

Лабораторная 1. Маятник обербека.

Карибджанов Матвей

11 Ноября 2022

1 Цель

Изучить закон вращательного движения. Определить момент инерции пустого колеса.

2 Теория

С трением

$$\begin{cases} M\ddot{x} = Mg - T \\ \ddot{x} = r\ddot{\varphi} \\ I\ddot{\varphi} = TR - \dot{\varphi}\mu \end{cases}$$

$$I\ddot{\varphi} = (g - r\ddot{\varphi})Mr - \dot{\varphi}\mu$$

$$\ddot{\varphi}(I + r^2M) + \dot{\varphi}\mu - gMr = 0$$

$$\lambda^2(I + Mr^2) + \lambda\mu = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -\frac{\mu}{Mr^2 + I}$$

$$\varphi = C_1 \exp\left(-\frac{\mu}{Mr^2 + I}t\right) + \frac{Mg r t}{\mu} + C_2$$

$$\varphi(t=0) = 0 \quad \dot{\varphi}(t=0) = 0$$

$$C_2 = -gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu} \quad C_1 = gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu}$$

$$\varphi(t) = gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} \exp\left(-\frac{\mu t}{Mr^2 + I}\right) + \frac{Mg r}{\mu}t - gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2}$$

$$C_2 = -gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu} \quad C_1 = gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu}$$

$$\varphi = gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} \exp\left(-\frac{\mu t}{Mr^2 + I}\right) + \frac{Mg r}{\mu}t - gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2}$$

Если трения нет.

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} \exp\left(-\frac{\mu t}{Mr^2 + I}\right) + \frac{Mg r}{\mu}t - gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} \right) = \\ &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left(gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} - gMr \frac{\cancel{Mr^2 + I}}{\mu \cdot \cancel{\mu}} \frac{\cancel{\mu}t}{\cancel{Mr^2 + I}} + \frac{Mg r}{\mu}t + \frac{Mrgt^2}{2(Mr^2 + I)} - gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2} \right) = \\ &= \cancel{gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2}} - \cancel{\frac{gMr}{\mu}t} + \cancel{\frac{Mg r}{\mu}t} + \frac{Mrgt^2}{2(Mr^2 + I)} - \cancel{gMr \frac{Mr^2 + I}{\mu^2}} = \\ &= \frac{Mrgt^2}{2(Mr^2 + I)} \end{aligned}$$

Для обработки полезно

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi}{16dt}$$

3 Анализ

Для нахождения момента инерции проведем еще не большой анализ, проще всего для анализ взять формулу:

$$\varphi(t) = \frac{Mrgt^2}{2(Mr^2 + I)}$$

Продифференцировать по времени дважды и заметить, что ускорение постоянно:

$$\ddot{\varphi} = \frac{Mrg}{Mr^2 + I}$$

В таком случае надо лишь линейно приблизить наш график и мы получим:

$$I = \frac{Mrg}{\ddot{\varphi}_{up}} - Mr^2$$

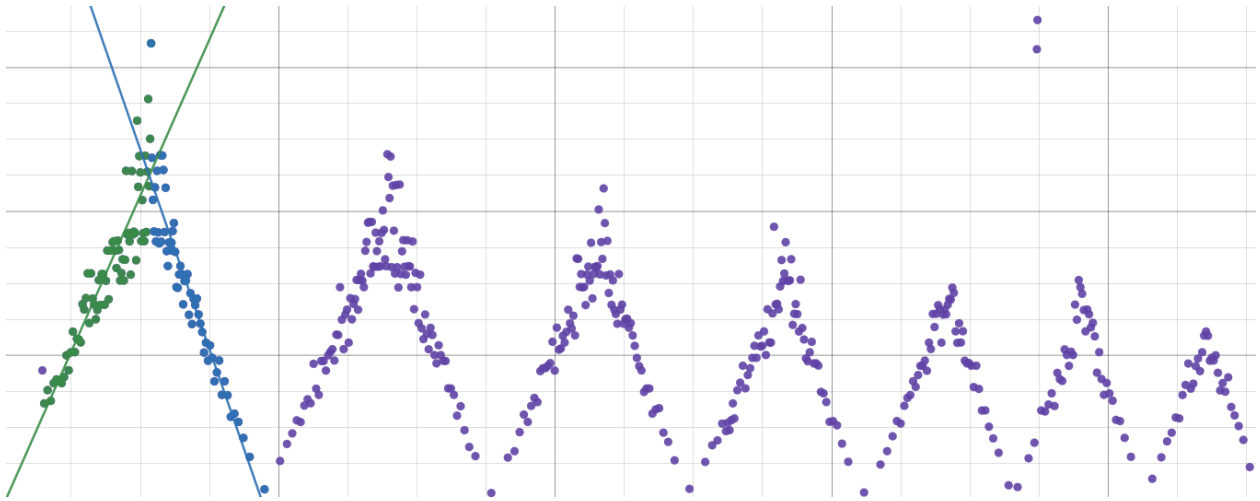


Рис. 1: Теперь я взял полную выборку в отличие от предыдущего раза (так как из-за ошибки я считал, что данные ближе к вершине плохие), также я пересчитал коэффициент (он у меня был 2 раза больше нужного) для перехода от непонятных единиц измерения скорости выдаваемой в программой к человеческим $\frac{1}{c^2}$, ссылка на одно из приближений в десмос (последний эксперимент)

Заметим что при движении вверх знак при Mr поменяется тогда зная ускорение при подъеме:

$$I = -\frac{Mrg}{\ddot{\varphi}_{down}} - Mr^2$$

А значит:

$$I = \frac{I_{down} + I_{up}}{2}$$

Чтобы найти момент обода достаточно вычесть моменты доп. грузов:

$$I_{Cr} = I - 2m_1R^2 - 2m_2(R + \Delta r)^2$$

Здесь и в таблице $2 \cdot m_1$ —суммарная масса груза на 1 ступене, то есть все грузы расположенные на расстоянии R от оси вращения, $2 \cdot m_2$ —суммарная масса груза на 2 ступене, то есть все грузы расположенные на расстоянии $R + \Delta r$ от оси вращения. $R = 30cm$ $\Delta r = 4cm$ $r = 1.7cm$
Для расчета погрешности используем следующую формулу:

$$f(x_1, \dots, x_n) \pm \delta = f(x_1, \dots, x_n) + \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) \cdot \delta x_i \right)^2}$$

M kg	m_1 kg	m_2 kg	$\ddot{\varphi}_{down}$	$\ddot{\varphi}_{up}$	I_{up}	I_{down}	I_{Cr}	I_{Real}
0.347	0.238	0	-0.5	0.4	0.14737472	0.11787972	0.13262722	0.111207
0.347	0.474	0	-0.39	0.26	0.22678433	0.15115613	0.18897023	0.14631
0.546	0.474	0	-0.54	0.46	0.20162481	0.17173109	0.18667795	0.144018
0.546	0.474	0.215	-0.44	0.36	0.25767554	0.21079675	0.23423615	0.166722

Найдем среднее $I_{Cr} = 0.142 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Как я уже говорил можем проверить данные на правдоподобность если предположить что колесо это идеальное колцо с радиусом $r = 30 \text{ cm}$

$$m = \frac{I}{r^2} = 1.58 \text{ kg}$$

Что может быть правдой.

4 Заключение

В итоге нам удалось получить момент инерции пустого обода, который оказался равен $I_{Cr} = 0.03175 \pm 0.00205 \text{kgm}^2$. Удалось найти общее решение для движения обода, как при трении так и без него.

∞