透過幾何意義了解微分定理

組別：什麼名字

March 26, 2023

目录

生活中的微積分


化石
年代測定
手機的
殘存電量
人造衛星
軌道運算
颱風路徑
預測
車速錶
Twitter的
流行趨勢
櫻花開花
時間預測
高速公路的
彎道角度

想像

極限

極限值: 函數在某瞬間的值

連續

事件抽象化成連續不斷的函數

導數

事件在某瞬間的變化率

函數的極限

$\lim_{x\to c} f(x) = L$，當 $x \to c$ 時，$f(x) \to L$

Definition

$(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, 給定函數 $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ 以及 $c \in (a,b)$, 若有一數 $L \in \mathbb{R}$ 滿足以下性質: 對任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_{(\varepsilon)} > 0$ 使得所有滿足 $0 <\mid x - c \mid< \delta$ 的點都有 $\mid f(x) - L \mid< \varepsilon$,

$(i.e. \forall\varepsilon > 0, \exists\delta_{(\varepsilon)} > 0 \quad s.t. 0 <\mid x - c \mid< \delta \Rightarrow\mid f(x) - L \mid< \varepsilon)$
則稱函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 處極限存在; 此時 L 稱為函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 的極限值。

幾何形式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} 0 <| x - c |< \delta \Rightarrow | f(x) - L |< \varepsilon$$

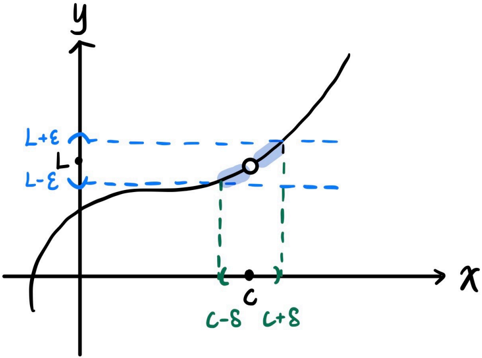
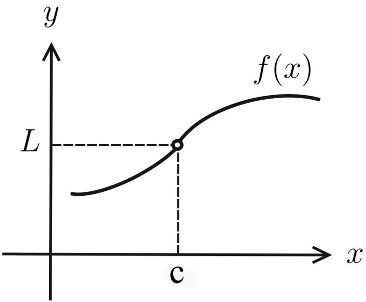


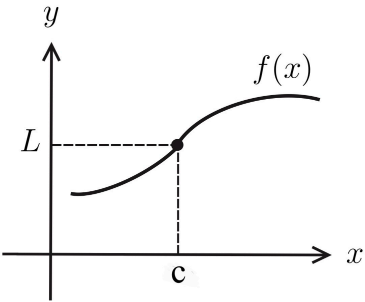
Figure: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

連續

- $\lim_{x\to c} f(x) = L$



- 要求 $L = f(c)$



函數 $f(x)$ 若要在 $x = c$ 處連續的話, 必須滿足 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ 這個條件。

連續的 $(\varepsilon - \delta)$ 定義

$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Definition

函數 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 以及 $c \in (a, b) \subseteq \mathbb{R}$，如果對任意 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta_{(\varepsilon)} > 0$ 使得對任意 $x \in A$ 若 $| x - c | < \delta$ 則 $| f(x) - f(c) | < \varepsilon$,

$(i.e. \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{(\varepsilon)} > 0 \quad s.t. \ | x - c | < \delta \Rightarrow | f(x) - f(c) | < \varepsilon)$
則稱函數 $f(x)$ 在 $x = c$ 處連續
若 f 在 R 上的每一點皆連續, 則稱 f 在 R 上的連續函數。

幾何形式

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \mid x - c \mid < \delta \Rightarrow \mid f(x) - f(c) \mid < \varepsilon$$

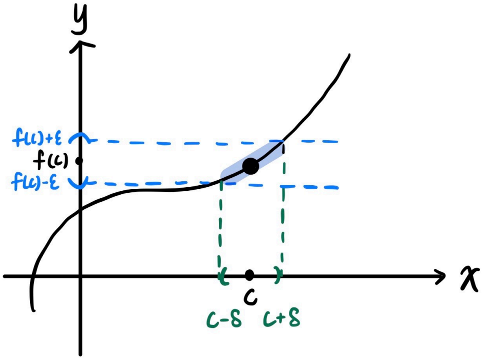


Figure: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

函數 f(x) 在 x = c 處連續

滿足以下三個條件

- 函數 f(x) 在 x = c 處有定義
- 函數 f(x) 在 x = c 處的極限值存在
- 極限值等於函數值, 即 $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$

導數

Definition

令 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, 且對任意 x_0 屬於 $[a,b]$
如果極限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在, 則說 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 處是可微分的, 記成 $f'(x_0)$

而此極限值稱為函數 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 的導數

導函數: 對每個 x_0 值都對應到 $f'(x_0)$，形成新函數 $f'(x)$
微分: 求導函數的行為

幾何意義

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

斜率 =y 的變動量/x 的變動量

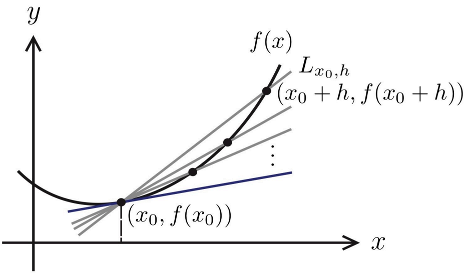


Figure: 導數的幾何意義是割線斜率趨近於切線斜率

可導保證連續

Theorem

函數 f : I→R 在 x = x_0 處是可導的, 則 f(x) 在 x = x_0 處連續。

證明: 對於 $x \neq x_0$, 有

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot x - x_0,$$

則

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right)$$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x\to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

因此

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, 函數 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 連續。 □

連續不一定可導

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x - 0}{x} = -1$$

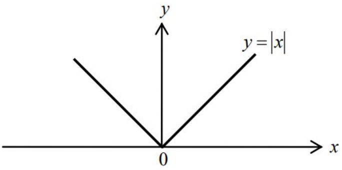


Figure: 例子: $y = f(x) = | x |$

神秘關聯

- 對函數 f(x) 在某點的特性

$$\text{極限} \underset{\text{sure}}{\overset{\text{uncertain}}{\rightleftharpoons}} \text{連續} \underset{\text{sure}}{\overset{\text{uncertain}}{\rightleftharpoons}} \text{可導}$$

討論該點附近行為	附近行為跟該點行為一致	推向極限，而得到導數

謝謝大家

$y = 9(|x| \leqq 1)$、$y = -x^2 + 6|x| + 4(1 \leqq |x| \leqq 6)$、$y = 2^{|\frac{x}{3}|}(|x| \leqq 6)$、$x^2 + (y-5)^2 = \frac{1}{4}$、$y = -\sin(\frac{\pi}{2}|x|) + \frac{9}{2}(2 \leqq |x| \leqq 4)$、$|y - 2| = \sqrt{\frac{-|x|}{2} + 1}$

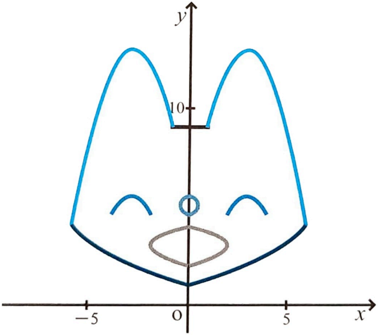


Figure: 秋田大學的微笑貓咪