Оглавление

Глава 1.

Ведение в математику p-адических чисел

1.1. Строение пространства

Кольцо

Любое p-адичесое число x можно предстваить как:

$$x = p^{\gamma} \frac{m}{n} \tag{1.1.1}$$

Где $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z} : \nexists y \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{p}{y} \in \mathbb{N}$, а также p, n, m взаимно просты. Любое p-адическое число определено толко в пространстве $\mathbb{Q}_p$, где p тоже что использовалось в определениие 1.1.1. Любое число из $\mathbb{Q}_p$ можно записать, как число из $\mathbb{Q}$ и тогда сложение и произведение будет определно также как в $\mathbb{Q}$. Конечно же такие операции не выводят нас из кольца $\mathbb{Q}_p$:

$$p^{\gamma_1} \frac{m_1}{n_1} \cdot p^{\gamma_2} \frac{m_2}{n_2} = p^{\gamma_2 + \gamma_1} \left(\frac{m_2 \cdot m_1}{n_2 \cdot n_1} \right) \tag{1.1.2}$$

$$p^{\gamma_1} \frac{m_1}{n_1} + p^{\gamma_2} \frac{m_2}{n_2} = p^{\gamma_2} \left(p^{\gamma_1} \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} \right) \tag{1.1.3}$$

Для 1.1.2 так как p - простое то мы не сможем выделить из $\left(\frac{m_2 \cdot m_1}{n_2 \cdot n_1} \right)$ еще p. Для 1.1.3 я пологал что $\gamma_1 < \gamma_2$, поэтому по анологии я уже не смогу вынести p из скобок.

Норма и метрика

Для построения протсранства в первую очередь требутся норма:

$$|x|_p = p^{-\gamma} \tag{1.1.4}$$

Очень легко проверятся, что для такой нормы выполняются все необходимы критерии, используя уже доказанные мною првила сложения и умножения 1.1.2 и 1.1.3:

1 $|x|_p \geqslant 0$

2 $|x + y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p$

3 $|xy|_p = |x|_p |y|_p$

Пример:

$$\left| \frac{1}{2} \right|_2 = 2$$

$$|6|_2 = \frac{1}{2}$$

$$|13|_4 = 1$$

Теперь когда мы задали норму в протсранстве $\mathbb{Q}_p$. Таким образом любое чило из $\mathbb{Q}$ можно записать в следующем виде:

$$x = \sum_{\gamma}^{\infty} x_i p^i \tag{1.1.5}$$

Где x_i число в p ситеме исчисления, то есть $x_i \in \mathbb{N},\ x_i < p$. Может возникнуть вопрос, как такой ряд может сойтись, здесь надо не забывать, что ма работаем в норме $|x|_p$ тоесть ряд будет иметь норму $p^{-\gamma}$. Приэтом числа в таком виде записыватся следющим образом:

$$x = \overline{x_\infty ... x_{\gamma+1} x_\gamma ... x_0 . x_{-1} ... x_{-\gamma}}_p \tag{1.1.6}$$

Например:

$$\begin{aligned} 123 &= 123_{10} \\ 123 &= 11120_3 \\ -123 = 9...999877_{10} &= (9)877_{10} \\ -\frac{1}{49} &= (6).66_7 \end{aligned}$$

$$\rho_p(x,y) = |x-y|_p \tag{1.1.7}$$

Все критерии мерики очевидно выполнятся для ρ_p. Напомню что это:

1 $\rho(x,y) \geqslant 0,\ \rho(x,x) = 0$

2 $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

3 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Но у данной метрики есть одно важное свойство, котрое позже пригодится нам при расчете интегралов:

$$\rho(x,y) \leqslant max(\rho(x,z), \rho(z,y)) \tag{1.1.8}$$

По сути я доказал это в 1.1.5. Пространства чья метрика удовлетворят условию 1.1.8 называтся ультраметрическими.

1.2. Предельный переход $\mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}$

Для понимания работы p - адических чисел может быть очень полезно понимать, что $\mathbb{Q}_p$ есть более общий случай $\mathbb{Q}$.

Можно лекко заметить что $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_\infty$, действительно для $\forall x \in \mathbb{Q}$ при $p = \infty, \nexists \gamma \neq 0$ чтобы предствить число в виде 1.1.1. Тогда $\gamma = 0$ получается из 1.1.1 мы получим:

$$p^0 \frac{m}{n} = \frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

Что совпадает с определением $\mathbb{Q}$. И так выполнятся равентво

$$\prod_{2}^{\infty} |x|_i = 1 \tag{1.2.2}$$

Где $|x|_\infty = |x|$ тоесть норме р $\mathbb{Q}$ соответственно.

1.3. Шары в $\mathbb{Q}_p$

Шар в $\mathbb{Q}_p$ задается как это принято в мат. анлизе:

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid \rho(x,a) \leqslant p^\gamma\} \tag{1.3.1}$$

Шары в $\mathbb{Q}_p$ обладают очнень не привычными нам примитивным обитателям из $\mathbb{R}_{3,1}$ свойствами:

1 Любая тока шара являтся ее центром

2 $\forall B_1, B_2; B_1 \cap B_2 \neq 0 \hookrightarrow B_1 \in B_2 \ \vee B_2 \ \in B_1$

3 $\forall B_1$ открыт

Первое свойство это следствие ультра метричности пространства:

$$\forall x \in B_\gamma(a) \hookrightarrow r = \rho(a,z) \leqslant max(\rho(x,a), \rho(x,z))$$

Так:

$$\rho(x,a) \leqslant max\left(|z|_p, |a|_p\right), \rho(x,z) \leqslant max\left(|x|_p, |z|_p\right) \Rightarrow \rho(x,a) \geqslant \rho(x,z)$$

$$r = \rho(a,z) \leqslant \rho(x,a), \ \rho(a,z) \geqslant \rho(x,a) \Rightarrow \rho(a,z) = \rho(x,a)$$

Второе свойство, можно легко доказать используя первое свойство:

$$\forall a \in B_1 \cap B_2, \forall z_1 \in B_1, \forall z_2 \in B_2 \Rightarrow B_1 := B_{r_1}(a), B_2 := B_{r_2}(a)$$

Тоесть в качестве центра каждого шара мы можем выбрать любую точку из пересечения, допуская что $r_1 \leqslant r_2$

$$\rho(a,z_1) \leqslant r_1 \leqslant r_2, \rho(a,z_2) \leqslant r_2 \Rightarrow z_1 \in B_1, B_2$$

Третье свойство, я не буду доказывать, но отмечу, что так как кольцо $\mathbb{Q}$ не содержит своих предельных точек следовательно $\mathbb{Q}_p$ не содержит своих передльных точект, значит подможетво B тоже не будет содержать предельных точек, что как мы знаем соответствует открытости множества.

1.4. Интегрирование

Мера Хаара