Geometria Analítica e Vetores

Vetores no plano e no espaço:

Adição de vetores

Produto de um número real por um vetor

Docente: $\mathrm{Prof^a}.\,\mathrm{Dr^a}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Estrutura da aula

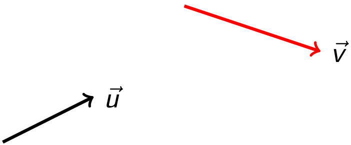
1. Adição de vetores
2. Produto de um número real por um vetor
3. Propriedades

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Adição de vetores

Definição

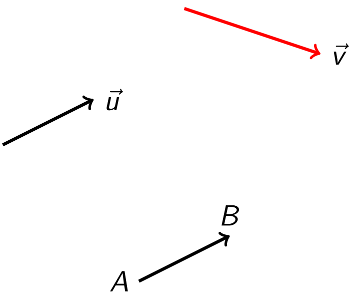
Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC. **A soma de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado pelo segmento orientado AC.



Adição de vetores

Definição

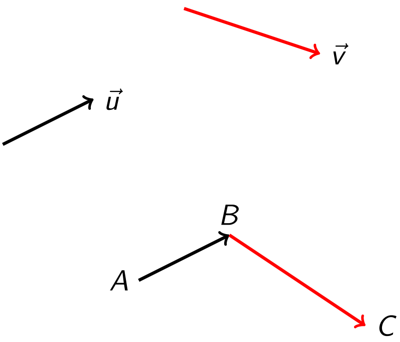
Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC. **A soma de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado pelo segmento orientado AC.



Adição de vetores

Definição

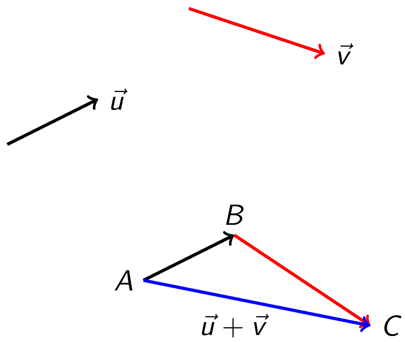
Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC. **A soma de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado pelo segmento orientado AC.



Adição de vetores

Definição

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ representados pelos segmentos orientados AB e BC. **A soma de dois vetores** $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o vetor representado pelo segmento orientado AC.



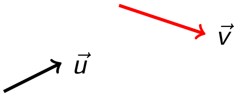
Adição de vetores

Observação

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para determinar a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazemos como o seguinte:

1. Tomar um ponto A qualquer, com origem nele, traça o segmento orientado AB que representa o vetor $\vec{u}$.
2. Utilizar a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante do vetor $\vec{v}$.

O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



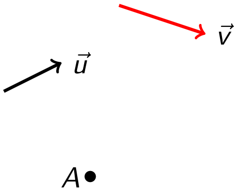
Adição de vetores

Observação

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para determinar a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazemos como o seguinte:

1. Tomar um ponto A qualquer, com origem nele, traça o segmento orientado AB que representa o vetor $\vec{u}$.
2. Utilizar a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante do vetor $\vec{v}$.

O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



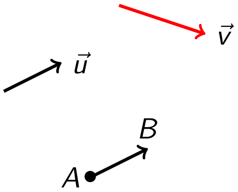
Adição de vetores

Observação

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para determinar a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazemos como o seguinte:

1. Tomar um ponto A qualquer, com origem nele, traça o segmento orientado AB que representa o vetor $\vec{u}$.
2. Utilizar a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante do vetor $\vec{v}$.

O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



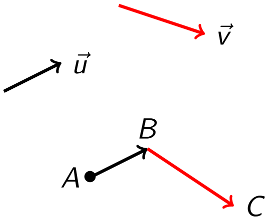
Adição de vetores

Observação

Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para determinar a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazemos como o seguinte:

1. Tomar um ponto A qualquer, com origem nele, traça o segmento orientado AB que representa o vetor $\vec{u}$.
2. Utilizar a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante do vetor $\vec{v}$.

O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



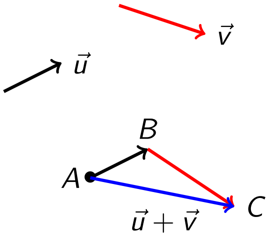
Adição de vetores

Observação

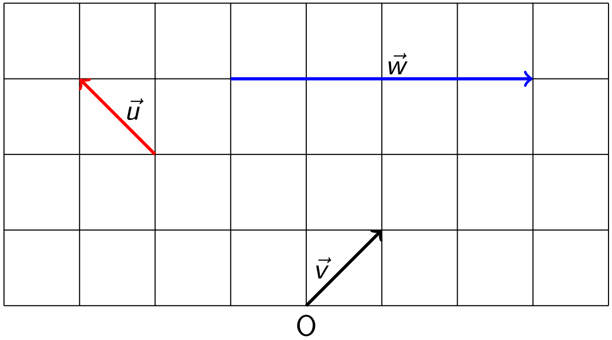
Sejam dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Para determinar a soma de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, fazemos como o seguinte:

1. Tomar um ponto A qualquer, com origem nele, traça o segmento orientado AB que representa o vetor $\vec{u}$.
2. Utilizar a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante do vetor $\vec{v}$.

