令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

2 変数関数 $f(x,y)$ を

$$f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$= \theta(x, y)$

で定める．ここで，関数 $\theta = \tan^{-1} s$ は，関数

$$s = \tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

の逆関数である．2 変数関数 $g(x,y)$ を

$$g(x,y) = h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)}$$

で定める．ここで，関数 $h(r)$ は区間 $(0,\infty)$ を定義域とし，区間 $(0,\infty)$ において 1 回微分可能とする．以下の問に答えよ．

(1) 2 変数関数 $p(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ の x についての偏導関数 $p_x(x,y)$ を求めよ．

(2) 2 変数関数 $q(x,y) = e^{f(x,y)}$ の x についての偏導関数 $q_x(x,y)$ と y についての偏導関数 $q_y(x,y)$ を求めよ．

(3) $g(x,y)$ の定義域において，等式

$$-yg_x(x,y) + xg_y(x,y) - h'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)e^{f(x,y)} = 0$$

が成り立っているとする．ここで，$g_x(x,y)$ は $g(x,y)$ の x についての偏導関数，$g_y(x,y)$ は $g(x,y)$ の y についての偏導関数，$h'(r)$ は $h(r)$ の導関数を表す．$h(1) = 1$ を満たす $h(r)$ を求めよ．

(1) $p_x(x,y) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $p_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(2) $q_x(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot f_x(x,y)$

$q_y(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot f_y(x,y)$

$f_x(x,y) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\dfrac{y}{x^2}\right) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$f_y(x,y) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

$\therefore q_x(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

$q_y(x,y) = e^{f(x,y)} \cdot \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(3) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とする。 $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$g(x(r,\theta), y(r,\theta)) = h(r) e^{f(x(r,\theta), y(r,\theta))}$ $r = \sqrt{x^2+y^2}$

$f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan^{-1}(\tan\theta) = \theta(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$\therefore g(x(r,\theta), y(r,\theta)) = h(r(x,y)) e^{\theta(x,y)}$

$g_x = h_x(r(x,y)) e^{\theta(x,y)} + h(r(x,y)) e^{\theta(x,y)} \cdot \theta_x(x,y)$

$= h'(r) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\theta(x,y)} + h(r) e^{\theta(x,y)} \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}$

$= h'(r) \cdot \frac{\cancel{r}\cos\theta}{\cancel{r}} e^{\theta} + h(r) e^{\theta} \cdot \frac{-\cancel{r}\sin\theta}{r^{\cancel{2}}}$

$g_y = h_y(r(x,y)) e^{\theta(x,y)} + h(r(x,y)) e^{\theta(x,y)} \cdot \theta_y(x,y)$

$= h'(r) \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\theta(x,y)} + h(r) e^{\theta(x,y)} \cdot \frac{x}{x^2+y^2}$

$= h'(r) \cdot \frac{\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r}} e^{\theta} + h(r) e^{\theta} \cdot \frac{\cancel{r}\cos\theta}{r^{\cancel{2}}}$

よって、与式の左辺は $= \theta$

$-\underbrace{y}_{=r\sin\theta} g_x(x,y) + \underbrace{x}_{=r\cos\theta} g_y(x,y) - h'(\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{=r}) e^{f(x,y)}$

$= -h'(r) r\sin\theta\cos\theta e^{\theta} + h(r)e^{\theta} \cdot \sin^2\theta + h'(r) r\sin\theta\cos\theta e^{\theta} + h(r)e^{\theta} \cdot \cos^2\theta - h'(r) e^{\theta}$

$= h(r)e^{\theta} - h'(r) e^{\theta}$

$\therefore h(r)e^{\theta} - h'(r)e^{\theta} = 0$

$h'(r) = h(r)$

$\therefore \int \frac{dh}{h(r)} = \int dr$

$\therefore \ln|h(r)| = r + C$

$h(r) = Ae^{r}$

$h(1) = 1$ より

$1 = Ae$

$A = e^{-1}$

$\therefore h(r) = e^{r-1}$

令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

以下の問に答えよ．

(1) 実数を成分に持つ対称行列 $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{pmatrix}$ について，以下の小問に答えよ．

