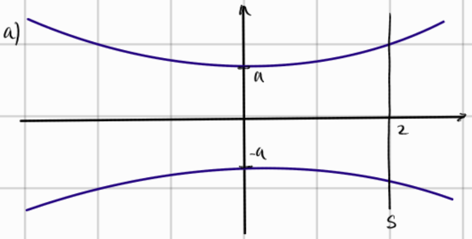
Задание 1

а)



$$u(r,z) = \frac{G}{z-ib}\exp\left[\frac{ikr^2}{2(z-ib)} + ikz + i\varphi\right]$$

$$|u(r,z)|^2 = \frac{G^2}{z^2+b^2}\exp\left[-\frac{r^2kb}{(z^2+b^2)}\right]$$

Тогда полная энергия через плоскость

$$\int_S |u(r,z)|^2\, r\, d\varphi dr = 2\pi\frac{G^2}{z^2+b^2}\int_0^r r\exp\left[-\frac{r^2kb}{(z^2+b^2)}\right]dr = 2\pi\frac{G^2}{\cancel{z^2+b^2}}\,\frac{\cancel{z^2+b^2}}{2kb} = \frac{\pi G^2}{kb}$$

независит от z => во всех сечениях одна энергия

Для доказ

ищем реш. в таком виде

если решать по получим это

$$(c^2\Delta - \partial_t^2)\varphi = 0 \Rightarrow (\Delta + k^2)\varphi = 0 \qquad \varphi = u(x,y,z)\exp(ikz) \Rightarrow \Delta\varphi = (\Delta u + 2ik\partial_z - k^2u)\exp(ikz)$$

равны т.к.

подставляю

$$\exp(ikz)(\Delta + 2ik\partial_z)u + \cancel{k^2u\exp(ikz)} - \cancel{k^2\varphi} = 0 \Rightarrow \exp(ikz)(\Delta + 2ik\partial_z)u = 0 \Rightarrow (\Delta + 2ik\partial_z)u = 0$$ тут говорят пусть $\partial_z^2 u \ll 2ik\partial_z z$ =>

$$= (\partial_x^2 + \partial_y^2 + 2ik\partial_z)u = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\partial_r r\partial_r + \cancel{\frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2}^{\,0} + 2ik\partial_z\right)\frac{G}{z-ib}\exp\left[\frac{ikr^2}{2(z-ib)}\right]$$ – тут можно привести поло выч. но в итоге получим 0 =>

$$\Rightarrow \varphi = \frac{G}{z-ib}\exp\left[\frac{ikr^2}{2(z-ib)}\right]\exp[ikz]$$ – верно (exp с фазой упустил, но она как const – не влияет)

*во избежании путаницы, у меня волн. функ., фаза и угол в цилиндрич. коор. это одна буква φ

б) $f = 0{,}05$ м $\lambda = 532\cdot10^{-9}$ м $a = 20\cdot10^{-6}$ м => $b_1 = ka^2 \Rightarrow b_1 = \frac{\pi}{665}$

$$b_2 = \frac{Ab_1 + B}{Cb_1 + D} \qquad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -1/f & 1-d/f \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{b_1 + d}{-1/f\, b_1 + 1 - \frac{d}{f}} = \frac{b_1 + d}{-20b_1 + 1 - 20d} = \frac{\frac{\pi}{665} + d}{-\frac{20\pi}{665} + 1 - 20d}$$

$d = 0$

$b_2 = \frac{\pi}{665 - 20\pi}$ => $a_2 = 21\cdot10^{-6}$ м

$d_2 \approx 0$ м

$d = 1$

$b_2 = -\frac{665+\pi}{12635 + 20\pi}$ => $a_2 = 68\cdot10^{-6}$ м

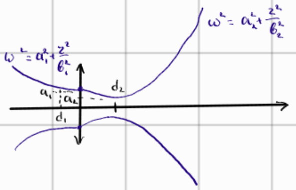
$d_2 = 11{,}13$ м

$d = -1$

$b_2 = \frac{665-\pi}{5(4\pi - 2793)}$ => $a_2 = 63\cdot10^{-6}$ м

$d_2 = 10{,}08$ м

Расстояние до новой перетяжки находим из уравнения непрерывности



$$a_1^2 + \frac{d^2}{b_1^2} = a_2^2 + \frac{z^2}{b_2^2} \Rightarrow$$

$$z = \left[(a_1^2 - a_2^2) + \frac{d^2}{b_1^2}\right]^{1/2} b_2$$

Задание 2

$Q = \frac{U^2 t}{R}$ – закон Джоуля-Ленца

$Q = \sigma T^4$

$\frac{U^2 t}{R} = \sigma T^4 \Rightarrow U = \sqrt{\frac{\sigma R}{t}}\, T^2$

$\frac{U_1}{U_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{4}$