii) $\lim_{x \to 0} \operatorname{sgn} x$ (iv) $\lim_{x \to 0} |\operatorname{sgn} x|$

48. Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) Encontre $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.
(b) $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe?
(c) Esboce o gráfico de f.

49. Seja $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{|x - 2|}$.

(a) Encontre

(i) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$

(b) $\lim_{x \to 2} g(x)$ existe?
(c) Esboce o gráfico de g.

50. Seja

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } 1 < x \leqslant 2 \\ x - 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

(a) Determine as quantidades a seguir, se existirem.

(i) $\lim_{x \to 1^-} g(x)$ (ii) $\lim_{x \to 1} g(x)$ (iii) $g(1)$
(iv) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$ (v) $\lim_{x \to 2^+} g(x)$ (vi) $\lim_{x \to 2} g(x)$

(b) Esboce o gráfico de g.

51. (a) Se o símbolo $[\![\ ]\!]$ denota a função maior inteiro do Exemplo 10, calcule

(i) $\lim_{x \to -2^+} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to -2} [\![x]\!]$ (iii) $\lim_{x \to -2{,}4} [\![x]\!]$

(b) Se n for um inteiro, calcule

(i) $\lim_{x \to n^-} [\![x]\!]$ (ii) $\lim_{x \to n^+} [\![x]\!]$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \to a} [\![x]\!]$ existe?

52. Seja $f(x) = [\![\cos x]\!]$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

(a) Esboce o gráfico de f.
(b) Calcule cada limite, se existir

(i) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ii) $\lim_{x \to (\pi/2)^-} f(x)$
(iii) $\lim_{x \to (\pi/2)^+} f(x)$ (iv) $\lim_{x \to \pi/2} f(x)$

(c) Para quais valores de a o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe?

53. Se $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$, mostre que existe $\lim_{x \to 2} f(x)$, mas que não é igual a $f(2)$.

54. Na Teoria da Relatividade, a fórmula da contração de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. Encontre $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete o resultado. Por que é necessário o limite à esquerda?

55. Se p for um polinômio, mostre que $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$.

56. Se r for uma função racional, use o Exercício 55 para mostrar que $\lim_{x \to a} r(x) = r(a)$ para todo número a no domínio de r.

57. Se $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 8}{x - 1} = 10$, encontre $\lim_{x \to 1} f(x)$.

58. Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = 5$, encontre os seguintes limites.

(a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ (b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$

59. Se

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

demonstre que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

60. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

61. Mostre por meio de um exemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)\, g(x)]$ pode existir mesmo que nem $\lim_{x \to a} f(x)$ nem $\lim_{x \to a} g(x)$ existam.

62. Calcule $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$

63. Existe um número a tal que

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a e o valor do limite.

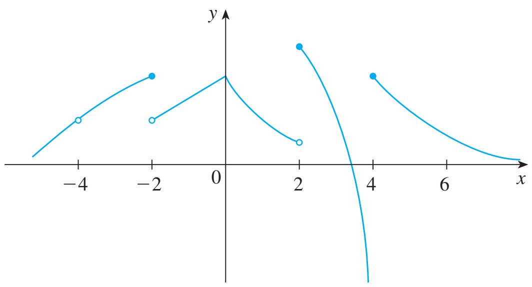
De fato, o Teorema do Valor Intermediário desempenha um papel na própria maneira de funcionar destas ferramentas gráficas. Um computador calcula um número finito de pontos sobre o gráfico e acende os pixels que contêm os pontos calculados. Ele pressupõe que a função é contínua e acende todos os valores intermediários entre dois pontos consecutivos. O computador, portanto, conecta os pixels acendendo os pixels intermediários.

2.5 Exercícios

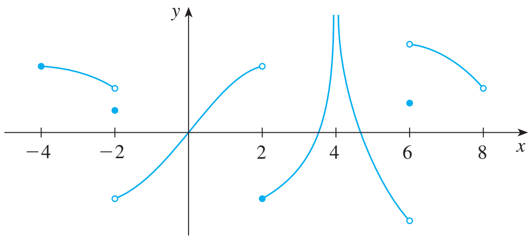
1. Escreva uma equação que expresse o fato de que uma função f é contínua no número 4.

