

## Дифракционные решетки

- отражающие;  
нарезные  
голографические
- пропускающие;
- объемные  
акустооптические модуляторы

## Дифракция Фраунгофера (дальняя зона)



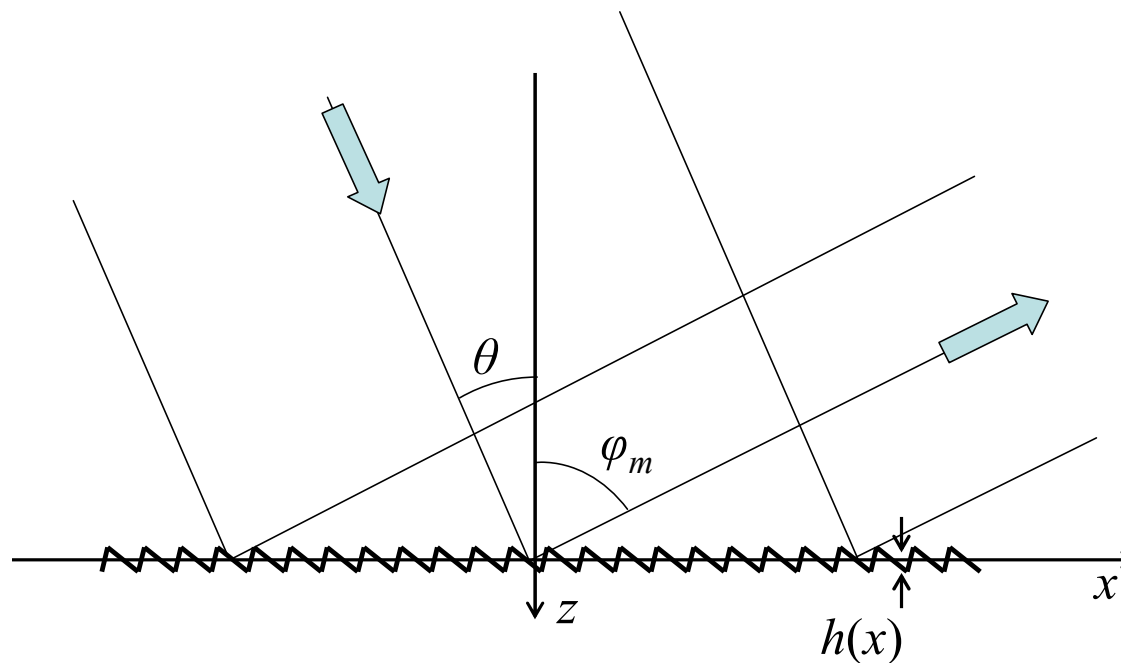
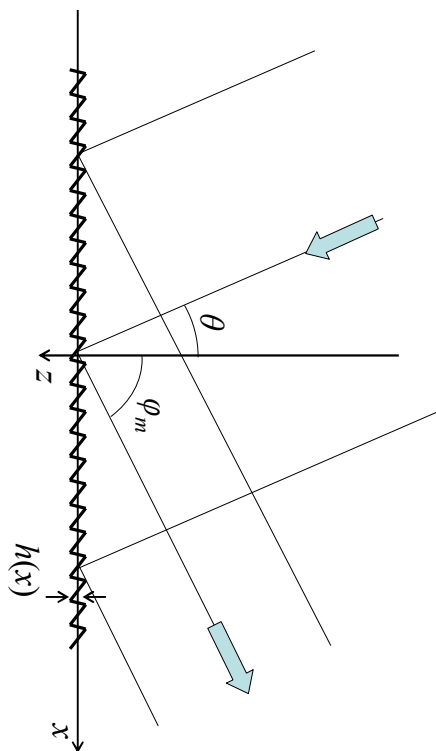
$$E(\alpha, \beta) \approx -\frac{ike^{ikr_0}}{2\pi L} \iint_S E_0(X, Y) \exp\{-ik(X\alpha + Y\beta)\} dXdY$$

$$r_0 = \sqrt{L^2 + x^2 + y^2} \approx L$$

Фурье-образ выходного поля !

$$L \geq D^2 / \lambda$$

## Отражательная решетка



Падающее поле

$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta}$$

Отраженное поле

$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta} \times e^{-i\Phi(x)} \times \Pi(x)$$

$$\Phi(x) \propto h(x)$$



$$e^{-i\Phi(x)} = \sum_m a_m e^{-2\pi i m x / d} = \sum_m a_m e^{-imKx} \quad K = 2\pi / d$$

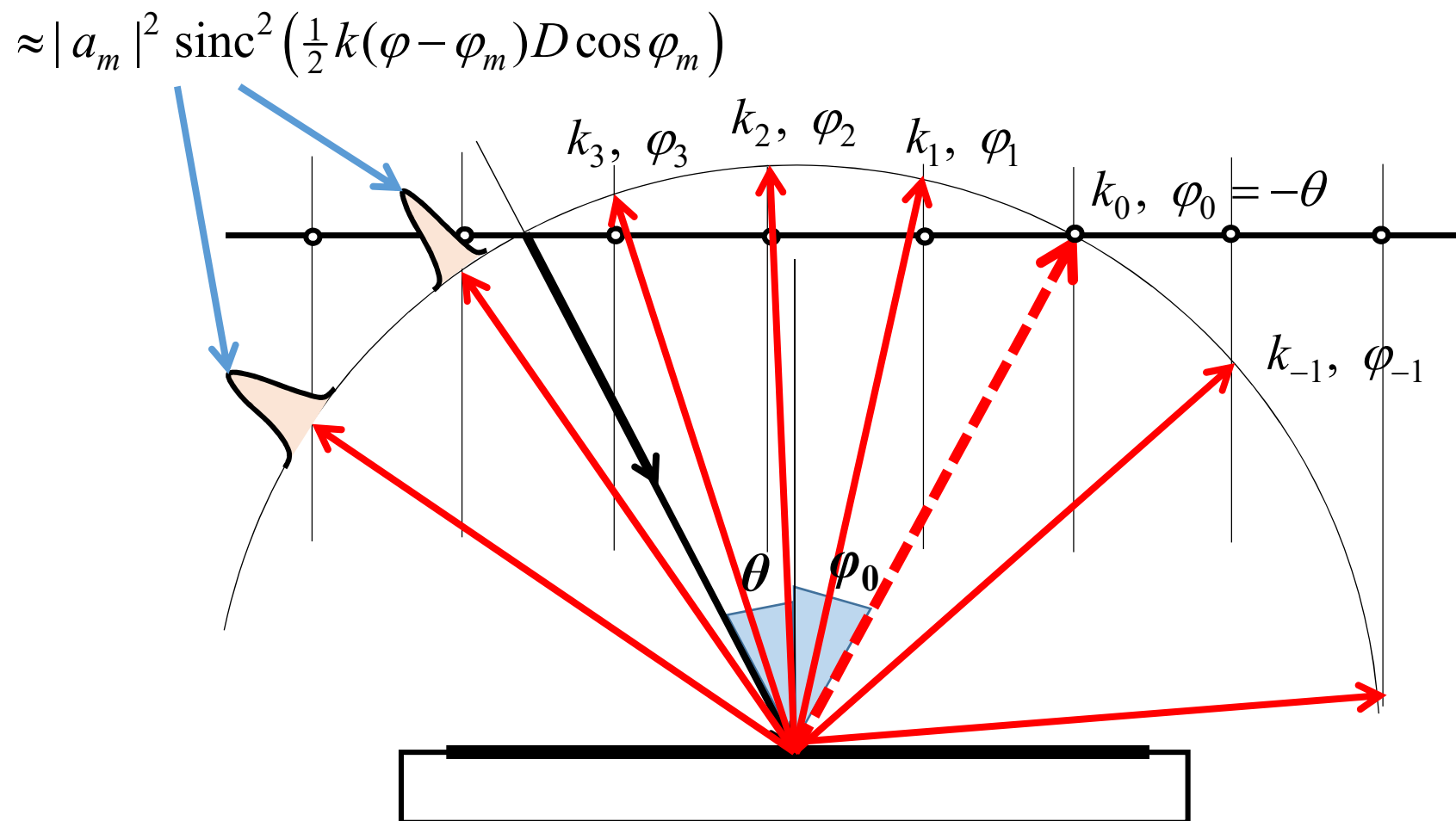
$$E_{\text{diff}} \propto A_0 e^{-i\omega t} \sum_m a_m \int e^{ikx \sin \theta - imKx} \times \Pi(x) \times e^{ikx \sin \varphi} dx \Rightarrow$$

$$A_0 e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\sin(k \sin \theta - mK + k \sin \varphi) D / 2}{(k \sin \theta - mK + k \sin \varphi) D / 2} \otimes \sum_m a_m \delta(k \sin \theta - mK + k \sin \varphi) \right\}$$

$k \sin \theta + k \sin \varphi_m = mK$
$d (\sin \theta + \sin \varphi_m) = m\lambda$

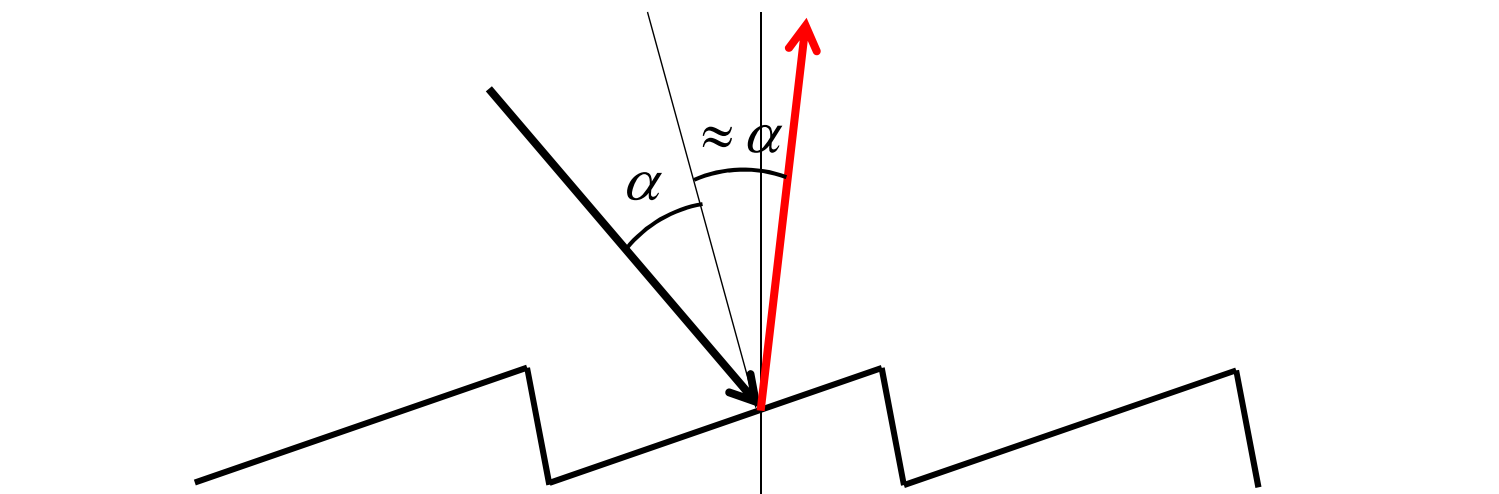
формула решетки

$$\approx \text{sinc} \left( \frac{1}{2} k (\varphi - \varphi_m) D \cos \varphi_m \right)$$



