

1. Две сопротивленные плоские когерентные монохроматические электромагнитные волны складываются. Одна имеет амплитуду E_0 и плоскую поляризацию, а вторая — амплитуду E_0 и круговую поляризацию. Какие значения может принимать поляризация суммарной волны?

① лин. поляризация

$$|E_1\rangle = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t)$$

② круговая

$$|E_2\rangle = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t + i\varphi)$$

$$\begin{aligned} |E_s\rangle &= |E_1\rangle + \hat{M}(\theta) |E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix} \cos\theta & -i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} |E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix} \exp(-i\theta) \\ i\exp(-i\theta) \end{pmatrix} |E_2\rangle = \\ &= E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t) + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t + i\varphi - i\theta) = \boxed{\begin{array}{l} \text{Получил что сдвиг и} \\ \text{поворот можно задать} \\ \text{одной переменной} \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{Замена} \\ \varphi = \varphi - \theta \end{array}} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t) + E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t + i\varphi) = \\ &= E_0 \begin{pmatrix} 1 + \exp(i\varphi) \\ i \exp(i\varphi) \end{pmatrix} \exp(i k z - i \omega t) \end{aligned}$$

Первое предположение найти длину $|E_s\rangle$

$$\begin{aligned} L^2(\xi, \zeta) &= E_0^2 \left(\operatorname{Re} \left\{ (1 + \exp(i\varphi)) \exp(i\xi) \right\}, \operatorname{Re} \left\{ i \exp(i\varphi) \exp(i\xi) \right\} \right) \left(\operatorname{Re} \left\{ (1 + \exp(i\varphi)) \exp(i\zeta) \right\}, \operatorname{Re} \left\{ i \exp(i\varphi) \exp(i\zeta) \right\} \right) = E_0^2 \left(\cos \xi + \cos(\xi + \zeta), \sin(\xi + \zeta) \right) \left(\frac{\cos \zeta + \cos(\xi + \zeta)}{\sin(\xi + \zeta)} \right) + E_0^2 [\cos(\xi + \zeta) + \cos \xi]^2 + E_0^2 \sin^2(\xi + \zeta) \\ L(\xi, \zeta) &= E_0 \sqrt{[\cos(\xi + \zeta) + \cos \xi]^2 + \sin^2(\xi + \zeta)} \end{aligned}$$

Здесь ξ отвечает за координату в пространстве времени то есть $\xi = k z - \omega t$, а ζ это параметр отвечающий за относительное расположение волн, за все $L: \mathbb{R}_{\xi} \rightarrow [\xi_{\min}, \xi_{\max}]$, очевидно, что ξ_{\min} отвечает за меньшую позицию а ξ_{\max} за большую. Тогда остается найти $\min[L(\xi)] = \xi_{\min}$

$$\xi = \frac{\xi_{\min}}{\xi_{\max}} - \text{степень поляризации}$$

Во втором случае:

$$Z(\zeta) = \frac{\xi_{\min}(\zeta)}{\xi_{\max}(\zeta)}$$

Итак есть надо найти

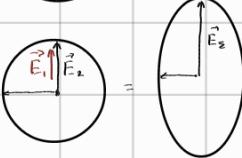
$$\min[Z(\zeta)], \max[Z(\zeta)]$$

$$\xi_{\min} = \pi n, \quad \xi_{\max} = 0$$

$\min[Z(\zeta)] = 0$ что соответствует линейной поляризации.



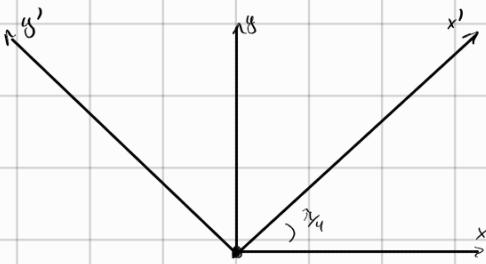
$\max[Z(\zeta)] = 1/2$ что соответствует эллиптической поляризации.



Расчеты в Desmos

2. Аналогично предыдущей задаче складываются две волны эллиптической поляризации (обе степень поляризации 1/2), амплитудами E_0 и $2E_0$. Длинная полуось первого эллипса направлена вдоль Ox , а второго эллипса - под углом $+45^\circ$ к оси Ox . В каких пределах может меняться амплитуда, направление и степень эллиптичности суммарной волны?

