[II]

(1)

$\frac{dy}{dx} = y'$ とする。

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad -①$$

右辺 $= 0$ として同次の場合の解を求める。

$$y' + P(x)y = 0$$

$$y' = -P(x)y$$

$$\frac{y'}{y} = -P(x)$$

$$\therefore y = Ae^{-\int P(x)dx} \quad -②$$

次に、右辺 $= Q(x)$ としたときの解を定数変化法で求める。

A を x の関数 $A(x)$ とすると

$$y = A(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y' = A'(x)e^{-\int P(x)dx} + A(x)\cdot(-P(x))e^{-\int P(x)dx}$$

これらを①に代入

$$A'(x)e^{-\int P(x)dx} - A(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + A(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$\therefore A'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$A'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\therefore A(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$$

これを②に代入すると、一般解

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} + C\right)$$

が得られる。

(2) $y' - \frac{y}{x} = 1 + 2x^2$

$$e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{|x|}$$

両辺に $\frac{1}{x}$ をかける

$$\frac{1}{x}\cdot y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x} + 2x$$

$$\therefore \left(y \cdot \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + 2x$$

$$y \cdot \frac{1}{x} = \int \left(\frac{1}{x} + 2x\right) dx$$

$$= \ln|x| + x^2 + C$$

$$y = x\ln|x| + x^3 + Cx$$

絶対値はずせる理由は？

(3) $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{\ln x}{2x} y^3$

$$y^{-3}y' - \frac{y^{-2}}{2x} = \frac{\ln x}{2x}$$

$u = y^{-2}$とする。

$$u' = -2y^{-3} \cdot y'$$

$$e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$$

$$\therefore -\frac{u'}{2} - \frac{u}{2x} = \frac{\ln x}{2x}$$

$$u' + \frac{u}{x} = -\frac{\ln x}{x}$$

両辺にxをかける。

$$xu' + u = -\ln x$$

$$\therefore (u \cdot x)' = -\ln x$$

$$u \cdot x = \int -\ln x \, dx$$

$$= -x\ln x + x + C$$

$$\therefore u = -\ln x + 1 + \frac{C}{x}$$

$$\therefore y^{-2} = -\ln x + 1 + \frac{C}{x}$$

$x = 1$のとき$y = 1$になる解は

$$1 = 1 + C$$

$$\therefore C = 0$$

$$\therefore y = \frac{1}{\sqrt{1 - \ln x}}$$

[2]

(1) $\lambda^2+3\lambda+2=0$

$(\lambda+1)(\lambda+2)=0$

$\lambda=-1,-2$

$\therefore y=Ae^{-x}+Be^{-2x}$

(2)

右辺=0の解は(1)のとおり。

与式の特殊解の1つを$y=a$で予想

$y=a,\ y'=0,\ y''=0$

これらを与式の左辺に代入

$2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

よって特殊解の1つは$y=\frac{1}{2}$.

これと(1)で求めた一般解を重ね合わせ、与式の一般解は

$y=Ae^{-x}+Be^{-2x}+\frac{1}{2}$

$\therefore y'=-Ae^{-x}-2Be^{-2x}$

これらに$y(0)=1,\ y'(0)=0$を適用する。

$$\begin{cases}1=A+B+\frac{1}{2}\\0=-A-2B\end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & 1=A+B+\frac{1}{2}\\ +) & 0=-A-2B\\ \hline & 1=\quad -B+\frac{1}{2}\end{array}$$

$B=-\frac{1}{2}$

$A=1$

$\therefore A=1$

$B=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=e^{-x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+\frac{1}{2}$

[3]

(1) $\lambda^2+2\lambda+1=0$

$(\lambda+1)^2=0$

$\lambda=-1$

$\therefore y=(Ax+B)e^{-x}$

(2) $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = z'e^t = z'x$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$= z''x^2 + z'x$$

$\therefore\ z'x = \dfrac{dz}{dt}$

$z''x^2 = \dfrac{d^2z}{dt^2} - z'x = \dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{dz}{dt}$

よって(*)は

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{dz}{dt} + 3\frac{dz}{dt} + z = 0$$

$\therefore\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\dfrac{dz}{dt} + z = 0 \quad -(*)'$

(3)

