9

平成２７年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

図に示すように，床の上におかれた線密度（単位長さ当たりの質量）ρ の鎖の端に質量の無視できる糸をつけ，半径 a，質量 m のなめらかに回る円盤状の滑車にかける．糸の他端に質量 M のおもりをつけ，引き上げられる鎖の床面からの長さを x とする．重力加速度の大きさを g とし，鎖の鉛直方向運動のみを考える．鎖の床での跳ね返りや，滑車と糸の間での滑りはないものとして，以下の問に答えよ．

(1) 滑車とおもりの間での糸の張力を T_1 とするとき，x を時間の関数 $x(t)$ として，おもりの運動を表す x の微分方程式を示せ．

(2) 滑車と鎖の間での糸の張力を T_2 とするとき，鎖の運動を表す x の微分方程式を示せ．

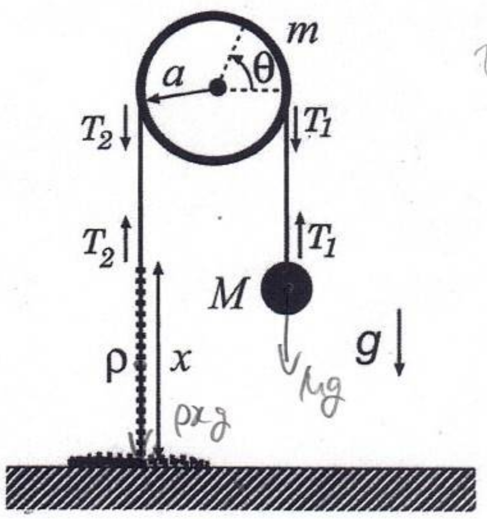
(3) 滑車の軸回りの慣性モーメントを I とするとき，回転角 θ を時間の関数 $\theta(t)$ として，張力 T_1 と T_2 の関係を θ の微分方程式を用いて表せ．

(4) $\dfrac{d\theta}{dt}$ と $\dfrac{dx}{dt}$ の間の関係を示せ．

(5) 滑車の密度が一定として，慣性モーメント I を m と a を用いて表せ．

(6) 鎖とおもりの重さが釣り合って静止している時の鎖の長さ x_0 を求めよ．

(7) x が x_0 からずれた状態から始まる振動運動を考える．x と x_0 の差およびその微分が十分小さいとして，その振動の周期 T を求めよ．



$v = r\omega$

H27 物理

1.

(1) $M\dfrac{d^2x}{dt^2} = Mg - T_1$ $\longrightarrow$ $M\ddot{x} + T_1 = Mg$

(2) $\rho x\dfrac{d^2x}{dt^2} = T_2 - \rho x g$ $\longrightarrow$ $\rho x \ddot{x} - T_2 = -\rho x g$

(3) $I\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = aT_2 - aT_1$ $\longrightarrow$ $I\ddot{\theta} + aT_1 - aT_2 = 0$ $\longrightarrow$ $-\dfrac{I}{a}\ddot{x} + aT_1 - aT_2 = 0$

(4) $\dfrac{dx}{dt} = -a\dfrac{d\theta}{dt}$ $\longrightarrow$ $\ddot{x} = -a\ddot{\theta}$

$\ddot{\theta} = -\dfrac{\ddot{x}}{a}$

$\therefore I\ddot{x} - a^2T_1 + a^2T_2 = 0$

(5)

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{m}{\pi a^2}\cdot r^2\, r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi\cdot\frac{m}{\pi a^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a$$
$$= \frac{1}{2}ma^2$$

(6)

(1)〜(3) の式に対して，加速度，角加速度を0とすると

$$T_1 = T_2$$
$$T_1 = Mg$$
$$T_2 = \rho x g$$
$$\therefore \rho x g = Mg$$
$$\therefore x_0 = \frac{M}{\rho}$$

(7)

(1)〜(4) より

$$\begin{pmatrix} M & 1 & 0 \\ \rho x & 0 & -1 \\ I & -a^2 & a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Mg \\ -\rho x g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\begin{vmatrix} Mg & 1 & 0 \\ -\rho x g & 0 & -1 \\ 0 & -a^2 & a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} M & 1 & 0 \\ \rho x & 0 & -1 \\ I & -a^2 & a^2 \end{vmatrix}} = \frac{\rho a^2 x g - Ma^2 g}{-I - a^2\rho x - Ma^2} \quad -(*)$$

