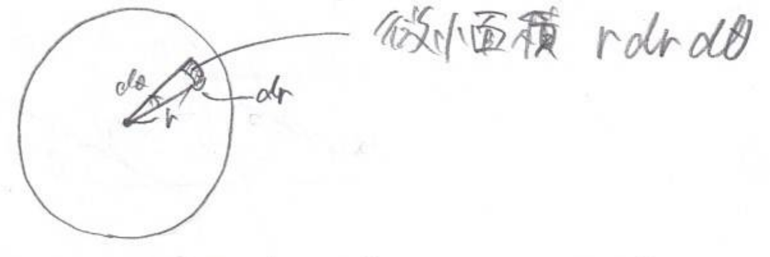
H29.

1.

(1)

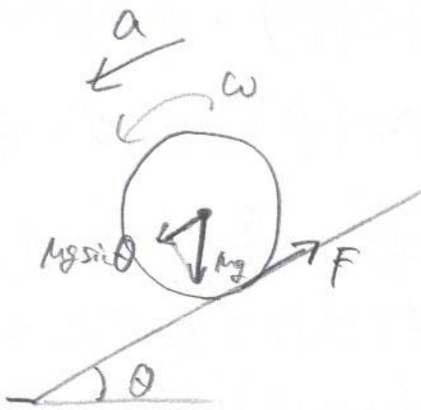


円板の微小要素の質量dMは，面密度が $\frac{M}{\pi R^2}$ であるから

$$dM = \frac{M}{\pi R^2} r dr d\theta$$

これに中心からの距離 r の2乗をかけて円板全体で積分することにより

$$I = \int_S dM$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{M}{\pi R^2} r^2 \cdot r dr d\theta$$
$$= 2\pi \cdot \frac{M}{\pi R^2} \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R$$
$$= \frac{1}{2} MR^2$$



(2) $Ma = Mg\sin\theta - F$ — ①

(3) $\frac{1}{2}MR^2 \cdot \dot{\omega} = RF$ — ②

(4)

斜面と垂直方向のつりあいより，垂直抗力Nは

$$N = Mg\cos\theta$$

よって，最大静止摩擦力F_{max}は

$$F_{max} = \mu N = \mu Mg\cos\theta$$

$x = R\theta$
$\ddot{x} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega}$

また，円板が斜面を滑らないとき $a = R\dot{\omega}$。これを②に代入すると

$$\frac{1}{2}Ma = F \quad \therefore Ma = 2F$$

これを①に代入してaを消去すると

$$2F = Mg\sin\theta - F \quad \therefore F = \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

$F_{max} \geq F$ であればよいので

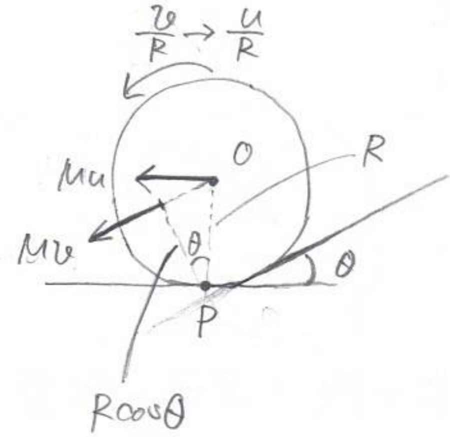
$$\mu Mg\cos\theta \geq \frac{1}{3}Mg\sin\theta$$

$\tan\theta \leq 3\mu$
$\theta \leq \tan^{-1} 3\mu$

$$\therefore \theta \leq \tan^{-1} 3\mu$$

(5)

衝突直前の角速度は $\frac{v}{R}$，衝突直後は $\frac{u}{R}$．



$$\therefore H_1 = I\cdot\frac{v}{R} + R\cos\theta\cdot Mv$$
$$= \frac{1}{2}MRv + MRv\cos\theta$$
$$= MRv\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)$$

$$H_2 = I\cdot\frac{u}{R} + R\cdot Mu$$
$$= \frac{1}{2}MRu + MRu = \frac{3}{2}MRu$$

