平成２８年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題１

$\mathbb{R}^2$ は 2 次元実数列ベクトルの集合とする．$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ の大きさを $|\mathbf{x}|$ とし，実数を成分とする 2 次の正方行列 B に対して

$$\|B\| = \max_{|\mathbf{x}|=1} |B\mathbf{x}|$$

$\mathbf{x}$どうしの内積が1のとき，
Bで写像されたB$\mathbf{x}$の大きさ最大

と定める．$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ のとき，$\|B\|$ の値を求めよ．また，その値を与える $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ をすべて求めよ．

半径1の円？

$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$,　$x^2+y^2=1 \iff (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})=1$

$B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y \end{pmatrix}$

$4x^2+12xy+9y^2+4y^2$

$|B\mathbf{x}| = \sqrt{(B\mathbf{x}\cdot B\mathbf{x})} = \sqrt{(2x+3y)^2+(2y^2)}$

$= \sqrt{4x^2+12xy+13y^2}$

ここで，

$f(x,y) := \sqrt{4x^2+12xy+13y^2}$

$g(x,y) := x^2+y^2=1$

とする．

$\begin{cases} 4x+8y=0 \\ 6x+13y=0 \end{cases}$

$f_x = \dfrac{8x+12y}{2\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}} = \dfrac{4x+6y}{\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}}$

$f_y = \dfrac{12x+2\cdot 13y}{2\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}} = \dfrac{6x+13y}{\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}}$

$g_x = 2x$

$g_y = 2y$

$f(x,y)$ が条件 $g(x,y)$ のもとで (x,y) で極値をとるとすると，ラグランジュの乗数法より

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = \dfrac{4x+6y}{\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}} - 2\lambda x = 0 & \text{—①} \\ f_y - \lambda g_y = \dfrac{6x+13y}{\sqrt{4x^2+12xy+13y^2}} - 2\lambda y = 0 & \text{—②} \\ g(x,y) = x^2+y^2 = 1 & \text{—③} \end{cases}$$

を満たす λ が存在．

①より

$$\frac{(4x+6y)^2}{4x^2+12xy+13y^2} = (2\lambda x)^2$$

$$\therefore\ 16x^2+48xy+36y^2 = 4\lambda^2x^2(4x^2+12xy+13y^2)$$

$$\therefore\ 4x^2+12xy+9y^2 = \lambda^2x^2(4x^2+12xy+13y^2) \quad \text{—①'}$$

②より

$$36x^2+2\cdot6\cdot13xy+13^2y^2 = 4\lambda^2y^2(4x^2+12xy+13y^2)$$

$$\therefore\ \lambda^2(4x^2+12xy+13y^2) = \frac{36x^2+2\cdot6\cdot13xy+13^2y^2}{4y^2}$$

①'に代入

$$4x^2+12xy+9y^2 = x^2\cdot\frac{36x^2+2\cdot6\cdot13xy+13^2y^2}{4y^2}$$

$$\therefore\ 16x^2y^2+48xy^3+36y^4 = 36x^4+2\cdot6\cdot13x^3y+13^2x^2y^2$$

$$\therefore\ 3x^2y^2+48xy^3+36y^4-156x^3y-36x^4=0$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \times 12 \\ \hline 26 \\ 13 \\ \hline 156 \\ -36 \\ \hline 120 \end{array}$$

次のページです．

$f(x,y) := 4x^2 + 12xy + 13y^2$

$g(x,y) := x^2 + y^2 = 1$

$f_x = 8x + 12y$

$f_y = 12x + 26y$

$g_x = 2x$

$g_y = 2y$

ラグランジュの乗数法より，$f(x,y)$ が $g(x,y)$ のもとで (x,y) において極値をとるとき，

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 8x + 12y - 2\lambda x = 0 & \cdots ① \\ f_y - \lambda g_y = 12x + 26y - 2\lambda y = 0 & \cdots ② \\ g(x,y) = x^2 + y^2 = 1 & \cdots ③ \end{cases}$$

