[I]

(1)
$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-3\lambda+\lambda^2+2)$$
$$= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-1)$$
$$= 0$$

$\therefore \lambda = 1, 2$

(2)

それぞれの固有値に対する固有ベクトルを求める.

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad -x-y+z=0$$

$$\therefore v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((a,b) \neq (0,0))$$

$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -2x \quad + z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore v_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0)$$

よって、1次独立なAの固有ベクトルは

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

したがって、$P^{-1}AP$ が A の対角行列になるとき

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

[2]

(1) (a)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda+1)\cdot(-1)\cdot(\lambda^2-\lambda-2)$$

$$= (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & -1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

∴固有値は$\lambda=-1$(重解), 2 のとき

(b)

$\lambda=-1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad x+y+z=0$$

よって固有ベクトルv_1は

$$v_1 = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((a,b)\neq(0,0))$$

$\lambda=2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルv_2は

$$v_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c)

(b)より1次独立なAの固有ベクトルが3つあるのでAは対角化可能.

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ とする。 ①

左から A をかけると

$a_1 A x_1 + a_2 A x_2 + a_3 A x_3 = 0$

$\therefore 2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 + 3a_3 x_3 = 0$ ―②

② − 2×① より

$a_3 x_3 = 0$

$x_3 \neq 0$ なので

$a_3 = 0$

これを②に代入。

$2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 = 0$

x_1 と x_2 は1次独立なので

$a_1 = a_2 = 0$

よって、$a_1 = a_2 = a_3 = 0$

したがって、x_1, x_2, x_3 は1次独立である。

$\boxed{3}$

(1)
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a-1 & 0 \\ -a+1 & 2a-1-\lambda & 0 \\ -a+1 & 2a & -1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & a-1 \\ -a+1 & 2a-1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\begin{vmatrix} a-\lambda & a-1 \\ a-\lambda & 2a-1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(a-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & a-1 \\ 1 & 2a-1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)(a-\lambda)(a-\lambda)$$

$2a-1-\lambda-a+1$
$= a-\lambda$

$\therefore A$ の固有値は $\lambda = -1, a$ (重解)

(2)

$-\frac{-a+1}{2} = \frac{a-1}{2}$

$\lambda = -1$ のときの固有ベクトル u_1 は

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ -a+1 & 2a & 0 \\ -a+1 & 2a & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ -a+1 & 2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ 0 & 2a+\frac{a-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x = 0$
$y = 0$

$\therefore u_1 = a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって $W(-1)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\lambda = a$ のときの固有ベクトル u_2 は

$-(a-1)$

$$\begin{pmatrix} -a+1 & a-1 & 0 \\ -a+1 & a-1 & 0 \\ -a+1 & 2a & -1-a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -a+1 & a-1 & 0 \\ 0 & a+1 & -1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & a+1 & -(1+a) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x - z = 0$
$y - z = 0$

$\therefore u_2 = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって $W(a)$ の基底は $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(3)

(2)より $a \neq \pm 1$ のとき，1次独立な固有ベクトルは2つ.
そのため，$a \neq \pm 1$ のとき対角化不可能である.

(i) $a=1$ のとき

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&a\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

このときの固有値は $\lambda=-1,\ 1$ (重解).

$\lambda=-1$ の固有ベクトル v_1 は

$$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad \begin{aligned}x&=0\\y&=0\end{aligned}$$

$$v_1=a\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad (a\neq 0)$$

$\lambda=1$ のときの固有ベクトル v_2 は

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad y-z=0\qquad z=y$$

$$v_2=b\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\qquad ((b,c)\neq(0,0))$$

よって1次独立な固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

の3つ。そのためAは対角化可能.

(ii)

$$\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&-3&0\\2&-2&-1\end{pmatrix}$$

$a=-1$ のとき, 固有値は $\lambda=-1$ (3重解)

このときの固有ベクトル v は

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\2&-2&0\\2&-2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad x-y=0$$

$$\therefore v=a\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

よって線形独立な固有ベクトルは2つで, Aは対角化不可能.

(i), (ii)より, Aが対角化可能であるための条件は

$$a=1$$

$\boxed{4}$

(1) $f_A(x) = |xE - A|$

$$= \begin{vmatrix} x+1 & -1 & 3 \\ -9 & x+2 & -9 \\ -5 & 2 & x-7 \end{vmatrix}$$

$$= (x+1)(x+2)(x-7) \cancel{-45} \cancel{-84} + 15x \cancel{+30} \cancel{+18x} \cancel{+18} \cancel{-9x} \cancel{+63}$$

$$= (x+1)(x^2-5x-14) + 12 + 24x$$

$$= \cancel{x^3 - 5x^2 - 14x + x^2 - 5x - 14 + 12 + 24x}$$

$$= x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$= (x-1)(x^2-3x+2)$$

$$= (x-1)(x-2)(x-1)$$

$$= (x-1)^2(x-2)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 5 & -2 \\ & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

固有値は $f_A(x)=0$ をみたす x なので、

$x = 1$（重解）, 2

(2)

