2022 年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

[数学]の試験問題の訂正について

問題3 （3） 2 行目

【誤】 取り出し表裏を確認後

【正】 取り出し<u>そのコインを投げ</u>表裏を確認後

２０２２年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　学］試 験 問 題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題 1

$\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x_0 > 0$として, 次の微分方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x^2, \quad t > 0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

以下の設問に答えよ.

(1) $x(t)$を求めよ.

(2) $\lim_{t\to\infty} x(t)$を求めよ.

(3) $\dfrac{\alpha}{\beta} \neq x_0$のとき, $x(t)$が区間$t \geqq 0$において単調関数であることを示せ.

(1) $\dfrac{1}{x(\alpha-\beta x)}\dfrac{dx}{dt} = 1$

$\dfrac{1}{x(\alpha-\beta x)} = \dfrac{\frac{1}{\alpha}}{x} + \dfrac{\frac{\beta}{\alpha}}{\alpha-\beta x} = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\beta}{\alpha-\beta x}\right)$

$\therefore \underline{\int \dfrac{dx}{x(\alpha-\beta x)}} = \int dt = t + C$

～について

$\int \dfrac{dx}{x(\alpha-\beta x)} = \dfrac{1}{\alpha}\int\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\beta}{\alpha-\beta x}\right)dx$

$= \dfrac{1}{\alpha}\left(\ln|x| - \ln|\alpha-\beta x|\right)$

$= \dfrac{1}{\alpha}\ln\left|\dfrac{x}{\alpha-\beta x}\right|$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha}\ln\left|\dfrac{x}{\alpha-\beta x}\right| = t + C$

$\therefore \dfrac{x}{\alpha-\beta x} = e^{\alpha t+\alpha C} = Ae^{\alpha t}$ ―①

$x = \alpha Ae^{\alpha t} - \beta Axe^{\alpha t}$

$(1+\beta Ae^{\alpha t})x = \alpha Ae^{\alpha t}$

$\therefore x(t) = \dfrac{\alpha Ae^{\alpha t}}{1+\beta Ae^{\alpha t}}$

①において $x(0)=x_0$ より

$$A=\frac{x_0}{\alpha-\beta x_0}$$

$$\therefore x(t)=\frac{\frac{\alpha x_0}{\alpha-\beta x_0}e^{\alpha t}}{1+\frac{\beta x_0}{\alpha-\beta x_0}e^{\alpha t}}=\frac{\alpha x_0 e^{\alpha t}}{\alpha-\beta x_0+\beta x_0 e^{\alpha t}}=\underbrace{\frac{\alpha x_0}{(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0}}_{1-(1)} \quad -②$$

(2) $$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\alpha x_0}{(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0}=\frac{\alpha x_0}{\beta x_0}=\underbrace{\frac{\alpha}{\beta}}_{1-(2)}$$

(3)
$t>0$について

$$\frac{dx}{dt}=\alpha x-\beta x^2=x(\alpha-\beta x)$$

$$=x\left(\alpha-\frac{\alpha\beta x_0}{(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0}\right)$$

$$=x\left(\frac{\alpha(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\alpha\beta x_0-\alpha\beta x_0}{(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0}\right)$$

$$=x\left(\frac{\alpha(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}}{(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0}\right)$$

$$=\frac{\alpha^2x_0(\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}}{((\alpha-\beta x_0)e^{-\alpha t}+\beta x_0)^2}$$

分母は $\frac{\alpha}{\beta}\neq x_0$ なら有限な値をもち、常に正の値。
分子について、α^2, $e^{-\alpha t}$ は常に正の値。それ以外の
$x_0(\alpha-\beta x_0)$
については定数でありtによらず決まった値である。
よって、$t>0$ について $\frac{dx}{dt}$ の正負は一定
したがって、$x(t)$ は区間 $t\geq 0$ において単調関数。
($t=0$ については $x(0)=x_0$ で値をもっている)
からOK.

