Se aplicarmos agora as Propriedades 4 e 5 (com x substituído por $a + b$ e a por $|a| + |b|$), obteremos

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

que é o que queríamos mostrar.

EXEMPLO 9 Se $|x - 4| < 0{,}1$ e $|y - 7| < 0{,}2$, use a Desigualdade Triangular para estimar $|(x + y) - 11|$.

SOLUÇÃO A fim de usarmos a informação fornecida, utilizamos a Desigualdade Triangular com $a = x - 4$ e $b = y - 7$:

$$\begin{aligned} |(x + y) - 11| &= |(x - 4) + (y - 7)| \\ &\leqslant |x - 4| + |y - 7| \\ &< 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3 \end{aligned}$$

Logo, $$|(x + y) - 11| < 0{,}3$$

A Exercícios

1–12 Reescreva a expressão sem usar o símbolo de valor absoluto.

1. $|5 - 23|$

2. $|5| - |-23|$

3. $|-\pi|$

4. $|\pi - 2|$

5. $|\sqrt{5} - 5|$

6. $||-2| - |-3||$

7. $|x - 2|$ se $x < 2$

8. $|x - 2|$ se $x > 2$

9. $|x + 1|$

10. $|2x - 1|$

11. $|x^2 + 1|$

12. $|1 - 2x^2|$

13–38 Resolva a inequação em termos de intervalos e represente o conjunto solução na reta real.

13. $2x + 7 > 3$

14. $3x - 11 < 4$

15. $1 - x \leqslant 2$

16. $4 - 3x \geqslant 6$

17. $2x + 1 < 5x - 8$

18. $1 + 5x > 5 - 3x$

19. $-1 < 2x - 5 < 7$

20. $1 < 3x + 4 \leqslant 16$

21. $0 \leqslant 1 - x < 1$

22. $-5 \leqslant 3 - 2x \leqslant 9$

23. $4x < 2x + 1 \leqslant 3x + 2$

24. $2x - 3 < x + 4 < 3x - 2$

25. $(x - 1)(x - 2) > 0$

26. $(2x + 3)(x - 1) \leqslant 0$

27. $2x^2 + x \leqslant 1$

28. $x^2 < 2x + 8$

29. $x^2 + x + 1 > 0$

30. $x^2 + x > 1$

31. $x^2 < 3$

32. $x^2 \geqslant 5$

33. $x^3 - x^2 \leqslant 0$

34. $(x + 1)(x - 2)(x + 3) \geqslant 0$

35. $x^3 > x$

36. $x^3 + 3x < 4x^2$

37. $\dfrac{1}{x} < 4$

38. $-3 < \dfrac{1}{x} \leqslant 1$

39. A relação entre as escalas de temperatura Celsius e Fahrenheit é dada por $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, onde C é a temperatura em graus Celsius e F é a temperatura em graus Fahrenheit. Qual é o intervalo sobre a escala Celsius correspondente à temperatura no intervalo $50 \leqslant F \leqslant 95$?

40. Use a relação entre C e F dada no Exercício 39 para determinar o intervalo na escala Fahrenheit correspondente à temperatura no intervalo $20 \leqslant C \leqslant 30$.

41. À medida que sobe, o ar seco se expande, e ao fazer isso se resfria a uma taxa de cerca de 1 ºC para cada 100 m de subida, até cerca de 12 km.

(a) Se a temperatura do solo for de 20 ºC, escreva uma fórmula para a temperatura a uma altura h.

(b) Que variação de temperatura você pode esperar se um avião decola e atinge uma altura máxima de 5 km?

42. Se uma bola for atirada para cima do topo de um edifício com 30 m de altura com velocidade inicial de 10 m/s, então a altura h acima do solo t segundos mais tarde será

$$h = 30 + 10t - 5t^2$$

Durante que intervalo de tempo a bola estará no mínimo a 15 m acima do solo?

43–46 Resolva a equação para x.

43. $|2x| = 3$

44. $|3x + 5| = 1$

45. $|x + 3| = |2x + 1|$

46. $\left|\dfrac{2x - 1}{x + 1}\right| = 3$

47–56 Resolva a inequação.

