Выполнил: Карибджанов Матвей
Вариант: 22

Содержание

1. Задание

Решаю задачу в "CW_2.ipynb так что здесь будут перевелены только формулы и ответы. В программе я матрици не округляю в памяти они храняться с той точносью с которой были посчитаны, поэтому в решения ответы с использованием округленных матриц могут оличаться от тех, что были посчитаны в программе.

Нахожу обратную к матрице A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.67 & 0.17 \\ 0.5 & -0.25 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Оценим погрешность найденного решения сверху:

$$\delta A^{-1} \leqslant \frac{\|Y\|}{1 - \|Y\|} = 0.02; \ \|Y\| \leqslant \|\delta A\| \left\|A^{-1}\right\| \tag{1.2}$$

2. Задание

Мне показалось логично округлять до целых, так как матрица остается не вырожденной но при этом становится диагональной, из-за чего легко искать обратную.

$$A = \begin{pmatrix} -5.0 & 0 \\ 0 & -1.0 \end{pmatrix}; \ \Delta A = \begin{pmatrix} 0.03 & -0.14 \\ -0.06 & 0.04 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

$$b = \begin{pmatrix} -5.0 \\ -1.0 \end{pmatrix}; \ \Delta b = \begin{pmatrix} -0.18 \\ -0.08 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -1.0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Таким образом число обусловленности и погрешность d:

$$\kappa_1 (A) = 5, \quad \kappa_2 (A) = 5 \tag{2.4}$$

$$\delta_1 b = 23.08, \quad \delta_2 b = 25.89 \tag{2.5}$$

Я получил погрешность:

$$5.18 \leqslant \quad \delta_1 x \quad \leqslant 115.38 \tag{2.6}$$

$$5.18 \leqslant \quad \delta_2 x \quad \leqslant 129.43 \tag{2.7}$$

Предлагаю посчитаь точно и убедиться в этом, не буду пояснять поск решений просто приведу результат:

$$x_{real} = \begin{pmatrix} 1.08 \\ 1.19 \end{pmatrix}, \ x = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{pmatrix}, \ \Delta x = \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.19 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

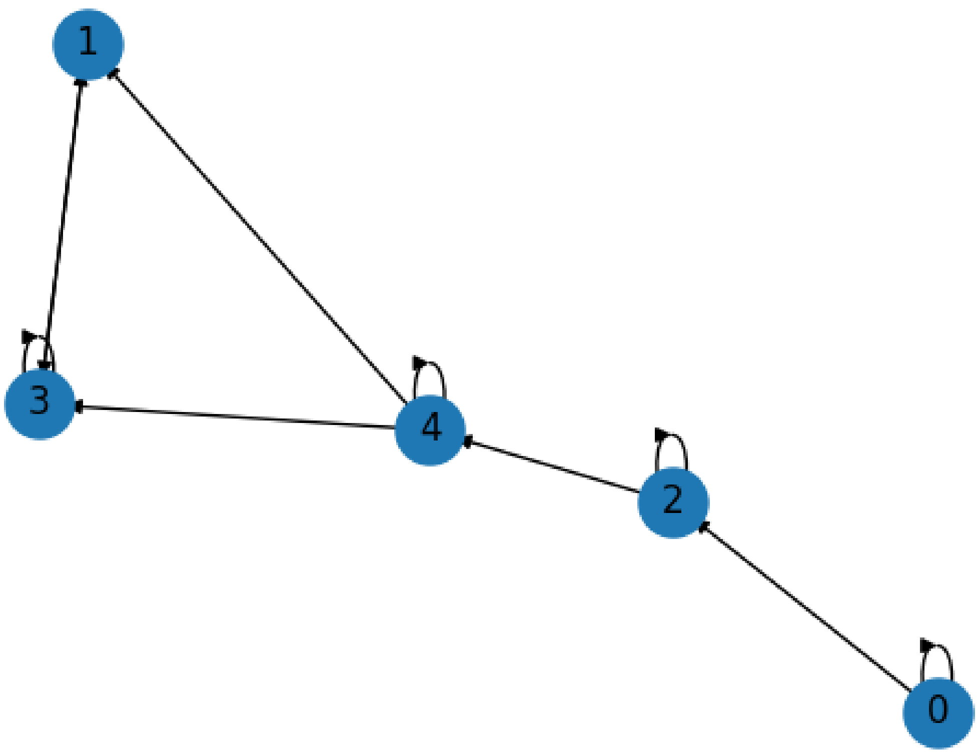
Тогда получим натоящюю погрешность:

$$\delta_1 x = 7.46, \ \delta_2 x = 6.84 \tag{2.9}$$

Действительно $\delta_1 x$ и $\delta_2 x$ лежет в найденных интервалах.