Расположение порядков дифракции

## Угол блеска, порядок максимальной яркости



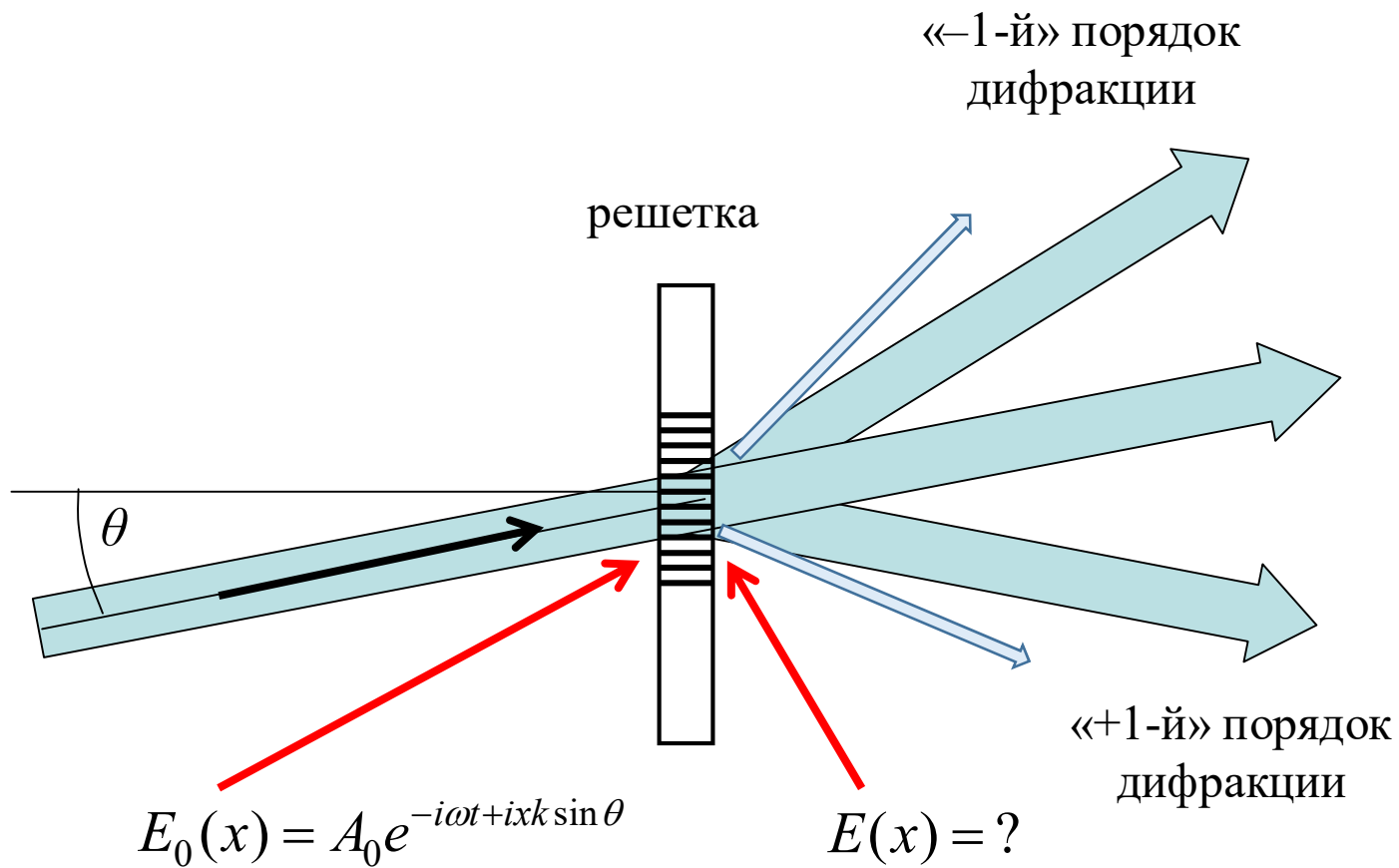
Область свободной дисперсии:  $m\lambda_{\max} = (m+1)\lambda_{\min}$

$$\lambda_{\min} = \frac{m}{m+1} \lambda_{\max} \geq \frac{\lambda_{\max}}{2}$$

Для регистрации широких спектров выгоден 1-й порядок дифракции  
в малая ширина штриха  $d \rightarrow 0$  для увеличения угловой дисперсии

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi_m}$$

## Пропускающая решетка



## «Тонкая» пропускающая решетка

$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + ixk \sin \theta} \times e^{2\pi i(n_0 - \delta n \sin Kx)L/\lambda} \quad - \text{ фазовая решетка}$$

