1. Две сонаправленные плоские когерентные монохроматические электромагнитные волны складываются. Одна имеет амплитуду E0 и плоскую поляризацию, а вторая — амплитуду E0 и круговую поляризацию. Какие значения может принимать поляризация суммарной волны?

Задание 1.

Очевидно что $\vec{k}$ результирующей волны сохранится по направлению

Перейдем в с.к. $XY \perp \vec{k}$

$$\vec{E}_1 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t) \qquad E_2 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t + i\varphi)$$

$\vec{e}_x \uparrow\uparrow \vec{E}_2 \quad \vec{e}_y \uparrow\uparrow \vec{H}_2$

$$= E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t + i\varphi) + E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(zk_z - i\omega t + i\varphi + i\frac{\pi}{2}\right)$$

I. Тогда если $\varphi = \pi$

$$\vec{E}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(zk_z - i\omega t + i\varphi + i\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \text{линейная поляризация}$$

II. $\varphi \neq 0$

$$\vec{E}_\Sigma = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t) + E_0 \begin{pmatrix} \exp(i\varphi) \\ i\exp(i\varphi) \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t) =$$

$$= E_0 \begin{pmatrix} 1 + \exp(i\varphi) \\ i\exp(i\varphi) \end{pmatrix} \exp(zk_z - i\omega t)$$

$$\underset{1 + \cos\varphi}{\overset{1 + \exp(i\varphi)}{\parallel}} \quad \neq \quad \underset{-\sin\varphi}{i\exp(i\varphi)} \qquad \Rightarrow \text{элептическая поляризация}$$

2. Аналогично предыдущей задаче складываются две волны эллиптической поляризации (обе степень поляризации 1/2), амплитудами E0 и 2E0. Длинныая полуось первого эллипса направлена вдоль Ox, а второго эллипсова - под углом +45 градусов к оси Ox. В каких пределах может меняться амплитуда, направление и степень эллиптичности суммарной волны?

на данном этапе
не учитываю угол $\pi/4$

$$\frac{E_x^2 - E_y^2}{E_x^2 + E_y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow E_x = 3^{1/2} E_y$$

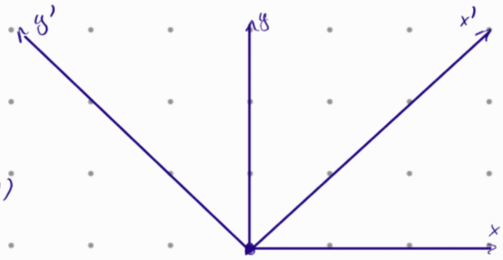
$$E_x^2 + E_y^2 = E_0 \vee 2E_0$$

$\Rightarrow$

① $E_x = \cos\frac{\pi}{6} E_0$, $E_y = \sin\frac{\pi}{6} E_0$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ i\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \exp(zk - i\omega t)$

② $E_{x'} = \cos\frac{\pi}{6}\, 2E_0$, $E_{y'} = \sin\frac{\pi}{6}\, 2E_0$ $\Rightarrow$ $\vec{E}_1 = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} \\ i\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \exp(zk - i\omega t + i\varphi)$

в координатах $x'y'$



Если учесть угол $\pi/2$

$$E_1 = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6} \\ \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \exp(zk - i\omega t + i\varphi)$$

$$E_\Sigma = E_0 \begin{pmatrix} \sqrt{2}\exp(i\varphi)\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right] + \cos\frac{\pi}{6} \\ \sqrt{2}\exp(i\varphi)\left[\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right] + i\sin\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \exp(zk - i\omega t)$$

$$|E| = \sqrt{\left|\frac{3^{1/2}}{2} + 2^{-1/2}\left(-i + 3^{1/2}\right)\exp(i\varphi)\right|^2 + \left|\frac{3^{1/2}}{2} + 2^{-1/2}\left(i + 3^{1/2}\right)\exp(i\varphi)\right|^2} \Rightarrow \min \text{ если } x = \pi \; ; \; |E|_{min} = \sqrt{\frac{11}{2} - 3\sqrt{2}}$$

$$\max \text{ если } x = 0 \; ; \; |E|_{max} = \sqrt{\frac{11}{2} + 3\sqrt{2}}$$