Geometria Analítica e Vetores

Produto escalar

de Vetores no Plano e no Espaço

Docente: $\mathrm{Prof^a. Dr^a.}$ Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

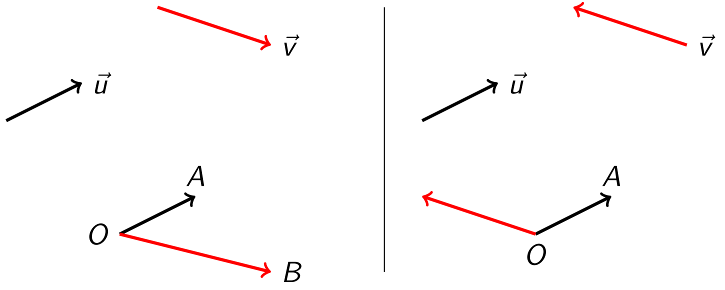
Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Recordação

Recordação - Ângulo entre dois vetores (no plano e no espaço)

O ângulo de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB tal que $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ (radiano), ou seja $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 180^o$.

Notação: $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v})$.



Produto escalar

Neste aula, consideramos vetores tanto no plano quanto no espaço.

Definição

O produto de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, denotado por $\vec{u}.\vec{v}$, é definido por

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

onde $\theta = \hat{a}\text{ng}(\vec{u}, \vec{v})$.

Exemplo: Calcule $\vec{u}.\vec{v}$ sabendo que

1. $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores unitários e a medida do ângulo entre eles é $\dfrac{\pi}{3}$ rad;
2. $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 7$ e a medida do ângulo entre eles é $\dfrac{\pi}{2}$ rad.

Observação

Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, então $\vec{u}.\vec{v} = 0$. Reciprocamente, se $\vec{u}.\vec{v} = 0$ então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Propriedades

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta,$$

onde $\theta = \hat{\text{a}}\text{ng}(\vec{u}, \vec{v})$.

Propriedades de produto escalar

Quaisquer que sejam vetores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ e qualquer que seja λ real, tem-se:

1. $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$;
2. $\vec{u}.(\lambda\vec{v}) = (\lambda\vec{u}).\vec{v} = \lambda(\vec{u}.\vec{v})$;
3. $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$;
4. $\vec{u}.\vec{u} \geqslant 0, \qquad \vec{u}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

Exemplo: Sabendo que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, $\|\vec{w}\| = 2$, $\vec{u}.\vec{v} = 1/2$, $\vec{u}.\vec{w} = -1$ e $\vec{v}.\vec{w} = -2$, calcule:

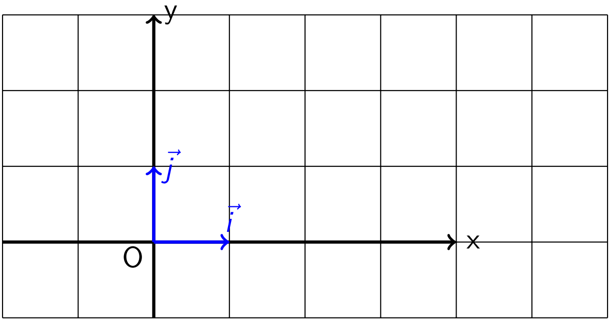
1. $(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}).\vec{u}$;
2. $(\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}).(\vec{u} + \vec{v})$.

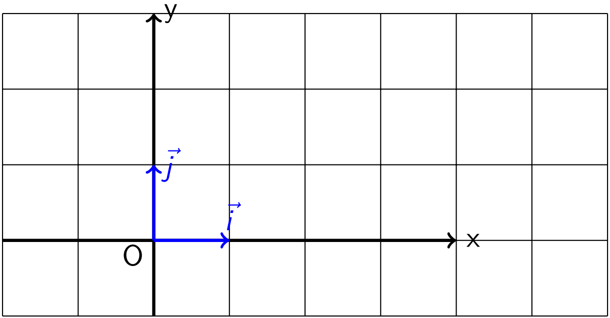
Base ortonormal

Definição - base ortonormal

Uma base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ no plano é dita ortonormal se $\vec{e_1}$ e $\vec{e_2}$ são unitários e são ortogonais entre si.

