[I]

(1)

(i) $AO = O \quad \therefore tr(AO) = 0$

(ii) $X, Y \in W$ とする。

$$tr(AX) = 0$$
$$tr(AY) = 0$$
$$tr(A(X+Y)) = tr(\underline{AX + AY}) = tr(AX) + tr(AY)$$

(iii) $kX \in M_2$ とする。

ここで和をとらないといけない → 具体的に書く

$$tr(A(kX)) = tr(kAX) = k\,tr(AX)$$

(i)〜(iii) より W は M_2 の部分空間である。

(i) $AO = O \quad \therefore tr(AO) = 0$

(ii) $X, Y \in W$ とする。

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} x_{11} - 2x_{21} & x_{12} - 2x_{22} \\ -2x_{11} + x_{21} & -2x_{12} + x_{22} \end{pmatrix}$$

$$AY = \begin{pmatrix} y_{11} - 2y_{21} & y_{12} - 2y_{22} \\ -2y_{11} + y_{21} & -2y_{12} + y_{22} \end{pmatrix}$$

$X, Y \in W$ より

$$tr(AX) = (x_{11} - 2x_{21}) + (-2x_{12} + x_{22}) = 0$$
$$tr(AY) = (y_{11} - 2y_{21}) + (-2y_{12} + y_{22}) = 0$$

また、

$$\begin{aligned} tr(A(X+Y)) &= tr(AX + AY) \\ &= (x_{11} - 2x_{21} + y_{11} - 2y_{21}) + (-2x_{12} + x_{22} - 2y_{12} + y_{22}) \\ &= (x_{11} - 2x_{21}) + (-2x_{12} + x_{22}) + (y_{11} - 2y_{21}) + (-2y_{12} + y_{22}) \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

(iii) $X \in W$ とすると,

$$\mathrm{tr}(AX) = 0$$

また,

$$\mathrm{tr}(A(kX)) = \mathrm{tr}(kAX)$$
$$= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} k(x_{11}-2x_{21}) & k(x_{12}-2x_{22}) \\ k(-2x_{11}+x_{21}) & k(-2x_{12}+x_{22}) \end{pmatrix}\right)$$
$$= k\left((x_{11}-2x_{21})+(-2x_{12}+x_{22})\right)$$
$$= k \cdot 0$$
$$= 0$$

(i)〜(iii)より W は M_2 の部分空間である.

(2) $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$ として, $X, Y \in W$ とする.

$$T(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}, \quad T(Y) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}$$

$$T(X+Y) = {}^t\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{21}+y_{21} \\ x_{12}+y_{12} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} \\ y_{12} & y_{22} \end{pmatrix}$$
$$= T(X) + T(Y)$$

T は明らかに線形変換.

T が W 内での線形変換であることを示す.

$X \in W$, $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$T(X) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$AT(X) = \begin{pmatrix} x_{11} - 2x_{12} & x_{21} - 2x_{22} \\ -2x_{11} + x_{12} & -2x_{21} + x_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AT(X)) &= (x_{11} - 2x_{12}) + (-2x_{21} + x_{22}) \\ &= (x_{11} - 2x_{21}) + (-2x_{12} + x_{22}) \\ &= \mathrm{tr}(AX) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore T(X) \in$

したがって T は W の線形変換である.

(3) $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in W$ とする.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(AX) &= (x_{11} - 2x_{21}) + (-2x_{12} + x_{22}) \\ &= x_{11} - 2x_{12} - 2x_{21} + x_{22} = 0 \end{aligned}$$

$x_{12} = a,\ x_{21} = b,\ x_{22} = c \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 2a + 2b - c & a \\ b & c \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

したがって部分空間 W の次元は3

$\boxed{2}$

(1) $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{:=(a_1\ a_2\ a_3\ a_4)} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:= (b_1\ b_2\ b_3\ b_4)}$$

行基本変形後の列ベクトルについて, b_1 と b_2 は1次独立であり,

$$b_3 = 2b_1 - b_2 \ , \ b_4 = -b_1 + b_2$$

と表せる。行基本変形では列ベクトルどうしの1次関係は変わらないので a_1 と a_2 は1次独立。また,

$$a_3 = 2a_1 - a_2 \ , \ a_4 = -a_1 + a_2$$

(2)

(1)の行基本変形の結果から

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_3 = a, \ x_4 = b \ (a, b \in \mathbb{R})$ とおくと

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x_1(a, b) \\ x_2(a, b) \\ x_3(a, b) \\ x_4(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a + b \\ a - b \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

これらを与式に代入すると

$$(\text{与式}) = (-2a + b - 1)^2 + (a - b - 1)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2$$

$$= (-2a + b)^2 - 2(-2a + b) + 1 + (a - b)^2 - 2(a - b) + 1 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2$$

$$= 4a^2 - 4ab + b^2 + 4a - 2b + 1 + a^2 - 2ab + b^2 - 2a + 2b + 1$$

$$+\cancel{a^2}-\cancel{2a}+1+\cancel{b^2}-\cancel{2b}+1$$

$$\underbrace{=6a^2-6ab+3b^2-2b+4}_{=:f(a,b)}$$

上式が最小となる(a, b)を調べる。

$$f_a = 12a - 6b, \quad f_b = 6b - 6a - 2$$

極値をとりうるときは

$$\begin{cases} 12a - 6b = 0 \\ -6a + 6b - 2 = 0 \end{cases}$$

$$6a = 2 \qquad 6b = 4$$

$$a = \frac{1}{3} \qquad b = \frac{2}{3}$$

より $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$$f_{aa} = 12, \quad f_{ab} = -6, \quad f_{bb} = 6$$

$$H\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{vmatrix} > 0$$

より $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ は極値となる。

したがって、上式を最小とする解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} + 0 \\ 0 + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$

(1)

$$f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ -x+2z & -y+2w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x-y & 2x+2y \\ z-w & 2z+2w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y+2z & -2x-y+2w \\ -x+z+w & -y-2z \end{pmatrix}$$

(2)

$$X = xE_1 + yE_2 + zE_3 + wE_4$$

よって、Xの座標は ${}^t(x\ \ y\ \ z\ \ w)$

また、$f(X)$の座標は

$$\begin{pmatrix} y+2z \\ -2x-y+2w \\ -x+z+w \\ -y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

したがって、求める表現行列Fは

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

基底が同じ C^4

(3)

$$\begin{pmatrix} y+2z & -2x-y+2w \\ -x+z+w & -y-2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y+2z = 0 \\ -2x-y+2w = 0 \\ -x+z+w = 0 \\ -y-2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、$\ker f$の次元は 2