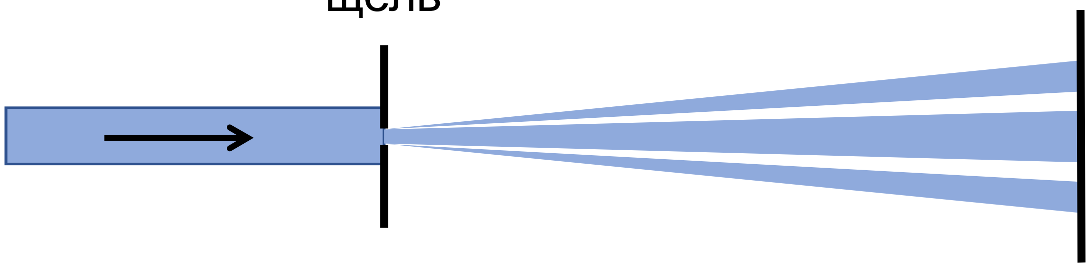
Дифракция излучения – огибание препятствий световой волной

Х.Гюйгенс (1629-1695), кольца Сатурна, маятниковые часы

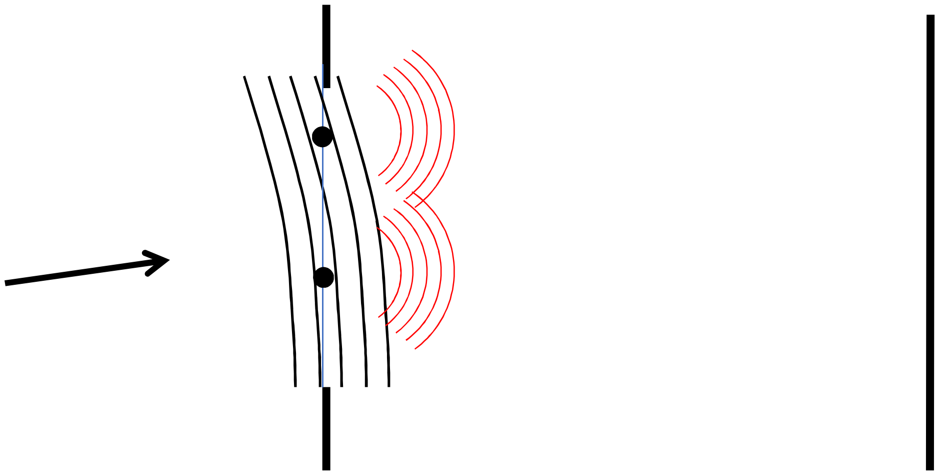
О.Френель (1788-1827), поперечность световых волн, поляризация света при отражении и преломлении, дифракция как интерференция точечных источников

Дж.Максвелл (1831-1879), теория электромагнитных волн (*)

Г.Кирхгоф (1824-1887)



