

Содержание

1	Постановка задач	1
1.1	Линейный осцилятор	1
1.2	Линейный осцилятор	1
1.3	Вращающийся диполь	1
2	Вывод базовых формул	2
2.1	Монохроматические волны	2
2.2	Запаздывающие потенциалы	2
2.3	Приближение для запаздывающих потенциалов	2
3	Общее решение для диполя	4
3.1	Вектор пойнтинга	4
3.2	Частотное пространство	5
4	Решение для линейного осцилятора	6
4.1	Приближения и уточнение формулировки	6
4.2	Диф. уравнение	6
4.3	Распределение интенсивности	7
5	Вращающийся диполь	9
6	Вывод	10

1. Постановка задач

1.1. Линейный осцилятор

1.2. Линейный осцилятор

Рассеяние электромагнитной волны на линейном осциляторе, эту модель часто применяют для описания рассеяния на молекулах воздуха, с последующим выводом Реллевого рассеяния.

Формульно зависимость между неподвижным ядром и осцилирующим элементом в квадратичном поле (квадратичное поле часто является результатом приближения), с "силой трения" силой линейно зависящей от скорости элемента во избежание резонанса и бесконечного увеличения амплитуды колебаний. В итоге получим:

$$m\ddot{r} + m\dot{r} + m\omega^2 r = f(r) \quad (1.1)$$

Где $f(r)$ – некоторая вынуждающая сила.

В задаче в результате ускоренного движения диполь излучает электро-магнитные волны, которые мы ищем.

1.3. Вращающийся диполь

Условия задачи просты, вокруг зряженного центра с постоянной угловой скоростью вращается заряд равный по модулю.

2. Вывод базовых формул

2.1. Монохроматические волны

В первую очередь надо вспомнить что для ЭМ (электромагнитный) волн ур. Максвелла преобразуются в:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} & \operatorname{div} H &= 0, \\ \operatorname{rot} H &= \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} & \operatorname{div} E &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

По определению:

$$H = \operatorname{rot} A; \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi. \quad (2.2)$$

Воспользуемся нормировкой Лоренца $\partial_i A^i = 0$, 2.2 перейдет в:

$$H = \operatorname{rot} A; \quad E = -\frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Учитывая запаздывание потенциала, в следствии чего $A\left(t - \frac{x}{c}\right)$:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{c} A'; \\ H &= [\nabla, A] = e_{ijk} \partial_j A^k = e_{ijk} \frac{\partial (t - x^m/c)}{\partial x^j} \frac{\partial A^k}{\partial (t - x^m/c)} = -\frac{1}{c} e_{ijk} \delta_{jm} \partial_m A^k = -\frac{1}{c} [n, A'], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A' обозначает дифф. по $\left(t - \frac{x}{c}\right)$. В итоге мы пришли к уже известному результату, что в монохроматических волнах:

$$H = [n, E]. \quad (2.5)$$

2.2. Запаздывающие потенциалы

В дали от заряда потенциал равен:

$$d\varphi = \frac{de \left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} \quad (2.6)$$

Где R - расстояние от заряда до точки где измеряем значение потенциала. Интегрирования по зарядам дет нам:

$$\varphi = \int \frac{1}{R} \rho \left(r', t - \frac{R}{c}\right) dV' \quad (2.7)$$

В R выражается как $R = r - r'$, r' - вектор от начала координат до заряда, r - век. от н.к. до точки измерения. Выражение для векторного потенциала плучатся аналогично:

$$A = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t - R/c)}{R} dV' \quad (2.8)$$

2.3. Приближение для запаздывающих потенциалов

Будем считать что мы измеряем поля на расстояниях $r \gg r'$, Такое приближение более чем обоснованно при рассмотрении диполя (из его определения). И тогда $R = |r' - r| \approx r - (n, r')$, в данном приближении 2.7 и 2.8 упростятся:

$$\varphi = \frac{1}{r} \int \rho \left(r', t - \frac{r - (n, r')}{c}\right) dV' \quad (2.9)$$