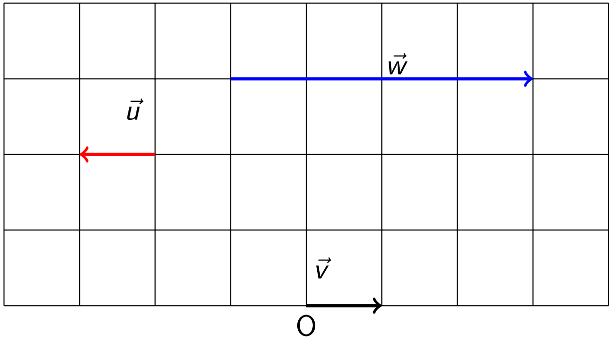
O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é a soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$.



Exercício 1: Sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados na figura abaixo, represente a soma dos três vetores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



Exercício 2: Sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados na figura abaixo, represente as somas $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$, $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$.



Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ e $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.

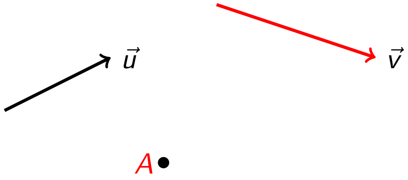
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



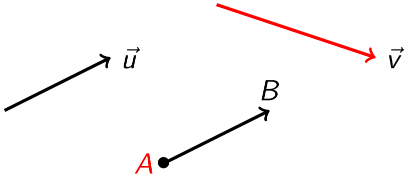
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



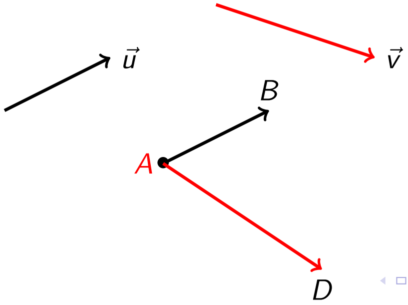
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



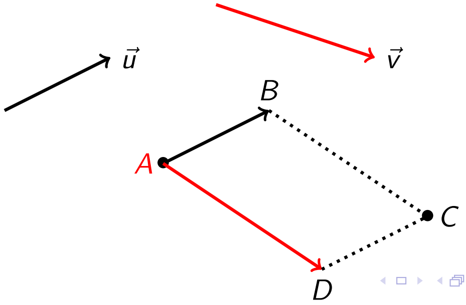
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



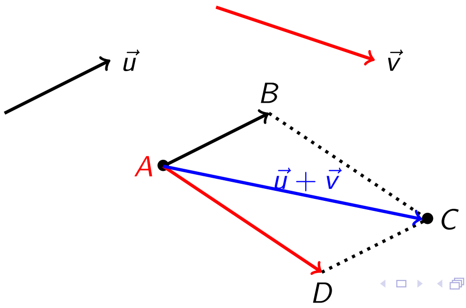
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



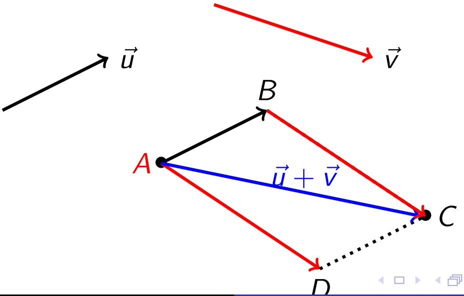
Adição de vetores

Observação: Outra maneira para determinar a soma de dois vetores

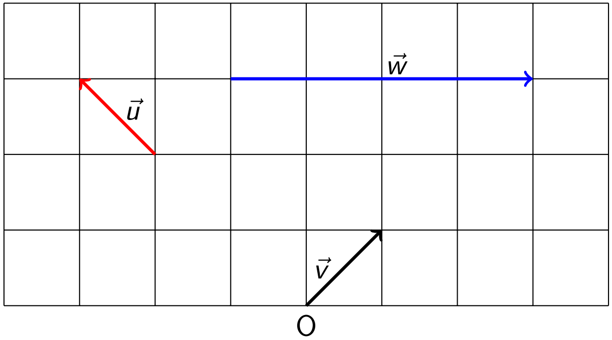
Se dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos, há outra maneira para encontrar o vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$:

1. Representam-se $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ por segmentos orientados de mesma origem A;
2. Completa-se o paralelogramo $ABCD$.