(6) $H_2 = H_1$

$$\therefore \frac{3}{2}MRu = MRv\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)$$
$$\therefore u = \frac{2}{3}v\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)$$

(7) $K_1 = \frac{1}{2}I\left(\frac{v}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{4}Mv^2$

$$K_2 = \frac{1}{2}I\left(\frac{u}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mu^2 = \frac{3}{4}Mu^2$$

$$\therefore \frac{K_2}{K_1} = \frac{u^2}{v^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2$$

弾性衝突となるのは $K_2/K_1 = 1$ のとき．$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ で考えると

$$\therefore \frac{4}{9}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2 = 1$$
$$\therefore \frac{1}{2}+\cos\theta = \frac{3}{2}$$
$$\cos\theta = 1$$
$$\therefore \theta = 0$$

しかし，$\theta = 0$ を斜面と言うには無理がある．

したがって，$\theta > 0$ の斜面のとき，衝突時には必ずエネルギーを消費し，弾性衝突にはなり得ない．

3.

(1) $P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$

(2)

$TV^{\gamma-1} =$ 一定より $PV^{\gamma} =$ 一定、おもりをのせる前の体積を V_{10} とすると

$$P_0 V_{10}^{\gamma} = P_1 V_1^{\gamma}$$

$$\therefore \frac{V_1}{V_{10}} = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{P_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}\right)^{\frac{3}{5}}$$

(3)

おもりをのせたあとの温度を T_1 とすると

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_{10}^{\gamma-1}$$

$$\therefore T_1 = \left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{\gamma-1} T_0 = \left(\frac{V_{10}}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} T_0 = \left(\left(\frac{P_0 + \frac{Mg}{S}}{P_0}\right)^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{2}{3}} T_0$$

$$= \left(\frac{P_0 + \frac{Mg}{S}}{P_0}\right)^{\frac{2}{5}} T_0 = \left(1 + \frac{Mg}{P_0 S}\right)^{\frac{2}{5}} T_0$$

(4)

仕切板のつりあいを考えると $P_1 = P_2$.

$$\therefore P_2 V_2 = P_1 V_2 = n_2 R T_0$$

$$\therefore n_2 = \frac{P_1 V_2}{R T_0} = \frac{V_2}{R T_0}\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)$$

(5)

1の気圧は(2)と同じ。仕切板のつり合いを考えると

$$P_1 S = -k \Delta x$$

$$\therefore \Delta x = -\frac{P_1 S}{k} = -\frac{P_0 S + Mg}{k}$$

(6)

mをのせたあとの1の気圧 P_1' は

$$P_1' = P_0 + \frac{(M+m)g}{S}$$

(5)と同様にすると

$$\Delta h_B = -\frac{mg}{k}$$

(7)

(a)にmのおもりをのせた場合も1の気圧はP_1'.

仕切り板のつりあいを考えると $P_2' = P_1'$.

mをのせたときは断熱変化なので，変化後の体積をV_2'とすると

$$P_2' V_2'^{\gamma} = P_2 V_2^{\gamma}$$

$$\therefore V_2' = \left(\frac{P_2}{P_2'}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_2 = \left(\frac{P_0 + \frac{Mg}{S}}{P_0 + \frac{(M+m)g}{S}}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_2$$

$$= \left(\frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g}\right)^{\frac{3}{5}} V_2$$

仕切り板の高さの変化Δh_Aは

$$\Delta h_A = \frac{V_2' - V_2}{S}$$

$$= \left(\left(\frac{P_0 S + Mg}{P_0 S + (M+m)g}\right)^{\frac{3}{5}} - 1\right)\frac{V_2}{S}$$

したがって，(b)では乗せたおもりに対する変位に線形性があったが，(a)では線形性がみられない.