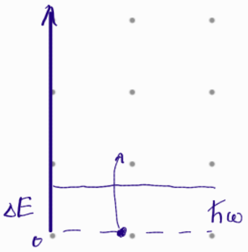
Лекция 1-2

Основные принципы

Гипотеза Планка 1900

Энергия излучается порциями $\mathcal{E} = \hbar\omega$ $\quad \hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{эрг}}{\text{с}}$

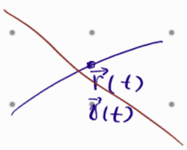
Теория фото эффекта



Теория атома Бора (существуют стационарные орбиты)

---

1. Соотнош. неопределенности:



x, p

$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Δx, Δp | квадратическое отклонение

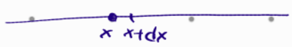
$\hat{A}; \hat{B}$: $\langle \Delta A^2 \rangle \cdot \langle \Delta B^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle |[\hat{A}; \hat{B}]| \rangle +$

$\left(+\frac{1}{4} \langle |\{\hat{A}; \hat{B}\}| \rangle\right)$

равенство(неравенство) Гейзенберга

2. Волновая функция

$\psi(x,t): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$



$\omega_{[x, x+dx]}(t) = |\psi(x,t)|^2 dx$

$\psi \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$

3. Нормировка (для финитного движения)

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$

4. Принцип супер позици

Пусть есть ψ_1, ψ_2 - уд. ур. Шредингера

$\downarrow \quad \downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \in \mathbb{C}$

A_1, A_2 — возможные состояния $\Rightarrow$ возможна волновая функция $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ — для нее возможно состояние A_1 и A_2

5. Операторы

а) Каждой физ. величине соответствует оператор

По определению $\hat{A}\psi(x) = \varphi(x)$

Собственные функции ψ_n, собственные значения A_n

$\hat{A}\psi_n = A\psi$ $\quad \{A_n\}$ – спектр

б) $(\psi_1, \psi_2) = \int \psi_1^* \psi_2 \, dx$

в) спектр может быть дискретным и непрерывным

г) A_n – допустимые значения A

Т.к. A_n – физическая величина то $A_n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{A}^\dagger$

д) Транспонирование операторов

$A_{nm} = \vec{a}^{(n)T} \hat{A} \, \vec{a}^{(m)} = a_i^{(n)} A_{ij} a_j^{(m)}$ $\qquad a^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← номер n

$\int \varphi \hat{A}^T \psi \, dx = \int \psi \hat{A} \varphi \, dx$

6. Ортогональность

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^* \psi_m \, dx = \delta_{mn}$$

7. Полнота

$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n$, $c_n \in \mathbb{C}$

$c_n = \int \psi^* \psi_n \, dx$

8. Вероятность

$\hat{A}\psi_n(x) = A_n \psi_n(x)$

$\psi(x) = \sum_n c_n \psi_n(x)$

$\omega_n = |c_n|^2$

$\hat{A}$ для координаты $\delta(x - x_0)$

$\dagger = * \cdot T$

$\dagger \cdot T = *$

$(L^\dagger L)^\dagger = L^\dagger L^{\dagger\dagger} = L^\dagger L$ $\qquad (L^\dagger L)^{T*} = (L^T \cdot L^*)^*$

Дз

1. а) $\hat{L}^\dagger \hat{L} \overset{T}{\Rightarrow} (\hat{L}^\dagger \hat{L})^T = (L^T L^*)^{\cancel{T}\cancel{T}*} \Rightarrow L^\dagger L$

б) $\hat{L} + \hat{L}^\dagger \overset{T}{\Rightarrow} \hat{L}^T + \hat{L}^* \overset{T}{\Rightarrow} \hat{L}^\dagger + \hat{L} = \hat{L} + \hat{L}^\dagger$

в) $i\hat{L} - i\hat{L}^\dagger = \boxed{\hat{\beta}^* = \hat{\beta},\ \hat{J}^* = \hat{J}^*:\ \hat{L} = \hat{\beta} + i\hat{J}} = -\hat{J} + i\hat{\beta} - i(\hat{\beta} + i\hat{J})^\dagger = -\hat{J} + i\hat{\beta} - i\hat{\beta}^T - \hat{J}^T \overset{T}{\Rightarrow} -\hat{J}^T + i\hat{\beta}^T - i\hat{\beta} - \hat{J} \overset{*}{\Rightarrow} -\hat{J}^T - i\hat{\beta}^T - \hat{J} + i\hat{\beta}$

