

受 験 番 号	志 望 学 科 ・ コ ー ス
	学 科
	コ ー ス

[数学 — 1]

問題 1

以下の設問に答えよ。ただし $\log x$ は自然対数, e は自然対数の底を表すものとする。

- (1) 関数 $y(x)$ に関する微分方程式：

$$y'' + 2y' + y = 0$$

の一般解を求めよ。

- (2) 関数 $z(x)$ ($x > 0$) に関する微分方程式

$$x^2 z'' + 3xz' + z = 0 \quad (*)$$

を考える。 $x = e^t$, すなわち $t = \log x$ と変数変換したとき $z(e^t) = w(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。

- (3) 微分方程式 (*) の一般解を求めよ。

- (4) (*) の解で更に条件：

$$z(1) = 0, \quad \int_1^e z(x) dx = 1$$

を満たすものを求めよ。

受 験 番 号	志望学科・コース
	学 科
	コース

[数学 - 2]

問題 2

行列 $A = \begin{bmatrix} b & 1-a \\ a & b \end{bmatrix}$ として、以下の設問に答えよ。ただし a, b は実数である。

- (1) 行列 A の 2 つの固有値を求めよ。また、固有値が異なる実数値となるための a と b に関する必要十分条件を示せ。
- (2) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に、それぞれの固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。また、2 つの固有ベクトルが直交するための a と b に関する必要十分条件を示せ。
- (3) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値である場合に、 $P^{-1}AP$ を対角行列とする正則行列 P 、対角行列 $P^{-1}AP$ を求めよ。また、 A^n を求めよ。ただし n は正の整数である。
- (4) 行列 A の 2 つの固有値が異なる実数値となり、かつ、零ベクトルではない二次元ベクトル x に対して

$${}^t x A x > 0$$

を満たすための a と b に関する必要十分条件を示せ。ここで ${}^t x$ は x の転置ベクトルを表す。

受 験 番 号	志 望 学 科 ・ コ ー ス
	学 科
	コ ー ス

[数学 - 3]

問題 3

n 枚のコインを 1 列に並べる. 各コインは表, 裏のどちらを上にして置くかの 2 通りの置き方があるものとする. ただし, コインは区別できないものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) n 枚のコインを置く場合の数を $f(n)$ とする. 例えば, 表を H , 裏を T で表すと, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通りの置き方があるので $f(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$ の 4 通りの置き方があるので $f(2) = 4$ である. $f(n)$ を n の関数として表せ.

- (2) 裏のコインを 2 枚以上続けて置くことを許さない場合の, n 枚のコインを置く場合の数を $g(n)$ とする. 例えば, $n = 1$ のときは $(H), (T)$ の 2 通りの置き方があるので $g(1) = 2$ であり, $n = 2$ のときは $(H, H), (H, T), (T, H)$ の 3 通りの置き方があるので $g(2) = 3$ である (ここで, (T, T) の置き方は裏が 2 枚続いているので許されないことに注意). このとき, 以下の設問に答えよ.

(a) すべての並べ方を列挙することによって, $g(3), g(4)$ を求めよ.

(b) n を 3 以上の整数とする. このとき, $g(n)$ を $g(n-1), g(n-2)$ を用いて表せ.

(c) (b) の漸化式より,

$$g(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$$

となることを, 数学的帰納法を用いて証明せよ.