２０２２年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［物　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

質量 M，長さ L の棒の上端が，天井（水平面）に設置された支点Oまわりに回転できるように束縛されている．図（a），(b) に示すように，棒は紙面（鉛直面）内で運動する．鉛直方向と棒がなす角度を θ，棒の重心の位置を水平右向きに x，鉛直下向きに y とし，$\theta=0$ のとき，x と y はともに 0 とする．棒は一様な密度を持ち，太さおよび支点Oにおける摩擦は無視できるとする．時間を t，重力加速度を g として，以下の問に答えよ．

図（a）のように，支点Oの位置が天井に固定されており，棒が鉛直面内で振動している場合を考える．

(1) 支点Oまわりの棒の慣性モーメントを答えよ．

(2) θについての運動方程式を，M，L，g，θ，t を用いて表せ．

(3) 棒の振動周期を，L，g を用いて表せ．振幅は十分に小さいとし，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$ かつ，θの二乗以上の項は無視できるとする．

(4) $\theta=0$で棒を静止させ，棒の下端に水平方向の初速 v を与える．このとき，棒が水平になるために必要な v の最小値を，L，g を用いて示せ．

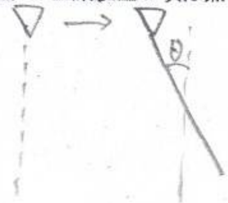
次に，図（b）のように，支点Oが鉛直面内で天井を滑らかに移動でき，棒が鉛直面内で振動している場合を考える．支点Oと天井との摩擦は無視できるとし，棒が支点Oから受ける垂直抗力を R とする．

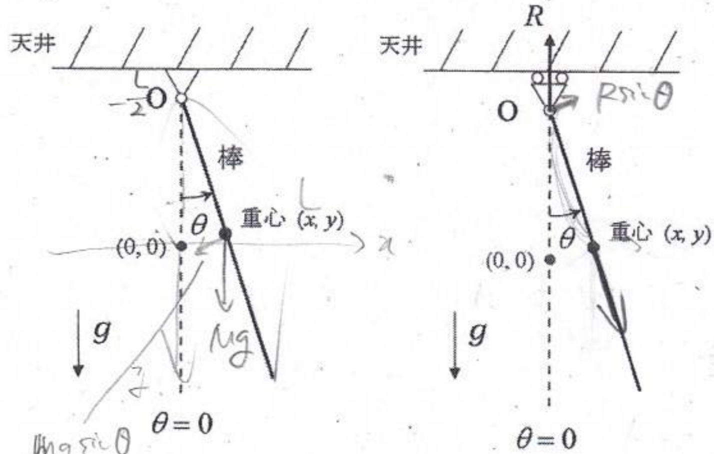
(5) 棒の重心まわりの慣性モーメントを答えよ．

(6) x，y，θそれぞれについての運動方程式を，M，L，g，R，x，y，θ，t を用いて表せ．

(7) 棒の角加速度を，L，g，θ，t を用いて表せ．

(8) 棒の振動周期を，L，g を用いて表せ．振幅は十分に小さいとし，$\sin\theta\approx\theta$，$\cos\theta\approx1$ かつ，θ，$d\theta/dt$ の二乗以上の項は無視できるとする．





(a)　　(b)

1

(1) $I=\int_0^L \frac{M}{L}\cdot x^2 dx = \frac{M}{L}\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3}ML^2$

$\frac{dx}{dt}=\dot{x}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\ddot{x}$

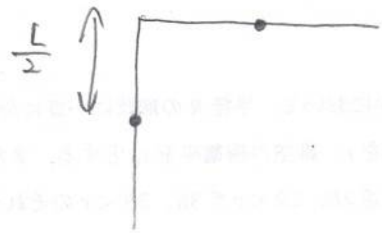
と表記する.

(2) $I\ddot\theta = -Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2}$

∴ $\frac{1}{3}ML^2\ddot\theta = -Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2}$

(3) $\ddot\theta = \frac{-Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = -\frac{3g\sin\theta}{2L} \approx -\frac{3g}{2L}\theta$

∴ $\omega=\sqrt{\frac{3g}{2L}}$



∴ $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$

(4)

棒がちょうど水平になるとき，エネルギー保存は

$0+0+\frac{1}{2}I\omega_1^2 = Mg\cdot\frac{L}{2}+0+0$

$v=r\omega$

$\omega=\frac{v}{r}$

ここで，$\omega_0=\frac{v}{L}$ より

$\frac{1}{2}I\left(\frac{v}{L}\right)^2 = Mg\cdot\frac{L}{2}$

∴ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ML^2\cdot\frac{v^2}{L^2} = Mg\cdot\frac{L}{2}$

