平成３１年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

[数　　学] 試 験 問 題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

問題 1

関数 $f(x)$ は区間 $(-\infty, \infty)$ で 2 回微分可能であるとする．関数 $g(x)$ を

$$g(x) = f(x)^2 - 2f(x) - f'(x)$$

と定める．ここで $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である．2 変数関数 $u(x,y), v(x,y)$ をそれぞれ

$$u(x,y) = f(x-y), \quad v(x,y) = g(x-y)$$

と定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(x) = e^{-2x}$ であるとき，偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}$$

をそれぞれ求めよ．

(2) 2 変数関数

$$w = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\frac{\partial u}{\partial x}$$

を v の偏導関数を用いて表せ．

(3) a を正の実数とする．$|f(0)-1| < a$ であり，すべての x について $g(x) = a^2 - 1$ であるとする．このとき

$$\lim_{y \to \infty} u(x,y)$$

を求めよ．

$\frac{2}{f(x)} = 1 - Ae^{2x}$

$f(x) = \frac{2}{1-Ae^{2x}}$

$f(x)^2 - 2f(x) - f'(x) = 0$

$f'(x) = f(x)(f(x)-2)$

$\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)-2)} = 1.$

$\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{f(x)} + \frac{\frac{1}{2}}{f(x)-2}\right)d(f(x)) = \int dx$

$\therefore \frac{1}{2}\ln\left(\frac{f(x)-2}{f(x)}\right) = x + C$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$

(1) $u(x,y) = e^{-2(x-y)} = e^{-2x}\cdot e^{2y}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = -2e^{-2x}\cdot e^{2y} = -2e^{-2(x-y)}$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4e^{-2x}\cdot e^{2y} = 4e^{-2(x-y)}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = 2e^{-2x}\cdot e^{2y} = 2e^{-2(x-y)}$

(2) $\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x-y)\cdot(-1) = -f'(x-y)$

$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-y)\cdot 1 = f'(x-y)$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x-y)$

$\therefore w = -f'(x-y) - \frac{1}{2}f''(x-y) + f(x-y)f'(x-y)$

$f(x)^2 - 2f(x) - (g(x) + f'(x)) = 0$

$\therefore f(x) = 1 \pm \sqrt{1 + g(x) + f'(x)}$

$h(x) = x^2$

$h(x-y) = (x-y)^2$

$h(x) = e^x$

$h(x-y) = e^{x-y}$

また、

$$v_x = g'(x-3) = 2f(x-3)f'(x-3) - 2f'(x-3) - f''(x-3)$$

$$v_z = -g'(x-3) = -2f(x-3)f'(x-3) + 2f'(x-3) + f''(x-3)$$

よって、

$$W = \frac{1}{2}\left(2f(x-3)f'(x-3) - 2f'(x-3) - f''(x-3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}$$

(3) $f(x)^2 - 2f(x) - f'(x) = 0$ —①

とする。このとき、

$$\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)-2)} = 1$$

$$\therefore \int\left(\frac{1}{f(x)-2} - \frac{1}{f(x)}\right)dx = \int 2\,dx$$

$$\therefore \ln\left|\frac{f(x)-2}{f(x)}\right| = 2x + C$$

$$\therefore f(x) = \frac{2}{1-Ae^{2x}}$$

ここで、$A = A(x)$ とすると、

$$f'(x) = \frac{-2(-A'(x)e^{2x} - A(x)\cdot 2e^{2x})}{(1-A(x)e^{2x})^2} = \frac{2(A'(x)+2A(x))e^{2x}}{(1-A(x)e^{2x})^2}$$

①において(右辺) $= g(x) = a^2-1$ とし、$f(x)$, $f'(x)$ を代入すると

$$\frac{4}{(1-Ae^{2x})^2} - 2\frac{2}{(1-Ae^{2x})^2} - \frac{2(A'+2A)e^{2x}}{(1-Ae^{2x})^2} = a^2-1$$

$$\frac{4 - 4 + 4Ae^{2x} - 2A'e^{2x} - 4Ae^{2x}}{(1-Ae^{2x})^2} = a^2-1$$

$$A' = (a^2-1)(1-Ae^{2x})^2\cdot\frac{1}{-2e^{2x}} = (a^2-1)\frac{1-2Ae^{2x}+A^2e^{4x}}{-2e^{2x}}$$

$$= (a^2-1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + A - \frac{1}{2}A^2e^{2x}\right)$$

