平成３０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
[数　　学] 試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

1に セクまび

[数学－１]

問題 1

α を 1 以上の実数とする．1 回微分可能な関数 $f(x)$ が

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_2^{2x}\left\{f\left(\frac{t}{2}\right)\right\}^{\alpha}dt+1 \qquad ①$$

を満たすという．以下の設問に答えよ．

(1) $f(1)=A$ を満たす実数 A を求めよ．

(2) $y=f(x)$ とおく．式 ① の両辺を x で微分することにより，微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=y^{\alpha} \qquad ②$$

が成り立つことを示せ．

(3) 初期条件「$x=1$ のとき $y=A$ (ただし A は (1) で求めた値)」のもとでの微分方程式 ② の特殊解を Y とする．「1 以上の任意の実数 x に対して，Y の x における値が実数になる」ための，α に対する条件を求めよ．

(1) $f(1)=\underbrace{\frac{1}{2}\int_2^2\left\{f\left(\frac{t}{2}\right)\right\}^{\alpha}dt}_{=0}+1 = 1$

$\therefore A=1$

(3) $z^{-\alpha}dz = dx$

$\int z^{-\alpha}dz=\int dx$

$\therefore \frac{1}{-\alpha+1}z^{-\alpha+1}=x+C$

$x=1$ で $z=A=1$ より

$\frac{1}{-\alpha+1}=1+C$

$\therefore C=\frac{1}{-\alpha+1}-1=\frac{-1}{\alpha-1}-\frac{\alpha-1}{\alpha-1}=\frac{-1-\alpha+1}{\alpha-1}=-\frac{\alpha}{\alpha-1}=\frac{\alpha}{-\alpha+1}$

$\therefore \frac{1}{-\alpha+1}z^{-\alpha+1}=x+\frac{\alpha}{-\alpha+1}$

$$z^{-\alpha+1} = -(\alpha-1)x+\alpha =$$
$$= \frac{1}{z^{\alpha-1}}$$

$$z^{\alpha-1} = \frac{1}{-(\alpha-1)x+\alpha}$$

$$z = \left(\frac{1}{-(\alpha-1)x+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$$\therefore Y = \left(\frac{1}{-(\alpha-1)x+\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

$x \geq 1$ で Y が実数になるためには

$$-(\alpha-1)x+\alpha \geq 0$$
$$(1-x)\alpha + x \geq 0$$
$$(x-1)\alpha \leq x$$
$$\therefore \alpha \leq \frac{x}{x-1}$$

$$\alpha < \frac{2}{2-1} = 2$$
$$\alpha < \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$$
$$\alpha < \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}$$

右辺は $x \to \infty$ で1番小さくなるので

$$\alpha \leq 1$$

αは1以上だから

$$\alpha = 1$$

解きなおし

(2)

$\{f(x)\}^{\alpha}$ の原始関数を $F_{\alpha}(x)$ とする.

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{2}^{2x} \left\{ f\left(\frac{t}{2}\right) \right\}^{\alpha} dt + 1$$

$$= \left[F_{\alpha}\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{2}^{2x} + 1$$

$$= F_{\alpha}(x) - F_{\alpha}(1) + 1$$

$$\therefore\ y' = f'(x)$$

$$= \{f(x)\}^{\alpha}$$

$$= y^{\alpha}$$

(3)

(i) $\alpha = 1$ のとき

$$y' = y$$

$$\therefore\ y = Ce^{x}$$

$x = 1$ で $y = A = 1$ より

$$C = \frac{1}{e}$$

$$\therefore\ Y = e^{x-1}$$

このとき y は実数.

(ii) $a > 1$ のとき

$$y' = y^{\alpha}$$

$$\therefore\ \int y^{-\alpha} dy = \int dx$$

$$\frac{y^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = x + C$$

$x = 1$ で $y = A = 1$ より

$$1 = -\alpha + 1 + (-\alpha+1)C$$

$$\therefore\ C = \frac{\alpha}{-\alpha+1}$$

$$\therefore\ y^{-\alpha+1} = (-\alpha+1)x + \alpha$$

$$Y^{-\alpha+1} = (-\alpha+1)x + \alpha \quad — ③$$

ここで，$Y = re^{i\theta}$ とおくと

$$Y^{-\alpha+1} = r^{-\alpha+1} e^{i(-\alpha+1)\theta} = r^{-\alpha+1}\left(\cos(-\alpha+1)\theta + i\sin(-\alpha+1)\theta\right)$$

③の右辺は実数なので

$$\sin(-\alpha+1)\theta = 0$$

$\therefore (-\alpha+1)\theta = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