$n \geq 1$ で $f_A(x)$ は3次式のため、$(x-1)^{n+2}$ を $f_A(x)$ で割ったときのあまりは2次式となる。商を $Q(x)$, あまりを $P(x) = ax^2+bx+c$ とすると

$$(x-1)^{n+2} = f_A(x)Q(x) + P(x)$$
$$= (x-1)^2(x-2)Q(x) + ax^2+bx+c \quad -(*)$$

$x=1$ を代入すると

$a+b+c=0 \quad -①$

$x=2$ を代入すると

$4a+2b+c=1 \quad -②$

また、$(*)$ を両辺微分して $x=1$ を代入すると

$4a+b=0 \quad -③$

$$\therefore \begin{cases} a+b+c=0 & -① \\ 4a+2b+c=1 & -② \\ 2a+b=0 & -③ \end{cases}$$

$3a+b=1$

$2a+b=0$

$a=1$

$b=-2$

$c=1$

$\therefore P(x) = x^2 - 2x + 1$

$= (x-1)^2$

よって，(*)は

$$(x-1)^{n+2} = f_A(x)Q(x) + (x-1)^2 \quad -(*)'$$

(*)' について $x = A$ とすると

$$(A-E)^{n+2} = f_A(A)Q(A) + (A-E)^2$$

ここで，ケーリー・ハミルトンの定理より $f_A(A) = O$

$$\therefore (A-E)^{n+2} = (A-E)^2$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 9 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 9 & -3 & 9 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$4+9-15 \quad -2-3+6 \quad 6+9-18$

$-18-27+45 \quad 9+9-18 \quad -27-27+54$

$-10-18+30 \quad 5+6-12 \quad -15-18+36$

[5]

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

← 各行の成分の総和は1

かつ

全ての成分が正の値

固有値 λ，それに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, x_2, \cdots x_n)$ とする.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}$$

$\boldsymbol{x}$ の成分の大きさが一番大きいものを x_k とし，k 行目に注目すると

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = \lambda x_k$$

$$\therefore |\lambda x_k| = |a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n|$$

$$\leq |a_{k1}x_1| + |a_{k2}x_2| + \cdots + |a_{kn}x_n|$$

$$= a_{k1}|x_1| + a_{k2}|x_2| + \cdots + a_{kn}|x_n| \quad \because (2) の条件$$

$\leq a_{k1}|x_k| + a_{k2}|x_k| + \cdots + a_{kn}|x_k|$

$= (a_{k1} + a_{k2} + \cdots + a_{kn})|x_k|$

$= |x_k|$ 　∵ (b) の条件

$\therefore |\lambda x_k| \leq |x_k|$

$|x_k| > 0$ なので

$|\lambda| \leq 1$

[6]

(1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-p-\lambda & q \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1-\lambda \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ p & 1-q-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p-q-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(1-p-q-\lambda)$

$\therefore \lambda = 1,\ 1-p-q$

$1-p-1+p+q$

$\lambda = 1$ のとき

$1-q-1+p+q$

$\begin{pmatrix} -p & q \\ p & -q \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -p & q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-px+qy=0$

$px = qy$

$x = \frac{q}{p}$

$\therefore \boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix} \frac{q}{p} \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$

$\lambda = 1-p-q$ のとき

$\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$x+y=0$

$\therefore \boldsymbol{x} = b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$

(2)

与式より

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

A^nを求める.

(1)の$|A-\lambda E| = f_A(\lambda)$として, λ^nを$f_A(\lambda)$で割ったときの商を$Q(\lambda)$, あまりを$P(\lambda) = a\lambda + b$とすると, λ^nは以下のように表せる.

$$\lambda^n = f_A(\lambda)Q(\lambda) + P(\lambda)$$
$$= (1-\lambda)(1-p-q-\lambda)Q(\lambda) + a\lambda + b \quad \text{—①}$$

①に$\lambda = 1$を代入すると

$$1 = a + b \quad \text{—②}$$

①に$\lambda = 1-p-q$を代入すると

$$(1-p-q)^n = a(1-p-q) + b$$

②, ③より

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a(1-p-q) + b = (1-p-q)^n \end{cases}$$

$$a(p+q) = 1-(1-p-q)^n$$

$$a = \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$b = 1 - a$$
$$= \frac{p+q-1+(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$\therefore \lambda^n = f_A(\lambda)Q(\lambda) + \frac{(1-(1-p-q)^n)\lambda + p+q-1+(1-p-q)^n}{p+q}$$

ここで, ケーリー・ハミルトンの定理より, $f_A(A) = O$より, $\lambda = A$とすると

$$A^n = \frac{\left(1-(1-p-q)^n\right)A + p+q-1+(1-p-q)^n}{p+q}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} A^n = \frac{1}{p+q}\left(A + (p+q-1)E\right) \quad \because |1-p-q|<1$$

$$= \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & q \\ p & p \end{pmatrix}$$

よって、

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q a_0 + q b_0 \\ p a_0 + p b_0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{p+q}(q a_0 + q b_0) = \frac{q}{p+q}(a_0 + b_0)$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{p+q}(p a_0 + p b_0) = \frac{p}{p+q}(a_0 + b_0)$$