S12-1

(1) $A\psi = \lambda\psi$

$(A-\lambda E)\psi = 0$

非自明な解をもつのは

$|A-\lambda E| = 0$ のとき

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 3-4\lambda+\lambda^2-8$$
$$= \lambda^2-4\lambda-5$$
$$= (\lambda-5)(\lambda+1) = 0$$

よって固有値は $\lambda = 5, -1$ の2つ.

$\lambda = 5$ のとき

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\psi = 0$$

$2 \quad -1 \quad = 0 \quad \frac{1}{2}$

$$\therefore \psi = t\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \neq 0)$$

$\lambda = -1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\psi = 0$$

$$\therefore \psi = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)$$

(2)
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda^2-\lambda^3-4-4+3+\lambda+4\lambda+4\lambda$$
$$= -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5$$
$$= -(\lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5)$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda^2+4\lambda-5)$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda+5)(\lambda-1)$$

1	1	3	-9	5
		1	4	-5
	1	4	-5	0

よって固有値は $\lambda = 1$ (重解), -5

$\lambda = 1$ (重解)のときの固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ v_1 = a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad ((a,b) \neq (0,0))$$

$\lambda = -5$ のときの固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1\cancel{2} & 2\cancel{4} \\ 0 & -1\cancel{2} & -2\cancel{4} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ v_2 = c\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (c \neq 0)$$

5(2)-2

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 & 2 \\ 2-\lambda & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(2-\lambda)\cdot(-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2(2-\lambda)^2 = 0$$

よって固有値は $\lambda = 0$ (重解), 2 (重解)

$\lambda = 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & b & & a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\therefore W(0) = \left\{ a\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & c & & \end{array} \end{array}$$

$$\therefore W(2) = \left\{ c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

S12-3

(1)
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)$$

固有値は $\lambda = 1, 2, 3$ の3つであり、対角化可能。

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ 1-\lambda & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1-\lambda)^2(1+\lambda)$

よって固有値は $\lambda = 1$ (重解), -1.

ここで $\lambda = 1$ のときの固有ベクトルは　　a b

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　　$x - y = 0$, $z = 0$

$\therefore\ v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

重解 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルのうち1次独立なものは1つだけ.

よって, Aは1次独立な固有ベクトルを3つ持たない.

したがって, Aは対角化不可能である.

S12-4

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$

よってAの固有値は $\lambda = 1$ (重解), 2

$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルは　　$-x + y + 2z = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore\ v_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$　　$x = 0$, $z = 0$

$\lambda = 2$ のとき

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$　$\therefore\ v_2 = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって、Aの固有ベクトル(1次独立なもの)は

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

の3つ。これにより対角化可能であり、

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

ここで

$$P=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad |P|=-1$$

$$P^{-1}=-\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&0&-1\\1&-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\2&-1&-2\end{pmatrix}$$

$$(P^{-1}AP)^n=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)$$
$$=P^{-1}A^nP$$

$$\therefore A^n=P(P^{-1}AP)^nP^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&2^n\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\1-2^n&2^n&-2+2^{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&0&0\\1-2^n&2^n&-2+2^{n+1}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

S12-5

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{y}(x) = A\boldsymbol{y}(x)$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ とおけば $(\boldsymbol{z} = P^{-1}\boldsymbol{y})$

$$\frac{d}{dx}P\boldsymbol{z} = AP\boldsymbol{z}$$

$$P\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = AP\boldsymbol{z}$$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}$$

あとは $\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ の関係を使ってもとに戻す

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad -(*)$$

$\boldsymbol{y} = P\boldsymbol{z}$ とおくと $(*)$ は

$$P\frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = AP\boldsymbol{z}$$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{z}}{dx} = P^{-1}AP\boldsymbol{z}$$

$P^{-1}AP$ を A の対角行列とする。これを計算

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0$$

よって A の固有値は $\lambda = 1, 2$ であることより A は対角化可能.

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{x} \\ C_2 e^{-x} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

以上にPを求める。

$\lambda = 1$ のときの固有ベクトルは

$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x - y = 0$

$\therefore u_1 = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (a \neq 0)$

$\lambda = 2$ のときは

$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $-2x + y = 0$

$\therefore u_2 = b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (b \neq 0)$

$\therefore P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$y = Pz$ を求めたので

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{x} \\ C_2e^{-x} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} C_1e^{x} + C_2e^{-x} \\ C_1e^{x} + 2C_2e^{-x} \end{pmatrix}$

$\therefore y_1 = C_1e^{x} + C_2e^{-x}$

$y_2 = C_1e^{x} + 2C_2e^{-x}$

E12-6

$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 =: f_A(\lambda)$

ケーリー・ハミルトンの定理より、

$f_A(A) = A^2 - 7A + 10E = O$

λ^n を $f_A(\lambda)$ で割ったあまりを求めると

$\lambda^n = \underbrace{(\lambda-2)(\lambda-5)}_{\text{2次で割った}} Q(\lambda) + \underbrace{a\lambda + b}_{\text{あまりは1次}}$

