平成２４年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題 1

以下の設問に答えよ．

(1) 次式を証明せよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}\right)}{x^3}=0 \qquad \text{(a)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\dfrac{x^2}{2}\right)}{x^2}=0 \qquad \text{(b)}$$

(2) 次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\left(1-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{3n^2}\right)}{\dfrac{1}{n^2}}=0$$

(3) 問 (1), 問 (2) の結果を用いて，次式を証明せよ．

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)\right\}=0$$

H24 数学

1.

(1)

(a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-(-1+2x)}{6x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\frac{1}{(1+x)^3}-2}{6}$$

$$=\frac{2-2}{6}$$

$$=0$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-(1+x)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}$$

$$=\frac{1-1}{2}$$

$$=0$$

$\ln(1+x)'=\frac{1}{1+x}$

$\left(\frac{1}{1+x}\right)'=-\frac{1}{(1+x)^2}=$

(2)

$\ln(1+x)\sim x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots$

$\therefore \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots$

$)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\cdots$

$$\therefore (与式)=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\cdots\right)-\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}-\cdots}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{1}{4n}+\frac{1}{5n^2}-\cdots$$

$$=0$$

(3)

$$(与式) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right) + \left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right) - e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{11}{24n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1-e)\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}\right) - e\frac{1}{8n^2}$$

$$\frac{1}{3}+a=\frac{11}{24}$$

$$a=\frac{11}{24}-\frac{8}{24}$$

$$=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$$

6

平成２４年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

以下の設問に答えよ．

(1) 実数を要素とする行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ が異なる固有値を有するための条件を求めよ．
また，そのとき，異なる固有値に対する固有ベクトルが直交することを示せ．

(2) 2 次曲線 $7x^2 - 4xy + 7y^2 = 9$ の概形を描け．

(3) $x^2 + y^2 = 1$ のとき，関数 $f(x,y) = 2x^2 + dxy + 3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．
ただし，d は実数の定数とする．

2.

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(c-\lambda)-b^2$

$= \lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$

$=0$

$\therefore \lambda = \dfrac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$

異なる固有値を有する条件は

$(a+c)^2-4(ac-b^2) = a^2+2ac+c^2-4ac+4b^2$

$= (a-c)^2+4b^2$

$\neq 0$

a, b, cは実数なので

$a=b=c\neq 0$

次に, Aが異なる固有値λ_1, λ_2とそれに対応する固有ベクトルu_1, u_2をもつとする.

$Au_1 = \lambda_1 u_1$ ‐ ①

$Au_2 = \lambda_2 u_2$ ‐ ②

$(ABC)^T = (BC)^T A^T = C^T B^T A^T$

①に左からu_2^Tをかける.

$u_2^T A u_1 = u_2^T \lambda_1 u_1$

両辺転置をとると

$u_1^T A^T u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$

$A^T = A$より

$u_1^T A u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$

$\therefore u_1^T \lambda_2 u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$

$\therefore \lambda_2 u_1^T u_2 = \lambda_1 u_1^T u_2$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$より, 上式を満たすとき

$u_1^T u_2 = 0$

$\therefore u_1 \cdot u_2 = 0$

したがって, 異なる固有値に対する固有ベクトルは直交する.

(2) $Q(x, y) := 7x^2 - 4xy + 7y^2$

$$= \underbrace{(x \ \ y)}_{=:\boldsymbol{x}^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{x}}$$

$$= \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 5-\lambda & 7-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(9-\lambda)$$

Aの固有値は $\lambda = 5, 9$.

$\lambda = 5$について,

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_1 = c_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\lambda = 9$について,

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_2 = c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

これより, Aは直交行列Pをもちいて

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad P^T A P = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} \\ &= \boldsymbol{x}^T P P^T A P P^T \boldsymbol{x} \\ &= \underbrace{(P^T \boldsymbol{x})^T}_{=:\boldsymbol{x}'^T} P^T A P \underbrace{(P^T \boldsymbol{x})}_{\boldsymbol{x}'} \\ &= \boldsymbol{x}'^T P^T A P \boldsymbol{x}' \\ &= (x' \ \ y') \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= 5x'^2 + 9y'^2 \end{aligned}$$

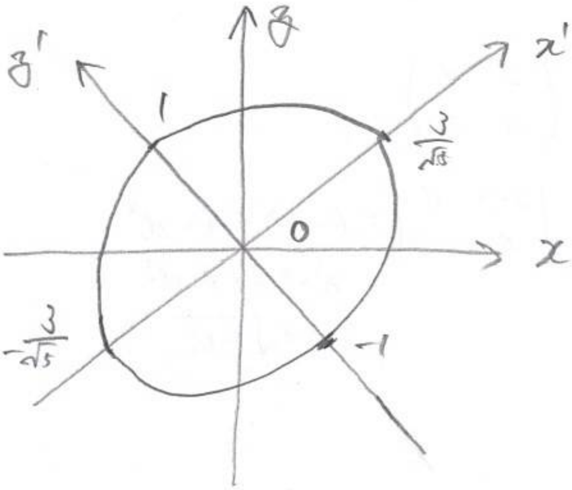
$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ 5x'^2 + 9y'^2 = 9$$

$$\frac{5}{9}x'^2 + y'^2 = 1$$

$$\left(\frac{x'}{\frac{3}{\sqrt{5}}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1}\right)^2 = 1$$

これと $\boldsymbol{x}' = P^T \boldsymbol{x} \iff \boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ より，概形は



ただし，

$$P = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

古い基底 $\boldsymbol{x}'$

$\uparrow P$

新しい基底 $\boldsymbol{x}$

だ円

$$\left(\frac{x}{\frac{3}{\sqrt{5}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 = 1$$

