26

平成２９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

[　知能システム学コース専門科目　]　試験問題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

問題３

以下の設問 (1) と (2) に答えよ．

(1) インパルス応答 $g_1(t)$ と $g_2(t)$ $(t \geq 0)$ がそれぞれ次式で表されるシステム S_1 と S_2 を考える．

$$
\begin{aligned}
g_1(t) &= e^{-2t}(1-\cos t) \\
g_2(t) &= e^{-t}+e^{-3t}
\end{aligned}
$$

以下の小問 (a) と (b) に答えよ．

(a) システム S_1 と S_2 の伝達関数 $G_1(s)$ と $G_2(s)$ を求めよ．

(b) システム S_1 と S_2 を図１のように直列結合したシステムのインパルス応答を求めよ．

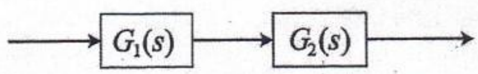
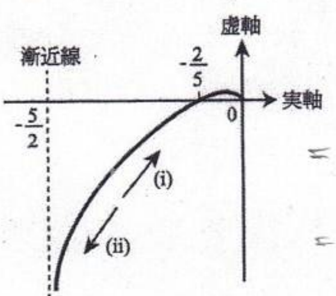


図 1: システム S_1 と S_2 との直列結合システム

(2) ベクトル軌跡が図２で，伝達関数 $P(s)$ が次式で表されるシステムを考える．

$$
P(s) = \frac{ds+1}{s^3+as^2+bs+c}
$$

ただし，a, b, c, d は実数定数である．以下の小問 (a)~(d) に答えよ．



$\mathcal{L}[e^{(a+jb)t}]$

$= \frac{1}{s-a-jb}$

$= \frac{s-a+jb}{(s-a)^2+b^2}$

図 2: 伝達関数 $P(s)$ のベクトル軌跡の概略図

(a) 角周波数を増加させたときのベクトル軌跡の移動は図２の矢印 (i), (ii) のどちらの方向か示せ．

(b) 実数定数 a, b, c, d の値を求めよ，

(c) K を正のゲイン定数とおく．図３に示すゲイン補償によるフィードバック制御システムが安定である K の範囲を求めよ．

(d) 図３のフィードバック制御システムが安定であるとする．目標信号が単位ステップ関数であるときの定常偏差を求めよ．

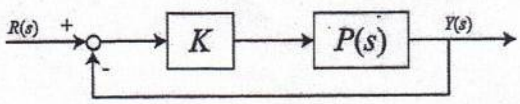


図 3: ゲイン補償によるフィードバック制御システム（K は正のゲイン定数，$P(s)$ は制御対象の伝達関数，$R(s)$ は目標信号のラプラス変換，$Y(s)$ は制御対象の出力のラプラス変換を表す.）

3、

(1)

(a) $G_1(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{s+2}{(s+2)^2+1} = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+5)}$

$s = -2 \pm \sqrt{4-5}$

$= -2 \pm j$

$G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} = \frac{2s+4}{(s+1)(s+3)} = \frac{2(s+2)}{(s+1)(s+3)}$

(b) $G_1(s)G_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)(s^2+4s+5)}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{As+B}{s^2+4s+5}$

$\therefore \frac{1}{2}(s+3)(s^2+4s+5) - \frac{1}{2}(s+1)(s^2+4s+5) + (As+B)(s+1)(s+3)$

$= \frac{1}{2}(s^2+4s+5)(s+3-(s+1)) + (As+B)(s^2+4s+3)$

$= s^2+4s+5 + As^3 + 4As^2 + 3As + Bs^2 + 4Bs + 3B$

$= As^3 + (4A+B+1)s^2 + (3A+4B+4)s + 3B+5$

$= 2$

$\therefore A = 0,\ B = -1$

$\therefore G_1(s)G_2(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+3} + \frac{-1}{(s+2)^2+1}$

$\therefore g(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} - e^{-2t}\sin t$

(2)

(a) (i)

(b) $P(j0) = \frac{1}{c}$

$\omega = 0$のとき発散するので

$c = 0$

また、$\omega \to \infty$で$-270°$から原点に近づくので、

(分母の次数)−(分子の次数)$= 3$である必要がある.

