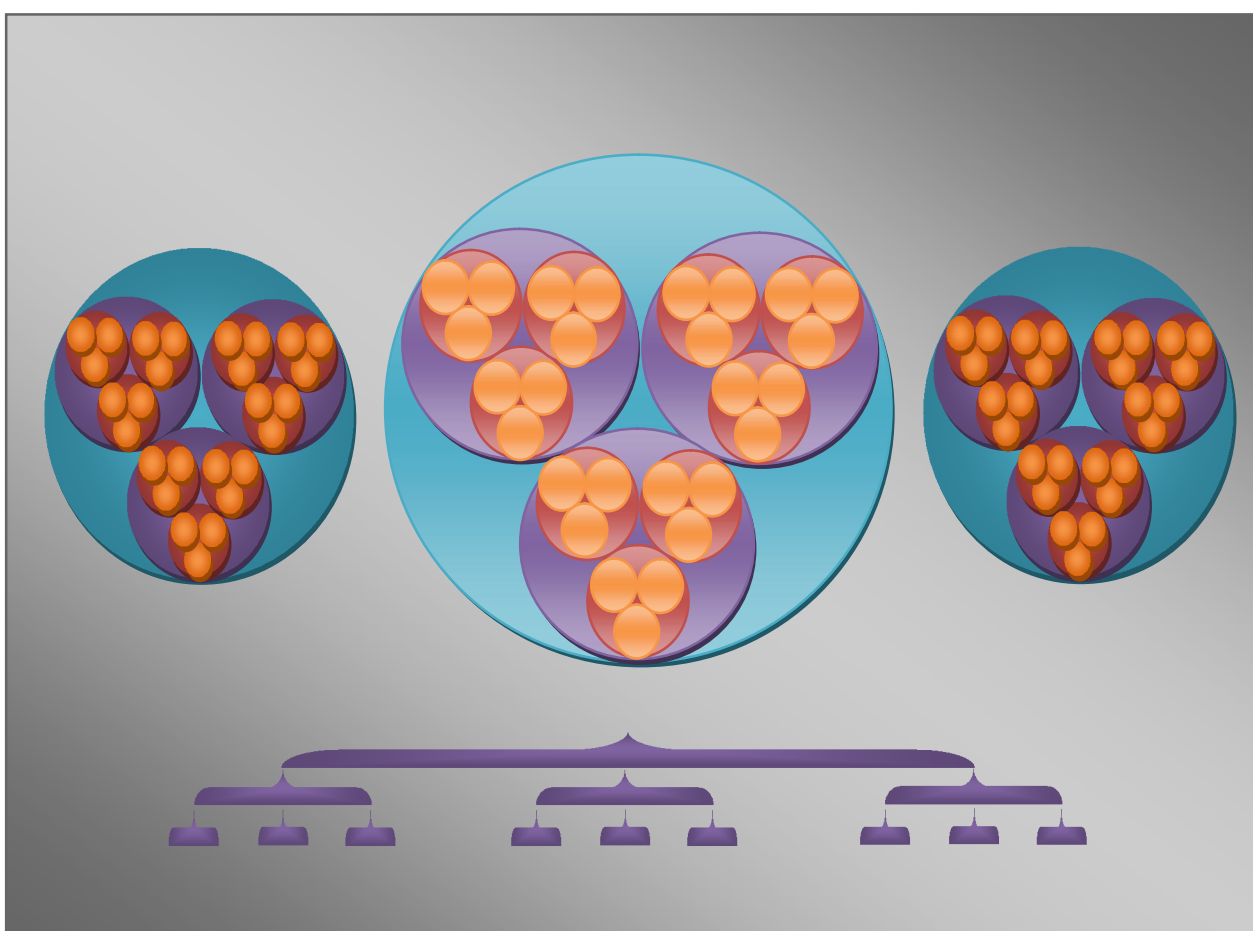


P -адические функции в теории фрактальных антенн



Введение

Стандартной моделью пространства в современной физике является поле \mathbb{R}^3 . Использование \mathbb{R}^3 предполагает, что существует возможность измерять расстояние с любой точностью. Однако к 60-м годам 20 века при попытках объединения квантовой теории и гравитации было понято [], что на расстояниях меньше планковских ($\sim 10^{-33}$ см) производить измерение расстояния просто невозможно. Отсюда следует, что пространство на таких малых расстояниях является неархимедовым (где аксиома Архимеда не выполняется). Напомним, в чем состоит аксиома измерения Архимеда. Для любых двух положительных вещественных величин c и C можно найти такое натуральное число n , что имеет место неравенство