1-(3)

8

２０２２年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

$0 \leqq \theta < 2\pi$, $0 \leqq \phi < 2\pi$ とする．3 次の正方行列 A, B を次式で定義し, $C = AB$ とする．

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

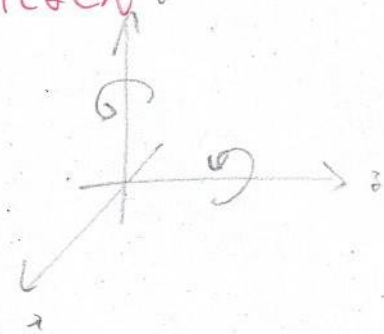
z軸まわりにθ　　y軸まわりにφ

なお, 虚数単位は $i\ (=\sqrt{-1})$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 行列 C の行列式の値を求めよ．

(2) 行列 C のすべての固有値およびそれらの絶対値を求めよ．

→ 実質解けてません



(1)
$$C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$|C| = |A||B|$$
$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\phi + \sin^2\phi)$$
$$= 1$$

2-(1)

(2)
$$|C - \lambda E| = \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\phi - \lambda & -\sin\theta & \cos\theta\sin\phi \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta - \lambda & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi - \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (\cos\theta\cos\phi - \lambda)(\cos\theta - \lambda)(\cos\phi - \lambda) + \sin^2\theta\sin^2\phi$$
$$+ \sin\phi(\cos\theta - \lambda)\cos\theta\sin\phi + \sin^2\theta\cos\phi(\cos\phi - \lambda)$$
$$= (\cos\theta\cos\phi - \lambda)(\lambda^2 - (\cos\theta + \cos\phi)\lambda + \cos\theta\cos\phi)$$
$$+ \sin^2\phi(\sin^2\theta + \cos^2\theta - \lambda\cos\theta) + \sin^2\theta\cos\phi(\cos\phi - \lambda)$$
$$= \lambda^2\cos\theta\cos\phi - \cos\theta\cos\phi(\cos\theta + \cos\phi)\lambda + \cos^2\theta\cos^2\phi$$
$$- \lambda^3 + (\cos\theta + \cos\phi)\lambda^2 - \lambda\cos\theta\cos\phi$$
$$+ \sin^2\phi(1 - \lambda\cos\theta) + \sin^2\theta\cos\phi(\cos\phi - \lambda)$$

$$= \lambda^2\cos\theta\cos\phi - \cos^2\theta\cos\phi - \cos\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi - \lambda^3$$

$$+ \lambda^2\cos\theta + \lambda^2\cos\phi - \lambda\cos\theta\cos\phi$$

$$+ 1 - \lambda\cos\theta - \cos^2\phi + \lambda\cos\theta\cos^2\phi - \lambda\cos\phi - \cos^2\theta\cos^2\phi + \lambda\cos^2\theta\cos\phi$$

$$= -\lambda^3 + (\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi)\lambda^2 - (\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi)\lambda + \underbrace{1 - \cos^2\phi}_{\sin^2\phi}$$

$$-\cos^3\phi + \cos\theta\cos^3\phi + \cos\theta\cos^2\phi + \cos^3\phi - \cos\theta\cos^2\phi - \cos\theta\cos\phi - \cos^2\phi + \sin^2\phi$$

$$= \cos\theta\cos\phi - \cos\theta\sin^2\phi\cos\phi - \cos\theta\cos\phi - \cos^2\phi + \sin^2\phi$$

$$= -\cos\theta\cos\phi$$

$$= \lambda^2\cos\theta\cos\phi - \lambda\cos^2\theta\cos\phi - \lambda\cos\theta\cos^2\phi + \cos^2\theta\cos^2\phi - \lambda^3$$

$$+ \lambda^2\cos\theta + \lambda^2\cos\phi - \lambda\cos\theta\cos\phi + \sin^2\phi - \lambda\cos\theta\sin^2\phi$$

$$+ \sin^2\theta\cos^2\phi - \lambda\sin^2\theta\cos\phi$$

$$= 1 - \lambda\cos\phi - \lambda\cos\theta + \lambda^2\cos\theta\cos\phi - \lambda\cos\theta\cos\phi + \lambda^2\cos\theta + \lambda^2\cos\phi - \lambda^3$$

$$= -\lambda^3 + (\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi)\lambda^2 - (\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi)\lambda + 1$$

$$= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - (\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi - 1)\lambda + 1)$$

$$= 0$$

1	-1	$\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi$	$-(\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi)$	1
		-1	$\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi - 1$	-1
	-1	$\cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi - 1$	-1	0

$\therefore \lambda = 1$,

ここで、固有値の性質から、3つの固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}\, C = \cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi$ — ①