$\therefore d = 0$

これより、

$P(s) = \frac{1}{s(s^2+as+b)}$

$$P(j\omega) = \frac{1}{j\omega(-\omega^2 + j\omega a + b)} = \frac{1}{\omega(-\omega a + j(b-\omega^2))}$$

$$= -\frac{1}{\omega(\omega a - j(b-\omega^2))}$$

$$= -\frac{\omega a + j(b-\omega^2)}{\omega(\omega^2 a^2 + (b-\omega^2)^2)}$$

$$= -\frac{a}{\omega^2 a^2 + (b-\omega^2)^2} - j\frac{b-\omega^2}{\omega(\omega^2 a^2 + (b-\omega^2)^2)}$$

漸近線，実軸との交点より

$$\mathrm{Re}[P(j0)] = -\frac{a}{b^2} = -\frac{5}{2}$$

$$\mathrm{Re}[P(j\sqrt{b})] = -\frac{a}{ba^2} = -\frac{1}{ab} = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore \begin{cases} a = \frac{5}{2}b^2 \\ ab = \frac{5}{2} \end{cases} \qquad \frac{5}{2}b^3 = \frac{5}{2} \qquad b = 1$$

これを解くと

$b = 1, \ a = \frac{5}{2}$

したがって

$a = \frac{5}{2}, \ b = 1, \ c = d = 0$

$$\therefore P(s) = \frac{1}{s(s^2 + \frac{5}{2}s + 1)} = \frac{1^2}{s(s^2 + 2 \cdot \frac{5}{4} \cdot 1 \cdot s + 1^2)}$$

25

平成２９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［　知能システム学コース専門科目　］試験問題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

問題２

図1〜図3における入力電圧を $v_{\rm in}(t) = V_{\rm in}\sin(\omega t)$ として，以下の設問 (1)〜(5) に答えよ．いずれの問題も導出の過程も示せ．ただし，$V_{\rm in}$ は正の定数，ω は角周波数であり，オペアンプについては入力インピーダンスと電圧増幅率が ∞，出力インピーダンスが 0 で，出力に飽和のない理想オペアンプであるとする．また，回路はいずれも定常状態であるとする．

(1) 図1の回路において，出力電圧 $v_{\rm o1}(t)$ を求めよ．

(2) 図1の回路において，出力電圧 $v_{\rm o1}(t)$ の振幅を $V_{\rm o1}$ としたとき，$(V_{\rm o1}/V_{\rm in})^2 = 1/2$ となるときの角周波数 $\omega = \omega_L$ を求めよ．

(3) 図2の回路において，出力電圧 $v_{\rm o2}(t)$ の振幅を $V_{\rm o2}$ としたとき，$(V_{\rm o2}/V_{\rm in})^2 = 1/2$ となるときの角周波数 $\omega = \omega_H$ を求めよ．

(4) 図1の回路と図2の回路を縦続接続し，図3の回路を作成した．出力電圧 $v_{\rm o3}(t)$ の振幅を $V_{\rm o3}$ としたとき，$\omega \in [0,\ \infty)$ 上で，$V_{\rm o3}/V_{\rm in}$ が最大となるときの角周波数 $\omega = \omega_C$ と，そのときの $V_{\rm o3}/V_{\rm in}$ を求めよ．

(5) $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 100k\Omega$, $C = 0.01\mu{\rm F}$ としたとき，ω と $V_{\rm o3}/V_{\rm in}$ の関係を，ω を横軸とするグラフとして示せ．ただし，ω_L，ω_H，ω_C の値をグラフ中に明記すること．

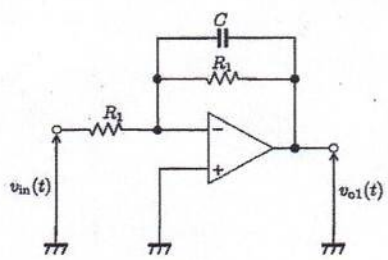


図1

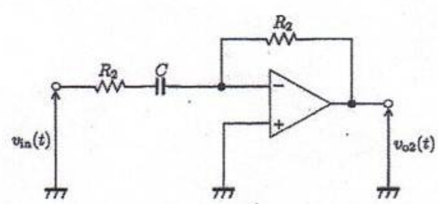


図2

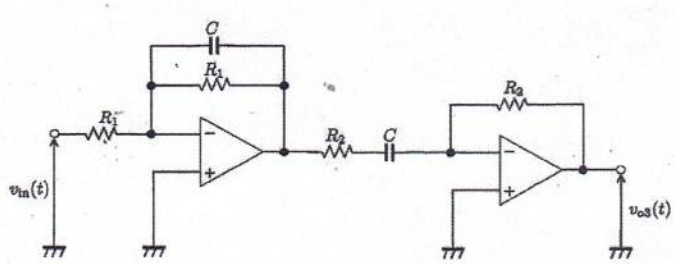


図3

2.

