平成３０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［物　　　理］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

23:48まで

問題１

水平な面の上に回転する剛体球を置く場合について考える．図に示すように，半径R，質量Mの一様な剛体球を，重心Gを通り水平な面と平行な方向を回転軸として角速度ω_0で回転させておき，時刻$t=0$でこれを球と面の間の動摩擦係数がμの水平な粗い面の上にそっと置く．つまり，時刻$t<0$では重心Gの水平方向の速度vは0，重心Gまわりの角速度はω_0となる．その後，球は滑りながら速度v，角速度ωで転がり，時刻t_1以降になると球は滑らずに転がる等速度運動となる．球の運動について以下の設問に答えよ．なお重力加速度の大きさをgとする．

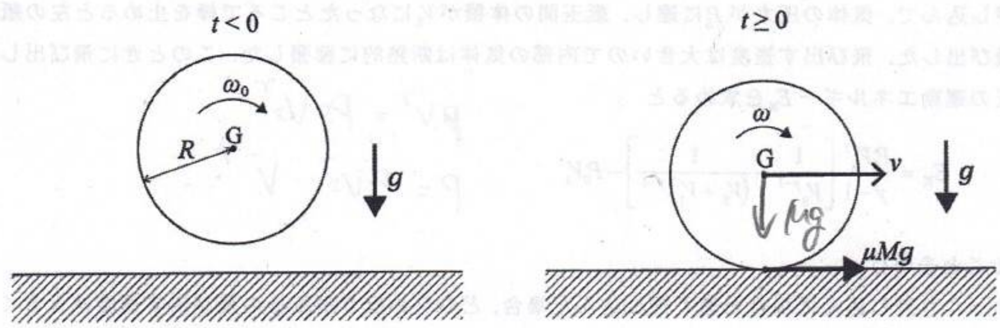
(1) 球の慣性モーメントIが$\frac{2}{5}MR^2$となることを示せ．

(2) 摩擦力μMgが働き，球が滑りながら転がる時の球の重心Gの速度v，および球の重心Gまわりの回転運動の角速度ωのみたす微分方程式を示せ．

(3) 摩擦力μMgが働き，球が滑りながら転がる時の時刻tにおける球の重心Gの速度v，および角速度ωを求めよ．

(4) 球が滑らずに転がり始める時刻t_1を求めよ．

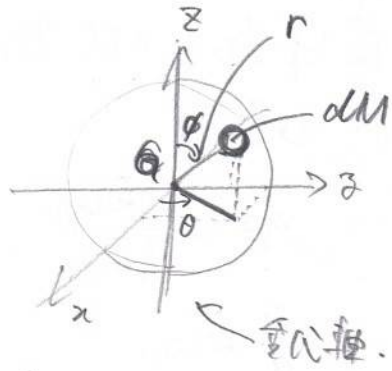
(5) 時刻t_1以降の等速度運動時の球の重心Gの速度v_1を求めよ．



1.

(1)

右図のように中心からの距離をr, xy平面となす角θ, z軸となす角をφとする。微小体積をdVとすると, (r, θ, ϕ) の位置にある微小質量dMは



$$dM = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot dV = \frac{3M}{4\pi R^3} dV$$

重心軸をzとすると, dMによる微小な慣性モーメントdIは

$$dI = \frac{3M}{4\pi R^3} dV \cdot (r\sin\phi)^2 = \frac{3M}{4\pi R^3} r^2 \sin^2\phi \, dV$$

ヤコビアンの計算により $dV = r^2 \sin\phi \, \underbrace{}_{dr\,d\theta\,d\phi}$ と求まるので, 球全体で積分することでIを求めると

$$I = \int_V dI$$
$$= \int_{\phi=0}^{\phi=\pi}\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\int_{r=0}^{r=R} \frac{3M}{4\pi R^3} r^4 \sin^3\phi \, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$= \cancel{2\pi} \cdot \frac{3M}{\cancel{4\pi} R^3} \cdot \cancel{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\phi \, d\phi \cdot \int_0^R r^4 dr$$
$$= \frac{3M}{R^3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{R^{\cancel{5}\,2}}{5}$$
$$= \frac{2}{5}MR^2$$