2. Se f é contínua em $(-\infty, \infty)$, o que você pode dizer sobre seu gráfico?

3. (a) Do gráfico de f, identifique números nos quais f é descontínua e explique por quê.
(b) Para cada um dos números indicados na parte (a), determine se f é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum deles.



4. Do gráfico de g, identifique os intervalos nos quais g é contínua.



5–8 Esboce o gráfico de uma função que seja contínua exceto para a descontinuidade declarada.

5. Descontínua, porém contínua à direita, em 2

6. Descontinuidades em -1 e 4, porém contínua à esquerda em -1 e à direita em 4

7. Descontinuidade removível em 3, descontinuidade em salto em 5

8. Não é contínua à direita nem à esquerda em -2; contínua somente à esquerda em 2

9. A tarifa T cobrada para dirigir em um certo trecho de uma rodovia com pedágio é de \$ 5, exceto durante o horário de pico (entre 7 da manhã e 10 da manhã e entre 4 da tarde e 7 da noite), quando a tarifa é de \$ 7.
(a) Esboce um gráfico de T como função do tempo t, medido em horas após a meia-noite.
(b) Discuta as descontinuidades da função e seu significado para alguém que use a rodovia.

10. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura em um local específico como uma função do tempo.
(b) A temperatura em um tempo específico como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(c) A altitude acima do nível do mar como uma função da distância em direção a oeste a partir da cidade de Paris.
(d) O custo de uma corrida de táxi como uma função da distância percorrida.
(e) A corrente no circuito para as luzes de uma sala como uma função do tempo.

11. Suponha que f e g sejam funções contínuas tal que $g(2) = 6$ e $\lim_{x \to 2} [3f(x) + f(x)g(x)] = 36$. Encontre $f(2)$.

12–14 Use a definição de continuidade e propriedades de limites para demonstrar que a função é contínua em um dado número a.

12. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4.$

13. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1.$

14. $h(t) = \dfrac{2t - 3t^2}{1 + t^3}, \quad a = 1.$

15–16 Use a definição da continuidade e propriedades de limites para mostrar que a função é contínua no intervalo dado.

15. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 2}, \quad (2, \infty).$

16. $g(x) = 2\sqrt{3 - x}, \quad (-\infty, 3].$

17–22 Explique por que a função é descontínua no número dado a. Esboce o gráfico da função.

17. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} \qquad a = -2$

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x + 2} & \text{se } x \neq -2 \\ 1 & \text{se } x = -2 \end{cases} \qquad a = -2$

19. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

21. $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{se } x > 0 \end{cases} \qquad a = 0$

22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} & \text{se } x \neq 3 \\ 6 & \text{se } x = 3 \end{cases}$ $\quad a = 3$

23–24 Como você "removeria a descontinuidade" de f? Em outras palavras, como você definiria $f(2)$ no intuito de fazer f contínua em 2?

23. $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

24. $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

25–32 Explique, usando os Teoremas 4, 5, 7 e 9, por que a função é contínua em todo o número em seu domínio. Diga qual é o domínio.

25. $F(x) = \dfrac{x}{x^2 + 5x + 6}$

26. $G(x) = \sqrt[3]{x}\,(1 + x^3)$

27. $R(x) = x^2 + \sqrt{2x - 1}$

28. $h(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x + 1}$

29. $A(t) = \text{arcsen}(1 + 2t)$

30. $B(x) = \dfrac{\text{tg}\, x}{\sqrt{4 - x^2}}$

31. $M(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

32. $N(r) = \text{tg}^{-1}(1 + e^{-r^2})$

33–34 Localize as descontinuidades da função e ilustre com um gráfico.

33. $y = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

34. $y = \ln(\text{tg}^2 x)$

35–38 Use a continuidade para calcular o limite.

