２０２０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－１］

問題１

関数 $w(t)$ は初期条件「$t=0$ のとき $w=3$」をみたす微分方程式

$$\frac{dw}{dt}=\frac{t}{w}$$

の解とする．以下の問に答えよ．

(1) 関数 $w(t)$ を求めよ．

(2) 関数 $w(t)$ を用いて，２変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y)=\frac{3}{7}w(x+y)+\frac{1}{17}w(x-2y)^2$$

と定める．次の２重積分の値を求めよ．

$$\iint_D f(x,y)dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ x+y\leqq 4\}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(x-2y)^3$$
$$=3(x-2y)^2\cdot(-2)$$
$$=-6(x-2y)^2$$

$17\times 7 = 119$

$17\times 3 = 51$

(1) $w\,dw = t\,dt$

$\int w\,dw = \int t\,dt$

$\frac{w^2}{2} = \frac{t^2}{2}+C$

$t=0$ で $w=3$ より

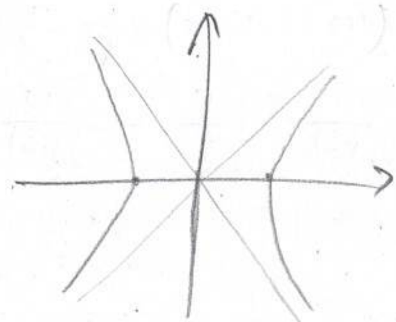
$C=\frac{9}{2}$

$\therefore w^2 = t^2+9$

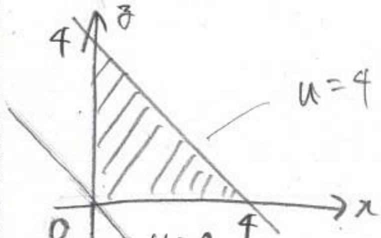
$\therefore w(t) = \pm\sqrt{t^2+9}$

$w^2-t^2=9$

$\frac{w^2}{9}-\frac{t^2}{9}=1$



(2) $f(x,y) = \frac{3}{7}\sqrt{(x+y)^2+9}+\frac{1}{17}\left((x-2y)^2+9\right)$



$u=x+y$　　$u-v\geqq 0$

$v=y$　　$0\leqq v\leqq u$

$\underbrace{x+y}_{u}\geqq 0$

ここで，$u = x + z$，$v = z$ とおいて変数変換．このとき，Dは

$E = \{ (u, v) \mid 0 \leq v \leq u,\ 0 \leq u \leq 4 \}$

にうつる．また，

$x = u - v$

$z = v$

$\therefore\ x_u = 1,\ x_v = -1,$

$z_u = 0,\ z_v = 1$

よって，ヤコビアンの絶対値は

$x - 2z = u - v - 2v = u - 3v$

$$\left\| \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| = 1$$

これより，

$$\iint_D f(x, z)\, dx\, dz = \iint_E \left\{ \frac{3}{7}\sqrt{u^2+9} + \frac{1}{17}\left((u-3v)^2+9\right) \right\} du\,dv$$

$$= \int_0^4 \int_0^u \left(\frac{3}{7}\sqrt{u^2+9} + \frac{1}{17}\left((u-3v)^2+9\right) \right) dv\, du$$

$(-2u)^3 = -8u^3$

$$= \int_0^4 \left[\frac{3}{7} v\sqrt{u^2+9} + \frac{1}{17}\left(-\frac{1}{9}(u-3v)^3 + 9v \right) \right]_0^u du$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{7} u\sqrt{u^2+9} + \frac{1}{17}\left(\frac{8}{9}u^3 + 9u \right) + \frac{1}{17}\cdot\frac{1}{9}u^3 \right) du$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{3}{7} u\sqrt{u^2+9} + \frac{1}{17}u^3 + \frac{9}{17}u \right) du$$

