Задание 1

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ f(-1)=-3 \\ f(2)=17 \\ f(-2)=-19 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 8 & 8 & -2 & -2 \\ 8 & -8 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = 1/6\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

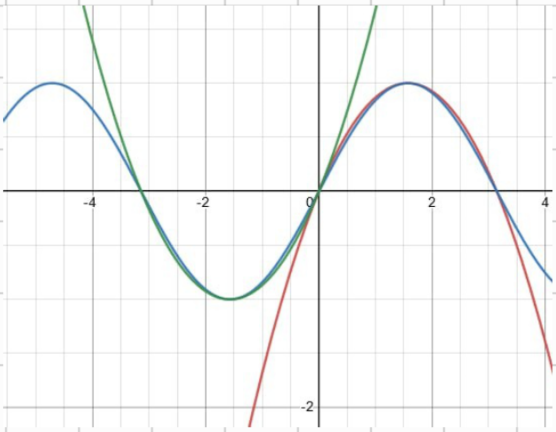
Задание 2

$$\begin{cases} f(1)=-1 \\ f'(1)=5 \\ f(0)=0 \\ f'(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \\ f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2 \end{matrix} \Rightarrow \mathcal{L}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Задание 3

$$\left.\begin{matrix} \sin(\pi k)=0 \\ \sin(\pi k+\frac{\pi}{2})=(-1)^k \\ \cos(\pi k+\frac{\pi}{2})=0 \end{matrix} \begin{matrix} \Rightarrow a_0+a_1x+a_2x^2=f(x) \\ \\ \Rightarrow a_1+2a_2=f'(x) \end{matrix}\right| \Rightarrow \mathcal{L}=\begin{pmatrix} 1 & \pi/2 & \pi^2/4 \\ 0 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathcal{L}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4/\pi & -1 & -4/\pi \\ -4/\pi^2 & 2/\pi & 4/\pi^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/\pi \\ -4/\pi^2 \end{pmatrix}$$

остальные найдем в силу симметрии



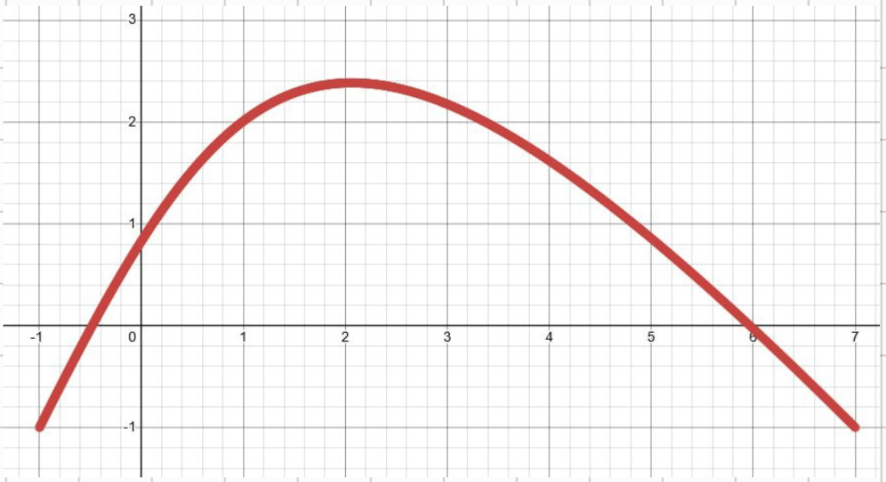
Задание 4

Пусть это не так тогда возьмем 5 любых точек

Из них выберем 4, из них 3 определяют параболу, поэтому 4 точка задатся по формуле $f(x)$, уберем любую из трех первых точек $f(x)$ сохранится.

Задание 5

$$f(t) = (1-t)^3\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3t^2(1-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t^3-3t^2+6t-1 \\ -3t^3-9t^2+12t-1 \end{pmatrix}$$



Задание 7

$f(t) = \sum_{n=0}^{k} C_n^k t^n (1-t)^{k-n} P_n$ $\quad f(t=0) = P_0$ $\quad f(t=1) = P_n$ $\Rightarrow$ имет. общ. точку.

$f'(t) = \left(\sum_{n=0}^{k} C_n^k t^n (1-t)^{k-n} P_n\right)' = \sum_{n=0}^{k} C_n^k P_n \left\{ n t^{n-1} (1-t)^{k-n} + (k-n) t^n (1-t)^{k-n-1} \right\} = \sum_{n=0}^{k} C_n^k P_n \left\{ t^{n-1} (1-t)^{k-n-1} (n-kt) \right\}$ $\quad f'(t=0) = kP_0$ $\quad f'(t=1) = kP_n$