35. $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{5 + \sqrt{x}}{\sqrt{5 + x}}$

36. $\displaystyle\lim_{x \to \pi} \text{sen}(x + \text{sen}\, x)$

37. $\displaystyle\lim_{x \to 1} e^{x^2 - x}$

38. $\displaystyle\lim_{x \to 2} \text{arctg}\left(\frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}\right)$

39–40 Mostre que f é contínua em $(-\infty, \infty)$.

39. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} \text{sen}\, x & \text{se } x < \pi/4 \\ \cos x & \text{se } x \geqslant \pi/4 \end{cases}$

41–43 Encontre os pontos nos quais f é descontínua. Em quais desses pontos f é contínua à direita, à esquerda ou em nenhum deles? Esboce o gráfico de f.

41. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x \leqslant 0 \\ 2 - x & \text{se } 0 < x \leqslant 2 \\ (x - 2)^2 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \leqslant 1 \\ 1/x & \text{se } 1 < x < 3 \\ \sqrt{x - 3} & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x < 0 \\ e^x & \text{se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2 - x & \text{se } x > 1 \end{cases}$

44. A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{se } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{se } r \geqslant R \end{cases}$$

onde M é a massa da Terra; R é seu raio; e G é a constante gravitacional. F é uma função contínua de r?

45. Para quais valores da constante c a função f é contínua em $(-\infty, \infty)$?

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 2x & \text{se } x < 2 \\ x^3 - cx & \text{se } x \geqslant 2 \end{cases}$$

46. Encontre os valores de a e b que tornam f contínua em toda parte.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{se } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{se } 2 \leqslant x < 3 \\ 2x - a + b & \text{se } x \geqslant 3 \end{cases}$$

47. Quais das seguintes funções f têm uma descontinuidade removível em a? Se a descontinuidade for removível, encontre uma função g que seja igual a f para $x \neq a$ e seja contínua em a.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, \quad a = 1$

(b) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - 2x}{x - 2}, \quad a = 2$

(c) $f(x) = [\![\text{sen}\, x]\!], \quad a = \pi$

48. Suponha que uma função f seja contínua em $[0, 1]$, exceto em 0,25, e que $f(0) = 1$ e $f(1) = 3$. Seja $N = 2$. Esboce dois gráficos possíveis de f, um indicando que f pode não satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário e outro mostrando que f poderia ainda satisfazer a conclusão do Teorema do Valor Intermediário (mesmo que não satisfaça as hipóteses).

49. Se $f(x) = x^2 + 10\,\text{sen}\, x$, mostre que existe um número c tal que $f(c) = 1.000$.

50. Suponha f contínua em $[1, 5]$ e que as únicas soluções da equação $f(x) = 6$ sejam $x = 1$ e $x = 4$. Se $f(2) = 8$, explique por que $f(3) > 6$.

51–54 Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma raiz da equação dada no intervalo especificado.

51. $x^4 + x - 3 = 0, \quad (1, 2)$

52. $\sqrt[3]{x} = 1 - x, \quad (0, 1)$

53. $e^x = 3 - 2x, \quad (0, 1)$

54. $\text{sen}\, x = x^2 - x, \quad (1, 2)$

55–56 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua calculadora para encontrar um intervalo de comprimento 0,01 que contenha uma raiz.

55. $\cos x = x^3$

56. $\ln x = 3 - 2x$

57–58 (a) Demonstre que a equação tem pelo menos uma raiz real.
(b) Use sua ferramenta gráfica para encontrar a raiz correta até a terceira casa decimal.