Может показаться что r в знаменателе протеворечит тому, что написано выше но при разложении можно заметить

что получится $\frac{1}{r - (n, r')} \approx \frac{1}{r} + \frac{(n, r')}{r^2} + \dots$ Аналогичным образом получим:

$$A = \frac{1}{cr} \int j \left(r', t - \frac{r - (n, r')}{c}\right) dV', \quad (2.10)$$

обозначив $t' = t - \frac{r - (n, r')}{c}$, $r = R$, а также переходя к дискретному виду получим:

$$A = \frac{1}{cR} \sum j(r', t') = \frac{1}{cR} \sum ev. \quad (2.11)$$

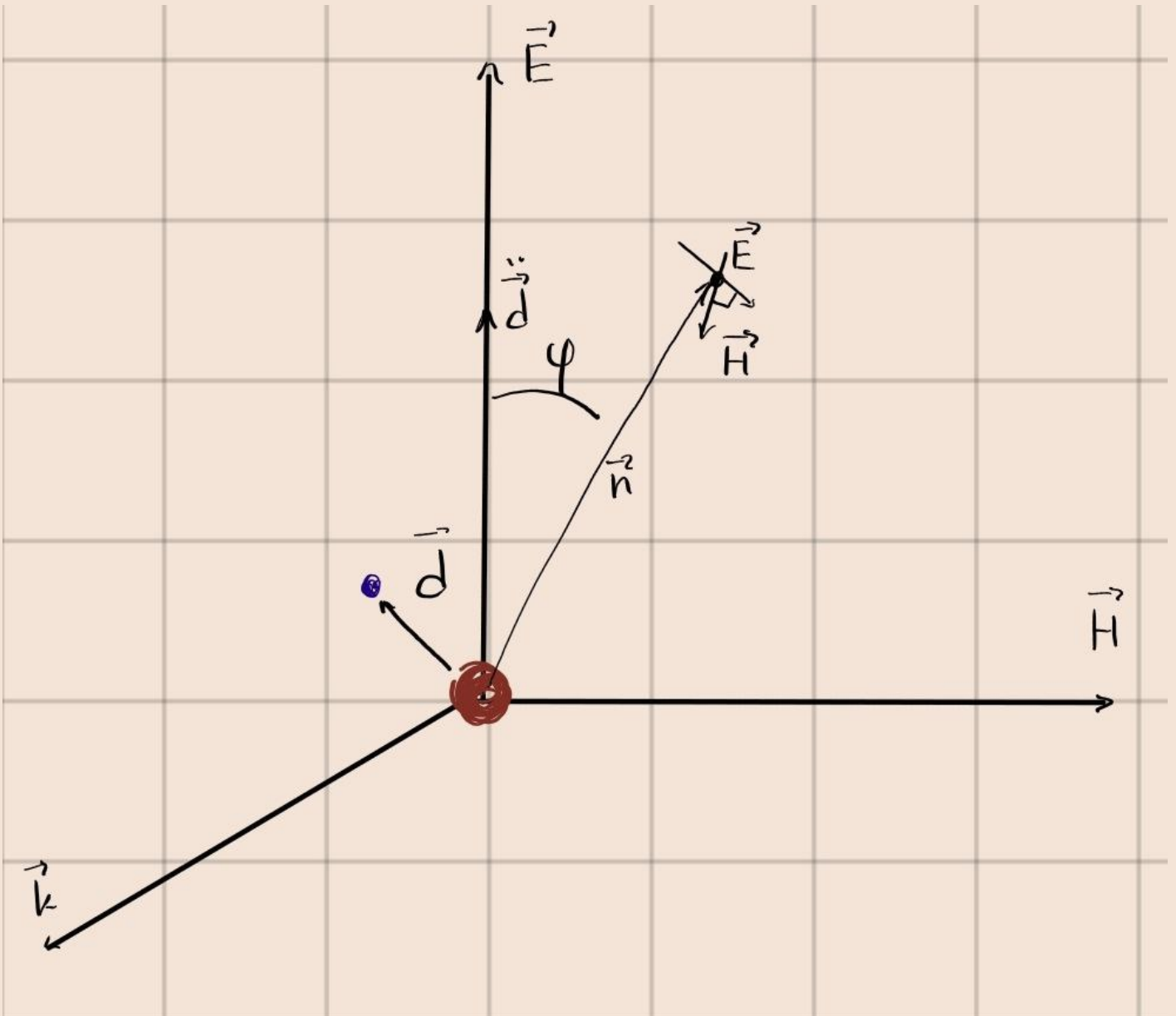
3. Общее решение для диполя

Теперь зная что:

$$A = \frac{1}{cR} \sum ev = \frac{1}{cR} \dot{d}. \quad (3.1)$$

Так же не забываем про 2.4 и $E = [H, n]$, получим:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{c^2 R} [\ddot{d}, n], \\ E &= \frac{1}{c^2 R} [[\ddot{d}, n], n]. \end{aligned} \quad (3.2)$$



3.1. Вектор пойнтинга

Учитывая ортогональность векторов H и E , также то что в монохроматической волне $|H| = |E|$, то вектор Пойнтинга

$$S = \frac{cH^2}{4\pi} n. \quad (3.3)$$

От сюда получим

$$d\mathfrak{I} = \frac{c|H|^2}{4\pi} do \quad (3.4)$$

Подставим H из уравнения 3.2:

$$d\mathfrak{I} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{c^2 R} [\ddot{d}, n]^2 do = \frac{|\ddot{d}|^2 \sin^2 \varphi}{4\pi c^3 R^2} do \quad (3.5)$$

3.2. Частотное пространство

Часто удобно работаь в спектральном разложении поэтому посмотрим на зависимости в фурье образа. Напрямую из преобразования формул 3.2 получим:

$$\begin{aligned} H_\omega &= i[k, A_\omega], \\ E_\omega &= \frac{ic}{\omega} [k, [k, A_\omega]], \end{aligned} \quad (3.6)$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_{\mathbb{R}_+} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.7)$$

Заметив что от t в 3.4 зависит только посредстаом H получим:

$$d\mathfrak{I} = \frac{c}{2\pi} |H_\omega|^2 R^2 do \quad (3.8)$$

4. Решение для линейного осциллятора

4.1. Приближения и уточнение формулировки

Во первых вспомним что:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.1)$$

В не релятивистском случае уравнение сильно упрощается:

$$p \approx mv, \quad (4.2)$$

поэтому предлагаю решать в приближении $v/c \ll 1$. Тогда известное нам уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = eE + \frac{e}{c}[v, H], \quad (4.3)$$

выродится в:

$$m \frac{dv}{dt} = eE. \quad (4.4)$$

От сюда следует что можно пренебречь влиянием магнитного поля на диполь и рассматривать только электрическое поле.

4.2. Диф. уравнение

Запишем наше уравнение:

$$m\ddot{r} + mkr + m\omega_0^2 r = eE(t). \quad (4.5)$$

Как уже ясно я предлагаю использовать преобразование фурье для решения:

$$-\omega^2 r - i\omega k r + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E_\omega. \quad (4.6)$$

Вспомним что в излучение диполя основной вклад дает компонента \ddot{d} , А так как как центральный заряд не подвижен и закреплен в начале СО то $d = er \implies \ddot{d} = e\ddot{r}$. Тогда нам нужно искать:

$$r = \frac{eE_\omega}{m(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)}. \quad (4.7)$$

$$\mathfrak{F}[\ddot{d}](\omega) = -e\omega^2 r = -\frac{e\omega^2 E_\omega}{m(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)}. \quad (4.8)$$

Получим распределение полей в общем виде, подставив \ddot{d} в 3.2:

$$H = \frac{e}{mc^2 R} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 E_\omega}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\} \frac{d\omega}{2\pi}, n \right], \quad (4.9)$$

$$E = [H, n]. \quad (4.10)$$

Естественно что поле зависит от времени, и угла измерения, в качестве параметров выступают характеристики диполя и падающей волны.

