平成２６年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

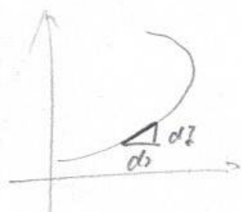
［数学－１］

問題１

$$\sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\,ds$$

曲線Cが媒介変数表示$x=f(s)$, $y=g(s)$, $s\geq 0$で表される．ただし$\cosh s=(e^s+e^{-s})/2$, $\sinh s=(e^s-e^{-s})/2$を用いて

$$f(s)=s-\frac{\sinh s}{\cosh s}$$
$$g(s)=\frac{1}{\cosh s}$$



と定義する．以下の設問に答えよ．

(1) 定数$b>0$に対して曲線$C(b)$が$x=f(s)$, $y=g(s)$, $0\leq s\leq b$で表される．$C(b)$の長さ$\ell(b)$を求めよ．

(2) 点Pは時刻０で$x=f(0)$, $y=g(0)$を出発してsが増える方向へ一定の速さでC上を移動する．時刻$t>0$までに移動した経路の長さをtとする．時刻tにおけるPの位置を$x=f(\varphi(t))$, $y=g(\varphi(t))$と表すための関数$\varphi(t)$を求めよ．

(1) $\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{df}{ds}$

$$=1-\frac{\cosh s\cdot\cosh s-\sinh s\cdot\sinh s}{\cosh^2 s}=\cancel{1-1}+\frac{\sinh^2 s}{\cosh^2 s}$$

$$\frac{dy}{ds}=-\frac{\sinh s}{\cosh^2 s}$$

$\leftarrow \cosh^2 s$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=\frac{\sinh^4 s}{\cosh^4 s}+\frac{\sinh^2 s}{\cosh^4 s}=\frac{\sinh^2 s\,(1+\sinh^2 s)}{\cosh^4 s}$$

$$=\frac{\sinh^2 s}{\cosh^2 s}$$

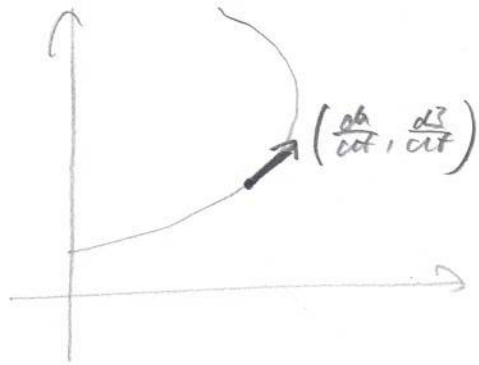
$$\therefore \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}=\frac{\sinh s}{\cosh s}$$

$$\therefore\ l(b) = \int_0^b \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\, ds = \int_0^b \frac{\sinh s}{\cosh s}\, ds$$

$$= \Big[\ln|\cosh s|\Big]_0^b$$

$$= \ln\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) - \underbrace{\ln\left(\frac{1+1}{2}\right)}_{=0}$$

$$= \ln\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right)$$



(2)

速度のベクトル $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ の大きさが一定なので

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 一定$$

加えて $t>0$ までに移動した経路の長さが t なので、速さは 1 であり、上式は

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = 1$$

とできる。①の左辺は

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{\sinh s}{\cosh s} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{\sinh s}{\cosh s} \cdot \frac{ds}{dt} = 1$$

