Содержание

1. Билет

1.1. соотношение неопределенности

Говрит о том, что неовзмжно точно померить и координату и импульс. Так как если велечины измеримы то $\exists$ такая есть общий базис из собствнных функций. Тогда если велечинам соответствуют операторы $\hat{A},\ \hat{B}$ то:

$$\hat{A}\hat{B}|n\rangle = \hat{B}\hat{A}|n\rangle \implies \left(\hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B}\right)|n\rangle = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]|n\rangle = 0,$$

а следовательно

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{0}. \tag{1.1}$$

Согласно принципу неопределенности Гейзенберга:

$$\Delta_\psi \hat{A} \Delta_\psi \hat{B} \geqslant \frac{\hbar}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \tag{1.2}$$

Сначала докажем соотношение:

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = \left[\hat{f} + \hat{f}_0, \hat{g} + \hat{g}_0\right], \hat{f}_0, \hat{g}_0 = const. \tag{1.3}$$

◀ Так как $\hat{f}_0 = const$ и в силу линейности операторов, следует $\hat{f}\hat{f}_0 = \hat{f}_0\hat{f}$, таким образом просто раскрыв комутатор:

$$\left[\hat{f} + \hat{f}_0, \hat{g} + \hat{g}_0\right] = \left(\hat{f} + \cancel{\hat{f}_0}\right)\hat{g} + \cancel{\left(\hat{f} + \hat{f}_0\right)\hat{g}_0} - \left(\hat{g} + \cancel{\hat{g}_0}\right)\hat{f} - \cancel{\left(\hat{g} + \hat{g}_0\right)\hat{f}_0} = \hat{f}\hat{g} - \hat{g}\hat{f}.$$

■

◀ Для доказательства этого соотношения представим, что

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = -i\hbar\hat{C}.$$

Теперь давайте в ведем:

$$\sigma\hat{f} = \sqrt{\left\langle\left(\hat{f} - \langle\hat{f}\rangle\right)^2\right\rangle} = \sqrt{\left\langle\left(\langle\hat{f}_0\rangle^2\right)\right\rangle},$$

$$|\varphi\rangle = \left(\alpha\hat{f} + i\hat{g}\right)|\psi\rangle.$$

Так же не забываем требование эрмитовости операторов тогда:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\psi|\left(\alpha^2\hat{f}_0^2 + \hat{g}_0^2 + i\alpha\left[\hat{f}_0, \hat{g}_0\right]\right)|\psi\rangle = \alpha^2\left\langle\hat{f}_0^2\right\rangle + \left\langle\hat{g}_0^2\right\rangle + \alpha\hbar\left\langle\hat{C}\right\rangle \geqslant 0.$$

Для существования решения уравнения надо потребовать условие на дисрименант отностительно α

$$\hbar^2\left\langle\hat{C}\right\rangle^2 - 4\Delta f^2 \Delta g^2 \leqslant 0 \implies \Delta f \Delta g \geqslant \frac{\hbar\left\langle\hat{C}\right\rangle}{2}$$

■

Например, для импульса и координаты ссотношение неопределенности выглядит следущим образом:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2}. \tag{1.4}$$

1.2. Волновая функция

Волновая функция удовлетворяет уравнению:

$$p(x,t) = |\psi(x,t)|^2, \tag{1.5}$$

для нее также выполнятся условие нормировки

$$\langle\psi(x)|\psi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2 dx = 1. \tag{1.6}$$

1.3. Принцип суперпозиции

Пусть состояне частици описыватся волновой функций ψ_1 и втоже время ψ_2 приэтом каждой функции соответственно удовлетворят состояния $A_1,\ A_2$ то также эта частица будет описыватся волновой волновой функцией $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$ где $c_1,\ c_2 \in \mathbb{C}$ с соответствующим состоянем A это сотояние при измерении может принять значения $A = A_1 \vee A = A_2$.

Пример частица может находитсяв точке X_1 этому полодение соответствует собственная функция ψ_1, но также она модет быть в точке $X_2 - \psi_2$ Тогда если мыбудем пытаться измерить полодение чатици то мыбудем получать значения $x_1 \vee x_2$, приэтом вероятность:

$$\mathbb{P}(X = x_1) = \langle\psi|\psi_1\rangle. \tag{1.7}$$

2. Билет

2.1. Операторы

2.1.1. Определение

Оператор должен удовлетворять основному свойству

$$\hat{A}f(x) = \xi(x), \tag{2.1}$$

То-есть оператор переводит Функцию в функцию, для любых двух операторов выполняется свойство асоциативности, но не для любых операторов выполнятся свойство комуативности. Как видно из 1.1уравнениея из комутативности следует одновремнная измеримость.

