Geometria Analítica e Vetores

Geometria Analítica - Um tratamento vetorial

Estudo do Plano
no espaço

Docente: Prof$^{\mathrm{a}}$. Dr$^{\mathrm{a}}$. Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

Recordação

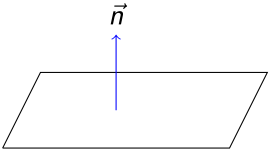
No espaço $Oxyz$, considere um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e um vetor não nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Seja r a reta passando pelo ponto A e tem direção do vetor $\vec{v}$. A reta r tem:

1. **Equação vetorial:**
   $(r): \ (x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t(a, b, c), \qquad t \in \mathbb{R}.$
2. **Equações paramétricas:** $(r): \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$
3. **Equações simétricas:** $(r): \dfrac{x - x_A}{a} = \dfrac{y - y_A}{b} = \dfrac{z - z_A}{c}.$
4. **Equações reduzidas:** Das equações simétricas, desenvolver duas igualdades dessas e simplicá-las, obtemos um sistema de duas equações lineares que são equações reduzidas da uma reta.

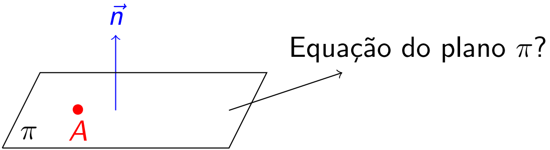
Estudo do Plano

Definição

No espaço $Oxyz$, considere o plano (π). Um vetor $\vec{n}$ ortogonal ao plano (π) é chamado de vector normal ao plano (π).

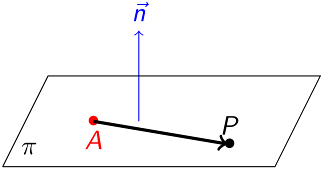


Problema: Dados o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$
Escrever a equação do plano (π) pasando pelo ponto A e tem um vetor normal $\vec{n}$.



Problema: Dados o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ Escrever a equação do plano (π) pasando pelo ponto A e tem um vetor normal $\vec{n}$.

Solução: Tome um um ponto $P(x, y, z)$ que pertence ao plano π.



Então o vetor $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao vetor $\vec{n}$. Daí:

$$\overrightarrow{AP}.\vec{n} = 0.$$

Como

$$\overrightarrow{AP} = (x - x_A, y - y_A, z - z_A), \qquad \vec{n} = (a, b, c),$$

temos

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \qquad (1)$$

A equação (1) é chamado de equação geral do plano (π).

Equação geral de um plano

Dados o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$. A equação geral do plano (π) pasando pelo ponto A e tem um vetor normal $\vec{n}$ é

$$(\pi): \qquad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Exemplo 1: Obter uma equação geral do plano (π) que passa pelo ponto $A(2, -1, 3)$ e tem $\vec{n} = (3, 2, -4)$ como um vetor normal.

Observação 1

Se $ax + by + cz + d = 0$ é uma equação geral do plano π, então o vetor $\vec{n} = (a, b, c)$ é um vetor normal do plano (π).

Justificativa: De fato, tome dois pontos quaisquer $A, B \in (\pi)$, vamos mostrar que $\overrightarrow{AB}$ é ortogonal ao vetor $\vec{n}$. Suponha que $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$, vamos mostrar que $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$. Temos

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = a(x_B - x_A) + b(y_B - y_A) + c(z_B - z_A) \qquad (*)$$

Mas:

$$A \in (\pi) \Rightarrow ax_A + by_A + cz_A + d = 0 \qquad (**)$$
$$B \in (\pi) \Rightarrow ax_B + by_B + cz_B + d = 0 \qquad (***)$$

Subtrair, membro ao membro, da igualdade (**) por (***), temos que o segundo membro da igualdade (*) é igual a 0, como queríamos.

Observação 2

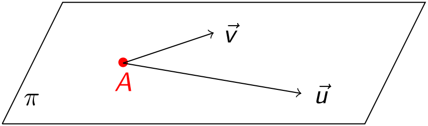
Se o vetor $\vec{n}$ é um vetor normal do plano (π), então qualquer vetor $k\vec{n}$ com $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, também é um vetor normal do plano (π).

Exemplo 2: Escrever uma equação geral do plano (α) que passa pelo ponto $A(2, 1, 3)$ e é paralelo ao plano $(\beta) : \ x - 4y - 2z + 5 = 0.$

Equação vetorial de um plano

Considere:

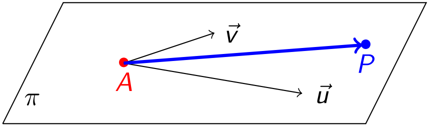
1. $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto pertencente ao plano (π);
2. $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a (π);
3. dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.



