С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, p-адические всплески и их приложения, *Труды МИАН*, 2014, том 285, 166–206

DOI: 10.1134/S0371968514020125

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2014, т. 285, с. 166–206

УДК 517.5+517.984.5

p-Адические всплески и их приложения[1]

С. В. Козырев[2], А. Ю. Хренников[3], $\boxed{\text{В. М. Шелкович}}$[4]

Поступило в октябре 2013 г.

Излагается теория p-адических всплесков. Обсуждаются одномерные и многомерные базисы всплесков и их связь со спектральной теорией псевдодифференциальных операторов. Впервые базисы из собственных векторов с компактным носителем для p-адических псевдодифференциальных операторов были рассмотрены В.С. Владимировым. В отличие от вещественных всплесков p-адические всплески связаны с теорией представлений групп, а именно фреймы p-адических всплесков являются орбитами p-адических групп преобразований (системами когерентных состояний). Рассматривается p-адический кратномасштабный анализ. Показывается, что p-адический кратномасштабный анализ является частным случаем конструкции фрейма p-адических всплесков как орбиты действия аффинной группы.

DOI: 10.1134/S0371968514020125

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. p-Адические всплески. Сегодня трудно найти прикладную область, где бы не использовались всплески, или вейвлеты (wavelets). Первый базис всплесков был введен Хааром в 1910 г. В [40] Хаар построил ортогональный базис для $L^2(\mathbb{R})$, состоящий из диадических сдвигов и растяжений одной кусочно постоянной функции:

$$\psi^{\mathrm{H}}_{jn}(x) = 2^{-j/2}\psi^{\mathrm{H}}(2^{-j}x - n), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов “Mathematical Modeling and System Collaboration”, “Mathematical Modeling of Complex Hierarchic Systems” факультета естественных наук и техники Университета Линнея (Faculty of Natural Science and Engineering, Linnaeus University). Работа первого автора была выполнена также при частичной финансовой поддержке программы ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

[2] Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: kozyrev@mi.ras.ru

[3] International Center for Mathematical Modeling in Physics, Engineering and Cognitive Sciences, Linnaeus University, Växjö, Sweden.
E-mail: Andrei.Khrennikov@lnu.se

[4] Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, Санкт-Петербург, Россия; Кафедра высшей математики и математической физики, физический факультет, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.

где

$$\psi^{\mathrm{H}}(x) = \chi_{[0,\frac{1}{2})}(x) - \chi_{[\frac{1}{2},1]}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < \dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \le x \le 1, \\ 0, & x \notin [0,1], \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

называется *всплеск-функцией Хаара* (ее сдвиги и растяжения образуют базис Хаара (1.1)). Здесь $\chi_A(x)$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}$.

Хотя базис Хаара (1.1) и его различные обобщения рассматривались многими математиками, почти в течение столетия никто не мог построить другую всплеск-функцию, сдвиги и растяжения которой образовывали бы ортогональный базис. И только в начале 1990-х годов был разработан метод построения всплеск-функций. Этот метод основан на понятии *кратномасштабного анализа* (КМА), который был введен Мейером [89] и Малла [86, 87]. С помощью этого метода были построены всплеск-функции, оказавшиеся очень полезными для различных инженерных приложений, в частности, важные примеры базисов всплесков были построены Добеши [23]. В настоящее время теория всплесков интенсивно развивается и продолжает находить приложения. Для обзора теории всплесков и других систем функций см. монографии Кашина и Саакяна [42], Конягина и Шпарлинского [68], Добеши [23] и Новикова, Протасова и Скопиной [92].

Следует отметить, что, хотя вещественные базисы всплесков строятся при помощи наборов сдвигов и растяжений, соответствующие базисам наборы сдвигов и растяжений не образуют группы.

Развитие p-адической теории всплесков было начато в работе Козырева 2002 г. [71]. В этой работе был построен p-адический базис комплекснозначных всплеск-функций с компактным носителем для $L^2(\mathbb{Q}_p)$, являющийся аналогом базиса Хаара:

$$\psi_{k;jn}(x) = p^{-j/2}\chi\big(p^{-1}k(p^jx - n)\big)\Omega(|p^jx - n|_p), \qquad x \in \mathbb{Q}_p; \tag{1.3}$$

здесь $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, индекс n есть элемент фактор-группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, понимаемый как рациональное число (представитель соответствующего класса эквивалентности в фактор-группе) вида

$$n = \sum_{i=a}^{-1} n_i p^i, \tag{1.4}$$

где $a \in \mathbb{Z}_-$ (целое отрицательное число), $n_i \in \{0, \dots, p-1\}$ (далее такая система представителей в $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ будет обозначаться через I_p, такие представители можно отождествлять с p-адическими числами с нулевой целой частью, см. следующий раздел), χ есть аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ (см. п. 2.3), $\Omega(t)$ есть характеристическая функция отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Отметим, что функции $\psi_{k;jn}$ вида (1.3) *зависят* от выбора представителя класса эквивалентности $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (разный выбор представителя дает функции, отличающиеся умножением на корни степени p из единицы), поэтому мы далее всегда считаем, что представители $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ выбраны правилом (1.4).

Базис (1.3) получается сдвигами и растяжениями всплеск-функции

$$\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p), \qquad x \in \mathbb{Q}_p. \tag{1.5}$$

Более того, орбита приведенной выше функции относительно всевозможных сдвигов и растяжений из аффинной группы, т.е. преобразований вида

$$f(x) \mapsto |a|_p^{-1/2} f\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad a, b \in \mathbb{Q}_p, \quad a \ne 0,$$

совпадает с множеством всевозможных произведений элементов базиса (1.3) на корни степени p из единицы. Таким образом, уже на этом простом примере видно отличие вещественных и p-адических всплесков: в p-адическом случае системы всплесков связаны с теорией представлений групп. Эта связь обобщается на различные всплеск-функции и на различные группы преобразований, в частности, в многомерном случае.

Базис p-адических всплесков (1.3) был распространен на случай локально компактных ультраметрических пространств Козыревым и Хренниковым [47, 74, 77].

Дж.Дж. и Р.Л. Бенедетто [17, 18] предложили метод построения базисов всплесков на локально компактных абелевых группах с компактными открытыми подгруппами. Их метод основан не на подходе КМА, а на “теории множеств всплесков” (theory of wavelet sets). Этим методом можно получить всплеск-функции, преобразования Фурье которых являются характеристическими функциями некоторых множеств [17, Proposition 5.1] (в частности, этим методом может быть получен базис (1.3)).

1.2. p-Адический кратномасштабный анализ. Для p-адического КМА (см. ниже определение 10.1) масштабирующее уравнение имеет вид [52] (см. п. 10.2)

$$\phi(x)=\sum_{r=0}^{p-1}\phi\biggl(\frac{1}{p}x-\frac{r}{p}\biggr),\qquad x\in\mathbb{Q}_p. \tag{1.6}$$

Это уравнение отражает естественное самоподобие пространства $\mathbb{Q}_p$. Решение ϕ этого уравнения (*масштабирующая функция*) является характеристической функцией $\Omega(|x|_p)$ единичного шара. Уравнение (1.6) для $p=2$ имеет вид

$$\phi(x)=\phi\biggl(\frac{1}{2}x\biggr)+\phi\biggl(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\biggr),\qquad x\in\mathbb{Q}_2, \tag{1.7}$$

и является непосредственным аналогом масштабирующего уравнения

$$\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1),\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{1.8}$$

порождающего в вещественном случае хааровский КМА и хааровский базис всплесков (1.1), (1.2). Решение уравнения (1.7) (2-адическая масштабирующая функция) $\phi(x)=\Omega(|x|_2)$ является характеристической функцией единичного шара в $\mathbb{Q}_2$, тогда как решение уравнения (1.8) (вещественная масштабирующая функция)

$$\phi^{\mathrm{H}}(t)=\chi_{[0,1]}(x)=\begin{cases}1, & t\in[0,1],\\ 0, & t\notin[0,1],\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}, \tag{1.9}$$

является характеристической функцией единичного интервала $[0,1]$.

В [101] по аналогии с вещественным случаем было введено определение p-адического КМА в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ (см. определение 10.1). В этой же статье для случая $p=2$ был построен конкретный 2-адический КМА, являющийся аналогом хааровского КМА в $L^2(\mathbb{R})$. В разд. 11 мы проводим это построение для произвольного p. В противоположность хааровскому КМА в $L^2(\mathbb{R})$, в p-адическом случае существует *бесконечное множество различных ортогональных базисов Хаара* для $L^2(\mathbb{Q}_p)$, порожденных одним и тем же КМА. Эти бесконечные семейства p-адических базисов всплесков хааровского типа были построены для $p=2$ в [101] и для произвольного p в [56] (см. теоремы 11.4, 11.3). Базис всплесков Козырева (1.3) (см. (11.5) и (11.3)) совпадает с одним из таких базисов. Такие базисы (кроме (1.3)) не могут быть получены в рамках алгоритма Бенедетто [17].

В [53–55] были построены базисы всплесков, названные авторами нехааровскими.

В [57] (см. разд. 12) были изучены p-адические масштабирующие уравнения и их решения — масштабирующие функции. Одно из этих уравнений совпадает с естественным масштабирующим уравнением (1.6). Был описан широкий класс p-адических масштабирующих функций, порождающих КМА. Все эти функции являются 1-периодическими и такими, что их сдвиги попарно ортогональны (ортогональные масштабирующие функции). Как было позднее доказано в [1, 2], не существует ортогональных масштабирующих функций (из класса основных функций), отличных от описанных в [57]. Более того, согласно [1, 2] все эти функции порождают один и тот же p-адический хааровский КМА. Кроме того, согласно [2] не существует ортогональных базисов всплесков, получаемых с помощью КМА, отличных от описанных в [56, 101] (см. теоремы 11.4, 11.3).

В разд. 14 согласно стандартному подходу Мейера и Малла (см., например, книгу [92, пар. 2.1]) описывается многомерный p-адический КМА как тензорное произведение одномерных p-адических КМА. В [93] обсуждается КМА Хаара на различных пространствах.

1.3. Фреймы всплесков как системы когерентных состояний. В вещественном случае основным подходом к построению базисов всплесков являлся метод кратномасштабного анализа. В p-адическом случае базисы и фреймы всплесков оказываются связанными с системами когерентных состояний относительно действия аффинной группы в одномерном случае, а также различных групп, порожденных сдвигами и растяжениями, в многомерном случае.

Системой обобщенных когерентных состояний для группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (см. [95]) называется орбита унитарного представления этой группы в пространстве $\mathcal{H}$. Когерентные состояния возникли в квантовой механике (см., например, [60]), в p-адической квантовой механике системы когерентных состояний были изучены Зеленовым [120].

Для представлений p-адических групп преобразований (например, подгрупп линейных и аффинных групп) в естественных функциональных пространствах орбита локально постоянной функции с ограниченным снизу диаметром локального постоянства (например, функции f из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций p-адического аргумента) будет дискретным множеством. Это связано с тем, что малое преобразование будет переводить такую функцию в себя в силу локального постоянства.

Из теории обобщенных когерентных состояний следует, что (для неприводимого представления при выполнении некоторых условий интегрируемости) в этом случае орбита будет представлять собой жесткий однородный фрейм, т.е. для орбиты $\{f^{(N)}\}$ (где N нумерует элементы орбиты функции f) найдется $A>0$ такое, что при всех $g\in\mathcal{H}$ будет иметь место равенство

$$\sum_N |\langle g, f^{(N)}\rangle|^2 = A\|g\|^2,$$

где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ есть скалярное произведение в $\mathcal{H}$.

Упомянутые условия интегрируемости будут выполнены для систем когерентных состояний (для естественно возникающих в теории всплесков действий групп), являющихся орбитами функций f из пространства $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций p-адического аргумента с нулевым средним.

Таким образом, поскольку непрерывное всплеск-преобразование является разложением по системе когерентных состояний аффинной группы, в p-адическом случае непрерывный и дискретный анализ всплесков (включая также многомерный случай) можно рассматривать единообразно в рамках теории представлений групп [7].

В разд. 5 настоящего обзора (см. также [9]) такой подход применяется к исследованию орбит относительно одномерной p-адической аффинной группы функции $f\in\Phi(\mathbb{Q}_p)$. Показывается, что если f есть функция общего положения, то соответствующий жесткий фрейм имеет параметризацию, аналогичную параметризации базиса p-адических всплесков. Таким образом, структура базиса всплесков в кратномасштабной конструкции появляется в p-адическом случае автоматически. Этим способом можно строить самые общие фреймы всплесков, включая те, которые не могут быть построены при помощи кратномасштабной конструкции. Более того, как мы увидим, для корректного проведения кратномасштабной конструкции необходима структура представления группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ на пространстве V_0 кратномасштабного разложения. Таким образом, кратномасштабный анализ в p-адическом случае оказывается частным случаем метода когерентных состояний.

Многомерный p-адический базис, полученный как прямое произведение одномерных базисов всплесков (1.3), был рассмотрен в [3] (см. также разд. 14). В [10] было показано, что многомерный базис связан с теорией представлений группы, порожденной сдвигами, растяжениями и сохраняющими норму линейными преобразованиями (т.е. этот базис можно рассматривать как систему когерентных состояний для такой группы; см. разд. 6).

В многомерном случае метрики на p-адических пространствах могут быть введены неединственным образом. Автоморфизмы деревьев шаров относительно многомерных p-адических метрик будут отвечать матричным растяжениям многомерных всплесков, известным в вещественном анализе всплесков [39]. В p-адическом случае матричные растяжения впервые были рассмотрены в [59], где было показано, что шахматный (quincunx) базис всплесков, который в вещественном случае включал функции с носителями на фракталах, в p-адическом случае состоит из p-адических основных функций. В разд. 7 (см. также [11]) строятся различные p-адические базисы всплесков с матричными растяжениями, отвечающие группам автоморфизмов деревьев шаров в $\mathbb{Q}_p^d$ относительно различных метрик. Таким образом, различные многомерные p-адические базисы всплесков могут соответствовать представлениям различных групп.

1.4. p-Адические псевдодифференциальные операторы. Для комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p$ операция дифференцирования не определена (естественный аналог оператора дифференцирования незамыкаем). Модели p-адической математической физики вместо дифференциальных операторов используют псевдодифференциальные.

Теория p-адических псевдодифференциальных операторов тесно связана с теорией p-адических всплесков. Уже в первой работе о p-адических всплесках [71] было отмечено, что всплески являются собственными векторами оператора Владимирова p-адического дробного дифференцирования[5]

$$D^\alpha \psi_{k;jn} = p^{\alpha(1-j)} \psi_{k;jn}.$$

Более того, при помощи отображения Монна можно перенести действие p-адических псевдодифференциальных операторов на функции вещественного аргумента (см. [71] и разд. 9). Таким образом, вещественные всплески Хаара будут собственными векторами оператора Владимирова.

Дальнейшее развитие методов теории всплесков в связи с приложениями к спектральной теории p-адических псевдодифференциальных операторов имело место в работах [3–5, 8, 12, 47, 48, 52, 53, 55, 56, 71–78] (см. разд. 16). Различные примеры p-адических псевдодифференциальных операторов и их приложения (в том числе с применением всплесков) изучались в [21, 22, 98, 104, 125].

Кроме того, было показано (см. разд. 16), что, помимо привычного класса псевдодифференциальных операторов (диагонализующихся преобразованием Фурье), в p-адическом случае [72, 73, 80] (а также для локально компактных ультраметрических пространств общего

[5]Существование у p-адических псевдодифференциальных операторов базисов из собственных векторов с компактным носителем было отмечено в [119], но построенный там базис не был базисом всплесков.

вида [47, 74, 77]) существует новый класс интегральных операторов, для которых всплески являются базисом из собственных векторов и спектр может быть вычислен в явном виде. Такие операторы имеют вид

$$Tf(x)=\int\limits_X T(\sup(x,y))(f(x)-f(y))\,d\nu(y).$$

Здесь X есть полное локально компактное ультраметрическое пространство (например, $\mathbb{Q}_p$), ν есть борелевская мера на таком пространстве, $\sup(x,y)$ есть минимальный шар, содержащий точки x и y, ядро интегрирования $T(I)$ есть функция на множестве шаров в X.

В частности, были введены базисы всплесков на произвольных полных локально компактных пространствах [47, 74, 77]. Всплески и псевдодифференциальные операторы на группе аделей обсуждались в [58, 69, 70].

1.5. p-Адический анализ и p-адическая математическая физика. Теоретическая и математическая физика в течение нескольких сотен лет развивалась на основе действительных, а затем и комплексных чисел. Однако последние 25 лет поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ и его расширения стали интенсивно использоваться в теоретической и математической физике. Для ознакомления с результатами в области p-адической математической физики см. монографии [45, 46, 66, 75, 120] и обзор [25].

Пионерскими работами в области неархимедовой математической физики были работы Владимирова и Воловича [112, 113]. В этих работах были введены неархимедовы суперсимметричные модели.

Исходная идея применения p-адического анализа в теоретической физике заключалась в том, что проблемы совместимости квантовой механики и теории гравитации возникают из-за использования бесконечно делимого вещественного континуума в качестве основной математической модели физического пространства. Было предположено, что в космологии и теории струн структура пространства-времени на так называемом планковском масштабе (порядка 10^{-23} см) будет нарушена и для измерений, производимых в таких масштабах, аксиома Архимеда может не выполняться (см. [121, 122], а также монографии [46, 120]).

Основы p-адической квантовой механики были заложены в работах Владимирова, Воловича, Драговича, Хренникова [13–16, 24, 26, 32, 44, 45, 114–117, 120]. Соответствующие математические проблемы были изучены в серии работ [105–107, 118, 119]; в частности, вопросы математического обоснования струнных амплитуд изучались в [108–111].

p-Адические псевдодифференциальные операторы и их применение в моделях математической физики изучались Владимировым [105, 106, 119]. Фундаментальные решения для важных классов псевдодифференциальных операторов были получены в работе Хренникова [43]. Большой вклад в развитие теории неархимедовых псевдодифференциальных уравнений внес Кочубей [61–67]. Базисы из собственных векторов с компактным носителем для p-адических псевдодифференциальных операторов были построены Владимировым [106, 119] и Кочубеем [61, 62]. Обобщение этих базисов привело к введению p-адических всплесков Козыревым [71]. В частности, p-адические всплески являются собственными векторами p-адических псевдодифференциальных операторов.

Эти результаты, а также приложения стимулировали развитие новых областей p-адического анализа, в частности теории p-адических всплесков [3, 47, 52–57, 71–73, 75, 77, 101].

Теория всплесков играет важную роль в приложениях p-адического анализа и открывает новые возможности для исследования p-адических псевдодифференциальных уравнений — не только линейных, но даже и нелинейных [5, 55, 75, 76], а также уравнений с сингулярными потенциалами [12, 81]. В [50] разложение p-адического случайного блуждания по всплескам применялось для вычисления корреляционных функций такого случайного процесса.

1.6. Связь с теорией Уолша. Как известно, функции Уолша можно отождествить с характерами канторовой диадической группы $\mathcal{C}$. В работах [82, 83] методами КМА были построены первые примеры ортогональных всплесков на группе $\mathcal{C}$, выявлена их мультифрактальная структура и найдены условия, при которых эти всплески порождают безусловные базисы в пространствах $L^q(\mathcal{C})$, $1 < q < \infty$. В работе [27] для финитных масштабирующих функций пространства $L^2(\mathcal{C})$, аналогичных масштабирующим функциям Добеши, указан алгоритм разложения в лакунарные ряды Уолша и получены точные по порядку оценки модулей гладкости (см. также недавнюю статью [97]); кроме того, в [27] были построены ортогональные всплески на локально компактной абелевой группе G, являющейся слабым прямым произведением счетного множества циклических групп p-го порядка (в случае $p = 2$ группа G изоморфна канторовой группе, а при $p > 2$ группа G является одной из групп Виленкина). В [28] дан обзор результатов о КМА и ортогональных всплесках на группах Виленкина, а в [29] рассмотрен биортогональный случай.

Теория КМА была также развита и для полупрямой $\mathbb{R}_+$ с диадическим сложением. В [96] для каждого натурального n на полупрямой $\mathbb{R}_+$ определены масштабирующие функции, масками которых являются полиномы Уолша порядка $2^n - 1$. Для решений соответствующих масштабирующих уравнений изучены условия Стрэнга–Фикса, свойство разбиения единицы, а также линейная независимость, стабильность и ортогональность целочисленных сдвигов. В терминах блокирующих множеств найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы решения этих уравнений порождали кратномасштабные анализы в $L^2(\mathbb{R}_+)$. Доказано, что либо финитная масштабирующая функция на $\mathbb{R}_+$ является двоично целой, либо ее гладкость конечна и может быть эффективно оценена сверху. В [31] изучены периодические всплески и фреймы на полупрямой $\mathbb{R}_+$, ассоциированные с ядрами Дирихле–Уолша, а в [30] описан метод построения p-всплесков с компактными носителями на $\mathbb{R}_+$ и получены обобщения соответствующих результатов из [96] (здесь $p \in \mathbb{N}$ — коэффициент растяжения, $p \geq 2$).

С обзором теории Уолша можно ознакомиться в монографии [38]. В работах [34–37] изучались псевдодифференциальные операторы на диадической полупрямой $\mathbb{R}_+$.

В разд. 2 приведены некоторые определения и факты из p-адического анализа, используемые в дальнейшем. Мы систематически используем обозначения и результаты книги [120].

2. p-АДИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

2.1. p-Адические числа. В данном пункте приведены некоторые основные определения, используемые в p-адическом анализе.

p-Адической нормой ненулевого рационального числа $x = p^\gamma m/n$, где p есть простое число, γ, m — целые, n — натуральное, p, m, n взаимно просты, называется число $|x|_p = p^{-\gamma}$ (норма нуля равна нулю).

Полем p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ называется пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по p-адической норме. p-Адические числа находятся во взаимно однозначном соответствии с рядами вида

$$x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \dots, p-1, \tag{2.1}$$

где γ — целое.

Дробной частью такого p-адического числа x называется рациональное число

$$\{x\} = \sum_{i=\gamma}^{-1} x_i p^i; \tag{2.2}$$

p-адическое число раскладывается в сумму целой и дробной части:

$$x = [x] + \{x\}.$$

Функция $d(x, y) = |x - y|_p$ удовлетворяет сильному неравенству треугольника

$$|x + y|_p \le \max(|x|_p, |y|_p).$$

d-Мерная p-адическая норма вводится как

$$|x|_p = \max_{l=1,\dots,d} |x_l|_p, \qquad x \in \mathbb{Q}_p^d. \tag{2.3}$$

Таким образом, d-мерный p-адический шар есть прямое произведение d одномерных шаров, т.е. совпадает с d-мерным кубом.

p-Адические числа с нормой не более 1, т.е. числа вида

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \dots, p-1, \tag{2.4}$$

образуют *кольцо $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел.*

Группа $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (фактор-группа поля p-адических чисел по кольцу целых p-адических чисел) может быть отождествлена с множеством дробей вида (множеством p-адических чисел с нулевой целой частью)

$$x = \sum_{i=\gamma}^{-1} x_i p^i, \qquad x_i = 0, \dots, p-1,$$

где $\gamma < 0$ — целое. Сложение в $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ есть сложение таких дробей по модулю 1. Мы будем далее также обозначать систему таких представителей через I_p.

Напомним, что мера Хаара на коммутативной топологической группе определена как мера, заданная на всех компактных подмножествах, не равная тождественно нулю и инвариантная относительно сдвигов.

Меру Хаара μ на $\mathbb{Q}_p$ можно определить следующим условием (аналогично определению меры Лебега на вещественной прямой): мера любого шара равна его диаметру. Инвариантная мера $d\mu(x)$ на поле $\mathbb{Q}_p$ стандартным образом расширяется до инвариантной меры $d^d\mu(x) = d\mu(x_1) \dots d\mu(x_d)$ на $\mathbb{Q}_p^d$.

Обозначим через $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$ пространство квадратично интегрируемых на $\mathbb{Q}_p^d$ комплекснозначных функций p-адического аргумента.

Будем обозначать через $B_\gamma^d(a) = \{x\colon |x - a|_p \le p^\gamma\}$ шар радиуса p^γ с центром в точке $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{Q}_p^d$, также обозначим через $S_\gamma^d(a) = \{x\colon |x - a|_p = p^\gamma\}$ соответствующую сферу, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Будем писать $B_\gamma^d(0) = B_\gamma^d$ и $S_\gamma^d(0) = S_\gamma^d$. Для случая $d = 1$ мы будем опускать в обозначении шара верхний индекс d.

2.2. Обобщенные функции Брюа–Шварца. В настоящем пункте помещены базовые определения теории основных и обобщенных функций на $\mathbb{Q}_p$ (см. [33, 120]). Пространства $\Phi'(\mathbb{Q}_p)$ изучались в [3, 8]. Разложения обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p)$ по всплескам (в частности, лемма 8.4) изучались в работе [8].

Мы рассматриваем комплекснозначные функции p-адического аргумента. Функция f называется *локально постоянной*, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p^d$ существует шар в $\mathbb{Q}_p^d$, содержащий x, на котором функция f постоянна. Диаметр максимального такого шара называется *диаметром локального постоянства функции f в точке x*; точная нижняя грань диаметров локального постоянства по x называется *диаметром локального постоянства функции f*. Пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Q}_p^d$ обозначим через $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^d)$.

Локально постоянная функция с компактным носителем называется *основной функцией*, пространство Брюа–Шварца таких функций обозначается через $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$. Любая основная функция является конечной линейной комбинацией характеристических функций шаров:

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{d(N-l)}} \varphi(a^\nu)\Omega\big(p^{-l}|x-a^\nu|_p\big), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^d, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d), \tag{2.5}$$

где $\Omega(p^{-l}|x-a^\nu|_p)$ — характеристическая функция шара $B_l^d(a^\nu)$; точки $a^\nu = (a_1^\nu,\dots,a_d^\nu) \in B_N^d$ суть произвольные точки в шарах $B_l^d(a^\nu)$, $\nu = 1,\dots,p^{d(N-l)}$, которые не имеют общих точек и покрывают шар B_N^d.

На пространстве основных функций имеет место естественная фильтрация линейными подпространствами $\mathcal{D}_{lN}$. Пространство $\mathcal{D}_{lN}$, $l \le N$, есть пространство всех функций с носителем в шаре B_N^d и диаметром локального постоянства p^l.

Фильтрация $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ есть согласованное с порядком отображение частично упорядоченного множества индексов (l,N) на частично упорядоченное (по вложению) множество пространств $\mathcal{D}_{lN}(\mathbb{Q}_p)$, причем $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ есть предел по вложению $\mathcal{D}_{lN}$ относительно порядка (индуктивный предел):

$$\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d) = \bigcup_{l,N} \mathcal{D}_{lN}, \qquad l,N \in \mathbb{Z}, \quad l \le N.$$

Индексы упорядочены таким образом, что соответствующие пространства основных функций вложены друг в друга:

$$\mathcal{D}_{lN} \supset \mathcal{D}_{l'N'},$$

т.е. $(l,N) \ge (l',N')$, при $l \le l'$, $N \ge N'$.

Топологию в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ определим как топологию индуктивного предела. Таким образом, последовательность $\{f_k\}$ функций из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ сходится, если эта последовательность целиком лежит в некотором пространстве $\mathcal{D}_{\gamma N}$ и сходится как последовательность в этом пространстве. Поскольку пространство $\mathcal{D}_{lN}$ конечномерно, топология там определяется однозначно (например, поточечной сходимостью).

Обобщенной функцией называется (всюду определенный) линейный функционал на пространстве $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций. Такой функционал будет автоматически непрерывным [120, §6, п. 3]. Линейное пространство обобщенных функций обозначают через $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$. На пространстве обобщенных функций определена слабая топология.

2.3. Преобразование Фурье и псевдодифференциальные операторы. Комплекснозначный аддитивный характер $\chi(x)$ p-адического аргумента для x, заданного (2.1), определен как

$$\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}), \qquad \{x\} = \sum_{j=\gamma}^{-1} x_j p^j. \tag{2.6}$$

Преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ определяется формулой

$$\widehat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \chi(\xi\cdot x)\varphi(x)\,d^d\mu(x), \qquad \xi \in \mathbb{Q}_p^d;$$

здесь $\xi\cdot x$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1,\dots,x_d)$ и $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d)$, где $x_l,\xi_l \in \mathbb{Q}_p$, $l = 1,2\dots,d$. Для $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ обратное преобразование Фурье определяется как $F^{-1}[\varphi](x) = \int_{\mathbb{Q}_p^d} \chi(-\xi\cdot x)\varphi(\xi)\,d^d\mu(\xi)$, $x \in \mathbb{Q}_p^d$.

Аналогично вещественному случаю преобразование Фурье функции из $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$ имеет вид

$$F[\varphi](\xi) = \lim_{R\to\infty} \int\limits_{|x|_p\le R} \chi(\xi\cdot x)\varphi(x)\,d^d\mu(x).$$

Лемма 2.1 [102, Lemma A; 103, Ch. III, (3.2); 120, § 7, п. 2]**.** *Преобразование Фурье является линейным изоморфизмом из* $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ *в* $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$*. При этом*

$$\varphi\in\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^d), \qquad \textit{если и только если} \qquad F[\varphi]\in\mathcal{D}_{-l}^{-N}(\mathbb{Q}_p^d). \tag{2.7}$$

Преобразование Фурье распределения $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$ является распределением $\widehat{f}=F[f]$, которое определяется соотношением $\langle F[f],\varphi\rangle=\langle f,F[\varphi]\rangle$ для всех $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$.

Пусть A — матрица, $\det A\ne 0$ и $b\in\mathbb{Q}_p^d$. Тогда для распределения $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$ имеет место следующее соотношение [120, § 7, (3.3)]:

$$F[f(Ax+b)](\xi) = |\det A|_p^{-1}\chi_p(-A^{-1}b\cdot\xi)F[f(x)]\big((A^*)^{-1}\xi\big), \tag{2.8}$$

где A^* — транспонированная матрица. Согласно [120, § 4, (3.1)]

$$F\big[\Omega(p^{-k}|\cdot|_p)\big](x) = p^{nk}\Omega(p^k|x|_p), \qquad k\in\mathbb{Z}, \quad x\in\mathbb{Q}_p^d. \tag{2.9}$$

В частности, характеристическая функция единичного шара с центром в нуле переходит в себя: $F[\Omega(|\xi|_p)](x)=\Omega(|x|_p)$.

Оператор Владимирова p-адического дробного дифференцирования определяется следующим образом:

$$D^\alpha f(x) = F^{-1}\circ|k|_p^\alpha\circ F[f](x).$$

Таким образом, этот оператор диагонализуется p-адическим преобразованием Фурье F. Оператор Владимирова переводит пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ (см. следующий пункт) в себя [120].

Для $\alpha>0$ (в одномерном случае) имеет место интегральное представление [120, § 9, (1.1)]

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma_p(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{Q}_p}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|_p^{1+\alpha}}\,d\mu(y), \tag{2.10}$$

где

$$\Gamma_p(-\alpha) = \frac{p^\alpha-1}{1-p^{-1-\alpha}}$$

есть p-адическая Г-функция [120, § 8, (2.17)].

2.4. p-Адические пространства Лизоркина основных функций и распределений. В работах [84, 85] были введены пространства, инвариантные относительно действия вещественных дробных операторов. Согласно [3, 4] p-адическое пространство Лизоркина основных функций определяется как подпространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)\subset\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций с нулевым средним. Топология на этом пространстве есть ограничение топологии на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ (относительно такой топологии $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ есть полное пространство).

Эквивалентно пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ может быть определено как фурье-образ пространства $\Psi(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций, обращающихся в нуле в нуль.

Обозначим через $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ и $\Psi'(\mathbb{Q}_p^d)$ пространства, топологически двойственные к пространствам $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ и $\Psi(\mathbb{Q}_p^d)$ соответственно. Назовем $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ *пространством Лизоркина p-адических* *распределений.* Пусть $\Psi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d)$ и $\Phi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d)$ — подпространства функционалов из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$, ортогональных к $\Psi(\mathbb{Q}_p^d)$ и $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ соответственно, т.е. $\Psi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)\colon f = C\delta,\, C \in \mathbb{C}\}$ и $\Phi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d) = \{f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)\colon f = C,\, C \in \mathbb{C}\}$.

Предложение 2.1 [3].

$$\Phi'(\mathbb{Q}_p^d) = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)/\Phi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d), \qquad \Psi'(\mathbb{Q}_p^d) = \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)/\Psi^{\perp}(\mathbb{Q}_p^d).$$

Таким образом, пространство $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ получается из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$ факторизацией по константам (два распределения из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$, отличающиеся константой, не различаются как элементы $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$).

Преобразование Фурье распределений $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ и $g \in \Psi'(\mathbb{Q}_p^d)$ определяется соответственно формулами $\langle F[f], \psi\rangle = \langle f, F[\psi]\rangle$ для всех $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^d)$ и $\langle F[g], \phi\rangle = \langle g, F[\phi]\rangle$ для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^d)$. Ясно, что $F[\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)] = \Psi'(\mathbb{Q}_p^d)$ и $F[\Psi'(\mathbb{Q}_p^d)] = \Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ [3].

3. БАЗИС p-АДИЧЕСКИХ ВСПЛЕСКОВ

В настоящем разделе обсуждаются конструкция базиса p-адических всплесков и связь этого базиса со спектральной теорией p-адических псевдодифференциальных операторов [71] и с орбитой аффинной группы [7, 9]. Таким образом, в p-адическом случае, в отличие от вещественного, теория всплесков оказывается существенным образом связанной со спектральной теорией и теорией представлений.

Базис p-адических всплесков вводится как набор сдвигов и растяжений конечного набора всплесков, связанных с единичным шаром. Чтобы ввести такой набор, рассмотрим следующую комплекснозначную функцию p-адического аргумента:

$$\psi_k(x) = \psi(kx) = \chi(p^{-1}kx)\Omega(|x|_p), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{3.1}$$

где $|k|_p = 1$, $\Omega(|x|_p)$ — характеристическая функция единичного шара $B_0 \subset \mathbb{Q}_p$, χ — аддитивный характер (2.6).

Существует в точности $p-1$ различных функций вида (3.1) (рассматриваемых как функции от x) в силу локального постоянства $\psi_k(x)$ как функции от k. А именно, выбирая представителей $k = 1, \dots, p-1$ в максимальных подшарах сферы $|k|_p = 1$, мы получим набор функций (всплесков)

$$\psi_k(x) = \chi(p^{-1}kx)\Omega(|x|_p), \qquad k = 1, \dots, p-1.$$

Таким образом, орбита группы растяжений из единичной сферы, действующих на всплеск $\psi = \chi(p^{-1}\,\cdot\,)\Omega(|\cdot|_p)$, есть в точности набор всплесков ψ_k.

Базис всплесков вводится при помощи сдвигов и растяжений конечного набора функций ψ_k. При этом в отличие от вещественного случая в p-адическом случае мы не можем использовать сдвиги на элементы подгруппы целых чисел, так как целые числа образуют плотное множество в единичном шаре. Вместо этого мы будем использовать сдвиги на представителей из классов эквивалентности фактор-группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ вида (3.3).

Теорема 3.1 [71]. 1. *Набор функций $\{\psi_{k;jn}\}$ (p-адических всплесков), получаемых из функций $\{\psi_k\}$ растяжениями на степени p и сдвигами на представителей классов эквивалентности фактор-группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$,*

$$\psi_{k;jn}(x) = p^{-j/2}\psi_k(p^j x - n), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \tag{3.2}$$

$$n = \sum_{i=\beta}^{-1} n_i p^i, \qquad n_i = 0, \dots, p-1, \quad \beta \in \mathbb{Z}_-, \tag{3.3}$$

есть ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, $\mathbb{Z}_-$ — множество отрицательных целых чисел.

2. *Элементы введенного базиса являются собственными векторами оператора Владимирова* (2.10) *p-адического дробного дифференцирования D^α*:

$$D^\alpha \psi_{k;jn} = p^{\alpha(1-j)}\psi_{k;jn}.$$

При выборе других (отличных от (3.3)) представителей классов эквивалентности $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ мы получим базис всплесков, элементы которого будут отличаться от приведенных выше умножением на корни степени p из единицы.