57. $100e^{-x/100} = 0{,}01x^2$

58. $\text{arctg}\, x = 1 - x$

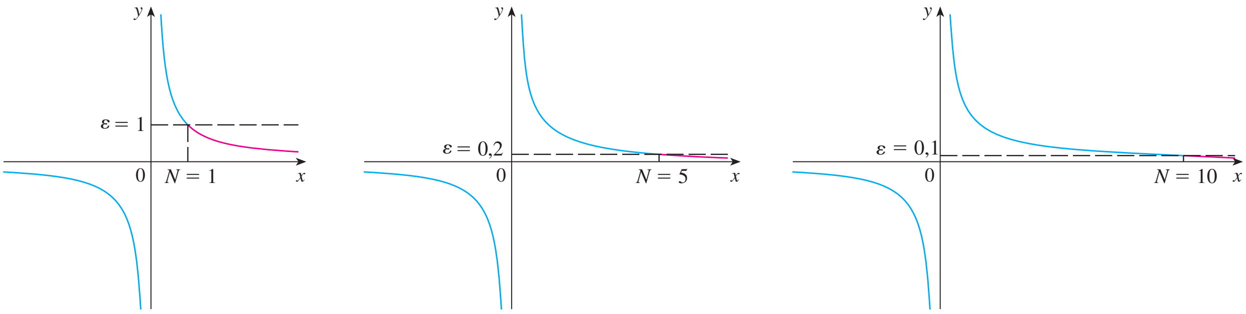


FIGURA 18

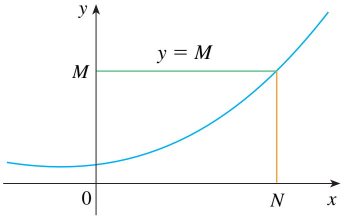


FIGURA 19
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

Finalmente, observamos que pode ser definido um limite infinito no infinito da forma a seguir. A ilustração geométrica está dada na Figura 19.

> **9 Definição** Seja f uma função definida em algum intervalo (a, ∞). Então
>
> $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$
>
> significa que para todo positivo M existe um correspondente número positivo N tal que
>
> $$\text{se} \quad x > N \qquad \text{então} \qquad f(x) > M.$$

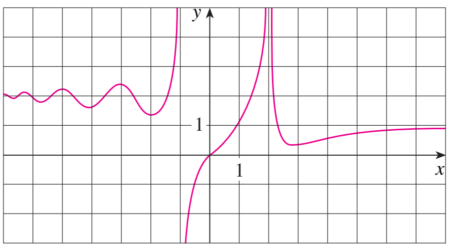
Definições análogas podem ser feitas quando o símbolo ∞ é substituído por $-\infty$. (Veja o Exercício 74.)

2.6 Exercícios

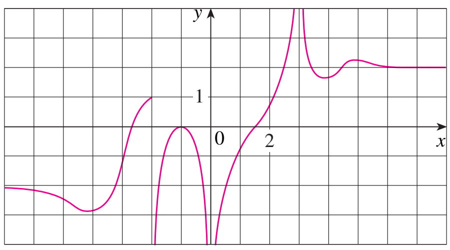
1. Explique com suas palavras o significado de cada um dos itens a seguir.
(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 5$ (b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 3$

2. (a) O gráfico de $y = f(x)$ pode interceptar uma assíntota vertical? E uma assíntota horizontal? Ilustre com gráficos.
(b) Quantas assíntotas horizontais pode ter o gráfico de $y = f(x)$? Ilustre com gráficos as possibilidades.

3. Para a função f, cujo gráfico é dado, diga quem são.
(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$ (b) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
(c) $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ (d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(e) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ (f) As equações das assíntotas



4. Para a função g, cujo gráfico é dado, determine o que se pede.
(a) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ (b) $\lim_{x\to-\infty} g(x)$
(c) $\lim_{x\to 3} g(x)$ (d) $\lim_{x\to 0} g(x)$
(e) $\lim_{x\to -2^+} g(x)$ (f) As equações das assíntotas



5–10 Esboce o gráfico de um exemplo de uma função f que satisfaça a todas as condições dadas.

5. $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -5$

6. $\lim_{x\to 2} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$

É necessário usar uma calculadora gráfica ou computador   1. As Homework Hints estão disponíveis em www.stewartcalculus.com

7. $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0,$
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

8. $\lim_{x\to\infty} f(x) = 3,\quad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \infty,\quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = -\infty,\quad f$ é ímpar

9. $f(0) = 3,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 4,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \infty,$
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3$

10. $\lim_{x\to 3} f(x) = -\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = 2,\quad f(0) = 0,\quad f$ é par

11. Faça uma conjectura sobre o valor do limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2^x}$$

calculando a função $f(x) = x^2/2^x$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50$ e 100. Então, use o gráfico de f para comprovar sua conjectura.

