S11-1

(1)

(i) $AO = OA = O$ より $O \in V_1$

(ii) $X, Y \in V_1$ とする

$$A(X+Y) = AX + AY$$
$$= XA + YA$$
$$= (X+Y)A$$

(iii) $X \in V_1$ とする

$$A(kX) = kAX = kXA = (kX)A$$

(i)〜(iii) より V_1 は M の部分空間。

(2)

(i) $\det O = 0$

(ii) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$\det X = 0$, $\det Y = 0$ より $X, Y \in V_2$

$$\det(X+Y) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

$\therefore X+Y \in V_2$

よって, V_2 は M の部分空間ではない

S11-2

$k_1 \mathbf{x} + k_2 \mathbf{y} + k_3 \mathbf{z} = \mathbf{0}$ とする.

$$k_1(\mathbf{a}+\mathbf{b}-2\mathbf{c}) + k_2(\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) + k_3(\mathbf{a}+\mathbf{c})$$
$$= (k_1+k_2+k_3)\mathbf{a} + (k_1-k_2)\mathbf{b} + (-2k_1-k_2+k_3)\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は1次独立なので,

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 = 0 \\ k_1 - k_2 = 0 \\ -2k_1 - k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 2 - 1 = -5 \neq 0$$

よって、$(*)$は自明な解しかもたない。

$\therefore k_1 = k_2 = k_3 = 0$

以上より、$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ は1次独立である。

S11-3

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \end{matrix} \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1\cancel{7} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0\cancel{1} & 0 \\ 0 & 1 & \overset{0}{\cancel{x}\cancel{0}} & 0\cancel{2} & 1\cancel{0}\cancel{1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形を行っても列どうしの1次関係は変わらないので、

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1$は行基本変形の結果より1次独立。

そのため、$\mathbf{b}_1$は$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$の1次結合では表せない。

$\mathbf{b}_2 = 3\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$

S11-4

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x + y + 3z + 2v + w = 0 \\ \quad 4y + 7z + 4v + 2w = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{7}{4}a + b + \frac{1}{2}c - \frac{\overset{12}{\cancel{3}}}{4}a - 2b - c$$
$$= -\frac{5}{4}a - b - \frac{1}{2}c$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 基底は $\left(\begin{pmatrix} -\frac{5}{4} \\ -\frac{7}{4} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

次元は3

S11-5

$$\mathbf{x} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ とする}$$

$$f(\mathbf{x}) = x_1 f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 f\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} F \qquad \therefore F = \begin{pmatrix} 3 & -11 \\ 4 & -8 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$$

E11-6

$p(x) \in \mathbb{R}[x]_2$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$f(p(x)) = a_0 f(1) + a_1 f(x) + a_2 f(x^2)$$
$$= \begin{pmatrix} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(1) & f(x) & f(x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} A$$

$f(1) = 1 \qquad \because p(x) = 1 \to p(x+3) = 1$

$f(x) = x+3 \qquad \because p(x) = x \to p(x+3) = x+3$

$f(x^2) = (x+3)^2 \qquad \because p(x) = x^2 \to p(x+3) = (x+3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

$$\begin{pmatrix} 1 & x+3 & x^2+6x+9 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=A}$$

S11-6

$x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 \quad \to \quad = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$f(x) = x_1 f(a_1) + x_2 f(a_2) + x_3 f(a_3)$$
$$= x_1(a_1 - a_3) + x_2(a_1 + a_2) + x_3(a_2 + a_3)$$
$$= (x_1 + x_2) a_1 + (x_2 + x_3) a_2 + (-x_1 + x_3) a_3$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} A$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

S11-7

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

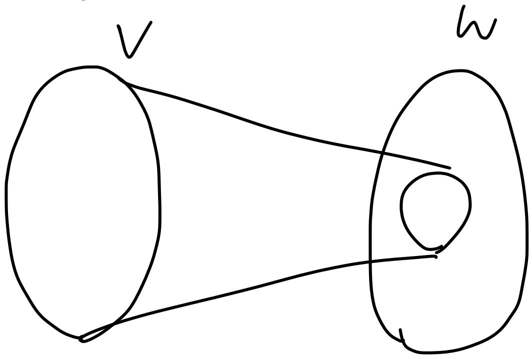
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって Ker f の基底は

$$\left(\begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

次元は 2

S11-8



$x \in \mathbb{R}^4$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$

$f(x) = x_1 \underline{f(e_1)} + x_2 \underline{f(e_2)} + x_3 \underline{f(e_3)} + x_4 \underline{f(e_4)}$

これらの1次従属性を調べる

$$(f(e_1)\ f(e_2)\ f(e_3)\ f(e_4))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行基本変形によって各列の1次関係は変化しない.

よって基底は

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

次元は2

S11-9

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

平面上の任意の点を(x, y), fによって移される点を(x', y')とする.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \end{cases}$$

$$\therefore \sqrt{2}x = x' + y'$$
$$\sqrt{2}y = y' - x'$$

$$\begin{cases} x = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{y'-x'}{\sqrt{2}} = \frac{-(x'-y')}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

これをCの式に代入

$$\frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{\cancel{2}} - 6\cdot\frac{x'^2 - y'^2}{\cancel{2}} + \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{\cancel{2}} = \cancel{4}\ 8$$

$$-4x'^2 + 8y'^2 = 8$$

$$\frac{x'^2}{2} - y'^2 = -1$$

よって求める図形は

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = -1$$