$v^2=3gL$

$v=\sqrt{3gL}$

(5) $I'=\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{M}{L}\cdot x^2\cdot dx = \frac{M}{L}\cdot 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}} = \frac{M}{\cancel{L}}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{L^{2}}{4} = \frac{1}{12}ML^2$

(6) $M\ddot{x} = \frac{1}{2}ML\dot\theta^2\sin\theta$

$M\ddot{y} = Mg+\frac{1}{2}ML\dot\theta^2\cos\theta - R$

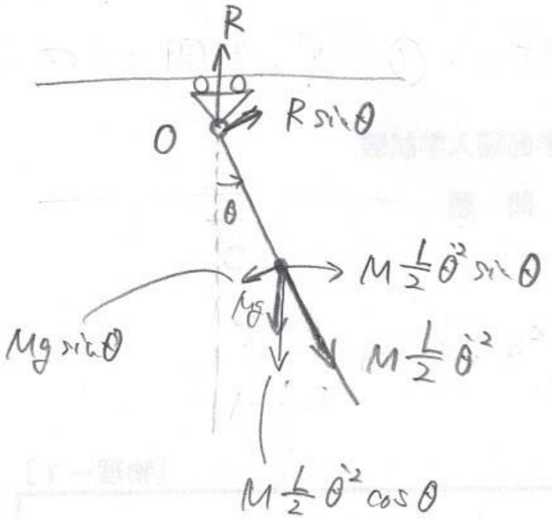
$I\ddot\theta = -Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2}$

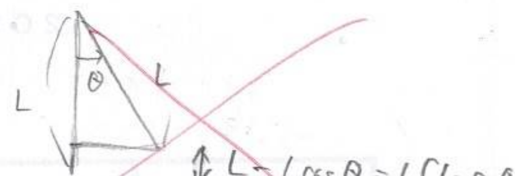
(7) ∴ $\ddot\theta = -\frac{Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2}}{\frac{1}{3}ML^2} = -\frac{3g\sin\theta}{2L}$

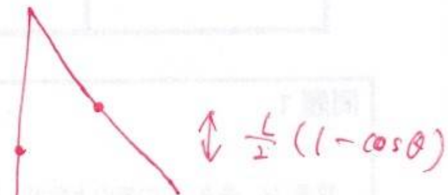
(8) $T=2\pi\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{2L}}$

$2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g\sin\theta}}$

(6)







$$
\begin{cases}
M\ddot{x} = M\frac{L}{2}\dot\theta^2\sin\theta & \text{—①} \\
M\ddot{y} = R - Mg - M\frac{L}{2}\dot\theta^2\cos\theta & \text{—②} \\
\frac{1}{12}ML^2\ddot\theta = -R\sin\theta\cdot\frac{L}{2} & \text{—③}
\end{cases}
$$

(7) $y = \overset{\frac{L}{2}}{\cancel{L}}(1-\cos\theta)$

∴ $\dot y = \overset{\frac{L}{2}}{\cancel{L}}\sin\theta\cdot\dot\theta$, $\ddot y = \overset{\frac{L}{2}}{\cancel{L}}\cos\theta\cdot\dot\theta^2 + \overset{\frac{L}{2}}{\cancel{L}}\sin\theta\cdot\ddot\theta$

②に代入すると

$$M\underset{\frac{L}{2}}{\cancel{L}}(\cos\theta\cdot\dot\theta^2 + \sin\theta\cdot\ddot\theta) = R - Mg - M\frac{L}{2}\dot\theta^2\cos\theta$$

∴ $R = Mg + ML\left(\underset{1}{\cancel{\frac{3}{2}}}\cos\theta\cdot\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\sin\theta\cdot\ddot\theta\right)$

これを③に代入

$$\frac{1}{12}ML^2\ddot\theta = -\left(Mg + ML\left(\overset{1}{\cancel{\frac{3}{2}}}\cos\theta\cdot\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\sin\theta\cdot\ddot\theta\right)\right)\sin\theta\cdot\frac{L}{2}$$

$$= -Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2} - \frac{ML^2}{2}\left(\overset{1}{\cancel{\frac{3}{2}}}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\sin^2\theta\cdot\ddot\theta\right)$$

∴ $\left(\frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{\underset{4}{\cancel{2}}}\sin^2\theta\right)\ddot\theta = -\left(Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2} + \frac{3ML^2}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot\theta^2\right)$