Принцип Гюйгенса-Френеля



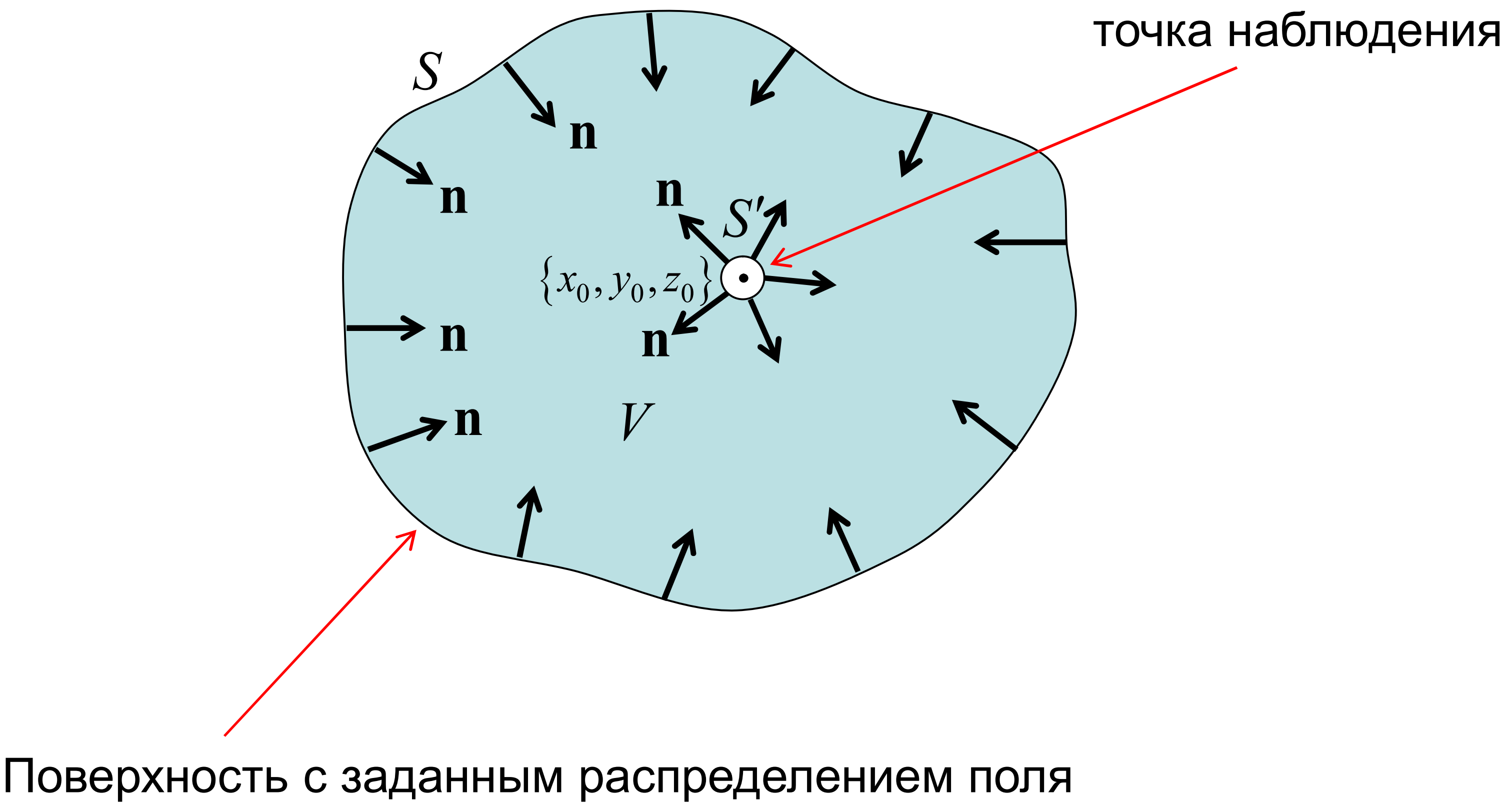
плоскость наблюдения

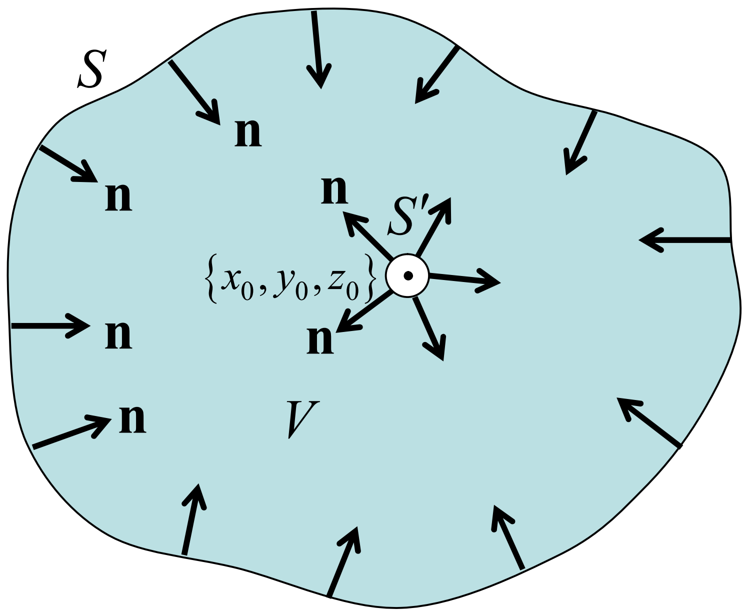
Картина дифракции = сумма полей (интерференция) точечных источников на исходной поверхности:

- поля точечных источников заданы падающим полем;

- каждое точечное поле - сферическая волна.

ТЕОРИЯ ДИФРАКЦИИ КИРХГОФА, 1883 г.
Уравнения Максвелла* 1864 г.





