Linear programming
Background material

Fabian Bastin
fabian.bastin@umontreal.ca
Université de Montréal – CIRRELT – IVADO – Fin-ML

Linear program

Linear program, standard form:

$$
\begin{aligned}
\min_x \; & c^T x \\
\text{s.t. } & Ax = b, \\
& x \geq 0,
\end{aligned}
$$

with $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Assumptions: rank(A) = m, $m \leq n$.

Standard form

Any linear program can be transformed to the standard form. Consider for instance the program

$$\min_x c^T x \text{ s.t. } Ax \geq b.$$

Note that there is no bound constraints on x.

We first add a vector z of surplus variables:

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^T x \\ \text{s.t. } & Ax - z = b, \\ & z \geq 0. \end{aligned}$$

We next decompose x as the difference of two non-negative variables: $x = x^+ - x^-$, where $x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$, and $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$.

Standard form (cont'd)

The problem becomes

$$\min_x \begin{pmatrix} c & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix},$$

$$\text{s.t. } \begin{pmatrix} A & -A & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix} \geq 0.$$

The inequalities constraints of the form $x \leq u$ or $Ax \leq b$ can be handled by adding slack variables:

$$x \leq u \Leftrightarrow x + w = u, \; w \geq 0,$$
$$Ax \leq b \Leftrightarrow Ax + y = b, \; y \geq 0.$$

Basis solutions

Without loss of generality, suppose that the first m columns are independent, and form

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

Basis solution: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_b\ 0)$, with $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_b = \boldsymbol{b}$.
Degenerated basis solution: if some components of $\boldsymbol{x}_b$ are equal to zero.
Feasible basis solution: basis solution such that $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ and $\boldsymbol{x} \geq 0$.

Fundamental theorem of linear programming

Consider an LP under standard form, with $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, and rank($\boldsymbol{A}$) = m.

- S'il y a une solution réalisable, alors il y a une solution de base réalisable.
- S'il y a une solution réalisable optimale, alors il y a une solution de base réalisable optimale.

Dualité

Nous considérons le problème, dit **primal**:

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Le programme suivant est appelé **dual**:

$$\begin{aligned} \max_\lambda \; & \lambda^T b \\ \text{t.q. } & A^T \lambda \leq c \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c, x, \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, b \in \mathbb{R}^m$.
Note: les contraintes duales peuvent aussi s'écrire $\lambda^T A \leq c^T$ (en appliquant l'opérateur de transposition de part et d'autre de l'inégalité).

Dualité

x: variables du problème primal
λ: variables du problèmes dual

Dual du dual?

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualité: forme standard

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

revient à

$$\begin{aligned} \min_x \; & c^T x \\ \text{t.q. } & Ax \geq b \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Dualité: forme standard

Le dual peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \max_{u,v}\ & u^T b - v^T b \\ \text{t.q. } & u^T A - v^T A \leq c^T \\ & u \geq 0 \\ & v \geq 0 \end{aligned}$$

ou, avec $\lambda = u - v$,

$$\begin{aligned} \max_{\lambda}\ & \lambda^T b \\ \text{t.q. } & \lambda^T A \leq c^T \end{aligned}$$

Forme asymétrique: $\lambda \in \mathbb{R}$.

Primal-dual conversion

Minimisation	**Maximisation**
Constraints	Variables
$\geq$	≥ 0
$\leq$	≤ 0
$=$	unconstrained
Variables	Constraints
≥ 0	$\leq$
≤ 0	$\geq$
unconstrained	$=$

Dualité faible

(Forme symétrique ou forme asymétrique – forme standard)

Si x and λ sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, alors

$$c^T x \geq \lambda^T b$$

Proof.

$$\lambda^T b \leq \lambda^T A x \leq c^T x,$$

pour $x \geq 0$, vu que x est supposé realisable, et que du dual, $\lambda^T A \leq c^T$. □

Dès lors, l'objectif primal est une borne supérieure pour le dual, et vice-versa.

Corollaire

Si x_0 et λ_0 sont réalisables pour le primal et le dual, respectivement, et si

$$c^T x_0 = \lambda_0^T b,$$

alors x_0 et λ_0 sont optimaux pour leur problème respectif.

Mais on n'a encore dit sur la réalisabilité d'un problème par rapport à l'autre!

Dualité forte

Si un des problèmes, primal ou dual, a une solution optimale finie, l'autre problème a aussi une solution optimale finie, et les valeurs correspondantes des fonctions objectifs sont égales. Si l'un des problèmes a un objectif non borné, l'autre problème n'a pas de solution réalisable.

Si un programme est non réalisable, cela n'implique cependant pas que son dual soit non borné. Celui-ci peut être non réalisable.

Le tableau ci-dessous synthétise les différents cas de figure possibles.

Primal / Dual	Borné	Non borné	Non réalisable
Borné	possible	impossible	impossible
Non borné	impossible	impossible	possible
Non réalisable	impossible	possible	possible

Optimalité et dualité

L'optimalité peut se déduire des conditions KKT.

En LP, nous n'avons pas besoin d'exiger une qualification de contraintes pour appliquer les conditions KKT.

Lagrangien:

$$\mathcal{L} = c^T x - \pi^T (Ax - b) - s^T x.$$

Conditions KKT: vecteurs de Lagrange π et s t.q.

$$\begin{aligned} A^T \pi + s &= c, \\ Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ s &\geq 0, \\ x_i s_i &= 0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Problème dual

Soit (x^*, π^*, s^*) un vecteur satisfaisant les conditions KKT. On a

$$c^T x^* = (A^T \pi^* + s^*)^T x^* = (Ax^*)^T \pi^* = b^T \pi^*.$$

Il est de plus facile de montrer que les conditions (nécessaires) KKT sont suffisantes.

Problème dual:

$$\max_{\pi} b^T \pi, \text{ t.q. } A^T \pi \leq c,$$

or, equivalently,

$$\max_{\pi} b^T \pi, \text{ t.q. } A^T \pi + s = c, \ s \geq 0.$$