$$(n-1)c \leq C \leq nC.$$

То есть всегда возможно измерить любую величину C с помощью другой величины c (единицы измерения) с точностью, не меньшей, чем c . Поле вещественных чисел \mathbb{R} является архимедовым числовым полем. В теоретической физике используются различные неархимедовы числовые поля такие, как поле нестандартных чисел [] (содержащее бесконечно большие величины), поле, основанное на исчислении В.Л.Рвачева []. Однако наибольшее распространение получили модели, основанные на, так называемых, p -адических числах (p – простое число). Это поле является расширением поля рациональных чисел (впрочем, как и поле вещественных чисел), то есть физически наблюдаемых чисел и обладает естественной неархимедовой топологией, связанной с понятием неархимедовой нормы и ультратопологии []. Это поле рассматривалось математиками еще с конца 19 века, в связи с рядом задач теории чисел []. Оказывается [], измерение длины некоторого отрезка с рациональными концами (то есть физически наблюдаемого) в евклидовом пространстве (на поле вещественных чисел) эквивалентно измерению его длины во всех p -адических пространствах. Это, в частности, согласуется с известной в теории чисел теоремой Островского [] о том, что пополняя поле рациональных чисел по различным неэквивалентным нормам, можно построить либо вещественные, либо p -адические поля. Геометрия на поле p -адических чисел коренным образом отличается [] от своего евклидова аналога, в частности, все треугольники в нем являются равнобедренными, всякая точка шара является его центром, шар не имеет границы и состоит из бесконечного количества непересекающихся шаров. Поле p -адических чисел обладает иерархической структурой. Произвольное число можно представить в виде ветки на некотором p -ичном дереве. Для сравнения число в евклидовом пространстве принято представлять точкой на прямой. На поле p -адических чисел создан математический анализ: интегрирование, преобразование Фурье, спектральная теория и вейвлеты, и т.д. P -адический анализ находит приложения в различных областях физики, в частности, p -адическая теория

струн и квантовая теория поля [], спиновые стекла [], биологические и иерархические системы [], динамические p -адические системы [], теория вероятностей [], распознавание образов [], модели сознания [], криптография []. Естественные применения p -адического анализа можно искать в моделях обладающих иерархической, фрактальной структурой. В данной работе исследуются применения p -адических функций и p -адического анализа для синтеза фрактальных антенн. На первом этапе, изучаются одномерные фрактальные решетки на основе фрактальных подрешеток [], распределения тока которых являются простейшими p -адическими функциями: p -адическая норма, функция шара и сферы. Производится сравнение с классическими фрактальными антеннами, основанными на функциях Больцано, Ван-дер-Вардена, Безиковича, Кантора []. Исследуются функции, составленные из комбинаций p -адических и классических фрактальных функций. На втором этапе, изучаются многомерные фрактальные антенные решетки. Здесь развивается математический аппарат синтеза оптимальных фрактальных антенн, основанный на понятии p -адических R -функций. Вводится понятие R -отображения на пространстве основных функций над полем p -адических чисел. Исследуются логические и дифференциальные свойства различных R -операций. Также здесь рассматривается применение p -адической теоремы Уиттекера-Котельникова-Шеннона для синтеза диаграмм направленностей фрактальных антенн.

Введение в p -адический анализ

Рассмотрим основные положения p -адического анализа, с которыми более подробно можно ознакомиться по [].

Вспомним [], как вводится в математике поле вещественных \mathbb{R} и рациональных \mathbb{Q} чисел. Процедуру построения \mathbb{Q} можно представить себе как процесс «залатывания дыр» в числовых системах, начиная с множества натуральных \mathbb{N} и целых \mathbb{Z} чисел (см.рис.1).