Конечный результат теории Кирхгофа:

$$E(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$

Формула Остроградского-Гаусса:

1 $$\iiint\limits_V u\,\Delta v dxdydz = \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$\Delta v = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v(x,y,z) \qquad \frac{\partial v}{\partial n} = (\mathrm{grad}\, v\cdot\mathbf{n}) = \frac{\partial v}{\partial x}n_x+\frac{\partial v}{\partial y}n_y+\frac{\partial v}{\partial z}n_z$$

(сходство с интегрированием «по-частям»)

2 $$\iiint\limits_V v\Delta u\, dxdydz = \iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}ds - \iiint\limits_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)dxdydz$$

Разность: $$\iiint\limits_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)dxdydz = \iint\limits_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

$$\iiint\limits_V (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,dxdydz = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

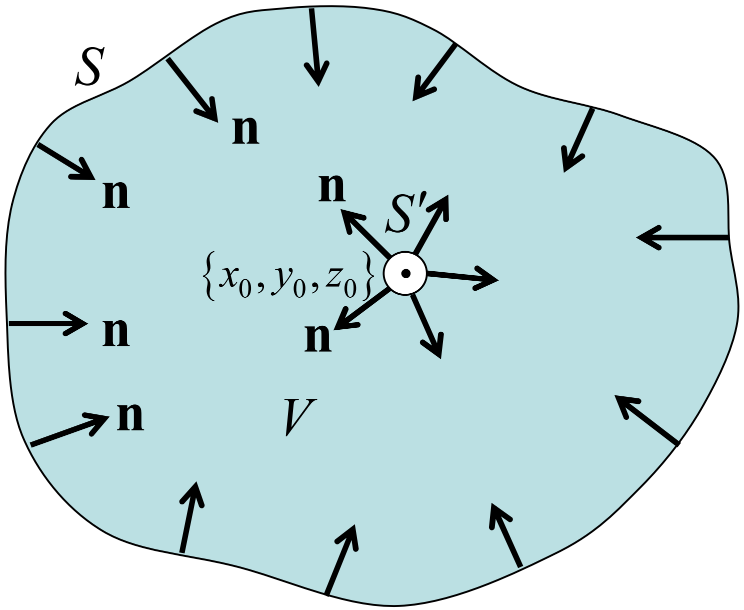
$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad\qquad v = \frac{e^{ikr}}{r}; \quad r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$$

$$\Delta v + k^2 v = 0$$ кроме точки $\{x_0, y_0, z_0\}$

уравнения для поля э-м волны
(уравнение Гельмгольца, теория Максвелла)

$$\iint\limits_{S'} \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] ds =$$

$$= -\iint\limits_S \left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$



$$\underbrace{\iint\limits_{S'}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds}_{\substack{\displaystyle\Rightarrow_{r\to 0} -4\pi u(x_0,y_0,z_0)= \\ \displaystyle =-4\pi E(x_0,y_0,z_0)}}=-\iint\limits_{S}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)=-\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\cos\{\mathbf{r},\mathbf{n}\}$$

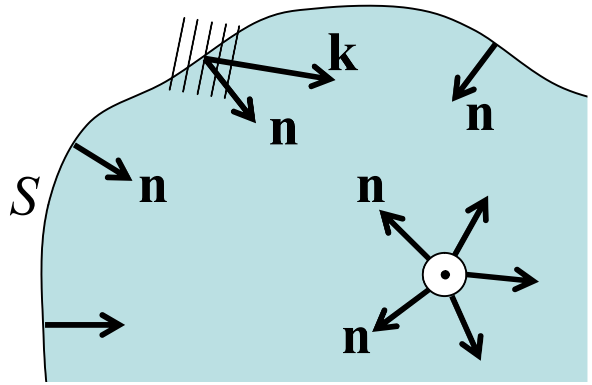
$$\boxed{E(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left[u\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik-\frac{1}{r}\right)\cos\{\mathbf{r},\mathbf{n}\}+\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds}$$

$$k=2\pi/\lambda$$

$$E(x_0,y_0,z_0)\approx\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik\,u\cos\{\mathbf{r},\mathbf{n}\}+\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

$$E(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik\,u \cos\{\mathbf{r},\mathbf{n}\} + \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

Поле в точке наблюдения есть результат вкладов полей
на окружающей поверхности и их нормальных производных

