HW1

Matvei Karibdzhanov

September 2022

1 Задание 1

1.1 Функция с exp

$$\exp(x(k+im)) = \exp(kx)\exp(imx) = \exp(kx)(\cos(mx) + i\sin(mx))$$

Real:

$$\mathrm{Re}(\exp(kx)(\cos(mx) + i\sin(mx))) = \exp(kx)\cos(mx)$$

Imaginable:

$$\mathrm{Re}(\exp(kx)(\cos(mx) + i\sin(mx))) = \exp(kx)\sin(mx)$$

Получим, что роль амплитуды тиригнометрической фунункции выполняет $\exp(kx)$, тогда получим функцию колеблющуюся в пределах $[-\exp(kx); \exp(kx)]$ поэтому достаточно будет рассмотреть отрезок $x \in [-5; +5]$, таже предлагаю потроить гравики $-\exp(kx)$, $\exp(kx)$ для подтверждения идении о ограничении функции.

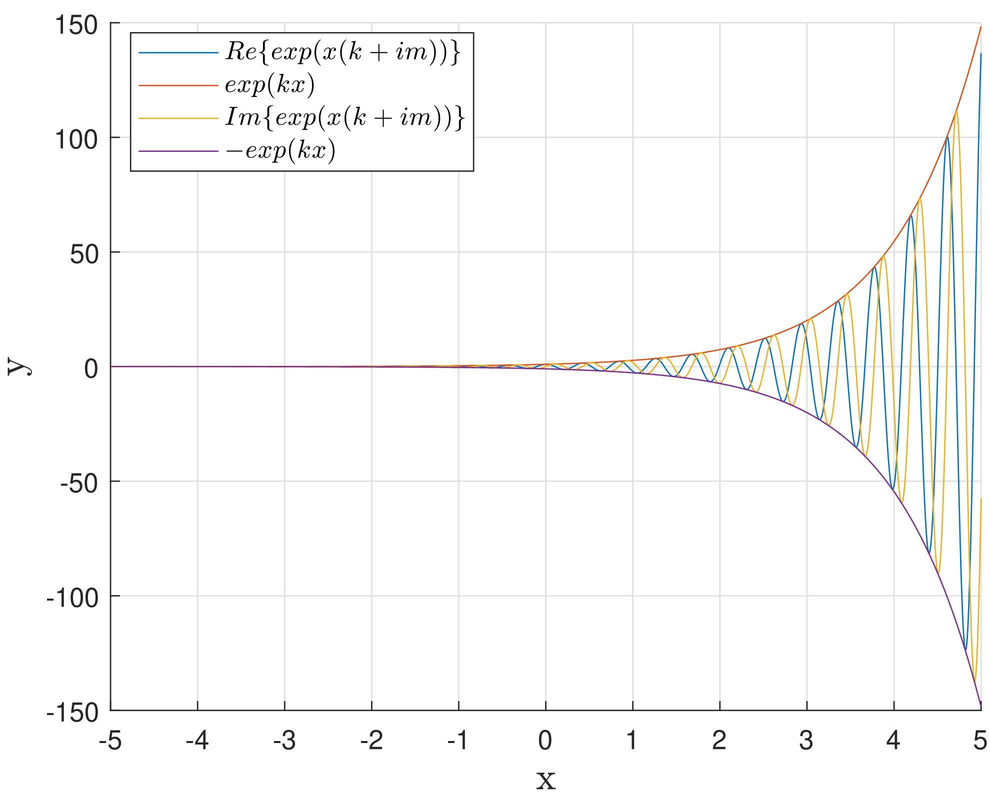

Рис. 1: $\exp(x(k+im))$

1.2 Функция с cos

$$\cos(x(k+im)) = \cos(kx)\cos(imx) - \sin(kx)\sin(imx) = \cos(kx)\cosh(mx) - i\sin(kx)\sinh(mx)$$

