Псевдообратная матрица

1. Вычислить
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^+$$

2. Вычислить
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^+$$

3. Вычислить
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}^+$$

4. Найти разложение полного ранга и псевдообратную для матрицы
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Пусть E_{ij} — такая матрица размера $n \times n$, что ее элемент в i-ой строке и j-ом столбце равен единице, а все остальные элементы нулевые. Найти ее разложение полного ранга и псевдообратную матрицу.

6. Доказать равенства линейных пространств:
   (a) $\mathrm{Im}(AA^+) = \mathrm{Im}(AA^*) = \mathrm{Im}A$;
   (b) $\mathrm{Ker}(AA^+) = \mathrm{Ker}(AA^*) = \mathrm{Ker}A^*$;
   (c) $\mathrm{Im}A^+ = \mathrm{Im}A^*$.

   Здесь, как обычно, $\mathrm{Im}X$ обозначает образ, а $\mathrm{Ker}X$ — ядро линейного отображения, заданного матрицей X.

7. Напомним, что матрица U называется *унитарной*, если $U^{-1} = U^*$. Действительные унитарные матрицы называются *ортогональными*.

   Доказать утверждение о псевдообратной от произведения матриц: если $C = AU$, где U — унитарная матрица, а A — произвольная матрица порядка n, то
$$C^+ = U^+A^+ = U^*A^+.$$

8. Найдите две такие матрицы A и B, что $(AB)^+ \neq B^+A^+$.