を満たす λ が存在．

①より

$$2\lambda = 8 + 12\frac{y}{x}$$

②に代入すると

$$12x + 26y - \left(8 + 12\frac{y}{x}\right)y = 0$$

$$\therefore\ 12x^2 + \underbrace{26xy - 8xy}_{18xy} - 12y^2 = 0$$

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0 \quad \cdots ④$$

③より $y^2 = 1 - x^2$，$y = \pm\sqrt{1-x^2}$．$y = +\sqrt{1-x^2}$ のとき．

④に代入．

$$2x^2 \pm 3x\sqrt{1-x^2} - 2(1-x^2) = 0$$

$$\therefore\ 4x^2 - 2 = \mp 3x\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore\ 16x^4 - 16x^2 + 4 = 9x^2(1-x^2) = 9x^2 - 9x^4$$

$$\therefore\ 25x^4 - 25x^2 + 4 = 0$$

$$\therefore\ x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{50} = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{50} = \frac{\overset{25}{\cancel{50}} \pm 15}{50}$$

$$= \frac{65}{50},\ \frac{35}{50} = \frac{13}{10},\ \frac{7}{10} = \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}$$

$25 \times 25 = 625$

$25 \times 16 = 400$

$65 \div 5 = 13$

$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{13}{10}}, \pm\sqrt{\frac{7}{10}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{13}{10}}$ のとき、y は実数でないので不適。$x = \pm\sqrt{\frac{7}{10}}$ のとき

$y = \pm\sqrt{1 - \frac{7}{10}} = \pm\sqrt{\frac{3}{10}}$

よって、$f(x, y)$ のもとでの $f(x, y)$ の極値のとり方は

$\left(\pm\sqrt{\frac{7}{10}}, \pm\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$

ただし、

$\left(\sqrt{\frac{7}{10}}, -\sqrt{\frac{3}{10}}\right)$ と $\left(-\sqrt{\frac{7}{10}}, \sqrt{\frac{3}{10}}\right)$

は最大値でない。

したがって、$\|B\|$ が最大値をとるのは

$x = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{7}{10}} \\ \sqrt{\frac{3}{10}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{7}{10}} \\ -\sqrt{\frac{3}{10}} \end{pmatrix}$

であり、このとき

$$\|B\| = \sqrt{4 \cdot \frac{7}{10} + 12 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{10} + 13 \cdot \frac{3}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{28 + 252 + 39}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{319}{10}}$$

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times\ 12 \\ \hline 42 \\ 21 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 252 \\ +\ 28 \\ \hline 280 \\ +\ 39 \\ \hline 319 \end{array}$$

解きなおし

1. $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 2y \end{pmatrix}$$

$$\therefore |B\mathbf{x}| = \sqrt{(2x+3y)^2 + 4y^2} = \sqrt{4x^2+12xy+13y^2}$$

また、

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$$\therefore x^2+y^2 = 1$$

ここで、

$$f(x,y) := 4x^2+12xy+13y^2$$

$$g(x,y) := x^2+y^2 = 1$$

とする。$g(x,y)=1$ のもとでの $f(x,y)$ の極値を調べる。

$$f_x = 8x+12y \ , \quad f_y = 12x+26y$$

$$g_x = 2x \ , \quad g_y = 2y$$

$f(x,y)$ が $g(x,y)$ のもとで、(x,y) に極値をもつとき、
ラグランジュの乗数法より以下を満たす λ が存在。

$$\begin{cases} f_x - \lambda g_x = 8x+12y-2\lambda x = 0 \\ f_y - \lambda g_y = 12x+26y-2\lambda y = 0 \end{cases}$$

これと $g = x^2+y^2=1$ より

$$\begin{cases} \lambda = 4 + 6\dfrac{y}{x} & \text{—①} \\ \lambda = 6\dfrac{x}{y} + 13 & \text{—②} \\ x^2+y^2 = 1 & \text{—③} \end{cases}$$

①, ② より

$$4 + 6\frac{y}{x} = 6\frac{x}{y} + 13$$

$6x^2 + 9xy - 6y^2 = 0$
$2x^2 + 3xy - 2y^2 = 0$

$$\therefore 4xy + 6y^2 = 6x^2 + 13xy$$

$$\therefore 2x^2 - 2y^2 = -3xy$$

$(2x^2 - 2 + 2x^2)^2 = (4x^2 - 2)^2$
$= 16x^4 - 16x^2 + 4$

$$(2x^2 - 2y^2)^2 = 9x^2y^2$$

③ より $y^2 = 1 - x^2$ を代入

$$\left(2x^2 - 2(1 - x^2)\right)^2 = 9x^2(1 - x^2)$$

$$16x^4 - 16x^2 + 4 = 9x^2 - 9x^4$$

$$25x^4 - 25x^2 + 4 = 0$$

$$\therefore x^2 = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{50} = \frac{25 \pm 15}{50} = \frac{4}{5},\ \frac{1}{5}$$