また，Y も実数であり

$$Y = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r\sin\theta = 0$$

$\therefore \theta = m\pi$

よって，$-\alpha+1$ が整数でないとき不適．

次に，$-\alpha+1 = 2k \ (k \in \mathbb{Z})$ のとき，③の左辺は常に正の値．

しかし，右辺は正負両方の値をとりうるため，これは不適．

$-\alpha+1 = 2k+1 \ (k \in \mathbb{Z})$ のとき，③の左辺は正負両方の値をとれる．

したがって，$\alpha \neq 1$ のとき，条件を満たす α は

$$-\alpha+1 = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\therefore \alpha = 2k \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\alpha \geq 1$ より

$$\alpha = 2k \quad (k\text{は}1\text{以上の整数})$$

(i)，(ii) より

$$\alpha = 1,\ 2k \quad (k\text{は}1\text{以上の整数})$$

平成３０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は空間の３次元ベクトルとして，以下の設問に答えよ．

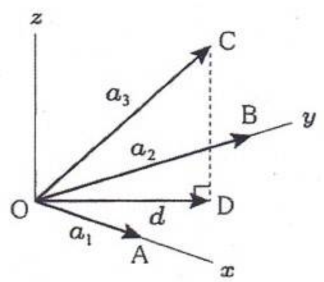
(1) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$ が一次独立であることを証明せよ．

(2) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とおくと，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ は一次独立であることを証明せよ．ただし，λ_2，λ_3 は実定数である．

(3) $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ が一次独立で $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{a}_1+\lambda_2\boldsymbol{a}_2+\lambda_3\boldsymbol{a}_3$ とする．$\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_2-\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}_3-\boldsymbol{a}$ が一次独立であるための必要十分条件は，$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\neq 1$ であることを証明せよ．ただし，λ_1，λ_2，λ_3 は実定数である．

(4) 空間に直交座標系 O$-xyz$ が与えられているものとする．図に示すように，x 軸上の点Aに対し $\boldsymbol{a}_1=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$y$ 軸上の点Bに対し $\boldsymbol{a}_2=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，空間内の点Cに対し $\boldsymbol{a}_3=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする．点Cから xy 平面に垂線CDを引くとき，ベクトル $\boldsymbol{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ の線形結合で表せ．

$k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = 0$



(1)

a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$ が1次独立であるとする。このとき

$k_1 a_1 + k_2(a_1+a_2) + k_3(a_1+a_2+a_3) = 0$ ← ①

を満たす $k_1 \sim k_3$ は 0 のみ。①を変形すると

$k_1 a_1 + k_2 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_1 + k_3 a_2 + k_3 a_3 = 0$

$\therefore \underline{(k_1+k_2+k_3)} a_1 + \underline{(k_2+k_3)} a_2 + \underline{k_3} a_3 = 0$

—— 部は全て0であるから，a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$ が1次独立なとき a_1, a_2, a_3 は1次独立．したがって，a_1, a_2, a_3 が1次独立であるための必要十分条件は a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$ が1次独立であること

である．

(2) $k_1 a_1 + k_2 a_2 + k_3 a_3 = \mathbf{0}$ — ③

とする。③を変形すると

$$k_1(a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3)+k_2 a_2+k_2 a_3$$

$$= k_1 a_1 + (k_1\lambda_2+k_2)a_2 + (k_1\lambda_3+k_3)a_3$$

$$= \mathbf{0}.$$

a_1, a_2, a_3が1次独立なので

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

簡約化

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 1 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

—— ここにいた行列はrank 3であるから $k_1 \sim k_3$は自明な解しかもたない。

したがって，a_1, a_2, a_3が1次独立のとき，a_1, a_2, a_3は1次独立である。

(3) $k_1(a_1-a)+k_2(a_2-a)+k_3(a_3-a)=\mathbf{0}$ — ④

とする。④を変形すると，

$$k_1(a_1-\lambda_1 a_1-\lambda_2 a_2-\lambda_3 a_3)+k_2(a_2-\lambda_1 a_1-\lambda_2 a_2-\lambda_3 a_3)$$
$$+k_3(a_3-\lambda_1 a_1-\lambda_2 a_2-\lambda_3 a_3)$$

$$=(k_1-k_1\lambda_1-k_2\lambda_1-k_3\lambda_1)a_1+(k_2-k_1\lambda_2-k_2\lambda_2-k_3\lambda_2)a_2$$
$$+(k_3-k_1\lambda_3-k_2\lambda_3-k_3\lambda_3)a_3$$

$$=\mathbf{0}$$

a_1, a_2, a_3が1次独立なので，

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -\lambda_1 & -\lambda_1 \\ -\lambda_2 & 1-\lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & -\lambda_3 & 1-\lambda_3 \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) & 1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) & 1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) \\ -\lambda_2 & 1-\lambda_2 & -\lambda_2 \\ -\lambda_3 & -\lambda_3 & 1-\lambda_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) & 0 & 0 \\ -\lambda_2 & 1 & 0 \\ -\lambda_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$

${}^t(k_1\ k_2\ k_3)$ が自明な解しかもたないとき, a_1-a, a_2-a, a_3-a が1次独立.
そのためには $|A| \neq 0$ である必要がある. $|A|=0$ となってしまうのは $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$ の時.
したがって, a_1-a, a_2-a, a_3-a が1次独立であるための必要十分条件は
$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \neq 1$ である.

