9

平成２６年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［物　　理］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［物理－１］

問題１

図１に示す高さ h, 底辺 $2a$ の二等辺三角形を，z 軸のまわりに回転させてできる円錐形状の剛体を考える．これに適当な長さの軸を z 軸にそって上下に取り付け「こま」を作る．剛体の密度は一様であるとして，その値を ρ とする．なお，軸の質量は無視する．「こま」の重心 O を原点として，z 軸に垂直な平面内に，剛体に固定して互いに直交する x, y 軸をとる．重心と軸の下端との間の距離を l とする．

「こま」が z 軸のまわりに一定の角速度 ω で回転しつつ，図２に示すように固定点 P を支点に，水平面内を一定の角速度 Ω で鉛直上向きにとった Z 軸まわりに旋回運動をしているものとする．支点 P を原点として，水平面内に空間に固定して X 軸，Y 軸を直交するようにとる．

「こま」と共に動く座標系の x, y, z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とし，一方，空間に固定した座標系の X, Y, Z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}$ とする．重力加速度の大きさを g として，以下の問に文中で与えられる物理量だけを用いて答えよ．

て

(1) 支点 P から測った重心の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}(=l\boldsymbol{k})$ として，重心の速度ベクトル $\boldsymbol{U}$ を示せ．

(2) 剛体と共に運動するある点の，重心から測った位置ベクトルを $\boldsymbol{r}$ として，固定系でのその点の速度ベクトル $\boldsymbol{u}$ を示せ．

(3) 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ で表される剛体の体積要素 $\mathrm{d}V$ がもつ運動量ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{M}$ を示せ．

(4) 問 (3) で求めた運動量の支点 P に関する角運動量ベクトル $\mathrm{d}\boldsymbol{L}$ を示せ．

(5) 問 (4) で求めた角運動量を「こま」の体積にわたって積分して，全角運動量ベクトル $\boldsymbol{L}$ を求めよ．

(6) 問 (5) で求めた角運動量ベクトルの時間変化率を示せ．

(7) 「こま」に作用する外力を述べ，支点 P に関するそのモーメントのベクトルを示せ．

(8) 問 (6) と問 (7) の結果を用いて「こま」が旋回する角速度 Ω をそれ以外の量で表せ．これより，剛体の形状や質量を変えることなく，回転角速度 ω を一定に保ったまま Ω を大きくするには，取り付ける軸の長さをどうすればよいか．

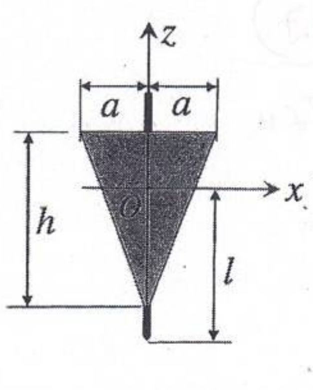


図１

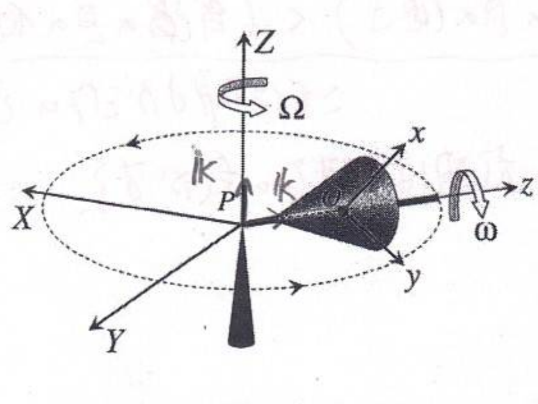


図２

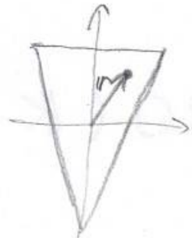
1.

(1) $\mathbb{v} = \dot{\mathbb{R}}$

(2) $\mathbb{u} = \dot{\mathbb{r}}$

(3) $d\mathbb{M} = \rho dV \cdot \dot{\mathbb{r}} = \rho \dot{\mathbb{r}} dV$

(4)
$$d\mathbb{L} = (\mathbb{R} + \mathbb{r}) \times d\mathbb{M}$$
$$= \rho(\mathbb{R} \times \dot{\mathbb{r}} + \mathbb{r} \times \dot{\mathbb{r}}) dV$$



$V = \frac{1}{3}\pi a^2 \cdot h$

(5)
$$\mathbb{L} = \int_V \rho(\mathbb{R} \times \dot{\mathbb{r}} + \mathbb{r} \times \dot{\mathbb{r}}) dV$$
$$= \frac{1}{3}\pi a^2 h \rho (\mathbb{R} \times \dot{\mathbb{r}} + \mathbb{r} \times \dot{\mathbb{r}})$$

(6)
$$\frac{d\mathbb{L}}{dt} = \frac{1}{3}\pi a^2 h \rho (\dot{\mathbb{R}} \times \dot{\mathbb{r}} + \mathbb{R} \times \ddot{\mathbb{r}} + \dot{\mathbb{r}} \times \dot{\mathbb{r}} + \mathbb{r} \times \ddot{\mathbb{r}})$$
$$= \frac{1}{3}\pi a^2 h \rho (\dot{\mathbb{R}} \times \mathbb{r} + \mathbb{R} \times \ddot{\mathbb{r}} + \mathbb{r} \times \ddot{\mathbb{r}})$$

?

