平成３０年度名古屋大学工学部編入学試験問題紙等綴

科目　数　学

８月３日（木）　１２：２０～１４：２０

注　意　事　項

１．試験開始の合図まで，この綴を開いてはいけません．

２．問題紙等の枚数は，表紙を含めて１０枚〔**そのうち問題紙は１枚，解答用紙は６枚，草稿用紙は２枚**〕である．

３．解答にかかる前に，この綴左上のホッチキス針を丁寧にはずし，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください．

４．解答は，必ず所定の解答用紙の所定の欄に記入してください．裏面に記入してはいけません．

５．落丁，乱丁，印刷上不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出てください．

６．草稿用紙のほか，この綴の解答用紙以外の余白は，草稿用に使用しても構いません．

７．試験終了時刻までは退室してはいけません．

８．問題紙，解答用紙，綴表紙及び草稿用紙は持ち帰ってはいけません．

平成３０年度名古屋大学工学部編入学試験問題

科目名 数 学

1. 原点と正規直交する基底ベクトル$\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$をもち, それぞれの基底ベクトルに対応する座標をx, y, zとするユークリッド空間を考える. また, 演算子∇を$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$と定義する.
   (1) $V = xy(x^2 + y^2 + z^2)$とする. ∇Vを基底ベクトルとx, y, zを用いて表せ.
   (2) 以下に示す$\vec{f}$に対して, $\nabla W = \vec{f}$となるスカラ関数$W(x, y, z)$が存在するかを考える. ここで, Wの2階偏導関数は連続であり, $W(0,0,0) = 0$とする. Wが存在するならばそれをひとつ示し, Wが存在しないならばそれを証明せよ.
      (i) $\vec{f} = (2x + yz)\vec{e}_x + (2y + zx)\vec{e}_y + (xy + 1)\vec{e}_z$
      (ii) $\vec{f} = (2x + yz)\vec{e}_x + (2y + z)\vec{e}_y + (xy + 1)\vec{e}_z$

2. 10個の玉に, 互いに区別できるように1から10の番号を記して箱に入れた. 箱の中から無作為に玉を一つ取り出す試行を行う. 一度取り出した玉は箱に戻さずに試行をN回行い, 取り出した順に, 玉に記された番号をa_1, a_2, ..., a_Nとして, 以下の問いに答えよ.
   (1) $N = 3$のときにa_1, a_2, a_3がすべて偶数である確率を求めよ.
   (2) $N = 5$のときに$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$となる場合は何通りあるか求めよ.
   (3) $N = 5$で$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$となった場合に, $a_1 > 2$である条件付き確率を求めよ.
   (4) $N = 3$のときに$a_1 + a_2 + a_3$が3の倍数となる確率を求めよ.

3. $\log x$は自然対数とし, 以下の問いに答えよ.
   (1) 次の不定積分を求めよ.
$$\int x \log x \, dx$$
   (2) 次の常微分方程式の一般解を求めよ.
$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = x + 1$$
   (3) 次の常微分方程式の一般解を求めよ. (ヒント: $u = y/x$と置換せよ)
$$x\frac{dy}{dx} = -x + y$$

4. 次の行列Aを考える.
$$A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$
   (1) Aの全ての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ. なお固有ベクトルの大きさは1とする.
   (2) 定数a, b, c, dに対して, $aA^4 + bA^3 + cA^2 + dA$は単位行列となった. a, b, c, dを一組求めよ.
   (3) 大きさが1のベクトル$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$に$A^k$を乗じた$A^k\boldsymbol{v}$を考える. ここで$k$は正の整数である.
      (i) $A^k\boldsymbol{v}$をv_1, v_2を用いて表せ.
      (ii) $k \to \infty$としたとき, $A^k\boldsymbol{v}$の大きさの最大値を示し, それを与える$\boldsymbol{v}$をすべて求めよ.