[1]

$f(x,y,z) = xyz - 1$ とおく.

$f_x = yz$

$f_y = xz$

$f_z = xy$

曲面上の点 (a,b,c) における接平面の方程式は

$$bc(x-a) + ac(y-b) + ab(z-c) = 0$$

$$\therefore\ bcx + acy + abz = 3abc$$

ここで、接平面と x 軸, y 軸, z 軸との交点はそれぞれ

$(3a, 0, 0), (0, 3b, 0), (0, 0, 3c)$

よって、求める三角錐の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3c \cdot \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot 3b$$

$$= \frac{9}{2} abc$$

$xyz = 1$ より, $abc = 1$

$\therefore\ V = \frac{9}{2}$ (一定)

[2]

(1) $$\Delta f = \frac{\partial}{\partial x}\left(g'(r)\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(g'(r)\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(g'(r)\frac{z}{r}\right)$$

$$= g''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + g'(r)\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} \qquad \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

$$+ \cdots$$

$$= g''(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + g'(r)\frac{3r^2 - r^2}{r^3}$$

$$= g''(r) + g'(r)\frac{2}{r}$$

(2) $$\Delta f = g''(r) + g'(r)\frac{2}{r} = 0$$

$g'(r) = h(r)$ とおくと

$$\frac{dh}{dr} = -2\frac{h}{r}$$

$$\therefore \int \frac{1}{h}\frac{dh}{dr}\,dr = \int -\frac{2}{r}\,dr$$

$$\therefore \ln|h| = -2\ln|r| + C$$

$$|h| = \frac{e^C}{r^2}$$

$$\therefore h = \frac{A}{r^2}$$

$g'(1) = 2$ より $A = 2$

$$\therefore h = g'(r) = \frac{2}{r^2}$$

$$\therefore \frac{dg}{dr} = \frac{2}{r^2}$$

$$g = \int \frac{2}{r^2}\,dr$$

$$= -\frac{2}{r} + C$$

$g(1) = 1$ より

$$C = 3$$

$$\therefore g(r) = -\frac{2}{r} + 3$$

どういうチェインルール?

$\boxed{3}$

(1) $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 1 + e^{y}\cos x$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -1 + e^{y}\sin x$

(2) $$\frac{d}{dx}\Big(\varphi(x, f(x))\Big) = \frac{\partial \varphi(x, f(x))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \varphi(x, f(x))}{\partial y}\cdot\frac{df}{dx} = 0$$

$$\therefore (1 + e^{f(x)}\cos x) + (-1 + e^{f(x)}\sin x)\cdot f'(x) = 0$$

ここは $\partial f(x)$ ではないのか?

$x = 0$ を代入

$$1 + e^{f(0)} - f'(0) = 0$$

$$\therefore f'(0) = 1 + e^{f(0)}$$

$\varphi(x, f(x)) = 0$ より

$$x - f(x) + e^{f(x)}\sin x = 0$$

$x = 0$ を代入すると

$$f(0) = 0$$

$$\therefore f'(0) = 1 + e^0 = 2$$

同様に,

$$g'(x) = \frac{d}{dx}\left(\psi(x, f(x))\right)$$

$$= \frac{\partial \psi(x, f(x))}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \psi(x, f(x))}{\partial y}\frac{df}{dx}$$

$$= \frac{\partial \psi(x, f(x))}{\partial x} + \frac{\partial \psi(x, f(x))}{\partial y} f'(x)$$

$x=0$ を代入

$$g'(0) = \frac{\partial \psi(0, f(0)=0)}{\partial x} + \frac{\partial \psi(0, f(0)=0)}{\partial y} f'(0)$$

$$= a + b \cdot 2$$

$$= a + 2b$$

$\boxed{4}$

$z = z(x, y)$ の値が積 xy だけで決まるとする.

$u = xy$ とおくと, $z = f(u)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u) \cdot y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u) \cdot x$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$$

次に, $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ とする.

$u = xy$ とおくと $z = \varphi(x, u)$ または $z = \psi(y, u)$ と表せる.

$z = \varphi(x, u)$ として証明は一般性を失わない.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_x(x, u) \cdot \frac{dx}{dx} + \varphi_u(x, u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_x(x, u) \cdot x + \varphi_u(x, u) \cdot xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_x(x, u) \cdot \frac{dy}{dx} + \varphi_u(x, u) \cdot \frac{du}{dy}$$

$$\therefore y\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi_u(x, u) xy$$

$x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ より

$$\varphi_x(x, u) \cdot x = 0$$

全ての x について成り立つので

$$\varphi_x(x, u) = 0$$

よって, $z = z(x, y)$ は u, すなわち xy だけによって決まる.

$\boxed{5}$

$g(x, y, z) = x + 4y + 9z - 6 = 0$ とおく.

$g(x, y, z) = 0$ のもとでの $f(x, y, z)$ の が極値をとる点のような点は
ラグランジュの未定乗数法により

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

となる点 (x, y, z) である.

$$f_x = -\frac{1}{x^2}, \quad f_y = -\frac{1}{y^2}, \quad f_z = -\frac{1}{z^2}$$

$$g_x = 1, \quad g_y = 4, \quad g_z = 9$$

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{x^2} = \lambda \quad \rightarrow x = i\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ -\frac{1}{y^2} = 4\lambda \\ -\frac{1}{z^2} = 9\lambda \\ x + 4y + 9z = 6 \end{cases}$$

ラグランジュは使えない

↓ ゴリ押し!

$x + 4y + 9z = 6$ より $z = \frac{6 - x - 4y}{9}$

$$\therefore f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{9}{6 - x - 4y}$$

上式の右辺を $g(x, y)$ とおく.

$$g_x = -\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(6 - x - 4y)^2}$$

$$g_y = -\frac{1}{y^2} + \frac{36}{(6 - x - 4y)^2}$$

これらを0として停留点を求める.

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{9}{(6 - x - 4y)^2} = 0$$

$$x^2 = \frac{(6 - x - 4y)^2}{9}$$

$x > 0,\ \dfrac{6-x-4z}{9} > 0$ なので

$$x = \frac{6-x-4z}{3}$$

$\therefore\ 4x+4z=6 \rightarrow 2x+2z=3$

$$-\frac{1}{y^2}+\frac{36}{(6-x-4z)^2}=0$$

$y > 0,\ \dfrac{6-x-4z}{9} > 0$ なので

$$y = \frac{6-x-4z}{6}$$

$\therefore\ x+10z=6$

$$\begin{cases} 2x+2z=3 \\ x+10z=6 \end{cases}$$

これをとくと、

$$-18z=-9$$

$$z=\frac{1}{2}$$

$$x=1$$

$$f_{xx}=\frac{2}{x^3}$$

よって、$g(x, z)$ の停留点は $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ のみ。

したがって、$f(x, y, z)$ は $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ で極小値

$f\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = 9$ となる。