12. (a) Use o gráfico de

$$f(x) = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de duas casas decimais.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

13–14 Calcule o limite justificando cada passagem com as propriedade dos limites que forem usadas.

13. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{2x^2 + 5x - 8}$

14. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{12x^3 - 5x + 2}{1 + 4x^2 + 3x^3}}$

15–38 Encontre o limite ou demonstre que não existe.

15. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x + 3}$

16. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x - 4}$

17. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1 - x - x^2}{2x^2 - 7}$

18. $\displaystyle\lim_{y\to\infty} \frac{2 - 3y^2}{5y^2 + 4y}$

19. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(e^x)$

34. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{e^{3x} + e^{-3x}}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^x}{1 + 2e^x}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2 + 1}$

37. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (e^{-2x}\cos x)$

38. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}^{-1}(\ln x)$

39. (a) Estime o valor de

$$\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x\right)$$

traçando o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$

(b) Faça uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar qual será o valor do limite.

(c) Demonstre que sua conjectura está correta.

40. (a) Use um gráfico de

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 8x + 6} - \sqrt{3x^2 + 3x + 1}$$

para estimar o valor de $\lim_{x\to\infty} f(x)$ com precisão de uma casa decimal.

(b) Use uma tabela de valores de $f(x)$ para estimar o limite com precisão de quatro casas decimais.

(c) Encontre o valor exato do limite.

41–46 Encontre as assíntotas horizontais e verticais de cada curva. Confira seu trabalho por meio de um gráfico da curva e das estimativas das assíntotas.

41. $y = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$

42. $y = \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$

43. $y = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$

44. $y = \dfrac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$

45. $y = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$

46. $y = \dfrac{2e^x}{e^x - 5}$

47. Estime a assíntota horizontal da função

$$f(x) = \frac{3x^3 + 500x^2}{x^3 + 500x^2 + 100x + 2000}$$

através do gráfico f para $-10 \leqslant x \leqslant 10$. A seguir, determine a equação da assíntota calculando o limite. Como você explica a discrepância?

48. (a) Trace o gráfico da função

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

Quantas assíntotas horizontais e verticais você observa? Use o gráfico para estimar os valores dos limites

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1}}{3x - 5}$$

(b) Calculando valores de $f(x)$, dê estimativas numéricas dos limites na parte (a).

(c) Calcule os valores exatos dos limites na parte (a). Você obtém os mesmos valores ou valores diferentes para estes limites? [Em vista de sua resposta na parte (a), você pode ter de verificar seus cálculos para o segundo limite.]

49. Encontre uma fórmula para uma função f que satisfaça as seguintes condições:

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad f(2) = 0$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

50. Encontre uma fórmula para uma função que tenha por assíntotas verticais $x = 1$ e $x = 3$ e por assíntota horizontal $y = 1$.

51. Uma função f é a razão de funções quadráticas e possui uma assíntota vertical $x = 4$ e somente um intercepto com o eixo das abscissas em $x = 1$. Sabe-se que f possui uma descontinuidade removível em $x = -1$ e $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$. Calcule
(a) $f(0)$ (b) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

52–56 Encontre os limites quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$. Use essa informação, bem como as intersecções com os eixos, para fazer um esboço do gráfico, como no Exemplo 12.

52. $y = 2x^3 - x^4$ **53.** $y = x^4 - x^6$

54. $y = x^3(x + 2)^2(x - 1)$

55. $y = (3 - x)(1 + x)^2(1 - x)^4$

56. $y = x^2(x^2 - 1)^2(x + 2)$

---

57. (a) Use o Teorema do Confronto para determinar $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.
(b) Faça o gráfico de $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$. Quantas vezes o gráfico cruza a assíntota?

