令和３年度　　大阪大学基礎工学部編入学試験

［ 知能システム学コース専門科目 ］　試　験　問　題

22

受　験　番　号	志 望 学 科 ・ コ ー ス
	学　科 コース

17:15まで

［知シ専門－１］

問題１

以下の問に答えよ．

(1)　伝達関数$G(s)$が次式で表されるシステムについて以下の小問に答えよ．

$$G(s) = \frac{as+1}{s^2+4s+4}$$

ただし，aは実定数である．

(1-1)　aを用いて単位ステップ応答$h(t)$を示せ．

(1-2)　単位ステップ応答$h(t)$にオーバシュートが発生する条件式（すなわち，次式を満たすaの範囲）を求めよ．

$$\sup_{t\geq 0} h(t) > \lim_{t\to\infty} h(t)$$

(2)　図のフィードバック制御系を考える．$R(s)$と$Y(s)$はそれぞれ目標信号$r(t)$と出力信号$y(t)$のラプラス変換であり，$P(s)$と$C(s)$はそれぞれ制御対象と制御器の伝達関数で，

$$P(s) = \frac{1}{s^3+s^2+4s+1}$$

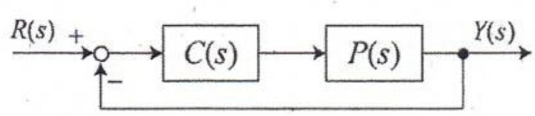
$$C(s) = \frac{K}{s^n}$$

である．ただし，nは自然数で Kは実定数である．以下の小問に答えよ．

(2-1)　$P(s)$のベクトル軌跡の実軸，及び虚軸との交差点を求め，そのベクトル軌跡の概形を描け．

(2-2)　$P(s)$のゲイン余裕を求めよ．

(2-3)　目標信号$r(t)$がステップ信号$r(t)=1$のときは誤差$e(t)=r(t)-y(t)$が0に収束したが，ランプ信号$r(t)=t$のときはある有界な値に収束した．nの値とフィードバック制御系が安定となるKの範囲を求めよ．さらに，この場合について，ランプ信号に対する誤差$e(t)$の収束値をKを用いて表せ．



図

(1-1)

$$H(s) = \frac{as+1}{s^2+4s+4}\cdot\frac{1}{s} = \frac{as+1}{s(s+2)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{2a-1}{2}}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{1}{4}}{s+2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{2a-1}{(s+2)^2} + \frac{-\frac{1}{2}}{s+2}\right)$$

$$\therefore\ h(t) = \frac{1}{2}\left(1 + (2a-1)te^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t}\right)$$

$$\frac{-2a+1}{-2} = \frac{2a-1}{2}$$

$$\frac{as+1}{s(s+2)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+2)^2} + \frac{C}{(s+2)}$$

$$\frac{as+1}{s} = \frac{A(s+2)^2}{s} + B + C(s+2)$$

微分し

$$\frac{as-(as+1)}{s^2} = \sim + C$$

$$C = \frac{-2a+2a-1}{4} = -\frac{1}{4}$$

(1-2)

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t}{e^{2t}} \quad \frac{1}{2e^{2t}}$$

また, $dh(t)/dt = 0$ の t を求めると

$$\frac{dh(t)}{dt} = (2a-1)\left(e^{-2t} - 2te^{-2t}\right) + e^{-2t}$$

$$= \left((2a-1)(1-2t)+1\right)e^{-2t}$$

$$= 0$$

$$2a-4at-1+2t+1$$
$$= -2(2a-1)t+2a$$

$\therefore\ (2a-1)(1-2t)+1 = 0 \quad \because\ e^{-2t} \neq 0$

$\therefore\ -2(2a-1)t + 2a = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{a}{2a-1}$

このとき, $\sup h(t) > \lim_{t\to\infty} h(t)$ ならば

$$h\left(\frac{a}{2a-1}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + (2a-1)\cdot\frac{a}{2a-1}e^{\frac{-2a}{2a-1}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-2a}{2a-1}}\right) > \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ 1 + ae^{\frac{-2a}{2a-1}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-2a}{2a-1}} > 1$$

$$\left(a-\frac{1}{2}\right)e^{\frac{-2a}{2a-1}} > 0$$

$e^{\frac{-2a}{2a-1}} > 0$ なので, 両辺をこれで割ると

$$a - \frac{1}{2} > 0$$

$$\therefore\ a > \frac{1}{2}$$

(2-1)

$$P(j\omega) = \frac{1}{-j\omega^3 - \omega^2 + j4\omega + 1} = \frac{1}{(1-\omega^2) + j\omega(4-\omega^2)}$$