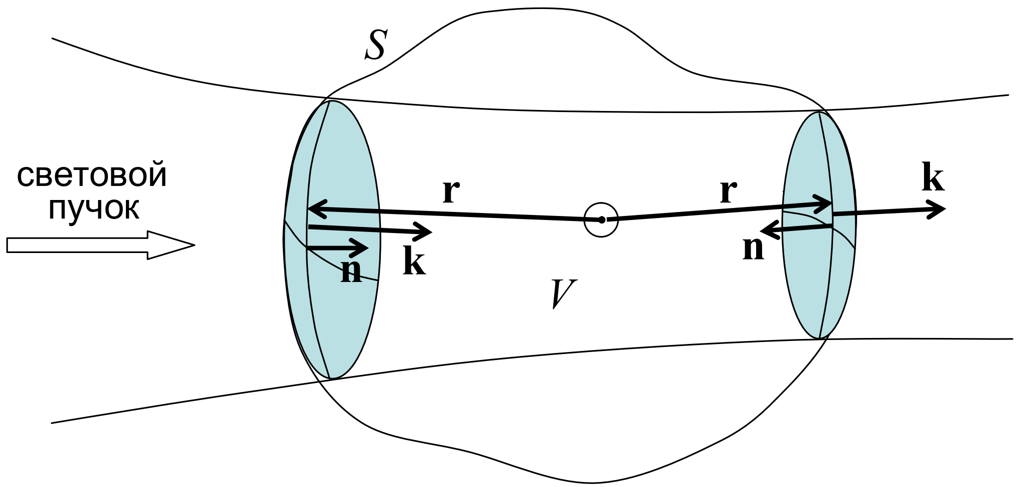


$$\frac{\partial u}{\partial n} \approx -iu\,(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}) = -ik\,u \cos\{\mathbf{k},\mathbf{n}\}$$

$$E(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{ik}{4\pi} \iint\limits_S \frac{e^{ikr}}{r} u \left(\cos\{\mathbf{r},\mathbf{n}\} - \cos\{\mathbf{k},\mathbf{n}\} \right) ds$$

~ принцип Гюйгенса Френеля

Световые пучки:



$$E(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{ik}{4\pi} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} u \left(\cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} - \cos\{\mathbf{k}, \mathbf{n}\} \right) ds$$

набегающее поле $\cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} \approx -1$ $\cos\{\mathbf{k}, \mathbf{n}\} \approx 1$

убегающее поле $\cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} \approx -1$ $\cos\{\mathbf{k}, \mathbf{n}\} \approx -1$

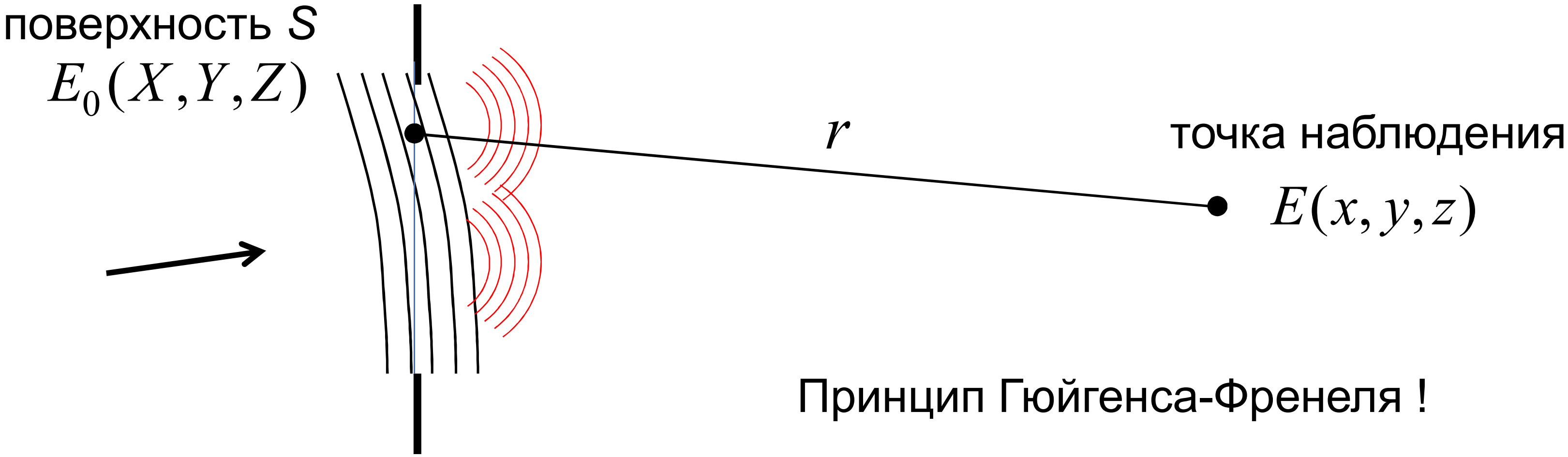
Интеграл по убегающему полю практически обнуляется !

