

Избранные главы математической физики

И. В. Колоколов и В. В. Лебедев

В настоящем пособии обсуждаются математические задачи, возникающие в различных физических ситуациях, а также способы их решения. Как правило, речь идет о дифференциальных уравнениях, как обыкновенных, так и в частных производных, с начальными и граничными условиями. Рассматриваются отдельные вопросы, связанные с интегральными уравнениями. Обсуждаются линейные задачи, анализ которых ведется на языке функций Грина. Представлены сведения об основных специальных функциях, их свойства, включая поведение в комплексной плоскости и асимптотическое поведение. Приводятся основные сведения по нелинейным динамическим системам, включая теорию устойчивостей, решения солитонного типа и анализ интегрируемых уравнений. Приводятся способы решения задач (усредненные уравнения, пограничный слой), важные с точки зрения приложений. Обсуждаются интегральные уравнения. Даются основы теории групп.

Оглавление

0.1	Введение	4			
1	Линейные эволюционные уравнения	6			
1.1	Эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами	6			
1.1.1	Уравнение первого порядка	6			
1.1.2	Уравнения порядка выше первого	7			
1.1.3	Матричное уравнение	9			
1.2	Преобразование Лапласа в эволюционных задачах	11			
1.3	Уравнения Вольтерра	12			
1.4	Неоднородная по времени релаксация	14			
1.5	Справочные материалы к главе	15			
1.5.1	Временн´ое преобразование Фурье	15			
1.5.2	Дельта-функция Дирака	16			
1.5.3	Преобразование Лапласа	18			
2	Статические линейные поля	20			
2.1	Одномерный случай	20			
2.1.1	Поведение решения вблизи особых точек	22			
2.1.2	Задачи на собственные значения	23			
2.2	Электростатические задачи.	24			
2.2.1	Двумерные гармонические функции	27			
2.3	Собственные функции уравнения Шрёдингера	28			
2.3.1	Уравнение Шрёдингера в Кулоновском потенциале	29			
2.4	Справочные материалы к главе	30			
2.4.1	Собственные функции оператора Штурма-Лиувилля	30			
2.4.2	Преобразование Фурье	31			
3	Специальные функции	34			
3.1	Гамма-функция Эйлера	34			
3.2	Функция Эйри	36			
3.3	Функции Бесселя	38			
3.4	Полиномы Лежандра	41			
3.5	Полиномы Эрмита	44			
3.6	Вырожденная гипергеометрическая функция	47			
3.7	Справочные материалы к главе	49			
3.7.1	Метод Лапласа	49			
3.7.2	Метод перевала и стационарной фазы	49			
3.7.3	Метод WKB	51			
4	Динамические линейные поля	52			
4.1	Волновое движение в однородной среде	52			
4.1.1	Закон дисперсии	52			
4.1.2	Излучение	53			
4.1.3	Уравнение на огибающую	54			
4.1.4	Уравнение Гельмгольца	55			
4.2	Динамические полевые задачи	56			
			4.2.1	Уравнение диффузии	56
			4.2.2	Уравнение Стокса	57
			4.3	Уравнение Шрёдингера	58
			4.3.1	Уравнение Шрёдингера для свободной частицы	59
			4.4	Справочные материалы к главе	59
			4.4.1	Метод характеристик	59
5	Автономные нелинейные системы	61			
5.1	Фиксированные точки и предельные циклы	61			
5.1.1	Уравнение Ван дер Поля	64			
5.2	Бифуркации	66			
5.2.1	Модель Лоренца	67			
5.3	Лагранжевы уравнения	68			
5.4	Релаксационные уравнения	70			
5.4.1	Полевые релаксационные уравнения	71			
6	Приближенные решения	74			
6.1	Теория возмущений.	74			
6.1.1	Решение вблизи особой точки основного уравнения	74			
6.1.2	Пограничный слой	76			
6.2	Метод усреднения и медленная эволюция	77			
6.2.1	Усредненные уравнения для волнового движения	80			
6.3	Параметрическая неустойчивость	81			
7	Нелинейные полевые уравнения	84			
7.1	Уравнения Хопфа и Бюргерса	84			
7.1.1	Уравнение Хопфа	84			
7.1.2	Уравнение Бюргерса	85			
7.2	Нелинейное уравнение Шрёдингера	87			
7.2.1	Уравнение Гросса-Питаевского	89			
7.3	Уравнения Эйлера и Навье-Стокса	91			
7.3.1	Пограничный слой при больших числах Рейнольдса	93			
7.4	Справочные материалы к главе	93			
7.4.1	Нётеровские интегралы движения	93			
8	Специальные случаи	96			
8.1	Специальные решения	96			
8.1.1	Автомодельные решения	96			
8.1.2	Движение фронта	97			
8.2	Интегрируемые уравнения	99			
8.2.1	Уравнение Кортевега-де-Фриза	100			
8.2.2	Уравнение синус-Гордон	101			
8.2.3	Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера	104			
8.3	Справочные материалы к главе	105			
8.3.1	Интегралы движения в интегрируемых уравнениях	105			
9	Интегральные уравнения	107			
9.1	Уравнения Фредгольма	107			
9.1.1	Уравнения с симметричными ядрами	109			
9.2	Некоторые нелинейные интегральные уравнения	110			

9.3	Сингулярные интегральные уравнения . .	112
9.4	Справочные материалы к главе	113
9.4.1	Формула Сохоцкого-Племеля . . .	113
9.4.2	Преобразование Гильберта	114
10	Теория групп	115
10.1	Конечные группы	115
10.1.1	Представления группы	119
10.2	Группы и алгебры Ли	123
10.2.1	Алгебра Ли группы Ли	124
10.3	Представления групп Ли	127
10.4	Справочные материалы к главе	130
10.4.1	Матрицы Паули	130
10.4.2	Формула Бейкера-Кэмпбелла- Хаусдорфа	131
	ЛИТЕРАТУРА	133

0.1 Введение

В настоящем пособии мы представим подходы, которые используются в теоретической физике для решения задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений, включая нелинейные уравнения и уравнения в частных производных, то есть уравнений полевых. Мы обсуждаем также методы, связанные с интегральными уравнениями и теорией групп. Значимость этих сюжетов была установлена в ходе развития физики.

Осознание важности решения дифференциальных уравнений и связанных с ними задач восходит к тому же времени, когда был достигнут первый грандиозный успех современной теоретической физики – объяснение Ньютоном формы орбит планет на основе законов механики. Хотя сам Ньютон зачастую предпочитал пользоваться геометрическими методами, он хорошо сознавал, что наиболее адекватным языком созданной им конструкции являются именно дифференциальные уравнения.

В течение восемнадцатого века параллельно с быстрым ростом качества астрономических наблюдений происходило уточнение законов движения планет и более мелких астрономических объектов (комет, астероидов), связанное с воздействием на них других планет. На этом пути родилась, по современной терминологии, теория возмущений, которая имеет дело с поправками, связанными со слабым дополнительным воздействием на физическую систему. В частности, было осознано, что в некоторых случаях даже слабое возмущение способно за большое время сильно исказить орбиту планеты или иного тела. Так появилась теория так называемых секулярных членов в уравнениях механики.

В том же восемнадцатом веке возник новый предмет изучения – гидродинамика. Эйлер и Лагранж сформулировали основные уравнения, которым подчиняется движение любой жидкости. И эти уравнения оказались дифференциальными уравнениями в частных производных. Впоследствии эти уравнения были уточнены Навье и Стоксом, которые включили в рассмотрение вязкость. Гидродинамика оказалась удивительно богатой на различные физические явления, что связано с существенной ролью нелинейности в динамике жидкости.

Гидродинамика на долгие годы стала тем полигоном, на котором испытывались различные методы математической физики. Особенно плодотворным в этом отношении оказался период конца девятнадцатого – начала двадцатого века, когда были поставлены и решены многие гидродинамические задачи. Эта наука не исчерпана до сих пор, например, не существует последовательной теории турбулентности, то есть хаотического состояния жидкости, которое возникает при больших числах Рейнольдса.

Однако гидродинамика сыграла и еще одну очень важную роль – она стала парадигмой, на основе которой строилось понимание других физических явлений. Именно гидродинамика послужила плацдармом, с кото-

рого началась осознание таких явлений, как термодинамика и электромагнетизм. И хотя понятия флогистона и эфира были впоследствии отброшены, как слишком грубые модели явлений, использующие прямые аналогии с жидкостью, сам подход, связанный с дифференциальными уравнениями в частных производных, восходящий к гидродинамике, оказался чрезвычайно плодотворным. Именно на этом пути в течение девятнадцатого века в физике родилось современное понятие поля.

В девятнадцатом веке произошло первое великое объединение – постепенно было осознано, что такие явления, как электричество, магнетизм и распространение света являются проявлениями единой сущности – электромагнитного поля. Впоследствии к свету добавились электромагнитные волны различной длины волны, от радиоволн до рентгеновского излучения. И описание всех этих явлений в рамках единой теории электромагнитного поля остается одним из самых значимых достижений физики. Это описание базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных.

По мере расширения круга задач, с которыми имеет дело физика, выяснилось, что далеко не во всех случаях для анализа можно обойтись элементарными функциями. Поэтому в течение восемнадцатого-девятнадцатого века в оборот математической физики были введены более сложные функции, которые называются специальными. Репертуар специальных функций установился к началу двадцатого века. Подчеркнем, что использование специальных функций тесно связано с теорией функций комплексного переменного, построенной в основном в девятнадцатом веке.

В течение девятнадцатого века было осознано, что теоретическая физика имеет дело с разнообразным асимптотическим поведением. В связи с этим в математической физике были разработаны методы определения асимптотического поведения различных функций и решений широкого спектра уравнений. С другой стороны, выяснилась значительная роль законов сохранения, симметричное происхождение которых было выявлено уже в двадцатом веке.

При построении в первой половине двадцатого века теории относительности (как специальной, так и общей) и квантовой механики использовались в основном методы, разработанные в рамках теории классического поля. Это объясняет удивительно высокий темп создания этих совершенно новых разделов физики. Например, уравнение Шрёдингера представляет собой типичное полевое уравнение в частных производных.

В ходе дальнейшего развития в двадцатом веке в теоретической физике возникли разделы, исследования в рамках которых приводят к интегро-дифференциальным уравнениям. Примерами могут служить кинетика физических систем, которая исследуется в рамках кинетического уравнения, или квантовая теория поля. Эти области лежат вне рамок настоящего пособия. В то же время и в квантовой теории поля возникают задачи, которые по своей постановке являются

уравнениями классического поля. В качестве примера можно привести так называемые инстантоны.

Даже при решении задач, которые исходно восходят к дифференциальным уравнениям, зачастую возникают интегральные уравнения. Такая ситуация типична при использовании метода функций Грина, который подробно обсуждается в настоящем пособии. Мы обсуждаем ряд задач, которые ставятся в терминах интегральных уравнений, которые возникают в самых разных физических контекстах.

В двадцатом веке чрезвычайно расширилась область применимости методов классического поля. Речь идет о динамике любой среды, которую можно рассматривать, как непрерывную. Приведем в качестве примера плазму, которая чрезвычайно богата на различные динамические явления. Подчеркнем также, что плазма может существовать на различных масштабах, от космических до ядерных (где осуществима так называемая кварк-глюонная плазма), способ ее описания от этого принципиально не меняется.

В связи с бурным развитием динамики непрерывных сред во второй половине двадцатого века были сформулированы базисные нелинейные уравнения, которые описывают ключевые динамические явления в самых разных физических ситуациях. Это в основном уравнения для полей, зависящих от времени и одной координаты. Поразительным образом оказалось, что значительная часть этих базисных уравнений имеют бесконечный набор законов сохранения. С другой стороны, эти уравнения допускают аналитическое построение весьма сложных решений, которые обычно называют солитонами.

В течение двадцатого века была осознана фундаментальная роль симметричных соображений в объяснении различных физических явлений. Фактически, в основании любой современной физической теории лежит та или иная симметрия, которая в значительной мере определяет особенности применяемого в этой теории математического аппарата. Чрезвычайно важным является понятие спонтанного нарушения симметрии, которое лежит в основе таких явлений, как сверхтекучесть и сверхпроводимость, а также возникновения масс элементарных частиц за счет механизма Хиггса. Анализ всех этих явлений требует использования аппарата теории групп.

Во второй половине двадцатого века нашли широкое развитие методы исследования систем, обладающих стохастическим поведением. Такие системы должны описываться в рамках величин, усредненных по флуктуациям, то есть случайным изменениям характеризующих систему величин во времени и пространстве. Зачастую такие усредненные уравнения описываются дифференциальными или интегральными уравнениями. В качестве примера можно привести диффузионное уравнение, которое определяет статистические свойства Броуновского движения.

Все перечисленные выше сюжеты так или иначе на-

шли отражение в настоящем пособии. Конечно, его нельзя назвать исчерпывающим. Однако мы надеемся, что приведенный в нем материал позволит освоившему его читателю ориентироваться в значительном числе разделов современной математической физики.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами линейной алгебры, теории дифференциальных уравнений и теории функций комплексного переменного. В то же время мы старались сделать наше пособие по возможности самодостаточным, то есть включить в него всю информацию, необходимую для решения обсуждаемых задач. Ряд технических методов, используемых в той или иной главе, но имеющие более широкую область применения, вынесены в разделы “Справочные материалы”, которые помещаются в конце соответствующих глав.

Современные методы исследования сложных физических систем обязательно включают в себя численное моделирование, которое зачастую позволяет получить ключевую информацию о поведении физической системы. Мы в нашем пособии не касаемся численных методов, которые представляют собой обширную область знаний, которая требует отдельного систематического изложения. В то же время в нашем пособии охарактеризованы основные объекты, которые изучаются численными методами.

Мы не стремились создать последовательный курс, который включал бы в себя все известные на сегодняшний день методы математической физики. Тем более мы не гнались за математической строгостью. Нашей целью было привести материал, необходимый для решения конкретных задач, мотивированных физическими приложениями. Именно поэтому в тексте приведено значительное количество задач, решение которых позволит читателю освоить основные методы математической физики.

Глава 1

ЛИНЕЙНЫЕ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

В равновесии параметры физической системы не меняются со временем. Если систему отклонить от равновесия, то она будет релаксировать к равновесию. Возможны и колебания системы около положения равновесия. При наличии внешнего воздействия состояние системы отклонится от равновесия. Все эти процессы описываются линейными уравнениями (дифференциальными или интегральными) на параметры системы при условии, что ее отклонение от равновесия невелико и внешнее воздействие достаточно слабо. При тех же условиях уравнения являются однородными по времени.

1.1 Эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами

Во многих физических приложениях возникает задача о реакции физической системы на внешнее воздействие, выводящее ее из равновесия. Чтобы найти состояние системы в данный момент времени, надо решить эволюционную задачу, поскольку это состояние будет определяться предысторией системы. Если отклонение системы от равновесия невелико, то ее реакцию на внешнее воздействие можно изучать в рамках линейных уравнений. Мы считаем, что основное состояние системы (отклонение от которого мы изучаем) не меняется со временем. Тогда обычно приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями с постоянными (не зависящими от времени) коэффициентами.

1.1.1 Уравнение первого порядка

Мы начнем с обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. На этом простейшем примере можно продемонстрировать все основные особенности эволюционных задач, которые мы будем решать при помощи техники функций Грина.

Рассмотрим уравнение первого порядка для скалярной переменной x , которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi. \quad (1.1)$$

Здесь $x(t)$ – переменная, описывающая отклонение системы от равновесия, γ – кинетический коэффициент (некоторый положительный параметр), а величина $\phi(t)$ представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия. Уравнение типа (1.1) возникает в том

случае, когда инерционными свойствами системы можно пренебречь. Например, уравнение (1.1) возникает при описании движения коллоидных частиц в жидкости.

Решение уравнения (1.1) можно записать в виде следующего интеграла

$$x(t) = \int ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.2)$$

Здесь G – так называемая функция Грина уравнения (1.1). Функция Грина $G(t-s)$ определяет реакцию системы в момент времени t на ‘ударное’ воздействие на систему, приложенное в момент времени s . Выражение (1.2) обусловлено линейностью уравнения (1.1), вследствие которого искомая величина x представляется в виде суммы (интеграла от) вкладов, производимых внешним воздействием ϕ в разные моменты времени.

Обратим внимание на то, что функция Грина G , которая фигурирует в выражении (1.2), зависит только от разности $t-s$, но не от этих переменных по отдельности. Это свойство связано с тем, что кинетический коэффициент γ в уравнении (1.1) не зависит от времени. Другими словами, это свойство связано с однородностью уравнения (1.1) по времени: при сдвиге $t \rightarrow t+t_0$ вид этого уравнения не меняется. В дальнейшем мы часто будем сталкиваться с подобной однородностью или ее нарушениями.

Уравнение (1.1) можно решать на различных временных интервалах. От величины этих интервалов будет зависеть область интегрирования в выражении (1.2). Выражение (1.2) дает вынужденное решение, связанное с внешним воздействием. К нему следует добавить решение однородного уравнения (1.1) (то есть уравнения без правой части), связанное с начальными условиями на границе рассматриваемого интервала. Мы рассмотрим сначала случай бесконечного интервала, $-\infty < t < +\infty$. В этом случае начальные условия, заданные при $t \rightarrow -\infty$, можно игнорировать, поскольку они забываются. Позже мы обобщим наш подход на случай конечного интервала по времени.

Функция Грина уравнения (1.1) $G(t)$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t), \quad (1.3)$$

то есть исходному уравнению (1.1) с правой частью $\phi = \delta(t)$. Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака, основные сведения о ней приведены в разделе 1.5.2.

Напомним, что дельта-функция Дирака $\delta(t)$ обладает следующими свойствами. Она равна нулю везде, кроме

точки $t = 0$, где она обращается в бесконечность. Интеграл от дельта-функции $\int dt \delta(t) = 1$, где интегрирование идет по произвольному интервалу, содержащему точку $t = 0$. Это свойство связано с тем, что $\delta(t)$ равна нулю везде, кроме точки $t = 0$. Для любой непрерывной функции $f(t)$

$$\int ds \delta(t-s)f(s) = f(t), \quad (1.4)$$

что напрямую связано с тем фактом, что $\delta(t-s)$ равна нулю везде, кроме точки $t = s$.

Пользуясь этими свойствами, легко проверить, что функция $x(t)$, определяемая выражением (1.2), действительно является решением уравнения (1.1). Для этого следует применить к соотношению (1.2) оператор $d/dt + \gamma$, что дает

$$(d/dt + \gamma)x = \int ds (d/dt + \gamma)G(t-s)\phi(s).$$

В силу уравнения (1.3) в правой части появляется дельта-функция, и затем в силу соотношения (1.4) в правой части возникает $\phi(t)$.

Однако функция Грина $G(t)$ определена уравнением (1.3) неоднозначно, поскольку его решение определено с точностью до решения однородного (то есть с нулевой правой частью) уравнения (1.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грина $G(t)$, необходимо использовать принцип причинности. Из соотношения (1.2) следует, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, поскольку система может реагировать только на воздействие, имевшее место в прошлом, но не в будущем. Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, выражение (1.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.5)$$

Здесь подразумевается, что внешнее воздействие ϕ действует на систему на полном временном интервале, от $-\infty$ до $+\infty$.

Найдем явное выражение для функции Грина $G(t)$, которая определяется уравнением (1.3). Поскольку $\delta(t)$ равна нулю при $t > 0$, то в этой области $G(t)$ является решением однородного уравнения (1.1), то есть $G(t) = A \exp(-\gamma t)$, где A – некоторая константа. Учитывая, что $G(t) = 0$ при $t < 0$, мы заключаем, что при $t = 0$ функция $G(t)$ испытывает скачок A . В силу уравнения (1.3) этот скачок должен быть равен единице, $A = 1$.

Действительно, проинтегрируем уравнение (1.3) по t от $-\epsilon$ до $+\epsilon$. В правой части получится единица. В левой части при малых ϵ интеграл от γG пренебрежимо мал, а интеграл от $\partial_t G$ как раз и дает скачок функции G , A .

Таким образом, мы приходим к выражению

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t), \quad (1.6)$$

где $\theta(t)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при $t < 0$, и равная единице при $t > 0$. Подставляя это выражение в соотношение (1.5), мы находим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s). \quad (1.7)$$

Отсюда следует, что система постепенно (за время γ^{-1}) забывает о воздействии на нее, которое имело место в прошлом.

Перейдем к случаю, когда состояние системы задано в начальный момент времени, а далее она эволюционирует под внешним воздействием. Будем отсчитывать время от момента, когда задано начальное состояние. Тогда начальные условия заданы при $t = 0$. Уравнение (1.1) является уравнением первого порядка, то есть начальное состояние системы характеризуется только значением переменной x при $t = 0$, которое мы обозначаем $x(0)$. Тогда вместо (1.5) решение уравнения (1.1) при $t > 0$ перепишется в следующем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.8)$$

Здесь $x(0)G(t)$ – решение однородного уравнения, поскольку при $t > 0$ функция $G(t)$ удовлетворяет однородному уравнению и в силу $G(+0) = 1$ произведение $x(0)G(t)$ удовлетворяет начальному условию. Второе же слагаемое в выражении (1.8) представляет собой вынужденное решение, вызываемое внешним воздействием.

Задача 1.1.1. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.1) при нулевых начальных условиях и $\phi = \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$. Как выглядит решение при $\alpha \rightarrow \gamma$?

1.1.2 Уравнения порядка выше первого

В настоящем разделе мы рассмотрим более сложные эволюционные уравнения. В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ решения уравнения эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Мы продемонстрируем, как ее можно найти для дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами.

Начнем с уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi, \quad (1.9)$$

которое описывает осциллятор, к которому приложена внешняя сила ϕ . Здесь ν имеет смысл собственной частоты колебаний осциллятора. Решение однородного уравнения (1.9) является линейной комбинацией $\cos(\nu t)$ и $\sin(\nu t)$ с произвольными коэффициентами.

Решение уравнения (1.9) с правой частью можно записать через функцию Грина $G(t)$, в виде (1.2) или (1.5). Функция $G(t)$ удовлетворяет уравнению (1.9) с δ -функцией в правой части:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2\right) G(t) = \delta(t), \quad (1.10)$$

аналогичному соотношению (1.3). Как и раньше, легко проверить, что выражение (1.10) дает решение уравнения (1.9). Для этого надо применить к соотношению (1.10) оператор $d^2/dt^2 + \nu^2$ и воспользоваться известными свойствами дельта-функции.

Найдем решение уравнения (1.10). Как мы уже установили, в силу причинности $G(t) = 0$ при $t < 0$. В отличие от функции Грина (1.6), решение уравнения (1.10) остается непрерывным при $t = 0$ в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по t . В этом случае δ -функция производится при дифференцировании, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 1.5.2. Используя соотношение (1.74), легко найти, что скачок первой производной в $G(t)$ должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при $t = +0$ $G = 0$, $G' = 1$. Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего $G(t)$ при $t > 0$, поскольку правая часть уравнения (1.10) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t). \quad (1.11)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина, связанный с осцилляторной природой уравнения (1.9).

Выражение (1.5) дает решение уравнения (1.9) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной, x и \dot{x} , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем $t = 0$. Решение задачи Коши для уравнения (1.9) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.12)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (1.9), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений $G(+0) = 0$, $\dot{G}(+0) = 1$, $\ddot{G}(+0) = 0$, следующих из выражения (1.11).

Задача 1.1.2. Найти решение задачи Коши для уравнения (1.9) при нулевых начальных условиях и $\phi = \exp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$. Найти предел $\nu \rightarrow 0$.

Перейдем теперь к общему случаю дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(d/dt)x = \phi, \quad (1.13)$$

где $L(z)$ – полином от z :

$$L = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (1.14)$$

Здесь a_i – некоторые константы. Именно к типу (1.13) относятся рассмотренные нами выше уравнения (1.1, 1.9). Решение уравнения (1.13) записывается в виде (1.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t), \quad (1.15)$$

и условию $G = 0$ при $t < 0$.

Поскольку при $t > 0$ правая часть уравнения (1.15) равна нулю, его решение можно записать в виде $G(t) = \theta(t)f(t)$, где $f(t)$ удовлетворяет однородному уравнению $L(d/dt)f(t) = 0$. Решение этого уравнения можно явно выразить через корни полинома (1.14) z_i (которые могут быть как действительными, так и комплексными). Общее решение однородного уравнения $L(d/dt)f = 0$ имеет вид

$$f = \sum_i b_i \exp(z_i t), \quad (1.16)$$

где b_i – произвольные константы. Таким образом, функция $f(t)$ является гладкой (бесконечно дифференцируемой).

Отметим, что для устойчивой системы все корни z_i уравнения $L(z) = 0$ имеют отрицательную действительную часть, что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда $G(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В то же время для неустойчивой системы имеются корни с положительной действительной частью. В этом случае имеется вклад в функцию Грина $G(t)$, расходящийся на больших t .

Используем теперь соотношение (m – целое число)

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m}[\theta(t)f(t)] &= \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\delta(t)f(0) \\ &+ \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}\delta(t)\frac{df}{dt}(0) + \dots \\ &+ \delta(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}f(t) + \theta(t)\frac{d^m}{dt^m}f(t). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставляя выражение (1.17) в уравнение (1.15), где $G(t) = \theta(t)f(t)$, и приравнявая коэффициенты при различных производных $\theta(x)$, мы приходим к выводу, что уравнение (1.15) удовлетворяется при условиях

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0) = 1, \quad \frac{d^m}{dt^m}f(0) = 0, \quad m = 0, \dots, n-2. \quad (1.18)$$

Эти условия и определяют коэффициенты b_i в выражении (1.16).

Задача 1.1.3. Доказать соотношение (1.17).

Подставляя в соотношения (1.18) выражение (1.16), находим систему линейных уравнений для коэффициентов b_i :

$$\begin{aligned} \sum_i b_i z_i^m &= 0, \quad m = 0, \dots, n-2, \\ \sum_i b_i z_i^{n-1} &= 1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Эта система уравнений имеет однозначное решение, если не равен нулю определитель матрицы в левой части (1.19), который является определителем Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{j>i} (z_j - z_i). \quad (1.20)$$

Другими словами, решение однозначно, если все собственные значения z_i различны.

Задача 1.1.4. Найти функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

Задача 1.1.5. Найти функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

Необходимо проявить аккуратность в случае, когда уравнение $L(z) = 0$ имеет кратные корни. В этом случае определитель (1.20) равен нулю и решение системы уравнений (1.19) неоднозначно. Тогда помимо чистых экспонент, как в выражении (1.16), среди решений однородного уравнения $L(d/dt)x = 0$ имеются секулярные члены (со степенями t при экспонентах). Эти решения наряду с чистыми экспонентами следует вовлекать в составление необходимой нам линейной комбинации $f(t)$, определяющей $G(t) = \theta(t)f(t)$. Коэффициенты в этой линейной комбинации по-прежнему определяются условиями (1.18).

Задача 1.1.6. Найти функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

1.1.3 Матричное уравнение

Прямым обобщением скалярного релаксационного уравнения (1.1) является линейное уравнение для векторной величины \mathbf{y} :

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}\mathbf{y} = \chi. \quad (1.21)$$

Здесь $\hat{\Gamma}$ – матрица, которая определяет динамику системы, а вектор χ представляет внешнее воздействие на систему.

Отметим, что к виду (1.21) приводится рассмотренное выше дифференциальное уравнение n -го порядка для скалярной переменной x . Для этого достаточно ввести $y_1 = x$, $y_2 = dx/dt$, \dots , $y_n = d^{n-1}x/dt^{n-1}$. После этого $d\mathbf{y}/dt$ выражаются через компоненты \mathbf{y} , исходя из введенных определений и исходного уравнения n -го порядка, приводя к уравнению (1.21) с матрицей $\hat{\Gamma}$ размера $n \times n$.

Задача 1.1.7. Свести к виду (1.21) уравнение, введенное в задаче 1.2.3.

Верно и обратное: уравнение (1.21) можно свести к уравнению n -го порядка для одной переменной. Например, это можно сделать следующим способом. Дифференцируем по t уравнение для y_1 и выражаем возникшие первые производные от \mathbf{y} из уравнения (1.21). Тем самым мы выразим вторую производную по времени от y_1 через \mathbf{y} . Продолжая эту процедуру, мы сможем выразить производные от y_1 вплоть до n -ой через \mathbf{y} . Исключая затем из полученных соотношений y_2, \dots, y_n , мы найдем замкнутое уравнение n -го порядка для y_1 .

Как известно, можно ввести собственные векторы \mathbf{a}_i матрицы $\hat{\Gamma}$, которые удовлетворяют уравнениям

$$\hat{\Gamma}\mathbf{a}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i, \quad (1.22)$$

где λ_i – собственные числа матрицы $\hat{\Gamma}$. Если собственные числа не вырождены, то любой вектор можно разложить по собственным векторам \mathbf{a}_i , в частности $\mathbf{y} = \sum_i x_i \mathbf{a}_i$, $\chi = \sum_i \phi_i \mathbf{a}_i$. Подставляя это представление в уравнение (1.21), находим

$$\frac{dx_i}{dt} + \lambda_i x_i = \phi_i. \quad (1.23)$$

Таким образом, задача сводится к набору уже рассмотренных нами скалярных уравнений (1.1).

Собственные числа λ_i могут быть как действительными, так и комплексными. Для действительной матрицы $\hat{\Gamma}$ собственные числа λ_i либо действительны, либо распадаются на пары комплексно сопряженных величин. Для устойчивой системы все собственные числа λ_i имеют положительные действительные части. Для чисто осцилляторной системы комплексно сопряженные λ_i являются чисто мнимыми. Если матрица $\hat{\Gamma}$ происходит из скалярного уравнения n -го порядка (1.15), то собственные числа λ_i определяются корнями уравнения $L(z_i) = 0$, $\lambda_i = -z_i$.

Введем функцию Грина для уравнения (1.21), которая является матрицей $\hat{G}(t)$, через которую выражается решение этого уравнения

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^t ds \hat{G}(t-s)\chi(s). \quad (1.24)$$

Функция Грина $\hat{G}(t)$ равна нулю при $t < 0$ и удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{d}{dt} + \hat{\Gamma} \right) \hat{G}(t) = \delta(t)\hat{1}, \quad (1.25)$$

где $\hat{1}$ – единичная матрица. Решение этого уравнения записывается в виде

$$\hat{G} = \theta(t) \exp(-\hat{\Gamma}t). \quad (1.26)$$

Можно выписать явное выражение для функции Грина в терминах собственных векторов матрицы Γ . Для

этого помимо собственных столбцов \mathbf{a}_i матрицы Γ надо ввести собственные строки \mathbf{b}_i^T , которые удовлетворяют уравнениям $\mathbf{b}_i^T \hat{\Gamma} = \lambda_i \mathbf{b}_i^T$. Как известно, собственные столбцы и строки можно выбрать ортонормированными $\mathbf{b}_i^T \mathbf{a}_j = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, равный единице, если $i = j$, и нулю, если $i \neq j$. Тогда

$$\hat{G} = \theta(t) \sum_i e^{-\lambda_i t} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^T. \quad (1.27)$$

Это выражение представляет собой сумму функций Грина (1.6) с множителями, которые обеспечивают проекции на собственные векторы матрицы $\hat{\Gamma}$.

Задача 1.1.8. Выписать выражение (1.27) для матрицы

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученные соотношения можно переписать в матричном виде. А именно, введем обозначения \hat{A} и \hat{B} для матриц, составленных из собственных столбцов матрицы $\hat{\Gamma}$ и из собственных строк матрицы $\hat{\Gamma}$, соответственно. Тогда условие ортонормированности строк и столбцов записывается в виде $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}$. Матрица же $\hat{\Gamma}$ записывается в виде

$$\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{\Lambda}\hat{B}, \quad (1.28)$$

где $\hat{\Lambda}$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. Отметим, что в силу $\hat{B}\hat{A} = \hat{I}$

$$\hat{\Gamma}^n = \hat{A}\hat{\Lambda}^n\hat{B}.$$

Поэтому из соотношения (1.26) получаем

$$\hat{G} = \theta(t) \hat{A} \exp(-t\hat{\Lambda}) \hat{B}. \quad (1.29)$$

Это – другая форма записи выражения (1.27).

Переходим к случаю, когда имеются вырожденные собственные значения λ_i . Никаких проблем не возникает, например, если матрица $\hat{\Gamma}$ является симметричной. Тогда имеется n собственных векторов \mathbf{a}_i матрицы $\hat{\Gamma}$, по которым можно разложить любой вектор. Поэтому мы возвращаемся к описанной выше ситуации, когда задача распадается на n независимых скалярных уравнений, каждое из которых имеет вид (1.1). Рассмотрим случай матриц, имеющих вырожденные собственные значения λ_i , когда задачу нельзя свести к n независимым скалярным уравнениям, каждое из которых имеет вид (1.1). Матрицу $\hat{\Gamma}$ и в этом случае можно представить в виде (1.28). Однако $\hat{\Lambda}$ уже не является диагональной, а распадается на совокупность клеток Жордана. Отметим, что по-прежнему имеет место представление (1.29). Поэтому задача сводится к вычислению $\exp(-t\hat{\Lambda})$.

Чтобы проиллюстрировать особенности рассматриваемого случая, рассмотрим матрицу 2×2

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \hat{I} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

которая является канонической формой матрицы Жордана 2×2 . В компонентах

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} + \lambda y_1 + y_2 &= \chi_1, \\ \frac{dy_2}{dt} + \lambda y_2 &= \chi_2. \end{aligned}$$

Таким образом, y_2 удовлетворяет стандартному уравнению (1.1). Введя $y_1 = y - ty_2$, мы находим стандартное уравнение для y :

$$\frac{dy}{dt} + \lambda y = \chi_1 + t\chi_2.$$

Тем не менее, в y_1 содержится секулярный член $-ty_2$.

Данная ситуация является типичной. Наличие в каноническом представлении (1.28) матрицы $\hat{\Gamma}$ клеток Жордана в матрице $\hat{\Lambda}$ приводит к появлению секулярных членов в решении уравнения (1.21). Они могут быть первого порядка по t (то есть содержать первую степень t , как множитель при экспоненте), как в рассмотренном нами выше простейшем случае, или более высокого порядка по t (в случае более сложной клетки Жордана) в качестве множителя при экспоненте. Все это не меняет качественно экспоненциальный характер решения однородного уравнения (1.21), однако производит степенные множители при экспонентах.

Канонический вид клетки Жордана имеет вид $\lambda \hat{I} + \hat{N}$, где \hat{N} – нильпотентная матрица, все степени которой, начиная с некоторой, равны нулю. В рассмотренном нами простейшем примере матрицей \hat{N} является последняя матрица в выражении (1.30), уже ее квадрат равен нулю. Следующей по сложности является клетка Жордана 3×3

$$\hat{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Матрица \hat{N} и ее квадрат имеют вид

$$\hat{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{N}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все более высокие степени матрицы \hat{N} равны нулю.

Свойство нильпотентности матрицы \hat{N} позволяет эффективно получать выражение для функции Грина (1.29). Подставляя $\hat{\Lambda} = \lambda \hat{I} + \hat{N}$ и раскладывая экспоненту по \hat{N} , находим

$$\exp(-t\hat{\Lambda}) = e^{-\lambda t} \left(\hat{I} - t\hat{N} + \frac{t^2}{2} \hat{N}^2 + \dots \right). \quad (1.32)$$

Благодаря нильпотентности матрицы \hat{N} в разложении (1.32) по степеням \hat{N} имеется лишь конечное число членов. Для рассмотренного нами простейшего случая в выражении (1.32) лишь первая степень отлична от нуля.

Для матрицы (1.31) отличны от нуля два члена разложения, что дает

$$\exp(-t\hat{\Lambda}) = e^{-\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1.1.9. Найти функцию Грина уравнения (1.21) для матрицы

$$\hat{\Gamma} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

которая относится к типу Жордана.

1.2 Преобразование Лапласа в эволюционных задачах

Преобразование Лапласа (смотри раздел 1.5.3) является естественным методом решения эволюционных задач, для которых выполняется принцип причинности. Например, в силу принципа причинности функция Грина отлична от нуля только при положительных временах и потому ее естественно характеризовать при помощи преобразования Лапласа

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) G(t).$$

При этом выявляются некоторые особенности функции Грина, связанные с аналитической структурой ее преобразования Лапласа $\tilde{G}(p)$.

Изложим основанный на преобразовании Лапласа метод, применимый для вычисления функции Грина уравнения (1.13), которая подчиняется уравнению (1.15). Произведем преобразование Лапласа этого уравнения, интегрируя по времени t от малого положительного значения до бесконечности. В этом случае в правой части получится ноль, а в левой части мы будем интегрировать по частям все члены, ‘перекидывая’ производные на $\exp(-pt)$. В результате получим комбинацию $L(p)\tilde{G}(p)$. В силу равенства нулю почти всех производных $G(t)$ при $t \rightarrow 0$ можно убедиться, что единственный отличный от нуля внеинтегральный член происходит из

$$\int dt \exp(-pt) (d/dt)^n G(t).$$

Этот внеинтегральный член равен -1 , так как равна единице производная $d^{n-1}G/dt^{n-1}$ при $t \rightarrow 0$. Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p). \quad (1.33)$$

Мы заключаем, что $\tilde{G}(p)$ имеет полюса, которые определяются нулями полинома $L(p)$.

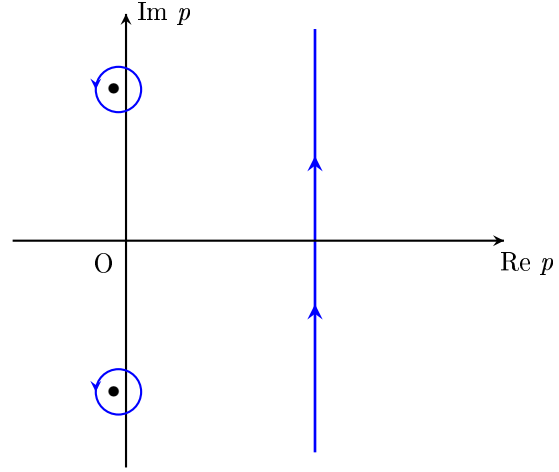


Рис. 1.1: Преобразование контура, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

Обратное преобразование Лапласа имеет вид (1.77), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{G}(p). \quad (1.34)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 1.1. При $t < 0$ мы можем сместить контур интегрирования вправо, поскольку e^{pt} при этом стремится к нулю. В результате мы заключаем, что при $t < 0$ функция Грина равна нулю, как и должно быть. При $t > 0$ мы можем сместить контур интегрирования влево, поскольку e^{pt} при этом стремится к нулю. При таком смещении мы будем ‘наткаться’ на полюсы $\tilde{G}(p)$. Далее контур можно ‘протащить’ через полюса, породив контуры, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку e^{pt} стремится к нулю. Таким образом, интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов $\tilde{G}(p)$, смотри рисунок 1.1. Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе, и мы находим

$$G(t) = \sum_i \text{res}_i \exp(pt) / L(p), \quad (1.35)$$

где суммирование идет по полюсам $\tilde{G}(p)$, то есть нулям $L(p)$.

Задача 1.2.1. Найти выражения для функций Грина (1.6, 1.11), исходя из соотношения (1.35).

Для устойчивой системы все полюса выражения (1.33) лежат в левой полуплоскости по p , что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. Тогда $G(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (1.33) в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах породят вклад в функцию Грина $G(t)$, расходящийся на больших t , в соответствии с (1.35).

Задача 1.2.2. Исходя из соотношения (1.35), найти функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.4.

Задача 1.2.3. Исходя из соотношения (1.35), найти функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.5.

Задача 1.2.4. Исходя из соотношения (1.35), найти функцию Грина уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

Убедиться, что ответ совпадает с решением задачи 1.1.6.

При решении задачи $L(d/dt)x = \phi$ с нулевыми начальными условиями при $t = 0$ мы находим

$$x(t) = \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (1.36)$$

Производя преобразование Лапласа обеих частей соотношения (1.36), получаем

$$\tilde{x}(p) = \tilde{G}(p)\tilde{\phi}(p) = \tilde{\phi}(p)/L(p). \quad (1.37)$$

Таким образом, если известны $\tilde{G}(p)$ и $\tilde{\phi}(p)$, то $x(t)$ можно представить в виде интеграла (1.77):

$$x(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\tilde{\phi}(p)}{L(p)}. \quad (1.38)$$

Задача 1.2.5. Найти $x(t)$, как решение уравнения $(d^2/dt^2 + \nu^2)^2 x = \phi$ с нулевыми начальными условиями для $\phi = \exp(-\alpha t)$.

Задача 1.2.6. Найти $x(t)$, как решение уравнения $(d^2/dt^2 + \nu^2)x = \phi$ с нулевыми начальными условиями для $\phi = 1/\sqrt{t}$. Определить асимптотику этого решения при больших t .

В таком же виде (1.38) можно записать и решение задачи Коши однородного уравнения (1.13) (с нулевой правой частью). Для этого надо использовать в качестве функции $\phi(t)$ линейную комбинацию $\delta(t)$ и ее производных, которая обеспечивает генерацию начальных условий из нулевой при отрицательных t функции $\Phi(t)$. Количество производных от δ -функции зависит от порядка полинома L : если этот порядок равен n , то надо

брать производные до $n - 1$ порядка включительно. В представлении Лапласа такая функция $\tilde{f}(p)$ представляет собой полином порядка $n - 1$ по p . Отсюда следует, например, что при больших t поведение однородного решения уравнения (1.13) будет экспоненциальным, причем ведущая экспонента определяется корнем уравнения $L(p) = 0$ с наибольшей действительной частью. При решении смешанной задачи, когда помимо правой части задано начальное условие, надо брать линейную комбинацию вынужденного решения (1.38) и решения задачи Коши однородного уравнения.

Задача 1.2.7. Найти решение уравнения $\partial_t^2 x + x = \exp(-\lambda t)$ с начальными условиями $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$.

Приведенные выше соображения применимы также и к матричному уравнению (1.21). В этом случае мы имеем дело с матричной функцией Грина \tilde{G} и, соответственно, с матричным преобразованием Лапласа $\tilde{\tilde{G}}(p)$. Обобщение приведенных выше соотношений на этот случай не представляет труда. Например, вместо (1.33) получается

$$\tilde{\tilde{G}}(p) = (p\hat{1} + \hat{\Gamma})^{-1}.$$

Вычисляя матрицу, обратную к $p\hat{1} + \hat{\Gamma}$, мы получаем в знаменателе детерминант, который обращается в ноль при $p = -\lambda_i$, где λ_i – собственные значения матрицы $\hat{\Gamma}$, определяющие поведение собственных мод системы со временем, смотри (1.27).

1.3 Уравнения Вольтерра

До сих пор мы рассматривали задачу о нахождении параметров системы, которая описывается линейным дифференциальным уравнением, при данном внешнем воздействии на нее. Однако динамика системы может даваться и интегральным уравнением. Такого сорта ситуация возникает обычно, когда получается уравнение для части степеней свободы системы путем эффективного исключения из рассмотрения остальных степеней свободы.

Проиллюстрируем сказанное на примере системы, которая задается двумя переменными, x и y . Будем считать, что внешнее воздействие ϕ приложено к переменной y , причем соотношение между ними дается просто соотношением $y = \phi$. Соотношение же между x и y дается дифференциальным уравнением $\hat{L}y = x$, однородным по времени. Если мы решаем задачу с нулевым начальным условием на y при $t = 0$, то $y(t) = \int_0^t ds G(t-s)x(s)$. Подставляя это выражение в $y = \phi$, мы получаем замкнутое уравнение на x : $\int_0^t ds G(t-s)x(s) = \phi(t)$.

Таким образом, мы приходим к уравнению Вольтерра (Volterra) первого рода с однородным ядром

$$\int_0^t ds K(t-s)f(s) = \phi(t), \quad (1.39)$$

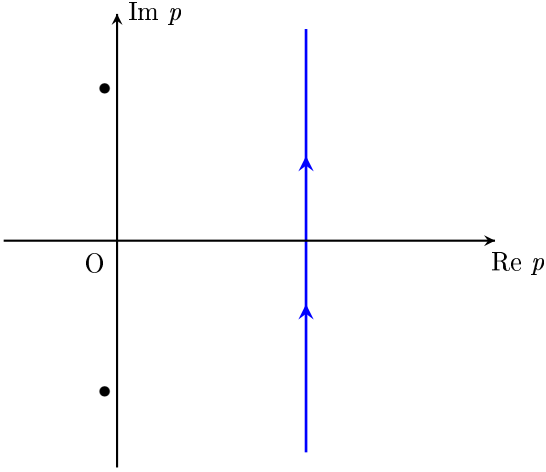


Рис. 1.2: Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

где K – известная функция, которая называется ядром интегрального уравнения. Задача заключается в восстановлении $f(t)$ по данной $\phi(t)$.

Решение уравнения (1.39) основано на преобразовании Лапласа (смотри раздел 1.5.3). Производя преобразование Лапласа обеих частей уравнения (1.39), находим $\tilde{K}(p)\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)$. Таким образом, если известны преобразования Лапласа функций $\phi(t)$, $K(t)$, то преобразование Лапласа функции $f(t)$ находится, как их отношение

$$\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)/\tilde{K}(p). \quad (1.40)$$

Чтобы найти $f(t)$, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа функции $\tilde{f}(p)$.

Напомним, что обратное преобразование Лапласа дается интегралом

$$f(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{f}(p), \quad (1.41)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции $\tilde{f}(p)$, смотри рисунок 1.2. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных особенностей функции $\tilde{f}(p)$ (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (их расположение условно). Вычисление интеграла (1.41) с $\tilde{f}(p)$, которое определяется (1.40) и позволяет найти искомую функцию.

Как показывает указанная процедура, интегральное уравнение (1.39) не требует для своего решения никаких начальных условий: начальное значение функции f определяется из решения самой задачи. Это довольно существенное отличие от дифференциальных уравнений.

Задача 1.3.1. Найти решение уравнения (1.39) для $K(t) = \exp(-\lambda t)$, $\phi(t) = t^n$.

Задача 1.3.2. Найти решение уравнения (1.39) для $K(t) = \exp(-\lambda t)$, $\phi(t) = \sin^2 t$.

В то же время интегральное уравнение (1.39) может приводить к проблемам, которые следует иметь в виду. Рассмотрим случай, когда функции $K(t)$, $\phi(t)$ регулярны при малых t и при $t \rightarrow 0$ стремятся к константам K_0 , ϕ_0 . В этом случае при больших значениях p справедливо приближение $\tilde{K} \approx K_0/p$, $\tilde{\phi} \approx \phi_0/p$. Поэтому при больших значениях p величина \tilde{f} стремится к константе ϕ_0/K_0 . Это означает наличие δ -функционального вклада в $f(t)$, смотри раздел 1.5.3.

Надо отдельно выделить в $f(t)$ этот δ -функциональный вклад, равный $(\phi_0/K_0)\delta(t)$, остаток же можно вычислять регулярным образом:

$$f(t) = \frac{\phi_0}{K_0} \delta(t) + \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \left[\frac{\tilde{\phi}}{\tilde{K}} - \frac{\phi_0}{K_0} \right]. \quad (1.42)$$

Надо быть аккуратным в понимании $\delta(t)$ в выражении (1.42), поскольку в преобразовании Лапласа интеграл идет от $t = 0$. Поэтому $\delta(t)$ в выражении (1.42) надо понимать, как предел $\delta(t - \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Аналогично надо поступать и в других случаях, когда отношение $\tilde{\phi}/\tilde{K}$ стремится к константе при $p \rightarrow \infty$.

Задача 1.3.3. Найти решение уравнения (1.39) для $K(t) = \exp(-\lambda t)$, $\phi(t) = \cos(\nu t)$.

Задача 1.3.4. Найти решение уравнения (1.39) для $K(t) = t$, $\phi(t) = \sin t$.

До сих пор мы рассматривали случай регулярных в нуле функций $K(t)$, $\phi(t)$. Однако общая схема решения работает и для сингулярных в нуле функций $K(t)$, $\phi(t)$. Необходимо только, чтобы существовали преобразования Лапласа \tilde{K} , $\tilde{\phi}$.

Задача 1.3.5. Найти решение уравнения (1.39) для $K(t) = 1/\sqrt{t}$ и $\phi(t) = 1$.

Аналогичным образом вводится интегральное уравнение Вольтерра второго рода с однородным ядром:

$$f(t) + \int_0^t ds K(t-s)f(s) = \phi(t). \quad (1.43)$$

Задача также заключается в восстановлении $f(t)$ по $\phi(t)$. Как и в случае с уравнением (1.39), уравнение (1.43) не требует для своего решения никаких начальных условий: начальное значение функции f определяется из решения самой задачи.

Уравнение (1.43) решается, как и (1.39), при помощи преобразования Лапласа. После перехода к представлению Лапласа мы находим из уравнения (1.43) алгебраическое уравнение $[1 + \tilde{K}(p)]\tilde{f}(p) = \tilde{\phi}(p)$. Отсюда мы находим выражение для преобразования Лапласа $\tilde{f}(p)$ искомой функции $f(t)$:

$$\tilde{f}(p) = \frac{\tilde{\phi}(p)}{1 + \tilde{K}(p)}. \quad (1.44)$$

Чтобы найти $f(t)$, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа функции $\tilde{f}(p)$.

Задача 1.3.6. Найти решение уравнения (1.43) для $K(t) = \exp(-\lambda t)$, $\phi(t) = \cos(\nu t)$.

Даже если явное выражение для решения $f(t)$ уравнения Вольтерра указанным способом найти не удастся, представление (1.40) или (1.44) позволяет исследовать поведение $f(t)$ при больших временах t . Для этого контур интегрирования в (1.41) следует деформировать, сдвигая его влево настолько, насколько это возможно. В результате контур упрется в особенность p_* функции $\tilde{f}(p)$ с наибольшей действительной частью. При больших временах t именно окрестность этой особенности определяет поведение решения, которое ведет себя, как $\exp(p_* t)$, то есть экспоненциально затухает, если $\operatorname{Re} p_* < 0$. Возможен случай, когда в силу какой-то симметрии сразу несколько особенностей функции $\tilde{f}(p)$ имеют одинаковые действительные части. Тогда все они вносят сравнимые вклады в асимптотическое поведение $f(t)$. Если же $\tilde{f}(p)$ имеет особенность при $p = 0$, то именно ее окрестность дает в основном вклад в асимптотическое поведение $f(t)$. Этот случай требует конкретного анализа. Как правило, асимптотическое поведение $f(t)$ в этом случае является степенным.

Задача 1.3.7. Найти поведение решения уравнения (1.43) при больших временах для $K(t) = 1/\sqrt{t}$ и $\phi(t) = 1$. Как ответ соотносится с решением задачи 1.3.5?

1.4 Неоднородная по времени релаксация

До сих пор мы рассматривали релаксацию физической системы к равновесному состоянию, которое не зависит от времени. Именно в этом случае возникают эволюционные уравнения с постоянными коэффициентами. В то же время можно рассмотреть эволюцию подсистемы неравновесной системы, состояние которой меняется со временем. В этом случае коэффициенты в эволюционных уравнениях подсистемы будут зависеть от времени.

Сначала мы рассмотрим простейший случай, когда подсистема описывается одним параметром x , а динамическое уравнение имеет тот же вид (1.1), в котором теперь темп релаксации γ зависит от времени:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma(t)x = \phi, \quad (1.45)$$

Как и для случая постоянного γ , решение уравнения (1.45) записывается в виде свертки с функцией Грина G

$$x(t) = \int ds G(t, s) \phi(s). \quad (1.46)$$

Однако теперь функция Грина $G(t, s)$ зависит не только от разности $t - s$, но от обеих переменных. Уравнение, которому подчиняется функция Грина, имеет тот же вид (1.3)

$$\frac{dG}{dt} + \gamma(t)G = \delta(t - s). \quad (1.47)$$

В силу причинности функция Грина равна нулю при $t < s$.

Решение уравнения (1.47) может быть найдено в явном виде. Поскольку при $t < s$ функция Грина равна нулю и в точке $t = s$ она испытывает единичный скачок, то при $t > s$ уравнение (1.47) сводится к однородному уравнению $\partial_t G = -\gamma G$ с начальным условием $G = 1$ при $t = s$. Решение этого уравнения имеет вид

$$G(t, s) = \theta(t - s) \exp \left[- \int_s^t dt' \gamma(t') \right]. \quad (1.48)$$

Разумеется, при постоянном γ выражение (1.48) сводится к выражению (1.6).

Задача 1.4.1. Найти функцию Грина (1.48) для случая $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \cos t$, где γ_0, γ_1 — константы.

Задача 1.4.2. Найти функцию Грина (1.48) для случая $\gamma = a/t$, где a — некоторая константа.

Теперь мы переходим к случаю векторного уравнения

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} + \hat{\Gamma}(t)\mathbf{y} = \chi. \quad (1.49)$$

которое является обобщением уравнения (1.21) на случай матрицы $\hat{\Gamma}$, зависящей от времени. Задача решается при помощи матричной функции Грина $\hat{G}(t, s)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\hat{G}}{dt} + \hat{\Gamma}(t)\hat{G} = \hat{1}\delta(t - s), \quad (1.50)$$

и условию причинности $\hat{G}(t, s) = 0$ при $t < s$. Тогда решение уравнения (1.49) запишется в виде

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds \hat{G}(t, s) \chi(s). \quad (1.51)$$

К сожалению, решение уравнения (1.50) не может быть записано в виде, аналогичном (1.48). Причина этого заключается в том, что в различные моменты времени матрицы $\hat{\Gamma}(t)$, вообще говоря, не коммутируют. А для некоммутирующих матриц нет простого правила вычисления функции от них. Например, $\exp(\hat{A} + \hat{B}) \neq \exp(\hat{A}) \exp(\hat{B})$, если \hat{A} и \hat{B} не коммутируют между собой. Поэтому надо подробнее проанализировать решение уравнения (1.50).

Отметим несколько свойств решения уравнения (1.50). Прежде всего, при $t \rightarrow s + 0$ $\hat{G} = \hat{1}$. Это свойство легко получить, если проинтегрировать уравнение (1.50) по t по небольшому интервалу вокруг $t = s$. В правой части при этом получится $\hat{1}$, в левой части второе

слагаемое даст малый вклад, а первое даст скачок функции Грина в нуле, который как раз и равен $\hat{G}(s+0, s)$, поскольку функция Грина равна нулю при $t < s$. Поэтому при $t > s$ функцию Грина можно рассматривать, как решение однородного уравнения

$$\frac{d\hat{G}}{dt} + \hat{\Gamma}(t)\hat{G} = 0, \quad (1.52)$$

с начальным условием $\hat{G} = \hat{1}$.

Далее, справедливо соотношение

$$\hat{G}(t, s) = \hat{G}(t, \tau)\hat{G}(\tau, s), \quad (1.53)$$

где $t > \tau > s$. Действительно, на интервале (τ, t) произведение $\hat{G}(t, \tau)\hat{G}(\tau, s)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.52) с начальным условием $\hat{G}(\tau+0, \tau)\hat{G}(\tau, s) = \hat{G}(\tau, s)$ при $t = \tau+0$. Именно этому уравнению с тем же начальным условием удовлетворяет $\hat{G}(t, s)$, откуда и следует условие (1.53). Очевидно, соотношение (1.53) обобщается на произвольное число интервалов:

$$\hat{G}(t, s) = \hat{G}(t, \tau_1)\hat{G}(\tau_1, \tau_2) \dots \hat{G}(\tau_n, s), \quad (1.54)$$

где $t > \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_n > s$.

Разобьем интервал (s, t) на большое число N интервалов длины $\epsilon = (t-s)/N$. На каждом таком интервале решение уравнения (1.52) можно приближенно записать в виде

$$\hat{G}(\tau + \epsilon, \tau) = [\hat{1} - \epsilon\hat{\Gamma}(\tau)]. \quad (1.55)$$

В силу соотношения (1.54) находим

$$\hat{G}(t, s) \approx [\hat{1} - \epsilon\hat{\Gamma}(t-\epsilon)][\hat{1} - \epsilon\hat{\Gamma}(t-2\epsilon)] \dots, \quad (1.56)$$

всего N сомножителей. Обратим внимание на то что, что множители в произведении (1.56) стоят в порядке убывания времени от t к s или, как говорят, это произведение хронологически упорядочено.

В пределе $N \rightarrow \infty$ произведение (1.56) дает конструкцию, которая называется хронологически упорядоченной экспонентой, которая обозначается буквой T перед экспонентой:

$$\hat{G}(t, s) = T \exp \left[- \int_s^t d\tau \hat{\Gamma}(\tau) \right]. \quad (1.57)$$

Хронологически упорядоченная экспонента может быть разложена в ряд

$$\begin{aligned} T \exp \left[- \int_s^t d\tau \hat{\Gamma}(\tau) \right] &= \hat{1} - \int_s^t d\tau \hat{\Gamma}(\tau) \\ &+ \int_s^t d\tau_1 \hat{\Gamma}(\tau_1) \int_s^{\tau_1} d\tau_2 \hat{\Gamma}(\tau_2) \\ &- \int_s^t d\tau_1 \hat{\Gamma}(\tau_1) \int_s^{\tau_1} d\tau_2 \hat{\Gamma}(\tau_2) \int_s^{\tau_2} d\tau_3 \hat{\Gamma}(\tau_3) + \dots \end{aligned} \quad (1.58)$$

каждый член которого также хронологически упорядочен. Обратим внимание на отсутствие в разложении (1.58) множителя $1/n!$, как в обычной экспоненте, что связано с ограничением на интервалах интегрирования по τ_i .

Задача 1.4.3. Найти первые три члена разложения (1.58) для матрицы $\hat{\Gamma} = \cos(t)\hat{\sigma}_1 + \sin(t)\hat{\sigma}_2$, где $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ – матрицы Паули.

1.5 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

1.5.1 Временное преобразование Фурье

Для любой функции $f(t)$, заданной на интервале $-\infty < t < +\infty$ и стремящейся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$, можно определить преобразование Фурье

$$\tilde{f}(\omega) = \int dt \exp(i\omega t) f(t). \quad (1.59)$$

Выражение функции $f(t)$ через $\tilde{f}(\omega)$, которое называется обратным преобразованием Фурье, имеет вид

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t) \tilde{f}(\omega). \quad (1.60)$$

Обратим внимание на противоположные знаки в экспонентах в прямом и обратном преобразованиях (1.59, 1.60). Из выражения (1.59) следует, что прямое преобразование Фурье действительной функции $f(t)$ удовлетворяет соотношению $\tilde{f}(-\omega) = \tilde{f}^*(\omega)$, где звездочка означает комплексное сопряжение.

Помимо разложения в интеграл Фурье (1.60), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале. Отметим, что представление функций в виде ряда Фурье является ведущим способом, который используется при организации сложного численного моделирования.

Мы будем иметь дело с периодической функцией, период которой мы обозначим T или с функцией, заданной на конечном интервале $0 < t < T$. (Этого всегда можно добиться сдвигом начала отсчета времени.) Тогда функция $f(t)$ раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(-2\pi i n t / T), \quad (1.61)$$

где n – целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (1.61) задает некоторую периодическую с периодом T функцию, которая определена при произвольных t . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале $0 < t < T$, то ряд Фурье (1.61) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на

то, что это периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы при $t_n = nL$.

Обратное к (1.61) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^T \frac{dt}{T} \exp(2\pi i n t / T) f(t). \quad (1.62)$$

Отсюда следует, что для действительной функции $f(t)$ коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (1.61) удовлетворяют соотношению $f_{-n} = f_n^*$. В этом случае ряд Фурье (1.61) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n t / T) + \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n t / T)]. \quad (1.63)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших T , в ряде Фурье (1.61) существенны большие n . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по частотам $\omega = 2\pi n / T$. Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow T \int \frac{d\omega}{2\pi},$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем T – периодом или длиной интервала.

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то это приводит к весьма медленному убыванию коэффициентов ряда Фурье при росте n . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье δ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме δ -функций, которая является периодической функцией t . Используя соотношения (1.61, 1.62), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inT/T).$$

В этом случае коэффициенты разложения f_n вообще не зависят от n . Для разрывной функции δ -функции возникают в ее производной по x , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от n при больших n . Для самой разрывной функции f это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально $1/n$ при больших n .

1.5.2 Дельта-функция Дирака

В настоящем разделе мы рассматриваем основные свойства дельта-функции Дирака $\delta(t)$. ‘Физическое’ определение дельта-функции $\delta(t)$ состоит в том, что она равна нулю для всех $t \neq 0$, равна бесконечности при $t = 0$, а интеграл от нее равен единице: $\int dt \delta(t) = 1$. Эту функцию можно представить себе, как предел некоторой последовательности функций, которая приводит к указанным свойствам. Например, δ -функцию можно записать

в виде предела последовательности

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}. \quad (1.64)$$

Действительно, при любом положительном ϵ интеграл от функции в правой части выражения (1.64) равен единице, при $t \neq 0$ правая часть (1.64) стремится к нулю, а при $t = 0$ – к бесконечности при стремлении ϵ к нулю.

Задача 1.5.1. Доказать соотношения

$$\begin{aligned} \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t^2\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{t^2}{\epsilon}\right), \\ \delta(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nt)}{\pi n t^2}. \end{aligned}$$

Поскольку значение функции $\delta(t)$ отлично от нуля только при $t = 0$, то для любой непрерывной функции $f(t)$ справедливо соотношение $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$. Или, обобщая это соотношение, $\delta(t-s)f(t) = \delta(t-s)f(s)$. Интегрируя, находим важное свойство δ -функции:

$$\int dt \delta(t-s)f(t) = f(s). \quad (1.65)$$

Именно соотношение (1.65) наиболее часто используется в приложениях, где возникает δ -функция.

Частным случаем соотношения (1.65) является

$$\int dt \delta(t) \exp(i\omega t) = 1. \quad (1.66)$$

Это равенство можно рассматривать, как прямое преобразование Фурье от δ -функции (1.59). Тогда обратное преобразование Фурье (1.60) дает следующее интегральное представление для δ -функции

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t). \quad (1.67)$$

Беря действительную и мнимую части этого соотношения, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} \cos(\omega t) &= \delta(t), \\ \int \frac{d\omega}{2\pi} \sin(\omega t) &= 0. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Второй интеграл в формуле (1.68) равен нулю в силу антисимметричности подынтегрального выражения по ω .

Задача 1.5.2. Получить соотношение (1.66) предельным переходом $\epsilon \rightarrow 0$ с использованием представления (1.64).

Разложение в интеграл Фурье действует на бесконечном интервале $-\infty < t < +\infty$. Если же мы рассматриваем задачу на конечном интервале, то функции следует раскладывать в ряд Фурье. Соотношение (1.66) справедливо и на конечном интервале, если он включает ноль. Поэтому его можно использовать для вычисления коэффициентов разложения δ -функции в ряд Фурье в соответствии с (2.79). Таким образом, мы приходим к соотношению

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(imt), \quad (1.69)$$

где для определенности выбран интервал изменения параметра $-\pi < t < \pi$.

Задача 1.5.3. Доказать, что на интервале $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} \frac{1 - r^2}{2\pi(1 - 2r \cos t + r^2)} = \delta(t),$$

где $\lim_{r \rightarrow 1-0}$ означает предел при стремлении r к единице снизу. Что получится, если устремить r к единице сверху?

Из основных свойств δ -функции следует, что $\int dt \delta(t) = 1$ при интегрировании по любому интервалу, который включает точку $t = 0$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^s dt \delta(t) = \theta(s), \quad (1.70)$$

$$\theta(s) = 0 \text{ if } s < 0, \quad \theta(s) = 1 \text{ if } s > 0.$$

Функция $\theta(t)$ называется ступенчатой функцией или функцией Хэвисайда. Таким образом, мы нашли первообразную δ -функции. Дифференцируя по s соотношение (1.70), мы находим $\partial_t \theta(t) = \delta(t)$.

Можно ввести не только первообразную, но и производную от δ -функции, которую мы обозначим $\delta'(t)$. Правила обращения с этим объектом следуют из соотношения (1.65). А именно, интегрируя по частям, находим для произвольной гладкой функции f

$$\int dt \delta'(t-s) f(t) = -f'(s). \quad (1.71)$$

Подставляя в соотношение (1.71) $f(t) = (t-s)g(t)$ и сравнивая результат с соотношением (1.65), мы заключаем, что $t\delta'(t) = -\delta(t)$. Раскладывая теперь $f(t)$ в ряд Тейлора (до первого порядка) вблизи точки $t = s$ и используя указанное соотношение, мы находим

$$f(t)\delta'(t-s) = f(s)\delta'(t-s) - f'(s)\delta(t-s). \quad (1.72)$$

Обратим внимание на то, что из соотношения (1.72) следует, что $f(t)\delta'(t-s) \neq f(s)\delta'(t-s)$.

Задача 1.5.4. Доказать соотношение

$$\delta'(t) = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2t\epsilon}{\pi(t^2 + \epsilon^2)^2}.$$

Можно ввести и более высокие производные от дельта-функции, правила обращения с которыми следуют из основных свойств дельта-функции, приведенных выше. Эти производные возникают, как правило, в интегральных соотношениях.

Задача 1.5.5. Доказать, что

$$t\delta''(t) = -2\delta'(t). \quad (1.73)$$

До сих пор мы неявно подразумевали, что имеем дело с функциями, которые являются непрерывными и имеют непрерывную производную. Если же функция испытывает в некоторой точке скачок или излом, то надо быть аккуратным при обращении с ее производными (возникающими, в частности, при интегрировании по частям). Примером такой функции, рассмотренной выше, является разрывная функция Хэвисайда, производная которой сводится к δ -функции. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что если функция $f(t)$ испытывает скачок в точке s , то

$$f'(t) = [f(s+0) - f(s-0)]\delta(t-s) + g(t), \quad (1.74)$$

где функция $g(t)$ ограничена вблизи точки $t = s$. Здесь $f(s-0)$ и $f(s+0)$ — значения функции $f(t)$ слева и справа от точки разрыва, то есть $f(s+0) - f(s-0)$ — скачок функции на разрыве. Подобным же образом анализируется функция $f(t)$, испытывающая в некоторой точке излом, который соответствует скачку первой производной. Тогда δ -функциональный вклад возникает во второй производной от функции $f(t)$.

Задача 1.5.6. Доказать соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \gamma^2 \right) \exp(-\gamma|t|) = -2\gamma\delta(t).$$

Справедливо соотношение

$$\delta[f(t)] = \sum_n \frac{1}{|f'(s_n)|} \delta(t - s_n), \quad (1.75)$$

где суммирование идет по всем точкам s_n , в которых функция $f(t)$ обращается в ноль. Для доказательства (1.75) заметим прежде всего, что δ -функция равна нулю везде, кроме тех точек, где ее аргумент обращается в ноль. Поэтому $\delta[f(t)]$ представляет собой сумму δ -функций (с некоторыми коэффициентами) по всем точкам s_n , в которых функция $f(t)$ обращается в ноль. Рассмотрим окрестность одной такой точки s . Найдем интеграл по этой окрестности $\int dt \delta(f)$. Перейдем здесь к интегрированию по df :

$$\int dt \delta(f) = \int \frac{df}{f'} \delta(f).$$

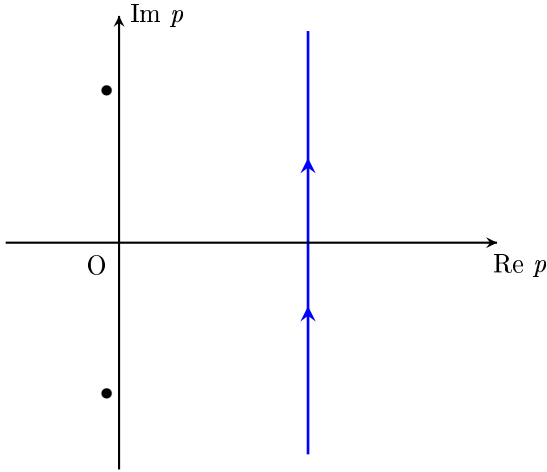


Рис. 1.3: Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

Поскольку $\delta(f)$ отлична от нуля только в точке $t = s$, в этой формуле f' можно заменить на $f'(s)$, после чего $(f')^{-1}$ выносится за знак интеграла. Что же касается интеграла $\int df \delta(f)$, то его величина зависит от знака производной $f'(s)$: если $f'(s) > 0$, то интеграл равен единице, а если $f'(s) < 0$, то интеграл равен минус единице. Другими словами, $\int df \delta(f) = \text{sign}[f'(s)]$. Таким образом мы приходим к искомой формуле (1.75), где стоят абсолютные значения производных функции f .

1.5.3 Преобразование Лапласа

В задачах, в которых исследуется решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, часто бывает полезным преобразование Лапласа, которое определяется для функций, заданных на положительных временах t .

Преобразование Лапласа функции $\Phi(t)$ определяется, как интеграл

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt) \Phi(t). \quad (1.76)$$

Мы предполагаем, что функция $\Phi(t)$ растет со временем t не быстрее, чем некоторая экспонента от t . Тогда интеграл (1.76) сходится при достаточно больших p . Более того, в этом случае $\tilde{\Phi}(p)$ стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Например, если функция $\Phi(t)$ регулярна вблизи $t = 0$ и имеет при $t \rightarrow 0$ предел Φ_0 , то при больших p функция $\tilde{\Phi}(p)$ ведет себя, как Φ_0/p .

Если же выйти в комплексную плоскость по p , то можно утверждать, что интеграл (1.76) сходится при достаточно больших значениях $\text{Re } p$. Другими словами, функция $\tilde{\Phi}(p)$ является аналитической в области $\text{Re } p > C$, где C – некоторая константа.

Задача 1.5.7. Найти преобразования Лапласа следующих функций: $\Phi = \exp(-\lambda t)$, $\Phi = t^n$, $\Phi = \cos(\nu t)$, $\Phi = \cosh(\lambda t)$, $\Phi = t^{-1/2}$, $\Phi = \cos[2\sqrt{\alpha t}]/\sqrt{\pi t}$.

Преобразование, обратное к преобразованию Лапласа, имеет следующий вид

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p), \quad (1.77)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции $\tilde{\Phi}(p)$, смотри рисунок 1.3. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных особенностей функции $\tilde{\Phi}(p)$ (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (их расположение условно).

Возможны деформации контура интегрирования в области аналитичности. Обратим внимание на то, что при отрицательных t интеграл (1.77) равен нулю, так как в этом случае оба сомножителя, $\exp(pt)$ и $\tilde{\Phi}(p)$, стремятся к нулю при увеличении $\text{Re } p$. Поэтому, сдвигая контур интегрирования в большие $\text{Re } p$ (и оставаясь при этом в области аналитичности), мы получим ноль. Это соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, когда мы исследуем функцию, определенную только при положительных t .

Для вычисления интеграла (1.77) при положительных t контур интегрирования полезно деформировать, сдвигая его влево настолько, насколько это возможно. Смысл этого сдвига заключается в том, что при этом сдвиге фактор $\exp(pt)$ уменьшается. В результате сдвига контур рано или поздно упрется в особенность функции $\tilde{\Phi}(p)$. После этого возможна дальнейшая деформация контура с нарушением его прямолинейности, когда возникают петли, заходящие в область аналитичности $\tilde{\Phi}(p)$. Именно такая деформация позволяет получить представление, наиболее удобное для вычисления $\Phi(t)$.

Задача 1.5.8. Найти обратные преобразования Лапласа следующих функций: $\nu(p^2 + \nu^2)^{-1}$, $p(p^2 + \nu^2)^{-1}$, $\nu(p^2 - \nu^2)^{-1}$, $p(p^2 - \nu^2)^{-1}$, $(p + \alpha)^{-1/2}$.

Даже если $\Phi(t)$ не удастся найти аналитически, указанная процедура позволяет сделать некоторые заключения о $\Phi(t)$. Например, можно найти асимптотическое поведение $\Phi(t)$ при больших временах t . Это поведение определяется окрестностью особенности p_* функции $\tilde{\Phi}(p)$ с наибольшей действительной частью. Поэтому при больших временах t функция $\Phi(t)$ ведет себя $\propto \exp(p_* t)$, то есть экспоненциально затухает, если $\text{Re } p_* < 0$. Возможен случай, когда в силу какой-то симметрии сразу несколько особенностей функции $\tilde{\Phi}(p)$ имеет одинаковые действительные части. Тогда все они вносят сравнимые вклады в асимптотическое поведение $\Phi(t)$. Если же $\tilde{\Phi}(p)$ имеет особенность при $p = 0$ (например, точку ветвления), то именно ее окрестность дает основной вклад в асимптотическое поведение $\Phi(t)$. Как правило, асимптотическое поведение $\Phi(t)$ в этом случае является степенным.

Рассмотрим случай, когда функция $\Phi(t)$ отлична от нуля только в узкой окрестности $t = 0$. Тогда для

p , меньших, чем ширина $\Phi(t)$, величина $\tilde{\Phi}(p)$ приблизительно равна $\int_0^\infty dt \Phi(t)$, то есть не зависит от p . Устремляя здесь ширину $\Phi(t)$ к нулю, мы получаем, что преобразование Лапласа $A\delta(t)$ равно A , то есть константе. Надо быть аккуратным в понимании $\delta(t)$, поскольку в преобразовании Лапласа интеграл идет от $t = 0$. Поэтому $\delta(t)$ надо понимать, как предел $\delta(t - \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Итак, если $\tilde{\Phi}(p)$ не стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$, то это означает наличие δ -функционального вклада в $\Phi(t)$.

Задача 1.5.9. Как будет вести себя $\tilde{\Phi}(p)$, если $\Phi(t) = B\delta'(t)$, где $\delta'(t)$ понимается в том же смысле, то есть как предел $\delta'(t - \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$?

Глава 2

СТАТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

Во многих задачах стационарное состояние физической системы характеризуется нетривиальным распределением ее характеристик в пространстве. Мы рассматриваем ряд таких задач, которые описываются в терминах статических полей, имеющих нетривиальную пространственную зависимость. В частности, стационарным является уравнение Шрёдингера для собственных состояний квантовой частицы во внешнем статическом потенциале.

2.1 Одномерный случай

В данном разделе мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение дифференциального уравнения, является интервалом (a, b) . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при $x = a$ и/или $x = b$. Такого сорта задачи возникают как при анализе полей, зависящих только от одной декартовой координаты, так и в случаях, когда в силу симметрии поля зависят, скажем, только от расстояния до начала координат, но не от углов.

Рассмотрим в качестве примера потенциал f распределения заряда, (одномерная) плотность которого ρ зависит только от одной декартовой координаты x . В этом случае потенциал также зависит только от координаты x и удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \phi, \quad (2.1)$$

где правая часть определяется плотностью заряда ρ : $\phi = -4\pi\rho$. Поскольку уравнение (2.1) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, расположенными при $x = a$ и $x = b$, то граничные условия для потенциала имеют вид $f(a) = f(b) = 0$. Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (2.1) функцию Грина $G(x, y)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b, \quad (2.2)$$

а также граничным условиям $G(a, y) = G(b, y) = 0$. Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущих разделах. Это связано с нарушением однородности пространства из-за границ.