47. $|x| < 3$

48. $|x| \geqslant 3$

49. $|x - 4| < 1$

50. $|x - 6| < 0{,}1$

51. $|x + 5| \geqslant 2$

52. $|x + 1| \geqslant 3$

53. $|2x - 3| \leqslant 0{,}4$

54. $|5x - 2| < 6$

55. $1 \leqslant |x| \leqslant 4$

56. $0 < |x - 5| < \frac{1}{2}$

57–58 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes positivas.

57. $a(bx - c) \geqslant bc$

58. $a \leqslant bx + c < 2a$

59–60 Isole x, supondo que a, b e c sejam constantes negativas.

59. $ax + b < c$

60. $\dfrac{ax + b}{c} \leqslant b$

61. Suponha que $|x - 2| < 0{,}01$ e $|y - 3| < 0{,}04$. Use a Desigualdade Triangular para mostrar que $|(x + y) - 5| < 0{,}05$.

62. Mostre que se $|x + 3| < \frac{1}{2}$, então $|4x + 13| < 3$.

63. Mostre que se $a < b$, então $a < \dfrac{a + b}{2} < b$.

64. Use a Regra 3 para comprovar a Regra 5 de $\boxed{2}$.

65. Demonstre que $|ab| = |a|\,|b|$. [*Dica:* Use a Equação 4.]

66. Demonstre que $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

67. Mostre que se $0 < a < b$, então $a^2 < b^2$.

68. Demonstre que $|x - y| \geqslant |x| - |y|$. [*Dica:* Use a Desigualdade Triangular com $a = x - y$ e $b = y$.]

69. Mostre que a soma, a diferença e o produto dos números racionais são números racionais.

70. (a) A soma de dois números irracionais é sempre irracional?
(b) O produto de dois números irracionais é sempre irracional?

B Geometria Analítica e Retas

Da mesma forma que os pontos sobre uma reta podem ser identificados com números reais atribuindo-se a eles coordenadas, conforme descrito no Apêndice A, também os pontos no plano podem ser identificados com pares ordenados de números reais. Vamos começar desenhando duas retas coordenadas perpendiculares que se interceptam na origem O de cada reta. Geralmente uma reta é horizontal com direção positiva para a direita e é chamada reta x; a outra reta é vertical com direção positiva para cima e é denominada reta y.

Qualquer ponto P no plano pode ser localizado por um par ordenado de números exclusivos como a seguir. Desenhe as retas pelo ponto P perpendiculares aos eixos x e y. Essas retas interceptam os eixos nos pontos com as coordenadas a e b como mostrado na Figura 1. Então ao ponto P é atribuído o par ordenado (a, b). O primeiro número a é chamado de **coordenada *x*** (ou **abscissa**) do P; o segundo número b é chamado de coordenada ***y*** (ou **ordenada**) de P. Dizemos que P é o ponto com as coordenadas (a, b) e denotamos o ponto pelo símbolo $P(a, b)$. Na Figura 2 estão vários pontos com suas coordenadas.

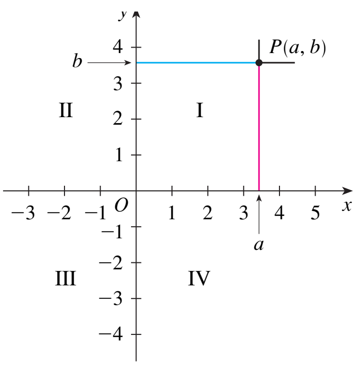

FIGURA 1

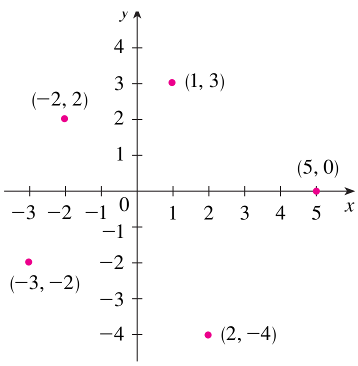

FIGURA 2

Ao revertermos o processo anterior, podemos começar com um par ordenado (a, b) e chegar ao ponto correspondente P. Muitas vezes, identificamos o ponto com o par ordenado (a, b) e nos referimos ao "ponto (a, b)". [Embora a notação usada para um intervalo aberto (a, b) seja a mesma usada para o ponto (a, b), você será capaz de distinguir pelo contexto qual o significado desejado.]