∴ $\ddot\theta = -\dfrac{Mg\sin\theta\cdot\frac{L}{2} + \frac{3ML^2}{\underset{2}{\cancel{4}}}\cos\theta\sin\theta\cdot\dot\theta^2}{\frac{1}{12}ML^2 + \frac{ML^2}{\underset{4}{\cancel{2}}}\sin^2\theta} = -\dfrac{6g\sin\theta + \overset{6}{\cancel{9}}L\cos\theta\sin\theta\cdot\dot\theta^2}{L(1+\underset{3}{\cancel{6}}\sin^2\theta)}$

(8)

$\theta \ll 1$ で十分小さい近似を使うと

$$\ddot\theta = -\frac{6g}{L}\theta$$

角速度ωは

$$\omega = \sqrt{\frac{6g}{L}}$$

∴ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{6g}}$

$$\frac{\sqrt{\frac{2L}{3g}}}{\sqrt{\frac{L}{6g}}} = \sqrt{\frac{6\cdot 2}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

固定した場合に比べて周期は1/2になる

2022年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題3

以下の問に答えよ．

→ $k_B = \frac{R}{N_A}$

I.　エネルギー等分配則と2原子分子気体の比熱に関する以下の文章の空欄［ ア ］－［ ク ］を埋めよ．［ ウ ］は語句，［ カ ］は数値，それ以外は数式である．気体定数をR（$R = k_B N_A$，k_B：ボルツマン定数，N_A：アボガドロ数），気体の絶対温度をTとする．

一辺Lの立方体（各辺はそれぞれx，y，z軸に平行）の容器の中に1モルの単原子分子理想気体を封入する．質量mの1個の気体分子がx軸の方向にある速度v_xで運動し壁面に弾性衝突するとする．この気体分子がx軸に垂直な片方の壁面に時間 t の間に衝突する回数は［ ア ］であり，1個の気体分子が時間 t の間に壁面に与える力積は［ イ ］である．1モルの分子が壁面に加える力をFとして，その力積 Ft は［ イ ］の平均のN_A倍である．壁面に加わる圧力が F/L^2で表せることから，$v_x{}^2$の平均を$\overline{v_x{}^2}$として，（気体の圧力）×（気体の［ ウ ］）＝（気体の全質量）× $\overline{v_x{}^2}$という関係式が得られる．1モルの気体に関するボイル・シャルルの法則から，$\frac{1}{2}m\overline{v_x{}^2}$＝［ エ ］が得られる．これは気体分子1個の一つの軸方向への運動エネルギーの平均を意味している．実際にはx軸のほかにもy軸，z軸があり，$v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2$より$\overline{v^2} = \overline{v_x{}^2} + \overline{v_y{}^2} + \overline{v_z{}^2}$が成り立つ．また，これら三つの軸は等価であるから$\overline{v_x{}^2} = \overline{v_y{}^2} = \overline{v_z{}^2}$とおける．つまり三つの運動の向き（自由度）に対して等しいエネルギー［ エ ］があるため，気体分子1個の平均エネルギーは［ オ ］となる．このすべての力学的自由度に対して等しいエネルギー［ エ ］が分配されることを「エネルギー等分配則」という．

ここで，水素や酸素のような2原子分子を考えよう．2原子分子は並進運動（x軸，y軸，z軸の各方向）が3，回転運動が［ カ ］，振動が1の自由度を持つ．振動の自由度を無視すると，エネルギー等分配則を用いて2原子分子1個の平均エネルギーは［ キ ］，1モルあたりの全エネルギーを考えると，定積比熱は［ ク ］となる．

II.　n モルの単原子分子理想気体が円筒容器内部に滑らかに動くピストンによって封入された熱機関がある．この熱機関においては気体の状態が図のようにA→B→C→D→Aという経路で準静的に変化する．行程A→Bは温度T_Hでの等温膨張，行程C→Dは温度T_Lでの等温圧縮である．行程B→Cおよび行程D→Aはそれぞれ体積V_2およびV_1での定積変化である．なお，気体定数をRとする．

