TP2 - Question 1

réalisé par Claire Bouttes - 536793110
IFT-3001

Table des matières

5 décembre 2020

Introduction

Pour cette question, il sera étudié l'efficacité de deux algorithmes probabilistes premièrement théoriquement puis empiriquement.

Les deux algorithmes ayant des similitudes, nous pouvons identifier une **opération de base** qui sera commune aux deux analyses. Cette dernière sera $c \leftarrow c + 1$.

On désigneras par ρ, la collection des nombres aléatoires utilisés par les deux algorithmes au cours de son execution sur n.

1 Analyse théorique

Pour cette analyse théorique, on partira sur l'idée d'un aléatoire parfait.

1.1 Algorithme 1

Algorithm 1: AlgorithmeProbabiliste1(A[0..n-1])

```
c ← 0;
k ← UNIFORME(0, n − 1);
if A[0] = k then
    for i = k..n do
        for j = 1..k do
            c ← c + 1;
        end
    end
end
return c;
```

Pour ce premier algorithme, k étant tirée aléatoirement, il n'existe pas de pire cas $C(n) = E_\rho C(n,\rho) = \sum_p p(\rho)C(n,\rho)$

$C(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} p(\rho)C(n,\rho)$

$C(n) = \sum_{\rho=0}^{1} p(\rho)C(n,\rho) + \sum_{i=2}^{n-1} p(\rho)C(n,\rho)$

Il y a une chance sur deux comme indiqué dans l'énoncé que A[0] soit 1 ou 0.

$C_{avg}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} p(\rho)C_{avg}(n,\rho)$

$C_{avg}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} \frac{1}{n}\frac{1}{2}(\sum_{i=\rho}^{n}\sum_{j=1}^{\rho} 1) + \frac{1}{2}(0)$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}\sum_{\rho=0}^{n-1}\sum_{i=\rho}^{n}\sum_{j=1}^{\rho} 1$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2n}\sum_{\rho=0}^{1}\sum_{i=\rho}^{n} \rho$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2n}\sum_{\rho=0}^{1} \rho(n-\rho+1)$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2n}\sum_{\rho=0}^{1} -\rho^2 + \rho(n+1)$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2n}(n+1)$

$C_{avg}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$

L'algorithme est donc en $\theta(n)$.

1.2 Algorithme 2

Algorithm 2: AlgorithmeProbabiliste2(A[0..n-1])

$c \leftarrow 0$;
$k \leftarrow UNIFORME(0, n-1)$;
if $A[0] = 0$ **then**
  for $i = 1..k$ **do**
    $c \leftarrow c + 1$;
  end
end
return c;

Pour ce second algorithme, le temps d'exécution ne dépend pas uniquement de la taille de l'instance n, mais aussi de l'instance elle-même. Nous avons alors un pire cas, un meilleur cas ainsi qu'un cas moyen que nous allons analyser

Pire cas $C_{worst}(n) = E_\rho C_{worst}(n, \rho) = \sum_p p(\rho) C_{worst}(n, \rho)$
$C_{worst}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} p(\rho) C_{worst}(n, \rho)$

Dans le pire cas, A[0] est toujours égal à 0.
$C_{worst}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{\rho} 1$
$C_{worst}(n) = \frac{1}{n} \sum_{\rho=0}^{n-1} (\rho - 1 + 1) \times 1$
$C_{worst}(n) = \frac{1}{n} \sum_{\rho=0}^{n-1} \rho$
$C_{worst}(n) = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2}$
$C_{worst}(n) = \frac{(n+1)}{2}$

L'algorithme est donc en $\theta(n)$ en pire cas.

Meilleur Cas $C_{best}(n) = E_\rho C_{best}(n, \rho) = \sum_p p(\rho) C_{best}(n, \rho)$
Dans le meilleur cas, A[0] est toujours différent de 0. Nous avons alors peut importe la valeur de k : $C_{best}(n) = 0$.

Cas moyen $C_{avg}(n) = E_\rho C_{avg}(n, \rho) = \sum_p p(\rho) C_{avg}(n, \rho)$
$C_{avg}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} p(\rho) C_{avg}(n, \rho)$