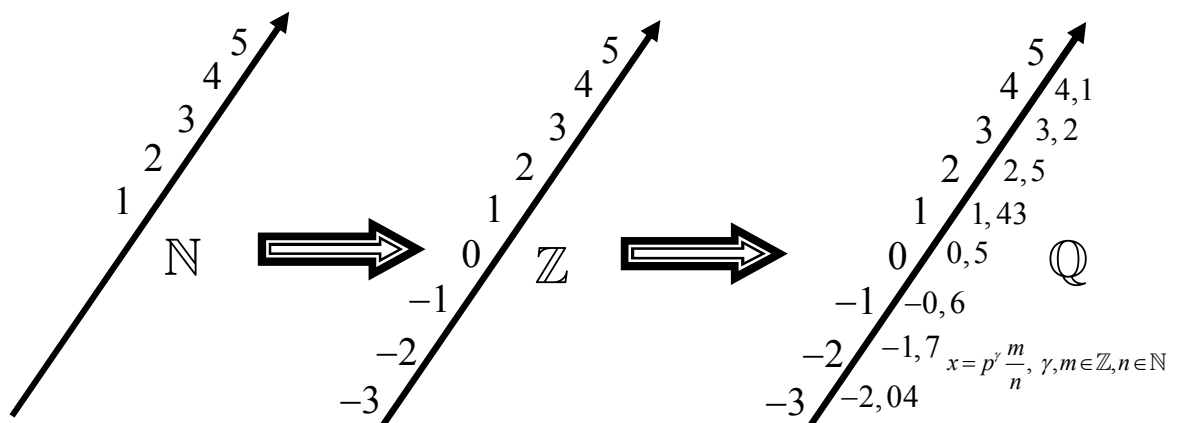


Рис.1. Процесс «залатывания» дыр при переходе от множества натуральных чисел \mathbb{N} к полю рациональных чисел \mathbb{Q} .

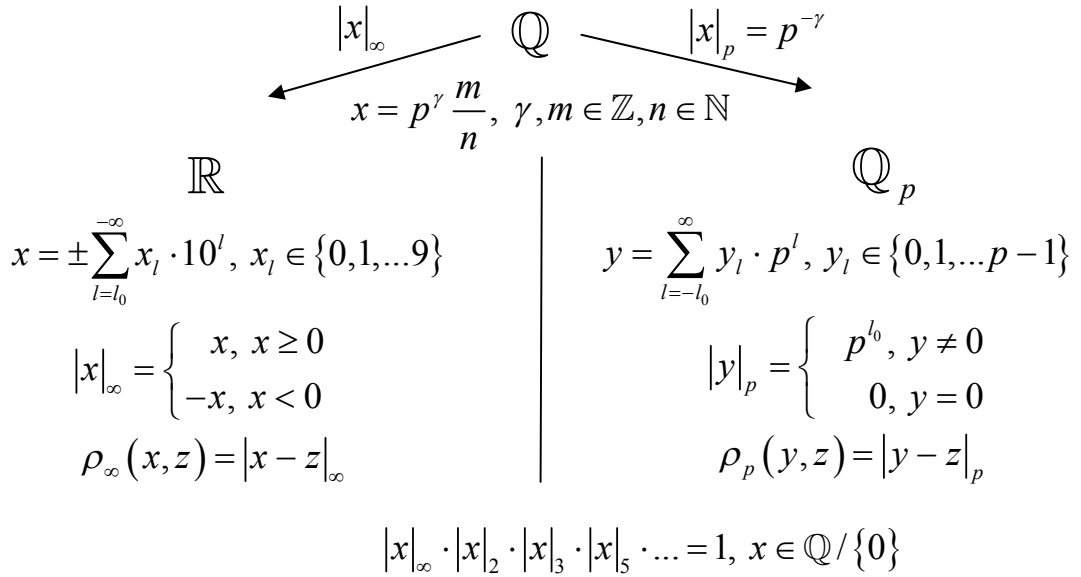


Рис.2. Образование вещественных и p -адических чисел пополнением поля рациональных чисел по евклидовой $|\cdot|_{\infty}$ и p -адической $|\cdot|_p$ нормам.

