Псевдобратная матрица

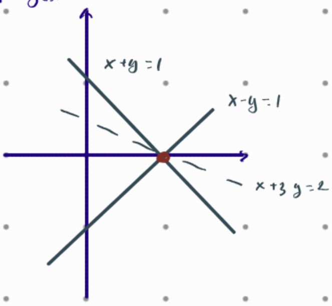
Хотим $\hat{A}^{-1}_{n\times m}$ обратная к $\hat{A}_{m\times n}$ если: $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \mathbb{1} = \hat{A}^{-1}\hat{A}$

$\exists \hat{A}^{-1}$, $\hat{A}_{m\times n}$: $m = n$, $\det \hat{A} \neq 0$

$Ax = b$

① Система определена

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$$

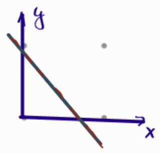


$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$x = A/b$

②

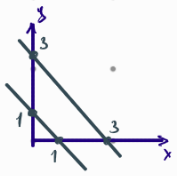
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$



$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

③ Неопределенная

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\hat{x} = ?\cdot b$ – хотелось бы найти правдо подобное приближ. если знаем что решение должно быть

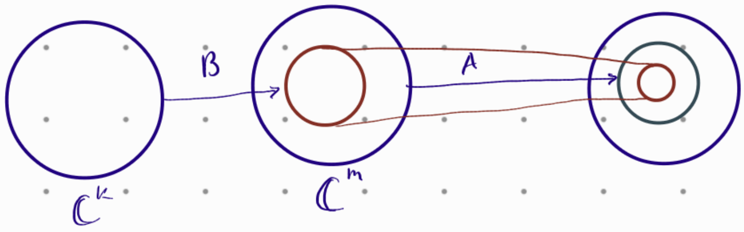
Обобщение

1. Должно удовлетворять

$\hat{A}\hat{A}^{-1} = \mathbb{1}$ при $m = n$

Вспоминаем о ранге

$rag(A) = \max\{$кол. лин. нез. столб.$\} = \dim(\mathrm{Im}\, A) = \dim\{A\vec{x} \mid x \in \mathbb{C}^n\}$



$rag(AB) \leq \max\{rag\, A, rag\, B\}$

Обобщаем свойства так чтобы объект был единственным но решение оставалось верным.

Например свойство $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \mathbb{1}$ для обобщаем $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}$

<u>Опр.</u> $A_{m\times n}$, $a \in A_{m\times n}$: $a \in \mathbb{C}$, C - псевдообратна к A если $\Leftrightarrow$

1. $ACA = A$
2. $CAC = C$
3. $(AC)^{\dagger} = AC$
4. $(CA)^{\dagger} = CA$

$$(AC)^{\dagger} = C^{\dagger}A^{\dagger}$$

<u>Теор.</u> Если $\exists C$ то $!\exists C$

◀ Пусть $\exists C$ уд. 1-4 и $\exists B$ уд. 1-4

$$AB \overset{1}{=} ACA \cdot B = (AC)(AB) \overset{3}{=} (AC)^{\dagger}(AB)^{\dagger} = C^{\dagger}A^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger} = C^{\dagger}(A^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}) = C^{\dagger}(ABA)^{\dagger} =$$
$$= C^{\dagger}A^{\dagger} = AC$$

Аналогично $BA = CA \Rightarrow B \overset{2}{=} BAB = CAB = CAC \overset{2}{=} C$ ■

<u>Пример.</u>

1. Если $A_{n\times n}$ $\det A \neq 0$ то $C = A^{-1}$
2. Если $A_{m\times n}$ $a \in A$ $a = 0$ то $C = A^{\dagger}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \underbrace{\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{n} m \Rightarrow C = \underbrace{\begin{pmatrix} B^{+} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{m} n$ $\qquad$ B^{+} - псевдобратная
5. $A = |x\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow C = \dfrac{\langle x|}{\langle x|x\rangle}$

Еще свойства

- $(A^+)^+ = A$
- $(A^t)^+ = (A^+)^t$
- $\mathrm{rag}\, A = \mathrm{rag}\, A^+$ ◀ Допустим что нетик то

Лем. $\mathrm{rag}(A^tA) = \mathrm{rag}\, A$

◀ $\mathrm{rk}\, A^t \le \mathrm{rk}\, A$

$$A \overset{1}{=} AA^+A = (AA^+)A \overset{3}{=} (AA^+)^t A = A^{+t}A^tA \Rightarrow \mathrm{rk}\, A \le \mathrm{rk}\, A^*A \quad \blacksquare$$

Теорема 2 Если $\mathrm{rk}\, A = n$ A-матр. полного столбцового ранга, то

A^+ сущ. и $A^+ = (A^tA)^{-1}A^t$

◀ 1. $A(A^tA)^{-1}A^tA = A\mathbb{1} = A$

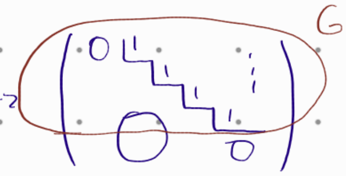
2. $CAC = (A^tA)$

Разложение полного ранга

Пусть A $m \times n$ $\mathrm{rk}\, A = r$

Найдем G, F: $A = FG$ где F $m \times r$ G $r \times n$

$\mathrm{rk}\, F = \mathrm{rk}\, G = r$

$A \to$ 

$$F = (A^{j_1} | A^{j_2} | \dots | A^{j_r})$$

Теорема 3.

Для $\forall A \ \exists A^{+}$ причём:

$$A^{+} = G^{+} \cdot F^{+} = G^{\dagger}(GG^{\dagger})^{-1} \cdot (F^{\dagger}F)^{-1} \cdot F^{\dagger}$$

◀ 2. $CAC = G^{+}F^{+}FGG^{+}F^{+} \Rightarrow F^{+}F = \mathbb{1} \quad GG^{+} = \mathbb{1} \Rightarrow CAC = G^{+}\mathbb{1}\mathbb{1}F^{+} = C$

3. $(AC)^{\dagger} = FGG^{+}F^{+} = F\mathbb{1}F^{+} = FF^{+} = F(F^{\dagger}F)^{-1}F^{\dagger} = AC$ ■

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} F \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} j_1 \quad j_2 \qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} G \end{array}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$GG^{\dagger} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5/6 & -1/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$G^{+} = G^{+}(GG^{\dagger})^{-1} = 1/6 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F^{+} = (F^{\dagger}F)^{-1}F^{\dagger} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 13 & -4 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$