Обсудим связь построенного базиса и теории представлений p-адической аффинной группы. Аффинная группа действует в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ сдвигами и растяжениями

$$G(a,b)f(x) = |a|_p^{-1/2} f\left(\frac{x-b}{a}\right), \qquad a,b\in\mathbb{Q}_p, \quad a\neq 0.$$

Орбиты действия p-адических групп преобразований на функции из $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ (локально постоянные функции с компактным носителем и нулевым средним), т.е. соответствующие системы когерентных состояний для таких групп в смысле [95], будут фреймами всплесков (см. определение фрейма 4.1 ниже).

В частности, имеет место следующая лемма об орбите.

Лемма 3.1 [7]. *Орбита действия аффинной группы на всплеск $\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p)$ будет фреймом всплесков, содержащим всевозможные произведения всплесков из базиса* (3.2) *и корней из единицы степени p*: $\{e^{2\pi i p^{-1}m}\psi_{k;jn}\}$, $j\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $k=1,\dots,p-1$, $m=0,1,\dots,p-1$.

Отсюда следует, что непрерывное p-адическое всплеск-преобразование

$$F(a,b) = |a|_p^{-1/2}\int\limits_{\mathbb{Q}_p} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,dx$$

совпадает с разложением по (дискретному) базису p-адических всплесков.

Обсудим (см. также [10]) многомерный базис p-адических всплесков, являющийся прямым обобщением одномерного базиса. Рассмотрим набор функций

$$\psi_k(x) = \chi(p^{-1}k\cdot x)\Omega(|x|_p), \qquad x,k\in\mathbb{Q}_p^d, \tag{3.4}$$

где $|k|_p = 1$, $k\cdot x = \sum_{l=1}^d k_l x_l$, норма $|x|_p$ определена в (2.3).

Существует p^d-1 различных функций $\psi_k(x)$ (как функций от x). Мы выбираем следующих представителей k для d-мерного k, $|k|_p=1$, параметризующего приведенный выше набор функций:

$$k = (k_1,\dots,k_d), \qquad k_l = 0,\dots,p-1, \tag{3.5}$$

причем хотя бы одно из k_l не равно нулю. Индекс k параметризует набор максимальных (d-мерных) подшаров в p-адической d-мерной сфере $|k|_p=1$.

Мы строим базис d-мерных всплесков $\{\psi_{k;jn}\}$, применяя к набору функций $\{\psi_k\}$ растяжения на степени p и сдвиги на представителей классов эквивалентности фактор-группы $\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$:

$$\psi_{k;jn}(x) = p^{-dj/2}\psi_k(p^j x - n), \qquad x\in\mathbb{Q}_p^d, \quad j\in\mathbb{Z}, \quad n\in\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d, \tag{3.6}$$

$$n = \bigl(n^{(1)},\dots,n^{(d)}\bigr), \qquad n^{(l)} = \sum_{i=\beta_l}^{-1} n_i^{(l)}p^i, \quad n_i^{(l)} = 0,\dots,p-1, \quad \beta_l\in\mathbb{Z}_-. \tag{3.7}$$

Теорема 3.2 [10]. *Набор функций* $\{\psi_{k;jn}\}$, *определенный в* (3.6), (3.7), *является ортонормированным базисом в* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$.

Описанный выше многомерный базис всплесков совпадает с кратномасштабным многомерным базисом, получаемым как произведение одномерных базисов p-адических всплесков (см. разд. 14 ниже).

4. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

Напомним конструкцию обобщенных когерентных состояний [95]. Пусть G есть группа Ли, $T(g)$ есть унитарное представление этой группы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Выберем вектор $\psi_0 \in \mathcal{H}$. Пусть $H \subset G$ есть стабилизатор вектора ψ_0 (подгруппа преобразований, оставляющая ψ_0 инвариантным).

Системой когерентных состояний типа $\{G, T, \psi_0\}$ для унитарного представления группы G в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ назовем орбиту представления группы $T(g)\psi_0$. Таким образом, когерентное состояние определяется точкой фактор-пространства G/H.

Введем следующие обозначения. Пусть для $g \in G$ действие на $|0\rangle = \psi_0$ имеет вид

$$T(g)|0\rangle = |x(g)\rangle.$$

Полнота системы когерентных состояний следует из неприводимости представления T. Пусть группа G допускает двусторонне инвариантную меру μ. Такая мера индуцирует меру на однородном пространстве G/H. Рассмотрим интеграл по проекционным операторам

$$B = \int\limits_{G/H} |x\rangle\langle x|\, d\mu(x).$$

Здесь $|x\rangle\langle x|$ есть проекционный оператор на вектор $|x\rangle$.

В силу инвариантности меры μ оператор B коммутирует со всеми операторами $T(g)$:

$$T(g)BT^{-1}(g) = B.$$

Поэтому в силу неприводимости T оператор пропорционален единичному:

$$B = d\,\mathrm{id}, \qquad d = \langle 0|B|0\rangle = \int\limits_{G/H} |\langle 0|x\rangle|^2\, d\mu(x). \tag{4.1}$$

В частности, сходимость приведенного выше интеграла является необходимым условием существования оператора B.

Если орбита $\{|x\rangle\}$ является дискретным множеством, то формула для $\langle \psi_0, B\psi_0\rangle$ принимает вид

$$\sum_{x\in G/H} |\langle \psi_0|x\rangle|^2 = d\|\psi_0\|^2.$$

Здесь мера на G/H нормирована на единицу (мера каждого элемента этого дискретного множества равна 1).

Таким образом, в этом случае система когерентных состояний будет жестким однородным фреймом с границей d.

Напомним определение фрейма.

Определение 4.1. *Фреймом* $\{e_n\}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ называется набор векторов в $\mathcal{H}$ такой, что для некоторых $A, B > 0$ при всех $g \in \mathcal{H}$ выполнены неравенства

$$A\|g\|^2 \le \sum_n |\langle g, e_n\rangle|^2 \le B\|g\|^2.$$

Константы A, B называются *нижней* и *верхней границами* фрейма соответственно.

Если $A = B$, то фрейм называется *жестким.*

Если $\|e_n\| = \mathrm{const}$, то фрейм называется *однородным.*

Пример 4.1. Лемма 3.1 утверждает, что система когерентных состояний для p-адической аффинной группы, отвечающая вектору ψ (всплеску), является жестким однородным фреймом с границей p. Этот фрейм естественным образом отождествляется с базисом p-адических всплесков.

5. ОРБИТЫ ФУНКЦИЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВА $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ КАК ФРЕЙМЫ ВСПЛЕСКОВ

В настоящем разделе (см. также [9]) мы обсудим орбиты относительно одномерной аффинной группы для локально постоянных комплекснозначных функций одномерного p-адического аргумента. А именно пространство p-адических основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ содержит комплекснозначные локально постоянные функции с компактным носителем. Пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ есть подпространство в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ основных функций с нулевым средним.

Орбита функции из $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ будет дискретным множеством, и для такой функции будет сходиться интеграл (4.1) (для функций из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ с ненулевым средним этот интеграл будет расходиться). Такая орбита $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$ будет жестким однородным фреймом.

Более того, мы покажем, что орбиты функций общего положения из $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ (см. определение ниже) имеют параметризацию [9], совпадающую с используемой в кратномасштабном анализе. Таким образом, кратномасштабный анализ в p-адическом случае возникает автоматически и является конструкцией из теории представлений p-адических групп.

Следующая лемма описывает орбиты и стабилизаторы характеристических функций шаров в $\mathbb{Q}_p$ относительно унитарного действия аффинной группы.

Лемма 5.1. 1. *Орбита* $G\Omega(|\cdot|_p)$ *есть множество всех нормированных характеристических функций шаров в* $\mathbb{Q}_p$ *и совпадает с набором функций*

$$G(p^{-j}, p^{-j}n)\Omega(|x|_p) = p^{-j/2}\Omega(|p^j x - n|_p), \qquad n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

2. *Стабилизатор* $G_{p^{-j/2}\Omega(p^j\,\cdot\,-n)}$ *функции* $p^{-j/2}\Omega(p^j\;\cdot - n)$ *содержит все* $g = (a, b)$ *с* $|a|_p = 1$ *и* b *вида*

$$b = p^{-j}(n(1-a) + z), \qquad z \in \mathbb{Z}_p.$$

В частности, стабилизатор G_Ω *состоит из* $b \in \mathbb{Z}_p$ *и* a *с* $|a|_p = 1$.

Здесь элементы фактор-группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ заданы представителями (3.3).

Следующая лемма связана с леммой 3.1 об орбите.

Лемма 5.2. *Стабилизатор* $G_{\psi_{k;jn}}$ *всплеска* $\psi_{k;jn}$ *содержит все* $g = (a, b)$ *с*

$$a = 1 \bmod p, \qquad p^j b = n(1-a) \bmod p.$$

Функции $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с конечными линейными комбинациями всплесков:

$$f = \sum_{k,j,n} C_{kjn}\psi_{k;jn}, \qquad C_{kjn} \in \mathbb{C}. \tag{5.1}$$

Действие аффинной группы переводит всплеск во всплеск. Следовательно, если преобразование из аффинной группы переводит $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$ в себя, то такое преобразование либо сохраняет все всплески в приведенном выше разложении, либо действует перестановкой всплесков в этом разложении. Второй случай возможен, только если соответствующие коэффициенты при всплесках отличаются на корень из единицы, т.е. в специальном случае.

Мы будет говорить, что функция $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$ *общего положения*, если стабилизатор действия аффинной группы на f совпадает с пересечением стабилизаторов всплесков в разложении (5.1) для f.

Пример 5.1. Приведем пример функции необщего положения. Для этого рассмотрим всплеск $\psi_{k;-1,p^{-1}}$ (где k может принимать значения $1,\dots,p-1$) с носителем в шаре x: $|x-1|_p \le p^{-1}$. Рассмотрим преобразование $G(a,b)$ из аффинной группы с $b=0$, a: $|a|_p=1$, $|a-1|_p=1$, $a^{p-1}=1 \bmod p^2$, такое a существует[6]. Определим

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p-2} G^i(a,0)\psi_{k;-1,p^{-1}}(x)=\sum_{i=0}^{p-2}\psi\Big(kp^{-1}\Big(\frac{x}{a^i}-1\Big)\Big) \tag{5.2}$$

(т.е. f является суммой всплесков с носителями в максимальных подшарах сферы $|x|_p=1$, получающихся итерациями действия $G(a,0)$ на $\psi_{k;-1,p^{-1}}$).

Легко видеть, что функция f инвариантна относительно преобразования $G(a,0)$, но это преобразование не сохраняет всплески в разложении (5.2).

Лемма 5.3. *Пусть $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$, заданная* (5.1), *есть функция общего положения. Тогда стабилизатор G_f действия аффинной группы на f состоит из $g \in G$, $g=(a,b)$, таких, что a принадлежит шару*

$$|1-a|_p \le p^{-j_A}=\min\bigg[p^{-1},\frac{\max(p^{j_i-1},p^{j_l-1})}{|p^{-j_i}n_i-p^{-j_l}n_l|_p}\bigg], \tag{5.3}$$

где минимум берется по всем (j_i,n_i) и (j_l,n_l) в (5.1), *для которых $p^{-j_i}n_i-p^{-j_l}n_l\ne 0$, и b удовлетворяет неравенству*

$$\big|b-p^{-j_0}n_0(1-a)\big|_p \le p^{j_0-1}, \tag{5.4}$$

где j_0 есть минимальный j в разложении (5.1) *и n_0 есть соответствующий n.*

Индекс n_0 может быть неединствен, но стабилизатор не зависит от выбора n_0.

Замечание 5.1. Для доказательства этой леммы существенно, что для ультраметрических пространств легко вычислять пересечения. В частности, пересечение любого числа p-адических шаров есть шар, точка либо пустое множество, в то время как в вещественном случае пересечение шаров может иметь сложную форму.

Следующая теорема описывает фреймы p-адических всплесков, получаемые как орбиты функций общего положения из $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ относительно действия аффинной группы (см. определение фрейма 4.1).

Теорема 5.1. *Пусть $f \in \Phi(\mathbb{Q}_p)$ есть функция общего положения с разложением по всплескам*

$$f=\sum_{k,j,n} C_{kjn}\psi_{k;jn}, \qquad j\in\mathbb{Z},\quad n\in\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\quad k=1,\dots,p-1. \tag{5.5}$$

---

[6] По малой теореме Ферма $a^{p-1}=1 \bmod p$. Более того, по лемме Гензеля, так как производная $(a^{p-1}-1)'=(p-1)a^{p-2}\ne 0 \bmod p$ для $|a|_p=1$, существует a, $|a|_p=1$, такое, что $a^{p-1}=1 \bmod p^2$. Поскольку функция $\psi(kp^{-1}(x-1))$ является локально постоянной с диаметром локального постоянства p^{-2}, это доказывает, что f инвариантна.

Тогда орбита функции f относительно действия аффинной группы имеет следующие свойства:

1) *орбита совпадает с набором функций*

$$f^{(kjn)} = G(p^j k, p^j kn)f, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p/p^{1-j_0}\mathbb{Z}_p, \tag{5.6}$$

$$k = k_0 + k_1 p + k_2 p^2 + \ldots + k_{j_A-1}p^{j_A-1},$$

$$k_0 = 1, \ldots, p-1, \qquad k_i = 0, \ldots, p-1, \quad i > 0,$$

где j_0, j_A, n_0 *введены в лемме* 5.3;

2) *орбита есть однородный жесткий фрейм в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$: *нормы всех* $f^{(kjn)}$ *равны и для любого* $g \in L^2(\mathbb{Q}_p)$

$$\sum_{k,j,n} |\langle g, f^{(kjn)}\rangle|^2 = \|g\|^2 \sum_{k,j,n} |C_{kjn}|^2 p^{j_A-j_0+j}. \tag{5.7}$$

Индексы k в (5.6) нумеруют шары диаметра p^{-j_A} в единичной сфере и образуют группу относительно умножения $\mathrm{mod}\ p^{j_A}$.

В левой части формулы (5.7) суммирование идет по элементам орбиты функции f, в правой части суммирование идет по элементам базиса всплесков (т.е. индекс k в правой и левой частях этой формулы имеет разный смысл; то же самое относится к формулам (5.5), (5.6)).

Пример 5.2. Этот пример разобран в лемме 3.1. Для всплеска $\psi(x) = \chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p)$ орбита совпадает с множеством произведений $\{e^{2\pi i p^{-1}m}\psi_{k;jn}\}$ всплесков из базиса (3.2) и корней из единицы степени p. Граница фрейма будет равна p.

Пример 5.3. Рассмотрим более общий пример функции общего положения вида

$$f = \sum_{k,n} C_{kn}\psi_{k;jn} \tag{5.8}$$

(т.е. в разложении зафиксирован масштаб j).

В этом случае в силу (5.7) граница соответствующего фрейма $\{f^{(kjn)}\}$ будет иметь вид

$$p^{j_A}\sum_{k,n}|C_{kn}|^2 = p^{j_A}\|f\|^2,$$

где $j_A \geq 1$ (минимальное $j_A = 1$ рассмотрено в предыдущем примере).

6. ТЕОРИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И МНОГОМЕРНЫЕ ВСПЛЕСКИ

В настоящем разделе, основанном на результатах работы [10], мы показываем связь многомерного базиса всплесков (3.6), (3.7), построенного в теореме 3.2, и теории представлений некоторой p-адической группы преобразований. Относительно теории представлений p-адических групп см. [19, 20, 33, 91, 94, 99, 100].

Имеет место следующая лемма о действии аффинной группы на шарах относительно метрики (2.3).

Лемма 6.1. 1. *Группа* $\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$ *наборов дробей вида*

$$n = \bigl(n^{(1)}, \ldots, n^{(d)}\bigr), \qquad n^{(l)} = \sum_{i=\beta_l}^{-1} n_i^{(l)} p^i, \quad n_i^{(l)} = 0, \ldots, p-1, \quad \beta_l \in \mathbb{Z}_-,$$

с покомпонентным сложением по модулю единица действует транзитивно сдвигами на множестве всех шаров диаметра 1 *в* $\mathbb{Q}_p^d$.

2. *Характеристическая функция произвольного шара в* $\mathbb{Q}_p^d$ *единственным образом представима в виде*

$$\Omega(|p^j x - n|), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^d, \quad n \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Определение 6.1. Группа O_d есть группа всех линейных преобразований в $\mathbb{Q}_p^d$, сохраняющих p-адическую норму (2.3):

$$x \mapsto gx, \qquad (gx)_i = \sum_{j=1}^{d} g_{ij} x_j.$$

Здесь $g \in O_d$, $x \in \mathbb{Q}_p^d$, $|gx|_p = |x|_p$.

Такая группа может рассматриваться как p-адический аналог группы ортогональных линейных преобразований в $\mathbb{R}^d$.

Лемма 6.2. *Группа* O_d *совпадает с множеством матриц с матричными элементами из* $\mathbb{Z}_p$ *и* $|\det(\cdot)|_p = 1$.

Обозначим через $\mathcal{V}$ шар диаметра 1 в $\mathbb{Q}_p^d$ с центром в нуле. Такой шар есть $\mathbb{Z}_p$-модуль.

Лемма 6.3. *Группа* O_d *является стабилизатором единичного шара* $\mathcal{V}$ *в группе невырожденных линейных преобразований.*

Рассмотрим группу преобразований G, порождаемую матрицами из O_d, произвольными сдвигами и однородными по всем координатам растяжениями:

$$x \mapsto p^j x, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{Q}_p^d.$$

Мы рассматриваем представление группы G, действующей в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$ унитарными преобразованиями, т.е. матрицы из O_d действуют как

$$f(x) \mapsto f(gx),$$

сдвиги действуют как

$$f(x) \mapsto f(x+b),$$

и растяжения на степени p действуют как

$$f(x) \mapsto p^{-dj/2} f(p^j x).$$

Следующая теорема дает интерпретацию d-мерного базиса всплесков (3.6), (3.7) как системы когерентных состояний (орбиты описанного выше представления) для группы G.