$$E(x_0, y_0, z_0) \approx -\frac{ik}{2\pi}\iint_S \frac{e^{ikr}}{r} u \, ds$$

$$\Downarrow$$

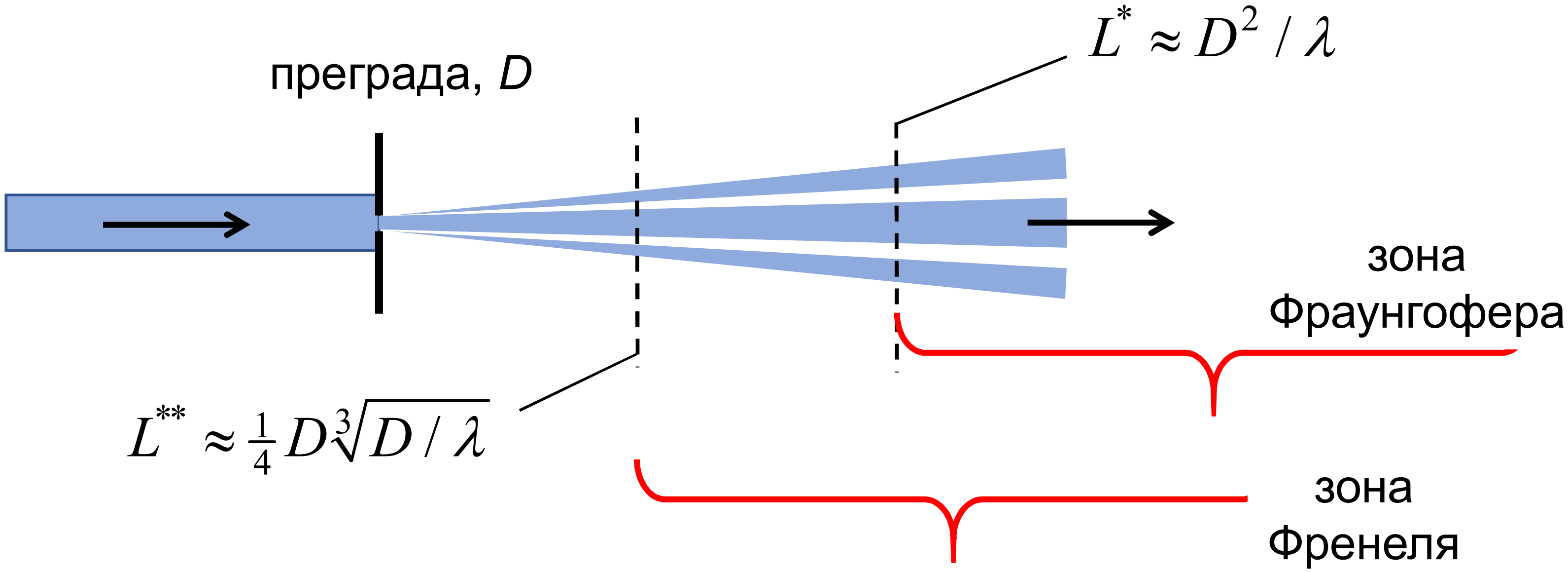
$$\boxed{E(x, y, z) \approx -\frac{ik}{2\pi}\iint_S \frac{e^{ikr}}{r} E_0(X, Y, Z) \, ds}$$

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$



Принцип Гюйгенса-Френеля !

$$E(x,y,z) \approx -\frac{ik}{2\pi}\iint\limits_S \frac{e^{ikr}}{r} E_0 \, ds$$



$$r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \approx$$

$$\approx \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L}$$

приближение Фраунгофера

$$\approx \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L} + \frac{X^2}{2L} + \frac{Y^2}{2L}$$

приближение Френеля

Дифракция Фраунгофера (дальняя зона)

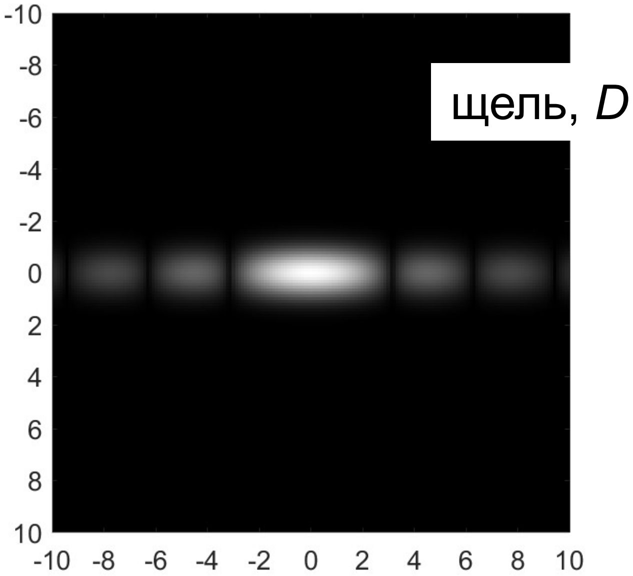
$$L \geq D^2/\lambda \qquad r \approx r_0 - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L} \qquad r_0 = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2}$$