ここで、

$$\Delta x := x - x_0$$

$$f(x) := \frac{\rho a^2 x g - M a^2 g}{-I - M a^2 - \rho a^2 x}$$

$f(x)$ を $x = x_0$ まわりでテイラー展開

$$f'(x_0) = \left.\frac{\rho a^2 g(-I - M a^2 - \rho a^2 x) + \rho a^2(\rho a^2 x g - M a^2 g)}{(-I - M a^2 - \rho a^2 x)^2}\right|_{x = x_0}$$

$$= \left.\frac{-\rho a^2 I g \cancel{- \rho M a^4 g} \cancel{- \rho^2 a^4 x g} \cancel{+ \rho^2 a^4 x g} \cancel{- \rho M a^4 g}}{(I + M a^2 + \rho a^2 x)^2}\right|_{x = x_0}$$

$$= \frac{-\rho a^2 I g}{(I + M a^2 + \rho a^2 x_0)^2}$$

これより(*)を近似式で考えると

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\frac{\rho a^2 I g}{(I + M a^2 + \rho a^2 x_0)^2} \Delta x$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\therefore T = 2\pi \cdot \frac{I + M a^2 + \rho a^2 x_0}{a \sqrt{\rho I g}}$$

平成２７年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

問題３

なめらかに動くピストンと両開管のU字管水銀圧力計をそなえた図のような容器が大気中におかれている．室温 T_1 において，ピストンの位置を固定した状態で，大気圧 P_0 より高い圧力 P_1 となるように理想気体をこの容器に閉じ込めた．このとき，この気体の体積は V_1 であった（これを状態Aと呼ぶ）．次に，ピストンの固定を急激に取り去ると，気体は断熱膨張し，気体の圧力は大気圧 P_0，体積は V_2，温度は T_2 へと変わった（これを状態Bと呼ぶ）．その後，体積 V_2 を一定のままでしばらく放置すると温度が T_2 から室温 T_1 に戻り，圧力は P_2 となった（これを状態Cと呼ぶ）．状態Aおよび状態Cにおける水銀面の高さの差 h はそれぞれ h_1, h_2 であった．

気体定数を R，比熱比を γ として，以下の問に答えよ．

(1) 状態Aにおける状態方程式から，この気体のモル数を求めよ．

(2) P_0，P_1，P_2，および V_1，V_2，それぞれの大小関係がわかるように，状態A→状態B→状態Cへの変化の様子を解答用紙の図に示す圧力-体積平面上に描け．

(3) P_1 と P_0 の比$\left(=\frac{P_1}{P_0}\right)$および P_1 と P_2 の比$\left(=\frac{P_1}{P_2}\right)$を V_1 および V_2 を用いて示せ．

(4) 比熱比 γ を P_0, P_1 および P_2 を用いて示せ．

(5) 状態Aでの圧力 P_1 および状態Cでの圧力 P_2 を，水銀の密度 ρ と重力加速度の大きさ g を用いて示せ．

(6) 容器内の圧力と大気圧の差が小さければ，比熱比 γ は近似的に $\gamma \fallingdotseq \frac{h_1}{h_1-h_2}$ で与えられることを示せ．ただし，$0<x\ll 1$ のとき $\log_e(1+x) \fallingdotseq x$ と近似できるものとする．

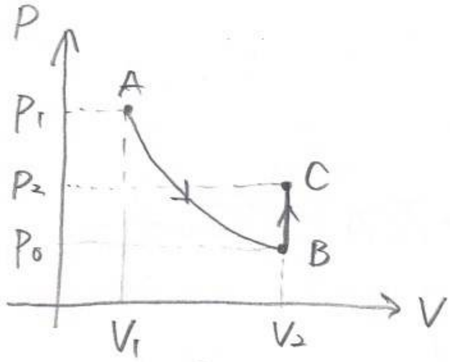
(7) $h_1 = 10$ mm, $h_2 = 4$ mm であったとすると，この気体は単原子分子理想気体か二原子分子理想気体のどちらであるかと考えられるか，理由とともに答えよ．

3.