$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + ixk \sin \theta} \times \sqrt{T_0 + \delta T \cos Kx} \quad - \text{ амплитудная решетка}$$

$$K = 2\pi / \Lambda$$

Критерий «тонкой» решетки (случай дифракции Рамана-Ната):  
на толщине решетки дифракция еще не развита,

$$\frac{\lambda}{\Lambda} L \leq \Lambda \quad \text{т.е.} \quad L \leq \frac{\Lambda^2}{\lambda}$$



## «Слабые» тонкие решетки

фазовая

$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta} \times e^{2\pi i (n_0 - \delta n \sin Kx) L / \lambda} \approx$$

$$\approx A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta} \times e^{2\pi i n_0 L / \lambda} \left( 1 - i \frac{2\pi \delta n L}{\lambda} \sin Kx \right)$$

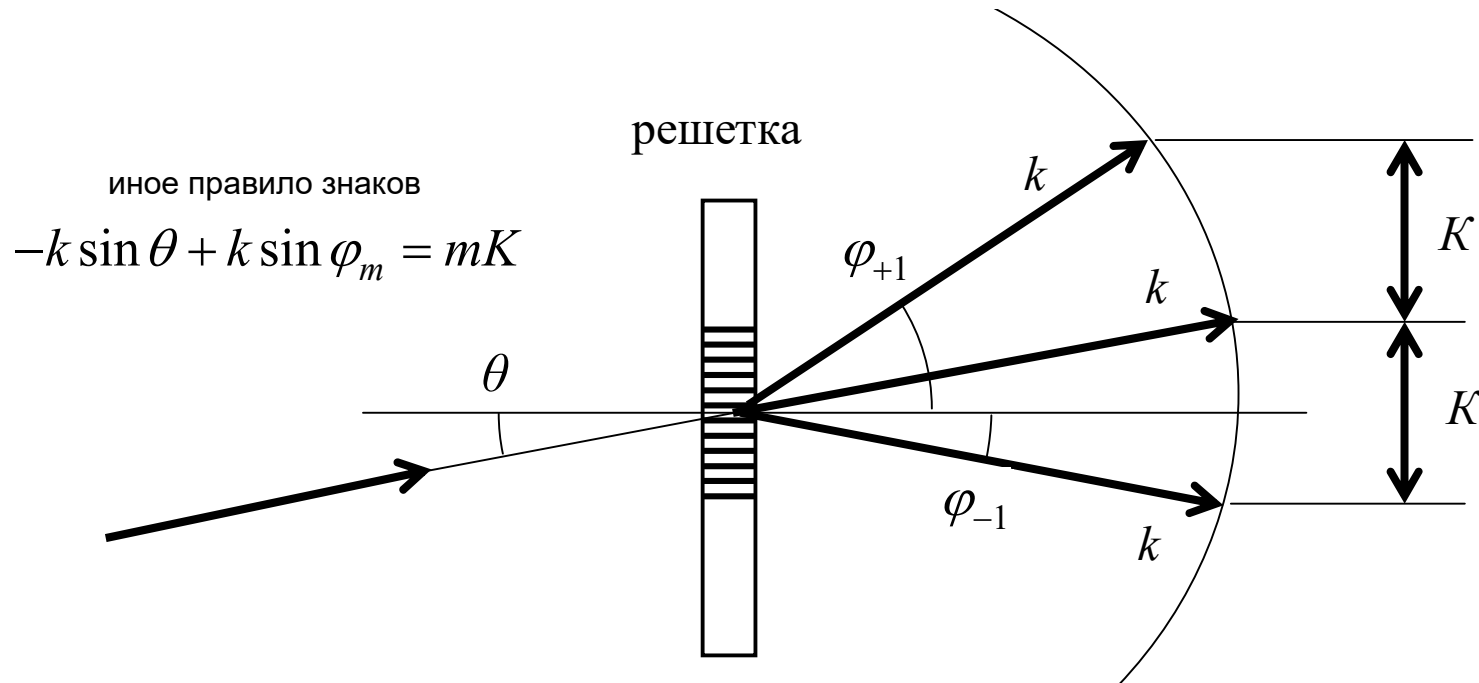
$$I_{+1} = I_{-1} \approx I_0 \cdot \left( \frac{\pi L}{\lambda} \delta n \right)^2$$