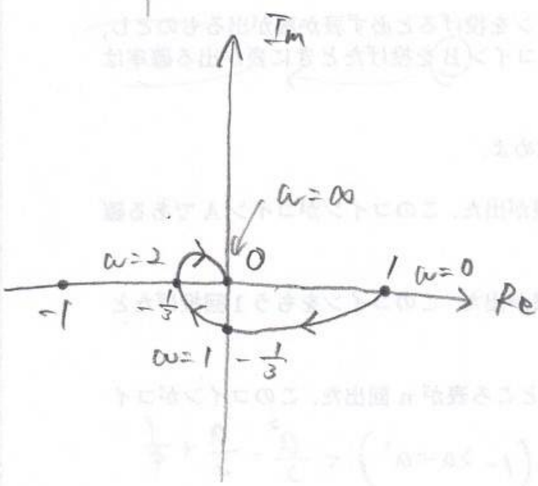
$$= \frac{(1-\omega^2) - j\omega(4-\omega^2)}{(1-\omega^2)^2 + \omega^2(4-\omega^2)^2}$$

$$\frac{1}{1+0}$$

$$\frac{-1\cdot 3}{0+1\cdot 3^2} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{-3}{(-3)^2+0} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

ω	0	1	2	∞
$Re[P(j\omega)]$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0
$Im[P(j\omega)]$	0	$-\frac{1}{3}$	0	0



s^4	1	4	K
s^3	1	1	
s^2	3	K	
s^1	$\frac{3-K}{3}$		
s^0	K		

$$\frac{3}{3-K}\left(\frac{3-K}{3}\cdot K\right) = K$$

ラウス表

(2-2)
ゲイン余裕は3

(2-3)

$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - C(s)P(s)E(s)$$

$$\therefore E(s) = \frac{R(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{1}{1 + \frac{K}{s^n}\cdot\frac{1}{s^3+s^2+4s+1}} R(s)$$

$$= \frac{s^n(s^3+s^2+4s+1)}{s^n(s^3+s^2+4s+1)+K} R(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s^{n+1}(s^3+s^2+4s+1)}{s^n(s^3+s^2+4s+1)+K} R(s)$$

よって, $r(t)=1$ で $e(t)=0$, $r(t)=t$ で $e(t)=$ (有界な値) となるとき, $n=1$.
このとき, フィードバック制御系が安定となるKの範囲は, 閉ループ伝達関数 $T_{ry}(s)$ の

$$T_{ry}(s) = \frac{\frac{K}{s}\cdot\frac{1}{s^3+s^2+4s+1}}{1+\frac{K}{s}\cdot\frac{1}{s^3+s^2+4s+1}} = \frac{K}{s^4+s^3+4s^2+s+K}$$

より $0 < K < 3$.
ランプ信号に対する $e(t)$ の収束値は

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2(s^3+s^2+4s+1)}{s(s^3+s^2+4s+1)+K}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{1}{K}$$

23

令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［知能システム学コース専門科目］ 試 験 問 題

受 験 番 号	志 望 学 科 ・ コ ー ス
	学 科 コース

［知シ専門－２］

問題２

以下の問に答えよ．

(1) 図1の抵抗はすべて同一の抵抗値Rを持つものとする．接点aとbとの間の合成抵抗を求めよ．

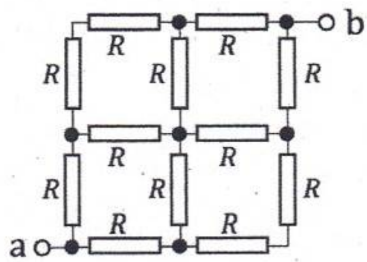


図1

(2) 図2と図3のオペアンプ回路に関して以下の小問に答えよ．図中の R, R_1, R_2 は抵抗値，C, C_1, C_2 は容量とする．オペアンプは入力インピーダンスと電圧増幅率が ∞，出力インピーダンスが 0 とし．ダイオードの順方向電圧降下を 0.7 [V]とする．ただし，ダイオードの他の特性は理想ダイオードとする．

(2-1) 図2のオペアンプ回路のスイッチを時刻 $t=0$ で閉じた．出力電圧 $v_o(t)$ を求めよ．ただし，交流電源を $E(t)=7\sin(\omega t)$ [V]とし，Cに初期電荷はないものとする．

