Домашняя работа 1

Авторы:
Карибджанов Матвей

2023

Содержание

1. Ведение

Рассмтрим гуппу симметрий тетраидера T_d. Легко понять что количество элентов этой группы это $3\dot{4}\dot{2} = 24$. 3 это количество повротов вокруг вершины, 4 так как все 4 вершины эквиваленты умножаю на 2 так как уичитывам так же отражения.

2. Поиск элементов

2.1. Повороты на $0 \wedge \dfrac{\pi}{3} \wedge \dfrac{2\pi}{3}$

Сначала найдем чевидные элемнты группы это повороты на $0 \wedge \dfrac{\pi}{3} \wedge \dfrac{2\pi}{3}$ вогруг осей проходящих через высоту падающай из произвольной вершины. Таик такую группу повротов мы уже знаем это C_3^n приэтом заметим что для любой вершины еденичные элемнты будут совпадть поэтому всего повротов будет $4 * 3 = 8$. Еслри пронумеровать вершины то можем обозначить элемнты ледующим обзазам

$$C_3^{n\ v},\ n \in [1,2],\ v \in [0,1,3,4] \tag{2.1}$$

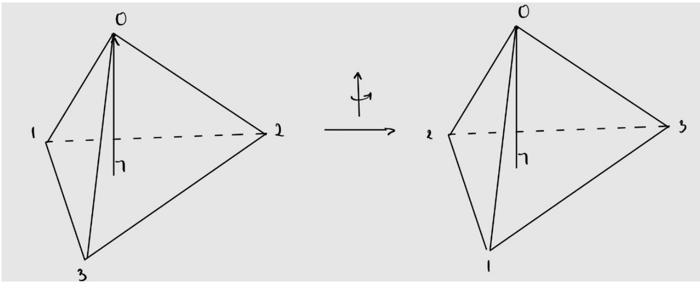

Рис. 1. Действие элемента $C_3^{1\ 0}$

2.2. Повороты на π

Такжем можем легко заметить что есть повороты на π вокруг оси соединяющей середины противоположных ребер. Тоесть для всего таких элементов $6/2 = 3$, делю на 2 тк для ребрер $e_1 e_2$ и $e_2 e_1$ один и тот же. Обозначим их так:

$$C_2^{e_1\ e_2} = C_2^{e_2\ e_1} = C_2^{e_1},\ e_1, e_2 \in (01, 02, 03, 12, 13, 23) \tag{2.2}$$

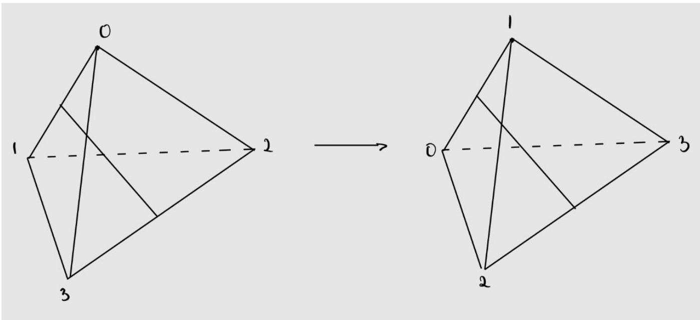

Рис. 2. Действие элемента C_2^{01}

2.3. Отражения

И самое последнее, что можно легко зметить это отраженияо тносительно плоскости оразуемой ребром и серединой протипротоволежащего ребра. Таким образом всего элементов будет 6 - количество ребер. Введем следующее обозначения:

$$\sigma^{e_1}, e_1 \in (01, 02, 03, 12, 13, 23) \tag{2.3}$$

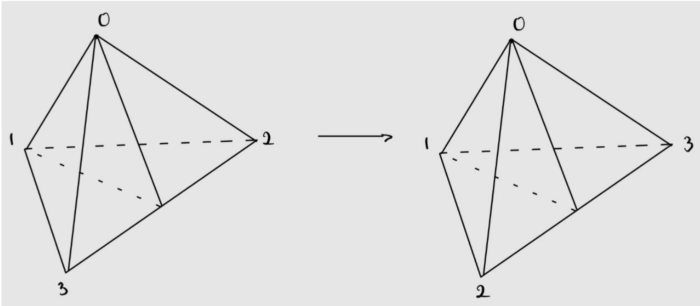

Рис. 3. Действие элемента σ^{01}

2.4. Дополнение до группы

Как можно заметить пака что элементов меньше чем требуется, поэтому пред оставлю машине посчитаь за меня оставшиеся элементы. Но перед этим я зметил что группу сииметрий тетраидера и вроде как любой фигуры (для тетраидера и 3Д фигур точно работает), можно задать изоморфизм на подгуппу кос (без учета нахлеста) с количеством нитей равным количеству вершин фигуры. Тоесть можем перписать наши эленты следующи образом:

$$e \rightarrow 0123 \quad (2.4)$$
$$C_3^{1\ 0} \rightarrow 0231 \quad (2.5)$$
$$C_2^{01} \rightarrow 1032 \quad (2.6)$$
$$\sigma^{01} \rightarrow 0132 \quad (2.7)$$

Думаю изорфизм остальных элементов очевиден. Следствем такого изоморфизма является тот факт, что моя группа э то Гуппа престановок 4 элемнтов (S_4) Тут же заметим простой факт элементы из C_3 это циклическая перстановка 3 элементов, C_2 - перстановка элентов внутри 2х пар, σ перестановка элемнтов внутри одной пары. Можно леко дополнить группу протой найдя оставшиеся перстаовки, но я написал код так, что омотри код.

В итоге получу полную группу T_d = (0123, 1032, 2301, 3210, 0231, 0312, 2130, 3102, 1320, 3021, 1203, 2013, 0132, 0321, 0213, 3120, 2103, 1023, 1230, 1302, 2031, 3012, 2310, 3201)

3. Таблица Келли

А таблица Келли для сответствующего порядка элементов группы

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
1	0	3	2	8	10	9	11	4	6	5	7	17	18	19	20	21	12	13	14	15	16	23	22
2	3	0	1	11	6	5	8	7	10	9	4	22	16	20	19	13	23	21	15	14	18	12	17
3	2	1	0	7	9	10	4	11	5	6	8	23	21	15	14	18	22	16	20	19	13	17	12
4	11	7	8	5	0	3	10	6	1	2	9	14	12	13	18	23	20	22	16	21	17	15	19
5	9	10	6	0	4	8	2	3	11	7	1	13	14	12	22	19	21	15	23	17	20	18	16
6	10	9	5	2	11	7	0	1	4	8	3	16	20	22	12	15	18	19	17	23	14	21	13
7	8	4	11	9	3	0	6	10	2	1	5	15	23	21	16	12	19	17	18	13	22	14	20
8	7	11	4	10	1	2	5	9	0	3	6	19	17	18	13	22	15	23	21	16	12	20	14
9	5	6	10	3	7	11	1	0	8	4	2	21	15	23	17	20	13	14	12	22	19	16	18
10	6	5	9	1	8	4	3	2	7	11	0	18	19	17	23	14	16	20	22	12	15	13	21
11	4	8	7	6	2	1	9	5	3	0	10	20	22	16	21	17	14	12	13	18	23	19	15
12	17	23	22	13	14	15	16	18	20	19	21	0	4	5	6	7	1	8	10	9	11	3	2
13	21	16	18	14	12	22	19	15	17	23	20	5	0	4	8	2	9	3	7	11	1	6	10
14	20	19	15	12	13	18	23	22	21	16	17	4	5	0	3	10	11	6	2	1	9	8	7
15	19	20	14	23	21	16	12	17	13	18	22	7	9	3	0	6	8	10	1	2	5	11	4
16	18	13	21	20	22	12	15	19	23	17	14	6	2	11	7	0	10	1	8	4	3	5	9
17	12	22	23	18	19	20	21	13	15	14	16	1	8	10	9	11	0	4	5	6	7	2	3
18	16	21	13	19	17	23	14	20	12	22	15	10	1	8	4	3	6	2	11	7	0	9	5
19	15	14	20	17	18	13	22	23	16	21	12	8	10	1	2	5	7	9	3	0	6	4	11
20	14	15	19	22	16	21	17	12	18	13	23	11	6	2	1	9	4	5	0	3	10	7	8
21	13	18	16	15	23	17	20	14	22	12	19	9	3	7	11	1	5	0	4	8	2	10	6
22	23	17	12	16	20	19	13	21	14	15	18	2	11	6	5	8	3	7	9	10	4	1	0
23	22	12	17	21	15	14	18	16	19	20	13	3	7	9	10	4	2	11	6	5	8	0	1