(2)より

$$-f'(x-3) - \frac{1}{2}f''(x-3) + f(x-3)f'(x-3) = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}g'(x-3) = 0$$

(3)

$$f(x)^2 - 2f(x) - f'(x) = a^2 - 1$$

$$(f(x) - 1)^2 - a^2 = f'(x)$$

$$\therefore f'(x) = (f(x) - 1 - a)(f(x) - 1 + a)$$

$$\frac{f'(x)}{(f(x) - (1+a))(f(x) - (1-a))} = 1$$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{2a}}{f(x) - (1+a)} + \frac{-\frac{1}{2a}}{f(x) - (1-a)} \right) d(f(x)) = \int dx$$

$$\therefore \ln \left| \frac{f(x) - (1+a)}{f(x) - (1-a)} \right| = 2ax + C$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ f(x) - (1-a) \overline{\big) f(x) - (1+a)} \\ \underline{f(x) - (1-a)} \\ -2a \end{array}$$

$$\therefore 1 + \frac{-2a}{f(x) - (1-a)} = Ae^{2ax}$$

$$f(x) - (1-a) = \frac{-2a}{Ae^{2ax} - 1}$$

$$f(x) = \frac{-2a}{Ae^{2ax} - 1} + 1 - a$$

$$\therefore u(x, \xi) = \frac{-2a}{Ae^{2a(x-\xi)} - 1} + 1 - a$$

$$\therefore \lim_{\xi \to \infty} u(x, \xi) = \frac{-2a}{-1} + 1 - a = 1 + a$$

平成３１年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　　学］試・験　問　題

受験番号	志望学科・コース
	学科 コース

［数学－２］

問題２

$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ に対する線形変換

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x + 3y - z \\ 2x + y + 3z \\ 3x + 2y + 4z \end{pmatrix}$$

について，以下の問に答えよ．ただし，^{t} は行列の転置を表すとする．

(1) ある行列 A を用いて，$f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ と表すことができる．この行列 A を求めよ．

(2) k を実数とし，$\boldsymbol{b} = {}^t(5, 0, k)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$ が解を持つための，k についての必要十分条件を求めよ．またその条件が満たされるときの解を求めよ．

(3) $\boldsymbol{0} = {}^t(0, 0, 0)$ とする．$\boldsymbol{x}$ についての方程式 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解を求めよ．

(4) E を3次の単位行列とし，行列 B を $B = A - E$ で定める．行列 B の固有値と固有ベクトルを求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & k \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & -10 \\ 0 & -7 & 7 & k-15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

(2) $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b}$

$\therefore A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

拡大係数行列は

$$(A \mid \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & k \end{array}\right) \xrightarrow{\text{簡約化}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right)$$

よって，解をもつ必要十分条件は $k = 1$．このときの解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (C_1 \text{は定数})$$

(3)

(2) の結果より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_2\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (C_2 \text{は定数})$$

(4) $B = A - E$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|B - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5-\lambda & 5-\lambda \\ 2 & -\lambda & 3 \\ 3 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -2-\lambda & 1 \\ 3 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

$-5 \cdot 19 + 7 \cdot 13 = -95 + 91$
$= -4$

よって、固有値は $\lambda = 5, -1$ (重解)

$\lambda = 5$について

$$B - \lambda E = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 0 & -19 & 13 \\ 0 & -19 & 13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 19 & 7 \cdot 19 & -5 \cdot 19 \\ 0 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 19 & 0 & -4 \\ 0 & 19 & -13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_1 = t_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 19 \end{pmatrix} \quad (t_1 \neq 0)$$

$\lambda = -1$について、　Aの簡約化より

$$B - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \boldsymbol{u}_2 = t_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t_2 \neq 0)$$