を原点中心に $\frac{\pi}{4}$ 回転させたもの

(3) $g(x,y) := x^2+y^2 = 1$

$f_x = 4x + \alpha y$，$f_y = \alpha x + 6y$

$g_x = 2x$，$g_y = 2y$

$g(x,y)$ のもとで $f(x,y)$ が最大or最小となるとき，

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 4x + \alpha y - 2\lambda x = 0 & \cdots ① \\ f_y - \lambda g_y = \alpha x + 6y - 2\lambda y = 0 & \cdots ② \\ g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす λ が存在する．

① より

$$2\lambda = 4 + \alpha\frac{y}{x}$$

② に代入すると

$$\alpha x + 6z - \left(4 + \alpha\frac{z}{x}\right)z = 0$$

$$\alpha x^2 + 6xz - 4xz + \alpha z^2 = 0$$

$$\alpha x^2 - 2xz + \alpha z^2 = 0$$

③ より $z = \pm\sqrt{1-x^2}$ を代入

$$\alpha x^2 \mp 2x\sqrt{1-x^2} + \alpha(1-x^2) = 0$$

$$\therefore \alpha = \pm 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$4x^2(1-x^2) = \alpha^2$$

$$4x^2 - 4x^4 = \alpha^2$$

$$4x^4 - 4x^2 + \alpha^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{2 \pm \sqrt{4-4\alpha^2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}}{2}}$$

$$z^2 = 1 - x^2 = \frac{1 \mp \sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

$$z = \pm\sqrt{\frac{1 \mp \sqrt{1-\alpha^2}}{2}}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha \\ \alpha & 3-\lambda \end{vmatrix} = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - \alpha^2$$
$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 - \alpha^2$$
$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{6-\alpha^2}}{2}$$

よって、最大値は

$$2\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right) + \alpha\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right) + 3\left(\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\right)$$

$$= (5+\alpha)\cdot\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

最小値は

$$(5-\alpha)\cdot\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}$$

平成２４年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

正八面体のサイコロがある．各面には0から7までの整数のうち1つが書かれており，各面の数字は互いに異なる．また，このサイコロを振った時に，各面は等確率で出るものとする．このサイコロをn回振り，出た目を順に小数点以下に並べた数をx_nとする．ただし，x_nの整数部分は0とする．例えば，$n = 4$で，出た目が順に5, 0, 7, 3であるなら，$x_4 = 0.5073$となる．nが2以上の偶数であるとき，$x_n < \frac{8}{33}$となる確率をp_nとする．以下の設問に答えよ．

(1) p_2を求めよ．

(2) nが4以上の偶数であるとき，p_nをp_{n-2}とnを用いて表せ．

(3) p_nを求めよ．

0.242
33) 80
66
140
132
80
66

$\frac{8}{33} = 0.24242424\cdots$

$x_n < \frac{8}{33} \approx \frac{24}{100}$

x_nは$\frac{8}{33}$より小さい

ただし $\frac{8}{33} > \frac{24}{100} = 0.24$

0.24 0 1 2

n→∞ まで成立
n→∞ まで成立

SAFE
0 1
2
0~4 SAFE
5~7 OUT
3 4 5 6 7 OUT

0 1 → 全部OK

2 0 1 2 3 → 全部OK

2 4 → 以下もしんぎり

3~7 → 全部OUT

1次のしんまでOUTの確率は

$\frac{5}{8}+$

3.

(1)

$n=2$ のとき, $x_n < 0.242$ を満たす確率が P_2.

$$\therefore P_2 = \frac{2}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{16+5}{64} = \frac{21}{64}$$

$$\frac{40+3}{64} = \frac{43}{64}$$

(2)

$$1 - P_n = 1 - P_{n-2} + \left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}\cdot\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}\right)$$

$$64 - 43 = 21$$

$$= 1 - P_{n-2} + \frac{43}{64}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}$$

$$P_{k+1} - \alpha\left(\frac{1}{64}\right)^{k+1} - \beta =$$

$$\therefore P_n = P_{n-2} - \frac{43}{64}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-2}$$

(3) $P_{n+2} = P_n - \frac{43}{64}\left(\frac{1}{8}\right)^n$

$n = 2k$ とすると

$$P_{2(k+1)} = P_{2k} - \frac{43}{64}\left(\frac{1}{8}\right)^{2k} = P_{2k} - \frac{43}{64}\left(\frac{1}{64}\right)^k$$

両辺に 64^{k+1} をかけて

$$64^{k+1} P_{2(k+1)} = 64\cdot 64^k P_{2k} - 43$$

新たに $a_k = 64^k P_{2k}$ とおくと

$$\alpha = 64\alpha - 43$$
$$63\alpha = 43$$
$$\alpha = \frac{43}{63}$$

$$a_{k+1} = 64 a_k - 43$$

$$\therefore a_{k+1} - \frac{43}{63} = 64\left(a_k - \frac{43}{63}\right)$$

$$a_1 = 64\cdot P_2 = 64\cdot\frac{21}{64} = 21$$

$$\therefore a_k = \frac{43}{63} + 64^{k-1}\left(a_1 - \frac{43}{63}\right)$$

$$= \frac{43}{63} + 64^{k-1}\left(21 - \frac{43}{63}\right)$$

$$21 \times 63 = 1323 \qquad 1323 - 43 = 1280 \qquad 1280 \div 64 = 20$$

$$\therefore P_{2k} = \frac{1}{64^k} a_k = \frac{43}{63}\left(\frac{1}{64}\right)^k + \frac{1}{64}\left(21 - \frac{43}{63}\right)$$

$$= \frac{43}{63}\left(\frac{1}{64}\right)^k + \frac{20}{63}$$

$$\therefore P_n = \frac{43}{63}\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{20}{63}$$