平成２９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

17:27まで

問題１

xy 平面上で定義された２変数関数

$$f(x,y)=\frac{xye^{-\frac{x^3}{3}}}{1+y^2}$$

を考える．以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f(x,y)$ の偏導関数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x,y)$ の極値を求めよ．

(3) 次の重積分を求めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy \qquad D: 0 \leqq y \leqq 1,\quad \log(1+y^2) \leqq x \leqq \log 2$$

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{y}{1+y^2}\left(e^{-\frac{x^3}{3}} + x\cdot\left(-x^2e^{-\frac{x^3}{3}}\right)\right)$

$= \dfrac{y}{1+y^2}(1-x^3)e^{-\frac{x^3}{3}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = xe^{-\frac{x^3}{3}}\cdot\dfrac{1+y^2-2y\cdot y}{(1+y^2)^2} = \dfrac{1-y^2}{(1+y^2)^2}xe^{-\frac{x^3}{3}}$

(2) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y}{1+y^2}\left(-3x^2e^{-\frac{x^3}{3}} + (1-x^3)\cdot\left(-x^2e^{-\frac{x^3}{3}}\right)\right)$

$= \dfrac{y}{1+y^2}(x^5-4x^2)e^{-\frac{x^3}{3}}$

$= \dfrac{y}{1+y^2}x^2(x^3-4)e^{-\frac{x^3}{3}}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{1-y^2}{(1+y^2)^2}(1-x^3)e^{-\frac{x^3}{3}}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2y(1+y^2)^{\cancel{2}} - (1-y^2)\cdot 2\cancel{(1+y^2)}\cdot 2y}{(1+y^2)^{\cancel{4}\,3}}\, x e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$= \frac{-2y - 2y^3 - 4y + 4y^3}{(1+y^2)^3}\, x e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$= \frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}\, x e^{-\frac{x^3}{3}}$$

極値のこう補となる点は

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+y^2}(1-x^3)e^{-\frac{x^3}{3}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\, x e^{-\frac{x^3}{3}} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} y(1-x^3) = 0 & -① \\ x(1-y^2) = 0 & -② \end{cases}$$

① で $y \neq 0$ とすると

$1 - x^3 = 0 \quad (1-x)(1+x+x^2) = 0$

$\therefore x = 1$

② に代入すると

$y = \pm 1$

① で $y = 0$ とすると、② に代入すると

$x = 0$

よって、極値をとる点のこう補は $(0,0)$, $(1, \pm 1)$.

また、ヘッシアンは

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{y}{1+y^2}x^2(x^3-4)e^{-\frac{x^3}{3}} & \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}(1-x^3)e^{-\frac{x^3}{3}} \\ \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}(1-x^3)e^{-\frac{x^3}{3}} & \frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^3}x e^{-\frac{x^3}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{e^{-\frac{2}{3}x^3}}{1+y^2} \begin{vmatrix} y x^2(x^3-4) & \frac{1-y^2}{1+y^2}(1-x^3) \\ \frac{1-y^2}{1+y^2}(1-x^3) & \frac{2y(y^2-3)}{(1+y^2)^2}x \end{vmatrix}$$

$H(0,0) = 0 - 1 = -1 < 0$

$H(1,1) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}}\left(-3 \cdot \frac{2\cdot(-2)}{4} - 0\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}} > 0$

$H(1,-1) = \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}}\left(3 \cdot \frac{-2\cdot(-2)}{4} - 0\right) = \frac{3}{2}e^{-\frac{2}{3}} > 0$

よって、極値をとるのは $(1,1)$ と $(1,-1)$.

$(1,1)$ について,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}} < 0$$

より極大値であり，その値は

$$f(1,1) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$$

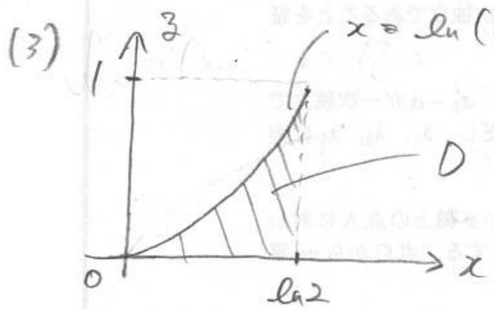
$(1,-1)$ について,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = \frac{-1}{2}\cdot(-3)\cdot e^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}e^{-\frac{1}{3}} > 0$$

より極小値であり，その値は

$$f(1,-1) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{3}}$$

(3)



$$x = \ln(1+z^2) \iff 1+z^2 = e^x \iff z = \sqrt{e^x-1}$$

左図より

$$D = \left\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\leq x\leq \ln 2,\ 0\leq z\leq \sqrt{e^x-1}\right\}$$

$$\therefore \iint_D f(x,z)\,dx\,dz = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\sqrt{e^x-1}} xe^{-\frac{x^3}{3}}\cdot\frac{z}{1+z^2}\,dz\,dx$$

$$= \int_0^{\ln 2} xe^{-\frac{x^3}{3}}\left[\frac{1}{2}\ln(1+z^2)\right]_0^{\sqrt{e^x-1}}dx$$

