1. Две сонаправленные плоские когерентные монохроматические электромагнитные волны складываются. Одна имеет амплитуду E0 и плоскую поляризацию, а вторая — амплитуду E0 и круговую поляризацию. Какие значения может принимать поляризация суммарной волны?

① Лин. поляризация

$$|E_1\rangle = E_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t)$$

② Круговая

$$|E_2\rangle = E_0\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t+i\varphi)$$

$$|E_\Sigma\rangle = |E_1\rangle + \hat{M}(\theta)|E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}|E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix}\cos\theta - i\sin\theta\\ \sin\theta + i\cos\theta\end{pmatrix}|E_2\rangle = |E_1\rangle + \begin{pmatrix}\exp(-i\theta)\\ i\exp(-i\theta)\end{pmatrix}|E_2\rangle =$$

$$= E_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t) + \frac{E_0}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t+i\varphi-i\theta) = \boxed{\text{Получил что сдвиг и поворот можно задать одной переменной} \;\Big|\; \text{Замена } \iota=\varphi-\theta} = E_0\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t) + E_0\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t+i\iota) =$$

$$= E_0\begin{pmatrix}1+\exp(i\iota)\\ i\exp(i\iota)\end{pmatrix}\exp(ikz-i\omega t)$$

Терь предлагаю найти длинну $|E_\Sigma\rangle$

$$\mathcal{L}^2(\xi,\iota) = E_0^2\Big(Re\{(1+\exp(i\iota))\exp(i\xi)\},\ Re\{i\exp(i\iota)\exp(i\xi)\}\Big)\begin{pmatrix}Re\{(1+\exp(i\iota))\exp(i\xi)\}\\ Re\{i\exp(i\iota)\exp(i\xi)\}\end{pmatrix} = E_0^2\big(\cos\xi+\cos(\xi+\iota),\ \sin(\xi+\iota)\big)\begin{pmatrix}\cos\xi+\cos(\xi+\iota)\\ \sin(\xi+\iota)\end{pmatrix} + E_0^2\left[\cos(\xi+\iota)+\cos\xi\right]^2 + E_0^2\sin^2(\xi+\iota)$$

$$\mathcal{L}(\xi,\iota) = E_0\sqrt{\left[\cos(\xi+\iota)+\cos(\xi)\right]^2+\sin^2(\xi+\iota)}$$

Здесь ξ отвечает за за координату в пространстве-времени то есть $\xi = kz-\omega t$, а ι это параметр отвечающий за относ расположение волн, за все $\mathcal{L}: \mathbb{R}_\xi \to [l_{min}, l_{max}]$, очев. что l_{min} отвечает за меньшую полуось а l_{max} за большую. Тогда остается найти $\min[\mathcal{L}(\xi)] = l_{min}$ $\max[\mathcal{L}(\xi)] = l_{max}$ при ι как параметре а после:

$\varepsilon = \dfrac{l_{min}}{l_{max}}$ – степень поляриз.

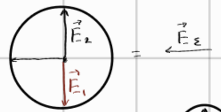
В моем случае:

$$\varepsilon(\iota) = \frac{l_{min}(\iota)}{l_{max}(\iota)}$$

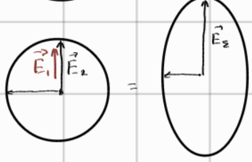
То есть надо найти

$\min[\varepsilon(\iota)]$, $\max[\varepsilon(\iota)]$

$\iota_{min} = \pi n \quad \iota_{max} = 0$



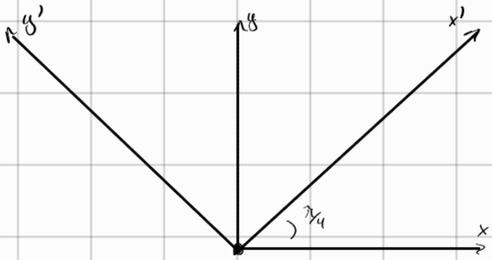
$\min[\varepsilon(\iota)] = 0$ что соответствует линейной поляриз.



$\max[\varepsilon(\iota)] = 1/2$ что соответствует элептической поляриз.

Расчеты в Desmos

2. Аналогично предыдущей задаче складываются две волны эллиптической поляризации (обе степень поляризации 1/2), амплитудами E0 и 2E0. Длинныая полуось первого эллипса направлена вдоль Ox, а второго эллипсова - под углом +45 градусов к оси Ox. В каких пределах может меняться амплитуда, направление и степень эллиптичности суммарной волны?



$$E_x/E_y = 1/2,\quad E_y = E_0 \Rightarrow |E(r)\rangle = \frac{E_0}{2}\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}\exp(ikr \pm i\omega t + i\varphi)$$

$$E_x/E_y = 1/2,\quad E_y = 2E_0 \Rightarrow |E(r')\rangle = E_0\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}\exp(ikr' - i\omega t)$$

$$|E_2(r)\rangle = \hat{M}(\pi/4)\,|E(r')\rangle = E_0\begin{pmatrix}\cos\pi/4 & -\sin\pi/4\\ \sin\pi/4 & \cos\pi/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix}\exp(ikr - i\omega t) = E_0\begin{pmatrix}\frac{1-2i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1+2i}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\exp(ikr - i\omega t)$$