Теорема 6.1. *Орбита функции* $\psi^{(1)}(x) = \chi(p^{-1}x_1)\Omega(|x|_p)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Q}_p^d$, *относительно рассмотренного унитарного представления группы* G *является фреймом в* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$, *состоящим из всевозможных произведений векторов из базиса* p*-адических всплесков* $\{\psi_{k;jn}\}$, *заданного* (3.6), (3.7), *и корней степени* p *из единицы.*

Замечание 6.1. Отметим, что в отличие от вещественного случая на p-адическом многомерном базисе всплесков автоматически возникает действие группы O_d сохраняющих норму линейных преобразований. Таким образом, p-адическая теория всплесков не только связана с действием аффинной группы, но и является естественным разделом теории p-адических групп матриц.

7. ВСПЛЕСКИ С МАТРИЧНЫМИ РАСТЯЖЕНИЯМИ

В многомерном случае метрики на p-адических пространствах могут быть введены неединственным образом (естественные примеры метрик отвечают флагам над конечными полями, см. ниже). Более того, различные метрики будут отвечать различным деревьям шаров в $\mathbb{Q}_p^d$ с разными группами автоморфизмов, а также различным базисам всплесков (автоморфизмы дерева шаров в ультраметрическом пространстве называются *шароморфизмами*).

Напомним, что дерево шаров в ультраметрическом пространстве определено следующим образом: вершинами являются нетривиальные шары (шары ненулевого диаметра либо изолированные точки), ребра соединяют вершины, образующие пару (шар, максимальный подшар), частичный порядок вводится по вложению шаров.

Матричные растяжения использовались в вещественном анализе всплесков [39]. В p-адическом случае матричные растяжения впервые были рассмотрены в [59], где было показано, что шахматный (quincunx) базис всплесков, который в вещественном случае включал функции с носителями на фракталах, в p-адическом случае состоит из p-адических основных функций.

В настоящем разделе, следуя [11], мы строим базисы p-адических всплесков с матричными растяжениями как базисы, отвечающие действию на $\mathbb{Q}_p^d$ групп шароморфизмов относительно деформированных метрик.

7.1. Многомерные метрики и растяжения. Рассмотрим различные примеры ультраметрик на $\mathbb{Q}_p^d$. Стандартная ультраметрика на $\mathbb{Q}_p^d$ имеет вид (см. также (2.3))

$$d(x,y) = |x-y|_p = \max(|x_l - y_l|_p), \qquad l = 1,\dots,d, \tag{7.1}$$
$$x = (x_1,\dots,x_d), \qquad y = (y_1,\dots,y_d).$$

Рассмотрим деформированную ультраметрику, зависящую от весов q_l:

$$\widetilde{d}(x,y) = \max(q_l|x_l - y_l|_p), \qquad l = 1,\dots,d, \quad p^{-1} < q_l \le 1. \tag{7.2}$$

Соответствующую норму на $\mathbb{Q}_p^d$ обозначим через $\|\cdot\|$. Более общие деформированные ультраметрики (которые мы также будем обозначать символом $\widetilde{d}$) могут быть получены из (7.2) линейными преобразованиями из группы O_d (см., например, (7.9) ниже).

Пусть $\widetilde{d}$ является произвольной деформированной метрикой $\mathbb{Q}_p^d$.

Определение 7.1. *Растяжение относительно ультраметрики* $\widetilde{d}$ есть линейное отображение $\mathbb{Q}_p^d \to \mathbb{Q}_p^d$, переводящее произвольный $\widetilde{d}$-шар с центром в нуле в максимальный $\widetilde{d}$-подшар (с центром в нуле) этого шара.

Поскольку любой $\widetilde{d}$-шар есть сдвиг шара с центром в нуле, растяжение есть $\widetilde{d}$-шароморфизм (автоморфизм дерева шаров $\mathcal{T}(\mathbb{Q}_p^d, \widetilde{d}\,)$ — дерева шаров в $\mathbb{Q}_p^d$ относительно $\widetilde{d}\,$). В частности, для случая деформированной ультраметрики (7.2) с параметрами $q_1 < q_2 < \ldots < q_d$ растяжение будет удовлетворять условию $|\det(\cdot)|_p = p^{-1}$. Для такой метрики последовательность вложенных шаров между $p\mathbb{Z}_p^d$ и $\mathbb{Z}_p^d$ есть набор

$$B_a = \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p \times \ldots \times p\mathbb{Z}_p \tag{7.3}$$

с a компонентами $\mathbb{Z}_p$ и $d-a$ компонентами $p\mathbb{Z}_p$, $a = 0,\dots,d$.

Факторизуя такие шары по $p\mathbb{Z}_p^d$, мы представим последовательность $\{B_a\}$ в виде флага над конечным полем $\mathbb{F}_p$ (полем вычетов из p элементов). Таким образом, рассматриваемые метрики связаны с флагами над конечными полями.

Лемма 7.1. *Пусть A есть растяжение в $\mathbb{Q}_p^d$ относительно деформированной метрики $\widetilde{d}$. Тогда набор характеристических функций всевозможных шаров относительно $\widetilde{d}$ находится во взаимно однозначном соответствии с набором функций*

$$\Omega(|A^j x - n|_p) = \Omega(\|A^j x - n\|), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d.$$

Здесь $\Omega(\cdot)$ есть характеристическая функция единичного интервала $[0,1]$, группа $\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$ понимается как группа d-наборов дробей со сложением по модулю единица:

$$n = (n_1, \dots, n_d), \qquad n_i = \sum_{k=\beta_i}^{-1} n_k^{(i)} p^k, \quad i = 1, \dots, d.$$

В частности, шары $p^j \mathbb{Z}_p^d$, $j \in \mathbb{Z}$ (где $\mathbb{Z}_p^d$ есть единичный шар относительно (7.1)), являются шарами относительно любой из ультраметрик (7.2).

Построим пример растяжения в $\mathbb{Q}_p^d$ как произведение матрицы циклической перестановки и растяжения одной из координат:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ p & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 7.2. *Приведенная выше матрица A есть растяжение для $\mathbb{Q}_p^d$ с метрикой $\widetilde{d}$ с параметрами $q_1 < q_2 < \ldots < q_d$.*

В следующих двух пунктах будут рассмотрены примеры базисов всплесков, строящихся при помощи описанных в настоящем разделе растяжений.

7.2. Примеры двумерных базисов всплесков. В настоящем пункте мы опишем два примера базисов всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$, строящихся при помощи растяжений относительно деформированных метрик.

Рассмотрим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Рассмотрим на $\mathbb{Q}_2^2$ деформированную метрику (7.2) с параметрами $q_2 = 1$, $q_1 = q$, $p^{-1} < q < 1$. Обозначим такую метрику символом s.

Лемма 7.3. *Матрица S есть растяжение относительно метрики s.*

Опишем все растяжения относительно s.

Лемма 7.4. *Матрица*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

есть растяжение относительно метрики s тогда и только тогда, когда

$$a = 0 \bmod 2, \qquad b = 1 \bmod 2, \qquad c = 2 \bmod 4, \qquad d = 0 \bmod 2. \tag{7.5}$$

Рассмотрим всплеск в виде разности двух характеристических функций s-шаров:

$$\theta(x) = \Omega(|S^{-1}x|_2) - \Omega\left(\left|S^{-1}x - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|_2\right). \tag{7.6}$$

Следующая теорема описывает соответствующий базис всплесков.

Теорема 7.1. *Набор функций* $\theta_{jn}(x) = p^{-j/2}\theta(S^j x - n)$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_2^2/\mathbb{Z}_2^2$, *есть ортонормированный базис в* $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$.

Следующий пример базиса всплесков (шахматный (quincunx) базис в $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$) был рассмотрен в [59]. Аналогичный вещественный базис [39] содержит всплески с носителями на фракталах. Опишем 2-адический шахматный базис, используя язык растяжений и деформированных метрик [11]. Шахматная матрица Q, $\det Q = 2$, имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Следующая лемма показывает, что шахматная матрица есть растяжение относительно метрики q на $\mathbb{Q}_2^2$, являющейся поворотом рассмотренной выше метрики s.

Лемма 7.5 [11]**.** *Рассмотрим на* $\mathbb{Q}_2^2$ *метрику* q, *заданную применением к метрике* s *линейного преобразования* $U \in O_d$ *вида*

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.8}$$

а именно метрика q *имеет вид*[7]

$$q(x,y) = s(Ux, Uy) = \max\bigl(q|x_1 - y_1|_p, |x_1 + x_2 - y_1 - y_2|_p\bigr), \qquad p^{-1} < q < 1. \tag{7.9}$$

Тогда шахматная матрица Q *есть растяжение* $\mathbb{Q}_2^2$ *относительно метрики* q.

Рассмотрим всплеск вида

$$\psi(x) = \Omega(|Q^{-1}x|_2) - \Omega\left(\left|Q^{-1}x - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right|_2\right). \tag{7.10}$$

Теорема 7.2 [59]**.** *Набор функций* $\psi_{jn}(x) = p^{-j/2}\psi(Q^j x - n)$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_2^2/\mathbb{Z}_2^2$, *есть ортонормированный базис в* $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$ *(шахматный базис).*

7.3. Всплески и псевдодифференциальные операторы. В настоящем пункте рассматриваются общие базисы всплесков для деформированных метрик и обсуждается связь со спектральной теорией псевдодифференциальных операторов.

Пусть $\widetilde{d}$ есть некоторая деформированная ультраметрика на $\mathbb{Q}_p^d$ и A есть растяжение относительно $\widetilde{d}$, удовлетворяющее условию $|\det A|_p = p^{-1}$. Например, можно рассмотреть растяжение, построенное в лемме 7.2.

Рассмотрим всплеск

$$\Psi_k(x) = \chi(k \cdot A^{-1}x)\Omega(|x|_p), \qquad k \in \mathbb{Z}_p^d/A^*\mathbb{Z}_p^d, \quad k \cdot x = \sum_{i=1}^d k_i x_i, \tag{7.11}$$

где k не представляет нуля в $\mathbb{Z}_p^d/A^*\mathbb{Z}_p^d$. Как обычно, мы понимаем k как представителя соответствующего класса эквивалентности и фиксируем такой набор представителей (т.е. для каждого всплеска представители выбираются из этого фиксированного набора). Здесь A^* есть транспонированная к A матрица, функция χ есть аддитивный характер $\mathbb{Q}_p$ (2.6).

Существует $p-1$ всплесков приведенного выше вида (поскольку существует p представителей в $\mathbb{Z}_p^d/A^*\mathbb{Z}_p^d$). Эта формула есть аналог определения одномерного всплеска $\chi(p^{-1}x)\Omega(|x|_p)$.

Следующая лемма обобщает (7.6), (7.10).

[7] Такая метрика также отвечает флагу над конечным полем.

Лемма 7.6. *Определение* (7.11) *всплеска* Ψ_k *может быть записано в эквивалентном виде*

$$\Psi_k(x) = \sum_{l=0}^{p-1} \chi(k \cdot A^{-1}m_l)\Omega\big(|A^{-1}(x - m_l)|_p\big), \tag{7.12}$$

где m_l, $l = 0, \dots, p-1$, *суть представители в* $\mathbb{Z}_p^d/A\mathbb{Z}_p^d$.

Коэффициенты $\chi(k \cdot A^{-1}m_l)$ *суть* p*-корни из единицы, и* $\chi(k \cdot A^{-1}m_l) \neq \chi(k \cdot A^{-1}m_{l'})$ *для* $l \neq l'$.

Всплеск Ψ_k *есть функция с нулевым средним.*

Построим базис всплесков, используя растяжения и сдвиги Ψ_k:

$$\Psi_{k;jn}(x) = p^{-j/2}\Psi_k(A^j x - n), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d. \tag{7.13}$$

Как обычно, мы рассматриваем элементы группы $\mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$ как векторы с координатами, принадлежащими соответствующему множеству дробей, как описано в лемме 7.1.

Теорема 7.3. *Набор функций* $\{\Psi_{k;jn}\}$, *определенный* (7.11), (7.13), *есть ортонормированный базис в* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$.

Набор всевозможных произведений векторов из базиса $\{\Psi_{k;jn}\}$ и корней степени p из единицы совпадает с орбитой всплеска (произвольного) из базиса $\{\Psi_{k;jn}\}$ относительно группы преобразований, порожденной сдвигами в $\mathbb{Q}_p^d$ и линейными шароморфизмами относительно метрики $\widetilde{d}$.

Рассмотрим следующее обобщение оператора Владимирова на случай деформированной метрики:

$$D^\alpha f(x) = F^{-1}(\|k\|^\alpha F[f])(x), \tag{7.14}$$

где $\|\cdot\|$ есть $\widetilde{d}$-норма в $\mathbb{Q}_p^d$, F есть преобразование Фурье.

Лемма 7.7. *Базис* $\{\Psi_{k;jn}\}$ *состоит из собственных векторов оператора* D^α:

$$D^\alpha \Psi_{k;jn}(x) = \big\|A^{*(j-1)}k\big\|^\alpha \Psi_{k;jn}(x), \qquad k \in \mathbb{Z}_p^d/A^*\mathbb{Z}_p^d \setminus \{0\}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d.$$

Здесь A^* *есть транспонированная к* A *матрица.*

8. ВСПЛЕСК-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящем разделе, основанном на работе [8], обсуждаются разложения основных и обобщенных функций из пространств $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$, $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$, $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$, $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ по p-адическим всплескам.

Пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций с нулевым средним есть линейная оболочка (пространство конечных линейных комбинаций) p-адических всплесков. Аналогично пространство $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ основных функций есть линейная оболочка p-адических всплесков и характеристической функции некоторого (любого) шара.

Лемма 8.1. 1. *Каждая функция* $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ *может быть представлена в форме конечной суммы*

$$\phi = \sum_{k,j,n} \phi_{kjn}\psi_{k;jn}, \qquad \phi_{kjn} \in \mathbb{C}, \tag{8.1}$$

$$\phi_{kjn} = \phi(\overline{\psi_{k;jn}}) = \langle \psi_{k;jn}, \phi \rangle, \tag{8.2}$$

где $\psi_{k;jn}$ — *элементы базиса всплесков* (3.6) *с индексами, как в* (3.7): $k = (k_1, \dots, k_d)$ (*хотя бы одно из* k_l *не равно нулю*), $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$.

2. *Зафиксируем некоторый шар с характеристической функцией* $\Omega(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p)$, $j_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$. *Каждая функция* $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^d)$ *может быть представлена в виде конечной суммы*

$$\phi = p^{-dj_0}\Omega\big(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p\big)\int \phi(x)\,d^dx + \sum_{k,j,n}\eta_{kjn}\psi_{k;jn},$$

$$\eta_{kjn} = \Big\langle \psi_{k;jn}, \phi - p^{-dj_0}\Omega\big(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p\big)\int \phi(x)\,d^dx\Big\rangle.$$

Так как пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ есть пространство конечных линейных комбинаций p-адических всплесков, то пространство $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ линейных функционалов на $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ может быть отождествлено с пространством формальных рядов по p-адическим всплескам, причем действие на пространстве $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ описывается следующим образом.

Лемма 8.2. *Любое распределение* $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ *может быть представлено в виде ряда по всплескам*:

$$f = \sum_{k,j,n} f_{kjn}\psi_{k;jn}, \qquad f_{kjn} = f(\overline{\psi_{k;jn}}), \tag{8.3}$$

где $\psi_{k;jn}$ — *элементы базиса всплесков* (3.6) *с индексами, как в* (3.7): $k = (k_1,\dots,k_d)$ (*хотя бы одно из* k_l *не равно нулю*), $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$.

Для $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ *вида* (8.1), $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ *вида* (8.3) *действие* f *на* ϕ *имеет вид*

$$f(\overline{\phi}) = \sum_{k,j,n} f_{kjn}\overline{\phi_{kjn}}. \tag{8.4}$$

Построим аналогичные разложения по всплескам для обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$.

Лемма 8.3. *Для пары* (j_0, n_0), $j_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \in \mathbb{Q}_p^d/\mathbb{Z}_p^d$ (*отвечающей шару с характеристической функцией* $\Omega(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p)$), *и набора комплексных чисел* $\{u_0, u_{kjn}\}$ (*где индексы* k, j, n *набора суть индексы базиса* (3.6)) *существует единственная обобщенная функция* $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$ *такая, что*

$$u\big(\Omega(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p)\big) = u_0 p^{dj_0}, \qquad u(\overline{\psi_{k;jn}}) = u_{kjn}. \tag{8.5}$$

Лемма 8.4. *Ряд* (*где суммирование идет по всплескам* (3.6))

$$u = u_0 + \sum_{k,j,n} u_{kjn}\big(\psi_{k;jn} - p^{-dj_0}\psi_{k;jn}\big(\Omega(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p)\big)\big) \tag{8.6}$$

есть обобщенная функция $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$, *удовлетворяющая условиям* (8.5).

Сходимость ряда понимается в слабом смысле (сходится и даже содержит конечное число членов результат применения ряда к основной функции). Здесь

$$\psi_{k;jn}\big(\Omega(|p^{j_0}\cdot - n_0|_p)\big) = \int \psi_{k;jn}(x)\Omega\big(|p^{j_0}x - n_0|_p\big)\,d\mu(x).$$

В [8] утверждения типа лемм 8.1–8.4 были сформулированы для случая пространств типа Лизоркина на ультраметрических пространствах. В [49] разложение обобщенных функций по всплескам использовалось для построения случайного поля p-адического аргумента.

9. СВЯЗЬ С БАЗИСОМ ХААРА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

Обсудим (см. [71]) связь базиса p-адических всплесков $\{\psi_{k;jn}\}$ в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ с базисом всплесков Хаара в пространстве квадратично интегрируемых функций $L^2(\mathbb{R}_+)$ на положительной полупрямой.

Вещественный всплеск Хаара ψ^{H} был определен в (1.2), а порожденный его сдвигами и растяжениями базис всплесков Хаара в $L^2(\mathbb{R})$ — в (1.1). Нас будет интересовать базис всплесков на положительной полупрямой, который получается из приведенного выше базиса (1.1) ограничением на неотрицательные n.