(2) $M\dot{v} = \mu M g \longrightarrow \dot{v} = \mu g$

$\frac{2}{5}MR^2\dot{\omega} = -R\cdot\mu M g \longrightarrow \dot{\omega} = -\frac{R\cdot\mu M g}{\frac{2}{5}MR^2} = -\frac{5\mu g}{2R}$

(3) $v(t) = \mu g t$

ωについて, 一般解は

$$\omega(t) = -\frac{5\mu g}{2R}t + C$$

$\omega(0) = \omega_0$ より, この場合の解は

$$\omega(t) = \omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}t$$

$\frac{7}{2}\mu g t = R\omega_0$

$\therefore t = \frac{R\omega_0}{\frac{7}{2}\mu g} = \frac{2R\omega_0}{7\mu g}$

(4)

滑らずに転がる条件は $v(t_1) = R\omega(t_1)$

$\therefore \mu g t_1 = R\left(\omega_0 - \frac{5\mu g}{2R}t_1\right) = R\omega_0 - \frac{5}{2}\mu g t_1$

$\therefore t_1 = \frac{2R\omega_0}{7\mu g}$

(5)

等速度運動なので, v_1はt_1のときの速度.

$$\therefore v_1 = v(t_1)$$
$$= \mu g \cdot \frac{2R\omega_0}{7\mu g}$$
$$= \frac{2}{7}R\omega_0$$

平成３０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［ 物　　　理 ］ 試 験 問 題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

$\int_V$

問題 3

図にあるような紙鉄砲を考えよう．紙鉄砲はシリンダーと水で濡らした二つの紙玉および紙玉を押し込む棒からなる．二つの紙玉の間のシリンダーには体積V_0の空間があり内部の空気の温度は室温であり圧力は大気圧P_0に等しくなっている．右側の紙玉を棒で押し込むとV_0の体積が減少するとともにその圧力が上がりP_Sに達すると左側の紙玉が飛び出す．
左側の紙玉の右端からシリンダーの左端までのシリンダー内の体積をV_1とする．紙玉とシリンダーの間からの空気の漏れはなく紙玉の変形や，紙玉が動き出してからの摩擦，水分の蒸発などは無視できるとする．また，V_1は紙玉が飛び出すときのシリンダーの圧力が大気圧より小さくならないように十分に小さくしてある．紙鉄砲の内部の空気は理想気体として取り扱う．また，外部の圧力は大気圧であり紙玉が動いても変わらないとし，重力の影響も無視する．断熱過程については系の圧力Pと体積Vについて　PV^{γ}=一定という関係が成り立つことを用いてよい．但し，γ $(\gamma>1)$は定圧モル比熱の定積モル比熱に対する比である．

(1) 棒をゆっくりと押し込む場合を考える．外部との熱のやり取りが十分にできるため内部の気体の温度は室温にたもたれる．このとき，内部の圧力がP_Sに達するときの体積V_SをP_0, P_S, V_0を用いて表せ．

(2) 内部の空気と外部との熱のやり取りを無視できるほど速く棒を押し込む場合を考える．この場合において，内部の圧力がP_Sに達するときの体積V_Sを　P_0, P_S, V_0とγで表せ．

(3) 棒を押し込んで，気体の圧力がP_Sに達し，紙玉間の体積がV_Sになったところで棒を止めると左の紙玉が飛び出した．飛び出す速度は大きいので内部の気体は断熱的に膨張した．このときに飛び出した紙玉の運動エネルギーE_Kを求めると

$pV^{\gamma} = P_S V_S^{\gamma}$

$$E_K = \frac{P_S V_S^{\gamma}}{\gamma - 1}\left[\frac{1}{V_S^{\gamma-1}} - \frac{1}{(V_S+V_1)^{\gamma-1}}\right] - P_0 V_1$$

