2023年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題1

以下の設問に答えよ．

(1) a, b を正の実数とする．xy 平面上の2変数関数 $f(x, y)$ を次式で定義する．

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

このとき，$f(x, y)$ の全微分を求め，曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式を求めよ．

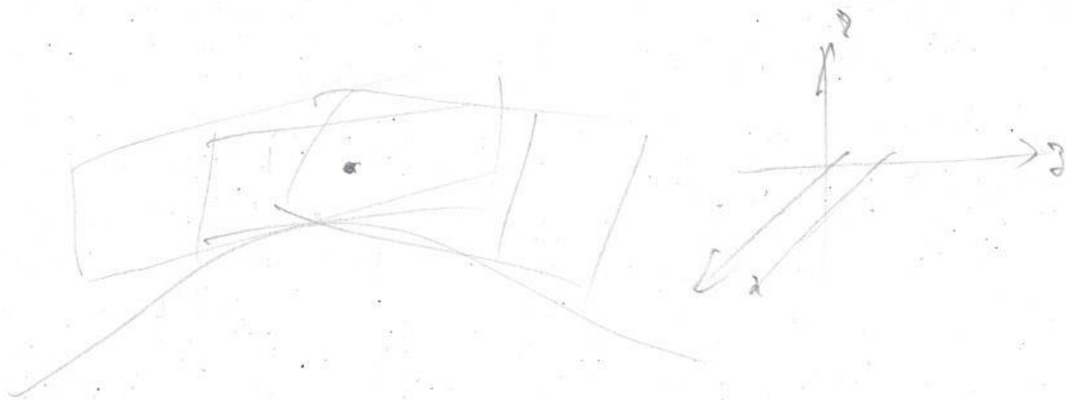
(2) t を実数とする．xyz 空間内の3変数関数 $g(x, y, z)$ を次式で定義する．

$$g(x, y, z) = xe^{xy} - z$$

このとき，曲面 $g(x, y, z) = 0$ 上の点 $(t, 1, te^t)$ における接平面の方程式を求めよ．

(3) 設問(2)で求めた接平面は t の値によらずある定点 P を通る．定点 P の座標を求めよ．

$\left(e^t + (1+t)e^t\right)x + \left(2te^t + t^2e^t\right)\cdot z - 4te^t - 2t^2e^t$



1.

(1) $f_x(x, y) = \dfrac{2x}{a^2}$

$f_y(x, y) = \dfrac{2y}{b^2}$

$\therefore df(x, y) = \dfrac{2x}{a^2}dx + \dfrac{2y}{b^2}dy$

$\cancel{\dfrac{2y}{b^2}}y' = -\dfrac{2x}{a^2}$

$y' = -\dfrac{2x}{a^2}\cdot\dfrac{b^2}{2y} = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y}$

次に、

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

$y(x)$としてxで微分.

$\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y}{b^2}y' = 0$

$y_0 + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0^2}{y_0} = C$

(x_0, y_0)において

$y' = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$

これを使って、接線の方程式は定数cを使って

$y = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}x + C$

$x = x_0,\ y = y_0$とすると、

$C = y_0 + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0^2}{y_0^2}$

したがって、接線の方程式は

$y = -\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}x + y_0 + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0^2}{y_0^2}$

(2) $g(x, y, z) = xe^{xy} - z = 0$

$\therefore z(x, y) = xe^{xy}$

$z_x(x, y) = e^{xy} + xye^{xy} = (1 + xy)e^{xy}$

$z_y(x, y) = x^2e^{xy}$

$z_x(t, 1) = (1 + t)e^t$

$z_y(t, 1) = t^2e^t$

$\cancel{te^t} + t^2e^t + t^2e^t - \cancel{te^t} + d = 0$

$d = -2t^2e^t$

$\therefore (1+t)e^t\cdot x + t^2e^t\cdot y - z + d = 0$

$(x, y, z) = (t, 1, te^t)$を代入.

$(1+t)e^t\cdot t + t^2e^t - te^t + d = 0$

$\therefore d = -2t^2e^t$

したがって、接平面の方程式は

$(1+t)e^t\cdot x + t^2e^t\cdot y - z - 2t^2e^t = 0$

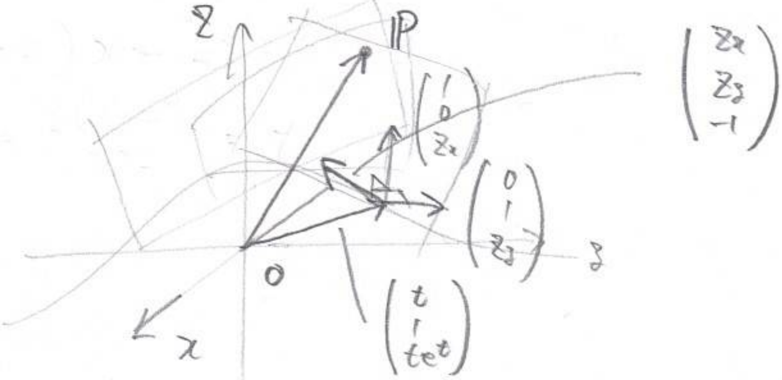
(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z_x \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ z_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (1+t)e^t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t^2 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ te^t \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ (1+t)e^t \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ t^2 e^t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - t \\ k_2 - 1 \\ k_2 t^2 \end{pmatrix}$$