Рассмотрим обобщение базиса Хаара, отвечающее произвольному p. Этот базис в $L^2(\mathbb{R}_+)$ состоит из векторов, имеющих вид

$$\psi^{(p)}_{k;jn}(x) = p^{-j/2}\psi^{(p)}_k(p^{-j}x - n), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \tag{9.1}$$

$$\psi^{(p)}_k(x) = \sum_{l=0}^{p-1} e^{2\pi i k l p^{-1}} \chi_{[lp^{-1},(l+1)p^{-1}]}(x), \qquad k = 1,\dots,p-1. \tag{9.2}$$

Базис (1.1) получается из (9.1) при $p = 2$.

Назовем *p-адической заменой переменной* (или *отображением Монна*) следующее сюръективное отображение:

$$\rho\colon\ \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}_+, \qquad \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^i \mapsto \sum_{i=\gamma}^{\infty} x_i p^{-i-1}, \qquad x_i = 0,\dots,p-1, \quad \gamma \in \mathbb{Z}. \tag{9.3}$$

Лемма 9.1. *Отображение ρ взаимно однозначно почти всюду, сохраняет меру* (*т.е. переводит p-адическую меру Хаара в меру Лебега на полупрямой*), *непрерывно и* 1*-липшицево, т.е.*

$$|\rho(x) - \rho(y)| \le |x - y|_p, \qquad x, y \in \mathbb{Q}_p.$$

Теорема 9.1. *Отображение ρ переводит ортонормированный базис всплесков* (9.1) *на $L^2(\mathbb{R}_+)$ на базис всплесков* (3.2) *в $L^2(\mathbb{Q}_p)$*:

$$\psi^{(p)}_{k;j\,\rho(n)}(\rho(x)) = \psi_{k;jn}(x). \tag{9.4}$$

Приведенную выше формулу следует понимать с точностью до конечного числа точек (для каждого всплеска она не выполняется на конечном множестве точек).

Замечание 9.1. Используя отображение ρ, можно перенести действие оператора Владимирова в $L^2(\mathbb{R}_+)$, определив оператор

$$\partial^{\alpha}_p f(x) = \frac{p^{\alpha} - 1}{1 - p^{-1-\alpha}} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(y)}{|\rho^{-1}(x) - \rho^{-1}(y)|_p^{1+\alpha}}\, dy, \tag{9.5}$$

где ρ^{-1} есть обратное отображение к ρ. Поскольку ρ не есть взаимно однозначное отображение, отображение ρ^{-1}, вообще говоря, многозначно, но многозначность сосредоточена на множестве нулевой меры, что делает определение (9.5) корректным.

Всплески Хаара вида (9.1), (9.2) будут собственными векторами интегрального оператора ∂^{α}_p.

10. p-АДИЧЕСКИЙ КРАТНОМАСШТАБНЫЙ АНАЛИЗ

10.1. Определение p-адического кратномасштабного анализа. Рассмотрим множество

$$I_p = \{x \in \mathbb{Q}_p\colon \{x\} = x\} = \\ = \{n = p^{-\gamma}(n_0 + n_1 p + \ldots + n_{\gamma-1}p^{\gamma-1})\colon \gamma \in \mathbb{N},\ n_j = 0, \ldots, p-1,\ j = 0, \ldots, \gamma-1\}. \quad (10.1)$$

Так как пространство $\mathbb{Q}_p$ можно представить в виде объединения непересекающихся шаров, $\mathbb{Q}_p = \bigcup_{n\in I_p} B_0(n)$, при построении теории всплесков множество I_p можно использовать как естественное множество сдвигов в $\mathbb{Q}_p$. Множество I_p можно отождествить с множеством элементов фактор-группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$.

Введем p-адическую версию стандартного определения кратномасштабного анализа (см., например, [23; 92, пар. 1.3]).

Определение 10.1 [101]**.** Набор замкнутых пространств $V_j \subset L^2(\mathbb{Q}_p)$, $j \in \mathbb{Z}$, называется *кратномасштабным анализом* (КМА) *в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$, если выполняются следующие аксиомы:

(а) $V_j \subset V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

(б) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ плотно в $L^2(\mathbb{Q}_p)$;

(в) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$;

(г) $f(\cdot) \in V_j \Leftrightarrow f(p^{-1}\cdot) \in V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}$;

(д) существует функция $\phi \in V_0$ такая, что система $\{\phi(\cdot - n),\, n \in I_p\}$ образует ортонормальный базис для V_0.

Функция ϕ из аксиомы (д) называется *масштабирующей функцией.* Из аксиом (г) и (д) следует, что функции $p^{j/2}\phi(p^{-j}\cdot - n)$, $n \in I_p$, образуют ортонормальный базис для V_j, $j \in \mathbb{Z}$.

Следуя стандартной схеме (см., например, [23; 90; 92, пар. 1.3]), для построения всплесков, полученных согласно КМА, для каждого j мы определим пространство W_j (*пространство всплесков*) как ортогональное дополнение V_j в V_{j+1}, т.е.

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad (10.2)$$

где $W_j \perp V_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что

$$f \in W_j \quad \Leftrightarrow \quad f(p^{-1}\cdot) \in W_{j+1} \quad \text{для всех} \ \ j \in \mathbb{Z} \quad (10.3)$$

и $W_j \perp W_k$, $j \neq k$. С учетом аксиом (б) и (в) будем иметь

$$\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{Q}_p) \qquad \text{(ортогональная прямая сумма).} \quad (10.4)$$

Теперь если мы найдем конечное число таких функций $\psi_\nu \in W_0$, $\nu \in A$, что система $\{\psi_\nu(x-n),\, n \in I_p,\, \nu \in A\}$ будет ортонормальным базисом для W_0, то в силу (10.3) и (10.4) система

$$\{p^{j/2}\psi_\nu(p^{-j}\cdot - n),\ n \in I_p,\ j \in \mathbb{Z},\ \nu \in A\}$$

будет ортонормальным базисом для $L^2(\mathbb{Q}_p)$. Такие функции ψ_ν, $\nu \in A$, называются *всплеск-функциями*, а соответствующий базис — *базисом всплесков.*

10.2. p-Адическое масштабирующее уравнение. Пусть ϕ — масштабирующая функция для КМА. Тогда согласно определению 10.1 система функций $\{p^{1/2}\phi(p^{-1}\cdot - n),\ n\in I_p\}$ образует базис для V_1. Из аксиомы (а) следует, что

$$\phi=\sum_{n\in I_p}\alpha_n\phi(p^{-1}\cdot - n),\qquad \alpha_n\in\mathbb{C}. \tag{10.5}$$

Мы видим, что функция ϕ является решением функционального уравнения специального типа. Такие уравнения называются *масштабирующими*, а их решения называются *масштабирующими функциями*.

Естественный способ построения КМА (см., например, [92, пар. 1.2]) состоит в следующем. Сначала мы выбираем подходящую функцию ϕ, I_p-сдвиги которой образуют ортонормальную систему, и множество

$$V_j=\overline{\operatorname{span}\{\phi(p^{-j}\cdot - n)\colon\ n\in I_p\}},\qquad j\in\mathbb{Z}. \tag{10.6}$$

Ясно, что аксиомы (г) и (д) из определения 10.1 выполнены.

Разумеется, не всякая такая функция ϕ удовлетворяет аксиоме (а). В действительном случае соотношение $V_0\subset V_1$ имеет место в том и только том случае, когда масштабирующая функция удовлетворяет масштабирующему уравнению. В p-адическом случае ситуация принципиально иная. Вообще говоря, из масштабирующего уравнения (10.5) *не следует свойство включения* $V_0\subset V_1$. Действительно, нужно, чтобы все функции $\phi(\,\cdot - b)$, $b\in I_p$, принадлежали пространству V_1, т.е. тождества

$$\phi(x-b)=\sum_{n\in I_p}\alpha_{n,b}\phi(p^{-1}x-n)$$

должны быть выполнены для всех $b\in I_p$. Поскольку в общем случае $p^{-1}b+n$ не принадлежит I_p, мы не можем утверждать, что

$$\phi(x-b)=\sum_{n\in I_p}\alpha_n\phi(p^{-1}x-p^{-1}b-n)\in V_1$$

для всех $b\in I_p$. Тем не менее может так случиться, что для некоторых масштабирующих функций ϕ свойство включения имеет место.

Такое свойство будет выполнено, если в пространстве V_0 реализовано представление группы $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ сдвигами, т.е.

$$\phi(n+n')=\phi(n+n' \bmod 1)$$

для $n,n'\in I_p$. Здесь в левой части формулы сложение представителей из I_p берется в $\mathbb{Q}_p$ (т.е. сумма не обязана лежать в I_p), а в правой части формулы представители из I_p складываются как дроби по модулю единица. Это накладывает ограничения на вид масштабирующей функции ϕ, а именно функция ϕ должна быть локально постоянной с диаметром постоянства 1 (другими словами, 1-периодической).

Аналогично в пространстве W_0 реализовано представление группы $\mathbb{Q}_p/p\mathbb{Z}_p$.

Имеется естественное масштабирующее уравнение (1.6), которое отражает наличие самоподобия пространства $\mathbb{Q}_p$ (см. [120, § 1, п. 3, примеры 1, 2]): единичный шар $B_0(0)=\{x\colon |x|_p\le 1\}$ представляется в виде объединения p взаимно не пересекающихся шаров $B_{-1}(r)=\{x\colon |x-r|_p\le p^{-1}\}$ радиуса p^{-1}:

$$B_0=B_{-1}\cup\bigcup_{r=1}^{p-1}B_{-1}(r). \tag{10.7}$$

Согласно (10.7) характеристическая функция $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$ единичного шара $B_0(0)$ представляется в виде суммы p характеристических функций непересекающихся шаров $B_{-1}(r)$, $r = 0, 1, \dots, p-1$, т.е. удовлетворяет масштабирующему уравнению (1.6)

$$\Omega(|x|_p) = \sum_{r=0}^{p-1} \Omega(p|x-r|_p) = \sum_{r=0}^{p-1} \Omega\left(\left|\frac{1}{p}x - \frac{r}{p}\right|_p\right), \qquad x \in \mathbb{Q}_p. \tag{10.8}$$

11. p-АДИЧЕСКИЕ ОДНОМЕРНЫЕ ХААРОВСКИЕ БАЗИСЫ ВСПЛЕСКОВ

11.1. Построение p-адического кратномасштабного анализа, порожденного масштабирующей функцией $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$. Для построения p-адического КМА мы используем масштабирующее уравнение (1.6) и определяем набор замкнутых подпространств $V_j \subset L^2(\mathbb{Q}_p)$, $j \in \mathbb{Z}$, с помощью формулы (10.6), где $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$ (масштабирующая функция) — решение уравнения (1.6).

Теорема 11.1. *В $L^2(\mathbb{Q}_p)$ существует КМА, порожденный масштабирующей функцией $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$.*

p-Адическое масштабирующее уравнение (1.6) для $p = 2$ является аналогом действительного масштабирующего уравнения (1.8). Поэтому КМА, построенный в теореме 11.1, представляет собой p-адический аналог действительного хааровского КМА. Мы будем называть этот КМА *p-адическим хааровским КМА*. Однако в отличие от действительного случая масштабирующая функция $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$, порождающая наш хааровский КМА, является периодической с периодом 1, что никогда не имеет места для действительных масштабирующих функций. Ниже будет показано, что в силу специфического свойства ϕ существует бесконечное множество различных ортонормальных базисов всплесков для одного и того же хааровского КМА (см. ниже п. 11.2).

11.2. p-Адический хааровский базис всплесков. В соответствии с изложенной выше схемой введем пространство W_0 как ортогональное дополнение V_0 в V_1. Положим

$$\psi_k^{(0)}(x) = \sum_{r=0}^{p-1} e^{2\pi i k r/p} \phi\left(\frac{1}{p}x - \frac{r}{p}\right), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \quad k = 1, 2, \dots, p-1. \tag{11.1}$$

Теорема 11.2. *Система сдвигов $\{\psi_k^{(0)}(\cdot - n),\, k = 1, 2, \dots, p-1,\, n \in I_p\}$ функций (11.1) образует ортонормальный базис в пространстве W_0.*

В силу (2.6), (10.7) функции (11.1) можно переписать в виде

$$\psi_k^{(0)} = \chi(p^{-1}kx)\Omega(|x|_p), \qquad k = 1, 2, \dots, p-1, \quad x \in \mathbb{Q}_p. \tag{11.2}$$

Таким образом, построенные хааровские всплеск-функции (11.2) и порождаемый ими хааровский базис всплесков

$$\psi_{k;jn}^{(0)}(x) = p^{-j/2}\psi_k^{(0)}(p^j x - n) = p^{-j/2}\chi\left(\frac{k}{p}(p^j x - n)\right)\Omega\big(|p^j x - n|_p\big), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in I_p, \tag{11.3}$$

совпадают с всплеск-функциями (1.5) и базисом всплесков (1.3).

Для случая $p = 2$ масштабирующее уравнение (1.6) принимает форму (1.7), где $\phi(x) = \Omega(|x|_2)$ — его решение. В этом случае всплеск-функция (определяющая ортонормальный базис в пространстве W_0) есть

$$\psi^{(0)}(x) = \phi\left(\frac{x}{2}\right) - \phi\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \chi(2^{-1}x)\Omega(|x|_2), \qquad x \in \mathbb{Q}_2. \tag{11.4}$$

Соответствующий хааровский базис есть

$$\psi_{jn}^{(0)}(x) = 2^{-j/2}\psi^{(0)}(2^j x - n) = 2^{-j/2}\chi\bigl(2^{-1}(2^j x - n)\bigr)\Omega\bigl(|2^j x - n|_2\bigr), \qquad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in I_2. \quad (11.5)$$

11.3. Описание p-адических порождающих всплеск-функций. В отличие от действительного случая в p-адическом случае базис всплесков, порожденный хааровским КМА, не является единственным.

Как было показано в [101] для случая $p = 2$ и в [56] для произвольного p, в пространстве W_0 существует бесконечное семейство всплеск-функций ψ_ν, $\nu = 1, \dots, p-1$ (порожденных одним и тем же КМА), которые порождают различные базисы всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.

В дальнейшем мы будем записывать p-адическое число $n = p^{-s}(n_0 + n_1 p + \ldots + n_{s-1}p^{s-1}) \in \in I_p$, $n_j = 0, 1, \dots, p-1$, $j = 0, 1, \dots, s-1$, в виде $n = k/p^s$, где $k = n_0 + n_1 p + \ldots + n_{s-1}p^{s-1}$.

Следующие теоремы из [56, 101] дают явное описание семейств всплеск-функций.

Теорема 11.3 [56]. *Множество всех всплеск-функций с компактным носителем описывается формулой*

$$\psi_\mu(x) = \sum_{\nu=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{p^s-1} \alpha_{\nu;k}^{\mu}\psi_\nu^{(0)}\left(x - \frac{k}{p^s}\right), \qquad \mu = 1, 2, \dots, p-1, \quad (11.6)$$

где всплеск-функции $\psi_\nu^{(0)}$ заданы формулой (11.2), $s = 0, 1, 2, \ldots$ *и*

$$\alpha_{\nu;k}^{\mu} = \begin{cases} -p^{-s}\displaystyle\sum_{m=0}^{p^s-1}\exp\biggl\{-2\pi i\frac{-\frac{\nu}{p}+m}{p^s}k\biggr\}\sigma_{\mu m}z_{\mu\mu}, & \text{если} \ \ \mu = \nu, \\ p^{-2s}\displaystyle\sum_{m=0}^{p^s-1}\sum_{n=0}^{p^s-1}\exp\biggl\{-2\pi i\frac{-\frac{\nu}{p}+m}{p^s}k\biggr\}\frac{1-\exp\bigl\{2\pi i\frac{\mu-\nu}{p}\bigr\}}{\exp\Bigl\{2\pi i\frac{\frac{\mu-\nu}{p}+m-n}{p^s}\Bigr\}-1}\sigma_{\nu m}z_{\nu\mu}, & \text{если} \ \ \mu \neq \nu, \end{cases} \quad (11.7)$$

$|\sigma_{\mu m}| = 1$, $z_{\mu\nu}$ *— элементы некоторой унитарной* $((p-1)\times(p-1))$*-матрицы* Z.

Все сдвиги и растяжения каждого набора всплеск-функций (11.6), (11.7) порождают ортонормальный базис всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p)$:

$$\psi_{\mu;jn}(x) = p^{-j/2}\psi_\mu(p^j x - n), \qquad \mu = 1, 2, \dots, p-1, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in I_p. \quad (11.8)$$

Полагая $p = 2$ в теореме 11.3, мы получим следующий результат.

Теорема 11.4 [101]. *Пусть $\psi^{(0)}$ — всплеск-функция, заданная формулой* (11.4). *Для каждого* $s = 0, 1, 2, \ldots$ *функция*

$$\psi^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{2^s-1}\alpha_k\psi^{(0)}\left(x - \frac{k}{2^s}\right) \quad (11.9)$$

является всплеск-функцией (с компактным носителем) для хааровского КМА в том и только том случае, если

$$\alpha_k = 2^{-s}\sum_{r=0}^{2^s-1}\gamma_r e^{-i\pi\frac{2r-1}{2^s}k}, \qquad k = 0, \dots, 2^s - 1, \quad (11.10)$$

где $\gamma_r \in \mathbb{C}$, $|\gamma_r| = 1$.

В [53–55] были построены базисы всплесков, отличные от описанных выше и названные авторами *нехааровскими*. Например, один из этих базисов имеет вид

$$\theta^{(m)}_{s;jn}(x) = p^{-j/2}\chi\big(s(p^j x - n)\big)\Omega\big(|p^j x - n|_p\big), \qquad x \in \mathbb{Q}_p, \tag{11.11}$$

где $\Omega(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,1] \subset \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in I_p$, $s = (s_0, \dots, s_{m-1}) \in \in J_{p;m} = \{s = p^{-m}(s_0 + s_1 p + \ldots + s_{m-1}p^{m-1})\colon s_l = 0, 1, \dots, p-1,\ l = 0, 1, \dots, m-1,\ s_0 \neq 0\}$, $m \geq 1$ — фиксированное натуральное число. Базис (11.11) порождается сдвигами и растяжениями семейства всплеск-функций

$$\theta^{(m)}_{s}(x) = \chi(sx)\Omega(|x|_p), \qquad s \in J_{p;m}, \quad x \in \mathbb{Q}_p. \tag{11.12}$$

Число порождающих всплеск-функций (11.12) для базиса (11.11) не минимально и равно $(p-1)p^{m-1}$ вместо $p-1$, как для базиса (1.3). При $m = 1$ базис (11.11) совпадает с базисом (1.3).

