5

平成２７年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

17:33まで

［数学－１］

問題１

実数 x に対し $y = \sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ と定義すると $\sinh x$ は逆関数をもつ．そこで逆関数を $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ と表す．以下の設問に答えよ．

(1) $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ を求めよ．

(2) 正の実数 a について

$$S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)\mathrm{d}x$$

と定義する．$S(a)$ を求めよ．

(3) $\lim_{a\to 0} S(a)$ を求めよ．

(4) $\lim_{a\to\infty} \{S(a) - \log a\}$ を求めよ．

$2z = e^x - \frac{1}{e^x}$

$2ze^x = e^{2x} - 1$

$e^{2x} - 2ze^x - 1 = 0$

(1) $z = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2}$

$e^{2x} - 2ze^x - 1 = 0$

$\therefore e^x = z \pm \sqrt{z^2+1}$

$x = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$

e^xは常に $e^x > 0$.
よって $e^x = z - \sqrt{z^2+1}$ は不適.

よって, $\mathrm{sh}^{-1}(x)$ は

$\therefore \mathrm{sh}^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

(2) $S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \mathrm{sh}^{-1}(x)\,dx$

$z = \mathrm{sh}^{-1}(x)$

$x = \sinh z$ とおくと

$dx = \cosh z\, dz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\, dz$

x	$0 \to a$
z	$0 \to \mathrm{sh}^{-1}(a)$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{a}\int_0^{sh^{-1}(a)} sh^{-1}(\sinh z)\cdot\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}\,dz$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{sh^{-1}(a)} \frac{z(e^{z}+e^{-z})}{2}\,dz$$

$$\begin{array}{cc} + \; z & (e^{z}-e^{-z})/2 \\ - \; 1 & (e^{z}+e^{-z})/2 \end{array}$$

$$= \frac{1}{a}\Big[z\cdot\sinh z - \cosh z\Big]_0^{sh^{-1}(a)}$$

$$\cosh z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$$

$$= \frac{1}{a}\left(sh^{-1}(a)\cdot a - \frac{a+\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}}{2} - (0-1)\right)$$

$$= sh^{-1}(a) - \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2a} - \frac{1}{2a(a+\sqrt{a^2+1})} + \frac{1}{a}$$

$$= sh^{-1}(a) + \frac{-(a+\sqrt{a^2+1})^2 - 1 + 2(a+\sqrt{a^2+1})}{a}$$

$$= sh^{-1}(a) + \frac{2(1-a)\sqrt{a^2+1} - 2a^2 - 2 + 2a}{a}$$

(3) $\lim_{a\to 0} sh^{-1}(a) = 0$

ここで、

$$f(a) := \frac{2(1-a)\sqrt{a^2+1} - 2a^2 - 2 + 2a}{a}$$

$$\lim_{a\to 0} f(a) = \lim_{a\to 0}\left(-2\sqrt{a^2+1} + 2(1-a)\cdot\frac{2a}{2\sqrt{a^2+1}} - 4a + 2\right)$$

$$= -2 + 2$$

$$= 0$$

$$\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}}{2} \to 1 \quad (a\to\infty)$$

(4) $$S(a) - \ln a = sh^{-1}(a) - \frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2a} - \frac{1}{2a(a+\sqrt{a^2+1})} + \frac{1}{a} - \ln a$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(-\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{2a} - \frac{1}{2a(a+\sqrt{a^2+1})}\right) = -1$$

$$\lim_{a\to\infty}\left(sh^{-1}(a)-\ln a\right)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-\ln a\right)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2+1}}{a}\right)$$

$$=\lim_{a\to\infty}\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\right)$$

$$=\ln 2$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\left(S(a)-\ln a\right)=-1+\ln 2$$

これでも正解やけど

きれいな解答次ページ

(2) $S(a) = \frac{1}{a}\int_0^a sh^{-1}(x)\,dx$

$x = \sinh z$ とおくと

$$\cosh z = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sinh z = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$dx = \cosh z\, dz$

x	$0 \to a$
z	$0 \to sh^{-1}(a)$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{a}\int_0^{sh^{-1}(a)} sh^{-1}(\sinh z)\cdot \cosh z\, dz$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^{sh^{-1}(a)} z\cosh z\, dz$$

$+$ z $\sinh z$

$-$ 1 $\cosh z$

$$= \frac{1}{a}\Big[z\sinh z - \cosh z\Big]_0^{sh^{-1}(a)}$$

$$= \frac{1}{a}\left(a\cdot sh^{-1}(a) - \cosh(sh^{-1}(a)) + 1\right)$$

ここで、

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(sh^{-1}(a)) = \sqrt{1+\sinh^2(sh^{-1}(a))}$$

$$= \sqrt{1+a^2}$$

$$\therefore S(a) = sh^{-1}(a) - \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} + \frac{1}{a}$$

$$= sh^{-1}(a) + \frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$$

(3) $\lim_{a\to 0} S(a) = 0 + \lim_{a\to 0}\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}$

$$= \lim_{a\to 0}\left(-\frac{2a}{2\sqrt{1+a^2}}\right)$$

$$= 0$$

(4) $\lim_{a\to\infty}\left(S(a)-\ln a\right)=\lim_{a\to\infty}\left(sh^{-1}(a)+\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}-\ln a\right)$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)-\ln a\right)-1$$

$$=\lim_{a\to\infty}\left(\ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\right)\right)-1$$

$$=\ln 2-1$$

$$\frac{1-\sqrt{1+a^2}}{a}=\frac{1}{a}-\sqrt{\frac{1}{a^2}+1}\to -1 \quad (a\to\infty)$$