короче представил в виде эрмитова и антиэрмитова

г) $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ $\qquad \boxed{\{\hat{A}; \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}} \overset{T}{\Rightarrow} \hat{B}^T \hat{A}^T + \hat{A}^T \hat{B}^T \overset{*}{\Rightarrow} \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B}$

т.к. эрмитов

д) $i[\hat{A}, \hat{B}]$ $\qquad A, B$ – эрм. $\qquad \boxed{[\hat{A}; \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}} \overset{T}{\Rightarrow} i\hat{B}^T \hat{A}^T - i\hat{A}^T \hat{B}^T \overset{*}{\Rightarrow} -i\hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger + i\hat{A}^\dagger \hat{B}^\dagger = \hat{A}\hat{B} - i\hat{B}\hat{A}$

Лекция 3

Квантово механическое среднее

$$\langle \hat{A} \rangle = \sum \omega_n A_n = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$ ~ способ задать оператор

$$◀ \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \psi^* \hat{A} \sum_m c_m \psi_m \, dx = \sum_{m,n} A_m \underbrace{c_m^* c_n}_{\omega_n} \delta_{mn} = \sum_m A_m \omega_m$$

Смена базиса

Пусть $\{x_n(x)\}$ $\quad \psi(x) = \sum_n a_n x_n(x) \mapsto \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$

Тогда $\hat{A} \psi(x) = \varphi(x) = \sum_n b_n x_n(x) \mapsto \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$b_n = \langle x_n | | \varphi \rangle = \langle x_n | \hat{A} | \psi \rangle = \sum_m a_m \int x_n^* \hat{A} x_m \, dx = \sum_m a_m \hat{A}_{mn}$$

$$\langle x \rangle = \int x |\psi(x)|^2 dx$$

Непрерывный спектр

$$\langle \psi_A | | \psi_{A} \rangle = C \delta(A - A')$$

Разложение

$$\hat{P} = |n\rangle\langle n|$$

$$\hat{P} \psi = |n\rangle\langle n | \psi \rangle$$

$\hat{P}^2 = \hat{P}$ => соотношение полноты => $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$

Одновременная измеримость величин

$\hat{A}\hat{B}|n\rangle = AB|n\rangle$ ~ если измеримы

Заметим что $\hat{A}\hat{B}|n\rangle = \hat{B}\hat{A}|n\rangle$ => измеримы если $(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})|n\rangle = 0$

Вводим $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

Семинар

$$[\hat{p}_x, \hat{x}] = -x\cancel{i\hbar\partial_x} - i\hbar + x\cancel{i\hbar\partial_x} = -i\hbar$$

$$p_x = -i\hbar\partial_x$$

$$\hat{p} = -i\hbar\nabla$$

Докажем что $\hat{p}_x$ - эрмитов

$$\left(\int \varphi^* p_x \varphi\, dx\right)^* = i\hbar \int \varphi\, \partial_x \varphi^* dx = -i\hbar \int \varphi^* \partial_x \varphi\, dx$$

Собственная функция p

$$i\hbar \nabla \psi_x = \vec{p}\, \psi_x$$

$$\psi_x = \exp[-i\hbar \vec{p}\vec{x}]$$

$$\int_V \psi^*_p \psi_p\, dx = \delta(\vec{p} - \vec{p}_0) \Rightarrow \int C^*_p C_p \exp[-i\hbar(p-p_0)x]\, dx = \delta(p_x - p'_x)\delta(p_y - p'_y)\delta(p_z - p'_z)(2\pi\hbar)^3 C^*_p C_p \Rightarrow C_p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$$

Переход в p пространство

$$\hat{x}_p = \langle \varphi_p | \hat{x}_x | \varphi_p \rangle = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3} \int \exp[-\tfrac{i}{\hbar}\vec{p}'\vec{x}]\, x \exp[\tfrac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}]\, dx^3 = \frac{-1}{(2\pi\hbar)^3} \int dx^3 \exp[-\tfrac{i}{\hbar}\vec{p}'\vec{r}]\, (-i\hbar)\, \partial_{p_x} \exp[\tfrac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}]\, dx^3 =$$

$$= \frac{i\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \partial_{p_x} \left[\int dr^3 \exp\left(-\tfrac{i}{\hbar}\vec{p}'\vec{r} + \tfrac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{r}\right) \right] = i\hbar\, \partial_{p_x}$$