Выполнил:
Карибджанов Матвей
Группа БФЗ211
Тема:
Поле излучения диполя

Содержание

1. Постановка задачи

Рассеяние электромагнитной волны на линйном осциляторе, эту модель часто применяют для описания рассения на молекулах воздуха, с последующим выводом Реллевского рассеяния.

Формульно зависимость между неподвижным ядром и оцилирующим элемнтом в квадратичном поле (квадратичное поле часто являтся результатом приближения), с "силой трения"силой линейно зафисящей от скрости элемента во избежании резонанса и бесконечного увелечнения амплитуды колебаний. В итоге получим:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega^2 r = f(r) \tag{1.1}$$

Где $f(r)$– некоторая вынуждающая сила.

В задаче в результате ускоренного движения диполь излучает электро-магнитные волны, котрые мы ищем.

2. Вывод базовых формул

2.1. Монохроматические волны

В первую очередь надо вспомнить что для ЭМ (электромагнитный) волн ур. Максвелла преобразуются в:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \quad divH = 0, \\ \mathrm{rot}H &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \quad divE = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

По определению:

$$H = \mathrm{rot}A;\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi. \tag{2.2}$$

Воспользуемся нормировеой Лоренца $\partial_i A^i = 0$, 2.2 перейдет в:

$$H = \mathrm{rot}A;\ E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Учитывая запаздывание потенциала, в следствии чего $A\left(t - \frac{x}{c}\right)$:

$$\begin{gathered} E = -\frac{1}{c}A'; \\ H = [\nabla, A] = e_{ijk}\partial_j A^k = e_{ijk}\frac{\partial\left(t - x^m/c\right)}{\partial x^j}\frac{\partial A^k}{\partial\left(t - x^m/c\right)} = -\frac{1}{c}e_{ijk}\delta_{jm}\partial_m A^k = -\frac{1}{c}\left[n, A'\right], \end{gathered} \tag{2.4}$$

где A' обозначает дифф. по $\left(t - \frac{x}{c}\right)$. В итоге мы пришли к уже известному результату, что в монохроматических волнах:

$$H = [n, E]. \tag{2.5}$$

2.2. Запаздывающие потенциалы

В дали от заряда потенциал равен:

$$d\varphi = \frac{de\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \tag{2.6}$$

Где R - растоояния от зарядо до точки где измеряем значение потенциала. Интегрирования по зарядам дет нам:

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho\left(r', t - \frac{R}{c}\right)dV' \tag{2.7}$$

В R выражается как $R = r - r'$, $r'-$ вектор от начала координат до заряда, $r-$ век. от н.к. до точки измерения. Выражение для векторного потенциала плучатся аналогично:

$$A = \frac{1}{c}\int \frac{j\left(r', t - R/c\right)}{R}dV' \tag{2.8}$$

2.3. Приближение для запаздывающих потенциалов

Будем считаь что мы измеряем поля на расстониях $r \gg r'$, Такое приближение более чем обоснованно при рассмотрении диполя (из его определения). И тогда $R = |r' - r| \approx r - (n, r')$, в данном приближении 2.7 и 2.8 упростяться:

$$\varphi = \frac{1}{r}\int \rho\left(r', t - \frac{r - (n, r')}{c}\right)dV' \tag{2.9}$$

Может показаться что r взнаменателе протеворечит тому, что написано выше но при разложении можно заметить что получится $\frac{1}{r - (n, r')} \approx \frac{1}{r} + \cancelto{0}{\frac{(n, r')}{r^2}} + \ldots$. Аналогичным образом получим:

$$A = \frac{1}{cr}\int j\left(r', t - \frac{r - (n, r')}{c}\right)dV', \tag{2.10}$$

обозначив $t' = t - \dfrac{r - (n, r')}{c}$, $r = R$, а также переходя к дискретному виду получим:

$$A = \frac{1}{cR}\sum j\left(r', t'\right) = \frac{1}{cR}\sum ev. \tag{2.11}$$

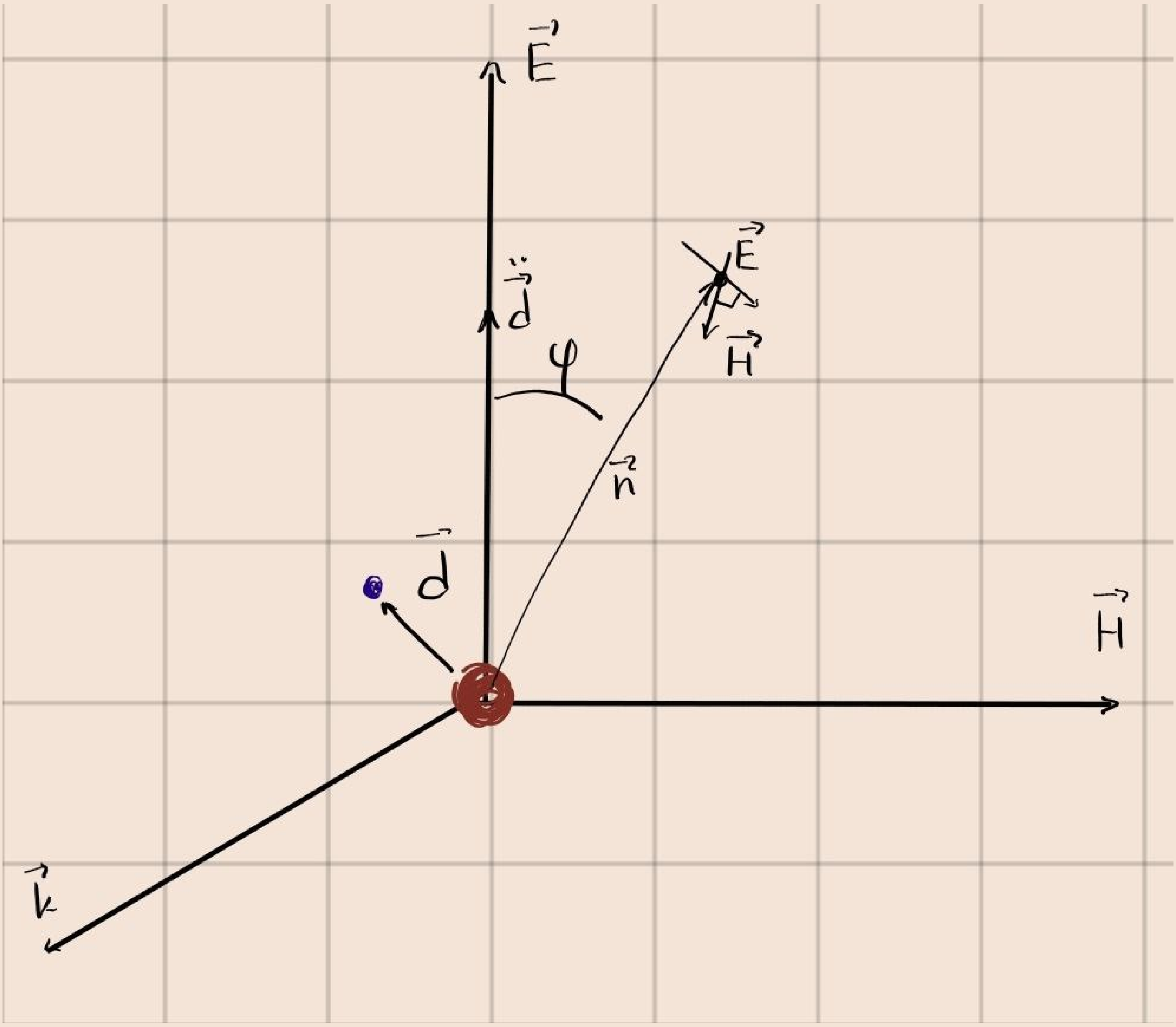
3. Общее решение для диполя

Теперь зная что:

$$A = \frac{1}{cR}\sum ev = \frac{1}{cR}\dot{d}. \tag{3.1}$$

Так же не забываем про 2.4 и $E = [H, n]$, получим:

$$\begin{gathered} H = \frac{1}{c^2 R}\left[\ddot{d}, n\right], \\ E = \frac{1}{c^2 R}\left[\left[\ddot{d}, n\right], n\right]. \end{gathered} \tag{3.2}$$



3.1. Вектор пойнтинга

Учитывая ортогональность векторов H и E, также то что в монохроматической волне $|H| = |E|$, то вектор Пойнтинга

$$S = \frac{cH^2}{4\pi} n. \tag{3.3}$$

От сюда получим

$$d\mathfrak{I} = \frac{c|H|^2}{4\pi}do \tag{3.4}$$

Подставим H из уравнения 3.2:

$$d\mathfrak{I} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{c^2R}\left[\ddot{d}, n\right]^2 do = \frac{|\ddot{d}|^2\sin^2\varphi}{4\pi c^3R^2}do \tag{3.5}$$

