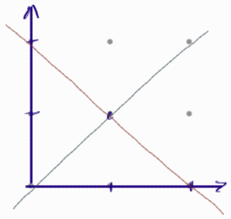
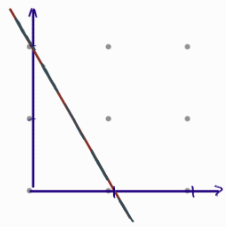
$\hat{A}x = b$

① $\det A = 0$ $\qquad \vec{x} = b\hat{A}^{-1}$



$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

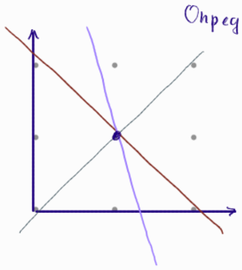
③ $\det A = 0$ Неопределенная система



$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 6 \end{cases}$

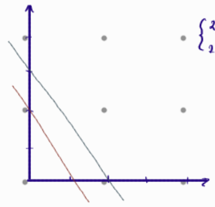
② $A_{m\times n}$ $\quad m \neq n$ $\qquad \vec{x} = b\hat{A}^{+}$

Опред. система



$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$

④ Несовместимая система



$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 6 \end{cases}$

Опр.

Пусть $Ax = b$, $A_{m\times n}$, u - псевдорешение если $\forall \vec{x}$ $\quad |Ax - b| \geqslant Au - b$

Теорема

Вектор $u = U^{+}b$ яв. псевдорешением, причем среди всех решений это решение наименьшее.

Лемма

$\mathrm{Im}\big(\underbrace{AA^{+} - \mathbb{1}}_{M}\big) \perp \mathrm{Im}(A)$

◀ $\forall x$ $\qquad \mathrm{Ker}(\hat{x}^{*}) \perp \mathrm{Im}(\hat{x})$

ядро $\qquad \vec{k} \in \ker(X^{*}) \Leftrightarrow X^{*} \cdot \vec{k} = 0$ $\quad$ или $\forall x_i^{*} \Leftrightarrow \langle x^i, k\rangle = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle \omega, k\rangle = 0$ для $\omega = \omega_1 x^1 + \ldots + \omega_n x^n \in \mathrm{Im}\, X$

Поэтому достаточно доказать $\mathrm{Im}\, M \in \ker A^{*}$ то есть

что $\forall x \Leftrightarrow \hat{A}^{\dagger}\hat{M}\cdot\vec{x} = 0 \Rightarrow \hat{A}^{\dagger}\hat{M} = \hat{0} = \hat{A}^{\dagger}(\hat{A}\hat{A}^{+} - \hat{\mathbb{1}}) \Rightarrow \big((AA^{+} - \mathbb{1})\cdot A\big)^{\dagger} = \big((AA^{+} - \mathbb{1})A\big)^{\dagger} = (AA^{+}A - A)^{\dagger} = 0$

■

Докажем теорему

◀ Пусть $u = A^{+}b$

Представим: $Ax - b = Ax - Au + Au - b = Ax - AA^{+}b + AA^{+}b - b = \underbrace{A(x - A^{+}b)}_{p} + \underbrace{(AA^{+} + \mathbb{1})b}_{q}$

$q \perp p \Rightarrow$ по теореме Пифагора $\quad p \leq Ax - b$

Докажем единственность, пусть есть x - другое псевдореш. Пусто $w = x - u$.

$$\langle u, w \rangle = u^* w = (A^+ b)^\dagger w = b^\dagger A^{+\dagger} w = b^\dagger A^{+\dagger} A^+ A w = 0$$

■

Задание доказать $\operatorname{Im} AA^+ = \operatorname{Im} AA^\dagger = \operatorname{Im} A$

◀ $\operatorname{Im}(AA^+) = \{AA^+\vec{x} \mid x \in \mathbb{C}^n\}$

$\operatorname{Im} A = \{A\vec{x} \mid x \in \mathbb{C}^n\}$

Если $w \in \operatorname{Im} AA^\dagger$ то $w = AA^\dagger \cdot x = A(A^\dagger \cdot x) \in \operatorname{Im} A$

Если $v \in \operatorname{Im} A$ то $v = Ax = AA^+Ax = AA^+(Ax) \in \operatorname{Im} AA^+$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} A \in \operatorname{Im} AA^+$, $\operatorname{Im} AA^+ \in \operatorname{Im} A$ $\Rightarrow$ $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AA^+$

$$A(A^+A)^\dagger y = AA^\dagger A^{+\dagger} y = AA^\dagger w \in \operatorname{Im} AA^*$$

■

Задание доказать $C = AU$ где U - унитарная то

$$C^+ = U^+ A^+ = U^\dagger A^+ = (AU)^+$$

Задание док. $(AB)^+ \neq B^+ A^+$

◀ Контр. пример $A = (1 \quad 0)$ $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ■