２０２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

下図のように，質量 M，長さ L の密度一様な剛体棒がある．この棒の重心Ｇから距離 b（$b>0$）の位置にある軸Ｏを固定軸として棒は自由に回転できる．重力加速度の大きさを g とする．軸と棒の間の摩擦力，軸と棒の太さはいずれも無視できるとする．以下の問に答えよ．

(1) 軸Ｏのまわりの棒の慣性モーメントを I とする．I を L，M，b を用いて示せ．

(2) 棒が鉛直に垂れ下がっている状態（下図の破線）で，棒に大きさ ω_0 の角速度を与えた．棒が下向き鉛直線から角度 θ をなすときの角速度の大きさ ω を示せ．

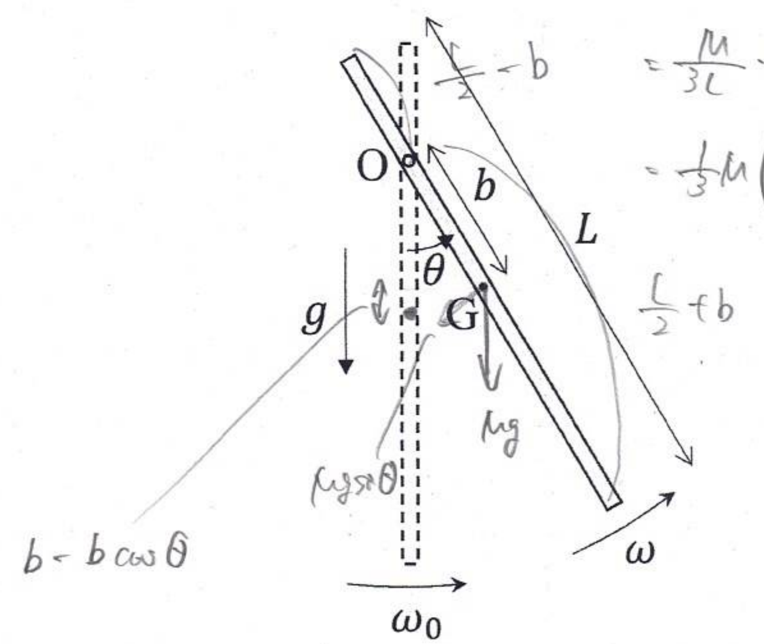
(3) 棒が振動せずに回転するために ω_0 が満たすべき条件式を示せ．

以降は，棒を軸Ｏのまわりに微小振動させた場合について考える．

(4) この微小振動の角振動数 ω_n を示せ．

(5) この角振動数 ω_n を最大とする b と，そのときの角振動数 ω_{max} をそれぞれ示せ．

$$\int_{-(\frac{L}{2}-b)}^{\frac{L}{2}+b} \frac{M}{L} r^2 dr$$
$$= \frac{M}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{-(\frac{L}{2}-b)}^{\frac{L}{2}+b}$$
$$= \frac{1M}{3L}\cdot\left(\left(\frac{L}{2}+b\right)^3+\left(\frac{L}{2}-b\right)^3\right)$$
$$= \frac{M}{3L}\cdot(L)\left(\frac{L^2}{4}+Lb+b^2-\frac{L^2}{4}+b^2+\frac{L^2}{4}-Lb+b^2\right)$$
$$= \frac{1}{3}M\left(\frac{1}{4}L^2+3b^2\right) = \frac{1}{12}ML^2+Mb^2$$



1.

(1)

重心まわりの慣性モーメント I_G は

$$I_G = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{M}{L} r^2 dr = \frac{M}{L} \cdot 2 \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{\cancel{L}} \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{8}\,4} = \frac{1}{12} ML^2$$

平行軸の定理より

$$I = I_G + Mb^2 = \frac{1}{12} ML^2 + Mb^2$$

(2)

E保存より

$$\frac{1}{2} I \omega_0^2 = Mgb(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{2Mgb(1-\cos\theta)}{I} = \omega_0^2 - \frac{2Mgb(1-\cos\theta)}{\frac{1}{12}ML^2 + Mb^2}$$

$$= \omega_0^2 - \frac{24gb(1-\cos\theta)}{L^2 + 12b^2}$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{24gb(1-\cos\theta)}{L^2+12b^2}}$$

(3)

回転できるギリギリの ω_0 のとき, $\theta = \pi$ のとき $\omega = 0$

$$\therefore \omega_0^2 - \frac{24gb \cdot 2}{L^2+12b^2} = 0$$

$48 = 16 \times 3$

$$\omega_0^2 = \frac{48gb}{L^2+12b^2}$$

$$\therefore \omega_0 = 4\sqrt{\frac{3gb}{L^2+12b^2}}$$

したがって, ω_0 の条件は

$$\omega_0 \geq 4\sqrt{\frac{3gb}{L^2+12b^2}}$$

(4)

回転の運動方程式は，θが十分小さいことから

$$I\ddot{\theta} = -Mg\sin\theta \cdot b \approx -Mgb \cdot \theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{Mgb}{I}\theta = -\frac{Mgb}{\frac{1}{12}ML^2+Mb^2}\theta = -\frac{12gb}{L^2+12b^2}\theta$$

$$\therefore \omega_n = \sqrt{\frac{12gb}{L^2+12b^2}}$$

(5) $f(b) = \dfrac{12gb}{L^2+12b^2}$

が最大になるとき，ω_nが最大になる．

$$f'(b) = \frac{12g(L^2+12b^2) - 24b \cdot 12gb}{(L^2+12b^2)^2} = 0$$

$$\therefore L^2+12b^2-24b^2=0 \qquad \sqrt{\frac{L^2}{12}} = \frac{L}{2\sqrt{3}}$$

$$12b^2 = L^2$$

$$\therefore b = \frac{L}{2\sqrt{3}} \qquad \frac{\cancel{6}\sqrt{3}g}{\cancel{2}\cdot 3L} = \frac{\sqrt{3}g}{L}$$

よって，$b = \dfrac{L}{2\sqrt{3}}$ のときω_nは最大．

$$\therefore \omega_{max} = \sqrt{\frac{12g\cdot\frac{L}{2\sqrt{3}}}{L^2+L^2}} = \sqrt{\frac{\frac{6}{\sqrt{3}}gL}{2L^2}} = \sqrt{\frac{6g}{2\sqrt{3}L}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{L}}$$

2023年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［物理－3］

問題3

下図のように，大気中に，底のある円筒を鉛直に置き，n モルの理想気体を入れてピストンで塞いである．円筒内部には体積が無視できるヒーターが備え付けられている．円筒とピストンは断熱材で作られており，大気など外部とは断熱されている．円筒の内側の底面の面積を S，ピストンの重さを M，大気圧を P_0，重力加速度を g，気体定数を R，理想気体の定圧モル比熱，定積モル比熱をそれぞれ C_P，C_V とする．理想気体の準静的な断熱膨張では，圧力を P，体積を V として，ポアソンの法則 $PV^{C_P/C_V} = \mathrm{A}$,（Aは定数）が成り立つとして，以下の問に答えよ．

I.　ピストンは円筒内をなめらかに動くことができ，理想気体は漏れないとする．

(1) 円筒の内側の底面からピストンの底面までの高さが h でピストンが静止しているとき，理想気体の温度と圧力をそれぞれ求めよ．

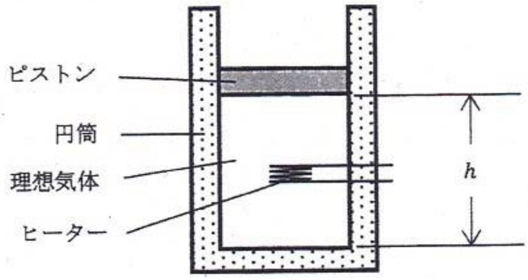
(2) ヒーターで理想気体をある時間だけ加熱してしばらく待つと，理想気体の温度が一定になり，円筒の内側の底面からピストンの底面までの高さが Δh だけ増加してピストンが静止した．このときの理想気体の温度と圧力をそれぞれ求めよ．

(3) 問(2)において，理想気体がピストンにした仕事，理想気体の内部エネルギーの変化量，およびヒーターが理想気体に与えた熱量をそれぞれ求めよ．

(4) ピストンを静かに押し下げて，円筒の内側の底面からピストンの底面までの高さが，加熱前と同じ高さ h になるまで動かして止めた．このときの理想気体の温度と圧力は問(1)で求めた温度と圧力のそれぞれ何倍か求めよ．

II.　円筒の内側の底面からピストンの底面までの高さが h でピストンは固定され，理想気体は漏れないとする．

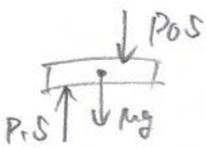
(5) 円筒内には問(1)で求めた温度と圧力の理想気体が入っているとする．ヒーターで問(3)で求めた熱量と同じ熱量を理想気体に与えてしばらく待つと，理想気体の温度が一定になった．このときの理想気体の温度と圧力の変化量をそれぞれ求めよ．



3.

I

(1)



内部の圧力をP_1とする。ピストンのつりあいを考えると

$$P_1S = Mg + P_0S$$

$$\therefore P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

また，この温度をT_1とすると

$$T_1 = \frac{P_1Sh}{nR} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{Sh}{nR} = \left(P_0S + Mg\right)\frac{h}{nR}$$

(2)

内部の圧力P_2とすると，P_1と同じなので

$$P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

このときの温度T_2は

$$T_2 = \frac{P_2S(h+\Delta h)}{nR} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{S(h+\Delta h)}{nR} = \left(P_0S + Mg\right)\frac{h+\Delta h}{nR}$$

(3)

仕事をW_{12}，内部エネルギー変化をΔU_{12}，熱量をQ_{12}とすると，定圧変化なので

$$W_{12} = P_1S\Delta h = (P_0S + Mg)\Delta h$$

$$\begin{aligned}Q_{12} &= nC_P(T_2 - T_1) \\ &= nC_P\left(\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{S(h+\Delta h)}{nR} - \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\frac{Sh}{nR}\right) \\ &= \frac{C_P}{R}\left(P_0S + Mg\right)\left(h + \Delta h - h\right) \\ &= \frac{C_P(P_0S + Mg)\Delta h}{R}\end{aligned}$$

$$\Delta U_{12} = \frac{C_V(P_0S + Mg)\Delta h}{R}$$

(4)
温度，圧力をそれぞれ T_3, P_3 とする. また, $C_P / C_V =: \gamma$.

$$P_3 (Sh)^{\gamma} = P_2 (S(h+\Delta h))^{\gamma} = P_1 (S(h+\Delta h))^{\gamma}$$

$$\therefore P_3 = \left(\frac{S(h+\Delta h)}{Sh}\right)^{\gamma} P_1 = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma} P_1$$

よって，圧力は $\left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma} = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\frac{C_P}{C_V}}$ 倍.

$$P_3 = \frac{nRT_3}{Sh}, \quad P_1 = \frac{nRT_1}{Sh}$$

$$\therefore \frac{nRT_3}{Sh} = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma} \cdot \frac{nRT_1}{Sh}$$

$$\therefore T_3 = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma} T_1 = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\frac{C_P}{C_V}} T_1$$

よって，温度も $\left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\frac{C_P}{C_V}}$ 倍.

$$T_3 (Sh)^{\gamma-1} = T_2 (S(h+\Delta h))^{\gamma-1}$$

$$T_3 = \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma-1} T_2$$

$$= \left(\frac{h+\Delta h}{h}\right)^{\gamma} \cdot h \cdot \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) \cdot \frac{S}{nR}$$

(5)
温度，圧力をそれぞれ T_2', P_2' とする.
定積変化なので仕事は0. 熱力学第一法則から

$$nC_V (T_2' - T_1) = Q_{12} = \frac{C_P (P_0 S + Mg) \Delta h}{R}$$

よって，温度の変化量は

$$T_2' - T_1 = \frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{(P_0 S + Mg)\Delta h}{nR}$$

また，

$$T_2' = T_1 + \frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{(P_0 S + Mg)\Delta h}{nR}$$

$$\frac{\frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{\cancel{(P_0 S + Mg)}\Delta h}{\cancel{nR}}}{\frac{\cancel{(P_0 S + Mg)} h}{\cancel{nR}}} = \frac{C_P}{C_V} \frac{\Delta h}{h}$$

$$P_2' = \frac{T_2'}{T_1} P_1$$

$$\therefore P_2' - P_1 = \left(\frac{T_2'}{T_1} - 1\right) P_1 = \frac{\frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{(P_0 S + Mg)\Delta h}{nR}}{T_1} \cdot P_1$$

$$= \frac{C_P}{C_V} \frac{\Delta h}{h} \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)$$

よって，圧力の変化は

$$P_2' - P_1 = \frac{C_P}{C_V} \frac{\Delta h}{h} \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)$$