(2-2) 図2のオペアンプ回路の機能として最も近いものを以下の中から選べ．

半波整流回路	全波整流回路	シュミットトリガ回路	ピーク検出回路

(2-3) 図3のオペアンプ回路に入力電圧 $v_1(t)=A\sin(\omega t)$ を与えたときの出力電圧 $v_2(t)$ の振幅を求めよ．

(2-4) 図3のオペアンプ回路の機能として最も適切なものを以下の中から選べ．

1次ローパスフィルタ	1次バンドパスフィルタ	1次ハイパスフィルタ
2次ローパスフィルタ	2次バンドパスフィルタ	2次ハイパスフィルタ

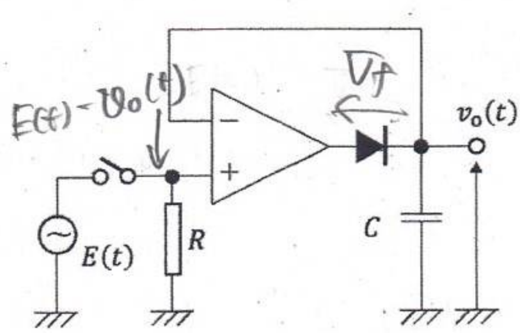


図2

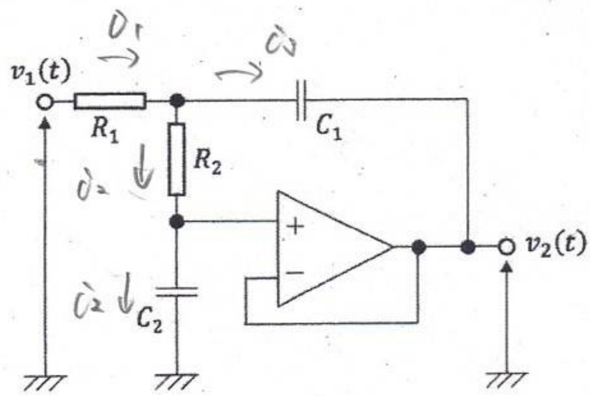


図3

(2-1)

ダイオードの順方向電圧降下をV_f，オペアンプの増幅率をAとおくと

$$V_f = A\left(E(t) - v_o(t)\right) - v_o(t) = AE(t) - (1+A)v_o(t)$$

$$\therefore v_o(t) = \frac{A}{1+A}E(t) - \frac{V_f}{1+A}$$

$V_f = 0.7\,\mathrm{V}$，$A \to \infty$とすると

$$v_o(t) = E(t)$$

ただし，$v_o(t) < E(t)$のときオペアンプの出力は負の飽和になり，ダイオードはOFF

また，入力インピーダンスが∞でv_o端子が開放なので一度充電された電荷は放電しな

$$\therefore v_o(t) = \begin{cases} 7\sin(\omega t) & \left(0 \le t < \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\right) \\ 7 & \left(t \ge \frac{1}{4}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{cases}$$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} =$

(2-2)

ピーク検出回路

(2-4)

2次ローパスフィルタ

(2-3)

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) i_2 \\ v_2 = \frac{-i_3}{j\omega C_1} - R_1 i_1 + v_1 \\ v_2 = \frac{i_2}{j\omega C_2} \\ i_1 = i_2 + i_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 i_1 + \left(R_2 + \frac{1}{j\omega C_2}\right) i_2 = v_1 \\ R_1 i_1 + \frac{i_3}{j\omega C_1} + v_2 = v_1 \\ -\frac{i_2}{j\omega C_2} + v_2 = 0 \\ i_1 - i_2 - i_3 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \underbrace{\begin{pmatrix} R_1 & R_2 + \frac{1}{sC_2} & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & \frac{1}{sC_1} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:(a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = A} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ V_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:b} V_1$$

$$|A| = \begin{vmatrix} R_1 & R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2} & R_1 & 0 \\ R_1 & R_1 & R_1 + \frac{1}{sC_1} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{sC_2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} R_1 + R_2 + \frac{1}{sC_2} & R_1 & 0 \\ R_1 & R_1 + \frac{1}{sC_1} & 1 \\ -\frac{1}{sC_2} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\cancel{R_1^2} + \frac{R_1}{sC_1} + R_1R_2 + \frac{R_2}{sC_1} + \cancel{\frac{R_1}{sC_2}} + \frac{1}{s^2C_1C_2} - \cancel{\frac{R_1}{sC_2}} - \cancel{R_1^2}\right) = -\left(R_1R_2 + \frac{1}{sC_1}(R_1+R_2) + \frac{1}{s^2C_1\right.$$

$$|(a_1\ a_2\ a_3\ b)| = \begin{vmatrix} R_1+R_2+\frac{1}{sC_2} & R_1 & 1 \\ R_1 & R_1+\frac{1}{sC_1} & 1 \\ -\frac{1}{sC_2} & 0 & 0 \end{vmatrix} V_1$$