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^3}{3}}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot(-x^2)e^{-\frac{x^3}{3}} = \frac{1}{2}x^2e^{-\frac{x^3}{3}}$$

$$= \int_0^{\ln 2} xe^{-\frac{x^3}{3}}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\ln e^x}_{=x}\,dx$$

$$= \int_0^{\ln 2}\frac{1}{2}x^2e^{-\frac{x^3}{3}}\,dx \qquad \frac{(\ln 2)^3}{3} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^3}{3}}\right]_0^{\ln 2} \qquad \left(e^{(\ln 2)^3}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-e^{-\frac{(\ln 2)^3}{3}}+1\right)$$

平成２９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

行列 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) n を自然数とするとき，A^n を求めよ．

(3) A^5+4A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(4) 3次の正方行列 C が3次の対称行列 B によって対角化可能であるとする．ただし，行列 B, C の成分は実数とする．このとき，C は対称行列であることを示せ．

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\2-\lambda&-\lambda&1\\2-\lambda&1&-\lambda\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&-1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(-1-\lambda)^2$

よって固有値は $\lambda=-1$ (重解)，2．

$\lambda=-1$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&1\\&0&\end{pmatrix}$

よって固有ベクトルは

$v_1 = t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ ．$((t_1, t_2)\neq(0,0))$

$\lambda=2$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&-2\\0&3&-3\\0&-3&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&-2\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$

よって固有ベクトルは $\therefore v_2 = t_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $(t_3\neq 0)$

(2)

(1) より1次独立な固有ベクトルが3本とれるのでAは対角化可能.

変換行列をPとすると,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^n = P(P^{-1}AP)^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(-1)^n & -(-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 0 & 2^n \\ 0 & (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & 2\cdot(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n \\ -(-1)^n + 2^n & -(-1)^n + 2^n & 2\cdot(-1)^n + 2^n \end{pmatrix}$$

(3)

$$A^5 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2+32 & 1+32 & 1+32 \\ 1+32 & -2+32 & 1+32 \\ 1+32 & 1+32 & -2+32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\therefore A^5 + 4A = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 11 \\ 11 & 10 & 11 \\ 11 & 11 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 15 \\ 15 & 10 & 15 \\ 15 & 15 & 10 \end{pmatrix} = \underline{5\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}} =: F$$

$$|F - \lambda E| = 5^3\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 & 3 \\ 3 & 2-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 5^3\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 & 3 \\ 8-\lambda & 2-\lambda & 3 \\ 8-\lambda & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 5^3\begin{vmatrix} 8-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 5^3(8-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

よって, 固有値は $\lambda = -1$ (重解), 8

$\lambda = -1$ について,

$$F - \lambda E = 5\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 0 & \\ & & \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルは

$$v_1 = t_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((t_1, t_2) \neq (0, 0))$$

$\lambda = 5$ について，

$$F - \lambda E = 5\begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)より} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって固有ベクトルは

$$x_2 = t_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_3 \neq 0)$$

(4)

~~Cの固有値を$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$とする．~~

$$B^{-1}CB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

~~両辺の転置をとると~~

$$(左辺) = {}^t(B^{-1}CB) = {}^tB\,{}^t(B^{-1}C) = {}^tB\,{}^tC\,{}^t(B^{-1})$$
$$= B\,{}^tC\,B^{-1}$$

$$(右辺) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore B\,{}^tC\,B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = B^{-1}CB$$

~~左からB，右からB^{-1}をかけると~~

$$C = B^2\,{}^tC\,(B^{-1})^2$$

~~右辺は対称行列の積だから，Cは対称行列である．~~

違います．そんなわけありません．

$$D = B^{-1}CB = B\,{}^tC\,B^{-1}$$
$$C = BDB^{-1}$$
$$= B^2\,{}^tC(B^{-1})^2$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{11} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{b}_1 \quad \mathbb{b}_2 \quad \mathbb{b}_3$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}CB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$${}^t(B^{-1}CB) = {}^tB\,{}^t(B^{-1}C)$$
$$= {}^tB\,{}^tC\,{}^tB^{-1}$$
$$= B\,{}^tC\,B^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

平成２９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－３］

問題３

１から４までの数字が１つずつ書いてあるカードが４枚と，１から４までの数字が１つずつ書いてある球が４個ある．カードは束にして机に置く．１と２の数字が書かれた球を机に置き，残りの２個の球は箱に入れる．次の操作を繰り返し行う．

[操作] カードの束から無作為に１枚のカードを引き，引いたカードに書かれた数字を覚えてから，カードを束に戻す．次に，覚えた数字が書かれた球が机に置いてあるかどうかによって，以下のいずれかを行う．