Далее переход от \mathbb{Q} к \mathbb{R} осуществляется с помощью стандартной процедуры пополнения $[\cdot]$ по евклидовой норме $|\cdot|_{\infty}$, определяемой так

$$|x|_{\infty} = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Вещественные числа находятся во взаимно-однозначном соответствии с рядами вида

$$x = x_{l_0} x_{l_0-1} \dots x_0, x_{-1} x_{-2} \dots = \pm \sum_{l=l_0}^{-\infty} x_l \cdot 10^l, x_l \in \{0, 1, \dots, 9\}. \quad (2)$$

Поле вещественных чисел является метрическим пространством. Метрика $\rho_{\infty}(x, y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ вводится стандартным образом как

$$\rho_{\infty}(x, y) = |x - y|_{\infty}. \quad (3)$$

Любое рациональное число x можно единственным образом $[\cdot]$ представить в виде

$$x = \pm p^{\gamma} \frac{m}{n}, \gamma \in \mathbb{Z}, n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Здесь p - простое число и p, m, n взаимно просты.

p -адической нормой $|\cdot|_p$ рационального числа x , представленного в виде (4) называется число

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-\gamma}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Например, $|2|_2 = 1/2$, $|2/3|_3 = 3$, $|6|_5 = 1$.

Пополнение поля \mathbb{Q} по норме (5) называется полем p -адических чисел \mathbb{Q}_p . p -адические числа находятся во взаимно-однозначном соответствии с рядами вида (их каноническая форма произвольного p -адического числа)

$$y = \dots y_1 y_0, y_{-1} y_{-2} \dots y_{-l_0} = \sum_{l=-l_0}^{\infty} y_l \cdot p^l, y_l \in \{0, 1, \dots, p-1\}. \quad (6)$$

Норма $|\cdot|_p$ числа из \mathbb{Q}_p , представленного в виде (6) равна $|y|_p = \begin{cases} p^{l_0}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Число l_0 называется [] порядком числа y и обозначается $ord_p y$. p -адические числа с нормой не больше 1 называются кольцом целых \mathbb{Z}_p p -адических чисел.

Отметим теперь свойства p -адической нормы и метрического пространства, связанного с введенной нормой.

Норма $|\cdot|_p$ обладает следующими свойствами: для любых $y, z \in \mathbb{Q}_p$

- 1) $|y|_p \geq 0$, $|y|_p = 0 \Leftrightarrow y = 0$;
- 2) $|y \cdot z|_p = |y|_p \cdot |z|_p$;
- 3) $|y + z|_p \leq \max\{|y|_p, |z|_p\} \leq |y|_p + |z|_p$.

Свойство 3) – более сильное, чем классическое неравенство треугольника и выражает свойство неархимедовости поля \mathbb{Q}_p [].

Евклидова норма $|\cdot|_{\infty}$ и p -адические нормы $|\cdot|_p$ для произвольного рационального числа связаны адельной формулой [] $|x|_{\infty} \cdot |x|_2 \cdot |x|_3 \cdot |x|_5 \cdot \dots = 1$, $x \in \mathbb{Q} / \{0\}$. Эта связь отражается на рис.2.

Поле \mathbb{Q}_p - простейший пример ультраметрического пространства. Обсудим определение и основные свойства такого пространства. Ультраметрическое пространство – метрическое пространство с метрикой $\rho(x, y)$, удовлетворяющей следующим свойствам:

- 1) $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- 2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
- 3) $\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$.

Можно проверить [], что метрика $\rho(x, y) = |x - y|_p$ удовлетворяет всем вышеприведенным свойствам. Геометрия ультраметрического пространства \mathbb{Q}_p весьма необычна []. Все треугольники в нем равнобедренные; всякая точка шара $B_r(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x - a|_p \leq p^r\}$ является его центром; шар не имеет границы; шар есть объединение конечного числа непересекающихся шаров меньшего радиуса; если два шара пересекаются, то один содержит другой. Поле \mathbb{Q}_p - векторное пространство с иерархической (фрактальной) структурой. Для примера на рис.3 изображена модель пространства \mathbb{Q}_2 в виде последовательности шаров и дерева.