3.2. Частотное пространство

Часто удобно работаь в спектральном разложении поэтому посмотрим на зависимомти в фурье образа. Напрямую из переобразования формул 3.2 получим:

$$\begin{aligned} H_\omega &= i\left[k, A_\omega\right], \\ E_\omega &= \frac{ic}{\omega}\left[k, \left[k, A_\omega\right]\right], \end{aligned} \tag{3.6}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{\mathbb{R}} f^2dt = \int_{\mathbb{R}} |f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi} = 2\int_{\mathbb{R}_+} |f_\omega|^2\frac{d\omega}{2\pi} \tag{3.7}$$

Заметив что от в 3.4 зависит от t только посредстаом H получим:

$$d\mathfrak{I} = \frac{c}{2\pi}|H_w|^2R^2do \tag{3.8}$$

4. Решение для линейноного осцилятора

4.1. Приближения и уточнение формулировки

Во первых вспомнм что:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.1}$$

В не релятивистком случае уравненнеие сильно упрощается:

$$p \approx mv, \tag{4.2}$$

поэтому предлагаю решать в приближении $v/c \ll 1$. Тогда известное нам уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c}[v, H], \tag{4.3}$$

выродится в:

$$m\frac{dv}{dt} = eE. \tag{4.4}$$

От сюда следует что можно пренебречь влиянием магнитного поля на диполь и рассматривать только электрическое поле.

4.2. Диф. уравнение

Запишем наше уравнение:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega_0^2 r = eE(t). \tag{4.5}$$

Как уже ясно я предлагаю использовать преобразование фурье для решения:

$$-\omega^2 r - i\omega k r + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}E_\omega. \tag{4.6}$$

Вспомним что в излучение диполя основной вклад дает компонента $\ddot{d}$, А так как так как центральный заряд не подвижен и закреплен в начале СО то $d = er \implies \ddot{d} = e\ddot{r}$. Тогда нам нужно искать:

$$r = \frac{eE_\omega}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{4.7}$$

$$\mathfrak{F}\left[\ddot{d}\right](\omega) = -e\omega^2 r = -\frac{e\omega^2 E_\omega}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{4.8}$$

Получим распределение полей в общем виде, подставив $\ddot{d}$ в 3.2:

$$H = \frac{e}{mc^2 R}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 E_\omega}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\}\frac{d\omega}{2\pi}, n\right], \tag{4.9}$$

$$E = [H, n]. \tag{4.10}$$

Естественно что поле зависит от висит от времени, и угла измерения, в качестве параметров выступают характеристики диполя и падющей волны.

Если предположить что на диполь падает монохроматическая волна то

$$H = \frac{e}{mc^2 R}\left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 E_0 \cancel{2\pi}\delta(w_v + w)\exp(-ikx)}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\}\frac{d\omega}{\cancel{2\pi}}, n\right] \tag{4.11}$$

$$= \frac{e[E_0, n]}{mc^2 R}\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 \delta(w_v - w)\exp(-ikx)}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\} d\omega = \frac{e[E_0, n]}{mc^2 R}\frac{\omega_v^2 \exp(-iw_v t - ikx)}{(\omega_0^2 - i\omega_v k - \omega_v^2)} \tag{4.12}$$

Мы получили что при падении монохроматической волны на диполь, он испускает в ответ монохроматическую волну но с другой амплитудой при этом зависящей от угла, угол появлятся из векторно произведения $[E_0, n]$

4.3. Распределение интенсивности

Пользуясь формулой 3.8 получим:

$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[\ddot{d}, n\right]^2 do = \frac{1}{4\pi c^3}\ddot{d}_\omega^2 \sin^2\varphi do. \tag{4.13}$$

Подставляем решение 4.8:

$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3}\left|\frac{eE_\omega}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}\right|^2 \sin^2\varphi do. \tag{4.14}$$

Проинтегрируем по всем углам, использовав соотношение $do = 2\pi \sin\varphi d\varphi$:

$$\mathfrak{I} = \frac{2}{3c^3}\ddot{d}_\omega^2. \tag{4.15}$$

Для падающей монохроматической волны получим:

$$d\mathfrak{I} = \frac{\left(eE_0 \sin\theta\right)^2}{4\pi c^3\left(mc^2 R\right)^2}\frac{\omega_v^4}{\left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)^2 + \omega_v^2 k^2} do \tag{4.16}$$

