Geometria Analítica e Vetores

Vetores no plano e no espaço:

Ângulos de dois vetores

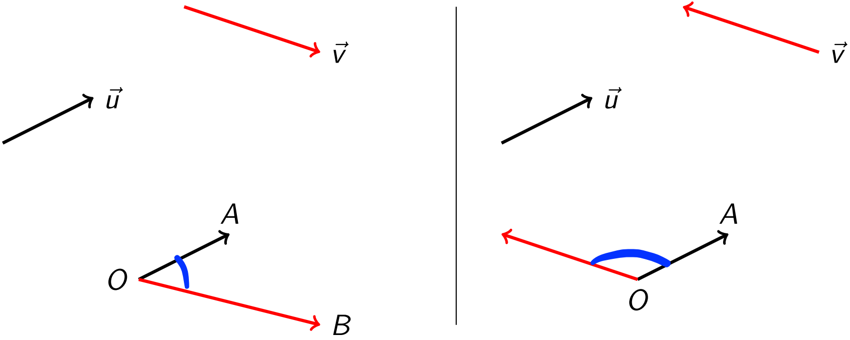
Docente: $\mathrm{Prof}^{\mathrm{a}}.\,\mathrm{Dr}^{\mathrm{a}}.$ Thuy Nguyen
IBILCE/ UNESP
São Paulo - Brasil

Referência: BOULOS, P. e CAMARGO, I. Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial, 3ª edição, São Paulo: Editora Pearson.

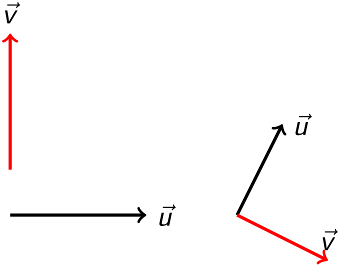
Definição

O ângulo de dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$, representados por $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, é o ângulo θ formado pelas semirretas OA e OB tal que $0 \leq \theta \leq \pi$ (radiano), ou seja $0^\circ \leq \theta \leq 180^o$.

Notação: $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v})$.

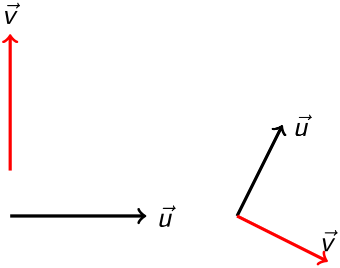


Quando $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ $(\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ)$, dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais. **Notação:** $\vec{u} \perp \vec{v}$.



Quando $\text{âng}(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ $(\text{âng}(\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ)$, dizemos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.

Notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$.



O vetor nulo é considerado ortogonal a qualquer vetor.

Observação

1. Se $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ ($\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = 180^0$), então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção mas com sentidos contrátrios.
2. Se $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, então $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção e têm o mesmo sentido.
3. Se $\vec{u}$ é ortogonal a $\vec{v}$ então $\vec{u}$ é ortogonal a $m\vec{v}$, qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$.
4. O ângulo formado pelos vetores $-\vec{u}$ e $\vec{v}$ é o suplemento do ângulo de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é

$$\hat{a}ng(-\vec{u}, \vec{v}) = 180^o - \hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}),$$

ou seja $$\hat{a}ng(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi - \hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}).$$

Analogamente,

$$\hat{a}ng(\vec{u}, -\vec{v}) = 180^o - \hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}).$$

Exercício 1: Dados três vetores coplanares $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tais que $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{v}) = 45^o$, $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{w}) = 60^o$, $\hat{a}ng(\vec{v}, \vec{w}) = 105^o$. Calcule

1. $\hat{a}ng(-3\vec{v}, \vec{w})$.
2. $\hat{a}ng(-2\vec{u}, -\vec{w})$.

Exercício 2: Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ dois vetores ortogonais. Prove:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

Quando $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são ortogonais, a igualdade acima é verdadeira?

Exercício 3:

Sabendo que $\|\vec{u}\| = \dfrac{2}{3}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ e $\hat{a}ng(\vec{u}, \vec{w}) = 60^o$.

Calcule a área do paralelogramo formado pelos dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Bom estudo!!