Решение уравнения (2.1) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y) \phi(y). \quad (2.3)$$

Очевидно, интеграл (2.3) удовлетворяет уравнению (2.1) в силу (2.2) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина $G(x, y)$. Для этого заметим, что при $x < y$ уравнение (2.2) сводится к однородному уравнению $\partial_x^2 G = 0$, что дает $G(x, y) = A(x - a)$, где A — некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при $x = a$. Аналогично, при $x > y$ мы находим $G(x, y) = B(x - b)$, где B — другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению $\partial_x^2 G = 0$ и нулевому граничному условию при $x = b$. Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по x , она должна быть непрерывной в точке $x = y$, что дает соотношение $A(y - a) = B(y - b)$. Далее, скачок производной функции Грина $G(x, y)$ в точке $x = y$ равен $B - A$, что в силу уравнения (2.2) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для A и B , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y, \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y. \end{cases} \quad (2.4)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (2.4) симметрична: $G(x, y) = G(y, x)$.

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции $f(x)$ на интервале $a < x < b$ и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\hat{L}f(x) = \phi, \quad (2.5)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \frac{d}{dx} - U(x). \quad (2.6)$$

Дифференциальный оператор \hat{L} (2.6) называется оператором Штурма-Лиувилля. Здесь ‘источник’ ϕ и факторы Q, U считаются известными функциями x . Решение уравнения (2.5) подразумевает наложение некоторых граничных условий на функцию $f(x)$ на границах интервала, то есть при $x = a$ и $x = b$. Они не обязательно должны быть нулевыми, возможны и другие варианты. Например, встречаются нулевые условия на производную f' в точках $x = a$ и $x = b$ или смешанные граничные условия, связывающие значения производной f' и функции f в точках $x = a$ и $x = b$.

Решение уравнения (2.5) можно по аналогии с (2.3) написать в виде свертки правой части уравнения (2.5) с функцией Грина $G(x, y)$:

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y) \phi(y), \quad (2.7)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \quad (2.8)$$

и соответствующим граничным условиям при $x = a$ и $x = b$. Действительно, интеграл в формуле (2.7) удовлетворяет уравнению (2.5) в силу (2.8) и граничным условиям по построению.

Приведенная выше конструкция, работающая при $Q = U = 0$, подсказывает нам, как найти функцию Грина $G(x, y)$ в случае произвольного оператора Штурма-Лиувилля (2.6). Введем сначала два решения однородного уравнения (2.8) u и v (то есть $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$), которые удовлетворяют ‘левому’ (при $x = a$) и ‘правому’ (при $x = b$) граничным условиям, соответственно. Например, для нулевых граничных условий $u(a) = 0$ и $v(b) = 0$. Функцию Грина надо искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y, \\ Bv(x), & x > y, \end{cases} \quad (2.9)$$

где A, B – некоторые параметры, не зависящие от x (но зависящие от y). Тогда уравнение (2.8) будет выполняться при $x < y$ и $x > y$ вместе с граничными условиями при $x = a$ и $x = b$. Константы же A и B определяются условиями непрерывности функции Грина при $x = y$ и единичности скачка производной при $x = y$:

$$G'(y + 0, y) - G'(y - 0, y) = 1. \quad (2.10)$$

Решая получающуюся систему линейных уравнений для A и B , мы приходим к следующему явному выражению для функции Грина $G(x, y)$:

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь $W(x)$ – так называемый Вронскиан решений $u(x)$ и $v(x)$, который определяется следующим образом

$$W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x). \quad (2.12)$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнения $\hat{L}u = \hat{L}v = 0$, легко получить соотношение $\partial_x W(x) = -Q(x)W(x)$, откуда следует

$$W(x) = W(a) \exp \left[- \int_a^x dy Q(y) \right]. \quad (2.13)$$

Отметим, что при $Q = 0$ Вронскиан (2.13) не зависит от x , и тогда функция Грина становится симметричной: $G(x, y) = G(y, x)$.

Рассмотрим в качестве примера потенциал $f(r)$ заряженного цилиндра радиуса b при условии, что плотность заряда зависит только от расстояния r от точки наблюдения до оси цилиндра. Уравнение для $f(r)$ получается из уравнения Пуассона переходом к цилиндрическим координатам:

$$\frac{d^2}{dr^2} f(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r) = -4\pi\rho. \quad (2.14)$$

Выберем значение потенциала на поверхности цилиндра за ноль. Тогда граничными условиями для этой задачи являются $f(b) = 0$ и отсутствие особенности в f при $r = 0$. Регулярным при $r = 0$ ‘левым’ решением u является некоторая константа, которую мы полагаем равной единице, $u(r) = 1$. ‘Правое’ же решение v имеет вид $v(r) = \ln(r/b)$, а вронскиан равен $W(r) = 1/r$. Поэтому формула (2.11) приводит к следующему выражению для функции Грина оператора в левой части уравнения (2.14):

$$G(r, R) = \begin{cases} R \ln(R/b), & r < R, \\ R \ln(r/b), & r > R. \end{cases} \quad (2.15)$$

Следует отметить, что с точки зрения исходной задачи граничное условие $f(b) = 0$ было задано на границе $r = b$ области, в которой мы ищем потенциал f , и этого условия достаточно для его определения. Дополнительное же условие отсутствия особенности при $r = 0$ возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (2.14) в точке $r = 0$.

Задача 2.1.1. Найти функцию Грина операторов $\hat{L}_1 = (d/dx + x)(d/dx - x)$ и $\hat{L}_2 = (d/dx - x)(d/dx + x)$ на интервале $(-l, +l)$ с нулевыми граничными условиями.

Во многих физических задачах встречаются периодические граничные условия, которые означают, что $f(b) = f(a)$ и $f'(b) = f'(a)$. Для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии с выражением (2.11), так как условия $f(b) = f(a)$ и $f'(b) = f'(a)$ связывают значения функции f на разных концах интервала, и поэтому нельзя ввести ‘левую’ и ‘правую’ функции. Тем не менее, функцию Грина $G(x, y)$ можно найти практически тем же способом, каким было получено выражение (2.11). А именно, при $x < y$ и $x > y$ уравнение (2.8) имеет нулевую правую часть, то есть $G(x, y)$ на этих интервалах определяется решениями однородного уравнения u и v ($\hat{L}u = 0$ и $\hat{L}v = 0$), каждое из которых содержит по два произвольных коэффициента. Эти коэффициенты должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить периодические граничные условия для $G(x, y)$, непрерывность $G(x, y)$ в точке $x = y$ и единичный скачок производной $G(x, y)$ в точке $x = y$.

Задача 2.1.2. Найти функцию Грина оператора $d^2/dx^2 + \kappa^2$ для периодических функций с периодом 2π .

Задача 2.1.3. Найти решение задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2\right) f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале $(-\pi, \pi)$.

Если у оператора \hat{L} имеется нулевая мода, то есть удовлетворяющая граничным условиям функция f , для которой $\hat{L}f = 0$, то задача (2.5) является, вообще говоря, некорректной. Она является корректной только при наложении на 'источник' ϕ определенного условия. При этом решение задачи (2.5) не является однозначным: в нем фигурирует нулевая мода с произвольным коэффициентом. В качестве примера можно привести тот же оператор $\hat{L} = \partial_x^2$ при периодических граничных условиях, наложенных на функцию f . В этом случае у оператора \hat{L} имеется нулевая мода – константа (не зависящая от x функция). Интегрируя уравнение $\partial_x^2 f = \phi$ по x и используя периодические граничные условия, мы находим условие $\int dx \phi = 0$, которое должно быть наложено на правую часть уравнения для того, чтобы существовало решение задачи.

Задача 2.1.4. Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале $(-\pi, \pi)$.

До сих пор мы рассматривали задачи на конечном интервале (a, b) . Зачастую возникают задачи, которые следует рассматривать на бесконечном интервале $(-\infty, +\infty)$ или $(0, \infty)$. Граничными условиями на бесконечности в этом случае заключаются либо в стремлении функции f к нулю при стремлении координаты к бесконечности, либо в том, что функция f при этом остается конечной.

2.1.1 Поведение решения вблизи особых точек

Рассмотрим решение уравнения $\hat{L}f = 0$, где \hat{L} – оператор Штурма-Лиувилля (2.6). Будем считать, что в интересующей нас области функции Q, U раскладываются в ряды Тейлора с конечным радиусом сходимости:

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^n, \quad U = \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^n. \quad (2.16)$$

Другими словами, рассмотрим уравнения $\hat{L}f = 0$ в области, где Q, U являются регулярными функциями.

Решение уравнения $\hat{L}f = 0$ также можно искать в виде ряда Тейлора

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n. \quad (2.17)$$

Подставляя разложение (2.17) в уравнение $\hat{L}f = 0$ и приравнявая коэффициенты при различных степенях x , находим

$$\begin{aligned} 2f_2 + Q_0 f_1 - U_0 f_0 &= 0, \\ 6f_3 + 2Q_0 f_2 - U_0 f_1 + Q_1 f_1 - U_1 f_0 &= 0, \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом, мы получаем рекуррентные соотношения, которые позволяют последовательно находить коэффициенты разложения f_n , если заданы f_0, f_1 . Две независимые константы f_0, f_1 соответствуют наличию двух независимых решений уравнения $\hat{L}f = 0$. Мы заключаем, что функция f регулярна в области регулярности Q, U .

Очевидно, что приведенная процедура неприменима в особых точках, где функция Q (и/или функция U) имеет сингулярность. Поведение решения уравнения $\hat{L}f = 0$ вблизи особой точки требует отдельного анализа. Мы рассмотрим частный, но практически наиболее важный случай, когда функция Q имеет простой полюс, который мы поместим в точку $x = 0$. Будем считать, что функция U также может иметь простой полюс в этой точке. Перепишем уравнение $\hat{L}f = 0$ в виде

$$x \frac{d^2 f}{dx^2} + xQ \frac{df}{dx} - xUf = 0, \quad (2.18)$$

где все коэффициенты регулярны вблизи нуля. В этом случае, когда мы имеем дело с уравнением второго порядка с регулярными факторами, особая точка означает обращение в ноль коэффициента при второй (старшей) производной.

Первый шаг рекуррентной процедуры для уравнения (2.18) сводится к решению уравнения

$$x \partial_x^2 f + a \partial_x f = 0, \quad (2.19)$$

где a – значение xQ в нуле. Уравнение (2.19), очевидно, имеет два независимых решения

$$f = \text{const}, \quad f \propto x^{1-a}. \quad (2.20)$$

Мы видим, что первое решение регулярно в нуле, в то время, как второе решение имеет, вообще говоря, при $x = 0$ точку ветвления. Второе решение имеет (кратный) полюс при целых положительных a и является регулярным при целых отрицательных a .

Задача 2.1.5. Каковы решения уравнения (2.19) при $a = 1$?

Выражения (2.20) определяют поведение решения исходного уравнения при малых x . Полное же решение определяется рядами по x , которые являются множителями при функциях (2.20):

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n, \quad f = x^{1-a} \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n. \quad (2.21)$$

Здесь коэффициенты f_0, g_0 произвольны, а остальные коэффициенты линейно выражаются через них. Как и следует, мы имеем дело с двумя независимыми решениями уравнения второго порядка.

Соотношения, которые определяют f_n, g_n , можно найти, если использовать разложения в ряд

$$xQ = a + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n x^{n+1}, \quad xU = b + \sum_{n=0}^{\infty} U_n x^{n+1}. \quad (2.22)$$

Подставляя ряды (2.22, 2.21) в уравнение (2.18) и приравнявая коэффициенты при всех степенях x , находим рекуррентные соотношения для коэффициентов f_n, g_n . Первые соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} af_1 - bf_0 &= 0, \\ 2f_2 + 2af_2 + Q_0f_1 - bf_1 - U_0f_0 &= 0, \\ 2(1-a)g_1 + Q_0(1-a)g_0 - bg_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Эти соотношения позволяют последовательно выражать коэффициенты f_n, g_n через f_0, g_0 , что и определяет ряды (2.21).

Рассмотрим поведение решения уравнения $\hat{L}f = 0$ вблизи нуля, если в этой точке Q имеет полюс первого порядка, а U имеет полюс второго порядка. Сохраняя в Q, U только главные полюсные члены, мы приходим к уравнению

$$x^2 \partial_x^2 f + ax \partial_x f - \beta f = 0,$$

которое задает поведение f при малых x , вместо уравнения (2.19). Приведенное уравнение имеет степенные решения $f \propto x^\alpha$, где α определяется уравнением

$$\alpha(\alpha - 1) + a\alpha - \beta = 0.$$

Таким образом

$$\alpha = \frac{1-a}{2} \pm \sqrt{(1-a)^2/4 + \beta}.$$

При $\beta = 0$ мы находим $\alpha = 0, \alpha = 1 - a$, то есть возвращаемся к уже рассмотренной ситуации.

Задача 2.1.6. *Каково поведение решения уравнения Бесселя $x^2 \partial_x^2 u + x \partial_x u + x^2 u - \nu^2 u = 0$ вблизи нуля? Каковы решения этого уравнения вблизи нуля при $\nu = 0$?*

2.1.2 Задачи на собственные значения

Нормально уравнение $\hat{L}u = 0$, дополненное нулевыми граничными условиями, не имеет решений (точнее, имеет только тривиальное нулевое решение). Действительно, условие $u = 0$ на левом конце интервала задает решение $u = Cv$, где v – некоторое решение уравнения $\hat{L}v = 0$ с нулевым граничным условием на левом конце интервала, а C – произвольная константа. Если v не обращается в ноль на правом конце интервала, то ненулевых решений уравнения $\hat{L}u = 0$ не существует. Те же соображения относятся к случаю смешанных граничных

условий, когда равна нулю некоторая линейная комбинация функции u и ее производной, а также к случаю периодических граничных условий.

Расширим для рассмотренных граничных условий класс рассматриваемых задач, введя задачи на собственные значения. Задача на собственные значения для оператора \hat{L} формулируется, как задача поиска функции u , удовлетворяющей уравнению

$$\hat{L}u = \lambda u, \quad (2.24)$$

и граничным условиям из числа упомянутых выше. Эта задача уже имеет ненулевые решения для некоторых значений параметра λ , которые называются собственными значениями оператора \hat{L} .

Рассмотрим в качестве примера оператор $\hat{L} = \partial_x^2$ который действует на периодические функции, заданные на интервале $(-\pi, \pi)$. Уравнение (2.24) в этом случае имеет вид $\partial_x^2 u = \lambda u$. Оно имеет решения в виде гиперболических синусов и косинусов при $\lambda > 0$ и решения в виде синусов и косинусов при $\lambda < 0$. Очевидно, что на интервале $(-\pi, \pi)$ периодическими являются функции $\cos(nx), \sin(nx)$, где n – целое число (включая ноль). В результате мы находим набор собственных значений $\lambda_n = -n^2$ оператора $\hat{L} = \partial_x^2$.

Таким образом, мы получили дискретный, но бесконечный (и неограниченный) набор собственных значений. Эта ситуация типична при решении задачи на конечном интервале: набор собственных значений дискретен и бесконечен. Более того, для оператора Штурма-Лиувилля (2.6) при больших номерах собственных значений справедливо то же асимптотическое поведение $\lambda_n \approx -n^2$ собственных значений, поскольку большие значения λ формируются именно второй производной ∂_x^2 в операторе Штурма-Лиувилля. Таким образом, мы можем утверждать, что собственные значения оператора Штурма-Лиувилля неограничены сверху по абсолютной величине.

Важным случаем является оператор Штурма-Лиувилля (2.6) при $Q = 0$. В этом случае задача на собственные значения (2.24) является уравнением на собственные функции одномерного уравнения Шрёдингера для частицы, находящейся во внешнем потенциале U . Мы перепишем его в виде

$$(\partial_x^2 - U)\psi = -\epsilon\psi, \quad (2.25)$$

где ϵ имеет смысл энергии собственного состояния.

Для нулевых или периодических граничных условий оператор $\partial_x^2 - U$ является самосопряженным, поскольку

$$\int dx \psi_1 (\partial_x^2 - U) \psi_2 = \int dx \psi_2 (\partial_x^2 - U) \psi_1, \quad (2.26)$$

для произвольных функций ψ_1, ψ_2 , удовлетворяющих этим граничным условиям. Соотношение (2.26) можно доказать интегрированием по частям. При этом граничные члены не возникают в силу принятых граничных

условий. Поэтому решения ψ_1, ψ_2 уравнения (2.25), соответствующие разным значениям ϵ , ортогональны:

$$\int dx \psi_1 \psi_2 = 0, \quad (2.27)$$

смотри раздел 2.4.1. Как правило, собственные функции нормируют на единицу: $\int dx |\psi|^2 = 1$.

Перейдем теперь к случаю, когда решения уравнения (2.25) рассматриваются на всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Мы также будем считать, что потенциал U достаточно быстро стремится к нулю при больших x . В этом случае при больших x мы приходим к уравнению $(\partial_x^2 + \epsilon)\psi = 0$, которое имеет ограниченные решения при $\epsilon > 0$. Эти решения являются линейной комбинацией $\cos(qx)$ и $\sin(qx)$, где $q^2 = \epsilon$. Функции с таким асимптотическим поведением называются функциями непрерывного спектра. Функции непрерывного спектра с различными ϵ ортогональны друг другу, то есть равен нулю интеграл (2.27), где интегрирование идет по всей прямой.

Наряду с функциями непрерывного спектра уравнение (2.25) может иметь решения, которые стремятся к нулю при больших $|x|$. Они соответствуют $\epsilon < 0$ и называются функциями дискретного спектра или связанных состояний. На больших x , где потенциалом U можно пренебречь, функции дискретного спектра убывают экспоненциально: $\psi \propto \exp(-\sqrt{|\epsilon|}x)$. Такое же экспоненциальное убывание имеет место при больших по абсолютной величине отрицательных x . Функции дискретного спектра ортогональны между собой и ортогональны функциям непрерывного спектра. Поскольку функции дискретного спектра стремятся к нулю при больших $|x|$, нормировочный интеграл $\int dx |\psi|^2$ для них конечен. Обычно принимается нормировка, когда этот интеграл равен единице.

Собственные функции для данного потенциала в совокупности (то есть функции непрерывного и дискретного спектров) составляют полную систему функций, по которой можно разложить произвольную функцию, ограниченную на всей прямой. Это разложение имеет вид интеграла по волновым функциям непрерывного спектра, к которому следует прибавить сумму по волновым функциям дискретного спектра.

Проиллюстрируем сказанное на примере притягивающего потенциала U , сосредоточенного вблизи начала координат. В этом случае потенциал можно записать в виде $U = -2\kappa\delta(x)$, где $\kappa > 0$ и уравнение (2.25) приобретает вид

$$\partial_x^2 \psi + 2\kappa\delta(x)\psi + \epsilon\psi = 0. \quad (2.28)$$

Это уравнение имеет решения как для непрерывного спектра при $\epsilon > 0$, так и для связанного состояния.

При $x > 0$ и при $x < 0$ мы имеем дело со свободным уравнением, решения которого известны: это косинусы и синусы при $\epsilon > 0$ и убывающие экспоненты при $\epsilon < 0$. Выражения для функции ψ слева и справа следует шить при $x = 0$, в этой точке в соответствии

с (2.28) функция ψ непрерывна, а ее производная испытывает скачок, равный $-2\kappa\psi(0)$. Сшивку приводит к следующему набору собственных функций

$$\chi(x) = \sqrt{\kappa} \exp(-\kappa|x|), \quad \epsilon = -\kappa^2, \quad (2.29)$$

$$\phi(q, x) = \sin(qx), \quad \epsilon = q^2, \quad q > 0, \quad (2.30)$$

$$\eta(q, x) = \cos(q|x| + \varphi), \quad \epsilon = q^2, \quad q > 0, \quad \tan \varphi = \kappa/q. \quad (2.31)$$

Обратим внимание на то, что собственные функции распадаются на четные по x (χ, η) и нечетные по x (ϕ). Это является следствием симметрии исходного уравнения (2.28) по отношению к изменению знака x .

Функция (2.29) относится к связанному состоянию, а функции (2.30, 2.31) – к непрерывному спектру. Функция (2.29) нормирована на единицу, то есть $\int dx \chi^2 = 1$. Нормировку функций непрерывного спектра можно найти из соотношений (1.68):

$$\int dx \phi(q, x) \phi(k, x) = \pi \delta(q - k), \quad (2.32)$$

$$\int dx \eta(q, x) \eta(k, x) = \pi \delta(q - k). \quad (2.33)$$

В соответствии с общими свойствами уравнения Шрёдингера, функции χ, ϕ, η ортогональны друг другу.

Задача 2.1.7. Непосредственно проверить ортогональность функций χ и η .

Рассмотрим теперь разложение некоторой функции $\psi(x)$ по собственным функциям χ, ϕ, η . Это разложение имеет вид

$$\psi(x) = a\chi + \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} [\alpha(q)\phi + \beta(q)\eta]. \quad (2.34)$$

Коэффициенты разложения (2.34) можно найти при помощи соотношений (2.32, 2.33):

$$\begin{aligned} a &= \int dx \psi(x) \chi(x), \\ \alpha(q) &= \int dx \psi(x) \phi(q, x), \\ \beta(q) &= \int dx \psi(x) \eta(q, x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Задача 2.1.8. Найти коэффициенты a, α, β разложения (2.34) для функции $\psi(x) = \exp(-b|x|)$.

2.2 Электростатические задачи.

Здесь мы рассмотрим электростатические уравнения для потенциала f , важные, прежде всего, в теории электромагнетизма. В свободном пространстве нахождение потенциала f , который порождается плотностью заряда ρ , означает решение уравнения Пуассона (Poisson)

$$\nabla^2 f = \phi, \quad (2.36)$$

где ∇^2 – Лапласиан и $\phi = -4\pi\rho$ (в системе СГС). Аналогично выглядит уравнение для потенциала в диэлектрике. Уравнение (2.36) без правой части обычно называется уравнением Лапласа. Мы также рассмотрим свойства решений уравнения Дебая (Debye)

$$(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi, \quad (2.37)$$

где κ – некоторая константа. Уравнение (2.37) описывает пространственное распределение потенциала в электролитах и плазме, то есть в проводящей среде, κ^{-1} является длиной экранирования (длиной Дебая).

Уравнения (2.36, 2.37) могут быть определены в пространстве произвольной размерности d . В настоящем разделе мы сосредоточимся на практически наиболее важных случаях $d = 3$ и $d = 2$. Большинство из приведенных ниже результатов легко обобщаются на случай произвольной размерности пространства d .

Функции, которые удовлетворяют уравнению Лапласа $\nabla^2 f = 0$, называются гармоническими. Заметим, что не существует гармонических функций, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности. Действительно, для таких функций хорошо определено преобразование Фурье $\tilde{f}(\mathbf{q})$. Произведя преобразование Фурье уравнения $\nabla^2 f = 0$, находим $q^2 \tilde{f} = 0$. У этого уравнения имеется только решение $\tilde{f} \propto \delta(\mathbf{q})$, что означает $f = \text{const}$. Если мы требуем стремления к нулю функции f на бесконечности, то константа здесь должна быть равна нулю, что и обосновывает сделанное утверждение. Подчеркнем, что изложенная аргументация относится к пространству произвольной размерности. То же относится и к однородному уравнению Дебая $(\nabla^2 - \kappa^2)f = 0$: не существует решений этого уравнения, определенных во всем пространстве и стремящихся к нулю на бесконечности.

Обычна задача об определении гармонической функции f в ограниченной области. В этом случае уравнение Лапласа (2.36) должно быть дополнено условиями на границе этой области. Например, можно задать значение потенциала f на границе. Возможны и иные граничные условия, например, нулевой производной от потенциала f в направлении, перпендикулярном границе. К сожалению, нет способов решения этой задачи для произвольной области. Однако для некоторых простых геометрий эта задача имеет решение.

Рассмотрим в качестве примера решение уравнения Лапласа в трехмерном случае в полупространстве $z > 0$, считая, что задано значение функции f на плоскости $z = 0$: $f(x, y, 0)$. Тогда в полупространстве $z > 0$ потенциал f представляется в виде интеграла

$$f(x, y, z) = \int \frac{d\xi d\eta z f(\xi, \eta, 0)}{2\pi[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (2.38)$$

Действительно, определенная интегралом в правой части (2.38) функция является гармонической, поскольку в подынтегральном выражении стоит гармоническая функция, что легко проверяется непосредственно. Кроме того, легко проверить, что при $z \rightarrow 0$ коэффициент

при $f(\xi, \eta, 0)$ в подынтегральном выражении в правой части (2.38) стремится к $\delta(x - \xi)\delta(y - \eta)$. Отсюда следует, что интеграл (2.38) при $z \rightarrow 0$ стремится к $f(x, y, 0)$. На этом доказательство заканчивается.

Задача 2.2.1. Найти поведение функции (2.38) при больших z , считая, что $f(x, y, 0)$ локализована вблизи начала координат.

Рассмотрим теперь задачу о нахождении в неограниченном пространстве решения уравнения (2.36), где потенциал f стремится к нулю на бесконечности. Чтобы такое решение существовало, плотность заряда должна удовлетворять определенным условиям. Например, быть отличной от нуля в ограниченной области пространства.

Для решения уравнения (2.36) можно использовать функцию Грина $G(\mathbf{r})$. Она является решением уравнения

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}), \quad (2.39)$$

к которому следует добавить условие убывания на бесконечности. Тогда решение уравнения (2.36) записывается в виде интеграла

$$f(\mathbf{r}) = \int dV' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'), \quad (2.40)$$

где интегрирование идет по всему пространству.

Решение уравнения (2.39) в трехмерном случае хорошо известно – это потенциал поля точечного заряда

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad (2.41)$$

где $r = |\mathbf{r}|$. Подставляя в (2.40) в качестве функции Грина (2.41), находим соотношение

$$f(\mathbf{r}) = - \int dV' \frac{\phi(\mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \int dV' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (2.42)$$

которое является известным выражением для электростатического потенциала распределения зарядов в неограниченном пространстве.

Приведем здесь вывод выражения (2.41), основанный на преобразовании Фурье, смотри раздел (2.4.2). Произведем преобразование Фурье уравнения (2.39). В результате получим $q^2 \tilde{G}(\mathbf{q}) = -1$, где $\tilde{G}(\mathbf{q})$ – преобразование Фурье от $G(\mathbf{r})$. Функцию Грина $G(\mathbf{r})$ можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(\mathbf{r}) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2}.$$

Разобьем волновой вектор \mathbf{q} на компоненту q_{\parallel} вдоль \mathbf{r} и перпендикулярную \mathbf{r} компоненту \mathbf{q}_{\perp} . Интеграл по компоненте q_{\parallel} дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel} r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2} = \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r),$$

где мы подставили $q^2 = q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2$. Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте

$$G(r) = - \int \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{q_{\perp}} \exp(-q_{\perp} r),$$

приводит после перехода к полярным координатам к выражению (2.41).

Задача 2.2.2. Найти решение уравнения (2.39) в пространстве произвольной размерности d .

Задача 2.2.3. Найти выражение для потенциала f в случае, когда ϕ зависит только от расстояния до начала координат.

Указанный выше способ вывода выражения для функции Грина, связанный с преобразованием Фурье, не работает в двумерном случае, поскольку в этом случае обратное преобразование Фурье формально расходится при малых волновых векторах \mathbf{q} . Поэтому в двумерном случае мы будем искать решение уравнения (2.39) другим способом. Ясно, что функция Грина G зависит только от абсолютной величины радиус-вектора \mathbf{r} . Вне начала координат, где сосредоточена δ -функция, в уравнении (2.39) правая часть равна нулю, что приводит к уравнению $(\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r)G(r) = 0$. Помимо тривиального решения – константы, это уравнение имеет своим решением $\ln r$. Таким образом, $G \propto \ln r$. Чтобы найти коэффициент пропорциональности в этом соотношении, проинтегрируем уравнение (2.39) по диску радиуса R . В правой части мы получим единицу, а в левой части поток ∇G через окружность – поверхность диска, который равен $2\pi R \partial G / \partial R$. Приравняв эту величину единице, находим

$$d = 2 \quad G(r) = \frac{\ln r}{2\pi}. \quad (2.43)$$

Разумеется, к этой величине можно добавить произвольную константу, которая определяется положением точки, в которой потенциал принят за ноль.

Задача 2.2.4. Вывести указанным способом выражение (2.41).

Приведем важное соотношение для гармонической функции f , удовлетворяющей уравнению $\nabla^2 f = 0$. Тогда, как следует из уравнения $\nabla^2 G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$, справедливо соотношение

$$\nabla[\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\nabla f(\mathbf{r})] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}_1).$$

Интегрируя это соотношение по некоторой области пространства, содержащей точку \mathbf{r}_1 , находим

$$f(\mathbf{r}_1) = \oint dS [\nabla G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)f(\mathbf{r}) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\nabla f(\mathbf{r})], \quad (2.44)$$

где dS – элемент поверхности области интегрирования, направленный наружу от области. Отсюда следует, в

частности, что значение гармонической функции в центре сферы равно ее среднему по поверхности сферы (это верно в пространстве произвольной размерности). Это означает, что гармоническая функция не может достигать минимума или максимума внутри области, где выполняется уравнение $\nabla^2 f = 0$.

Задача 2.2.5. Доказать, что значение гармонической функции в центре сферы равно ее среднему по поверхности сферы. Почему гармоническая функция не может достигать минимума или максимума внутри области, где выполняется уравнение $\nabla^2 f = 0$?

Переходим теперь к уравнению Дебая (2.37). Найдем его функцию Грина $G(\mathbf{r})$ в неограниченном пространстве. Функция Грина G удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 - \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (2.45)$$

В трехмерном пространстве решение этого уравнения имеет вид

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi r} \exp(-\kappa r). \quad (2.46)$$

Как и следует, при $\kappa \rightarrow 0$ выражение (2.46) переходит в (2.41). Обратим внимание на то, что, в отличие от (2.41), функция (2.46) экспоненциально затухает на больших расстояниях, которые превосходят длину Дебая κ^{-1} .

Задача 2.2.6. Доказать, что для решения однородного уравнения Дебая $(\nabla^2 - \kappa^2)f = 0$ имеет место то же соотношение (2.44), но только с функцией Грина (2.46).

Для вывода выражения (2.46) действуем также, как и при выводе выражения (2.41). Произведем преобразование Фурье уравнения (2.45). В результате получим $(q^2 + \kappa^2)\tilde{G}(q) = -1$, где \tilde{G} – преобразование Фурье от G . Функцию $G(r)$ можно найти, как обратное Фурье-преобразование

$$G(r) = - \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})}{q^2 + \kappa^2}.$$

Разобьем \mathbf{q} на компоненту q_{\parallel} вдоль \mathbf{r} и перпендикулярную \mathbf{r} компоненту \mathbf{q}_{\perp} . Интеграл по компоненте q_{\parallel} дает

$$\int dq_{\parallel} \exp(iq_{\parallel} r) \frac{1}{q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 + \kappa^2} = \frac{\pi}{\beta} \exp(-\beta r),$$

где $\beta^2 = q_{\perp}^2 + \kappa^2$. Оставшийся интеграл по перпендикулярной компоненте легко находится после перехода от q_{\perp} к переменной β (которая меняется от κ до ∞), что дает

$$G(r) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\kappa}^{\infty} d\beta \exp(-\beta r).$$

Вычисление этого интеграла приводит к (2.46).

Задача 2.2.7. Найти решение уравнения $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$ в случае, когда ϕ зависит только от расстояния до начала координат.

Чаще всего уравнения Пуассона (2.36) и Дебая (2.37) приходится решать в области конечных размеров с определенными условиями на потенциал f , заданными на ее границах. Эта задача решается в два этапа. Сначала надо найти решение f_{hom} однородного уравнения $\nabla^2 f = 0$ или $(\nabla^2 - \kappa^2)f = 0$ с заданными граничными условиями на потенциал f . Затем надо найти f_{force} , которое является решением уравнения $\nabla^2 f = \phi$ или $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$ с нулевыми граничными условиями. Решение уравнения Пуассона (2.36) или Дебая (2.37) дается суммой $f = f_{hom} + f_{force}$. Первый из этапов обсуждался выше. Переходим ко второму.

Решение уравнения Пуассона $\nabla^2 f = \phi$ или Дебая $(\nabla^2 - \kappa^2)f = \phi$ с нулевыми граничными условиями может быть записано в виде

$$f_{force}(\mathbf{r}) = \int dV' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'), \quad (2.47)$$

где интегрирование идет по интересующей нас области. Функция Грина G в соотношении (2.47) должна удовлетворять уравнению $\nabla^2 G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ для уравнения Пуассона или $(\nabla^2 - \kappa^2)G = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ для уравнения Дебая, а также нулевым граничным условиям. Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь не только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, что связано с нарушением однородности пространства за счет граничных условий. Общих методов решения такой задачи не существует и ее надо каждый раз заново решать для области с данной геометрией. Иногда способ решения подсказывает симметрия области.

Задача 2.2.8. Найти функцию Грина уравнения Пуассона в области вне шара радиуса R , если на его поверхности задано нулевое граничное условие для G .

2.2.1 Двумерные гармонические функции

Двумерный случай выделен с точки зрения решения уравнения Лапласа $(\partial_x^2 + \partial_y^2)f = 0$, которое задает гармонические функции. Дело в том, что решением этого уравнения является произвольная аналитическая функция $g(z)$, где $z = x + iy$, а также по отдельности ее действительная и мнимая части. Это сразу дает весьма обширный корпус решений двумерного уравнения Лапласа. Поскольку не существует аналитических на всей комплексной плоскости функций, стремящихся к нулю на бесконечности, мы возвращаемся к утверждению об отсутствии гармонических функций на всей плоскости, стремящихся к нулю на бесконечности.

Разумеется, не случайно, что в двумерном случае функция Грина Лапласиана пропорциональна $\ln r$, что

является действительной частью аналитической функции $\ln z$, где $z = x + iy$. Тот факт, что Лапласиан $\ln r$ не просто равен нулю, а пропорционален δ -функции, связан с тем, что $z = 0$ является сингулярной точкой $\ln z$. Обобщая это наблюдение, следует сказать, что Лапласиан произвольной аналитической функции равен нулю в области ее аналитичности, вне ее сингулярных точек.

Рассмотрим задачу Дирихле, которая ставится для функции, удовлетворяющей некоторому дифференциальному уравнению второго порядка, и заключается в восстановлении функции в некоторой области по ее значениям на границе этой области. В данном случае нас интересуют гармонические функции, подчиняющиеся двумерному уравнению Лапласа. Эта задача явно решается, если находится аналитическая функция, действительная или мнимая часть которой принимает данные граничные значения.

Задача 2.2.9. Найти значение гармонической функции u внутри единичного круга, если на его границе $u = \cos(n\varphi)$, где φ — полярный угол.

В соответствии с интегральной формулой Коши задача Дирихле для уравнения Лапласа имеет явное решение для голоморфной в данной области функции $g(z)$, если известно ее значение на границе области. А именно

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по границе области. К сожалению, для использования интегральной формулы Коши необходимо знать как действительную, так и мнимую части функции g на границе области. Обычно же задача Дирихле ставится для действительной функции. Поэтому интегральная формула Коши непосредственно к этому случаю не применима.

Задача Дирихле для двумерного уравнения Лапласа имеет регулярное решение для нескольких простых форм областей. Проанализируем случай, когда интересующая нас область является полуплоскостью $y > 0$. В этом случае задача Дирихле означает поиск гармонической функции f в полуплоскости $y > 0$, если задано ее значение при $y = 0$. Решение этой задачи может быть записано в виде интеграла

$$f(x, y) = \int d\xi \frac{y}{\pi[(x - \xi)^2 + y^2]} f(\xi, 0). \quad (2.48)$$

Обратим внимание на то, что подынтегральное выражение, как и следует, само по себе является гармонической функцией, поскольку $y/(x^2 + y^2) = \partial_y \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, а логарифм является решением уравнения Лапласа $\nabla^2 \ln r = 0$.

Для доказательства (2.48) переходим к Фурье-преобразованию f по x , который мы обозначим $\tilde{f}(q, y)$. Уравнение Лапласа для этой величины имеет вид $(\partial_y^2 - q^2)\tilde{f} = 0$. Отсюда $\tilde{f}(q, y) = \exp(-|q|y)\tilde{f}(q, 0)$, то есть

$$f(x, y) = \int \frac{dq}{2\pi} \exp(iqx) \exp(-|q|y) \tilde{f}(q, 0).$$

Подставляя сюда $\tilde{f}(q, 0) = \int d\xi \exp(-iq\xi)f(\xi, 0)$ и беря интеграл по q , мы и получаем соотношение (2.48).

Задача 2.2.10. Найти решение уравнения Лапласа f в полуплоскости $y > 0$, если $f(x, 0) = \exp(ix)$.

Приведем альтернативный вывод соотношения (2.48). Можно заметить, что $y/[(x-\xi)^2 + y^2] = -\text{Im}(x-\xi + iy)^{-1}$. Таким образом, функция f (2.48) является мнимой частью аналитической функции и, следовательно, гармонической функцией. Далее, при $y \rightarrow 0$ функция $(y/\pi)[(x-\xi)^2 + y^2]^{-1}$ стремится к $\delta(x-\xi)$, смотри раздел (1.5.2). Поэтому при $y \rightarrow 0$ функция (2.48) стремится к $f(x, 0)$, что и заканчивает доказательство (2.48).

Рассмотрим теперь круг единичного радиуса и будем считать, что значения действительной гармонической функции u заданы на его границе, то есть на окружности единичного радиуса. Поместим начало координат в центр круга. Тогда значения функции $u(x, y)$ внутри круга дается формулой Пуассона

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(1-r^2)u(\cos t, \sin t)}{1-2r \cos(t-\varphi) + r^2}. \quad (2.49)$$

Здесь введены расстояние до начала координат r и полярный угол φ . Интегрирование по t как раз и означает интегрирование по единичной окружности.

Для доказательства соотношения Пуассона (2.49) заметим сначала, что его правая часть является действительной частью функции

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} u(\cos t, \sin t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z},$$

где $z = x + iy$. Поскольку функция $f(z)$, очевидно, аналитична внутри единичного круга, ее действительная часть является гармонической функцией. Таким образом, мы доказали гармоничность правой части (2.49). Теперь мы должны доказать, что при стремлении r к единице правая часть (2.49) дает $u(\cos \varphi, \sin \varphi)$. Для этого следует воспользоваться результатом задачи 1.5.3, где показано, что при стремлении r к единице снизу подынтегральное выражение в правой части (2.49) переходит в δ -функцию, которая и обеспечивает необходимый предел. На этом доказательство заканчивается.

Формула Пуассона (2.49) очевидно обобщается на круг произвольного радиуса R :

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R \cos t, R \sin t)}{R^2 - 2Rr \cos(t-\varphi) + r^2}. \quad (2.50)$$

При $r = 0$ формула (2.50) приводит к уже известному нам утверждению про среднее, которое в двумерном случае звучит следующим образом: значение гармонической функции в центре круга равно этой функции, усредненной по окружности, которая является границей круга.

Задача 2.2.11. Найти значение гармонической функции u внутри круга радиуса R , если на его границе $u = 1$ при $x > 0$ и $u = 0$ при $x < 0$. Проверить, что значение гармонической функции в центре круга равно усредненному по охватывающей ее окружности значению этой функции.

К сожалению, прямое обобщение формулы Пуассона (2.50) на область произвольной геометрии невозможно. Это обобщение можно сформулировать в терминах функции, которая производит конформное отображение границы интересующей нас области на единичную окружность. Однако поиск такой функции представляет собой отдельную нетривиальную задачу. В то же время для областей, конформное отображение границы которых на единичную окружность известно, решение задачи Дирихле можно выписать в явном виде (в виде интеграла).

2.3 Собственные функции уравнения Шрёдингера

К задачам, рассмотренным нами выше, примыкают задачи на собственные функции уравнения Шрёдингера для квантового движения частицы, в котором наряду с Лапласианом фигурирует потенциал внешнего поля U . Мы рассматриваем случай, когда потенциал U является статическим и стремится к нулю на бесконечности. Особенно интересен случай притягивающего потенциала, когда возможно образование связанных состояний, которые характеризуются волновыми функциями, локализованными в ограниченной области пространства.

Мы уже обсуждали уравнение Шрёдингера для собственных функций в одномерном случае. В трехмерном случае уравнение Шрёдингера для собственных функций частицы во внешнем статическом потенциале U имеет вид

$$\nabla^2 \psi - U\psi + \epsilon\psi = 0, \quad (2.51)$$

аналогичный (2.25). Как и ранее, ϵ имеет смысл энергии квантовой частицы, движущейся во внешнем поле с потенциалом U .

Мы рассматриваем случай потенциала U , стремящегося к нулю при увеличении расстояния r от начала координат. Тогда, как и в одномерном случае, положительные ϵ соответствуют функциям непрерывного спектра, а отрицательные ϵ – связанным состояниям, набор которых дискретен. Волновые функции связанных состояний (дискретного спектра) стремятся к нулю при $r \rightarrow \infty$. Волновые же функции непрерывного спектра ведут себя на больших расстояниях, как волновые функции свободных частиц. В частности, набор волновых функций непрерывного спектра можно выбрать так, чтобы на больших расстояниях они переходили в экспоненты: $\psi_{\mathbf{k}} \rightarrow \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ при $r \rightarrow \infty$. Волновые же функции связанных состояний убывают на больших расстояниях, как $\exp(-\sqrt{|\epsilon|}r)$.

Выполняются условия ортогональности различных собственных функций оператора $\nabla^2 - U$, смотри раздел 2.4.1. Поэтому интеграл $dV \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{q}}$ пропорционален $\delta(\mathbf{k} + \mathbf{q})$. В силу того, что волновые функции $\psi_{\mathbf{k}}$ не стремятся к нулю на бесконечности, этот интеграл набирается на больших расстояниях. Поэтому коэффициент при δ -функции будет таким же, как и для плоских волн $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, то есть

$$\int dV \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{q}} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}). \quad (2.52)$$

Волновые функции дискретного спектра могут быть нормированы на единицу.

2.3.1 Уравнение Шрёдингера в Кулоновском потенциале

Проиллюстрируем сказанное на примере движения квантовой частицы в притягивающем Кулоновском потенциале. Выберем единицы измерения, когда потенциал равен $U = -2/r$, где r – расстояние до притягивающего центра. Тогда уравнение (2.51) запишется в следующем виде

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \psi = 0. \quad (2.53)$$

Нас будут интересовать связанные состояния, для которых ψ убывает при росте r , для связанных состояний значения энергии ϵ отрицательны. Анализируя связанные состояния, ψ можно считать действительной.

Как известно, в силу изотропии задача (2.53) допускает разделение переменных, то есть волновая функция ψ связанного состояния может быть записана в виде произведения радиальной функции R , зависящей от r , и угловой функции, зависящей от азимутального θ и полярного φ углов. Уравнение на радиальную функцию имеет вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) R = 0, \quad (2.54)$$

где l – орбитальное квантовое число (целое неотрицательное). Вводя функцию $\Phi = r^{1+l} R$, мы получаем уравнение

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2l}{r} \frac{d}{dr} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \Phi = 0. \quad (2.55)$$

Это уравнение определяет радиальное поведение волновой функции связанного состояния.

Рассмотрим сначала случай нулевого углового числа l . В случае $l = 0$ уравнение (2.55) приобретает вид

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} + \epsilon \right) \Phi = 0, \quad (2.56)$$

Умножим уравнение (2.56) на r и перейдем к уравнению для преобразования Лапласа $\tilde{\Phi}(p)$ от $\Psi(r)$. В результате

получим уравнение первого порядка

$$\frac{d}{dp} \left[(p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi}.$$

Это уравнение может быть явно решено, поскольку в терминах функции $(p^2 + \epsilon)\tilde{\Phi}$ в нем разделяются переменные.

Нас интересуют связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии. Подставляя $\epsilon = -\alpha^2$, выбирая $\alpha > 0$, и решая полученное уравнение для $\tilde{\Phi}$, находим

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (2.57)$$

Однако не при всех α это выражение соответствует связанному состоянию. Чтобы найти связанные состояния, необходимо проанализировать обратное преобразование Лапласа функции (2.57) и установить, при каких α функция $\Phi(r)$ стремится к нулю при возрастании r .

Выражение (2.57) имеет сингулярность при $p = \alpha$, то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (1.77) должен идти справа от этой точки. Из-за сингулярности при больших r функция $\Phi(r)$ ведет себя пропорционально $\exp(\alpha r)$. Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай $\alpha = 1/n$ (n – целое число), тогда особенность при $p = \alpha$ исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией $\epsilon = -1/n^2$. Для этих связанных состояний

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}}. \quad (2.58)$$

Коэффициент в этом законе пропорциональности определяется условием нормировки волновой функции.

Чтобы вычислить $\Phi(r)$, необходимо произвести обратное преобразование Лапласа $\tilde{\Phi}(p)$. Для функции (2.58) соответствующий интеграл сведется к вычету в точке $p = -1/n$. Таким образом, Φ пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем, который возникает в силу того, что полюс (2.58) является кратным. Разумеется, это экспоненциальное поведение соответствует анонсированному нами поведению $\exp(-\sqrt{|\epsilon|} r)$.

Например, для основного состояния, то есть при $n = 1$, мы находим $\tilde{\Phi} \propto (p + 1)^{-2}$. В этом случае вычисление $\Psi(r)$, которое получается из $\tilde{\Phi}$ обратным преобразованием Лапласа, сводится к взятию вычета $\tilde{\Phi} \exp(pr)$ в точке $p = -1$. Вычисляя этот вычет с учетом того, что $\tilde{\Phi}$ имеет полюс второго порядка, находим $\Phi \propto r \exp(-r)$, то есть радиальная часть волновой функции $R \propto \exp(-r)$.

Переходим теперь к случаю произвольного углового числа l . Умножим уравнение (2.55) на r и перейдем к преобразованию Лапласа функции Ψ по переменной r . В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[(p^2 + \epsilon) \tilde{\Phi} \right] = 2\tilde{\Phi} - 2pl\tilde{\Phi}.$$

При выводе последнего члена мы при интегрировании по частям учли, что $\Phi(0) = 0$ в силу определения $\Phi = r^{1+l}R$. Решая полученное уравнение, находим прямое обобщение уравнения (2.57)

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{(p^2 - \alpha^2)^{l+1}} \left(\frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha},$$

где, как и выше, $\epsilon = -\alpha^2$ и $\alpha > 0$. Связанным состояниям соответствуют, как и выше, значения $\alpha = 1/n$. В этом случае

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-l-1}}{(p + 1/n)^{n+l+1}}, \quad (2.59)$$

что является прямым обобщением (2.58). Поскольку полюс в точке $p = -1/n$, который определяет значение Φ , является кратным, то, как и для случая нулевого орбитального квантового числа l , функция Φ будет пропорциональна $\exp(-r/n)$ с полиномиальным множителем.

Задача 2.3.1. Найти радиальную функцию R связанного состояния атома водорода, соответствующего $n = 2$, $l = 0$.

Задача 2.3.2. Найти радиальную функцию R связанного состояния атома водорода, соответствующего $n = 2$, $l = 1$.

2.4 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

2.4.1 Собственные функции оператора Штурма-Лиувилля

Рассмотрим функции одной переменной, заданные на интервале $a < x < b$. Проанализируем свойства дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (2.6) на этом интервале.

Будем называть дифференциальный оператор \hat{L} самосопряженным, если для любых двух функций, $f(x)$ и $g(x)$, из интересующего нас класса выполняется соотношение

$$\int_a^b dx f \hat{L}g = \int_a^b dx g \hat{L}f. \quad (2.60)$$

Выполнение условия (2.60) может быть связано как со свойствами класса рассматриваемых функций, так и со свойствами оператора \hat{L} . Например, нулевые граничные условия или периодические граничные условия (когда на концах интервала одинаковы значения самой функции и одинаковы значения ее производной), наложенные на функции f и g , приводят к самосопряженности оператора $\hat{L} = d^2/dx^2 - U(x)$, то есть дифференциального оператора Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = 0$.

Рассмотрим теперь собственные функции f_n оператора \hat{L} , которые удовлетворяют уравнению $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$, где λ_n – собственное значение оператора \hat{L} . Условие (2.60) приводит к соотношению

$$\int dx f_n \hat{L}f_m = \lambda_m \int dx f_n f_m = \lambda_n \int dx f_n f_m.$$

Таким образом, при $\lambda_n \neq \lambda_m$ выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx f_n(x) f_m(x) = 0. \quad (2.61)$$

В качестве примера можно привести набор функций $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, которые являются собственными функциями оператора d^2/dx^2 на интервале $(0, 2\pi)$ в классе периодических функций. Для этих функций соотношения (2.61) легко проверяются непосредственно.

Дополнительного комментария требует наличие вырождения (то есть собственных функций с совпадающими собственными значениями оператора \hat{L}). Мы будем считать, что набор собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению оператора \hat{L} , за счет линейного преобразования выбран таким образом, чтобы внутри этого набора также выполнялось условие ортогональности (2.61). Отметим, что для рассмотренного нами примера оператора d^2/dx^2 , собственные функции которого дважды вырождены (собственному значению $\lambda_n = -n^2$ соответствуют две собственные функции), условию взаимной ортогональности удовлетворяют как раз набор функций $\cos(nx)$, $\sin(nx)$.

Если f_n является полным набором собственных функций оператора \hat{L} из интересующего нас класса, то любую функцию f того же класса можно разложить в ряд по этим собственным функциям:

$$f = \sum_n c_n f_n. \quad (2.62)$$

Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (2.61) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx f_n f, \quad A_n = \int dx f_n^2. \quad (2.63)$$

Примером разложения (2.62) является разложение по уже упомянутым нами функциям $\cos(nx)$, $\sin(nx)$, которое является не чем иным, как разложением в ряд Фурье.

Подставляя выражение (2.63) для коэффициентов c_n в разложение (2.62), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y),$$

которое должно выполняться для любой функции f из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \delta(x - y), \quad (2.64)$$

которое является выражением полноты системы функций f_n . Соотношение (2.64) для набора $\cos(nx), \sin(nx)$ имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y). \quad (2.65)$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (1.69).

Несколько слов о неоднородной задаче $\hat{L}f = \phi$. Представляя обе функции, f и ϕ , в виде ряда по собственным функциям оператора \hat{L} : $f = \sum_n c_n f_n$ и $\phi = \sum_n a_n f_n$, мы находим $c_n = a_n / \lambda_n$. Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой, если у оператора \hat{L} имеется нулевое собственное значение. (В этом случае говорят, что у оператора \hat{L} есть нулевые моды.) Эта проблема является неустранимой в том смысле, что если в разложении “силы” ϕ имеется ненулевой вклад с собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, то неоднородная задача $\hat{L}f = \phi$ не может быть решена в базисе функций f_n . Поясним это утверждение на примере оператора $\hat{L} = d^2/dx^2$, который имеет собственную функцию, соответствующую нулевому собственному значению (нулевую моду), которая есть просто константа. Будем рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Наличие константы в разложении ϕ означает, что интеграл от ϕ по периоду не равен нулю. В то же время для периодической функции f интеграл по периоду от $d^2 f/dx^2$ равен нулю. Поэтому уравнение $d^2 f/dx^2 = \phi$ не имеет, вообще говоря, решения на классе периодических функций.

Рассмотрим обобщение соотношения (2.60)

$$\int_a^b dx \rho f \hat{L}g = \int_a^b dx \rho g \hat{L}f, \quad (2.66)$$

где $\rho(x)$ – положительная функция, которую обычно называют весовой функцией или мерой интегрирования. Удовлетворяющий условию (2.66) оператор \hat{L} уже не является самосопряженным. В частности, им может быть оператор Штурма-Лиувилля (2.6). Легко проверить, что при нулевых или периодических граничных условиях на функции f, g оператор (2.6) удовлетворяет условию (2.66), если

$$\frac{d}{dx} \rho = Q \rho \rightarrow \rho = \exp \left(\int dx Q \right). \quad (2.67)$$

Рассмотрим теперь собственные функции f_n оператора \hat{L} , которые удовлетворяют уравнению $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$, где λ_n – собственное значение оператора \hat{L} . Условие (2.66) приводит к соотношению

$$\int dx \rho f_n \hat{L}f_m = \lambda_m \int dx \rho f_n f_m = \lambda_n \int dx \rho f_n f_m.$$

Таким образом, при $\lambda_n \neq \lambda_m$ выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx \rho f_n f_m = 0, \quad (2.68)$$

которое обобщает условие ортогональности (2.61).

Если f_n является полным набором собственных функций оператора \hat{L} из интересующего нас класса, то любую функцию f того же класса можно разложить в ряд (2.62) по этим собственным функциям. Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (2.68) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx \rho f_n f, \quad A_n = \int dx \rho f_n^2. \quad (2.69)$$

Подставляя выражение (2.69) для коэффициентов c_n в разложение (2.62), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \rho \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y),$$

которое должно выполняться для любой функции f из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \frac{1}{\rho(y)} \delta(x - y), \quad (2.70)$$

которое является выражением полноты системы функций f_n и обобщает соотношение (2.64).

2.4.2 Преобразование Фурье

Любую функцию $f(\mathbf{x})$, заданную в d -мерном пространстве, и стремящуюся к нулю на бесконечности, можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 dq_2 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{q}), \quad (2.71)$$

где $\tilde{f}(\mathbf{q})$ называется преобразованием Фурье функции $f(\mathbf{x})$. Эту величину можно вычислить в соответствии с правилом

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (2.72)$$

Преобразования (2.71) и (2.72) являются обратными друг другу. Из выражения (2.72) следует, что преобразование Фурье действительной функции $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет соотношению $\tilde{f}(-\mathbf{q}) = \tilde{f}^*(\mathbf{q})$, где звездочка означает комплексное сопряжение.

Приведем соотношение, касающееся так называемой свертки двух функций

$$h(\mathbf{y}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (2.73)$$

Подставляя выражение (2.73) в интеграл Фурье (2.72) и переходя к интегрированию по \mathbf{x} и $\mathbf{y} - \mathbf{x}$, мы находим

$$\tilde{h}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}). \quad (2.74)$$

Таким образом, свертке в обычном пространстве соответствует простое произведение в Фурье-представлении.

Верно и обратное: свертке в Фурье-представлении соответствует простое произведение в обычном пространстве.

Отметим, что для δ -функции, $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_d)$, преобразованием Фурье является единица, $\tilde{\delta} = 1$. Это свойство является прямым обобщением соотношений (1.66, 1.67). Отметим также обобщение на d -мерный случай соотношения (1.65)

$$f(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \dots d\mathbf{x}_d \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (2.75)$$

Используя теперь соотношения (2.73, 2.74), мы возвращаемся к $\tilde{\delta} = 1$. Это свойство объясняет эффективность вычисления Гриновских функций за счет перехода к Фурье-представлению.

При учете зависимости функции f от времени t в преобразование Фурье можно включить также и время. Мы будем делать это следующим образом

$$\tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) = \int dt d\mathbf{x} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}), \quad (2.76)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}), \quad (2.77)$$

где d – размерность пространства, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$, $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 \dots dq_d$. Обратим внимание на то, что время t входит в преобразования (2.76, 2.77) с обратным по сравнению с пространственными координатами знаком.

Задача 2.4.1. Найти Фурье-преобразование следующих функций: $f(\mathbf{x}) = \exp(-x^2)$ в d -мерном пространстве; $\exp(-|\mathbf{x}|)$ в трехмерном пространстве; $(x^2 + a^2)^{-1}$, где a – константа, в одномерном пространстве.

Помимо разложения в интеграл Фурье (2.71), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале или в конечной области пространства. Для одномерного случая свойства разложения в ряд Фурье (с точностью до замены знака перед i) совпадают с изложенными в разделе (1.5.1) свойствами разложения во временной ряд Фурье. Для удобства повторим здесь материал раздела (1.5.1), используя пространственный язык.

Мы рассматриваем функцию, заданную на конечном интервале. Сдвигом начала координат этот интервал всегда можно выбрать в виде $0 < x < L$. Тогда функция $f(x)$ раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(2\pi i n x / L), \quad (2.78)$$

где n – целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (2.78) задает некоторую периодическую с периодом L функцию, которая определена при произвольных x . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале $0 < x < L$, то ряд

Фурье (2.78) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что даже если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $0 < x < L$, ее периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы в точках $x_n = nL$.

Обратное к (2.78) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^L \frac{dx}{L} \exp(-2\pi i n x / L) f(x). \quad (2.79)$$

Отсюда следует, что для действительной функции $f(x)$ коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (2.78) удовлетворяют соотношению $f_{-n} = f_n^*$. В этом случае ряд Фурье (2.78) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n x / L) - \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n x / L)]. \quad (2.80)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших L , в ряде Фурье (2.78) существенны большие n . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по волновым векторам $q = 2\pi n / L$. Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow L \int \frac{dq}{2\pi},$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем L – периодом функции f или длиной интервала, на котором она задана.

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то коэффициенты ряда Фурье медленно убывают при росте n . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье δ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме δ -функций, которая является периодической функцией x . Используя соотношение (2.79), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inx), \quad (2.81)$$

где мы для определенности положили $L = 2\pi$. В случае (2.81) коэффициенты разложения f_n вообще не зависят от n . Для разрывной функции δ -функции возникают в ее производной по x , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от n при больших n . Для самой разрывной функции f это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально $1/n$ при больших n . В случае непрерывной функции, содержащей изломы, закон убывания сменяется на $1/n^2$.

Задача 2.4.2. Разложить в ряд Фурье функцию $f = \exp(\alpha x)$, которая задана на интервале $0 < x < 2\pi$; и функцию $f = x$, которая задана на интервале $-\pi < x < \pi$.

Функцию $f(x)$, которая задана на отрезке $(0, L)$, можно разложить в несколько иной ряд по гармоническим функциям. Расширим этот интервал до $(-L, L)$, доопределив на отрицательных x функцию f как $f(-x) = -f(x)$. Тогда функция станет антисимметричной, и ее разложение в ряд Фурье на интервале $(-L, L)$ содержит только синусы. Таким образом мы приходим к разложению

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin(\pi n x / L), \quad (2.82)$$

которое работает и на интервале $(0, L)$. Коэффициенты этого разложения можно вычислить, как

$$f_n = \frac{2}{L} \int_0^L dx \sin(\pi n x / L) f(x). \quad (2.83)$$

Обычно разложение (2.82) используется в случае, когда функция f равна нулю на границах интервала, что обеспечивает достаточно быстрое убывание коэффициентов f_n с ростом n .

Задача 2.4.3. Разложить в ряд (2.82) функцию $f(x) = x(\pi - x)$, заданную на интервале $(0, \pi)$.

Прямое обобщение на многомерный случай одномерного разложения (2.78) в ряд Фурье можно получить для случая, когда функция f задана в прямоугольном ящике размерами $L_1 \times L_2 \times \dots \times L_d$. Тогда $f(\mathbf{x})$ можно периодически продолжить во всех d направлениях. Направим оси координат вдоль ребер ящика, а начало координат поместим в вершину так, чтобы заключенный внутри этого ящика объем определялся неравенствами $0 < x_1 < L_1, 0 < x_2 < L_2, \dots, 0 < x_d < L_d$. В этом случае разложение функции f в ряд Фурье имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum f_{n_1, n_2, \dots, n_d} \exp \left[2\pi i \left(\frac{n_1 x_1}{L_1} + \dots + \frac{n_d x_d}{L_d} \right) \right]. \quad (2.84)$$

Суммирование в (2.84) идет по всем целым n_1, n_2, \dots, n_d . Коэффициенты ряда Фурье (2.84) вычисляются в соответствии с

$$f_{n_1, n_2, \dots, n_d} = \frac{1}{V} \int dx_1 \dots dx_d f(\mathbf{x}) \exp \left[-2\pi i \left(\frac{n_1 x_1}{L_1} + \dots + \frac{n_d x_d}{L_d} \right) \right], \quad (2.85)$$

где V – объем ящика, $V = L_1 \dots L_d$. Если функция меняется на масштабах много меньше размеров ящика, то ряд (2.84) близок к интегралу, а правило пересчета имеет вид

$$\sum_{n_1 \dots n_d} \rightarrow V \int \frac{dq_1}{2\pi} \dots \frac{dq_d}{2\pi}.$$

Задача 2.4.4. Разложить в ряд Фурье (2.84) функцию $f = x_1 x_2 x_3$ в трехмерном ящике $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$.

Глава 3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

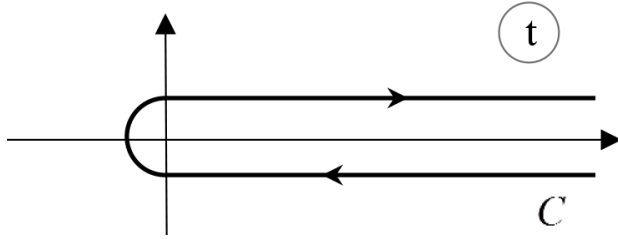


Рис. 3.1: Контур интегрирования в интегральном представлении гамма-функции

Специальные функции были введены для описания случаев, когда элементарных функций оказывается недостаточно для описания свойств системы. Мы приводим сведения только о самых распространенных специальных функциях. Как правило, эти функции являются решениями дифференциальных уравнений, которые в силу своей универсальности часто возникают в самых разных физических приложениях.

3.1 Гамма-функция Эйлера

На практике довольно часто возникают случаи, когда требуется взять интеграл, содержащий комбинацию экспоненциальной и степенной функций. Такого сорта интегралы сводятся к так называемой Гамма-функции $\Gamma(x)$, которая была введена Эйлером еще в 18 веке.

Гамма-функция $\Gamma(z)$ определяется следующим интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} dt \, t^{z-1} e^{-t}. \quad (3.1)$$

Интеграл (3.1) сходится при любом положительном z , или, если речь идет о функции комплексной переменной z , при любом z с положительной действительной частью. Интеграл (3.1) легко вычисляется путем многократного интегрирования по частям при целом положительном $z = n$. В этом случае получается $\Gamma(n) = (n-1)!$. Поэтому можно сказать, что Гамма-функция является обобщением факториала на случай произвольного комплексного n . Отметим также значение $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, которое может быть получено из (3.1), если перейти к интегрированию по \sqrt{t} . Однократное интегрирование по частям в выражении (3.1) дает соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (3.2)$$

которое также является обобщением соответствующего свойства факториала.

Задача 3.1.1. Найти площадь единичной сферы в d -мерном пространстве.

При $z \rightarrow 0$ значение интеграла (3.1) неограниченно возрастает. Это означает, что при $z = 0$ функция $\Gamma(z)$ имеет особенность. Чтобы установить характер этой особенности и, более общо, продолжить аналитически $\Gamma(z)$ на z с отрицательной действительной частью, можно использовать модификацию интеграла (3.1)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C dt \, t^{z-1} e^{-t}, \quad (3.3)$$

где контур C изображен на рисунке 3.1.

В выражении (3.3) предполагается, что t^{z-1} задано ветвью с разрезом вдоль действительной оси, причем на верхнем берегу разреза аргумент t^{z-1} равен нулю (то есть t^{z-1} действительно), а контур C обходит этот разрез, приходя из $+\infty$ снизу разреза и уходя в $+\infty$ сверху разреза. Если $\operatorname{Re} z > 0$, то контурный интеграл (3.3) может быть сведен к сумме интегралов по верхнему и нижнему берегам разреза, причем интеграл по верхнему берегу разреза совпадает с интегралом (3.1), а интеграл по нижнему берегу разреза отличается от интеграла (3.1) множителем $-\exp(2\pi iz)$. Отсюда и получается выражение (3.3).

Правая часть соотношения (3.3) определена и для z с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ на эту область переменной z . Контурный интеграл в (3.3) не имеет особенностей в плоскости z . Следовательно, особенности функции $\Gamma(z)$ определяются разностью $1 - \exp(2\pi iz)$, которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных) z . При положительных целых z в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталя. В любом случае, $\Gamma(z)$ не имеет особенностей при целых положительных z , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных z контурный интеграл в ноль не обращается, и мы приходим к выводу, что в этих точках $\Gamma(z)$ имеет простые полюса.

Задача 3.1.2. Найти контурное представление $\Gamma(z)$ в терминах $(-t)^{z-1} e^{-t}$.

Задача 3.1.3. Показать, что

$$\int_0^{\infty} du \, u^{z-1} \cos u = \cos(\pi z/2) \Gamma(z), \quad (3.4)$$

$$\int_0^{\infty} du \, u^{z-1} \sin u = \sin(\pi z/2) \Gamma(z). \quad (3.5)$$

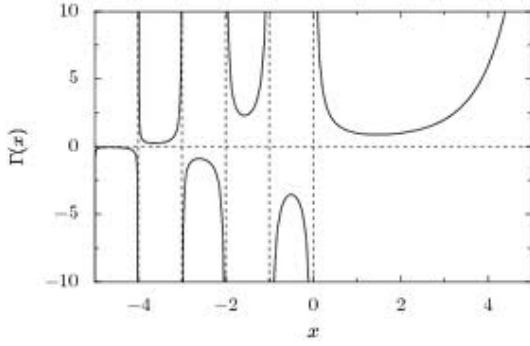


Рис. 3.2: Гамма-функция Эйлера.

Установить область применимости этих выражений.

Найдем вычеты функции $\Gamma(z)$ в полюсах $z = 0, -1, -2, \dots$. При $z = -n$ (n – целое неотрицательное) контурный интеграл в (3.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\text{res } \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}. \quad (3.6)$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3.2. В точках $x = -n$ функция Γ стремится к бесконечности.

Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции $\Gamma(z)$ при больших положительных значениях z , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 3.7.2. Для этого в интеграле (3.1) произведем замену $t \rightarrow tz$, которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (3.98). Стоящая в экспоненте функция $\ln t - t$ достигает максимума в точке $t = 1$. Используя теперь приближение (3.99), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z). \quad (3.7)$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших n) выражение для факториала $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (3.7) справедлива и для комплексных z при условии большого положительного значения действительной части z .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (3.8)$$

где действительные части α и β предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (3.8) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по s с весом e^{-s} , мы получаем

$$\Gamma(\alpha+\beta) B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1} (s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных $s = x + y$ сводит правую часть к произведению интегралов по x по y , которые дают произведение $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$. Таким образом, мы приходим к соотношению (3.8).

Задача 3.1.4. Найти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi.$$

Задача 3.1.5. Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

Выведем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (3.9)$$

Для этого запишем левую часть (3.9), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену $s = t\zeta$ и взяв интеграл по t , мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Чтобы взять стоящий здесь интеграл по ζ , следует преобразовать его в контурный интеграл

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta},$$

где контур C изображен на рисунке 3.1. После этого контур можно деформировать, загибая его ‘усы’ в левую полуплоскость. После этого интеграл сведется к вычету в точке $\zeta = -1$, что и дает выражение, стоящее в правой части (3.9).

Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для $0 < \text{Re } z < 1$. Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные z . В частности, соотношение (3.9) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (3.6). Как следует из соотношения (3.9), $\Gamma^{-1}(z)$ не имеет полюсов в плоскости z , то есть $\Gamma(z)$ нигде не обращается в ноль.

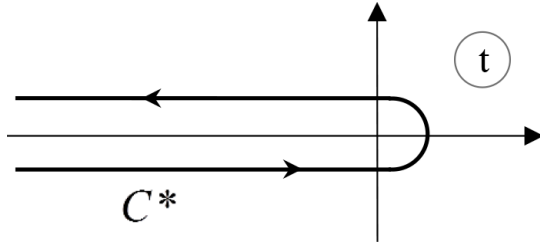


Рис. 3.3: Контур интегрирования вдоль отрицательной полуоси.

Задача 3.1.6. Получить интегральное представление

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t, \quad (3.10)$$

где контур C^* изображен на рисунке 3.3.

Задача 3.1.7. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

Задача 3.1.8. Найти $|\Gamma(1/2 + ix)|$, где x действительное число.

3.2 Функция Эйри

Функция Эйри является решением уравнения Эйри (Airy)

$$d^2 Y/dx^2 - xY = 0, \quad (3.11)$$

которое возникает в ряде физических приложений. Пожалуй, наиболее важным приложением уравнения Эйри (3.11) является определение поведения волновых функций (в квантовой механике) вблизи точки поворота, то есть вблизи точки, где энергия частицы сравнивается с потенциалом. Решения уравнения (3.11) демонстрируют ряд универсальных особенностей этого поведения.

Уравнение Эйри (3.11) линейно по переменной x . Поэтому его можно эффективно решить методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1, где обсуждается общее уравнение (3.93). Приведем здесь логику раздела 3.7.1 для частного случая уравнения (3.11). Запишем решение этого уравнения в виде контурного интеграла

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt), \quad (3.12)$$

где C – некоторый контур в комплексной плоскости t . Мы будем считать, что подынтегральное выражение достаточно быстро стремится к нулю на концах этого контура (которые могут быть и в бесконечности).

Подставим уравнение (3.11) в представление (3.12), используем соотношение $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$ и производим интегрирование по частям по t , считая граничные члены равными нулю (что обеспечивается быстрым

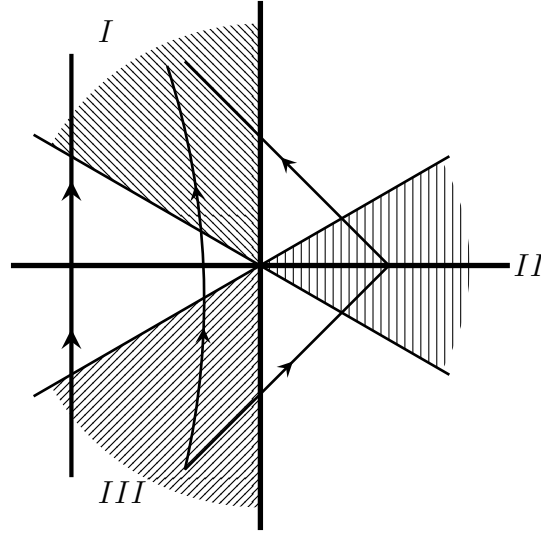


Рис. 3.4: Возможные контуры, по которым идет интегрирование в интегральном представлении функции Эйри.

стремлением подынтегрального выражения к нулю на концах контура интегрирования). В результате мы находим уравнение

$$\frac{dZ}{dt} = -t^2 Z,$$

решение которого имеет вид $Z \propto \exp(-t^3/3)$. Подставляя это выражение в (3.12), находим общее решение уравнения Эйри (3.11)

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3). \quad (3.13)$$

Контур C в представлении (3.13) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур C должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение $\exp(xt - t^3/3)$ в бесконечности определяется фактором $-t^3$, имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (3.13) стремится к нулю: $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$, $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$, $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$, смотри рисунок 3.4, секторы I, II, III. Контур C должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется два линейно независимых решения, что соответствует второму порядку уравнения Эйри.

Решению, которое остается конечным при $x \rightarrow \pm\infty$ соответствует контур, идущий из сектора III в сектор

I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 3.4), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы $\exp(xt - t^3/3)$ стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение $t = iu$, мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \cos(xu + u^3/3), \quad (3.14)$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (3.14) функция называется функцией Эйри первого рода (или просто функцией Эйри).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях $|x|$. При больших отрицательных x в интеграле (3.14) имеется точка стационарной фазы $u = \sqrt{|x|}$, окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших $|x|$. Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 3.7.2), находим, используя выражение (3.102)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} |x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.15)$$

При больших положительных x стационарная точка в интеграле (3.14) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3).$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 3.7.2. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку $t = -x^{1/2}$ (смотри вертикальную прямую на рисунке 3.4). Вычисляя интеграл в соответствии с (3.105), находим

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi} x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (3.16)$$

График зависимости функции Эйри от x приведен на рисунке 3.5. На этом же графике красным цветом приведены асимптотики (3.15, 3.16).

В качестве второго решения уравнения Эйри (3.11) выбирают обычно функцию

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du [\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3)], \quad (3.17)$$

которая называется функцией Эйри второго рода. Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем

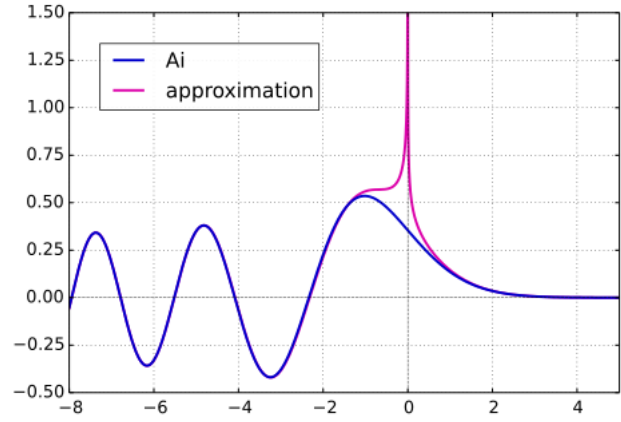


Рис. 3.5: Функция Эйри с асимптотиками.

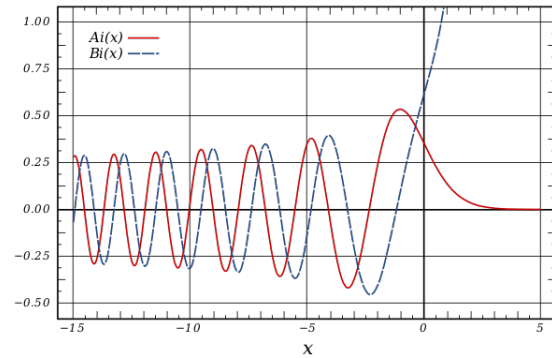


Рис. 3.6: Функции Эйри первого и второго рода.

вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (3.17). Коэффициент в (3.17) традиционен. Сравнение функций Эйри Ai и Bi проведено на рисунке 3.6.

Задача 3.2.1. Найти значения $\text{Ai}(0)$, $\text{Ai}'(0)$, $\text{Bi}(0)$, $\text{Bi}'(0)$.

Асимптотическое поведение функции Bi при больших положительных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} x^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (3.18)$$

Асимптотическое поведение функции Bi при больших отрицательных значениях аргумента определяется выражением

$$\text{Bi}(x) \approx \frac{1}{\pi^{1/2} |x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.19)$$

Сравнение функции $\text{Bi}(x)$ и ее асимптотик приведены на рисунке 3.7.

Задача 3.2.2. Получить асимптотическое поведение функции $\text{Bi}(x)$ при $x \rightarrow \pm\infty$.