Если предположить что на диполь падает монохроматическая волна то

$$H = \frac{e}{mc^2 R} \left[\int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 E_0 2\pi \delta(w_v + w) \exp(-ikx)}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\} \frac{d\omega}{2\pi}, n \right] \quad (4.11)$$

$$= \frac{e[E_0, n]}{mc^2 R} \int_{\mathbb{R}} \frac{\omega^2 \delta(w_v - w) \exp(-ikx)}{(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \exp\{-it\omega\} d\omega = \frac{e[E_0, n] \omega_v^2 \exp(-i\omega_v t - ikx)}{mc^2 R (\omega_0^2 - i\omega_v k - \omega_v^2)} \quad (4.12)$$

Мы получили что при падении монохроматической волны на диполь, он испускает в ответ монохроматическую волну но с другой амплитудой при этом зависящей от угла, угол появится из векторно произведением $[E_0, n]$

4.3. Распределение интенсивности

Пользуясь формулой 3.8 получим:

$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3} [\ddot{d}, n]^2 do = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{d}_\omega^2 \sin^2 \varphi do. \quad (4.13)$$

Подставляем решение 4.8:

$$d\mathfrak{I} = \frac{1}{4\pi c^3} \left| \frac{eE_\omega}{m(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2)} \right|^2 \sin^2 \varphi do = \frac{|E_\omega|^2}{4\pi c^3} \frac{e^2 \sin^2 \varphi do}{m^2 ((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 k^2)} \quad (4.14)$$

Проинтегрируем по всем углам, используя соотношение $do = 2\pi \sin \varphi d\varphi$:

$$\mathfrak{I} = \frac{2}{3c^3} \ddot{d}_\omega^2. \quad (4.15)$$

Для падающей монохроматической волны воспользуемся 3.4 так как я уже посчитал H , но можно было бы воспользоваться 3.5:

$$d\mathfrak{I} = \frac{(eE_0 \sin \theta)^2}{4\pi c^3 (mR)^2} \frac{\omega_v^4}{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 k^2} do \quad (4.16)$$

Полная интенсивность.

$$\mathfrak{I} = \frac{2(eE_0)^2}{3(mc^2 R)^2} \frac{\omega_v^4}{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + \omega_v^2 k^2} \quad (4.17)$$

