平成２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

問題 1

曲線 $y = f(x)$, x 軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ を考える. ただし, 区間 $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とする.

(1) 上記の領域を D とするとき, $\bar{x}$ は

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy}{\displaystyle\iint_D dx\,dy}$$

で定義される.

$$\bar{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\,f(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}$$

となることを証明せよ.

(2) 同様の形式で $\bar{y}$ を求めよ.

(3) $f(x) = \exp(-x/3)$ で区間が $[0, 1]$ となるときの重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ を求めよ. ただし, exp は指数関数を表すものとする.

平成２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試　験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題２

行列 $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 2 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}$ について考える．ただし，a は実数とする．

(1) 行列 A の固有値の一つが 0 である場合，a の値を求めよ．

(2) $a = -1$ の場合について，A の固有値と固有ベクトルを求めて，A を対角化せよ．

(3) $\mathbf{x}$ を長さ 1 のベクトルとする．ベクトル $\mathbf{y}$ を，$\mathbf{x}$ の A による一次変換 $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$ とする．$a = -1$ の場合について，$\mathbf{y}$ の長さ $|\mathbf{y}|$ を最大とする $\mathbf{x}$ を求めよ．また，そのときの長さ $|\mathbf{y}|$ を求めよ．

平成２３年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題３

n を自然数, k を n 以下の自然数とする. n 人の学生が k 個のグループに分かれ, 各グループで円状に並ぶときの並び方の総数を $S(n,k)$ と表す. ただし, 各グループは１名以上の学生を含むものとする.

(1) $S(4,2) = 11$ であることを, すべての並び方を列挙することで示せ. ただし, 学生を A, B, C, D で表し, A で１つのグループ, B, C, D でもう１つのグループを構成し, B, C, D がこの順で円状に並ぶことを $\{[A],[B,C,D]\}$ と表すものとする.
なお, $\{[A],[B,C,D]\}$ と $\{[B,C,D],[A]\}$ や $\{[C,D,B],[A]\}$ は同じ並び方を表すが, 解答ではこの並び方を表すのにどの形式を用いてもよい.

(2) $S(n,k) = (n-1)S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$ が成立することを示せ. ただし, $S(0,0) = 1$, 各 i $(i \geq 1)$ に対して $S(i,0) = 0$ とし, 任意の i, j $(i < j)$ に対して $S(i,j) = 0$ とする.

(3) H_n を

$$H_n = \frac{S(n+1,2)}{n!}$$

とする. H_n を, n を用いて表せ.

(4) 設問 (3) の H_n が, 任意の自然数 n $(n \geq 1)$ に対して,

$$\frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} < H_n \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$$

を満たすことを示せ. ただし, $\lfloor x \rfloor$ は, x 以下の最大の整数を表すものとする.