Esse sistema de coordenadas é dito **sistema coordenado retangular** ou **sistema de coordenadas cartesianas**, em homenagem ao matemático René Descartes (1596-1650), embora

Compare essa desigualdade com a equação $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$, que representa uma reta com inclinação $-\frac{1}{2}$ e intersecção com o eixo y igual a $\frac{5}{2}$. Observamos que inequação em questão consiste nos pontos cuja coordenada y é *maior* do que aquela sobre a reta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$. Assim, a representação gráfica é a da região que se situa *acima* da reta, conforme ilustrado na Figura 10.

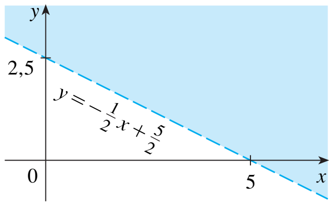

FIGURA 10

Retas Paralelas e Perpendiculares

As inclinações podem ser usadas para mostrar que as retas são paralelas ou perpendiculares. Os fatos a seguir são comprovados, por exemplo, em *Precalculus: Mathematics for Calculus*, 6ª edição de Stewart, Redlin e Watson (Belmont, CA, 2012).

6 Retas Paralelas e Perpendiculares

1. Duas retas não verticais são paralelas se e somente se tiverem a mesma inclinação.
2. Duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$; isto é, suas inclinações são recíprocas opostas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

EXEMPLO 7 Determine uma equação da reta que passa pelo ponto (5, 2) e que é paralela à reta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUÇÃO A reta dada pode ser escrita na forma

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6}$$

que está na forma inclinação-intersecção com o eixo com $m = -\frac{2}{3}$. As retas paralelas têm a mesma inclinação, logo, a reta pedida tem a inclinação $-\frac{2}{3}$ e sua equação na forma ponto-inclinação é

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5)$$

Podemos reescrever essa equação como $2x + 3y = 16$.

EXEMPLO 8 Mostre que as retas $2x + 3y = 1$ e $6x - 4y - 1 = 0$ são perpendiculares.

SOLUÇÃO As equações podem ser escritas como

$$y = -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{e} \qquad y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{1}{4}$$

de onde vemos que as inclinações são

$$m_1 = -\tfrac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad m_2 = \tfrac{3}{2}$$

Como $m_1 m_2 = -1$, as retas são perpendiculares.

B Exercícios

1–6 Determine a distância entre os dois pontos.

1. (1, 1), (4, 5)
2. (1, −3), (5, 7)
3. (6, −2), (−1, 3)
4. (1, −6), (−1, −3)
5. (2, 5), (4, −7)
6. (a, b), (b, a)

7–10 Determine a inclinação da reta que passa por P e Q.

7. $P(1, 5)$, $Q(4, 11)$
8. $P(-1, 6)$, $Q(4, -3)$
9. $P(-3, 3)$, $Q(-1, -6)$
10. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

11. Mostre que o triângulo com vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ e $C(-4, 3)$ é isósceles.

12. (a) Mostre que o triângulo com vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ e $C(2, -2)$ é um triângulo retângulo usando a recíproca do Teorema de Pitágoras.
(b) Use as inclinações para mostrar que ABC é um triângulo retângulo.
(c) Determine a área do triângulo.

13. Mostre que os pontos (−2, 9), (4, 6), (1, 0) e (−5, 3) são os vértices de um quadrado.

14. (a) Mostre que os pontos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ e $C(5, 15)$ são colineares (pertencem à mesma reta) mostrando que $|AB| + |BC| = |AC|$.
(b) Use as inclinações para mostrar que A, B, e C são colineares.

15. Mostre que $A(1,1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ e $D(-1, 7)$ são vértices de um paralelogramo.

16. Mostre que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ e $D(0, 6)$ são vértices de um retângulo.

17–20 Esboce o gráfico da equação.

17. $x = 3$ **18.** $y = -2$

19. $xy = 0$ **20.** $|y| = 1$

21–36 Ache uma equação da reta que satisfaça as condições dadas.