定点Pの座標を(p_1, p_2, p_3)とする。これを$\mathbb{p} = (p_1 \ p_2 \ p_3)^T$とする.



tを変した場合でも，Pと接平面の距離が常に0となるようなPを探す.
曲面上の点をQとし，$\mathbb{q} = (t \ 1 \ te^t)$とすると，$(t, 1)$での接平面の法線ベクトルが$(z_x(t,1) \ z_y(t,1) \ -1)^T$であることから，Pと接平面の距離$l$は

$$l = (\mathbb{p} - \mathbb{q}) \cdot \begin{pmatrix} z_x(t,1) \\ z_y(t,1) \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (p_1 - t \quad p_2 - 1 \quad p_3 - te^t) \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ t^2 e^t \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= (p_1 - t)(1+t)e^t + (p_2 - 1)t^2 e^t - (p_3 - te^t)$$

7

２０２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

$v\cdot x - v\cdot f(x)$

$\frac{4}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

［数学－２］

問題２

本問では，成分を実数とする実ベクトルおよび実行列を扱う．3 次の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{b}$ で表す．ここで，$\boldsymbol{c}^\top$ はベクトル $\boldsymbol{c}$ の転置を表す．

ベクトル $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^\top$ を考える．ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)^\top$ に対して写像 f を

$$f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}$$

により定める．以下の設問に答えよ．

$f(x+y)=(v\cdot(x+y))v$
$=(v\cdot x+v\cdot y)v$

(1) ベクトル $\boldsymbol{e}_1=(1\ \ 0\ \ 0)^\top$ に対して $f(\boldsymbol{e}_1)$ を求めよ．

(2) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{x}-f(\boldsymbol{x})$ が直交することを証明せよ．

(3) 写像 f は，ある行列 P を用いて $f(\boldsymbol{x})=P\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 P を求めよ．

(4) 設問 (3) で定義された P について，等式 $P^2=P$ が成り立つことを示せ．

(5) 設問 (3) で定義された P の 0 でない固有値とその固有値に対応する固有ベクトルを求めよ．

$x-f(x)=x_1e_1-x_1f(e_1)+x_2e_2-x_2f(e_2)+x_3e_3-x_3f(e_3)$

$=\begin{pmatrix}e_1-f(e_1) & e_2-f(e_2) & e_3-f(e_3)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

$v\cdot(x-f(x))=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\\e_3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

2.

(1) $f(\mathbf{e}_1) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{u}$

$$= \left(\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)\mathbf{u}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

(2) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}$

$\mathbf{x} - f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}$

これとuとの内積をとると

$$\mathbf{u}\cdot\left(\mathbf{x} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{u}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\underbrace{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)}_{=1}$$

$$= 0$$

したがって，任意のxに対してuとx−f(x)は直交．

(3) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{x})\mathbf{u}$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\mathbf{u}$$

$$= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_3\\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_3\\ \frac{1}{2\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}x_2 + \frac{1}{2}x_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

$$\therefore P = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

(4)

$$P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore P^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1+1+2 & 1+1+2 & \sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\ 1+1+2 & 1+1+2 & \sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2} & \sqrt{2}+\sqrt{2}+2\sqrt{2} & 2+2+4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4\sqrt{2} \\ 4 & 4 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = P$$

(5)

$$|P-\lambda E| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}-\lambda & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \begin{vmatrix} 1-4\lambda & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1-4\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 2-4\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-4\lambda & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \sqrt{2} \begin{vmatrix} 2+\sqrt{2}-4\lambda & 2+\sqrt{2}-4\lambda & 2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \\ 1 & 1-4\lambda & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \sqrt{2} \begin{vmatrix} 2+\sqrt{2}-4\lambda & 0 & 2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \\ 1 & -4\lambda & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \sqrt{2} \cdot (-4\lambda) \begin{vmatrix} 2+\sqrt{2}-4\lambda & 2+\sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{16}\lambda \begin{vmatrix} 2-4\lambda & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\sqrt{2}\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{16}\lambda \left(\cancel{2\sqrt{2}} - 4\sqrt{2}\lambda - 4\sqrt{2}\lambda + 8\sqrt{2}\lambda^2 - \cancel{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{16}\lambda^2\left(-8\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\lambda\right)$$

$$= -\lambda^2(-1+\lambda)$$

$$= 0$$

よって, 0でない固有値は $\lambda = 1$. これについて,

$$P - \lambda E = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & -8 & 4\sqrt{2} \\ 0 & 4\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & -4\sqrt{2} & 8 \\ 0 & 4\sqrt{2} & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ & 0 & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -3\sqrt{2} & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