12. p-АДИЧЕСКИЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ ФУНКЦИИ

12.1. Построение масштабирующих функций. В [57] были исследованы p-адические масштабирующие уравнения и их решения. Были рассмотрены масштабирующие уравнения (10.5) с конечным числом членов в правой части:

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{p^s-1} \beta_k \phi\left(\frac{1}{p}x - \frac{k}{p^s}\right). \tag{12.1}$$

Если $\phi \in L^2(\mathbb{Q}_p)$, то, беря преобразование Фурье и пользуясь (2.8), можно переписать (12.1) в виде

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{p^{s-1}}\right)\widehat{\phi}(p\xi), \tag{12.2}$$

где

$$m_0(\xi) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p^s-1} \beta_k \chi(k\xi) \tag{12.3}$$

— тригонометрический полином (называемый маской). Ясно, что $m_0(0) = 1$, как только $\widehat{\phi}(0) \neq 0$.

Предложение 12.1 [57]. *Если $\phi \in L^2(\mathbb{Q}_p)$ является решением масштабирующего уравнения* (12.1), *$\widehat{\phi}(\xi)$ непрерывна в точке* 0 *и $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, то*

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0)\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{p^{s-j}}\right). \tag{12.4}$$

Очевидно, что каждая функция $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p)$ является p^M-периодической для некоторого $M \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $\mathcal{D}_{M;N}(\mathbb{Q}_p)$ множество всех основных p^M-периодических функций с носителем в $B_N(0)$.

Теперь мы сформулируем теорему, суммирующую результаты статьи [57] (см. также [2]).

Теорема 12.1. *Пусть $\widehat{\phi}$ определена формулой* (12.4):

$$\widehat{\phi}(\xi) = \widehat{\phi}(0)\prod_{j=1}^{\infty} m_0\left(\frac{\xi}{p^{N-j}}\right), \qquad \widehat{\phi}(0) = 1,$$

где m_0 — тригонометрический полином (12.3):

$$m_0(\xi) = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}\beta_k\chi(k\xi), \qquad m_0(0) = 1.$$

Если $m_0(k/p^{N+1}) = 0$ для всех $k = 1,\dots,p^{N+1}-1$, которые не делятся на p, то $\phi \in \mathcal{D}_{0;N}$. Если, кроме того, $|m_0(k/p^{N+1})| = 1$ для всех $k = 1,\dots,p^{N+1}-1$, которые делятся на p, то $\{\phi(x-n)\colon n \in I_p\}$ — ортонормальная система.

Обратно, если $\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset B_0(0)$ и система $\{\phi(x-n)\colon n \in I_p\}$ ортонормальна, то имеем $|m_0(k/p^{N+1})| = 0$ для всех k, не делящихся на p, $|m_0(k/p^{N+1})| = 1$ для всех k, делящихся на p, $k = 1,2,\dots,p^{N+1}-1$, и $|\widehat{\phi}(x)| = 1$ для всех $x \in B_0(0)$.

12.2. Масштабирующие функции и кратномасштабный анализ. Важные результаты в теории p-адических всплесков были получены в [1, 2]. В этих работах была доказана теорема, которая дает описание всех основных функций, порождающих КМА. Оказалось, что класс ортогональных масштабирующих функций[8] существенно у́же. Именно имеет место

Теорема 12.2 [1, 2]. *Если ϕ — ортогональная масштабирующая основная функция для некоторого КМА такая, что $\widehat{\phi}(0) \neq 0$, то $\operatorname{supp}\widehat{\phi} \subset B_0(0)$.*

Таким образом, носитель преобразования Фурье каждой ортогональной масштабирующей основной функции содержится в $B_0(0)$. Это эквивалентно ее 1-периодичности. Полное описание всех таких функций было дано выше в теореме 12.1. Мы показали, что существует бесконечное множество различных ортогональных масштабирующих основных функций. В противоположность действительному случаю оказывается, что все эти функции порождают один и тот же КМА.

Теорема 12.3 [1, 2]. *Существует единственный КМА, порожденный ортогональной масштабирующей основной функцией. Этот КМА совпадает с хааровским КМА* (*описанным в теореме* 11.1), *который порожден масштабирующей функцией $\phi = \Omega(|\cdot|_p)$* (*являющейся решением естественного масштабирующего уравнения* (1.6)).

Таким образом, в теоремах 11.3, 11.4 были построены *все p-адические хааровские базисы всплесков с компактным носителем.*

13. КРАТНОМАСШТАБНЫЕ ФРЕЙМЫ ВСПЛЕСКОВ

В [2] было введено определение КМА, обобщающее определение 10.1. В этом определении аксиома (д) в определении 10.1 была заменена на следующую аксиому: *существует функция $\phi \in V_0$ такая, что $V_0 = \overline{\operatorname{span}\{\phi(x-n)\colon n \in I_p\}}$.*

Пусть пространства $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ образуют КМА в $L^2(\mathbb{Q}_2)$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}$ мы определим пространство всплесков W_j как ортогональное дополнение пространства V_j в пространстве V_{j+1}, т.е. $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$. Легко увидеть, что $f \in W_j \Leftrightarrow f(p^j\,\cdot) \in W_0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ и $W_j \perp W_k$ для всех $j \neq k$. В рассматриваемом случае, как и выше, имеет место (10.4).

Предположим, что существуют функции $\psi^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{Q}_p)$, $\nu = 1,\dots,r$ (которые мы назовем *множеством всплеск-функций*), такие, что

$$W_0 = \overline{\operatorname{span}\{\psi^{(\nu)}(x-n),\ \nu = 1,\dots,r,\ n \in I_p\}}.$$

Тогда соответствующая система всплесков есть

$$\bigl\{p^{j/2}\psi^{(\nu)}(p^{-j}x-n),\ \nu = 1,\dots,r,\ n \in I_p,\ j \in \mathbb{Z}\bigr\}. \tag{13.1}$$

[8] То есть функций, I_p-сдвиги которых ортогональны.

Была доказана теорема, которая дает описание масштабирующих функций, порождающих КМА.

Теорема 13.1 [2]. *Пусть $\mathcal{D}_{M;N}(\mathbb{Q}_p)$ — множество всех основных p^M-периодических функций с носителем в $B_N(0)$ (см. п. 12.1). Функция $\phi\in\mathcal{D}_{M;N}(\mathbb{Q}_p)$, $M,N\ge 0$, такая, что $\widehat{\phi}(0)\ne 0$, порождает КМА тогда и только тогда, когда*

(1) *ϕ удовлетворяет масштабирующему уравнению* (10.5);

(2) *существует по крайней мере $p^{M+N}-p^N$ целых чисел l таких, что $0\le l<p^{M+N}$ и $\widehat{\phi}(l/p^M)\ne 0$.*

Также была рассмотрена конструкция p-адических всплеск-фреймов, т.е. таких фреймов в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, которые состоят из функций $p^{j/2}\psi^{(\nu)}(p^{-j}x-n)$, $n\in I_p$, $\nu=1,\dots,r$. Была доказана

Теорема 13.2 [2, Theorem 5.2]. *Пусть $\psi^{(\nu)}$, $\nu=1,\dots,r$, — множество всплеск-функций с компактным носителем, порожденных КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Тогда система функций* (13.1) *является фреймом в $L^2(\mathbb{Q}_p)$.*

В [2] был также представлен следующий алгоритм построения для данного КМА соответствующего множества всплеск-функций $\psi^{(\nu)}$, $\nu=1,\dots,r$.

Пусть КМА $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ порожден масштабирующей функцией $\phi\in\mathcal{D}_{M;N}(\mathbb{Q}_p)$, $\widehat{\phi}(0)\ne 0$, маска которой есть тригонометрический полином

$$m_0(\xi)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}h_k\chi(k\xi).$$

Теперь определим функцию $\psi^{(\nu)}$ соотношением

$$\widehat{\psi}^{(\nu)}(\xi)=n_0^{(\nu)}\biggl(\frac{\xi}{p^N}\biggr)\widehat{\phi}(p\xi),\qquad \text{где}\quad n_0^{(\nu)}(\xi)=\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}g_k^{(\nu)}\chi(k\xi)$$

— тригонометрический полином, являющийся маской всплеск-функции, $\nu=1,\dots,r$. Далее доказывается, что $\overline{\operatorname{span}\{\psi^{(\nu)}(x-n),\,\nu=1,\dots,r,\,n\in I_p\}}\subset V_1$.

На следующем шаге мы выбираем маску $n_0^{(\nu)}$ такую, что если $\widehat{\phi}(l/p^M)\ne 0$ для некоторого $l=0,1,\dots,p^{M+N}-1$, то выполнено равенство $n_0^{(\nu)}(l/p^{M+N})=0$ (см. теорему 13.1). В результате имеем $\widehat{\psi}^{(\nu)}(l/p^M)=0$, когда $0\le l<p^{M+N}$ и $\widehat{\phi}(l/p^M)\ne 0$. Отсюда следует, что $\overline{\operatorname{span}\{\psi^{(\nu)}(x-n)\colon \nu=1,\dots,r,\,n\in I_p\}}\perp V_0$. Также показывается, что

$$\overline{\operatorname{span}\{\psi^{(\nu)}(x-n)\colon\ \nu=1,\dots,r,\ n\in I_p\}}\subset W_0. \tag{13.2}$$

По построению

$$\phi\biggl(x-\frac{n}{p^N}\biggr)=\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}h_{kn}\phi\biggl(\frac{x}{p}-\frac{k}{p^{N+1}}\biggr),\qquad n=0,1,\dots,p^N-1, \tag{13.3}$$

$$\psi^{(\nu)}\biggl(x-\frac{n}{p^N}\biggr)=\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1}g_{kn}^{(\nu)}\phi\biggl(\frac{x}{p}-\frac{k}{p^{N+1}}\biggr),\qquad n=0,1,\dots,p^N-1,\quad \nu=1,\dots,r. \tag{13.4}$$

Если функции в правых частях соотношений (13.3), (13.4) могут быть выражены как линейные комбинации функций в левых частях этих соотношений, то мы имеем включение

$$W_0\subset\overline{\operatorname{span}\{\psi^{(\nu)}(x-n)\colon\ \nu=1,\dots,r,\ n\in I_p\}}. \tag{13.5}$$

Тогда в силу (13.2) мы докажем, что $\psi^{(\nu)}(x-n)$, $\nu=1,\dots,r$, $n\in I_p$, образуют множество всплеск-функций.

Ясно, что функции в правых частях соотношений (13.3), (13.4) могут быть выражены как линейные комбинации функций в левых частях этих соотношений, только когда линейная система уравнений

$$\sum_{k=0}^{p^{N+1}-1} h_{kl}x_k=0, \qquad \sum_{k=0}^{p^{N+1}-1} g_{kl}^{(\nu)}x_k=0, \qquad l=0,1,\dots,p^N-1, \quad \nu=1,\dots,r,$$

имеет нетривиальное решение.

14. МНОГОМЕРНЫЕ КРАТНОМАСШТАБНЫЕ БАЗИСЫ ВСПЛЕСКОВ

14.1. p-Адический сепарабельный многомерный кратномасштабный анализ. Здесь мы опишем многомерные базисы всплесков, построенные с помощью тензорного произведения одномерных КМА. Этот стандартный подход к построению многомерных всплесков был предложен Мейером [88] (см., например, [92, пар. 2.1]).

Пусть $\{V_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\nu=1,\dots,d$, — одномерные КМА (см. п. 10.1). Введем подпространства V_j, $j\in\mathbb{Z}$, в пространстве $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$ следующим образом:

$$V_j=\bigotimes_{\nu=1}^{d}V_j^{(\nu)}=\overline{\operatorname{span}\bigl\{F=f_1\otimes\ldots\otimes f_d,\ f_\nu\in V_j^{(\nu)}\bigr\}}. \tag{14.1}$$

Пусть $\phi^{(\nu)}$ — масштабирующая функция ν-го КМА $\{V_j^{(\nu)}\}_j$. Положим

$$\phi=\phi^{(1)}\otimes\ldots\otimes\phi^{(d)}. \tag{14.2}$$

Так как система $\{\phi^{(\nu)}(\,\cdot-n)\}_{n_\nu\in I_p}$ образует ортонормальный базис для $V_0^{(\nu)}$ для любого $\nu=1,\dots,d$, то

$$V_j=\overline{\operatorname{span}\{\phi(p^{-j}\cdot-n)\colon\ n=(n_1,\dots,n_d)\in I_p^d\}}, \qquad j\in\mathbb{Z}, \tag{14.3}$$

где $I_p^d=I_p\times\ldots\times I_p$ — прямое произведение d множеств I_p, и система $\phi(\,\cdot-n)$, $n\in I_p^d$, образует ортонормальный базис для V_0, т.е. имеет место

Теорема 14.1. *Пусть* $\{V_j^{(\nu)}\}_{j\in\mathbb{Z}}$, $\nu=1,\dots,d$, *— КМА в* $L^2(\mathbb{Q}_p)$. *Тогда подпространства* V_j *пространства* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$, *определенные соотношениями* (14.1), *обладают следующими свойствами*:

(а) $V_j\subset V_{j+1}$ *для всех* $j\in\mathbb{Z}$;

(б) $\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j$ *плотно в* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$;

(в) $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}}V_j=\{0\}$;

(г) $f(\cdot)\in V_j \Leftrightarrow f(p^{-1}\cdot)\in V_{j+1}$ *для всех* $j\in\mathbb{Z}$;

(д) *система* $\{\phi(x-n),\, n\in I_p^d\}$ *образует ортонормальный базис для* V_0, *где* $\phi\in V_0$ *определяется соотношением* (14.2).

Как в определении 10.1, набор пространств V_j, $j\in\mathbb{Z}$, обладающий свойствами (а)–(д) теоремы 14.1, называется *кратномасштабным анализом* в $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$, а функция ϕ из свойства (д) называется *масштабирующей*. Многомерная масштабирующая функция имеет вид (14.2).

Следуя обычной схеме (см., например, [92, пар. 2.1]), определим пространства всплесков W_j как ортогональные дополнения V_j в V_{j+1}, т.е.

$$W_j = V_{j+1} \ominus V_j, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$V_{j+1} = \bigotimes_{\nu=1}^{d} V_{j+1}^{(\nu)} = V_j \oplus \bigoplus_{e\subset\{1,\dots,d\},\, e\neq\varnothing} W_{j,e}, \qquad W_{j,e} = \biggl(\bigotimes_{\nu\in e} W_j^{(\nu)}\biggr) \otimes \biggl(\bigotimes_{\mu\notin e} V_j^{(\mu)}\biggr).$$

Итак, пространство W_j есть прямая сумма $2^d - 1$ подпространств $W_{j,e}$, $e \subset \{1,\dots,d\}$, $e \neq \varnothing$.

Пусть $\psi^{(\nu)}$ — всплеск-функция, т.е. функция, сдвиги которой (относительно $n \in I_p$) образуют ортонормальный базис для $W_0^{(\nu)}$. Тогда сдвиги (относительно $n \in I_p^d$) функции

$$\psi_e = \biggl(\bigotimes_{\nu\in e} \psi^{(\nu)}\biggr) \otimes \biggl(\bigotimes_{\mu\notin e} \phi^{(\mu)}\biggr), \qquad e \subset \{1,\dots,d\}, \quad e \neq \varnothing, \tag{14.4}$$

образуют ортонормальный базис для $W_{0,e}$. Таким образом, функции $p^{-dj/2}\psi_e(p^j \ \cdot - n)$, $e \subset \{1,\dots,d\}$, $e \neq \varnothing$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in I_p^d$, образуют ортонормальный базис для $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$.

14.2. Многомерные p-адические базисы всплесков Хаара. Согласно приведенному выше общему результату имеет место следующее утверждение (которое для $p = 2$ было сформулировано в [101]).

Теорема 14.2. *Все растяжения и сдвиги всплеск-функций* (14.4), *где в качестве всплеск-функций и масштабирующих функций взяты одномерные хааровские всплески из разд.* 11, *образуют ортонормальный* (p*-адический хааровский*) *базис всплесков в* $L^2(\mathbb{Q}_p^d)$:

$$p^{-dj/2}\psi_e^{(\mu)}(p^j x - n), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^d, \tag{14.5}$$

где $e \subset \{1,\dots,d\}$, $e \neq \varnothing$, $\mu = (\mu_1,\dots,\mu_d)$, $\mu_\nu = 1,2,\dots,p-1$, $\nu = 1,2,\dots,d$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in I_p^d$.

Замечание 14.1. Среди базисов всплесков (14.5) имеется базис, порожденный одномерным базисом всплесков (1.3). Такой базис совпадает [10] с многомерным базисом всплесков (3.6), введенным как орбита действия группы, порожденной сдвигами, растяжениями и сохраняющими норму вектора в $\mathbb{Q}_p^d$ линейными преобразованиями. Таким образом, как одномерные, так и многомерные p-адические кратномасштабные базисы всплесков являются частным случаем фреймов всплесков, порождаемых действиями групп преобразований.

15. p-АДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ШЕННОНА–КОТЕЛЬНИКОВА

Известно, что классическая теорема Шеннона–Котельникова позволяет восстановить функцию с ограниченным спектром Фурье по ее значениям на множестве равноотстоящих точек на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Именно справедливо следующее утверждение (см., например, [41, Sect. 5.1]). *Пусть* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *и пусть* $F[f](\xi) = 0$ *для* $|\xi| > M$. *Тогда функцию* $f(t)$ *можно восстановить по ее значениям в точках* $t_n = n/2M$, $n \in \mathbb{Z}$, *с помощью интерполяционной формулы*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t_n)\frac{\sin(2\pi M(t-t_n))}{2\pi M(t-t_n)}, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{15.1}$$

где $\{(2\pi M(t-t_n))^{-1}\sin(2\pi M(t-t_n))\colon n \in \mathbb{Z}\}$ — *базис Шеннона–Котельникова.* Однако известно, что этот ряд, восстанавливающий сигнал, сходится довольно медленно.

p-Адическая теорема Шеннона–Котельникова имеет следующую форму.