Real:

$$\mathrm{Re}(\cos(x(k+im))) = \cos(kx)\cosh(mx)$$

Imaginable:

$$\mathrm{Re}(\cos(x(k+im))) = -\sin(kx)\sinh(mx)$$

$sinh, cosh$ функции очень сильные и так как в их аргументе mx то она чень быстро растет, поэтому выберу отрезок где проявляются свойства cos но минимально проявляется сила $cosh$. Как иввестно в $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, поэтому выберу $[-\pi/2 - 0.05; -\pi/2 + 0.05]$.
Получим 2

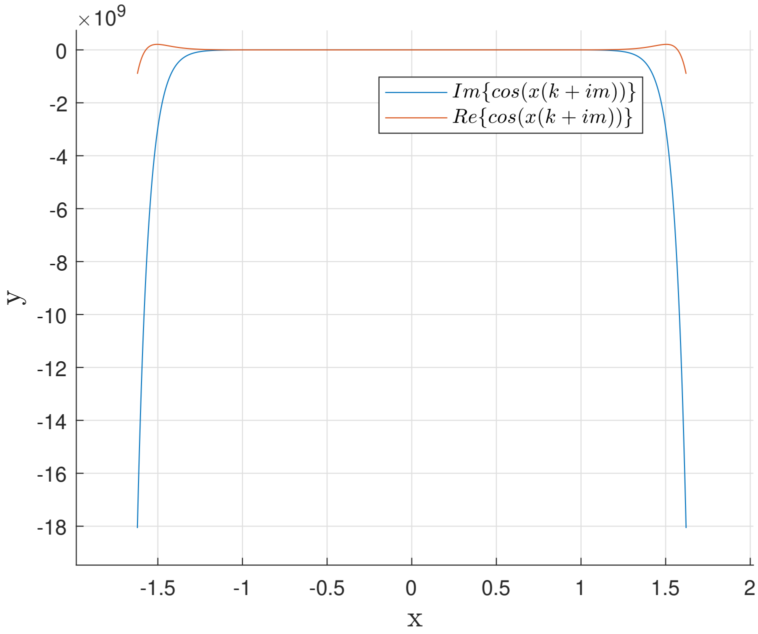

Рис. 2: $\cos(x(k+im))$

Код в GitHub

2 Задание 2

Для меня сразу было ясно что неравенства задают шар или врезают его, но давайте в этом убедимся.

$$|z+ik|>m \Rightarrow \sqrt{(\mathrm{Re}\{z+ik\})^2+(\mathrm{Im}\{z+ik\})^2}>m \Rightarrow \sqrt{(\mathrm{Re}\{z\})^2+(\mathrm{Im}\{z\}+k)^2}>m$$

Теперь тк ось X отвечает за реальную часть а ось Y за комплексную то:

$$\sqrt{x^2+(y+k)^2}>m \Rightarrow (y+K)>m^2-x^2 \Rightarrow -\sqrt{m^2-a^2}-k>y>\sqrt{m^2-a^2}-k$$

Как мы знаем $\sqrt{m^2-a^2}$ это ур. полуокружности с $R=m$, k вего лишь сдвиг, от сюда и вытекаю выбранные мною интервалы. Построим график функции 3:

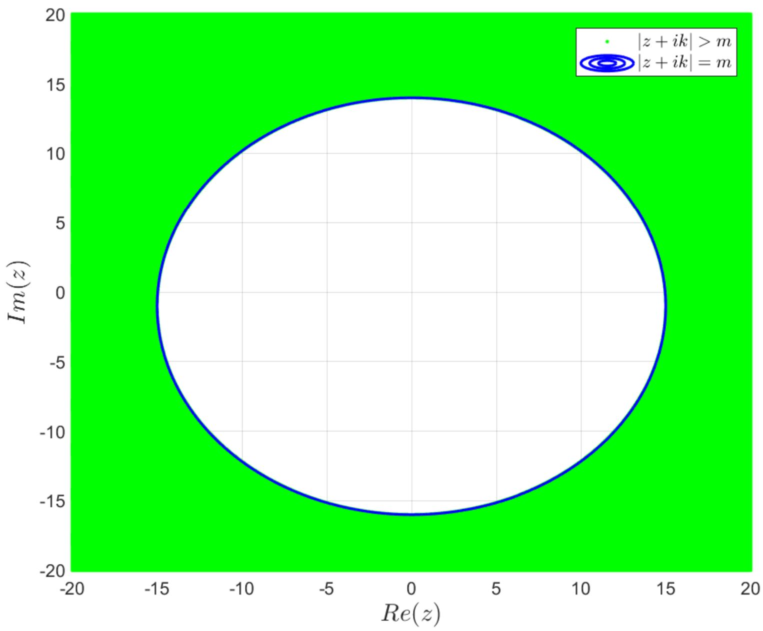

Рис. 3: $|z+ik|>m$

Аналогично решим:

$$|z-im|<k \Rightarrow -\sqrt{k^2-a^2}+m<y<\sqrt{k^2-a^2}+m$$

Получим 4:

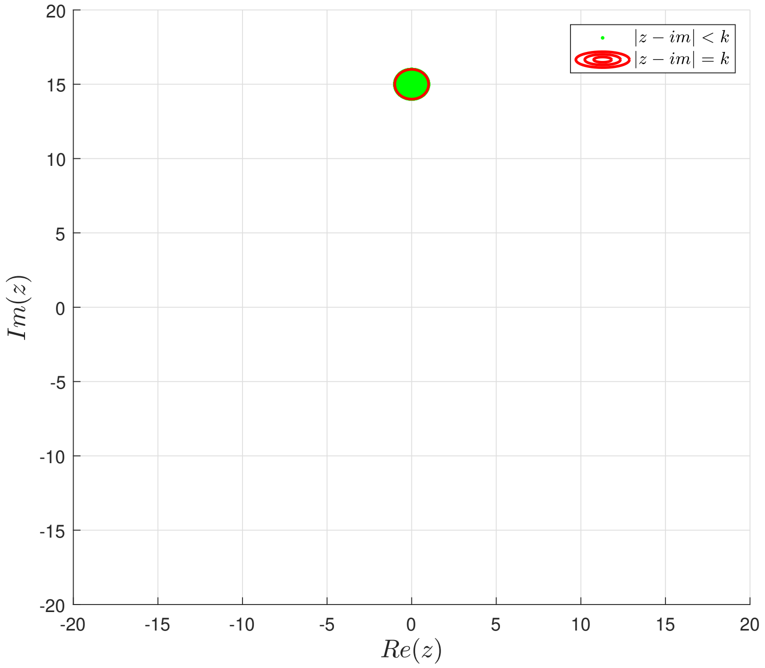

Рис. 4: $|z-im|<k$

Тогда в итоге получим 5:

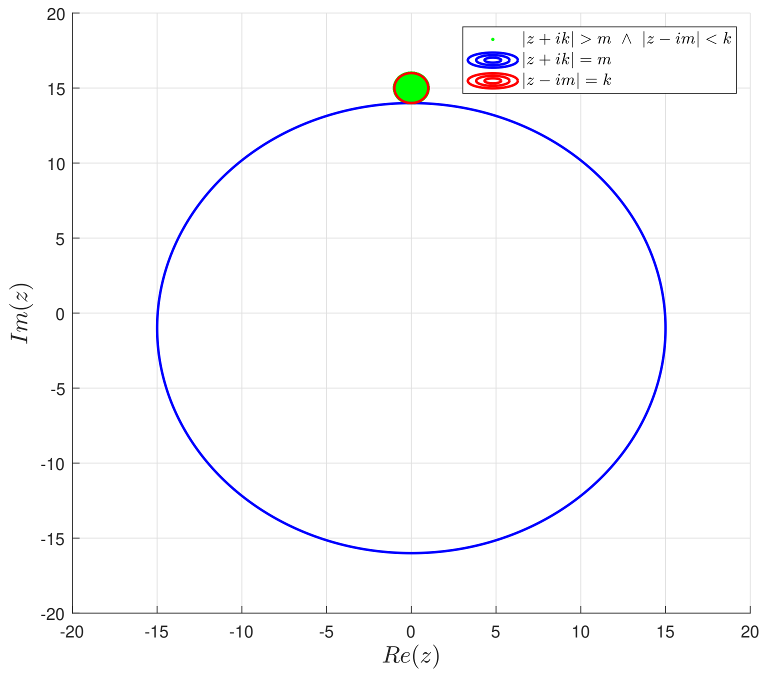

Рис. 5: $|z+ik|>m \ \wedge \ |z-im|<k$

Код в GitHub

3 Задание 3

$$z^3 + im \cdot z^2 - kz + 1 \text{ Представим } z = (x + iy)$$

$$Re\{(x+iy)^3 + im(x+iy)^2 - k(x+iy) + 1\} = x^3 - xy - kx - xy(2m+y)$$

$$Im\{(x+iy)^3 + im(x+iy)^2 - k(x+iy) + 1\} = -y^3 + 3x^3y - my^2 - mx^2 - ky$$

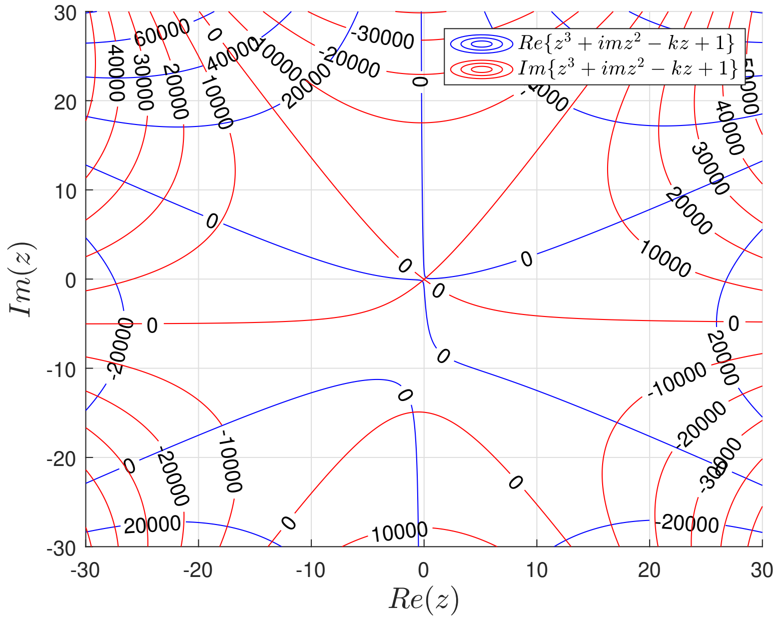

Рис. 6: $z^3 + im \cdot z^2 - kz + 1$

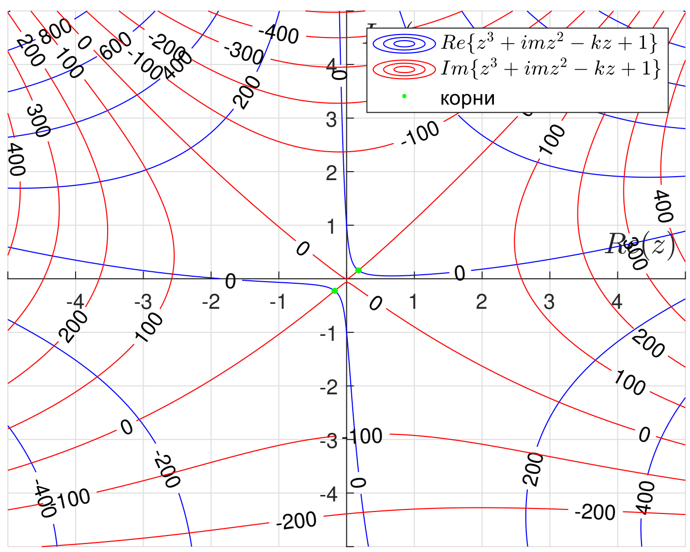

Рис. 7: Два корня, отмечено зеленым

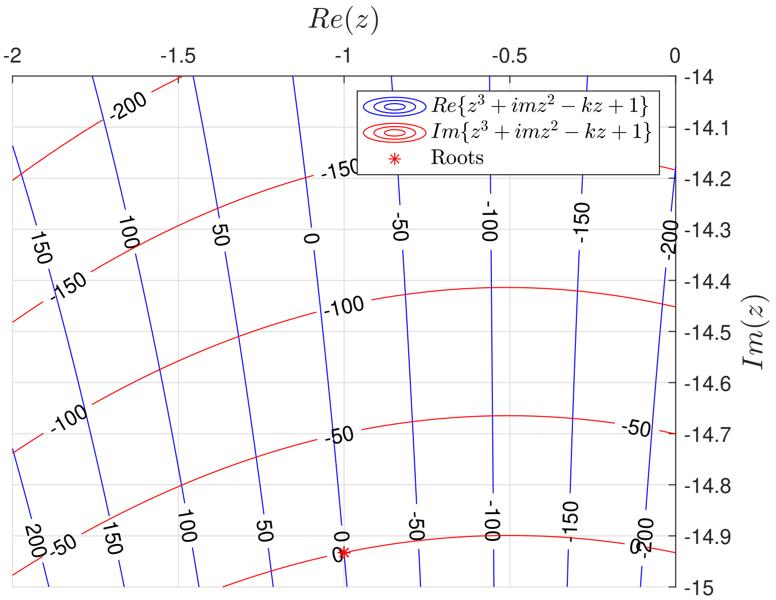

Рис. 8: 3 корень, отмечено зеленым

Код в GitHub

4 Задание 4

Найдем количество пар кроиликов (в дальнейшем просто ПК) родившихся в месяц $n+5$, так как номер моей группы 1)))) мне повезло, и можно рассмотреть конечно разностное уравнение 4 степени ($k=1$). Найдем клочество кроликов которые в след. месяц родят 1 парару, это сумма из кроликов которые уже родили 1 пару и те которые только что родили m пар:

$$y(n) = x(n+1) + x(n)$$

Количество новорожденных ищется аналогично:

$$y(n+3) = 1 \cdot x(n) + m \cdot x(n+1) + 0 \cdot x(n+2) + 0 \cdot x(n+3)$$

Остальные просто получаются из состаривания кроликов предыущего месяца:

$$y(n+1) = x(n+1)$$

$$y(n+2) = x(n+1)$$

От сюда получим матрицу преобразования:

$$\begin{pmatrix} y(n+3) \\ y(n+2) \\ y(n+1) \\ y(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(n+3) \\ x(n+2) \\ x(n+1) \\ x(n) \end{pmatrix}$$

Найдем характерестический могочлен:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & m & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 - \lambda^3 - m\lambda + m - 1$$

Собственные числа и вектора матрици преобразвания:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{25} - \frac{13}{100}i \\ -\frac{9}{50} + \frac{8}{25}i \\ \frac{91}{100} \\ \frac{1}{20} + \frac{1}{100}i \end{pmatrix} \lambda_1 = -0.06$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{25} + \frac{13}{100}i \\ -\frac{9}{50} - \frac{8}{25}i \\ \frac{91}{100} \\ \frac{1}{20} - \frac{1}{100}i \end{pmatrix} \lambda_2 = -0.07$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{20} \\ -\frac{37}{100} \\ -\frac{91}{100} \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \lambda_3 = -0.07$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{100} \\ -\frac{7}{100} \\ -\frac{3}{50} \\ \frac{99}{100} \end{pmatrix} \lambda_4 = 0.99$$

