Доказать $g_{,k} = gg^{ij}g_{ij,k}$.
Предлагаю рассмотреть равенство:

$$\ln\left(\det\left(g_{ij}\right)\right) = \mathrm{Tr}\ln g_{ij} = \delta_i^j \ln g_{ij} \tag{0.1}$$

Продифференцируеме его, спарава получим:

$$\frac{\partial \delta_i^j \ln g_{ij}}{\partial x^k} = \delta_i^j \frac{\partial \ln g_{ij}}{\partial x^k} = \delta_i^j \frac{g_{nj,k}}{g_{ni}} = \delta_i^j g^{ni} g_{nj,k} = g^{ni} g_{ni,k} \tag{0.2}$$

Слева получим:

$$\frac{\partial \ln\left(g\right)}{\partial x^k} = \frac{g_{,k}}{g} \tag{0.3}$$

$$\frac{g_k}{g} = g^{ni} g_{ni,k} \implies g_{,k} = gg^{ni} g_{ni,k} \tag{0.4}$$