令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試 験 問 題

受 験 番 号	志 望 学 科・コ ー ス
	学 科 コース

問題１

下図に示すように，半径r，質量Mの球が，水平面上を滑らずに重心の速さv_0（一定）で進み，高さh（$h<r$）の段差に垂直に衝突する．球が段差を乗り越える間は，球は段差のふちに常に接触しており，球はその接触点Pで滑らないと仮定する．球の重心GおよびP点を通る紙面に垂直な軸を，それぞれG軸，P軸として以下の問に答えよ．重力加速度の大きさはgとする．

(1) 球のＧ軸まわりの慣性モーメントI_G，球が点Ｐに接触している時のＰ軸まわりの慣性モーメントI_Pを求めよ．

(2) 衝突前のＧ軸まわりの球の角速度をω_0，衝突直後のＰ軸まわりの球の角速度をωとし，衝突直前と直後の球の角運動量の関係をI_GとI_Pを用いて表せ．

(3) 衝突後は力学的エネルギーが保存されることを用いて，球が段差を越えるためのωの条件を示せ．

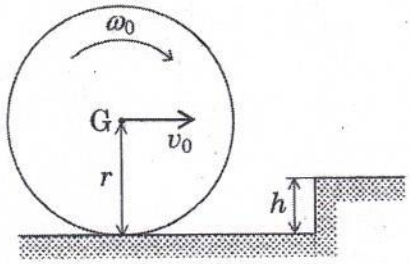
(4) 球が段差を越えるためのv_0の条件をr, h, gを用いて表せ．

次に，球が段差に衝突してから段差を越えるまでの間で，時刻tにおける線分PGと水平線とのなす角をθ（時計回りを正）とし，球が段差のふちから離れない条件を考える．

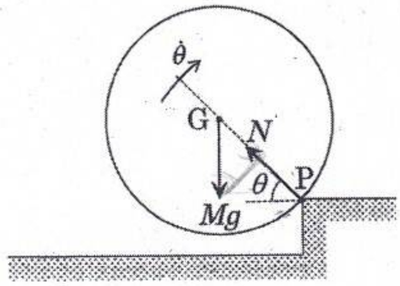
(5) 球が点Ｐと接触している間，球が段差のふちから受ける抗力Nを$\dot{\theta}$ $(=d\theta/dt)$ を用いて表せ．

(6) 衝突直後のＰ軸まわりの球の角速度ωを用いて，Nの最小値を表せ．

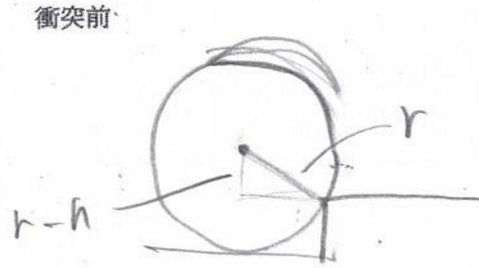
(7) 球が段差を越える時にふちから離れないためのv_0の条件をr, h, gを用いて示せ．



衝突前



衝突後



$$\omega = \frac{Mv_0(r-h) + \frac{2}{5}Mr^2 \cdot \frac{v_0}{r}}{\frac{7}{5}Mr^2}$$

$$= \frac{5Mv_0r - 5Mv_0h + 2Mv_0r}{7Mr^2}$$

$$= \frac{(7r-5h)v_0}{7r^2}$$

1.

(1) $I_G = \int_V \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r^3} \cdot x'^2 dV$

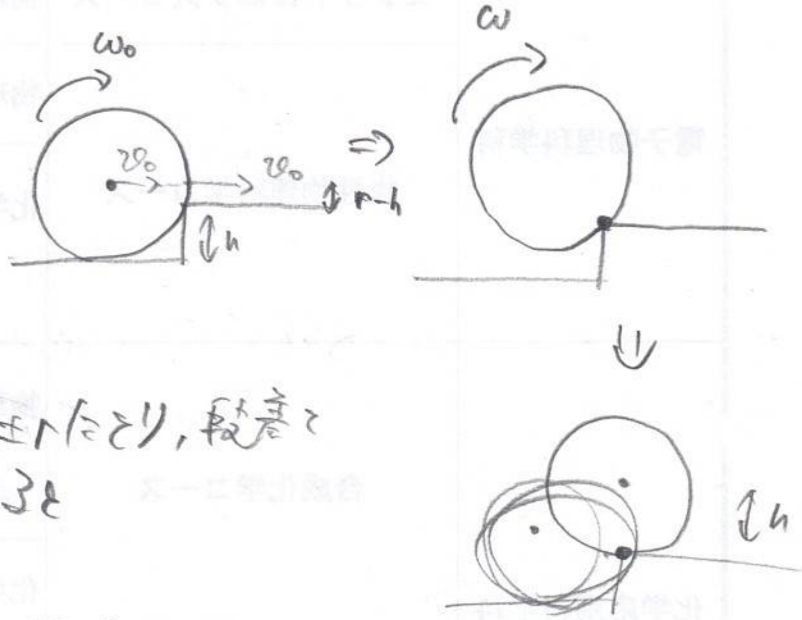
$= \frac{3M}{4\pi r^3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{r} (x \sin\varphi)^2 \cdot x^2 \sin\varphi \, dx d\theta d\varphi$