$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = |C| = 1$ — ②

$\lambda_1 = 1$ とすると、② より

$\lambda_2 = \dfrac{1}{\lambda_3}$

① に代入すると

$\therefore 1 + \dfrac{1}{\lambda_3} + \lambda_3 = \cos\theta\cos\phi + \cos\theta + \cos\phi$

$\therefore \lambda$

２０２２年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

[数　学] 試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

コインを投げたとき, 表が出る確率が $p\left(0<p<1,\ p\neq\frac{1}{2}\right)$ であるコインAと, 表が出る確率が $1-p$ であるコインBが１枚ずつある. ただし, p は常に一定である. また, コインAとコインBは見た目や重さでは判別できない. 以下の設問に答えよ.

(1) コインAとコインBを同時に投げたとき, ２枚とも表が出る確率を求めよ.

(2) ある競技において, ２名の競技者がいずれも公平に権利を得られるような抽選の仕組みを考えたい. コインAまたはコインB, またはその両方を用いて, 実現可能な方法を理由とともに一つ述べよ.

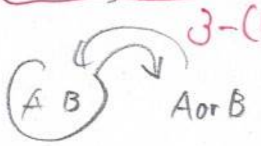
(3) N を正の整数とする. コインAとコインBを中身の見えない袋に入れる. その袋からコインを１枚無作為に取り出し表裏を確認後, コインを袋に戻す試行を N 回繰り返したところ, N 回とも表が出た. このとき, 投げたコインが全てAであった条件付き確率を求めよ.

(1) $p(1-p)$

3-(1)

3つのコインを投げ表裏を確認後

(3)



C : N回中N回表

D : 投げたコインが全てA

k回　N−k回

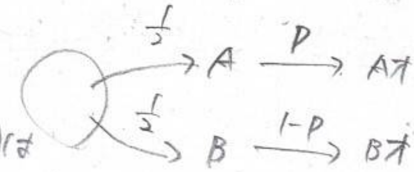
A A ... A B B ... B

求めるのは

$$P(D|C)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{n(C\cap D)}{n(C)}$$

$$P(C\cap D)=\left(\frac{p}{2}\right)^N$$

Aのオモテ　Bのオモテ



$P(C)$について考える. Aがk回, Bが$N-k$回のときの$P_k(C)$は

$$P_k(C)={}_NC_k\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot p\right)^k\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(1-p)\right)^{N-k}$$

$$= \frac{N!}{(N-k)!\cdot k!}\cdot\left(\frac{p}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)^{N-k}$$

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)^{N-k} = \frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)^{N}}{\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)^{k}}$$

$$= \frac{N!}{(N-k)!\cdot k!}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)^{N}\cdot\left(\frac{\frac{p}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{p}{2}}\right)^{k}$$

$$= \underbrace{\frac{N!}{(N-k)!\cdot k!}}_{{}_NC_k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N}\cdot(1-p)^{N}\cdot\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, x^k = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \cdots + x^n$$

$$\therefore P(C) = \sum_{k=0}^{N} {}_nC_k\cdot\left(\frac{1-p}{2}\right)^{N}\cdot\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}$$

$$= \left(\frac{1-p}{2}\right)^{N}\cdot\sum_{k=0}^{N} {}_nC_k\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}$$

$$\therefore P(D|C) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{N} {}_nC_k\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}}\cdot\left(\frac{2}{1-p}\cdot\frac{p}{2}\right)^{N} = \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N}\cdot\frac{1}{\sum_{k=0}^{N} {}_nC_k\left(\frac{p}{1-p}\right)^{k}}$$

(2) 2人をXさん，Yさんとする.
コインAだけを使い，(Xさん/Yさん) = (オモテ/ウラ)① or (ウラ/オモテ)②
になるまで勝負を続ける. ①ならXさん，②ならYさんが権利を得る.

理由
起こりうる事象とその確率は以下のとおり

(Xさん/Yさん)	(ウラ/ウラ)	(オモテ/ウラ)	(ウラ/オモテ)	(オモテ/オモテ)
確率	$(1-p)^2$	$p(1-p)$	$(1-p)p$	p^2

このうち，それぞれの勝利条件(権利を得られる条件)である(オモテ/ウラ)と(ウラ/オモテ)の確率が等しければよい.

表よりこの2つの確率が等しいので，この方法は公平だと言える.

p^N 3-(2)

$$= \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{N}} = p$$

3-(3)