Теорема 15.1 [6, Sect. 8.13; 51]. *Пусть* $f \in L^2(\mathbb{Q}_p^n)$, *и пусть* $\operatorname{supp} F[f] \subset B_j^n(0)$. *Тогда* f *можно восстановить по ее значениям в точках* $x_a = p^j a$, $a \in I_p^n$, *с помощью формулы*

$$f(x) = \sum_{a \in I_p^n} f(p^j a)\Omega\big(|p^{-j}x - a|_p\big), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^n, \tag{15.2}$$

где ряд сходится в $V_j \subset L^2(\mathbb{Q}_p^n)$, *а пространство* V_j *определяется формулами* (14.3). *Семейство функций*

$$\phi_{a,-j}(x) = p^{jn/2}\phi(p^{-j}x - a) = p^{jn/2}\Omega\big(|p^{-j}x - a|_p\big), \qquad a \in I_p^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \tag{15.3}$$

образует ортонормальный базис Шеннона–Котельникова в пространстве V_j (*здесь* $\phi(x) = \Omega(|x|_p)$ — *масштабирующая функция многомерного хааровского КМА*). *Для любого* $x \in \mathbb{Q}_p^n$ *ряд, дающий* (15.2), *содержит только один член.*

В отличие от стандартной версии этой теоремы (15.1), в p-адическом случае ряд (15.2), восстанавливающий сигнал, имеет только одно слагаемое в каждой точке $x \in \mathbb{Q}_p$. Вследствие этого в приближенных вычислениях p-адическая теорема Шеннона–Котельникова может давать лучшую реконструкцию сигнала, чем ее вещественная версия.

Следствие 15.1. (i) *Набор пространств* $V_j = F[L^2(B_j^n)]$ *образует многомерный p-адический хааровский КМА.*

(ii) $f \in L^2(\mathbb{Q}_p^n) \cap V_j \ \Leftrightarrow\ \operatorname{supp} F[f] \subset B_j^n(0),\ j \in \mathbb{Z}.$

(iii) *Для любого* $f \in V_j$ *имеет место представление* (15.2), $j \in \mathbb{Z}$.

В вещественном случае аналог следствия 15.1 был доказан в [92, теорема 1.4.1].

Замечание 15.1. В вещественном случае функция

$$\phi^{\mathrm{S}}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

используемая в представлении (15.1), является *масштабирующей функцией КМА Шеннона–Котельникова.* Этот КМА порождает соответствующую систему всплеск-функций (см. [92, теорема 1.4.3]). Поскольку

$$F[\phi^{\mathrm{S}}](\xi) = \chi_{[-\pi,\pi]}(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| \le \pi, \\ 0, & |\xi| > \pi, \end{cases} \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

и для вещественного случая хааровский базис (1.1), (1.2) строится в рамках КМА, порождаемого масштабирующей функцией $\phi^{\mathrm{H}}(t) = \chi_{[0,1]}(t)$, заданной формулой (1.9), в некотором смысле вещественный КМА Шеннона–Котельникова является “антиподом” вещественного хааровского КМА (функции ϕ^{S} и ϕ^{H} фактически меняются ролями). В противоположность этому для p-адического случая согласно теореме 15.1 и следствию 15.1 КМА Шеннона–Котельникова совпадает с хааровским КМА.

16. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ p-АДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

16.1. Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах. Как известно, сферические функции суть собственные векторы для оператора Лапласа. В p-адическом случае мы получаем аналогичные результаты для базисов всплесков и широкого семейства интегральных операторов. Следует заметить, что собственные векторы (с компактным носителем) для оператора Владимирова p-адического дробного дифференцирования в работе [119] были построены по аналогии со сферическими функциями.

На поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$ есть две основные структуры: структура поля (в частности, структура абелевой группы по сложению) и структура ультраметрического пространства. Эти структуры могут быть использованы для введения понятия псевдодифференциального оператора. Обычный способ ввести псевдодифференциальный оператор в пространстве функций на абелевой группе — определить такой оператор как диагонализующийся преобразованием Фурье. Такие операторы можно рассматривать как интегральные операторы вида

$$Tf(x) = \int T(x-y)(f(x)-f(y))\,d\mu(y). \tag{16.1}$$

Здесь μ есть мера Хаара на абелевой группе, ядро интегрирования $T(x)$ есть комплекснозначная функция и для удобства мы провели вычитание (добавили $f(x)$ в подынтегральное выражение).

Альтернативный способ введения псевдодифференциального оператора на $\mathbb{Q}_p$, использующий структуру ультраметрического пространства, был предложен в [73]. А именно был рассмотрен класс интегральных операторов

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} T(\sup(x,y))(f(x)-f(y))\,d\mu(y), \tag{16.2}$$

где $\sup(x,y)$ есть наименьший шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий точки x, y, а ядро интегрирования $T(I)$ есть комплекснозначная функция на множестве шаров в $\mathbb{Q}_p$.

Такие операторы, очевидно, не диагонализуются преобразованием Фурье. Было показано, что при выполнении некоторых условий сходимости базис p-адических всплесков является базисом из собственных векторов для оператора вида (16.2).

Теорема 16.1. *Пусть сходится ряд*

$$\sum_{j=0}^{\infty} p^j |T(I_{j0})| < \infty. \tag{16.3}$$

Тогда оператор (16.2) *имеет плотную область определения в пространстве* $L^2(\mathbb{Q}_p)$, *диагонализуется в базисе p-адических всплесков* (3.2) *и имеет в этом базисе собственные значения*

$$\lambda_{jn} = p^j T(I_{jn}) + (1-p^{-1}) \sum_{j'=j+1}^{\infty} p^{j'} T\big(I_{j',p^{j'-j}n}\big). \tag{16.4}$$

Здесь I_{jn} есть шар с характеристической функцией $\Omega(|p^j x - n|_p)$. Суммирование в (16.4) идет по возрастающей последовательности шаров, содержащих I_{jn}.

Собственное значение λ_{jn} оператора T вида (16.2) в базисе всплесков (отвечающее всплескам $\psi_{k;jn}$) зависит от двух индексов j и n (диаметра и положения шара, являющегося носителем всплеска, т.е. от самого шара). Для операторов вида (16.1) соответствующее собственное значение зависит только от масштаба носителя j.

Рассмотренный выше псевдодифференциальный оператор обобщается на случай общих полных локально компактных ультраметрических пространств [47, 74, 77].

16.2. Конечно диагональные интегральные операторы в базисе всплесков [79]. В настоящем пункте мы покажем, что интегральные операторы в $\mathbb{Q}_p$ достаточно общего вида имеют в базисе всплесков конечно диагональный вид, т.е. матрицы таких операторов отличны от нуля только на конечном числе главных диагоналей.

Мы изучаем линейные интегральные операторы вида

$$Tf(x) = \int\limits_{\mathbb{Q}_p} T(x-y)(f(x)-f(y))\,d\nu(y), \tag{16.5}$$

где ν есть борелевская мера, комплекснозначное ядро интегрирования имеет вид $T(x-y)$, причем $T(z)=T(-z)$, а также функция T локально постоянна при $x \neq y$. При этом функция $T(z)$ должна обладать следующими свойствами:

1) функция $T(z)$ абсолютно интегрируема на бесконечности, т.е.

$$\int\limits_{|z|_p \geq r} |T(z)|\,d\nu(z) < \infty$$

для некоторого $r>0$;

2) области локального постоянства ядра интегрирования $T(z)$ выглядят следующим образом: на сферах радиуса R с центром в нуле функция $T(z)$ постоянна на шарах диаметра $p^{-k}R$, $k \geq 1$. Таким образом, в каждой из таких концентрических сфер есть $p^k(1-p^{-1})$ подшаров, на которых $T(z)$ постоянна.

Мы рассматриваем действие таких операторов в пространстве $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ основных функций с нулевым средним. Сформулируем теорему о действии операторов вида (16.5) на p-адические всплески из базиса (3.2).

Теорема 16.2. *Действие оператора T вида* (16.5) (*обладающего свойствами* 1) *и* 2)) *на p-адический всплеск ψ с носителем в шаре I есть функция из пространства $\Phi(\mathcal{S})$, где дерево $\mathcal{S}$ является объединением деревьев $\mathcal{T}_{L,k}$, $I \leq L \leq J$, диаметр шара $J \supset I$ равен $p^{k-1}\operatorname{diam} I$, дерево $\mathcal{T}_{L,k}$ содержит всевозможные подшары в шаре L с диаметром, большим или равным $p^{-k}\operatorname{diam} L$.*

Здесь пространство основных функций с нулевым средним $\Phi(\mathcal{S})$ (связанное с конечным поддеревом $\mathcal{S}$ дерева шаров $\mathcal{T}(\mathbb{Q}_p)$) есть линейная оболочка всплесков, носители которых являются шарами из $\mathcal{S}$. Дерево $\mathcal{S}$ должно удовлетворять следующему условию: если оно содержит пару (шар A, максимальный подшар в шаре A), то $\mathcal{S}$ также должно содержать все максимальные подшары в шаре A.

Теорема будет верна также для случая $k=0$ (ядро интегрирования постоянно на сферах с центром в нуле), в этом случае всплески будут собственными векторами такого (псевдодифференциального) оператора. Таким образом, указанная выше теорема обобщает теорему 16.1 о связи теории всплесков и спектральной теории p-адических псевдодифференциальных операторов.

Следствие 16.1. *Матрица оператора T вида* (16.5) *в базисе всплесков имеет конечно диагональный вид, т.е. ненулевые матричные элементы такой матрицы сосредоточены на конечном числе главных диагоналей.*

А именно, для всплесков ψ_I, ψ_J с носителями в шарах I и J соответственно матричный элемент $\langle\psi_J, T\psi_I\rangle$ может быть отличен от нуля только при $|IJ| \leq 3k-3$, где $|IJ|$ есть расстояние между шарами I и J в дереве $\mathcal{T}(\mathbb{Q}_p)$ (*число ребер в пути, соединяющем вершины дерева, отвечающие шарам*).

Следствие 16.2. *Оператор* (16.5) *является фильтрованным оператором на пространстве* $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ (*т.е. отображает пространства фильтрации пространства* $\Phi(\mathbb{Q}_p)$ *конечномерными подпространствами* $\Phi(\mathcal{S})$, *связанными с деревьями, в пространства этой же фильтрации*).

Это утверждение следует из теоремы 16.2 и утверждения о том, что пространства фильтрации $\Phi(\mathcal{S})$ суть линейные оболочки соответствующих наборов всплесков.

16.3. Многомерные псевдодифференциальные операторы. Введем класс p-адических псевдодифференциальных операторов на пространстве Лизоркина основных функций $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ с нулевым средним

$$(A\phi)(x) = F^{-1}\big[\mathcal{A}(\xi)\,F[\phi](\xi)\big](x) = \\ = \int\limits_{\mathbb{Q}_p^d}\int\limits_{\mathbb{Q}_p^d} \chi\big((y-x)\cdot\xi\big)\mathcal{A}(\xi)\phi(y)\,d^d\mu(\xi)\,d^d\mu(y), \qquad \phi\in\Phi(\mathbb{Q}_p^d), \tag{16.6}$$

где $\mathcal{A}(\xi)\in\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^d\setminus\{0\})$ — символ оператора A. Определяя сопряженный псевдодифференциальный оператор A^{T} на $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ формулой

$$(A^{\mathrm{T}}\phi)(x) = F^{-1}\big[\mathcal{A}(-\xi)F[\phi](\xi)\big](x), \tag{16.7}$$

мы введем оператор A в пространстве распределений $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ обычным образом: для $f\in\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ имеем

$$\langle Af,\phi\rangle = \langle f, A^{\mathrm{T}}\phi\rangle \qquad \forall\,\phi\in\Phi(\mathbb{Q}_p^d). \tag{16.8}$$

Из последнего соотношения следует, что

$$Af = F^{-1}\big[\mathcal{A}\,F[f]\big], \qquad f\in\Phi'(\mathbb{Q}_p^d). \tag{16.9}$$

Лемма 16.1 [3]**.** *Пространства* $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$ *и* $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ *инвариантны относительно действия операторов* (16.6).

В частности, полагая $\mathcal{A}(\xi)=|\xi|_p^\alpha$, $\xi\in\mathbb{Q}_p^d$, в (16.9), мы получим многомерный дробный оператор D^α. Такой оператор был введен Тайблсоном в [102, Sect. 2; 103, Ch. III, Sect. 4] на пространстве распределений $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^d)$ для $\alpha\in\mathbb{C}$, $\alpha\neq -d$.

Большой вклад в изучение этого оператора был сделан Владимировым [105, 106, 119, 120]. В частности, в [106] была изучена спектральная теория и были построены примеры базисов из собственных векторов с компактными носителями. Обобщение этих базисов позднее привело [71] к введению базисов p-адических всплесков.

В [3] этот оператор был рассмотрен на пространстве $\Phi'(\mathbb{Q}_p^d)$ для всех $\alpha\in\mathbb{C}$. Согласно (16.6), (16.8)

$$(D^\alpha f)(x) = F^{-1}\big[|\cdot|_p^\alpha F[f](\cdot)\big](x), \qquad f\in\Phi'(\mathbb{Q}_p^d). \tag{16.10}$$

Введенный класс операторов, в частности, также содержит псевдодифференциальные операторы Кочубея с символами вида $\mathcal{A}(\xi)=|f(\xi_1,\dots,\xi_d)|_p^\alpha$, $\alpha>0$, где $f(\xi_1,\dots,\xi_d)$ — квадратичная форма, для которой $f(\xi_1,\dots,\xi_d)\neq 0$, когда $|\xi_1|_p+\ldots+|\xi_d|_p\neq 0$ (см. [65, 66]), а также псевдодифференциальные операторы с символами $\mathcal{A}(\xi)=|f(\xi_1,\dots,\xi_d)|_p^\alpha$, $\alpha>0$, где $f(\xi_1,\dots,\xi_d)$ — отличный от константы полином (см. [123, 124]).

16.4. Спектральная теория многомерных псевдодифференциальных операторов. Здесь мы получим условия того, что всплески, построенные в разд. 11, являются собственными функциями псевдодифференциального оператора (16.6). Эти всплески принадлежат пространству основных функций $\Phi(\mathbb{Q}_p^d)$, на которых псевдодифференциальный оператор (16.6) корректно определен.

Теорема 16.3 [5]. *Пусть A — псевдодифференциальный оператор* (16.6) *с символом $\mathcal{A}(\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^d \setminus \{0\})$, и пусть $k \in J_{p0}^d$, $j \in \mathbb{Z}$, $n \in I_p^d$, где J_{p0}^d — множество значений k, определенных в* (3.5). *Тогда d-мерная всплеск-функция* (3.6)

$$\psi_{k;jn}(x) = p^{-dj/2}\chi\big(p^{-1}k \cdot (p^j x - n)\big)\Omega\big(|p^j x - n|_p\big), \qquad x \in \mathbb{Q}_p^d,$$

является собственной функцией A в том и только том случае, если выполнено условие

$$\mathcal{A}\big(p^j(-p^{-1}k + \eta)\big) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{Z}_p^d. \tag{16.11}$$

Соответствующее собственное значение $\lambda = \mathcal{A}(-p^{j-1}k)$, т.е.

$$A\psi_{k;jn}(x) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k)\psi_{k;jn}(x).$$

Легко проверить, что символ $\mathcal{A}(\xi) = |\xi|_p^\alpha$ удовлетворяет условию (16.11):

$$\mathcal{A}(-p^{-1}k + \eta) = |-p^{-1}k + \eta|_p^\alpha = |-p^{-1}k|_p^\alpha = \mathcal{A}(-p^{-1}j) = p^\alpha \qquad \forall\, \eta \in \mathbb{Z}_p^d,$$

$k = (k_1, \dots, k_d) \in J_{p0}^d$. Поэтому в силу теоремы 16.3 мы имеем

Следствие 16.3. *d-Мерная всплеск-функция* (3.6) *является собственной функцией дробного оператора Владимирова* (16.10):

$$D^\alpha \psi_{k;jn} = p^{\alpha(1-j)}\psi_{k;jn}(x), \qquad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{Q}_p^d, \tag{16.12}$$

$j \in \mathbb{Z}$, $n \in I_p^d$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in J_{p0}^d$.

Описанные выше результаты обобщаются на произвольные хааровские всплески вида (14.5) (формулы для собственных значений будут иметь тот же вид с собственными значениями, зависящими только от j).

Благодарности. Авторы признательны И.В. Воловичу, В.С. Владимирову и Е.И. Зеленову за обсуждения различных вопросов p-адического анализа и М.А. Скопиной за обсуждения теории всплесков. Авторы выражают благодарность Ю.А. Фаркову за обсуждения теории Уолша и всплесков на канторовых группах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic nonorthogonal wavelet bases // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 7–18.
2. *Albeverio S., Evdokimov S., Skopina M.* p-Adic multiresolution analysis and wavelet frames // J. Fourier Anal. Appl. 2010. V. 16, N 5. P. 693–714; arXiv: 0802.1079v1 [math.CA].
3. *Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Harmonic analysis in the p-adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p-adic wavelets, Tauberian theorems // J. Fourier Anal. Appl. 2006. V. 12, N 4. P. 393–425.
4. *Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Pseudo-differential operators in the p-adic Lizorkin space // p-Adic mathematical physics: Proc. 2nd Int. Conf., Belgrade, Sept. 15–21, 2005 / Ed. by A.Yu. Khrennikov, Z. Rakić, I.V. Volovich. Melville, NY: Amer. Inst. Phys., 2006. P. 195–205. (AIP Conf. Proc.; V. 826).
5. *Альбеверио С., Хренников А.Ю., Шелкович В.М.* p-Адические полулинейные эволюционные псевдодифференциальные уравнения в пространствах Лизоркина // ДАН. 2007. Т. 415, №3. С. 295–299.