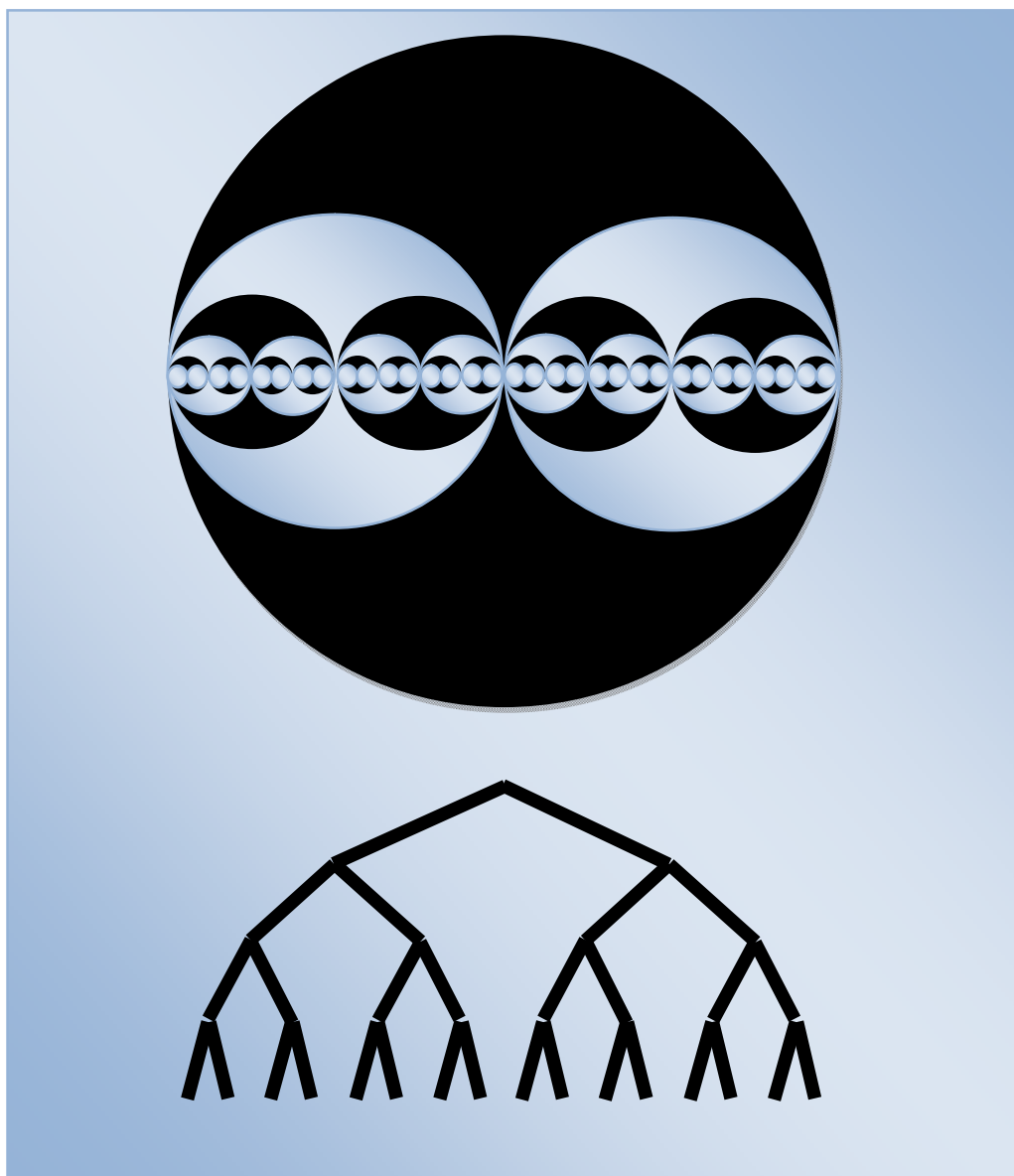


Рис.3. Модель пространства \mathbb{Q}_2 в виде объединения шаров и дерева.

