# Матричные разложения

$$\hat{\mathcal{L}} = \hat{\mathcal{L}}_1 \hat{\mathcal{L}}_2 \dots \hat{\mathcal{L}}_n$$

i. Разложение полного ранга

ii. Спектральное разложение

1. Если $A^\dagger = A^\dagger$ то

$$A = U \Lambda U^\dagger \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_i \to k_i$ - кратность корня $\sum k_i = n$

Каждому $\lambda_i \mapsto$ соб. подпространство $V_{\lambda_i} = \{\vec{x} \mid Ax = \lambda_i x\} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})$ - имеет размерность $k_i$

Опр. $\hat{\mathcal{L}}$ - оператор простой структуры если $J = \Lambda$

Опр. $\hat{\mathcal{L}}$ - оператор нормальный если $\forall i \; c_i = k_i = 1$

Свойства норм. операторов эквивалентные определению

1. $\mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}^\dagger \mathcal{L}$

2. Сущ. ортонорм. базис из собственных векторов

3. Сущ. спектр. разложение.

◀ Если $\{h^1, \dots, h^n\}$ - ортонорм. базис соб. векторов,

$\hat{U} = (h^1 | h^2 | \dots | h^n)$ - унитарный

$$A_{\hat{U}} = U^{-1} A U = U^\dagger A U = U^\dagger \Big( \underbrace{(Ah^1)}_{= \lambda_1 h^1} | \dots | \underbrace{(Ah^n)}_{= \lambda_2 h^n} \Big) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

■

Свойства унитарных операторов экв. опр.

1. $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \mathbb{1}$

2. $U^{-1} = U^\dagger$

3. $\langle \hat{U}x, \hat{U}y \rangle$

4. Столбцы $U$ образуют ОНБ

◀ 1. => 2. $\det U \det U^* = \det \mathbb{1} = 1 \Rightarrow \det U \neq 0 \Rightarrow \exists U^{-1}$ ■

◀ 2 => 1 $U^{-1} = U^\dagger \Rightarrow U^\dagger U = U^{-1} U = \mathbb{1}$ ■

◀ 4. $\langle U_i, U_j \rangle = \delta_{ij} \Rightarrow 4$ ■

◀ 3. $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x | \hat{U}^\dagger \hat{U} | y \rangle = \langle x | \mathbb{1} | y \rangle = \langle x | y \rangle$ ■

Свойства

5. Ортогональные операторы в $\mathbb{R}^n$ - унитарны

s. $|\lambda_i| = 1$ ◀ Если $U\vec{x} = \lambda \vec{x} \Rightarrow \underbrace{|Ux|}_{= |x|} = |\lambda x| = |\lambda| |x|$ ■

iii. Сингулярное разложение SVD

$\det(\hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}^{+} - \mathbb{1}\mathcal{E}) = 0$

Знаем $rk(A^*A) = rk(A)$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 & & 0 \\ & \mathcal{E}_2 & \\ 0 & & \ddots \ \mathcal{E}_n \end{pmatrix}$$

$\exists$ разложение $\underset{m\times n}{\hat{A}} = \underset{m\times m}{\hat{U}} \underset{m\times n}{\hat{\Sigma}} \underset{n\times n}{\hat{V}^{+}}$

① Находим $\mathcal{E}_i$

② Находим базис $A^{+}A$

$V = (V_1 | V_2 | \ldots | V_n)$

$A^{+}A = V\Sigma^{+}\Sigma V^{+}$

③ $U = (U_1 | U_2 | \ldots | U_n)$

$U_i = \frac{1}{\mathcal{E}_i} A V_i$

Остальное дополним так чтобы $U$ была ОН.

Пример

① $\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{\mathcal{L}}\hat{\mathcal{L}}^{+} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Big| \Rightarrow \begin{matrix} \mathcal{E}_1 = \sqrt{5} \\ \mathcal{E}_2 = 0 \end{matrix}$

$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

② $\lambda_1 = \sqrt{5} \Rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} V_1 = 1 \Rightarrow V_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

③ $U_1 = \frac{1}{\mathcal{E}_1} A V_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

iv. Полярное разложение SU

$\hat{\mathcal{L}} = \hat{S}\hat{U} = \hat{S}\exp(i\hat{H})$ $\quad$ $\hat{U}$ - унитарна, $\hat{H} = \hat{H}^{+}$ $\quad \hat{S} = \hat{S}^{+}$

SVD $\Rightarrow$ SU

◀ $\hat{\mathcal{L}} = \hat{U}\hat{\Sigma}\hat{V}^{+} = \underbrace{\hat{U}\hat{\Sigma}\hat{U}^{+}}\ \underbrace{UV^{+}}$

$\hat{U}\hat{U}^{+} = \mathbb{1}$ т.к. $U$ — унитарна

$\hat{U}\hat{\Sigma}\hat{U}^{+} = \hat{U}^{+}\hat{\Sigma}^{+}\hat{U}$ $\quad$ т.к. $\Sigma$ - диаг. и действ.

$\hat{U}\hat{V}^{\dagger}$ – унит. т.к. $\det \hat{U}\hat{V}^{\dagger} = \det \hat{U} \, \det \hat{V}^{\dagger} = 1$

$\blacksquare$

∨ Разложение через метод Гаусса $\hat{\mathcal{L}}\hat{U}$

$$\hat{A} = \hat{\mathcal{L}}\hat{U}$$

$\hat{U} = \hat{T}_k \hat{T}_{k-1} \dots \hat{T}_1 \hat{A}$ $\quad$ $\hat{T}$ – матрица элементарного преобразования $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & 0 & \\ 0 & c & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$\hat{A} = \hat{\mathcal{L}}\hat{U}$ $\quad$ $\hat{\mathcal{L}} = \left( \prod_{k=0}^{n} \hat{T}_i \right)^{-1}$

Разложение $\mathcal{L}U$ $\exists$ если $\forall$ верхний минор $\neq 0$, иначе $\exists$ $P\mathcal{L}U$ разложение

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ 1 & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Если $\exists \mathcal{L}U$ тогда $Ax = b \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathcal{L}}|y\rangle = |b\rangle \\ \hat{U}|x\rangle = |y\rangle \end{cases}$