$= \frac{3M}{4\pi r^3} \cdot 2\pi \cdot \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \cdot \int_0^{r} x^4 dx$

$= \frac{3M}{4\pi r^3} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r^5}{5}$

$= \frac{2}{5} M r^2$

$I_P = I_G + M r^2 = \frac{7}{5} M r^2$



(2) $M v_0 (r-h) + I_G \omega_0 = I_P \omega$

(3)

位置Eの基準を衝突直後，つまり高さrにとり，段差を登ったあとに角速度ゼロになるとすると

$0 + 0 + \frac{1}{2} I_P \omega^2 = Mgh$

$\omega^2 = \frac{2Mgh}{I_P} = 2Mgh \cdot \frac{5}{7Mr^2} = \frac{10gh}{7r^2}$

$\therefore \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10gh}{7}}$

$v = r\omega$

(4)

$\omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10gh}{7}}$ とし，(2)に代入．また，滑らずに移動することより $\omega_0 = \frac{v_0}{r}$．よって，

$M v_0 (r-h) + \frac{2}{5} M r^2 \cdot \frac{v_0}{r} = \frac{7}{5} M r^2 \cdot \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10gh}{7}}$

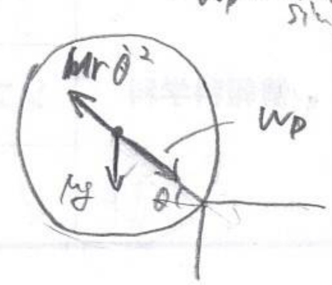
$v_0 \left(r - h + \frac{2}{5} r\right) = \frac{7}{5} r \sqrt{\frac{10gh}{7}}$

$\therefore v_0 = \frac{\frac{7}{5} r \sqrt{\frac{10gh}{7}}}{\frac{7}{5} r - h} = \frac{7r\sqrt{\frac{10gh}{7}}}{7r - 5h} = \frac{r\sqrt{70gh}}{7r-5h}$

$W_P \sin\theta = Mg$

$\therefore W_P = \frac{Mg}{\sin\theta}$

(5) $N + Mr\dot{\theta}^2 = \frac{Mg}{\sin\theta}$ $\quad$ $Mg \sin\theta$ $\quad$ $\therefore N = \frac{Mg}{\sin\theta} - Mr\dot{\theta}^2$ $\quad$ $Mg \sin\theta$



(6)

Nが最小となるのは衝突直後．このとき $\sin\theta = \frac{r-h}{r}$

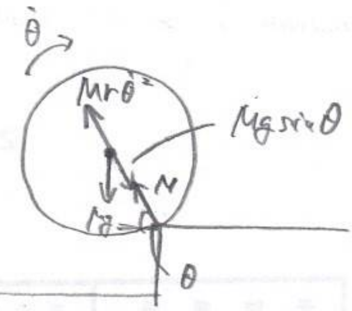
$N = \frac{Mgr}{r-h} - Mr\omega^2$

(7) $N = \frac{Mgr}{r-h} - Mr \cdot \frac{(7r-5h)^2 v_0^2}{49r^4} \geq 0$

$\therefore Mr \frac{(7r-5h)v_0}{49r^4} \geq$

(5) $N + Mr\dot{\theta}^2 = Mg\sin\theta$

$\therefore N = Mg\sin\theta - Mr\dot{\theta}^2$



(6)

Nが最小となるのは衝突直後。このとき、

$\sin\theta = \dfrac{r-h}{r}$

$\therefore N = \dfrac{Mg(r-h)}{r} - Mr\omega^2$

(7)

