9

平成２８年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　　理］試　験　問　題

| 受験番号 | 志望学科・コース |
|---|---|
| | 学科<br>コース |



## 問題１

図に示すように，真空中の斜面上を転がる質量$M$，半径$a$の剛体球を考える．斜面は水平と$\theta$の角をなす．球内部では密度$\rho(>0)$が分布するものとし，密度は剛体球重心$O$からの距離$r$の関数とする（すなわち，$\rho=\rho(r)$）．系には重力加速度$g$が下向きに作用する．球・斜面の接点での発熱等によるエネルギー損失は無視できるものとする．以下の設問に答えよ．

(1) 質量$M$と密度$\rho$の間には以下の関係が成り立つ．

$$M=4\pi\int_0^a r^2\rho\,\mathrm{d}r.$$

以下の(a), (b)の場合に対する密度分布$\rho(r)$を，$a$, $M$を用いてそれぞれ求めよ．

(a)　$\rho$が$r^2$に比例，　　(b)　$\rho$が$(a-r)^2$に比例．

(2) 球の回転軸まわりの慣性モーメント$I$は次式で与えられる．

$$I=\frac{8\pi}{3}\int_0^a r^4\rho\,\mathrm{d}r.$$

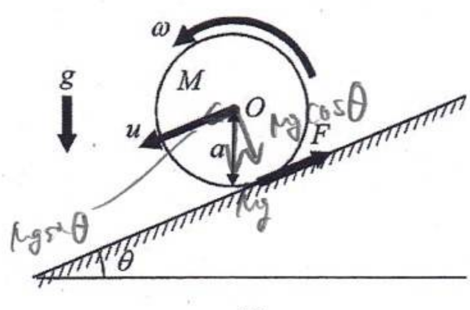
設問(1)の(a), (b)の場合に対する慣性モーメント$I$を，それぞれ求めよ．

(3) 球の重心$O$の速度を$u$，回転軸まわりの角速度を$\omega$と記す．また，斜面との接点で球に作用する摩擦力を$F$とおく．時刻$t$における球の重心運動，および，回転軸まわりの回転運動を記述する方程式を，$\theta$, $\omega$, $a$, $F$, $g$, $I$, $M$, $t$, $u$のうち必要なものを用いて記述せよ．

(4) 球は滑らずに転がるものとする．$u$と$\omega$の間に成り立つ関係を求めよ．

(5) 設問(3), (4)より，時刻$t$における角速度$\omega$を求めよ．なお，時刻$t=0$での角速度を$\omega=\omega_0\ (>0)$と記す．

(6) 時刻$t$における角速度$\omega$をできるだけ大きくするには，球内部の密度$\rho$をどのように分布させれば良いか，説明せよ．なお，質量$M$，半径$a$は，ともに値が定められているものとする．




図

1、

(1)

(a) $\rho := kr^2$

$$M = 4\pi\int_0^a r^2\cdot kr^2\,dr = 4\pi k\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = \frac{4}{5}\pi k a^5$$

$$\therefore k = \frac{M}{\frac{4}{5}\pi a^5} = \frac{5M}{4\pi a^5}$$

$$\therefore \rho(r) = \frac{5M}{4\pi a^5}r^2$$

$$r^2(a^2-2ar+r^2)$$

(b) $\rho := k(a-r)^2$

$$M = 4\pi\int_0^a r^2\cdot k(a-r)^2\,dr = 4\pi k\int_0^a\left(a^2r^2-2ar^3+r^4\right)dr$$

$$= 4\pi k\left[a^2\cdot\frac{r^3}{3} - \cancel{2}a\cdot\frac{r^4}{\cancel{4}_2} + \frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$= 4\pi k\left(\frac{10a^5}{30} - \frac{15a^5}{30} + \frac{6a^5}{30}\right) = \cancel{4}^{2}\pi k\cdot\frac{a^5}{\cancel{30}_{15}}$$

$$= \frac{2}{15}\pi a^5 k$$

$$\therefore k = \frac{M}{\frac{2}{15}\pi a^5} = \frac{15M}{2\pi a^5}$$

$$r^4(a^2-2ar+r^2)$$
$$= (a^2r^4-2ar^5+r^6)$$

$$\rho(r) = \frac{15M}{2\pi a^5}(a-r)^2$$

(2)

(a) $$I = \frac{8\pi}{3}\int_0^a r^4\cdot\frac{5M}{4\pi a^5}r^2\,dr = \frac{\cancel{8\pi}^{2}}{3}\cdot\frac{5M}{\cancel{4\pi}a^5}\left[\frac{r^7}{7}\right]_0^a = \frac{10M}{3a^5}\cdot\frac{a^{\cancel{7}\,2}}{7}$$

$$= \frac{10}{21}Ma^2$$

(b) $$I = \frac{8\pi}{3}\int_0^a r^4\cdot\frac{15M}{2\pi a^5}(a-r)^2\,dr$$

$$= \frac{\cancel{8\pi}^{4}}{\cancel{3}_1}\cdot\frac{\cancel{15}^{5}M}{\cancel{2\pi}a^5}\int_0^a\left(a^2r^4-2ar^5+r^6\right)dr$$