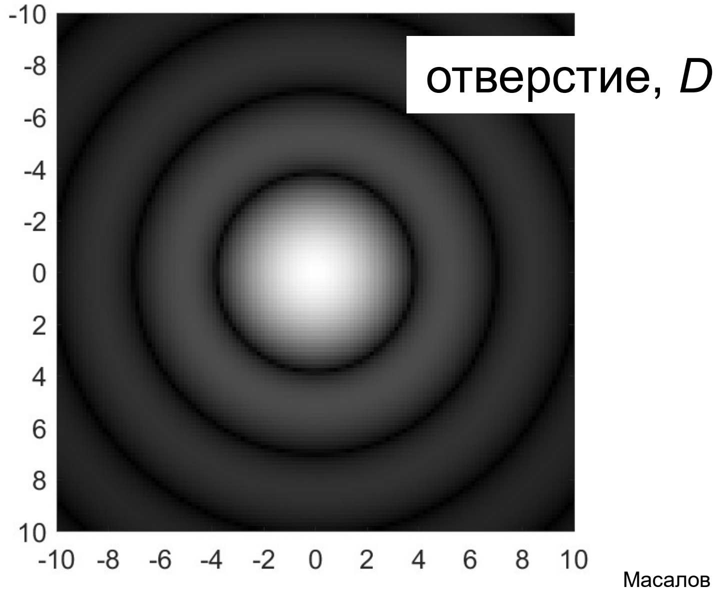
$$E(\alpha,\beta) \approx -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L} \iint_S E_0(X,Y) \exp\{-ik\left(X\alpha + Y\beta\right)\} dXdY$$

$\boxed{\text{Фурье-образ входного поля !}}$

$$\alpha \approx \frac{x}{L}, \quad \beta \approx \frac{y}{L}$$

$$E(\alpha) \propto -\frac{ike^{ikr_0}}{L} \cdot \frac{\sin k\alpha D/2}{k\alpha D/2} \qquad E(\theta) \propto -\frac{ike^{ikr_0}}{L} \cdot \frac{J_1(k\theta D/2)}{k\theta D/2}$$





Дифракция Френеля

$$L \geq \tfrac{1}{4} D \sqrt[3]{D / \lambda} \qquad\qquad r \approx r_0 - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L} + \frac{X^2}{2L} + \frac{Y^2}{2L}$$

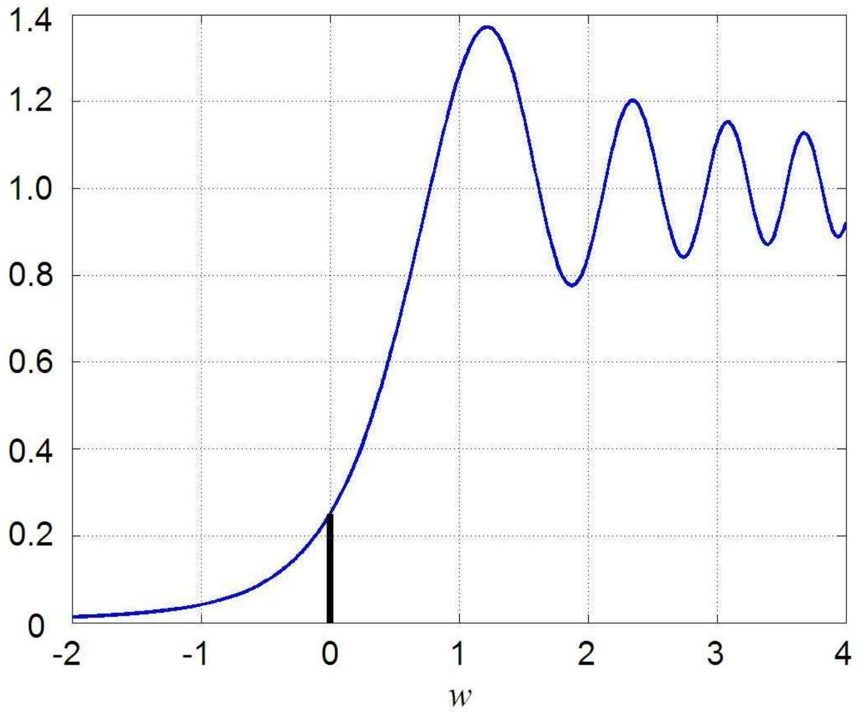
$$E(x, y, L) \approx -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L} \iint_S E_0(X, Y) \underbrace{e^{ik(X^2+Y^2)/2L}}_{\text{дополнительный фактор}} \exp\left\{-ik\left(\tfrac{xX}{L} + \tfrac{yY}{L}\right)\right\} dXdY$$