21. Passa pelo ponto $(2, -3)$, inclinação 6

22. Passa pelo ponto $(-1, 4)$, inclinação -3

23. Passa pelo ponto $(1, 7)$, inclinação $\frac{2}{3}$

24. Passa pelo ponto $(-3, -5)$, inclinação $-\frac{7}{2}$

25. Passa pelos pontos $(2, 1)$ e $(1, 6)$

26. Passa pelos pontos $(-1, -2)$ e $(4, 3)$

27. Inclinação 3, intersecção com o eixo y igual a -2

28. Inclinação $\frac{2}{5}$, intersecção com o eixo y igual a 4

29. Intersecção com o eixo x igual a 1, intersecção com o eixo y igual a -3

30. Intersecção com o eixo x igual a -8, intersecção com o eixo y igual a 6

31. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo x

32. Passa pelo ponto $(4, 5)$, paralela ao eixo y

33. Passa pelo ponto $(1, -6)$, paralela à reta $x + 2y = 6$

34. Intersecção com o eixo y igual a 6, paralela à reta $2x + 3y + 4 = 0$

35. Por $(-1, -2)$, perpendicular à reta $2x + 5y + 8 = 0$

36. Por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$, perpendicular à reta $4x - 8y = 1$

37–42 Ache a inclinação e a intersecção da reta e faça o esboço de seu gráfico.

37. $x + 3y = 0$ **38.** $2x - 5y = 0$

39. $y = -2$ **40.** $2x - 3y + 6 = 0$

41. $3x - 4y = 12$ **42.** $4x + 5y = 10$

43–52 Esboce a região no plano xy.

43. $\{(x, y) \mid x < 0\}$ **44.** $\{(x, y) \mid y > 0\}$

45. $\{(x, y) \mid xy < 0\}$ **46.** $\{(x, y) \mid x \geqslant 1 \text{ e } y < 3\}$

47. $\{(x, y) \mid |x| \leqslant 2\}$ **48.** $\{(x, y) \mid |x| < 3 \text{ e } |y| < 2\}$

49. $\{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 4 \text{ e } x \leqslant 2\}$ **50.** $\{(x, y) \mid y > 2x - 1\}$

51. $\{(x, y) \mid 1 + x \leqslant y \leqslant 1 - 2x\}$

52. $\{(x, y) \mid -x \leqslant y < \frac{1}{2}(x + 3)\}$

53. Ache um ponto sobre o eixo y que seja equidistante de $(5, -5)$ e $(1, 1)$.

54. Mostre que o ponto médio do segmento de reta de $P_1(x_1, y_1)$ até $P_2(x_2, y_2)$ é

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

55. Encontre o ponto médio do segmento de reta que une os pontos dados.
(a) $(1, 3)$ e $(7, 15)$ (b) $(-1, 6)$ e $(8, -12)$

56. Determine os comprimentos das medianas do triângulo com vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ e $C(8, 2)$. (A mediana é um segmento de reta de um vértice até o ponto médio do lado oposto.)

57. Mostre que as retas $2x - y = 4$ e $6x - 2y = 10$ não são paralelas e ache o seu ponto de intersecção.

58. Mostre que as retas $3x - 5y + 19 = 0$ e $10x + 6y - 50 = 0$ são perpendiculares e ache o seu ponto de intersecção.

59. Ache uma equação da mediatriz do segmento de reta com extremidades nos pontos $A(1, 4)$ e $B(7, -2)$.

60. (a) Encontre as equações dos lados do triângulo com vértices $P(1, 0)$, $Q(3, 4)$ e $R(-1, 6)$.
(b) Ache equações para as medianas desse triângulo. Onde elas se interceptam?

61. (a) Mostre que as intersecções com os eixos x e y de uma reta são os números a e b diferentes de zero, então a equação da reta pode ser colocada na forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta equação é chamada a **forma a partir das duas intersecções** da equação de uma reta.
(b) Use a parte (a) para encontrar a equação da reta cuja intersecção com o eixo x é 6 e cuja intersecção com o eixo y é -8.

