[I]

$$AA^t = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ p & q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & p \\ \sqrt{3}/3 & 0 & q \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & r \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3}(p+q+r) \\ 0 & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2}(p-r) \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(p+q+r) & 0 & p^2+q^2+r^2 \end{pmatrix}$$

$AA^t = E$ とすると

$$\begin{cases} p+q+r=0 & \text{—①} \\ p-r=0 & \text{—②} \\ p^2+q^2+r^2=1 & \text{—③} \end{cases}$$

$2p+q=0 \quad q=-2p$

$q=-2p$

$r=p$

$\therefore\ p^2+(-2p)^2+p^2=1$

$6p^2=1$

$\therefore\ p=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ r=\pm\frac{1}{\sqrt{6}},\ q=\mp\frac{2}{\sqrt{6}}$ （複号同順）

ここで、

$$|A| = -\frac{\sqrt{6}}{6}p+\frac{\sqrt{6}}{6}q-\frac{\sqrt{6}}{6}r+\frac{\sqrt{6}}{6}q$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{6}p+\frac{2\sqrt{6}}{6}q-\frac{\sqrt{6}}{6}r$$

(i) $(p,q,r)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき

$$|A| = -\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{6}}{6}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)-\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$= -\frac{1}{6}-\frac{4}{6}-\frac{1}{6}$$

$$= -1$$

よって不適。

(ii) $(p,q,r)=\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ のとき

$$|A| = -\frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) + \frac{2\sqrt{6}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{6}}{6}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= 1$$

となり適する。

したがって、

$$(p, q, r) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$\boxed{2}$

(1) $$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 5-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(25 - 10\lambda + \lambda^2) - 4 - 4 - 20 + 4\lambda - 2 + \lambda - 20 + 4\lambda$$

$$= 50 - 20\lambda + 2\lambda^2 - 25\lambda + 10\lambda^2 - \lambda^3 - 10 - 40 + 9\lambda$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36)$$

$$= -\lambda(\lambda - 6)^2 = 0$$

よって、Aの固有値は $\lambda = 0, 6$(重解)

(2)

(1)より $\lambda_0 = 6$. このときの固有ベクトル v_0 は

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore v_0 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ((a, b) \neq (0, 0))$$

よって、1次独立な固有ベクトルは

$\lambda = \lambda_0$のとき

$$a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a_0, a_1 を正規直交化する。変換後を b_1, b_2 とする。

$$b_1 = \frac{1}{|a_1|} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = a_2 - (a_2 \cdot b_1) b_1$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|u_2| = \sqrt{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

(1)
$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 10 - 4$$
$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$
$$= 0$$

よってAの固有値 λ は $\lambda = 1, 6$

$\lambda = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル u_1 は

$$u_1 = c_1 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

固有ベクトル u_2 は

$$u_2 = c_2 \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって、正規化されたAの固有ベクトルは

$$\pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(2) $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$P^t = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\therefore P^tAP = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(3) $^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = P^t\boldsymbol{x}\,P^tAP^tP\boldsymbol{x}$

$$= {}^t({}^tP\boldsymbol{x})\,P^tAP\,({}^tP\boldsymbol{x})$$

ここで，$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} := {}^tP\boldsymbol{x}$ とおけば

$$^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x} = (X \ \ Y)\,P^tAP\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= (X \ \ Y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= X^2 + 6Y^2$$

4

(1) $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5-\lambda \end{vmatrix} = 15 - 8\lambda + \lambda^2 - 3 = \lambda^2 - 8\lambda + 12 = (\lambda-2)(\lambda-6)$

$= 0$

$\therefore \lambda = 2, 6$

$\therefore \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 6$

$\lambda_1 = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 6$ のとき

$$\begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\therefore \ \mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

(2)

Uは正規直交化されたAの固有ベクトル $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ を用いて

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2)$$

とかける。このため、(1)の結果より

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Uは対称行列であるため、$U^{-1} = {}^tU$.

ここで、${}^tU\mathbf{p} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおけば、

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{p}A\mathbf{p} &= U\,{}^t\mathbf{p}\,{}^tUAU\,{}^tU\mathbf{p} \\ &= {}^t({}^tU\mathbf{p})\,{}^tUAU\,({}^tU\mathbf{p}) \\ &= (x' \ y')\,{}^tUAU\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

${}^tUAU$はAの対角行列であり

$${}^tUAU = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ {}^t\mathbf{p}A\mathbf{p} &= (x' \ y')\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ &= 2x'^2 + 6y'^2 \end{aligned}$$

よってCは

$${}^t\mathbf{p}A\mathbf{p} - 18 = 0$$

$$\therefore \ 2x'^2 + 6y'^2 = 18$$

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{3} = 1$$

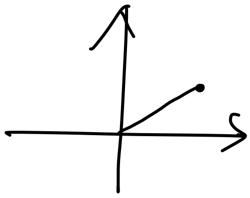
(3)

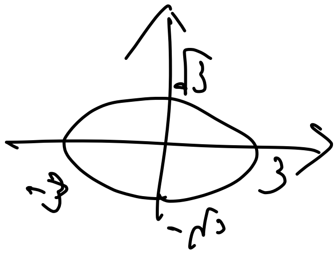
${}^tU \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とおいたならば $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$U = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix}$$





よって、$\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{3} = 1$ を原点まわりに30°回転したものがCである。

したがって、概形は以下のとおり。