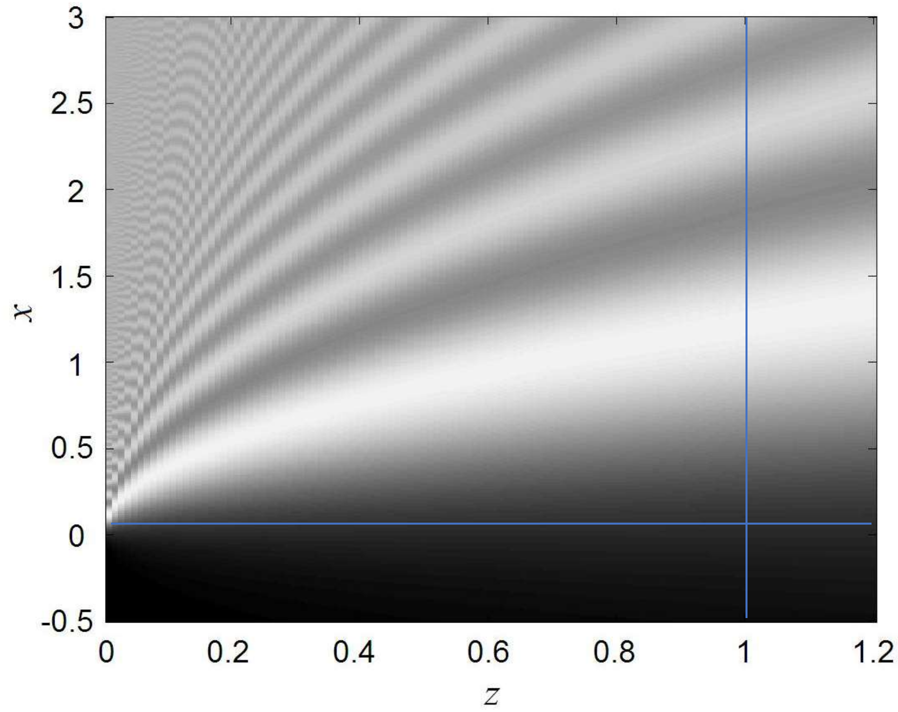
Дифракция Френеля на полуплоскости

$$E(x,y,L) = \ldots = -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L} e^{-ikx^2/2L} \sqrt{\frac{\lambda}{2L}} \left(\frac{1+i}{2} + C(w) + iS(w) \right)$$

Интегралы Френеля: $C(w) = \int\limits_0^w \cos\left(\pi t^2/2\right)dt \qquad S(w) = \int\limits_0^w \sin\left(\pi t^2/2\right)dt$

Распределение интенсивности за полуплоскостью





Темы для самостоятельного повторения/изучения:

- Векторные операции: дивергенция, градиент;
- Интегрирование по-частям;
- Функции Бесселя
- и др.

Тренировочные задачи

Задача 1.
Подтвердить расчетом формулу для распределения поля в дальней зоне при дифракции на щели; определить угол между двумя первыми минимумами. Рассчитать схему наблюдения дифракции на щели с излцчением Солнца на Земле.

Задача 2.
Рассчитать распределения поля в дальней зоне при дифракции на прямоугольном отверстии заданных размеров.

Задача 3.
Подтвердить расчетом формулу для распределения поля в дальней зоне при дифракции на круглом отверстии; определить угловой размер первого темного кольца.