Теория реляц. баз данных
Мейер

$$|E_\Sigma\rangle = |E_1\rangle + |E_2\rangle = E_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\exp(\pm i\omega t + i\varphi) + \frac{1-2i}{\sqrt{2}}\exp(i\omega t)\\ i\exp(\pm i\omega t + i\varphi) + \frac{1+2i}{\sqrt{2}}\exp(i\omega t)\end{pmatrix}\exp(ikr)$$

Повторяю ход с $\mathcal{L}(t,\varphi,r)$

Действительная часть E_x

$$\tfrac{1}{2}\left(\cos(\pm t+\varphi)\cos(r) - \sin(\pm t+\varphi)\sin(r)\right) + \frac{\cos(t)\cos(r) - \sin(t)\sin(r) + 2\sin(t)\cos(r) + 2\cos(t)\sin(r)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cos(\pm t+\varphi+r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(t+r) + 2\sin(t+r)\right] = E_x$$

Действительная часть E_y

$$-\sin(\pm t+\varphi)\cos(r) - \sin(\pm t+\varphi)\cos(r) + \frac{\cos(t)\cos(r) - \sin(r)\sin(r) - 2\sin(t)\cos(r) - 2\sin(r)\cos(t)}{\sqrt{2}} = -\sin(\pm t+\varphi+r) + 2^{-1/2}\left[\cos(t+r) + 2\sin(t+r)\right] = E_y$$

$$\mathcal{L}(t,r,\varphi) = \left\{\left(-\sin(\pm t+\varphi-r) + 2^{-1/2}\left[\cos(t+r) + 2\sin(t+r)\right]\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\cos(\pm t+\varphi-r) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(t+r) + 2\sin(t+r)\right]\right)^2\right\}^{1/2} =$$

Для вращающихся в разные стороны

$\max[\mathcal{L}] = 0.354$

$\min[\mathcal{L}] = 0.065$

Для сонаправленного вращения

$\max[\mathcal{L}] = 0.748$

$\min[\mathcal{L}] = 0.128$

Теперь предлагаю найти возможные направления.

① Если вращ. сонаправлены то, можем объеденить переменные времени и координаты

$$\vec{E}(\xi,\varphi) = E_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\cos(\xi+\varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\xi + 2\sin\xi\right]\\ -\sin(\xi+\varphi) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\xi - 2\sin\xi\right]\end{pmatrix}$$

$$|E_\Sigma\rangle = |E_1\rangle + |E_2\rangle = E_0\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\exp(\pm i\omega t + i\varphi) + \frac{1-2i}{\sqrt{2}}\exp(i\omega t)\\ i\exp(\pm i\omega t + i\varphi) + \frac{1+2i}{\sqrt{2}}\exp(i\omega t)\end{pmatrix}\exp(ikr)$$

Представим в виде $|E_\Sigma\rangle = |b_1\rangle + i|b_2\rangle$ такие что $|b_1\rangle, |b_2\rangle \in \mathbb{R}^2$, $\langle b_1|b_2\rangle = 0$, в таком случае $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ будут большой и малой полуосью. Тогда:

$$A = |E_x| = \frac{1}{2}\sqrt{11 + 2\sqrt{2}\cos\delta + 4\sqrt{2}\sin\delta}$$

$$B = |E_y| = \frac{1}{4}\sqrt{56 + 32\sqrt{2}\cos\delta + 16\sqrt{2}\sin\delta}$$

$$\langle E_\Sigma|E_\Sigma\rangle = b_1^2 + b_2^2 = A^2 + B^2$$

$$\left[\vec{E}_\Sigma, \vec{E}_\Sigma^*\right] = -2i\left[\vec{b}_1, \vec{b}_2\right] = AB\cos\left(\arg\left(E_y/E_x\right)\right)$$

Докажем $\mathrm{Re}\left\{\langle E_\Sigma|b_2\rangle\langle b_1|E_\Sigma\rangle\right\} = 0$

$$\langle E_\Sigma|b_2\rangle\langle E_\Sigma|b_1\rangle = \left(\langle ib_2|b_2\rangle + \cancel{\langle b_1|b_2\rangle}^{\,0}\right)\left(\cancel{\langle b_1|b_2\rangle}^{\,0} + \langle b_1|b_1\rangle\right) = \overset{\mathrm{Im}}{i}\,\overbrace{\langle b_1|b_1\rangle\langle b_2|b_2\rangle}^{\mathrm{Re}} = \mathrm{Im}$$