$16 + 9 = 25$

$$= \left[\frac{1}{7}(u^2+9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{17\cdot 4}u^4 + \frac{9}{17\cdot 2}u^2 \right]_0^4$$

$64 + 72 = 136$

$$= \frac{1}{7}\cdot 5^3 + \frac{4^{\cancel{4}3}}{17\cdot \cancel{4}} + \frac{9\cdot 4^2}{17\cdot 2} - \frac{27}{7}$$

$136 \div 17 = 8$

$$= \frac{125 - 27}{7} + \frac{64 + 9\cdot 4\cdot 2}{17}$$

$125 - 27 = 98$

$$= 14 + 8$$

$98 \div 7 = 14$

$$= 22$$

2020年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
[数　学] 試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

[数学－2]

問題2

3次の正方行列 $M = (m_{ij})$ に対して，対角成分の和 $\sum_{i=1}^{3} m_{ii}$ を $\mathrm{tr}(M)$ で表すとする．

また，行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．以下の問に答えよ．

(1) 行列 A の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(2) (1) で求めた行列 A の3つの固有値を，それぞれ λ_1，λ_2，λ_3 とする．このとき，

$$\mathrm{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

が成り立つことを示せ．

(3) 実数を成分とする3次の正方行列 B，C に対して，

$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$$

が成り立つことを示せ．

(4) 実数を成分とする3次の正方行列 D は，互いに異なる実数の固有値 μ_1，μ_2，μ_3 を持つとする．このとき，

$$\mathrm{tr}(D) = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

が成り立つことを示せ．

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$

$\therefore \lambda = -1, 1, 2$

$\lambda = -1$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore u_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$

$\lambda = 1$ について

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_2 = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ について

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

1)より，3つの固有値は $\lambda = \underbrace{-1}_{\lambda_1}, \underbrace{1}_{\lambda_2}, \underbrace{2}_{\lambda_3}$．また，

$$\mathrm{tr}\,A = 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1 + 1 + 2 = 2$$

したがって，

$$\mathrm{tr}\,A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

3)

$$B := \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

$$BC = \begin{pmatrix} b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + b_{13}c_{31} & b_{11}c_{12} + b_{12}c_{22} + b_{13}c_{32} & b_{11}c_{13} + b_{12}c_{23} + b_{13}c_{33} \\ b_{21}c_{11} + b_{22}c_{21} + b_{23}c_{31} & b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} + b_{23}c_{32} & b_{21}c_{13} + b_{22}c_{23} + b_{23}c_{33} \\ b_{31}c_{11} + b_{32}c_{21} + b_{33}c_{31} & b_{31}c_{12} + b_{32}c_{22} + b_{33}c_{32} & b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33}c_{33} \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + c_{13}b_{31} & c_{11}b_{12} + c_{12}b_{22} + c_{13}b_{32} & c_{11}b_{13} + c_{12}b_{23} + c_{13}b_{33} \\ c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} + c_{23}b_{31} & c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} + c_{23}b_{32} & c_{21}b_{13} + c_{22}b_{23} + c_{23}b_{33} \\ c_{31}b_{11} + c_{32}b_{21} + c_{33}b_{31} & c_{31}b_{12} + c_{32}b_{22} + c_{33}b_{32} & c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(BC) = (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + b_{13}c_{31}) + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} + b_{23}c_{32}) + (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33}c_{33})$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(CB) &= (c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + c_{13}b_{31}) + (c_{21}b_{12} + c_{22}b_{22} + c_{23}b_{32}) + (c_{31}b_{13} + c_{32}b_{23} + c_{33}b_{33}) \\ &= (b_{11}c_{11} + b_{12}c_{21} + b_{13}c_{31}) + (b_{21}c_{12} + b_{22}c_{22} + b_{23}c_{32}) + (b_{31}c_{13} + b_{32}c_{23} + b_{33}c_{33}) \\ &= \mathrm{tr}(BC) \end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{tr}(BC) = \mathrm{tr}(CB)$$