(7)
こまに作用する外力は重力でありそのベクトル $\mathbb{W}$ は
$$\mathbb{W} = -\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho g \cdot \mathbb{K}$$
これが重心にかかるので、このモーメントのベクトル $\mathbb{N}$ は
$$\mathbb{N} = \mathbb{R} \times \left(-\frac{1}{3}\pi a^2 h \rho g\right) \mathbb{K}$$
$$= \frac{1}{3}\pi a^2 h \rho g (-\mathbb{R} \times \mathbb{K})$$
$-\mathbb{R} \times \mathbb{K}$ は重心の速度ベクトルと同じ向き.

(8) $d\mathbb{L}$

高見さんと答え合わせしたらこの年の(5)以降は
普通の受験生は解けないとのこと.

1.（解きなおし）

(1) $\mathbb{V} = \dot{\mathbb{R}}$

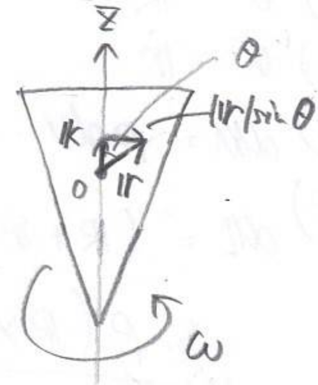
$= l\Omega(\mathbb{K} \times \mathbb{k})$

(2) $\mathbb{u} = \dot{\mathbb{r}}$

$= |\mathbb{r}| \sin\theta \cdot \omega \cdot \dfrac{\mathbb{k} \times \mathbb{r}}{|\mathbb{k} \times \mathbb{r}|}$

$= \cancel{|\mathbb{r}| \sin\theta} \cdot \omega \cdot \dfrac{\mathbb{k} \times \mathbb{r}}{|\mathbb{k}||\mathbb{r}| \sin\theta}$

$= \omega(\mathbb{k} \times \mathbb{r})$



$\mathbb{r}$と$\mathbb{k}$のなす角をθとする.

(3) $d\mathbb{M} = \rho g\, dV \cdot \mathbb{u}$

$= \rho g \omega (\mathbb{k} \times \mathbb{r})\, dV$

(4) $d\mathbb{L} = (\mathbb{R} + \mathbb{r}) \times d\mathbb{M}$

$= (l\mathbb{k} + \mathbb{r}) \times d\mathbb{M}$

$= \rho g \omega (l\mathbb{k} + \mathbb{r}) \times (\mathbb{k} \times \mathbb{r})\, dV$

$= \rho g \omega \left(l\mathbb{k} \times (\mathbb{k} \times \mathbb{r}) + \mathbb{r} \times (\mathbb{k} \times \mathbb{r}) \right) dV$

$= \rho g \omega \left((l\mathbb{k} \cdot \mathbb{r})\mathbb{k} - (l\mathbb{k} \cdot \mathbb{k})\mathbb{r} + (\mathbb{r} \cdot \mathbb{r})\mathbb{k} - (\mathbb{r} \cdot \mathbb{k})\mathbb{r} \right) dV$

$= \rho g \omega \left(l|\mathbb{r}| \cos\theta \cdot \mathbb{k} - l \cdot \mathbb{r} + |\mathbb{r}|^2 \cdot \mathbb{k} - |\mathbb{r}| \cos\theta \cdot \mathbb{r} \right) dV$

(5) $\mathbb{L} = \int_V d\mathbb{L}$?

(6) ?

(7) Ωによる遠心力 → 0，重力 → $l \cdot \rho \cdot \frac{1}{3}\pi a^2 h \cdot g \cdot (-\mathbb{K})$

$= \frac{1}{3}\rho \pi a^2 h l g \cdot (-\mathbb{K})$

(8) 軸の長さを小さくする?

