Выполнил: Карибджанов Матвей
Домашняя работа № 9

Вывести уравнения описывающие теорию Бранса — Дикке, которая задаются действием:

$$S = \int_\Omega d^4x\sqrt{-g}\left(\varphi R - \omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi}\right) \tag{0.1}$$

$$\delta S = \int_\Omega d^4x\left(\varphi R - \omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi}\right)\delta\left(-g\right)^{1/2} + \left(-g\right)^{1/2}\delta\varphi R - \left(-g\right)^{1/2}\delta\omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi} \tag{0.2}$$

Варьирование по метрике:

$$\delta\varphi R = \varphi\delta R = \varphi\delta R_{ij}g^{ij} = \varphi g^{ij}\delta R_{ij} + \varphi R_{ij}\delta g^{ij} \tag{0.3}$$

$$\delta\omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi} = \omega\frac{\varphi^{,i}\varphi^{,j}}{\varphi}\delta g_{ij}\left(-g\right)^{-1/2} = \omega\left(-g\right)^{1/2}\frac{\varphi^{,i}\varphi^{,j}}{\varphi}\left[\delta g_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}g^{kl}\delta g_{kl}\right] \tag{0.4}$$

Для приведения всего к одному виду в 0.4 надо раскрыть скобки перименовть немые индексы во втором слагаемом.

$$\frac{\varphi^{,i}\varphi^{,j}}{\varphi}\left[\left(-g\right)^{1/2}\delta g_{ij} - \frac{1}{2}\left(-g\right)^{1/2}g_{ij}g^{kl}\delta g_{kl}\right] = \frac{\varphi^{,i}\varphi^{,j}}{\varphi}\left(-g\right)^{1/2}\delta g_{ij} - \frac{1}{2}\left(-g\right)^{1/2}\frac{\varphi^{,l}\varphi_{,l}}{\varphi}g^{ij}\delta g_{ij} \tag{0.5}$$

Упростим 0.3, для первого слагаемого можно сразу домножить на $\left(-g\right)^{1/2}$ тк этот множитель стоит перед 0.3 в 0.2:

$$\left(-g\right)^{1/2}\varphi g^{ij}\delta R_{ij} = \varphi\left(g^{jk}\delta\Gamma^i_{jk} - g^{ji}\delta\Gamma^k_{jk}\right)_{,i} = \cancel{\left(\varphi g^{jk}\delta\Gamma^i_{jk} - \varphi g^{ji}\delta\Gamma^k_{jk}\right)_{,i}} - \varphi_{,i}\left(g^{jk}\delta\Gamma^i_{jk} - g^{ji}\delta\Gamma^k_{jk}\right) \tag{0.6}$$

Теперь варьируем Γ^i_{jk} она у нас была на лекции, в принципе как и R_{ij}

$$\delta\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il}\left[\left(\delta g_{lj}\right)_{;k} + \left(\delta g_{lk}\right)_{;j} - \left(\delta g_{jk}\right)_{;l}\right] \tag{0.7}$$

Для удобства заметим, что если по теорме Гаусса-Остроградского интеграл занулился для обычной производной, то он также занулится и для ковариантной производной, так как мы можем прейди в СО где $\nabla_i \to \partial_i$ посчитать интеграл и вернуться, так же вспомним $g_{ij;k} = 0$:

$$-\varphi_{,i}g^{jk}\delta\Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{2}\varphi_{,i}g^{jk}g^{il}\left[\left(\delta g_{lj}\right)_{;k} + \left(\delta g_{lk}\right)_{;j} - \left(\delta g_{jk}\right)_{;l}\right] = \frac{1}{2}g^{jk}g^{il}\left[\varphi_{,i;k}\delta g_{lj} + \varphi_{,i;j}\delta g_{lk} - \varphi_{,i;j}\delta g_{jk}\right] \tag{0.8}$$

$$\varphi_{,i}\varphi g^{ji}\delta\Gamma^k_{jk} = \frac{1}{2}\varphi_{,i}g^{ji}g^{kl}\left[\left(\delta g_{lj}\right)_{;k} + \left(\delta g_{lk}\right)_{;j} - \left(\delta g_{jk}\right)_{;l}\right] = -\frac{1}{2}g^{ji}g^{kl}\left[\varphi_{,i;k}\delta g_{lj} + \varphi_{,i;j}\delta g_{lk} - \varphi_{,i}\delta g_{jk}\right] \tag{0.9}$$

Поднятие индексоа и переиминовывание покажут, равентво перого члена из 0.9 с последниего из 0.8, а налогично для перого из 0.8 и последнего 0.9, а среднии члены в свою очередь взаимосократятся, поэтому получим:

$$\left(-g\right)^{1/2}\varphi g^{ij}\varphi\delta R_{ij} \Rightarrow \left[-\varphi_{,i;j} + g_{ij}\varphi^{;l}_{,l}\right]\left(-g\right)^{1/2}\delta g^{ij} \tag{0.10}$$

Варирование втрого члена из 0.4, я проводить не буду, так как результат известен с леции, там получится тензор Эйнштейна. Поэтому вспоминим о вкладе материи в действие:

$$16\pi\frac{\delta\mathcal{L}_m}{\delta g_{ij}} = -8\pi T^{ij} \tag{0.11}$$

Тогда просумировав :

$$8\pi T_{ij} = \omega\frac{\varphi_{,i}\varphi_{,j} - \frac{1}{2}g_{ij}\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi} - G_{ij}\varphi \tag{0.12}$$

Тепрь рассмтрим вриацию по полю, первый член из 0.2 занулится:

$$(-g)^{1/2}\,\delta\varphi R = (-g)^{1/2}\,R\delta\varphi \tag{0.13}$$

$$(-g)^{1/2}\,\delta\omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi} = (-g)^{1/2}\,\omega\varphi_{,i}\varphi^{,i}\delta\frac{1}{\varphi} + (-g)^{1/2}\,\omega\frac{1}{\varphi}\delta\varphi_{,i}\varphi^{,i} = -\,(-g)^{1/2}\,\omega\varphi_{,i}\varphi^{,i}\,\frac{1}{\varphi^2}\delta\varphi + 2\omega\partial_i\left(\frac{\varphi_{,i}\,(-g)^{1/2}}{\varphi}\right)\delta\varphi \tag{0.14}$$

Для второго слагаемого снова воспользовался к теоремой Гаусса-Остроградского, а коэф. 2 появился из-аз двух одинаковых $\varphi^{,i}$ и $\varphi_{,i}$. Материя не дает вклад в варицию по полю, поэтому в итоге вариация по полю даст нам:

$$(-g)^{1/2}\left(\omega\frac{\varphi_{,i}\varphi^{,i}}{\varphi^2} + R\right) + 2\omega\partial_i\frac{\varphi_{,i}\,(-g)^{1/2}}{\varphi} = 0 \tag{0.15}$$