(1) 状態Aにおける気体の温度T_Hを求めよ．ただし，状態Aにおける気体の圧力をP_Aとする．

$\frac{PV}{T} = \frac{P'V}{T'}$

(2) 行程A→Bでの内部エネルギーの変化ΔUを求めよ．

$P_A V_1 = P_B V_2)$

(3) 行程A→Bにおいて気体が得る熱量Q_{AB}を求めよ．

$P_B = P_A \frac{V_1}{V_2}$

(4) この熱機関のサイクル（A→B→C→D→A）における熱効率を求めよ．

(5) 行程B→Cにおいて排出したすべての熱を行程D→Aにおいて再利用できる場合のサイクルにおける熱効率を求めよ．

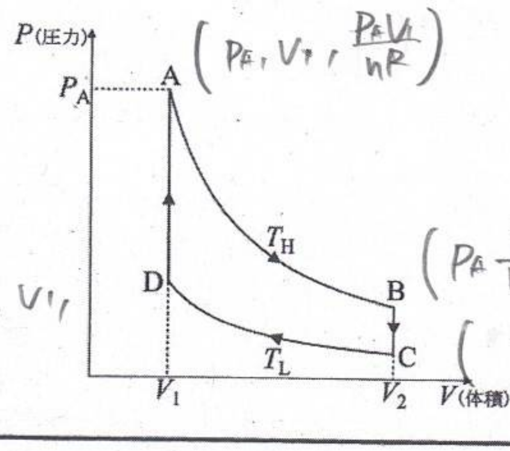
$(P_1\ V_1\ T)$

$\frac{P_A}{T_H} = \frac{P_D}{T_L} = \frac{1}{T_L}\cdot\frac{nR}{V_1}$

$\frac{P_B}{T_H} = \frac{P_C}{T_L}$　$P_C = \frac{nRT_L}{V_2}$

$P_D = \frac{nRT_L}{V_1}$

$(P_A, V_1, \frac{P_A V_1}{nR})$



$(P_A\frac{V_1}{V_2}, V_2, \frac{P_A V_1}{nR})$

$(\quad , V_1,$

$(\quad , V_2,$

3

I.

ア. $\frac{v_x t}{2L}$

イ. $2mv_x \cdot \frac{v_x t}{2L} = \frac{m v_x^2 t}{L}$

ウ. 体積

エ. $\frac{1}{2}k_B T$

オ. $\frac{3}{2}k_B T$

カ. 2

キ. $\frac{5}{2}k_B T$

ク. $\frac{5}{2}R$

$\longrightarrow$ 正

$\xrightarrow{mv_x}$ $\xleftarrow{mv_x}$ $\quad mv_x - (-mv_x) = 2mv_x$

$$Ft = \frac{m\overline{v_x^2}t}{L}\cdot N_A$$

$$F = \frac{m\overline{v_x^2}}{L}\cdot N_A$$

$$\overset{P}{\frac{F}{L^2}} = \frac{\overline{v_x^2}}{L^3}\cdot mN_A$$

$$\underbrace{\frac{F}{L^2}\cdot L^3}_{PV} = mN_A\cdot\overline{v_x^2}$$

$$nRT = mN_A\cdot\overline{v_x^2}$$

$$\frac{1}{2}\underset{1}{n}\frac{R}{N_A}T = \frac{1}{2}m\overline{v_x^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{R}{N_A}T = \frac{1}{2}m\overline{v_x^2}$$

$$\frac{1}{2}m\cdot\frac{1}{3}\overline{v^2} = \frac{1}{2}k_BT$$

$$\frac{1}{2}m\overline{v^2} = \frac{3}{2}k_BT$$

II.

(1) $T_H = \frac{P_A V_1}{nR}$

(2) 0

(3)

Q_{AB}は熱力学第1法則よりA→B間の気体がした仕事に等しい.

$$\therefore Q_{AB} = \int_A^B P\,dV$$

$$= \int_{V_1}^{V_2}\frac{nRT_H}{V}dV$$

$$= nRT_H\left[\ln V\right]_{V_1}^{V_2} = nRT_H\ln\frac{V_2}{V_1} = P_AV_1\ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

$$P = \frac{nRT_H}{V} \qquad \frac{PV}{T} = \frac{P'V'}{T'}$$

(4) $Q_{BC} = \Delta U_{BC} = \frac{3}{2}nR(T_L - T_H) = -\frac{3}{2}nR(T_H - T_L) < 0$

$$Q_{CD} = \int_{V_2}^{V_1}\frac{nRT_L}{V}dV = nRT_L\ln\frac{V_1}{V_2} = -nRT_L\ln\frac{V_2}{V_1} < 0$$

$$Q_{DA} = \frac{3}{2}nR(T_H - T_L) > 0$$

$$\therefore \eta = \frac{Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CD}+Q_{DA}}{Q_{AB}+Q_{DA}} = \frac{nR(T_H-T_L)\ln\frac{V_2}{V_1}}{nRT_H\ln\frac{V_2}{V_1}+\frac{3}{2}nR(T_H-T_L)} = \frac{(T_H-T_L)\ln\frac{V_2}{V_1}}{T_H\ln\frac{V_2}{V_1}+\frac{3}{2}(T_H-T_L)}$$

(5) $$\eta' = \frac{Q_{AB}+Q_{BC}+Q_{CD}+Q_{DA}}{Q_{AB}} = \frac{(T_H-T_L)\ln\frac{V_2}{V_1}}{T_H\ln\frac{V_2}{V_1}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}$$