２０２０年度名古屋大学工学部編入学試験問題紙等綴

科　目　数　　学

８月１日（木）　１２：２０～１４：２０

注　意　事　項

１．試験開始の合図まで，この綴を開いてはいけません．

２．問題紙等の枚数は，表紙を含めて１０枚〔**そのうち問題紙は１枚，解答用紙は６枚，草稿用紙は２枚**〕である．

３．解答にかかる前に，この綴左上のホッチキス針を丁寧にはずし，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください．

４．解答は，必ず所定の解答用紙の所定の欄に記入してください．裏面に記入してはいけません．

５．落丁，乱丁，印刷上不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出てください．

６．草稿用紙のほか，この綴の解答用紙以外の余白は，草稿用に使用しても構いません．

７．試験終了時刻までは退室してはいけません．

８．問題紙，解答用紙，綴表紙及び草稿用紙は持ち帰ってはいけません．

２０２０年度名古屋大学工学部編入学試験問題

科目名 数　学

1. 3 次元ラプラス方程式

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

について考える. 以下の問いに答えよ.

(1) 関数 $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ がラプラス方程式を満たすことを示せ.

(2) 十分に滑らかな関数 $u(x,y,z)$ がラプラス方程式を満たすとき, 関数 $v(x,y,z)=x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}$ もラプラス方程式を満たすことを示せ.

2. A と B のプレイヤーが, $\frac{1}{3}$ の確率で白が, $\frac{2}{3}$ の確率で黒が出るサイコロを用いてゲームを行う. 白が出た場合は A の持ち点が 1 点増え, B の持ち点が 1 点減る. 黒が出た場合は A の持ち点が 1 点減り, B の持ち点が 1 点増える. A と B の初期持ち点を m 点 (m は 0 以上の整数)とし, いずれかの持ち点が 0 になるとゲームは終了する. このとき, A の持ち点が a の場合にゲームを行って A の持ち点が 0 になる確率を $P(a)$ とすると, 以下の漸化式が成立する. また, $a=0$ の場合では $P(0)=1$ となる. 以下の問いに答えよ.

$$P(a)=\frac{1}{3}P(a+1)+\frac{2}{3}P(a-1)$$

(1) $P(2m)$ を求めよ.

(2) $P(a)-P(a-1)$ を $P(1)$ を用いて示せ.

(3) $\frac{1}{3}P(a+1)-\frac{2}{3}P(a)$ を $P(1)$ を用いて示せ.

(4) A の持ち点が 0 になる確率 $P(m)$ を求めよ.

3. 実数 a_1, a_2 が与えられたとき, 実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n $(n \geq 3)$ が漸化式 $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$ によって定義されているとする.

(1) $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix}$ を満たす 2 行 2 列の行列 A を求めよ.

(2) 行列 A のすべての固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めよ.

(3) 行列 A に対して A^n を求めよ.

(4) 実数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n $(n \geq 3)$ を a_1, a_2 を用いて示せ.

4. 以下の問いに答えよ.

(1) $\int \sin^2 2x dx$ の不定積分を求めよ.

(2) $\frac{dy(x)}{dx}=Cy(x)$ を満たす $y(x)$ を求めよ. ただし, C は定数, $y(0)=1$ とする.

(3) $\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=2x^2\cos 2x$ の常微分方程式の一般解を求めよ.