O vetor (diagonal) $\overrightarrow{AC}$ é a soma de dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$.



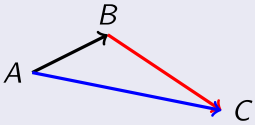
Exercício 3: Use a observação anterior para determinar a soma de três vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ na figura abaixo:



Observação

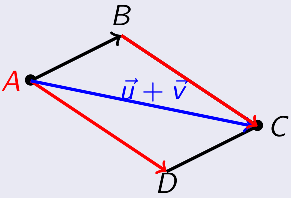
1. Dados três pontos A, B e C (no plano ou no espaço), temos sempre que:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



2. Se $ABCD$ é um o paralelogramo, temos

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$



Diferença de dois vetores

A diferença de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é definida como a soma do vetor $\vec{u}$ e o oposto do vetor $\vec{v}$:

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}).$$

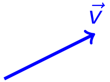
Produto de um número real por um vetor

Produto de um número real por um vetor

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real k. O produto do número k pelo vetor $\vec{v}$ é denotado por $k\vec{v}$ e é definido como um vetor que tem:

1. módulo: $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$;
2. sentido: o vetor $k\vec{v}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{v}$ se $k > 0$ e o sentido contrário se $k < 0$ (portanto, $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ sempre têm a mesma direção: as retas de suporte são paralelas).

Exemplo:



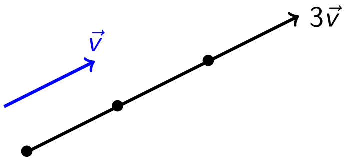
Produto de um número real por um vetor

Produto de um número real por um vetor

Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real k. O produto do número k pelo vetor $\vec{v}$ é denotado por $k\vec{v}$ e é definido como um vetor que tem:

1. módulo: $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$;
2. sentido: o vetor $k\vec{v}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{v}$ se $k > 0$ e o sentido contrário se $k < 0$ (portanto, $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ sempre têm a mesma direção: as retas de suporte são paralelas).

Exemplo:



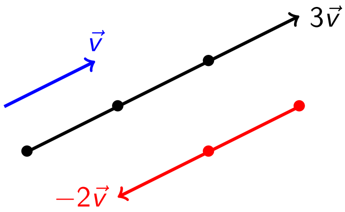
Produto de um número real por um vetor

Produto de um número real por um vetor

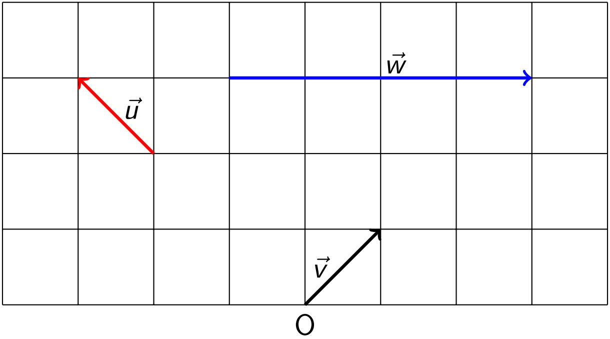
Dado um vetor $\vec{v}$ e um número real k. O produto do número k pelo vetor $\vec{v}$ é denotado por $k\vec{v}$ e é definido como um vetor que tem:

1. módulo: $\|k\vec{v}\| = |k|\|\vec{v}\|$;
2. sentido: o vetor $k\vec{v}$ tem o mesmo sentido do vetor $\vec{v}$ se $k > 0$ e o sentido contrário se $k < 0$ (portanto, $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ sempre têm a mesma direção: as retas de suporte são paralelas).

Exemplo:



Exercício 4: Sendo $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ representados na figura abaixo, represente $\overrightarrow{x} = 2\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \frac{5}{4}\overrightarrow{w}$ por uma flecha de origem O.



Propriedades

Propriedades sobre adição de vetores

1. **Comutativa:**: $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}, \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}.$
2. **Associativa:**: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w}), \qquad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$
3. **Soma com o vetor nulo:** $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}, \qquad \forall \vec{u}.$
4. **Soma com o vetor oposto:** $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}, \quad \forall \vec{u}.$

Propriedades

Propriedades sobre Produto de um número por um vetor

1. $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}, \qquad \forall \vec{u},\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$
2. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}, \qquad \forall \vec{u},\ \forall a, b \in \mathbb{R}.$
3. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}, \qquad \forall \vec{u}, \vec{v},\ \forall a \in \mathbb{R}.$
4. $1.\vec{u} = \vec{u}, \qquad \forall \vec{u}.$

Bom estudo!!