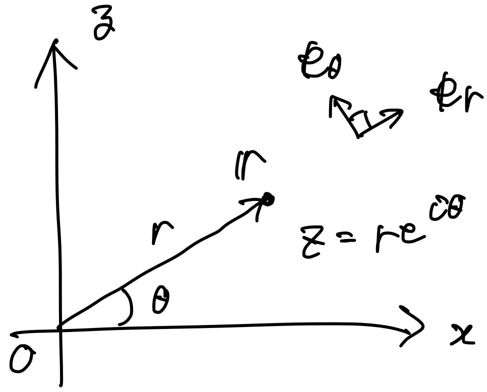

$\boldsymbol{r}$に対応する複素ベクトルは

$$z = re^{i\theta}$$

r方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_r$は

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

これを複素ベクトルと対応させると

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{z}{r} = \frac{re^{i\theta}}{r} = e^{i\theta}$$

θ方向の単位ベクトル$\boldsymbol{e}_\theta$については、$\boldsymbol{e}_r$を$\frac{\pi}{2}$回転したもの。よって、

$$\boldsymbol{e}_\theta = i \cdot \boldsymbol{e}_r = ie^{i\theta}$$

したがって、平面極座標系の基底は

$$\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta\} = \{e^{i\theta}, ie^{i\theta}\}$$

平面極座標系の速度と加速度

一般に、$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}$である。($r$と$\theta$は$t$の関数)

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}(re^{i\theta})$$

$$= \frac{dr}{dt} \cdot e^{i\theta} + r \cdot ie^{i\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cdot e^{i\theta} + \frac{dr}{dt} \cdot ie^{i\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$+ \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot ie^{i\theta} + r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \cdot ie^{i\theta} + r \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot (-e^{i\theta}) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) e^{i\theta} + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) i e^{i\theta}$$

$$= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right) e_r + \left(2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) e_\theta$$

$$= \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\omega^2 \right) e_r + \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\omega\right) \right) e_\theta$$