Выполнил:
Карибджанов Матвей
Группа БФЗ211
Тема:
Поле излучения диполя

Содержание

1. Постановка задачи

Рассеяние электромагнитной волны на линйном осциляторе, эту модель часто применяют для описания рассения на молекулах воздуха, с последующим выводом Реллевского рассеяния.

Формульно зависимость между неподвижным ядром и оцилирующим элемнтом в квадратичном поле (квадратичное поле часто являтся результатом приближения), с "силой трения"силой линейно зафисящей от скрости элемента во избежании резонанса и бесконечного увелечнения амплитуды колебаний. В итоге получим:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega^2 r = f(r) \tag{1.1}$$

Где $f(r)$– некоторая вынуждающая сила.

В задаче в результате ускоренного движения диполь излучает электро-магнитные волны, котрые мы ищем.

2. Излучение диполя

2.1. Монохроматические волны

В первую очередь надо вспомнить что для ЭМ (электромагнитный) волн ур. Максвелла преобразуются в:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \quad divH = 0, \\ \mathrm{rot}H &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \quad divE = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

По определению:

$$H = \mathrm{rot}A;\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi. \tag{2.2}$$

Воспользуемся нормировеой Лоренца $\partial_i A^i = 0$, 2.2 перейдет в:

$$H = \mathrm{rot}A;\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Учитывая запаздывание потенциала, в следствии чего $A\left(t-\frac{x}{c}\right)$:

$$\begin{gathered} E=-\frac{1}{c}A'; \\ H=[\nabla,A]=e_{ijk}\partial_j A^k=e_{ijk}\frac{\partial\left(t-x^m/c\right)}{\partial x^j}\frac{\partial A^k}{\partial\left(t-x^m/c\right)}=-\frac{1}{c}e_{ijk}\delta_{jm}\partial_m A^k=-\frac{1}{c}\left[n,A'\right], \end{gathered} \tag{2.4}$$

где A' обозначает дифф. по $\left(t-\frac{x}{c}\right)$. В итоге мы пришли к уже известному результату, что в монохроматических волнах:

$$H=[n,E]. \tag{2.5}$$

2.2. Запаздывающие потенциалы

В дали от заряда потенциал равен:

$$d\varphi=\frac{de\left(t-\frac{R}{c}\right)}{R} \tag{2.6}$$

Где R - растooяния от зарядо до точки где измеряем значение потенциала. Интегрирования по зарядам дет нам:

$$\varphi=\int\frac{1}{R}\rho\left(r',t-\frac{R}{c}\right)dV' \tag{2.7}$$

В R выражается как $R=r-r'$, $r'-$ вектор от начала координат до заряда, $r-$ век. от н.к. до точки измерения. Выражение для векторного потенциала плучатся аналогично:

$$A=\frac{1}{c}\int\frac{j\left(r',t-R/c\right)}{R}dV' \tag{2.8}$$

Зная что:

$$A=\frac{1}{cR}\sum ev=\frac{1}{cR}\dot{d}. \tag{2.9}$$

Так же не забываем про $E=[H,n]$, получим:

$$\begin{gathered} H=\frac{1}{c^2R}\left[\ddot{d},n\right], \\ E=\frac{1}{c^2R}\left[\left[\ddot{d},n\right],n\right]. \end{gathered} \tag{2.10}$$

2.3. Вектор пойнтинга

Учитывая ортогональность векторов H и E, также то что в монохроматической волне $|H|=|E|$, то вектор Пойнтинга

$$S=\frac{cH^2}{4\pi}n. \tag{2.11}$$

От сюда получим

$$d\mathfrak{I}=\frac{cH^2}{4\pi}R^2do \tag{2.12}$$

2.4. Частотное пространство

Часто удобно работаь в спектральном разложении поэтому посмотрим на зависимомти в фурье образа. Напрямую из переобразования формул 2.10 получим:

