E5-1

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$

$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$

$\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{3}}$

$\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{5}$

$\vdots$

$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$

よって、収束して和は $\frac{1}{2}$

(2) $S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ～①

$\frac{1}{2}S_n = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ～②

①－②より

$\frac{1}{2}S_n = \underbrace{2\left(\frac{1}{2}\right)} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots \left(\frac{1}{2}\right)^n} \underbrace{- (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$

等比級数の和（$\left(\frac{1}{2}\right)^1$を追加しておく）

$= 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$= \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\therefore S_n = 1 + 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{n+1}{2^n}$

よって、収束して和は3.

S5-1

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n+3}$

$\frac{1}{(n+3)(n+1)} = \frac{A}{n+3} + \frac{B}{n+1}$

$\frac{1}{n+1} = A + \frac{n+3}{n+1}$

部分和を S_n とすると

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\frac{1}{2}}{k+3} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{5}} + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+2} + \cancel{\frac{1}{n+1}} - \frac{1}{n+3}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)$$

よって、収束して和は $\frac{5}{12}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k r^{k-1}$$

$$= 1 + 2r^1 + 3r^2 + \cdots + n r^{n-1} \quad -①$$

$$r S_n = \quad r^1 + 2r^2 + \cdots + (n-1) r^{n-1} + n r^n \quad -②$$

①−②より

$$(1-r) S_n = 1 + r^1 + r^2 + \cdots + r^{n-1} - n r^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - n r^n$$

$$\therefore S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{n r^n}{1-r}$$

$$\lim_{n\to\infty} n r^n = \frac{n}{r^{-n}} = \frac{1}{r^{-n} \ln r} = \frac{r^n}{\ln r}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2} - \frac{1}{1-r} \lim_{n\to\infty} n r^n$$

ここで、

$$\lim_{n\to\infty} n r^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{r^{-n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{r^{-n} \ln r}$$

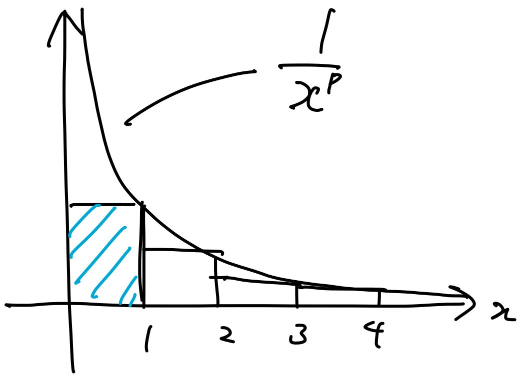
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{r^n}{\ln r}$$

$-1 < r < 1$ より

$$= 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{(1-r)^2}$$

E5-2



図より

$$\sum_{x=1}^{k} \frac{1}{x^p} < \underbrace{1}_{1のとこ} + \underbrace{\int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx}_{それ以降}$$

$$(\text{右辺}) = 1 + \int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= 1 + \int_1^k x^{-p}\,dx$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right]_1^k$$

$$= 1 + \frac{1}{1-p} k^{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

(i) $p > 1$ のとき

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx\right) = 1 - \frac{1}{1-p} \quad \therefore \text{収束}$$

(ii) $p = 1$ のとき

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \int_1^k \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1 + \left[\log x\right]_1^k\right)$$

$$= \infty \quad \therefore \text{発散}$$

(iii) $p < 1$ のとき

$$\lim_{k\to\infty}\left(1 + \int_1^k \frac{1}{x^p}\,dx\right) = 1 - \frac{1}{1-p} + \frac{1}{1-p}\lim_{k\to\infty} k^{1-p}$$

$$= \infty \quad \therefore \text{発散}$$

(1) $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ であり、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束する。

したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ も収束。

(2) $\frac{n+1}{n^2} > \frac{1}{n}$ であり、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散。

したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2}$ は発散。

S5-2

(1) $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$

$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ は発散。したがって、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

(2) $\frac{n}{n^3+1} < \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ は収束 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ も収束

E5-3

(1)

$a_n = \frac{1}{n!}$ とおく。

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$ $\therefore$ 収束

ダランベールの判定法より

(2)

$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e > 1$

コーシーの判定法により、発散。

S5-3

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!!}$

$a_n = \frac{n!}{(2n-1)!!}$ とする。

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(2n+1)!!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{n!}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1}$

$$= \frac{1}{2}$$
$$< 1$$
ダランベールの判定法より収束。

(2)

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{n}{n-1}}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$
$$= \frac{1}{e}$$
$$< 1$$
コーシーの判定法より収束。

E5-4

(1)

$$u_n = \left|\frac{(-1)^n}{3^n} x^n\right| = \frac{|x|^n}{3^n} \text{ とおく。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{3} = \frac{|x|}{3} = 1$$

ダランベールのしきい値

$\therefore |x| = 3 \rightarrow$ 収束半径は3

(2)

$$u_n = \left|\left(-\frac{2n}{n+1}\right)^n x^n\right| = \left(\frac{2n}{n+1}\right)^n |x|^n \text{ とおく。}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} |x| = 2|x| = 1$$