амплитудная

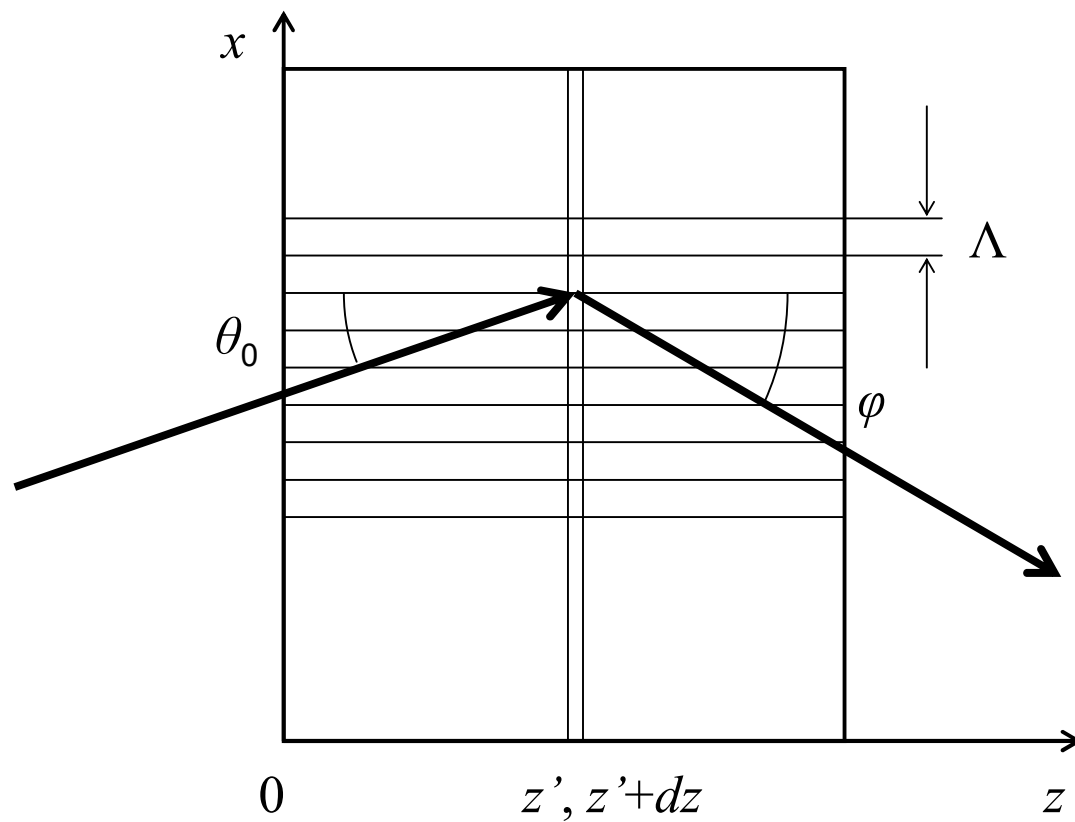
$$E(x) = A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta} \times \sqrt{T_0 + \delta T \cos Kx} \approx$$

$$\approx A_0 e^{-i\omega t + i x k \sin \theta} \times \sqrt{T_0} \left( 1 + \frac{\delta T}{2T_0} \cos Kx \right)$$

$$I_{+1} = I_{-1} \approx I_0 \left( \frac{\delta T}{4T_0} \right)^2$$



«Толстая» пропускающая решетка  
(звуковая волна в прозрачной среде = акустооптический модулятор)



Падающая волна в сечении  $z'$   $A_0(z')e^{ikx \sin \theta_0 + ikz' \cos \theta_0}$

Поле дифрагированной волны

$$A_0(z')e^{ikx \sin \theta_0 + ikz' \cos \theta_0} \times e^{\pm iKx} dz = A_0(z')e^{ikz' \cos \theta_0 + ikx \sin \varphi} dz$$