両辺に dt かけて積分すると

$$(左辺) = \int \frac{\sinh s}{\cosh s}\, ds = \ln|\cosh s| + C_1$$

$$(右辺) = \int dt = t + C_2$$

したがって、

$$\ln|\cosh s| = t + C$$

$$\cosh s = Ae^t$$

$t=0$ で $s=0$ なので

$$A=\cosh 0=1$$

$$\therefore \cosh s = e^{t} \quad -②$$

ここで、$\cosh u$ の逆関数 $\cosh^{-1} u$ は

$$\cosh^{-1} u = \ln\left(u+\sqrt{u^2-1}\right)$$

$$v=\frac{e^{u}+e^{-u}}{2}$$

$$2v=e^{u}+\frac{1}{e^{u}}$$

$$e^{2u}-2ve^{u}+1=0$$

$$\therefore e^{u}=v\pm\sqrt{v^2-1}$$

$$=v+\sqrt{v^2-1}$$

$$\therefore u=\ln\left(v+\sqrt{v^2-1}\right)$$

②にこれを使うと

$$s=\cosh^{-1}(e^{t})$$

$$=\ln\left(e^{t}+\sqrt{e^{2t}-1}\right)$$

$t>0$ の範囲で根号の中は正の値であり、ln の真数条件も満たす。

これを使うと、x, z は

$$x=f(s)=f\left(\ln\left(e^{t}+\sqrt{e^{2t}-1}\right)\right)$$

$$z=g(s)=g\left(\ln\left(e^{t}+\sqrt{e^{2t}-1}\right)\right)$$

したがって、

$$\varphi(t)=\ln\left(e^{t}+\sqrt{e^{2t}-1}\right)$$

平成２６年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題２

次の2次曲線(a)について以下の設問に答えよ．

$5x^2+2xy+5y^2+c=0$ ・・・・(a)

(1) $\mathbf{x}=(x,y)^T$ として，式(a)を $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}+c=0$ の形で表すときの対称行列 A を示せ．ただし，T は転置を表す．

(2) 行列 A の固有値を求めよ．

(3) $P^{-1}AP$ を対角行列にする正則行列 P とそのときの対角行列 $B=P^{-1}AP$ を求めよ．ただし，正則行列の列ベクトルの大きさは1とする．

(4) $\mathbf{x}'=(x',y')^T$ として設問(3)の正則行列 P を用いて $\mathbf{x}=P\mathbf{x}'$ で式(a)を座標変換して得られる $\mathbf{x}'^T B\mathbf{x}'+c=0$ の概形を x' 軸，y' 軸と共に描け．ただし，$c=-12$ とする．

(1) $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}$

(2) $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 1\\ 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-\lambda & 6-\lambda\\ 1 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-\lambda & 0\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}$

固有値は $\lambda=4,6$

(3)

$\lambda=4$ について

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore u_1=c_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow c_1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=6$ について

$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore u_2=c_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

よって、

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(4)

Pは直交行列であるから $P^{-1} = P^T$。これを使うと(a)の左辺は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} + c &= (P\boldsymbol{x}')^T A (P\boldsymbol{x}') + c \\ &= \boldsymbol{x}'^T P^T A P \boldsymbol{x}' + c \\ &= \boldsymbol{x}'^T B \boldsymbol{x}' + c \end{aligned}$$

したがって、

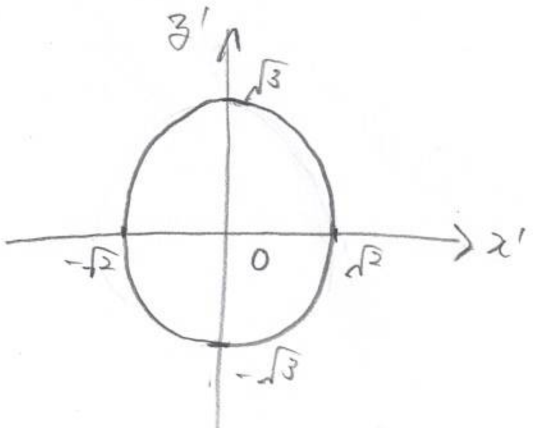
$$\boldsymbol{x}'^T B \boldsymbol{x}' + c = 0$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 12 = 0$$

$$\therefore 6x'^2 + 4y'^2 = 12$$

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{3} = 1 \qquad \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1$$