$$= \frac{20M}{a^5}\cdot\left[a^2\cdot\frac{r^5}{5} - \cancel{2}a\cdot\frac{r^6}{\cancel{6}_3} + \frac{r^7}{7}\right]_0^a$$

$$\frac{21}{105} - \frac{35}{105} + \frac{15}{105} = \frac{1}{105}$$

$$= \frac{20M}{a^5}\left(\frac{a^7}{5} - \frac{a^7}{3} + \frac{a^7}{7}\right)$$

$$= \frac{\cancel{20}^{4}M}{a^5}\cdot\frac{a^{\cancel{7}\,2}}{\cancel{105}_{21}}$$

$$= \frac{4}{21}Ma^2$$

(3) 重心：$M\frac{du}{dt} = Mg\sin\theta - F$ ― ①

回転：$I\frac{d\omega}{dt} = aF$ ― ②

(4) $u = a\omega$ ― ③

(5)

③を微分して①に代入.

$$Ma\frac{d\omega}{dt} = Mg\sin\theta - F$$

②より $F = \frac{I}{a}\frac{d\omega}{dt}$ を代入して

$$Ma\frac{d\omega}{dt} = Mg\sin\theta - \frac{I}{a}\frac{d\omega}{dt}$$

$$\therefore \left(Ma + \frac{I}{a}\right)\frac{d\omega}{dt} = Mg\sin\theta$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Mg\sin\theta}{Ma + \frac{I}{a}} = \frac{Mga\sin\theta}{Ma^2 + I}$$

$t = 0 \to t$ で積分すると

$$\omega - \omega_0 = \frac{Mga\sin\theta}{Ma^2 + I}t$$

$$\therefore \omega = \omega_0 + \frac{Mga\sin\theta}{Ma^2 + I}t \quad ― ④$$

(6)

④について, $I$を小さくすれば$\omega$は大きくなることが分かる.
ここで(1)の(a), (b)の2つの分布について, (a)は球外側の密度,
(b)は球中心の密度が大きい分布になっている.
この2つの$I$を比べると, (2)の結果より(b)のほうが小さいことが分かる.
したがって, 球中心部の密度が高くなるように分布させると
$\omega$が大きくなる.

平成２８年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試験問題

| 受験番号 | 志望学科・コース |
|---|---|
| | 学科<br>コース |



**問題３**

冷凍機の効率について考えてみよう．以下の文中の $\boxed{(1)}$ ～ $\boxed{(10)}$ に，もっともふさわしい値または数式を解答用紙に記入せよ．なお，気体定数は$R$とする，また理想気体の断熱過程においては比熱比を$\gamma$とすると$PV^{\gamma}$は一定となる．

$n$モルの理想気体に図1でABCDAの準静的なサイクル（カルノー・サイクル）を行わせたときの効率$\eta$を考える．ただし，$T_1 > T_2$とする．

ABの過程は，温度$T_1$の等温過程であり，気体が外部にする仕事$W_{AB}$は $\boxed{(1)}$，気体の吸収する熱量$Q_{AB}$は $\boxed{(2)}$ である．

BCの過程は，断熱膨張の過程であり，気体が外部にする仕事$W_{BC}$は $\boxed{(3)}$，気体の吸収する熱量$Q_{BC}$は $\boxed{(4)}$ である．

CDの過程は，温度$T_2$の等温圧縮であるので，気体が外部にする仕事$W_{CD}$および，気体の吸収する熱量$Q_{CD}$は，それぞれ $\boxed{(1)}$，$\boxed{(2)}$ で変数$V_A$を$V_C$に，$V_B$を$V_D$に，$T_1$を$T_2$に代えればよい．

DAの過程は，断熱圧縮であるため，気体が外部にする仕事$W_{DA}$は $\boxed{(3)}$ の変数$T_1$を$T_2$に，$T_2$を$T_1$に代えればよく，また気体の放出する熱量$Q_{DA}$は $\boxed{(4)}$ である．

よって，仕事の総和$W$は $\boxed{(5)}$ である．一般に，熱機関の効率$\eta$は，取り入れた熱量$Q_{AB}$に対して，これを使って外部にした仕事$W$の割合であるので，$\eta$を$T_1$および$T_2$で表すと $\boxed{(6)}$ となる．（$V_B/V_A = V_C/V_D$の関係があることを用いてもよい）

図2のように，カルノーの熱機関Kに逆過程を行わせて，Kに外部から仕事$W$を加えて，温度$T_2$の低温熱源から$Q_2$の熱を吸収し，温度$T_1$の高温熱源に$Q_1$の熱量を放出することを考える．このとき，低温熱源からみると熱を奪われるので冷凍機として働くことになる．なお，$Q_1 > 0$，$Q_2 > 0$，また外部から与えた仕事$W$と$Q_1$，$Q_2$の間には，$Q_1 = W + Q_2$の関係があるとする．

まず，仕事$W$を与えない場合を考える．低温熱源からは$Q_2$の熱が奪われるので，エントロピーは $\boxed{(7)}$ だけ減少し，高温熱源には$Q_1$の熱が与えられるので，エントロピーは $\boxed{(8)}$ だけ増加する．よって，全体としては，$-\boxed{(7)}+\boxed{(8)}$ だけ変化する．