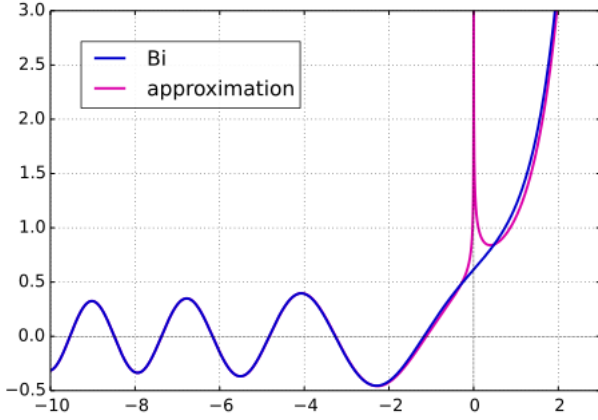


Рис. 3.7: Функция Эйри второго рода с асимптотиками.

Асимптотическое поведение функций Эйри $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ можно установить и методом WKB, смотри раздел 3.7.3. Уравнение Эйри (3.11) является частным случаем уравнения (3.106), при этом $U = x$. Таким образом $p = \sqrt{x}$ и $S = (2/3)x^{3/2}$. Таким образом, в соответствии с (3.108) при больших положительных x мы находим следующее поведение

$$x^{-1/4} \exp(\pm 2x^{3/2}/3).$$

Знак $+$ относится к функции $\text{Bi}(x)$, смотри (3.18), а знак минус относится к функции $\text{Ai}(x)$, смотри (3.16). При больших отрицательных x мы находим следующее поведение

$$|x|^{-1/4} \exp(\pm 2i|x|^{3/2}/3).$$

Поскольку $\text{Ai}(x)$ и $\text{Bi}(x)$ являются действительными функциями, то в соответствии с (3.110) для них поведение при больших отрицательных x имеет вид

$$|x|^{-1/4} \cos(2|x|^{3/2}/3 + \varphi),$$

где φ – некоторая фаза. Это поведение соответствует асимптотикам (3.15) и (3.19).

Задача 3.2.3. Найти асимптотики решения уравнения $d^2Y/dx^2 - x^3Y = 0$ при больших значениях $|x|$.

3.3 Функции Бесселя

Функции Бесселя удивительным образом возникают в самых различных задачах математической физики. Они естественным образом присутствуют в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях волнового уравнения, описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в очень широком круге приложений, чем и определяется важность этих функций.

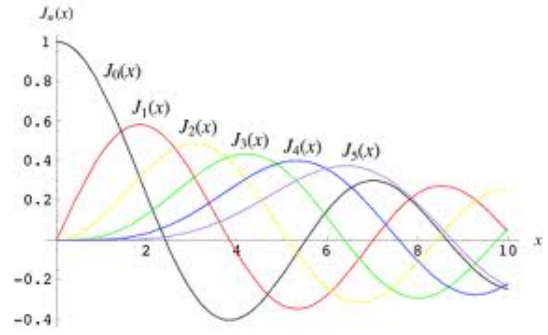


Рис. 3.8: Несколько первых функций Бесселя.

Решение волнового уравнения можно разложить по плоским волнам, зависимость поля от координат в плоской волне определяется фактором $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где \mathbf{k} – волновой вектор, а \mathbf{r} – радиус-вектор. В двумерном случае $\mathbf{r} = (x, y)$. Часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат r, φ , где r – расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а φ – полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла φ скалярное произведение $\mathbf{k}\mathbf{r} = rk \sin \varphi$.

Функции Бесселя являются коэффициентами разложения $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ в ряд Фурье по угловым гармоникам:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi), \quad (3.20)$$

где $z = kr$. Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 3.8. Добавляя π к φ , находим

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi).$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi),$$

мы заключаем, что $J_{-n} = (-1)^n J_n$.

Выписывая обратное преобразование к ряду Фурье (3.20), находим следующее представление функций Бесселя

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (3.21)$$

которое называется представлением Парсеваля. При получении второго равенства в (3.21) мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю, поскольку мнимая часть $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$ антисимметрична по θ и косинус является четной функцией. Отметим, что представление (3.21) непосредственно приводит к отмеченному нами соотношению $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$.

Подставляя в выражение (3.20) $t = e^{i\varphi}$, находим ряд Лорана по t

$$\exp \left[\frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n, \quad (3.22)$$

коэффициентами которого являются функции Бесселя. В соотношении (3.22) t может быть произвольным комплексным числом.

Продифференцируем соотношение (3.22) по z , что дает

$$\frac{1}{2}(t - 1/t) \exp \left[\frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.22) и собирая коэффициенты при степенях t , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)]. \quad (3.23)$$

Дифференцируем соотношение (3.22) по t , что дает

$$\frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) \exp \left[\frac{z}{2} (t - 1/t) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (3.22) и собирая коэффициенты при степенях t , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z). \quad (3.24)$$

Комбинируя (3.23) и (3.24), находим следующие рекуррентные соотношения

$$\frac{d}{dz} (z^n J_n) = z^n J_{n-1}, \quad J'_n + \frac{n}{z} J_n = J_{n-1}, \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n}{z^n} = -\frac{J_{n+1}}{z^n}, \quad J'_n - \frac{n}{z} J_n = -J_{n+1}. \quad (3.26)$$

В частности, $dJ_0/dz = -J_1$.

Рекуррентное соотношение (3.25) можно переписать в следующем виде

$$z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z).$$

Дифференцируя это соотношение по z и используя для преобразования правой части рекуррентное соотношение (3.26), находим замкнутое уравнение на J_n

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0, \quad (3.27)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6).

Задача 3.3.1. Доказать правила дифференцирования (3.23), исходя из соотношения (3.21).

Задача 3.3.2. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z).$$

Задача 3.3.3. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_1(z).$$

Задача 3.3.4. Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

Рассмотрим случай малых z , $z \ll 1$. В этом случае третьим слагаемым в уравнении (3.27) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (3.28)$$

которое имеет степенные решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$. Обратим внимание на причину, по которой уравнение (3.28) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании $z \rightarrow Az$, где A — произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (3.28) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (3.28), которые при преобразовании $z \rightarrow Az$ переходят в себя с точностью до множителя, именно этим свойством обладают степенные решения.

Поскольку уравнение Бесселя (3.27) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (3.28), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$ определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (3.27) при малых z . Обратим внимание на то, что при $n > 0$ решение g_2 сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при $z \rightarrow 0$. Поэтому, если функция g регулярна в нуле, то ее поведение определяется g_1 , то есть $g \propto z^n$ при малых z .

Заметим, что при $n = 0$ оба решения уравнения (3.28), $g_1 = z^n$ и $g_2 = z^{-n}$, совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (3.28), в котором надо положить $n = 0$. Это уравнение является уравнением первого порядка для dg/dz , решением которого, очевидно, является $dg/dz = C_1/z$, где C_1 — произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение $g = C_2 + C_1 \ln z$, где C_2 — вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при $n = 0$ имеется два решения уравнения (3.28), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно.

Возвращаемся теперь к функциям Бесселя. Раскладывая правую часть соотношения (3.21) по z , мы заключаем что при $n > 0$ первый член разложения $J_n(z)$ по z равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!}, \quad (3.29)$$

в соответствии с анализом, проведенным при малых z . Следующие члены разложения функции Бесселя по z можно найти из того же выражения (3.21). В результате мы получаем следующий ряд Тейлора для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (3.30)$$

Отметим, что это ряд по целым степеням z , который содержит только четные или только нечетные степени z , в зависимости от четности индекса n .

Задача 3.3.5. Построить разложение в ряд (3.30), исходя из соотношения (3.21).

Ряд (3.30) абсолютно сходится при всех действительных z , поскольку отношение коэффициентов при степенях $(z/2)^{n+2m+2}$ и $(z/2)^{n+2m}$ равно $-\frac{1}{[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]}$, то есть стремится к нулю с ростом m . Таким образом, ряд (3.30) определяет функцию Бесселя при всех действительных z . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением $J_n(z)$ с действительных z . Поскольку ряд (3.30) является абсолютно сходящимся, то функция $J_n(z)$ не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного z . В то же время бесконечность является существенной особой точкой функции Бесселя $J_n(z)$.

Соотношение (3.21) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях z . В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 3.7.2. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по θ в выражении (3.21), что дает $z \cos \theta_0 = n$. Таким образом, в силу большого значения z стационарная фаза близка к $\pi/2$ (что предполагает неравенство $z \gg n$). Используя выражение для приближения стационарной фазы (3.102), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.31)$$

Таким образом, $J_n(z)$ осциллирует с амплитудой, которая стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Задача 3.3.6. Найти асимптотическое выражение функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных z .

Задача 3.3.7. Найти асимптотическое поведение интеграла

$$f(t) = \int_0^{\infty} dx J_0(x) \exp(-t/x)$$

при малых и больших t .

Вследствие уравнения (3.27) функция $J_n(qx)$ удовлетворяет уравнению

$$\hat{L} J_n(qx) = -q^2 J_n(qx), \quad (3.32)$$

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{n^2}{x^2}. \quad (3.33)$$

Таким образом, функция $J_n(qx)$ является собственной функцией дифференциального оператора (3.33), который относится к типу операторов Штурма-Лиувилля (2.6), с собственным значением $-q^2$. Отсюда следует условие ортогональности (2.68) с весом $\rho = x$ для разных q . В данном случае речь идет о непрерывном спектре (q может принимать непрерывный ряд значений), поэтому интеграл с весом $\rho = x$ от $J_n(kx)J_n(qx)$ должен быть пропорционален $\delta(k - q)$. Соответствующее соотношение имеет вид

$$\int_0^{\infty} dx x J_n(kx) J_n(qx) = k^{-1} \delta(k - q), \quad (3.34)$$

где $k > 0$, $q > 0$.

Приведем доказательство соотношения (3.34). Вклад в коэффициент при δ -функции набирается на больших значениях аргумента, поэтому в интеграле (3.34) мы можем использовать асимптотическое выражение (3.31). В результате находим

$$\int_0^{\infty} dx x J_n(kx) J_n(qx) \rightarrow \int dx \frac{2}{\pi \sqrt{kq}} \cos(kx) \cos(qx).$$

Принимая во внимание соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \cos(kz) \cos(qz) = \pi \delta(k - q),$$

где q и k считаются положительными, и учитывая, что интеграл по x идет только по положительным значениям, мы и приходим к соотношению (3.34).

Задача 3.3.8. Доказать соотношение (3.34), исходя из представления (3.20).

Соотношение (3.34) позволяет сформулировать разложение функций, заданных при положительных значениях аргумента, в интеграл по функциям Бесселя, аналогичное разложению в интеграл Фурье. Прямое и обратное преобразования функции $f(x)$ имеют вид

$$\tilde{f}(q) = \int_0^{\infty} dx x J_n(qx) f(x), \quad (3.35)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} dq q J_n(qx) \tilde{f}(q). \quad (3.36)$$

Выбор n в этом соотношении диктуется условиями решаемой задачи.

Задача 3.3.9. Разложить в интеграл (3.36) с $n = 0$ функцию $f(x) = \exp(-p^2 x^2)$.

Изучим разложение по функциям Бесселя на конечном интервале. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных соотношений. Из (3.32, 3.33) следует

$$\begin{aligned} J_n(qx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(kx) + J_n(qx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(kx) \\ - J_n(kx) \frac{d^2}{dx^2} J_n(qx) - J_n(kx) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_n(qx) \\ = (q^2 - k^2) J_n(qx) J_n(kx). \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение с весом x на интервале $0 < x < z$, находим

$$\begin{aligned} J_n(qz) k z J_n'(kz) - J_n(kz) q z J_n'(qz) \\ = (q^2 - k^2) \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx). \end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение (3.26), находим

$$\begin{aligned} \int_0^z dx x J_n(qx) J_n(kx) \\ = \frac{J_n(kz) q z J_{n+1}(qz) - J_n(qz) k z J_{n+1}(kz)}{q^2 - k^2}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Устремляя здесь k к q и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталья, находим

$$\int_0^z dx x [J_n(kx)]^2 = \frac{z^2}{2} (J_{n+1}^2 + J_n^2) - \frac{nz}{k} J_{n+1} J_n, \quad (3.38)$$

где аргументы функций Бесселя равны kz , и мы использовали рекуррентные соотношения (3.25, 3.26)

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения (3.32) на интервале $0 < x < 1$ на классе функций, обращающихся в ноль на конце интервала, при $x = 1$. Это условие приводит к дискретному набору собственных чисел $q = \gamma_k$, для которых $J_n(\gamma_k) = 0$. Набор γ_k зависит от индекса функции Бесселя n . Величины γ_k неограниченно растут с увеличением номера k .

Задача 3.3.10. Найти значения γ_k для больших значений этого параметра.

В силу общих свойств задач на собственные значения, смотри раздел 2.4.1, формула (2.68), находим свойство ортогональности

$$\int_0^1 dx x J_n(\gamma_k x) J_n(\gamma_j x) = 0, \quad (3.39)$$

если $\gamma_k \neq \gamma_j$. Действительно, левая часть соотношения (3.32) представляет собой оператор Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = 1/x$, поэтому в силу (2.67) находим $\rho = x$. Подставляя в соотношении (3.38) $z = 1$, получаем

$$\int_0^1 dx x [J_n(\gamma_k x)]^2 = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k). \quad (3.40)$$

Задача 3.3.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.39).

Соотношения (3.39, 3.40) позволяют сформулировать правила разложения функции $f(x)$, заданной на интервале $0 < x < 1$, по набору функций $J_n(\gamma_k x)$:

$$f(x) = \sum_k f_k J_n(\gamma_k x), \quad (3.41)$$

$$f_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\gamma_k)} \int_0^1 dx x f(x) J_n(\gamma_k x). \quad (3.42)$$

Это разложение является аналогом разложения в ряд Фурье.

Задача 3.3.12. Разложить функцию $J_1(x) - x J_1(1)$ на интервале $(0, 1)$ в ряд (3.41) по $J_1(\gamma_k x)$.

3.4 Полиномы Лежандра

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в центрально-симметричное поле, потенциал которого U зависит только от расстояния r до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда $1/R$ равен нулю, $\nabla^2(1/R) = 0$. Здесь R – расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку $(0, 0, 1)$ и перейдем к сферической системе координат r, θ, φ . В этом случае $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$. Условие же $\nabla^2 R^{-1} = 0$ записывается в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Здесь отсутствуют производные по φ , поскольку R от этой переменной не зависит. Переходя к переменной $\mu = \cos \theta$, которая меняется от -1 до $+1$, мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0. \quad (3.43)$$

Полиномы Лежандра $P_n(\mu)$ вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора величины R^{-1} :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n. \quad (3.44)$$

Поскольку особенности левой части (3.44) по r (точки ветвления) $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$ лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в

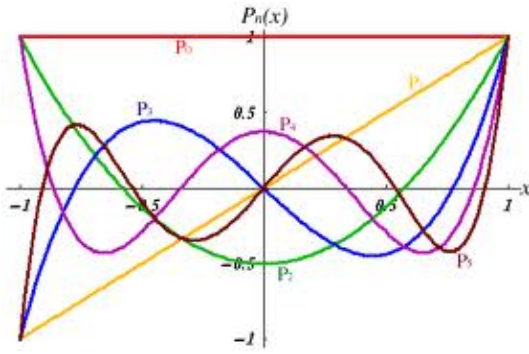


Рис. 3.9: Несколько первых полиномов Лежандра.

правой части (3.44) равен единице, то есть он сходится при $r < 1$. Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2}-2r^{-1}\mu+1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (3.44) разложение по отрицательным степеням r :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}. \quad (3.45)$$

Этот ряд сходится при $r > 1$.

Как следует из (3.44) или (3.45), функция $P_n(\mu)$ является полиномом n -го порядка, симметричным по μ при четных n и антисимметричным по μ при нечетных n . Отметим также равенство $P_n(1) = 1$. Оно непосредственно следует из того, что при $\mu = 1$ $R = 1 - r$, а $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$. Аналогично получается равенство $P_n(-1) = (-1)^n$.

Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением R^{-1} в соответствии с (3.44) или (3.45). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1). \quad (3.46)$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 3.9, где они изображены на интервале $-1 < \mu < 1$. В силу антисимметрии полинома для нечетного индекса $P_{2n+1}(0) = 0$.

Задача 3.4.1. Найти значение $P_{2n}(0)$.

Подставляя правую часть соотношения (3.44) вместо R^{-1} в уравнение (3.43), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1)P_n = 0, \quad (3.47)$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням r . В терминах угла θ , $\mu = \cos \theta$, уравнение (3.47) переписываются в виде

$$\frac{d^2}{d\theta^2} P_n + \cot \theta \frac{dP_n}{d\theta} + n(n+1)P_n = 0, \quad (3.48)$$

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0, \quad (3.49)$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu(2r\partial_r + 1) + (r^2\partial_r + r), \quad (3.50)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор \hat{K}_1 к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях r , находим следующее рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0. \quad (3.51)$$

Это соотношение позволяет явно находить $P_{n+1}(\mu)$, если известны выражения для $P_{n-1}(\mu)$ и $P_n(\mu)$. Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (3.51), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

Задача 3.4.2. Найти выражение для $P_3(\mu)$, воспользовавшись рекуррентным соотношением (3.51).

Задача 3.4.3. Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}.$$

Указание: действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (3.51).

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1-2r\mu+r^2}} = 0, \quad (3.52)$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1 - \mu/r)\partial_\mu, \quad (3.53)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор \hat{K}_2 к правой части (3.44) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях r , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0,$$

которое переписывается в виде

$$(n+1)P_n = \frac{d}{d\mu}(\mu P_n) - \frac{d}{d\mu} P_{n-1}. \quad (3.54)$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (3.55)$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (3.51): если (3.55) справедливо для P_{n-1} и P_n , то в силу (3.51) оно справедливо и для P_{n+1} . Кроме того, выражение (3.55) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (3.46), что завершает доказательство.

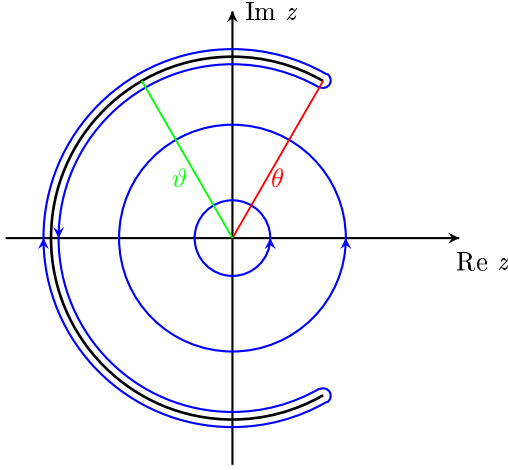


Рис. 3.10: Преобразование контура интегрирования в интегральном представлении полиномов Лежандра.

Задача 3.4.4. Показать, что в силу (3.51) соотношение (3.55) справедливо для P_{n+1} , если (3.55) справедливо для P_{n-1} и P_n .

Задача 3.4.5. Показать, что в силу (3.54) соотношение (3.55) справедливо для P_n , если (3.55) справедливо для P_{n-1} .

Задача 3.4.6. Найти значение $P_{2n}(0)$, исходя из (3.55).

Соотношение (3.54) означает, что член $n(n+1)P_n$ в уравнении (3.47) записывается в виде полной производной. Беря первообразную от получившегося выражения, находим

$$(\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) = n[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)]. \quad (3.56)$$

Константа интегрирования здесь равна нулю, поскольку при $\mu = 1$ обе части соотношения (3.56) обращаются в ноль. Соотношения (3.56) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

Задача 3.4.7. Докажите, что если соотношение (3.56) справедливо для $n-1$, то в силу соотношений (3.51, 3.54) оно справедливо и для n .

Задача 3.4.8. Вывести соотношения (3.56), исходя из соотношения (3.55).

Задача 3.4.9. Проверить выполнение уравнения (3.47) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (3.54, 3.56).

Соотношение (3.44) можно использовать для получения интегрального представления полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим

из соотношения (3.44)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по z при $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$, которые лежат на единичной окружности, если μ — действительное число и $|\mu| < 1$. Эти точки ветвления расположены в точках $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$, где $\mu = \cos \theta$. Таким образом, разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$ можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости z , которая определяется условиями $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$, где θ предполагается лежащим в интервале $0 < \theta < \pi$, а ϑ — аргумент z , $z = e^{i\vartheta}$. Это построение представлено на рисунке 3.10, где разрез показан черной дугой.

Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем “вывернем” через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции $(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$. Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 3.10, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции $z^{-n-1}(1 - 2z\mu + z^2)^{-1/2}$, которая имеет противоположные знаки по берегам разреза. На разрезе $z = e^{i\vartheta}$, тогда $1 - 2z\mu + z^2 = 2e^{i\vartheta}(\cos \vartheta - \cos \theta)$. Преобразуем интегрирование по контуру к интегрированию по углу $dz = ie^{i\vartheta} d\vartheta$. В результате получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}}, \quad (3.57)$$

где синус возник в результате суммирования вкладов от верхней и от нижней полудуг.

Интегральное представление (3.57) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших n . В этом случае в силу быстрой осцилляции $\sin[(n+1/2)\vartheta]$ главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (3.57). Подставляя $\vartheta = \theta + x$, раскладывая по x подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta + x)]}{\sqrt{2 \sin x}}. \quad (3.58)$$

Вычисляя здесь интеграл по x , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi \sin \theta}}. \quad (3.59)$$

Задача 3.4.10. Получить выражение (3.59) из (3.58).

Выражение (3.59) можно получить также методом WKБ (смотри раздел 3.7.3), который работает как раз

при больших n . Чтобы применить этот метод, переписываем уравнение (3.48) в терминах переменной $t = \ln \tan(\theta/2)$. Тогда оно принимает вид уравнения (3.106):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P_n = 0. \quad (3.60)$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin\theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$. При больших n выполняется неравенство $dp/dt \ll p^2$, что оправдывает применение метода WKБ. Суммируя теперь два члена (3.108), мы и получаем выражение (3.59). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (3.47), регулярное в точке $\mu = 1$, когда оно разлагается в ряд Тейлора по $x = \mu - 1$. Перепишем уравнение (3.47) в терминах переменной x :

$$(2x + x^2)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по x . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора P по x , $P = \sum_k p_k x^k$, мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом n цепочка соотношений обрывается на $k = n$, и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с $P_n(\mu)$. Если же n не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени x . В пределе больших k мы имеем $p_{k+1} = -(1/2)p_k$. Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при $x = -2$, то есть $\mu = -1$. Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (3.47), регулярные как в точке $\mu = 1$, так и в точке $\mu = -1$.

Как следует из уравнения (3.47), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}(1 - \mu^2)\frac{d}{d\mu}, \quad (3.61)$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале $-1 < \mu < 1$ и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (3.61), то есть свойство (2.60), смотри раздел 2.4.1, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (2.61):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu)P_l(\mu) = 0, \quad (3.62)$$

если $n \neq l$.

Задача 3.4.11. Прямо доказать соотношение ортогональности (3.62). Указание: воспользоваться представлением (3.55).

Соотношение (3.62) можно получить и из уравнения (3.48), в соответствии с которым полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = \cot\theta$ и $U = 0$. В этом случае в соответствии с (2.67) $\rho = \sin\theta$. Интервал же интегрирования по углу θ распространяется от 0 до π . Условие (2.61) переписывается в виде $\int d\mu f_n f_m = 0$, где $\mu = \cos\theta$. Таким образом, в терминах переменной μ полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале $-1 < \mu < 1$, что и зафиксировано соотношением (3.62).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}. \quad (3.63)$$

Общее соотношение (2.64) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (3.61), конечных на интервале $(-1, +1)$, удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2)P_k(x)P_k(y) = \delta(x-y). \quad (3.64)$$

Задача 3.4.12. Получить выражение для нормировочного множителя (3.63). Указание: воспользоваться соотношением (3.44).

Задача 3.4.13. Прямо получить соотношение (3.64). Указание: воспользоваться результатом задачи (3.4.3).

Задача 3.4.14. Найти $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)$.

Задача 3.4.15. Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра $P_n(x)$ монома x^k .

3.5 Полиномы Эрмита

Полиномы Эрмита возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку $(-1, 1)$. Кроме того, в ряде случаев разложение функции по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора производящей функции:

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x), \quad (3.65)$$

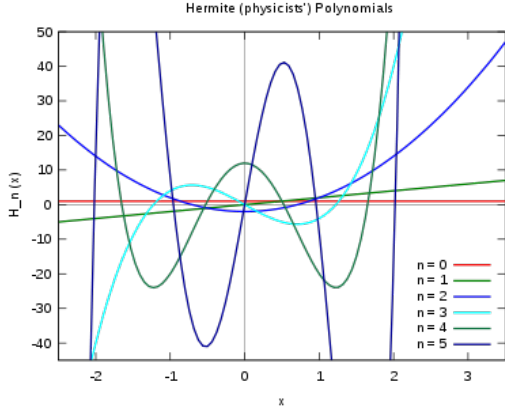


Рис. 3.11: Несколько первых полиномов Эрмита.

где n называется индексом полинома Эрмита. Легко понять, что $H_n(x)$ является полиномом n -ой степени, поскольку наибольшая степень x при t^n в разложении производящей функции $\exp(-t^2 + 2tx)$ в ряд Тейлора получается при разложении $\exp(2tx)$. Производящая функция $\exp(-t^2 + 2tx)$ инвариантна относительно преобразования $t, x \rightarrow -t, -x$. При этом преобразовании в правой части изменяет знак аргумент H_n , а t^n заменяется на $(-1)^n t^n$. Поскольку разложение должно остаться прежним, мы находим $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$. Другими словами полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями x , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями x .

Раскладывая $\exp(-t^2 + 2tx)$ до второго порядка по t , находим выражения для первых трех полиномов Эрмита

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (3.66)$$

Следующие полиномы Эрмита могут быть найдены, если разложить $\exp(-t^2 + 2tx)$ до следующих порядков по t . Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке 3.11.

Полагая в выражении (3.65) $x = 0$ и раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по t , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n - 1)!!, \quad (3.67)$$

где $(2n - 1)!! \equiv (2n - 1)(2n - 3) \dots$. Далее, при малых x справедливо соотношение $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1 + 2tx)$. Снова раскладывая $\exp(-t^2)$ в ряд по t , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n + 1)!!. \quad (3.68)$$

Дифференцируя соотношение (3.65) по x и приравнявая коэффициенты при степенях t в получившихся рядах, мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x). \quad (3.69)$$

Далее, беря производную по t от соотношения (3.65) и приравнявая коэффициенты при степенях t в получившихся рядах, мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (3.70)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита, стартуя с первых двух. Выражая в соотношении (3.69) H_{n-1} в соответствии с (3.70), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right)H_n = -H_{n+1}. \quad (3.71)$$

Соотношение (3.69) приводит нас к выводу, что функция $H_n(x)$ имеет ровно n нулей при действительном x . Другими словами, все корни уравнения $H_n(x) = 0$ действительны. Проведем доказательство по индукции. Если $H_n(x)$ имеет n нулей, то в соответствии с (3.69) функция $H_{n+1}(x)$ имеет n экстремумов. Между ними лежит $n - 1$ нулей функции $H_{n+1}(x)$. Еще два нуля $H_{n+1}(x)$ лежат вне крайних экстремумов $H_{n+1}(x)$, поскольку на больших x в полиноме доминирует член с наивысшей степенью x , то есть на больших x функция $H_{n+1}(x)$ монотонно стремится к ∞ или $-\infty$.

Умножая соотношение (3.65) на $\exp(-x^2)$, находим

$$\exp[-(t-x)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \exp(-x^2).$$

Отсюда следует

$$H_n(x) \exp(-x^2) = \frac{d^n}{dt^n} \exp[-(t-x)^2] \Big|_{t=0}.$$

Поскольку в правой части $d/dt = -d/dx$, мы находим представление полиномов Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2), \quad (3.72)$$

удобное для многих задач. Соотношение (3.72) еще раз показывает, что H_n является полиномом степени n .

Задача 3.5.1. Доказать соотношение (3.72) с использованием соотношения (3.71). Указание: действовать по индукции.

Задача 3.5.2. Доказать, что старший член разложения $H_n(x)$ имеет вид $2^n x^n$.

Задача 3.5.3. Получить соотношение (3.65) из (3.72).

Легко проверить, что

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial}{\partial x} + 2t \frac{\partial}{\partial t}\right) \exp(-t^2 + 2tx) = 0.$$

Применяя приведенный дифференциальный оператор к правой части соотношения (3.65) и приравнявая результат к нулю, мы находим замкнутое дифференциальное уравнение на полином Эрмита n -го порядка

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0. \quad (3.73)$$

Отметим, что оператор в (3.73) относится к типу Штурма-Лиувилля (2.6).

Задача 3.5.4. Получить представление (3.72) методом Лапласа, смотри раздел 3.7.1.

Уравнение (3.73) может быть получено и иначе. Подставляем в правую часть соотношения (3.69) H_{n-1} , выраженный в соответствии с (3.70) и дифференцируем получившееся соотношение по x . Выражая затем из (3.69) dH_{n+1}/dx , находим уравнение (3.73).

Уравнение (3.73) инвариантно относительно замены $x \rightarrow -x$ и потому имеет четное и нечетное решения. Четное решение уравнения (3.73) может быть разложено в ряд по четным степеням x :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.73) и приравнявая коэффициенты при степенях x , мы находим рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения u в ряд по x . При четных n ряд по x обрывается на $k = n/2$, и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным H_n с четным индексом. При нечетных n мы имеем дело с бесконечным рядом, который сходится при всех (комплексных) x поскольку $a_{k+1} \approx a_k/k$ при больших k . Этот ряд представляет второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при нечетных n . Аналогичным образом исследуется нечетное решение уравнения (3.73), разложение которого в ряд по степеням x пропорционально $H_n(x)$ для нечетных n и дает второе (дополнительное к полиному Эрмита) решение уравнения (3.73) при четных n .

Чтобы получить интегральное представление для полиномов Эрмита, используем соотношение

$$\exp(-\xi^2 + 2\xi x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\pi}} \exp[-t^2 + 2\xi(x + it)].$$

Раскладывая обе части этого соотношения в ряд по ξ , находим

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n \exp(-t^2). \quad (3.74)$$

Разумеется, стоящий здесь комплексный интеграл является действительным, поскольку мнимые члены, возникающие при разложении $(x + it)^n$ в бином Ньютона, содержат нечетные степени t , которые выпадают при интегрировании.

Интегральное представление (3.74) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Эрмита при больших значениях параметра n , используя метод перевала. Представляем подынтегральное выражение в соотношении (3.74) в виде $\exp[n \ln(x + it) - t^2]$. Для больших n можно использовать метод перевала, мы находим две перевальные точки $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$. Деформируя контур интегрирования так, чтобы он проходил через эти перевальные точки и суммируя соответствующие перевальные вклады, находим

$$H_n(x) \approx \sqrt{2} (2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos\left(\sqrt{2n} x - \pi n/2\right), \quad (3.75)$$

справедливое при $n \gg x^2, 1$.

Обращаем внимание на осциллирующий характер выражения (3.75). Осцилляции возникают, когда перевальные точки $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ имеют противоположные действительные части, что и обеспечивает условие $n \gg x^2, 1$. В обратном предельном случае $x^2 \gg n$ обе перевальные точки $t_{\pm} = ix/2 \pm \sqrt{n/2 - x^2/4}$ лежат на мнимой оси. В этом случае контур интегрирования следует деформировать таким образом, чтобы он проходил через ближайшую к действительной оси перевальную точку. (Отметим, что попытка провести контур через вторую перевальную точку некорректна, поскольку эта перевальная точка соответствует минимуму, а не максимуму подынтегрального выражения.) Вычисление перевального значения интеграла приводит к поведению $H_n \propto x^n$, то есть на больших $x \gg \sqrt{n}$ главный вклад в H_n определяется старшим членом полинома, как и следовало ожидать. Отметим, что на интервале $-\sqrt{n} < x < \sqrt{n}$, где работает приближение (3.75), осцилляции дают $\sim n$ нулей функции H_n , в соответствии с общими свойствами H_n .

Уравнение (3.73) для H_n может быть рассмотрено, как уравнение на собственные значения с оператором Штурма-Лиувилля (2.6) с $Q = -2x$, $U = 0$. Отсюда следует условие ортогональности (2.68)

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0. \quad (3.76)$$

где в соответствие с (2.67) $\rho = \exp(-x^2)$, а интегрирование идет вдоль действительной оси.

Найдем теперь нормировочные константы A_n , фигурирующие в выражении (2.69):

$$A_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (3.77)$$

Чтобы получить (3.77), воспользуемся представлением

(3.72):

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (-1)^n H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) \frac{d^n}{dx^n} H_n(x), \end{aligned}$$

где мы n раз проинтегрировали по частям. Вклад в производную n -го порядка от H_n вносит только старший член в H_n , равный, как мы уже установили, $(2x)^n$. Дифференцируя n раз, находим $d^n H_n/dx^n = 2^n n!$. Подставляя эту константу в выписанный интеграл и проинтегрировав по x , мы и приходим к выражению (3.77).

Задача 3.5.5. Доказать соотношение (3.77). Указание: составить комбинацию $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$, выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (3.65) и проинтегрировать получившееся равенство по x с весом $\exp(-x^2)$. На этом пути получаются и соотношения ортогональности (3.76).

Таким образом, любую функцию $f(x)$, заданную на действительных x и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при $x \rightarrow \pm\infty$, можно разложить в ряд по полиномам Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n H_n(x), \quad (3.78)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} H_n(x) f(x). \quad (3.79)$$

Это разложение представляет собой модификацию разложения в ряд Тейлора. Отметим, что условие полноты (2.70) имеет вид

$$\sum_n \frac{\exp(-x^2/2 - y^2/2)}{2^n n! \sqrt{\pi}} H_n(x) H_n(y) = \delta(x - y). \quad (3.80)$$

Задача 3.5.6. Доказать непосредственно условие полноты (3.80).

Задача 3.5.7. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy).$$

Задача 3.5.8. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x - y)^2] H_n(x).$$

Задача 3.5.9. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2) H_{2n-1}(xy).$$

Задача 3.5.10. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2) H_n(xy).$$

Примечание: Ответ выражается через полиномы Лежандра.

Задача 3.5.11. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x).$$

Задача 3.5.12. Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x).$$

Задача 3.5.13. Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}\right) (2x)^n.$$

Указание: просуммировать по n правую часть этого соотношения с весом $t^n/n!$ и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (3.65).

3.6 Вырожденная гипергеометрическая функция

Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0, \quad (3.81)$$

где α и γ – произвольные параметры. Уравнение (3.81) переписывается в виде $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$, то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (2.6). Функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ характеризуется тем, что она аналитична в точке $z = 0$ и имеет единичное значение в нуле: $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$.

Уравнение (3.81) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ в ряд Тейлора около точки $z = 0$. Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (3.81) с учетом условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad (3.82)$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых α ряд (3.82) обрывается и $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. При больших n отношение коэффициентов при степенях z^n и z^{n-1} в разложении (3.82) стремится к $1/n$. Поэтому ряд (3.82) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой $\Phi(\alpha, \gamma, z)$.

При неотрицательных целых α ряд (3.82) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2), \quad (3.83)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2), \quad (3.84)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Второе независимое решение можно найти, заметив, что если u удовлетворяет уравнению (3.81), то $z^{\gamma-1}u$ также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$, $\gamma' = 2 - \gamma$. Таким образом, общим решением уравнения (3.81) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (3.85)$$

где c_1 и c_2 — произвольные константы. При $\gamma = 1$ оба члена в сумме (3.85) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (3.81) является дифференциальным уравнением, в котором переменная z входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 3.7.1. Составляем функции P и Q в соответствии с выражениями (3.96): $P = \gamma t - \alpha$, $Q = t(t-1)$, и далее находим $Z = t^{\alpha-1}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}$. Таким образом, решение уравнения (3.81) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t-1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к $z^{\gamma-1}u$, мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t-1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования $tz \rightarrow t$, мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha}. \quad (3.86)$$

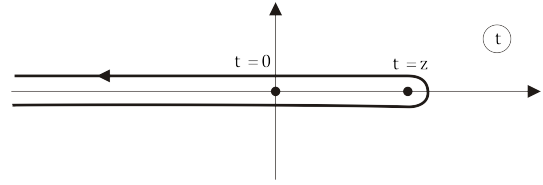


Рис. 3.12: Контур интегрирования в интегральном представлении вырожденной гипергеометрической функции.

Контур C в интеграле (3.86) естественно выбрать так, чтобы он приходил из $-\infty$ и возвращался в $-\infty$ (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при $t = 0$ и $t = z$), тогда произведение $ZQ \exp(t)$ на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (3.86) не имеет особенностей при $z = 0$, если контур интегрирования “охватывает” обе особенности. Выберем контур C , который приходит “снизу” из $-\infty$ огибает особенности “справа” и возвращается в $-\infty$ “сверху”, смотри рисунок 3.12. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией $\Phi(\alpha, \gamma, z)$. Мы считаем, что разрезy функций $t^{\alpha-\gamma}$ и $(t-z)^{-\alpha}$ идут в $-\infty$, а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При $z = 0$ контур интегрирования превращается в C^* , изображенный на рисунке 3.3, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (3.10). Вспоминая теперь, что $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$, находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t-z)^{-\alpha}. \quad (3.87)$$

При целых отрицательных значениях γ ряд (3.82) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у $\Gamma(\gamma)$ в соотношении (3.87). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (3.87) остается конечным и при целых отрицательных значениях γ . Поэтому $\Phi(\alpha, \gamma, z)$, как функция γ , имеет простые полюса при $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Производя в равенстве (3.87) замену $t \rightarrow t + z$, мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (3.88)$$

Дифференцирование по z соотношения (3.87) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (3.89)$$

$$\frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \quad (3.90)$$

$$\alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z). \quad (3.91)$$

При больших положительных z основной вклад в контурный интеграл в (3.87) определяется окрестностью особой точки $t = z$. Делая замену переменных $t = z + \zeta$ и пренебрегая зависимостью от ζ в $t^{\alpha-\gamma}$, мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha},$$

где контур C^* изображен на рисунке 3.3. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}. \quad (3.92)$$

Асимптотическое выражение (3.92) справедливо и в комплексной области для z с большой положительной действительной частью.

Задача 3.6.1. Доказать, что $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$.

Задача 3.6.2. Доказать соотношение (3.89, 3.90, 3.91).

Задача 3.6.3. Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при $\gamma \rightarrow 0$. Выполняется ли при малых γ соотношение $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$?

Задача 3.6.4. Найти значение $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ при целых положительных α и γ , $\alpha \geq \gamma$. Проверить выполнение условия $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$. Указание: в этом случае интеграл (3.87) сводится к вычету в точке $t = z$.

Задача 3.6.5. Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (3.81) при $\gamma = 1$. Указание: в соответствии с (3.85) при произвольном γ второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)],$$

здесь надо перейти к пределу $\gamma \rightarrow 1$.

3.7 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

3.7.1 Метод Лапласа

Метод Лапласа позволяет получать интегральные представления решений обыкновенных дифференциальных

уравнений для функции $Y(x)$, линейных по переменной x :

$$\sum_{m=0}^N (a_m + b_m x) \frac{d^m Y}{dx^m} = 0. \quad (3.93)$$

Это интегральное представление имеет вид

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt), \quad (3.94)$$

где C – некоторый контур в комплексной плоскости t . Подставляя уравнение (3.93) в представление (3.94), используя соотношение $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$ и предполагая, что в интеграле (3.94) можно произвести интегрирование по частям по t без граничных членов, мы находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(QZ) = PZ, \quad (3.95)$$

$$P(t) = \sum_{m=0}^N a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^N b_m t^m. \quad (3.96)$$

Решением уравнения (3.95) является

$$Z = \frac{1}{Q} \exp \left(\int dt P/Q \right), \quad (3.97)$$

где в показателе экспоненты стоит первообразная от P/Q (определенная с точностью до константы). Поскольку P и Q являются полиномами по t , эту первообразную можно выразить через элементарные функции.

Выясним теперь условия, при которых возможно упомянутое выше интегрирование по частям. Для этого произведение $ZQ \exp(xt)$ должно иметь одно и то же значение на концах контура C (который может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Наиболее естественным выбором контура C является контур, который идет вдоль одного из направлений из бесконечности, вдоль которого произведение $ZQ \exp(xt)$ стремится к нулю, и возвращается в бесконечность вдоль другого направления так, чтобы вдоль этого направления произведение $ZQ \exp(xt)$ также стремилось к нулю. Число таких направлений растет с увеличением порядка уравнения N , что и обеспечивает необходимое число независимых решений уравнения (3.93), которые получаются из выражения (3.97) при различных выборах контура интегрирования C .

Задача 3.7.1. Найти методом Лапласа решение уравнения $(d/dx + x)Y = 0$.

3.7.2 Метод перевала и стационарной фазы

Метод перевала применим к интегралам вида

$$g = \int_a^b dx \exp[f(x)], \quad (3.98)$$

где (действительная) функция $f(x)$ достигает на интервале (a, b) абсолютного максимума в некоторой промежуточной точке c . Тогда при больших значениях функции f основной вклад в интеграл (3.98) определяется узкой окрестностью этого максимума. Раскладывая функцию $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = c$, мы находим $f \approx f(c) + (1/2)f''(c)(x - c)^2$. Так как точка $x = c$ соответствует максимуму функции f , то $f''(c) < 0$. Подставляя это разложение в (3.98), мы приходим к Гауссовому интегралу. При больших значениях f'' интегрирование по x в этом интеграле можно распространить от $-\infty$ до $+\infty$. Вычисляя получившийся Гауссов интеграл, находим асимптотическое выражение

$$g \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(c)}} \exp[f(c)], \quad (3.99)$$

которое справедливо при $|f''(c)| \gg 1$.

Отметим, что если функция $f(x)$ достигает абсолютного максимума на одном из краев интервала $(a$ или $b)$, то именно окрестность этой точки определяет основной вклад в интеграл (3.98) при больших положительных f . Этот случай может быть исследован аналогично, в рамках разложения функции $f(x)$ вблизи a или b . Тогда можно ограничиться линейным членом разложения функции $f(x)$ по $x - a$ или $x - b$ (если только этот член разложения не равен нулю), что упрощает анализ.

Метод стационарной фазы работает для интегралов вида $\int dx \exp[ih(x)]$, где $h(x)$ — действительная функция, имеющая в области интегрирования стационарную точку x_0 , то есть $dh/dx(x_0) = 0$, причем $|d^2h/dx^2(x_0)| \gg 1$. В этом случае основной вклад в интеграл определяется окрестностью стационарной точки, так как именно в этой окрестности функция $\exp[ih(x)]$ осциллирует медленнее всего. В окрестности стационарной точки функцию h можно разложить в ряд по $x - x_0$. Удерживая члены до второго порядка, можно написать

$$h \approx \Theta \pm \frac{A}{2}(x - x_0)^2, \quad (3.100)$$

где линейный член отсутствует в силу стационарности фазы в точке x_0 , и $\pm A = d^2h/dx^2(x_0)$. Знак \pm перед A связан с тем, что мы полагаем $A > 0$. Далее

$$\begin{aligned} \int dx \exp[ih(x)] &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i\Theta \pm iA(x - x_0)^2/2] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp(i\Theta \pm i\pi/4). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Беря действительную и мнимую части соотношения (3.101), мы находим

$$\int dx \cos h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \cos(\Theta \pm \pi/4), \quad (3.102)$$

$$\int dx \sin h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sin(\Theta \pm \pi/4). \quad (3.103)$$

Методы перевала и стационарной фазы можно обобщить на случай контурных интегралов в комплексной плоскости. При этом перевальная точка (точка стационарной фазы) не обязана лежать на самом контуре. Сформулируем обобщение метода перевала на этот случай.

Обобщенный метод перевала применим к контурным интегралам типа

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \quad (3.104)$$

при выполнении определенных условий на функцию $S(z)$. Прежде всего мы будем предполагать, что функция $S(z)$ аналитична вблизи пути интегрирования от a к b и, следовательно, контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности $S(z)$. Далее, мы будем предполагать, что в области аналитичности имеется по крайней мере одна точка с нулевой производной $S'(z_0) = 0$ и что контур интегрирования можно деформировать таким образом, чтобы он проходил через z_0 , причем действительная часть $S(z)$ должна достигать в точке z_0 максимума при движении вдоль деформированного контура. Тогда точка z_0 является седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть $S(z)$ достигает в точке z_0 минимума.

Если в седловой точке действительная часть $S(z)$ достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (3.104). Разложим S в ряд Тейлора вблизи седловой точки: $S \approx S_0 + S_0''(z - z_0)^2/2$, где S_0 и S_0'' — значения функции S и ее второй производной в точке $z = z_0$. Если S достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки $z = z_0$, и мы можем ограничиться в интеграле (3.104) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S_0''}} \exp(S_0). \quad (3.105)$$

Подчеркнем, что обе величины, S_0 и S_0'' , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем в (3.105) определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (3.105) является значительное изменение функции $S(z)$ в области применимости приведенного разложения, то есть $|S_0''|$ должна быть достаточно велика.

В области аналитичности функции $S(z)$ может оказаться несколько седловых точек, через которые может проходить деформированный контур. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой $\text{Re} S_0$ максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный

вклад в интеграл (3.104). Возможно также вырождение, когда действительные части S в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (3.104) надо брать сумму выражений (3.105) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

Задача 3.7.2. Найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\alpha x^2 - x^4/2)$ при больших положительных α .

Задача 3.7.3. Найти значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(\alpha x^2/2 - x^3/3)$ при больших положительных α .

Задача 3.7.4. Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^4/4) \cos(\alpha x)$$

при больших положительных α .

3.7.3 Метод WKB

Рассмотрим уравнение (2.5), где в операторе Штурма-Лиувилля (2.6) мы положим $Q = 0$:

$$\frac{d^2}{dx^2} f - Uf = 0. \quad (3.106)$$

Предположим, что величина $p = \sqrt{U}$ меняется достаточно медленно на масштабе p^{-1} , что означает выполнение неравенства $dp/dx \ll p^2$. Тогда можно использовать приближение, которое было получено Вентцелем (Wentzel), Крамерсом (Kramers) и Бриллюэном (Brillouin) и носит название приближения WKB, что является аббревиатурой имен этих авторов.

После подстановки $f = \exp(A)$ уравнение (3.106) переписывается в виде

$$d^2 A/dx^2 + (dA/dx)^2 = U. \quad (3.107)$$

При сделанных предположениях в нулевом приближении членом со второй производной в уравнении (3.107) можно пренебречь и мы находим $A = S$, где $(dS/dx)^2 = U$, то есть $dS/dx = \pm p$. В следующем приближении возникает поправка к A , $A = S + A_1$. Для поправки получаем из (3.107) уравнение $d^2 S/dx^2 + 2(dS/dx)dA_1/dx = 0$. Отсюда находим $A_1 = \text{const} - (1/2) \ln p$, или $\exp(A_1) \propto 1/\sqrt{p}$. Таким образом, мы приходим к выражению

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp(-S), \quad (3.108)$$

$$S(x) = \int^x dy p(y), \quad (3.109)$$

где C_1, C_2 – некоторые константы.

Подставляя выражение (3.108) в исходное уравнение (3.106), можно убедиться, что оно является решением, если пренебречь в нем членами с $(dp/dx)^2$ и $d^2 p/dx^2$. Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства $dp/dx \ll p^2$, а второе в силу неравенства $d^2 p/dx^2 \ll p dp/dx$, которое получается из предыдущего дифференцированием по x .

Фактор U в уравнении (3.106) может быть как положительным, так и отрицательным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKB. В первом случае величина p является действительной, и два слагаемых в выражении (3.108) являются растущей и убывающей по x экспонентами. Во втором случае величина p является чисто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин S . Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях. Тогда мы можем записать

$$f = \frac{C}{|p|^{1/2}} \cos(B + \varphi), \quad (3.110)$$

где $S = iB$, C – действительная константа и φ – некоторая фаза.

Приведенная схема легко обобщается на случай произвольного оператора Штурма-Лиувилля (2.6)

$$\frac{d^2}{dx^2} f + Q \frac{df}{dx} - Uf = 0.$$

В этом случае вместо (3.108, 3.109) находим

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p_1}} \exp(S_1) + \frac{C_2}{\sqrt{p_2}} \exp(S_2), \quad (3.111)$$

$$S_{1,2}(x) = \int^x dy p_{1,2}(y), \quad (3.112)$$

где $p_{1,2}$ являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 + Qp - U = 0,$$

которые могут быть как действительными, так и комплексными.

Глава 4

ДИНАМИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

При отклонении состояния сплошной среды от равновесия могут наблюдаться различные процессы. Среда может релаксировать к равновесию. Примером является диффузионное поведение, которое описывается диффузионным уравнением. В условиях слабой диссипации в сплошных средах наблюдаются волновые процессы. Они характеризуются сложным пространственно-временным распределением полей. При малой амплитуде волн их можно описывать в рамках линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

4.1 Волновое движение в однородной среде

Волновое движение весьма распространено в природе. Оно реализуется тогда, когда диссипация в системе относительно слаба, и потому отклонение ее состояния от равновесия приводит к колебательным движениям. Распространение колебаний в пространстве и представляет собой волновое движение.

4.1.1 Закон дисперсии

В данном разделе мы рассмотрим волновое движение в однородной среде. Волны могут иметь различную физическую природу: это может быть электромагнитная волна, звуковая волна, спиновая волна, поверхностная волна и так далее. Способ описания волн различной природы единообразен: мы должны ввести физические параметры, которые изменяются во времени и пространстве при распространении волны, и сформулировать уравнения, которым они подчиняются. Мы предполагаем, что амплитуда волн достаточно мала для того, чтобы можно было пренебречь их взаимодействием. В этом случае уравнения, которые описывают распространение волн, будут линейными. Это, как правило, дифференциальные уравнения, которые содержат как производные по времени, так и пространственные производные.

Мы начнем с волнового уравнения для поля $u(t, \mathbf{r})$:

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2)u = 0, \quad (4.1)$$

где c – некоторая константа, имеющая смысл скорости распространения волны. Отметим, что волновое уравнение (4.1) содержит дифференциальный оператор второго порядка с разными знаками при вторых производных. Такого рода дифференциальный оператор называют гиперболическим. Гиперболические операторы встречаются обычно именно в контексте волновых процессов.

Уравнение (4.1) встречается в самых разных физических контекстах. В качестве примера можно привести распространение электромагнитных волн в вакууме, которые описываются уравнениями Максвелла

$$\partial_t \mathbf{E} = c \nabla \times \mathbf{B}, \quad (4.2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E}. \quad (4.3)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} – напряженности электрического и магнитного полей, а c – скорость света. Уравнения (4.2,4.3) должны быть дополнены условиями $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 = \nabla \cdot \mathbf{B}$. Продифференцировав уравнение (4.2) по времени, подставив производную по времени от \mathbf{B} из уравнения (4.3) и воспользовавшись условием $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, мы получаем уравнение $(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2) \mathbf{E}$, то есть волновое уравнение.

Волновое уравнение (4.1) описывает также звуковые волны в жидкостях и кристаллах. В этом случае полем u является смещение среды от равновесного положения, а c – скорость распространения звуковых волн. В жидкостях имеется один тип звуковых волн, связанных с колебаниями плотности жидкости. В кристаллах же имеется три типа звуковых волн с различной поляризацией, которые имеют различные скорости. Например, в изотропных кристаллах существуют распространяющиеся с различной скоростью продольные и поперечные звуковые волны: в продольных волнах среда смещается в направлении распространения волны, а в поперечных – перпендикулярно направлению распространения волн.

Задача 4.1.1. Как записывается решение волнового уравнения (4.1) в одномерном случае?

Рассмотрим спиновые волны в ферромагнетиках, которые описываются уравнением Ландау-Лифшица

$$\partial_t \mathbf{M} = \gamma \mathbf{H}_{eff} \times \mathbf{M}, \quad (4.4)$$

где \mathbf{M} – намагниченность материала, γ – константа, зависящая от магнитных свойств материала, а \mathbf{H}_{eff} – эффективное магнитное поле, которое состоит из двух частей: внешнего магнитного поля и индуцированного вклада. Уравнение Ландау-Лифшица (4.4) является нелинейным. Оно сводится к линейному, если рассматриваются слабые отклонения намагниченности от равновесного. Будем считать, что в равновесии внешнее магнитное поле и намагниченность направлены вдоль оси Z . Тогда отклонения намагниченности от равновесия описываются компонентами $M_\alpha = (M_x, M_y)$. Линеаризуя уравнение Ландау-Лифшица (4.4) по M_α , находим линейное уравнение

$$\partial_t M_\alpha = \epsilon_{\alpha\beta} (\Omega - b \nabla^2) M_\beta. \quad (4.5)$$

Здесь Ω – Ларморовская частота, а b – константа, зависящая от свойств ферромагнетика. Член с Лапласианом в (4.5) происходит из вклада в \mathbf{H}_{eff} , связанного с неоднородностью намагниченности и пропорционального $\nabla^2 \mathbf{M}$. Вычисляя производную по времени от выражения для $\partial_t M_x$ и подставляя в него выражение для $\partial_t M_y$, мы находим замкнутое уравнение

$$\partial_t^2 M_x = -(\Omega - b\nabla^2)^2 M_x. \quad (4.6)$$

Здесь уже фигурирует пространственная производная четвертого порядка.

Раскладывая поле u в пространственный интеграл Фурье

$$u = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \tilde{u}(t, \mathbf{q}) \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}), \quad (4.7)$$

мы находим из волнового уравнения (4.1)

$$\partial_t^2 \tilde{u}(\mathbf{q}) = -c^2 q^2 \tilde{u}(\mathbf{q}). \quad (4.8)$$

Мы уже анализировали подобное уравнение, смотри раздел 1.1.2. Воспользовавшись приведенным там результатом, мы запишем решение задачи Коши для уравнения (4.8) в виде $\tilde{u}(\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{q}) \exp(-icqt) + w_2(\mathbf{q}) \exp(icqt)$. Здесь функции $w_1(\mathbf{q})$, $w_2(\mathbf{q})$ определяются начальными условиями по времени. Мы заключаем, что Фурье-компонента поля u , подчиняющегося волновому уравнению, имеет частоты $\omega = \pm cq$, которые определяются волновым вектором \mathbf{q} .

Приведенный пример демонстрирует общее свойство волнового движения в однородной среде: Фурье-компонента волнового поля с волновым вектором \mathbf{q} имеет зависящие от волнового вектора частоты, которые мы будем записывать в виде $\omega = \pm \varpi(\mathbf{q})$, $\varpi > 0$. Функция $\varpi(\mathbf{q})$ называется законом дисперсии волны. Отношение $\varpi(\mathbf{q})/q$ называется фазовой скоростью волны, производная же $\partial\varpi/\partial q$ называется ее групповой скоростью.

Для уравнений (4.1) и (4.6) законы дисперсии имеют вид $\varpi = cq$, $\varpi = \Omega + bq^2$. Встречаются и более сложные случаи. Например, для волн, распространяющихся на поверхности жидкости, закон дисперсии имеет вид

$$\varpi = \sqrt{gq + (\sigma/\rho)q^3}. \quad (4.9)$$

Здесь g – ускорение свободного падения, σ – коэффициент поверхностного натяжения, и ρ – плотность жидкости. Столь сложный закон дисперсии связан с тем, что при распространении поверхностной волны в игре участвуют как гравитация, так и капиллярные силы, а в волновое движение вовлекается приповерхностный слой жидкости, толщина которого зависит от q . В предельном случае гравитационных волн (малые q) выражение (4.9) дает $\varpi = \sqrt{gq}$, а в предельном случае капиллярных волн (большие q) выражение (4.9) дает $\varpi = (\sigma/\rho)^{1/2} q^{3/2}$.

Задача 4.1.2. Найти выражение для групповой скорости поверхностных волн с законом дисперсии (4.9).

Временная зависимость Фурье-компоненты поля u с законом дисперсии ϖ может быть записана в виде

$$\tilde{u}(\mathbf{q}) = w_1(\mathbf{q}) \exp(-i\varpi t) + w_2(\mathbf{q}) \exp(i\varpi t). \quad (4.10)$$

Здесь функции $w_1(\mathbf{q})$, $w_2(\mathbf{q})$ определяются начальными условиями по времени, которые формулируются в терминах поля u и его первой производной по времени.

Задача 4.1.3. Найти решение волнового уравнения (4.1) в случае, когда при $t = 0$ поле $u = \exp(-r^2)$, а его производная по времени равна нулю.

Задача 4.1.4. Найти решение уравнения (4.6) в случае, когда при $t = 0$ поле $M_x = \exp(-r^2)$, а его производная по времени равна нулю.

Задача 4.1.5. Найти зависимость от времени смещения поверхности воды u , если в начальный момент времени (при $t = 0$) $u = \text{Re}(1 + ix)^{-1/2}$, $\partial_t u = 0$ и движение поверхности можно описывать в рамках гравитационных волн.

4.1.2 Излучение

До сих пор мы изучали свободное волновое движение. Добавим теперь источник, который производит волновое движение. В общем виде уравнение на волновое поле u может быть записано в виде

$$[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)]u = \chi. \quad (4.11)$$

Здесь мы учли, что $-i\nabla \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) = \mathbf{q} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r})$. Введем функцию Грина уравнения (4.11), которая удовлетворяет уравнению

$$[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)]G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

Тогда вынужденное решение уравнения (4.11) записывается в виде

$$u(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3 r_1 G(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \chi(t_1, \mathbf{r}_1). \quad (4.13)$$

Полное решение уравнения (4.11) состоит из вынужденного решения (4.13) и решения свободного уравнения $[\partial_t^2 + \varpi^2(-i\nabla)]u = 0$.

Чтобы найти функцию Грина G , произведем Фурье-преобразование уравнения (4.12). В результате находим уравнение $[\partial_t^2 + \varpi^2(\mathbf{q})]\tilde{G} = \delta(t)$, с которым мы уже сталкивались, смотри раздел 1.1.2. Воспользовавшись выражением (1.11), находим

$$\tilde{G}(t) = \theta(t) \frac{1}{\varpi} \sin(\varpi t). \quad (4.14)$$

Чтобы найти функцию Грина в реальном пространстве, необходимо сделать обратное Фурье-преобразование:

$$G(t, \mathbf{r}) = \theta(t) \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}). \quad (4.15)$$

Если ϖ зависит только от абсолютного значения волнового вектора, то в выражении (4.15) можно произвести интегрирование по углу между \mathbf{q} и \mathbf{r} , что ведет к

$$G(t, r) = \theta(t) \int_0^\infty \frac{dq q}{2\pi^2 r} \frac{\sin(\varpi t)}{\varpi} \sin(qr). \quad (4.16)$$

Конкретный вид функции G зависит от закона дисперсии.

Вычислим функцию Грина для волнового уравнения

$$(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2)u = \chi. \quad (4.17)$$

В этом случае $\varpi = cq$, и интегрирование в выражении (4.16) может быть произведено явно. В результате мы находим

$$G(t, r) = \frac{\theta(t)}{4\pi cr} \delta(r - ct). \quad (4.18)$$

Подставляя выражение (4.18) в соотношение (4.13), находим

$$u(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi c^2} \int \frac{d^3 r_1}{R} \chi(t - R/c, \mathbf{r}_1), \quad (4.19)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|$. Таким образом, воздействие источника на поле u осуществляется с запаздыванием на время R/c , которое равно времени распространения волны от источника до точки наблюдения.

Задача 4.1.6. Найти решение волнового уравнения (4.17) для точечного гармонического источника $\chi = \cos(\omega t) \delta(\mathbf{r})$.

Задача 4.1.7. Найти значение функции Грина при $r = 0$ для уравнения $(\partial_t^2 + \nabla^4)u = \chi$.

4.1.3 Уравнение на огибающую

Рассмотрим теперь случай волнового поля u , когда $\tilde{u}(\mathbf{q})$ локализовано около волнового вектора \mathbf{q}_0 (или около волновых векторов $\pm \mathbf{q}_0$, что неизбежно для действительного поля). В этом случае в t, \mathbf{r} -представлении

$$u = \Psi(t, \mathbf{r}) \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{q}_0 \mathbf{r}), \quad (4.20)$$

где $\omega_0 = \varpi(q_0)$ и (комплексная) амплитуда Ψ меняется на временах много больше ω_0^{-1} и на масштабах много больше q_0^{-1} . Другими словами, характерный волновой вектор \mathbf{k} огибающей много меньше q_0 . Если поле u является действительным, то в качестве u следует брать действительную часть правой части (4.20). Функцию Ψ в (4.20) обычно называют огибающей (envelop).

В Фурье-представлении $\partial_t \tilde{u} = -i\varpi \tilde{u}$. Отсюда следует уравнение

$$\partial_t \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = -i[\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}) - \omega_0] \tilde{\Psi}(\mathbf{k}),$$

для Фурье-компоненты огибающей. Таким образом

$$\partial_t \Psi = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) [\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k}) - \omega_0] \exp(i\mathbf{k} \mathbf{r}).$$

В этом соотношении в $\varpi(\mathbf{q}_0 + \mathbf{k})$ волновой вектор \mathbf{k} можно заменить на $-i\nabla$, поскольку $-i\nabla \exp(i\mathbf{k} \mathbf{r}) = \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \mathbf{r})$. В результате находим уравнение для огибающей

$$\partial_t \Psi = -i[\varpi(\mathbf{q}_0 - i\nabla) - \omega_0] \Psi, \quad (4.21)$$

где мы учли, что $\omega_0 = \varpi(\mathbf{q}_0)$. Отметим, что вид найденного уравнения не зависит от размерности пространства, в котором изучается волновое движение.

Поскольку характерный волновой вектор \mathbf{k} огибающей много меньше q_0 , разность $\varpi(\mathbf{q}_0 - i\nabla) - \varpi(\mathbf{q}_0)$ в (4.21) можно разложить в ряд Тейлора по ∇ . В первом порядке находим

$$(\partial_t + \mathbf{V} \nabla) \Psi = 0, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}_0). \quad (4.22)$$

Стоящая здесь величина \mathbf{V} является, очевидно, групповой скоростью волнового движения.

Уравнение (4.22) содержит производные не выше первого порядка и, следовательно, может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. В данном случае скорость \mathbf{V} является константой, и решение (4.22) легко выписывается явно

$$\Psi = \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{V}t), \quad (4.23)$$

где Φ – произвольная функция координат. Другими словами, Ψ не меняется в системе отсчета, которая движется относительно лабораторной с групповой скоростью.

Пусть в уравнении на исходную переменную u присутствует источник с частотами вблизи ω_0 и волновыми векторами вблизи \mathbf{q}_0 , который можно записать в виде $\phi \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{q}_0 \mathbf{r})$, где ϕ – медленная функция времени и координат. Тогда мы получаем вместо (4.22)

$$(\partial_t + \mathbf{V} \nabla) \Psi = \phi. \quad (4.24)$$

Это уравнение легко решается методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. В результате находим

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = b(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) + \int^t d\tau \phi(\tau, \mathbf{r} + \mathbf{V}\tau - \mathbf{V}t). \quad (4.25)$$

Задача 4.1.8. Найти решение уравнения (4.24) в одномерном случае для нулевых начальных условий и $\phi = A \cosh^{-2}(x)$.

Чтобы описать эволюцию волнового пакета в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью, уравнение (4.22) следует уточнить. Для этого разность в уравнении (4.21) следует разложить до второго порядка по ∇ , что дает

$$-i \frac{d}{dt} \Psi = \left[\frac{V}{2q_0} \nabla_\perp^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial q_0} \partial_x^2 \right] \Psi, \quad (4.26)$$

где ось X направлена вдоль \mathbf{q}_0 , а ∇_\perp действует в перпендикулярной к оси X плоскости. В уравнении (4.26)

$d/dt = \partial_t + V\partial_x$, это производная по времени в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью V . Если обе величины, V и $\partial v/\partial q_0$, положительны, то уравнение (4.26) перемасштабированием переменных может быть сведено к свободному уравнению Шрёдингера $-i\partial_t\Psi = \nabla^2\Psi$. Если же V и $\partial v/\partial q_0$ имеют разные знаки, то мы получаем в правой части (4.26) гиперболический дифференциальный оператор. Например, это имеет место для гравитационных волн с законом дисперсии $\varpi = \sqrt{gq}$.

4.1.4 Уравнение Гельмгольца

Рассмотрим распространяющуюся в пространстве монохроматическую волну, которая имеет определенную частоту ω . Разрешая закон дисперсии $\omega = \pm\varpi(q)$ относительно q , мы находим выражение q^2 через частоту. Например, для волнового уравнения (4.1) $q^2 = \omega^2/c^2$. В других случаях выражение для q^2 может оказаться более сложным. Но в любом случае q^2 в монохроматической волне является (зависящей от частоты) константой, которую мы обозначим κ^2 . В Фурье-представлении уравнение для амплитуды волны имеет вид $(-q^2 + \kappa^2)\tilde{f} = 0$. Таким образом, в разложении Фурье монохроматической волны присутствуют только гармоники с волновыми векторами $|\mathbf{q}| = \kappa$.

В реальном пространстве амплитуда монохроматической волны подчиняется уравнению

$$(\nabla^2 + \kappa^2)f = 0, \quad \text{Helmholtz}, \quad (4.27)$$

которое называется уравнением Гельмгольца. Поскольку в разложении Фурье монохроматической волны присутствуют только гармоники с волновыми векторами $|\mathbf{q}| = \kappa$, общее решение уравнения Гельмгольца (4.27) можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \delta(q^2 - \kappa^2) w(\mathbf{q}). \quad (4.28)$$

Если поле f является действительным, то $w(\mathbf{q}) = w^*(-\mathbf{q})$.

Задача 4.1.9. Найти изотропное решение уравнения Гельмгольца (4.27).

Как правило, уравнение Гельмгольца (4.27) приходится решать в ограниченной области с определенными граничными условиями. Рассмотрим в качестве примера электромагнитное поле в волноводе постоянного сечения. В этом случае можно ввести координату вдоль этого волновода и сделать Фурье-преобразование по этой координате. В силу однородности задачи уравнения для различных Фурье-гармоник оказываются независимыми. Таким образом удастся эффективно понизить размерность пространства, в котором решается задача.

Задача 4.1.10. Найти набор распространяющихся вдоль волновода квадратного сечения $l \times l$ мод, которые являются решениями уравнения Гельмгольца (4.27) с нулевыми граничными условиями на стенках волновода.

Рассмотрим задачу о возбуждении волн внешним источником. Для описания этого процесса в уравнение Гельмгольца (4.27) необходимо добавить правую часть:

$$(\nabla^2 + \kappa^2)f = \phi(\mathbf{r}), \quad (4.29)$$

которая представляет источник волн. Для разных случаев физический смысл источника ϕ различен. Например, для электромагнитных волн источником является движение зарядов. Поскольку уравнение Гельмгольца (4.27) справедливо для монохроматической волны, источник ϕ также должен быть монохроматическим, то есть представлять собой Фурье-компоненту по времени с частотой ω .

Как и раньше, мы будем решать уравнение (4.29) при помощи функции Грина G , которая удовлетворяет уравнению

$$(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}). \quad (4.30)$$

Если функции Грина G известна, то решение уравнения (4.29) можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}) = f_0 + \int d^3r_1 G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\phi(\mathbf{r}_1), \quad (4.31)$$

где f_0 – решение однородного уравнения Гельмгольца (4.27).

Вне начала координат $(\nabla^2 + \kappa^2)G(\mathbf{r}) = 0$. Введя $G = \chi/r$, находим в трехмерном случае $(\partial_r^2 + \kappa^2)\chi = 0$. Решение этого уравнения является произвольная комбинация $\cos(\kappa r)$ и $\sin(\kappa r)$. При малых r членом с κ в уравнении Гельмгольца можно пренебречь. Поэтому при малых r мы должны получить (2.41). Этому удовлетворяет, например, функция $G = -\cos(\kappa r)/(4\pi r)$, которая является решением уравнения (4.30). Однако мы можем добавить к χ и синус с произвольным множителем. Другими словами, функция Грина уравнения Гельмгольца определена с точностью до решения однородного уравнения, которым и является $r^{-1}\sin(\kappa r)$ с произвольным коэффициентом. В этом отличие задачи от случаев уравнений Лапласа и Дебая, когда функция Грина определялась однозначно.

Чтобы разрешить эту неоднозначность, необходимо привлечь дополнительные соображения. Введем в уравнение для волнового поля малое затухание (которое всегда присутствует в реальных системах). Это означает, что модифицируется левая часть уравнения (4.11):

$$[(\partial_t + \gamma)^2 + \varpi^2(-i\nabla)]u = \chi,$$

где γ – затухание. Для монохроматической волны $\partial_t \rightarrow -i\omega$. Выражая теперь ∇^2 , находим вместо (4.29)

$$(\nabla^2 + \kappa^2 + 2i\epsilon\kappa\text{sign}\omega)f = \phi(\mathbf{r}),$$

где $\epsilon > 0$ – малая величина. Требуя, чтобы функция Грина стремилась к нулю при $r \rightarrow \infty$, получаем $G \propto \exp[i(\kappa + i\epsilon)r]$ при $\omega > 0$ и $G \propto \exp[-i(\kappa - i\epsilon)r]$ при $\omega < 0$. Переходя к пределу $\epsilon \rightarrow 0$, находим окончательно

$$G = -\frac{\exp(i\kappa r)}{4\pi r}, \quad \omega > 0, \\ G = -\frac{\exp(-i\kappa r)}{4\pi r}, \quad \omega < 0. \quad (4.32)$$

Задача 4.1.11. Найти вынужденное решение уравнения (4.29) для излучателя-диполя $\phi = \partial_z \delta(\mathbf{r})$.

4.2 Динамические полевые задачи

Динамика поля даже в однородной среде не всегда носит волновой характер. Важным примером такого рода является диффузионное поведение, которое описывается уравнением диффузии. Как было показано выше, смотри раздел 4.1.3, огибающая волнового поля описывается уравнением Шрёдингера для свободной частицы. Оно может быть проанализировано в рамках той же схемы, что и уравнение диффузии. Оба уравнения можно анализировать для пространства произвольной размерности d , конкретный выбор размерности зависит от рассматриваемой физической задачи.

4.2.1 Уравнение диффузии

В различных физических приложениях встречается уравнение диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u. \quad (4.33)$$

Это уравнение описывает, например, эволюцию плотности числа частиц или пространственных вариаций температуры. Но оно же описывает статистические свойства случайных блужданий (Броуновского движения).

Изучим свойства решения уравнения (4.33). В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается $t = 0$.

Произведём Фурье-преобразование:

$$\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \int d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{y}) u(t, \mathbf{y}). \quad (4.34)$$

Тогда уравнение (4.33) приводит к уравнению $\partial \tilde{u} / \partial t = -q^2 \tilde{u}$ для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение $\tilde{u}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{u}(0, \mathbf{q})$. Подставляя это выражение в интеграл Фурье

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{u}(t, \mathbf{q}), \quad (4.35)$$

обратный к соотношению (4.34), и беря интегралы по \mathbf{q} , мы находим

$$u(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] u(0, \mathbf{y}). \quad (4.36)$$

Соотношение (4.36) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Задача 4.2.1. Найти аналог представления (4.36) для одномерного поля $u(t, x)$, динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением $\partial \tilde{u} / \partial t = -|q| \tilde{u}$.

Если начальное поле $u(0, \mathbf{x})$ локализовано вблизи начала координат, то есть если $u(0, \mathbf{x})$ достаточно быстро спадает при росте $|\mathbf{x}|$, то решение $u(t, \mathbf{x})$ обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена $t \gg l^2$, где l – длина, на которой локализовано поле $u(0, \mathbf{x})$. Это означает, что интеграл (4.36) набирается в области $|\mathbf{y}| \lesssim l$. При этом условии можно пренебречь \mathbf{y} в экспоненте в (4.36). В результате мы заключаем, что при $t \gg l^2$

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.37)$$

$$A = \int d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_d u(0, \mathbf{y}). \quad (4.38)$$

Отметим, что приближение (4.37) соответствует подстановке $u(0, \mathbf{y}) \rightarrow A \delta(\mathbf{y})$. Если для локализованного вблизи начала координат поля $u(0, \mathbf{x})$ интеграл A (4.38) равен нулю, то асимптотика $u(t, \mathbf{x})$ на больших временах будет уже иной. Раскладывая экспоненту в (4.36) по \mathbf{y} , мы находим следующий ведущий член разложения при $A = 0$:

$$u(t, \mathbf{x}) \approx \frac{B\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.39)$$

$$B = 2\pi \int d\mathbf{y}_1 \dots d\mathbf{y}_d \mathbf{y} u(0, \mathbf{y}). \quad (4.40)$$

Выражения (4.37, 4.39) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Задача 4.2.2. Найти решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия: $u(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$. Сравните ответ с асимптотическим поведением (4.37).

Задача 4.2.3. Найти асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий: 1) $u(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$; 2) $u(0, x) = \exp(-|x|/l)$; 3) $u(0, x) = x \exp(-|x|/l)$; 4) $u(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$; 5) $u(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$.

Задача 4.2.4. Найдти асимптотическое поведение на больших временах для одномерного поля $u(t, x)$, динамика которого в Фурье-представлении задается уравнением $\partial \tilde{u} / \partial t = -|q| \tilde{u}$.

Рассмотрим уравнение диффузии с правой частью,

$$(\partial_t - \nabla^2)u = \phi, \quad (4.41)$$

где ϕ имеет смысл источника частиц, плотность которых u в дальнейшем эволюционирует в соответствии с уравнением диффузии. Эта задача решается с помощью функции Грина G :

$$u(\tau, \mathbf{x}) = \int dt d^d y G(\tau - t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) \phi(t, \mathbf{y}). \quad (4.42)$$

Учитывая однородность задачи по времени и пространству, мы сразу подставили функцию Грина, которая зависит только от разностей времен и координат. Функция Грина удовлетворяет уравнению:

$$(\partial_t - \nabla^2)G(t, \mathbf{r}) = \delta(t)\delta(\mathbf{r}), \quad (4.43)$$

Мы уже фактически нашли решение этого уравнения, так как при $t > 0$ оно описывает свободную эволюцию, которое соответствует начальному условию $G(+0, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$. Подставляя это начальное условие в (4.36), находим

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right). \quad (4.44)$$

Задача 4.2.5. Найдти решение уравнения (4.41) для $\phi = \theta(t) \exp[-x^2/(2l^2)]$ в четырехмерном случае.

Заметим, что соотношение (4.36) может быть переписано в виде

$$u(t, \mathbf{x}) = \int d^d y G(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) u(0, \mathbf{y}). \quad (4.45)$$

Справедливо также

$$u(t + \tau, \mathbf{z}) = \int d^d x G(\tau, \mathbf{z} - \mathbf{x}) u(t, \mathbf{x}).$$

Сравнивая это с прямым применением (4.45) к $u(t + \tau, \mathbf{z})$, находим

$$G(t + \tau, \mathbf{z} - \mathbf{y}) = \int d^d x G(t, \mathbf{z} - \mathbf{x}) G(\tau, \mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Это соотношение построено только на (4.45) и справедливо для любых функций Грина уравнений с первой производной по времени.