2.1.2. Основное свойство

Оператор линеен

$$\hat{A}\left(c_1\left|\psi_1\right\rangle + c_2\left|\psi_2\right\rangle\right) = c_1\hat{A}\left|\psi_1\right\rangle + c_2\hat{A}\left|\psi_2\right\rangle \tag{2.2}$$

2.1.3. Транспонирование

$$\left\langle\psi\right|\hat{A}\left|\varphi\right\rangle = \left\langle\varphi\right|\hat{A}^T\left|\psi\right\rangle \tag{2.3}$$

2.2. Связь измеримых велечин и операторов

Во-первых, ψ_n (обозначаем как n) собственная функция $\hat{A}$ если выполняется:

$$\hat{A}\left|\psi_n\right\rangle = A_n\left|\psi_n\right\rangle \tag{2.4}$$

При этом $A_n \in \mathbb{C}$ это величина, но что бы она была измерима надо чтобы $A_n \in \mathbb{R}$, то условие выполняется в случае если:

$$\hat{A}^\dagger := \hat{A}^{T*}. \tag{2.5}$$

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}. \tag{2.6}$$

3. Билет

3.1. Различные пространства и представления

До этого мы работали только с одни представлением неакцентируя на этом внимания теперь надо определить что это.

Как мы помним для собственных функций оператора $\hat{A}$ обязательно выполняется услловие 1.6нормировки, пока запомим это и вспомним еще одно свойтво что собственные вектора образуют базис тогда:

$$\forall |\psi\rangle \hookrightarrow |\psi\rangle = \sum a_i |\varphi_i\rangle \implies \langle\varphi_j|\psi\rangle = \sum a_i \delta_{ij} = a_i.$$

Совокупность велечин $a_i = \langle\varphi_i|\psi\rangle$ называтся волновой функцией в A-представелнии.

Предлагаю рассмотреть примерпр с $\hat{x}$, $\hat{p}$.

$$\hat{p}|p\rangle = \hat{p}\hat{1}_x|p\rangle = \hat{p}|x'\rangle\langle x'|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx'\hat{p}|x'\rangle\langle x'|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx'\hat{p}|x'\rangle\varphi_p(x'),$$

в то же время

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle = \hat{1}p|p\rangle = \int_{\mathbb{R}} dx'p|x'\rangle\langle x'|p\rangle = p\int_{\mathbb{R}} dx'|x'\rangle\varphi_p(x').$$

Домножим на $\langle x|$:

$$\int_{\mathbb{R}} dx'\langle x|\hat{p}|x'\rangle\varphi_p(x') = \int_{\mathbb{R}} dx'p\langle x|x'\rangle\varphi_p(x') = \int_{\mathbb{R}} dx'p\delta(x-x')\varphi_p(x') = p\varphi_p(x) = \hat{p}\varphi_p.$$

И получим:

$$\langle x|\hat{p}|x'\rangle = \hat{p}\delta(x-x') = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x'). \tag{3.1}$$

Теперь давайте рассмотрим переход операторов от любого а-пердставления к b-представлению, пусть для $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$ и аналогичо для $\hat{B}$:

$$\langle\psi(a)| = \sum a_i\langle a_i(a)|, \quad \hat{A}|\psi(a)\rangle = \sum b_i|a_i(a)\rangle.$$

$$\langle a_j(a)|\hat{A}|\psi(a)\rangle = \sum_{i=0}\langle a_j(a)|b_i|a_i(a)\rangle = b_i\langle a_i(a)|a_i(a)\rangle = b_i,$$

с другой стороны

$$\langle a_j(a)|\hat{A}|\psi(a)\rangle = \langle a_j(a)|\hat{A}\sum_{i=0}a_i|a_i(a)\rangle = \sum_{i=0}\langle a_j(a)|A_i a_i|a_i(a)\rangle = \sum_{i=0}A_i a_i.$$

То есть

$$b_i = \sum_{i=0}A_i a_i \tag{3.2}$$

Таким образом полкчим что оператор $\hat{A}$ можно выразит через собственные функции.