これは楕円の方程式であるから、$\boldsymbol{x}'^T B \boldsymbol{x}' + c = 0$ の概形は



平成２６年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－３］

問題３

1から6の目が等確率で出るさいころに関する以下の設問に答えよ．

(1) 1つのさいころを5回振るとき，ちょうど3種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

(2) 区別のできない5つのさいころを同時に振るとき，ちょうど3種類の目が出る場合は何通りあるかを求めよ．

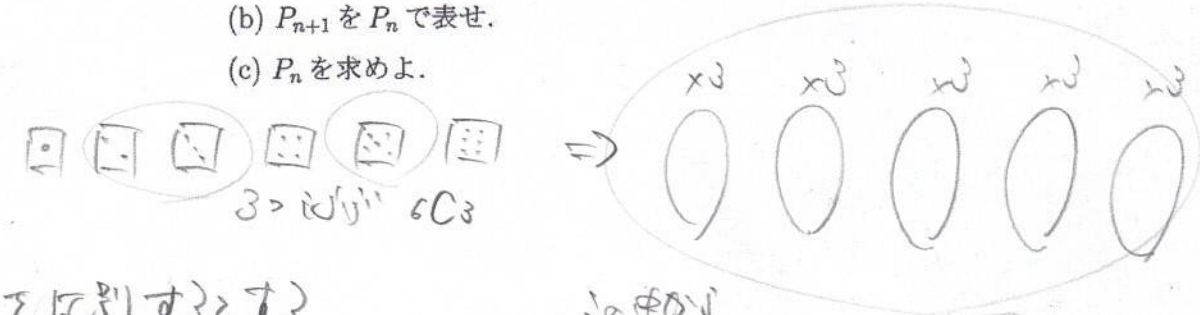
(3) さいころを振って3以上の目が出たら4点を，2以下の目が出たら1点を得る．さいころをn回振った時までに得た点数の合計が偶数である確率をP_nとする（ただし，nは0以上の整数とし，$P_0=1$とする）．このとき，以下の(a)~(c)に答えよ．

(a) P_1，P_3を求めよ．

(b) P_{n+1}をP_nで表せ．

(c) P_nを求めよ．

$81 \times 3 = 243$, $243 \times 20 = 4860$

(1)


⚀を区別するとする．

この中から
⚀×5や ⚀×2，⚀×3を除く

$= {}_6C_3 \cdot (3^5 - \underbrace{{}_3C_2 \cdot (2^5 - 2)}_{2種類の目} \cancel{\times} 3)$　1種類の目

$81 - 32 + 2 + 1 = 50 + 2 = 52$

$= \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 3(3^4 - 2^5 + 2 \cancel{\times} 1)$

$52 \times 60 = 3120$

$= 60 \cdot \cancel{52}$ 50

$=$ ~~3120~~ 通り

3000通り

(2)

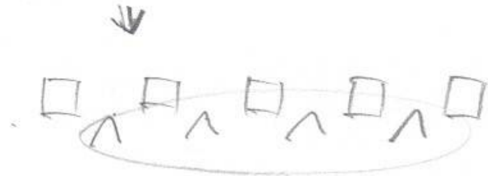
1〜6が何回でるか考える.

$$ {}_6C_3 \cdot {}_4C_2 = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot \cancel{2}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot 3}{\cancel{2}} $$

$$ = 20 \cdot 6 $$

$$ = 120 \text{通り} $$

3つえらぶ

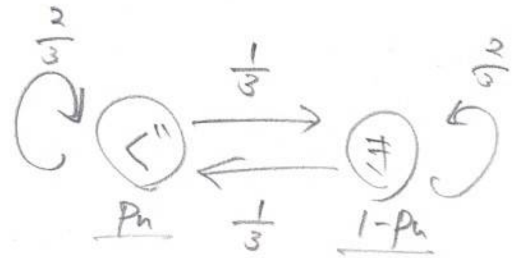


間を2つえらぶ

(3)

(a) $P_1 = \frac{2}{3}$

$P_3 = \frac{14}{27}$



(b) $P_{n+1} = \frac{2}{3}P_n + \frac{1}{3}(1-P_n)$

$= \frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}$

$P_{n+1} - \alpha = \frac{1}{3}(P_n - \alpha)$

$\therefore P_{n+1} = \frac{1}{3}P_n + \alpha - \frac{1}{3}\alpha$

$= \frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}\alpha$

$\therefore \alpha = \frac{1}{2}$

(c) $P_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{2}\right)$

$\therefore P_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \left(P_0 - \frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$P_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{27+1}{2 \cdot 27}$

$= \frac{\cancel{28}\,14}{\cancel{54}\,27}$

$=$