Обозначим $\xi = \frac{(eE_0 \sin \theta)^2}{4\pi c^3 (mR)^2}$

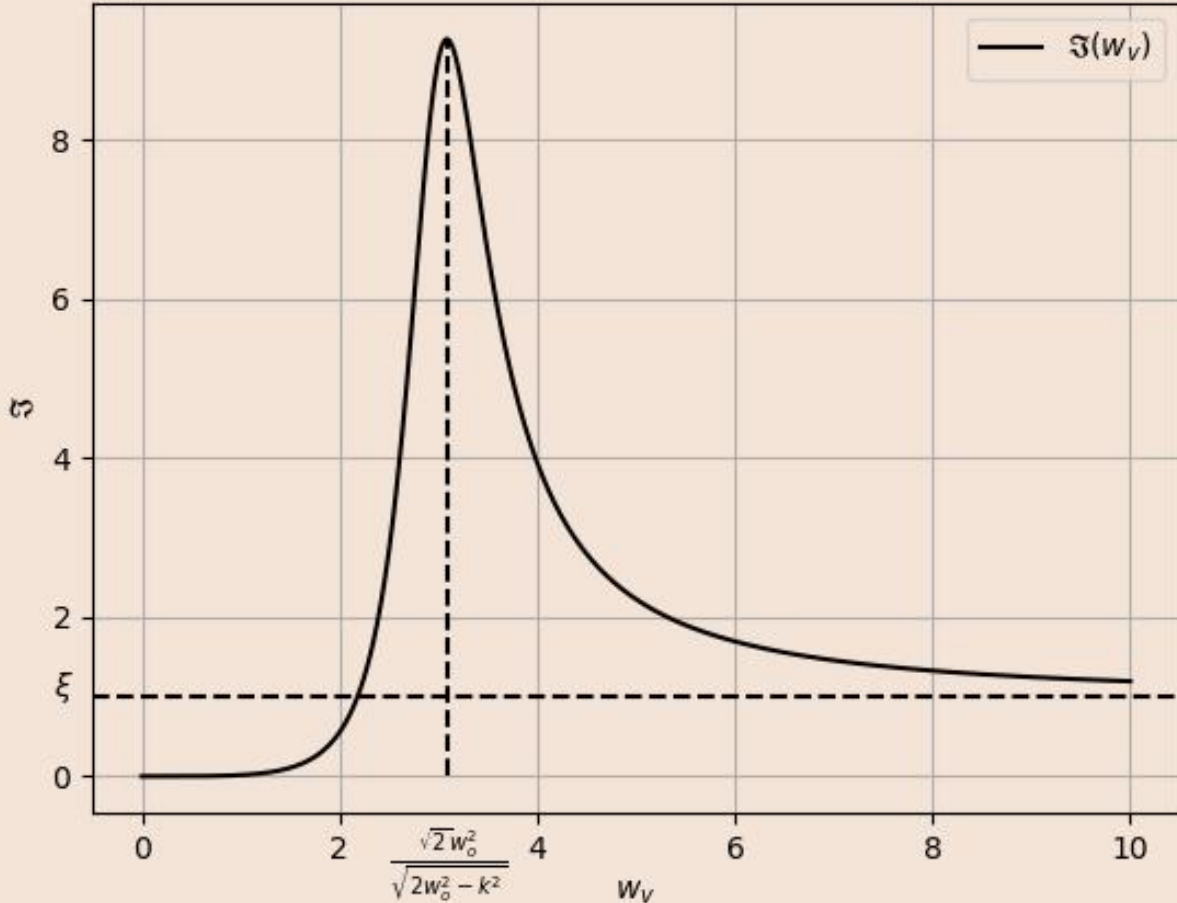
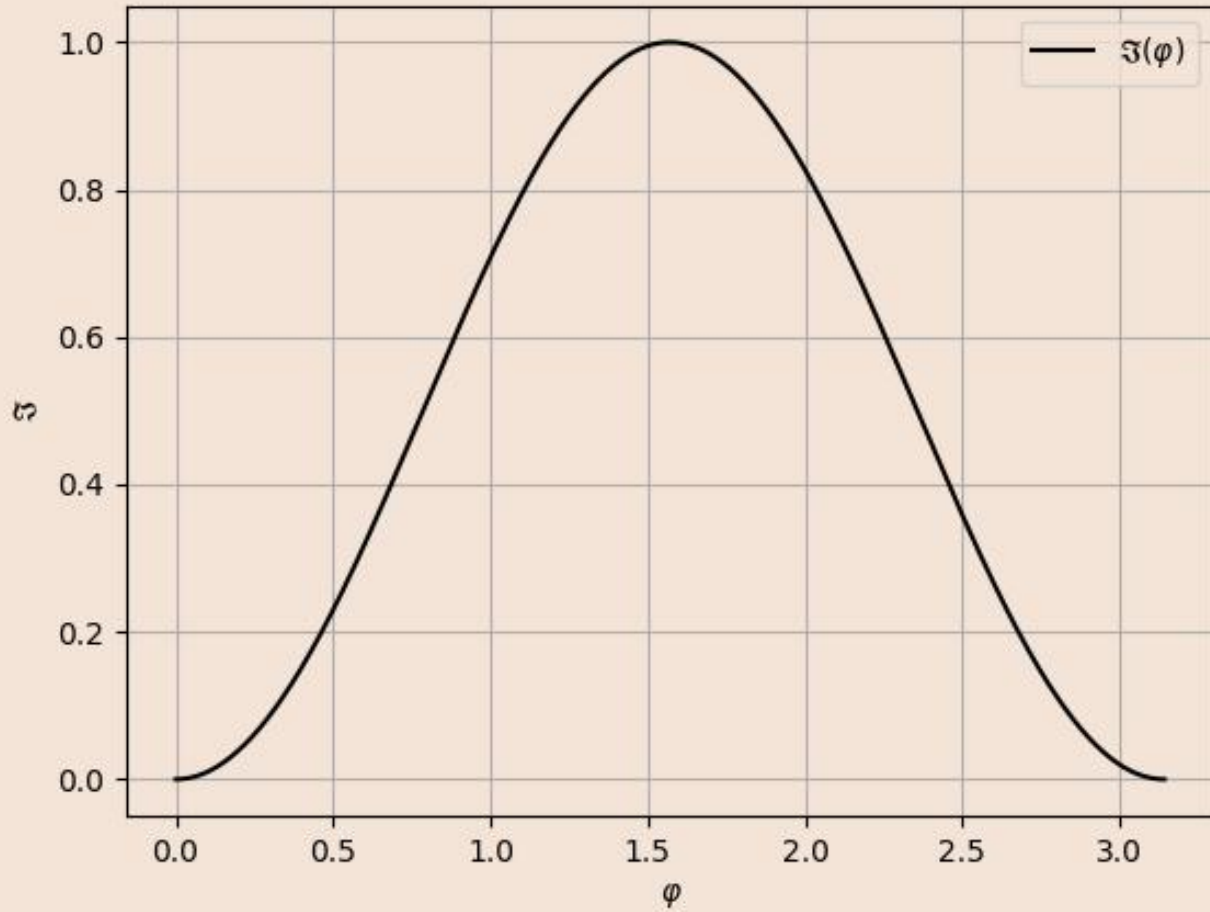