3. Задание

По алгоритму PageRank получил самую влиятельную вершину графа - 4.



4. Задание

Напомню что алгорми следует смтореть в программе. Перед итерациями привел систему к виду:

$$Ax = b \implies (A - d)x + dx = b \implies dx = b + (d - A)x \tag{4.1}$$

Где d это диагональ A. Так как d матрица диагональная то обратная вичилятся как $d_{ij}^{-1} = 1/d_{ij}$, в евклидовом пространстве не различеем индексы сверху и снизу тк $g_{ij} = \delta_{ij}$, в итоге получим:

$$x = d_{ij}^{-1} b_j + (d_{ik}^{-1} d_{kj} - d_{ik}^{-1} A_{kj}) x_j = d_{ij}^{-1} b_j + (\delta_{ij} - d_{ik}^{-1} A_{kj}) x_j \tag{4.2}$$

В итоге получил:

$$step = 8 \ x = \begin{pmatrix} 0.34 \\ 0.15 \\ 0.04 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

При проверке получаю:

$$b_{app} = \begin{pmatrix} 8.99 \\ 3.99 \\ 4.98 \end{pmatrix} \implies \Delta b = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

5. Задание

Воспользоуемся своствами матричной экспоненты:

$$\exp\left\{CBC^{-1}\right\} = C\exp\{B\}C^{-1} \tag{5.1}$$

Характерестичесий могочлен для A:

$$24.0 + -28.0 * l^1 + 10.0 * l^2 + -1.0 * l^3 = 0 \tag{5.2}$$

$$l = 2, l = 6 \tag{5.3}$$

Жорданова клектка:

$$J = \begin{pmatrix} 6.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix} = d_{up} + d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6.0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.0 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

Базисы:

$$S = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.25 \\ 1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 4.0 & 1.0 & 0 \end{pmatrix};\ S^{-1} = \begin{pmatrix} -4.0 & 1.0 & 1.0 \\ 16.0 & -4.0 & -3.0 \\ 12.0 & -4.0 & -2.0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Проверка разложения:

$$SJS^{-1} = \begin{pmatrix} -8.0 & 2.0 & 3.0 \\ -4.0 & 2.0 & 2.0 \\ -52.0 & 12.0 & 16.0 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Расчет $\exp J$