(1) $P_1V_1 = nRT_1$

$\therefore\ n = \dfrac{P_1V_1}{RT_1}$

(2)



$A:(P_1, V_1, T_1)$

$B:(P_0, V_2, T_2)$

$C:(P_2, V_2, T_1)$

A→B 断熱
B→C 定積

$\underline{V_2 > V_1}$

$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$

$T_2 = \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1$

$\therefore\ \underline{T_2 < T_1}$

$P_1V_1^{\gamma} = P_0V_2^{\gamma}$

$\therefore\ P_0 = \left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1$

B　C

$\dfrac{P_0}{T_2} = \dfrac{P_2}{T_1}$

$P_2 = \dfrac{T_1}{T_2}P_0 = \dfrac{T_1}{T_2}\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1$

$= \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\left(\dfrac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1$

$= \dfrac{V_1}{V_2} P_1$

$\therefore\ \underline{P_2 > P_0}$

$\therefore\ \underline{P_1 > P_2}$

(3) $\dfrac{P_1}{P_0} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma}$

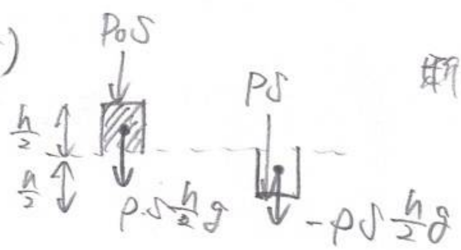
$\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{V_2}{V_1}$

(4) $\dfrac{P_1}{P_0} = \left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{\gamma}$

$\gamma \ln \dfrac{P_1}{P_2} = \ln \dfrac{P_1}{P_0}$

$\therefore\ \gamma = \dfrac{\ln \frac{P_1}{P_0}}{\ln \frac{P_1}{P_2}}$

(5)



断面積Sとする.

平衡点からずらしたつり合いは

$P_0S + \rho S\dfrac{h}{2}g = PS - \rho S\dfrac{h}{2}g$

$\therefore\ P = P_0 + \rho hg$

$\therefore\ P_1 = P_0 + \rho h_1 g$

$P_2 = P_0 + \rho h_2 g$

$P_1 = P_2 - \rho h_2 g + \rho h_1 g$

$= P_2 + \rho(h_1 - h_2)g$

$\dfrac{P_1}{P_0} = 1 + \dfrac{\rho h_1 g}{P_0}$

$\dfrac{P_1}{P_2} = 1 + \dfrac{\rho(h_1 - h_2)g}{P_2}$

(6)

(5)より

$$P_1 = P_0 + \rho h_1 g = P_2 + \rho(h_1 - h_2)g$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_0} = 1 + \frac{\rho h_1 g}{P_0}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = 1 + \frac{\rho(h_1 - h_2)g}{P_2}$$

(2)より，$P_0 < P_2 < P_1$ の関係があるので，容器内の圧力と大気圧の差が小さければ，$P_1/P_0 \approx 1$，$P_1/P_2 \approx 1$ とできる。
そのため，$\rho h_1 g / P_0 \ll 1$，$\rho(h_1 - h_2)g / P_2 \ll 1$．

よって，

$$\gamma = \frac{\ln \frac{P_1}{P_0}}{\ln \frac{P_1}{P_2}} = \frac{\ln\left(1 + \frac{\rho h_1 g}{P_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\rho(h_1 - h_2)g}{P_2}\right)}$$

$$\approx \frac{\frac{\rho h_1 g}{P_0}}{\frac{\rho(h_1 - h_2)g}{P_2}} = \frac{\frac{h_1}{P_0}}{\frac{h_1 - h_2}{P_2}}$$

$$\approx \frac{h_1}{h_1 - h_2} \qquad \because \frac{P_0}{P_2} \approx 1$$

(7) $$\gamma = \frac{10}{10 - 4} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

単原子分子ならば

$$C_V = \frac{3}{2}R, \quad C_P = \frac{5}{2}R$$

$$\therefore \gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{5}{3}$$

したがって，この気体は単原子分子理想気体だと考えられる．

5

平成２４年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

[数学 — 1]

問題 1

以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3}=0 \qquad \text{(a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=0 \qquad \text{(b)}$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=0$$

(3) 問 (1), 問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)\right\}=0$$