平成２７年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題２

行列の対角化に関する以下の設問に答えよ．

(1) 次の対称行列 $\boldsymbol{A}$ を直交行列によって対角化せよ．ただし，a は実定数である．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列 $\boldsymbol{B}$ が正則行列によって対角化できるための実定数 b, c の必要十分条件を求めよ．また，対角化できる場合は対角化せよ．

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

(1) $|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - a^2$

$= (1+a-\lambda)(1-a-\lambda)$

よって固有値は $\lambda = 1-a,\ 1+a$

$\lambda = 1-a$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore u_1 = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_1 \neq 0)$

$\lambda = 1+a$ について

$A-\lambda E = \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore u_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow c_2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (c_2 \neq 0)$

よって，Aは直交行列Pを用いて

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & 1+a \end{pmatrix}$

と対角化できる．

(2) $|B-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & c \\ 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(b-\lambda)$

よって固有値は $\lambda = 1, b$.

$\lambda = 1$について

$$B-\lambda E = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & b-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore u_1 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -c \\ 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c+c-bc \\ b-b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc \\ b(1-b) \end{pmatrix}$$

$\lambda = b$について

$$B-\lambda E = \begin{pmatrix} 1-b & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore u_2 = c_2 \begin{pmatrix} -c \\ 1-b \end{pmatrix}$

よって, Bは変換行列Pを用いて

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1-b \end{pmatrix}, \quad P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

と対角化できる. Pが正則である条件は

$|P| = 1-b \neq 0$

$\therefore b \neq 1$

したがって, Bが正則行列によって対角化できるための必要十分条件は

$b \neq 1$, cは任意である.

7

平成２７年度　大阪大学基礎工学部編入学試験
［数　　　学］試　験　問　題

受　験　番　号	志望学科・コース
	学　科 コース

$P_{n+1} = qP_n + pq - pqP_n$

$= (1-p)qP_n + pq$

［数学－３］

問題３

$P_{n+1} - \alpha = (1-p)q(P_n - \alpha)$

$= (1-p)qP_n - (1-p)q\alpha$

$P_{n+1} = (1-p)qP_n + (1-(1-p)q)\alpha$

$= (1-p)qP_n +$

コンピュータがウィルスに感染し，ウィルス対策ソフトがウィルスを駆除する確率について，次のようなモデルを用いて考える．

- 初期状態でコンピュータはどのウィルスにも感染していない．
- コンピュータは毎朝，確率 p $(0 < p < 1)$ で新たなウィルスに感染する．
- コンピュータが感染している場合，ウィルス対策ソフトが毎夕に駆除を試みる．駆除に成功すると，その時点で感染しているすべてのウィルスが駆除される．ただし，駆除は確率 q $(0 \leq q \leq 1)$ で失敗する．

なお，コンピュータがウィルスに感染した場合やウィルスの駆除に成功あるいは失敗した場合でも，以降の感染確率 p と駆除失敗確率 q に一切影響を与えないものとする．

このとき，以下の設問に答えよ．

(1) コンピュータが n $(n \geq 1)$ 日目の終わりにウィルスに感染している確率を $P(n)$ とする．

　(a) $P(1)$ を求めよ．
　(b) $P(2)$ を求めよ．
　(c) $P(n)$ を求めよ．

$(1-(1-p)q)\alpha = pq$

$\therefore \alpha = \dfrac{pq}{1-(1-p)q}$

(2) n 日目の終わりまでに一度も感染しない確率を求めよ．

(3) 1日目に感染し，n 日目の終わりまで一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

(4) i $(1 \leq i \leq n)$ 日目に初めて感染し，n 日目の終わりまで一度も駆除に成功しない確率を求めよ．

$n=1$　　2

かんせん → しっぱい → かんせんしない
かんせんしない → かんせん → しっぱい
かんせん → しっぱい → かんせん
どっちでもいい

(1)

(a) $P(1) = pq$

(b) $P(2) = pq^2 + (1-p)pq$

(c)

n日目おわり $p(n)$　n+1日目

かんせんしてる → しっぱい → $p(n+1)$

かんせんしてない → かんせん → しっぱい

$(1-p(n))$

$$\therefore P(n+1) = qP(n) + pq(1-P(n))$$

$$\therefore P(n+1) - \frac{pq}{1-(1-p)q} = (1-p)q\left(P(n) - \frac{pq}{1-(1-p)q}\right)$$

$$\therefore P(n) = \frac{pq}{1-(1-p)q} + \left((1-p)q\right)^{n-1}\left(P(1) - \frac{pq}{1-(1-p)q}\right)$$

$$= \frac{pq}{1-(1-p)q} + \left((1-p)q\right)^{n-1}\left(pq - \frac{pq}{1-(1-p)q}\right)$$

$$= \frac{pq}{1-(1-p)q} - \frac{(1-p)pq^2}{1-(1-p)q}\left((1-p)q\right)^{n-1}$$

$$= \frac{pq}{1-(1-p)q}\left(1 - \left((1-p)q\right)^n\right)$$

(2) $(1-p)^n$

(3) pq^n

(4)

$(i-1)$回連続

	$n=1$	2	……	$i-1$	i	$i+1$	……	$n-1$	n
かんせん する→○ しない→×	×	×	……	×	○	—	……	—	—
せいこう する→○ しない→×	—	—	……	—	×	×	……	×	×

$(n-(i-1))$回連続

求める確率 P_i とすると

$$P_i = (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot q^{n-(i-1)}$$

$$= (1-p)^{i-1} \cdot p \cdot q^{n-i+1}$$