Geometria Analítica e Vetores

Aula 1:

Matrizes

Docente: Nguyen Thi Bich Thuy
IBILCE/ UNESP
SÃO PAULO - BRASIL

Estrutura da aula

1. Definição de matrizes
2. Tipos de matrizes
3. Operações com matrizes e propriedades
4. Transposição (Matrizes transpostas)
5. Matrizes simétricas e matrizes anti-simétricas
6. Inversão (Matrizes inversíveis)

Referência: IEZZI, G., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 4, 2ª Edição, São Paulo: Atual Editora.

Definição

Definição

Definição. Dizemos que A é uma *matriz real* $m \times n$ (lê-se: n por m) se A é uma tabela de números reais com m linhas e n colunas, onde $m, n \in \mathbb{N}^*$.

Exemplo.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \dfrac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×3.
2. $\begin{pmatrix} -35 & \dfrac{4}{3} \\ \sqrt{\dfrac{7}{8}} & 73 \end{pmatrix}$ é uma matriz 2×2.

Indicamos os elementos de uma matriz A por a_{ij}, onde o índice i indica a linha a que o elemento pertence, e o índice j indica a coluna do mesmo.

1. Uma matriz é representada entre parênteses ou chaves, com seus elementos dispostos dentro:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

2. Uma matriz M do tipo $m \times n$ também pode ser representada por $M = (a_{ij})_{m \times n}$.

Tipos de matrizes

Tipos de matrizes

- *Matriz linha* é toda matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, é uma matriz que possui uma única linha:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Tipos de matrizes

- *Matriz linha* é toda matriz do tipo $1 \times n$, ou seja, é uma matriz que possui uma única linha:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

- *Matriz coluna* é toda matriz do tipo $m \times 1$, ou seja, é uma matriz que possui uma única coluna:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

- *Matriz nula* é toda matriz que possui todos os seus elementos iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

• *Matriz nula* é toda matriz que possui todos os seus elementos iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

• *Matriz quadrada de ordem n* é toda matriz do tipo $n \times n$, isto é, uma matriz que tem o número de linhas igual ao número de colunas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Chama-se *diagonal principal* de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os índices iguais:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

• *Matriz diagonal* é toda matriz quadrada cujos elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

- *Matriz identidade* (ou matriz unidade) de ordem n, denotada por I_n, é toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Operações com matrizes

Igualdade

Definição. Dizemos que duas matrizes do mesmo tipo $m \times n$

$$A = (a_{ij})_{m\times n}, \quad B = (b_{ij})_{m\times n}$$

são *iguais* se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Em outras palavras, para duas matrizes de mesma ordem serem iguais, todos os seus elementos correspondentes devem ser iguais.

Adição

Definição. Dadas duas matrizes da *mesma ordem* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos a soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, n\}.$$

Em outras palavras, a soma de duas matrizes de mesma ordem é uma matriz cujos elementos são iguais a soma dos elementos correspondentes nas das duas primeiras matrizes.

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & 5 \\ \sqrt{2} & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{11}{4} & \frac{11}{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Adição

Definição. Dadas duas matrizes da *mesma ordem* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, definimos a soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$, onde

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Em outras palavras, a soma de duas matrizes de mesma ordem é uma matriz cujos elementos são iguais a soma dos elementos correspondentes nas das duas primeiras matrizes.

Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{m\times n}$ três matrizes quaisquer do mesmo tipo $m \times n$, temos:

1. **Propriedade associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$;
2. **Propriedade comutativa:** $A + B = B + A$.

Dada a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, a *matriz oposta* da matriz B, denotada por $-B$, é a matriz $B = (-b_{ij})_{m \times n}$.

Definição. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, definimos a *diferença* $A - B$ como a soma de A com a matriz oposta de B, isto é

$$A - B = A + (-B).$$

Produto de um número por uma matriz

Definição. Dados um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, definimos o *produto kA* como sendo uma matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$ tal que

$$b_{ij} = ka_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Produto de um número por uma matriz

Definição. Dados um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, definimos o *produto kA* como sendo uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que

$$b_{ij} = ka_{ij}, \quad \forall i \in \{1,\dots,m\}, \forall j \in \{1,\dots,m\}.$$

Exemplo:

$$2\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} & -6 \end{pmatrix}.$$

Produto de um número por uma matriz

Definição. Dados um número real k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, definimos o *produto kA* como sendo uma matriz $B = (b_{ij})_{m\times n}$ tal que

$$b_{ij} = ka_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Exemplo:

$$2\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{2} & -6 \end{pmatrix}.$$

Propriedades. Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$ matrizes quaisquer do mesmo tipo $m \times n$ e k, t dois números reais, temos:

1. $k(tA) = (kt)A$;
2. $k(A + B) = kA + kB$;
3. $(k + t)A = kA + tA$;
4. $1.A = A$.