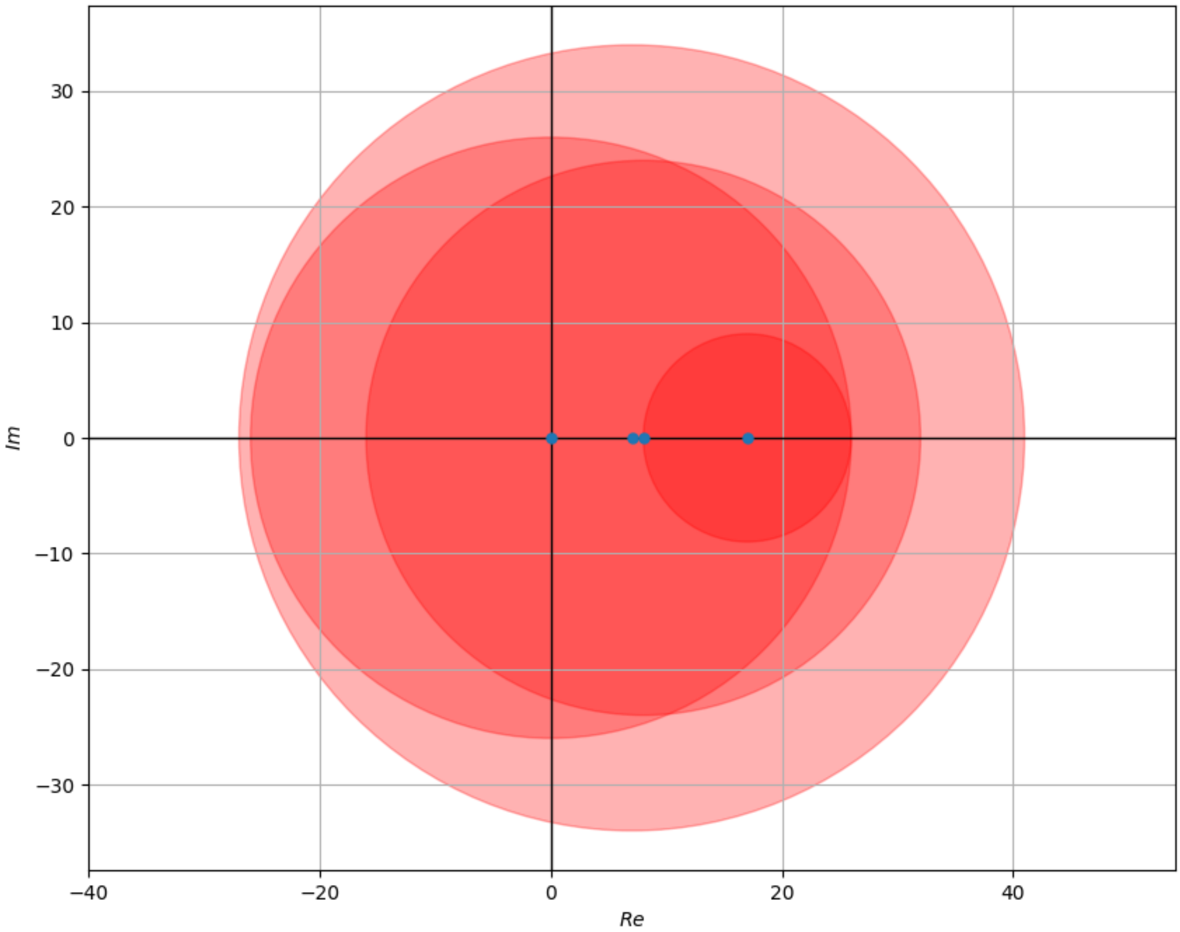
$$\exp J = \exp(d_{up})\exp(d) = \begin{pmatrix} 403.43 & 0 & 0 \\ 0 & 7.39 & 0 \\ 0 & 0 & 7.39 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 1.0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 403.43 & 0 & 0 \\ 0 & 7.39 & 7.39 \\ 0 & 0 & 7.39 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

В итоге получим:

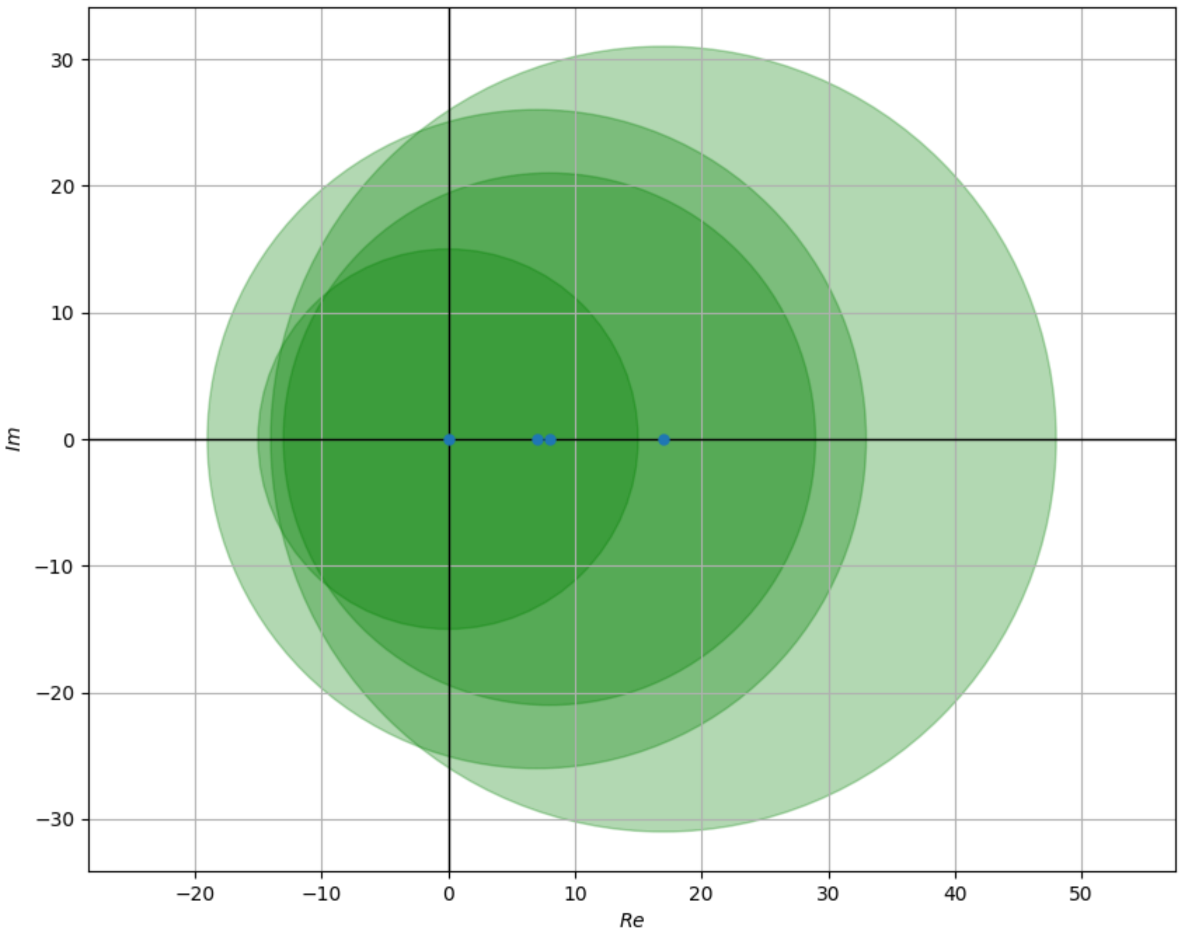
$$\exp A = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.25 \\ 1.0 & 1.0 & -1.0 \\ 4.0 & 1.0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 403.43 & 0 & 0 \\ 0 & 7.39 & 7.39 \\ 0 & 0 & 7.39 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4.0 & 1.0 & 1.0 \\ 16.0 & -4.0 & -3.0 \\ 12.0 & -4.0 & -2.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1532.44 & 381.26 & 388.65 \\ -1495.49 & 373.87 & 381.26 \\ -6247.97 & 1554.6 & 1576.77 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