Все числа были округлны до 2 знаков после запятой. Тогда собственный вектор для нибольшего собственного числа это:

$$\begin{pmatrix} -\frac{7}{100} \\ -\frac{7}{100} \\ -\frac{3}{50} \\ \frac{99}{100} \end{pmatrix} \lambda_4 = 0.99$$

Пеперь пјсмотрим на рост популяции 9:

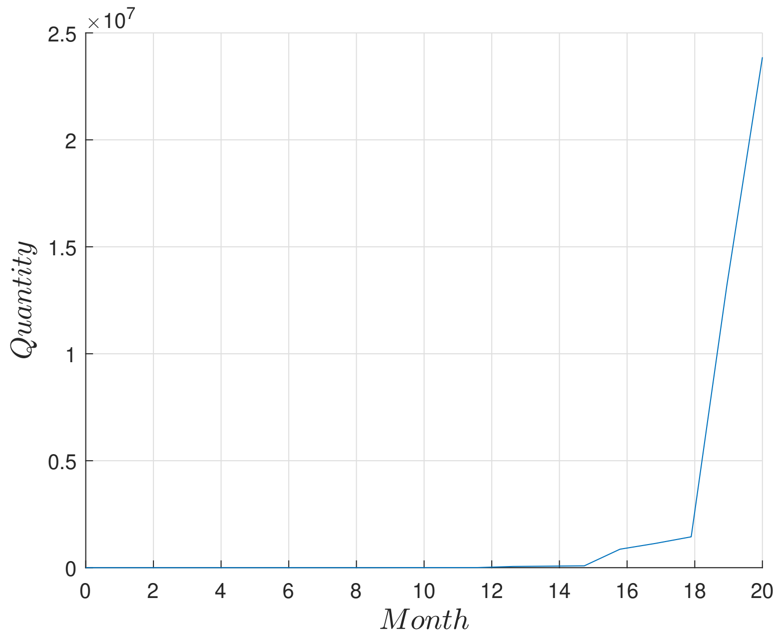

Рис. 9: Популяци кроликов

Согласен, не особо понятно, видно лишь то что популяция раст большими скачками каждый месяц, но это лишь следствие дискретности здачи и большого коэфицента m. Предлагаю рассмотреть график для $m = 3$ 10:

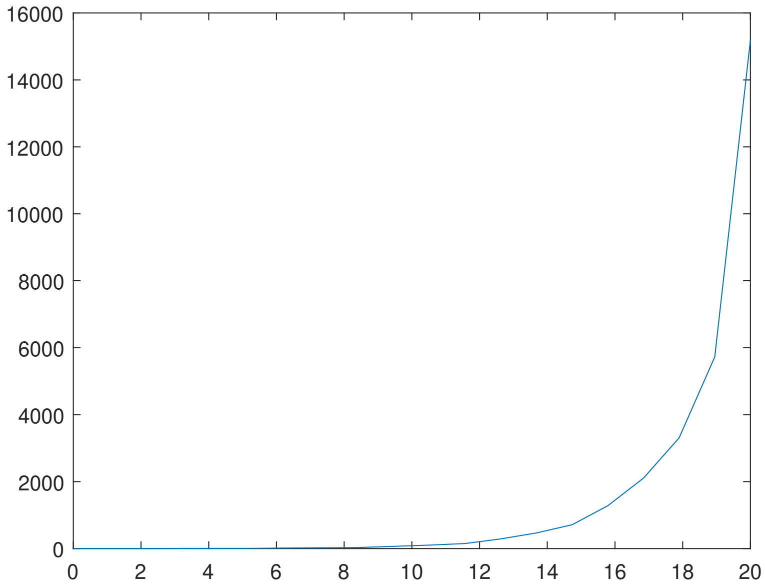

Рис. 10: график для $m = 3$

Код в GitHub