на выходе среды

$$k \sin \varphi = k \sin \theta_0 \pm K$$

иное правило знаков

$$A_0(z')e^{ikx \sin \varphi + ikz' \cos \theta_0} \times e^{ik(L-z') \cos \varphi} dz = A_0(z')e^{ikx \sin \varphi + ikL \cos \varphi} \times e^{ikz'(\cos \theta_0 - \cos \varphi)} dz$$

Поля дифрагированных волны суммируются конструктивно при условии

$$\cos \theta_0 = \cos \varphi$$

Условие дифракции исключает случай равенства углов  $\varphi = \theta_0$ ,

тогда  $\varphi = -\theta_0$  и

$$2k \sin \varphi = -2k \sin \theta_0 = -K$$

$$\sin \theta_0 = -\sin \varphi = \lambda / 2\Lambda$$

## УСЛОВИЕ БРЭГГА

$$2k \sin \varphi = -2k \sin \theta_0 = -K$$

$$\sin \theta_0 = -\sin \varphi = \lambda / 2\Lambda$$

Уравнения связанных волн:

$$\kappa = i \frac{\delta n}{n_0} k$$

$$dA(z) = \kappa A_0(z) dz$$

$$dA_0(z) = -\kappa^* A(z) dz$$



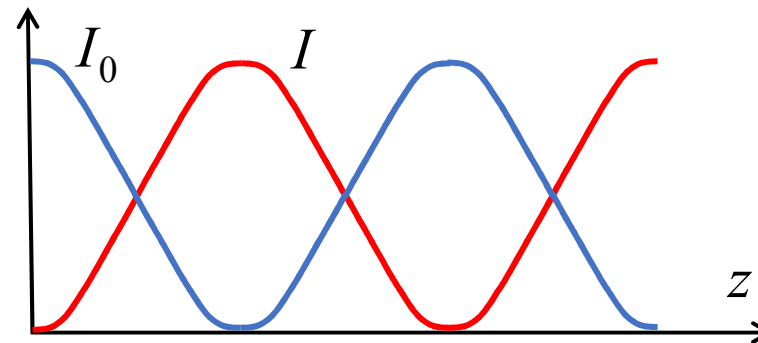
$$\frac{d}{dz} A(z) = \kappa A_0(z)$$

$$\frac{d}{dz} A_0(z) = -\kappa^* A(z)$$

Решение:

$$A(z) = A_0(0) \sin(|\kappa| L)$$

$$A_0(z) = A_0(0) \cos(|\kappa| L)$$



Уравнения связанных волн с учетом отклонения от условия Брэгга:

$$\frac{dA}{dz} = \kappa A_0 e^{ikz(\cos \varphi - \cos \theta_0)}$$

$$\frac{dA_0}{dz} = -\kappa^* A e^{-ikz(\cos \varphi - \cos \theta_0)}$$

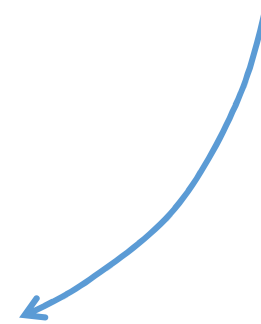
$$k \sin \theta_0 - k \sin \varphi = K \equiv \frac{2\pi}{\Lambda}$$

Малые отклонения от условия Брэгга:

$$\theta_0 \rightarrow \theta_0 + \delta\theta_0$$

$$k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda + \delta\lambda} \approx k \left(1 - \frac{\delta\lambda}{\lambda}\right)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi + \delta\varphi$$



$$\delta\varphi = \delta\theta_0 - \frac{\delta\lambda}{\Lambda \cos \theta_0}$$

Расстройка:  $\Delta k = k(\cos \varphi - \cos \theta_0) \approx \dots = k \sin \theta_0 \left( 2\delta\theta_0 - \frac{\delta\lambda}{\Lambda \cos \theta_0} \right) =$

$$= \delta\theta_0 \times 2k \sin \theta_0 - \frac{\delta\lambda}{\lambda} \times K \tan \theta_0$$

В заданном поле падающей волны эффективность дифракции пропорциональна

$$\left( \frac{\sin(\Delta kL / 2)}{\Delta kL / 2} \right)^2 \approx \dots$$