Обозначим $\xi = \dfrac{\left(eE_0 \sin\theta\right)^2}{4\pi c^3\left(mc^2 R\right)^2}$

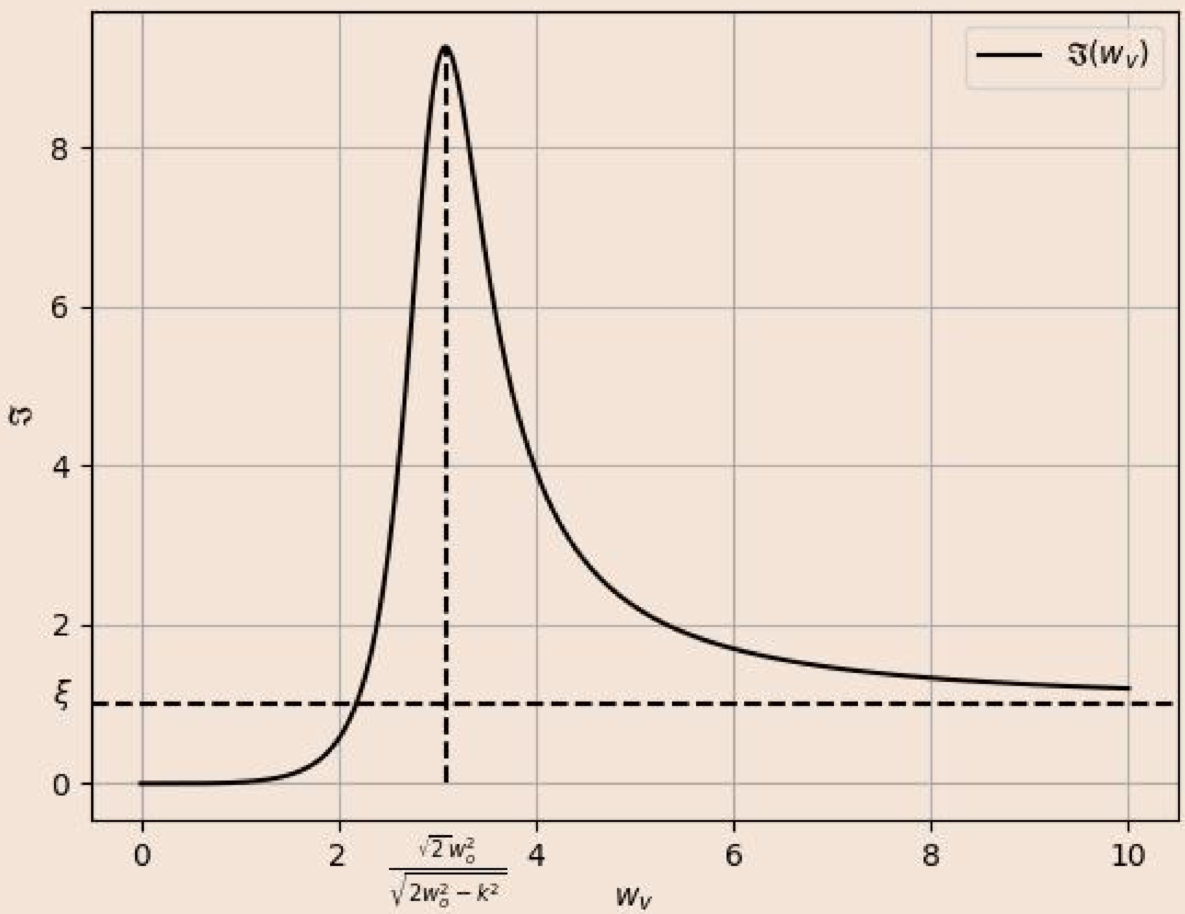
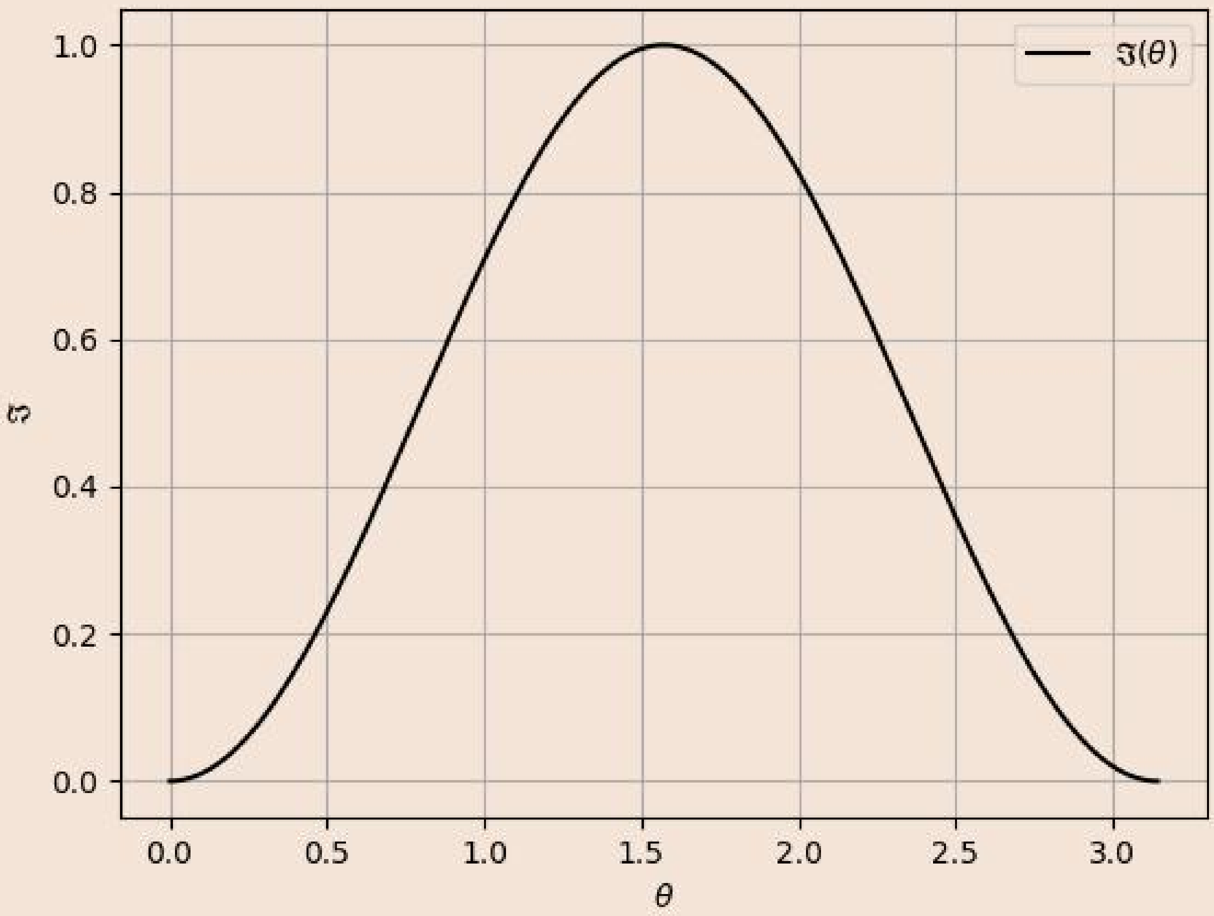


Рис. 1. Еденицами измерения по оси y выступает ξ

Как мы видим на грфике прослеживается явный максимум в зависимоти $\mathfrak{I}(w_v)$ а то значит, что налетающая волнп попала в резоннас с диполем, такой случай называют Реллеевским рассеянием.


$\Im(\theta)$
$\Im$
θ
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0

5. Вращающийся диполь

Заметим что задача обладает аксиальной симметрией, поэтому в полярных координата

$$x = r\cos\omega t \tag{5.1}$$

$$y = r\sin\omega t \tag{5.2}$$

$$d = e\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} r\cos\omega t \\ r\sin\omega t \end{pmatrix} \Longrightarrow \ddot{d} = \begin{pmatrix} -r\omega\sin\omega t \\ r\omega\cos\omega t \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Аналогично подставим в 3.5, получим:

$$\Im = \frac{\omega^2 r^2 e^2}{4\pi c^3}\sin^2\varphi do \tag{5.4}$$

Поляризацию определим как

6. Вывод

Как мы видим для знания поля нужна информация о параметрах диполя. Например для велечины поля по формуле 4.9. Для решении не использовались вектора Герца, было очень удобно пользоваться формализмом векоторного потенциала.