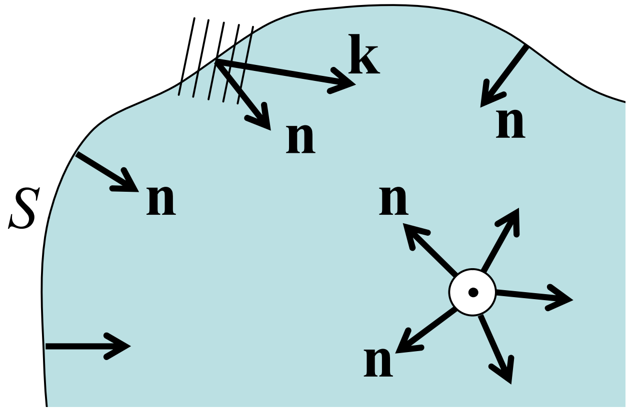
Задача 4.
Рассчитать интенсивность излучения на оси пучка за круглым отверстием; рассчитать положение основного максимума.

Задача 5. Рассчитать интенсивность излучения на оси пучка за линзой с известным фокусным расстоянием; рассчитать положение основного максимума.

Задача 6*. Рассчитать параметры светлого пятна в картине дифракции за непрозрачным диском.

Повтор основных формул и некоторых результатов

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] ds$$



$$u(x_0, y_0, z_0) \approx \frac{ik}{4\pi} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} u \left(\cos\{\mathbf{r}, \mathbf{n}\} - \cos\{\mathbf{k}, \mathbf{n}\} \right) ds$$

$$E(x_0, y_0, z_0) \approx -\frac{ik}{2\pi} \iint_S \frac{e^{ikr}}{r} u \, ds$$

$$E(x,y,z) \approx -\frac{ik}{2\pi}\iint_S \frac{e^{ikr}}{r} E_0 \, ds$$

Поверхность S – плоскость X,Y: $$E(x,y,z) \approx -\frac{ik}{2\pi}\iint_S E_0(X,Y)\frac{e^{ikr}}{r} dXdY$$

$$r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + L^2}$$

Дифракция Фраунгофера, дальняя зона $L \gg D^2/\lambda$ $\quad r \approx r_0 - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L}$

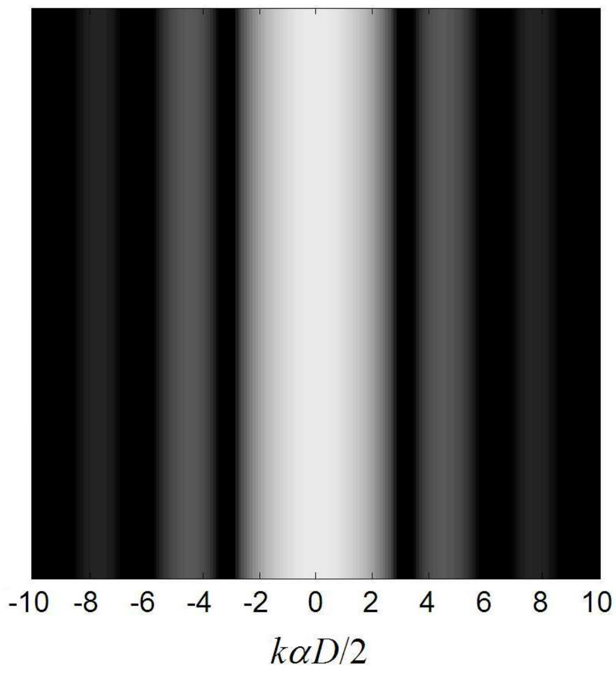
$$E(\alpha,\beta) = -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L}\iint_S E_0(X,Y)\exp\left\{-ik\left(X\alpha + Y\beta\right)\right\} dXdY$$

Дифракция Френеля $L \gg \frac{1}{4} D\sqrt[3]{D/\lambda}$ $\quad r \approx r_0 - \frac{Xx}{L} - \frac{Yy}{L} + \frac{X^2}{2L} + \frac{Y^2}{2L}$

$$E(x,y,L) \approx -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L}\iint_S E_0(X,Y) e^{ik(X^2+Y^2)/2L} \exp\left\{-ik\left(\tfrac{xX}{L} + \tfrac{yY}{L}\right)\right\} dXdY$$

Дифракция Фраунгофера, щель

$$E(\alpha)=\frac{ik}{L}\frac{D}{2\pi}\left(\frac{\sin k\alpha D/2}{k\alpha D/2}\right)E_0 e^{ikr_0}$$



Дифракция Фраунгофера, круглое отверстие

$$E(\theta)=\frac{ik}{L}\cdot\frac{D^2}{4}\cdot\frac{J_1(k\theta D/2)}{k\theta D/2}E_0 e^{ikr_0}$$