Сингулярное и другие матричные разложения

В следующих двух задачах достаточно знать определения соответствующих разложений.

1. Убедитесь, что следующая матрица эрмитова с неотрицательными собственными значениями, и найдите ее разложение Холецкого (вида R^*R, где R верхнетреугольная с неотрицательными собственными значениями) для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}$$

2. Найдите LU разложение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решите с помощью этого разложения систему уравнений

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Напомним определения: матрица U унитарная, если $U^* = U^{-1}$; матрица S эрмитова (или самосопряженная), если $S^* = S$.

Спектральным разложением эрмитовой матрицы A называется ее представление в виде

$$A = U\Sigma U^*,$$

где Σ — диагональная матрица с неотрицательными действительнами элементами, а U — унитарная матрица.

3. Убедитесь, что следующая матрица эрмитова, и найдите ее спектральное разложение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 1-i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Найдите обратную матрицу с помощью спектрального разложения.

Сингулярным разложением комплексной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = U\Sigma V^*,$$

где Σ — (прямоугольная) диагональная матрица с неотрицательными элементами, а U, V — унитарные матрицы.

4. Найти сингулярное разложение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Вычислить псевдообратную матрицу с помощью построенного сингулярного разложения.

Полярным разложением комплексной квадратной матрицы A называется ее представление в виде

$$A = SU,$$

где $S = S^*$ — эрмитова матрица с неотрицательными собственными значениями, а $U = (U^*)^{-1}$ — унитарная матрица.

5. Пусть A — квадратная матрица.

а) Пусть дано сингулярное разложение $A = U\Sigma V^*$. Постройте полярное разложение матрицы A.

б) Обратно, дано полярное разложение $A = SU$. Как построить сингулярное разложение матрицы A?

6. Построить полярное и сингулярное разложения матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Придумайте аналог полярного разложения для прямоугольной матрицы и найдите его для

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица (или соответствующий ей линейный оператор) называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$.

8***.** Пусть A – квадратная матрица. Докажите, что следующие условия эквиваалентны:

(1) A нормальная;

(2) существует спектральное разложение $A = U\Sigma U^*$, где матрица Σ диагональная, а U — унитарная;

(3) существует ортонормированный базис пространства, состоящий из собственных векторов оператора A;

(4) любой собственный вектор оператора A является также собственным для A^*;

(5) $A^* = AV$, где V — унитарная матрица.

9. Докажите, что если $A = SU$ — полярное разложение нормальной матрицы, то $A = US$. Верно ли это для произвольной квадратной матрицы A?