6. Задание

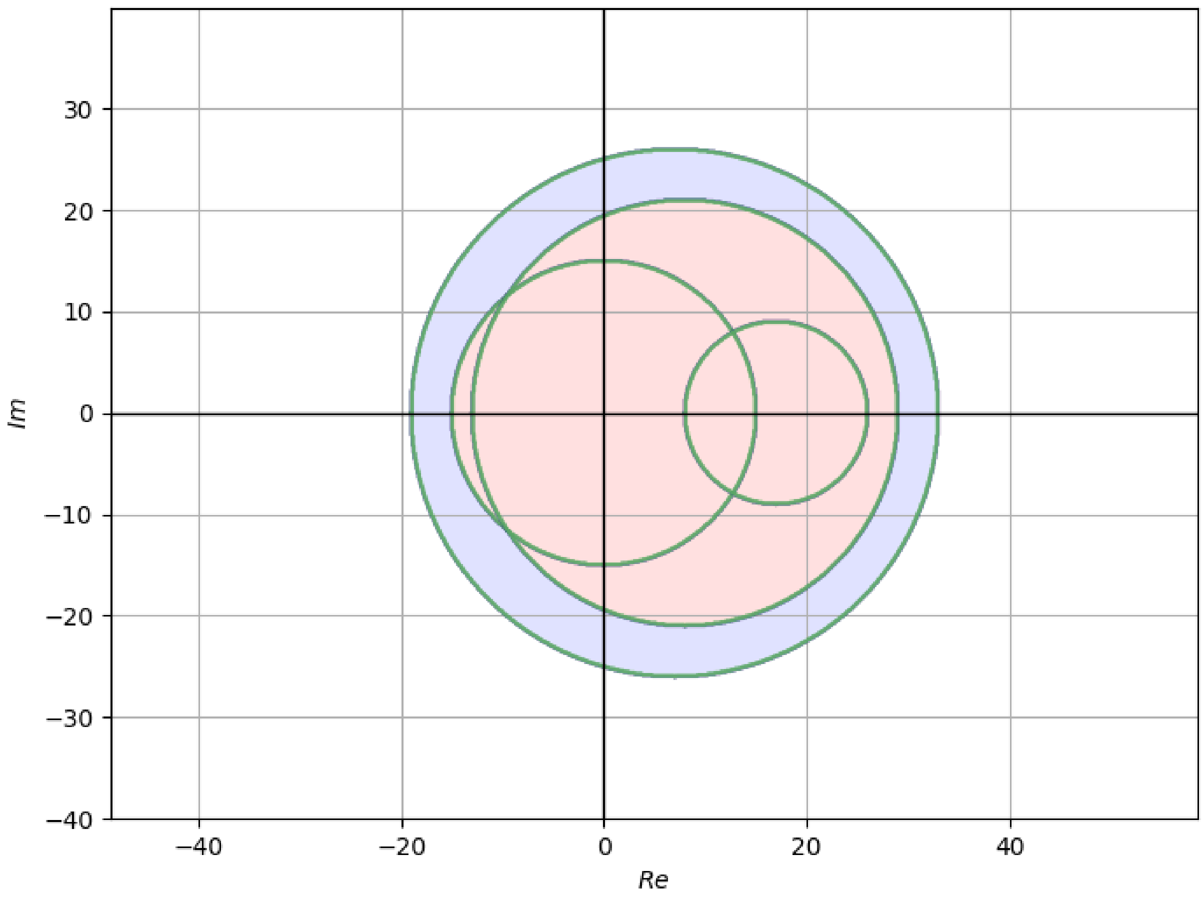
Нахожу радиус и цент окружности по теореме Гершгорина, в итоге получаю области для собственных значений:



Вспомним что собственные значени для транспонированной матрици равны поэтому получим второе ограничение:



Обединение этих картин дает мне:



Но так как собственные значени встречаются попарно поэтому получим, что там где есть тольк одно собственное число, там число может лежать только на оси X, такая область отмкчена фиолетовым. В красной области собственне числа могут существовать где угодно (не только на оси), но все еще в нутри собственных кругов отмеченных зеленым.

7. Задание

$$x = \frac{t}{t^2+1};\ y = \frac{t^2+1}{t^3-t^2+2} \tag{7.1}$$

Сначала решим:

$$x = \frac{t}{t^2+1} \implies xt^2 - t + x = 0 \implies t = \frac{\pm\sqrt{1-4x^2}+1}{2x} \tag{7.2}$$

Подставим в y, здесь фигурные скобки это не и а или:

$$y = \begin{cases} \dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^2+1}{\left(\dfrac{\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^3-\left(\dfrac{\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^2+2} \\ \dfrac{\left(\dfrac{-\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^2+1}{\left(\dfrac{-\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^3-\left(\dfrac{-\sqrt{1-4x^2}+1}{2x}\right)^2+2} \end{cases} \tag{7.3}$$

$$y = \begin{cases} \dfrac{2x}{-2x^2-(3x-1)\sqrt{1-4x^2}+x+1} \\ \dfrac{2x}{-2x^2+(3x-1)\sqrt{1-4x^2}+x+1} \end{cases} \tag{7.4}$$

$$0 = \begin{cases} y - \dfrac{2x}{-2x^2-(3x-1)\sqrt{1-4x^2}+x+1} \\ y - \dfrac{2x}{-2x^2+(3x-1)\sqrt{1-4x^2}+x+1} \end{cases} \tag{7.5}$$

