

## 数 学（90分）

〔注意事項〕

1. 監督者の指示があるまで、この問題用紙を開いてはいけません。
2. 解答用紙4枚すべての受験番号欄（各2箇所、合計8箇所）に受験番号を必ず記入しなさい。
3. 問題は全部で4問あり、1ページからなっています。落丁・乱丁 及び印刷の不鮮明な箇所などがあれば、手をあげて監督者に知らせなさい。
4. この問題用紙の余白は、下書きに使用してもよろしい。
5. 解答は、問題番号に対応する解答用紙の指定された場所書きなさい。解答を解答用紙の裏面に書いてはいけません。
6. 解答用紙は持ち帰ってはいけません。
7. 問題用紙と下書用紙は、持ち帰りなさい。

1 4 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  について、以下の問に答えよ。

- (1)  $A$  の固有値をすべて求めよ。  
(2)  $A$  の固有ベクトルのみから成る  $\mathbf{R}^4$  の正規直交基底を 1 組求めよ。

2 (1) 極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$  を求めよ。

(2) 広義積分  $\int_3^{\infty} \frac{6x - 4}{x^3 - 4x} dx$  を求めよ。

3  $\mathbf{R}^2$  上の関数  $f(x, y) = xy(x^2 + y - 1)$  について、以下の問に答えよ。

- (1)  $f_x(x, y) = 0$  かつ  $f_y(x, y) = 0$  を満たす点  $(x, y)$  をすべて求めよ。  
ただし、 $f_x(x, y)$ ,  $f_y(x, y)$  はそれぞれ  $x, y$  に関する  $f(x, y)$  の偏導関数を表す。  
(2) 領域  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\}$  における、関数  $f(x, y)$  の極大値および極小値をすべて求めよ。

4 関数  $y = y(x)$  ( $x > 0$ ) に関する次の微分方程式 (\*) を考える。

$$(*) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = x$$

次の問に答えよ。

- (1) 関数  $z = z(x)$  ( $x > 0$ ) を  $y = xz$  により定める。(\*) と同値な、 $z$  に関する微分方程式を導け。  
(2) (\*) の一般解  $y(x)$  ( $x > 0$ ) を求めよ。

(以上)