(1) $$v_{o1}(t) = -\frac{\frac{\frac{R_1}{j\omega C}}{R_1+\frac{1}{j\omega C}}}{R_1} v_{in}(t) = -\frac{\frac{R_1}{1+j\omega CR_1}}{R_1} v_{in}(t)$$

$$= -\underbrace{\frac{1}{1+j\omega CR_1}}\, v_{in}(t)$$

$$\downarrow$$

$$\left|\frac{1}{1+j\omega CR_1}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR_1)^2}}$$

$$\angle \frac{1}{1+j\omega CR_1} = \angle (1-j\omega CR_1) = \tan^{-1}(-\omega CR_1) = -\tan^{-1}\omega CR_1$$

$$\therefore v_{o1}(t) = -\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR_1)^2}} V_{in}\sin\left(\omega t - \tan^{-1}\omega CR_1\right)$$

(2) $$\left(\frac{V_{o1}}{V_{in}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega_L CR_1)^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+(\omega_L CR_1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\omega_L CR_1)^2 = 1$$

$$\therefore \omega_L = \pm\frac{1}{CR_1}$$

$$-\frac{R_2}{R_2+\frac{1}{sC}} = -\frac{sCR_2}{1+sCR_2}$$

(3)

伝達関数 $G_2(s)$ は

$$G_2(s) = -\frac{sCR_2}{1+sCR_2}$$

$$|G_2(j\omega)| = \frac{\omega CR_2}{\sqrt{1+(\omega CR_2)^2}}$$

$$\therefore \left(\frac{V_{o2}}{V_{in}}\right)^2 = |G_2(j\omega)|^2 = \frac{(\omega CR_2)^2}{1+(\omega CR_2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\omega_H CR_2)^2 = 1$$

$$\therefore \omega_H = \pm\frac{1}{CR_2}$$

(4) $G_1(s) = -\dfrac{1}{1+sCR_1}$

$v_{in}(t)$ から $v_{o3}(t)$ までの伝達関数 $G_3(s)$ は

$$G_3(s) = G_1(s)\,G_2(s)$$

$$= -\frac{1}{1+sCR_1}\cdot\left(-\frac{sCR_2}{1+sCR_2}\right) = \frac{1}{1+sCR_1}\cdot\frac{sCR_2}{1+sCR_2}$$

$$= \frac{sCR_2}{1+sC(R_1+R_2)+s^2C^2R_1R_2}$$

$$G_3(j\omega) = \frac{j\omega CR_2}{1+j\omega C(R_1+R_2)-\omega^2C^2R_1R_2}$$

分母が最小となるとき, V_{o3}/V_{in}, つまり $|G_3(j\omega)|$ が最大となる。このとき、

$$1-\omega^2C^2R_1R_2 = 0$$

$$\omega^2C^2R_1R_2 = 1$$

$$\omega^2 = \frac{1}{C^2R_1R_2}$$

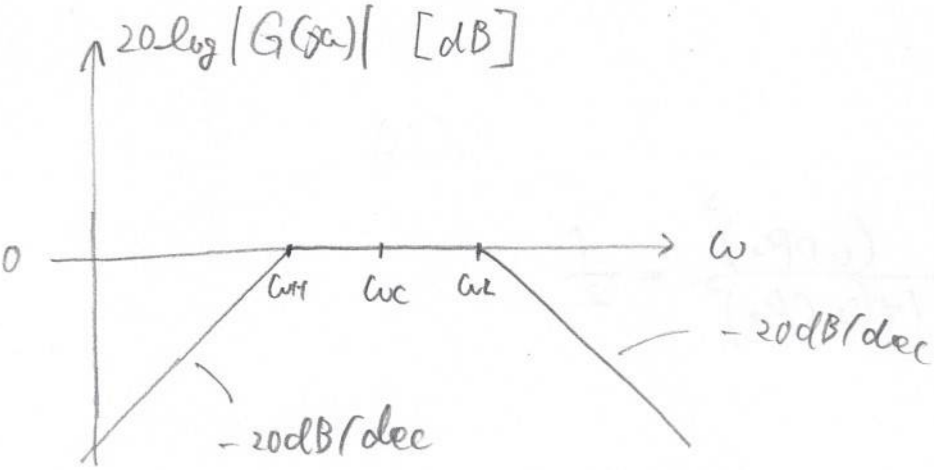
$$\therefore \omega_c = \frac{1}{C\sqrt{R_1R_2}}$$

(5) $\omega_L = \dfrac{1}{CR_1} = \dfrac{1}{0.01\times10^{-6}\cdot1\times10^3} = \dfrac{1}{10^{-2}\times10^{-3}} = 1\times10^5$

$$\omega_H = \frac{1}{CR_2} = \frac{1}{0.01\times10^{-6}\cdot100\times10^3} = 1\times10^3$$

$$\omega_c = \frac{1}{0.01\times10^{-6}\cdot\sqrt{100\times10^6}} = \frac{1}{0.01\times10^{-6}\cdot10^4} = 1\times10^4$$

伝達関数 $G_3(s)$ より, ω を常用対数, 利得を $20\log\underbrace{|G_3(j\omega)|}_{\downarrow\ |V_{o3}/V_{in}|}$ として書くと



※: 折れ線近似しているため $\omega_H \to \omega_L$ の区間は利得が変わらない
ように見えるが, 実際は ω_c で最も利得が大きくなる。