(2)より

$$\omega = \frac{Mv_0(r-h) + I_G\omega_0}{I_P}$$

$$= \frac{Mv_0(r-h) + \frac{2}{5}Mr^2\cdot\frac{v_0}{r}}{\frac{7}{5}Mr^2} = \frac{v_0\left(r-h+\frac{2}{5}r\right)}{\frac{7}{5}r^2} = \frac{v_0(5r-7h)}{7r^2}$$

衝突直後にN=0のとき

$$Mr\omega^2 = \frac{Mg(r-h)}{r}$$

$$Mr\omega^2 \leq \frac{Mg(r-h)}{r}$$

$$\therefore r^2\omega^2 = \cancel{M}g(r-h)$$

$$\frac{v_0^2(5r-7h)^2}{49r^2} = \cancel{M}g(r-h)$$

$$v_0(5r-7h) = 7r\sqrt{g(r-h)}$$

$$v_0 = \frac{7r\sqrt{g(r-h)}}{5r-7h}$$

よって、ふちから離れない条件は

$$v_0 \leq \frac{7r\sqrt{g(r-h)}}{5r-7h}$$

令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［物　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

私たちの周囲にある空気を構成する分子はどれくらいの速さで運動しているのだろうか．以下の問に答えて求めよ．なお，各分子は様々な速度で運動していると考えられるので，各分子の速度の大きさの2乗を平均したものを $\overline{v^2}$ と表し，この平方根 $\sqrt{\overline{v^2}}$ を速さとする．

(1) 1辺の長さ L の立方体の箱に質量 m の気体分子が N 個入って平衡状態になっているとする．分子の並進運動エネルギーの総和 E を求めよ．

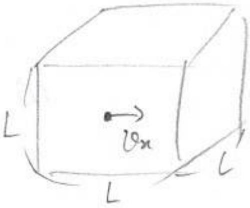
(2) 問 (1) の気体の圧力を求めよ．なお，N は十分大きく，分子間の相互作用は無視できるとする．

(3) この気体が理想気体とみなせるとき，絶対温度 T が問 (1) の E と比例関係にあることを示せ．なお，気体定数を R，アボガドロ定数を N_A とする．

(4) 空気を窒素分子のみで構成される理想気体とみなして，窒素分子の速さを求めよ．なお，温度は 280 K，窒素の分子量は 28，R，N_A はそれぞれ次の値を使ってよいとする．$R = 8.3\ \mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$，$N_A = 6.0\times10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$．

1mol あたりの重さ

3.



$3\overline{v_x^2} = \overline{v^2}$

$\frac{F}{L^2} \cdot L^3 =$

$\frac{v_x \cdot 1}{2L}$

(1) $E = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \cdot N$

(2)

1つの分子が速度v_xで壁に衝突したとき，1回あたりに壁に与える力積は，

$m v_x - (-m v_x) = 2 m v_x$

1秒間にN個の分子が壁に与える力積の総和は壁への力Fに等しく，

$F = 2 m v_x \cdot N \cdot \frac{v_x \cdot 1}{2L} = \frac{m N \overline{v_x^2}}{L}$

$\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = \overline{v^2}$，$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ と考えられるので

$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$

$\therefore F = \frac{mN}{L} \cdot \frac{1}{3} \overline{v^2} = \frac{1}{3} \frac{m N \overline{v^2}}{L}$

よって，この気体の圧力Pは

$P = \frac{F}{L^2} = \frac{1}{3} \frac{m N \overline{v^2}}{L^3} = \frac{1}{3L^3} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m \overline{v^2} \cdot N}_{=E}$

(3)

理想気体の状態方程式はPV = nRT．ここで，Pは(2)で求めたもの，$V = L^3$ より

$\frac{1}{3L^3} \cdot 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{2} m \overline{v^2} \cdot N}_{=E} \cdot L^3 = nRT$

(1)の結果と $n = \frac{N}{N_A}$ より

$\frac{2}{3} E = \frac{N}{N_A} RT$

$8.3 \times 3 = 24.9$

$\therefore T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{N_A}{R} \cdot E$

したがって，$T \propto E$．

(4) $T = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{N_A}{R} \cdot E = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{N_A}{R} \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} \cdot N$

$= \frac{1}{3} \frac{N_A}{R} m \overline{v^2}$

(分子量)$\times 10^{-3} = N_A m$ なので，

$\overline{v^2} = \frac{3R}{(\text{分子量}) \times 10^{-3}} \cdot T$

$= \frac{3 \times 8.3}{28 \times 10^{-3}} \cdot 280$

$= 24.9 \times 10^4$

$\therefore \overline{v} = \sqrt{24.9 \times 10^2} \approx 500$ m/s