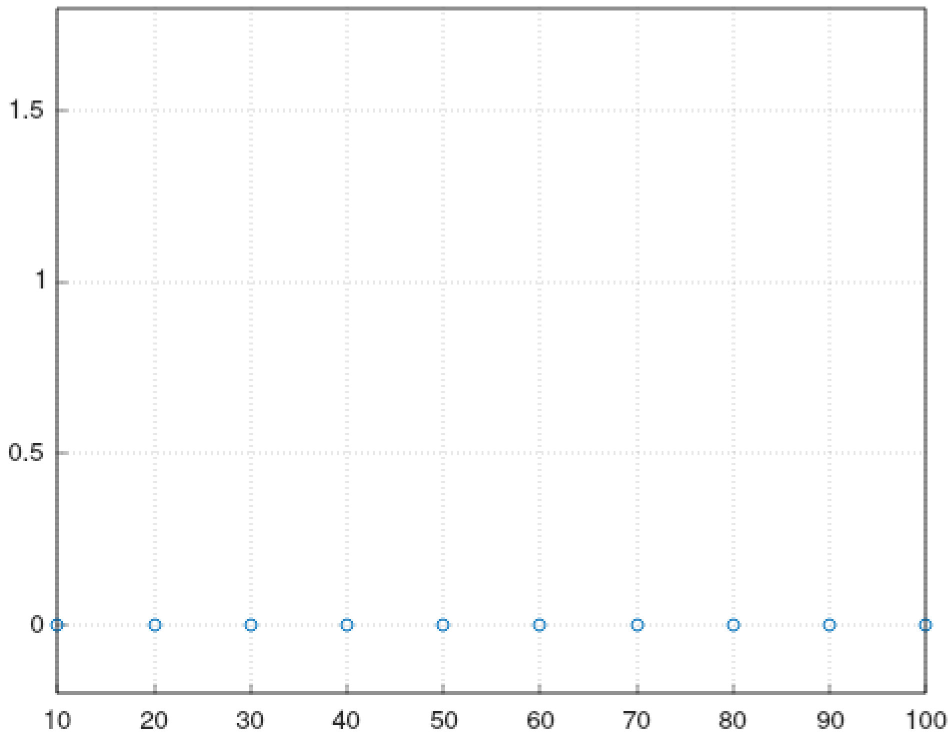
En cas moyen, de la même manière que pour le premier algorithme, il y a une chance sur deux que A[0] soit 1 ou 0.
$C_{avg}(n) = \sum_{\rho=0}^{n-1} p(\rho)(\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{2}(\rho))$
$C_{avg}(n) = \frac{1}{2} \sum_{\rho=0}^{n-1} \frac{1}{n} \rho$
$C_{avg}(n) = \frac{1}{2n} \frac{n(n-1)}{2}$
$C_{avg}(n) = \frac{n-1}{4}$

L'algorithme est donc en $\theta(n)$ en pire cas.

2 Analyse empirique

Le résultat des graphiques correspond au nombre d'exécution de l'opération baromètre en fonction de n, la taille du tableau de bits en entrée.