平成３１年度　大阪大学基礎工学部編入学試験

［数　　学］試験問題

受験番号	志望学科・コース
	学科　コース

問題３

外見や重さなどでは区別できない２枚のコインA, Bがある．コインを投げると必ず表か裏が出るものとし，コインAを投げたときに表が出る確率は a $(0 < a < 1)$ であり，コインBを投げたときに表が出る確率は $1-a$ であるとする．以下の問に答えよ．

(1) ２枚のコインを同時に投げたとき，２枚とも表である確率を求めよ．

(2) 無作為に１枚のコインを選び，試しに１回投げてみたところ表が出た．このコインがコインAである確率を求めよ．

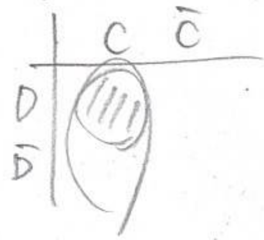
(3) 無作為に１枚のコインを選び，試しに１回投げてみたところ表が出た．このコインをもう１回投げたときに表が出る確率を求めよ．

(4) 無作為に１枚のコインを選び，試しに N 回続けて投げてみたところ表が n 回出た．このコインがコインAである確率を求めよ．

$$\frac{a^2}{4}+\frac{1}{4}(1-2a+a^2)=\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}$$

(1) $a(1-a)$

(2)
それぞれの事象を
C：無作為に1枚→表
D：コインがAである
とする．求める確率 $P_C(D)$ は



$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot a}{\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot(1-a)}=\frac{\frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}}$$

$$=a$$

(3) E：もう1回同じコインを投げて表
とする．

	C	C̄
E		
Ē		

求める確率 $P_C(E)$ は

$$P_C(E)=\frac{P(C\cap E)}{P(C)}=\cancel{\frac{\left(\frac{1}{2}\cdot a\right)^2+\left(\frac{1}{2}\cdot(1-a)\right)^2}{\frac{1}{2}\cdot a+\frac{1}{2}(1-a)}=\frac{\frac{a^2}{2}-\frac{a}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=a^2-a+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\cdot a\cdot a+\frac{1}{2}\cdot(1-a)\cdot(1-a)}{\ldots}=a^2+(1-2a+a^2)=2a^2-2a+1$$

(4)

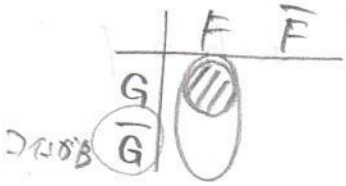
Ⓐ $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ オウオオ ―――― ウウオ　（オ×n，ウ×$(N-n)$）

Ⓑ $\xrightarrow{\frac{1}{2}}$ オウオオ ―――― ウウオ　（オ×n，ウ×$(N-n)$）

それぞれの事象を

　F：無作為に1枚 ⟶ N回中n回表

　G：コインがAである



とする．求める確率$P_F(G)$は

$$P_F(G)=\frac{P(F\cap G)}{P(F)}=\frac{P(F\cap G)}{P(F\cap G)+P(F\cap\overline{G})}$$

ここで，

$$P(F\cap G)=\frac{1}{2}\cdot {}_N C_n\, a^n(1-a)^{N-n}$$　（Aを選んでN回中n回表）

$$P(F\cap\overline{G})=\frac{1}{2}\cdot {}_N C_n\,(1-a)^n a^{N-n}$$　（Bを選んでN回中n回表）

$$\therefore\ P_F(G)=\frac{\frac{1}{2}\cdot {}_N C_n\, a^n(1-a)^{N-n}}{\frac{1}{2}\cdot {}_N C_n\, a^n(1-a)^{N-n}+\frac{1}{2}\cdot {}_N C_n\,(1-a)^n a^{N-n}}$$

$$=\frac{a^n(1-a)^{N-n}}{a^n(1-a)^{N-n}+(1-a)^n a^{N-n}}$$

$$\begin{array}{r} -1 \\ (1-a)\overline{)\,a} \\ a-1 \\ \hline 1 \end{array}$$