До сих пор мы рассматривали решение уравнения диффузии в неограниченном пространстве. Вообще говоря, можно решать его в ограниченной области пространства. В этом случае уравнение должно быть дополнено условиями на границе этой области. В качестве

иллюстрации рассмотрим полупространство $x_1 > 0$. Если поле $u = 0$ при $x_1 = 0$, то задача решается при помощи функции Грина

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{z}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t}\right] - \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(x_1 + z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + \dots}{4t}\right]. \quad (4.46)$$

Очевидно, что в полупространстве $x_1 > 0$ выражение (4.46) удовлетворяет уравнению (4.43), а также обращается в ноль при $x_1 = 0$. Отметим, что при решении задачи с граничным условием, которое заключается в равенстве при $x_1 = 0$ производной от u в направлении, перпендикулярном плоскости $x_1 = 0$, следует использовать функцию Грина, которая отличается от (4.46) знаком при втором члене.

Задача 4.2.6. Как будет вести себя изначально локализованное вблизи стенки $x_1 = 0$ решение уравнения диффузии на больших временах, если на стенке $u = 0$?

В уравнение диффузии можно ввести затухание γ :

$$(\partial_t + \gamma - \nabla^2)u = \phi, \quad (4.47)$$

Например, такое уравнение описывает эволюцию плотности диффундирующих частиц, часть которых поглощается или выбывает за счет химических реакций. Вообще говоря, γ является функцией координат. Рассмотренный нами случай, когда u обращается в ноль на границе некоторой области, соответствует сильному поглощению в этой области. Отметим, что для однородного в пространстве затухания γ переход к функции v , где $u = \exp(-\gamma t)v$, приводит к чисто диффузионному уравнению $(\partial_t - \nabla^2)v = 0$ на эту функцию, что сводит эту задачу к предыдущей. Следует только помнить, что источник ϕ для функции v превращается в $\phi \exp(\gamma t)$. Поэтому решение уравнения (4.47) записывается в виде

$$u(t, \mathbf{r}) = \int d\tau d^d x G(t - \tau, \mathbf{r} - \mathbf{x}) e^{-\gamma(t-\tau)} \phi(\tau, \mathbf{x}), \quad (4.48)$$

где G — функция Грина диффузионного уравнения (4.44).

Задача 4.2.7. Найдти $u(t, 0)$ для решения уравнения (4.47) при $d = 3$ с однородным γ в случае, когда $\phi = 1/r$.

Задача 4.2.8. Найдти решение одномерного уравнения $\partial_t u = (\partial_x^2 - x^2)u$ с начальным условием $u = 1$.

4.2.2 Уравнение Стокса

Здесь мы рассматриваем уравнения, которые описывают линейную динамику жидкости. Это возможно при

малых значениях скорости течения \mathbf{v} , когда нелинейными эффектами можно пренебречь. Мы также считаем, что мало число Маха, то есть отношение характерной скорости жидкости к скорости звука. В этом случае жидкость можно считать несжимаемой, то есть плотность массы жидкости ρ можно считать однородной (не зависящей от координат), а скорость жидкости \mathbf{v} удовлетворяет условию $\nabla \mathbf{v} = 0$.

При этих условиях течение жидкости описывается уравнением Стокса (Stokes)

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (4.49)$$

которое является уже линейным. В уравнении (4.49) p – давление, а ν – коэффициент кинематической вязкости. В уравнении (4.49) фигурирует также плотность силы (на единицу массы) \mathbf{f} , приложенная к жидкости. Уравнение Стокса близко к уравнению диффузии и имеет похожее поведение своих решений.

Давление p не является динамической переменной, оно призвано обеспечить решение с нужными граничными условиями, поскольку на поле скорости наложено условие бездивергентности $\nabla \mathbf{v} = 0$. Беря дивергенцию от уравнения Стокса (4.49), находим, что давление удовлетворяет уравнению $\nabla^2 p = 0$, то есть является гармонической функцией. Если дивергенция силы \mathbf{f} не равна нулю, то $\nabla^2 p = \nabla \mathbf{f}$.

Найдем функцию Грина уравнения Стокса. В данном случае функция Грина является матрицей, которая определяет течение, которое вызывается внешней силой \mathbf{f} :

$$v_i(t, \mathbf{r}) = \int dt_1 d^3 r_1 G_{ik}(t - t_1, \mathbf{r} - \mathbf{r}_1) f_k(t_1, \mathbf{r}_1).$$

Функция Грина уравнения Стокса определяется уравнением

$$(\partial_t - \nu \nabla^2) G_{ik}(t, \mathbf{r}) = \delta(t) (\delta_{ik} - \partial_i \partial_k \nabla^{-2}) \delta(\mathbf{r}), \quad (4.50)$$

где второе слагаемое в правой части определяется давлением. Форма оператора в правой части гарантирует условие бездивергентности $\partial_i G_{ik} = 0$. В Фурье-представлении (4.50) дает

$$(\partial_t + \nu q^2) \tilde{G}_{ik} = \delta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{G}_{ik} = \theta(t) (\delta_{ik} - q_i q_k / q^2) \exp(-\nu q^2 t). \quad (4.51)$$

Делая обратное Фурье-преобразование, находим из уравнения (4.51)

$$G_{ik} = \frac{\theta(t) \delta_{ik}}{8(\pi \nu t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \theta(t) \partial_i \partial_k \int_0^\infty \frac{dq}{2\pi^2 q r} \exp(-\nu q^2 t) \sin(qr). \quad (4.52)$$

В первом слагаемом мы произвели стандартное интегрирование по всем компонентам \mathbf{q} , а во втором мы

перешли к сферическим координатам и выполнили интегрирование по углам (полярному и азимутальному). Дальнейшее интегрирование приводит к результату

$$G_{ik} = \frac{\theta(t)}{4\pi} \left(\frac{3r_i r_k}{r^5} - \frac{\delta_{ik}}{r^3} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{r}{\sqrt{4\nu t}}\right) + \frac{\theta(t)}{2\pi^{3/2} \sqrt{4\nu t}} \left(\frac{\delta_{ik}}{r^2} - \frac{3r_i r_k}{r^4} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right) + \frac{\theta(t)}{(4\nu \pi t)^{3/2}} \left(\delta_{ik} - \frac{r_i r_k}{r^2} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right). \quad (4.53)$$

Здесь erf – функция ошибок (error function)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dt \exp(-t^2).$$

Задача 4.2.9. Получить выражение (4.53) из (4.52).

4.3 Уравнение Шрёдингера

В квантовой механике состояние частицы определяется ее волновой функцией ψ , которая является комплексным полем, зависящим от времени и координат. Уравнение, которому подчиняется волновая функция квантовой частицы во внешнем поле с внешним потенциалом U , имеет вид

$$i\partial_t \psi = -\nabla^2 \psi + U\psi. \quad (4.54)$$

Вообще говоря, потенциал U может быть произвольной функцией времени и координат. В дальнейшем мы считаем, что потенциал U не зависит от времени и стремится к нулю при стремлении координат к бесконечности.

Уравнение (4.54) ведет к закону сохранения величины $\int d\mathbf{r} |\psi|^2$, которая имеет смысл полной вероятности найти частицу в какой-либо точке пространства, и потому должна быть равна единице. Помимо этого, для статического потенциала U уравнение (4.54) гарантирует закон сохранения энергии, которая записывается в виде интеграла

$$\int d\mathbf{r} (\nabla \psi^* \nabla \psi + U \psi^* \psi). \quad (4.55)$$

Импульс же системы, вообще говоря, не сохраняется, поскольку наличие зависящего от координат потенциала нарушает пространственную однородность системы.

Пусть $\chi(\mathbf{r})$ – собственная функция оператора $-\nabla^2 + U$ с собственным значением ϵ . Если в начальный момент времени $\psi = \chi$, то в соответствии с уравнением (4.54) ее эволюция со временем определяется фактором $\exp(-i\epsilon t)$. Другими словами,

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \exp(-i\epsilon t) \chi(\mathbf{r}), \quad (4.56)$$

является решением уравнения (4.54). Это замечание дает принципиальную возможность найти временную зависимость $\psi(t, \mathbf{r})$ для произвольного начального значения $\psi(0, \mathbf{r})$.

Как мы уже выяснили в разделе 2.3, любая функция может быть разложена по собственным функциям оператора $-\nabla^2 + U$. Эти функции распадаются на функции непрерывного спектра $\psi_{\mathbf{k}}$, которые на больших расстояниях равны $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, и функции дискретного спектра ψ_j . Разложим $\psi(0, \mathbf{r})$ по этим функциям:

$$\psi(0, \mathbf{r}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} + \sum_j b_j \psi_j. \quad (4.57)$$

Тогда в соответствии с (4.56) в произвольный момент времени

$$\psi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} a(\mathbf{k}) \psi_{\mathbf{k}} e^{-ik^2 t} + \sum_j b_j \psi_j e^{-i\epsilon_j t}. \quad (4.58)$$

Если вначале функция ψ была локализована в той же области, что и потенциал U , то ее часть, связанная со связанными состояниями ψ_j , останется локализованной в этой области, а ее часть, связанная с функциями непрерывного спектра $\psi_{\mathbf{k}}$, будет постепенно расплываться со временем.

Коэффициенты $a(\mathbf{k})$, b_j разложения (4.57) можно найти в соответствии с выражениями

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}) &= \int d^3r \psi_{-\mathbf{k}} \psi(0, \mathbf{r}), \\ b_j &= \int d^3r \psi_j \psi(0, \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Здесь предполагается, что взяты действительные функции дискретного спектра, нормированные на единицу: $\int d^3r \psi_j^2 = 1$.

Задача 4.3.1. Начальное состояние квантовой частицы дается нормированной на единицу функцией $\psi(0, \mathbf{r}) = [\kappa/(2\pi)]^{1/2} r^{-1} \exp(-\kappa r)$. Найти коэффициент b в разложении (4.57) по собственным функциям оператора Шрёдингера с притягивающим Кулоновским потенциалом.

4.3.1 Уравнение Шрёдингера для свободной частицы

Если внешний потенциал U равен нулю, то мы получаем из (4.54) уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$-i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla^2 \psi, \quad (4.60)$$

которое похоже на уравнение диффузии (4.33). Как мы показали в разделе 4.1.3, огибающая волнового поля описывается тем же уравнением (4.60) (с учетом перемасштабировки координат). Таким образом, уравнение (4.60) носит универсальный характер.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.60). Как и в случае с уравнением диффузии, для ее решения эффективно использовать преобразование Фурье, поскольку в Фурье-представлении эволюционная задача решается явно. Переходя затем обратно к пространственному

представлению, находим выражение

$$\psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(0, \mathbf{y}), \quad (4.61)$$

аналогичное (4.36).

Задача 4.3.2. Найти аналог представления (4.61) для уравнения $-i\partial_t \psi = (\partial_x^2 - \partial_y^2) \psi$.

Однако имеется и существенное различие между выражениями (4.36) и (4.61). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить $u(0, \mathbf{x})$ по $u(t, \mathbf{x})$, выражение (4.61) допускает обращение по времени:

$$\psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi i t)^{d/2}} \exp \left[-i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \psi(t, \mathbf{y}).$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (4.33) и (4.60). Уравнение диффузии (4.33) описывает диссипативный процесс, ведущий к расплыванию со временем локализованных полей, смотри выражения (4.37, 4.39). Поэтому уравнение диффузии (4.33) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (4.60), как, впрочем, и уравнение (4.54), обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены $t \rightarrow -t$, $\psi \rightarrow \psi^*$. Поэтому наряду с прямым выражением (4.61) работает и обратное ему выражение.

Задача 4.3.3. Найти для свободного уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (4.37, 4.39).

Задача 4.3.4. Найти решения одномерного свободного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий: 1) $\psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$; 2) $\psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$.

4.4 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

4.4.1 Метод характеристик

Метод характеристик позволяет свести решение определенного класса уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, он применим к уравнениям, которые содержат только первые производные и линейным по этим производным. Такое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla g = f, \quad (4.62)$$

где g – искомая функция, зависящая от времени t и координат \mathbf{r} пространства произвольной размерности. “Скорость” \mathbf{V} и “накачка” f также являются некоторыми функциями времени t и координат \mathbf{r} .

В левой части уравнения (4.62) стоит “полная” производная d/dt вдоль траектории, которая определяется уравнением

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{V}. \quad (4.63)$$

Траектории, описываемые уравнением (4.63), называются характеристиками системы. Каждая характеристика однозначно задается значением переменной \mathbf{x} в некоторый момент времени.

Чтобы найти $g(t, \mathbf{r})$, надо проинтегрировать уравнение $dg/dt = f$ (4.62) вдоль характеристики $\mathbf{x}(t)$, которая заканчивается в момент времени t в точке \mathbf{r} . В результате находим

$$g(t, \mathbf{r}) = g(t_0, \mathbf{x}_0) + \int_{t_0}^t d\tau f[\tau, \mathbf{x}(\tau)]. \quad (4.64)$$

Здесь t_0 – начальное время, при котором задается начальное условие на функцию g , а \mathbf{x}_0 – точка, в которой находится решение уравнения (4.63) в начальный момент времени t_0 .

Задача 4.4.1. Найти решение уравнения (4.62) для сдвигового поля $V_x = sy$, $V_y = 0$ с нулевыми начальными условиями и статического поля $f(x, y) = \partial_x F(x, y)$.

Изложенная процедура может быть сформулирована в терминах функции Грина. Вынужденное решение уравнения (4.62) записывается в виде свертки функции Грина с источником

$$g(t, \mathbf{r}) = \int d\tau d^d y G(t, \mathbf{r}, \tau, \mathbf{y}) f(\tau, \mathbf{y}). \quad (4.65)$$

В соответствии с уравнением (4.62) функция Грина удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla)G(t, \mathbf{r}, \tau, \mathbf{y}) = \delta(t - \tau)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{y}). \quad (4.66)$$

При $t < \tau$ функция Грина равна нулю в силу причинности, а при $t > \tau$ мы можем решать однородную задачу

$$(\partial_t + \mathbf{V}\nabla)G(t, \mathbf{r}, \tau, \mathbf{y}) = 0, \quad (4.67)$$

с начальным условием $G(\tau + 0, \mathbf{r}, \tau, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{y})$. Это уравнение имеет решение

$$G(t, \mathbf{r}, \tau, \mathbf{x}) = \theta(t - \tau)\delta[\mathbf{r} - \mathbf{x}(t)]J, \quad (4.68)$$

где $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет уравнению (4.63) с начальным условием $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{y}$, а J – якобиан $J = \det \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{y}$. Отметим, что $J = 1$, если $\nabla \mathbf{V} = 0$. Свертка (4.65) с функцией Грина (4.68) как раз и дает вынужденный вклад решения (4.64). Якобиан при этом исчезает при переходе от интегрирования по \mathbf{y} к интегрированию по \mathbf{x} .

Задача 4.4.2. Откуда в формуле (4.68) взялся якобиан?

Глава 5

АВТОНОМНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В отсутствие внешнего воздействия или в случае, когда оно стационарно, физическая система описывается уравнениями, которые не зависят явно от времени. Такие системы называются автономными. Мы будем интересоваться случаем, когда динамические уравнения автономной системы являются существенно нелинейными, что может приводить к достаточно сложному динамическому поведению, включая хаотический режим.

5.1 Фиксированные точки и предельные циклы

В данном разделе мы рассмотрим общие свойства решений автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых отсутствует явная зависимость от времени. Среди решений автономной системы в общем случае имеются стационарные (не зависящие от времени) решения, которые называются фиксированными точками. Мы исследуем поведение решения вблизи фиксированных точек и изучим также предельные циклы. Положение фиксированных точек и предельных циклов позволяют качественно представить себе поведение решений автономной системы.

В простейшем случае одной переменной x автономное дифференциальное уравнение имеет вид

$$dx/dt = v(x). \quad (5.1)$$

Уравнение (5.1) можно рассматривать, как уравнение движения точечной частицы, имеющей координату x , тогда v – скорость этой частицы. Стационарные решения уравнения (5.1) определяются корнями уравнения $v(x) = 0$. Если такой корень x_* существует, то $x = x_*$ является стационарным решением уравнения (5.1). Точка $x = x_*$ называется фиксированной точкой уравнения (5.1).

Рассмотрим поведение решения вблизи фиксированной точки. При x , близких к x_* , функция $v(x)$ может быть разложена в ряд Тейлора. Главный член этого разложения имеет вид

$$v(x) \approx \alpha(x - x_*). \quad (5.2)$$

Решение линейного уравнения $dx/dt = \alpha(x - x_*)$ имеет вид $x - x_* \propto \exp(\alpha t)$. Таким образом, при $\alpha > 0$ точка x удаляется от фиксированной точки x_* с течением времени. В этом случае фиксированная точка называется неустойчивой. При $\alpha < 0$ точка x приближается к фиксированной точке x_* с течением времени. В этом случае фиксированная точка называется устойчивой. Отметим,

что возможна ситуация, когда x с течением времени уходит на бесконечность. В этом случае бесконечность ведет себя подобно устойчивой фиксированной точке.

Поведение решения уравнения (5.1) может быть качественно описано, если известны его фиксированные точки, то есть решения уравнения $v(x) = 0$. Точка x “отталкивается” от неустойчивых фиксированных точек и “притягивается” к устойчивым фиксированным точкам. Если нули функции $v(x)$ не являются кратными, функция $v(x)$ меняет знак в каждой фиксированной точке. Вследствие этого производная α меняет свой знак от одной фиксированной точки к другой при увеличении x . Другими словами, устойчивые и неустойчивые фиксированные точки чередуются. Отсюда следует, что при увеличении t устойчивая фиксированная точка собирает в своей окрестности решения, для которых x в начальный момент времени попадает в один из прилегающих к этой точке интервалов, которые ограничиваются соседними неустойчивыми фиксированными точками.

Задача 5.1.1. Найти решение уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - x; \quad \frac{dx}{dt} = x - x^3.$$

Убедиться, что поведение решения соответствует приведенной в тексте качественной картине.

Отдельного рассмотрения заслуживает случай кратного корня функции $v(x)$. Для двукратно вырожденно-го корня вблизи него $v \approx \beta(x - x_*)^2$. Проанализируем решение уравнения

$$dx/dt = \beta(x - x_*)^2, \quad (5.3)$$

которое описывает поведение x вблизи фиксированной точки. Его решение имеет вид

$$x - x_* = -\frac{1}{\beta(t - t_0)}, \quad (5.4)$$

где t_0 – некоторая константа, которая определяется начальным значением $x = x_0$ при $t = 0$. Поведение решения зависит от знака $\beta(x_0 - x_*)$. Если $\beta(x_0 - x_*) > 0$, то $t_0 > 0$. В этом случае $|x|$ стремится к бесконечности при $t \rightarrow t_0$. Если $\beta(x_0 - x_*) < 0$, то $t_0 < 0$. В этом случае $|x|$ стремится к x_* при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, эта фиксированная точка является “полуустойчивой”.

Задача 5.1.2. Проанализировать поведение решения вблизи фиксированной точки, для которой корень $v(x)$ является трехкратно вырожденным.

Перейдем теперь к автономной системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для двух скалярных переменных x, y . Эта система записывается в следующем виде

$$\frac{dx}{dt} = v(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = u(x, y), \quad (5.5)$$

где v и u – некоторые функции x, y . Систему (5.5) можно рассматривать, как уравнение, определяющее траекторию двумерного движения точечной частицы, положение которой определяется координатами (x, y) , тогда (v, u) – компоненты скорости этой частицы. Для однозначного определения траектории необходимо задать начальные условия, например, положение частицы (x_0, y_0) в начальный момент времени. Обратим внимание на то, что теперь необходимы два скалярных начальных условия, что соответствует числу переменных.

Для автономной системы, когда функции v и u в (5.5) не зависят от времени t , форма траектории, проходящей через некоторую точку (x_0, y_0) , не зависит от момента времени t , когда это происходит. Другими словами, на плоскости $X - Y$ имеется совокупность не зависящих от времени траекторий, по которым движется материальная точка, попавшая на эту траекторию. Эта совокупность называется фазовым портретом системы уравнений (5.5). Заметим, что функции $x(t), y(t)$ задают эти траектории параметрически, параметром же служит “время” t .

Важную роль в характеристике динамики автономной системы уравнений (5.5) играют фиксированные точки этой системы, которые определяются системой уравнений $v = 0, u = 0$. Прежде всего, очевидно, что любая фиксированная точка является не зависящим от времени решением автономной системы уравнений (5.5). Проанализируем поведение траекторий вблизи фиксированной точки. В отличие от одномерного случая, помимо устойчивых (притягивающих траекторий) и неустойчивых (отталкивающих траекторий) фиксированных точек в двумерном случае имеются также седловые точки, которые притягивают траектории с некоторых направлений, и в некоторых направлениях их отталкивают.

Рассмотрим регулярную фиксированную точку x_f, y_f системы уравнений (5.5), вблизи которой главные члены разложения функций v и u в ряд Тейлора линейны по $x - x_f, y - y_f$. Вблизи таких фиксированных точек возможно различное поведение траекторий. Проанализируем это поведение. Поместим фиксированную точку в начало координат, что всегда можно сделать за счет сдвига переменных x, y . Тогда система уравнений (5.5) вблизи начала координат будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

где компоненты матрицы \hat{M} определяются первыми производными v, u , взятыми в фиксированной точке.

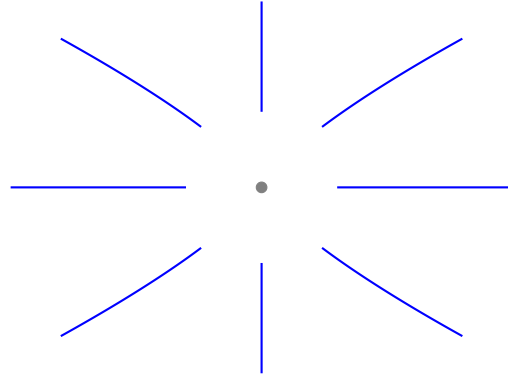


Рис. 5.1: Траектории в окрестности узловой фиксированной точки.

Решение системы (5.6) может быть выражено через собственные векторы и собственные значения матрицы \hat{M} . Представим решение в виде $\phi_1(t)\mathbf{a}_1 + \phi_2(t)\mathbf{a}_2$, где \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 – собственные векторы матрицы \hat{M} . Подстановка этого выражения в (5.6) приводит к уравнениям $d\phi_1/dt = \lambda_1\phi_1, d\phi_2/dt = \lambda_2\phi_2$, где λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы \hat{M} . Эти уравнения немедленно решаются и мы находим общее решение

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1\mathbf{a}_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2\mathbf{a}_2 \exp(\lambda_2 t). \quad (5.7)$$

Здесь c_1, c_2 – константы, которые определяются начальными условиями.

Рассмотрим случай действительной матрицы \hat{M} . Собственные значения λ_1, λ_2 определяются из характеристического уравнения $\det(\hat{M} - \lambda\hat{I}) = 0$. В нашем случае это квадратное уравнение с действительными коэффициентами, то есть λ_1, λ_2 могут быть найдены по формулам Виета. В зависимости от знака дискриминанта λ_1, λ_2 могут быть действительными или комплексно сопряженными. Рассмотрим различные возможности.

Если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то любая траектория уходит из фиксированной точки, которая в этом случае называется неустойчивым узлом. Траектории вблизи узловой фиксированной точки показаны на рисунке 5.1. Если $\lambda_1 > \lambda_2$, то горизонтальные линии соответствуют $c_2 = 0$, а вертикальные – $c_1 = 0$. В силу $\lambda_1 > \lambda_2$ на больших временах главным в выражении (5.7) становится первое слагаемое (если $c_1 \neq 0$), поэтому траектории стремятся стать горизонтальными. Рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

Если $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то любая траектория с ростом t стремится к фиксированной точке, то есть в этом случае она является устойчивой, такая фиксированная точка называется устойчивым узлом. Поведение траекторий вблизи устойчивого узла иллюстрируется тем же рисунком 5.1, но только движение по траекториям происходит в обратную сторону. Опять же, рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

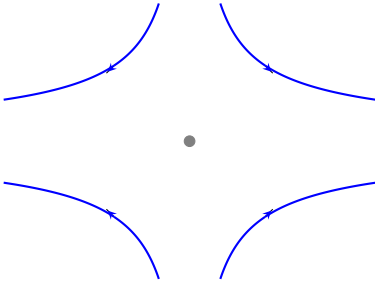


Рис. 5.2: Траектории в окрестности седловой фиксированной точки.

Если знаки λ_1 и λ_2 различны, то такая точка называется седловой. Поведение траекторий вблизи седловой фиксированной точки иллюстрирует рисунок 5.2. Пусть $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Тогда горизонтальная линия соответствует $c_2 = 0$, а вертикальная линия — $c_1 = 0$. На больших временах главным в выражении (5.7) становится первое слагаемое (если $c_1 \neq 0$), поэтому траектории стремятся стать горизонтальными. Рисунок 5.1 соответствует ортогональным векторам \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 . Если они не ортогональны, то система траекторий перекашивается.

Задача 5.1.3. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = -x.$$

Рассмотрим теперь случай, когда λ_1 и λ_2 являются комплексными (комплексно сопряженными) числами. В этом случае и \mathbf{a}_1 и \mathbf{a}_2 также являются комплексными (комплексно сопряженными) векторами. Если мы хотим иметь дело с действительным решением, то и константы c_1 и c_2 в выражении (5.7) следует выбрать комплексно сопряженными числами. В результате находим

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2(c'\mathbf{a}' - c''\mathbf{a}'') \exp(\lambda't) \cos(\lambda''t) - 2(c''\mathbf{a}' + c'\mathbf{a}'') \exp(\lambda't) \sin(\lambda''t), \quad (5.8)$$

где $\lambda_1 = \lambda' + i\lambda''$, $c_1 = c' + ic''$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}' + i\mathbf{a}''$.

Поведение траекторий вблизи фиксированной точки, которая характеризуется комплексно сопряженными λ_1 и λ_2 , показано на рисунке 5.3, такая фиксированная точка называется фокусом. Мы видим, что траектории являются спиралями, раскручивающимися от фиксированной точки при $\lambda' > 0$ и закручивающимися к фиксированной точке при $\lambda' < 0$. Таким образом, фокус является устойчивым, если $\lambda' < 0$, и неустойчивым в обратном случае.

Отдельно следует проанализировать случай, когда матрица \hat{M} сводится к клетке Жордана,

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

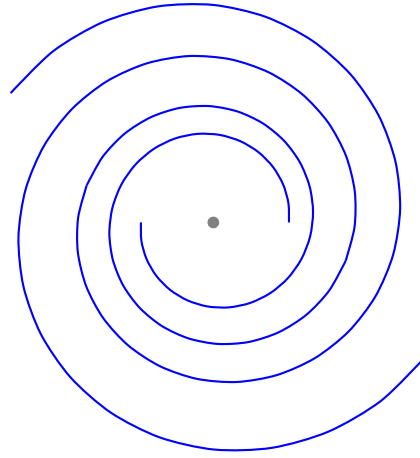


Рис. 5.3: Траектории в окрестности фокальной фиксированной точки.

В этом случае решение является линейной комбинацией двух членов, зависимость которых от времени определяется множителями $\exp(\lambda t)$ и $t \exp(\lambda t)$. Траектории, которые определяются этим решением, ведут себя, как в окрестности узла, причем он является устойчивым, если $\lambda < 0$, и неустойчивым в обратном случае.

Учет следующих за линейными членов разложения v и u в ряд Тейлора по x, y приводит к искажению траекторий, найденных в линейном приближении. Однако, пока поправки к линейному члену в v и u невелики, поведение траекторий вблизи узла, седла и фокуса качественно остается таким же, как и на рисунках 5.1–5.3.

В общем случае форма траекторий автономной системы уравнений определяется следующим уравнением первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad f = \frac{u}{v}, \quad (5.9)$$

которое вытекает из системы (5.5). Именно это уравнение определяет фазовый портрет системы. Обратим внимание на то, что динамика системы не определяется однозначно ее траекториями (фазовым портретом). Действительно, заменив u и v в системе (5.5) на hu и hv (где h — некоторая функция x, y), мы придем к другому динамическому поведению. В то же время в силу (5.9) фазовый портрет системы при таком преобразовании не изменится. Преобразование $v, u \rightarrow hv, hu$ означает, что происходит изменение параметра t в определяющих траекторию функциях $x(t)$, $y(t)$.

Задача 5.1.4. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x^2y.$$

В ряде случаев решение уравнения (5.9) позволяет найти полное решение исходной задачи (5.5). Действительно, если в результате решения (5.9) удастся найти

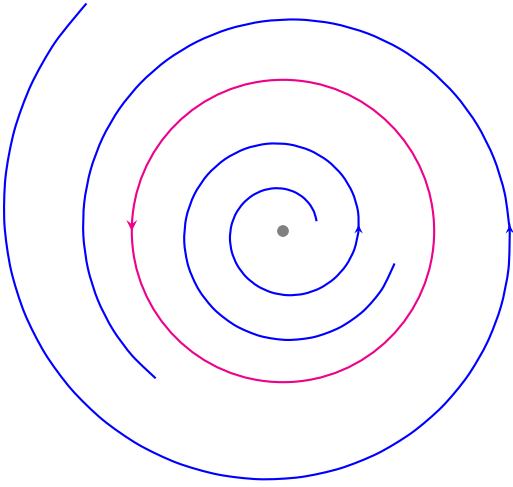


Рис. 5.4: Фазовый портрет системы вблизи устойчивого предельного цикла.

форму траектории $y(x)$, то подстановка этого выражения в правую часть уравнения $dx/dt = v(x, y)$ превращает его в уравнение первого порядка. Если и это уравнение удастся решить, то мы и получаем решение исходной задачи для $x(t)$. Функцию $y(t)$ можно затем найти, поскольку мы знаем зависимость $y(x)$.

Задача 5.1.5. Найти решение системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy.$$

Автономная система уравнений (5.5) допускает также так называемые предельные циклы. Предельным циклом называется замкнутая траектория в плоскости $X - Y$. В общем случае траектории вблизи предельного цикла не являются замкнутыми, то есть предельный цикл является изолированной замкнутой траекторией. Траектории в окрестности предельного цикла могут “притягиваться” к циклу или “отталкиваться” от него. В первом случае цикл называется устойчивым, а во втором случае – неустойчивым. Типичное устройство траекторий вблизи устойчивого предельного цикла показана на рисунке 5.4.

Задача 5.1.6. Найти предельный цикл системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y + x(1 - r^2), \quad \frac{dy}{dt} = x,$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Установить его устойчивость. Найти период для этого цикла.

Приведенные соображения позволяют качественно построить фазовый портрет любой автономной системы. Прежде всего, надо найти все фиксированные точки и предельные циклы и установить поведение траек-

торий вблизи них. Поведение траекторий вдали от фиксированных точек и предельных циклов получаются путем экстраполяции. Траектории начинаются в неустойчивых фиксированных точках и заканчиваются в устойчивых. Они также могут приходить из бесконечности и уходить на бесконечность, поэтому поведение траекторий при больших значениях переменных требуют отдельного анализа. Предельные циклы делят плоскость $X - Y$ на отдельные области, любая траектория остается внутри такой области. Отметим, что внутри устойчивого предельного цикла имеется хотя бы одна неустойчивая фиксированная точка, а внутри неустойчивого предельного цикла имеется хотя бы одна устойчивая фиксированная точка.

Задача 5.1.7. Нарисовать качественно фазовый портрет системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -y \sin x, \quad \frac{dy}{dt} = (1 + y^2) \cos x.$$

5.1.1 Уравнение Ван дер Поля

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля

$$\partial_t^2 x + x = \mu(1 - x^2)\partial_t x, \quad (5.10)$$

которое было введено для описания работы генератора, основанного на $L - C$ контуре с обратной связью. Очевидно, уравнение (5.10) может быть переписано в виде системы двух уравнений первого порядка

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -x + \mu(1 - x^2)y. \quad (5.11)$$

Система уравнений (5.11) имеет единственную фиксированную точку $(0, 0)$, которая неустойчива при $\mu > 0$. Ниже мы изучаем именно этот случай, когда система (5.11) обладает устойчивым предельным циклом.

Перепишем уравнение (5.14) в полярных координатах $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

$$dr/dt = \mu(1 - r^2 \cos^2 \varphi)r \sin^2 \varphi, \quad (5.12)$$

$$d\varphi/dt = -1 + \mu(1 - r^2 \cos^2 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi. \quad (5.13)$$

Из уравнения (5.12) следует, что при больших r производная dr/dt отрицательна. Поэтому траектории не могут уходить на бесконечность. Поскольку при $\mu > 0$ фиксированная точка $0, 0$ неустойчива, мы заключаем, что система уравнений (5.11) обладает устойчивым предельным циклом. Форма этого предельного цикла для различных значений параметра μ показана на рисунке 5.5.

Задача 5.1.8. Найти форму траекторий системы при больших значениях r .

Как следует из системы уравнений (5.11), траектории системы даются уравнением

$$\frac{dy}{dx} = \mu(1 - x^2) - \frac{x}{y}. \quad (5.14)$$

Предельный цикл является замкнутой траекторией, которая дается уравнением (5.14). В общем случае форма предельного цикла может быть найдена только численно. Тем не менее, мы можем установить некоторые его общие геометрические свойства. Прежде всего, заметим, что в силу симметрии уравнения (5.14) предельный цикл симметричен относительно преобразования инверсии $x, y \rightarrow -x, -y$. Далее, на границах интервала по x , внутри которого располагается предельный цикл, производная dy/dx обращается в бесконечность. Поэтому эти точки предельного цикла должны иметь координату $y = 0$, так как только при этом условии обращается в бесконечность правая часть уравнения (5.14). Таким образом, предельный цикл разбивается на две симметричные ветви, для верхней из которых $y > 0$, а для нижней $y < 0$, смотри рисунок 5.5.

Рассмотрим случай малых μ . При $\mu = 0$ уравнение (5.12) вырождено, оно дает в качестве решения окружность произвольного радиуса r . Чтобы установить этот радиус, надо учесть поправку, связанную с членом с μ . При малых μ система уравнений (5.12, 5.13) дает

$$\frac{d \ln r}{d\varphi} = -\mu(1 - r^2 \cos^2 \varphi) \sin^2 \varphi. \quad (5.15)$$

В силу симметрии предельного цикла при изменении φ от 0 до π радиус r должен вернуться к своему исходному значению. Интегрируя правую часть уравнения (5.15) (при $r = \text{const}$) по углу φ от 0 до π и приравнявая результат к нулю, находим $r = 2$.

Задача 5.1.9. Найти первую по μ поправку к $r = 2$.

Проанализируем форму предельного цикла уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра μ . Рассматриваем верхнюю ветвь предельного цикла. При $x < -1$ значение y мало. Пренебрегая в уравнении (5.14) левой частью, находим

$$y = \mu^{-1}x/(1 - x^2). \quad (5.16)$$

Это решение теряет свою применимость вблизи $x = -1$. При $x > -1$ значение y , наоборот, велико. Поэтому в уравнении (5.14) можно пренебречь последним членом. Интегрируя оставшееся уравнение с граничным условием $y = 0$ при $x = -1$, находим

$$y = \mu(x - x^3/3 + 2/3). \quad (5.17)$$

Это решение достигает максимума при $x = 1$ и обращается в ноль при $x = 2$. Окрестности точки $x = -1$, где происходит переход с одного режима на другой, и точек $x = \pm 2$, где происходит переход с одной ветви на вторую, требует специального анализа. Полученную форму предельного цикла можно увидеть на рисунке 5.5 при больших μ .

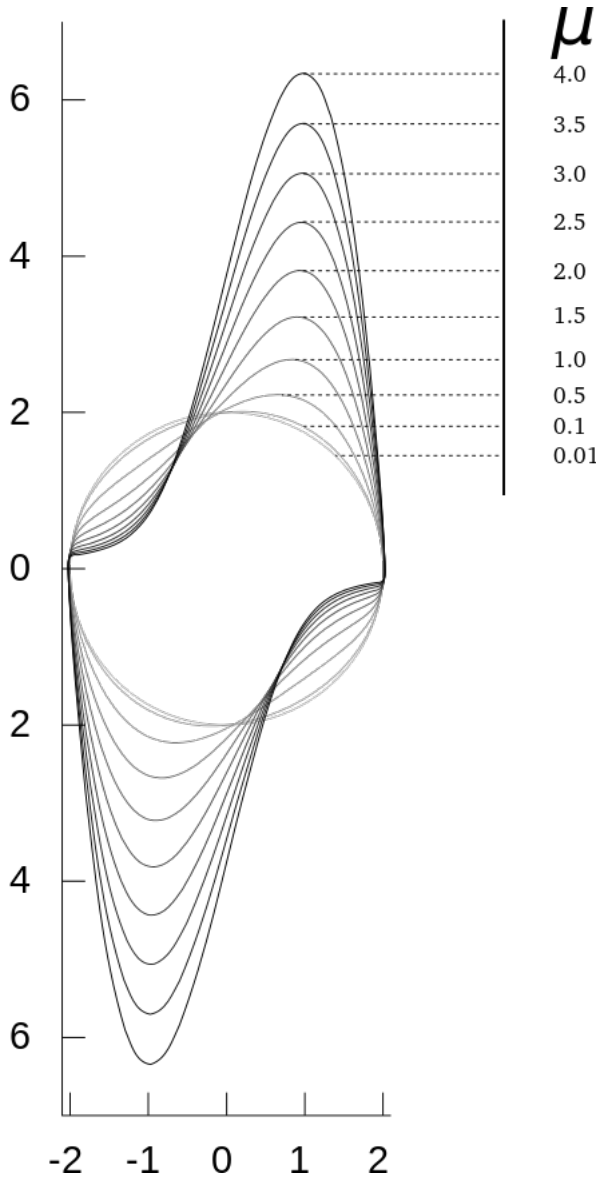


Рис. 5.5: Форма предельного цикла уравнения Ван дер Поля на плоскости $X - Y$ при различных значениях параметра μ .

Задача 5.1.10. Найти период предельного цикла уравнения Ван дер Поля при больших значениях параметра μ .

Задача 5.1.11. Проанализировать поведение решения уравнения (5.14) вблизи точки $x = -1$ при больших значениях параметра μ .

Задача 5.1.12. Проанализировать поведение решения уравнения (5.14) вблизи точки $x = 2$ при больших значениях параметра μ .

5.2 Бифуркации

Бифуркацией называется качественное изменение фазового портрета системы при изменении одного или нескольких параметров в автономной системе уравнений. Например, в системе может изменяться число фиксированных точек, а также появляться или исчезать предельный цикл. В настоящем разделе мы рассмотрим наиболее распространенные типы бифуркаций, при которых происходит локальное изменение фазового портрета.

Простейший тип бифуркации в случае одной переменной дается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \mu - x^2, \quad (5.18)$$

которое описывает окрестность точки $x = 0$, в которой происходит бифуркация. Вообще говоря, при x^2 в (5.18) стоит произвольный коэффициент, однако перемасштабировкой x всегда можно добиться того, чтобы он был равен единице. Если параметр μ отрицателен, то x за конечное время уходит в минус бесконечность. Если же параметр μ положителен, то уравнение (5.18) имеет две фиксированные точки $x = \pm\sqrt{\mu}$. Несложно убедиться, что фиксированная точка $x = \sqrt{\mu}$ является устойчивой, а фиксированная точка $x = -\sqrt{\mu}$ является неустойчивой. Таким образом, если начальное значение x_0 лежит в интервале $-\sqrt{\mu} < x_0$, то с течением времени x приближается к фиксированной точке $\sqrt{\mu}$, а если начальное значение x_0 лежит в интервале $x_0 < -\sqrt{\mu}$, то x за конечное время уходит в минус бесконечность.

Задача 5.2.1. Найти время, за которое решение уравнения (5.18) обращается в минус бесконечность при отрицательном μ .

Таким образом, при прохождении параметра μ через ноль поведение решений уравнения (5.18) качественно меняется. Такое изменение и называется бифуркацией, а значение параметра, при котором происходит бифуркация, называется критическим. Для уравнения (5.18) критическим значением параметра μ является $\mu = 0$. При $\mu = 0$ в точке $x = 0$ рождается две фиксированные точки, одна из которых является устойчивой, а вторая неустойчивой.

Следующим примером для одной переменной является уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \mu x - x^3, \quad (5.19)$$

которое описывает окрестность точки $x = 0$, в которой происходит бифуркация. Такого сорта уравнение возникает в том случае, если симметрия диктует инвариантность уравнения для переменной x относительно замены $x \rightarrow -x$. Опять же, при x^3 в (5.19) должен стоять произвольный коэффициент. Перемасштабировкой x этот коэффициент можно сделать ± 1 . Ниже мы рассматриваем случай, когда коэффициент равен -1 , случай, когда коэффициент равен $+1$, анализируется аналогично.

Если параметр μ отрицателен, то уравнение (5.19) имеет единственную устойчивую фиксированную точку $x = 0$. При положительных μ фиксированная точка $x = 0$ становится неустойчивой, и возникают две устойчивые фиксированные точки $x = \pm\sqrt{\mu}$. Таким образом, при критическом значении $\mu = 0$ происходит бифуркация, которая заключается в перестройке системы фиксированных точек: от устойчивой фиксированной точки отщепляются две устойчивые фиксированные точки, а исходная фиксированная точка становится неустойчивой.

Задача 5.2.2. Что происходит при прохождении параметра μ через ноль в системе, которая описывается уравнением $dx/dt = \mu x + x^3$?

Обратим внимание на “баланс” устойчивых и неустойчивых фиксированных точек: в первом случае возникает одна устойчивая и одна неустойчивая фиксированная точка, а во втором случае вместо устойчивой фиксированной точки возникает две устойчивые и одна неустойчивая. Таким образом, сохраняется разница между числом устойчивых и неустойчивых фиксированных точек. Это связано с тем, что рассмотренные бифуркации происходят локально, без изменения характера траекторий вдали от точки бифуркации. Именно поэтому, например, при отщеплении двух фиксированных точек от устойчивой фиксированной точки они должны быть устойчивыми. Сама же точка, от которой они отщепились, должна стать неустойчивой в соответствии с установленным нами правилом чередования устойчивых и неустойчивых фиксированных точек.

Переходим теперь к системам с двумя переменными, смотри раздел 5.1. В этом случае реализуются различные типы бифуркаций. Возможны, в частности, бифуркации, аналогичные рассмотренным нами для одномерного случая. А именно, возможны бифуркации, когда при изменении параметров системы вместо одной фиксированной точки возникает три или наоборот, остается одна вместо трех. Возможно также возникновение двух фиксированных точек или их исчезновение.

Задача 5.2.3. Что происходит при прохождении параметра μ через ноль в системе, которая описывается уравнениями $dx/dt = \mu - x^2$, $dy/dt = -y$?

Задача 5.2.4. Что происходит при прохождении параметра μ через ноль в системе, которая описывается уравнениями $dx/dt = \mu x - x^3$, $dy/dt = -y$?

Как и для одномерного случая, рассмотренные бифуркации происходят локально, вблизи определенной точки в пространстве. При этом характер траекторий везде, за исключением небольшой окрестности этой точки, не меняются. Это накладывает определенные ограничения на возможные типы бифуркаций, которые определяются из геометрических соображений. Например, при отщеплении двух фиксированных точек от устойчивого узла они также являются устойчивыми узлами, в то время как исходная фиксированная точка становится седлом.

Более сложным случаем является бифуркация Хопфа, которая связана с возникновением или исчезновением предельного цикла. Разумеется, не может возникнуть или исчезнуть предельный цикл конечного размера. Поэтому бифуркация заключается в том, что предельный цикл рождается (с нулевым размером) из фиксированной точки, которую он оставляет внутри себя. Или же предельный цикл стягивается к фиксированной точке, которая находится внутри него.

В окрестности фиксированной точки $x = 0, y = 0$, где исчезает или возникает предельный цикл, уравнения для переменных x, y могут быть записаны в следующем виде

$$\frac{dz}{dt} = [(\mu + i) + (\alpha + i\beta)|z|^2]z, \quad (5.20)$$

где $z = x + iy$, а μ, α, β — действительные коэффициенты. Бифуркация происходит при изменении параметра μ , при $\mu = 0$ (то есть критическим значением параметра μ является $\mu = 0$).

При отрицательном μ фиксированная точка $z = 0$ является устойчивой. Если $\alpha < 0$ (этот случай называют суперкритическим), то фазовый портрет уравнения (5.20) не имеет больше никаких особенностей. Если же $\alpha > 0$ (этот случай называют субкритическим), то фазовый портрет уравнения (5.20) имеет неустойчивый предельный цикл радиуса $r = \sqrt{|\mu|/\alpha}$. В соответствии со сказанным выше этот радиус стремится к нулю при $\mu \rightarrow 0$. При положительном μ фиксированная точка $z = 0$ становится неустойчивой. В суперкритическом случае, когда $\alpha < 0$, при положительном μ возникает устойчивый предельный цикл радиуса $r = \sqrt{\mu/|\alpha|}$. В субкритическом случае, $\alpha > 0$, при положительном μ предельный цикл исчезает.

Таким образом, бифуркация Хопфа, которая происходит при изменении знака μ , заключается в замене устойчивой фиксированной точки на неустойчивую, что сопровождается либо исчезновением неустойчивого предельного цикла, либо возникновением устойчивого предельного цикла. Как и следует из общих правил, устойчивая фиксированная точка может сопровождаться только неустойчивым предельным циклом,

а неустойчивая фиксированная точка может сопровождаться только устойчивым предельным циклом.

Задача 5.2.5. Найти закон движения по предельному циклу (если он существует), к которому приводит решение уравнения (5.20).

Задача 5.2.6. Проанализировать устойчивость предельных циклов в суперкритическом и субкритическом случаях для уравнения (5.20).

5.2.1 Модель Лоренца

До сих пор мы ограничивались рассмотрением автономных систем, которые описываются одной переменной или двумя переменными. При переходе к системам, которые описываются большим числом переменных, возникает новая качественная особенность — при некоторых значениях параметров динамика системы может оказаться хаотической. Это означает, что траектория системы не притягивается к каким-либо устойчивым фиксированным точкам или предельным циклам, а “заметает” все фазовое пространство или его часть. Другими словами, для любой точки заметаемой области траектория окажется сколь угодно близко к этой точке, если наблюдать ее достаточно большое время.

Существуют различные сценарии перехода к хаотическому поведению системы. Их обсуждение выходит за рамки настоящего пособия, оно может быть найдено в специальной литературе. Здесь мы только кратко обсудим модель Лоренца, которая исторически явилась первой моделью, в которой при изменении ее параметров наблюдался переход к хаотическому поведению. В настоящее время известно огромное количество подобных моделей, которые показывают, что хаотическое поведение является скорее правилом, чем исключением для систем с числом переменных более двух.

Модель Лоренца формулируется в виде системы уравнений для трех переменных x, y, z , которые подчиняются следующим уравнениям

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \sigma(y - x), \\ \partial_t y &= x(r - z) - y, \\ \partial_t z &= xy - bz. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь r, σ, b — параметры, которые считаются положительными. Переход к хаосу происходит при увеличении параметра r . Приведем небольшой анализ решения системы (5.21).

Система (5.21) имеет фиксированную точку $(0, 0, 0)$, которая устойчива при $r < 1$ и становится неустойчивой при $r > 1$, то есть при $r = 1$ происходит бифуркация. В результате бифуркации возникает две новые фиксированные точки $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ и $(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1)$. Сначала эти фиксированные точки устойчивы, но при увеличении r и при

условии $\sigma > b + 1$ происходит бифуркация, в результате которой эти фиксированные точки теряют устойчивость при некотором значении параметра r . При этом не возникает новых фиксированных точек или устойчивого предельного цикла и система оказывается в состоянии хаоса.

Задача 5.2.7. Показать, что фиксированная точка $(0, 0, 0)$ системы (5.21) устойчива при $r < 1$ и становится неустойчивой при $r > 1$.

Задача 5.2.8. Показать, что фиксированная точка $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ системы (5.21) устойчива при малом положительном $r-1$ и становится неустойчивой при больших r при условии $\sigma > b + 1$.

При самых больших r возникает устойчивый предельный цикл, для которого справедливы следующие скейлинговые соотношения по r

$$t \propto r^{-1/2}, \quad x \propto r^{1/2}, \quad y \propto r, \quad z \propto r.$$

С учетом этих соотношений система уравнений (5.21) сводится к

$$\partial_t x = \sigma y, \quad \partial_t y = x(r - z), \quad \partial_t(r - z) = -xy. \quad (5.22)$$

Отсюда следует $y^2 + (r - z)^2 = R^2$, $x^2/(2\sigma) + r - z = C$, где константы $R \sim C \sim r$. Подобно тому, как это было сделано для осциллятора Ван дер Поля, эти константы должны быть найдены из условий, что первые поправки по $1/r$ не разрушают замкнутости найденного предельного цикла.

Задача 5.2.9. Найти константы R и C , которые характеризуют предельный цикл модели Лоренца, который возникает при $b = 1$ и больших значениях параметра r , $r \gg 1$.

Таким образом, хаотическое поведение модели Лоренца реализуется в некотором интервале по основному параметру r , границы которого зависят от параметров модели b, σ .

5.3 Лагранжевы уравнения

В настоящем разделе мы рассмотрим динамику физических систем, уравнения для которых получаются, как условия экстремума некоторого функционала, который называется действием.

Мы рассмотрим действие \mathcal{S} , которое является интегралом

$$\mathcal{S} = \int dt L(\partial_t \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (5.23)$$

где \mathbf{x} – набор переменных, характеризующих систему, а L называется функцией Лагранжа. Мы будем называть набор n переменных координатами. Автономность

системы выражается в отсутствии явной зависимости функции Лагранжа от времени. Условие экстремума действия (5.23) имеет вид

$$\partial_t \frac{\partial L}{\partial(\partial_t \mathbf{x})} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}. \quad (5.24)$$

Уравнение (5.24) является уравнением второго порядка по времени для координат \mathbf{x} .

Несложно переписать уравнение (5.24) в виде уравнений первого порядка по времени. Для этого следует ввести переменные (импульсы) $\mathbf{p} = \partial L / \partial(\partial_t \mathbf{x})$, для которых уравнение (5.24) является уравнением первого порядка $\partial_t \mathbf{p} = \partial L / \partial \mathbf{x}$. Введем функцию Гамильтона

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = \mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - L. \quad (5.25)$$

Как следует из определения (5.25), $dH = d\mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - d\mathbf{x} \partial L / \partial \mathbf{x}$. Таким образом, мы приходим к уравнениям первого порядка

$$\partial_t \mathbf{x} = \partial H / \partial \mathbf{p}, \quad (5.26)$$

$$\partial_t \mathbf{p} = -\partial H / \partial \mathbf{x}, \quad (5.27)$$

которые называют каноническими. Это система $2n$ уравнений первого порядка, где n – число переменных \mathbf{x} .

Выражая функцию Лагранжа L из уравнения (5.25) и подставляя результат в (5.23), находим

$$\mathcal{S} = \int dt [\mathbf{p} \partial_t \mathbf{x} - H(\mathbf{p}, \mathbf{x})]. \quad (5.28)$$

Обращаем внимание на то, что действие (5.28) линейно по производной по времени от координат $\partial_t \mathbf{x}$. Канонические уравнения (5.26, 5.27) могут быть получены, как условия экстремума действия (5.28) по координатам \mathbf{x} и по импульсам \mathbf{p} , которые следует рассматривать, как независимые переменные.

Рассмотрим в качестве примера функцию Гамильтона системы взаимодействующих частиц

$$H = \sum_i \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i} + U(\mathbf{x}_i). \quad (5.29)$$

Здесь индекс i нумерует частицы, m_i – их массы, а потенциал U содержит как внешний потенциал, так и энергию взаимодействия между частицами. Например, для осциллятора, то есть для частицы в квадратичном внешнем потенциале

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 \mathbf{x}^2}{2}, \quad (5.30)$$

где m – масса частицы, а ω – частота колебаний.

Уравнения (5.26, 5.27) приводят к закону сохранения энергии $H = \text{const}$. Действительно, вследствие уравнений (5.26, 5.27) находим

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \partial_t \mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \partial_t \mathbf{p} = 0.$$

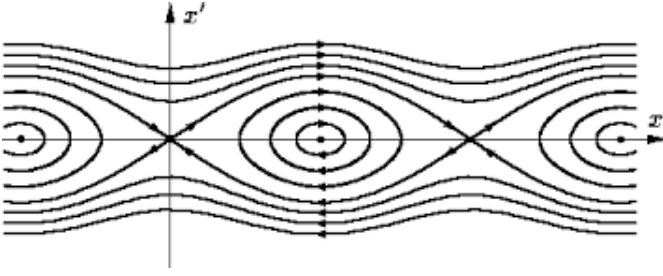


Рис. 5.6: Фазовый портрет для физического маятника. По вертикальной оси отложен импульс p , центрам замкнутых траекторий соответствуют значения $x = 2\pi n$, n — целое.

Закон сохранения энергии является следствием лагранжевой (гамильтоновой) формы уравнений динамики системы и автономности, то есть однородности системы по времени. Закон сохранения энергии $H = E$, E — константа, позволяет понизить на единицу число $2n$ уравнений (5.26, 5.27).

В частности, для случая одной переменной x второй порядок уравнений понижается до первого, что позволяет выразить решение уравнений (5.26, 5.27) в квадратурах. Действительно, из соотношения $H(p, x) = E$ можно выразить p через x . Подставляя найденную зависимость $p(x)$ в $\partial H / \partial p$, выражаем правую часть уравнения $dx/dt = \partial H / \partial p$ через x . После этого находим

$$t = \int dx (\partial H / \partial p)^{-1}, \quad (5.31)$$

что и дает решение задачи в квадратурах.

Задача 5.3.1. Выписать соотношение (5.31) для одномерного движения частицы массы m во внешнем потенциале $U(x)$.

Соотношение $H(p, x) = E$ задает на плоскости $X - P$ некоторую траекторию. Поэтому фазовый портрет системы на плоскости $X - P$ состоит из бесконечного набора замкнутых траекторий (если движение финитно) и открытых траекторий (если движение инфинитно). Таким образом, гамильтонова система уравнений (5.26, 5.27) приводит к чрезвычайно вырожденной ситуации, связанной именно с наличием закона сохранения $H(p, x) = E$.

Приведем фазовый портрет для физического маятника $H = p^2/2 + 1 - \cos x$. Приравнявая $H = E$, мы находим, что при $0 < E < 2$ движение финитно, что соответствует колебаниям в конечных пределах и замкнутым траекториям на плоскости $X - P$. При $E > 2$ движение инфинитно, то есть x монотонно растет или убывает (в зависимости от знака p). Это соответствует открытым траекториям на плоскости $X - P$, идущим по x из $-\infty$ в $+\infty$ (или наоборот). Поскольку x — фазовая переменная, то есть отличающиеся на $2\pi n$ значения соответствуют одним и тем же положениям маятника, то монотонное поведение x означает непрерывное вращение маятника (с

переменной угловой скоростью). Эти два типа поведения разделяет значение $E = 2$, когда маятник с нулевой начальной скоростью стартует с верхнего положения, когда $x = -\pi$, и, сделав полный оборот, возвращается в верхнее положение, когда $x = \pi$. Этот процесс требует бесконечного времени. Точно также x может меняться от π до $-\pi$. Описанное поведение дает фазовый портрет, приведенный на рисунке 5.6. Траектории с $E = 2$ являются сепаратрисами, разделяющими замкнутые и открытые траектории.

Наличие дополнительной симметрии функции Лагранжа или функции Гамильтона приводит к дополнительным по отношению к энергии законам сохранения, которые позволяют далее понизить порядок системы уравнений (5.26, 5.27).

Рассмотрим в качестве примера случай системы, которая описывается двумя Лагранжевыми переменными x, y . Будем считать, что функция Лагранжа инварианта относительно поворота вокруг начала координат. Например, такой симметрией обладает функция Лагранжа

$$L = \frac{m(\partial_t x)^2}{2} + \frac{m(\partial_t y)^2}{2} - U(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad (5.32)$$

которая описывает двумерное движение частицы во внешнем потенциале, зависящем только от расстояния до начала координат. Инвариантность L относительно поворота можно выразить, как неизменность L относительно сдвига фазы $z \rightarrow e^{i\alpha} z$, где $z = x + iy$.

Произведем инфинитезимальный поворот $\delta x = -\alpha y$, $\delta y = \alpha x$, где $\alpha(t)$ — произвольная функция времени. Вариация действия (5.23) в силу инвариантности функции Лагранжа L имеет вид

$$\delta S = \int dt \left[\frac{\partial L}{\partial(\partial_t x)} (-\partial_t \alpha y) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t y)} (\partial_t \alpha x) \right].$$

Для функций, удовлетворяющих уравнениям движения, вариация действия должна быть равна нулю для любых вариаций переменных. Отсюда следует, что коэффициент при $\partial_t \alpha$ должен быть равен константе. Таким образом, мы приходим к закону сохранения

$$p_x y - p_y x = \text{const}. \quad (5.33)$$

Это есть не что иное, как закон сохранения углового момента количества движения, который должен выполняться в центральном поле.

Рассмотрим функцию $\rho(t, \mathbf{p}, \mathbf{x})$, которая распространяется вдоль характеристик (смотри раздел 4.4.1) в фазовом пространстве

$$\partial_t \rho + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{p}} = 0. \quad (5.34)$$

Например, функция $\rho(t, \mathbf{p}, \mathbf{x})$ может представлять собой плотность распределения вероятности состояний системы в фазовом пространстве. Производную по времени

в (5.34) можно записать в виде дивергенции в фазовом пространстве $X - P$:

$$\partial_t \rho + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \rho \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \rho \right) = 0.$$

Отсюда следует, что для функции $\rho(t, \mathbf{p}, \mathbf{x})$, достаточно быстро стремящейся к нулю на бесконечности, остается постоянным (не зависящим от времени) интеграл

$$\int d\mathbf{x} d\mathbf{p} \rho = \text{const}.$$

Это утверждение известно, как теорема Лиувилля.

Задача 5.3.2. Найти решение уравнения (5.34) для математического маятника, функция Гамильтона которого определяется (5.30).

5.4 Релаксационные уравнения

Релаксационные уравнения описывают приближение физической системы к положению равновесия. Для системы с несколькими степенями свободы, которые описываются набором переменных x_i , релаксационное уравнение имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad (5.35)$$

где F — некоторая функция x_i . Если система характеризуется единственным параметром x , то к виду (5.35) сводится произвольное уравнение $dx/dy = v(x)$, тогда F является первообразной от $-v$. В этом случае никакой специфики в релаксационном уравнении нет.

Однако уже для двух x_i далеко не всякая система уравнений (5.5)

$$dx/dt = v, \quad dy/dt = u,$$

сводится к релаксационному виду (5.35). Действительно, выражения $v = -\partial F/\partial x$, $u = -\partial F/\partial y$ означают, что

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Другими словами, производные от u и v связаны между собой. Аналогичная связь справедлива и для случая большего числа переменных.

Фиксированные точки уравнения (5.35) определяются условиями $\partial F/\partial x_i = 0$. Вблизи фиксированной точки $x_{\star i}$ функция F представляется в виде

$$F \approx F_0 + \frac{1}{2} M_{ij} (x_i - x_{\star i})(x_j - x_{\star j}),$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь F_0 — значение функции в фиксированной точке, а $M_{ij} = \partial^2 F/\partial x_i \partial x_j$ — матрица вторых производных в фиксированной точке. Поэтому матрица M_{ij} является симметричной.

Уравнение (5.35) вблизи фиксированной точки $x_{\star j}$ имеет вид

$$\frac{dx_i}{dt} = -M_{ij} (x_j - x_{\star j}). \quad (5.36)$$

В силу симметрии матрицы \hat{M} ее всегда можно привести к диагональному виду. Представление (5.36) показывает, что фиксированные точки релаксационного уравнения (5.35) могут быть устойчивыми или неустойчивыми узлами, а также седлами. В то же время они не могут быть фокусами, поскольку собственные значения (действительной) симметричной матрицы всегда действительны. Отметим, что устойчивые узлы соответствуют минимумам функции F , неустойчивые узлы соответствуют максимумам функции F , а седловая точка соответствует экстремуму функции F , которые не сводятся к минимуму или максимуму.

В случае, когда некоторые собственные числа матрицы \hat{M} равны нулю, следует принимать во внимание более высокие, чем второй, члены разложения функции F по $x_i - x_{\star i}$. Тогда может реализоваться случай, когда часть траекторий уходит от фиксированной точки, а часть приближается к ней.

Задача 5.4.1. Как выглядит фазовый портрет системы, которая описывается уравнением (5.5) с двумя переменными и $F = xy^2$?

В силу уравнения (5.35)

$$\frac{dF}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2. \quad (5.37)$$

Поскольку правая часть уравнения (5.37) неотрицательна, функция F монотонно убывает со временем. Отсюда следует в частности, что решениями системы (5.35) не могут быть предельные циклы.

Обычно (если нет никаких особенностей в функции F) любая траектория уравнения (5.5) приближается к некоторому устойчивому узлу, в котором функция F достигает локального минимума. Таким образом, пространство параметров x_i делится на области притяжения, каждая из которых “принадлежит” некоторому устойчивому узлу: траектория, начинающаяся в такой области, со временем приближается к своему устойчивому узлу. Надо иметь в виду, что одним из таких устойчивых узлов может оказаться бесконечно удаленная точка. Границы между областями притяжения содержат траектории уравнения (5.5). В частности, для системы с двумя параметрами, когда граница между областями является некоторой кривой, она является одной из траекторий.

Задача 5.4.2. Установить закон, по которому траектории уравнения (5.35) для функции двух переменных $F = (x^4 + y^4)/4 - (x^2 + y^2)/2 - 3xy$ приближаются к устойчивым фиксированным точкам. Каковы области их притяжения? Проверить, что граница между ними является одной из траекторий.

Рассмотрим частный случай, когда функция F имеет вид

$$F = \frac{a}{2}x^2 + \frac{\lambda}{24}x^4, \quad (5.38)$$

$$x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Эта функция инвариантна относительно вращений в пространстве параметров x_i и относительно изменения знака $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$. При прохождении параметра a через ноль происходит бифуркация. При $a > 0$ имеется единственная устойчивая точка $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, где достигается минимума. А при $a < 0$ функция F достигает минимума на сфере $x^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = -6a/\lambda$.

Уравнение (5.35) для функции (5.38) имеет вид

$$\partial_t x_i = -ax_i - (\lambda/6)x^2 x_i. \quad (5.39)$$

Легко проверить, что уравнение (5.39) с функцией (5.38) сохраняет единичный вектор $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$. Другими словами, уравнение (5.39) описывает изменение \mathbf{x} вдоль некоторой радиальной прямой: $\mathbf{x} = x\mathbf{n}$, где $x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. Уравнение на x имеет вид

$$\partial_t x = -ax - (\lambda/6)x^3. \quad (5.40)$$

При $a > 0$ величина x релаксирует к нулю, а при $a < 0$ величина x релаксирует к значению $\sqrt{6|a|/\lambda}$.

Задача 5.4.3. Найти решение уравнения (5.40) при $a < 0$ для произвольного начального условия x_0 .

Пусть указанная симметрия слабо нарушена, то есть к выражению (5.38) добавлен малый член δF , нарушающий указанную симметрию. Тогда при $a < 0$ эволюция \mathbf{x} проходит в два этапа: сначала происходит быстрая релаксация x к значению $\sqrt{6|a|/\lambda}$, а затем происходит медленная релаксация \mathbf{x} по сфере $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$ к минимуму функции $F + \delta F$. Чтобы установить закон релаксации по сфере, мы должны перейти к уравнению на единичный вектор $\mathbf{n} = \mathbf{x}/x$:

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = -\frac{1}{x} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta F - \mathbf{n} \left(\mathbf{n} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta F \right) \right]. \quad (5.41)$$

При изучении релаксации на втором этапе (релаксация по сфере) мы можем подставить здесь $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$.

Рассмотрим $\delta F = -\mathbf{h}\mathbf{x}$. В этом случае минимум функции $F + \delta F$ достигается при \mathbf{x} , параллельным \mathbf{h} , то есть при релаксации по сфере единичный вектор \mathbf{n} поворачивается к направлению \mathbf{h} . Вследствие уравнения (5.42) находим

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{1}{x} [\mathbf{h} - \mathbf{n}(\mathbf{h}\mathbf{n})]. \quad (5.42)$$

Таким образом, темп релаксации по сфере оценивается, как h/x , где $x = \sqrt{6|a|/\lambda}$.

Задача 5.4.4. Найти зависимость от времени единичного вектора, который подчиняется уравнению (5.42), в двухкомпонентном случае.

Задача 5.4.5. Найти зависимость от времени единичного вектора, который подчиняется уравнению (5.42), в трехкомпонентном случае.

5.4.1 Полевые релаксационные уравнения

Переходим к случаю, когда рассматривается релаксация поля $\varphi(\mathbf{r})$. Динамическое уравнение, которое мы будем анализировать, аналогично (5.35):

$$\partial_t \varphi = -\delta \mathcal{F} / \delta \varphi. \quad (5.43)$$

В правой части здесь стоит вариационная производная некоторого функционала \mathcal{F} от φ . Вычисляя производную от \mathcal{F} , находим

$$\partial_t \mathcal{F} = - \int dV (\delta \mathcal{F} / \delta \varphi)^2 = - \int dV (\partial_t \varphi)^2. \quad (5.44)$$

Таким образом, уравнение (5.43) приводит к монотонному убыванию функционала \mathcal{F} со временем. Поэтому конечным результатом эволюции будет состояние системы, которое соответствует (локальному) минимуму функционала \mathcal{F} в пространстве функций $\varphi(\mathbf{r})$.

Рассмотрим обобщение функции (5.38) на случай поля

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2}a\varphi^2 + \frac{1}{24}\lambda\varphi^4 \right], \quad (5.45)$$

где $\lambda > 0$. Поскольку градиентная энергия, пропорциональная $(\nabla \varphi)^2$, неотрицательна, минимум функционала (5.45) достигается на однородном решении, когда градиентная энергия равна нулю. Поэтому анализ минимумов функционала \mathcal{F} аналогичен уже рассмотренному случаю. При $a > 0$ минимум функционала \mathcal{F} достигается при $\varphi = 0$, а при $a < 0$ минимум достигается при $\varphi_0 = \sqrt{6|a|/\lambda}$.

Уравнение (5.43) для функционала (5.45) имеет вид

$$\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a\varphi - \frac{\lambda}{6}\varphi^3. \quad (5.46)$$

В случае $a > 0$ минимум функционала (5.45) соответствует $\varphi = 0$. Вблизи этого минимума уравнение (5.46) можно линеаризовать, что дает $\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a\varphi$. Делая подстановку $\varphi = \exp(-at)\phi$, находим

$$\varphi = \exp(-at)\phi, \quad \partial_t \phi = \nabla^2 \phi. \quad (5.47)$$

Таким образом наряду с множителем $\exp(-at)$, который описывает затухание φ со временем, поле φ содержит фактор ϕ , который подчиняется диффузионному уравнению. Аналогично происходит релаксация состояния системы к значению $\varphi_0 = \sqrt{6|a|/\lambda}$ при $a < 0$.

Задача 5.4.6. Найти уравнение, которое описывает приближение φ к φ_0 при $a < 0$ и описать его решение.

Помимо минимума $\varphi = \varphi_0$ функционал (5.45) имеет минимум $\varphi = -\varphi_0$. Может случиться, что в разных областях пространства φ релаксирует к разным значениям, $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = -\varphi_0$. В этом случае конечным результатом эволюции является возникновение границы между областями, где φ меняется от $-\varphi_0$ до $+\varphi_0$. Найдем структуру этой границы (доменной стенки), считая ее плоской. Последнее мотивируется тем, что именно для плоской границы достигается минимум функционала (5.45) при условии, что значения φ вдали от границы равны $\pm\varphi_0$.

В равновесии $\partial_t \varphi = 0$, то есть структуру доменной стенки определяет уравнение $\delta\mathcal{F}/\delta\varphi = 0$. Для плоской границы оно приобретает вид

$$a\varphi - \partial_x^2 \varphi + \frac{\lambda}{6}\varphi^3 = 0,$$

где ось X перпендикулярна границе раздела. Это уравнение имеет первый интеграл, который записывается в виде

$$(\partial_x \varphi)^2 = \frac{\lambda}{12}(\varphi^2 - \varphi_0^2)^2,$$

где мы учли, что при $x \rightarrow \pm\infty$ поле φ выходит на однородное значение $\pm\varphi_0$. Мы считаем, что при $x \rightarrow \infty$ поле $\varphi \rightarrow \varphi_0$. Тогда

$$\partial_x \varphi = \sqrt{\lambda/12}(\varphi_0^2 - \varphi^2).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \tanh \left[\sqrt{|a|/2}(x - x_0) \right], \quad (5.48)$$

где x_0 определяет положение границы раздела.

При добавлении к функционалу (5.45) дополнительных членов доменная стенка перестает быть статическим решением, а начинает двигаться с конечной скоростью. Рассмотрим следующий дополнительный член

$$\delta\mathcal{F} = - \int dV h\varphi. \quad (5.49)$$

Если h не слишком велико, то \mathcal{F} по-прежнему имеет два минимума. Значения поля φ в этих минимумах, φ_{\pm} , можно найти из условия $\partial F/\partial\varphi = 0$, где

$$F = \frac{a}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{24}\varphi^4 - h\varphi. \quad (5.50)$$

Значения φ_{\pm} зависят от a, h и переходят в $\pm\varphi_0$ при $h = 0$.

При $h > 0$ минимум \mathcal{F} с $\varphi = \varphi_+ > 0$ становится более глубоким, чем с $\varphi = \varphi_- < 0$. Это означает, что при $h > 0$ доменная стенка, разделяющая области с $\varphi > 0$ и $\varphi < 0$, будет двигаться в сторону области с $\varphi < 0$, так как при этом величина \mathcal{F} уменьшается. Установим соотношение, определяющее скорость движения доменной стенки.

В силу однородности задачи решение уравнения (5.43) можно представить в виде $\varphi = \phi(x+vt)$, где $\phi \rightarrow \varphi_+$ при $x \rightarrow \infty$ и $\phi \rightarrow \varphi_-$ при $x \rightarrow -\infty$. В этом случае при

$h > 0$ доменная стенка движется влево, то есть $v > 0$. При равномерном движении изменение функционала \mathcal{F} определяется изменением объемов с φ_{\pm} , то есть

$$\partial_t \mathcal{F} = vS(F_+ - F_-), \quad (5.51)$$

где S – площадь доменной стенки, а F_{\pm} – значения функции (5.50) при $\varphi = \varphi_{\pm}$. С другой стороны, в силу (5.44)

$$-\partial_t \mathcal{F} = \int dV (\partial_t \phi)^2 = Sv^2 \int dx (\partial_x \phi)^2.$$

Приравнявая данные величины, находим соотношение

$$F_- - F_+ = v \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\partial_x \phi)^2, \quad (5.52)$$

которое и определяет скорость движения доменной стенки.

Возникающую в левой части соотношения (5.52) разность можно явно найти при малых h . Поскольку значения φ_{\pm} определяются условием $\partial F/\partial\varphi = 0$, вариация F_{\pm} при изменении h определяется только частной производной $\partial F_{\pm}/\partial h = -\varphi_{\pm}$. При малых h можно считать $\varphi_{\pm} = \pm\varphi_0$, откуда находим разность $F_+ - F_- = -2\varphi_0 h$.

Задача 5.4.7. Найти скорость движения доменной стенки при малых h , когда выражение (5.48) остается хорошим приближением для функции ϕ .

Уравнение (5.46) при $a < 0$ имеет решение, которое описывает распространение фронта, перед которым поле φ имеет неустойчивое решение $\varphi = 0$, а за фронтом поле φ выходит на равновесное решение $\varphi = \varphi_0$. Будем рассматривать плоский фронт, перпендикулярный оси X . В силу однородности задачи фронт распространяется с постоянной скоростью v . Тогда поле φ представляется в виде $\varphi = \varphi_0 u(x - vt)$, причем $u(\xi) \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и $u(\xi) \rightarrow 1$ при $\xi \rightarrow -\infty$. Подставляя приведенное представление в уравнение (5.46), находим

$$v\partial_{\xi} u + \partial_{\xi}^2 u + |a|(u - u^3) = 0. \quad (5.53)$$

Уравнение (5.53) имеет решение

$$u(\xi) = \frac{1}{1 + \exp(\kappa\xi)}. \quad (5.54)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.53) и приравнявая коэффициенты при различных степенях $\exp(\kappa\xi)$, находим

$$\begin{aligned} -v\kappa + \kappa^2 + |a| &= 0, \\ -v\kappa - \kappa^2 + 2|a| &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает $\kappa = \sqrt{|a|/2}$, $v = 3\sqrt{|a|/2}$.

Задача 5.4.8. Найти темп убывания функционала (5.45) на единицу площади при движении фронта.

До сих пор мы рассматривали скалярное поле. Рассмотрим теперь векторное поле φ . Мы рассматриваем тот же функционал (5.45), который приводит к уравнению

$$\partial_t \varphi = \nabla^2 \varphi - a\varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^2 \varphi, \quad (5.55)$$

которое является обобщением уравнения (5.46). Эволюция поля φ , которая описывается уравнением (5.46), при $a < 0$ проходит в два этапа. Сначала за время порядка $|a|^{-1}$ происходит релаксация абсолютной величины поля φ к равновесному значению φ_0 , после чего поле φ приобретает вид $\varphi = \varphi_0 \mathbf{n}$, где \mathbf{n} – единичный вектор. На больших временах происходит релаксация единичного вектора \mathbf{n} к однородному значению.

Найдем уравнение, которое описывает эту вторую стадию. Для этого подставим $\varphi = |\varphi| \mathbf{n}$ в уравнение (5.55), спроектируем результат на направление, перпендикулярное \mathbf{n} , и пренебрежем производными от $|\varphi| \approx \varphi_0$. В результате находим

$$\partial_t n_\alpha = \nabla^2 n_\alpha + n_\alpha (\nabla n_\beta)^2. \quad (5.56)$$

Это уравнение, как и положено, сохраняет условие $\mathbf{n}^2 = 1$, то есть производная по времени от \mathbf{n}^2 в соответствии с этим уравнением равна нулю. Отметим, что из уравнения (5.56) выпали члены с a и λ , ответственные за релаксацию абсолютного значения параметра порядка. Обратим внимание на то, что уравнение (5.56) является нелинейным.

Задача 5.4.9. Найти решение уравнения (5.56) для двухкомпонентного параметра порядка, когда компоненты \mathbf{n} можно записать в виде $n_1 = \cos \theta$, $n_2 = \sin \theta$.

Задача 5.4.10. Найти решение уравнения (5.56) для трехкомпонентного параметра порядка, когда при $t = 0$ компоненты \mathbf{n} можно записать в виде $n_1 = s_0 \cos(q_0 z)$, $n_2 = s_0 \sin(q_0 z)$, $n_3 = \sqrt{1 - s_0^2}$.