したがって, $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトル u_1 は

$$u_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad (c_1 = \text{const.})$$

8

２０２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

n回目以上で失敗は限定

［数学－３］

問題3

$0 < p < 1$とする．成功確率pの試行を独立に繰り返し，初めて失敗したときに終了する．初めて失敗するまでに成功した試行の回数を表す確率変数をXとすると，Xの確率分布は次式で与えられる．

$$P(X=k) = p^k(1-p), \quad k=0,1,2,\ldots$$

以下の設問に答えよ．

(1) 期待値 $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k)$ を求めよ．

(2) n, mを任意の非負整数とする．事象$X \geqq n$が起こったとき事象$n \leqq X \leqq n+m$が起こる条件付き確率について，次の等式を証明せよ．

$$P(n \leqq X \leqq n+m \mid X \geqq n) = P(0 \leqq X \leqq m) \qquad (*)$$

(3) 設問 (2) は $(*)$ の左辺の条件付き確率がnに依存しないことを示す．このことが成り立つ理由を $(*)$ を用いずに文章で説明せよ．

(4) $\mu > 0$とする．数列$\{q_k\}$に関する次の条件を考える．

$$q_k > 0 \ \ (k=0,1,2,\ldots), \quad \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 1, \quad \sum_{k=0}^{\infty} kq_k = \mu \qquad (**)$$

$(**)$を満たす数列$\{q_k\}$について，$H = -\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q_k$と定義する．$\{q_k\}$を動かすとき，$H$の最大値を求めたい．

(a) $(**)$を満たす任意の数列$\{q_k\}$, $\{q'_k\}$について次の不等式が成立することを証明せよ．

$$-\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q_k \leqq -\sum_{k=0}^{\infty} q_k \log q'_k$$

必要ならば，不等式 $\log x \leqq x-1$ $(x>0)$ を証明せずに用いてよい．

(b) Hの最大値および最大値を与える$\{q_k\}$を求めよ．

3.

(1) $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k P(X=k)$

$= \sum_{k=0}^{\infty} k p^k (1-p)$

$= (1-p) \sum_{k=0}^{\infty} k p^k$

$= \lim_{n\to\infty} \left(p \cdot \frac{1-p^n}{1-p} + n p^{n+1} \right)$

$= \frac{p}{1-p}$ $\because$ $0 < p < 1$

$$\begin{aligned} S_n &= 0 + p + 2p^2 + 3p^3 + \cdots + np^n \\ -)\ pS_n &= \quad 0 + p^2 + 2p^3 + \cdots + (n-1)p^n + np^{n+1} \\ \hline (1-p)S_n &= p + p^2 + p^3 + \cdots + p^n + np^{n+1} \\ &= p \cdot \frac{1-p^n}{1-p} + np^{n+1} \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} np^n \leq \lim_{n\to\infty} n^2 p^n$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{p^{-n}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{-np^{-n-1}}$

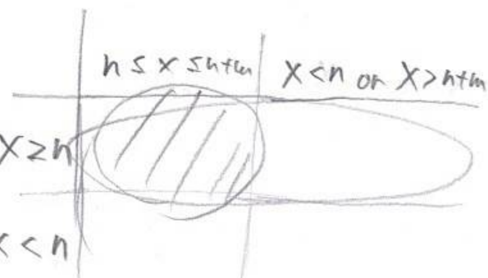
$= \lim_{n\to\infty} -2p^{n+1}$

$= 0$

(2) $P(n \leq X \leq n+m \mid X \geq n)$

$= \frac{P((n \leq X \leq n+m) \cap (X \geq n))}{P(X \geq n)}$

$= \frac{P(n \leq X \leq n+m)}{P(X \geq n)}$



ここで、

$P(n \leq X \leq n+m) = \sum_{k=0}^{n+m} p^k(1-p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p)$

$= (1-p) \cdot \frac{1-p^{n+m+1}}{1-p} - (1-p) \cdot \frac{1-p^n}{1-p}$

$= 1 - p^{n+m+1} - 1 + p^n$

$= p^n - p^{n+m+1}$

$$\begin{aligned} & 1 + p + \cdots + p^{n+m} \\ -)\ & \quad\ \ p + \cdots + p^{n+m} + p^{n+m+1} \\ \hline & 1 \end{aligned}$$

$P(X \geq n) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k(1-p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k(1-p)$

$= \cancel{(1-p)} \cdot \frac{1}{\cancel{1-p}} - \cancel{(1-p)} \cdot \frac{1-p^n}{\cancel{1-p}}$

$= p^n$

$\therefore P(n \leq X \leq n+m \mid X \geq n) = \frac{p^n - p^{n+m+1}}{p^n} = 1 - p^{m+1}$

$= P(0 \leq X \leq m)$

(3) ?

(4)