平成２９年度名古屋大学工学部編入学試験問題紙等綴

# 科　目　数　学

８月３日（水）　１２：２０～１４：２０

## 注　意　事　項

１．試験開始の合図まで，この綴を開いてはいけません．

２．問題紙等の枚数は，表紙を含めて１１枚〔**そのうち問題紙は２枚，解答用紙は６枚，草稿用紙は２枚**〕である．

３．解答にかかる前に，この綴左上のホッチキス針を丁寧にはずし，解答用紙の所定の欄に受験番号を記入してください．

４．解答は，必ず所定の解答用紙の所定の欄に記入してください．裏面に記入してはいけません．

５．落丁，乱丁，印刷上不鮮明な箇所などがあったら，ただちに申し出てください．

６．草稿用紙のほか，この綴の解答用紙以外の余白は，草稿用に使用しても構いません．

７．試験終了時刻までは退室してはいけません．

８．問題紙，解答用紙，綴表紙及び草稿用紙は持ち帰ってはいけません．

平成２９年度名古屋大学工学部編入学試験問題

# 科目名 数　学

1. 定数 $a$ を含む行列 $A$ と未知変数 $x, y, z$ に関する次の方程式を考える.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

以下の設問に計算手順を示し解答せよ.

(1) 方程式がただひとつの解をもつための, 定数 $a$ が満たすべき条件を示せ.

(2) $a=0$ とする. 方程式の解を求めよ.

(3) $a=4$ とする. このとき, $A$ の固有値のひとつは 2 である.

(i) 固有値 2 に属する $A$ の固有ベクトルをひとつ求めよ. なお固有ベクトルの大きさ(ノルム)は 1 とする.

(ii) 残りの $A$ の固有値をすべて求めよ.

2. 以下の設問に答えよ.

(1) 次の定積分を求めよ.　ただし, $y=\tan^{-1}x$ とした場合, $x=\tan y$ であることを意味する.

$$\int_0^1 x\tan^{-1}x\ dx$$

(2) 次の関数の 2 階の偏導関数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ を, それぞれ求めよ.

$$z=\sin\left(x^2 y\right)$$

(3) 次の微分方程式を解け. ただし $k, p, q$ はゼロではない定数で, かつ $p \neq q$ であり, さらに, $t=0$ において $x=0$ とする.

$$\frac{dx}{dt} = k(p-x)(q-x)$$

3. 赤玉が $N$ 個, 白玉が $N$ 個入ったくじ引き機を使い, 各回ごとにどちらの色の玉が出るかを予想する. $N$ は 1 以上の整数であり, また, くじ引き機を出た玉はくじ引き機に戻さないとする. 予想者はすべての予想をくじ引き開始前に終了しており, $2N$ 回の試行に対して, 最終的に必ず赤白それぞれが $N$ 個ずつになるように予想してあるとする. このとき, 予想が $i$ 回当たる確率を $P_i$ とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $N=2$ のとき, $i=0, 1, 2, 3, 4$ の場合の $P_i$ を求めよ.

(2) $N=3$ のとき, $P_i$ がゼロとなる $i$ の値をすべて求めよ.

(3) $N=4$ のとき, $P_i$ がゼロとならない場合の $P_i$ をすべて求めよ.

(4) $P_i$ がゼロとならない場合の $P_i$ を求める式を $N$ と $i$ を用いて導け.

4. 三次元ユークリッド空間において，点 O を原点とし正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3(=\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)$ を基底とする座標系 E がある．また，点 P があって，点 O から点 P までの位置は実変数 $t$ に関するベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ で表される．座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を変数 $t$ に関して 2 階微分すると $\sin(t)\boldsymbol{e}_1 - \cos(t)\boldsymbol{e}_2$ となった．なお，$t=0$ のとき，座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ の変数 $t$ に関する 1 階微分の値は $-\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_3$ であり，また $t=0$ のとき $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(0)$ の値は $\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2$ である．このとき，以下の設問に答えよ．

(1) ベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{PO}}(t)$ を求めよ．

(2) 正規直交ベクトルの組 $\boldsymbol{b}_1 = \cos(t)\boldsymbol{e}_1 + \sin(t)\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}_2 = -\sin(t)\boldsymbol{e}_1 + \cos(t)\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{e}_3$ がある．また，ある点 Q があって，点 P から点 Q までの位置を表すベクトル関数 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t)$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QP}}(t) = 5t\,\boldsymbol{b}_1 + 7t\,\boldsymbol{b}_2$ である．

(i) 座標系 E を用いて表したベクトル $\boldsymbol{b}_1$ と $\boldsymbol{b}_2$ について，変数 $t$ に関する 2 階微分をそれぞれ求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．

(ii) 点 O から点 Q までの位置を表すベクトル関数を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ とおく．座標系 E を用いて表した $\boldsymbol{r}_{\mathrm{QO}}(t)$ の変数 $t$ に関する 2 階微分を求めよ．得られたベクトルは基底としてベクトル $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3$ を用いて表せ．