Уравнение (5.56) на больших временах приводит к стационарному состоянию системы. При этом единичный вектор \mathbf{n} может отрелаксировать к однородному состоянию, но могут возникнуть и более сложные конфигурации, для которых правая часть (5.56) равна нулю.

Задача 5.4.11. Показать, что правая часть (5.56) равна нулю для $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, где \mathbf{r} – трехмерный радиус-вектор.

Рассмотрим неустойчивость на конечном волновом векторе, которую можно описать функционалом

$$\mathcal{F} = \int dV \left[\frac{1}{8q_0^2} [(\nabla^2 + q_0^2)\varphi]^2 + \frac{1}{2} a\varphi^2 + \frac{1}{24} \lambda \varphi^4 \right], \quad (5.57)$$

где $\lambda > 0$, а q_0 – некоторый волновой вектор. Уравнение (5.43) для функционала (5.57) имеет вид

$$\partial_t \varphi = -\frac{1}{4q_0^2} (\nabla^2 + q_0^2)^2 \varphi - a\varphi - \frac{\lambda}{6} \varphi^3. \quad (5.58)$$

Обращаем внимание на дифференциальный оператор четвертого порядка в этом уравнении.

При $a > 0$ минимум функционала (5.57) достигается при $\varphi = 0$, а при $a < 0$ этот минимум соответствует ненулевому φ . В силу того, что градиентный член функционала (5.57) имеет минимум при конечном волновом векторе $q = q_0$, при $a < 0$ поле φ в минимуме неоднородно, его можно записать в виде

$$\varphi = \phi \cos(q_0 x), \quad (5.59)$$

где ϕ не зависит от координат, а направление оси X произвольно. Подставляя выражение (5.59) в функционал (5.57), находим

$$\mathcal{F} = V \left(\frac{1}{4} a \phi^2 + \frac{1}{64} \lambda \phi^4 \right), \quad (5.60)$$

где V – объем системы. Выражение (5.60) достигает минимума при $\phi = \phi_0$, где $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$.

Вообще говоря, формула (5.60) дает приближенное выражение для минимума функционала (5.57), которое работает при условии $q_0^2 \gg |a|$. Поправки к (5.60) можно найти из условия экстремума $\delta \mathcal{F} / \delta \varphi = 0$. Выражение для $-\delta \mathcal{F} / \delta \varphi$ выписано в правой части уравнения (5.58). Приравнявая это выражение к нулю, мы находим, что, во-первых, в поле φ появляются высшие гармоники вида $\phi_n \cos[(2n+1)q_0 x]$, во-вторых, возникают поправки к значению $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$.

Задача 5.4.12. Найти первую поправку к выражению (5.59) с $\phi_0 = \sqrt{8|a|/\lambda}$.

Найдем закон релаксации системы к состоянию (5.59). Для этого линеаризуем уравнение (5.58) по $\delta \varphi = \varphi - \phi_0 \cos(q_0 x)$:

$$\partial_t \delta \varphi = -\frac{1}{4q_0^2} (\nabla^2 + q_0^2)^2 \delta \varphi - a \delta \varphi - 2|a|[1 + \cos(2q_0 z)] \delta \varphi.$$

Рассмотрим релаксацию $\delta \varphi$ с волновыми векторами, близкими к q_0 . В этом случае множитель $\cos(2q_0 z)$ порождает вклад в $\delta \varphi$ с волновыми векторами, далекими от q_0 , который будет мал из-за большого в этой области градиентного члена. Поэтому мы пренебрегаем множителем $\cos(2q_0 z)$. Переходя к Фурье-гармонике с волновым вектором \mathbf{q} и раскладывая градиентный член по $q - q_0$, находим

$$\partial_t \tilde{\varphi} = -(q - q_0)^2 \tilde{\varphi} - |a| \tilde{\varphi}. \quad (5.61)$$

Задача 5.4.13. Найти Гриновскую функцию уравнения (5.61).

Глава 6

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Как правило, обыкновенные дифференциальные или полевые уравнения не допускают аналитического решения. В этом случае их можно попытаться решить приближенно, используя тот или иной малый параметр, что позволяет пренебречь частью членов уравнения. Затем можно найти поправки к решению, связанные с отброшенными членами. Зачастую задача осложняется тем, что приближение работает в ограниченной области аргументов, а в других областях приходится применять иные приближения. В настоящем разделе мы разберем основные методы, которые применяются для решения подобных задач.

6.1 Теория возмущений.

Как правило, решения дифференциальных уравнений не могут быть найдены в аналитическом виде. В этом случае для их исследования следует применять численные методы. В то же время существует ограниченный набор “базисных” задач, решения которых могут быть найдены аналитически. Рассмотрим случай, когда дифференциальное уравнение для величины u уравнение сводится к виду

$$F(x, u, \partial_x u, \dots) + \epsilon G(x, u, \partial_x u, \dots) = 0. \quad (6.1)$$

Мы полагаем, что решение уравнения $F = 0$ известно аналитически, а $\epsilon \ll 1$ — малый параметр. В этом случае решение уравнения (6.1) можно искать в виде ряда по ϵ , члены которого, начиная с первого, дают поправки к решению уравнения $F = 0$. Как правило, ряд по ϵ является асимптотическим.

Будем считать, что функция F линейна по старшей производной $\partial_x^n u$, а также является регулярной функцией своих переменных, не имеющей по ним особенностей в интересующей нас области параметров. Этого всегда можно добиться преобразованием уравнения $F = 0$. Построение возмущенного решения уравнения (6.1) сводится к следующему. Мы берем некоторое решение u_0 уравнения $F = 0$ и подставляем его в правую часть уравнения (6.1). После этого следует найти поправку u_1 к u_0 , которую можно найти, как решение линейного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial u} u_1 + \frac{\partial F}{\partial(\partial_x u)} \partial_x u_1 + \dots = -\epsilon G,$$

которое получается линеаризацией левой части уравнения (6.1). В производные $\partial F / \partial u$, $\partial F / \partial(\partial_x u)$ здесь надо подставлять u_0 . Приведенное уравнение следует решать с учетом граничных условий. В результате решения получается поправка $u_1 \propto \epsilon$.

Задача 6.1.1. Найти нулевой и первый по ϵ члены решения уравнения $\partial_x u + \gamma u + \epsilon x u = 0$ с граничным условием $u(0) = 1$. Сравнить его с точным решением этого уравнения.

Чтобы найти поправку второго порядка по ϵ , u_2 , следует подставить сумму $u = u_0 + u_1 + u_2$ в левую часть уравнения (6.1) и удержать в ней член, квадратичный по ϵ . Для этого F следует разложить до первого порядка по u_2 и до второго порядка по u_1 . В правой части уравнения (6.1) также следует найти вклад, квадратичный по ϵ . Для этого в G следует подставить $u = u_0 + u_1$ и удержать член, линейный по u_1 . В результате получится линейное уравнение на u_2 , решение которого (с учетом граничных условий) и даст вклад второго по ϵ порядка в u .

Обобщение этой процедуры на более высокие порядки очевидно. Мы должны каждый раз записывать u в виде $u = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$ и последовательно находить u_1, u_2, \dots , решая линейное уравнение на очередную поправку, которое получается в результате удерживания в левой и правой части уравнения (6.1) членов соответствующего порядка по ϵ . Несмотря на некоторую громоздкость, эта процедура позволяет прямым вычислением найти разложение u по ϵ .

Однако прямая теория возмущений по ϵ оказывается неприменимой вблизи особых точек, где коэффициент при старшей производной в функции F обращается в ноль. Она также неприменима при анализе пограничных слоев, которые формируются в случае, когда член со старшей производной отсутствует в F , но присутствует в G , то есть имеет малость ϵ . Далее мы разбираем эти специальные случаи.

6.1.1 Решение вблизи особой точки основного уравнения

Мы будем называть особыми те точки, где коэффициент при старшей производной в F обращается в ноль. Это является обобщением понятия особой точки, введенное в разделе 2.1.1. При наличии особой точки (которую мы без потери общности будем помещать в $x = 0$) нулевое приближение уравнения (6.1) должно строиться следующим образом. Оно задается решением уравнения $F = 0$ везде, за исключением узкой окрестности точки $x = 0$. Чтобы найти поведение функции u в этой области, в функциях F и G следует сохранить главные по x члены и решить получившееся уравнение. Его решение вне рассматриваемой области выходит на решение уравнения $F = 0$, а вблизи особой точки регулярно по x . На границе указанных областей необходимо “сшить” решения, полученные для разных областей, что означает

приравнивание по порядку величины самой функции и ее производных (в зависимости от порядка уравнения).

Продemonстрируем сказанное на примере следующего уравнения первого порядка (Лайтхилл)

$$(x + \epsilon u)\partial_x u + (2 + x)u = 0. \quad (6.2)$$

Пренебрегая здесь членом с ϵ , находим уравнение $x\partial_x u + (2 + x)u = 0$, которое имеет особую точку $x = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$u = \frac{C}{x^2} \exp(-x), \quad (6.3)$$

где C – произвольная константа. Это решение обращается при $x \rightarrow 0$ в бесконечность. Чтобы исследовать поведение исходного уравнения (6.2) при малых x , следует учесть член с ϵ и сохранить в уравнении главные члены по малому x , что сводится к пренебрежению x в факторе $2 + x$. В результате получаем уравнение

$$(x + \epsilon u)\partial_x u + 2u = 0. \quad (6.4)$$

Сравнение факторов x и ϵu позволяет найти ширину области, где существенен член с ϵ , эта ширина равна $(C\epsilon)^{1/3}$. Подстановка $u = x\eta/\epsilon$ в уравнение (6.4) приводит к уравнению на η с разделяющимися переменными. Его решение дает

$$u(x + \epsilon u/3)^2 = C, \quad (6.5)$$

что при $x \gg (C\epsilon)^{1/3}$ сводится к $u = C/x^2$. Таким образом, решения (6.3) и (6.5) совпадают в промежуточной области $(C\epsilon)^{1/3} \ll x \ll 1$. При $x \ll (C\epsilon)^{1/3}$ решение u выходит на константу $u_0 = (9C/\epsilon^2)^{1/3}$. Обращаем внимание на неаналитическую зависимость u_0 от ϵ .

Задача 6.1.2. Проанализировать решения уравнения

$$(x + \epsilon u)\partial_x u + (3 + x)u = 0$$

при $\epsilon \ll 1$.

Рассмотрим следующее линейное уравнение второго порядка ($\epsilon > 0$)

$$[(x^2 + \epsilon)^2 \partial_x^2 + 2(x^2 + \epsilon)x\partial_x + 1]u = 0, \quad (6.6)$$

при положительных x . Пренебрегая ϵ в (6.6), получаем уравнение, решения которого $\cos(1/x)$, $\sin(1/x)$ ведут себя сингулярно при $x \rightarrow 0$, как и следовало ожидать. Члены с ϵ в (6.6) становятся существенными при $x \sim \sqrt{\epsilon}$. При $x^2 \ll \epsilon$ исходное уравнение (6.6) сводится к уравнению

$$(\epsilon^2 \partial_x^2 + 1)u = 0,$$

решения которого $\cos(x/\epsilon)$, $\sin(x/\epsilon)$ ведут себя регулярно при $x \rightarrow 0$. Можно найти решения исходного уравнения (6.6)

$$\begin{aligned} \cos \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right], \\ \sin \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \arctan \frac{x}{\sqrt{\epsilon}} \right], \end{aligned} \quad (6.7)$$

которые покрывают обе асимптотические области. При $x \ll \sqrt{\epsilon}$ мы получаем из (6.7) $\cos(x/\epsilon)$, $\sin(x/\epsilon)$, так как $\arctan(y) \approx y$ при малых y . При $x \gg \sqrt{\epsilon}$ найденные решения переходят в $\cos(1/x + \alpha)$, $\sin(1/x + \beta)$ с большими значениями фаз α , β .

Задача 6.1.3. Проследить, как решения (6.7) переходят в решения $\cos(1/x + \alpha)$, $\sin(1/x + \beta)$ при $x \gg \sqrt{\epsilon}$.

В рассмотренных выше примерах мы аналитически нашли выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях, что позволяло найти для данного решения коэффициенты во всех асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удастся, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой асимптотической области и потребовать сшивки (то есть равенства по порядку величины) найденных решений на границе областей. Для уравнения порядка выше первого сшивать надо как сами функции, так и их производные (кроме старшей). Это дает представление об общем характере решения и позволяет определить его изменения при вариациях ϵ .

Задача 6.1.4. Построить асимптотические решения уравнения ($x > 0, \epsilon > 0$)

$$(x + \epsilon)\partial_x^2 u + 2\partial_x u + xu = 0,$$

и проследить, как они переходят друг в друга.

В качестве иллюстрации рассмотрим следующее нелинейное уравнение второго порядка

$$(\epsilon^2 + x^2)\partial_x^2 u + x\partial_x u - \frac{3}{4}u^{1/2} = 0, \quad (6.8)$$

где $\epsilon \ll 1$. Будем считать, что при $x = 0$ заданы граничные условия $u = 1$, $\partial_x u = 0$, а определить следует поведение u на больших x .

Сначала рассмотрим область $x \ll \epsilon$, тогда $\epsilon^2 \partial_x^2 u = 3u^{1/2}/4$, что дает первый интеграл $\epsilon^2(\partial_x u)^2 - u^{3/2} = -1$, значение которого следует из граничных условий. И так $\epsilon \partial_x u = \sqrt{u^{3/2} - 1}$. Отсюда следует, что при $x \sim \epsilon$: $u \sim 1$, $\partial_x u \sim 1/\epsilon$. Условия сшивки говорят, что именно такие граничные условия надо использовать при решении задачи при $x \gg \epsilon$.

При $x \gg \epsilon$: $\partial_y^2 u = 3u^{1/2}/4$, $y = \ln(x/\epsilon)$, что дает первый интеграл $(\partial_y u)^2 - u^{3/2} \sim 1$, где константа определяется сшивкой. На больших y находим $\partial_y u = u^{3/4}$, то есть $u = (y/4)^4$. Таким образом, u выходит на универсальную асимптотику, которая знает про малый параметр ϵ только через аргумент логарифма $y = \ln(x/\epsilon)$.

Задача 6.1.5. Найти поведение при больших x решения уравнения $(\epsilon^2 + x^2)\partial_x^2 u + x^2(\partial_x u)^2 - \exp(-u) = 0$, $\epsilon \ll 1$, с граничными условиями $u = \partial_x u = 0$ при $x = 0$.

6.1.2 Пограничный слой

Пограничный слой возникает в случае, когда дифференциальное уравнение, которому подчиняется функция или поле, имеет малый коэффициент при старшей производной. Пренебрежение членом со старшей производной упрощает уравнение, что в ряде случаев позволяет решить его аналитически. Но это аналитическое решение не может удовлетворить граничным условиям, поскольку порядок усеченного уравнения ниже, чем исходный. Поэтому задачу приходится решать отдельно для основной области, где работает усеченное уравнение, и для узкого слоя вблизи границы (пограничного слоя), где учет высшей производной обязателен. Общее решение определяется сшивкой найденных выражений на границе этих областей.

Проиллюстрируем сказанное на простейшем примере уравнения

$$\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u + u = 0, \quad (6.9)$$

где $\epsilon \ll 1$. Будем искать решение с граничными условиями $u = 0$, $\partial_x u = 1$ при $x = 0$. Пренебрегая членом с ϵ в уравнении (6.9), находим уравнение $\partial_x u + u = 0$, общее решение которого имеет вид $u = a \exp(-x)$. Очевидно, это решение не может удовлетворить граничным условиям. Поэтому при малых x решение требует коррекции. Поскольку $u = 0$ при $x = 0$, мы можем при малых x пренебречь членом с u в уравнении (6.9), что дает $\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u = 0$. Решение этого уравнения с данными граничными условиями имеет вид $u = \epsilon[1 - \exp(-x/\epsilon)]$. Условие применимости этого приближения имеет вид $\partial_x u \gg u$, что дает неравенство $x \ll \epsilon \ln(1/\epsilon)$, которое определяет толщину пограничного слоя. При $\epsilon \ln(1/\epsilon) \gg x \gg \epsilon$ найденное решение выходит на константу, равную ϵ . Сравнивая эту константу с $u = a \exp(-x)$, находим константу $a = \epsilon$. Таким образом, мы находим решение $u = \epsilon \exp(-x)$, которое работает при условии $x \gg \epsilon$.

Задача 6.1.6. Уравнение (6.9) решается точно. Найдите его решение с граничными условиями $u = 0$, $\partial_x u = 1$ при $x = 0$ и сравните его с найденным приближенным решением.

Переходим теперь к нелинейным уравнениям. В этом случае возможно существование нескольких решений уравнения и даже построение решения, которое задается различными выражениями на разных интервалах. На границах интервала должны быть выполнены условия “сшивки”: непрерывность функции и ее производных вплоть до производной, на единицу меньше порядка уравнения. Например, для уравнения первого порядка достаточно потребовать непрерывности самой функции, а для уравнения второго порядка должны быть непрерывны сама функция и ее первая производная.

При этом может возникнуть “контринтуитивная” ситуация, когда, скажем, для уравнения первого порядка производная функции может испытывать скачок. Понятие пограничного слоя позволяет прояснить эту ситуацию. Рассмотрим в качестве примера уравнение первого

порядка $(\partial_x u)^2 = 1$. Оно имеет решение $u = |x|$, которое удовлетворяет условию непрерывности, но имеет скачок производной в точке $x = 0$. Спрашивается, как возможно возникновение такого разрывного решения?

Для выяснения этого вопроса введем в указанное уравнение вторую производную с малым коэффициентом: $\epsilon \partial_x^2 u + (\partial_x u)^2 = 1$. Это уравнение легко решается аналитически, для чего следует ввести переменную $w = \partial_x u$, для которой приведенное уравнение является уравнением первого порядка с разделяющимися переменными. Его решением (с точностью до сдвига по x) является $w = \tanh(x/\epsilon)$. Интегрирование этого выражения дает

$$u = \epsilon \ln \cosh(x/\epsilon).$$

Это решение бесконечно дифференцируемо и не имеет никаких особенностей на действительной оси. В то же время мы сталкиваемся с пограничным слоем толщиной ϵ , вне которого, то есть при $|x| \gg \epsilon$, функция $u \approx |x|$. Понятно, что в пределе $\epsilon \rightarrow 0$ мы получаем $u = |x|$, с разрывом производной. Обобщая это наблюдение, можно сказать, что решения с разрывами в производных являются следствием наличия пограничных слоев, толщина которых устремляется к нулю.

Проанализируем нелинейное уравнение

$$\epsilon \partial_x^2 u + (1 + u^2) \partial_x u - 2 = 0, \quad (6.10)$$

где $\epsilon \ll 1$. Снова будем искать решение с граничными условиями $u = 0$, $\partial_x u = 1$ при $x = 0$. Пренебрегая членом с ϵ в уравнении (6.10), находим уравнение, решение которого определяется соотношением $u + u^3/3 = 2(x - x_0)$, которое, очевидно, не может удовлетворить обоим граничным условиям. В силу того, что $u = 0$ для $x = 0$, при малых x членом с u^2 в уравнении (6.10) можно пренебречь. В результате мы находим уравнение $\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u - 2 = 0$, решение которого с принятыми граничными условиями находится из соотношения $\epsilon \partial_x u + u = 2x + \epsilon$. Решение, удовлетворяющее данным граничным условиям, имеет вид

$$u = 2x - \epsilon + \epsilon \exp(-x/\epsilon). \quad (6.11)$$

Критерием применимости (6.11) является $u \ll 1$, то есть $x \ll 1$. В то же время уже при $x \gg \epsilon$ решение (6.11) выходит на $2x - \epsilon$, откуда следует $x_0 = \epsilon/2$.

В рассмотренных примерах удавалось аналитически найти выражения, которые были справедливы сразу в двух асимптотических областях. Как правило, этого сделать не удастся, и в лучшем случае решение можно найти численно. Однако для общего анализа решения достаточно исследовать его поведение в каждой асимптотической области и потребовать сшивки (то есть равенства по порядку величины) найденных решений на границе областей. Эта процедура дает представление об общем характере решения и позволяет найти его изменения при вариациях ϵ .

Задача 6.1.7. Проанализировать решение уравнения $\epsilon \partial_x^2 u + \partial_x u + xu = 0$ при малых x .

Пограничный слой может содержать несколько подслоев. Рассмотрим уравнение

$$\epsilon^3 \partial_x^2 u + x^3 \partial_x u + (x^2 - \epsilon)u = 0, \quad (6.12)$$

где $x > 0, \epsilon > 0, \epsilon \ll 1$. Полагая в (6.12) $\epsilon = 0$, находим уравнение $x \partial_x u + u = 0$. Его решение $\propto 1/x$, оно реализуется в основной области $x \gg \epsilon^{1/2}$. При $\epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2}$ можно пренебречь первым членом в (6.12) и x^2 по сравнению с ϵ , что приводит к уравнению $x^3 \partial_x u - \epsilon u = 0$, решение которого $\propto \exp[-\epsilon/(2x^2)]$. При $x \ll \epsilon^{2/3}$ в (6.12) следует оставить только члены с ϵ , что приводит к уравнению $\epsilon^2 \partial_x^2 u - u = 0$, решения которого $\exp(\pm x/\epsilon)$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} u &= A \exp(x/\epsilon) + B \exp(-x/\epsilon), & x \ll \epsilon^{2/3}, \\ u &= C \exp[-\epsilon/(2x^2)], & \epsilon^{2/3} \ll x \ll \epsilon^{1/2}, \\ u &= D \epsilon^{1/2}/x, & x \gg \epsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Эти выражения должны по порядку величины совпадать на границах областей, что дает два условия на константы A, B, C, D . Еще два соотношения дают граничные условия.

Рассмотрим в качестве примера решение с граничными условиями $u = 1, \partial_x u = 0$ при $x = 0$. Тогда в первой области $u = \cosh(x/\epsilon)$, что дает $\ln u \sim \epsilon^{-1/3}$ на границе. Условия сшивки на границах областей дают $\ln C \sim \epsilon^{-1/3}$, а затем и $\ln D \sim \epsilon^{-1/3}$. Обратим внимание на немонотонность решения, которое сначала растет, а затем убывает.

Задача 6.1.8. Проанализировать решение уравнения $\epsilon^3 \partial_x^2 u + \epsilon \sinh u \partial_x u + x \partial_x u + \tanh u = 0$ при малых ϵ . Рассмотреть случай граничного условия $u = 0$ при $x = 0$.

Понятие пограничного слоя возникает и в полевых уравнениях. В дальнейшем в качестве важного частного случая мы рассмотрим пограничный слой в гидродинамических течениях при больших числах Рейнольдса.

6.2 Метод усреднения и медленная эволюция

В данном разделе мы будем рассматривать свойства решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \epsilon v_1, \quad (6.14)$$

где ϵ считается малым параметром, а уравнение $dx/dt = v_0$ является интегрируемым. Это значит, что у него имеется несколько первых интегралов (сохраняющихся величин), а динамика сводится к равномерному по времени изменению параметров типа фазы.

Уравнение (6.14) можно решать по теории возмущений, которая заключается в следующем. Сначала мы

находим решение x_0 уравнения $dx/dt = v_0$, затем подставляем это нулевое решение в v_1 и находим из уравнения (6.14) первую по ϵ поправку к нулевому решению x_1 , и так далее. Тем самым решение будет найдено в виде ряда по ϵ . Эта процедура может быть осуществлена аналитически, если функции v_0, v_1 достаточно просты. В противном случае ее можно осуществлять только численно.

Однако в ряде случаев разложение по ϵ может разрушаться на больших временах t . Это происходит, если решение x_0 уравнения $dx/dt = v_0$ имеет осцилляторный характер, а функция v_1 приводит к резонансу с этими осцилляциями. В этом случае в решении уравнения (??) возникают вековые (секулярные) члены, которые растут со временем быстрее, чем нулевое решение x_0 . Это приводит к тому, что со временем секулярные члены, несмотря на малость по ϵ , могут стать сравнимыми с нулевым решением, что и приводит к его разрушению. Роль секулярных членов в дифференциальных уравнениях исследовалась еще в 18 веке в работах Лагранжа и Лапласа при расчете эволюции планетных орбит.

В качестве простейшей иллюстрации сказанного рассмотрим уравнение для слабо нелинейного осциллятора

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon x^3, \quad (6.15)$$

где ϵ – малый параметр. При $\epsilon = 0$ уравнение (6.15) легко решается, его решение имеет вид $x_0 = a \cos(t - \tau)$, где a, τ – произвольные константы.

Найдем теперь x_1 – первую по ϵ поправку к x_0 . Подставляя $x_0 = a \cos(t - \tau)$ в правую часть уравнения (6.15), мы находим уравнение для поправки x_1 :

$$\partial_t^2 x_1 + x_1 = \frac{1}{4} \epsilon a^3 [\cos(3t - 3\tau) + 3 \cos(t - \tau)]. \quad (6.16)$$

Второе слагаемое в правой части (6.16) имеет частоту основного решения, то есть находится в резонансе с левой частью этого уравнения. Оно порождает следующий секулярный вклад в x_1 :

$$x_1 = \frac{3}{8} \epsilon a^3 (t - \tau) \sin(t - \tau).$$

Очевидно, что на достаточно больших временах, когда $t \sim (\epsilon a^2)^{-1}$, приведенная поправка становится порядка нулевого решения, что и означает нарушение применимости разложения по ϵ .

Можно существенно усовершенствовать схему решения уравнения (6.15) по сравнению с прямой теорией возмущений, построив приближенное решение, которое работает и на временах t много больших $(\epsilon a^2)^{-1}$. Очевидно, что уравнение (6.15) сводится к виду (6.14) после простой подстановки $dx/dt = y$. Систему уравнений первого порядка для x, y удобно переписать в терминах комплексной переменной $z = x + iy$

$$\partial_t z + iz = i \epsilon x^3. \quad (6.17)$$

Будем искать решение уравнения (6.17) в виде $z = a \exp(i\tau - it)$, где a и τ являются медленными функциями времени. Подставляя это выражение в уравнение (6.17), находим $\partial_t(ae^{i\tau}) = (3i/8)a^3e^{i\tau}$, где мы оставили в правой части только резонансный член, который и отвечает за секулярные члены. Таким образом

$$\partial_t a = 0, \quad \partial_t \tau = \frac{3}{8}\epsilon a^2. \quad (6.18)$$

Очевидным решением системы (6.18) является $a = \text{const}$, $\tau = \tau_0 + (3/8)\epsilon a^2 t$, где τ_0 – произвольная константа. Таким образом, мы приходим к решению

$$z = a \exp[-it + (3/8)i\epsilon a^2 t + i\tau_0], \quad (6.19)$$

которое представляет собой осцилляции с частотой $\omega = 1 - (3/8)\epsilon a^2$. Поправка к единице называется нелинейным сдвигом частоты.

Оценим точность найденного приближения. Для этого выпишем точные уравнения на a, τ , следующие из уравнения (6.17)

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon a^2}{8} [3 + 4 \cos(2\tau - 2t) + \cos(4\tau - 4t)], \quad (6.20)$$

$$\partial_t a = \frac{\epsilon a^3}{8} [2 \sin(2\tau - 2t) + \sin(4\tau - 4t)]. \quad (6.21)$$

Находя из уравнения (6.21) осциллирующую поправку к a с амплитудой $\sim \epsilon a^3$, подставляя ее в уравнение (6.20) и усредняя по периоду, находим поправки $\sim \epsilon^2 a^4$ к $\partial_t \tau$, то есть дополнительный нелинейный сдвиг частоты $\sim \epsilon^2 a^4$. На этом пути можно достигнуть улучшения решения (6.19). Надо только договориться о том, что называть амплитудой колебаний в условиях, когда имеется осциллирующий вклад в a .

Задача 6.2.1. Сравнить решение (6.19) с точным решением уравнения (6.15) и проверить критерий применимости выражения (6.19).

Приведенную выше схему можно обобщить на случай произвольного малого возмущения уравнения гармонического осциллятора. А именно, рассмотрим уравнение осциллятора с частотой 1 и добавим в правую часть этого уравнения произвольный малый член, зависящий от x и $y = \partial_t x$:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon G(x, y). \quad (6.22)$$

Способ приближенного решения такого уравнения называется методом Боголюбова-Крылова. Как и выше, введем вспомогательную переменную $z = x + iy$. В терминах этой функции уравнение (6.22) приобретает следующую форму

$$\partial_t z = -iz + i\epsilon G(\text{Re } z, \text{Im } z). \quad (6.23)$$

Вводим абсолютное значение и фазу z : $z = a \exp(i\tau - it)$. Тогда уравнение (6.23) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \partial_t a &= \epsilon \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi), \\ \partial_t \tau &= \epsilon \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi), \end{aligned} \quad (6.24)$$

где $\varphi = -t + \tau$.

До сих пор преобразования были точными. Чтобы продвинуться дальше, заметим, что приращения a и τ за период малы в силу малости ϵ . Поэтому при вычислении этих приращений в правой части (6.24) a и τ можно считать константами, что дает

$$\begin{aligned} \Delta a &= \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi), \\ \Delta \tau &= \epsilon \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что τ выпадает из выражений для приращений (в силу того, что начало отсчета периода произвольно). Таким образом, для медленной эволюции (на больших временах) мы находим следующие эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \varphi G(a \cos \varphi, a \sin \varphi), \quad (6.25)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\cos \varphi}{a} G(a \cos \varphi, a \sin \varphi). \quad (6.26)$$

Легко проверить, что для проанализированной нами задачи (6.15), когда $G = x^3$, уравнения (6.25, 6.26) сводятся к уравнениям (6.18).

Задача 6.2.2. Найти поведение на больших временах амплитуды колебаний осциллятора с нелинейным затуханием $\partial_t^2 x + x = -\epsilon(\partial_t x)^3$ при малом ϵ .

Задача 6.2.3. Проанализировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = -\epsilon \partial_t x |\partial_t x|$ при малом ϵ .

Рассмотрим уравнение Ван дер Поля (5.10) с малым множителем в правой части, $\mu = \epsilon \ll 1$:

$$\partial_t^2 x + x = \epsilon(1 - x^2)\partial_t x. \quad (6.27)$$

Уравнение (6.25) для этого случая сводится к

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2} a(1 - a^2/4), \quad \partial_t \tau = 0. \quad (6.28)$$

Уравнение (6.28) описывает приближение амплитуды a к устойчивой фиксированной точке $a = 2$, которая соответствует асимптотическому режиму автоколебаний (предельному циклу).

Задача 6.2.4. Проанализировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = -\epsilon(1 - x^2)^2 \partial_t x$ при малом ϵ .

Задача 6.2.5. Проанализировать поведение решения уравнения $\partial_t^2 x + x = \epsilon(1 - x^2)\partial_t x + \epsilon x^3$ при малом ϵ .

Метод Боголюбова-Крылова может быть обобщен на случай явной зависимости функции G в уравнении (6.22) от времени при условии, что коэффициенты G

являются периодическими функциями времени с периодом 2π . Для решения задачи в этом случае снова исходим из уравнений (6.24), где в правой части появляется явная зависимость от времени:

$$\begin{aligned}\partial_t a &= \epsilon \sin \varphi G(t, a \cos \varphi, a \sin \varphi), \\ \partial_t \tau &= \epsilon \frac{\cos \varphi}{a} G(t, a \cos \varphi, a \sin \varphi),\end{aligned}\quad (6.29)$$

где $\varphi = -t + \tau$. Снова интегрируя по периоду и находя приращения a и τ , находим эффективные уравнения

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \sin \varphi G(t - \phi, a \cos \varphi, a \sin \varphi), \quad (6.30)$$

$$\partial_t \tau = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\cos \varphi}{a} G(t - \phi, a \cos \varphi, a \sin \varphi), \quad (6.31)$$

где $\varphi = \tau - t + \phi$. Обратим внимание на то, что теперь τ явно входит в решение.

Задача 6.2.6. Найти решение уравнений (6.30, 6.31) для резонансной накачки $G = \cos t$.

Задача 6.2.7. Найти решение уравнений (6.30, 6.31) для резонансной параметрической накачки $G = x \cos(2t)$.

Задача 6.2.8. Найти решение уравнений (6.30, 6.31) для осциллятора Ван дер Поля с накачкой $G = (1 - x^2)\partial_t x + \kappa \cos t$.

До сих пор мы приводили выражения для приближенных уравнений колебаний возмущенного осциллятора с единичной частотой. Все найденные выражения легко обобщаются на случай конечной частоты осциллятора ω . Приведем соответствующие выражения. Вместо уравнения (6.22) следует рассмотреть уравнение

$$\partial_t^2 x + \omega^2 x = \epsilon G, \quad (6.32)$$

где ω – собственная частота осциллятора. Будем искать решение этого уравнения в виде

$$x = a \cos(-\omega t + \theta), \quad (6.33)$$

где a, θ – медленные функции времени. Уравнения на эти функции являются прямым обобщением уравнений (6.25, 6.26)

$$\partial_t a = \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi) G, \quad (6.34)$$

$$\partial_t \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi) G. \quad (6.35)$$

При вычислении интегралов в правых частях (6.34, 6.35) в функцию G следует подставить $u \rightarrow a \cos \varphi$, $\partial_t u \rightarrow \omega \sin \varphi$. Уравнения (6.34, 6.35), очевидно, сводятся к (6.25, 6.26) при $\omega = 1$.

В качестве тривиального примера рассмотрим линейный осциллятор с затуханием. В этом случае $G =$

$-2\partial_t x$, а ϵ является декрементом затухания. Подставляя это выражение в соотношения (6.34, 6.35), находим $\partial_t \theta = 0$, $\partial_t a = -\epsilon a$. Как и следует, амплитуда a затухает со временем с декрементом ϵ .

Рассмотрим теперь более сложный пример с тремя переменными, которые подчиняются уравнениям

$$\partial_t x = xz + \epsilon g_1, \quad (6.36)$$

$$\partial_t y = -xz + \epsilon g_2, \quad (6.37)$$

$$\partial_t z = xy + \epsilon g_3, \quad (6.38)$$

где ϵ – малый параметр, а g_1, g_2, g_3 – функции x, y, z . Динамическое поведение, которое дается системой уравнений (6.36-6.38), включает в себя движение по предельному циклу и медленную эволюцию за счет членов с ϵ . Продемонстрируем, как надо анализировать последнюю.

При $\epsilon = 0$ система уравнений (6.36-6.38) имеет два интеграла движения, C и R , которые определяются, как

$$C = x + y, \quad R^2 = y^2 + z^2. \quad (6.39)$$

Вводя параметризацию $y = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, находим $\partial_t \varphi = x$, то есть

$$\partial_t \varphi = C - R \cos \varphi. \quad (6.40)$$

Мы будем считать $|C| > R$, тогда уравнение (6.40) описывает движение по замкнутой траектории. Период для движения по этой траектории равен

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|C - R \cos \varphi|} = \frac{2\pi}{\sqrt{C^2 - R^2}}. \quad (6.41)$$

Теперь мы переходим к роли малых членов в системе уравнений (6.36-6.38). С их учетом находим

$$\partial_t C = \epsilon(g_1 + g_2), \quad (6.42)$$

$$R\partial_t R = \epsilon(yg_2 + zg_3). \quad (6.43)$$

Правые части уравнений (6.42, 6.43) содержат быстро осциллирующие множители. Чтобы получить уравнения медленной динамики на C, R , следует усреднить правые части уравнений (6.42, 6.43) по периоду. Удобнее перейти к усреднению по углу φ , что осуществляется при помощи уравнения (6.40). В результате находим уравнения

$$\begin{aligned}\partial_t C &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \epsilon(g_1 + g_2) \\ &= \frac{\sqrt{C^2 - R^2}}{2\pi} \text{sign } C \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{C - R \cos \varphi} \epsilon(g_1 + g_2),\end{aligned}\quad (6.44)$$

$$\begin{aligned}R\partial_t R &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \epsilon(yg_2 + zg_3) \\ &= \frac{\sqrt{C^2 - R^2}}{2\pi} \text{sign } C \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{C - R \cos \varphi} \epsilon(yg_2 + zg_3),\end{aligned}\quad (6.45)$$

которые определяют медленную динамику системы. Знак C в (6.44, 6.45) возник из-за противоположного направления движения по циклу при разных знаках C .

Задача 6.2.9. Найти уравнения (6.44, 6.45) для функций $g_1 = -2x$, $g_2 = -y + 2$, $g_3 = -z$. Считать $C > 0$.

Задача 6.2.10. Найти стационарный предельный цикл, который определяется уравнениями (6.44, 6.45) с функциями $g_1 = -2x$, $g_2 = -y + 2$, $g_3 = -z$. Исследовать этот предельный цикл на устойчивость.

6.2.1 Усредненные уравнения для волнового движения

Метод усреднения, развитый выше для колебательного движения, непосредственно обобщается и для волнового движения. Как и для колебательного движения, мы будем считать, что в главном приближении волновое движение описывается линейными волновыми уравнениями, и будем изучать роль малых поправок, связанных с нелинейностью, внешним воздействием, неоднородностью и так далее.

Рассмотрим волновое движение, которое описывается полем $u(t, \mathbf{r})$, уравнение на которое имеет вид

$$\partial_t^2 u + \hat{\omega}^2 u = \epsilon G. \quad (6.46)$$

Здесь оператор $\hat{\omega} = \omega(\mathbf{q} - i\nabla)$ определяется законом дисперсии $\omega(\mathbf{q})$ волнового движения, а G – некоторая функция поля u , его производных, а также, возможно, времени и координат. Параметр ϵ в правой части уравнения (6.46) считается малым. В нулевом приближении, когда $\epsilon = 0$, уравнение (6.46) сводится к чисто волновому линейному уравнению, которое, в частности, имеет решение в виде бегущей плоской волны с волновым вектором \mathbf{q} : $u = a \cos(-\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r} + \theta)$, где $\omega = \omega(\mathbf{q})$, а θ – произвольная константа. Будем искать решение уравнения (6.46) в том же виде $u = a \cos(-\omega t + \mathbf{q}\mathbf{r} + \theta)$, где теперь (с учетом дополнительного члена с G) параметры a и θ являются медленными функциями времени и координат.

Используем тот же прием, который позволил найти усредненные уравнения для возмущенного гармонического осциллятора. Для этого вводим функции u_1 и w : $\partial_t u = \hat{\omega} u_1$, $w = u + i u_1$. Тогда уравнение (6.46) перепишется в виде уравнения первого порядка

$$\partial_t w = -i \hat{\omega} w + i \epsilon \hat{\omega}^{-1} G. \quad (6.47)$$

Подставляя сюда $w = a \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{r} + i\theta)$, находим

$$\partial_t a + i a \partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla a + i a \mathbf{v} \nabla \theta = \frac{i \epsilon}{\omega} G \exp(-i\varphi), \quad (6.48)$$

где $\mathbf{v} = \partial \omega / \partial \mathbf{q}$ – групповая скорость волны. Здесь и далее $\varphi = \theta - \omega t + \mathbf{q}\mathbf{r}$. При выводе уравнения (6.48) мы использовали соотношение ($\psi = a e^{i\theta}$)

$$\omega(-i\nabla) [\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \psi] = \exp(i\mathbf{q}\mathbf{r}) \omega(\mathbf{q} - i\nabla) \psi, \quad (6.49)$$

и сохранили в $\omega(\mathbf{q} - i\nabla)$ нулевой и первый члены разложения по ∇/\mathbf{q} . Мы также заменили в правой части $\hat{\omega} \rightarrow \omega$, что справедливо в главном порядке по ϵ .

Выделяя в полученном уравнении действительную и мнимую части, находим

$$\partial_t a + \mathbf{v} \nabla a = \frac{\epsilon}{\omega} \sin(\varphi) G,$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \cos(\varphi) G.$$

Усредняя эти уравнения по периоду, мы находим уравнения для медленных переменных

$$\partial_t a + \mathbf{v} \nabla a = \frac{\epsilon}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sin(\varphi) G, \quad (6.50)$$

$$\partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = \frac{\epsilon}{\omega a} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \cos(\varphi) G. \quad (6.51)$$

В аргументе функции G в выражениях (6.50, 6.51) следует подставлять $u \rightarrow a \cos \varphi$, $\nabla u \rightarrow -\mathbf{q} a \sin \varphi$, $\partial_t u \rightarrow \omega a \sin \varphi$. Последние выражения получаются в главном приближении по ϵ , что достаточно в силу того, что правая часть выражений (6.50, 6.51) уже содержит малость по ϵ .

Уравнения (6.50, 6.51) являются прямым обобщением уравнений (6.34, 6.35). Единственная разница заключается в наличии переносного члена с градиентом. Можно сказать, что уравнения (6.50, 6.51) совпадают с уравнениями (6.34, 6.35) в системе отсчета, которая движется с групповой скоростью \mathbf{v} . Следует, однако, помнить о том, что мы имеем дело с полем, заданным в пространстве. И потому уравнения (6.50, 6.51) необходимо решать с учетом граничных условий.

В качестве тривиальной иллюстрации сказанного рассмотрим случай затухающей волны. В этом случае $G = -2\partial_t u$, а ϵ является декрементом затухания волны. Подстановка этого выражения в соотношения (6.50, 6.51) приводит к уравнениям

$$\partial_t a + \mathbf{v} \nabla a = -\epsilon a, \quad \partial_t \theta + \mathbf{v} \nabla \theta = 0.$$

Решение уравнения для амплитуды a неоднозначно. Например, решениями этого уравнения являются $a \propto \exp(-\epsilon t)$ (a не зависит от координат), или $a \propto \exp(-\epsilon \mathbf{v}\mathbf{r}/v^2)$ (a не зависит от времени). Найти истинное решение уравнения для амплитуды a можно только с учетом граничных условий.

Перейдем теперь к уравнению на огибающую $\psi = a \exp(i\theta)$. В этом случае уравнения (6.50, 6.51) перепишутся в виде

$$\partial_t \psi + \mathbf{v} \nabla \psi = \frac{i \epsilon}{\omega} \exp(i\theta) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \exp(-i\varphi) G. \quad (6.52)$$

Например, для $G = u^3$ уравнение (6.52) сводится к

$$\partial_t \psi + \mathbf{v} \nabla \psi = \frac{3i \epsilon}{8\omega} |\psi|^2 \psi. \quad (6.53)$$

Если перейти в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью \mathbf{v} и учесть следующий член разложения $\varpi(\mathbf{q} - i\nabla)$ по ∇/q в (6.49), то мы получим нелинейное уравнение Шрёдингера.

Задача 6.2.11. Найти уравнение на огибающую ψ для $G = u(\nabla u)^2$.

Задача 6.2.12. Найти уравнение на огибающую ψ для нелинейного затухания $G = -\partial_t u(\nabla u)^2$.

6.3 Параметрическая неустойчивость

Параметрической неустойчивостью называется неустойчивость системы, вызванная периодическим изменением ее параметров за счет внешнего воздействия. Она возникает, если реализуется резонанс, возбуждающий одну из колебательных мод. Мы продемонстрируем основные особенности параметрической неустойчивости на простейшем примере системы с одной степенью свободы.

Рассмотрим осциллятор, частота которого за счет внешнего воздействия периодически меняется со временем по гармоническому закону. Тогда для описывающей колебания переменной x можно сформулировать следующее динамическое уравнение

$$\partial_t^2 x + x - 2f \cos(2\omega t)x = 0, \quad (6.54)$$

которое называется уравнением Матьё. При $f = 0$ уравнение Матьё (6.54) описывает осцилляции с частотой, равной единице. Фактор f всегда можно сделать положительным, выбрав соответствующее начало отсчета времени, поэтому мы полагаем $f > 0$. В дальнейшем мы считаем фактор f малой величиной, $f \ll 1$, что означает слабость внешнего воздействия.

При некоторых частотах ω вблизи единицы уравнение (6.54) приводит к неустойчивости, то есть величина x экспоненциально растет со временем. Для анализа этого явления, как и раньше, удобно перейти от уравнения второго порядка (6.54) к уравнению первого порядка для величины $z = x + i\partial_t x$:

$$\partial_t z + iz = if \cos(2\omega t)(z + z^*). \quad (6.55)$$

Несложно сообразить, что резонанс в правой части будет наблюдаться в случае, когда z меняется с частотой ω . Резонанс приведет к неустойчивости, если ω близка к единице. Поэтому в дальнейшем мы считаем $|\delta\omega| \ll 1$, где $\delta\omega = \omega - 1$.

Чтобы исследовать характер решения уравнения (6.55), мы делаем подстановку

$$z = a \exp(i\varphi - i\omega t), \quad (6.56)$$

где амплитуда a и фаза φ медленно меняются со временем, то есть характерное время их изменения много

больше единицы. Подставляем выражение (6.56) в уравнение (6.55) и удерживаем в правой части только резонансный член. В результате находим

$$\partial_t a = \frac{f}{2} a \sin(2\varphi), \quad (6.57)$$

$$\partial_t \varphi = \delta\omega + \frac{f}{2} \cos(2\varphi). \quad (6.58)$$

При $f = 0$ фаза φ линейно меняется со временем, что означает поправку к частоте ω , которая возвращает частоту колебаний системы от ω к единице.

Уравнение (6.58) представляет собой замкнутое уравнение на фазу φ , это свойство является следствием линейности исходного уравнения (6.54) по x . При $f > 2|\delta\omega|$ уравнение (6.58) имеет фиксированные точки, положение которых определяется, если приравнять к нулю правую часть уравнения, что дает

$$\cos(2\varphi) = -2\delta\omega/f. \quad (6.59)$$

Это соотношение имеет два существенно разных решения, отличающиеся знаком $\sin(2\varphi)$. Для малых отклонений от стационарной фазы $\delta\varphi$ из уравнения (6.58) следует

$$\partial_t \delta\varphi = -f \sin(2\varphi) \delta\varphi.$$

Таким образом, стационарное значение φ устойчиво, если $\sin(2\varphi) > 0$. Именно на такое стационарное значение фазы система выходит за время $\sim f^{-1}$.

Как следует из приведенного анализа, в стационарном случае

$$\sin(2\varphi) = \sqrt{1 - 4(\delta\omega)^2/f^2}.$$

Подставляя это значение в уравнение (6.57), мы находим

$$\partial_t \ln a = \alpha, \quad \alpha = \sqrt{f^2/4 - (\delta\omega)^2}. \quad (6.60)$$

Таким образом, амплитуда a экспоненциально растет со временем, $a \propto \exp(\alpha t)$, то есть α является инкрементом неустойчивости. Отметим, что выражение под квадратным корнем в (6.60) является положительным при принятом нами неравенстве $f > 2|\delta\omega|$, которое и является условием возбуждения параметрической неустойчивости.

Инкремент неустойчивости α (6.60) равен нулю на границах интервала возбуждения неустойчивости, при $f = 2|\delta\omega|$, он тем больше, чем меньше $\delta\omega$ и достигает максимума в условиях точного резонанса $\delta\omega = 0$. В этом случае $\alpha = f/2$. Как следует из условия (??), в условиях точного резонанса $\cos(2\varphi) = 0$. Поскольку мы рассматриваем случай $\sin(2\varphi) > 0$, то из системы (??) следует, что в условиях точного резонанса $\varphi = \pi/4 + \pi n$, где n – целое число. Без ограничения общности можно положить $n = 0$.

Задача 6.3.1. Чему равен сдвиг фаз φ на границах интервала возбуждения неустойчивости?

Задача 6.3.2. Какой характер имеет решение системы уравнений (6.57, 6.58) при обратном условии $f < 2|\delta\omega|$?

Введем в наше уравнение для x малое затухание с декрементом γ , $\gamma \ll 1$. Тогда уравнение приобретает следующий вид

$$\partial_t^2 x + x + 2\gamma \partial_t x - 2f \cos(2\omega t)x = 0, \quad (6.61)$$

Стартуя с представления (6.56) и повторяя те же шаги, что и раньше, мы приходим к тому же уравнению (6.58) для фазы, а уравнение для амплитуды (6.57) модифицируется, оно превращается в

$$\partial_t a = \frac{f}{2} a \sin(2\varphi) - \gamma a. \quad (6.62)$$

Мы находим прежнее выражение для стационарной фазы (6.59). Поэтому инкремент неустойчивости становится равным

$$\alpha = \sqrt{f^2/4 - (\delta\omega)^2} - \gamma.$$

Для возбуждения параметрической неустойчивости эта величина должна быть положительной, и мы приходим к условию возбуждения

$$f^2/4 > (\delta\omega)^2 + \gamma^2,$$

с учетом затухания. Наличие затухания, как и следовало ожидать, сужает интервал $\delta\omega$, при которых возбуждается неустойчивость. Кроме того, возникает порог по f , $f_{\min} = 2\gamma$, ниже которого неустойчивость не возбуждается ни при каком $\delta\omega$.

Параметрическая неустойчивость насыщается при учете нелинейности в уравнении на переменную x . Для физического маятника эта нелинейность является кубической. Добавление кубической нелинейности приводит к модификации уравнения (6.54), оно превращается в

$$\partial_t^2 x + x + x^3 - 2f \cos(2\omega t)x = 0. \quad (6.63)$$

Стартуя с представления (6.56) и повторяя те же шаги, что и раньше, мы приходим к тому же уравнению (6.57) для амплитуды, а уравнение для фазы (6.58) модифицируется, оно превращается в

$$\partial_t \varphi = \delta\omega + \frac{f}{2} \cos(2\varphi) - \frac{3}{8} a^2. \quad (6.64)$$

Здесь добавился уже известный нам член с нелинейным сдвигом частоты.

Система уравнений (6.57, 6.64) имеет стационарное решение. В этом случае из уравнения (6.57) вытекает $\sin(2\varphi) = 0$. Для φ следует выбрать решение, соответствующее $\cos(2\varphi) = 1$. Без ограничения общности можно взять $\varphi = 0$. В этом случае из уравнения (6.64) следует соотношение

$$\frac{3}{8} a_0^2 = \delta\omega + \frac{f}{2}, \quad (6.65)$$

которое определяет стационарную амплитуду $a = a_0$. Из-за малости факторов $f, \delta\omega$ является малой и получающаяся из соотношения (6.65) амплитуда a_0 , что означает малость кубического члена и оправдывает нашу процедуру.

Обратим внимание на то, что в соответствии с выражением (6.65) условием существования стационарной точки является $f/2 + \delta\omega > 0$. Это условие заведомо выполняется для сдвига частот $|\delta\omega| < f/2$, когда возбуждается параметрическая неустойчивость. Однако условие $f/2 + \delta\omega > 0$ выполняется и для $\delta\omega > f/2$, когда параметрическая неустойчивость не возбуждается. При этом стационарная точка (6.65) существует и в ее окрестность можно попасть при достаточно большом значении амплитуды a . Таким образом, нелинейность позволяет попасть в режим колебаний с конечной амплитудой даже для расстройки частоты $\delta\omega$ вне интервала возбуждения параметрической неустойчивости, но только с одной стороны от этого интервала.

Задача 6.3.3. Нелинейность в уравнении на x может быть и иного знака:

$$\partial_t^2 x + x - x^3 - 2f \cos(2\omega t)x = 0.$$

Каково в этом случае будет выражение для стационарной амплитуды a ? При каких частотах существует стационарное решение?

Уравнения (6.57, 6.64) могут быть переписаны в каноническом виде

$$\partial_t \varphi = \frac{\partial H}{\partial(a^2)}, \quad \partial_t(a^2) = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad (6.66)$$

$$H = \delta\omega a^2 + \frac{f a^2}{2} \cos(2\varphi) - \frac{3}{16} a^4. \quad (6.67)$$

Отсюда следует закон сохранения “энергии” H вдоль траектории. Таким образом, фазовый портрет системы устроен весьма специфически. В зависимости от величины H , траектории системы являются либо замкнутыми траекториями, идущими вокруг найденной нами стационарной точки, либо являются открытыми траекториями, когда φ монотонно зависит от времени, а амплитуда a периодически меняется со временем.

Таким образом, при умеренных начальных a решение попадает на одну из замкнутых траекторий, идущих вокруг стационарной точки, при этом амплитуда a периодически меняется вокруг величины a_0 , определяемой соотношением (6.65), а угол φ меняется в конечных пределах вокруг нуля. При достаточно больших a реализуется второй случай, который соответствует сдвигу основной частоты от значения ω и сильным ангармонизмом.

Задача 6.3.4. Найти частоту осцилляций для замкнутых траекторий малого радиуса, то есть близких к стационарной точке.

Задача 6.3.5. *Найти характер решения системы уравнений (6.57, 6.64) при больших a .*

Обсудим теперь роль затухания. Как будет видно, с его учетом (при некоторых условиях) сохраняется стационарная точка в уравнениях на a, φ . Однако характер этой стационарной точки меняется: она становится устойчивой, являясь устойчивым узлом или фокусом, в зависимости от параметров. Таким образом, при наличии затухания система приходит в конце концов в эту стационарную точку, которая и определяет в основном поведение системы.

При учете затухания уравнение на амплитуду a приобретает вид (6.62). Поэтому мы находим в стационарном случае

$$\sin(2\varphi_0) = 2\gamma/f. \quad (6.68)$$

Следует выбрать решение с $\cos(2\varphi_0) > 0$, то есть $0 < \varphi_0 < \pi/4$. Для фазы же справедливо уравнение (6.64). Из него с учетом $\cos(2\varphi_0) > 0$ находим стационарное решение

$$3a_0^2/8 = \sqrt{f^2/4 - \gamma^2} + \delta\omega, \quad (6.69)$$

вместо (6.65). Как и следовало ожидать, затухание приводит к подавлению a_0 по сравнению с беззатухательным случаем.

Задача 6.3.6. *Проанализировать динамический режим вблизи стационарного решения (6.68, 6.69) и доказать его устойчивость.*

Задача 6.3.7. *При условии $\delta\omega > f/2$ в системе уравнений (6.64, 6.62) имеется дополнительная стационарная точка, для которой $\sin(2\varphi_0) = 2\gamma/f$, $\cos(2\varphi_0) < 0$, $(3/8)a_0^2 = \delta\omega - f/2$. Исследовать ее на устойчивость.*

Глава 7

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящем разделе мы рассматриваем основные свойства нелинейных полевых уравнений. Мы приводим базисные нелинейные уравнения, а также свойства их (нелинейных) решений. Мы также изучаем коллапс, когда за счет нелинейной эволюции в поле за конечное время формируется особенность.

7.1 Уравнения Хопфа и Бюргерса

Мы начинаем изучение нелинейных явлений с акустики. Сначала мы рассмотрим одномерный случай, когда все характеризующие акустическое поле величины зависят только от одной координаты x . Нас будут интересовать явления, связанные с волнами, распространяющимися в одном направлении. Как известно, в линейном приближении решение одномерного волнового акустического уравнения говорит, что в системе отсчета, движущейся с (линейной) скоростью звука, характеристики акустического поля не меняются. Учтем теперь нелинейные эффекты, которые мы будем анализировать в той же системе отсчета. Нелинейные эффекты будут считаться слабыми, то есть мы будем принимать во внимание только главные нелинейные члены в уравнениях.

7.1.1 Уравнение Хопфа

Введем характеризующую акустическое поле величину u , которая, например, может описывать отклонение плотности вещества от его равновесного значения. В линейном приближении в выбранной системе отсчета мы имеем тривиальное уравнение $\partial_t u = 0$. Учтем теперь нелинейность. В главном порядке это квадратичная нелинейность. Однако мы не можем ввести в уравнение член, пропорциональный u^2 . Дело в том, что однородное в пространстве поле u соответствует однородному же изменению давления среды, что не может вызывать эволюцию u . Поэтому мы должны ввести в уравнение член, содержащий пространственные производные. В главном порядке он пропорционален $u \partial_x u$.

Таким образом, после соответствующего перемасштабирования мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (7.1)$$

которое называется уравнение Хопфа (Hopf). Можно сказать, что нелинейный член в уравнении Хопфа отражает зависимость скорости звука от плотности (или давления). Действительно, в лабораторной системе отсчета уравнение (7.1) имеет вид $\partial_t u + (c_0 + u) \partial_x u = 0$, где c_0 – скорость звука в линейном уравнении. Отсюда видно, что u – поправка к этой скорости.

Уравнение Хопфа (7.1) содержит только первые производные от u и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик, смотри раздел 4.4.1. А именно, можно найти уравнения для изменения поля u вдоль специальных траекторий (характеристик), которые определяются уравнениями:

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (7.2)$$

Таким образом, начальные значения поля u , не меняясь, переносятся со скоростью u вдоль характеристик, которые задаются уравнением $dx/dt = u$.

Система уравнений (7.2) эквивалентна исходному уравнению (7.1). Чтобы продемонстрировать это, надо учесть, что производную d/dt в системе (7.2) надо понимать, как производную вдоль траектории (характеристики), то есть

$$\frac{du}{dt} = \partial_t u + \partial_x u (dx/dt).$$

Подставляя сюда $dx/dt = u$ и учитывая $du/dt = 0$, смотри (7.2), мы и приходим к исходному уравнению (7.1).

Уравнения (7.2) могут быть легко проинтегрированы, что дает

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y), \quad (7.3)$$

где $u(0, x)$ – начальное значение поля (при $t = 0$), а y – начальная координата характеристики, вдоль которой решаются уравнения (7.2). Соотношения (7.3) неявно задают зависимость поля u от координаты x в произвольный момент времени t , то есть соотношения (7.3) дают решение задачи Коши для уравнения Хопфа (7.1).

Поучительно найти уравнение на производную $s = \partial u / \partial x$, которое получается из уравнения Хопфа (7.1) после дифференцирования:

$$\frac{ds}{dt} = -s^2. \quad (7.4)$$

Здесь, как и выше, полная производная $d/dt = \partial_t + u \partial_x$, это производная вдоль характеристики. Решение уравнения (7.4) имеет вид

$$s = (1/s_0 + t)^{-1}, \quad (7.5)$$

где s_0 – значение производной s при $t = 0$. Если $s_0 > 0$, то решение (7.5) существует при всех временах. Если же $s_0 < 0$, то в соответствии с выражением (7.5) s обращается в бесконечность при $t = -s_0^{-1}$. Рассмотрение характеристики на временах $t > -s_0^{-1}$ не имеет смысла.

Если $u(0, x)$ является монотонно растущей функцией x , то есть $s_0 > 0$ при всех x , то эволюция, которая

описывается (7.3), заключается в неограниченном ‘растягивании’ поля u вдоль оси X , без изменения значений этого поля. Таким образом, локально поле u становится все более похожим на линейный профиль, а наклон этого профиля уменьшается со временем. Легко установить закон этого убывания. На больших временах в соответствии с выражением (7.5) $s \approx t^{-1}$, то есть наклон на всех характеристиках становится одинаковым. Это и означает формирование линейного профиля.

Предположим теперь, что в начальном профиле имеются участки, где наклон $u(0, x)$ отрицателен, $s_0 = \partial_x u < 0$. Тогда в соответствии с (7.5) значение s обращается в бесконечность при $t = -1/s_0$. Быстрее всего (за наименьшее время) это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения s , которое определяется условием $\partial s / \partial x = \partial^2 u / \partial x^2 = 0$. Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим y_0 , впервые по времени s обращается в бесконечность.

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки y_0 . Раскладывая функцию $u(0, y)$ в ряд Тейлора вблизи точки y_0 , мы находим

$$u(0, y) \approx u_0 - c_1(y - y_0) + c_2(y - y_0)^3,$$

где c_1 и c_2 – положительные константы. Квадратичный член разложения отсутствует в силу условия $\partial^2 u / \partial x^2 = 0$ в точке y_0 . Положительность c_1 означает отрицательность s вблизи точки y_0 , а положительность c_2 означает, что значение s максимально по абсолютной величине в точке y_0 .

Далее, решая уравнения (7.3), мы находим

$$u = u_0 - c_1(x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2(x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3,$$

где мы ввели обозначение $x_0 = y_0 + u_0/c_1$. В момент времени $t = 1/c_1$, который и является моментом, когда s обращается в бесконечность в точке x_0 , приведенное соотношение сводится к

$$c_2(u - u_0)^3 = -c_1^4(x - x_0),$$

где мы опустили линейное по $x - x_0$ слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых $x - x_0$. Таким образом, мы приходим к профилю $u - u_0$, который пропорционален $(x - x_0)^{1/3}$, то есть является сингулярным в точке $x = x_0$. Эта сингулярность и является причиной, по которой s обращается в бесконечность.

Задача 7.1.1. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u_0 = -x/(1+x^2)$. Проанализировать возникающую особенность.

Задача 7.1.2. Найти решение уравнения Хопфа (7.1) с начальными условиями $u = 0$ при $x < 0$ и $u = -c_1x + c_2x^2$ при $x > 0$, $c_1, c_2 > 0$.

Отметим, что методом характеристик можно решать и уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (7.6)$$

которое отличается от уравнения Хопфа (7.1) дополнительным членом в правой части, ‘накачкой’ f , которая может быть произвольной функцией времени t и пространственной координаты x . Тогда вместо системы (7.2) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (7.7)$$

Уравнения (7.7), которые эквивалентны уравнению Ньютона $d^2x/dt^2 = f$, в общем случае не могут быть проинтегрированы. Но для некоторых специальных случаев они допускают явное решение.

Задача 7.1.3. Найти решение уравнения (7.6) для $f = \phi x$, где ϕ – некоторая константа, и нулевых начальных условий при $t = 0$.

Задача 7.1.4. Найти решение уравнения (7.6) с начальным условием $u_0 = x$ при $t = 0$ и накачке $f = f_0$, где f_0 – константа.

Обратим внимание на то, что наличие накачки в уравнении (7.6) не влияет на структуру особенности в поле u вблизи точки ее возникновения. Действительно, вблизи особенности производные поля u велики и потому правой частью в уравнении (7.6) вблизи особенности можно пренебречь. В частности, остается в силе вывод о возникновении универсального профиля, пропорционального $(x - x_0)^{1/3}$, вблизи точки сингулярности.

При приближении к особенности в поле u уравнение Хопфа становится неприменимым, так как вторая производная от u растет вблизи точки сингулярности быстрее первых производных. Поэтому для анализа поведения поля u вблизи сингулярности и его дальнейшей эволюции уравнение Хопфа следует модифицировать. Именно на этом пути возникает уравнение Бюргерса.

7.1.2 Уравнение Бюргерса

Уравнение Бюргерса (Burgers) отличается от уравнения Хопфа (7.1) введением дополнительного члена, который описывает диссипацию, связанную с вязкостью, и потому пропорционального второй производной. В безразмерных переменных мы приходим к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.8)$$

которое и называется уравнением Бюргерса.

Подчеркнем, что уравнение Бюргерса (7.8) возникает (после перемасштабирования поля u , времени t и координаты x) для любого слабо нелинейного поля u , если оно является плотностью сохраняющейся величины. Симметрия задачи должна опускать квадратичную

нелинейность, как в (7.8). А для плотности сохраняющейся величины $\partial_t u$ должно выражаться через полную производную по x , что и происходит в уравнении Бюргерса (7.8). Именно поэтому уравнение Бюргерса возникает в самых разных физических задачах.

Уравнение Бюргерса (7.8) обладает “Галилеевской инвариантностью”. Это означает, что если $u(t, x)$ является решением (7.8), то и

$$w = u_0 + u(t, x - u_0 t), \quad (7.9)$$

также является решением (7.8) для произвольной константы u_0 . Это свойство легко проверяется непосредственно.

На самых больших временах любое решение уравнения (7.8), стремящееся к нулю на $\pm\infty$ по x , стремится к нулю, $u \rightarrow 0$. Действительно, в силу уравнения Бюргерса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (7.10)$$

Таким образом, положительно определенная величина $\int dx u^2$ убывает со временем и, при достаточно большом t , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргерса u , которое стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда при больших t значение u становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (7.8). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению, асимптотическое поведение которого при больших временах было установлено в разделе 4.2.1.

Рассмотрим статическое решение уравнения Бюргерса. Интегрируя уравнение $u \partial_x u - \partial_x^2 u = 0$, мы находим уравнение первого порядка $u^2 - 2\partial u / \partial x = \text{const}$. Его решение имеет вид

$$u = -2a \tanh[a(x - x_0)], \quad (7.11)$$

где $a > 0$, x_0 – произвольные константы. Отметим, что $u \rightarrow \mp a$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Найденное решение, которое обычно называют шоком, соответствует тому, что в области ширины a^{-1} поле u изменяется на $4a$. Производя преобразование Галилея (7.9), мы находим из (7.11) решение для шока

$$u = u_0 - 2a \tanh[a(x - x_0 - u_0 t)], \quad (7.12)$$

который может двигаться с произвольной скоростью u_0 .

Поясним общую структуру поля u , которая возникает при эволюции некоторого характеризующегося сильной нелинейностью начального условия. За конечное время из участков u с отрицательным наклоном формируются шоки, а из участков с положительным наклоном формируются промежутки между шоками. В дальнейшем поле в этих промежутках стремится к линейному профилю, поскольку его эволюция управляется уравнением

Хопфа. Как следует из выражения (7.11), шок двигается со скоростью u_0 , которую можно определить, как полусумму значений поля u на краях шока. Это означает, что время от времени происходят события, когда большой шок (со значительной амплитудой a) догоняет меньший шок. Это кончается поглощением малого шока большим. Поэтому количество шоков в системе постепенно убывает.

Детали этих процессов можно проследить с помощью преобразования Коула-Хопфа (Cole-Hopf)

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h / \partial x. \quad (7.13)$$

Оно приводит уравнение Бюргерса (7.8) к чисто диффузионному уравнению

$$\partial \Psi / \partial t = \partial^2 \Psi / \partial x^2, \quad (7.14)$$

которое изучалось в разделе (4.2.1).

Преобразование Коула-Хопфа может быть использовано для получения ряда точных решений уравнения Бюргерса (7.8). Если известно некоторое решение уравнения диффузии (7.14), то в соответствии с (7.13) можно найти и решение уравнения Бюргерса

$$u = -2\partial(\ln \Psi) / \partial x. \quad (7.15)$$

Обратим внимание на то, что “физическим” решениям уравнения Бюргерса (7.8) зачастую соответствуют “нефизические” решения уравнения диффузии (7.14), не стремящиеся к нулю на бесконечности. Рассмотрим в качестве примера решение уравнения диффузии $\Psi = \exp(a^2 t) \cosh(ax)$. Подстановка этого выражения в (7.15) дает статический шок (7.11).

В силу линейности уравнения диффузии (7.14) можно конструировать решения, которые являются суперпозицией (линейной комбинацией) известных решений уравнения диффузии. Следует только следить за тем, чтобы поле Ψ нигде не обращалось в ноль, поскольку обращение Ψ в ноль в некоторой точке означает сингулярность в поле u в соответствии с (7.15). Любая такая линейная комбинация даст нетривиальное решение уравнения Бюргерса.

Задача 7.1.5. Найти решение уравнения диффузии (7.14) с начальным условием $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$. Вычислить соответствующее поле u . Проследить, как большой шок “поедает” маленький, считая $a < b$ и $B \ll 1$.

Задача 7.1.6. Найти решение уравнения (7.14) с начальным условием $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$. Вычислить соответствующее поле u .

В условиях сильной нелинейности амплитуды возникающих шоков велики, а их ширины малы. Поэтому вторая производная в уравнении Бюргерса (7.8) работает только в небольшой области пространства, вблизи

шоков. Эволюция же поля u в остальной области пространства (между шоками) хорошо описывается уравнением Хопфа (7.1). В этой ситуации можно сформулировать эффективные динамические уравнения для поля u , когда шоки аппроксимируются разрывами в поле u . В этом случае промежутки между разрывами управляются уравнением Хопфа (7.1). Динамика же разрывов определяется тем, что разрыв движется со скоростью, равной полусумме значений поля u на краях разрыва (это свойство было нами обосновано для шока выше).

Сформулированных правил оказывается достаточно для описания эволюции поля u с разрывами. Например, учитывая отличие скорости движения разрыва от величины поля u на его краях, можно получить уравнения

$$\begin{aligned}\frac{du_-}{dt} &= -\frac{1}{2}(u_- - u_+)s_-, \\ \frac{du_+}{dt} &= -\frac{1}{2}(u_+ - u_-)s_+, \end{aligned}$$

Здесь u_- , s_- и u_+ , s_+ – значения поля u и его производной $s = \partial x u$ на левом и на правом краях разрыва. Отсюда получается уравнение для скачка скорости

$$\frac{d}{dt}(u_- - u_+) = -\frac{1}{2}(s_- + s_+)(u_- - u_+). \quad (7.16)$$

Поскольку участки с положительным наклоном в соответствии с уравнением Хопфа выходят на линейные профили, то промежуточным итогом рассматриваемой эволюции поля u является “пила”: чередующиеся прямые участки с положительным наклоном и скачки поля u (в отрицательную сторону).

Задача 7.1.7. *Как будет эволюционировать периодическая “пила”, состоящая из одинаковых линейных участков и скачков между ними?*

7.2 Нелинейное уравнение Шрёдингера

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию огибающих волновых пакетов для электромагнитных волн, плазменных колебаний, и так далее. Другими словами, НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, которые применимы в самых разных физических случаях. Основной вопрос, который возникает при исследовании решений НУШ – роль нелинейности в эволюции волнового пакета.

Как мы уже установили в разделе (4.1.3), в линейном приближении уравнение на огибающую ψ можно свести к свободному уравнению Шрёдингера (4.60) (мы не рассматриваем здесь возникающий иногда гиперболический случай). Теперь мы учтем нелинейность в уравнении для амплитуды ψ . Поскольку огибающая определяет относительно медленное изменение амплитуды волны на фоне быстрых осцилляций, первая исчезающая нелинейность является кубической (квадратичная

нелинейность исчезает при усреднении по быстрым осцилляциям).

Нелинейность должна быть добавлена в уравнение Шрёдингера (4.60), она пропорциональна третьей степени ψ . Если система однородна по времени, то имеет-ся дополнительное правило отбора нелинейного члена. Как следует из (4.20), сдвиг по времени эквивалентен добавлению фазы к ψ . Поэтому уравнение на ψ должно быть инвариантно относительно сдвига фазы ψ , что однозначно определяет вид нелинейного члена, который должен быть пропорционален $|\psi|^2\psi$. Еще одним дополнительным правилом отбора является отсутствие диссипации, что фиксирует действительный коэффициент при $|\psi|^2\psi$ в уравнении.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемых НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ перемасштабировкой t, \mathbf{r}, ψ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi + 2|\psi|^2\psi = 0, \quad (7.17)$$

или

$$i\partial_t\psi + \nabla^2\psi - 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (7.18)$$

В уравнениях (7.17), (7.18) фигурирует Лапласиан, что может быть связано с изотропией задачи. Однако, при отсутствии изотропии НУШ все равно может быть сведен к виду (7.17) или (7.18) путем различной перемасштабировки координат.

Как и в линейном случае, уравнение (7.17) или (7.18) инвариантно относительно ‘преобразования Галилея’. А именно, если $\psi(t, \mathbf{r})$ – решение НУШ, то и

$$\psi(t, \mathbf{r} - 2\mathbf{v}t) \exp(i\mathbf{v}\mathbf{r} - i\mathbf{v}^2t) \quad (7.19)$$

будет решением НУШ. Это связано с тем, что фазовый множитель в (7.19) не меняет фактор $|\psi|^2$ в исходном уравнении.

Мы видим, что уравнения (7.17, 7.18) имеют вид квантово-механического уравнения Шрёдингера с потенциалом $\mp 2|\psi|^2$. Поскольку уравнение (7.17) соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется ‘НУШ с притяжением’, и, соответственно, уравнение (7.18) – ‘НУШ с отталкиванием’. Как мы знаем, волновые функции в притягивающих и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (7.17) и (7.18) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (7.17). Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.

В случае слабой нелинейности кубическим членом в (7.17, 7.18) можно пренебречь, и мы возвращаемся к свободному линейному уравнению Шрёдингера, которое описывает волны с законом дисперсии $\omega = k^2$, где k – волновой вектор. Таким образом, малый уровень нелинейности в НУШ соответствует волновому движению.

Нас же будут здесь интересовать эффекты, связанные с нелинейностью.

Нелинейное уравнение Шрёдингера (7.17) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум ‘действия’

$$S = \int dt d\mathbf{r} L, \quad L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi + |\psi|^4. \quad (7.20)$$

При вариации S удобно считать поля ψ и ψ^* независимыми динамическими переменными, что возможно в силу того, что ψ имеет две степени свободы.

Уравнение (7.17) ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы ψ , а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 7.4.1. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованных в пространстве решений являются ‘число частиц’ N , ‘энергия’ E и ‘импульс’ \mathbf{P} , то есть $dN/dt = 0$, $dE/dt = 0$, $d\mathbf{P}/dt = 0$. Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi|^2, \quad (7.21)$$

$$E = \int d\mathbf{r} (|\nabla \psi|^2 - |\psi|^4), \quad (7.22)$$

$$\mathbf{P} = -i \int d\mathbf{r} \psi^* \nabla \psi, \quad (7.23)$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранжиана (7.20), смотри выражения (7.64, 7.66, 7.69).

Уравнение (7.17) имеет очевидное однородное решение

$$\psi = \eta \exp(2i|\eta|^2 t), \quad (7.24)$$

где η – произвольное комплексное число. Физический смысл экспоненты в (7.24) – нелинейный сдвиг частоты. Однако решение (7.24) оказывается неустойчивым относительно малых возмущений. Эта неустойчивость называется модуляционной. Поясним ее происхождение.

Рассмотрим малое возмущение на фоне решения (7.24): $\psi = (\eta + \delta\eta) \exp(2i|\eta|^2 t)$. Подставляя это выражение в уравнение (7.17) и линеаризуя его по $\delta\eta$, находим

$$i\partial_t \delta\eta + \nabla^2 \delta\eta + 2\eta^2 (\delta\eta + \delta\eta^*),$$

где мы положили η действительным числом, чего всегда можно добиться сдвигом фазы ψ . Выражая $\delta\eta^*$ через $\delta\eta$ и подставляя результат в уравнение на $\delta\eta^*$, находим

$$(\partial_t^2 + \nabla^4 + 4\eta^2 \nabla^2) \delta\eta = 0.$$

Для гармоник с волновыми векторами $q^2 < 4\eta^2$ это уравнение приводит к экспоненциальному росту $\delta\eta$, что и означает неустойчивость.

Уравнение (7.17) допускает решения вида $\psi = \exp(i\lambda^2 t) \Phi$, где Φ – функция координат. Они называются стоячими волнами. Например, существует локализованное решение, когда Ψ зависит только от расстояния до начала координат r или решение, при котором Ψ зависит только от одной переменной и локализовано по ней. Преобразование Галилея (7.19) позволяет получить решения с произвольной скоростью движения. Однако все эти решения оказываются линейно неустойчивыми в двумерном и трехмерном случаях и потому имеют ограниченную область применимости. Исключением является одномерный случай, который будет разобран отдельно.

