Выполнил: Карибджанов Матвей
Домашнее задание № 3

Нати все не нулевые компоненты тензора римана в метрике $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

По свойствам тензора римана в 2 мерье у него всего одна независимая компонента поэтому давате найдем:

$$R^i{}_{jij} = \Gamma^i{}_{jj,i} - \Gamma^i{}_{ij,j} + \Gamma^i{}_{il}\Gamma^l{}_{jj} - \Gamma^i{}_{jl}\Gamma^l{}_{ij} \tag{0.2}$$

Здесь не подразумеватся свертка по индексам ij а подчеркиватся свойство симметричноати по паре ниндксов, что в дальнешем может упротить решение, позволив занутить или тп каой-то член. Воспользуемся:

$$\partial_l g_{ij} = g_{mj}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{jl} = g_{jm}\Gamma^m_{il} + g_{im}\Gamma^m_{jl} \tag{0.3}$$

Перепишем это выражение

$$l = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \Gamma^1{}_{21} \\ \sin^2\theta\Gamma^2{}_{11} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{21} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{11} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{11} \\ \Gamma^1{}_{21} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{21} \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

Видим что $\Gamma^1{}_{11} = 0$

$$l = 2 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{12} & \Gamma^1{}_{22} \\ \sin^2\theta\Gamma^2{}_{12} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Gamma^1{}_{12} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{12} \\ \Gamma^1{}_{22} & \sin^2\theta\Gamma^2{}_{22} \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

Видим что $\Gamma^2{}_{22} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = 0$ и подставим в 0.4 получим что $\Gamma^2{}_{11} = 0$. Потому будем считать компонеты $\Gamma^2{}_{21}, \Gamma^2{}_{12}, \Gamma^1{}_{22}$

Из 0.4 следует:

$$2\sin\theta\cos\theta = 2\sin^2\theta\Gamma^2{}_{21} \implies \Gamma^2{}_{21} = \Gamma^2{}_{12} = \cot\theta \tag{0.6}$$

Из 0.5 следует:

$$-\sin^2\theta\Gamma^2{}_{12} = \Gamma^1{}_{22} \implies \Gamma^1{}_{22} = -\sin\theta\cos\theta \tag{0.7}$$

В итоге подставм в 0.2:

$$R^1{}_{212} = -\partial_\theta \cos\theta\sin\theta + 0 + 0 + \cos\theta\sin\theta\cot\theta = \sin^2\theta \tag{0.8}$$