6. *Albeverio S., Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Theory of p-adic distributions: Linear and nonlinear models. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. (LMS Lect. Note Ser.; V. 370).
7. *Albeverio S., Kozyrev S.V.* Coincidence of the continuous and discrete p-adic wavelet transforms: E-print, 2007. arXiv: math-ph/0702010.
8. *Albeverio S., Kozyrev S.V.* Multidimensional ultrametric pseudodifferential equations // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 19–35; arXiv: 0708.2074 [math-ph].
9. *Albeverio S., Kozyrev S.V.* Frames of p-adic wavelets and orbits of the affine group // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2009. V. 1, N 1. P. 18–33; arXiv: 0801.4713 [math-ph].
10. *Albeverio S., Kozyrev S.V.* Multidimensional basis of p-adic wavelets and representation theory // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2009. V. 1, N 3. P. 181–189; arXiv: 0903.0461 [math-ph].
11. *Albeverio S., Kozyrev S.V.* Multidimensional p-adic wavelets for the deformed metric // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2010. V. 2, N 4. P. 265–277; arXiv: 1105.1524 [math.FA].
12. *Albeverio S., Kuzhel S., Torba S.* p-Adic Schrödinger-type operator with point interactions // J. Math. Anal. Appl. 2008. V. 338, N 2. P. 1267–1281.
13. *Aref'eva I.Ya., Dragovich B., Frampton P.H., Volovich I.V.* The wave function of the Universe and p-adic gravity // Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6, N 24. P. 4341–4358.
14. *Aref'eva I.Ya., Dragović B.G., Volovich I.V.* On the adelic string amplitudes // Phys. Lett. B. 1988. V. 209, N 4. P. 445–450.
15. *Aref'eva I., Frampton P.H.* Beyond Planck energy to non-Archimedean geometry // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6, N 4. P. 313–316.
16. *Aref'eva I.Ya., Volovich I.V.* Strings, gravity and p-adic space-time // Quantum gravity: Proc. Fourth Seminar, Moscow, May 25–29, 1987 / Ed. by M.A. Markov, V.A. Berezin, V.P. Frolov. Singapore: World Sci., 1988. P. 409–422.
17. *Benedetto J.J., Benedetto R.L.* A wavelet theory for local fields and related groups // J. Geom. Anal. 2004. V. 14, N 3. P. 423–456.
18. *Benedetto R.L.* Examples of wavelets for local fields // Wavelets, frames, and operator theory: Proc. Workshop, College Park, MD, 2003. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2004. P. 27–47. (Contemp. Math.; V. 345).
19. *Cartier P.* Harmonic analysis on trees // Harmonic analysis on homogeneous spaces: Proc. Symp. Pure Math., Williamstown, MA, 1972. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1973. P. 419–424. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 26).
20. *Cartier P.* Representations of p-adic groups: A survey // Automorphic forms, representations and L-functions: Proc. Symp. Pure Math., Corvallis, OR, 1977. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1979. Part 1. P. 111–155. (Proc. Symp. Pure Math.; V. 33).
21. *Casas-Sánchez O., Zúñiga-Galindo W.A.* Riesz kernels and pseudodifferential operators attached to quadratic forms over p-adic fields // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2013. V. 5, N 3. P. 177–193.
22. *Chacón-Cortes L.F., Zúñiga-Galindo W.A.* Nonlocal operators, parabolic-type equations, and ultrametric random walks // J. Math. Phys. 2013. V. 54, N 11. Pap. 113503.
23. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. Philadelphia, PA: SIAM, 1992. (CBMS-NSF Reg. Conf. Ser. Appl. Math.; V. 61). Рус. пер.: *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.
24. *Dragovich B.G.* On signature change in p-adic space-times // Mod. Phys. Lett. A. 1991. V. 6, N 25. P. 2301–2307.
25. *Dragovich B., Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V., Volovich I.V.* On p-adic mathematical physics // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2009. V. 1, N 1. P. 1–17.
26. *Dragovich B., Nesic Lj.* On p-adic numbers in gravity // Balkan Phys. Lett. 1998. V. 6. P. 78–81.
27. *Фарков Ю.А.* Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, №3. С. 193–220.
28. *Farkov Yu.A.* Multiresolution analysis and wavelets on Vilenkin groups // Facta Univ. Ser. Electron. Energ. 2008. V. 21, N 3. P. 309–325.
29. *Фарков Ю.А.* Биортогональные всплески на группах Виленкина // Тр. МИАН. 2009. Т. 265. С. 110–124.
30. *Farkov Yu.A.* On wavelets related to the Walsh series // J. Approx. Theory. 2009. V. 161, N 1. P. 259–279.
31. *Farkov Yu.A.* Wavelets and frames based on Walsh–Dirichlet type kernels // Commun. Math. Appl. 2010. V. 1, N 1. P. 27–46.
32. *Freund P.G.O., Witten E.* Adelic string amplitudes // Phys. Lett. B. 1987. V. 199, N 2. P. 191–194.
33. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука, 1966. (Обобщенные функции; Вып. 6).
34. *Голубов Б.И.* О модифицированном сильном двоичном интеграле и производной // Мат. сб. 2002. Т. 193, №4. С. 37–60.

35. *Голубов Б.И.* Двоичный аналог тауберовой теоремы Винера и смежные вопросы // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, №1. С. 33–58.
36. *Голубов Б.И.* Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$ // Функц. анализ и его прил. 2005. Т. 39, №2. С. 64–70.
37. *Голубов Б.И.* Модифицированный двоичный интеграл и производная дробного порядка на $\mathbb{R}_+$ // Мат. заметки. 2006. Т. 79, №2. С. 213–233.
38. *Б.И. Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. 2-е изд. М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
39. *Gröchenig K., Madych W.R.* Multiresolution analysis, Haar bases, and self-similar tilings of R^n // IEEE Trans. Inf. Theory. 1992. V. 38, N 2. P. 556–568.
40. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. Bd. 69. S. 331–371.
41. *Kaiser G.* A friendly guide to wavelets. Boston: Birkhäuser, 1994.
42. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
43. *Хренников А.Ю.* Фундаментальные решения над полем p-адических чисел // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4, №3. С. 248–266.
44. *Khrennikov A.Yu.* p-Adic valued distributions in mathematical physics. Dordrecht: Kluwer, 1994.
45. *Khrennikov A.Yu.* Non-Archimedean analysis: Quantum paradoxes, dynamical systems and biological models. Dordrecht: Kluwer, 1997.
46. *Хренников А.Ю.* Неархимедов анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003.
47. *Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V.* Wavelets on ultrametric spaces // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2005. V. 19, N 1. P. 61–76.
48. *Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V.* Wavelets and the Cauchy problem for the Schrödinger equation on analytic ultrametric space // Mathematical modeling of wave phenomena: Proc. 2nd Conf., Växjö, Sweden, Aug. 14–19, 2005 / Ed. by B. Nilsson, L. Fishman. Melville, NY: Amer. Inst. Phys., 2006. P. 344–350. (AIP Conf. Proc.; V. 834).
49. *Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V.* Ultrametric random field // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2006. V. 9, N 2. P. 199–213; arXiv: math/0603584 [math.PR].
50. *Khrennikov A.Yu., Kozyrev S.V., Oleschko K., Jaramillo A.G., de Jesús Correa López M.* Application of p-adic analysis to time series // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 2013. V. 16, N 4. Pap. 1350030.
51. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Distributional asymptotics and p-adic Tauberian and Shannon–Kotelnikov theorems // Asymptotic Anal. 2006. V. 46, N 2. P. 163–187.
52. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* p-Adic multidimensional wavelets and their application to p-adic pseudo-differential operators: E-print, 2006. arXiv: math-ph/0612049.
53. *Хренников А.Ю., Шелкович В.М.* Нехааровские p-адические всплески и псевдодифференциальные операторы // ДАН. 2008. Т. 418, №2. С. 167–170.
54. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* An infinite family of p-adic non-Haar wavelet bases and pseudo-differential operators // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2009. V. 1, N 3. P. 204–216.
55. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M.* Non-Haar p-adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations // Appl. Comput. Harmon. Anal. 2010. V. 28, N 1. P. 1–23; arXiv: 0808.3338v1 [math-ph].
56. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M.* p-Adic orthogonal wavelet bases // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2009. V. 1, N 2. P. 145–156.
57. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., Skopina M.* p-Adic refinable functions and MRA-based wavelets // J. Approx. Theory. 2009. V. 161, N 1. P. 226–238.
58. *Khrennikov A.Yu., Shelkovich V.M., van der Walt J.H.* Adelic multiresolution analysis, construction of wavelet bases and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. Appl. 2013. V. 19, N 6. P. 1323–1358.
59. *King E.J., Skopina M.A.* Quincunx multiresolution analysis for $L^2(\mathbb{Q}_2^2)$ // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2010. V. 2, N 3. P. 222–231.
60. *Klauder J.R., Sudarshan E.C.G.* Fundamentals of quantum optics. New York: Benjamin, 1968.
61. *Кочубей А.Н.* Оператор типа Шрёдингера над полем p-адических чисел // ТМФ. 1991. Т. 86, №3. С. 323–333.
62. *Кочубей А.Н.* Параболические уравнения над полем p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1991. Т. 55, №6. С. 1312–1330.
63. *Кочубей А.Н.* Оператор дифференцирования на подмножествах поля p-адических чисел // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №5. С. 1021–1039.
64. *Kochubei A.N.* Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of p-adic numbers // p-Adic functional analysis / Ed. by W.H. Schikhof et al. New York: M. Dekker, 1997. P. 275–280. (Lect. Notes Pure Appl. Math.; V. 192).

65. *Кочубей А.Н.* Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p-адическими квадратичными формами // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62, №6. С. 103–124.
66. *Kochubei A.N.* Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archimedean fields. New York: M. Dekker, 2001.
67. *Kochubei A.N.* A non-Archimedean wave equation // Pac. J. Math. 2008. V. 235, N 2. P. 245–261.
68. *Konyagin S.V., Shparlinski I.E.* Character sums with exponential functions and their applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
69. *Косяк А.В., Хренников А.Ю., Шелкович В.М.* Базисы всплесков на аделях // ДАН. 2012. Т. 442, №4. С. 446–450.
70. *Косяк А.В., Хренников А.Ю., Шелкович В.М.* Псевдодифференциальные операторы на аделях и базисы всплесков // ДАН. 2012. Т. 444, №3. С. 253–257.
71. *Козырев С.В.* Теория всплесков как p-адический спектральный анализ // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, №2. С. 149–158; arXiv: math-ph/0012019.
72. *Козырев С.В.* p-Адические псевдодифференциальные операторы: методы и приложения // Тр. МИАН. 2004. Т. 245. С. 154–165.
73. *Козырев С.В.* p-Адические псевдодифференциальные операторы и p-адические всплески // ТМФ. 2004. Т. 138, №3. С. 383–394; arXiv: math-ph/0303045.
74. *Козырев С.В.* Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. 2007. Т. 198, №1. С. 103–126; *Kozyrev S.V.* Ultrametric pseudodifferential operators and wavelets for the case of non-homogeneous measure: E-print, 2004. arXiv: math-ph/0412082.
75. *Козырев С.В.* Методы и приложения ультраметрического и p-адического анализа: от теории всплесков до биофизики. М.: МИАН, 2008. (Совр. пробл. математики; Т. 12); http://www.mi.ras.ru/spm/pdf/012.pdf
76. *Козырев С.В.* К ультраметрической теории турбулентности // ТМФ. 2008. Т. 157, №3. С. 413–424; arXiv: 0803.2719 [math-ph].
77. *Козырев С.В., Хренников А.Ю.* Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах и ультраметрические всплески // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, №5. С. 133–148; arXiv: math-ph/0412062.
78. *Козырев С.В., Хренников А.Ю.* Пространственная локализация для свободной частицы в ультраметрической квантовой механике // ДАН. 2006. Т. 411, №3. С. 319–322.
79. *Козырев С.В., Хренников А.Ю.* p-Адические интегральные операторы в базисах всплесков // ДАН. 2011. Т. 437, №4. С. 457–461.
80. *Kozyrev S.V., Osipov V.Al., Avetisov V.A.* Nondegenerate ultrametric diffusion // J. Math. Phys. 2005. V. 46, N 6. Pap. 063302.
81. *Kuzhel S., Torba S.* p-Adic fractional differential operators with point interactions // Methods Funct. Anal. Topol. 2007. V. 13, N 2. P. 169–180.
82. *Lang W.C.* Orthogonal wavelets on the Cantor dyadic group // SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 305–312.
83. *Lang W.C.* Wavelet analysis on the Cantor dyadic group // Houston J. Math. 1998. V. 24. P. 533–544.
84. *Лизоркин П.И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, №3. С. 325–353.
85. *Лизоркин П.И.* Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций // Тр. МИАН. 1972. Т. 117. С. 212–243.
86. *Mallat S.* An efficient image representation for multiscale analysis // Topical Meeting on Machine Vision, Incline Village, Nevada, 1987. Washington D.C.: Opt. Soc. Amer., 1987. P. 172–175.
87. *Mallat S.* Multiresolution representation and wavelets: PhD Thesis. Philadelphia, PA: Univ. Pennsylvania, 1988.
88. *Meyer Y.* Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs // Séminaire Bourbaki 1985/1986. Paris: Soc. math. France, 1987. Exp. 662. P. 209–223. (Astérisque; V. 145/146).
89. *Meyer Y.* Ondelettes et fonctions splines. Palaiseau: École Polytech., 1987. (Sémin. équations dériv. partielles 1986–1987; Exp. 6).
90. *Meyer Y.* Wavelets and operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
91. *Неретин Ю.А.* О комбинаторных аналогах группы диффеоморфизмов окружности // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №5. С. 1072–1085.
92. *Новиков И.Я., Протасов В.Ю., Скопина М.А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2005.
93. *Новиков И.Я., Скопина М.А.* Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые? // Мат. заметки. 2012. Т. 91, №6. С. 950–953.
94. *Ольшанский Г.И.* Классификация неприводимых представлений групп автоморфизмов деревьев Брюа–Титса // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, №1. С. 32–42.
95. *Переломов А.М.* Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.

96. *Протасов В.Ю., Фарков Ю.А.* Диадические вейвлеты и масштабирующие функции на полупрямой // Мат. сб. 2006. Т. 197, №10. С. 129–160.
97. *Родионов Е.А., Фарков Ю.А.* Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши // Мат. заметки. 2009. Т. 86, №3. С. 429–444.
98. *Rodríguez-Vega J.J., Zúñiga-Galindo W.A.* Taibleson operators, p-adic parabolic equations and ultrametric diffusion // Pac. J. Math. 2008. V. 237, N 2. P. 327–347.
99. *Serre J.-P.* Arbres, amalgames, SL_2. Paris: Soc. Math. France, 1977. (Astérisque; V. 46). Неполн. рус. пер.: *Серр Ж.-П.* Деревья, амальгамы и SL_2 // Математика. 1974. Т. 18, №1. С. 3–51; №2. С. 3–27.
100. *Serre J.-P.* Trees. Berlin: Springer, 1980, 2003.
101. *Shelkovich V., Skopina M.* p-Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators // J. Fourier Anal. Appl. 2009. V. 15, N 3. P. 366–393.
102. *Taibleson M.* Harmonic analysis on n-dimensional vector spaces over local fields. I: Basic results on fractional integration // Math. Ann. 1968. Bd. 176. S. 191–207.
103. *Taibleson M.H.* Fourier analysis on local fields. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1975.
104. *Torba S.M., Zúñiga-Galindo W.A.* Parabolic type equations and Markov stochastic processes on adeles // J. Fourier Anal. Appl. 2013. V. 19, N 4. P. 792–835.
105. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции над полем p-адических чисел // УМН. 1988. Т. 43, №5. С. 17–53.
106. *Владимиров В.С.* О спектре некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p-адических чисел // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, №6. С. 107–124.
107. *Владимиров В.С.* О спектральных свойствах p-адических псевдодифференциальных операторов типа Шрёдингера // Изв. РАН. Сер. мат. 1992. Т. 56, №4. С. 770–789.
108. *Владимиров В.С.* К обоснованию адельной формулы Фреинда–Виттена для четырехточечных амплитуд Венециано // ТМФ. 1993. Т. 94, №3. С. 355–367.
109. *Владимиров В.С.* Адельные формулы Фреинда–Виттена для амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро // УМН. 1993. Т. 48, №6. С. 3–38.
110. *Vladimirov V.S.* On the Freund–Witten adelic formula for Veneziano amplitudes // Lett. Math. Phys. 1993. V. 27, N 2. P. 123–131.
111. *Владимиров В.С.* Об адельных формулах для четырехточечных амплитуд Венециано и Вирасоро–Шапиро // ДАН. 1993. Т. 333, №6. С. 717–721.
112. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. I: Дифференциальное исчисление // ТМФ. 1984. Т. 59, №1. С. 3–27.
113. *Владимиров В.С., Волович И.В.* Суперанализ. II: Интегральное исчисление // ТМФ. 1984. Т. 60, №2. С. 169–198.
114. *Владимиров В.С., Волович И.В.* p-Адическая квантовая механика // ДАН СССР. 1988. Т. 302, №2. С. 320–323.
115. *Vladimirov V.S., Volovich I.V.* A vacuum state in p-adic quantum mechanics // Phys. Lett. B. 1989. V. 217, N 4. P. 411–415.
116. *Vladimirov V.S., Volovich I.V.* p-Adic quantum mechanics // Commun. Math. Phys. 1989. V. 123, N 4. P. 659–676.
117. *Vladimirov V.S., Volovich I.V.* p-Adic Schrödinger-type equation // Lett. Math. Phys. 1989. V. 18, N 1. P. 43–53.
118. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений // ДАН СССР. 1990. Т. 310, №2. С. 272–276.
119. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, №2. С. 275–302.
120. *Владимиров В.С., Волович И.В., Зеленов Е.И.* p-Адический анализ и математическая физика. М.: Наука, 1994.
121. *Волович И.В.* p-Адическое пространство-время и теория струн // ТМФ. 1987. Т. 71, №3. С. 337–340.
122. *Volovich I.V.* p-Adic string // Classical Quantum Gravity. 1987. V. 4. P. L83–L87.
123. *Zuniga-Galindo W.A.* Fundamental solutions of pseudo-differential operators over p-adic fields // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. 2003. V. 109. P. 241–245.
124. *Zuniga-Galindo W.A.* Pseudo-differential equations connected with p-adic forms and local zeta functions // Bull. Aust. Math. Soc. 2004. V. 70, N 1. P. 73–86.
125. *Zúñiga-Galindo W.A.* Local zeta functions and fundamental solutions for pseudo-differential operators over p-adic fields // p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. 2011. V. 3, N 4. P. 344–358.