(1-a) A の固有値をすべて求めよ．

(1-b) A を直交行列によって対角化せよ．

(2) 実数を成分に持つ３次の対称行列 B が，３つの相異なる固有値を持つとする．B の異なる固有値に対応する固有ベクトルは，互いに直交することを示せ．

$B\psi_1=\lambda_1\psi_1$
$B\psi_2=\lambda_2\psi_2$
$B\psi_3=\lambda_3\psi_3$

${}^t\psi_1{}^tB=\lambda_1{}^t\psi_1$
${}^t\psi_1B=\lambda_1{}^t\psi_1$
${}^t\psi_1B\psi_2=\lambda_1{}^t\psi_1\psi_2$
${}^t\psi_1\lambda_2\psi_2=\lambda_1{}^t\psi_1\psi_2$
$\lambda_2{}^t\psi_1\psi_2=\lambda_1$

(1)

(1-a)

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&a&a\\a&1-\lambda&a\\a&a&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+2a-\lambda&a&a\\1+2a-\lambda&1-\lambda&a\\1+2a-\lambda&a&1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1+2a-\lambda)\begin{vmatrix}1-a-\lambda&0\\0&1-a-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(1+2a-\lambda)(1-a-\lambda)^2$$

$\therefore\ \lambda=1+2a,\ 1-a$（重解）

(1-b)

$\lambda=1+2a$ について，
$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}-2a&a&a\\a&-2a&a\\a&a&-2a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&a&-2a\\0&-3a&3a\\0&3a&-3a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&a&-2a\\0&a&-a\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&0&-a\\0&a&-a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \psi_1=c_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\quad(c_1\neq0)$

$\lambda=1-a$ について，
$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}a&a&a\\a&a&a\\a&a&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a&a&a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\therefore\ \psi_2=c_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\quad((c_2,c_3)\neq(0,0))$

Aが実対称行列なので，$u_1 \perp u_2$．3つの1次独立な固有ベクトル $\left\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}_{a_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}_{a_3} \right\}$ から正規直交基底をつくる．

$\lambda=1+2a$ $\{ b_1 \quad b_2 \quad b_3 \}$ $\lambda = 1-a$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$u_3 = a_3 - (a_3 \cdot b_2)\, b_2 = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot 1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+1+4}}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$\therefore P = (b_1\ b_2\ b_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

(2)

3つの固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$、それに対応する固有ベクトルを u_1, u_2, u_3 とする．
それぞれについて，

$$\begin{cases} Bu_1 = \lambda_1 u_1 & \text{—①} \\ Bu_2 = \lambda_2 u_2 & \text{—②} \\ Bu_3 = \lambda_3 u_3 & \text{—③} \end{cases}$$

が成り立つ．

(i) $u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow (u_1 \cdot u_2) = 0$ の証明

$Bu_1 = \lambda_1 u_1$

${}^t(Bu_1) = {}^t(\lambda_1 u_1)$

${}^t(Bu_1)u_2 = {}^t(\lambda_1 u_1)u_2$

②より

$(左辺) = {}^t(Bu_1)u_2 = {}^tu_1\,{}^tB\,u_2 = {}^tu_1(Bu_2) = {}^tu_1\lambda_2 u_2 = \lambda_2(u_1 \cdot u_2)$

$(右辺) = {}^t(\lambda_1 u_1)u_2 = \lambda_1\,{}^tu_1 u_2 = \lambda_1(u_1 \cdot u_2)$

$\therefore \lambda_2(u_1 \cdot u_2) = \lambda_1(u_1 \cdot u_2)$

$\therefore (\lambda_2 - \lambda_1)(u_1 \cdot u_2) = 0$

$\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ より

$u_1 \cdot u_2 = 0$

$\therefore u_1 \perp u_2$

(ii) $u_2 \perp u_3 \Leftrightarrow (u_2 \cdot u_3) = 0$ の証明

(i)において $u_1 \to u_2$, $\lambda_1 \to \lambda_2$, $u_2 \to u_3$, $\lambda_2 \to \lambda_3$

とすると，$u_2 \cdot u_3 = 0$ となり $u_2 \perp u_3$

(iii) $u_3 \perp u_1 \Leftrightarrow u_3 \cdot u_1 = 0$ の証明

(i)において，$u_2 \to u_3$, $\lambda_2 \to \lambda_3$ とすると，

$u_1 \cdot u_3 = u_3 \cdot u_1 = 0$ となり，

$u_3 \perp u_1$

(i), (ii), (iii) より，Bの異なる固有値に対応する固有ベクトルは互いに直交する．

令和３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

RRRRRR wwww

問題３

R×6　w×4

$\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot4\cdot10} = \frac{1}{3\cdot2} = \frac{1}{6}$