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{E_0} &= \frac{1}{2} \Rightarrow |E(r)\rangle = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{i(kr - i\omega t + iq)} \\ \frac{E_y}{E_0} &= \frac{1}{2} \Rightarrow |E(r)\rangle = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{i(kr - i\omega t)} \\ E_y &= 2E_0 \end{aligned}$$



$$|E(r)\rangle = \hat{M}(\gamma_q) |E(r)\rangle = E_0 \begin{pmatrix} \cos \gamma_q & -\sin \gamma_q \\ \sin \gamma_q & \cos \gamma_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} e^{i(kr - i\omega t)} = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+2i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e^{i(kr - i\omega t)}$$

Теория резонансных генераторов
Майер

$$|E_z\rangle = |E_x\rangle + |E_y\rangle = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t + iq)} + \frac{1+2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t)} \\ i \frac{1-2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t + iq)} + \frac{1+2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t)} \end{pmatrix} e^{i(kr)}$$

По второму ходу $\mathcal{L}(t, \psi, r)$

Действительная часть E_x

$$\frac{1}{2} (\cos(\pm t + q) \cos(r) - \sin(\pm t + q) \sin(r)) + \frac{\cos(t) \cos(r) - \sin(t) \sin(r) + 2 \sin(t) \cos(r) + 2 \cos(t) \sin(r)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cos(\pm t + q + r) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(t + r) + 2 \sin(t + r)] = E_x$$

Действительная часть E_y

$$-\sin(\pm t + q) \cos(r) - \sin(\pm t + q) \cos(r) + \frac{\cos(t) \cos(r) - \sin(r) \sin(r) - 2 \sin(t) \cos(r) - 2 \sin(r) \cos(t)}{\sqrt{2}} = -\sin(\pm t + q + r) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(t + r) + 2 \sin(t + r)] = E_y$$

$$\mathcal{L}(t, r, q) = \left\{ \left(-\sin(\pm t + q - r) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(t + r) + 2 \sin(t + r)] \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cos(\pm t + q - r) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(t + r) + 2 \sin(t + r)] \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

Пять врачающихся 6 различных сторонам

Факт сопараллельного вращения

$$\max[\zeta] = 0.554$$

$$\max[\zeta] = 0.748$$

$$\min[\zeta] = 0.065$$

$$\min[\zeta] = 0.128$$

Теперь предлагают найти возможные направления.

① Если вращ. сопараллельны τ_0 , можно обозначить переменные вращения и координаты

$$E(\xi, \eta) = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos(\xi + \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \xi + 2 \sin \xi] \\ -\sin(\xi + \eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos \xi - 2 \sin \xi] \end{pmatrix}$$

$$|E_z\rangle = |E_x\rangle + |E_y\rangle = E_0 \begin{pmatrix} \frac{1-2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t + iq)} + \frac{1+2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t)} \\ i \frac{1-2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t + iq)} + \frac{1+2i}{\sqrt{2}} e^{i(kr - i\omega t)} \end{pmatrix} e^{i(kr)}$$

Представим 6 вида $|E_z\rangle = |b_1\rangle + i|b_2\rangle$ такие что $|b_1\rangle, |b_2\rangle \in \mathbb{R}^2$, $\langle b_1|b_2\rangle = 0$, в таком случае

$|b_1\rangle, |b_2\rangle$ будут линейно независимыми. Тогда:

$$\langle E_z|E_z\rangle = b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2$$

$$\begin{aligned} A &= |E_z| = \frac{1}{2} \sqrt{11+2\sqrt{2}\cos\delta+4\sqrt{2}\sin\delta} \\ B &= |E_y| = \frac{1}{4} \sqrt{66+32\sqrt{2}\cos\delta+16\sqrt{2}\sin\delta} \end{aligned}$$

$$[\vec{E}_z, \vec{E}_z^*] = -i[\vec{b}_1, \vec{b}_2] = AB \cos(\arg(E_{\text{Ex}}))$$

Доказан $\operatorname{Re}\{\langle E_z|b_2\rangle \langle b_1|E_z\rangle\} = 0$

$$\langle E_z|b_2\rangle \langle E_z|b_1\rangle = \underbrace{\langle b_1|b_2\rangle}_{0} \underbrace{\langle b_2|b_1\rangle}_{0} = \underbrace{i \langle b_1|b_1\rangle \langle b_2|b_2\rangle}_{\operatorname{Im}} = \underbrace{i \langle b_1|b_1\rangle \langle b_2|b_2\rangle}_{\operatorname{Re}} = \operatorname{Im}$$

Отсюда можно найти:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2AB \cos[\arg(E_x E_y)]}{A^2 + B^2} \quad (1)$$

① Для сопротивленных брауз.

$$|E_z\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{1-2i}{\sqrt{2}} \exp(-i\psi)} \\ i + \frac{1+2i}{\sqrt{2}} \exp(-i\psi) \end{pmatrix} \exp[ikr - iw t + i\psi] = |L = kn - w t + i\psi\rangle$$

Построение выражение 1 в векторном полуподграфик

1. Коэффициент преломления для систем без магнитных моментов можно считать равным корню из диэлектрической проницаемости. Диэлектрическая проницаемость плазмы дается формулой

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

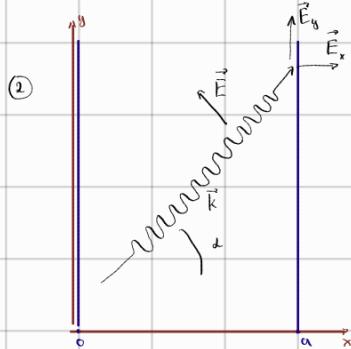
Каковы фазовая и групповая скорости электромагнитной волны в плазме?