$\lambda = 2$ とすると

$2^n = 2a + b$

$\lambda = 5$ とすると

$5^n = 5a + b$

$\therefore a = \dfrac{5^n - 2^n}{3}$, $b = 2^n - 2a = \dfrac{3\cdot 2^n - 2\cdot 5^n + 2\cdot 2^n}{3} = \dfrac{5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n}{3}$

$$
\begin{aligned}
\therefore A^n &= aA + bE \\
&= \frac{5^n - 2^n}{3}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3\cdot 5^n - 3\cdot 2^n + 5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n & 5^n - 2^n \\ 2\cdot 5^n - 2\cdot 2^n & 4\cdot 5^n - 4\cdot 2^n + 5\cdot 2^n - 2\cdot 5^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2\cdot 2^n & 5^n - 2^n \\ 2\cdot 5^n - 2\cdot 2^n & 2\cdot 5^n + 2^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 2\cdot 5^n - 2^{n+1} & 2\cdot 5^n + 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

§12-6

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda - 1)(\lambda + 5) + 9 = \lambda^2 + 4\lambda - 5 + 9 \\
&= \lambda^2 + 4\lambda + 4 \\
&= (\lambda + 2)^2 \\
&:= f_A(\lambda)
\end{aligned}
$$

$$\lambda^n = f_A(\lambda)Q(\lambda) + a\lambda + b \quad -(*)$$

また、これを両辺微分

$$n\lambda^{n-1} = 2(\lambda + 2)Q(\lambda) + (\lambda + 2)^2 Q'(\lambda) + a \quad -(*)'$$

$(*)$, $(*)'$ にそれぞれ $\lambda = -2$ を代入すると

$$
\begin{cases} (-2)^n = -2a + b \\ n(-2)^{n-1} = a \end{cases}
$$

$\therefore a = n(-2)^{n-1}$, $b = (-2)^n + 2n(-2)^{n-1} = (2n-2)(-2)^{n-1}$

これらを $(*)$ に代入。

$$\lambda^n = f_A(\lambda)Q(\lambda) + n(-2)^{n-1}\lambda + (2n-2)(-2)^{n-1}$$

ここで、$\lambda = A$ とすると、ケーリー・ハミルトンの定理により $f_A(A) = O$

$$\therefore A^n = n(-2)^{n-1}A + (2n-2)(-2)^n E$$

$$= \begin{pmatrix} n(-2)^{n-1} & -3n(-2)^{n-1} \\ 3n(-2)^{n-1} & -5n(-2)^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2n-2)(-2)^{n-1} & 0 \\ 0 & (2n-2)(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (3n-2)(-2)^{n-1} & -3(-2)^{n-1} \\ 3n(-2)^{n-1} & (-3n-2)(-2)^{n-1} \end{pmatrix}$$

8(2-7)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & & 1 \\ & \ddots \diagup & \\ 1 & & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

(i) nが偶数のとき

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & & 1 \\ & \ddots & \\ \lambda & & 1-\lambda \end{vmatrix} \leftarrow n列$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & & 2-\lambda \\ & & \\ \lambda & & 1-\lambda \end{vmatrix} \leftarrow n列$$

$$= (-1)^n(2-\lambda) \begin{vmatrix} 0 & & 2-\lambda \\ & & \\ \lambda & & 1-\lambda \end{vmatrix} \leftarrow n-1列$$

6　3

$$= \underbrace{(-1)^{n+1}\cdots(-1)^{\frac{n}{2}+1}}_{nが偶数なら1} \cdot (2-\lambda)^{\frac{n}{2}} \begin{vmatrix} & \lambda \\ \lambda & \end{vmatrix} \leftarrow \frac{n}{2}次$$

$$= (2-\lambda)^{\frac{n}{2}} \begin{vmatrix} & \lambda \\ \lambda & \end{vmatrix} \leftarrow \frac{n}{2}次$$

(ii) nが奇数のとき

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & & & & 1 \\ & -\lambda & & 1 & \\ & \lambda & 1-\lambda & 1-\lambda & \\ \lambda & & & & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix}
0 & \ddots & & & & \\
 & & 0 & 1-\lambda & 2-\lambda & \cdots & 2-\lambda \\
\lambda & \cdots & \lambda & & 1-\lambda & \cdots & 1-\lambda
\end{vmatrix} \Big\} \frac{n-1}{2} \text{ 行}
$$

$$
= (-1)^{n+1} \cdots (-1)^{\frac{n-1}{2}+1} \cdot \lambda^{\frac{n-1}{2}}
\begin{vmatrix}
O & & 2-\lambda \\
 & 2-\lambda & \\
1-\lambda & & O
\end{vmatrix} \leftarrow \frac{n+1}{2} \text{ 次}
$$

(i), (ii) より,

n が偶数のとき固有値は $\lambda = 0, 2$.

n が奇数のとき固有値は $\lambda = 0, 1, 2$.

ただし, $n = 0$ のとき, 固有値は $\lambda = 1$.