赤玉６個，白玉４個の合計 10 個の玉が入っている袋がある．まず１回目の試行として，袋から同時に３個の玉を取り出す．取り出した玉は袋に戻さず，さらに２回目の試行として，袋から同時に３個の玉を取り出す．このとき，以下の問に答えよ．ただし，各試行において同時に３個の玉を取り出す取り出し方は同様に確からしいものとする．

(1)　１回目の試行で赤玉３個が取り出される確率を求めよ．

(2)　１回目の試行で赤玉２個，白玉１個が取り出される確率を求めよ．

(3)　１回目の試行で取り出された赤玉の数と２回目の試行で取り出された赤玉の数が同じになり，かつ１回目の試行で取り出された白玉の数と２回目の試行で取り出された白玉の数が同じになる確率を求めよ．

${}_{10}C_4 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot3\cdot7$

${}_6C_2\cdot{}_4C_1 = \frac{6\cdot5}{2}\cdot4 = 2\cdot6\cdot5$

(1) $\frac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{10\cdot9\cdot8} = \frac{1}{6}$

(2) $\frac{{}_6C_2\cdot{}_4C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{\frac{6\cdot5}{2}\cdot4}{3\cdot4\cdot10} = \frac{6\cdot5\cdot2}{3\cdot4\cdot10} = \frac{1}{2}$

(3)

１回目，２回目のRの数が同じかつ１回目，２回目のwの数が同じになるのは

(i) (w, w, w) → (w, w, w)

(ii) (R, w, w) → (R, w, w)

(iii) (R, R, w) → (R, R, w)

(iv) (R, R, R) → (R, R, R)

${}_{10}C_3 = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2} = 3\cdot4\cdot10$

${}_7C_3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2} = 7\cdot5$

(i)〜(iv) の４パターン．それぞれの確率 p_1〜p_4について，

${}_4C_2 = \frac{4\cdot3}{2} = 2\cdot3$

(i) こんなことありえないので $p_1 = 0$

(ii) $p_2 = \frac{{}_6C_1\cdot{}_4C_2}{{}_{10}C_3}\cdot\frac{{}_5C_1\cdot{}_2C_2}{{}_7C_3}$

$= \frac{6\cdot2\cdot3\cdot5\cdot1}{3\cdot4\cdot10\cdot7\cdot5} = \frac{3}{70}$

$\frac{6\cdot1\cdot2\cdot5}{3\cdot4\cdot10\cdot7\cdot5} = \frac{3}{70}$

(iii) $P_3 = \dfrac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1}{{}_{10}C_3} \cdot \dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_3}$

$= \dfrac{\cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{8} \cdot \cancel{4} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cancel{5}} = \dfrac{18}{70}$

$\dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2}$ $\quad \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \dfrac{18}{70}$

(iv) $P_4 = \dfrac{{}_6C_3}{{}_{10}C_3} \cdot \dfrac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \dfrac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 1}{3 \cdot \cancel{4} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cancel{5}} = \dfrac{1}{3 \cdot 70}$

$\begin{array}{r} 18 \\ \times 3 \\ \hline 54 \end{array}$

よって，求める確率は

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 0 + \dfrac{3}{70} + \dfrac{18}{70} + \dfrac{1}{3 \cdot 70}$

$= \dfrac{9 + 54 + 1}{3 \cdot 70}$

$= \dfrac{64}{3 \cdot 70}$

$= \dfrac{64}{210}$

$= \dfrac{32}{105}$

$\begin{array}{r} 105 \\ 2 \overline{)210} \\ 210 \\ \hline 0 \end{array}$

$\dfrac{\cancel{6} \cdot 5}{2} = 3 \cdot 5$

$\dfrac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 5 \cdot 4$

$\dfrac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3}$

$= \dfrac{\cancel{8} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{\cancel{8} \cdot \cancel{4} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cancel{5}}$

$= \dfrac{18}{70}$

$\dfrac{{}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{{}_{10}C_3 \cdot {}_7C_3} = \dfrac{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot 1}{3 \cdot \cancel{4} \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cancel{5}} = \dfrac{1}{3 \cdot 70}$