熱は低温から高温の方には移動できないから，これは自発過程でない．そこで，この過程が起こるために，最小限の仕事$W_0$を付け加えたときを考える．このときの効率（性能指数）$c$は$Q_2/W_0$で与えられることから，$1/c$を$Q_1$および$Q_2$で表すと $\boxed{(9)}$ となり，さらに過程は可逆的に起こっているから，全体としてこの過程がエントロピーの変化なしに起こる．よって，$T_1$と$T_2$の間で可逆的に働く理想的な冷房機の性能指数$c$は$T_1$および$T_2$で表すと $\boxed{(10)}$ と導かれ，カルノーの熱機関Kを暖房機として用いたときの効率，すなわち $\boxed{(6)}$ の逆数とは異なる値をとることが分かる．

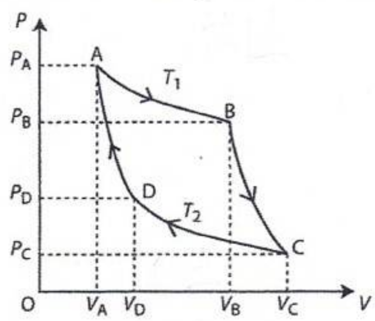



図1

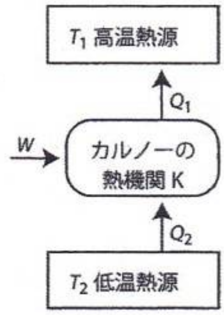



図2

3.

(1) $W_{AB} = \int_{A\to B} p\,dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT_1}{V}\,dV = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$ $\qquad \Delta U = Q - W$

(2) $Q_{AB} = W_{AB} = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A}$

$pV^{\gamma} = P_B V_B^{\gamma}$

$p = P_B\left(\frac{V_B}{V}\right)^{\gamma}$

(3) $W_{BC} = \int_{B\to C} p\,dV = \int_{V_B}^{V_C} P_B\left(\frac{V_B}{V}\right)^{\gamma} dV$

$$= P_B\left[V_B^{\gamma}\cdot\frac{1}{-\gamma+1}\cdot\frac{1}{V^{\gamma-1}}\right]_{V_B}^{V_C}$$

$$= P_B\cdot\frac{V_B^{\gamma}}{-\gamma+1}\left(\frac{1}{V_C^{\gamma-1}}-\frac{1}{V_B^{\gamma-1}}\right)$$

$$= \frac{P_B V_B}{-\gamma+1}\left(\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}}-1\right)$$

$$= \frac{P_B V_B}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$= \frac{nRT_1}{\gamma-1}\left(1-\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$= \frac{nR}{\gamma-1}\left(T_1-T_2\right)$$

$V^{-\gamma}$

$\frac{1}{-\gamma+1}V^{-\gamma+1}$

$= \frac{1}{-\gamma+1}\cdot\frac{1}{V^{\gamma-1}}$

$T_1 V_B^{\gamma-1} = T_2 V_C^{\gamma-1}$

$\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_C^{\gamma-1}} = \frac{T_2}{T_1}$

(4) $Q_{BC} = 0$

(5) $W_{CD} = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$

$Q_{CD} = nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$

$W_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1}\left(T_2 - T_1\right)$

$Q_{DA} = 0$

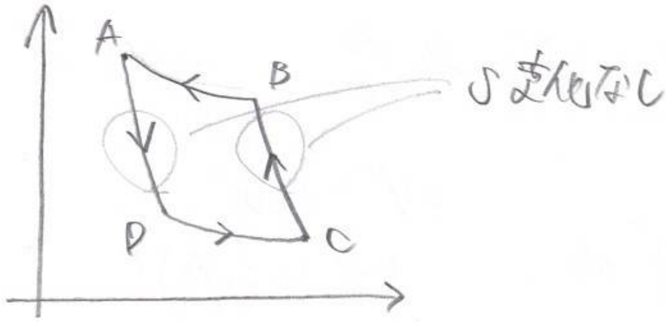
$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln\frac{V_D}{V_C}$

$$= nRT_1 \ln\frac{V_B}{V_A} - nRT_2 \ln\frac{V_B}{V_A}$$

$$= nR(T_1 - T_2)\ln\frac{V_B}{V_A}$$

(6) $\eta = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

(7)




$$S_C - S_D = \int_{D\to C} \frac{d'Q}{T_2} = \underbrace{-\frac{Q_2}{T_2}}_{\text{減少ぶん}}$$

(8) $$S_A - S_B = \int_{B\to A} \frac{d'Q}{T_1} = \underbrace{\frac{Q_1}{T_1}}_{\text{増加ぶん}}$$

(9) $$\frac{1}{C} = \frac{W_0}{Q_2} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2}$$

(10) $$-\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$\therefore Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2$$

$$\therefore C = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} = \frac{Q_2}{\frac{T_1}{T_2} Q_2 - Q_2} = \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1}$$

$$= \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$