4. Поиск представлений

4.1. Классы сопряженности

С помощью простого перебора программой я получил следующий классы:

$$0123 \tag{4.1}$$
$$2301, 3210, 1032 \tag{4.2}$$
$$1203, 2130, 0231, 3102, 1320, 3021, 2013, 0312 \tag{4.3}$$
$$0132, 1023, 0321, 0213, 2103, 3120 \tag{4.4}$$
$$1230, 3201, 2031, 1302, 3012, 2310 \tag{4.5}$$

4.2. Анализ результатов классов смежности

Сначала перепишем классы в дркгом виде для простоты объяснения:

$$e \tag{4.6}$$
$$eC_2^{01}, C_2^{03}, C_2^{02} \tag{4.7}$$
$$C_3^{21}, C_3^{10}, C_3^{13}, C_3^{20}, C_3^{12}, C_3^{11}, C_3^{22}, C_3^{23} \tag{4.8}$$
$$s^{13}, s^{01}, s^{12}, s^{23}, s^{03}, s^{02} \tag{4.9}$$
$$C_2^{02} * s^{23}, C_2^{02} * s^{01}, C_2^{01} * s^{12}, C_2^{01} * s^{03}, C_2^{01} * s^{02}, C_2^{01} * s^{13} \tag{4.10}$$

Как мы видим из не привиалных классов у нас есть 2 Нормальные подгруппы поворотов на π и $\frac{2\pi}{3}$ соттветственно. Так же есть подгуппа отражений и произведение отражений и повротов на π.

Как мы знаем всегда есть одно тривиаольное одномерное преодставление. Но есть одно знако переменно порожденной не однозначностью выбора опредлителя при поворотах, я могу с уверенность сказсть это так как группа повротов тераидера являтся подгуппой симмтрий шара тоесть группы $SO(3)$:

	e	C_2	C_3	σ	$\sigma * C_2$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1

Дальше пользуясь соотношением

$$C = \sum_i s_i^2 = 1 + 1 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 \tag{4.11}$$

Можем нати что оставшиеся 3 предсталения имеют следующие размерности $s_3 = s_4 = 3,\ s_5 = 2$. Можно было и рантше воспользоваться этим соотношениеим и порлучить, что всего есть 2 одномерных представления.

3-х Мерные представления

Трех мреные мы всегда хорошо занаем так как у нас группа симмтрий тетраидера составленная из повротов и отражений, то матричные представления это повроты вокруг некотрых осей матри поврота всегда можно передставить в виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

Как и в пршлый раз два предсталения это следствие не однозначности выбора определителя.

Получим характеры $\pm 1 + 2\cos\varphi$

	e	C_2	C_3	σ	$\sigma * C_2$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
T_1	3	-1	0	-1	1
T_2	3	-1	0	1	-1

Для первых двух классов расчет одинкаов там +1:

$$e: \; 1 + 2\cos\varphi \,|_{\varphi=0} = 1 + 2 = 3 \tag{4.13}$$

$$C_2: \; 1 + 2\cos\varphi \,|_{\varphi=\pi} = 1 - 2 = -1 \tag{4.14}$$

$$C_3: \; 1 + 2\cos\varphi \Big|_{\varphi=\frac{2\pi}{3}} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \tag{4.15}$$

Для последниийх двух столбцов отличие в знаке перед единицей, как в одномерных представлениийх собственно это они и есть толко записанные как блок трех мерной матрици.

$$\sigma: \pm 1 \mp 2\cos\varphi \,|_{\varphi=0} = \pm 1 \mp 2 = \mp 1$$
$$\sigma * C_2: \mp 1 \pm \cos\varphi \,|_{\varphi=0} = \pm 1$$

4.3. Двумерное представлене и таблица харектеров

Последнюю строку для двумерного представления найдем из соотношения ортгональности.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ x \end{pmatrix} = 1 + 1 - 3 - 3 + 2x = 0 \implies x = 2 \tag{4.16}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 + 1 + 2x = 0 \implies x = -1 \tag{4.17}$$

и так далее. В итоге получим:

	e	C_2	C_3	σ	$\sigma * C_2$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	−1	−1
T_1	3	−1	0	−1	1
T_2	3	−1	0	1	−1
E	2	2	−1	0	0

5. Преобразование функций

5.1. Одномерные пердставления

Здесь мне повезло тетраидер очень хорошая фигура и если выбирать любой базис то в нем все оси равновыделенны, это мы знаем еще с аналитической механики, когда расчитывали моенты инерции тетраидера, поэтому не побоюсь этим воспользоваться.