58. Por *comportamento final* de uma função queremos indicar uma descrição do que acontece com seus valores quando $x \to \infty$ e quando $x \to -\infty$.
(a) Descreva e compare o comportamento final das funções

$$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x \qquad Q(x) = 3x^5$$

por meio do gráfico de ambas nas janelas retangulares $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ e $[-10, 10]$ por $[-10.000, 10.000]$.
(b) Dizemos que duas funções têm o *mesmo comportamento final* se sua razão tende a 1 quando $x \to \infty$. Mostre que P e Q têm o mesmo comportamento final.

59. Sejam P e Q polinômios. Encontre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

se o grau de P for (a) menor que o grau de Q e (b) maior que o grau de Q.

60. Faça um esboço da curva $y = x^n$ (n inteiro) nos seguintes casos:
(i) $n = 0$ (ii) $n > 0$, n ímpar
(iii) $n > 0$, n par (iv) $n < 0$, n ímpar
(v) $n < 0$, n par
Então, use esses esboços para encontrar os seguintes limites:
(a) $\lim_{x\to 0^+} x^n$ (b) $\lim_{x\to 0^-} x^n$
(c) $\lim_{x\to\infty} x^n$ (d) $\lim_{x\to -\infty} x^n$

61. Encontre $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se, para todo $x > 1$,

$$\frac{10e^x - 21}{2e^x} < f(x) < \frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x - 1}}$$

62. (a) Um tanque contém 5.000 litros de água pura. Água salgada contendo 30 g de sal por litro de água é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 25 L/min. Mostre que a concentração de sal depois de t minutos (em gramas por litro) é

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

(b) O que acontece com a concentração quando $t \to \infty$?

63. Seremos capazes de mostrar, no Capítulo 9 do Volume II, que, sob certas condições, a velocidade $v(t)$ de uma gota de chuva caindo no instante t é

$$v(t) = v^*(1 - e^{-gt/v^*}),$$

onde g é a aceleração da gravidade e v^* é a *velocidade final* da gota.
(a) Encontre $\lim_{t\to\infty} v(t)$.
(b) Faça o gráfico de $v(t)$ se $v^* = 1$ m/s e $g = 9{,}8$ m/s^2 Quanto tempo levará para a velocidade da gota atingir 99% de sua velocidade final?

64. (a) Fazendo os gráficos de $y = e^{-x/10}$ e $y = 0{,}1$ na mesma tela, descubra quão grande você precisará tomar x para que $e^{-x/10} < 0{,}1$.
(b) A parte (a) pode ser resolvida sem usar uma ferramenta gráfica?

65. Use um gráfico para encontrar um número N tal que

$$\text{se} \quad x > N \quad \text{então} \quad \left| \frac{3x^2 + 1}{2x^2 + x + 1} - 1{,}5 \right| < 0{,}05$$

66. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = 2$$

ilustre a Definição 7, encontrando os valores de N que correspondam a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

67. Para o limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1} = -2$$

ilustre a Definição 8, encontrando os valores de N correspondentes a $\varepsilon = 0{,}5$ e $\varepsilon = 0{,}1$.

68. Para o limite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{x + 1}} = \infty$$

ilustre a Definição 9, encontrando um valor de N correspondente a $M = 100$.

69. (a) De que tamanho devemos tomar x para que $1/x^2 < 0{,}0001$?
(b) Tomando $r = 2$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

70. (a) De que tamanho devemos tornar x para que $1/\sqrt{x} < 0.0001$?
(b) Tomando $r = \frac{1}{2}$ no Teorema 5, temos a igualdade

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Demonstre isso diretamente usando a Definição 7.

71. Use a Definição 8 para demonstrar que $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

72. Demonstre, usando a Definição 9, que $\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$.

73. Use a Definição 9 para demonstrar que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$.

74. Formule precisamente a definição de

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

Então, use sua definição para demonstrar que

$$\lim_{x\to -\infty} (1 + x^3) = -\infty$$

75. Demonstre que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^+} f(1/t)$$

e

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{t\to 0^-} f(1/t)$$

se esses limites existirem.