11

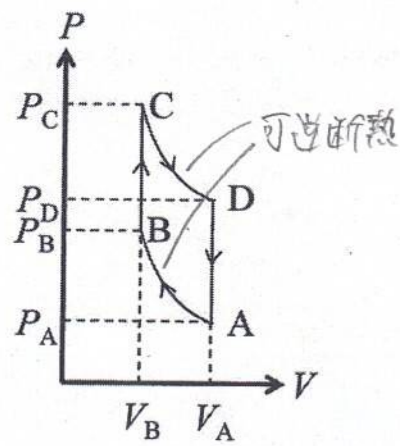
平成２６年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　理］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

ある理想気体がピストンで密閉された容器に封入されている．その圧力Pと体積Vが下図のように，状態Aから状態B，状態C，状態Dへと変化し，再び状態Aに戻った．状態Aから状態B，および状態Cから状態Dへの変化は可逆的断熱変化であり，状態Bから状態C，および状態Dから状態Aへの変化は定積変化であった．各状態における温度をT_A, T_B, T_C, T_Dと書くことにし，気体の定積熱容量をC_Vとして以下の問に答えよ．



(1) 状態Bから状態Cへ変化する際に与えられた熱量Q_Hと気体がした仕事を求めよ．

(2) 状態Dから状態Aへ変化する際に放出された熱量Q_Lを求めよ．

(3) 状態Aから３つの状態を経て状態Aに戻る際，気体が外界に対して行った仕事を求めよ．また，与えた熱量と外界に対して行った仕事の比で定義される効率を計算し，T_A, T_B, T_C, T_Dで表せ．

(4) 可逆的断熱変化ではPV^γが一定に保たれる．等温変化と比較することにより，γが１より大きいことを示せ．

(5) 可逆的断熱変化ではPV^γが一定に保たれることを用いて，T_A, T_B, T_C, T_Dの関係式を導け．また，それを用いて，問(3)で得られた効率をT_A, T_Bで表せ．

3.

$$PV^{\gamma} = \text{const.}$$

$$\frac{nRT}{V} V^{\gamma} = \text{const.}$$

$$TV^{\gamma-1} = \frac{\text{const.}}{nR} = \text{const.}$$

(1) $W_{BC} = 0$

$$Q_H = C_V(T_C - T_B)$$

(2) $Q_L = C_V(T_D - T_A)$

(3)

1サイクルで$\Delta U = 0$なので

$$W_{cicle} = Q_{cicle} = Q_H - Q_L = C_V(T_C - T_B) - C_V(T_D - T_A)$$

$$= C_V(T_C - T_B + T_A - T_D)$$

(4) $\eta = \dfrac{W_{cicle}}{Q_H} = \dfrac{T_C - T_B + T_A - T_D}{T_C - T_B} = 1 + \dfrac{T_A - T_D}{T_C - T_B}$

(5) $PV^{\gamma} = TV^{\gamma-1} = \text{const.}$

A→B

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$\frac{P_C}{P_B} \cdot \frac{V_B}{V_A} \cdot \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma}$$

$$\therefore T_B = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_A$$

B→C

$$\frac{P_B}{T_B} = \frac{P_C}{T_C}$$

$$P_D V_A^{\gamma} = P_C V_B^{\gamma}$$

$$P_D = P_C \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma}$$

$$\therefore T_C = \frac{P_C}{P_B} T_B = \frac{P_C}{P_B}\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} T_A$$

D→A

$$\frac{P_D}{T_D} = \frac{P_A}{T_A}$$

$$\therefore T_A = \frac{P_A}{P_D} T_D \qquad T_D = \frac{P_D}{P_A} T_A$$

$$\therefore T_A : T_B : T_C : T_D = 1 : \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} : \frac{P_C}{P_B}\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} : \frac{P_A}{P_D}$$

$$\eta = 1 + \frac{\left(1 - \frac{P_D}{P_A}\right) T_A}{\left(\frac{P_C}{P_B} - 1\right) T_B} = 1 + \frac{(P_A - P_D) P_B T_A}{(P_C - P_B) P_A T_B}$$

(4)

等温変化について、

$$P = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{nRT}{V^2}$$

断熱なら

$$P = CV^{-\gamma} \quad (C\text{は定数})$$

$$\frac{dP}{dV} = -CV^{-(\gamma+1)} = \frac{-C}{V^{\gamma+1}}$$

(i) 断熱変化

$$pV^{\gamma} = C_1$$

$$p = C_1 V^{-\gamma}$$

$$\therefore \frac{dp}{dV} = -C_1 \gamma V^{-\gamma-1} = -\gamma p V^{-1} = -\gamma \frac{p}{V}$$

(ii) 等温変化

$$pV = C_2$$

$$p = C_2 V^{-1}$$

$$\therefore \frac{dp}{dV} = -C_2 V^{-2} = -pV^{-1} = -\frac{p}{V}$$

→ これは定義から明らか。$\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

$\gamma > 1 \Rightarrow$ (断熱の負の傾き) > (等温の負の傾き)

は証明できるけど

$\gamma > 1 \Leftarrow$ (断熱の負の傾き) < (等温の負の傾き)

これは明らかではないでない

ので、この問題での証明はできない気がする。