Каковы фазовая и групповая скорости электромагнитной волны, распространяющейся в пространстве между двумя параллельными металлическими плоскостями с межплоскостным расстоянием a ?

$$(1) \quad n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

$$U_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow ck = \omega n = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}$$

$$U_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{ck^2}{\sqrt{c^2 k^2 + \omega_p^2}}$$



$$|E\rangle = \begin{pmatrix} \sin \lambda \\ \cos \lambda \end{pmatrix} \exp(i k_x x + i k_z z - i \omega t)$$

$$|E(x=a)\rangle = \text{Re} \left\{ -\cos \lambda \exp(-i \omega t) \right\} = 0 \Rightarrow \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|E(x=0)\rangle = \text{Re} \left\{ -\cos \lambda \exp(i k_x a + i k_z a \tan \lambda - i \omega t) \right\} = 0 \Rightarrow \cos(k_x a + k_z a \tan \lambda + \frac{\pi}{2} + \pi n) = 0 \Rightarrow$$

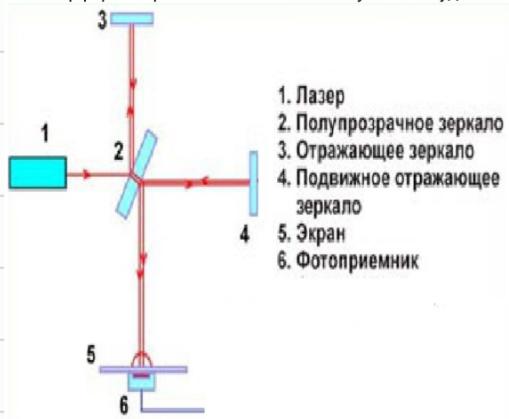
$$k_x a + k_z a \tan \lambda = \pi n \Rightarrow k_x a + k_x \frac{\tan \lambda}{\tan \lambda} = \pi n \Rightarrow k_x = \frac{\pi n}{a}$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 + k_z^2$$

$$\Rightarrow U_f = \frac{\omega}{k_z} = \frac{c}{k_z} \sqrt{k_z^2 + \frac{\pi^2 n^2}{a^2}}$$

$$U_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_z} = \frac{\partial c k_z}{\partial k_z} = \frac{c k_z}{\sqrt{k_z^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2}}$$

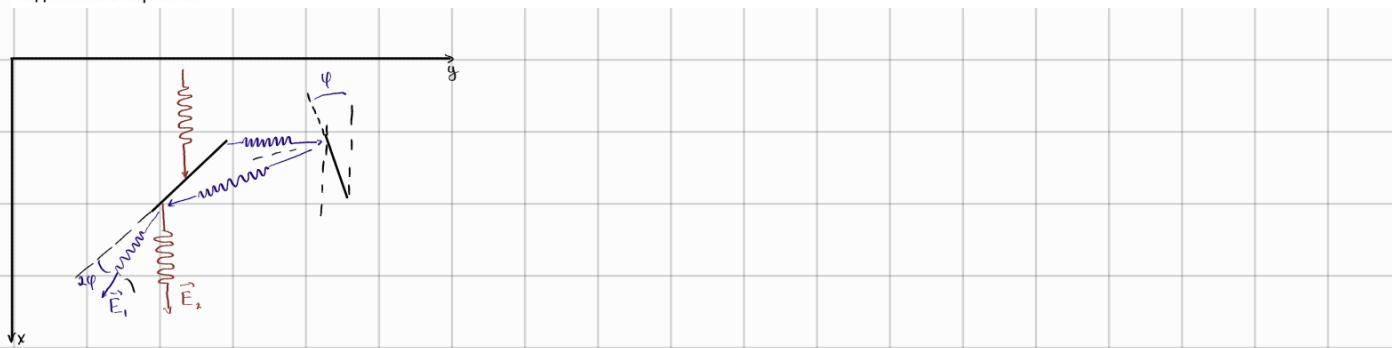
2. Интерферометр Майкельсона используется в студенческой лаборатории для измерения малых смещений подвижного отражающего зеркала.



Интерферометр хорошо настроен, так что в плоскости детектора наблюдаются не полосы, а однородная освещенность.

Для оцифровки детектора используется плата Arduino с 10 бит АЦП, при этом усиление настроено так, что полная амплитуда сигнала соответствует полной шкале оцифровщика.

Считая, что точность измерения определяется только дискретностью АЦП определить предельную чувствительность данного прибора по измерению малых смещений подвижного зеркала.



$$\Delta\varphi = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos \vartheta$$

$$I = I_0 (1 - \cos 2\Delta\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{1}{2^{10}} = \left[1 - \cos \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \cos \vartheta \right) \right] \Rightarrow \frac{1}{2^{10}} \approx \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{2} \cos^2 \vartheta \Rightarrow \vartheta = \arccos \frac{\lambda}{8\pi^2 d^2 2^{10}} \approx \frac{\lambda}{8\pi^2 d^2 2^{10}}$$