Выполнил: Карибджанов Матвей
Домашняя работа № 4

Содержание

1. Задние

Доказать что:

$$A^i{}_{;i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}A^i\right) \tag{1.1}$$

Справа получим:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}A^i\right) = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^i}A^i + \sqrt{-g}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\frac{\partial g}{\partial x^i}A^i + \sqrt{-g}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{g g_{jk} g^{jk}{}_{,i}}{2\sqrt{-g}}A^i + \sqrt{-g}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} \tag{1.2}$$

Слева распишем по определению:

$$A^i{}_{;i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^j{}_{lj}A^l \tag{1.3}$$

Седеним и сократим что можем:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma^j{}_{lj}A^l = \frac{1}{\cancel{\sqrt{-g}}}\frac{\cancel{g} g_{jk} g^{jk}{}_{,i}}{2\cancel{\sqrt{-g}}}A^i + \frac{\sqrt{-g}}{\cancel{\sqrt{-g}}}\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{2}g_{jk}g^{jk}{}_{,i}A^i + \frac{\partial A^i}{\partial x^i} \tag{1.4}$$

$$\cancel{\frac{\partial A^i}{\partial x^i}} + \Gamma^j{}_{lj}A^l = \frac{1}{2}g_{jk}g^{jk}{}_{,i}A^i + \cancel{\frac{\partial A^i}{\partial x^i}} \tag{1.5}$$

Теперь поиграемся:

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \frac{1}{2}\left(g_{ij,k} + g_{ik,j} - g_{jk,i}\right) + \frac{1}{2}\left(g_{ji,k} + g_{jk,i} - g_{ik,j}\right) = g_{ij,k} \tag{1.6}$$

$$g^{ij}{}_{,k} = -\left(\Gamma_{lnk} + \Gamma_{nlk}\right) g^{nj} g^{li} \tag{1.7}$$

$$g_{jk}g^{jk}{}_{,i} = -\left(\Gamma_{lni} + \Gamma_{nli}\right) g^{nk} g^{lj} g_{jk} = -\left(\Gamma_{lni} + \Gamma_{nli}\right) g^{nl} = 2\Gamma^l{}_{li} = 2\Gamma^l{}_{il} \tag{1.8}$$

Подставляем в 1.5 и получем верное тождество.

2. Задание

Доказать что:

$$\Gamma^{i}{}_{ij} = \ln \sqrt{-g}_{,j} \tag{2.1}$$

Как всегда начнем с права:

$$\ln \sqrt{-g}_{,l} = \frac{g_{,l}}{2g} = \frac{1}{2} g^{ij} g_{ij,l} \tag{2.2}$$

Из предыдущей дз мы знаем чему равно $g_{'j}$, так же я уже считал $g^{ij} g_{ij,l}$ в 1.8поэтому равентсво очевидно.