(4)

Dの変換行列をPとすると，PによるDの対角行列は

$$P^{-1}DP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \mu_2 & \\ 0 & & \mu_3 \end{pmatrix}$$

ここで，(3)より

$$tr(P^{-1}DP) = tr(P(P^{-1}D))$$
$$= tr(D)$$

したがって，

$$tr(D) = tr(P^{-1}DP)$$
$$= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$$

2020年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－3］

問題3

N を 6 以上の自然数とする．1, 2, ..., N から異なる 6 個の数を無作為に選ぶ．選んだ数を大きい順に X_1，X_2，X_3，X_4，X_5，X_6 とする．以下の問に答えよ．

(1) $N = 10$ のとき，$X_4 = 6$ となる確率を求めよ．

(2) $N \geqq 6$ に対して，$X_4 = 5$ となる確率 $p(N)$ を求めよ．

(3) (2) で求めた確率 $p(N)$ を最大にする自然数 N を求めよ．また，そのときの $p(N)$ の値を求めよ．

$\frac{5\cdot 4}{2} = 5\cdot 2$

$\frac{10\cdot 8\cdot 9\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} =$

$\frac{10\cdot 8\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2} = 10\cdot 3\cdot 7$

(1) $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5}_{3つ} \quad \underset{確}{6} \quad \underbrace{7 \quad 8 \quad 9 \quad 10}_{2つ}$

求める確率は

$$\frac{{}_5C_3 \cdot 1 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_6} = \frac{{}_5C_2 \cdot {}_4C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{5\cdot 2 \cdot 2\cdot 3}{10\cdot 3\cdot 7} = \frac{2}{7}$$

(2) $\underbrace{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}_{3つ} \quad \underset{確}{5} \quad \underbrace{6 \cdots\cdots N}_{2つ}$

$$\frac{4\cdot\frac{(N-5)(N-6)}{2}}{\frac{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)}{6!}}$$

$$p(N) = \frac{{}_4C_3 \cdot 1 \cdot {}_{N-5}C_2}{{}_NC_6}$$

$$= \frac{4\cdot\frac{(N-5)!}{(N-7)!\cdot 2!}}{\frac{N!}{(N-6)!\cdot 6!}}$$

$$= \frac{4\cdot(N-5)!\cdot(N-6)!\cdot 6!}{N!\cdot(N-7)!\cdot 2!}$$

$$= 2\cdot 6!\cdot\frac{(N-5)!}{N!}\cdot(N-6)$$

$$= 2\cdot 6!\cdot\frac{N-6}{N(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)}$$

(3) $p(N+1) = 2\cdot 6! \cdot \dfrac{N-5}{(N+1)N(N-1)(N-2)(N-3)}$

$$\frac{p(N+1)}{p(N)} = \frac{N-5}{(N+1)\cancel{N(N-1)(N-2)(N-3)}} \cdot \frac{\cancel{N(N-1)(N-2)(N-3)}(N-4)}{N-6}$$

$$= \frac{(N-5)(N-4)}{(N+1)(N-6)}$$

$p(N+1) / p(N)$ と 1 との大小をしらべる.

$$\frac{p(N+1)}{p(N)} = \frac{(N-5)(N-4)}{(N+1)(N-6)} > 1$$

$$N^2 - 9N + 20 > N^2 - 5N - 6$$

$$4N < 26$$

$$N < \frac{26}{4} = 6.\cdots$$

$$\frac{p(N+1)}{p(N)} = \frac{(N-5)(N-4)}{(N+1)(N-6)} < 1$$

$$N > \frac{26}{4} = 6.\cdots$$

これより,

$$p(6) < p(7) > p(8) > \cdots\cdots$$

よって, $p(N)$ を最大にする自然数は $N = 7$.

$$p(N=7) = 2\cdot 6! \cdot \frac{1}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} = \frac{2\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot 2}{7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}}$$

$$= \frac{4}{7}$$