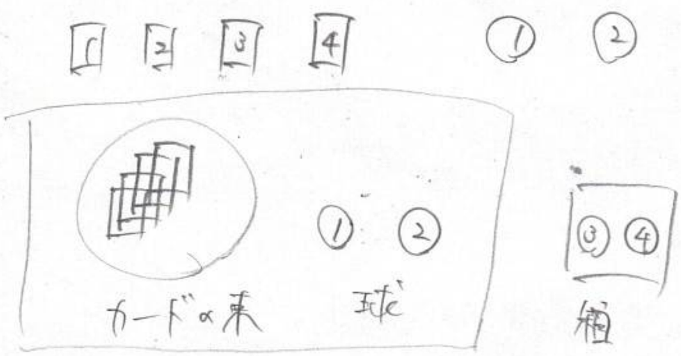
- 机に置いてある場合，何もしない．
- 机に置かれていない場合，机に置いてある２個の球から１個を無作為に選んで，箱に戻す．その後，覚えた数字が書かれた球を箱から取り出し，机に置く．

以下の設問に答えよ．

(1) この操作を１回行ったとき，机に１の数字が書かれた球と，２の数字が書かれた球が置いてある確率 $P_{1,2}(1)$ を求めよ．また，机に１の数字が書かれた球が置いてある確率 $P_1(1)$ を求めよ．

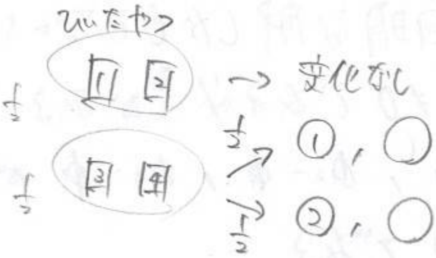
(2) この操作を n 回繰り返したとき，机に i の数字が書かれた球と，j の数字 (ただし，$i<j$) が書かれた球が置いてある確率を $P_{i,j}(n)$ とする．$P_{1,2}(n+1)$ を，$P_{1,2}(n)$, $P_{1,3}(n)$, $P_{1,4}(n)$, $P_{2,3}(n)$, $P_{2,4}(n)$, $P_{3,4}(n)$ を用いて表せ．

(3) この操作を n 回繰り返したとき，机に１の数字が書かれた球が置いてある確率 $P_1(n)$ を求めよ．



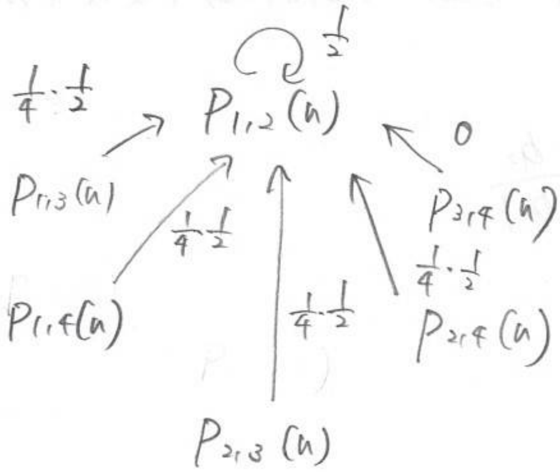
(1) $P_{1,2}(1)=\frac{1}{2}$

$P_1(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$



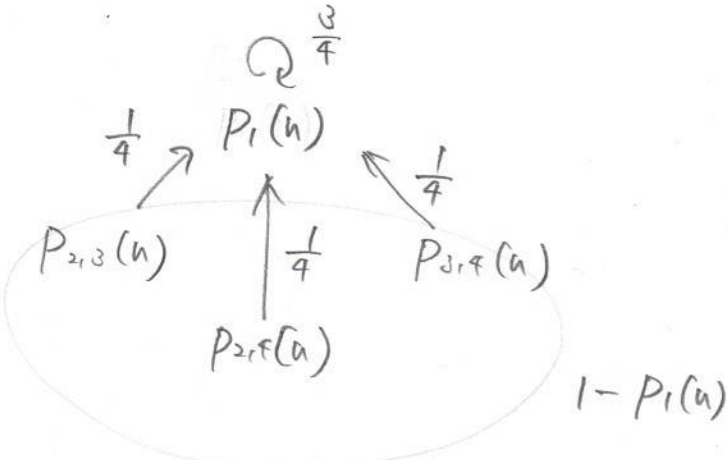
① ③

(2)



$\therefore P_{1,2}(n+1)=\frac{1}{2}P_{1,2}(n)+\frac{1}{8}\left(P_{1,3}(n)+P_{1,4}(n)+P_{2,3}(n)+P_{2,4}(n)\right)$

(3)



$P_1(n+1)-\alpha=\frac{2}{4}(P_1(n)-\alpha)$

$=\frac{2}{4}P_1(n)-\frac{2}{4}\alpha$

$P_1(n+1)=\frac{2}{4}P_1(n)+\frac{2}{4}\alpha$

$\therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore P_1(n+1)=\frac{3}{4}P_1(n)+\frac{1}{4}(1-P_1(n))$

$=\frac{2}{4}P_1(n)+\frac{1}{4}$

$\therefore P_1(n+1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(P_1(n)-\frac{1}{2}\right)$

$P_1(0)=1$ より

$P_1(n)=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$P_1(1)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$