62. Kelly parte de Winnipeg às 14 h e dirige a uma velocidade constante para oeste na rodovia Trans-Canadá. Ela passa por Brandon, a 210 km de Winnipeg, às 16 h.
(a) Expresse a distância percorrida em termos do tempo decorrido.
(b) Trace o gráfico da equação na parte (a).
(c) Qual a inclinação desta reta? O que ela representa?

C Gráficos das Equações de Segundo Grau

No Apêndice B vimos que uma equação $Ax + By + C = 0$, de primeiro grau ou linear, representa uma reta. Nesta seção vamos discutir as equações do segundo grau, tais como

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad y = x^2 + 1 \qquad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1$$

que representam uma circunferência, uma parábola, uma elipse e uma hipérbole, respectivamente.

O gráfico de tais equações em x e y é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem aquela equação; ele dá uma representação visual da equação. Reciprocamente, dada uma curva no plano xy, podemos ter de achar uma equação que a represente, isto é, uma equação satisfeita pelas coordenadas dos pontos na curva e por nenhum outro ponto. Esta é a outra metade

C Exercícios

1–4 Determine uma equação de uma circunferência que satisfaça as condições dadas.

1. Centro $(3, -1)$, raio 5
2. Centro $(-2, -8)$, raio 10
3. Centro na origem, passa por $(4, 7)$
4. Centro $(-1, 5)$, passa por $(-4, -6)$

5–9 Mostre que a equação representa uma circunferência e determine o centro e o raio.

5. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$
6. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$
7. $x^2 + y^2 + x = 0$
8. $16x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 1 = 0$
9. $2x^2 + 2y^2 - x + y = 1$

10. Que condições nos coeficiente a, b e c fazem com que a equação $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ represente uma circunferência? Quando a condição for satisfeita, determine o centro e o raio da circunferência.

11–32 Identifique o tipo de curva e esboce o gráfico. Não marque os pontos. Somente use os gráficos-padrão dados nas Figuras 5, 6, 8, 10 e 11 e desloque se for necessário.

11. $y = -x^2$
12. $y^2 - x^2 = 1$
13. $x^2 + 4y^2 = 16$
14. $x = -2y^2$
15. $16x^2 - 25y^2 = 400$
16. $25x^2 + 4y^2 = 100$
17. $4x^2 + y^2 = 1$
18. $y = x^2 + 2$
19. $x = y^2 - 1$
20. $9x^2 - 25y^2 = 225$
21. $9y^2 - x^2 = 9$
22. $2x^2 + 5y^2 = 10$
23. $xy = 4$
24. $y = x^2 + 2x$
25. $9(x - 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$
26. $16x^2 + 9y^2 - 36y = 108$
27. $y = x^2 - 6x + 13$
28. $x^2 - y^2 - 4x + 3 = 0$
29. $x = 4 - y^2$
30. $y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$
31. $x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0$
32. $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

33–34 Esboce a região delimitada pelas curvas.

33. $y = 3x, \quad y = x^2$
34. $y = 4 - x^2, \quad x - 2y = 2$

35. Determine uma equação da parábola com vértice $(1, -1)$ que passe pelos pontos $(-1, 3)$ e $(3, 3)$.
36. Encontre uma equação da elipse com centro na origem que passe pelos pontos $\left(1, -10\sqrt{2}/3\right)$ e $\left(-2, 5\sqrt{5}/3\right)$.

37–40 Esboce o gráfico do conjunto.

37. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
38. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$
39. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}$
40. $\{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \leqslant 4\}$

D Trigonometria

Ângulos

Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos (abreviado por rad). O ângulo dado por uma revolução completa tem 360º, que é o mesmo que 2π rad. Portanto,

1 $$\boxed{\pi \text{ rad} = 180°}$$

e

2 $$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \approx 57{,}3° \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad} \approx 0{,}017 \text{ rad}$$

EXEMPLO 1

(a) Encontre a medida do radiano de 60º. (b) Expresse $5\pi/4$ rad em graus.

SOLUÇÃO

(a) Da Equação 1 ou 2 vemos que, para converter de graus para radianos, multiplicamos por $\pi/180$. Portanto,

$$60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$