Возникает вопрос о том, как же ведет себя решение НУШ в условиях сильной нелинейности, если вначале мы имеем дело с локализованной функцией ψ . Возможно два сценария. Либо ψ расплывется с постепенным уменьшением уровня нелинейности. Либо за конечное время сформируется особенность в ψ , то есть, как говорят, случится коллапс. Возможно и поведение, когда поле ψ сначала приближается к коллапсу, но, не достигнув его, начинает расплываться.

Ответить на вопрос о выборе сценария помогает теорема Таланова. Рассмотрим интеграл

$$I = \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2. \quad (7.25)$$

Для поля, локализованного у начала координат, этот функционал можно оценить, как $I \sim NR^2$, где R – размер пакета. Для интеграла (7.25) справедливо соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\mathbf{r} \left(|\nabla \psi|^2 - \frac{d}{2} |\psi|^4 \right), \quad (7.26)$$

которое является следствием уравнения (7.17). Здесь d – размерность пространства.

В двумерном случае в правой части (7.26) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8E, \quad d = 2. \quad (7.27)$$

Поскольку E не зависит от времени, то общее решение уравнения (7.27) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 2, \quad (7.28)$$

где константы C и E определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что $E < 0$. Тогда при любых конечных $I(0)$ и C наступит такой момент времени t_* , что $I(t_*) = 0$. Из оценки $I \sim NR^2$ следует, что R в момент $t = t_*$ обратится в ноль. Сохранение же числа частиц N влечет за собой сингулярность ψ в этот момент.

Таким образом, в двух измерениях при $E < 0$ происходит коллапс – явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при $E > 0$, однако при $E < 0$ он неизбежен. Коллапс означает, что в функции ψ за конечное время возникает сингулярность в некоторой точке. Это может

произойти в точке, отличной от $\mathbf{r} = 0$, в момент времени более ранний, чем $t = t_*$. То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале $t \leq t_*$ коллапс при $E < 0$ в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (7.26) для $I(t)$ приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8E - 4 \int d\mathbf{r} |\psi|^4 < 8E. \quad (7.29)$$

Поэтому вместо равенства (7.28) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct + 4Et^2, \quad d = 3. \quad (7.30)$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при $E < 0$.

Качественно иная ситуация реализуется в одномерном случае. Тогда соотношение Таланова (7.26) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2}I = 8E + 4 \int dx |\nabla \psi|^2, \quad (7.31)$$

что означает невозможность коллапса. Действительно, если размер волнового пакета $R(t)$ уменьшается, то сохранение числа частиц N требует, чтобы квадрат модуля амплитуды пакета рос как $|\psi|^2 \sim R^{-1}(t)$. При этом положительная добавка в правой части в (7.31) также растет:

$$\int dx |\nabla \psi|^2 \sim NR^{-2}.$$

При уменьшении R эта величина неизбежно становится по абсолютной величине больше отрицательного, но постоянного $-E$. Это приводит к стабилизации поля ψ .

Вблизи точки коллапса решение НУШ приобретает универсальный вид. В трехмерном случае это автомодельное поведение

$$\psi = \frac{\exp\{(i/a) \ln[t_0/(t_0 - t)]\}}{\sqrt{t_0 - t}} \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{t_0 - t}}\right). \quad (7.32)$$

Его подстановка в уравнение (7.17) дает замкнутое уравнение на Φ , которое имеет решение, регулярное в нуле и стремящееся к нулю на бесконечности при некотором значении параметра a , известного лишь численно. Отметим, что на этом решении $E = 0$, в противном случае энергия расходилась бы при $t \rightarrow t_0$. В двумерном случае ситуация несколько сложнее, но форма решения качественно имеет тот же автомодельный вид.

Задача 7.2.1. Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (7.21, 7.22, 7.23), исходя из уравнения (7.17).

Задача 7.2.2. Вывести соотношение Таланова (7.26).

7.2.1 Уравнение Гросса-Питаевского

Уравнением Гросса-Питаевского называется уравнение

$$i\partial_t \psi + \nabla^2 \psi - 2|\psi|^2 \psi + \kappa^2 \psi = 0, \quad (7.33)$$

которое описывает, например, динамику сверхтекучей системы холодных атомов. Мы рассматриваем простейший однородный случай. Обычно же холодные атомы находятся в оптических ловушках. Для описания этого случая в уравнение (7.33) следует ввести внешний потенциал, который создается оптической ловушкой.

Уравнение (7.33) может получено из нелинейного уравнения Шрёдингера (7.18) сдвигом фазы ψ на $\kappa^2 t$. Несмотря на это, решения уравнений (7.18) и (7.33) существенно отличаются. Это связано с тем, что при решении нелинейного уравнения Шрёдингера (7.18) обычно считается, что функция ψ стремится к нулю на бесконечности, в то время как при решении уравнения Гросса-Питаевского (7.33) обычно считается, что на бесконечности ψ стремится к стационарному решению уравнения Гросса-Питаевского (7.33), которое записывается в виде $\psi = \psi_0 e^{i\varphi_0}$, где $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$ и фаза φ_0 произвольна.

Как и нелинейное уравнение Шрёдингера, уравнение Гросса-Питаевского (7.33) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt d\mathbf{r} L, \quad (7.34)$$

$$L = i\psi^* \partial_t \psi - \nabla \psi^* \nabla \psi - |\psi|^4 + \kappa^2 |\psi|^2.$$

По сравнению с выражением (7.20) в ‘действии’ (7.34) противоположен знак перед $|\psi|^4$ и имеется дополнительный член с κ . Таким образом, мы приходим к законам сохранения волнового действия, энергии и импульса

$$N = \int dV |\psi|^2, \quad (7.35)$$

$$E = \int dV (|\nabla \psi|^2 + |\psi|^4 - \kappa^2 |\psi|^2), \quad (7.36)$$

$$\mathbf{P} = -i \int dV \psi^* \nabla \psi. \quad (7.37)$$

смотри раздел 7.4.1.

Линеаризуя уравнение (7.33) около стационарного решения $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$, мы находим

$$i\partial_t \delta\psi + \nabla^2 \delta\psi - \kappa^2 \delta\psi - \kappa^2 \delta\psi^* = 0, \quad (7.38)$$

где $\delta\psi = \psi - \psi_0$. Уравнение (7.38) описывает волны, которые возбуждаются в системе при отклонении ψ от равновесного решения $\psi_0 = \kappa/\sqrt{2}$. Переходя к Фурье-представлению по пространству, мы находим $\delta\psi \propto \exp(-i\omega t)$, где частота ω определяется законом дисперсии $\omega = \varpi(q)$,

$$\varpi = \sqrt{2\kappa^2 + q^2} q. \quad (7.39)$$

При малых q , $q \ll \kappa$, закон дисперсии (7.39) является звуковым, $\varpi \propto q$. При больших q , $q \gg \kappa$, закон дисперсии (7.39) переходит в $\varpi = q^2$.

Уравнение (7.33) допускает решения с вихрями Фейнмана. Вихревой линией является линия, на которой ψ обращается в ноль, а фаза φ поля ψ при обходе вокруг вихревой линии меняется на 2π или -2π . Это возможно в силу того, что при изменении фазы φ на 2π значение самой величины ψ не меняется. Заметим, что изменение фазы ψ при обходе вокруг вихря может быть отлично от нуля только в силу того, что на самой вихревой линии $\psi = 0$, и потому фаза ψ на этой линии не определена. В принципе изменение фазы φ может быть равно $2\pi n$, где n – произвольное целое число. Но вихрь с $|n| > 1$ в процессе эволюции, как правило, разваливается на вихри с единичной циркуляцией. Поэтому мы сосредоточимся на рассмотрении вихрей с единичной циркуляцией.

Изменение фазы φ при обходе вокруг вихревой линии может быть записано в виде контурного интеграла

$$\oint dr \nabla \varphi = \pm 2\pi, \quad (7.40)$$

где интеграл идет по некоторому замкнутому контуру, идущему вокруг вихревой линии. Интеграл (7.40), значение которого в силу теоремы Стокса не меняется при непрерывных деформациях контура интегрирования, может быть отличен от нуля в силу того, что контур не может быть стянут в точку, поскольку внутри этого контура имеется особая линия, где фаза φ имеет сингулярность. Отсюда следует, в частности, что вихревая линия не может иметь точку окончания, поскольку при ее наличии контур, идущий вокруг вихревой линии, может быть непрерывно стянут в точку за пределами вихревой линии. Таким образом, вихревая линия либо является замкнутой, либо ее концы уходят в бесконечность.

Другим следствием сказанного является невозможность мгновенного исчезновения вихревой линии в процессе эволюции. Как говорят, вихревая линия топологически защищена. Однако в процессе эволюции форма вихревой линии изменяется. Поэтому возможен процесс, когда аннигилируют две вихревые линии с противоположными циркуляциями. Возможно также исчезновение (или возникновение) замкнутой вихревой линии, связанное с уменьшением ее размеров.

Проанализируем поле $\psi = |\psi|e^{i\varphi}$, которое соответствует стационарному прямолинейному вихрю. Будем считать, что вихревая линия направлена вдоль оси Z . В силу симметрии фаза φ совпадает с полярным углом в плоскости $X-Y$ (или отличается от него знаком), поэтому $|\nabla \varphi| = 1/r$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Абсолютная величина $|\psi|$ зависит от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. При $r \rightarrow \infty$ абсолютная величина $|\psi|$ стремится к ψ_0 . Найдем поведение $|\psi|$ при малых x, y . В этом случае в уравнении (7.33) главным членом является Лапласиан, то есть мы должны найти решения уравнения $\nabla^2 \psi = 0$. Очевидно, что интересующие нас решения имеют вид $\psi \propto x \pm iy$. Таким образом, при малых x, y $|\psi| \propto r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Найдем скорость движения вихревой линии. На малых расстояниях ее можно считать прямолинейной. На-

правляя вдоль вихревой линии ось Z , находим, что вблизи вихревой линии поле ψ можно аппроксимировать, как $\propto (x + iy - \zeta)e^{i\phi}$, где $\zeta(t)$ – комплексное число, которое определяет изменение положения вихревой линии со временем, а ϕ – “внешняя” фаза ψ , не связанная непосредственно с самим вихрем. Подставляя приведенное выражение в уравнение (7.33) и полагая затем $x + iy = \zeta$, $\partial_t \zeta' = 2\partial_x \phi$, $\partial_t \zeta'' = 2\partial_y \phi$, где $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что вихревая линия движется со скоростью $2\nabla \phi$. Понятно, что наблюдаемым является только движение в направлении, перпендикулярном вихревой линии.

Масштаб, на котором $|\psi|$ вблизи вихревой линии выходит на асимптотическое значение ψ_0 , может быть оценен, как κ^{-1} . На больших масштабах $|\psi|$ мало отличается от ψ_0 . В то же время на этих масштабах фаза параметра порядка φ остается “живой” переменной, которая обладает своей собственной динамикой. Разделяя в уравнении (7.33) действительную и мнимую части и считая $|\psi|$ близким к ψ_0 , находим

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (7.41)$$

$$\partial_t \varphi + (\nabla \varphi)^2 + \mu = 0, \quad (7.42)$$

где $\mu = 2|\psi|^2 - \kappa$. В контексте уравнения на фазу μ не является динамической переменной, а является вспомогательным полем, присутствие которого должно обеспечить выполнение условия (7.41).

Уравнение (7.41) в совокупности с условием (7.40) эквивалентны уравнениям Максвелла для статического “магнитного поля” $\mathbf{B} = \nabla \varphi$, которые справедливы в пространстве, окружающем проволоку с током. Роль проволоки в нашем случае выполняет вихревая линия, а циркуляция (7.40) определяет величину “тока”, текущего по проволоке. Используя эту магнитостатическую аналогию, мы можем найти “вихревую” часть градиента фазы $\nabla \varphi_{vor}$, индуцированную вихрями, используя закон Био-Савара-Лапласа. Для одиночного вихря

$$\nabla \varphi_{vor} = \frac{1}{2} \int ds [\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})] |\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}|^{-3}. \quad (7.43)$$

Здесь интегрирование идет вдоль вихревой линии, причем ds – дифференциал ее длины, \mathbf{n} – единичный вектор, касательный к вихревой линии, а $\boldsymbol{\zeta}(s)$ задает положение вихревой линии в пространстве. Одно из двух возможных направлений \mathbf{n} определяется знаком циркуляции в выражении (7.40). При наличии нескольких вихрей $\nabla \varphi_{vor}$ является суммой интегралов (7.43), взятых для каждого вихря, что объясняется линейностью соотношений (7.40, 7.41).

Задача 7.2.3. Проверить, что выражение (7.43) удовлетворяет обоим условиям (7.40, 7.41).

Задача 7.2.4. Найти градиент фазы, индуцируемый кольцевым вихрем радиуса R на его оси симметрии.

В рассматриваемом приближении, когда абсолютная величина $|\psi|$ является замерзшей, энергия (7.36) и импульс (7.37) приобретают вид

$$E = \int dV \frac{\kappa^2}{2} (\nabla \varphi)^2, \quad (7.44)$$

$$\mathbf{P} = \frac{\kappa^2}{2} \int dV \nabla \varphi. \quad (7.45)$$

В выражении (7.44) из энергии вычтена константа, связанная с наличием ψ_0 . Отметим, что энергия (7.44) сохраняется вследствие условия гармоничности (7.41).

Найдем энергию прямолинейного вихря, направленного вдоль оси Z . В этом случае, как мы установили выше, $|\nabla \varphi| = (x^2 + y^2)^{-1/2}$. Поэтому мы находим из (7.44) энергию на единицу длины

$$\frac{\kappa^2}{2} \int dx dy \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Этот интеграл является логарифмическим, то есть расходитсся как на малых, так и на больших расстояниях. Он должен быть ограничен снизу масштабом κ^{-1} , поскольку на меньших масштабах не работает наше приближение. Сверху же он должен быть ограничен масштабом l , который является размером системы или характерным расстоянием между вихрями. В результате находим в главном логарифмическом приближении

$$E = \pi \kappa^2 \int dz \ln(\kappa l), \quad (7.46)$$

где интеграл по z дает длину вихря, которой пропорциональна его энергия. С логарифмической точностью выражение (7.46) справедливо для вихря произвольной формы.

Задача 7.2.5. Найти энергию кольцевого вихря радиуса R .

Получим теперь выражение для импульса замкнутого вихря на основе (7.45). Поскольку φ изменяется на 2π при обходе вокруг вихревой линии, φ не является однозначной функцией в пространстве. Ее можно сделать однозначной, если ввести некоторую поверхность, опирающуюся на вихревую линию, на которой φ испытывает скачок в 2π . Используя теперь теорему Гаусса, мы сводим интеграл (7.45) к интегралу по двум сторонам этой поверхности, что дает

$$\mathbf{P} = \pi \kappa^2 \int d\mathbf{S}, \quad (7.47)$$

где $d\mathbf{S}$ – элемент поверхности. Выбор направления $d\mathbf{S}$ зависит от знака изменения фазы при обходе вокруг вихревой линии.

Задача 7.2.6. Найти импульс кольцевого вихря радиуса R .

Задача 7.2.7. Найти скорость движения кольцевого вихря радиуса R . Убедиться, что скорость движения кольца равна $\partial E / \partial \mathbf{P}$.

7.3 Уравнения Эйлера и Навье-Стокса

Здесь мы рассматриваем уравнения, которые описывают динамику несжимаемой жидкости. Жидкость можно считать несжимаемой, если мало число Маха, которое равно отношению характерной скорости жидкости к скорости звука. В этом случае плотность массы жидкости ρ можно считать однородной (не зависящей от координат), а скорость жидкости \mathbf{v} удовлетворяет условию $\nabla \mathbf{v} = 0$.

В бездиссипативном пределе движение жидкости описывается уравнением Эйлера

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = 0. \quad (7.48)$$

Здесь \mathbf{v} – скорость жидкости, а p – ее давление (на единицу массы). Давление p не является динамической переменной, оно ‘подстраивается’ под скорость так, чтобы выполнялось условие $\nabla \mathbf{v} = 0$. Беря дивергенцию уравнения (7.48), находим условие

$$\partial_i v_k \partial_k v_i + \nabla^2 p = 0, \quad (7.49)$$

которое связывает давление и градиент скорости. Однако связь эта нелокальна: чтобы найти p , надо решить уравнение Лапласа с правой частью.

Уравнение Эйлера (7.48) представляет собой закон сохранения импульса жидкости, который равен

$$\mathbf{P} = \rho \int dV \mathbf{v}. \quad (7.50)$$

Вследствие уравнения Эйлера сохраняется энергия

$$E = \rho \int dV v^2 / 2, \quad (7.51)$$

которая является кинетической энергией жидкости. В пределе несжимаемой жидкости внутренняя энергия жидкости роли не играет.

Уравнение Эйлера (7.48) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v} + \nabla p = 0, \quad (7.52)$$

Здесь $d/dt = \partial_t + \mathbf{v} \nabla$ – производная Лагранжа, также известная как субстанциональная производная или материальная производная. Она определяет изменение со временем величин вдоль Лагранжевых траекторий (траекторий частиц жидкости). Из представления (7.52) следует теорема Кельвина, которая гласит, что сохраняется циркуляция скорости по замкнутому контуру, который переносится жидкостью (то есть каждая точка которого движется со скоростью \mathbf{v}):

$$\frac{d}{dt} \Gamma = 0, \quad \Gamma = \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}. \quad (7.53)$$

Беря ротор от уравнения Эйлера (7.48), находим уравнение для завихренности $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$:

$$\partial_t \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{v} \nabla) \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\omega} \nabla) \mathbf{v} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (7.54)$$

Подчеркнем, что давление выпадает из этого уравнения. Из уравнения (7.54) следует, в частности, что являются стационарными решениями уравнения Эйлера (7.48) поля скорости \mathbf{v} , которые удовлетворяют условию $\omega \propto \mathbf{v}$.

Задача 7.3.1. *Найти периодические решения уравнения $\omega \propto \mathbf{v}$ (Arnold-Beltrami-Childes).*

Одним из стационарных решений уравнения Эйлера (7.48) является твердотельное вращение с угловой скоростью Ω , в этом случае скорость жидкости равна $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r}$. Заметим, что завихренность этого поля $\nabla \times \mathbf{v} = 2\Omega$. Как следует из уравнения Эйлера (7.48), при твердотельном вращении возникает давление $p = (\Omega \times \mathbf{r})^2/2$, оно связано с центробежной силой. Уравнение Эйлера (7.48) допускает и более общее стационарное решение, которое является дифференциальным вращением вокруг некоторой оси. В этом случае поле скорости можно записать в виде $\mathbf{v} = f\Omega \times \mathbf{r}$, где f – произвольная функция расстояния до оси вращения.

Задача 7.3.2. *Найти градиент давления для стационарного поля скорости $\mathbf{v} = f\Omega \times \mathbf{r}$.*

Линеаризуем уравнение (7.54) на фоне твердотельного вращения. Обозначая $\mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{r} + \delta\mathbf{v}$, находим

$$\partial_t \delta\omega = \nabla \times (\mathbf{V} \times \delta\omega) + 2(\Omega \nabla) \delta\mathbf{v}.$$

Первый член в правой части этого уравнения описывает перенос возмущений потока твердотельным вращением. Он исчезает после перехода во вращающуюся с угловой скоростью Ω систему отсчета. В этой системе отсчета находим

$$\partial_t \nabla \times \delta\mathbf{v} = 2\Omega \partial_z \delta\mathbf{v}, \quad (7.55)$$

где мы направили ось Z вдоль Ω . Ищем решение уравнения (7.55) в виде плоской волны $\delta\mathbf{v} = \mathbf{A} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$. В силу несжимаемости $\mathbf{k}\mathbf{A} = 0$. Находим из уравнения (7.55) $\partial_t(\mathbf{k} \times \mathbf{A}) = 2k_z \mathbf{A}$. Имеются две поляризации, для которых $\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \pm i k \mathbf{A}$, то есть $k \partial_t \mathbf{A} = \mp i k_z \mathbf{A}$. Таким образом, мы находим закон дисперсии волн, которые называются инерционными

$$\varpi = 2\Omega k_z / k. \quad (7.56)$$

Задача 7.3.3. *Показать, что уравнение $\mathbf{k} \times \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A}$ при условии $\mathbf{k}\mathbf{A} = 0$ имеет решения при $\lambda = \pm i k$.*

Задача 7.3.4. *Найти групповую скорость инерционных волн.*

Теперь мы учтем вязкую диссипацию, которая приводит к постепенному переходу кинетической энергии жидкости во внутреннюю, что сопровождается ростом энтропии и нагревом жидкости. С учетом диссипации уравнение Эйлера (7.48) приобретает следующий вид

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (7.57)$$

где фактор ν называется коэффициентом кинематической вязкости. Уравнение (7.57) называется уравнением Навье-Стокса. Наличие Лапласиана при скорости в вязком члене в уравнении Навье-Стокса (7.57) связано с тем, что оно по-прежнему имеет смысл закона сохранения импульса жидкости, и потому $\partial_t \mathbf{v}$ должно быть дивергенцией потока жидкости.

Как и уравнение Эйлера (7.48), уравнение Навье-Стокса (7.57) предполагает малость числа Маха и потому должно быть дополнено условием бездивергентности скорости $\nabla \mathbf{v} = 0$. Как и в уравнении Эйлера (7.48), в уравнении Навье-Стокса (7.57) давление p не является динамической переменной, а обеспечивает условие $\nabla \mathbf{v} = 0$. Беря дивергенцию уравнения Навье-Стокса (7.57), находим то же условие (7.49), которое связывает давление с градиентом скорости. Отметим также, что граничным условием для уравнения Навье-Стокса (7.57) на твердой стенке является нулевое значение скорости. это условие часто называют отсутствием проскальзывания.

Для характеристики гидродинамического движения используется число Рейнольдса (Reynolds), которое определяется, как $Re = VL/\nu$. Здесь V – характерная скорость гидродинамического движения, а L – его характерный масштаб. Уравнение Эйлера (7.48) соответствует пределу $Re \rightarrow \infty$. При малых числах Рейнольдса мы возвращаемся к линейному уравнению Стокса, см. раздел 4.2.2.

При больших числах Рейнольдса движение жидкости приобретает обычно хаотический характер, это состояние называется турбулентностью. Анализ турбулентности лежит вне рамок настоящего пособия. Здесь же мы отметим, что в ряде важных случаев удается найти аналитическое решение уравнения Навье-Стокса (7.57) даже при больших числах Рейнольдса. Обычно это связано с наличием высокой симметрии решения.

Задача 7.3.5. *Найти зависимость от времени течения, для которого в начальный момент времени имеется только полярная компонента скорости $v_\varphi = \Omega r \exp(-ar^2)$, $r^2 = x^2 + y^2$.*

Важным примером гидродинамического движения является течение Пуазейля, которое описывает протекание жидкости по трубе цилиндрической формы. Направляя ось Z по оси цилиндра, находим следующее стационарное решение уравнения Навье-Стокса (7.57)

$$v_x = 0, \quad v_y = 0, \quad v_z = V \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2} \right), \quad (7.58)$$

$$\partial_z p = -4V/R, \quad (7.59)$$

для которого нелинейный член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ обращается в ноль. Здесь V – скорость жидкости на оси цилиндра, а R – его радиус. Поле скорости (7.58) удовлетворяет граничному условию на стенке цилиндра, где скорость течения обращается в ноль. Обратим внимание на то, что течение Пуазейля предполагает наличие градиента

давления (7.59) вдоль трубы, который и вызывает течение.

Задача 7.3.6. *Найти поток жидкости через трубу для течения Пуазейля.*

7.3.1 Пограничный слой при больших числах Рейнольдса

Рассмотрим гидродинамическое течение при больших числах Рейнольдса $Re = LV/\nu$. Тогда вязким членом в уравнении Навье-Стокса (7.57) можно пренебречь при анализе течения в объеме (исключая течения с очень малыми масштабами), и мы приходим к уравнению Эйлера (7.48), которое имеет первый порядок по градиенту. Граничным условием для уравнения Навье-Стокса (7.57) является условие “прилипания”, то есть $\mathbf{v} = 0$ на твердой поверхности. Это граничное условие корректно для уравнения второго порядка, каким является уравнение Навье-Стокса (7.57), но несовместимо с уравнением Эйлера (7.48), которое является уравнением первого порядка.

Спрашивается, можно ли вообще использовать уравнение Эйлера (7.48) для описания гидродинамики жидкости? И если можно, то что происходит вблизи границы и как формулировать граничные условия для уравнения Эйлера? Ответы на эти вопросы были получены Прандтлем, который показал, что при больших числах Рейнольдса уравнение Эйлера (7.48) работает везде, за исключением узкого пограничного слоя вблизи поверхности. Точнее говоря, уравнение Эйлера (7.48) применимо при анализе достаточно крупномасштабных течений, поскольку при уменьшении характерного масштаба течения роль вязкости возрастает и рано или поздно становится определяющим.

Изучим поведение скорости вблизи поверхности. В силу граничного условия $\mathbf{v} = 0$ на поверхности нелинейный член в уравнении Навье-Стокса (7.57) вблизи поверхности пренебрежим, и поэтому решение описывается линейным уравнением $\partial_t \mathbf{v} + \nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$, то есть уравнением Стокса. Более того, вблизи поверхности можно пренебречь и производной по времени, поскольку зависимость от времени определяется объемным движением вне пограничного слоя, и потому член с временной производной мал по сравнению с вязким членом. В результате для течения вблизи плоской стенки получается сдвиговое течение, которое является решением уравнения $\nabla p = \nu \nabla^2 \mathbf{v}$. Если выбрать систему координат, в которой поверхность совпадает с плоскостью $z = 0$, то сдвиговое течение имеет вид $v_x = sz$, $v_y = 0$, $v_z = 0$, где мы выбрали ось X вдоль направления скорости. Очевидно, что сдвиговое течение удовлетворяет граничному условию (ноль на границе), уравнению $\nabla^2 \mathbf{v} = 0$ и условию несжимаемости $\nabla \mathbf{v} = 0$. Давление p при этом равно нулю (точнее, константе).

Чтобы найти толщину пограничного слоя, надо сравнить нелинейный и вязкий члены в уравнении Навье-

Стокса (7.57). Они сравниваются на расстоянии от стенки $\sqrt{\nu/s}$, именно эта величина и определяет толщину пограничного слоя. Обратим внимание на то, что толщина пограничного слоя стремится к нулю при стремлении к нулю коэффициента вязкости. Поэтому при больших числах Рейнольдса толщина пограничного слоя много меньше характерных размеров течения L . Тем не менее, наличие пограничного слоя принципиально, без него не может быть выполнено условие $\mathbf{v} = 0$ на поверхности.

Сформулируем теперь граничное условие для уравнения Эйлера, которое должно быть поставлено на границе пограничного слоя. Для этого заметим, что сдвиговое течение $v_x = sz$, $v_y = 0$, $v_z = 0$ удовлетворяет и уравнению Навье-Стокса с учетом нелинейного члена (но в пренебрежение члена с производной по времени), поскольку для этого течения $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = 0$. Таким образом, сдвиговое приближение работает и вне пограничного слоя. (Оно перестает работать, когда включается временная зависимость или отличие поверхности от плоской.) Отсюда следует, что граничным условием для уравнения Эйлера является равенство нулю компоненты скорости, перпендикулярной к стенке. Физически это означает отсутствие потока жидкости на стенку.

7.4 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

7.4.1 Нётеровские интегралы движения

Многие эволюционные дифференциальные уравнения приводят к сохранению некоторых величин, которые называют интегралами движения. Наличие интегралов движения облегчает анализ решений соответствующего уравнения, и потому их нахождение является важной задачей. Здесь мы изложим способ нахождения интегралов движения, связанных с непрерывной симметрией уравнения, который был разработан Нётер. Поэтому соответствующие интегралы движения называются Нётеровскими.

Нётеровские интегралы возникают в том случае, если исследуемое уравнение является следствием вариационного принципа. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение для поля u , которое получается, как экстремум функционала

$$S = \int dt dr L(u, \dot{u}, \nabla u). \quad (7.60)$$

Обычно этот функционал называют действием. Условие экстремума действия дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\dot{u})} + \nabla \frac{\partial L}{\partial (\nabla u)} = \frac{\partial L}{\partial u}, \quad (7.61)$$

которому подчиняется поле u .

Уравнение (7.61) или действие (7.60) однородны в пространстве и времени, то есть инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени или сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала отсчета времени поле u изменяется, это изменение равно $\delta u = \tau \partial_t u$, где τ – величина сдвига. Легко проверить непосредственно, что действие (7.60) не меняется при таком преобразовании. Предположим теперь, что τ – некоторая функция пространства и времени. Тогда вариация действия S при преобразовании $\delta u = \tau \partial_t u$ уже не будет равна нулю, ее можно записать в следующем виде

$$\delta S = \int dt d\mathbf{r} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) \dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \nabla \tau \right], \quad (7.62)$$

где мы использовали интегрирование по частям и соотношение

$$\partial_t L = \frac{\partial L}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{\nabla} u.$$

С другой стороны, для поля u , которое подчиняется уравнению движения (7.61), вариация действия (7.61) при любой вариации поля u , в том числе и при вариации $\delta u = \tau \partial_t u$, должна быть равна нулю. Другими словами, для поля u , которое подчиняется уравнению движения (7.61), равно нулю выражение (7.62). Поскольку поле τ в выражении (7.62) является произвольной функцией времени и пространства, мы приходим к соотношению

$$\partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) + \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \right) = 0, \quad (7.63)$$

которое имеет вид локального закона сохранения. Обычно закон (7.63) называют законом сохранения энергии, а сохраняющийся вследствие этого уравнения интеграл

$$E = \int d\mathbf{r} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right), \quad (7.64)$$

называют энергией. Закон сохранения энергии имеет вид $\partial_t E = 0$.

С формальной точки зрения, закон сохранения энергии (7.63) следует из того, что в выражении (7.62) для вариации действия присутствуют только производные (по времени и пространству) от поля τ , но не само τ . В свою очередь, это свойство следует из инвариантности действия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, которое соответствует $\tau = \text{const}$. Поэтому при не зависящем от времени и координат поле τ вариация действия обязана обращаться в ноль, что и объясняет отсутствие членов с τ (без производных) в вариации (7.62). Понятно, что таким же образом будут получаться законы сохранения в том случае, если действие инвариантно относительно преобразования поля u , которое характеризуется некоторым непрерывным параметром типа τ . Поэтому иногда говорят, что Нётеровские интегралы движения являются следствием непрерывной симметрии действия. Дискретная же симметрия (типа

инвариантности действия относительно изменения знака поля u) законов сохранения не дает.

Рассмотрим закон сохранения, который получается из инвариантности действия относительно сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала координат поле u изменяется, это изменение равно $\delta u = \xi \nabla u$, где ξ – величина сдвига. Считая теперь, что ξ является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (7.60) при вариации $\delta u = \xi \partial_x u$ и приравнявая результат к нулю (что справедливо для поля u , подчиняющемуся уравнению движения), находим

$$\partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (7.65)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для остальных координат. Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$\mathbf{P} = - \int d\mathbf{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \nabla u, \quad (7.66)$$

которую обычно называют импульсом (momentum). Закон сохранения импульса имеет вид $\partial_t \mathbf{P} = 0$.

Чтобы проиллюстрировать возникновение Нётеровских интегралов движения, не связанных с однородностью в пространстве и времени, рассмотрим случай, когда интересующее нас поле является комплексным. Обозначим его ψ . В этом случае действие S можно записать в виде

$$S = \int dt d\mathbf{r} L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*). \quad (7.67)$$

Мы записали зависимость L от ψ и сопряженного ему поля ψ^* отдельно, поскольку в силу того, что поле ψ имеет две компоненты (действительную и мнимую части) уравнения движения на ψ или ψ^* можно получать независимым варьированием по ψ или ψ^* .

Теперь предположим, что действие (7.67) инвариантно относительно сдвига фазы (что справедливо, например, для НУШ). Для инфинитезимального сдвига это преобразование имеет вид $\delta \psi = i\alpha \psi$, $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$. Инвариантность действия относительно этого преобразования означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} \psi + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \nabla \psi - \frac{\partial L}{\partial \psi^*} \psi^* - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \dot{\psi}^* - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \nabla \psi^* = 0.$$

Считая теперь, что α является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (7.67) при вариации $\delta \psi = i\alpha \psi$, $\delta \psi^* = -i\alpha \psi^*$ и приравнявая результат к нулю (с использованием приведенного выше выражения), находим закон сохранения

$$i \partial_t \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right) + i \nabla \left(\frac{\partial L}{\partial \nabla \psi} \psi - \frac{\partial L}{\partial \nabla \psi^*} \psi^* \right) = 0. \quad (7.68)$$

Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$N = \int d\mathbf{r} i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} \psi - \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^*} \psi^* \right), \quad (7.69)$$

которую называют числом частиц или волновым действием. Закон сохранения имеет вид $\partial_t N = 0$.

Задача 7.4.1. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения КдФ

$$\partial_t u + g \partial_x u + \partial_x [(\partial f / \partial u) \partial_x^2 f] = 0,$$

где f, g – произвольные функции u . Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 7.4.2. Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения синус-Гордон

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + f(\varphi) = 0,$$

где f – периодическая функция с периодом 2π , удовлетворяющая условию $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) = 0$. Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

Задача 7.4.3. Найти момент импульса поля u , динамика которого дается действием

$$S = \int dt d^3r \left[\frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} (\nabla u)^2 - F(u) \right],$$

где F – произвольная функция u . Указание: действие инвариантно относительно инфинитезимального поворота на угол θ , при котором поле u преобразуется следующим образом $\delta u = -\theta_i \epsilon_{ikn} r_k \partial_n u$, где ϵ_{ikn} – абсолютно антисимметричный тензор, а \mathbf{r} – радиус-вектор.

Глава 8

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

В настоящем разделе мы изучаем специальные решения, автомодельные и описывающие распространение фронтов и солитонов. Мы также анализируем так называемые интегрируемые уравнения, которые обладают бесконечным набором интегралов движения. Как правило, к ним относятся случаи, когда поля зависят от времени и одной координаты. В силу наличия бесконечного набора интегралов движения решения интегрируемых уравнений обладают весьма специфической динамикой. В частности, у них существует обширное семейство так называемых солитонных решений, которые играют важную роль в различных приложениях.

8.1 Специальные решения

Здесь мы будем рассматривать специальные решения дифференциальных уравнений в частных производных, которые сводятся к функции одной переменной. Существование такого сорта решений обязано симметрии уравнения (однородность, изотропия, инвариантность относительно перемасштабирования времени, координат и искомого поля). Отдельный вопрос связан со статусом подобных решений: они могут представлять универсальную асимптотику на больших временах или, наоборот, являться сепаратрисой (абсолютно неустойчивым решением). Выяснение этого вопроса должно проводиться для каждого конкретного случая.

8.1.1 Автомодельные решения

Мы будем считать, что поле $u(t, \mathbf{r})$ подчиняется некоторому дифференциальному уравнению в частных производных, которое однородно (по времени и пространству) и изотропно. В этом случае возможно существование автомодельных решений, которые имеют вид

$$u = \frac{1}{t^a} f(r/t^b), \quad (8.1)$$

где a и b – некоторые числа, которые называются индексами. Аргумент функции f , то есть r/t^b , называется автомодельной переменной. Чтобы уравнение имело автомодельное решение (8.1), оно должно быть инвариантно относительно перемасштабировки

$$t \rightarrow \mathcal{Z}t, \quad r \rightarrow \mathcal{Z}^b r, \quad u \rightarrow \mathcal{Z}^{-a} u, \quad (8.2)$$

где \mathcal{Z} – произвольный фактор. Очевидно, решение (8.1) инвариантно относительно преобразования (8.2).

Мы уже сталкивались с автомодельным поведением. Например, функция Грина уравнения диффузии $\partial_t u =$

$\nabla^2 u$, которая удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t - \nabla^2)G = \delta(t)\delta(\mathbf{r}), \quad (8.3)$$

имеет автомодельный вид (8.1)

$$G(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right), \quad (8.4)$$

где d – размерность пространства. В данном случае автомодельной переменной является r/\sqrt{t} . Действительно, уравнение диффузии $\partial_t u = \nabla^2 u$ инвариантно относительно $t \rightarrow \mathcal{Z}t$, $r \rightarrow \mathcal{Z}^{1/2}r$. Что же касается показателя a в выражении (8.4), то он связан с правой частью уравнения (8.3): обе части этого уравнения должны одинаково вести себя при преобразовании $t \rightarrow \mathcal{Z}t$, $r \rightarrow \mathcal{Z}^{1/2}r$.

При $t > 0$ функция Грина (8.4) является решением уравнения диффузии с нулевой правой частью и может рассматриваться, как его автомодельное решение. Отметим, что уравнение диффузии само по себе не фиксирует показатель a в (8.1). Однако этот показатель фиксируется законом сохранения $\int dV u = \text{const}$, который следует из уравнения диффузии $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$ для локализованного в пространстве поля. Из закона сохранения следует соотношение $db - a = 0$, которое в совокупности с $b = 1/2$ дает $a = d/2$, что и соответствует автомодельности решения (8.4). Разумеется, не всякое решение уравнения диффузии $\partial_t u - \nabla^2 u = 0$ имеет автомодельный характер. Однако на больших временах решение уравнения диффузии с локализованным начальным условием становится близким к поведению функции Грина, то есть автомодельность решения возникает асимптотически.

Задача 8.1.1. Найти автомодельное локализованное решение уравнения

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = 0.$$

Рассмотрим одномерное нелинейное уравнение диффузии

$$\partial_t u = \partial_x(u \partial_x u). \quad (8.5)$$

Будем искать автомодельное решение этого уравнения вида (8.1). Уравнение (8.5) инвариантно относительно преобразования (8.2) при условии $a + 2b = 1$. Дополнительное условие на показатели a, b получается, если мы рассматриваем поле u , достаточно быстро стремящееся к нулю на бесконечности. В этом случае получаем из уравнения (8.5)

$$\partial_t \int dx u = 0 \rightarrow \int dx u = \text{const}.$$

Отсюда находим $a = b$. Таким образом, $a = b = 1/3$, и автомодельное решение (8.1) имеет вид

$$u = t^{-1/3} f(xt^{-1/3}). \quad (8.6)$$

Подставляя выражение (8.6) в уравнение (8.5), находим

$$\partial_\xi(f\partial_\xi f) + \frac{1}{3}\partial_\xi(\xi f) = 0,$$

где $\xi = xt^{-1/3}$ – автомодельная переменная. Интегрируя это уравнение, находим

$$f\partial_\xi f + \frac{1}{3}\xi f = 0, \quad (8.7)$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления f к нулю при стремлении ξ к бесконечности. Находим два решения уравнения (8.7): $f = 0$ и $f = C - \xi^2/6$, где C – произвольная константа. Решение, стремящееся к нулю на бесконечности, склеивается из этих двух решений:

$$f(\xi) = \begin{cases} f = C - \xi^2/6, & \xi^2 < 6C, \\ f = 0, & \xi^2 > 6C. \end{cases} \quad (8.8)$$

Возможность склейки связана с первым порядком дифференциального уравнения (8.7), которое требует непрерывности функции f , но допускает скачок в ее производной.

Задача 8.1.2. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x(u^2 \partial_x u).$$

Рассмотрим уравнение

$$6\partial_t u = \partial_x[(\partial_x u)^3]. \quad (8.9)$$

Будем искать его локализованное автомодельное решение вида (8.1). Инвариантность относительно преобразования (8.2) в совокупности с законом сохранения $\int dx u = \text{const}$ дает $a = b = 1/6$. Подставляя выражение (8.1) с этими показателями в уравнение (8.9), получаем

$$\partial_\xi(\xi f) + \partial_\xi[(\partial_\xi f)^3] = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\xi f + (\partial_\xi f)^3 = 0, \quad (8.10)$$

поскольку константа интегрирования равна нулю в силу предполагаемого быстрого стремления f к нулю при стремлении ξ к бесконечности. После извлечения корня из обеих частей уравнения (8.10) в нем разделяются переменные, что позволяет найти его решения. Помимо тривиального решения $f = 0$ найденное уравнение имеет решение $f^{2/3} = C - \xi^{4/3}/2$, где C – произвольная постоянная. Учитывая, что f локализовано, находим решение, которое получается путем склейки

$$f(\xi) = \begin{cases} f = (C - \xi^{4/3})^{3/2}, & |\xi| < (2C)^{3/4}, \\ f = 0, & |\xi| > (2C)^{3/4}. \end{cases} \quad (8.11)$$

Задача 8.1.3. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$10\partial_t u = \partial_x[(\partial_x u)^4].$$

Выше мы рассматривали двучленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразования (8.2) давала одно соотношение между показателями a и b . Дополнительную связь между показателями a и b удавалось найти за счет закона сохранения. Это и фиксировало величины a и b . Встречаются и трехчленные уравнения, инвариантность которых относительно преобразования (8.2) дает сразу два условия, которые фиксируют a и b . Рассмотрим в качестве примера нелинейное уравнение диффузии с дополнительным членом

$$\partial_t u = \partial_x(u^n \partial_x u) + u^k. \quad (8.12)$$

Инвариантность уравнения (8.12) относительно преобразования (8.2) дает два условия, которые приводят к

$$a = \frac{1}{k-1}, \quad b = \frac{k-n-1}{2(k-1)}. \quad (8.13)$$

Уравнение на функцию f в терминах автомодельной переменной $\xi = x/t^b$ в данном случае может быть решено только численно.

Задача 8.1.4. Выписать уравнение на функцию f в терминах автомодельной переменной $\xi = x/t^b$ для уравнения (8.12).

Задача 8.1.5. Найти локализованное автомодельное решение уравнения

$$\partial_t u = \partial_x(u^{-1} \partial_x u) + \partial_x u.$$

8.1.2 Движение фронта

Однородные по времени и пространству дифференциальные уравнения на функцию $u(t, \mathbf{r})$ допускают решения вида $u = w(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$. Такие решения описывают эволюцию поля u , которая сводится к движению некоторого профиля со скоростью \mathbf{V} . Мы будем говорить о такой эволюции, как о движении фронта, который определяется условием $\mathbf{r} = \mathbf{V}t$, если далеко впереди (перед фронтом) и далеко позади (за фронтом) поле u стремится к некоторым константам. Разумеется, эти константы сами по себе должны быть решениями исходного уравнения. Проанализируем уравнение Фишера

$$\partial_t u = \partial_x^2 u + u(1-u). \quad (8.14)$$

Уравнение (8.14) имеет два стационарных однородных решения, $u = 0$ и $u = 1$. Простой линейный анализ показывает, что первое из них неустойчиво, а второе

устойчиво. Как правило, исследуется решение (8.14), для которого во всем пространстве выполняется условие $0 < u < 1$. Отметим, что это свойство поддерживается уравнением.

Докажем это свойство. Из уравнения (8.14) следует

$$u(t, x) = \int dy \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] u(0, y) + \int \frac{d\tau dy}{2\sqrt{\pi \tau}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right] u(t-\tau, y)[1-u(t-\tau, y)],$$

смотри раздел 4.2.1. Отсюда следует, что если на интервале времени $0, t$ выполняется условие $0 < u < 1$, то и $u(t, x) > 0$. Аналогично доказывается $u < 1$. Перепишем уравнение (8.14) в виде

$$\partial_t v = \partial_x^2 v - v + v^2,$$

где $v = 1 - u$. Из него следует

$$v(t, x) = \int dy \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] v(0, y) + \int \frac{d\tau dy}{2\sqrt{\pi \tau}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4\tau}\right] v^2(t-\tau, y),$$

смотри раздел 4.2.1. Отсюда следует, что если на интервале времени $0, t$ выполняется условие $v > 0$, то и $v(t, x) > 0$, то есть $u(t, x) < 1$.

Уравнение Фишера встречается в различных контекстах. Например, оно моделирует процесс горения, тогда $u = 0$ соответствует исходной смеси горючего и окислителя, а $u = 1$ — полностью сгоревшей смеси. В этом случае u имеет смысл концентрации продуктов горения.

Уравнение (8.14) относится к типу релаксационных уравнений (5.43), оно может быть записано в виде $\partial_t u = -\delta\mathcal{F}/\delta u$, где

$$\mathcal{F} = \int dx \left[\frac{1}{2}(\partial_x u)^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 \right]. \quad (8.15)$$

Вследствие уравнения (8.14) функционал (8.15) монотонно убывает со временем, поскольку его производная по времени

$$\partial_t \mathcal{F} = - \int dx (\delta\mathcal{F}/\delta u)^2 = - \int dx (\partial_t u)^2,$$

отрицательна. Это свойство соответствует необратимости процесса горения.

Уравнение (8.14) допускает решение в виде распространяющегося фронта $u = w(x - Vt)$, когда происходит переход от неустойчивого состояния $u = 0$, которое реализуется перед фронтом, к устойчивому состоянию $u = 1$, которое реализуется за фронтом. Как следует из уравнения (8.14), уравнение на функцию w имеет вид

$$V\partial_x w + \partial_x^2 w + (1-w)w = 0. \quad (8.16)$$

Имеется ограничение снизу на скорость движения фронта $V > 2$, которое можно получить из анализа приближения уравнения (8.16) к нулевому значению при

$x \rightarrow \infty$, когда w мало. В случае $V < 2$ уравнение (8.16) приводит к осцилляторному характеру приближения w к нулю при $x \rightarrow \infty$, что противоречит условию $w > 0$. При $V > 2$ уравнение (8.16) имеет решение, удовлетворяющее условию $0 < w < 1$, которое описывает распространяющийся фронт. В общем случае это решение можно найти только численно.

Задача 8.1.6. Найти решение уравнения (8.16), которое имеет вид $w = [1 + \exp(cx)]^{-2}$. Какому значению скорости V оно соответствует?

Задача 8.1.7. Найти производную $\partial_t \mathcal{F}$ при движении фронта, которое описывается уравнением $u(t, x) = w(x - Vt)$.

Спрашивается, какому значению скорости V соответствует решение реальной задачи Коши? Ответ зависит от начальных условий. Как показали Колмогоров, Петровский и Пискунов, начальные условия $u = 0$ при $x > 0$ и $u = 1$ при $x < 0$ приводят к возникновению фронта, который движется с минимально возможной скоростью $V = 2$. Это связано с нулевым значением u в той области, куда распространяется фронт. Можно обеспечить и большую скорость распространения фронта. Но для этого в области, куда распространяется фронт, необходимо обеспечить ненулевое значение u , которое будет поддерживать распространение фронта со скоростью $V > 2$. Например, в этой области можно создать $u(x)$, которое определяется решением уравнения (8.16).

Разобранное нами уравнение (8.14) имеет только два стационарных однородных решения, 0 и 1. Соответственно, распространение фронта заключается в переходе от неустойчивого решения 0 к устойчивому 1. В то же время имеется класс уравнений, которые допускают в качестве стационарного решения произвольную константу. В качестве иллюстрации приведем уравнение Бюргерса

$$\partial_t u + u\partial_x u = \partial_x^2 u, \quad (8.17)$$

которое, очевидно, имеет своим решением произвольную константу $u = \text{const}$. В подобном случае распространение фронта может заключаться в переходе от одной константы к другой.

Найдем явное решение уравнения Бюргерса, которое заключается в распространении фронта, перед которым значение u равно нулю, а за фронтом — некоторой константе. Подстановка $u(t, x) = w(x - Vt)$ в уравнение Бюргерса (8.17) дает соотношение $-V\partial_x w + w\partial_x w - \partial_x^2 w = 0$, которое приводит к первому интегралу $-Vw + w^2/2 - \partial_x w = C$. Мы рассматриваем решение, которое стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, в этом случае $C = 0$. Разделяя переменные в оставшемся уравнении первого порядка, находим $V(x - x_0) = \ln[(2V - w)/w]$, где x_0 — произвольная константа. Отсюда находим

$$w(x) = \frac{2V}{1 + \exp[V(x - x_0)]}. \quad (8.18)$$

Обратим внимание на то, что при $x \rightarrow -\infty$ $w \rightarrow 2V$. Таким образом, найденное решение описывает движение фронта, перед которым u равно нулю, и за которым u равно $2V$. Конечно, решение (8.18) может быть получено из (7.12) при $u_0 = V, a = -V/2$.

Задача 8.1.8. Найти форму фронта, перед которым $u = 0$, для уравнения $\partial_t u + 3u^2 \partial_x u = \partial_x^2 u$.

Задача 8.1.9. Найти форму антисимметричного фронта для уравнения $\partial_t u + 3u^2 \partial_x u + \partial_x^3 u = 0$

Приведем пример, когда разность значений поля u перед фронтом и за ним не связана со скоростью его движения. Рассмотрим уравнение

$$2u \partial_t u = \partial_x [(\partial_x u)^2], \quad (8.19)$$

которое также допускает в качестве стационарного решения произвольную константу. Подстановка $u = w(x - Vt)$ в уравнение (8.19) дает

$$2Vw \partial_x w + \partial_x [(\partial_x w)^2] = 0. \quad (8.20)$$

Это уравнение имеет, очевидно, первый интеграл

$$Vw^2 + (\partial_x w)^2 = C, \quad (8.21)$$

который должен быть положительным при $V > 0$. Уравнение (8.21) имеет однородные решения $w_{1,2} = \pm \sqrt{C/V}$. Найденный первый интеграл (8.21) имеет смысл закона сохранения энергии для осциллятора, который описывается уравнением

$$\partial_x^2 w + Vw = 0. \quad (8.22)$$

Уравнение (8.22) имеет решения в виде гармонических функций. Если мы хотим получить решение в виде фронта, то мы должны склеить его с константами $\pm \sqrt{C/V}$. Поскольку (8.22) является уравнением второго порядка по производной, то в месте склейки должны быть непрерывны как сама функция, так и ее производная. Отсюда получаем решение

$$\begin{aligned} w(x) &= -\sqrt{C/V}, & x < -\frac{\pi}{2\sqrt{V}}, \\ w(x) &= \sqrt{C/V} \sin(\sqrt{V} x), & -\frac{\pi}{2\sqrt{V}} < x < \frac{\pi}{2\sqrt{V}}, \\ w(x) &= \sqrt{C/V}, & x > \frac{\pi}{2\sqrt{V}}. \end{aligned}$$

Очевидно, что аргумент x в этих выражениях может быть сдвинут на произвольную константу. Более того, можно построить и более сложные решения, когда между асимптотическими константами имеется произвольное число полупериодов, а не один, как приведено выше. Отметим, что при $V < 0$ решений уравнения (8.20), которые давали бы фронты, нет. Это связано с тем, что при $V < 0$ решения уравнения (8.22) выражаются через гиперболические косинус и синус, которые не могут быть подклеены к асимптотическим константам.

Задача 8.1.10. Как связаны между собой асимптотические значения w для фронта, который описывается уравнением (8.20), если между ними вставлен один период?

8.2 Интегрируемые уравнения

Так называемые интегрируемые уравнения были открыты и интенсивно исследовались во второй половине 20 века. Это нелинейные полевые уравнения, которые приводят к бесконечному набору интегралов движения. Понятно, что эти уравнения описывают бездиссипативную динамику. Более того, все такие уравнения являются Лагранжевыми, то есть могут быть получены, как условие экстремума некоторого действия, которое является интегралом от функции Лагранжа, локально выражающейся через исследуемое поле. Это приводит к существованию интегралов движения, связанных с симметрией действия, смотри раздел 7.4.1. Однако набор интегралов движения интегрируемого уравнения не сводится только к Нётеровским интегралам, этот набор гораздо шире, число интегралов движения счетно.

Удивительным образом интегрируемыми оказываются целый ряд базисных нелинейных уравнений, которые возникают в различных контекстах. Как правило, речь идет о полях, которые помимо времени зависят от одной пространственной переменной. Именно такие примеры (уравнение Кортевега-де-Фриза, уравнение синус-Гордон, нелинейное одномерное уравнение Шрёдингера) будут рассмотрены нами ниже. Мы сосредоточимся на исследовании структуры сохраняющихся величин для перечисленных уравнений. Общий метод получения этих величин для интегрируемых величин изложен в разделе 8.3. Возникающие интегралы движения отдельно рассматриваются для перечисленных уравнений с учетом их специфики.

Интегрируемые уравнения обладают богатым набором солитонных решений, то есть как покоящихся, так и движущихся с постоянной скоростью нелинейных волновых пакетов. Для исследования этих решений используется так называемый метод обратной теории рассеяния, который позволяет аналитически получать самые разнообразные солитонные решения. Заметим в этой связи, что солитонными решениями обладают не только интегрируемые уравнения. Однако солитоны в бездиссипативных нелинейных неинтегрируемых уравнениях оказываются, как правило, неустойчивыми, то есть разрушаются со временем за счет малых возмущений. В интегрируемых же системах солитоны, как правило, устойчивы. Это связано с тем, что законы сохранения накладывают на структуру поля жесткие ограничения, которые исключают развитие неустойчивости.

Наличие бесконечного набора законов сохранения приводит к весьма своеобразной динамике взаимодействия солитонов. Например, обычен процесс, когда два солитона, движущиеся с различными скоростями, стал-

квиваются, взаимодействуют между собой и затем расходятся. При этом в процессе взаимодействия поле может существенно искажаться. Несмотря на это, наличие законов сохранения приводит к тому, что форма солитонов после столкновения оказывается точно такой же, как и до столкновения. Здесь надо только оговориться, что в процессе столкновения может меняться фаза солитона (которой, например, обладают солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера), поскольку законы сохранения не чувствительны к этой фазе.

При исследовании статистических свойств системы, которая описывается набором переменных или полей, обычно считается, что за достаточно большое время система “заметает” все фазовое пространство. Это свойство называется эргодичностью. Ограничения на это поведение накладывают только законы сохранения (энергии, импульса), которые выделяют какую-то часть фазового пространства. Однако при наличии бесконечного набора интегралов движения ограничений оказывается столь много, что об эргодичности динамики интегрируемой системы не может идти и речи. Это следует принимать во внимание при исследовании кинетики интегрируемой системы.

К сожалению, интегрируемость системы отнюдь не означает, что для нее можно решить задачу Коши, то есть явно найти поле в произвольный момент времени, если задано его начальное состояние. Это связано с тем, что интегралы движения покрывают, грубо говоря, половину степеней свободы системы. В то же время остаются еще “фазовые” переменные, которые сложно меняются со временем. И найти явно их динамику затруднительно.

8.2.1 Уравнение Кортевега-де-Фриза

Как мы уже отмечали, в общем случае решение уравнения Хопфа (7.1) приводит к формированию особенности в поле u за конечное время, и на больших временах эволюция поля u в рамках уравнения Хопфа исследована быть не может. В то же время уравнение Бюргерса (7.8) дает решение эволюционной задачи для поля u на всех временах. Это связано с присутствием в уравнении Бюргерса дополнительного (по сравнению с уравнением Хопфа) члена со второй производной, наличие которого приводит к устранению особенности в поле u (к которой приводит уравнение Хопфа). Для одномерной слабо нелинейной звуковой волны член со второй производной представляет диссипацию. В ряде задач более существенным оказывается другой эффект, связанный с дисперсией скорости звука, то есть с ее зависимостью от волнового вектора k . Этот эффект является бездиссипативным.

Будем считать, что диссипацией звука можно пренебречь, а дисперсия скорости звука существенна. В общем случае скорость звука является некоторой функцией k^2 , при достаточно малых k первая зависящая от k поправка к скорости звука пропорциональна k^2 . Это

означает, что к уравнению Хопфа (7.1) следует добавить член с третьей производной. В результате получается так называемое уравнение Кортевега де Фриза (Korteweg de Vries), каноническая форма которого записывается, как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (8.23)$$

Это уравнение сводится к уравнению Хопфа (7.1) в пренебрежение третьей производной и после перемасштабирования поля $6u \rightarrow u$.

Уравнение Кортевега де Фриза (КдФ) является автомодельным, то есть не содержит явной зависимости от времени t и координаты x . Подобно уравнению Бюргерса, уравнение КдФ (8.23) инвариантно относительно “преобразования Галилея” $u(t, x) \rightarrow v + u(t, x - 6vt)$, где v — произвольная константа.

Уравнение КдФ (8.23) допускает автомодельное решение в виде волнового фронта, распространяющейся со скоростью V : $u = w(x - Vt)$, смотри раздел 8.1.2. Подставляя это выражение в уравнение (8.23), находим

$$-V \frac{\partial w}{\partial x} + 6w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0.$$

Это уравнение, очевидно, имеет первый интеграл

$$-Vw + 3w^2 + \partial^2 w / \partial x^2 = C.$$

Получившееся соотношение имеет вид уравнения Ньютона для “времени” x и “координаты” w с потенциальной силой. Поэтому оно имеет первый интеграл (“энергию” C_2), то есть

$$\left(\frac{dw}{dx} \right)^2 = 2C_2 + 2Cw + Vw^2 - 2w^3, \quad (8.24)$$

где C_2 и C — произвольные константы.

Можно рассматривать различные решения уравнения (8.24). Если мы интересуемся локализованными (солитонными) решениями уравнения (8.24), то $C_2 = C = 0$, поскольку только при этих условиях реализуется решение, стремящееся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Тогда мы находим из уравнения (8.24)

$$dw/dx = \pm w \sqrt{V - 2w}.$$

Это уравнение имеет решение

$$u(t, x) = \frac{V}{2 \cosh^2 \left[\sqrt{V} (x - Vt - x_0) / 2 \right]}, \quad (8.25)$$

где x_0 — произвольный параметр. Таким образом, ширина солитона, который движется со скоростью V , равна $1/\sqrt{V}$.

Другим случаем являются периодические решения уравнения (8.24), которые называются кноидальными волнами. Чтобы такое решение существовало, необходимо наличие трех корней уравнения $2_2 + 2Cw + Vw^2 -$

$2w^3 = 0$. Область изменения w лежит между вторым и третьим решениями этого уравнения, где $2_2 + 2Cw + Vw^2 - 2w^3 > 0$. Тогда

$$x - Vt - x_0 = \pm \int^u dw (2_2 + 2Cw + Vw^2 - 2w^3)^{-1/2} \quad (8.26)$$

где x_0 — произвольный параметр.

Уравнение КдФ (8.23) может быть записано, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[-\frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 + \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right], \quad (8.27)$$

где, как и для уравнения Бюргерса, $u = \partial_x h$. В силу однородности действия по времени и пространству оно приводит к законам сохранения энергии E и импульса P (смотри раздел 7.4.1), которые вычисляются в соответствии с выражениями (7.64, 7.66):

$$E = \int dx [2u^3 - (\partial_x u)^2], \quad (8.28)$$

$$P = \int dx u^2. \quad (8.29)$$

Задача 8.2.1. Найти энергию и импульс солитона (8.25).

Действие (8.27) инвариантно относительно преобразования Галилея для h : $h(t, x) \rightarrow vx - 2v^2t + h(t, x - 6vt)$. Инфинитезимальное преобразование для h имеет вид $\delta h = vx - 6vt\partial_x h$. Действуя далее, как и в разделе 7.4.1, то есть полагая v произвольной функцией t и x , вычисляя вариацию действия (8.27) и приравнивая ее к нулю, находим закон сохранения

$$\partial_t(xu - 3tu^2) + \partial_x[3xu^2 - \partial_x u + x\partial_x^2 u - 12tu^3 - 6tu\partial_x^2 u + 3t(\partial_x u)^2] = 0.$$

Интегрируя по x , находим соотношение

$$\int dx xu = 3(t - t_0)P,$$

где t_0 — произвольная константа. Это закон движения “центра тяжести” системы.

Уравнение Кортевега де Фриза принадлежит к интегрируемым уравнениям, то есть обладает бесконечным набором интегралов движения, которые имеют вид интегралов от локальных выражений

$$I_n = \int dx p_n(u, \partial_x u, \partial_x^2 u \dots). \quad (8.30)$$

Здесь p_n — полиномы от функции u и её пространственных производных, способ построения которых обсуждается в разделе 8.3.1.

Как отмечено в этом разделе, уравнение Кортевега де Фриза соответствует случаю $r = u$, $q = 1$, при этом $p_1 = u$. Используя рекуррентное соотношение (8.77), находим

$$\begin{aligned} p_1 &= u, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = u^2, \quad p_4 = u\partial_x u, \\ p_5 &= u\partial_x^2 u + 2u^3, \quad p_6 = u\partial_x^3 u + 6u^2\partial_x u, \\ p_7 &= u\partial_x^4 u + 8u^2\partial_x^2 u + 6u(\partial_x u)^2 + 5u^4. \end{aligned}$$

Все плотности с четным индексом p_{2n} являются полными производными, и потому интегралы $I_{2n} = 0$. Содержательными являются законы сохранения интегралов I_{2n-1} с нечетным индексом. Интеграл I_1 сохраняется в силу того, что уравнение Кортевега де Фриза (8.23) приводит к полной производной по x для $\partial_t u$. Интегралы I_3, I_5 совпадают с импульсом и энергией, $I_3 = P$, $I_5 = E$. Таким образом, первой не Нёгеровской сохраняющейся величиной является интеграл I_7 .

Задача 8.2.2. С точностью до полной производной плотность p_7 может быть записана в виде $(\partial_x^2 u)^2 + 5u^2\partial_x^2 u + 5u^4$. Найти производную по времени от этой величины в соответствии с уравнением КдФ (8.23) и убедиться, что результат сводится к полной производной по x .

8.2.2 Уравнение синус-Гордон

Уравнением синус-Гордон называют уравнение

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0. \quad (8.31)$$

Такого сорта уравнение возникает для динамики систем, которые описываются переменной φ , которая имеет смысл фазы некоторой величины и, соответственно, однозначно определена на интервале от 0 до 2π . Удобно, однако, считать, что φ меняется от $-\infty$ до $+\infty$ с тем, чтобы избежать возможных скачков фазы φ на 2π . При этом состояния системы, для которых φ отличается на $2\pi n$ (n — целое число), физически эквивалентны.

Примером физической системы, описываемой уравнением (8.31), являются проводящие одномерные цепочки, в которых при достаточно низких температурах возникает так называемая волна зарядовой плотности. Эта волна характеризуется фазой φ , с вариациями которой связана так называемая Фрелиховская мода, которая описывается уравнением (8.31), при подходящем выборе единиц измерения времени t и координаты x вдоль цепочки.

При небольших вариациях фазы, $|\varphi| \ll 1$, мы можем заменить в уравнении (8.31) $\sin \varphi$ на φ . В результате мы получаем линейное уравнение, которое описывает совокупность распространяющихся мод. Делая Фурье-преобразование по времени и пространству, мы приходим для данной Фурье-компоненты к соотношению $\omega^2 = q^2 + 1$, где ω — частота, а q — волновой вектор. Таким образом, частота ω не может быть меньше единицы. В то же время групповая скорость $\partial\omega/\partial q = q/\sqrt{q^2 + 1}$ стремится к нулю при уменьшении волнового вектора q .

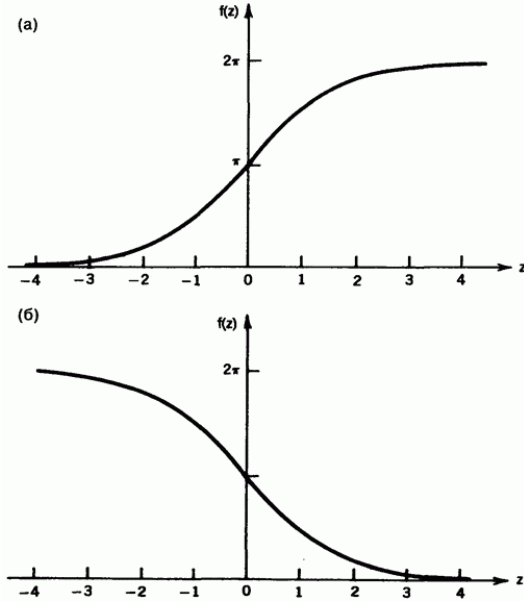


Рис. 8.1: Кинк и антикинк.

Рассмотренные выше колебания относятся к малым вариациям около стационарного состояния $\varphi = 0$ (или $\varphi = 2\pi n$). В то же время уравнение (8.31) имеет, очевидно, еще одно стационарное решение $\varphi = \pi$. Оно является, однако, абсолютно неустойчивым. Для доказательства этого утверждения рассмотрим малые отклонения от этого состояния, которые описываются малой фазой ϕ : $\varphi = \pi + \phi$. В линейном по ϕ приближении уравнение (8.31) дает

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi - \phi = 0. \quad (8.32)$$

Переходя теперь к Фурье-представлению, мы находим $\omega = \pm \sqrt{q^2 - 1}$. Таким образом, при $q < 1$ частота является чисто мнимой, и множитель $\exp(-i\omega t)$ экспоненциально растет со временем (для соответствующего знака квадратного корня). Это означает, что даже исходно малые возмущения стационарного состояния $\varphi = \pi$ станут со временем большими и разрушат это состояние.

Помимо тривиальных однородных стационарных решений уравнение (8.31) допускает широкий набор неоднородных стационарных решений, существование которых формально связано с неоднозначностью фазы φ . Рассмотрим простейшее такое решение, которое характеризуется предельным поведением $\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\varphi \rightarrow 2\pi$ при $x \rightarrow +\infty$. Стационарное условие $-\partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0$ имеет вид уравнения Ньютона для (перевернутого) физического маятника и имеет, очевидно, первый интеграл $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$, который в силу граничных условий надо приравнять к единице.

В результате мы приходим к уравнению $\partial_x \varphi = 2 \sin(\varphi/2)$, которое имеет решение

$$\varphi = 4 \arctan [\exp(x - x_0)], \quad (8.33)$$

где x_0 – произвольная константа. Решение (8.33) называют кинком, а x_0 является положением кинка. Из вы-

ражения (8.33) следует, что фаза φ меняется от 0 до 2π в окрестности порядка единицы около x_0 , а вне ее экспоненциально быстро стремится к своим предельным значениям, смотри рисунок 8.1. Легко найти решение (антикинк), которое соответствует убыванию фазы φ от 2π до 0:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan [\exp(x - x_0)],$$

смотри рисунок 8.1.

Задача 8.2.3. *Линеаризуя уравнение (8.31) на фоне какого-либо его решения φ , мы находим для возмущения ϕ уравнение $\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \phi \cos \varphi = 0$. Имеет ли это уравнение локализованные решения ϕ на фоне кинка (8.33)?*

Помимо простейшего решения (8.33), уравнение (8.31) допускает и более сложные стационарные решения. Например, бесконечный набор кинков. Для того, чтобы найти такое решение, мы можем воспользоваться тем же первым интегралом $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$, который теперь мы приравняем к $1 + \epsilon$. Тогда мы придем к уравнению

$$\partial_x \varphi = \sqrt{2\epsilon + 4 \sin^2(\varphi/2)}, \quad (8.34)$$

которое описывает монотонно растущую при увеличении x фазу φ . Если ϵ мало, то это решение соответствует бесконечной совокупности кинков, разделенных расстоянием $\ln(1/\epsilon)$ (что справедливо, если этот логарифм является большой величиной). Если в выражении (8.34) взять отрицательный знак перед корнем, то мы получим решение с монотонно убывающей фазой.

До сих пор мы рассматривали неподвижный кинк. Но уравнение (8.31) допускает решения и в виде движущегося кинка. Чтобы найти его профиль для скорости движения v , можно подставить в уравнение (8.31) общее выражение для равномерно движущегося локализованного волнового пакета $\varphi = f(x - vt)$ и провести те же вычисления. Однако ответ можно выписать и безо всяких вычислений, воспользовавшись тем, что уравнение (8.31) является “релятивистски инвариантным”, и потому решение для движущегося со скоростью v кинка может быть получено из выражения (8.33) преобразованием Лоренца. В результате получаем

$$\varphi = 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (8.35)$$

Отсюда следует, в частности, что кинк не может двигаться со скоростью больше единицы. Аналогичным образом может быть найдено решение для движущегося антикинка:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan \left[\exp \left(\frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right].$$

Уравнение синус-Гордон относится к классу уравнений, которые могут быть проанализированы в рамках метода обратной задачи рассеяния, который позволяет

найти серию гораздо более сложных решений уравнения (8.31), чем приведенные выше решения для одиночных движущихся кинков и антикинков. Эти решения представляют собой системы движущихся с различными скоростями кинков и антикинков, которые в силу различных скоростей движения время от времени сталкиваются между собой. Замечательно, что после такого столкновения кинки расходятся и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения. При этом не происходит никакого излучения волн.

Приведем решение уравнения (8.31), которое называют бризером (breather)

$$\varphi = 4 \arctan \left[\tan \theta \frac{\sin(t \cos \theta)}{\cosh(x \sin \theta)} \right]. \quad (8.36)$$

Проверка выполнения уравнения (8.31) для функции (8.36) осуществляется прямым вычислением производных от выражения (8.36). Решение (8.36) соответствует связанному состоянию кинка и антикинка, расстояние между которыми осциллирует со временем. Это решение описывает поле φ , центр тяжести которого покоится. Сделав преобразование Лоренца, легко получить поле φ для бризера, движущегося с произвольной скоростью $v < 1$.

Переходя в выражении (8.36) к пределу $\theta \rightarrow \pi/2$, находим следующее решение уравнения (8.31)

$$\varphi = 4 \arctan \frac{t}{\cosh x}. \quad (8.37)$$

Решение (8.37) описывает сближение кинка и антикинка с их последующим расхождением. При $t = 0$ мы имеем $\varphi = 0$, однако скорость изменения поля $\partial_t \varphi$ нулю не равна, она сосредоточена на расстояниях порядка единицы от начала координат. При $t \gg 1$ размер решения (8.37) оценивается, как $\ln t$. Эта величина имеет смысл расстояния между кинком и антикинком. Понятно, что начало координат и начало отсчета времени могут быть выбраны произвольно, то есть (8.37) остается решением при замене $t \rightarrow t - t_0$, $x \rightarrow x - x_0$.

Уравнение (8.31) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + \cos \varphi \right]. \quad (8.38)$$

Таким образом, в соответствии с разделом (7.4.1) мы находим следующие интегралы движения, имеющие смысл энергии и импульса системы

$$E = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \cos \varphi + 1 \right], \quad (8.39)$$

$$P = - \int dx \partial_t \varphi \partial_x \varphi, \quad (8.40)$$

смотри (7.64, 7.66). Мы ввели в подынтегральное выражение для энергии (8.39) константу (единицу) с тем, чтобы была равна нулю энергия состояния с $\varphi = 0$.

Задача 8.2.4. Найти энергию и импульс кинка (8.33) и решения (8.37).

Задача 8.2.5. Найти закон сохранения, который соответствует Лоренц-инвариантности уравнения синус-Гордон (8.31).

Уравнение (8.31) может быть переписано в терминах переменных вдоль “светового конуса” $\xi = (x + t)/2$, $\tau = (x - t)/2$:

$$\partial_\tau \partial_\xi \varphi = \sin \varphi, \quad (8.41)$$

поскольку $\partial_\xi = \partial_x + \partial_t$, $\partial_\tau = \partial_x - \partial_t$. Представление (8.41) оказывается удобным во многих приложениях.

Действие (8.38) переписывается в виде

$$S = \int d\tau d\xi [-\partial_\tau \varphi \partial_\xi \varphi + 2 \cos \varphi].$$

Интерпретируя τ , как время, и ξ , как координату, находим, что следующие величины остаются постоянными по τ

$$E_\xi = 2 \int d\xi (1 - \cos \varphi), \quad (8.42)$$

$$P_\xi = \int d\xi (\partial_\xi \varphi)^2, \quad (8.43)$$

где мы использовали выражения (7.64, 7.66). Как и выше, мы добавили к получаемой формальным образом энергии константу, чтобы энергия была равна нулю для состояния $\varphi = 0$.

Как показано в разделе 8.3.1, уравнение синус-Гордон приводит к бесконечному набору интегралов движения, при этом в общую схему вписывается именно уравнение (8.41). Таким образом, интегралы движения записываются в виде

$$I_n = \int d\xi p_n, \quad (8.44)$$

$\partial_\tau I_n = 0$, а p_n зависят от φ и его производных по ξ .

Явный вид плотностей интегралов движения p_n может быть найден после подстановки $q = r = \partial_\xi \varphi / 2$ в общее выражение для p_n , смотри раздел 8.3.1. Несколько первых плотностей можно найти из (8.78). Первая плотность равна $p_1 = (\partial_\xi \varphi)^2 / 4$, то есть I_1 с точностью до множителя совпадает с импульсом (8.43). Как и для КдФ, плотности p_{2n} с четными индексами являются полными производными, то есть $I_{2n} = 0$. Таким образом, первой не Нётеровской плотностью оказывается p_3 ,

$$4p_3 = \partial_\xi \varphi \partial_\xi^3 \varphi + \frac{1}{4} (\partial_\xi \varphi)^4. \quad (8.45)$$

Обратим внимание на то, что все p_n содержат только производные от φ , но не тригонометрические функции. Таким образом, энергия (8.42) выпадает из набора I_n . В то же время тригонометрические функции появляются в выражениях для производных по τ от p_n .

Задача 8.2.6. Найти производную по τ от величины $(\partial_\xi \varphi)^4/4 - (\partial_\xi^2 \varphi)^2$, которая отличается от $4\tau z$ (8.45) на полную производную. Убедиться, что производная по τ от этой величины является полной производной по ξ .

8.2.3 Одномерное нелинейное уравнение Шрёдингера

Мы уже установили общие свойства решений нелинейного уравнения Шрёдингера в двумерном и трехмерном случаях, смотри раздел 7.2. Здесь мы рассмотрим особенности одномерного случая. Как и раньше, мы будем изучать случай НУШ с притяжением (7.17). В одномерном случае это уравнение записывается в виде

$$i\partial_t \psi + \partial_x^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (8.46)$$

Изучим особенности решений этого уравнения.

В случае слабой нелинейности кубическим членом в (8.46) можно пренебречь, и мы возвращаемся к свободному линейному уравнению Шрёдингера, которое описывает волны с законом дисперсии $\varpi = k^2$, где k – волновой вектор. Таким образом, малый уровень нелинейности в НУШ соответствует волновому движению.

В случае сильной нелинейности в двумерном и трехмерном случаях НУШ обычно приводит к коллапсу, смотри смотри раздел 7.2. Однако, как мы уже установили, в одномерном случае градиентный член в уравнении (8.46) останавливает коллапс. Поэтому в одномерном случае даже для НУШ с притяжением возможно существование локализованных решений, которые существуют неограниченно долго по времени. Такие решения называются солитонами. Существуют обширные семейства солитонов, которые можно найти в рамках метода обратной задачи рассеяния. Мы рассмотрим простейший из них.