$$= -\frac{1}{sC_2}\left(R_1 - R_1 - \frac{1}{sC_1}\right)V_1 = \frac{V_1}{s^2C_1C_2}$$

$$\therefore G(s) = -\frac{\frac{1}{s^2C_1C_2}}{R_1R_2 + \frac{1}{sC_1}(R_1+R_2) + \frac{1}{s^2C_1C_2}}$$

$$= -\frac{1}{s^2C_1C_2R_1R_2 + sC_2(R_1+R_2) + 1}$$

$$= -\frac{\frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}{s^2 + s\frac{R_1+R_2}{C_1R_1R_2} + \frac{1}{C_1C_2R_1R_2}}$$

周波数応答は

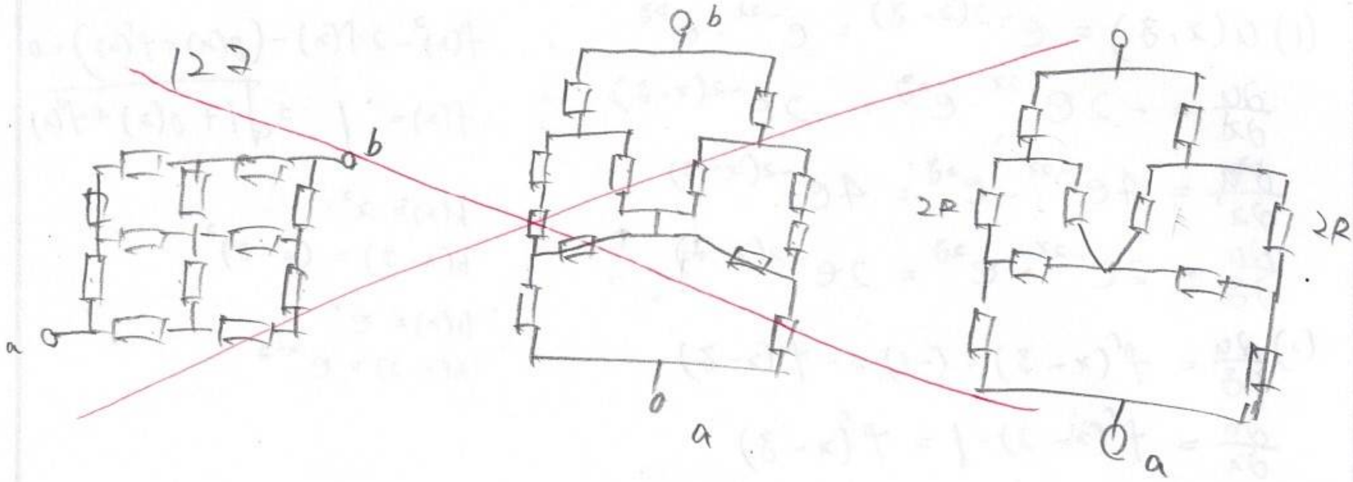
$$G(j\omega) = -\frac{1}{-\omega^2C_1C_2R_1R_2 + j\omega C_2(R_1+R_2) + 1}$$

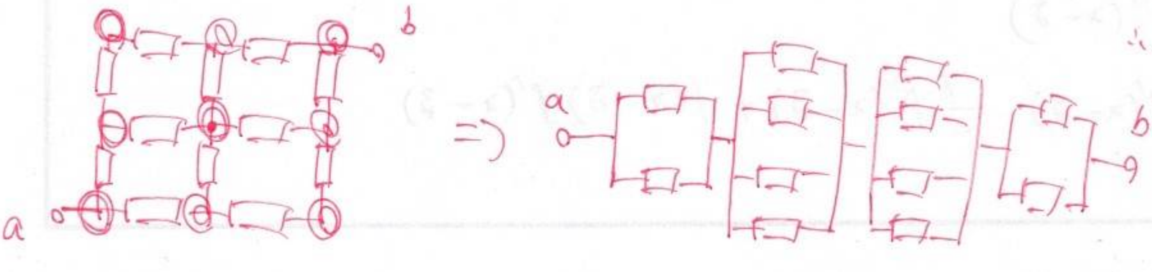
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2C_1C_2R_1R_2)^2 + (\omega C_2(R_1+R_2))^2}}$$

よって、$v_2(t)$の振幅は

$$A\cdot|G(j\omega)| = \frac{A}{\sqrt{(1-\omega^2C_1C_2R_1R_2)^2 + (\omega C_2(R_1+R_2))^2}}$$

(1)





$\therefore R_0 = \frac{3}{2}R$