Содержание

1. Постановка задачи

Так так точные условия задачи не поставленны предлагаю рассмотреть 2 случая.

1.1. Линейный осцилятор

Первый рассеяние электромагнитной волны на линйном осциляторе, эту модель часто применяют для описания рассения на молекулах воздуха, с последующим выводом Реллевского рассеяния.

Формульно зависимость между неподвижным ядром и оцилирующим элемнтом в квадратичном поле (квадратичное поле часто являтся результатом приближения), с "силой трения"силой линейно зафисящей от скрости элемента во избежании резонанса и бесконечного увелечнения амплитуды колебаний. В итоге получим:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega^2 r = f(r) \tag{1.1}$$

Где $f(r)$– некоторая вынуждающая сила.

В обоих задаче в результате ускоренного движения диполь излучает электро-магнитные волны, котрые мы ищем.

2. Излучение диполя

2.1. Уравнение Максвела

В первую очередь надо вспомнить что для ЭМ (электромагнитный) волн ур. Максвелла преобразуются в:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}E &= -\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t} \quad divH = 0, \\ \mathrm{rot}H &= \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t} \quad divE = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

По определению:

$$H \quad = \quad \mathrm{rot}A \tag{2.2}$$

Учтя запаздывание потенциала, в следствии чего $A\left(t - \frac{x}{c}\right)$:

$$H = [\nabla, A] = -\frac{1}{c}[n, A']. \tag{2.3}$$

Зная что:

$$A = \frac{1}{cR}\sum ev = \frac{1}{cR}\dot{d}. \tag{2.4}$$

Так же не забываем про $E = [H, n]$, получим:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{c^2R}\left[\ddot{d}, n\right], \\ E &= \frac{1}{c^2R}\left[\left[\ddot{d}, n\right], n\right]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2. Вектор пойнтинга

Учитывая ортогональность векторов H и E, также то что в монохроматической волне $|H| = |E|$, то вектор Пойнтинга

$$S = \frac{cH^2}{4\pi} n. \tag{2.6}$$

От сюда получим

$$d\Im = \frac{cH^2}{4\pi} R^2 do \tag{2.7}$$

Часто удобно работаь в спектральном разложении поэтому посмотрим на зависимомти в фурье образа. Напрямую из переобразования формул 2.5 получим:

$$\begin{aligned} H_\omega &= i\left[k, A_\omega\right], \\ E_\omega &= \frac{ic}{\omega}\left[k, \left[k, A_\omega\right]\right], \end{aligned} \tag{2.8}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_{\mathbb{R}} f^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} = 2\int_{\mathbb{R}_+} |f_\omega|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \tag{2.9}$$

Заметив что от в 2.7 зависит от t только посредстаом H получим:

$$d\Im = \frac{c}{2\pi} |H|^2 R^2 do \tag{2.10}$$

3. Решение для линейноного осцилятора

3.1. Приближения и уточнение формулировки

Во первых вспомнм что:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3.1}$$

В не релятивистком случае уравненнеие сильно упрощается:

$$p \approx mv, \tag{3.2}$$

поэтому предлагаю решать в приближении $v/c \ll 1$. Тогда известное нам уравнение:

$$\frac{dp}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\left[\vec{v}, \vec{H}\right], \tag{3.3}$$

выродится в:

$$m\frac{dv}{dt} = e\vec{E}. \tag{3.4}$$

Будем рассматривать падение на диполь монохроматической волны. Пока что мне не нужна точная формула, а только одно очень удобное свойство:

$$\mathfrak{F}\left[\vec{E}(t)\right](\omega) = \vec{E}(\omega). \tag{3.5}$$

3.2. Диф. уравнение

Запишем наше уравнение:

$$m\ddot{r} + mk\dot{r} + m\omega_0^2 r = eE(t). \tag{3.6}$$

Как уже ясно я предлагаю использовать преобразование фурье для решения:

$$-\omega^2 r - i\omega k r + \omega_0^2 r = \frac{e}{m} E(\omega). \tag{3.7}$$

Вспомним что в излучение диполя основной вклад дает компонента $\ddot{d}$, А так как так как центральный заряд не подвижен и закреплен в начале СО то $\vec{d} = e\vec{r} \implies \ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}}$. Тогда нам нужно искать:

$$r = \frac{eE(\omega)}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{3.8}$$

$$\mathfrak{F}\left[\ddot{d}\right](\omega) = -e\omega^2 r = -\frac{e^2\omega^2 E(\omega)}{m\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}. \tag{3.9}$$

Монохроматическая волна задется как $E = A\exp\{ikx - i\omega t\}$:

$$E = \frac{e^2}{mc^2 r}\int_{\mathbb{R}} -\frac{\omega^2 E(\omega)}{\left(\omega_0^2 - i\omega k - \omega^2\right)}\exp\{-i\omega t\}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{3.10}$$

3.3. Дифференциальное сечение рассеяния