

科 目

数 学

7月30日(木) 12:20~14:20

注 意 事 項

1. 試験開始の合図まで、この綴を開いてはいけません。
2. 問題紙等の枚数は、表紙を含めて10枚〔そのうち問題紙は1枚、解答用紙は6枚、草稿用紙は2枚〕である。
3. 解答にかかる前に、この綴左上のホッチキス針を丁寧にはずし、解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください。
4. 解答は、必ず所定の解答用紙の所定の欄に記入してください。裏面に記入してはいけません。
5. 落丁、乱丁、印刷上不鮮明な箇所などがあったら、ただちに申し出てください。
6. 草稿用紙のほか、この綴の解答用紙以外の余白は、草稿用に使用しても構いません。
7. 試験終了時刻までは退室してはいけません。
8. 問題紙、解答用紙、綴表紙及び草稿用紙は持ち帰ってはいけません。

科目名 数 学

1. 行列  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  に関して、以下の設問に答えよ。

- (1) 行列  $A$  が2個の固有値を持つような  $a$  を全て求めよ。またそのときの固有値を求めよ。
  - (2) 行列  $A$  が3個の固有値を持つような  $a$  の場合について、
    - (a) 全ての固有値と固有ベクトルを  $a$  を用いて記せ。
    - (b) 行列  $A$  は、ある正則行列  $P$  によって  $D = P^{-1}AP$  と対角化可能である。 $P$  を一つ示し、その  $P$  に対応する、 $P^{-1}$ 、 $D$  をそれぞれ求めよ。
2. 3つのつぼがあり、つぼAには白玉5個、赤玉3個、つぼBには白玉4個、赤玉4個、つぼCには白玉1個、赤玉7個が入っている。1から6の目が等しい確率で出るサイコロを振って、1の目が出たらつぼAを、2,3の目が出たらつぼBを、4,5,6の目が出たらつぼCを選択して、そのつぼから玉を無作為に1個取り出して元に戻す試行を繰り返す。
- (1) 1回の試行を行った時に白玉を取り出す確率を求めよ。
  - (2) 1回の試行を行って白玉を取り出した場合にサイコロの4の目が出た確率を求めよ。
  - (3) 4回試行した場合の白玉が出る回数の確率の分布を求めよ。
  - (4) 10回試行した場合の白玉が出る回数の確率の期待値  $E(X)$  と分散  $V(X)$  を求めよ。
3. 以下の設問に答えよ。

- (1) 次式 ( $n$  は整数) で示される関数のフーリエ級数を求めよ。

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & (2n-1)\pi < x \leq 2n\pi \\ 1 & 2n\pi < x \leq (2n+1)\pi \end{cases}$$

- (2) 次の不定積分を求めよ。

$$\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$$

4. 互いに直交する三つの単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  による正規直交座標系 ( $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  座標系) 上の点  $p(x, y, z)$  を、この座標系と原点を共有し、別の直交する三つの単位ベクトル  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  による正規直交座標系 ( $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  座標系) で示した場合、 $p$  の座標値は  $(x', y', z')$  となった。なお、座標系は右手系とする。
- (1)  $x', y', z'$  を  $x, y, z$  へ変換する行列  $M$  を求めよ。
  - (2) いま、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  座標系における、ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  を  $\mathbf{k}$  の正側から見て、 $\mathbf{k}$  を軸として右回りに  $45^\circ$  回転し、回転後の  $\mathbf{i}$  の正側から見て、 $\mathbf{i}$  を軸として右回りに  $45^\circ$  回転した後のベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  による座標系を  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  座標系とする。
    - (a)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  座標系で  $p_1(1, 0, 0), p_2(0, 1, 0), p_3(0, 0, 1)$  で示される点の、 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  座標系での座標を求めよ。
    - (b)  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  座標系から  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  座標系に変換する行列  $M$  の各要素の値を求めよ。
    - (c)  $M$  の転置行列は  $M$  の逆行列と等しくなる。 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  座標系で  $p_4(2, 1, 1)$  で示される点の  $\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'$  座標系での座標を求めよ。



科目名 物 理

1. 図1に示した平面図にあるように、なめらかで平らな水平面上に置かれたバネ定数  $k$  のバネaとバネ定数  $2k$  のバネbの間に質量  $m$  の質点をつないだ。釣り合い位置からの質点の変位を  $x$  としたとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $k$  は正、 $x$  は右向きを正とする。また、バネの質量は無視できるものとする。



図1

- (1) 質点に作用する力  $F_s$  を求めよ。ただし、 $F_s$  は右向きを正とする。
- (2) 質点に対する運動方程式を書け。
- (3) 時刻  $t=0$  での質点の変位を0, 速度を  $v_0$  とする。ただし、 $v_0$  は正とする。
  - 1) (2)で求めた運動方程式を解け。
  - 2) 質点が振動する振幅と周期を求めよ。
  - 3) 質点の変位  $x$  の時間変化を示したグラフを書け。ただし、2)で求めた振幅と周期が分かるように書くこと。
- (4) 質点に、(1)で求めた  $F_s$  に加えて、速度に比例した抵抗  $-\gamma \frac{dx}{dt}$  が作用しているとする。ただし、 $\gamma$  は正とする。
  - 1) 質点に対する運動方程式を書け。
  - 2) 時刻  $t=0$  での質点の変位を  $x_0$ , 速度を0とする。ここで、 $x_0$  は正とし、 $\gamma^2 - 12km < 0$  を満たすものとする。このとき、1)で求めた運動方程式を解け。また、質点の変位  $x$  の時間変化を示したグラフを書け。ただし、振幅の変化や周期が分かるように書くこと。