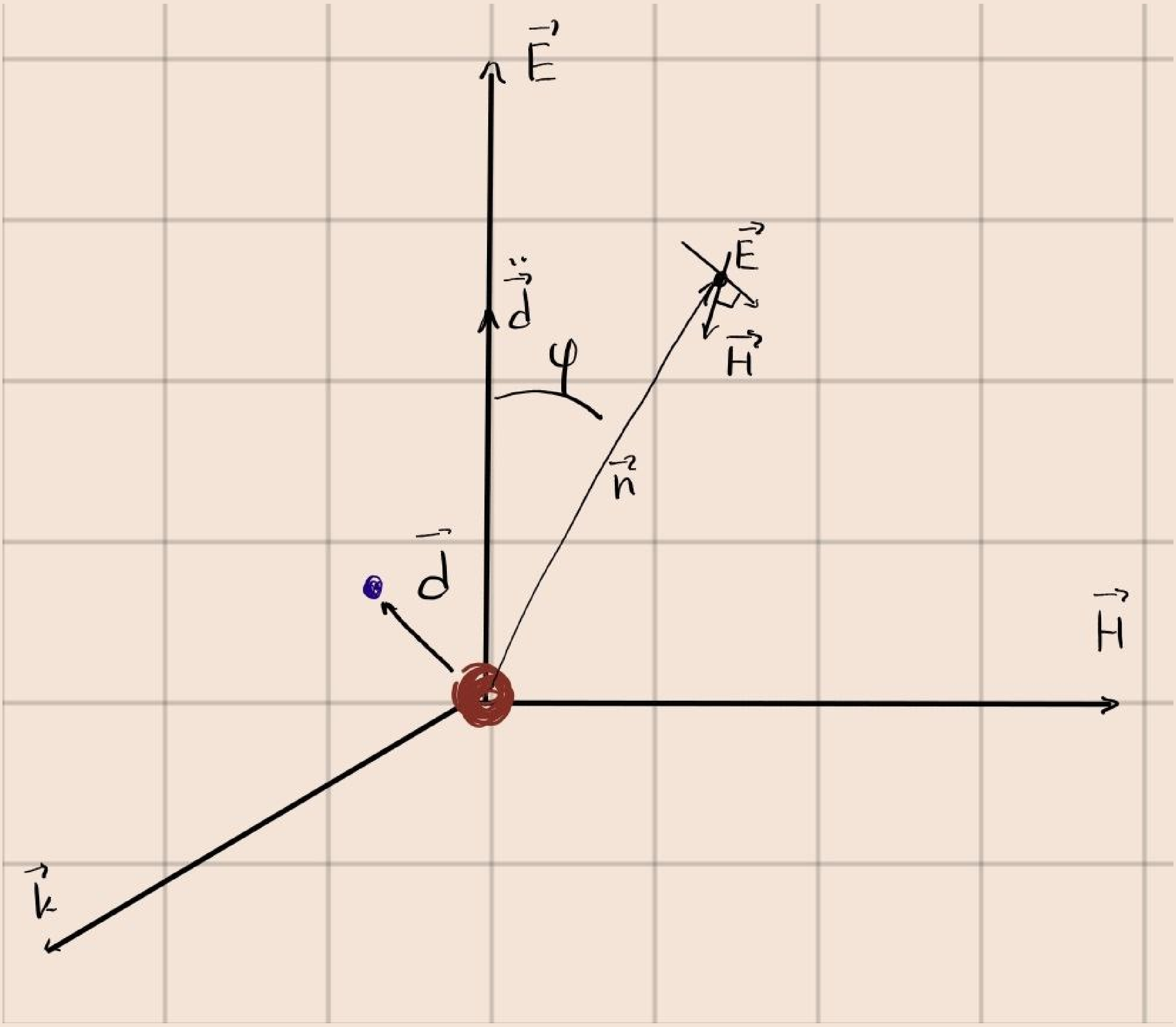
$$\begin{gathered} H_\omega=i\left[k,A_\omega\right], \\ E_\omega=\frac{ic}{\omega}\left[k,\left[k,A_\omega\right]\right], \end{gathered} \tag{2.13}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{\mathbb{R}}f^2dt=\int_{\mathbb{R}}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi}=2\int_{\mathbb{R}_+}|f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi} \tag{2.14}$$

Заметив что от в 2.12 зависит от t только посредстаом H получим:

$$d\mathfrak{I}=\frac{c}{2\pi}|H|^2R^2do \tag{2.15}$$



3. Решение для линейноного осцилятора

3.1. Приближения и уточнение формулировки

Во первых вспомнм что:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.1}$$

В не релятивистком случае уравненнеие сильно упрощается:

$$p \approx mv, \tag{3.2}$$

поэтому предлагаю решать в приближении $v/c \ll 1$. Тогда известное нам уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c}[v, H], \tag{3.3}$$

