6

平成２５年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

［数学－１］

問題１

連続関数を係数とする２階微分方程式を考える．以下の設問に答えよ．

(1) $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ を

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

の２つの解とし，$z = y_1 y_2' - y_1' y_2$ とおく．

(a) $z(t)$ を $a(s)$ $(0 \leq s \leq t)$ と $z(0)$ を用いて表示せよ．

(b) 条件

$$y_1(0) = y_1(1) = 0,\ y_1(t) > 0\ (0 < t < 1), \quad y_2(0) > 0 \qquad (*)$$

が成り立つとき，$y_2(1) < 0$ となることを示せ．

(2) $b_1(t) < b_2(t)$ $(0 < t < 1)$ に対し

$$y_1'' + a(t)y_1' + b_1(t)y_1 = 0,\ y_2'' + a(t)y_2' + b_2(t)y_2 = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

であり，$y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$ は条件 $(*)$ を満たすものとする．

(a) $y_2(t)$ は $0 < t < 1$ で少なくとも１回は０となることを示せ．

(b) $y_2(1) > 0$ となるような $a(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$ の例を与えよ．

1.

(1) $Z' = z_1'z_2' + z_1 z_2'' - z_1'' z_2 - z_1' z_2'$ $\qquad z'' = -az' - bz$

(2)
$$\begin{aligned}
&= z_1'z_2' + z_1(-a z_2' - b z_2) - (-a z_1' - b z_1) z_2 - \cancel{z_1' z_2'} \\
&= -a z_1 z_2' - b z_1 z_2 + a z_1' z_2 + b z_1 z_2 \\
&= -a(z_1 z_2' - z_1' z_2) \\
&= -aZ
\end{aligned}$$

$\therefore\ Z'(s) = -a(s)\cdot Z(s)$

$$\frac{Z'(s)}{Z(s)} = -a(s)$$

これを $s = 0 \to t$ で積分すると

$$\int_0^t \frac{1}{Z(s)}\, dZ(s) = -\int_0^t a(s)\, ds$$

$$\therefore\ \ln\frac{Z(t)}{Z(0)} = -\int_0^t a(s)\, ds$$

$$\therefore\ Z(t) = Z(0)\, e^{-\int_0^t a(s)\, ds}$$

(b) $Z(0) = z_1(0) z_2'(0) - z_1'(0) z_2(0) = -z_1'(0) z_2(0)$

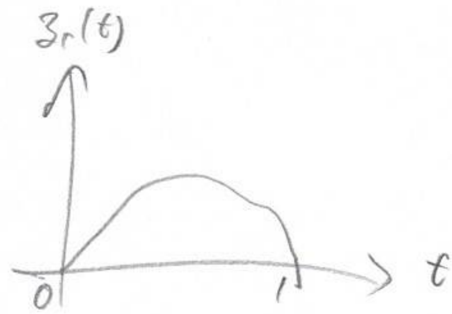
ここで, $z_1(0) = 0$, $z_1(t) > 0$ $(0 < t < 1)$ より, $z_1'(0) > 0$.

また, $z_2(0) > 0$ なので,

$$Z(0) < 0$$

以外に,

$$\begin{aligned}
Z(1) &= Z(0)\, e^{-\int_0^1 a(s)\, ds} \\
&= z_1(1) z_2'(1) - z_1'(1) z_2(1) \\
&= -z_1'(1) z_2(1)
\end{aligned}$$



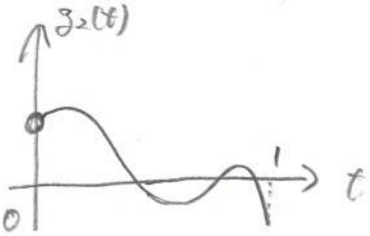
$$\therefore\ z_2(1) = -\frac{1}{z_1'(1)} \underbrace{Z(0)}_{<0}\, \underbrace{e^{-\int_0^1 a(s)\, ds}}_{>0}$$

ここで, $z_1(1) = 0$, $z_1(t) > 0$ $(0 < t < 1)$ なので, $z_1'(1) < 0$. よって,

$$z_2(1) = \underbrace{-\frac{1}{z_1'(1)}}_{\substack{>0 \\ \text{正}}} \underbrace{Z(0)}_{\substack{<0 \\ \text{負}}}\, \underbrace{e^{-\int_0^1 a(s)\, ds}}_{\substack{>0 \\ \text{正}}} < 0$$