Рассмотрим основные положения анализа на \mathbb{Q}_p []. Мера Хаара μ_p на \mathbb{Q}_p определяется так, что мера любого шара равна его диаметру. Для нее

выполнены свойства инвариантности относительно трансляции $d\mu_p(x+a) = d\mu_p(x), a \in \mathbb{Q}_p$ и преобразовании при растяжениях $d\mu_p(ax) = |a|_p^{-1} d\mu_p(x), a \in \mathbb{Q}_p / \{0\}$. Характеристическая функция шара $\Omega(|x|_p)$ вводится так

$$\Omega(|x|_p) = \begin{cases} 1, & |x|_p \leq 1, \\ 0, & |x|_p > 1. \end{cases} \quad (7)$$

Рассмотрим примеры вычисления интегралов в \mathbb{Q}_p по мере Хаара μ_p .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(|x|_p) d\mu_p(x) &= \int_{|x|_p \leq 1} d\mu_p(x) = 1. \\ \int_{\mathbb{Q}_p} \Omega(p^{-\alpha} |x|_p) d\mu_p(x) &= \int_{|x|_p \leq p^\alpha} d\mu_p(x) = p^\alpha. \end{aligned}$$

Функция f из \mathbb{Q}_p называется локально постоянной, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p$ существует число $d > 0$ такое, что для любого $x' \in \mathbb{Q}_p$, удовлетворяющего условию $|x - x'|_p \leq d$ имеет место $f(x) = f(x')$. Функция шара (7) является локально постоянной.

Пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ p -адических основных функций определяется [] как пространство локально постоянных функций с компактным носителем. Любая основная функция есть комбинация функций шара (7). Будем обозначать [] $D_0(\mathbb{Q}_p)$, как пространство основных функций с нулевым средним.

Комплекснозначный аддитивный характер поля \mathbb{Q}_p определяется как $\chi_p(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$, где символом $\{\circ\}_p$ обозначается взятие дробной части от p -адического числа, которое для представления (6) записывается так $\{y\}_p = 0, y_{-1}y_{-2}\dots y_{-l_0} = \sum_{l=-l_0}^{-1} y_l \cdot p^l$. Имеет место свойство характера $\chi_p(x+y) = \chi_p(x)\chi_p(y)$. Пусть $\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi ix), x \in \mathbb{Q}$, тогда справедлива [] следующая адельная формула:

$$\chi_\infty(x) \prod_p \chi_p(x) = 1. \quad (8)$$

Из адельной формулы (8) можно сделать следующее физическое заключение []: классическая плоская волна $\chi_\infty(x)$ состоит из бесконечного количества p -адических плоских волн $\chi_p(x)$.

р-адическое преобразование Фурье функции $f(x)$ определяется [] так

$$\mathfrak{F}[f](k) = \int \chi_p(kx) f(x) d\mu_p(x). \quad (9)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\mathfrak{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \int \chi_p(-kx) \hat{f}(k) d\mu_p(k). \quad (10)$$

Можно показать [], что преобразование Фурье (9,10) переводит пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ в себя. В частности $\mathfrak{F}[\Omega(|x|_p)](k) = \Omega(|k|_p)$.

Оператор р-адического дробного дифференцирования (оператор Владимирова) определяется следующим образом:

$$D^\alpha f(x) = \mathfrak{F}^{-1} \circ |k|_p^\alpha \circ \mathfrak{F}[f](k). \quad (11)$$

Для $\alpha > 0$ имеет место следующее интегральное представление:

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)} \int_{\mathbb{Q}_p} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|_p^{1+\alpha}} d\mu_p(y), \quad (12)$$

где $\Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^\alpha - 1}{1 - p^{-1-\alpha}}$.

Оператор Владимирова не переводит пространство $D(\mathbb{Q}_p)$ в себя, но переводит $D_0(\mathbb{Q}_p)$ в себя. Оператор Владимирова будет использоваться ниже при исследовании дифференциальных свойств R-операций при построении R-отображений.