Рис. 1. Единицами измерения по оси y выступает ξ

Как мы видим на графике прослеживается явный максимум в зависимости $\Im(w_v)$ а то значит, что налетающая волна попала в резонанс с диполем.



5. Вращающийся диполь

Можем представить расположение одного из зарядов как:

$$x = r \cos \omega t \quad (5.1)$$

$$y = r \sin \omega t \quad (5.2)$$

$$d = e \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} r \cos \omega t \\ r \sin \omega t \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{d} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin \omega t \\ r\omega \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Аналогично подставим в 3.5, получим:

$$\mathfrak{I} = \frac{\omega^2 r^2 e^2}{8\pi c^3} (1 + \cos^2 \theta) d\theta \quad (5.4)$$

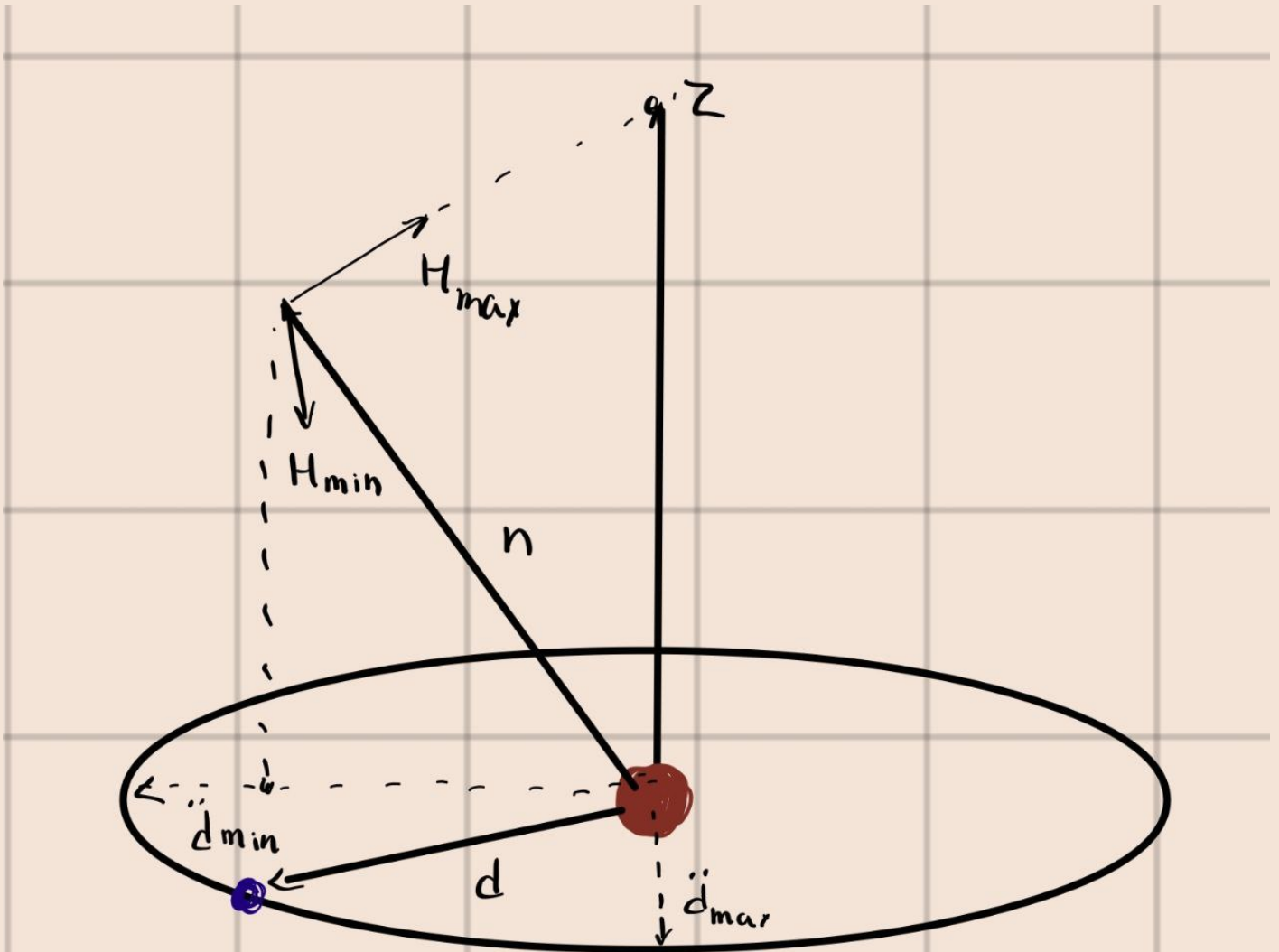
Важно здесь угол θ это не тот угол φ что во второй части уравнения 3.5. φ это угол между \ddot{d} и n , а θ это полярный угол. Интегрирование по всем углам даст нам полное излучение диполя

$$\mathfrak{I} = \frac{2e^2 r^2 \omega^2}{3c^3} \quad (5.5)$$

Для определения поляризации вспомним 3.2, нам важно только:

$$H \sim [\ddot{d}, n], |H| \sim \sin \varphi \quad (5.6)$$

По картинке видно максимум H выпадает на плоскость n, z а минимум на плоскость перпендикулярную ей и проходящую через n . Таким образом $H_{max} \sim \ddot{d}$, $H_{min} \sim \ddot{d} \cos \theta$ отсюда отношение большей полуоси к меньшей $\cos \theta$, так же видно что поляризация эллиптическая. Но в если n совпадает с z то поляризация круговая, если n лежит в XY то поляризация линейная.



6. Вывод

Как мы видим для знания поля нужна информация о параметрах диполя. Например для величины поля по формуле 4.9. Для решения не использовались вектора Герца, было очень удобно пользоваться формализмом векторного потенциала.

В общем виде были выведены зависимости $H(\ddot{d})$, доказано что $E \perp H$, $\mathcal{I}(\ddot{d})$ и тп. Было рассмотрено частотное представление.

Для задачи линейного осциллятора были сделаны приближения по влиянию E, H на d . Были найдены H, E излучаемые диполем как в общем случае так и для плоской монохроматической волны. Была найдена резонансная частота (смотри график 1) Было найдено излучение в телесный угол и полное излучение.

Для вращ. диполя нашли распределение интенсивности в телесный угол и поляризацию испускаемой волны.