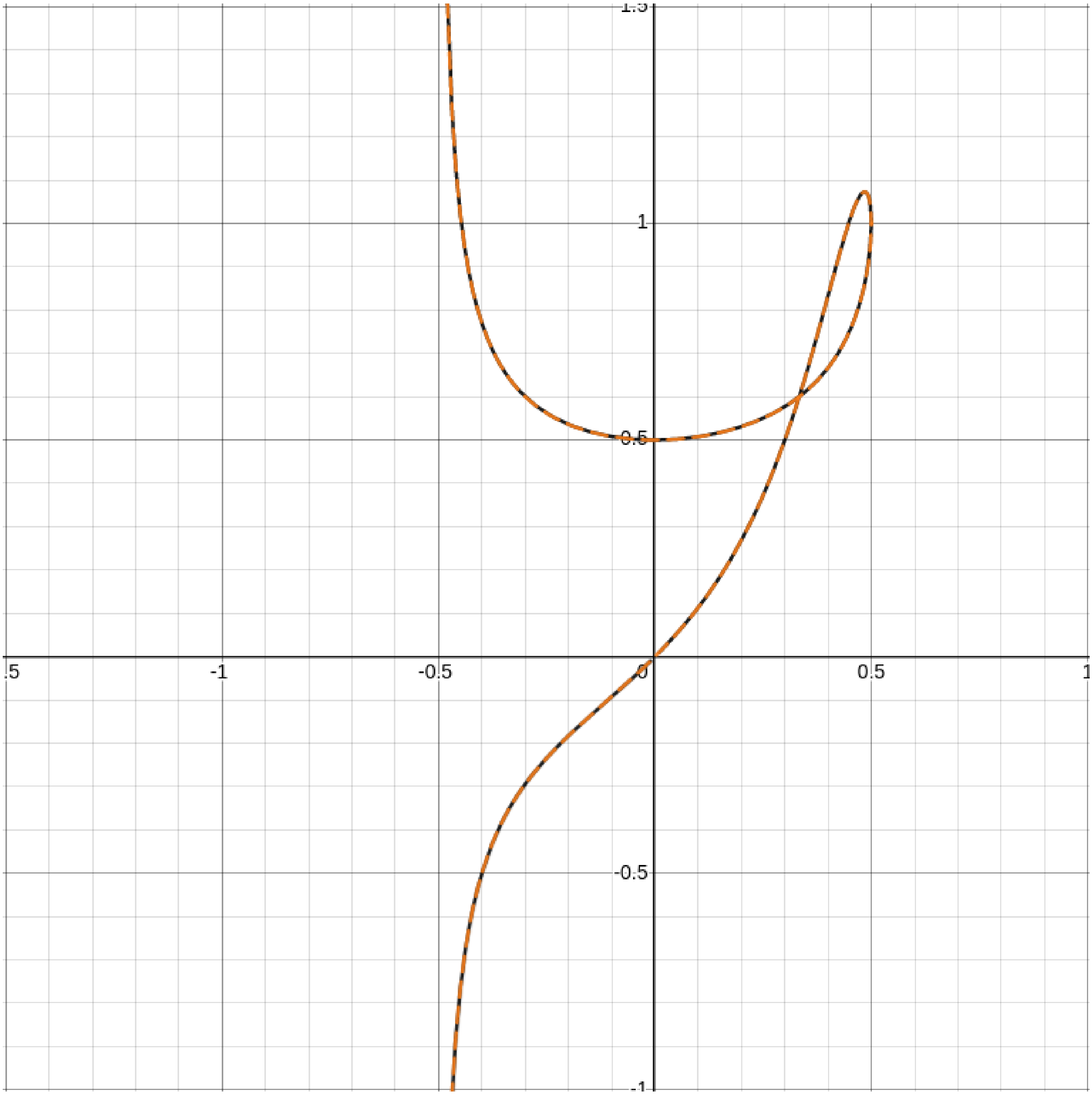


Рис. 1. Ссылка на график