Содержание

1 Билет **2**

1.1 соотношение неопределенности . . . 2

1.2 Волновая функция . . . 2

1.3 Принцип суперпозиции . . . 2

2 Билет **3**

2.1 Операторы . . . 3

2.1.1 Определение . . . 3

2.1.2 Основное свойство . . . 3

2.1.3 Транспонирование . . . 3

2.2 Связь измеримых велечин и операторов . . . 3

1. Билет

1.1. соотношение неопределенности

Говрит о том, что неовзмжно точно померить и координату и импульс. Так как если велечины измеримы то $\exists$ такая есть общий базис из собствнных функций. Тогда если велечинам соответствуют операторы $\hat{A},\ \hat{B}$ то:

$$\hat{A}\hat{B}|n\rangle = \hat{B}\hat{A}|n\rangle \implies \left(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\right)|n\rangle = \left[\hat{A},\hat{B}\right]|n\rangle = 0,$$

а следовательно

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{0}. \tag{1.1}$$

Согласно принципу неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta_\psi \hat{A} \Delta_\psi \hat{B} \geqslant \frac{\hbar}{2}\left[\hat{A},\hat{B}\right] \tag{1.2}$$

Сначала докажем соотношение:

$$\left[\hat{f},\hat{g}\right] = \left[\hat{f}+\hat{f}_0, \hat{g}+\hat{g}_0\right], \hat{f}_0, \hat{g}_0 = const. \tag{1.3}$$

◀ Так как $\hat{f}_0 = const$ и в силу линейности операторов, следует $\hat{f}\hat{f}_0 = \hat{f}_0\hat{f}$, таким образом просто раскрыв комутатор:

$$\left[\hat{f}+\hat{f}_0, \hat{g}+\hat{g}_0\right] = \left(\hat{f}+\cancel{\hat{f}_0}\right)\hat{g} + \cancel{\left(\hat{f}+\hat{f}_0\right)\hat{g}_0} - \left(\hat{g}+\cancel{\hat{g}_0}\right)\hat{f} - \cancel{\left(\hat{g}+\hat{g}_0\right)\hat{f}_0} = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}.$$

■

◀ Для доказательства этого соотношения представим, что

$$\left[\hat{f},\hat{g}\right] = -i\hbar\hat{C}.$$

Теперь давайте в ведем:

$$\sigma\hat{f} = \sqrt{\left\langle\left(\hat{f}-\langle\hat{f}\rangle\right)^2\right\rangle} = \sqrt{\left\langle\left(\langle\hat{f}_0\rangle^2\right)\right\rangle},$$

$$|\varphi\rangle = \left(\alpha\hat{f} + i\hat{g}\right)|\psi\rangle.$$

Так же не забываем требование эрмитовости операторов тогда:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|\left(\alpha^2\hat{f}_0^2 + \hat{g}_0^2 + i\alpha\left[\hat{f}_0,\hat{g}_0\right]\right)|\psi\rangle = \alpha^2\left\langle\hat{f}_0^2\right\rangle + \left\langle\hat{g}_0^2\right\rangle + \alpha\hbar\left\langle\hat{C}\right\rangle \geqslant 0.$$

Для существования решения уравнения надо потребовать условие на дисрименант отностительно α

$$\hbar^2\left\langle\hat{C}\right\rangle^2 - 4\Delta f^2\Delta g^2 \leqslant 0 \implies \Delta f\Delta g = \frac{\hbar\left\langle\hat{C}\right\rangle}{2}$$

■

Например, для импульса и координаты ссотношение неопределенности выглядит следущим образом:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{1.4}$$

1.2. Волновая функция

Волновая функция удовлетворяет уравнению:

$$p(x,t) = |\psi(x,t)|^2, \tag{1.5}$$

для нее выполнятся условие нормировки

$$\langle\psi(x)|\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{1.6}$$

1.3. Принцип суперпозиции

Пусть состояне частици описыватся волновой функций ψ_1 и втоже время ψ_2 приэтом каждой функции соответственно удовлетворят состояния $A_1,\ A_2$ то также эта частица будет описыватся волновой волновой функцией $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ где $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ с соответствующим состоянем A это сотояние при измерении может принять значения $A = A_1 \vee A = A_2$.

Пример частица может находитсяв точке X_1 этому полодение соответствует собственная функция ψ_1, но также она модет быть в точке $X_2 - \psi_2$ Тогда если мыбудем пытаться измерить полодение чатици то мыбудем получать значения $x_1 \vee x_2$, приэтом вероятность:

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \langle\psi|\psi_1\rangle. \tag{1.7}$$

2. Билет

2.1. Операторы

2.1.1. Определение

Оператор должен удовлетворять основному свойству

$$\hat{A}f(x) = \xi(x), \tag{2.1}$$

То-есть оператор переводит Функцию в функцию, для любых двух операторов выполняется свойство асоциативности, но не для любых операторов выполнятся свойство комуативности. Как видно из 1уравнениея 1 из комутативности следует одновремнная измеримость.

2.1.2. Основное свойство

Оператор линеен

$$\hat{A}\left(c_1 \left|\psi_1\right\rangle + c_2 \left|\psi_2\right\rangle\right) = c_1 \hat{A} \left|\psi_1\right\rangle + c_2 \hat{A} \left|\psi_2\right\rangle \tag{2.2}$$

2.1.3. Транспонирование

$$\left\langle\psi\right| \hat{A} \left|\varphi\right\rangle = \left\langle\varphi\right| \hat{A}^T \left|\psi\right\rangle \tag{2.3}$$

2.2. Связь измеримых велечин и операторов

Во-первых, ψ_n (обозначаем как n) собственная функция $\hat{A}$ если выполняется:

$$\hat{A} \left|\psi_n\right\rangle = A_n \left|\psi_n\right\rangle \tag{2.4}$$

При этом $A_n \in \mathbb{C}$ это величина, но что бы она была измерима надо чтобы $A_n \in \mathbb{R}$, то условие выполняется в случае если:

$$\hat{A}^\dagger \coloneqq \hat{A}^{T*}. \tag{2.5}$$

$$\hat{A}^\dagger \leqslant \hat{A}. \tag{2.6}$$