Exemplo: No sistema cartesiano $0xy$, a base $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ é uma base ortonormal. Chamamos esta base de *base canônica.*





Observação

Os vetores $\vec{i}$ e $\vec{j}$ tem coordenadas, respectivamente, em relação à base $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$:

$$\vec{i} = (1, 0), \quad \vec{j} = (0, 1).$$

Observação

$$\vec{i}.\vec{i} = 1, \quad \vec{i}.\vec{j} = 0, \quad \vec{j}.\vec{j} = 1.$$

Observação

No espaço, considere a base ortonormal $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}\}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm coordenadas, respectivamente, em relação à esta base:

$$\vec{u} = (x_u, y_u), \quad \vec{v} = (x_v, y_v),$$

então

$$\vec{u}.\vec{v} = x_u x_v + y_u y_v.$$

Justificativa: Temos

$$\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}, \quad \vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}.$$

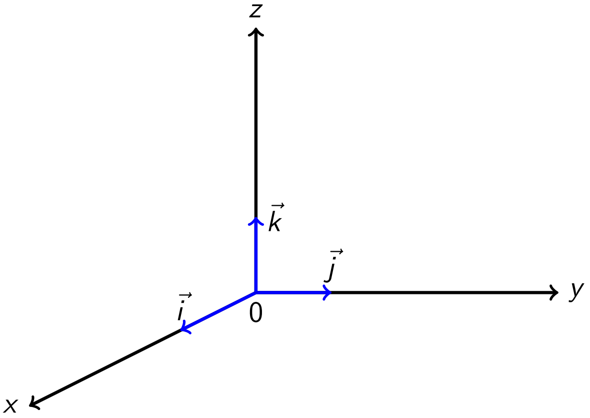
Então:

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= (x_u\vec{i} + y_u\vec{j})(x_v\vec{i} + y_v\vec{j}) \\
&= x_u x_v(\vec{i}.\vec{i}) + x_u y_v(\vec{i}.\vec{j}) + y_u x_v(\vec{j}.\vec{i}) + y_u y_v(\vec{j}.\vec{j}) \\
&= x_u x_v.1 + x_u y_v.0 + y_u x_v.0 + y_u y_v.1 \\
&= x_u x_v + y_u y_v.
\end{aligned}$$

Definição - base ortonormal

Uma base $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ no espaço é dita ortonormal se $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ e $\vec{e_3}$ são unitários e são ortogonais dois a dois.

Exemplo: No sistema cartesiano $0xyz$, a base $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal. Chamamos esta base de *base canônica.*



Observação

No espaço, considere a base ortonormal $\mathcal{C} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm coordenadas, respectivamente, em relação à esta base:

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$$

então

$$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Exemplo: Sendo $\vec{u} = (1,4,1)_E$ e $\vec{v} = (0,1,-8)_E$, onde E é a base ortonormal, calcule $\vec{u}.\vec{v}$ e $(2\vec{u} + \vec{v})\vec{u}$.

Exemplo: Considere E a base ortonormal. Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais, sabendo

1. $\vec{u} = (-4,2,1)_E$ e $\vec{v} = (1,2,0)_E$;
2. $\vec{u} = (1,1,-1)_E$ e $\vec{v} = (-1,1,1)_E$.

Observação

1. Se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v} \neq \vec{0}$ e θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então:

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

2. A norma ou o módulo (a medida/o comprimento) do vetor $\vec{u}$ é:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2} = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\vec{u}^2}.$$

3. Considere E a base ortonormal e $\vec{u} = (x, y, z)_E$, então:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Exemplo: Considere E a base ortonormal. Calcule a medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sabendo

1. $\vec{u} = (1, 3, -1)_E$ e $\vec{v} = (0, -1, -3)_E$;
2. $\vec{u} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1)_E$ e $\vec{v} = (1, -1, 0)_E$.

Nos exercícios a seguir $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal.

Exercício 1

Sendo $\vec{u} = (1, 4, 1)_E$ e $\vec{v} = (0, 1, -8)_E$ calcule:

1. $\vec{u}.\vec{0}$
2. $\vec{0}.\vec{v}$
3. $\vec{0}.\vec{0}$
4. $\vec{v}.\vec{u}$
5. $\|\vec{u}\|$
6. $\|\vec{v}\|$
7. $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v})$

Exercícios

Nos exercícios a seguir $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ é uma base ortonormal.

Exercício 2

Sendo $\vec{u} = (\sqrt{m}, 1, 1/2)_E$ e $\vec{v} = (\sqrt{m}, 1/2, 1)_E$, determine m sabendo que o co-seno da medida do ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vale:

(a) $\frac{1}{3}$; (b) $0,8$

Exercício 3

Determine m para que a medida do ângulo entre $\vec{u} = (\sqrt{3}, m, 0)_E$ e $\vec{v} = (1, \sqrt{3}, 0)_E$ seja 30°.

Exercício 4

Verifique se os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais nos seguintes casos:

1. $\vec{u} = (a, b, 1)_E$ e $\vec{v} = (b, a, -1)_E$,
2. $\vec{u} = (a, 1, 1 + a^2)_E$ e $\vec{v} = (a, 1 + a^2, 1)_E$,

onde a e b são números reais.

Exercício 5

Sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores não-paralelos, e $\|\vec{v}\| = 2\|\vec{u}\|$ mostre que $2\vec{u} + \vec{v}$ e $2\vec{u} - \vec{v}$ são ortogonais.

Bom estudo!!