

科 目 数 学

8月2日(木) 12:20~14:20

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この綴を開いてはいけません。
2. 問題紙等の枚数は、表紙を含めて10枚〔そのうち問題紙は1枚、解答用紙は6枚、草稿用紙は2枚〕である。
3. 解答にかかる前に、この綴左上のホッチキス針を丁寧にはずし、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
4. 解答は、必ず所定の解答用紙の所定の欄に記入してください。裏面に記入してはいけません。
5. 落丁、乱丁、印刷上不鮮明な箇所などがあったら、ただちに申し出てください。
6. 草稿用紙のほか、この綴の解答用紙以外の余白は、草稿用に使用しても構いません。
7. 試験終了時刻までは退室してはいけません。
8. 問題紙、解答用紙、綴表紙及び草稿用紙は持ち帰ってはいけません。

科目名 数 学

1. $f(x, y)$ は第一象限 ($x > 0, y > 0$) で定義された十分滑らかな関数とする. n は自然数とし, t は正数とする. 以下の問いに答えよ.

(1) t の関数 $g(t) = f(tx, ty)$ の導関数 $g'(t)$ を $t, x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) t の関数 $h(t) = t^{-n}g(t)$ の導関数 $h'(t)$ を n, t, g, g' を用いて表せ.

(3) 任意の正数 t に対して常に $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ を満たす $f(x, y)$ は, n 次同次関数と呼ばれる. $f(x, y)$ が n 次同次関数であることと, $f(x, y)$ が次の等式を満たすことが, 互いに必要十分条件であることを証明せよ (ヒント: (1) と (2) の結果を用いる).

$$x \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = n f(x, y)$$

2. 10 進数を表記するのに用いる $0, \dots, 9$ をシンボルと呼ぶことにする. 10000 より小さい正の整数 $1, 2, \dots, 9999$ において, 同じシンボルが 2 回以上現れるものの個数を求めよ.

3. 以下の問いに答えよ. ただし, 正方行列 \mathbf{M} の対角成分の和を $\text{tr}(\mathbf{M})$ と表記する.

(1) 次の行列 \mathbf{C} の固有値と対応する固有ベクトルを求めよ. ただし, 固有ベクトルはどの固有値に対応するか明確にし, 長さが 1 となるように正規化すること.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 任意の 3 行 3 列の行列 \mathbf{A}, \mathbf{B} について, $\text{tr}(\mathbf{AB})$ と $\text{tr}(\mathbf{BA})$ の関係を示せ.

(3) 任意の 3 行 3 列の行列 \mathbf{A} の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ としたとき, $\text{tr}(\mathbf{A}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ となることを証明せよ. ただし, 行列 \mathbf{A} は対角化が可能であるとする.

4. 以下の問いに答えよ.

(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ としたときに $\cos x$ と $\sin x$ を t を用いて表せ.

(2) (1) の結果を用いて以下の不定積分を求めよ.

$$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx$$

(3) 以下の常微分方程式の一般解を求めよ.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} - 15y = 130 \sin x$$

(4) 以下の常微分方程式の解を $x = 0$ のとき $y = -1$ の初期条件のもとで求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = -y$$