выродится в:

$$m\frac{dv}{dt} = eE. \tag{3.4}$$

Будем рассматривать падение на диполь монохроматической волны. Пока что мне не нужна точная формула, а только одно очень удобное свойство:

$$\mathfrak{F}\left[E(t)\right](\omega) = E(\omega). \tag{3.5}$$

3.2. Диф. уравнение

Запишем наше уравнение:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega_0^2 r = eE(t). \tag{3.6}$$

Как уже ясно я предлагаю использовать преобразование фурье для решения:

$$-\omega^2 r - i\omega k r + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E(\omega). \tag{3.7}$$

Вспомним что в излучение диполя основной вклад дает компонента $\ddot{d}$, А так как так как центральный заряд не подвижен и закреплен в начале СО то $d = er \implies \ddot{d} = e\ddot{r}$. Тогда нам нужно искать:

$$r = \frac{eE(\omega)}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{3.8}$$

$$\mathfrak{F}\left[\ddot{d}\right](\omega) = -e\omega^2 r = -\frac{e\omega^2 E(\omega)}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{3.9}$$

Получим распределение полей:

$$E = \frac{e}{mc^2 R}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 E_\omega}{\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)} \exp\{-it\omega\}\frac{d\omega}{2\pi}, n\right], \tag{3.10}$$

$$H = \left[E, n\right]. \tag{3.11}$$

3.3. Распределение интенсивности

Пользуясь формулой 2.15 получим:

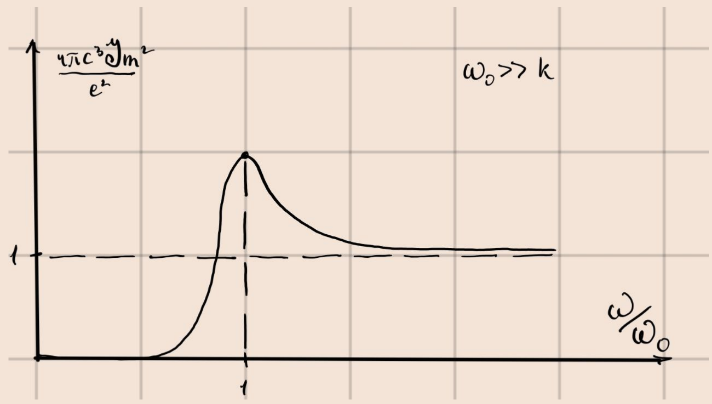
$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{d}, n\right]^2 do = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}_\omega^2 \sin^2\varphi do. \tag{3.12}$$

Подставляем решение 3.9:

$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3}\left|\frac{eE(\omega)}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}\right|^2 \sin^2\varphi do. \tag{3.13}$$

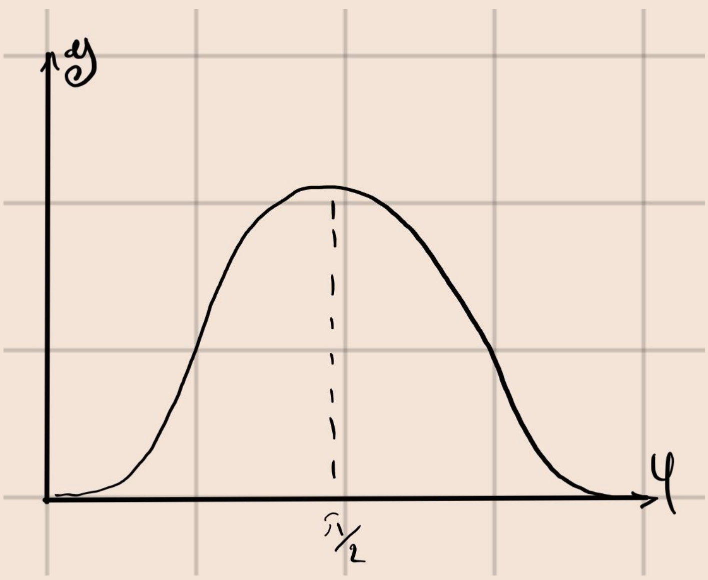
Проинтегрируем по всем углам, использовав соотношение $do = 2\pi\sin\varphi d\varphi$:

$$\mathfrak{I} = \frac{2}{3c^3}\ddot{d}_\omega^2. \tag{3.14}$$



4. Вывод

Как мы видим для знания поля нужна информация о параметрах диполя. Например для велечины поля по формуле 3.10. Для решении не использовались вектора Герца, было очень удобно пользоваться формализмом векоторного потенциала.


y
φ
π/2