На этом краткое введение в р-адический анализ заканчиваем и переходим к теории фрактальных антенн и применению некоторых простейших р-адических функций к синтезу фрактальных подрешеток.

Теория фрактальных антенн

В своем изложении будем в основном следовать [Зелкин, Кравченко, Гусевский]. Идеи и методы фрактальной геометрии находят применение в электродинамике, обнаружении малококонтрастных целей в радиолокации, в теории синтеза антенн. В радиофизике и антенной технике фракталы начали применяться с 90-х годов прошлого столетия. С точки зрения фрактальной теории исследовалось использование миниатюрных элементов в решетках для повышения плотности упаковки, что приводит к увеличению угла сканирования. Изучались [] способы оценки свойств пространственного заполнения множителя решетки таких антенн. Свойство пространственного заполнения позволяет получить кривые, которые являются электрически длинными, но физически компактными и занимают малую площадь. Благодаря этому можно добиться миниатюризации антенных элементов. Антенны, построенные с использованием фракталов, условно подразделяются [] на две большие группы: антенны, имеющие фрактальные диаграммы направленности (ДН) и антенны, с токовым распределением, построенным по фрактальному закону. Антенные решетки с фрактальным токовым распределением имеют относительно низкий уровень боковых лепестков, высокий коэффициент направленного действия (КНД), но требовательны к точности изготовления и расположения излучателей. Антенные решетки с фрактальной ДН менее требовательны к точности расположения излучателей, но имеют низкий КНД и достаточно высокий уровень боковых лепестков. Такие решетки по своим свойствам похожи на решетки со случайным расположением элементов. Они синтезируются введением эквидистантных антенных подрешеток. Введение антенных подрешеток дает возможность построения фрактальных антенн с различным уровнем боковых лепестков и формой ДН.

Приведем основные сведения о построении одномерных антенных решеток с фрактальным распределением тока.

Как известно [Марков, Сазонов], ДН линейного излучателя длиной L . Параллельного оси z и имеющего распределение тока $I(z)$, описывается интегральным выражением вида

$$F(\theta) = \int_{-L/2}^{L/2} I(z) e^{ikz \cos(\theta + \xi)} dz, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (13)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновое число, λ - длина волны, ξ - коэффициент замедления фазовой скорости по отношению к скорости света. На практике при вычислении выражения (13) используют условие, что при замене переменных $\chi = -k \cos(\theta + \xi)$ ДН $F(\theta)$ и распределение тока $I(z)$ связаны

преобразованием Фурье. Это позволяет использовать алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ). В случае, если $I(z)$ задан дискретными значениями, можно воспользоваться расчетными соотношениями для дискретного аналога идеального линейного излучателя – эквидистантной антенной решетки. В эквидистантной решетке излучатели располагаются с постоянным шагом d в точках $z_n = (n-1)d$, где n - номер излучателя, и возбуждается токами с амплитудами I_n . Выражение для ДН в этом случае имеет вид

$$F_N(\theta) = \sum_{n=1}^N I_n \exp[i(n-1)kd \cos(\theta - \xi)], L = Nd. \quad (14)$$

Отличия ДН антенной решетки и линейного излучателя заключаются в том, что ДН решетки – периодическая функция с периодом $N\pi$. Приведем основные соотношения [1], используемые при анализе ДН антенных решеток.

Угловое положение главного максимума - $\theta_0 = \arccos(\xi), |\xi| \leq 1$; КНД -

$$D = \frac{2F^2(\theta_0)}{\int_0^\pi F^2(\theta) \sin(\theta) d\theta}; \text{ ширина главного луча при наклонном излучении}$$

$(0 < |\xi| < 1)$ - $\Delta\theta = \Delta\Psi_{0,707} / 0,5kL \sin(\theta_0)$; ширина луча при осевом излучении -

$$\Psi_{0,707} / 2 = \frac{\pi L}{\lambda} \left(\cos \frac{\Delta\theta}{2} - 1 \right).$$