Для начала очевидное представление A_1 так как оно единичное то а повороты происходят в различых осях то сответственно только $x^2 + y^2 + z^2$.

5.2. Трехмерные передставления

Явно я знаю только одно представление, это 4-мерное, при этом оно приводимо. Выглядят преобразования следующим образом:

$$D(1032) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in C_2, \; D(1203) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_3, \; D(0132) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \sigma \tag{5.1}$$

Можно по анологии построить остальные матрицы представления. Такие матрицы дейтвуют на пространстве функций:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ f \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Найдем такую матрицу что будет преобразовывть мои $D(g)$ в:

$$S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}; \; B = 3 \times 3, \; A = 1 \times 1, \; C = 1 \times 3 \tag{5.3}$$

Тут позволю себе отойти от темы. Я говрил вам на паре что матрица иваритного подпространства не всегда должна иметь $C = 0$. Явно это можно увидеть из следующих соображений.

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + Bx_2 \\ Bx_2 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

То есть x_2 ивариантное подпространство. Я счтаю то это тот самы случай когда это важно, потому что если бы я искал $C = 0$ то боюсь что не нашел бы такого пердставления.

Возварыюсь к теме, иными словами я должен сотавит из функций (a, b, c, f) 4 линейных комбинации котрые будут удовлетворять:

1. 3 из них переходят сами в себя при действии любого элента группы

2. 4 должны сотвлять полный базис в протранстве 4-х элментов

3. 3 из первого пункта при перестановке двух элементов любых элементов и циклической должны выржать ся друг через друга так что-бы при не возникало линеных компфинвций этих любых двух функций.

1 - требование ивариантности трех мерного пространства.

2 - требование не вырожденности преобразований.

3 - требование позволит обозначить эти три линейные комбинации за x, y, z и тогда при перобразованих будет происходить например следующее $B(x, y, z) = (\alpha z, \beta x, \gamma z)$. Кароче говря мы найдем самый трех мерный базис функций. Но может возникнуть вопрос почему я говорю только о одной циклической перестановке и престановке двух элементов, на самом деле этих двух действий достаточно чтобы потсроить любое другое действие группы.

Матрицу S я угадал но надо сказть что она более менее тривильна:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

То-есть функции ы новом базисе

$$\begin{pmatrix} a-b-c+f \\ a+b-c-f \\ a-b+c-f \\ a \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b-c+f \\ a+b-c-f \\ a-b+c-f \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Проверка 2-огг условия происходят явно, $det(S) \neq 0$. Проверку 3 условия я не знаю как делать в общем случае, но ее можно сделать явно по перемножать матрици:

$$S^{-1}D(1032)S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

$$S^{-1}D(1203)S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5.8}$$

$$S^{-1}D(0132)S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

С остальными аналогично. Для 3 тоже можно проверит явно $D(1032)(a-b-c+f) = -(a-b+c-f)$ или $D(0132)(a-b+c-f) = (a-b-c+f)$ или $D(1203)(a-b+c-f) = (a+b-c-f)$ и так далее.

Дальше так же протсо можно понять, что трех мерное представление T_2 в трех мерном пространстве будет преобразовывать (x, y, z) или для квадратичных функций (xy, xz, yz). Возможен вопрос почему не T_1 рассмтрим σ, обычно отражение преводит $z \to -z$ поэтому рассмтрев обратный элемент $T_2^{-1}(\sigma)z \to -z$.

5.3. Двумерное предствление

Пля двумерного представления все сложнее. Надо выбрать какойто ортогональный базис но прижтом сохранить равновыделенност каждой оси. Понятно что для линейных функций такого базиса не сыщешь, а вот для квдратичных функций можно. Еще надо заметить две вещи, первая я немного соврал когда говорил что все оси равно выделенны на самомделе это немного не так, если мы можем повренуть тетраидер и так что одна грань будет лежать например в (Ox, Oy) и тогда у нас x, y будет выделенной плоскостью. Второе, что мне нужно подметить так это, очевидно что вумерное представлени берется из факторизации трехмерного на два одмнорных и одно-двумерное. Поэтому надо выбрать такой базис котрый будет ортогонален $x^2 + y^2 + z^2$. И такой я знаю например $(x^2 - y^2, z^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$