От сюда можно найти:

$$\mathrm{tg}(2\theta) = \frac{2AB\cos\left[\arg\left(E_y/E_x\right)\right]}{A^2+B^2} \quad \text{I}$$

① Для сонаправленных вращ.

$$|E_{\Sigma}\rangle = \begin{pmatrix} 1/2\, e + \frac{1-2i}{\sqrt{2}}\exp(-i\varphi) \\ i + \frac{1+2i}{\sqrt{2}}\exp(-i\varphi) \end{pmatrix} \exp(ikr - i\omega t + i\varphi\ ) = \boxed{\iota = kr - \omega t + \varphi}$$

Подставлю выражение I в вольфрам получу график

1. Коэффициент преломления для систем без магнитных моментов можно считать равным корню из диэлектрической проницаемости. Диэлектрическая проницаемость плазмы дается формулой

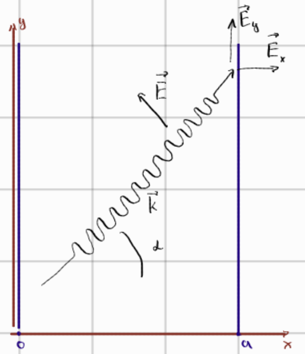
$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Каковы фазовая и групповая скорости электромагнитной волны в плазме?
Каковы фазовая и групповая скорости электромагнитной волны, распространяющейся в пространстве между двумя параллельными металлическими плоскостями с межплоскостным расстоянием a?

1. $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$

$$v_f = \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} \Rightarrow ck = \omega n = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{c^2k^2 + \omega_p^2} \Rightarrow \begin{matrix} v_f = \frac{1}{k}\sqrt{c^2k^2+\omega_p^2} \\ v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2k^2}{\sqrt{c^2k^2+\omega_p^2}} \end{matrix}$$

2.



$$|E\rangle = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{pmatrix} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t)$$

$$|E(x=0)\rangle = \mathrm{Re}\left\{-\cos\alpha \exp(-i\omega t)\right\} = 0 \Rightarrow \cos(\omega t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) \quad n \in \mathbb{N}$$

$$|E(x=a)\rangle = \mathrm{Re}\left\{-\cos\alpha \exp(ik_x a + ik_y a \tan\alpha - i\omega t)\right\} = 0 \Rightarrow \cos\left(k_x a + k_y a \tan\alpha - \frac{\pi}{2} - \pi n\right) = 0 \Rightarrow$$

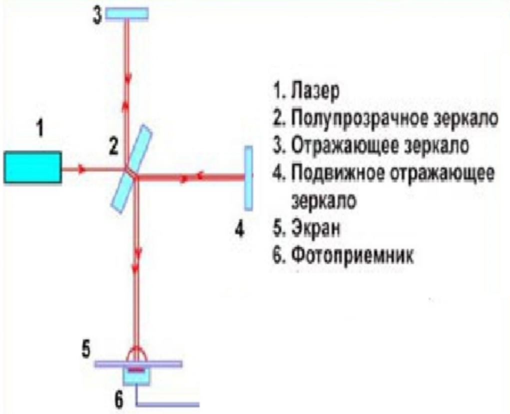
$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} k_x a + k_y a \tan\alpha = \pi + \pi n \\ k_x = \cos\alpha\, k \\ k_y = \sin\alpha\, k \end{matrix}\right| \Rightarrow ka\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right) = \pi + \pi n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{\pi + \pi n}{a\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$

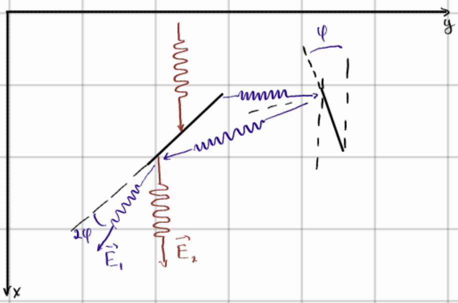
$$\Rightarrow v_f = \frac{\omega}{k_y} = \frac{\omega}{k\sin\alpha} = \frac{c}{\left(\frac{\pi+\pi n}{a\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)}\right)\sin\alpha} = \frac{ca(1+\tan^2\alpha)}{(\pi+\pi n)\tan\alpha}$$

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_y} = \frac{\partial ck}{\partial k_y} = \frac{\partial c \sin\alpha\, k_y}{\partial k_y} = c\sin\alpha$$

2. Интерферометр Майкельсона используется в студенческой лаборатории для измерения малых смещений подвижного отражающего зеркала.



Интерферометр хорошо настроен, так что в плоскости детектора наблюдаются не полосы, а однородная освещенность.
Для оцифровки детектора используется плата Arduino с 10 бит АЦП, при этом усиление настроено так, что полная амплитуда сигнала соответствует полной шкале оцифровщика.
Считая, что точность измерения определяется только дискретностью АЦП определить предельную чувствительность данного прибора по измерению малых смещений подвижного зеркала.



$$|E_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(ikx - i\omega t)$$