(1)より，$(*)'$の一般解は

$$z = (At + B)e^{-t}$$

$t = \ln x$より，(*)の一般解は

$$z = (A\ln x + B)\frac{1}{x}$$

(4) $\displaystyle\int_1^e z(x)\,dx$

$$= \int_1^e \left(\frac{A\ln x}{x} + \frac{B}{x}\right)dx$$

$$= \left[\frac{A}{2}(\ln|x|)^2 + B\ln|x|\right]_1^e$$

$$= \frac{A}{2} + B$$

よって，条件より以下の連立方程式が成立．

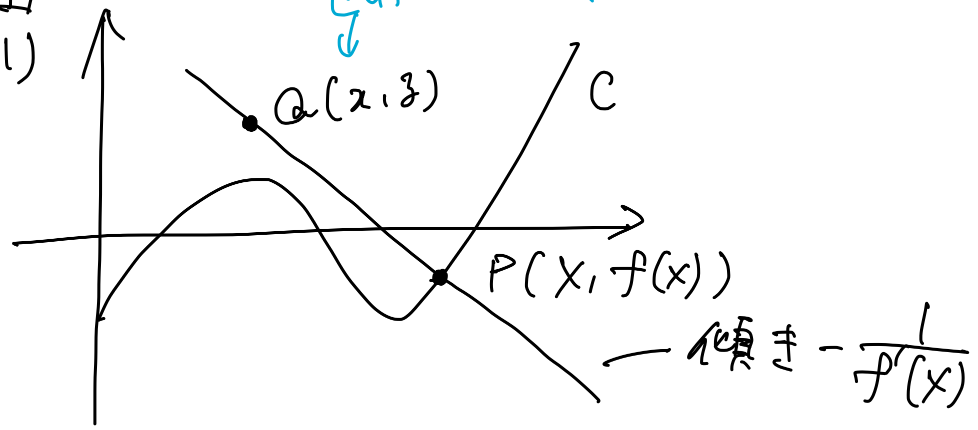
$$\begin{cases} 0 = B \\ 1 = \dfrac{A}{2} + B \end{cases}$$

$\therefore\ B = 0,\ A = 2$

$\therefore\ z = \dfrac{2\ln x}{x}$

[4]

(1)



$$z - f(X) = -\frac{1}{f'(X)}(x - X)$$

$$f'(X)z - f'(X)f(X) = -x + X$$

$$x + f'(X)z - X - f'(X)f(X) = 0$$

これと原点との距離は2点間の距離公式より

$$\frac{|-X - f'(X)f(X)|}{\sqrt{1+(f'(X))^2}}$$

これとPのz座標の絶対値が等しいため

$$\frac{|-X - f'(X)f(X)|}{\sqrt{1+(f'(X))^2}} = |f(X)|$$

両辺2乗すると

$$\frac{X^2 + 2Xf'(X)f(X) + (f'(X)f(X))^2}{1+(f'(X))^2} = (f(X))^2$$

$$\therefore X^2 + 2Xf'(X)f(X) + (f'(X)f(X))^2 = (f(X))^2 + (f'(X)f(X))^2$$

$$\therefore X^2 + 2Xf'(X)f(X) - (f(X))^2 = 0$$

よって、

$$x^2 + 2x\frac{dz}{dx}z - z^2 = 0$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - x^2}{2xz}$$

(2) $$z' = \frac{\left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{z}{x}}$$

$$u'x + u = y'$$

$$\therefore\ u'x + u = \frac{u^2 - 1}{2u}$$

$$u'x = \frac{-u^2 - 1}{2u}$$

$$\frac{2u}{u^2+1} u' = -\frac{1}{x}$$

(3) $$\int \frac{2u}{u^2+1}\, du = \int -\frac{1}{x}\, dx$$

$$\ln(u^2+1) = -\ln|x| + C$$

$$u^2 + 1 = \frac{A}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{A}{x} - 1$$

$$y^2 = Ax - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{Ax - x^2}$$

$(1, 1)$ を通るため, $\sqrt{Ax - x^2} > 0$ だから

$$y = \sqrt{Ax - x^2}$$

$$1 = A - 1$$

$$A = 2$$

$$\therefore\ y = \sqrt{2x - x^2}$$