Geometria Analítica e Vetores

Aula 2

Determinantes de matrizes 2×2 e 3×3

Cálculo da matriz inversa
através de determinantes

Docente:
Nguyen Thi Bich Thuy
IBILCE/ UNESP
SÃO PAULO - BRASIL

Estrutura da aula

1. Determinantes de matrizes 2×2 e 3×3;
2. Propriedades de determinantes;
3. Menor complementar e complemento algébrico;
4. Cálculo da matriz inversa através de determinantes.

Referência: IEZZI, G., Fundamentos de Matemática Elementar, Vol. 4, 2ª Edição, São Paulo: Atual Editora.

Definição

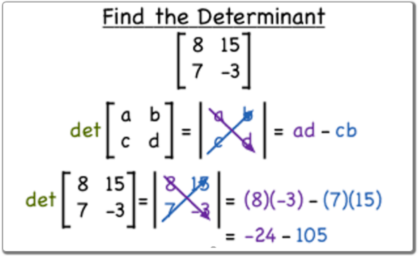
Definição

Seja M uma matriz (real) *quadrada* de ordem n, onde $n = 2$ ou $n = 3$. O *determinante* de M, denotado por $|M|$, é um número real definido por:

- Se $n = 2$, isto é $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então

$$|M| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Exemplo:



Definição

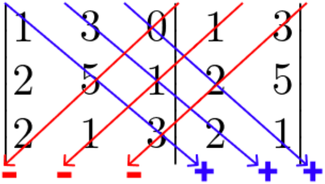
- Se $n = 3$, então:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Então: **det A = a11 . a22 . a33 + a12 . a23 . a31 + a13 . a21 . a32 – a13 . a22 . a31 – a11 . a23 . a32 – a12 . a21. a33**

Determinante de Matrizes 3×3

Exemplo:



Seguindo o sentido das setas e obedecendo os sinais, temos que:

det A = 1 . 5 . 3 + 3 . 1 . 2 + 0 . 2 . 1 − 0 . 5 . 2 − 1 . 1 . 1 − 3 . 2 . 3 = 15 + 6 + 0 − 0 − 1 − 18 = 21 − 19 = 2

Portanto, **det(A) = 2**

Exemplo:

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & 0 & 0 \\ \left|\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. & & \left|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right. & & \\ & & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - (0 + 0 + 0) = 1$$

Definição

Propriedades de determinantes

Seja M uma matriz *quadrada* de ordem n.

1. $\det M = \det M^t$.
2. Se os elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) de M forem todos nulos, então $\det M = 0$.
3. Se M tem duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos *proporcionais*, então $\det M = 0$.
4. Se multiplicarmos *uma fila* qualquer de M por um número real k, então o determinante da nova matriz M' obtida será $k(\det M)$.
5. Se $k \in \mathbb{R}$, então $\det(kM) = k^n(\det M)$, notando que n é a ordem da matriz M.
6. Se *trocarmos de posições de duas filas paralelas* (duas linhas ou duas colunas), obteremos uma nova matriz M' cuja determinate é o *oposto* do determinante de M.
7. Se duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) formadas por elementos respectivamente iguais, então $\det M = 0$.

Menor Complementar e Complemento Algébrico

Menor complementar

Definição. Consideremos uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$. Seja a_{ij} um elemento de M. Definimos *menor complementar do elemento a_{ij}* e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

O menor complementar relativo ao elemento a_{23} é

$$D\_23 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Menor complementar

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ então } D_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -13$$

Complemento algébrico (ou cofator)

Definição. Consideremos uma matriz M de ordem $n \geqslant 2$. Seja a_{ij} um elemento de M. Definimos *complemento algébrico do elemento a_{ij}* (ou *cofator* de a_{ij}) e indicamos por A_{ij}, como sendo o número $(-1)^{i+j}D_{ij}$.

Exemplo: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, vamos calcular os cofatores A_{11}, A_{12} e A_{13}.

Temos: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -28$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 53$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ então $A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -23$

Cálculo da matriz inversa através de determinantes

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de *matriz dos cofatores* de M, e indicamos por M', a matriz que se obtem de M, substituindo cada elemento de M por seu cofator.

Exemplo 1:

1º) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

pois

$A_{11} = (-1)^2 \cdot |4| = 4$ $\quad$ $A_{12} = (-1)^3 \cdot |3| = -3$

$A_{21} = (-1)^3 \cdot |2| = -2$ $\quad$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot |1| = 1$

Exemplo 2:

2º) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ então $M' = \begin{bmatrix} -3 & 9 & -1 \\ 2 & -6 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

pois $A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3;$ $\quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 9$

$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2;$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2;$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Matriz adjunta

Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M. Chamamos de *matriz adjunta* de M, e indicamos por $\overline{M}$, a matriz transposta da matriz dos cofatores, isto é,

$$\overline{M} = (M')^t.$$

Exemplo: Nos exemplos dados no item anterior, temos

1º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ então $\overline{M} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

2º) $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ então $\overline{M} = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Teorema 1

Se M é matriz quadrada de ordem n e $\det M \neq 0$, então a inversa de M é:

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}.\overline{M}.$$

Exemplo:

1º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\overline{M} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\det M = -2$

Logo $M^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

2º) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\overline{M} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\det M = -5$

Logo

$$M^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 9 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Corolário

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. A inversa de M existe se, e somente se, $\det M \neq 0$.

Exercícios

Exercício 1

Calcular o determinante

$$\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 9 & 25 \end{vmatrix}.$$

Exercício 2

Calcular as inversas das seguintes matrizes

1. $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercícios

Exercício 3

Para que valores reais de m existe a inversa da matriz

$$M = \begin{pmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{pmatrix}?$$

Exercício 4

Qual é a condição sobre a para que a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

seja inversível?

Bom estudo!!