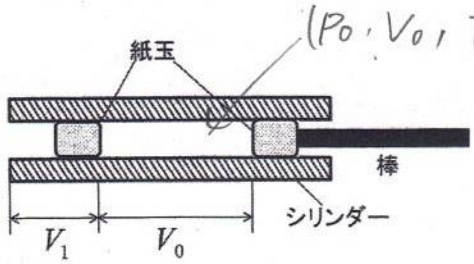
$P = P_S V_S^{\gamma} \cdot V^{-\gamma}$

となることを導け．

(4) 棒をゆっくり押し込んだ場合と速く押し込んだ場合，どちらのほうが紙玉の飛び出す速度は大きくなるのか理由を述べて答えよ．

(5) シリンダーを長くすることによりV_0を大きくした場合，紙玉の飛び出す速度は大きくなるのか小さくなるのか，理由を述べて答えよ．

(P_0, V_0, T_0)



3.

(1)

等温変化なので

$$P_s V_s = P_0 V_0$$

$$\therefore V_s = \frac{P_0}{P_s} V_0 \quad (V_0 > V_s)$$

(2)

断熱過程なので

$$V_s^{\gamma} = \frac{P_0}{P_s} V_0^{\gamma}$$

$$P_s V_s^{\gamma} = P_0 V_0^{\gamma}$$

$$\therefore V_s = \left(\frac{P_0}{P_s}\right)^{\frac{1}{\gamma}} V_0$$

$$P V^{\gamma} = P_s V_s^{\gamma}$$

(3)

紙玉が飛ぶのは $V_s + V_1$ のとき。よって、$V_s \to V_s + V_1$ までに紙玉がする仕事は

$$\int_{V_s}^{V_s+V_1} P\,dV = \int_{V_s}^{V_s+V_1} P_s V_s^{\gamma} \cdot \frac{1}{V^{\gamma}}\,dV$$

$$= \left[\frac{P_s V_s^{\gamma}}{\gamma - 1} \cdot \frac{1}{V^{\gamma-1}}\right]_{V_s}^{V_s+V_1}$$

$$= \frac{P_s V_s^{\gamma}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_s^{\gamma-1}} - \frac{1}{(V_s+V_1)^{\gamma-1}}\right)$$

紙玉が得る運動エネルギー E_k は、外にする仕事のうち V_1 の気体をシリンダー外に排出するのに使われる。この仕事が $P_0 V_1$ なので、

$$E_k = \frac{P_s V_s^{\gamma}}{\gamma - 1}\left(\frac{1}{V_s^{\gamma-1}} - \frac{1}{(V_s+V_1)^{\gamma-1}}\right) - P_0 V_1$$

(4)

$$E_k = \frac{P_s V_s}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_s}{V_s+V_1}\right)^{\gamma-1}\right) - P_0 V_0$$

P_s はどのような過程でも固有の値であり定数。よって、E_k は V_s に依存し、V_s が大きいほど E_k も大きくなる。

ゆっくり押し込んだ(1)と速く押し込んだ(2)について、$P_0 / P_s < 1$, $1/\gamma < 1$ に注意すると

$$\underbrace{\frac{P_0}{P_s} V_0}_{(1)\text{の}V_s} < \underbrace{\left(\frac{P_0}{P_s}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}_{(2)\text{の}V_s}$$

したがって、速く押し込むほうが V_s が大きくなり E_k も大きいため、紙玉の飛び出す速度も大きくなる。

(5)
ゆっくり押しこんだ場合と速く押しこんだ場合のどちらでもV_sはV_0に比例。
よって、V_0が大きくなるほどV_sも大きくなり、結果的に運動エネルギーE_kが
大きくなる。したがって、V_0を大きくした場合、紙玉の飛び出す速度は大きくなる。