Мы начнем со случая, когда солитон покоится. Будем искать локализованное в пространстве решение уравнения (8.46) в виде

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} g(x). \quad (8.47)$$

Уравнение на функцию $g(x)$ имеет вид $g'' + 2g^3 - \eta^2 g = 0$, что является уравнением Ньютона в стационарном потенциале и поэтому его порядок может быть понижен в силу сохранения энергии. Умножая уравнение для g на g' и интегрируя по x , мы получаем

$$g' = -g\sqrt{\eta^2 - g^2}, \quad \int_g^\eta \frac{dg}{g\sqrt{\eta^2 - g^2}} = x - x_0. \quad (8.48)$$

Здесь x_0 – константа интегрирования, знак минус для корня выбран для убывания g с ростом $|x|$. Первообразная в уравнении (8.48) с помощью замены $g = \eta/y$ приводится к табличной и мы приходим к трехпараметрическому семейству решений:

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} \frac{\eta}{\cosh[\eta(x-x_0)]}. \quad (8.49)$$

Заметим, что уравнение (8.46) инвариантно относительно ‘преобразования Галилея’. А именно, если $\psi(t, x)$ – решение (8.46), то и

$$\psi(t, x - 2\beta t) e^{i\beta x - i\beta^2 t} \quad (8.50)$$

будет решением НУШ. Применяя это преобразование к (8.49), мы получим семейство односолитонных решений, зависящее от четырех параметров t_0, x_0, η, β . При $x_0 = t_0 = 0$ это решение имеет вид

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\cosh[\eta(x - 2\beta t)]} \exp[i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x]. \quad (8.51)$$

Найденный солитон является устойчивым. Это означает, что если взять начальное значение ϕ , который представляет собой слегка возмущенный (8.51), то это возмущение будет убывать со временем. При этом будут излучаться волны, которые будут расходиться от возмущенного солитона. Именно это излучение является физическим механизмом, который обеспечивает релаксацию солитона к профилю (8.51).

Как мы уже установили, НУШ с притяжением может быть получен, как экстремум действия, которое в одномерном случае имеет вид

$$S = \int dt dx L, \quad (8.52)$$

$$L = i\psi^* \partial_t \psi - \partial_x \psi^* \partial_x \psi + |\psi|^4.$$

Отсюда следуют законы сохранения числа частиц N , импульса P и энергии E , выражения для которых имеют вид

$$N = \int dx |\psi|^2, \quad (8.53)$$

$$P = -i \int dx \psi^* \partial_x \psi. \quad (8.54)$$

$$E = \int dx (|\partial_x \psi|^2 - |\psi|^4). \quad (8.55)$$

Сохранение этих величин объясняется теоремой Нётер, смотри раздел 7.4.1.

Задача 8.2.7. Вычислить значения Нётеровских интегралов движения N, E, P в одном измерении для движущегося солитона (8.51).

Задача 8.2.8. Найти закон сохранения, который связан с инвариантностью действия (8.52) относительно преобразования Галилея. Инфинитезимальное преобразование Галилея для поля ψ имеет вид $\delta\psi = i\beta x\psi - 2\beta t\partial_x \psi$.

Как показано в разделе 8.3.1, нелинейное уравнение Шрёдингера приводит к бесконечному набору интегралов движения, которые записываются в виде

$$I_n = \int dx p_n \quad (8.56)$$

Здесь p_n – локальные функции, зависящие от ψ, ψ^* и их производных по x . Способ построения этих функций пояснен в разделе 8.3.1.

Выражения для плотностей p_n может быть получено из общей схемы после подстановки $r = \psi, q = \psi^*$. Первые функции p_n приведены в (8.78). Легко видеть, что с точностью до множителей I_1, I_2, I_3 совпадают с Нётеровскими интегралами N, P, E . Первый не Нётеровский интеграл порождает плотность

$$p_4 = \psi \partial_x^3 \psi^* + |\psi|^2 \psi^* \partial_x \psi + 4|\psi|^2 \partial_x \psi^*. \quad (8.57)$$

Отметим, что I_4 является чисто мнимой величиной.

Задача 8.2.9. Найти производную по времени от величины $\partial_x \psi^* \partial_x^2 \psi - \frac{3}{2}(\psi^*)^2 \partial_x(\psi^2)$, которая отличается от (8.57) на полную производную. Показать, что эта производная по времени является полной производной по x .

8.3 Справочные материалы к главе

В настоящем разделе мы приводим справочные данные, необходимые для понимания изложенного в настоящей главе материала и решения приведенных задач.

8.3.1 Интегралы движения в интегрируемых уравнениях

Основные интегрируемые уравнения для функций, зависящих от времени t и координаты x , могут быть получены и исследованы в рамках следующей процедуры. Рассмотрим столбец, который удовлетворяет одновременно двум уравнениям

$$\partial_x \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (8.58)$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (8.59)$$

Здесь U, V – матрицы 2×2 , компоненты которых построены из интересующих нас функций, а также зависящие от некоторого параметра λ , который называется спектральным. Задача (8.59) корректна только в том случае, если операторы $\partial_x - U$ и $\partial_t - V$ коммутируют между собой. Это условие записывается в виде

$$\partial_t U - \partial_x V + [U, V] = 0. \quad (8.60)$$

Именно условие совместности (8.60) определяет уравнения на интересующие нас функции.

Продemonстрируем, как интегрируемые уравнения КдФ, НУШ и синус-Гордон могут быть записаны в виде (8.60). Матрица U выбирается в виде

$$U = i\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.61)$$

где r и q – некоторые функции t, x , уравнения на которые будут выводиться из условия совместности (8.60). Мы будем рассматривать случай, когда функции r и q достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

Выберем матрицу V в следующем виде

$$V = 8i\lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2i\lambda \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \partial_x q \\ -\partial_x r & 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} rq & 0 \\ 0 & -rq \end{pmatrix}. \quad (8.62)$$

Тогда (8.60) приводит к системе нелинейных уравнений

$$i\partial_t r + \partial_x^2 r + 2qr^2 = 0, \quad (8.63)$$

$$i\partial_t q - \partial_x^2 q - 2rq^2 = 0. \quad (8.64)$$

Подстановка $r = \psi, q = \psi^*$ в эти уравнения дает НУШ

$$i\partial_t \psi + \partial_x^2 \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (8.65)$$

Выберем матрицу V в следующем виде

$$V = -8i\lambda^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 4i\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & q \\ r & 0 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} qr & -i\partial_x q \\ i\partial_x r & -qr \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q\partial_x r - r\partial_x q & i\partial_x^2 q + 2iq^2 r \\ i\partial_x^2 r + 2ir^2 q & -q\partial_x r + r\partial_x q \end{pmatrix}. \quad (8.66)$$

Тогда (8.60) приводит к системе уравнений

$$\partial_t q + \partial_x^3 q + 6rq\partial_x q = 0, \quad (8.67)$$

$$\partial_t r + \partial_x^3 r + 6qr\partial_x r = 0. \quad (8.68)$$

Подстановка $r = u, q = 1$ дает уравнение КдФ

$$\partial_t u + 6u\partial_x u + \partial_x^3 u = 0. \quad (8.69)$$

Выберем матрицу V в следующем виде

$$V = \frac{1}{4i\lambda} \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi & -i \sin \varphi \\ i \sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (8.70)$$

а также $q = r = \partial_x \varphi / 2$ в (8.61). Тогда (8.60) приводит к уравнению

$$\partial_t \partial_x \varphi = \sin \varphi, \quad (8.71)$$

которое является уравнением синус-Гордон в переменных светового конуса. Следует уточнить граничные условия на фазу φ : мы считаем что при $x \rightarrow \pm\infty$ фаза φ выходит на значения, кратные 2π .

После подстановки выражения (8.61) в уравнение (8.58) находим систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x \phi_1 &= i\lambda \phi_1 + iq\phi_2, \\ \partial_x \phi_2 &= -i\lambda \phi_2 + ir\phi_1. \end{aligned} \quad (8.72)$$

Поскольку функции r и q достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, при больших $|x|$ справедливы законы пропорциональности $\phi_1 \propto \exp(i\lambda x), \phi_2 \propto \exp(-i\lambda x)$.

Для выбранных нами матриц V коэффициенты в законе пропорциональности $\phi_2 \propto \exp(-i\lambda x)$ не зависят от времени в силу того, что уравнение (8.59) дает просто $\partial_t \phi_2 = 0$ для больших $|x|$, поскольку соответствующие компоненты матрицы V достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$. Что касается коэффициентов в законе пропорциональности $\phi_1 \propto \exp(i\lambda x)$, то в них имеется тривиальный экспоненциальный временной фактор, зависящий от рассматриваемого уравнения.

В силу сказанного мы можем выбрать решение системы (8.72), которое при $x \rightarrow -\infty$ будет вести себя как $\phi_1 \rightarrow 0$, $\phi_2 \rightarrow \exp(-i\lambda x)$. Тогда при $x \rightarrow +\infty$ поведение ϕ_2 определяется законом $\phi_2 = a(\lambda) \exp(-i\lambda x)$, где фактор $a(\lambda)$ не зависит от времени. Именно в этой независимости зашифрован бесконечный набор интегралов движения для интересующих нас уравнений.

Исключая ϕ_1 из системы уравнений (8.72), находим

$$(\partial_x - i\lambda) [r^{-1}(\partial_x + i\lambda)\phi_2] + q\phi_2 = 0.$$

Подставляя сюда $\phi_2 = \exp(-i\lambda x + \chi)$, находим уравнение на χ :

$$2i\lambda \partial_x \chi = rq + (\partial_x \chi)^2 + r\partial_x(\partial_x \chi/r), \quad (8.73)$$

которое содержит только производную $\partial_x \chi$, но не саму функцию χ .

Заметим, что

$$\ln[a(\lambda)] = \chi(+\infty, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \partial_x \chi, \quad (8.74)$$

не зависит от времени. Введем разложение

$$\partial_x \chi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(x)}{(2i\lambda)^n}, \quad (8.75)$$

по большим λ . В силу (8.74) интегралы

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} dx p_n, \quad (8.76)$$

не зависят от времени, то есть являются интегралами движения. Соответственно, p_n являются плотностями интегралов движения. Покажем, что p_n локально выражаются через поля r и q .

Подставляя разложение (8.75) в уравнение (8.73), находим рекуррентное соотношение

$$p_{n+1} = r\partial_x(p_n/r) + \sum_{m+k=n} p_m p_k. \quad (8.77)$$

Из уравнения (8.73) следует, что первым членом в разложении (8.75) является $p_1 = rq$. Стартуя с этого выражения, мы можем последовательно вычислять p_n в соответствии с (8.77). Первые четыре члена равны

$$\begin{aligned} p_1 &= rq, \quad p_2 = r\partial_x q, \quad p_3 = r\partial_x^2 q + r^2 q^2, \\ p_4 &= r\partial_x^3 q + rq^2 \partial_x r + 4r^2 q \partial_x q. \end{aligned} \quad (8.78)$$

Итак, мы нашли способ построения локальных плотностей p_n интегралов движения, которые выражаются в терминах полей r и q , а также их производных.

Задача 8.3.1. Найдти выражение для p_5 .

Глава 9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Помимо дифференциальных уравнений, в физике встречаются ситуации, когда функция задается интегральным уравнением, то есть уравнением, в котором искомая функция стоит под знаком интеграла. В настоящем разделе мы рассмотрим несколько типов интегральных уравнений, встречающихся в приложениях, решения которых могут быть найдены в явном виде.

9.1 Уравнения Фредгольма

Мы уже сталкивались с интегральными уравнениями, это уравнения Вольтерры, смотри раздел 1.3. Здесь мы рассмотрим интегральные уравнения Фредгольма, которые являются широким обобщением уравнений Вольтерры. Интегральные уравнения Фредгольма определены для функции $f(t)$, заданной на некотором интервале (a, b) , $a < t < b$. Частными случаями является вся прямая $-\infty < t < +\infty$ или полупрямая $0 < t < +\infty$.

Интегральным уравнением Фредгольма первого рода называют уравнение

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t), \quad (9.1)$$

где ядро $K(t, s)$ и функция $g(t)$ предполагаются известными, а найти требуется функцию $f(t)$. Интегральным уравнением Фредгольма второго рода называют уравнение

$$f(t) - \lambda \int_a^b ds K(t, s) f(s) = g(t), \quad (9.2)$$

где λ – произвольный параметр. Как и для уравнения первого рода, ядро $K(t, s)$ и функция $g(t)$ предполагаются известными, а найти требуется функцию $f(t)$.

Уравнение (9.2) можно записать в виде $f - \lambda \hat{K} f = g$, где \hat{K} обозначает фигурирующий в этом уравнении интегральный оператор. Это уравнение можно решать последовательными приближениями по λ , что дает

$$f = g + \lambda \hat{K} g + \lambda^2 \hat{K}^2 g + \dots$$

Найденное решение можно переписать в виде

$$f = g + \lambda \hat{R} g, \quad (9.3)$$

где \hat{R} называют резольвентой уравнения (9.2). Ее можно записать в виде ряда

$$\hat{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \hat{K}^n. \quad (9.4)$$

Как и \hat{K} , оператор \hat{R} является интегральным оператором на интервале (a, b) , ядро которого представляется в

виде ряда

$$R(t, s) = K(t, s) + \lambda \int_a^b dp K(t, p) K(p, s) + \lambda^2 \int_a^b dp \int_a^b dq K(t, p) K(p, q) K(q, s) + \dots \quad (9.5)$$

Как правило, этот ряд по λ имеет конечный радиус сходимости. Распространить выражение для резольвенты на произвольные комплексные λ можно в результате аналитического продолжения.

Задача 9.1.1. Найти резольвенту для ядра $K(t, s) = t/s$, заданного на интервале $(0, 1)$

Задача 9.1.2. Найти резольвенту для ядра $K(t, s) = \exp(t - 2s)$, заданного на интервале $(0, \infty)$

Задача 9.1.3. Найти резольвенту для ядра $K(t, s) = ts$, заданного на интервале $(0, 1)$

Отметим некоторые свойства резольвенты. Из выражения (9.4) следует, что оператор \hat{R} коммутирует с оператором \hat{K} . Из этого же выражения следует уравнение $\hat{R} = \hat{K} + \lambda \hat{K} \hat{R}$, которое переписывается в виде

$$R(t, p) = K(t, p) + \lambda \int_a^b ds K(t, s) R(s, p). \quad (9.6)$$

Таким образом, резольвента является решением исходного уравнения (9.2) с функцией $g(t) = K(t, p)$ в правой части. Пусть $y(t)$ – собственная функция оператора \hat{K} : $\hat{K}y = \kappa y$, где κ – собственное число. В этом случае

$$\hat{R}y = \frac{\kappa}{1 - \lambda \kappa} y.$$

Таким образом, y является также и собственной функцией резольвенты.

Рассмотрим случай так называемого вырожденного ядра $K(t, s)$, когда оно представляется в виде конечной суммы

$$K(t, s) = \sum_i y_i(t) x_i(s), \quad (9.7)$$

где $x_i(t)$, $y_i(t)$ – некоторые известные функции. В этом случае уравнение Фредгольма второго рода (9.2) сводится к виду

$$f(t) - \lambda \sum_i y_i(t) \int_a^b ds x_i(s) f(s) = g(t). \quad (9.8)$$

Таким образом, функция f представляется в виде

$$f = g + \lambda \sum_i C_i y_i. \quad (9.9)$$

Подставляя выражение (9.9) в исходное уравнение (9.8), находим систему линейных уравнений для коэффициентов C_i :

$$\sum_j (\delta_{ij} - \lambda M_{ij}) C_j = \Phi_i, \quad (9.10)$$

$$\Phi_i = \int_a^b dt x_i(t) g(t), \quad M_{ij} = \int_a^b dt x_i(t) y_j(t). \quad (9.11)$$

Решая алгебраическую систему уравнений (9.10) и подставляя результат в выражение (9.9), мы находим решение исходной задачи.

Задача 9.1.4. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (??) на интервале $(-\infty, +\infty)$ для случая $K = \exp(-t^2 - s^2)$, $g(t) = t^2$.

Задача 9.1.5. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (??) на интервале $(-1, +1)$ для случая $K = t^2 s^2$, $g(t) = t^2$.

Задача 9.1.6. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (??) на интервале $(0, +1)$ для случая $K = 1 + t^2 s^2$, $g(t) = t^2$.

Задача 9.1.7. Найти решение уравнения Фредгольма второго рода (??) на интервале $(0, +\infty)$ для случая $K = (1 + ts) \exp(-2t - s)$, $g(t) = \exp(t/2)$.

Рассмотрим случай, когда интервал интегрирования в соотношениях (9.1,9.2) распространяется на всю прямую, от $-\infty$ до $+\infty$, а ядро $K(t, s)$ зависит только от разности $t - s$. В этом случае в уравнениях (9.1,9.2) возникает свертка:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds K(t - s) f(s) = g(t), \quad (9.12)$$

$$f(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds K(t - s) f(s) = g(t). \quad (9.13)$$

После преобразования Фурье эти уравнения сводятся к алгебраическим уравнениям

$$\tilde{K} \tilde{f} = \tilde{g}, \quad (9.14)$$

$$(1 - \lambda \tilde{K}) \tilde{f} = \tilde{g}, \quad (9.15)$$

где $\tilde{f}(\omega) = \int dt \exp(i\omega t) f(t)$ и так далее. Таким образом, для решения уравнений (9.12,9.13) следует найти Фурье-преобразования \tilde{K}, \tilde{g} , найти \tilde{f} из уравнений (9.14,9.15), а затем выполнить обратное Фурье-преобразование, чтобы найти $f(t)$.

В рассматриваемом случае резольвента характеризуется ядром R , которое также зависит только от разности $t - s$. Делая преобразование Фурье уравнения (9.6), находим

$$\tilde{R} = \tilde{K} (1 - \lambda \tilde{K})^{-1}. \quad (9.16)$$

Ядро $R(t)$ можно найти, если сделать обратное Фурье-преобразование от (9.16).

Задача 9.1.8. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \exp(-|t - s|) f(s) = g(t).$$

Задача 9.1.9. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} ds \exp(-|t - s|) f(s) = g(t).$$

Прямое обобщение изложенной процедуры на конечный интервал возможно, если функция $K(t - s)$ является периодической функцией с периодом, совпадающим с длиной интервала (a, b) . В этом случае разложение в интеграл Фурье заменяется на разложение в ряд Фурье. Для определенности будем считать, что $a = -\pi$, $b = \pi$, чего всегда можно добиться сдвигом и перемасштабировкой переменной. Разложим функции f, g, K в ряд Фурье

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \exp(-int).$$

Напомним, что для действительных функций $f_{-n} = f_n^*$. Тогда уравнения (9.1,9.2) сведутся к

$$2\pi K_n f_n = g_n, \quad (9.17)$$

$$(1 - 2\pi \lambda K_n) f_n = g_n. \quad (9.18)$$

Резольвента уравнения Фредгольма второго рода также является периодической функцией, для коэффициентов разложения которой в ряд Фурье справедливо соотношение

$$R_n = K_n / (1 - 2\pi \lambda K_n). \quad (9.19)$$

При решении интегрального уравнения Фредгольма первого рода можно столкнуться с проблемой, связанной с наличием нулей среди набора K_n . Как следует из соотношения (9.17), решение существует только в том случае, если в коэффициенты g_n разложения функции g равны нулю для тех n , для которых равны нулю K_n . Аналогичная проблема возникает для интегрального уравнения Фредгольма второго рода при значениях параметра λ , удовлетворяющего условию $2\pi \lambda K_n = 1$, смотри соотношение (9.17). Обратим внимание на то, что при этом значении соответствующий коэффициент разложения резольвенты в ряд Фурье (9.19) имеет полюс.

Задача 9.1.10. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds |\sin[(t - s)/2]| f(s) = g(t).$$

Задача 9.1.11. Найти решение уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds \ln |(t-s)/2| f(s) = g(t).$$

Задача 9.1.12. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} ds |\sin[(t-s)/2]| f(s) = g(t).$$

Задача 9.1.13. Найти резольвенту уравнения Фредгольма второго рода

$$f(t) - \lambda \int_{-\pi}^{+\pi} ds \ln |(t-s)/2| f(s) = g(t).$$

Произвольное (невырожденное) ядро на конечном интервале можно записать в виде, аналогичном (9.7), но с бесконечным числом переменных. В этом случае для уравнения Фредгольма второго рода мы приходим к системе уравнений (9.10) с бесконечной матрицей M_{ij} . Решить такую задачу в общем виде не представляется возможным.

9.1.1 Уравнения с симметричными ядрами

Рассмотрим случай, когда интегральный оператор \hat{K} имеет симметричное ядро: $K(t, s) = K(s, t)$. Исследуем собственные функции оператора f , которые удовлетворяют условию $\hat{K}f = \kappa f$, то есть

$$\int_a^b ds K(t, s) f(s) = \kappa f(t). \quad (9.20)$$

Для невырожденных ядер число собственных функций бесконечно. Это может быть как дискретный набор, так и непрерывная последовательность (если интервал интегрирования бесконечен). Далее мы имеем в виду первый случай.

Собственные функции f_i, f_j с разными собственными значениями κ_i, κ_j удовлетворяют свойству ортогональности

$$\int_a^b ds f_i(s) f_j(s) = 0. \quad (9.21)$$

Для доказательства (9.21) используем определение (9.20) и симметрию ядра:

$$\begin{aligned} \kappa_i \int_a^b ds f_i(s) f_j(s) &= \int_a^b dt ds K(s, t) f_i(t) f_j(s) \\ &= \kappa_j \int_a^b dt f_i(t) f_j(t). \end{aligned}$$

Из найденного соотношения и следует ортогональность (9.21).

Собственная функция f определяется (9.20) с точностью до множителя. Мы выбираем множитель таким образом, чтобы собственные функции f_i были нормированы на единицу:

$$\int_a^b ds f_j^2 = 1. \quad (9.22)$$

В сочетании со свойством ортогональности (9.21) мы приходим к условию ортонормированности

$$\int_a^b ds f_j(s) f_k(s) = \delta_{jk}. \quad (9.23)$$

Отсюда следует условие линейной независимости f_j . Докажем это свойство от обратного. Пусть f_j линейно зависимы, то есть существуют такие коэффициенты c_j , что $\sum_j c_j f_j = 0$. Умножая это соотношение на f_k и интегрируя по интервалу (a, b) , находим с использованием (9.23) $c_k = 0$. Таким образом, соотношение $\sum_j c_j f_j = 0$ выполняется только при нулевых c_j .

Для невырожденных ядер система функций f_j является полной, то есть по ней может быть разложена произвольная функция $\varphi(t)$, заданная на интервале (a, b) :

$$\varphi(t) = \sum_j q_j f_j(t), \quad q_j = \int_a^b dt f_j(t) \varphi(t). \quad (9.24)$$

Второе равенство в формуле (9.24) непосредственно вытекает из условия ортонормированности (9.23). Аналогичным образом можно представить и само ядро $K(t, s)$:

$$K(t, s) = \sum_j \kappa_j f_j(t) f_j(s). \quad (9.25)$$

Соотношение (9.25) получается, если вычислить коэффициенты разложения $K(t, s)$ по $f_j(t)$ с помощью формулы (9.24), имея в виду определение (9.20).

Соотношение (9.25) позволяет найти аналогичное представление для резольвенты оператора \hat{K} . Исходим из уравнения (9.6). Подставляя в него разложение (9.25) и аналогичное разложение для резольвенты, находим

$$R(t, s) = \sum_j \frac{\kappa_j}{1 - \lambda \kappa_j} f_j(t) f_j(s), \quad (9.26)$$

где мы использовали ортонормированность (9.23). Мы видим, что резольвента, как функция λ , имеет полюсы при значениях $\lambda = \kappa_j^{-1}$. Вычеты в этих полюсах определяются собственными функциями оператора \hat{K} с собственным значением κ_j .

Тривиальным примером полученных соотношений является случай, когда ядро K зависит только от разности переменных и является периодической функцией с периодом $b-a$. В этом случае собственными функциями ядра являются косинусы и синусы с тем же периодом,

а аналогом представления (9.25) является разложение симметричного ядра K в ряд Фурье

$$K(t-s) = \sum_0^{+\infty} k_n [\cos(\omega_n t) \cos(\omega_n s) + \sin(\omega_n t) \sin(\omega_n s)],$$

$\omega_n = 2\pi n/|b-a|$. Следует только иметь в виду, что собственные функции $\exp[-2\pi nit/(b-a)]$ не являются нормированными, поэтому $\kappa_n = (b-a)k_n/2$, $\kappa_0 = (b-a)k_0$.

Рассмотрим теперь заданное на интервале $(-1, 1)$ симметричное ядро

$$\begin{aligned} K(t, s) &= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1+t}{1-t} + \ln \frac{1-s}{1+s} \right), \quad t > s, \\ K(t, s) &= \frac{1}{4} \left(\ln \frac{1-t}{1+t} + \ln \frac{1+s}{1-s} \right), \quad t < s, \end{aligned} \quad (9.27)$$

которое является Гриновской функцией оператора $\partial_t(1-t^2)\partial_t$:

$$\partial_t [(1-t^2)\partial_t K(t, s)] = \delta(t-s). \quad (9.28)$$

Для определения собственных функций оператора \hat{K} применяем к уравнению (9.20) оператор $\partial_t(1-t^2)\partial_t$, что дает

$$\kappa \partial_t [(1-t^2)\partial_t f] = f. \quad (9.29)$$

Решениями этого уравнения, которые остаются конечным на интервале $(-1, 1)$ являются полиномы Лежандра, которые удовлетворяют уравнению

$$\partial_t [(1-t^2)\partial_t P_n] = -n(n+1)P_n,$$

где n – натуральные числа. Таким образом, набор собственных значений имеет вид $\kappa_n = -[n(n+1)]^{-1}$, собственными функциями являются полиномы Лежандра $P_n(t)$. Условия ортогональности (9.21) дают хорошо известные условия ортогональности для полиномов Лежандра. Отдельно надо рассмотреть случай однородной функции, которая является нулевой модой оператора $\partial_t(1-t^2)\partial_t$. Несложно проверить, что

$$\int_{-1}^{+1} dt K(t, s) = \ln 2.$$

Таким образом, однородная функция является собственной функцией оператора \hat{K} с собственным значением $\ln 2$. Таким образом, разложение (9.25) для функции (9.27) имеет вид

$$K(t, s) = \frac{\ln 2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n+1)} P_n(t)P_n(s). \quad (9.30)$$

Мы использовали здесь известное соотношение

$$\int_{-1}^{+1} dt [P_n(t)]^2 = \frac{2}{2n+1},$$

чтобы отнормировать собственные функции оператора \hat{K} .

Задача 9.1.14. Найти резольвенту интегрального оператора с ядром (9.27).

Изложенную схему легко обобщить для ядер вида $K(t, s) = \mu(s)L(t, s)$, где ядро $L(t, s)$ является симметричным, а $\mu(s)$ – некоторая положительная функция. Введем новые функции $\varphi = \sqrt{\mu}f$. Тогда задача (9.20) на собственные значения переписывается в виде

$$\int_a^b ds \sqrt{\mu(s)}\sqrt{\mu(t)}L(t, s)\varphi(s) = \kappa\varphi(t). \quad (9.31)$$

Таким образом, мы пришли к задаче (9.20) на собственные значения с симметричным ядром, к которой применимы все приведенные выше соображения. Чтобы найти собственные функции $f(t)$, можно исходить непосредственно из уравнения (9.20).

9.2 Некоторые нелинейные интегральные уравнения

Общих методов решения нелинейных интегральных уравнений не существует. Если решение такого уравнения удастся найти, то это всегда связано с конкретными особенностями уравнений. Здесь мы рассмотрим несколько типов нелинейных интегральных уравнений, которые допускают решения.

Одним из таких типов являются уравнения содержащие свертку. После преобразования Фурье или Лапласа свертка преобразуется в произведение. Это позволяет решить некоторый класс нелинейных интегральных уравнений. Ниже приведен ряд типов таких уравнений.

Рассмотрим уравнение типа свертки на всей прямой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds f(s)f(t-s) = g(t). \quad (9.32)$$

Это уравнение можно решить, если произвести Фурье-преобразование обеих частей. В результате находим

$$[\tilde{f}(\omega)]^2 = \tilde{g}(\omega). \quad (9.33)$$

Извлекая корень квадратный, находим два решения для $\tilde{f}(\omega)$, отличающиеся знаком. Чтобы найти $f(t)$, следует найти обратное Фурье-преобразование.

Задача 9.2.1. Найти решение уравнения (9.32) с $g(t) = \exp(-t^2)$

Иногда тем же способом удается решить обобщение уравнения (9.32)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds L(s)f(s)f(t-s) = g(t), \quad (9.34)$$

где $L(s)$ – полином. В этом случае после перехода к Фурье-представлению находим

$$\tilde{f}(\omega)L(-i\partial_\omega)\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega). \quad (9.35)$$

Таким образом, задача сводится к дифференциальному уравнению, которое в ряде случаев удастся решить.

Задача 9.2.2. Найти решение уравнения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds (1+s^2)f(s)f(t-s) = 1.$$

Рассмотрим уравнение типа свертки на полупрямой

$$\int_0^t ds f(s)f(t-s) = g(t). \quad (9.36)$$

Производим преобразование Лапласа этого уравнения, что дает

$$[\tilde{f}(p)]^2 = \tilde{g}(p). \quad (9.37)$$

Извлекая корень квадратный, находим два решения для $\tilde{f}(p)$, отличающиеся знаком. Чтобы найти $f(t)$, следует найти обратное преобразование Лапласа.

Задача 9.2.3. Найти решение уравнения (9.36) с $g(t) = \sin t$.

Иногда тем же способом удается решить обобщение уравнения (9.36)

$$\int_0^t ds L(s)f(s)f(t-s) = g(t), \quad (9.38)$$

где $L(s)$ – полином. В этом случае после перехода к представлению Лапласа находим

$$\tilde{f}(p)L(-\partial_p)\tilde{f}(p) = \tilde{g}(p). \quad (9.39)$$

Таким образом, задача сводится к дифференциальному уравнению, которое в ряде случаев удастся решить.

Задача 9.2.4. Найти решение уравнения

$$\int_0^t ds sf(s)f(t-s) = t.$$

Для периодических функций уравнения типа свертки могут быть в ряде случаев решены переходом к ряду Фурье. Рассмотрим уравнение

$$\int_{-\pi}^{+\pi} ds f(s)f(t-s) = g(t), \quad (9.40)$$

где $g(t)$ – периодическая функция с периодом 2π . Решение уравнения (9.40) также следует искать в классе периодических функций. Раскладывая функции $f(t), g(t)$ в ряд Фурье, находим алгебраическое уравнение

$$2\pi[f_n]^2 = g_n, \quad (9.41)$$

которое имеет два корня, отличающиеся знаком. Чтобы найти $f(t)$, следует просуммировать ряд Фурье с f_n .

Задача 9.2.5. Найти действительное решение уравнения (9.40) с периодической функцией $g(t)$, которая на интервале $-\pi < t < \pi$ определена следующим образом $g(t) = \pi/2 - |t|$.

Следующим типом интегральных уравнений, которые допускают решения, являются уравнения с вырожденным ядром (9.7). Тогда функциональная зависимость решения может быть установлена непосредственно из вида уравнения.

В простейшем случае такое уравнение имеет вид

$$f(t) = \int_a^b ds \mu(t)\eta(s)f^n(s) + g(t). \quad (9.42)$$

Непосредственно из вида уравнения (9.42) следует, что $f = C\mu(t) + g(t)$, где C – константа, которая подлежит определению. Подставляя найденное представление в уравнение (9.42), находим уравнение на C :

$$C = \int_a^b ds \eta(s)[C\mu(s) + g(s)]^n, \quad (9.43)$$

которое является уже алгебраическим.

Задача 9.2.6. Найти решение уравнения

$$f(t) = \int_0^1 ds stf^2(s) + \frac{3}{4}t,$$

где функция задана на интервале $(0, 1)$.

Задача 9.2.7. Найти решение уравнения

$$f(t) = -\frac{4}{3\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} ds \cos(t-s)f^3(s) + 2\cos t,$$

на классе периодических функций.

Отметим также уравнение

$$f(t) = \int_0^t ds \mu(t)\eta(s)f^n(s) + g(t), \quad (9.44)$$

которое является нелинейным обобщением уравнения Вольтерры. Преобразование Лапласа в этом случае не очень полезно, поскольку преобразование Лапласа от $f^n(s)$ не имеет простого представления. Тем не менее, уравнение (9.44) иногда может быть решено. Подстановкой $f(t) = \mu(t)\varphi(t)$ оно приводится к виду

$$\varphi(t) = \int_0^t ds \eta(s)\varphi^n(s)\mu^n(s) + g(t)\mu^{-1}(t).$$

После дифференцирования по t это интегральное уравнение сводится к уравнению дифференциальному

$$\partial_t \varphi(t) = \eta(t)\varphi^n(t)\mu^n(t) + \partial_t[g(t)\mu^{-1}(t)],$$

которое в ряде случаев удастся решить.

Задача 9.2.8. Найти решение уравнения

$$f(t) = \int_0^t ds f^2(s) \frac{\cos^2 s}{\cos t} + \frac{1}{\cos t}.$$

9.3 Сингулярные интегральные уравнения

Сингулярными интегральными уравнениями называют уравнения, в которых фигурируют интегралы в смысле главного значения (смотри раздел 9.4.1). В настоящем разделе мы рассмотрим способы решения двух простейших типов сингулярных интегральных уравнений.

Первый тип уравнений, который мы проанализируем, имеет вид

$$\lambda\varphi(x) + \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = f(x), \quad (9.45)$$

где перечеркнутый интеграл означает интеграл в смысле главного значения (смотри раздел 9.4.1), а λ — произвольный параметр. Требуется найти функцию $\varphi(x)$, если известна функция $f(x)$. Предполагается, что функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ заданы на всей оси и достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

Чтобы найти решение уравнения (9.45), перепишем его, используя соотношение (9.57):

$$(\lambda + i\pi)\varphi(x) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = f(x), \quad (9.46)$$

где подразумевается предел $\epsilon \rightarrow +0$. Умножим обе части соотношения (9.46) на $(x-x_0+i\epsilon)^{-1}$ и проинтегрируем по x по вещественной оси. В двойном интеграле, который при этом возникнет, меняем порядок интегрирования по x и y и используем равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(y-x+i\epsilon)(x-x_0+i\epsilon)} = -\frac{2\pi i}{y-x_0+i\epsilon}. \quad (9.47)$$

Соотношение (9.47) можно получить, например, замкнув контур в верхней полуплоскости и сведя его затем к вычету в точке $x = y + i\epsilon$. Отметим, что мы заменили в выражении (9.47) $2i\epsilon$ на $i\epsilon$, что возможно в пределе $\epsilon \rightarrow +0$.

В результате интегрирования уравнения (9.46) мы с использованием (9.47) получим соотношение

$$(\lambda - i\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x+i\epsilon}$$

Выражая с его помощью интеграл в соотношении (9.46), получим ответ:

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x} + \frac{\lambda f(x)}{\lambda^2 + \pi^2}. \quad (9.48)$$

Как и следовало ожидать, все факторы в этом выражении вещественны.

Возвращаясь к представлению с ϵ , мы можем переписать выражение (9.48) в двух эквивалентных видах

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x+i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda + i\pi} \\ &= -\frac{1}{\lambda^2 + \pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy f(y)}{y-x-i\epsilon} + \frac{f(x)}{\lambda - i\pi}, \end{aligned} \quad (9.49)$$

где подразумевается предел $\epsilon \rightarrow +0$. Именно соотношения (9.49) наиболее удобны для реальных вычислений, поскольку интегралы в них аналитичны в верхней и нижней полуплоскости по y , соответственно.

Задача 9.3.1. Найти функцию $\varphi(x)$, которая является решением уравнения

$$\oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{\cos x}{1+x^2}.$$

Задача 9.3.2. Найти функцию $\varphi(x)$, которая является решением уравнения

$$\lambda\varphi(x) + \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Второй тип сингулярных интегральных уравнений, который мы изучим, содержит интегрирование по конечному интервалу (a, b) , на котором и заданы все функции. Очевидно, что сдвигом и перемасштабированием аргумента произвольный интервал (a, b) может быть превращен в интервал $(-1, 1)$. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем именно этот последний. Общая схема решения уравнения на конечном интервале та же, что и на бесконечном интервале, однако рассматриваемый случай требует более изощренных манипуляций.

Проанализируем интегральное уравнение

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = f(x). \quad (9.50)$$

Здесь требуется найти функцию φ , если дана функция f . Перепишем уравнение (9.50), используя соотношение (9.57):

$$i\pi\varphi(x) + \int_{-1}^{+1} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = f(x), \quad (9.51)$$

где подразумевается предел $\epsilon \rightarrow +0$. Умножим уравнение (9.51) на $[(x-x_0+i\epsilon)\sqrt{1-x^2}]^{-1}$ и проинтегрируем по x от -1 до $+1$.

Далее мы воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(y-x+i\epsilon)(x-x_0+i\epsilon)\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{\pi i}{y-x_0+i\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right). \end{aligned} \quad (9.52)$$

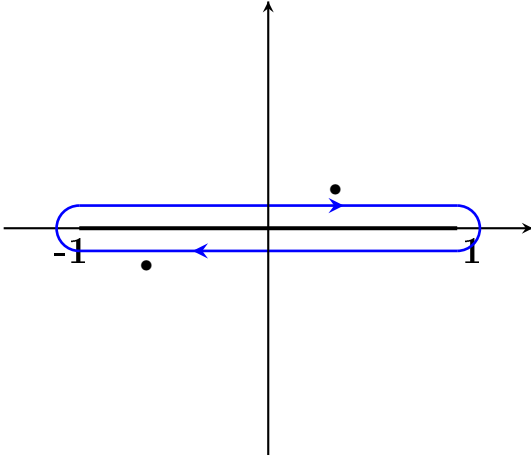


Рис. 9.1: Контур, к которому сводится интегрирование в задачах с конечным интервалом. Жирные точки показывают положения полюсов.

Чтобы получить это соотношение, следует переписать интеграл (9.52), как половину интеграла, идущего по берегам разреза $(-1, 1)$ функции $\sqrt{1-x^2}$, то есть, по замкнутому контуру, смотри рисунок 9.1. Разворачивая этот контур, мы сводим интеграл к вычетам в полюсах $x = y + i\epsilon$ и $x = x_0 - i\epsilon$. Полюс $x = y + i\epsilon$ лежит вверх разреза, там корень положительный, полюс же $x = x_0 - i\epsilon$ лежит снизу разреза и там корень отрицательный. Вычеты в полюсах и дают правую часть (9.52).

Меняя порядок интегрирования в уравнении (9.51), умноженном на $[(x - x_0 + i\epsilon)\sqrt{1-x^2}]^{-1}$ и проинтегрированному по x , находим с помощью соотношения (9.52):

$$\frac{-i\pi}{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dy \varphi(y)}{y-x+i\epsilon} = \int_{-1}^{+1} \frac{dy f(y)}{(y-x+i\epsilon)\sqrt{1-y^2}}.$$

Снова используем соотношение (9.57), а также исходное уравнение (9.50). В результате находим решение

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2} \oint_{-1}^{+1} \frac{dy f(y)}{(y-x)\sqrt{1-y^2}}. \quad (9.53)$$

Выражение (9.53) дает решение задачи (9.50). Для практических вычислений интеграл в (9.53) удобно переписать в виде

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{dy f(y)}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{4} \oint \frac{dy f(y)}{(y-x+i\epsilon)\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{4} \oint \frac{dy f(y)}{(y-x-i\epsilon)\sqrt{1-y^2}}, \quad (9.54)$$

где замкнутый интеграл идет вдоль берегов разреза функции $\sqrt{1-y^2}$, смотри рисунок 9.1.

Приведенные выше преобразования предполагали существование решения уравнения (9.50). Однако это условие накладывает не вполне тривиальное ограничение на функцию $f(x)$. Действительно, умножим обе части (9.50) на $(1-x^2)^{-1/2}$ и проинтегрируем по dx по

интервалу $(-1, 1)$, предполагая, что $\varphi(x)$ не имеет особенностей не только внутри, но и на краях интервала (в противном случае интегралы могут не существовать или быть неперестановочны). Используя преобразование (9.54), находим

$$\oint_{-1}^{+1} \frac{dy}{(y-x)\sqrt{1-y^2}} = 0. \quad (9.55)$$

Действительно, при $f = 1$ интеграл в правой части (9.54) сводится к сумме вычетов в точках $y = x \pm i\epsilon$, которые в сумме дают ноль. Таким образом, решение задачи (9.50) существует только при выполнении условия ‘ортогональности’:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dy f(y)}{\sqrt{1-y^2}} = 0. \quad (9.56)$$

Задача 9.3.3. Найти функцию $\varphi(x)$, которая является решением уравнения

$$\oint_{-1}^1 \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Задача 9.3.4. Найти функцию $\varphi(x)$, которая является решением уравнения

$$\oint_{-1}^1 \frac{dy \varphi(y)}{y-x} = \frac{x}{1+x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Приведенные выше аргументы относились к случаю, когда функция φ не имеет особенностей на интервале $(-1, +1)$. Если же допустить существование особенностей функции φ , то решение задачи (9.50) можно найти и в том случае, когда условие (9.56) не выполнено. Тогда решение имеет (корневую) особенность на одном из краев интервала. Такое решение можно найти, если воспользоваться модификацией излагаемого метода.

9.4 Справочные материалы к главе

9.4.1 Формула Сохоцкого-Племеля

Формула Сохоцкого-Племеля имеет вид

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_a^b \frac{dx f(x)}{x-x_0+i\epsilon} = \oint_a^b \frac{dx f(x)}{x-x_0} - i\pi f(x_0), \quad (9.57)$$

где $x_0 \in (a, b)$, а функция $f(x)$ предполагается аналитичной вблизи точки $x = x_0$. Здесь перечеркнутый интеграл означает интеграл в смысле главного значения, который является пределом при $\delta \rightarrow +0$ суммы

$$\int_a^{x_0-\delta} \frac{dx f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\delta}^b \frac{dx f(x)}{x-x_0} \rightarrow \oint_a^b \frac{dx f(x)}{x-x_0}. \quad (9.58)$$

Если функция $f(x)$ аналитична вблизи точки $x = x_0$, то предел (9.58) существует.

Для доказательства соотношения (9.57) можно деформировать контур интегрирования по x , превратив интервал по малому интервалу $(-\delta, +\delta)$ в полуокружность, идущую по верхней полуплоскости. После этого можно перейти к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. При стремлении δ к нулю интегралы по прямым участкам дадут интеграл в смысле главного значения (9.58), а интеграл по полуокружности даст дополнительный вклад в правой части соотношения (9.57). Это соотношение можно записать также в ‘дифференциальном’ виде

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x - x_0 + i\epsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x - x_0} - i\pi\delta(x - x_0), \quad (9.59)$$

где символ \mathcal{P} обозначает ‘в смысле главного значения’. Отметим, что мнимая часть соотношения (9.59) может быть получена из формулы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} -\frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = -\pi\delta(x),$$

которая обсуждается в разделе (1.5.2).

9.4.2 Преобразование Гильберта

Преобразование Гильберта определяется, как следующий интеграл

$$\hat{H}f(x) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y - x} f(y). \quad (9.60)$$

Преобразование (9.60) можно записать, как предел

$$\begin{aligned} \hat{H}f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\pi} f(y) \frac{y - x}{(y - x)^2 + \epsilon^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi} f(y) \left(\frac{1}{y - x + i\epsilon} + \frac{1}{y - x - i\epsilon} \right). \end{aligned} \quad (9.61)$$

Второе выражение представляет преобразование Гильберта, как сумму интегралов по контурам, обходящим полюс $y = x$ снизу и сверху. Это представление позволяет затем деформировать контуры интегрирования и использовать аналитические свойства функции $f(x)$.

Задача 9.4.1. Найти преобразование Гильберта функции $f(x) = (1 + x^2)^{-1}$.

Представление (9.61) позволяет доказать важное свойство преобразования Гильберта: $\hat{H}^2 = -1$. Для этого надо записать \hat{H}^2 в виде двойного интеграла,

$$\begin{aligned} \hat{H}^2 f(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int \frac{dz}{2\pi} \int \frac{dy}{2\pi} \left(\frac{1}{z - x + i\epsilon} + \frac{1}{z - x - i\epsilon} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{y - z + i\epsilon} + \frac{1}{y - z - i\epsilon} \right) f(y), \end{aligned}$$

и воспользоваться соотношениями

$$\begin{aligned} \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z - x + i\epsilon)(y - z + i\epsilon)} &= -\frac{i}{y - x + 2i\epsilon}, \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z - x + i\epsilon)(y - z - i\epsilon)} &= 0, \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z - x - i\epsilon)(y - z + i\epsilon)} &= 0, \\ \int \frac{dz}{2\pi} \frac{1}{(z - x - i\epsilon)(y - z - i\epsilon)} &= \frac{i}{y - x - 2i\epsilon}. \end{aligned}$$

которые получаются сведением приведенных интегралов к вычетам. После этого использование формулы Сохоцкого-Племеля (9.59) и приводит к $\hat{H}^2 = -1$.

Задача 9.4.2. Убедиться, что преобразование Гильберта, примененное к результату, найденному в задаче 9.4.1, дает $-f(x)$.

С использованием предельного перехода (9.61) можно доказать, что для любых двух функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ справедливо соотношение

$$\hat{H}(\varphi_1 \hat{H}\varphi_2 + \varphi_2 \hat{H}\varphi_1) = \hat{H}\varphi_1 \hat{H}\varphi_2 - \varphi_1 \varphi_2. \quad (9.62)$$

Справедливо также соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \varphi_1 \varphi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \hat{H}\varphi_1 \hat{H}\varphi_2. \quad (9.63)$$

Соотношения (9.62, 9.63) весьма полезны при обращении с задачами, где фигурирует преобразование Гильберта.

Задача 9.4.3. Доказать соотношение (9.62).

Задача 9.4.4. Доказать соотношение (9.63).

Глава 10

ТЕОРИЯ ГРУПП

Симметрия играет чрезвычайно важную роль в современной физике. Фактически, именно на симметричном языке формулируются основные физические явления. В настоящем разделе мы приводим основные положения теории групп, как дискретных, так и непрерывных (групп Ли), а также их приложения. Эти сведения позволяют осознать основные связи, которые накладывают на физическую систему требования симметрии, и научиться решать связанные с понятием симметрии задачи.

10.1 Конечные группы

В настоящей главе мы будем говорить о группах симметрии \mathbb{G} , которые представляют собой совокупность преобразований, совмещающих объект с самим собой. Объекты могут быть разной природы: геометрические тела, молекулы, кристаллы, дифференциальные уравнения, числа, функции, матрицы, пространства и т.п. В число этих преобразований следует включить и тождественное преобразование, поскольку оно, очевидно, совмещает объект с самим собой. Преобразования бывают дискретными или непрерывными, в последнем случае они зависят от параметра (параметров) из некоторого интервала или области. Если преобразования группы дискретны и их число конечно, то группа называется конечной. Количество элементов в конечной группе \mathbb{G} называется порядком группы и обозначается символом $|\mathbb{G}|$.

В качестве простого примера конечной группы можно привести группу симметрии правильного треугольника. Он инвариантен относительно вращений на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ (или, что то же самое, на угол $-2\pi/3$) относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости треугольника. О такой симметрии говорят, как об оси третьего порядка C_3 . Дополнительными преобразованиями, переводящими треугольник в себя, являются отражения относительно трех плоскостей, проходящих через ось симметрии и одну из вершин треугольника. Таким образом, группа симметрии треугольника включает в себя шесть элементов: тождественное преобразование, повороты на угол $2\pi/3$ и на угол $4\pi/3$ вокруг оси третьего порядка и отражения относительно трех плоскостей. Эту группу обозначают обычно \mathbb{D}_3 .

Обозначим элементы конечной группы g_i . Поскольку обратное к g_i преобразование, как и g_i , совмещает объект с самим собой, оно (обратное к g_i преобразование) также является элементом группы. Последовательное применение двух элементов группы, которое мы будем называть их произведением и обозначать $g_i g_k$ (сначала

на объект действует g_k , а затем g_i), также совмещает объект с самим собой, то есть является элементом группы. Поэтому справедлива таблица умножения, которая выражает произведение $g_i g_k$ через элементы группы g_m . Таблицу умножения, которую также называют таблицей Кэли, можно записать в виде

$$g_i g_k = T_{ik}^n g_n, \quad (10.1)$$

где по индексу n подразумевается суммирование. Числа T_{ik}^n являются, очевидно, нулями и единицами, причем при данной паре i, k среди компонент T_{ik}^n имеется всего одна единица, а остальные являются нулями.

Задача 10.1.1. Построить таблицу умножения для группы симметрии правильного треугольника. Какие из этих элементов являются обратными друг другу?

Рассмотрим теперь произведение трех элементов $g_i g_k g_m$, оно является элементом группы, который получается последовательным применением к объекту сначала преобразования g_m , затем g_k , а затем g_i . В силу того, что при каждом преобразовании симметрии объект совмещается с самим собой, мы можем по-разному группировать элементы в произведении $g_i g_k g_m$, заменяя либо $g_i g_k$, либо $g_k g_m$ в соответствии с таблицей умножения (10.1). Это свойство называется ассоциативностью группы. В силу этого свойства имеет место соотношение

$$T_{ik}^n T_{nm}^s = T_{km}^n T_{in}^s, \quad (10.2)$$

которое получается, если в произведении $g_i g_k g_m$ сначала расписать $g_i g_k$ при помощи (10.1), и затем применить (10.1) к $g_n g_m$, и приравнять результат к тому, который получится, если расписать $g_k g_m$ при помощи (10.1), и затем применить (10.1) к $g_i g_n$.

Можно рассматривать произвольные произведения элементов группы, каждое из которых само является элементом группы. В частности, можно ввести степени некоторого элемента g , g^n . Тождественное преобразование естественно обозначать 1. Поскольку число элементов группы конечно, то среди степеней g, g^2, g^3, \dots, g^n при $n > |\mathbb{G}|$ найдутся одинаковые элементы. Пусть $g^k = g^m$, тогда $g^{m-k} = 1$. Таким образом, для любого элемента группы g найдется целая степень s такая, что $g^s = 1$. Наименьшая такая степень определяет число элементов группы, которые являются степенями данного элемента. Например, для отражения относительно плоскости $s = 2$, а для поворота на угол $2\pi/n$ вокруг оси n -го порядка $s = n$. Если группа состоит только из степеней некоторого элемента, ее называют циклической. Циклическую группу, которая состоит из степеней r^m ,

где r – поворот на угол $2\pi t/n$ относительно некоторой оси, обозначают обычно C_n . Ее элементы (включая единичный) – повороты на углы $2\pi t/n$.

Конечную группу можно задать при помощи порождающих элементов. Элементы группы G называются порождающими, если любой элемент группы может быть представлен в виде произведения степеней порождающих элементов. Их количество может быть различным, но в любом случае оно меньше числа элементов группы $|G|$. Например, для группы C_n порождающим элементом служит r – поворот на угол $2\pi/n$, поскольку группа состоит из степеней r^m . Для рассмотренной нами группы симметрии равностороннего треугольника D_3 порождающими являются два элемента: поворот вокруг оси третьего порядка и отражение относительно одной из плоскостей симметрии. Этот пример иллюстрирует неоднозначность выбора порождающих элементов. В то же время их число является фиксированным для данной группы G .

Задача 10.1.2. *Можно ли в качестве порождающего элемента группы C_n выбрать поворот на угол, отличный от $2\pi/n$?*

Задача 10.1.3. *Показать, что для группы симметрии равностороннего треугольника порождающими являются два элемента: поворот вокруг оси третьего порядка и отражение относительно одной из плоскостей симметрии.*

Группа, произведение элементов которой перестановочно, то есть $g_i g_k = g_k g_i$ для любых элементов, называется абелевой. Об элементах, удовлетворяющих условию $g_i g_k = g_k g_i$, говорят, что они коммутируют друг с другом. Очевидно, абелевой является любая циклическая группа. Более сложным примером абелевой группы является группа, имеющая несколько порождающих элементов, коммутирующих между собой. Действительно, если порождающие элементы коммутируют между собой, то коммутируют и их степени, откуда следует коммутативность всех элементов группы, поскольку все они представляются в виде произведений степеней порождающих элементов.

Рассмотрим группу симметрии правильного n -угольника, которую обычно обозначают D_n . Элементами симметрии правильного n -угольника являются повороты на угол $2\pi t/n$ вокруг оси, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно к нему. К ним надо добавить отражения относительно n плоскостей симметрии, проходящих через ось симметрии. Для нечетного n такая плоскость проходит через вершину n -угольника и середину противоположного ребра. Для четного n половина плоскостей проходит через пару вершин, а половина – через середины противоположных ребер. Таким образом, группа D_n содержит $2n$ элементов. Как и для группы симметрии треугольника D_3 , порождающими элементами группы D_n при нечетном n являются r , поворот на угол $2\pi/n$

вокруг оси, проходящей через центр многоугольника перпендикулярно к нему, и отражение относительно одной из плоскостей. При четном n порождающими являются отражения относительно двух плоскостей, одна из которых проходит через пару вершин, а вторая – через середины противоположных ребер. Отметим, что в отличие от группы C_n группа D_n не является абелевой, поскольку повороты и отражения, вообще говоря, не коммутируют.

Рассмотрим еще один пример – группу поворотов куба, переводящих его в себя. Имеется три оси четвертого порядка, проходящих через центры противоположных граней, четыре оси третьего порядка, проходящие через противоположные вершины, и шесть осей второго порядка, проходящих через середины противоположных ребер. Подсчитаем число элементов группы. Ось четвертого порядка дает три элемента (повороты на углы $\pi/2, \pi, 3\pi/2$), отличные от тождественного преобразования, ось третьего порядка дает два элемента (повороты на углы $2\pi/3, 4\pi/3$), отличные от тождественного преобразования, и ось второго порядка дает один элемент (поворот на угол π), отличный от тождественного преобразования. Итого получаем $1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 = 24$ элемента группы (где единица относится к тождественному преобразованию). Порождающими же элементами группы являются три элемента, например, поворот на $\pi/2$ вокруг одной из осей четвертого порядка, поворот на $2\pi/3$ вокруг одной из осей третьего порядка и поворот на π вокруг одной из осей второго порядка.

Рассмотрим теперь группу симметрии тетраэдра. Имеется четыре оси третьего порядка, каждая из которых проходит через вершину и середину противоположной грани, шесть плоскостей отражения, каждая из которых проходит через ребро и середину противоположного ребра и три зеркальных оси четвертого порядка, проходящие через середины противоположных ребер. Подсчитаем число элементов группы. Ось третьего порядка дает два элемента (повороты на углы $2\pi/3, 4\pi/3$), отличные от тождественного преобразования, отражение относительно плоскости симметрии является отдельным элементом симметрии. С зеркальной осью связан элемент симметрии, который является поворотом на угол $\pi/2$ с одновременным отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси. Квадрат этого элемента является просто поворотом на угол π вокруг зеркальной оси, а куб – опять комбинацией вращения (на угол $3\pi/2$) и отражения относительно плоскости, перпендикулярной оси. Таким образом, зеркальная ось четвертого порядка дает три элемента, отличные от тождественного преобразования. Итого получаем $1 + 4 \cdot 2 + 6 + 3 \cdot 3 = 24$ элемента группы (где единица относится к тождественному преобразованию).

Приведенные выше примеры принадлежат к классу групп симметрии, каждая из которых состоит из конечного числа преобразований, под действием которых некоторая геометрическая фигура переходит сама в себя. Все такие преобразования (элементы симмет-

рии) оставляют на месте по крайней мере одну точку (центр фигуры), поэтому такие группы называют точечными. Порождающими элементами точечной группы могут быть только три вида элементов:

- Поворот вокруг некоторой оси на угол $2\pi/n$, эту ось обычно обозначают C_n .
- Отражение относительно плоскости, проходящей через ось симметрии или отражение относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии.
- Зеркальный поворот вокруг некоторой оси на угол π/n (то есть поворот с отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси), эту ось обычно обозначают S_{2n} .

Зеркальный поворот должен быть включен в порождающие элементы точечной группы симметрии, если в ней отсутствует отражение относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии: в противном случае зеркальный поворот распадается на произведение поворота и отражения, то есть не является порождающим элементом. Это накладывает ограничения на угол зеркального поворота: он не может быть равен $2\pi/p$, где p – нечетное число. В последнем случае в группе присутствовал бы элемент, который является степенью p от зеркального поворота, который при нечетном p как раз и является отражением относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии. Поэтому в приведенном выше списке фигурируют зеркальные оси только четных порядков.

Задача 10.1.4. Как преобразование инверсии сводится к перечисленным элементам?

Приведем пример группы, не связанной с симметрией геометрических фигур. Рассмотрим группу перестановок n объектов (чисел, точек, аргументов функции и тому подобное). Эту группу обычно называют *симметрической группой* и обозначают S_n . Перенумеруем позиции, в которых находятся объекты, числами от 1 до n . Элемент g_i симметрической группы можно определить совокупностью чисел i_1, i_2, \dots, i_n , которые задают позиции, в которые при перестановке перемещается объект с первой позиции (i_1), объект со второй позиции (i_2), и так далее. Понятно, что совокупность i_1, i_2, \dots, i_n сама по себе является перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$. Поскольку число перестановок равно $n!$, именно столько элементов содержит симметрическая группа. Правило умножения элементов g_j и g_i вполне прозрачно: сначала мы перемещаем объекты на новые места в соответствии с i_1, i_2, \dots, i_n , а затем перемещаем их еще раз в соответствии с j_1, j_2, \dots, j_n . Групповой характер такой процедуры очевиден.

Можно рассматривать отображения одной группы симметрии на другую $G \rightarrow H$, при котором каждому элементу g_i группы G сопоставляется некоторый элемент h_i группы H . Если при этом произведение элементов группы $g_i g_k$ отображается в произведение $h_i h_k$, то

отображение $G \rightarrow H$ называется гомоморфизмом. Если гомоморфизм к тому же является взаимно однозначным отображением, то такое отображение называется изоморфизмом. Изоморфные группы в математике обычно считаются одной и той же группой, то есть группы изучаются с точностью до изоморфизма. В физических же приложениях зачастую необходимо учитывать различный физический смысл преобразований изоморфных групп.

Приведем пару примеров. Рассмотренная выше группа симметрии правильного треугольника D_3 изоморфна симметрической группе S_3 . В соответствии с изоморфизмом совпадает число элементов этих групп: оно равно $6 = 3!$. Для того, чтобы установить изоморфизм этих двух групп, можно расставить числа 1, 2, 3 в вершинах треугольника и следить за их перестановками, которые порождаются элементами симметрии треугольника. Точно также симметрическая группа S_4 изоморфна группе симметрии тетраэдра. В соответствии с изоморфизмом совпадает число элементов этих групп: оно равно $24 = 4!$. Изоморфизм устанавливается также, как и для треугольника: можно расставить числа 1, 2, 3, 4 в вершинах тетраэдра и следить за их перестановками, которые порождаются элементами симметрии тетраэдра.

Задача 10.1.5. Симметрическая группа S_4 изоморфна группе поворотов куба. Как это обосновать?

Заметим, что совокупность произведений $h_i = g_i g$ (или $h_i = g g_i$), где g – некоторый элемент группы G , а g_i – ее элементы, также представляет собой полную совокупность элементов группы G . Действительно, во-первых $g_i g$ (или $g g_i$) представляют собой элементы группы G . Во-вторых, если известна совокупность $h_i = g_i g$ (или $h_i = g g_i$), то по ней можно восстановить и исходные элементы группы: $g_i = h_i g^{-1}$ (или $g_i = g^{-1} h_i$). Преобразование $g_i \rightarrow h_i = g_i g$ (или $g_i \rightarrow h_i = g g_i$) называется сдвигом по группе.

Подмножество элементов группы, которое само является группой, называется ее подгруппой. Например, для введенной нами выше группы симметрии треугольника D_3 подгруппой является циклическая группа C_3 , включающая элементы $1, r, r^2$, где r – поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси, перпендикулярной треугольнику. Очевидно, имеются подгруппы у группы перестановок S_n . Например, ее подгруппой является группа перестановок t объектов из n , $t < n$. Другой ее подгруппой является группа циклических перестановок. Очевидно, повороты вокруг любой оси являются подгруппами группы поворотов куба. А сама рассмотренная выше группа поворотов куба является подгруппой полной группы симметрии куба, включающей также отражения и инверсию.

Пусть H – подгруппа группы G . Обозначим H_i множество элементов группы G , состоящее из произведений $h_k g_i$ элементов h_k подгруппы H на некоторый элемент g_i группы G . Множество H_i называется правым смежным классом подгруппы H . Аналогично можно ввести

левые смежные классы подгруппы \mathbb{H} , которые состоят из произведений $g_i h_k$. Отметим, что если правый (левый) смежный класс \mathbb{H}_i подгруппы \mathbb{H} не совпадает с этой подгруппой, то он подгруппой не является.

Задача 10.1.6. Доказать, что если правый (левый) смежный класс \mathbb{H}_i подгруппы \mathbb{H} не совпадает с этой подгруппой, то он группой не является.

Докажем теорему Лагранжа: правые (левые) смежные классы не пересекаются либо совпадают. Пусть g_1 и g_2 – элементы, которые определяют правые смежные классы \mathbb{H}_1 и \mathbb{H}_2 . Предположим, что в этих классах имеются совпадающие элементы, тогда $h_i g_1 = h_k g_2$, где h_i, h_k принадлежат подгруппе \mathbb{H} . Умножая это равенство на $h_j h_i^{-1}$ (h_j – произвольный элемент подгруппы \mathbb{H}), находим $h_j g_1 = h_j h_i^{-1} h_k g_2$. Отсюда следует, что все элементы $h_j g_1$ класса \mathbb{H}_1 принадлежат классу \mathbb{H}_2 , поскольку элемент $h_j h_i^{-1} h_k$ принадлежит подгруппе \mathbb{H} . На этом доказательство заканчивается. Из теоремы Лагранжа следует, что элементы группы \mathbb{G} распадаются на целое число правых (левых) классов. Отсюда, в частности, следует, что порядок группы $|\mathbb{G}|$ кратен порядку своей подгруппы $|\mathbb{H}|$.

Задача 10.1.7. Убедиться в том, что порядок группы вращений куба кратен порядкам подгрупп этой группы.

Подгруппа \mathbb{H} группы \mathbb{G} называется инвариантной, если преобразования подобия ее элементов $h_k \rightarrow g h_k g^{-1}$ не выводят их из подгруппы \mathbb{H} . Здесь g – произвольный элемент группы \mathbb{G} , а h_k – произвольный элемент подгруппы \mathbb{H} . Очевидно, для инвариантной подгруппы левые и правые смежные классы совпадают, каждому из них соответствует совокупность элементов $h_k g_i = g_i h_k$. Проинтерпретируем эти смежные классы \mathbb{G}_i , как элементы нового множества \mathbb{F} . Определим на нем произведение, как класс элементов $h_k g_i g_j$. В результате получится группа \mathbb{F} , потому что в ней, очевидно, есть ассоциативность, существует единичный элемент и для каждого элемента найдется обратный. Группа \mathbb{F} называется фактор-группой, ее порядок равен $|\mathbb{G}|/|\mathbb{H}|$. Группа, которая не содержит инвариантных подгрупп, называется простой.

Задача 10.1.8. Показать, что является инвариантной подгруппа \mathbb{C}_3 группы преобразований правильного треугольника, состоящая из преобразований $h_i = 1, r, r^2$, где r – поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси третьего порядка.

Прямым произведением $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ групп \mathbb{G} и \mathbb{H} называется множество пар $g_i \times h_k$, где g_i – элементы \mathbb{G} , а h_k – элементы \mathbb{H} , операция умножения между которыми определена формулой

$$(g_i \times h_k) \cdot (g_m \times h_n) = (g_i \cdot g_m) \times (h_k \cdot h_n).$$

Из приведенного определения ясно, что прямое произведение $\mathbb{G} \times \mathbb{H}$ также является группой. Порядок этой группы является произведением порядков групп \mathbb{G} и \mathbb{H} . Таким образом, прямое произведение позволяет легко генерировать группы все большего и большего порядка на основе уже известных групп.

Элементы a и b группы \mathbb{G} называются сопряженными, если найдется элемент g группы \mathbb{G} , такой что $a = b g g^{-1}$. Совокупность элементов группы $g h g^{-1}$, где h – некоторый элемент группы \mathbb{G} , а g – произвольный элемент группы \mathbb{G} , называется классом сопряженных элементов. Все элементы в данном классе сопряжены друг другу. Действительно, если $h_1 = g_1 h g_1^{-1}$ и $h_2 = g_2 h g_2^{-1}$, то $h_2 = (g_2 g_1^{-1}) h_1 (g_2 g_1^{-1})^{-1}$. Очевидно, что элементы, принадлежащие разным классам, не могут быть сопряжены друг другу. Поэтому отношение сопряженности разбивает элементы группы \mathbb{G} на непересекающиеся классы. Очевидно, что единичный элемент группы сопряжен сам себе, поскольку $1 = g \cdot 1 \cdot g^{-1}$ для любого элемента группы g . Поэтому единичный элемент сам по себе составляет класс. Вследствие этого число классов сопряженных друг другу элементов группы \mathbb{G} больше единицы (если только группа не содержит единственный элемент 1).

Приведем ряд примеров. В циклической группе, состоящей из степеней некоторого элемента, нет сопряженных друг другу элементов. В то же время в группе симметрии правильного треугольника \mathbb{D}_3 все отражения сопряжены друг другу и составляют один класс. Сопряжены друг другу и повороты на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, которые составляют второй класс для этой группы. Третий класс образует единичное преобразование. Сопряжены друг другу отражения и для произвольной группы \mathbb{D}_{2n+1} , которые составляют отдельный класс. В то же время в группе \mathbb{D}_{2n} имеется два класса сопряженных друг другу отражений.

Задача 10.1.9. Показать, что в группе симметрии правильного треугольника сопряжены друг другу все отражения, и сопряжены друг другу повороты на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$.

Из определения классов сопряженных элементов следует, что прямой способ установления классов связан с перебором всех элементов группы. Однако для точечной группы имеется экономичный способ, основанный на наглядных геометрических представлениях. Преобразования подобны, когда это одно и то же преобразование, выполненное в двух разных системах координат, повернутых друг относительно друга. Преобразование g^{-1} переводит h в новую систему координат, а преобразование g возвращает в старую. Значит повороты на один и тот же угол вокруг двух разных осей сопряжены, если в группе есть преобразование g , переводящее одну ось в другую. То же относится и к плоскостям отражения.

Задача 10.1.10. Установить классы сопряженных

элементов для группы поворотов куба.

Введем понятие функции f на группе \mathbb{G} . Это совокупность $|\mathbb{G}|$ чисел (действительных или комплексных), каждое из которых соответствует определенному элементу группы g . Мы будем обозначать значение функции f , соответствующее элементу g , как $f(g)$. Важным понятием является инвариантное среднее по группе, которое мы будем обозначать

$$\langle f \rangle = \frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_g f(g), \quad (10.3)$$

где суммирование идет по всем элементам группы g . Очевидно, что среднее от константы равно этой константе. Среднее (10.3) инвариантно относительно сдвига по группе (левого или правого), поскольку сдвиг по группе не меняет совокупность элементов группы, а меняет только порядок их следования.

Задача 10.1.11. Найти инвариантное среднее по группе вращений \mathbb{C}_n функции f , которая имеет значение $\exp(\pi i t/n)$ для поворота на угол $2\pi t/n$.

10.1.1 Представления группы

Главную роль в физических приложениях теории групп играют матричные представления групп, которые обычно называют просто представлениями. Компоненты матриц представления могут быть как действительными, так и комплексными. В случае действительных матриц $n \times n$ значение n называют размерностью представления. Для комплексных матриц $n \times n$ представление эквивалентно двум действительным представлениям $n \times n$.

Совокупность матриц $\hat{D}(g)$ является представлением группы \mathbb{G} , если $\hat{D}(g_1)\hat{D}(g_2) = \hat{D}(g_1g_2)$. Очевидно, что тождественное преобразование соответствует единичной матрице, а обратное преобразование – обратной матрице. Совокупность матриц $\hat{D}(g)$ задает гомоморфизм группы \mathbb{G} в конечное множество матриц $\hat{D}(g)$. Этот гомоморфизм может быть необратимым (не взаимно однозначным). Тривиальный пример: все матрицы \hat{D}_i являются единичными. Очевидно, что в этом случае все необходимые для представления условия оказываются выполненными, но такой гомоморфизм бессодержателен. Обычно мы будем иметь дело с изоморфизмом группы \mathbb{G} в множество матриц $\hat{D}(g)$, когда по матрице $\hat{D}(g)$ однозначно восстанавливается соответствующий ей элемент группы g . Такое представление называется *точным*.

Если элементы группы \mathbb{G} линейно преобразуют n -мерное пространство, точки которого представляются радиус-вектором \mathbf{x} , то матрицы $\hat{D}(g)$ могут быть определены по действию элементов группы на радиус-вектор \mathbf{x} . А именно

$$g\mathbf{x} = \hat{D}(g)\mathbf{x}, \quad (10.4)$$

где \mathbf{x} интерпретируется, как столбец. Таким образом, каждому элементу g группы \mathbb{G} сопоставляется матрица $\hat{D}(g)$, которые, очевидно, составляют представление группы \mathbb{G} .

Задача 10.1.12. Построить двумерное действительное представление группы симметрии треугольника \mathbb{D}_3 . Указание: рассмотреть действие элементов симметрии на радиус-вектор.

Как мы уже отметили, размерность представления, которое осуществляется комплексными матрицами $n \times n$, в два раза больше, чем размерность представления, которое осуществляется действительными матрицами $n \times n$. Например, повороты вокруг некоторой оси в трехмерном пространстве дают двумерное действительное представление (матрицы 2×2), которое можно найти по действию поворотов на радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси вращения. То же представление становится одномерным комплексным, если мы рассматриваем действие поворотов на комплексное число $x + iy$, где x, y – координаты в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Для поворота на угол $2\pi t/n$ представление сводится к фактору $\exp(2\pi i t/n)$.

Как мы уже убедились, в силу конечности группы для каждого ее элемента g имеется степень s такая, что $g^s = 1$. Поэтому для соответствующей матрицы \hat{D} справедливо соотношение $\hat{D}^s = \hat{1}$, где $\hat{1}$ – единичная матрица. Отсюда немедленно следует, что $|\det \hat{D}| = 1$. Например, для матрицы, соответствующей повороту, ее детерминант равен единице, а для матрицы, соответствующей отражению, ее детерминант равен -1 . Равен -1 и детерминант матрицы, соответствующей зеркальному повороту. Для рассмотренного выше комплексного представления группы поворотов, которое сводится к факторам $\exp(2\pi i t/n)$, все эти факторы по модулю равны единице.

Примером представления конечной группы \mathbb{G} может служить ее действительное представление размерности $|\mathbb{G}|$, которое называется регулярным. Имеется даже два регулярных представления. Левое регулярное представление, которое задается элементом g_i , определяется через преобразование функции $f(g)$

$$T_i f(g) = f(g_i g), \quad (10.5)$$

для всех элементов g группы \mathbb{G} . Функция f имеет $|\mathbb{G}|$ компонент, и выражение (10.5) определяет линейное преобразование этих компонент, то есть для каждого элемента группы \mathbb{G} формула (10.5) задает матрицу $|\mathbb{G}| \times |\mathbb{G}|$ левого регулярного представления. Очевиден групповой характер процедуры (10.5). Правое регулярное представление определяется через преобразование функции $f(g)$

$$T_i f(g) = f(g g_i), \quad (10.6)$$

для всех элементов g группы \mathbb{G} . Функция f имеет $|\mathbb{G}|$ компонент, и выражение (10.6) определяет линейное преобразование этих компонент, то есть для каждого элемента группы \mathbb{G} формула (10.6) задает матрицу

$|\mathbb{G}| \times |\mathbb{G}|$ правого регулярного представления. Очевиден групповой характер процедуры (10.6).

Очевидно, что матрицы левого и правого регулярных представлений определяются матрицами с компонентами T_{ik}^n или T_{ki}^n , входящими в таблицу Кэли (10.1). Поскольку компоненты T_{ik}^n или T_{ki}^n являются нулями и единицами, то при действии на столбец \mathbf{x} с $p = |\mathbb{G}|$ компонентами матрицы регулярного представления производят перестановку этих компонент. Таким образом, регулярное представление изоморфно одной из подгрупп симметричной группы \mathbb{S}_p . Более того, поскольку регулярное представление, очевидно, является точным, то можно утверждать, что любая конечная группа \mathbb{G} изоморфна некоторой подгруппе симметричной группы \mathbb{S}_p , где $p = |\mathbb{G}|$.

Пусть h_i – совокупность элементов некоторого класса группы \mathbb{G} . Поскольку элементы $gh_i g^{-1}$ для любого элемента g группы \mathbb{G} находятся в том же классе, можно ввести матрицы $\hat{S}(g)$ в соответствии с определением

$$gh_i g^{-1} = S_{ik}(g)h_k. \quad (10.7)$$

Очевиден групповой характер этой процедуры. Поэтому (10.7) определяет некоторое представление группы \mathbb{G} .

Линейными преобразованиями пространства, на котором действуют матрицы представления конечной группы, эти матрицы могут быть приведены к унитарным. Для доказательства этого свойства обратимся к (комплексным) столбцам \mathbf{x} , представляющим координаты в пространстве, на котором действуют матрицы представления. Эти столбцы имеют число компонент n , равное (комплексной) размерности представления. Введем скалярное произведение

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_g \mathbf{x}^\dagger \hat{D}^\dagger(g) \hat{D}(g) \mathbf{y}, \quad (10.8)$$

где $\hat{D}(g)$ – матрица представления, соответствующая элементу группы g , \hat{D}^\dagger означает эрмитово сопряженную $\hat{D}(g)$ матрицу, а \mathbf{x}^\dagger – строка с компонентами, комплексно сопряженными компонентам \mathbf{x} .

Рассмотрим теперь $(\mathbf{x}, \hat{D}(h)\mathbf{y})$, где h – элемент группы. Для вычисления $(\mathbf{x}, \hat{D}(h)\mathbf{y})$ подставляем $\hat{D}(h)\mathbf{y}$ вместо \mathbf{y} в (10.8). В результате возникает произведение $\hat{D}(g)\hat{D}(h) = \hat{D}(gh)$. Далее переходим к суммированию по gh , что дает ту же сумму по элементам, так как сдвиг по группе gh переставляет элементы группы, но не меняет их совокупности. При этом $D^\dagger(g) \rightarrow D^\dagger(gh^{-1}) = [D^\dagger(h)]^{-1}D^\dagger(g)$. Другими словами, для каждого элемента группы

$$(\mathbf{x}[D^\dagger(h)]^{-1}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \hat{D}(h)\mathbf{y}).$$

Осталось только перейти к ортонормированному базису по произведению (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , компоненты матриц представления D в котором будут унитарными.