(4) $$d = \left(a_3 \cdot \frac{a_1}{|a_1|}\right)\frac{a_1}{|a_1|} + \left(a_3 \cdot \frac{a_2}{|a_2|}\right)\frac{a_2}{|a_2|}$$
$$= \frac{(a_3 \cdot a_1)}{(a_1 \cdot a_1)} a_1 + \frac{(a_3 \cdot a_2)}{(a_2 \cdot a_2)} a_2$$

平成３０年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［　数　　　　学　］　試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

［数学－３］

問題３

1 から N まで異なる番号が振られた N 個の地点があるとする．最初に無作為にスタート地点を選ぶ．その後，無作為に選んだ現在とは異なる地点へと移動を繰り返す．このとき，以下の設問に答えよ．なお k は N 未満の自然数とする．

(1) 異なる k 個の地点を回った状態から，m 回目の移動ではじめて今までに移動したことのない新たな地点へ移動する確率を求めよ．

(2) 異なる k 個の地点を回った状態から，今までに移動したことのない新たな地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．

(3) N 個すべての地点へ移動するまでの移動回数の平均を求めよ．ただし，スタート地点の選択も 1 回と数える．

ここをぴょこぴょこする

(1)

$m-1$ 回目までは回ったことのある地点に行き，m 回目に初めての地点．

$$\therefore P=\left(\frac{k-1}{N}\right)^{m-1}\cdot\frac{N-k}{N}$$

$N=3,\ k=1,\ m=1$

$$\left(\frac{0}{3}\right)^{0}\cdot\frac{2}{3}$$

(2)

(1) で求めた P で m を確率変数としたときの期待値を求めればよい．

m は $1\sim\infty$ で考えるので

$$E(m)=\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\left(\frac{k-1}{N}\right)^{m-1}\cdot\frac{N-k}{N}$$

$$=\frac{N-k}{N}\sum_{m=1}^{\infty}m\cdot\left(\frac{k-1}{N}\right)^{m-1}$$

$$=\frac{N-k}{N}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{k-1}{N}\right)^2}\qquad \because\ \frac{k-1}{N}<1$$

$$=(N-k)\cdot\frac{N}{(N-k-1)^2}$$

$$S_n=1+2r+3r^2+\cdots+nr^{n-1}$$

$$-)\ rS_n=\quad r+2r^2+\cdots+(n-1)r^{n-1}+nr^n$$

$$(1-r)S_n=1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}-nr^n$$

$$=\frac{1-r^n}{1-r}+nr^n$$

$$S_n=\frac{1-r^n}{(1-r)^2}-\frac{nr^n}{1-r}$$

$$=\frac{1-r^n-(nr^n-nr^{n+1})}{(1-r)^2}$$

$$\to\frac{1}{(1-r)^2}\quad(n\to\infty)$$

解きなおし

(1)

m−1回目までは回ったことのある地点に行き，m回目に初めての地点.

また，移動のときえらべる場所は N−1 通り.

$$\therefore\ p = \left(\frac{k-1}{N-1}\right)^{m-1} \cdot \frac{N-k}{N-1}$$

(2)

(1)で求めたpでmを確率変数としたときの期待値を求める.

mは1〜∞として

$$E(m) = \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \left(\frac{k-1}{N-1}\right)^{m-1} \cdot \frac{N-k}{N-1}$$

$$= \frac{N-k}{N-1} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \Bigl(\underbrace{\frac{k-1}{N-1}}_{=r\text{とする}}\Bigr)^{m-1}$$

$$= \frac{N-k}{N-1} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{m=1}^{n} m \cdot r^{m-1}}_{=S_n\text{とする}}$$

ここで,

$$S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$$

$$-)\ rS_n = r + 2r^2 + \cdots + (n-1)r^{n-1} + nr^n$$

$$(1-r)S_n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} - nr^n$$

$$= \frac{1-r^n}{1-r} - nr^n$$

$$\therefore\ S_n = \frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}$$

よって,

$$E(m) = \frac{N-k}{N-1} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-r^n}{(1-r)^2} - \frac{nr^n}{1-r}\right)$$

$r<1$

$$= \frac{N-k}{N-1} \cdot \frac{1}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{N-k}{N-1} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{k-1}{N-1}\right)^2}$$

$(N-1-k+1)=N-k$

$$= \frac{(N-k)(N-1)}{(N-k)^2} = \frac{N-1}{N-k}$$

(3)

$k=1 \to k=N-1$ とはじめの1回を足せばよい．求める平均回数を$E(N)$とすると

$$E(N) = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{N-1}{N-k}}_{S\text{とする}}$$

$$S = \frac{N-1}{N-1} + \frac{N-1}{N-2} + \frac{N-1}{N-3} + \cdots + \frac{N-1}{2} + \frac{N-1}{1}$$

?