Definição. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, definimos como o *produto AB* a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall k \in \{1, \ldots, p\}.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Produto de matrizes

Definição. Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, definimos como o *produto AB* a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \{1, \dots, p\}.$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observação. A definição de produto de duas matrizes garante a existência do produto AB somente se o número de colunas de A for igual do número de linhas de B. Isto é, se a matriz A está do tipo $m \times n$ e a matriz B está do tipo $n \times p$, então o produto AB está uma matriz do tipo $m \times p$.

Produto de matrizes

Propriedades. Dadas três matrizes

1. **Associativa**: Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times p}$ e $C = (c_{ij})_{p\times r}$, temos: $(AB)C = A(BC)$;
2. **Distributiva à direita em relação à adição**: Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{n\times p}$, temos: $(A + B)C = AB + AC$;
3. **Distributiva à esquerda em relação à adição**: Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{p\times m}$, temos: $C(A + B) = CB + CB$.
4. Seja k um número real e $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p}$ duas matrizes, temos: $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

Observação. A propriedade comutativa não válida para a multiplicação de matrizes.

Exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matriz transposta

Matriz transposta

Definição. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *a matriz transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$, onde

$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Matriz transposta

Definição. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se *a matriz transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n \times m}$, onde

$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Exemplo.

1. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

Matriz transposta

Definição. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *a matriz transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$, onde

$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemplo.

1. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
2. Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$.

Definição. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *a matriz transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$, onde
$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

Exemplo.

1. Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.
2. Se $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$.
3. A matriz transposta da matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -3 \end{pmatrix}$ é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & \sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -3 \end{pmatrix}$.

Matriz transposta

Definição. Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se *a matriz transposta* de A a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$, onde

$$a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Propriedades. Sejam $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{m\times n}$ e $C = (c_{ij})_{n\times p}$ matrizes e $k \in \mathbb{R}$, temos: Dadas três matrizes

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
3. $(kA)^t = kA^t$;
4. $(AC)^t = C^t A^t$.

Matrizes simétricas e matrizes anti-simétricas

Matrizes simétricas

Definição. Dizemos que uma matriz *quadrada* $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $A = A^t$. Em outras palavras, uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo.

1. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é simétrica.
2. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ é simétrica.

Matrizes simétricas

Definição. Dizemos que uma matriz *quadrada* $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $A = A^t$. Em outras palavras, uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$, para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo.

1. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ é simétrica.
2. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ é simétrica.

Observação. Em uma matriz simétrica, os elementos da matriz estão simetricamente dispostos em relação à diagonal principal.

Matrizes anti-simétricas

Definição. Dizemos que uma matriz *quadrada* $A = (a_{ij})$ de ordem n é *anti-simétrica* se $A = -A^t$. Em outras palavras, uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ de ordem n é simétrica se $a_{ij} = -a_{ji}$, para todos $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Exemplo.

1. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ é anti-simétrica.
2. Todas as matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ é simétrica.

Matrizes inversíveis

Definição. Seja A uma matriz *quadrada* de ordem n. Dizemos que A é uma *matriz inversível* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Se A não for inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Matrizes inversíveis

Definição. Seja A uma matriz *quadrada* de ordem n. Dizemos que A é uma *matriz inversível* se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Se A não for inversível, dizemos que A é uma matriz singular.

Teorema

Se A é inversível, então a matriz B satisfazendo $AB = BA = I_n$ é única.

Definição

Dada uma matriz inversível A, chama-se *matriz inversa* de A a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Exemplo. A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ é inversível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, pois:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercćicio 1

Calcule x e y sabendo-se que $\begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercćicio 2

Calcule o produto de duas matrizes:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bom estudo!!