Geometria Analítica e Vetores

Geometria Analítica - Um tratamento vetorial

Posições relativas
entre reta e plano
no espaço

Docente: Prof$^{\mathrm{a}}$. Dr$^{\mathrm{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

No espaço $Oxyz$, dados a reta r e o plano (π). Dadas equações de r e (π), podemos sempre determinar:

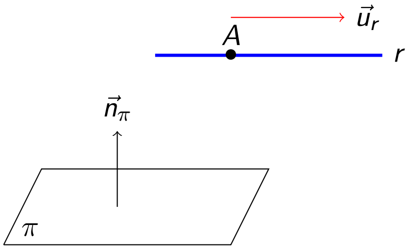
1. Um ponto $A \in r$; um vetor de direção $\vec{u}_r$ da reta r;
2. Um vetor normal $\vec{n}_\pi$ do plano (π).

Problema: *Baseando em pontos A e os vetores $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$, estudar as posições relativas entre a reta r e o plano (π).*

Temos três casos:

1. r e (π) são paralelos;
2. r está contida em (π);
3. r e (π) são transversais (se interceptam em um ponto).

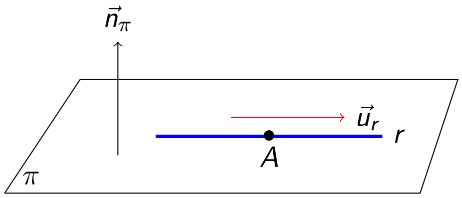
Caso 1: r e (π) são paralelos.



Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ são ortogonais ($\vec{u}_r.\vec{n}_\pi = 0$);
2. O ponto A não pertence ao plano (π).

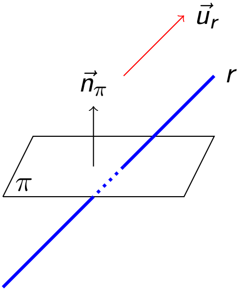
Caso 2: r está contida em (π);



Neste caso:

1. $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ são ortogonais $(\vec{u}_r.\vec{n}_\pi = 0)$;
2. O ponto A pertence ao plano (π).

Caso 3: r e (π) são transversas.



Neste caso:

$\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ não são ortogonais $(\vec{u}_r.\vec{n}_\pi \neq 0)$.

Resumo: relações relativas entre reta e plano no espaço

No espaço $Oxyz$, dados a reta r e o plano (π).
$A \in r$, $\vec{u}_r$: vetor de direção de r; $\vec{n}_\pi$: vetor normal de (π).

1. **r e (π) são paralelos:** quando
   - i) $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ são ortogonais ($\vec{u}_r.\vec{n}_\pi = 0$);
   - ii) O ponto A não pertence ao plano (π).
2. **r está contida em (π):** quando
   - i) $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ são ortogonais ($\vec{u}_r.\vec{n}_\pi = 0$);
   - ii) O ponto A pertence ao plano (π).
3. **r e (π) são transversas:** quando $\vec{u}_r$ e $\vec{n}_\pi$ não são ortogonais ($\vec{u}_r.\vec{n}_\pi \neq 0$).

Exemplo 1: Dados a reta $r : x - 3 = y - 2 = \dfrac{z+1}{2}$ e o plano $(\pi) : \; x + 2y - z = 10$.

1. Estude a posição relativa entre r e (π);
2. Caso r e (π) são transversais, obtenha a intersecção deles.

Exemplo 2: Verifique se a reta

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - 2t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

está contida no plano

$$(\pi): \ 2x + y + 3z - 1 = 0.$$

Exercício 1

Verifique a posição relativa da reta $r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ com o plano

$(\pi) : \ (x, y, z) = (0, 0, 1) + \lambda(1, 0, 3) + \mu(-1, 1, 1).$

Em caso de serem transversais, obtenha o ponto de intersecção.

Exercício 2

Dados o plano

$$(\pi): (x, y, z) = (1, 1, 3) + \lambda(1, -1, 1) + \mu(0, 1, 3) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

e a reta

$$r: \quad (x, y, z) = (1, 1, 1) + \alpha(3, 2, 1) \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

Estude a posição relativa entre o plano (π) e a reta r. Se eles são transversais, encontre a interseção.

Bom estudo!