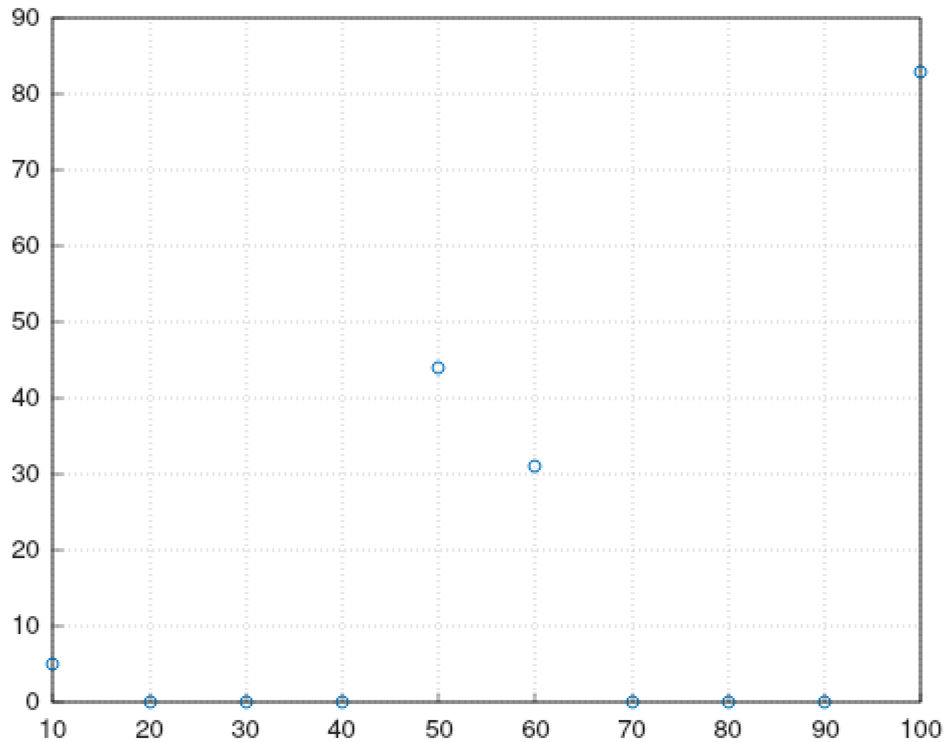
2.1 Algorithme 1



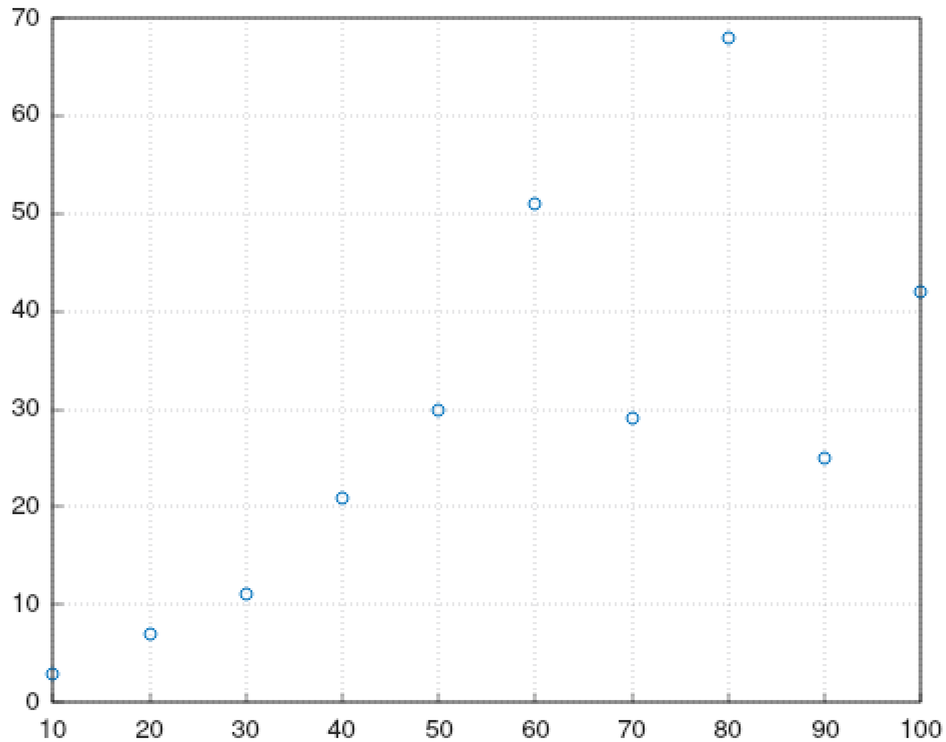
2.2 Algorithme 2

Pour le pire cas, A[0] est égal à false (0). Pour le meilleur cas, A[0] est égal à true (1).

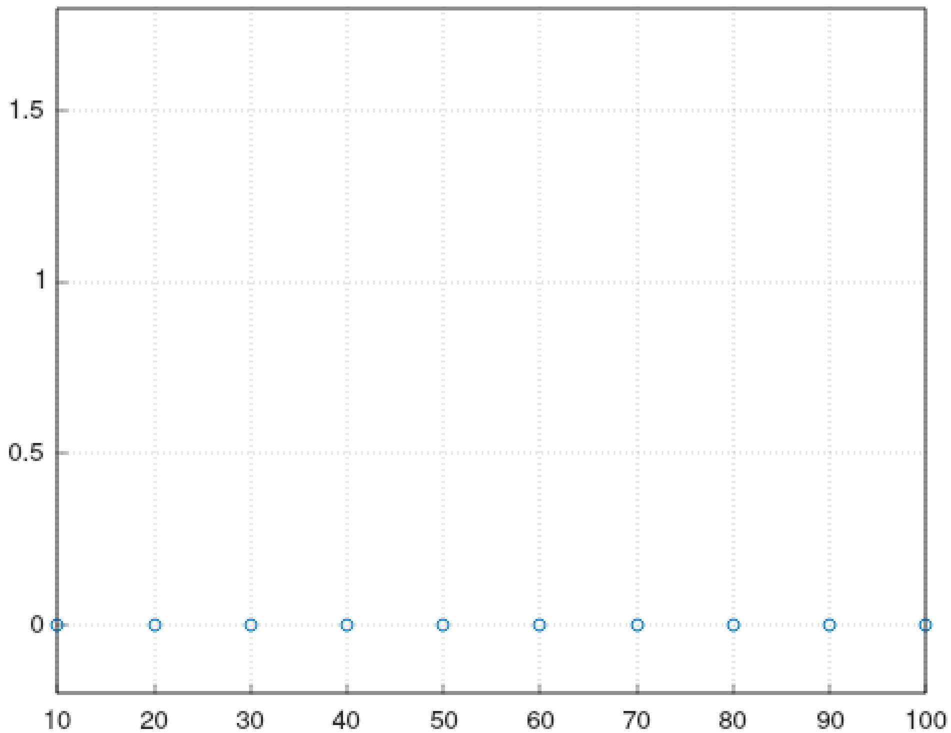
Cas moyen



Meilleur Cas



Pire Cas



Conclusion

En conclusion, il faudrait bien plus de 10 essais pour vraiment sortir des probabilités de sortie.