平成１９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

(1) 空間上の直交座標 (x, y, z) を極座標 (r, θ, φ):

$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta\quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi < 2\pi)$

に変換するとき，そのヤコビアン（関数行列式）を計算しなさい．

(2) 広義積分

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2+z^2)}}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}}dx\,dy\,dz$$

について，$\alpha = \frac{1}{2}$ のときの値 $I(\frac{1}{2})$ を求めなさい．

(3) $I(\alpha)$ が収束する α の範囲を求めなさい．

(4) 広義積分

$$J(\alpha, \beta) = \iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\alpha}|\log(x^2+y^2+z^2)|^{\beta}}dx\,dy\,dz$$

が収束するような α, β の満たすべき条件を求めなさい． ただし，

$B = \{(x, y, z); x^2+y^2+z^2 < \frac{1}{4}\}$.

平成１９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題２

行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a^2 & 1 & a \end{pmatrix}$ について, 以下の設問に答えよ. ただし, a は実数とする.

(1) A の行列式の値を求めよ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ が1次独立となるときの a の条件を求めよ.

(3) A の固有値の一つが0であるとき, a の値を求めよ.
また, その場合のすべての固有値と固有ベクトルを求めよ.

(4) A の固有値の一つが1であるとき, A^n を求めよ. ただし, $a < 0$ とする.

平成１９年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

問題３

あるパーティで，n 人の参加者が１つずつプレゼントを持ち寄り，主催者がこれを集めて，帰りに n 人の参加者に１つずつランダムに配るものとする．このとき，自分が持ってきたプレゼントを持って帰る人が少なくとも１人出る確率を $Q(1,n)$ とする．参加者に１番から n 番までの番号をつける．i 番の参加者が自分のプレゼントを持ち帰るという事象を M_i とする．

(1) M_i が起こる確率を n の式で表せ．

(2) $i_1, i_2, \cdots, i_m$ をそれぞれ１以上 n 以下の相異なる m 個の整数とする．事象 $M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots, M_{i_m}$ が同時に起こる確率を n と m の式で表せ．

(3) 事象 E が起こる確率を $P(E)$ と書く．２つの事象 A_1 と A_2 が同時に起こる確率を $P(A_1 \cap A_2)$，A_1 と A_2 のうち少なくとも１つが起こる確率を $P(A_1 \cup A_2)$ と書く．このとき $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$ である．一般に $N(\geqq 1)$ 個の事象 $A_1, A_2, \cdots, A_N$ のうち少なくとも１つが起こる確率 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N)$ は

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N) = \sum_{l=1}^{N} (-1)^{l-1} S_l \qquad \text{(i)}$$

$$\text{ここで } S_l = \sum_{k_1<k_2<\cdots<k_l} P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \cdots \cap A_{k_l}) \qquad \text{(ii)}$$

である．ただし式 (ii) の右辺の $\sum$ は，N 個の整数 $1, 2, \cdots, N$ の中から相異なる l 個の整数 $k_1, k_2, \cdots, k_l$ を選ぶあらゆる組み合わせについて和をとることを意味する．特に $l = 1$ のときは $S_1 = \sum_{j=1}^{N} P(A_j)$ である．

式 (i) を数学的帰納法で示せ．

(4) $Q(1,n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \frac{1}{j!}$ を示せ．

(5) $\lim_{n\to\infty} Q(1,n)$ を求めよ．