Equação vetorial de um plano

Considere:

1. $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto pertencente ao plano (π);
2. $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a (π);
3. dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos.



Para todo ponto P do plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares.

$$\overrightarrow{AP} = t_1\vec{u} + t_2\vec{v}.$$

Daí:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \ (t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \qquad (2)$$

A equação (2) é chamada de equação vetorial do plano (π).

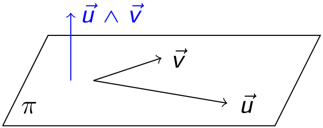
Equação vetorial de um plano

Resumo: Seja $A(x_A, y_A, z_A)$ um ponto pertencente ao plano (π) e $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ dois vetores paralelos a (π). Considere também que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são paralelos. Então uma equação vetorial do plano (π) é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \ (t_1, t_2 \in \mathbb{R}).$$

Definição: os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são chamados de vetores diretores do plano (π).

Observação 3. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores do plano (π), então o vetor $\vec{u} \wedge \vec{v}$ é um vetor normal do plano (π).



Equação vetorial de um plano

Observação 4

Se a equação vetorial do plano (π) é:

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \ (t_1, t_2 \in \mathbb{R}),$$

então, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores diretores do plano (π) e o vetor

$$\vec{n} := \vec{u} \wedge \vec{v}$$

é um vetor normal do plano (π). Portanto, quando sabemos uma equação vetorial do plano (π), podemos sempre escrever uma equação geral do plano. Reciprocamente, quando sabemos uma equação geral do plano (π), podemos sempre escrever uma equação vetorial do plano. De fato, basta tomar três pontos não colineares A, B, C pertencentes ao plano, então dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são dois vetores diretores do plano.

Exemplo 3: Seja o plano (π) passando pelo ponto $A(2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação geral e uma equação vetorial do plano (π).

Equação vetorial de um plano

Observação 5

Uma outra maneira para obter uma equação geral do plano (π) sabendo um ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ pertencente ao plano (π) e dois vetores diretores $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ é: Qualquer ponto P pertencente ao plano, os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são coplanares, então

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Exemplo 4: Refazer o exemplo 3. Seja o plano (π) passando pelo ponto $A(2, 2, -1)$ e é paralelo aos vetores $\vec{u} = (2, -3, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 5, -3)$. Obter uma equação geral e uma equação vetorial do plano (π).

Equações paramétricas de um plano

Da equação vetorial do plano (π):

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + t_1\vec{u} + t_2\vec{v}, \ (t_1, t_2 \in \mathbb{R})$$

onde $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$, temos

$$\begin{cases} x = x_A + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ y = y_A + t_1 b_1 + t_2 b_2 \\ z = z_A + t_1 c_1 + t_2 c_2 \end{cases} \qquad (t_1, t_2 \in \mathbb{R}) \qquad (3)$$

As equações (3) são chamadas de *equações paramétricas* do plano (π).

Exercício 1

Sabendo que a reta

$$(r): \begin{cases} x = 5 + 3t \\ y = -4 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

é ortogonal ao plano (π) e que o plano (π) passa pelo ponto $A(2, 1, -2)$. Determine uma equação geral do plano (π).

Exercício 2

Dado o plano (π) determinado pelos três pontos $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, -3)$ e $C(-1, -2, 6)$. Obter uma equação geral, uma equação vetorial e equações paramétricas do plano (π).

Exercícios

Exercício 3

Dado o plano (π) de equação $2x - y - z + 4 = 0$. Obter uma equação vetorial e equações paramétricas do plano (π).

Exercício 4

Determine uma equação geral do plano (α) que contém duas retas

$$(r_1) : \begin{cases} y = x + 1 \\ z = -3x - 2 \end{cases} , \qquad (r_2) : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t + 3 \\ z = -6t + 1 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Exercício 5

No espaço $Oxyz$, mostre que

1. O plano $3x + 4y + 2z$ passa por 3 pontos no eixos dos x, y, z, respectivamente.
2. O plano
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$$
contém os pontos $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)$ e $C(0, 0, c)$.
3. O plano $x = k$, onde k é um constante (real), é paralelo a plano Oyz.
4. O plano $y = k$, onde k é um constante (real), é paralelo a plano Oxz.
5. O plano $z = k$, onde k é um constante (real), é paralelo a plano Oxy.

Bom estudo!