[I]

(1) $y' = \cos(a\sin^{-1}x) \cdot \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'' = -\sin(a\sin^{-1}x) \cdot \dfrac{a^2}{1-x^2} + \cos(a\sin^{-1}x) \cdot \dfrac{ax}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\therefore (1-x^2)y'' - xy' + a^2y$

$= -a^2\sin(a\sin^{-1}x) + \cos(a\sin^{-1}x) \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{1-x^2}}$

$\quad - \cos(a\sin^{-1}x) \cdot \dfrac{ax}{\sqrt{1-x^2}} + a^2\sin(a\sin^{-1}x)$

$= 0$

(2)

1 2 3 4
3 5 7
1 4 9 16

(1)の式を1階微分すると

$-2xy'' + (1-x^2)y''' - y' - xy'' + a^2y' = 0$

$\therefore (1-x^2)y''' - 3xy'' + (a^2-1)y' = 0$

よって(1)の式の2階微分は

$-2xy''' + (1-x^2)y^{(4)} - 3y'' - 3xy''' + (a^2-1)y'' = 0$

$\therefore (1-x^2)y^{(4)} - 5xy^{(3)} + (a^2-4)y^{(2)} = 0$

よって(1)の式のn階微分は

$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} + (a^2-n^2)y^{(n)} = 0$

これに$x=0$を代入すると

$y^{(n+2)}(0) + (a^2-n^2)y^{(n)}(0) = 0$

$\therefore y^{(n+2)}(0) = (n^2-a^2)y^{(n)}(0)$

$y^{(0)}(0) = 0$ より $y^{(2)} = 0$. よって,

$y^{(2k)}(0) = 0$

2k-1 2k-3

$y^{(1)}(0) = a$ より $y^{(3)} = (1^2-a^2)\cdot a$. よって,

$y^{(2k-1)}(0) = ((2k-3)^2-a^2)\cdots(3^2-a^2)(1^2-a^2)a$

[2]

(1)

マクローリンの定理より

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$$

(2)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} R_n = e^{\theta x}\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}$ より、$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ を示す。

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{n}\cdot\frac{|x|}{n-1}\cdots\frac{|x|}{1}$$

0になる（これをもとに考える）

今回、$n\to\infty$ とするので、$|x|$ がいかなる値でも $n>|x|$ である。

$|x|<N<n$ となる自然数 N について

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{n-1}\cdot\frac{|x|}{n}$$

$$< \underbrace{\frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{N-1}}_{N-1\text{回かけ算}}\cdot\underbrace{\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}}_{n-(N-1)\text{回かけ算}}$$

が成り立つ。

$$\frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}$$

$$= \frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-(N-1)}$$

$$\to 0 \quad (n\to\infty)$$

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| < \frac{|x|}{1}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\left(\frac{|x|}{N}\right)^{n-(N-1)}$$ なので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

(3) $e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$

よって，明らかに $2 < e$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right)$$
$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{2}{2-1}$$
$$= 2$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots \frac{1}{(n-1)!} + \cdots$$
$$< 1 + 1 + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-2}} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$
$$= 3$$

よって，$e < 3$.

したがって，$2 < e < 3$.

$\boxed{3}$

$F(t) = f(t) - g(t)$ とすると，平均値の定理より

$$\frac{F(1) - F(0)}{1-0} = F'(c) \quad \cdots (*)$$

となる $0 < c < 1$ が存在する.

$$F(1) = f(1) - g(1) = 0$$
$$F(0) = f(0) - g(0) = 0$$

より，$(*)$ について

$$(\text{左辺}) = \frac{0-0}{1} = 0$$

よって，

$$F'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$$

$\therefore f'(c) = g'(c)$

となる $0 < c < 1$ が存在する.

そのため，$t = c$ における速度ベクトル $\frac{dx(c)}{dt}$ は

$$\frac{dx(c)}{dt} = (f'(c), g'(c))$$
$$= (f'(c), f'(c))$$
$$= f'(c)(1, 1)$$

$$= f'(c)\,\overrightarrow{OA}$$

したがって，経路の途中で速度ベクトルは $\overrightarrow{OA}$ の定数倍になる．

$\boxed{4}$

(1)
$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$> 0$$

∴ $f(x)$ は単調増加

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x^2}{x^2+1}\right)}} \cdot f'(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{x^2+1}}} \cdot \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

$$> 0$$

∴ $g(x)$ は単調増加

(2)
$$h'(x) = -\sin\left(\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) \cdot g'(x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1}$$

(3)
$$F(0) = \cos\left(\sin^{-1}\frac{0}{\sqrt{0+1}}\right) - \frac{1}{\sqrt{0+1}}$$

$$= \cos 0 - 1$$

$$= 0$$

$$F'(x) = h'(x) + \frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)}$$

$$= 0$$

よって，$F(x)$は全てのxで増減しない．

したがって，$F(x)$は恒等的に0である．