225

$$\therefore x = \pm\frac{2}{\sqrt5},\ \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ $13 \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{5}$

$4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ $13 \cdot \frac{4}{5} = \frac{52}{5}$

$x = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $x = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$$\therefore y = \pm\sqrt{1 - x^2} = \pm\frac{1}{\sqrt5},\ \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

このうち, $f(x, y)$ が最大となる (x, y) の組は $\left(\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right)$.

よって,

$$\|B\| = \sqrt{\frac{4}{5} + 12 \cdot \frac{2}{5} + \frac{52}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16} = 4$$

$52 + 24 + 4$
$= 80$

このとき

$$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$ABP^{t}P = BP\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}{}^{t}P$

$AB = BA$

6

平成２８年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

${}^{t}PAP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$AP = P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

$BAP = BP\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$

［数学－２］

問題２

$A\mathbb{P}_1 = \lambda_1\mathbb{P}_1$

$A\mathbb{P}_2 = \lambda_2\mathbb{P}_2$

以下の設問に答えよ．

(1) 実数を成分とする２次の正方行列 A, B は対称行列とし，A は相異なる固有値を持つとする．このとき，$AB = BA$ ならば A と B は同じ直交行列によって対角化されることを示せ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ を同じ直交行列によって対角化せよ．

(2) $A := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4 = \lambda^2-\lambda-6$

$= (\lambda-3)(\lambda+2)$

$\begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix}$

$\therefore \lambda = -2, 3$

$|B-\mu E| = \begin{vmatrix} 2-\mu & -2 \\ -2 & 5-\mu \end{vmatrix} = 10-2\mu-5\mu+\mu^2-4 = \mu^2-7\mu+6$

$= (\mu-6)(\mu-1)$

$\therefore \mu = 1, 6$

$\lambda = -2$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \psi_1 = c_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda = 3$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \psi_2 = c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_2\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mu=1$ について

$$B-\mu E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore u_3 = c_3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_3\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mu=6$ について

$$B-\mu E = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore u_4 = c_4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = c_4\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって, A, B のどちらについても同じ変換行列 P を用いて

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = {}^tPAP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = {}^tPBP = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる。

(1)

平成２８年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

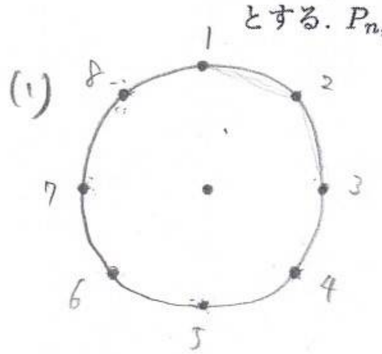
問題３

m を 6 以上の偶数, n を $3 \leqq n \leqq \frac{m}{2}$ をみたす自然数とする. 正 m 角形の m 個の頂点に, 時計回りに $1, 2, 3, \ldots, m$ と番号をふる. この m 個の頂点から n 個の頂点を無作為に選んで n 角形を作る. ただし, 頂点が一つでも異なる n 角形は異なるものとする. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $m = 8$ のとき, 辺上, または内部に正 8 角形の中心を持たない 3 角形の総数を答えよ.

(2) n 角形が, 辺上, または内部に正 m 角形の中心を持たない確率を $P_{n,m}$ とする. $P_{n,m}$ を n と m を用いて表せ. また, $\lim_{m \to \infty} P_{n,m}$ を求めよ.

(1)



中心をもたないもの

1 → 2 → ×4
　3 → ×2
　4 → ×0
　5 → ×0
　6 → ×2
　7 → ×1
9

2 → 3 → ×3
　→ 4 → ×1
　→ 5 → ×0
　→ 6 → ×0
　→ 7 → ×1
5

3 → 4 → ×2
　→ 5 → ×1
　→ 6 → ×0
　→ 7 → ×0
3

4 → 5 → ×2
　→ 6 → ×1
　→ 7 → ×0
3

5 → 6 → ×2
　→ 7 → ×1
6 → 7 → ×1
4

中心をもたない3角形の総数は

24個 //

(2)