Licence Sciences Technologie et Santé, UPJV année 2013-2014.

L3 : Analyse matricielle

Correction devoir 2

Exercice 1

1. La matrice A est à diagonale strictement dominante, donc $a_{ii} \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$. Il en résulte que la matrice D est inversible (det(D)$\neq 0$). La matrice D^{-1} est diagonale, et ses coefficients sont égaux à l'inverse de ceux de D. Par conséquent, L et U sont bien définies.
Par définition, on a $\mathcal{L}_\omega = (D - \omega E)^{-1}\{(1-\omega)D + \omega F\}$. On a aussi

$$\mathcal{L}_\omega = (Id - \omega D^{-1}E)^{-1}D^{-1}D\{(1-\omega)Id + \omega D^{-1}F\} = (Id - \omega L)^{-1}\{(1-\omega)Id + \omega U\}.$$

Par définition, le polynôme caractéristique de $\mathcal{L}_\omega$ est donné par

$$p(\lambda) := \det\left((Id - \omega L)^{-1}\{(1-\omega)Id + \omega U\} - \lambda Id\right),$$

et d'après ce qui précède et utilisant le fait que $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$, on obtient

$$\begin{aligned} &p(\lambda) := \det\left((Id - \omega L)^{-1}(\{(1-\omega)Id + \omega U\} - \lambda(Id - \omega L))\right) \\ &= \det((Id - \omega L)^{-1})\det(-\lambda(Id - \omega L) + (1-\omega)Id + \omega U). \end{aligned}$$

2. Soit μ une valeur propre de $\mathcal{L}_\omega$ de module supérieur à 1. Comme $\omega \in]0,1[$, on a $1 - \omega \in]0,1[$, et comme $|\mu| \geq 1$, on a $1 - \mu - \omega \neq 0$. Remarquons que

$$\begin{aligned} &-\lambda(Id - \omega L) + (1-\omega)Id + \omega U = (1 - \lambda - \omega)Id + \lambda\omega L + \omega U \\ &= (1 - \lambda - \omega)(Id + \tfrac{\lambda\omega}{1-(\lambda+\omega)}L + \tfrac{\lambda\omega}{1-(\lambda+\omega)}U) \\ &= (1 - \lambda - \omega)(Id - \alpha(\lambda)L - \beta(\lambda)U), \end{aligned}$$

pour λ telle que $1 - \lambda - \omega \neq 0$.
Utilisant le fait que pour $c \in I\!R$, on a $\det(c.A) = c^N \det A$, on déduit de ce qui précède que pour λ telle que $1 - \lambda - \omega \neq 0$

$$\begin{aligned} &p(\lambda) = \det((Id - \omega L)^{-1}).\det\left((1 - \lambda - \omega)(Id - \alpha(\lambda)L - \beta(\lambda)U)\right) \\ &= \det((Id - \omega L)^{-1}).(1 - \lambda - \omega)^N.\det(Id - \alpha(\lambda)L - \beta(\lambda)U), \end{aligned}$$

Comme $1-\mu-\omega \neq 0$, on a bien $\det(Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U)=0$. 3. On pose $\mu = r.e^{i\theta}$. On a $r \geq 1$. On a clairement $|\beta(\mu)| \leq |\alpha(\mu)|$. Montrons que $|\alpha(\mu)| < 1$. On a

$$\begin{aligned}
|\alpha(\mu)|^2 &= \frac{r^2\omega^2}{r^2+(\omega-1)^2+2r(\omega-1)\cos\theta} \\
&\leq \frac{r^2\omega^2}{r^2+(\omega-1)^2-2r(1-\omega)} = \frac{r^2\omega^2}{(r-(1-\omega))^2} = \frac{\omega^2}{(1-(\frac{1-\omega}{r}))^2}.
\end{aligned}$$

Or, comme $r \geq 1$, on a $(1-(\frac{1-\omega}{r}))^2 \geq (1-(1-\omega))^2$, d'où $\dfrac{\omega^2}{(1-(\frac{1-\omega}{r}))^2} \leq \dfrac{\omega^2}{\omega^2} = 1$.

4. On a $A = D(Id-L-U)$, $(Id-L-U)_{ii} = 1$ pour tout i et pour $j \neq i$, $(Id-L-U)_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$.

A étant à diagonale strictement dominante, on a $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i}|a_{ij}|, \quad \forall\, i \in \{1,\cdots,N\}$, soit

$$1 > \sum_{j\neq i}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|$$

Il en résulte que $Id-L-U$ est à diagonale strictement dominante.

5. La matrice $Id-L-U$ est à diagonale strictement dominante, donc

$$1 > \sum_{k=1}^{i-1}|L_{ik}| + \sum_{k=i+1}^{N}|U_{ik}|, \ \ \forall\, i \geq 2$$

Comme d'après 3. $|\alpha(\mu)| \leq 1$ et $|\beta(\mu)| \leq 1$, on déduit que

$$\sum_{k=1}^{i-1}|L_{ik}| + \sum_{k=i+1}^{N}|U_{ik}| \geq \sum_{k=1}^{i-1}|\alpha(\mu)||L_{ik}| + \sum_{k=i+1}^{N}|\beta(\mu)||U_{ik}|, \ \ \forall\, i \geq 2.$$

Il en résulte aussitôt que $Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U$ est à diagonale strictement dominante.

On a montré en travaux dirigés qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible, donc $Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U$ est inversible.

6. Puisque la matrice $Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U$ est inversible, son déterminant est différent de 0. Or, d'après la question 2, si μ est une valeur propre de module supérieur à 1, on a $\det(Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U) = 0$. Contradiction. Donc la matrice $Id-\alpha(\mu)L-\beta(\mu)U$ n'admet pas de valeur propre de module supérieur à 1 et son rayon spectral est strictement inférieur à 1. Il en résulte que la méthode de relaxation pour une matrice à diagonale strictement dominante converge.