Выполнил: Карибджанов Матвей
Домашняя работа № 6

Надем вектора Киллинага в системе с метрикой:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Из дз 3 мы уже знаем что в такой системе не нелулевыми будут только компонетами афинной связности будут ${\Gamma^2}_{21}, {\Gamma^2}_{12}, {\Gamma^1}_{22}$, они имеют следующие значения:

$${\Gamma^2}_{21} = {\Gamma^2}_{12} = \cot\theta,\ {\Gamma^2}_{11} = -\sin\theta\cos\theta \tag{0.2}$$

Теперь подставим в формулу

$$\xi_{i;j} + \xi_{i;j} = \xi_{i,j} - \xi_k {\Gamma^k}_{ij} + \xi_{j,i} - \xi_k {\Gamma^k}_{ji} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} - 2\xi_k {\Gamma^k}_{ji} \tag{0.3}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta} \\ \frac{\partial\xi_2}{\partial\varphi} & \frac{\partial\xi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial\xi_1}{\partial\varphi} & \frac{\partial\xi_2}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial\xi_1}{\partial\theta} & \frac{\partial\xi_2}{\partial\theta} \end{pmatrix} - 2\xi_2 \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\theta & \cot\theta \\ \cot\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

Перкпишем в виде:
Из из элемента мариц 22 поймем что:

$$\xi_2 = \xi_2(\varphi) \tag{0.5}$$

Подставим в 11:

$$\xi_1 = -2\sin\theta\cos\theta \int \xi_2 d\varphi + C(\theta) \tag{0.6}$$

А теперь посмтрим что в побочной диаганали:

$$\xi_2' + \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \int \xi_2 d\varphi + C'(\theta) = 2C(\theta)cot(\theta) - 2\cos^2\theta \int \xi_2 d\varphi \tag{0.7}$$

$$\xi_2' + \int \xi_2 d\varphi = -C'(\theta) + 2C(\theta)\cot\theta \tag{0.8}$$

Можем разбить на 2 уравнения:

$$\xi_2' + \int \xi_2 d\varphi = b \tag{0.9}$$

$$C'(\theta) - 2C(\theta)\cot\theta = -b \tag{0.10}$$

$$\xi_2 = d\cos\varphi + a\sin\varphi \tag{0.11}$$

$$C(\theta) = (b\cot\theta + f)\sin^2\theta \tag{0.12}$$

Так как для решения 0.11 я дифференцировал то теряю ин формацию об одной костанте поэтому надо подтавить и востановить:

$$-d\sin\varphi + a\cos\varphi + d\sin\varphi - a\cos\varphi = b \implies b = 0 \tag{0.13}$$

В итоге получим:

$$C(\theta) = f\sin^2\theta \tag{0.14}$$

$$\xi_2 = d\cos\varphi + a\sin\varphi \tag{0.15}$$

$$\xi_i = \begin{pmatrix} f\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta\,(d\sin\varphi - a\cos\varphi) \\ d\cos\varphi + a\sin\varphi \end{pmatrix} \tag{0.16}$$