$\therefore |x| = \frac{1}{2} \rightarrow$ 収束半径は $\frac{1}{2}$

S5-4

(1)

$u_n = \left|\frac{(n+1)^n}{n!} x^n\right| = \frac{(n+1)^n}{n!} |x|^n$ とする。

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)^n} \frac{1}{|x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} |x|$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ n+1 \overline{)\, n+2} \\ \underline{n+1} \\ 1 \end{array}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} |x|$$

$$= e|x|$$

$$= 1$$

$\therefore |x| = \frac{1}{e} \rightarrow$ 収束半径 $\frac{1}{e}$

(2)

$$u_n = \left|\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n} x^{2n-1}\right|$$

$$= \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n} |x|^{2n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)\cdot 2^{n+1}} |x|^{2n+1} \cdot \frac{(n+1)\cdot 2^n}{|x|^{2n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(n+2)} |x|^2$$

$$= \frac{1}{2}|x|^2$$

$$= 1$$

$\therefore |x|^2 = 2$

$|x| = \sqrt{2} \rightarrow$ 収束半径 $\sqrt{2}$

ES-5

$u_n = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}x^n\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}}|x|^n$ とおく。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{|x|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\,|x|$$

$$= |x| \quad \to \text{収束半径 } 1$$

次に、$x=1$ および $x=-1$ における収束・発散を調べる。

(i) $x=1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$$

$n+1=k,\ n=k-1$

これはゼータ級数で、$p=\frac{1}{2}\leq 1$ より発散。

(ii) $x=-1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}(-1)^n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^{k-1}$$

$n=k-1$

また、

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

これは交代級数であるため、ライプニッツの定理より収束。

よって、求める収束域は

$-1\leq x<1$

SS-5

$u_n = \left|(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n\right|$

$= (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})|x|^n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})|x|^{n+1}}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})|x|^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{n+1-n}|x|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2-(n+1))(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}|x|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}|x|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}|x|$$

$$=|x|$$

$\to$ 収束半径 1

(i) $x=1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

部分和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\cancel{\sqrt{1}}-\sqrt{0}+\cancel{\sqrt{2}}-\cancel{\sqrt{1}}+\cancel{\cdots}+\cancel{\sqrt{n}}-\cancel{\sqrt{n-1}}+\sqrt{n+1}-\cancel{\sqrt{n}}$$

$$=\sqrt{n+1}$$

$$\to\infty\quad(n\to\infty)$$

$k=n+1$

$n=k-1$

よって，これは発散

(ii) $x=-1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(-1)^n$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})(-1)^{k-1}$$

$a_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ とおくと，

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k-(k-1)}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{k}}}$$

$$= 0$$

また，$a_k = f(k)$ とおく．

$$f'(k) = \frac{1}{2\sqrt{k}} - \frac{1}{2\sqrt{k-1}}$$

$k \geq 1$ において

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} > \frac{1}{2\sqrt{k-1}}$$

$\therefore f'(k) > 0$

よって，$\{a_k\}$ は単調減少．

したがって，$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{k}-\sqrt{k-1})(-1)^{k-1}$ は交代級数

であるため，ライプニッツの定理より収束する．

以上より，求める収束域は

$$-1 \leq x < 1$$

E5-6

$$(1+x)^p = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \cdots + \binom{p}{n}x^n + \cdots$$

(1) $$(1+x)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{-1\cdot(-2)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!}x^n$$

$$= 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$

(2) (1) より

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

S5-6

(1) $$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$= x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \cdots + \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$$

(2)

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots - \left(-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots$$

$$= 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{2}{(2n-1)!}x^{2n-1}$$

E5-7

(1) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \cdots}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x + \frac{2}{3!}x^3 + \cdots}{x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 + \frac{2}{3!}x^2 + \cdots}{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \cdots}$$

$$= 2$$

55-7

(1) $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots$

$\therefore x\cos x = x - \frac{1}{2!}x^3 + \cdots$

$$(1+x)^{-1} = 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{-1}{1}x + \frac{-1\cdot(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3!}x^3 \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

$$\therefore \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

(2)

(1) の結果より

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+3x)} - \frac{1}{3x\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \cdots} - \frac{1}{3x - \frac{3}{2!}x^3 + \cdots}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{3x - \frac{3}{2!}x^3 - \left(3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \cdots\right)}{\left(3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \cdots\right)\left(3x - \frac{3}{2!}x^3 + \cdots\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{-\frac{3}{2!}x^3 + \frac{(3x)^2}{2} - \frac{(3x)^3}{3} + \cdots}{\left(3x - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} + \cdots\right)\left(3x - \frac{3}{2!}x^3 + \cdots\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{9}{2} - \frac{3}{2}x - 9x + \cdots}{\left(3 - \frac{9}{2}x + 9x^2 + \cdots\right)\left(3 - \frac{3}{2}x^2 + \cdots\right)} \right)$$

$$= \frac{\frac{9}{2}}{3 \cdot 3}$$

$$= \frac{1}{2}$$