(2)

(a) $0 < t < 1$ の範囲で $z_2(t)$ を図示すると



$t = 0 \to 1$ で $z_2(0) > 0$ かつ $z_2(1) < 0$ となるためには、t 軸を奇数回またぐ必要がある。
したがって、少なくとも1回0になる。(中間値の定理)

(b)

9

平成２５年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受　験　番　号	志 望 学 科 ・ コ ー ス
	学　科 コース

［数学－２］

問題２

$\mathbb{R}^3$ は3次元実数列ベクトルの集合，a, b は実数，

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = aI + bA$$

として，以下の設問に答えよ．

(1) $P^{-1}AP = D$ を満たす正則行列 P と対角行列 D を求めよ．

(2) $Q^{-1}BQ = E$ を満たす正則行列 Q と対角行列 E を求めよ．ただし Q は a, b には依存しないものとし，必要であれば前問の結果を用いてよい．

(3) 任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対してその3成分の和が Cx となる行ベクトル C を求めよ．また任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $B^n x\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ の3成分の和が n に依存しないために，a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $B^n x\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ の第1成分と第2成分の差が $n \to \infty$ で0に収束するために，a, b が満たすべき必要十分条件を求めよ．

2、

(1) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -\lambda & -2-\lambda & 1 \\ -\lambda & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$.

$= -\lambda(-3-\lambda)^2$

固有値は$\lambda = 0, -3$（重解）

$\lambda = 0$について

$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \psi_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$

$\lambda = -3$について

$A-\lambda I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & O & \end{pmatrix}$

$\therefore \psi_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって、

$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2b & b & b \\ b & a-2b & b \\ b & b & a-2b \end{pmatrix}$

$|B-\lambda I| = \begin{vmatrix} a-2b-\lambda & b & b \\ b & a-2b-\lambda & b \\ b & b & a-2b-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ a-\lambda & a-2b-\lambda & b \\ a-\lambda & b & a-2b-\lambda \end{vmatrix}$

$= (a-\lambda)(a-3b-\lambda)^2$

よって固有値は$\lambda = a, a-3b$（重解）

$\lambda = a$について

$B-\lambda I = \begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \psi_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda = a-3b$について

$B-\lambda I = \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & O & \end{pmatrix}$

$\therefore \psi_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

よって,

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a-3b & 0 \\ 0 & 0 & a-3b \end{pmatrix}$$

(3) $C = (1 \ 1 \ 1)$

$$\boldsymbol{z} := \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = B^n \boldsymbol{x}$$

$$\therefore B^n\boldsymbol{x} = Q(Q^{-1}BQ)^n Q^{-1}\boldsymbol{x} = QE^nQ^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$$

ここで,

$$QE^nQ^{-1}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-3b)^n & 0 \\ 0 & 0 & (a-3b)^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

$B^n\boldsymbol{x} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a^n & -(a-3b)^n & -(a-3b)^n \\ a^n & (a-3b)^n & 0 \\ a^n & 0 & (a-3b)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a^n+2(a-3b)^n & a^n-(a-3b)^n & a^n-(a-3b)^n \\ a^n-(a-3b)^n & a^n+2(a-3b)^n & a^n-(a-3b)^n \\ a^n-(a-3b)^n & a^n-(a-3b)^n & a^n+2(a-3b)^n \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a^n(x_1+x_2+x_3) + (a-3b)^n(2x_1-x_2-x_3) \\ a^n(x_1+x_2+x_3) + (a-3b)^n(-x_1+2x_2-x_3) \\ a^n(x_1+x_2+x_3) + (a-3b)^n(-x_1-x_2+2x_3) \end{pmatrix}$$

3成分の和は

$$\frac{1}{3}\left(3a^n(x_1+x_2+x_3) + (a-3b)^n(0+0+0)\right) = a^n(x_1+x_2+x_3)$$

よって, nに依存しないための条件は $a=1$.