В дальнейшем подразумевается, что мы имеем дело с унитарными представлениями, когда его матрицы

представления являются унитарными: $\hat{D}^\dagger(g) = \hat{D}^{-1}(g)$. Вспомогая, что $\hat{D}^{-1}(g) = \hat{D}(g^{-1})$, мы находим $\hat{D}(g^{-1}) = \hat{D}^\dagger(g)$. Для действительного представления унитарность означает, что все его матрицы $\hat{D}(g)$ являются ортогональными, а матрица $\hat{D}(g^{-1})$ получается из $\hat{D}(g)$ транспонированием.

Задача 10.1.13. Проверить, что для действительного двумерного представления группы вращений правильного треугольника матрицы $\hat{D}(g^{-1})$ получается из $\hat{D}(g)$ транспонированием.

Если имеется два представления D и S группы \mathbb{G} , то можно определить тензорное произведение этих представлений $D \times S$. Пространством, в котором действуют матрицы этого представления, являются прямые (тензорные) произведения столбцов \mathbf{x} и \mathbf{y} , на которые действуют матрицы представлений D и S . Групповой характер такой процедуры очевиден. Размерность представления $D \times S$ равна $n_1 n_2$ где n_1 и n_2 – размерности представлений D и S .

Два представления группы \mathbb{G} , D и S , называются эквивалентными, если они имеют одинаковую размерность n и существует такая матрица \hat{V} , размером $n \times n$, что

$$\hat{D}(g) = \hat{V} \hat{S}(g) \hat{V}^{-1}, \quad (10.9)$$

справедливое для всех элементов g группы \mathbb{G} . Преобразование (10.9) называется преобразованием подобия. Можно сказать, что эквивалентные представления – это одно и то же представление, записанное в разных базах. Отметим, что для унитарных представлений матрица преобразования \hat{V} также должна быть унитарной.

Если существует преобразование подобия $\hat{D}(g) \rightarrow \hat{V} \hat{D}(g) \hat{V}^{-1}$, при котором матрицы представления для всех элементов g группы \mathbb{G} приводятся к блочно-диагональному виду, то представление группы \mathbb{G} называется приводимым. Если же это невозможно, то представление называется неприводимым. Предположим, что мы нашли n столбцов \mathbf{x}_i , которые линейно преобразуются друг через друга при действии матриц неприводимого представления $\hat{D}(g)$ размерности n . Тогда столбцы \mathbf{x}_i являются линейно независимыми. В противном случае можно найти набор линейных комбинаций \mathbf{x}_i числом меньше n , которые преобразуются друг через друга под действием матриц $\hat{D}(g)$, то есть в этом представлении матрицы $\hat{D}(g)$ сводятся к блочно-диагональному виду, и, следовательно, представление не является неприводимым.

Теорема Машке утверждает, что преобразованием подобия матрицы произвольного представления группы \mathbb{G} могут быть приведены к блочно-диагональному виду, причем каждый блок осуществляет неприводимое представление группы \mathbb{G} . Как говорят, представление группы \mathbb{G} распадается на прямую сумму неприводимых представлений. Каждое из этих представлений будет эквивалентно одному из неприводимых представлений

группы \mathbb{G} , которые составляют полный набор неприводимых представлений.

Заметим, что все неприводимые представления абелевой группы являются одномерными. Действительно, соотношение коммутации $\hat{D}_i \hat{D}_k = \hat{D}_k \hat{D}_i$ означает, что если матрица \hat{D}_i приведена к диагональному виду, то и матрица \hat{D}_k является диагональной (или может быть приведена к диагональной без нарушения диагональности матрицы \hat{D}_i в случае, когда ее собственные значения являются вырожденными). Таким образом, возможна одновременная диагонализация матриц абелевой группы, что и означает сведение произвольного представления абелевой группы к одномерным. Особенно просто доказывается сделанное утверждение для циклической группы, все элементы которой являются степенями некоторого элемента g . Если ему соответствует матрица \hat{D} и мы привели ее к диагональному виду, то и все матрицы этого представления, которые являются степенями \hat{D} , являются диагональными.

Рассмотрим некоторое представление группы \mathbb{G} , которое дается матрицами $\hat{D}(g)$. Сумма

$$\hat{Z} = \sum_h \hat{D}(h) \quad (10.10)$$

по элементам h некоторого класса группы \mathbb{G} удовлетворяет условию

$$\hat{D}(g)\hat{Z}[\hat{D}(g)]^{-1} = \hat{Z}, \quad (10.11)$$

для любого элемента g группы \mathbb{G} . Действительно,

$$\hat{D}(g)\hat{Z}[\hat{D}(g)]^{-1} = \sum_h \hat{D}(ghg^{-1}) = \hat{Z},$$

поскольку совокупность ghg^{-1} – это набор тех же элементов выбранного класса. Таким образом, каждому классу в произвольном представлении соответствует матрица \hat{Z} , которая удовлетворяет соотношению (10.11) для любого элемента g группы \mathbb{G} . Совокупность матриц \hat{Z} , удовлетворяющих соотношению (10.11), называется центром представления D . Выше мы показали, что в центре можно ввести базис с числом элементов, равным числу классов сопряженных элементов группы \mathbb{G} .

Для неприводимого представления S равенство $\hat{S}(g)\hat{Z}[\hat{S}(g)]^{-1} = \hat{Z}$ возможно только для матриц \hat{Z} , пропорциональных единичной. Поэтому существует только один элемент центра неприводимого представления. Следовательно, число элементов в центрах полного набора неэквивалентных неприводимых представлений группы \mathbb{G} равно числу этих представлений. С другой стороны, любое представление группы \mathbb{G} разлагается на сумму неприводимых. Поэтому число независимых элементов центра группы \mathbb{G} равно числу неэквивалентных неприводимых представлений группы \mathbb{G} . Отсюда следует, что число независимых неприводимых представлений группы \mathbb{G} равно числу классов сопряженных элементов группы \mathbb{G} .

Обратимся к правому регулярному представлению

$$T(h)f(g) = f(gh), \quad (10.12)$$

где f – функция на группе. Регулярное представление приводимо. Его можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений. Это означает, что для каждого неприводимого представления существует базис функций $f_\alpha(g)$, число которых равно размерности представления, которые преобразуются друг через друга при действии T :

$$T(h)f_\alpha(g) = D_{\beta\alpha}(h)f_\beta(g),$$

где D – матрица соответствующего неприводимого представления. Теперь мы вспоминаем определение (10.12):

$$f_\alpha(gh) = T(h)f_\alpha(g) = D_{\beta\alpha}(h)f_\beta(g), \quad (10.13)$$

Полагая в (10.13) $g = 1$ и обозначая $c_\alpha = f_\alpha(1)$, находим

$$f_\alpha(h) = D_{\beta\alpha}(h)c_\beta, \quad (10.14)$$

где h – произвольный элемент группы \mathbb{G} . Таким образом, функция базиса f_α представляется в виде линейной комбинации матриц $D_{\beta\alpha}(h)$. Если же мы возьмем полный набор неприводимых представлений, на которые распадается регулярное представление, то мы приходим к выводу, что произвольная функция $f(h)$ раскладывается в сумму $D_{\alpha\beta}^{(l)}(h)$, где l нумерует неприводимые представления. Таким образом, $D_{\alpha\beta}^{(l)}(h)$ составляют полный базис функций, заданных на группе.

Отсюда в частности следует теорема Бернсайда: порядок группы равен сумме квадратов полной системы неприводимых представлений этой группы:

$$|\mathbb{G}| = n_1^2 + n_2^2 + \dots \quad (10.15)$$

Действительно, порядок регулярного представления равен $|\mathbb{G}|$. Он должен быть равен числу элементов базиса $D_{\alpha\beta}^{(l)}(h)$, который как раз равен сумме в правой части (10.15). Поскольку размерность приводимого представления равен сумме размерностей неприводимых представлений, умноженных на кратность этого представления, мы заключаем, что каждое неприводимое представление содержится в правом регулярном представлении с кратностью, равной размерности представления.

Одной из основных задач теории представлений является нахождение всех (неэквивалентных) неприводимых представлений данной группы \mathbb{G} . Мы установили, что число неэквивалентных неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы \mathbb{G} . Мы также установили, что сумма квадратов размерностей n_α неприводимых представлений равна порядку группы $|\mathbb{G}|$

$$\sum_\alpha n_\alpha^2 = |\mathbb{G}|. \quad (10.16)$$

Эти два свойства накладывают весьма существенные ограничения на набор n_α и в ряде случаев фиксируют

их однозначно. Например, однозначно фиксируется набор n_α для неприводимых представлений группы симметрии треугольника. Поскольку число классов в данном случае равно трем, то должно существовать три неприводимых представления группы. Их размерности равны, очевидно, 1, 1, 2, поскольку только в этом случае сумма квадратов $1^2 + 1^2 + 2^2 = 6$ равно порядку группы.

Задача 10.1.14. Как устроены неприводимые представления группы симметрии треугольника?

Предположим, что имеются неприводимые представления D и S группы \mathbb{G} с матрицами $\hat{D}(g)$ и $\hat{S}(g)$, и для всех элементов группы g справедливо соотношение

$$\hat{A}\hat{D}(g) = \hat{S}(g)\hat{A}. \quad (10.17)$$

Тогда либо матрица \hat{A} равна нулю, либо неприводимые представления с матрицами $\hat{D}(g)$ и $\hat{S}(g)$ эквивалентны. Это утверждение известно, как *лемма Шура*.

Докажем лемму Шура. Возьмем n столбцов \mathbf{a}_i , которые линейно преобразуются друг через друга при действии матриц неприводимого представления $\hat{D}(g)$ размерности n . Рассмотрим столбцы $\mathbf{b}_i = \hat{A}\mathbf{a}_i$. Из соотношения (??) следует, что $\hat{S}\mathbf{b}_i = \hat{A}\hat{D}\mathbf{a}_i$. Поскольку $\hat{D}\mathbf{a}_i$ являются линейной комбинацией \mathbf{a}_i , то $\hat{A}\hat{D}\mathbf{a}_i$ являются линейной комбинацией \mathbf{b}_i . Таким образом, $\hat{S}\mathbf{b}_i$ являются линейной комбинацией \mathbf{b}_i . Поэтому, если $\hat{A} \neq 0$, то представление S имеет размерность n и \mathbf{b}_i линейно независимы. Поэтому \mathbf{a}_i можно разложить по \mathbf{b}_i . Это означает, что матрица \hat{A} обратима. Поэтому из соотношения (10.17) следует, что $\hat{D}(g) = \hat{A}^{-1}\hat{S}(g)\hat{A}$, то есть представления D и S эквивалентны.

Из леммы Шура следует в частности, что если матрица \hat{B} перестановочна со всеми матрицами некоторого неприводимого представления $\hat{D}(g)$, то \hat{B} пропорциональна единичной матрице. Действительно, пусть λ – собственное значение матрицы \hat{B} . Тогда матрица $\hat{A} = \hat{B} - \lambda\hat{1}$ удовлетворяет соотношению $\hat{A}\hat{D}(g) = \hat{D}(g)\hat{A}$ для всех g . Поэтому в силу леммы Шура (для частного случая совпадающих D и S) матрица A равна нулю, поскольку обратной к ней матрицы не существует. Поэтому $\hat{B} = \lambda\hat{1}$, то есть \hat{B} пропорциональна единичной матрице.

Для компонент матриц неприводимых представлений справедливо важное свойство “ортонормированности”. Для его доказательства возьмем два представления группы, D и S , размерностью n_1 и n_2 , матрицу \hat{B} размером $n_1 \times n_2$ и введем матрицу $n_1 \times n_2$

$$\hat{M} = \sum_g \hat{D}(g)\hat{B}\hat{S}(g^{-1}), \quad (10.18)$$

где суммирование идет по всем элементам группы. Рассмотрим произведение $\hat{D}(h)\hat{M}$, где g – некоторый элемент группы. Преобразуем $\hat{D}(h)\hat{D}(g) = \hat{D}(hg)$ и переходим к суммированию по hg . Поскольку $g^{-1} = (hg)^{-1}h$, мы находим

$$\hat{D}(h)\hat{M} = \hat{M}\hat{S}(h). \quad (10.19)$$

В силу леммы Шура для разных неприводимых представлений матрица \hat{M} должна быть равна нулю. При этом матрица \hat{B} в соотношении (10.18) произвольна. Поэтому мы находим условие “ортogonalности” различных неприводимых представлений

$$\sum_g D_{\alpha\beta}(g)S_{\gamma\delta}(g^{-1}) = 0, \quad (10.20)$$

где греческие индексы нумеруют компоненты матриц \hat{D} , \hat{S} . Напомним, что в силу унитарности $\hat{S}(-g) = \hat{S}^\dagger(g)$. Поэтому (10.20) переписывается в виде

$$\sum_g D_{\alpha\beta}(g)S_{\gamma\delta}^\dagger(g) = 0. \quad (10.21)$$

Рассмотрим теперь случай, когда представления D и S в совпадают. Тогда определенная в соответствии с формулой (10.18) матрица \hat{M} коммутирует со всеми матрицами представления D , как следует из соотношения (10.19). Как мы уже установили, в этом случае в силу леммы Шура матрица \hat{M} пропорциональна единичной матрице. Найдем ее след:

$$\text{tr } \hat{M} = \sum_g \text{tr } \left\{ \hat{D}(g)\hat{B}[\hat{D}(g)]^{-1} \right\} = |\mathbb{G}| \text{tr } \hat{B}.$$

Итак, для произвольной матрицы \hat{B}

$$\sum_g \hat{D}(g)\hat{B}\hat{D}(g^{-1}) = \frac{|\mathbb{G}|}{n} (\text{tr } \hat{B})\hat{1},$$

где $\hat{1}$ – единичная матрица $n \times n$. Поэтому должно выполняться покомпонентное соотношение

$$\begin{aligned} & \sum_g D_{\alpha\beta}(g)D_{\gamma\delta}(-g) \\ &= \sum_g D_{\alpha\beta}(g)D_{\gamma\delta}^\dagger(g) = \frac{|\mathbb{G}|}{n} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где, как и выше, греческие индексы нумеруют компоненты матрицы $\hat{D}(g)$.

Задача 10.1.15. Проверить выполнение соотношений (10.21, 10.22) для группы симметрии треугольника.

Чтобы классифицировать представления группы с точностью до эквивалентности, надо ввести инвариант преобразования подобия (10.9). Таким инвариантом является след матрицы представления, который называют его характером χ :

$$\chi(g) = \text{tr } \hat{D}(g). \quad (10.23)$$

След одинаков для представлений, связанных преобразованием подобия (10.9). Поэтому набор характеров $\chi(g)$ уже не зависит от конкретного выбора представления и характеризует класс эквивалентных представлений.

Другими словами, набор характеров χ_i характеризует группу, как таковую. Отметим, что совпадают характеры, которые соответствуют сопряженным элементам группы. Отметим также, что для обратного к g элемента, для которого матрица равна $\hat{D}^\dagger(g)$, характер равен $\chi^*(g)$.

Выше мы ввели понятие тензорного произведения представлений $D \times S$. Несложно сообразить, что характер матрицы этого представления равен произведению характеров $\chi_D \chi_S$.

Свернем соотношение (10.22) по индексам α, β и по индексам γ, δ . В результате слева получим сумму произведений характеров, а справа – след символа Кронекера, который равен размерности представления n . В результате получается

$$\sum_g |\chi(g)|^2 = |\mathbb{G}|. \quad (10.24)$$

Для разных же представлений D и S таким же образом находим из соотношения (10.21) условие ортогональности

$$\sum_g \chi_D(g) \chi_S^*(g) = 0, \quad (10.25)$$

где индексы означают характеры представлений D и S . Соотношения (10.24, 10.25) уже не зависят от конкретного вида матриц представления.

Задача 10.1.16. Проверить выполнение соотношений (10.24, 10.25) для группы симметрии треугольника.

Задача 10.1.17. Построить систему неприводимых представлений группы \mathbb{D}_4 .

Важной задачей теории представлений является разложение данного представления группы \mathbb{G} в прямую сумму неприводимых представлений. Это означает, что преобразование подобия $\hat{D}(g) \rightarrow \hat{V} \hat{D}(g) \hat{V}^{-1}$ матрицы представления для всех элементов g приводятся к блочно-диагональному виду. Каждый блок уже соответствует неприводимому представлению.

Явное построение матрицы \hat{V} является сложной задачей. Однако соотношения (10.24, 10.25) позволяют определить, сколько и каких неприводимых представлений имеется в разложении данного (приводимого) представления D . А именно, в разложении D содержится число представлений, эквивалентных неприводимому представлению S , которое определяется выражением

$$\frac{1}{|\mathbb{G}|} \sum_g \chi_D(g) \chi_S^*(g). \quad (10.26)$$

Тот факт, что число (10.26) оказывается целым, является одним из критериев правильности вычислений.

Задача 10.1.18. На какие неприводимые представления раскладывается тензорное произведение $S = D \times D$, где D – двумерное представление группы симметрии треугольника \mathbb{D}_3 ?

Задача 10.1.19. На какие неприводимые представления раскладывается тензорное произведение $S = D \times D$, где D – двумерное представление группы симметрии квадрата \mathbb{D}_4 ?

10.2 Группы и алгебры Ли

Мы приступаем к рассмотрению групп Ли, которые характеризуются бесконечным набором элементов, которые можно характеризовать конечным числом действительных параметров x_i . Минимально необходимое число параметров x_i , необходимое для параметризации группы Ли \mathbb{G} называется ее размерностью и обозначается $\dim \mathbb{G}$. Иногда x_i называют координатами в пространстве параметров группы Ли. В качестве примера можно привести группу вращений трехмерного пространства. Число параметров, необходимых для задания элементов этой группы, равно трем: именно столько углов характеризует произвольное вращение. Например, можно последовательно осуществить повороты вокруг трех осей координат.

Задача 10.2.1. Сколькими параметрами характеризуется группа вращений n -мерного пространства?

Начало координат принято выбирать в единице группы, то есть $x_i = 0$ соответствуют единичному элементу группы. Вместо таблицы умножения непрерывная группа задается функцией $2\dim \mathbb{G}$ переменных, которая определяет процедуру умножения. А именно, пусть при перемножении элементов с координатами \mathbf{x}, \mathbf{y} получился элемент с координатой \mathbf{z} : $g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y})$. Тогда $\mathbf{z} = \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется функцией умножения. Групповые свойства накладывают ряд ограничений на функцию ϕ . Во-первых, $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$, что связано со свойством единичного элемента $1 \cdot g = g \cdot 1 = g$. Во-вторых,

$$\phi(\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z}) = \phi(\mathbf{x}, \phi(\mathbf{y}, \mathbf{z})),$$

что связано с ассоциативностью: $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$. В-третьих, наличие у каждого элемента группы обратного означает, что для каждого \mathbf{x} найдется такое \mathbf{y} , что $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0$.

Нашей ближайшей задачей является описание наиболее важных с точки зрения физических приложений групп Ли. Это удобно будет сделать на языке матриц, которые осуществляют представление группы Ли, которое называется фундаментальным. В дальнейшем в этом разделе, если это не будет вызывать недоразумение, мы будем для краткости говорить “группа Ли” вместо “фундаментальное представление группы Ли”. Мы будем говорить о матрицах $n \times n$ с действительными или комплексными компонентами. Очевидно, действительная матрица $n \times n$ характеризуется n^2 параметрами, а комплексная матрица $n \times n$ характеризуется $2n^2$ параметрами. Как правило, мы будем рассматривать матрицы, на которые накладываются некоторые ограниче-

ния, совместимые с групповыми свойствами. Приведем основные примеры.

Группы $\mathbb{SL}(n, R)$ и $\mathbb{SL}(n, C)$. Это группы действительных и комплексных унимодулярных матриц, то есть матриц с единичным детерминантом. Поскольку детерминант произведения матриц равен произведению их детерминантов, групповая процедура не выводит унимодулярные матрицы из их класса. Очевидно, действительная унимодулярная матрица $n \times n$ характеризуется $n^2 - 1$ параметрами, а комплексная унимодулярная матрица $n \times n$ характеризуется $2n^2 - 2$ параметрами. Поэтому $\dim \mathbb{SL}(n, R) = n^2 - 1$, $\dim \mathbb{SL}(n, C) = 2n^2 - 2$.

Группа $\mathbb{U}(n, C)$ или просто $\mathbb{U}(n)$. Это группа унитарных матриц \hat{U} , т.е. таких, для которых эрмитовски сопряженная матрица \hat{U}^\dagger совпадает с обратной: $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ или $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$. Это соотношение дает n^2 действительных условий, поскольку матрица $\hat{U}\hat{U}^\dagger$ эрмитова. Таким образом, унитарная матрица характеризуется n^2 параметрами. Другими словами, размерность группы $\dim \mathbb{U}(n) = n^2$.

Группа $\mathbb{SO}(n, R)$ или просто $\mathbb{SO}(n)$. Это группа ортогональных унимодулярных матриц \hat{O} , то есть матриц с единичным детерминантом, для которых обратная матрица совпадает с транспонированной: $\hat{O}^{-1} = \hat{O}^T$ или $\hat{O}\hat{O}^T = 1$. Это соотношение дает $n(n+1)/2$ действительных условий, поскольку матрица $\hat{O}\hat{O}^T$ симметрична. Соотношение $\hat{O}\hat{O}^T = 1$ означает, что детерминант \hat{O} равен ± 1 . Поэтому условие унимодулярности отсекает матрицы с детерминантом -1 , но не уменьшает число параметров, которые требуются для характеристики матрицы \hat{O} . Таким образом, ортогональная матрица характеризуется $n(n-1)/2$ параметрами. Другими словами, размерность группы $\dim \mathbb{SO}(n) = n(n-1)/2$.

Задача 10.2.2. *Группа $\mathbb{SO}(n)$ изоморфна группе вращений n -мерного пространства. Почему?*

Группа $\mathbb{SU}(n, C)$ или просто $\mathbb{SU}(n)$ означает группу унитарных унимодулярных матриц, т.е. таких, для которых эрмитовски сопряженная матрица совпадает с обратной: $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ или $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$, а также детерминант равен единице. Соотношение $\hat{U}\hat{U}^\dagger = 1$ означает, что детерминант матрицы \hat{U} по модулю равен единице. Поэтому условие унимодулярности накладывает одно дополнительное действительное ограничение на матрицу \hat{U} . Вычитая эту единицу из числа n^2 параметров унитарной матрицы, находим, что унитарная унимодулярная матрица характеризуется $n^2 - 1$ параметрами. Другими словами, размерность группы $\dim \mathbb{SU}(n) = n^2 - 1$.

Приведем параметризацию группы $\mathbb{SO}(3)$, которая изоморфна группе вращений трехмерного пространства. Всякую матрицу этой группы можно представить, как произведение трех матриц, $\hat{O} = \hat{O}_3\hat{O}_2\hat{O}_1$, которые

соответствуют поворотам вокруг осей координат:

$$\begin{aligned}\hat{O}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{O}_2 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_2 & 0 & \sin \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & 0 & \cos \alpha_2 \end{pmatrix}, \\ \hat{O}_3 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (10.27)\end{aligned}$$

Все углы здесь определены на интервале в 2π , например, можно считать $-\pi < \alpha < \pi$.

Можно ввести другую параметризацию матриц группы $\mathbb{SO}(3)$. Будем рассматривать поворот, как вращение вокруг некоторого вектора \mathbf{a} , направление которого задает направление оси вращения, а абсолютное значение задает угол поворота ψ . Полное перечисление поворотов в терминах векторов \mathbf{a} означает, что ψ меняется от 0 до π , поскольку повороты на углы от π до 2π вокруг направления \mathbf{a} эквивалентны поворотам на углы от 0 до π вокруг направления $-\mathbf{a}$. Таким образом, в пространстве векторов \mathbf{a} область параметров группы $\mathbb{SO}(3)$ является шаром радиуса π . Однако повороты на угол π вокруг направлений \mathbf{a} и $-\mathbf{a}$ являются одним и тем же преобразованием, поэтому мы должны отождествить все пары диаметрально противоположных точек поверхности шара. Получившееся множество и есть многообразие параметров группы $\mathbb{SO}(3)$. Многообразие получилось связным, но не односвязным, потому что мы не можем стянуть в точку путь, проходящий через концы диаметра шара. Диаметрально противоположные точки останутся противоположными и нам не удастся свести их в одну. Такое множество можно отобразить на так называемую проективную сферу в четырехмерном пространстве.

Приведем параметризацию матриц группы $\mathbb{SU}(2)$. Элемент этой группы можно задать четырьмя действительными числами x_1, x_2, x_3, x_4 , на которые наложено условие $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Тогда матрица

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_2 & -x_3 - ix_4 \\ x_3 - ix_4 & x_1 - ix_2 \end{pmatrix}, \quad (10.28)$$

является унитарной и унимодулярной. Можно сказать, что условие $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$ задает единичную сферу в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 .

Задача 10.2.3. *Найти функцию $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ для параметризации (10.28).*

10.2.1 Алгебра Ли группы Ли

Рассмотрим окрестность единичного элемента некоторой группы Ли \mathbb{G} , которая задается параметрами x_j . В этой окрестности матрицы группы \hat{G} характеризуется производными

$$\hat{Q}_j = \frac{\partial \hat{G}}{\partial x_j}, \quad (10.29)$$

число которых совпадает с размерностью группы \mathbb{G} . Производные (10.29) называются генераторами группы \mathbb{G} , их число равно размерности группы $\dim \mathbb{G}$. Вблизи единицы справедливо разложение $\hat{G}(\mathbf{x}) = 1 + x_j \hat{Q}_j$, где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Рассмотрим однопараметрическое семейство матриц $\hat{T}(t) = \exp(t y_j \hat{Q}_j)$, где y_j – некоторые числа и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Очевидно, что это семейство удовлетворяет групповому свойству, причем $\hat{T}(t_1)\hat{T}(t_2) = \hat{T}(t_1 + t_2)$. Кроме того, при малых t матрицы \hat{T} имеют вид $1 + x_j \hat{Q}_j$, то есть принадлежат группе \mathbb{G} . Отсюда следует, что и при произвольном t матрицы \hat{T} принадлежат группе \mathbb{G} . Таким образом, мы нашли однопараметрическую подгруппу группы \mathbb{G} . Более того, мы построили экспоненциальное представление этой подгруппы.

При различных значениях y_j однопараметрические подгруппы $\hat{T}(t)$ исчерпывают все элементы группы \mathbb{G} , поскольку каждый ее элемент может быть аппроксимирован большой степенью элемента, близкого к единице. Таким образом, мы нашли представление для матриц группы \mathbb{G} , которое имеет вид

$$\hat{G}(\mathbf{x}) = \exp(\mathbf{x} \hat{\mathbf{Q}}), \quad (10.30)$$

которое называется экспоненциальным. В дальнейшем мы будем использовать именно экспоненциальное представление.

Хотя мы обнаружили в группе \mathbb{G} бесконечное количество однопараметрических подгрупп, ее элементы, вообще говоря, не коммутируют между собой. Рассмотрим матрицу $\hat{G}(\mathbf{y})\hat{G}(\mathbf{x})\hat{G}^{-1}(\mathbf{y})\hat{G}^{-1}(\mathbf{x})$, которая также принадлежит группе \mathbb{G} . Используя экспоненциальное представление (10.30) и раскладываясь до второго порядка по x_j, y_j , находим

$$\hat{G}(\mathbf{y})\hat{G}(\mathbf{x})\hat{G}^{-1}(\mathbf{y})\hat{G}^{-1}(\mathbf{x}) \approx 1 + y_i x_j (\hat{Q}_i \hat{Q}_j - \hat{Q}_j \hat{Q}_i).$$

Поскольку вблизи единицы главный член разложения матрицы группы \mathbb{G} должен раскладываться по \hat{Q}_j , мы находим

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = t_{jlk} \hat{Q}_k, \quad (10.31)$$

где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам. Величины t_{jlk} называются структурными константами. Очевидно, величины t_{jlk} антисимметричны по первой паре индексов. Квадратные скобки в (10.31) означают коммутатор

$$[\hat{G}, \hat{H}] \equiv \hat{G}\hat{H} - \hat{H}\hat{G}.$$

Таким образом, мы приходим к совокупности матриц $\hat{X} = \mathbf{x} \hat{\mathbf{Q}}$, где “скалярное произведение” означает суммирование по компонентам x_j и компонентам \hat{Q}_j . На этом линейном пространстве заданы операции сложения $\hat{X} + \hat{Y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \hat{\mathbf{Q}}$ и коммутации матриц, которые это пространство сохраняют. Коммутатор матриц \hat{X} линейно выражается через эти матрицы, явное выражение

коммутатора определяется структурными константами, смотри (10.31). Такого сорта конструкция называется алгеброй Ли. Вообще говоря, алгебры Ли можно рассматривать сами по себе. Нас, однако, они будут интересовать именно в связи с группами Ли.

Легко проверить, что для любых трех операторов $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ выполняется тождество Якоби

$$[[\hat{X}, \hat{Y}], \hat{Z}] + [[\hat{Y}, \hat{Z}], \hat{X}] + [[\hat{Z}, \hat{X}], \hat{Y}] = 0. \quad (10.32)$$

Подставляя в тождество Якоби (10.32) $\hat{X} = \hat{Q}_i, \hat{Y} = \hat{Q}_j, \hat{Z} = \hat{Q}_k$ и преобразуя коммутаторы при помощи соотношений (10.31), находим условие

$$t_{ijn}t_{nkm} + t_{jkn}t_{nim} + t_{kin}t_{njm} = 0, \quad (10.33)$$

наложенное на структурные константы.

Рассмотрим группу $\mathbb{SU}(2)$, размерность которой равна трем. В качестве генераторов этой группы используют обычно матрицы Паули, смотри раздел 10.4.1. В соответствии с выражением (10.60) для коммутаторов матриц Паули

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \quad (10.34)$$

структурные константы t_{ikl} группы $\mathbb{SU}(2)$ пропорциональны абсолютно антисимметричному тензору ϵ_{ijk} . Для этих величин легко непосредственно проверить выполнение тождеств Якоби (10.33), используя соотношение

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}. \quad (10.35)$$

Экспоненциальное представление (10.30) для матриц группы $\mathbb{SU}(2)$ имеет вид

$$\exp(ix_i \sigma_i) = \cos x + i \frac{x_i}{x} \sigma_i \sin x, \quad (10.36)$$

где x – абсолютное значение вектора \mathbf{x} . Используя эрмитовость матриц Паули и правило (10.59), легко проверить унитарность и унимодулярность матриц (10.36). Как следует из выражения (10.36), векторы \mathbf{x} лежат внутри сферы радиуса π .

Задача 10.2.4. Доказать соотношение (10.36).

Вместо экспоненциального представления (10.36) часто используют другую параметризацию в терминах трех углов:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} \cos(\theta/2) & e^{i\psi} \sin(\theta/2) \\ -e^{-i\psi} \sin(\theta/2) & e^{-i\varphi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix}. \quad (10.37)$$

Эту параметризацию обычно называют спинорной (в узком смысле этого слова).

Дифференцируя матрицы (10.27) по углам α , мы на-

ходим следующие генераторы группы вращений

$$\begin{aligned}\hat{J}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{J}_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \hat{J}_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (10.38)$$

которые за счет умножения на i сделаны эрмитовыми матрицами. Прямым вычислением находим правила коммутации

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{J}_n, \quad (10.39)$$

которые эквивалентны правилам коммутации матриц Паули (10.34). Поэтому алгебры Ли для групп $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ изоморфны, то есть группы $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{SU}(2)$ вблизи единичного элемента ведут себя одинаково. В то же время эти группы не изоморфны.

Задача 10.2.5. Проверить, что оператор углового момента $\hat{L}_i = -i\epsilon_{ikn}r_k\partial_n$ удовлетворяет тем же правилам коммутации (10.39): $[\hat{L}_i, \hat{L}_k] = i\epsilon_{ikn}\hat{L}_n$.

Исходя из правил коммутации (10.34, 10.39), можно было бы ожидать, что эквивалентны элементы $\exp(ix_i\hat{J}_i)$ и $\exp(ix_i\sigma_i/2)$. Для группы $\mathbb{SO}(3)$ элементы группы лежат внутри сферы радиуса π , причем противоположные точки на этой сфере эквивалентны. Однако, как следует из представления (10.36) для $|x| = \pi$ элементы $\exp(ix_i\sigma_i/2)$ и $\exp(-ix_i\sigma_i/2)$ отличаются знаком. Таким образом, можно построить гомоморфизм $\mathbb{SU}(2) \rightarrow \mathbb{SO}(3)$. Но обратного гомоморфизма не существует, поскольку каждый элемент \hat{O} имеет два прообраза \hat{U} (отличающиеся знаком). Поэтому группы $\mathbb{SU}(2)$ и $\mathbb{SO}(3)$ не изоморфны. Иногда говорят, что группа $\mathbb{SU}(2)$ является прямым произведением групп $\mathbb{SO}(3)$ и \mathbb{Z}_2 , где \mathbb{Z}_2 – циклическая группа, состоящая из двух элементов: 1 и -1 .

В общем случае, когда у каждой точки образа имеется несколько прообразов, отображение называют накрытием. Таким образом, группа $\mathbb{SU}(2)$ является накрытием группы $\mathbb{SO}(3)$, в данном случае двулистное. Пример двулистного накрытия известен из теории функций комплексной переменной. Риманова поверхность функции \sqrt{z} представляет собой два экземпляра комплексной плоскости, разрезанных, например, вдоль отрицательной действительной полуоси. Верхний берег разреза каждого экземпляра склеивается с нижним берегом разреза другого экземпляра. Если полученную поверхность гладко отобразить на комплексную плоскость, получится двулистное накрытие. Каждый лист соответствует своей ветви квадратного корня. Примером бесконечнолистного накрытия является отображение числовой оси на окружность, при котором ось “наматывается” на окружность. Каждой точке окружности отвечает

бесконечное число прообразов, поэтому данное отображение – бесконечнолистное накрытие. Двумерным примером бесконечнолистного накрытия служит отображение плоскости на тор. Плоскость делится на одинаковые прямоугольные клетки, противоположные стороны каждого прямоугольника склеиваются. Каждой точке тора соответствует счетное множество дискретных прообразов на плоскости.

Оператором Казимира называется квадратичная по генераторам форма, которая коммутирует со всеми генераторами. Линейным преобразованием генераторов \hat{Q}_i эту форму всегда можно привести к виду \hat{Q}_j^2 . В этом случае условие $[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^2] = 0$ означает, что структурные константы t_{ikn} антисимметричны не только по первой паре индексов, но и по последней. Другими словами, в этом случае t_{ikn} является абсолютно антисимметричным тензором. Для алгебры размерности три абсолютно антисимметричный тензор обязан быть пропорциональным ϵ_{ijk} . Для групп более высокой размерности структурные константы t_{ikn} не фиксированы столь жестко. Приведем в качестве примера генераторы группы $\mathbb{SU}(3)$:

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.40)$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (10.41)$$

где генераторы являются эрмитовыми матрицами. Они называются матрицами Гелл-Манна. Для этих генераторов структурные константы абсолютно антисимметричны.

Задача 10.2.6. Проверить, что для матриц (10.40) структурные константы абсолютно антисимметричны.

Задача 10.2.7. Чему равен оператор Казимира \hat{Q}_j^2 для матриц (10.40)?

Экспоненциальное представление (10.30) показывает, что элементы группы Ли \mathbb{G} могут быть сведены к ее генераторам. Поэтому и правила перемножения элементов группы Ли \mathbb{G} могут быть выражены через свойства генераторов. Они восстанавливаются из коммутационных соотношений алгебры Ли этой группы (10.31). Таким образом, мы приходим к задаче построения матрицы \hat{Z} , удовлетворяющей соотношению

$$\exp(\hat{X})\exp(\hat{Y}) = \exp(\hat{Z}). \quad (10.42)$$

Здесь матрицы $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ записываются, как линейные комбинации $\hat{X} = x_j \hat{Q}_j$, $\hat{Y} = y_j \hat{Q}_j$, $\hat{Z} = z_j \hat{Q}_j$ генераторов Q_j некоторой алгебры Ли с перестановочными соотношениями (10.31). Хотя решение этой задачи в принципе существует, смотри раздел 10.4.2, его применение к конкретным задачам может вызывать большие технические трудности.

Задача 10.2.8. Найдти из соотношения (10.42) z_i во втором порядке по x_i, y_i .

Задача 10.2.9. Установить, к чему приводит соотношение (10.42) для группы $SU(2)$.

10.3 Представления групп Ли

В предыдущем разделе мы рассматривали матричные представления групп Ли, которые являются минимальными или, как еще говорят, фундаментальными. В то же время группы Ли (алгебры Ли) допускают гораздо более широкий класс представлений, которые могут иметь сколь угодно большой порядок. Более того, даже неприводимые представления групп Ли (алгебр Ли) могут иметь сколь угодно большой порядок. Продемонстрируем сказанное на примере группы вращений трехмерного пространства, алгебра генераторов которой задается правилом коммутации (10.39). Будем рассматривать матричные представления генераторов \hat{J}_i произвольного порядка.

Построим операторы $\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$. Как следствие соотношений (10.39), находим

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_+] = \hat{J}_+, \quad [\hat{J}_3, \hat{J}_-] = -\hat{J}_-. \quad (10.43)$$

Оператор \hat{J}^2 коммутирует с \hat{J}_3 , поэтому можно выбрать базис представления из общих собственных векторов этих операторов с собственными числами λ и m . Обозначим эти собственные векторы символом $|\lambda m\rangle$, где λ и m :

$$\hat{J}^2 |\lambda m\rangle = \lambda |\lambda m\rangle, \quad \hat{J}_3 |\lambda m\rangle = m |\lambda m\rangle. \quad (10.44)$$

Тогда мы находим с помощью соотношения (10.43), что

$$\begin{aligned} \hat{J}_3 \hat{J}_+ |\lambda m\rangle &= (m+1) |\lambda m\rangle, \\ \hat{J}_3 \hat{J}_- |\lambda m\rangle &= (m-1) |\lambda m\rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, действие операторов \hat{J}_+ и \hat{J}_- на $|\lambda m\rangle$ дает вектор, который имеет собственное значение \hat{J}_3 , сдвинутый на единицу по сравнению с $|\lambda m\rangle$. Поэтому естественно называть оператор \hat{J}_+ повышающим, а оператор \hat{J}_- понижающим. Дальнейшее применение повышающего или понижающего оператора позволяет сдвинуть m на произвольное целое число.

В нашем случае \hat{J}^2 — эрмитовский неотрицательно определенный оператор, поэтому λ — вещественное положительное число. Далее, произведения $\hat{J}_+ \hat{J}_-$ и $\hat{J}_- \hat{J}_+$ также эрмитовы и неотрицательно определены,

поскольку \hat{J}_+ и \hat{J}_- эрмитово сопряжены друг другу. С другой стороны

$$\hat{J}_- \hat{J}_+ = \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 - \hat{J}_3, \quad \hat{J}_+ \hat{J}_- = \hat{J}^2 - \hat{J}_3^2 + \hat{J}_3,$$

откуда

$$\begin{aligned} \hat{J}_- \hat{J}_+ |\lambda m\rangle &= (\lambda - m^2 - m) \hat{J}_+ |\lambda m\rangle, \\ \hat{J}_+ \hat{J}_- |\lambda m\rangle &= (\lambda - m^2 + m) \hat{J}_- |\lambda m\rangle. \end{aligned} \quad (10.45)$$

Поэтому числа $\lambda - m^2 \pm m$ не могут стать отрицательными. Отсюда следует, что есть крайние векторы, один из которых $|\lambda m_{\min}\rangle$ обращается в нуль повышающим оператором, а другой $|\lambda m_{\max}\rangle$ — понижающим:

$$\hat{J}_+ |\lambda m_{\max}\rangle = 0, \quad \hat{J}_- |\lambda m_{\min}\rangle = 0.$$

Из соотношения 10.45) находим

$$\lambda - m_{\max}^2 - m_{\max} = 0 = \lambda - m_{\min}^2 + m_{\min}.$$

Решение этой системы можно записать в виде $m_{\max} = j$, $m_{\min} = -j$, $\lambda = j(j+1)$. Поскольку разница $m_{\max} - m_{\min} = 2j$ должна быть целым числом, само j является целым или полуцелым числом.

Таким образом, мы приходим к выводу, что имеются конечные представления алгебры Ли, которая задается коммутационным соотношением (10.39). Каждое из этих представлений характеризуется целым или полуцелым числом j , $\hat{J}^2 = j(j+1)$. Базисом представления являются $2j+1$ векторов $|\lambda m\rangle$, $m = -j, \dots, j$, то есть размерность представления равна $2j+1$. В этом базисе \hat{J}_3 диагонален (его собственное число равно m), а \hat{J}_\pm недиагональны. Найденное представление является неприводимым, поскольку приведенная процедура позволяет любое конечномерное представление привести к найденному виду.

Чтобы разобраться с вопросом, все ли значения j допустимы, мы восстановим с помощью экспоненциальной формулы элемент группы $SO(3)$, который является вращением вокруг оси 3 на угол θ : $\exp(i\theta \hat{J}_3) = \exp(im\theta)$. При целых m получается периодическая по θ с периодом 2π функция, как и должно быть. При полуцелых m период удваивается, поскольку в этом случае $\exp(2\pi m) = -1$. Отсюда следует, что набор матриц четного порядка, отвечающих полуцелым j , не является представлением группы $SO(3)$. Другая формулировка того же факта: неприводимые унитарные представления группы $SO(3)$ всегда имеют нечетную размерность.

Что касается полуцелых j , они соответствуют неприводимым представлениям унитарной группы $SU(2)$. В квантовой механике эти представления описывают частицу с полуцелым спином и называются спинорными. Вспомним про гомоморфизм $SU(2) \rightarrow SO(3)$, который оказался двулистным накрытием. Другими словами, элементу группы $SO(3)$ соответствуют два прообраза группы $SU(2)$ с различными знаками. Это и допускает изменение знака при вращении на угол 2π . Отметим

при этом, что любая физическая наблюдаемая величина не меняется при вращении на угол 2π , поскольку все такие величины являются четными по спинорному представлению.

Представление с $j = 0$ соответствует одномерному базису, который является скаляром (или псевдоскаляром, если он меняет знак при инверсии). Представление с $j = 1/2$ дается матрицами Паули $\sigma_i/2$, причем повышающий и понижающий операторы равны

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Представление с $j = 1$ соответствует матрицам (10.38), преобразованному к базису, где

$$\hat{J}_3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10.46)$$

Такое представление называют векторным, поскольку эквивалентно представлению, которое порождается вращениями вектора A_i : $A_i \rightarrow O_{ik}A_k$.

Задача 10.3.1. Найти векторы, которые являются собственными для оператора \hat{J}_3 .

Задача 10.3.2. Найти в базисе, соответствующем (10.46), повышающий и понижающий операторы. Проверить выполнение соотношений (10.43).

В дальнейшем вместо обозначения $|\lambda m\rangle$ мы будем использовать общепринятое обозначение $|jm\rangle$. Соотношения (10.45) с учетом $\hat{J}_-^\dagger = \hat{J}_+$ позволяют найти с точностью до фазы матричные элементы \hat{J}_+ и \hat{J}_- . Подставляя $\lambda = j(j+1)$, находим

$$\begin{aligned} |\langle j(m-1)|\hat{J}_-|jm\rangle| &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \\ |\langle j(m+1)|\hat{J}_+|jm\rangle| &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}. \end{aligned}$$

Раскладывая на множители, получаем выражение

$$\begin{aligned} |\langle j(m-1)|\hat{J}_-|jm\rangle| &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}, \\ |\langle j(m+1)|\hat{J}_+|jm\rangle| &= \sqrt{(j-m)(j+m+1)}, \end{aligned}$$

обычно приводимое в справочниках.

Поскольку угловой момент $\hat{\mathbf{L}} = -i\mathbf{r} \times \nabla$ подчиняется тому же правилу коммутации (10.39), представления $\hat{\mathbf{L}}$ могут быть классифицированы, как и выше, в рамках числа l , которое определяет собственное значение $\hat{L}^2 = l(l+1)$. Разумеется, значения l являются целыми. Базисом представления с собственными числами l, m являются известные угловые функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$:

$$\hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}, \quad \hat{L}_z Y_{lm} = mY_{lm}.$$

Отметим, что (в трех измерениях) Лапласиан некоторой функции f может быть записан в виде

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r f) - \frac{1}{r^2} \hat{L}^2 f,$$

где r — радиус. Именно это представление позволяет свести уравнение Шрёдингера в центральном поле к задаче с одной переменной r и центробежным потенциалом $\propto l(l+1)/r^2$.

Базисами представлений l, m могут служить неприводимые тензоры, которые являются обобщением понятия вектор. Примерами тензора второго ранга являются квадрупольный момент или тензор инерции. Тензор второго может быть представлен, как объект с двумя индексами: A_{ik} . При вращениях пространства он преобразуется, как

$$A_{ik} \rightarrow O_{ij} O_{km} A_{jm}.$$

Можно сказать, что тензор порождает представление группы вращений, которое является прямым произведением векторных представлений. Но такое представление является приводимым. Чтобы порождаемое тензором представление было неприводимым, он должен обладать двумя свойствами: быть симметричным и бесследовым. В этом случае тензор имеет пять независимых компонент и порождаемое им представление эквивалентно представлению с $l = 2$.

Задача 10.3.3. Найти, какие комбинации компонент неприводимого тензора второго ранга являются собственными функциями генератора вращений \hat{J}_3 с собственными числами $m = -2, -1, 0, 1, 2$.

Представленная конструкция допускает обобщение на тензор произвольного ранга l , такой тензор имеет l индексов $A_{ikp\dots}$ и преобразуется по прямому произведению группы вращений:

$$A_{ikp\dots} \rightarrow O_{ij} O_{ks} O_{pn} \dots A_{jsn\dots}.$$

Неприводимый тензор $A_{ikp\dots}$ должен быть симметричным по всем парам индексов и быть бесследовым, то есть свертка по любой паре индексов должна быть равна нулю. Число независимых компонент неприводимого тензора ранга l равно $2l+1$, что как раз равно размерности представления с орбитальным числом l . Поэтому такой тензор является базисом представления с орбитальным числом l .

Задача 10.3.4. Доказать, что число независимых компонент симметричного бесследового тензора ранга l равно $2l+1$.

Мы установили на двух разных языках набор неприводимых представлений группы $\mathbb{SO}(3)$. Каждое из них характеризуется своим целым числом l . Любое приводимое представление группы $\mathbb{SO}(3)$ можно разложить в прямую сумму неприводимых представлений. Это означает, что матрица \hat{D} неприводимого представления в

результате унитарного преобразования $\hat{D} \rightarrow \hat{U}^\dagger \hat{D} \hat{U}$ (\hat{U} – унитарная матрица) может быть сведена к блочно-диагональной форме, каждый из блоков которой преобразуется по своему неприводимому представлению. Очевидно, в данном приводимом представлении может содержаться целое число блоков, преобразующихся по неприводимому представлению с числом l .

Разложение приводимого представления группы в прямую сумму неприводимых представлений является стандартной задачей теории групп. Как и для конечных групп, разложение на неприводимые представления можно осуществить при помощи характеров. Продемонстрируем сказанное на примере группы $\mathbb{SO}(3)$.

Найдем характеры неприводимых представлений группы $\mathbb{SO}(3)$. Пусть $\hat{D}^{(l)}$ – матрица представления группы $\mathbb{SO}(3)$ ранга l . Рассмотрим вращение вокруг третьей оси на угол α и вычислим его характер. Проще всего это сделать в базисе $|lm\rangle$, где матрица $\hat{D}^{(l)}$ диагональна:

$$\hat{D}^{(l)}(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{il\alpha} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i(l-1)\alpha} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-il\alpha} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем характер этого представления, который сводится к сумме экспонент (геометрической прогрессии)

$$\chi^{(l)}(\alpha) = \sum_{k=-l}^l e^{ik\alpha} = \frac{\sin[(l+1/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)}. \quad (10.47)$$

Поскольку характер не зависит от выбора базиса, выражение (10.47) справедливо для произвольного неприводимого представления.

Задача 10.3.5. Убедиться, что выражение (10.47) дает характер представления, которое порождается вращением вектора.

Соотношение ортогональности характеров в непрерывной группе в качестве усреднения вместо суммирования по элементам группы содержит интегрирование:

$$\langle \chi^{(l)} \chi^{(k)} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^{(l)}(\alpha) \chi^{(k)}(\alpha) = \delta_{lk}. \quad (10.48)$$

Задача 10.3.6. Проверить выполнение соотношения (10.48).

Из ортогональности характеров можно вывести разложение приводимого представления группы $\mathbb{SO}(3)$. А именно, если известен характер представления $\chi(\alpha)$, то количество содержащихся в нем неприводимых представлений ранга l равно

$$K_l = \langle \chi^* \chi^{(l)} \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{2\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^*(\alpha) \chi^{(l)}(\alpha). \quad (10.49)$$

В силу действительности $\chi^{(l)}(\alpha)$ и целого значения K_l знак комплексного сопряжения в (10.49) можно опустить.

Задача 10.3.7. Какие неприводимые представления содержатся в представлении, базисом которого является произвольный тензор второго ранга A_{ik} ?

Рассмотрим теперь прямое произведение двух неприводимых представлений группы $\mathbb{SO}(3)$. Оно не является неприводимым и может быть разложено в прямую сумму неприводимых представлений группы $\mathbb{SO}(3)$. Такое разложение называется разложением Клебша-Гордана. Найдем представления, которые содержатся в прямом произведении представлений $\hat{D}^{(k)}$ и $\hat{D}^{(n)}$. Характер прямого произведения матриц равен произведению характеров этих матриц. Поэтому характер прямого произведения равен

$$\chi(\alpha) = \frac{\sin[(k+1/2)\alpha] \sin[(n+1/2)\alpha]}{\sin^2(\alpha/2)}. \quad (10.50)$$

Подставляя это значение в (10.49), находим

$$K_l = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\pi} \sin[(k+1/2)\alpha] \sin[(n+1/2)\alpha] \chi^{(l)}(\alpha). \quad (10.51)$$

Анализируя эти интегралы, можно показать, что они отличны от нуля при $|k-n| \leq l \leq k+n$, при этом все $K_l = 1$. Таким образом, все неприводимые представления входят по одному разу.

Задача 10.3.8. Показать, что интегралы (10.51) равны единице при $|k-n| \leq l \leq k+n$ и нулю вне этого интервала.

Приведенный анализ группы $\mathbb{SO}(3)$ может быть в значительной мере обобщен и на другие группы Ли. Рассмотрим группу $\mathbb{SU}(2)$, фундаментальное представление которой (то есть представление с наименьшей размерностью) представляется матрицами 2×2 . Возможна разная параметризация этого фундаментального представления, например экспоненциальное (10.36) или спинорное (10.37). Неприводимые представления группы $\mathbb{SU}(2)$ классифицируются по числу j , которое дает собственное значение $j(j+1)$ оператора Казимира на данном представлении. При целых j представления группы изоморфны представлениям группы $\mathbb{SO}(3)$, а при полуцелом j представления характерны для группы $\mathbb{SU}(2)$.

Для неприводимых представлений группы $\mathbb{SU}(2)$ с числом j можно получить характеры представлений, получающиеся для элементов, которые получаются при вращении на угол α вокруг третьей оси. Они имеют такой же вид (10.47),

$$\chi^{(j)}(\alpha) = \sum_{k=-j}^j e^{ik\alpha} = \frac{\sin[(j+1/2)\alpha]}{\sin(\alpha/2)}, \quad (10.52)$$

но теперь угловое число j может быть полуцелым.

Задача 10.3.9. Проверить выполнение (10.52) для фундаментального представления, заданного экспоненциальной (10.36) или спинорной (10.37) параметризацией.

Имеет место свойство ортогональности, аналогичное (10.48), но только интегрирование теперь надо вести до 4π :

$$\langle \chi^{(l)} \chi^{(k)} \rangle = \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^{(l)}(\alpha) \chi^{(k)}(\alpha) = \delta_{lk}. \quad (10.53)$$

Задача 10.3.10. Проверить выполнение соотношения (10.53).

Как и для группы $\mathbb{SO}(3)$, произвольное представление группы $\mathbb{SU}(2)$ можно разложить на прямую сумму неприводимых представлений. Чтобы понять, какие неприводимые представления содержатся в данном, можно использовать условие ортогональности (10.53), которое дает для числа неприводимых представлений с угловым числом j :

$$K_j = \langle \chi^* \chi^{(j)} \rangle = \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} (1 - \cos \alpha) \chi^*(\alpha) \chi^{(j)}(\alpha). \quad (10.54)$$

аналогичное (10.49). Оно приводит к тому же правилу для разложения Клебша-Гордана прямого произведения представлений с угловыми числами k и n . Это прямое произведение содержит по одному неприводимому представлению с числами $|k - n| \leq j \leq k + n$.

В частности, прямое произведение двух фундаментальных представлений группы $\mathbb{SU}(2)$ содержит в себе одно представление с $j = 0$ (скалярное представление) и одно представление с $j = 1$ (векторное представление). Эта ситуация может быть выражена на языке кватернионов, смотри раздел 10.4.1.

Несколько слов о группе $\mathbb{SU}(3)$. Ее фундаментальное представление определяется матрицами Гелл-Манна 3×3 , смотри (10.41). Таким образом, базисом фундаментального представления является столбец из трех комплексных чисел. В квантовой хромодинамике такой базис соответствует кваркам. Глюонам же в хромодинамике соответствует базис присоединенного представления, которое задается матрицами 8×8 , чьи компоненты прямо определяются структурными константами. Здесь 8 — число генераторов группы $\mathbb{SU}(3)$. Соответственно, базис этого представления является столбцом из 8 чисел.

Помимо столбца, базисом фундаментального представления $\mathbb{SU}(3)$ является строка. Поэтому следует ввести ковариантные и контравариантные спиноры ψ_α и ψ^α (индекс α пробегает от одного до трех), преобразование которых при действии элемента группы $\mathbb{SU}(3)$ задается правилами

$$\psi_\alpha \rightarrow U_\alpha^\beta \psi_\beta, \quad \psi^\alpha \rightarrow U^{\dagger\alpha}_\beta \psi^\beta. \quad (10.55)$$

Здесь U — матрица фундаментального представления $\mathbb{SU}(3)$.

Далее, можно ввести спинор $\psi_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta\ldots}$, который является базисом прямого произведения фундаментальных представлений. Число верхних и нижних индексов спинора произвольны. Преобразование спинора при действии элемента группы $\mathbb{SU}(3)$ задается правилом

$$\psi_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta\ldots} \rightarrow U_\alpha^\mu U_\beta^\nu U^{\dagger\gamma}_\rho U^{\dagger\delta}_\sigma \ldots \psi_{\mu\nu\ldots}^{\rho\sigma\ldots} \quad (10.56)$$

Очевидно, что такое действие элемента группы на спинор ψ является гомоморфизмом $\mathbb{SU}(3)$.

Есть несколько инвариантных относительно преобразования (10.56) объектов: это символ Кронекера δ_α^β и абсолютно антисимметричные объекты $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$. Это означает, что из $\psi_{\alpha\beta\ldots}^{\gamma\delta\ldots}$ можно получать новые базисы, сворачивая по паре индексов, а также опуская или поднимая индексы сверткой с $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$.

Отсюда следует, что базисами неприводимых представлений $\mathbb{SU}(3)$ являются спиноры, которые симметричны по всем верхним и по всем нижним индексам, а также бесследовые. Из такого спинора указанными операциями невозможно выделить базис меньшей размерности. Неприводимый спинор характеризуется двумя целыми числами p, q , число нижних и число верхних индексов, число же его независимых компонент равно $(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$.

Задача 10.3.11. Показать, что число независимых компонент неприводимого спинора группы $\mathbb{SU}(3)$ равно $(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$.

Число независимых компонент $(p+1)(q+1)(p+q+2)/2$ определяет размерность соответствующего неприводимого представления. Например, для $p, q = 1, 0$ или $p, q = 0, 1$ размерность равна трем, это фундаментальное представление. Для $p, q = 1, 1$ размерность равна 8, соответствующее представление изоморфно присоединенному.

Вообще говоря, к группе $\mathbb{SU}(2)$ относятся те же соотношения, что и к $\mathbb{SU}(3)$: спиноры $\mathbb{SU}(2)$ имеют ковариантные и контравариантные индексы. Однако в группе $\mathbb{SU}(2)$ инвариантными являются $\epsilon_{\alpha\beta}$ и $\epsilon^{\alpha\beta}$, при помощи которых у спинора можно опустить все индексы. Такое представление и подразумевалось.

10.4 Справочные материалы к главе

10.4.1 Матрицы Паули

Матрицами Паули σ_i , $i = 1, 2, 3$, называют матрицы 2×2

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (10.57)$$

Матрицы Паули являются бесследовыми и эрмитовыми. Для них справедливы соотношения $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 1$ (квадраты матриц Паули равны единичной матрице) и

$$\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2. \quad (10.58)$$

Приведенные соотношения можно переписать в компактном виде

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (10.59)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Здесь δ_{ij} – символ Кронекера, компоненты которого равны 1, если $i = j$, и ноль в остальных позициях, а ϵ_{ijk} – абсолютно антисимметричный тензор, компоненты которого меняют свой знак при перестановке любой пары индексов. Из определения следует, что отличны от нуля только те компоненты, у которых все три индекса различны. Тензор ϵ_{ijk} нормирован условием $\epsilon_{123} = 1$.

Из выражения (10.59) следует соотношение для коммутаторов

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma_k. \quad (10.60)$$

Таким образом, матрицы Паули реализуют представление генераторов некоторой группы, в данном случае группы $SU(2)$. Именно поэтому они являются эрмитовыми и бесследовыми.

Матрицы Паули вместе с единичной матрицей составляют полный набор, по которому можно разложить произвольную матрицу 2×2 : $a = a_0 + a_i \sigma_i$. Если матрица a является эрмитовой, то все коэффициенты a_0, a_i являются действительными. Однозначное соответствие матрицы a и четырех чисел a_0, a_i позволяет ввести на пространстве a_0, a_i произведение. А именно, рассмотрим произведение матриц $a = a_0 + a_i \sigma_i$ и $b = b_0 + b_i \sigma_i$. В соответствии с (10.59) это произведение записывается в виде

$$ab = (a_0 b_0 + a_i b_i) + (b_0 a_k + a_0 b_k + i\epsilon_{ijk} a_i b_j) \sigma_k. \quad (10.61)$$

Коэффициенты при единичной матрице и матрицам Паули в (10.61) можно рассматривать, как компоненты произведения (a_0, a_i) и (b_0, b_i) . Такая алгебра называется кватернионной.

10.4.2 Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа

Формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа дает принципиальный ответ на вопрос о том, как построить коэффициенты экспоненциального разложения элемента группы Ли, который является произведением двух других элементов группы Ли, по коэффициентам их экспоненциальных разложений. На матричном языке речь идет о соотношении

$$\exp(\hat{X}) \exp(\hat{Y}) = \exp(\hat{Z}). \quad (10.62)$$

Здесь матрицы $\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}$ записываются, как линейные комбинации $\hat{X} = x_j \hat{Q}_j$, $\hat{Y} = y_j \hat{Q}_j$, $\hat{Z} = z_j \hat{Q}_j$ генераторов Q_j некоторой алгебры Ли с перестановочными соотношениями

$$[\hat{Q}_j, \hat{Q}_l] = t_{jlk} \hat{Q}_k. \quad (10.63)$$

Задача состоит в выражении из соотношения (10.62) коэффициентов разложения z_i через x_i и y_i .

Введем матрицы размером $\dim \mathbb{G} \times \dim \mathbb{G}$ с матричными элементами

$$\mathcal{X}_{ij} = t_{jni} x_n, \quad (10.64)$$

построенные по коэффициентам разложения \mathbf{x} оператора \hat{X} по генераторам Q_j . Выражение (10.64) представляет собой разложение по образующим матрицам Q_n с компонентами t_{jni} , которые подчиняются тем же коммутационным правилам (10.63):

$$[Q_j, Q_l] = t_{jlk} Q_k. \quad (10.65)$$

Это свойство легко проверить, используя тождество Якоби

$$t_{ijn} t_{nkm} + t_{jkn} t_{nim} + t_{kin} t_{njm} = 0. \quad (10.66)$$

Введем еще одну вспомогательную конструкцию. Определим для операторов (матриц) \hat{X}_0 и $\hat{S} = s_j \hat{Q}_j$ зависящий от ‘времени’ t оператор $\hat{X}(t) = x_j(t) Q_j$:

$$\hat{X}(t) = \exp(t\hat{S}) \hat{X}_0 \exp(-t\hat{S}), \quad (10.67)$$

который соответствует переходу к Гайзенберговскому представлению в квантовой теории поля. Очевидно, $\hat{X}(t)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d}{dt} \hat{X} = [\hat{S}, \hat{X}]. \quad (10.68)$$

Коммутатор в правой части (10.68) записывается в виде

$$[\hat{S}, \hat{X}] = x_l [\hat{S}, \hat{Q}_l] = s_j t_{ljm} x_l Q_m, \quad (10.69)$$

где t_{jlk} – структурные константы, заданные соотношением (10.63). Таким образом, из уравнения (10.68) следует

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathcal{S}\mathbf{x}, \quad (10.70)$$

где мы ввели ‘матричное’ обозначение, матрица \mathcal{S} определяется набором s_j и структурными константами t_{ljm} в соответствии с (10.64). Уравнение (10.70) имеет очевидное решение

$$\mathbf{x} = \exp(t\mathcal{S})\mathbf{x}_0, \quad (10.71)$$

которое и определяет эволюцию \hat{X} .

Возвращаясь к исходной формуле (10.62), введем в нее ‘время’ t :

$$\exp(\hat{X}) \exp(t\hat{Y}) = \exp[\hat{Z}(t)]. \quad (10.72)$$

Нас интересует значение оператора \hat{Z} при $t = 1$. Найдем дифференциальное уравнение, которому подчиняется $\hat{Z}(t)$. Для этого продифференцируем уравнение (10.72) по t , что дает

$$\frac{d \exp[\hat{Z}(t)]}{dt} = \exp(\hat{Z}) \hat{Y}, \quad (10.73)$$

то есть дифференциальное уравнение на $\exp(\hat{Z})$.

Однако дифференцирование экспоненты $\exp[\hat{Z}(t)]$ при некоммутирующих $\hat{Z}(t)$ и $d\hat{Z}(t)/dt$ требует некоторых дополнительных построений. Прежде всего заметим, что экспонента $\exp[\hat{Z}(t)]$ представима в виде произведения инфинитезимальных операторов:

$$\exp(\hat{Z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \hat{Z}/n\right]^n.$$

Дифференцирование правой части этого выражения по правилу Лейбница приводит к интегральной сумме, превращающейся в пределе $n \rightarrow \infty$ в интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{d \exp(\hat{Z})}{dt} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \left[1 + \hat{Z}/n\right]^{n-1-m} \\ \frac{d\hat{Z}}{dt} \left(1 + \hat{Z}/n\right)^m &= \int_0^1 d\tau \exp[(1-\tau)\hat{Z}] \frac{d\hat{Z}}{dt} \exp[\tau\hat{Z}], \end{aligned}$$

где $\tau = m/n$. Теперь мы используем для возникшей здесь комбинации $\exp(-\tau\hat{Z})(d\hat{Z}/dt)\exp(\tau\hat{Z})$ представление (10.71), что дает

$$\begin{aligned} \frac{d \exp(\hat{Z})}{dt} &= \exp(\hat{Z}) \int_0^1 d\tau \exp(\tau\mathcal{Z}) \frac{dz}{dt} \hat{Q} \\ &= \exp(\hat{Z}) \frac{\exp(\mathcal{Z}) - 1}{\mathcal{Z}} \frac{dz}{dt} \hat{Q}, \end{aligned} \quad (10.74)$$

где матрица \mathcal{Z} строится по числам \mathbf{z} также, как и матрица \mathcal{S} по \mathbf{s} в (10.70).

Подставляя выражение (10.74) в уравнение (10.73), находим

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}[\exp(\mathcal{Z})] \mathbf{y}, \quad (10.75)$$

$$\mathbf{g}(y) = \frac{y \ln y}{y - 1}. \quad (10.76)$$

Из равенства (10.72) и того факта, что матрицы \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{Z} имеют те же коммутационные свойства, что и \hat{X} , \hat{Y} , \hat{Z} , следует

$$\exp(\mathcal{Z}) = \exp(\mathcal{X}) \exp(t\mathcal{Y}). \quad (10.77)$$

Уравнение (10.75) интегрируется с учетом начального условия $\hat{Z} = \hat{X}$ при $t = 0$ и мы приходим к окончательному выражению, которое получается при $t = 1$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \int_0^1 dt \mathbf{g}(e^{\mathcal{X}} e^{t\mathcal{Y}}) \mathbf{y}. \quad (10.78)$$

Это и есть формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа. Она эффективно работает, если удастся явно найти выражение для аргумента функции \mathbf{g} (10.76).

Заметим, что для того, чтобы использовать формулу Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа (10.78), достаточно, чтобы операторы \hat{X} и \hat{Y} принадлежали некоторой замкнутой относительно операции коммутации алгебре,

не обязательно являющейся алгеброй Ли. Именно в таком качестве формула Бейкера-Кэмпбелла-Хаусдорфа часто используется в задачах квантовой механики и статистической физики для распутывания различных операторных экспонент.

Задача 10.4.1. Выразить произведение $\exp(a)\exp(a^\dagger)$ в виде экспоненты некоторого оператора, где a, a^\dagger — операторы уничтожения и рождения бозе-частиц.

Задача 10.4.2. Найти $\exp(\hat{Z})$ в выражении (10.62), если \hat{X} и \hat{Y} образуют алгебру лестничного типа:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = \lambda \hat{Y}.$$

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Адамар Ж., Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа, Наука, Москва, 1978.
- [2] Аксенов А.П., Дифференциальные уравнения, Юрайт, Москва, 2016.
- [3] Араманович И. Г., Левин В. И., Уравнения математической физики (2-е изд.), Наука, Москва, 1969.
- [4] Бабич В.М., Булдырев В.С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн, Наука, Москва, 1972.
- [5] Бабич В.М., Кирпичникова Н.Я., Метод пограничного слоя в задачах дифракции, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1974.
- [6] Байков В., Жибер А., Уравнения математической физики, Юрайт, Москва, 2017.
- [7] Бакельман И.Я., Геометрические методы решения эллиптических уравнений, Наука, Москва, 1965.
- [8] Г. И. Баренблатт, Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика, Гидрометеиздат, Ленинград, 1982.
- [9] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СПб, 2001.
- [10] С. Бергман, Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. Мир, Москва, 1964.
- [11] Бернштейн С.П., Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа, Изд. ХГУ, Харьков, 1956.
- [12] Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, Мир, Москва, 1966.
- [13] В. Босс, Уравнения математической физики, УРСС, Москва, 2016.
- [14] Брело М., О топологиях и границах в теории потенциала, Мир, Москва, 1974.
- [15] Брело М., Основы классической теории потенциала, Мир, Москва, 1964.
- [16] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н., Сборник задач по математической физике (3-е изд.), Наука, Москва, 1979.
- [17] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ИЛ, Москва, 1949.
- [18] Векуа И.Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948.
- [19] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, Наука, Москва, 1981.
- [20] Вольперт А.И., Худяев С.И., Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики, Наука, Москва, 1975.
- [21] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е., Пространства основных и обобщенных функций, Физматлит, Москва, 1958.
- [22] Годунов С.К., Уравнения математической физики (2-е изд.), Наука, Москва, 1979.
- [23] Годунов С.К., Золотарева Е.В., Сборник задач по уравнениям математической физики, Наука, Новосибирск, 1974.
- [24] Гординг Л., Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, Москва, 1961.
- [25] Градштейн И. С. и Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, гл. Специальные функции, Физматгиз, Москва, 1962.
- [26] Гюнтер Н.М., Интегрирование уравнений в частных производных первого порядка, ОНТИ, Ленинград-Москва, 1934.
- [27] Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, ГИТТЛ, Москва, 1953.
- [28] Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З., Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения, Наука, Москва, 1967.
- [29] Джеффрис Г., Свирлс Б., Методы математической физики, Мир, Москва, 1969-1970.
- [30] Егоров Ю.В., Шубин М.А., Комеч А.И., Дифференциальные уравнения с частными производными, Изд. ВИНТИ, Москва, 1988.
- [31] Зайцев Г.А., Алгебраические проблемы математической и теоретической физики, Наука, Москва, 1974.
- [32] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса, Наука, Москва, 1988.

- [33] Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П., Теория солитонов, Наука, Москва, 1980.
- [34] Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д., Элементы математической физики. Среда из невзаимодействующих частиц, Наука, Москва, 1973.
- [35] Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, Москва, 1950.
- [36] Ибрагимов Н.Х., Алгебра группового анализа, Знание, Москва, 1989.
- [37] Ибрагимов Н.Х., Группы преобразований в математической физике, Наука, Москва, 1983.
- [38] Йон Ф., Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, Москва, 1958.
- [39] Калоджеро Ф., Дигасперис А., Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений, Мир, Москва, 1985.
- [40] Камке Э., Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка, Наука, Москва, 1966.
- [41] Карпман В.И., Нелинейные волны в диспергирующих средах, Наука, Москва, 1973.
- [42] Кирхгоф Г., Механика. Лекции по математической физике, Изд. АН СССР, Москва, 1962.
- [43] Коллатц Л., Задачи на собственные значения (с техническими приложениями), Наука, Москва, 1968.
- [44] Колоколов И. В. и др., Задачи по математическим методам физики, УРСС, Москва, 2009.
- [45] Корнев Б. Г., Введение в теорию бесселевых функций, Наука, Москва, 1971.
- [46] Коул Дж., Методы возмущений в прикладной математике, Мир, Москва, 1972.
- [47] Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М., Уравнения в частных производных математической физики, Изд. Высшая школа, Москва, 1970.
- [48] Кудряшов Н.А., Методы нелинейной математической физики, Интеллект, Долгопрудный, 2010.
- [49] Курант Р., Уравнения с частными производными, Мир, Москва, 1964.
- [50] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики. Том 1, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1933.
- [51] Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики. Том 2, ГТТИ, Москва-Ленинград, 1945.
- [52] Лаврентьев М.А., Вариационный метод в краевых задачах для систем уравнений эллиптического типа, Изд. АН СССР, Москва, 1962.
- [53] Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Лань, СПб, 2002.
- [54] Ладыженская О.А., Краевые задачи математической физики, Наука, Москва, 1973.
- [55] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа (2-е изд.), Наука, Москва, 1973.
- [56] Лакс П., Филлипс Р., Теория рассеяния, Мир, Москва, 1971.
- [57] Ландис Е.М., Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов, Наука, Москва, 1971.
- [58] Лионс Ж.-Л., Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, Мир, Москва, 1972.
- [59] Лионс Ж.-Л., Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных, Мир, Москва, 1972.
- [60] Маделунг Э., Математический аппарат физики: Справочное руководство, Наука, Москва, 1968.
- [61] Марченко В.А., Хруслов Е.Я., Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей, Наукова думка, Киев, 1974.
- [62] Маслов В.П., Асимптотические методы и теория возмущений, Наука, Москва, 1988.
- [63] Маслов В.П., Федорюк М.В., Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики, Наука, Москва, 1976.
- [64] Мизохата С., Теория уравнений с частными производными, Мир, Москва, 1977.
- [65] Миллер У., Симметрия и разделение переменных, Мир, Москва, 1981.
- [66] Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, Москва, 1957.
- [67] Михайлов В.П., Дифференциальные уравнения в частных производных, Наука, Москва, 1976.
- [68] Михлин С.Г., Курс математической физики, Наука, Москва, 1968.
- [69] Михлин С.Г., Линейные уравнения в частных производных, Высшая школа, Москва, 1977.
- [70] Михлин С.Г. (ред.), Линейные уравнения математической физики, Наука, Москва, 1964.

- [71] Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики. Том 1, ИЛ, Москва, 1958.
- [72] Морс Ф.М., Фешбах Г., Методы теоретической физики, Том 2, ИЛ, Москва, 1960.
- [73] Мухелишвили Н.И., Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике (3-е изд.), Наука, Москва, 1968.
- [74] Мэтьюз Дж., Уокер Р., Математические методы физики, Атомиздат, Москва, 1972.
- [75] Нагумо М., Лекции по современной теории уравнений в частных производных, Мир, Москва, 1967.
- [76] Наймарк М.А., Теория представлений групп, УРСС, Москва, 2010.
- [77] Найфэ А., Методы возмущений, Мир, Москва, 1976.
- [78] Никифоров А. Ф., Уваров В. Б., Специальные функции математической физики, Интеллект, Долгопрудный, 2007.
- [79] Нобл Б., Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными, ИЛ, Москва, 1962.
- [80] Оганесян Л.А., Руховец Л.А., Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, Изд. АН АрмССР, Ереван, 1979.
- [81] Олвер Ф., Асимптотика и специальные функции, Наука, Москва, 1990.
- [82] Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Шамаев А.С., Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред, Изд. МГУ, Москва, 1990.
- [83] Паламодов В.П., Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, Наука, Москва, 1967.
- [84] Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными (3-е изд.), Наука, Москва, 1961.
- [85] Пикулин В.В., Похожаев С.И., Практический курс по уравнениям математической физики, Изд. МЦ-НМО, Москва, 2004.
- [86] Расулов М.Л., Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений, Наука, Москва, 1964.
- [87] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н., Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике (2-е изд.), Наука, Москва, 1978.
- [88] Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики, Мир, Москва, 1977-1982.
- [89] Рихтмайер Р., Принципы современной математической физики, Мир, Москва, 1982-1984.
- [90] Смирнов В. И., Курс высшей математики, Лань, СПб, 2008.
- [91] Смирнов М.М., Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, Наука, Москва, 1964.
- [92] Смирнов М.М., Задачи по уравнениям математической физики (6-е изд.), Наука, Москва, 1973.
- [93] Смирнов М.М., Уравнения смешанного типа, Наука, Москва, 1970.
- [94] Соболев С.Л., Уравнения математической физики (4-е изд.), Наука, Москва, 1966.
- [95] Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики (5-е изд.), Наука, Москва, 1977.
- [96] Трев Ж., Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, Мир, Москва, 1965.
- [97] Федорюк М. Ф., Асимптотика: Интегралы и ряды, Наука, Москва, 1987.
- [98] Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д., Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, Наукова думка, Киев, 1966.
- [99] Фушич В.И., Никитин А.Г., Симметрия уравнений квантовой механики, Наука, Москва, 1990.
- [100] Хёрмандер Л., К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, Москва, 1959.
- [101] Ховратович Д.В., Уравнения математической физики, Изд. МГУ, Москва, 2003.
- [102] Цлаф Л.Я., Вариационное исчисление и интегральные уравнения, Наука, Москва, 1966.
- [103] Шапиро Д. А., Конспект лекций по математическим методам физики, части 1,2, Изд. НГУ, Новосибирск, 2004.
- [104] Шишмарев И.А., Введение в теорию эллиптических уравнений, Изд. МГУ, Москва, 1979.
- [105] Юрко В.А., Введение в теорию обратных спектральных задач, Физматлит, Москва, 2006.