(4)
第1成分と第2成分の差は

$$\frac{1}{3}(a-3b)^n(3x_1-3x_2) = (a-3b)^n(x_1-x_2)$$

これが収束するためには

$$|a-3b| < 1$$

$$\therefore \begin{cases} a-3b < 1 \\ a-3b > -1 \end{cases}$$

よって,

$$-1 < a-3b < 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

8

平成２５年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

ボール m 個を n 個の箱に分けて入れる．$m \geq 0, n \geq 1$ とする．ボールに区別はないものとするが，箱には $1, 2, \ldots, n$ の番号がつけられており区別される．ボールを分けた結果，空の箱ができてもよいが，どのボールもいずれかの箱に入れられなければならない．

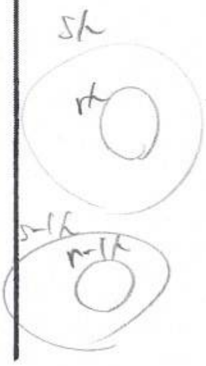
ボールを，1 番目の箱に i_1 個，2 番目の箱に i_2 個，$\cdots$，n 番目の箱に i_n 個となるように分けたとき，その分け方を n 個の整数の組 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ で表す．$m = 0$ の場合は，$(0, 0, \ldots, 0)$ が唯一の分け方である．以下の設問 (1)〜(3) に答えよ．

(1) $m = 3$, $n = 3$ の場合を考える．

(a) この場合，$(0, 0, 3)$ や $(3, 0, 0)$ は分け方である．これらも含めてすべての分け方を列挙せよ．

(b) この場合のすべての分け方を辞書式順序 (注) で並べる．先頭は $(0, 0, 3)$ で，最後尾は $(3, 0, 0)$ である．前から 3 番目の分け方，および，後ろから 2 番目の分け方を答えよ．

(2) ボールの個数 m と箱の個数 n が与えられたとき，分け方の総数を $S(m, n)$ と書く．



(a) 異なる s 個のものから r 個を取り出す組合せの数 ${}_s\mathrm{C}_r$ に関して，次の等式が知られている．

$$ {}_s\mathrm{C}_r = {}_{s-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{s-1}\mathrm{C}_r \qquad (*1) $$

この式が成り立つことは，特定の 1 個を含めて取り出す場合とそうでない場合に分け，和の法則を適用するという方針で、説明することができる．これを踏まえて，$S(m, n)$ に関して次の式 $(*2)$ が成り立つことを説明せよ．

$$ S(m, n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ の場合} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{m} S(i, n-1), & n > 1 \text{ の場合} \end{cases} \qquad (*2) $$

(b) 式 $(*2)$ が成り立つことを用いて，次の式 $(*3)$ を証明せよ．必要なら式 $(*1)$ を用いてよい．

$$ S(m, n) = {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{n-1} \qquad (*3) $$

(3) ボールの個数 m と箱の個数 n (ただし，$m \geq 1$, $n \geq 4$) が与えられ，$S(m, n)$ 通りの分け方すべてを辞書式順序で並べるとき，分け方 $(0, 0, 1, m-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{(n-4)\text{ 個}})$ が前から何番目になるかを m と n の式で表せ．その導出過程も示せ．

(注) 通常の辞書における見出し語の並べ方を一般化した並べ方を辞書式順序という．例えば，英語の辞書において見出し語 bug, ant, art を登場順に並べれば，ant, art, bug となる．ant と art では n はアルファベット中で r より前にあるためこのような順になる．この例のように，同一文字数の 2 つの単語の辞書式順序における順番は，先頭の文字から順に比べていって最初に異なる文字のアルファベット中における順序で定まる．

これにしたがい，分け方の辞書式順序は次のように定義される．分け方 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ が，それとは異なる分け方 $(i'_1, i'_2, \ldots, i'_n)$ より，辞書式順序において前に来るのは，次の条件が成り立つときかつそのときに限られる．

(条件) $i_h \neq i'_h$ が成り立つ最小の h $(1 \leq h \leq n)$ について，$i_h < i'_h$ が成り立つ．

3.

(1) (0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0), (1, 2, 0),

(a) (2, 1, 0), (3, 0, 0), (1, 0, 2), (2, 0, 1), (1, 1, 1)

(b) 前から3番目：(0, 2, 1)

後ろから2番目：(2, 1, 0)

(2)

(a)

$n=1$ のとき，分け方は明らかに1通りだから

$S(m, n) = 1$

次に $n>1$ について，

0|0|0|0

${}_5C_2 = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$

(0, 0, 3)
(0, 1, 2)
(0, 2, 1)
(1, 0, 2) (0, 3, 0)
(1, 1, 1)
(1, 2, 0)
(2, 0, 1)
(2, 1, 0)
(3, 0, 0)