MV52
Synthèse d'images

CM #3

Transformations géométriques *Modèle*
Calculs d’intersection

Fabrice LAURI
fabrice.lauri@utbm.fr

Plan du cours

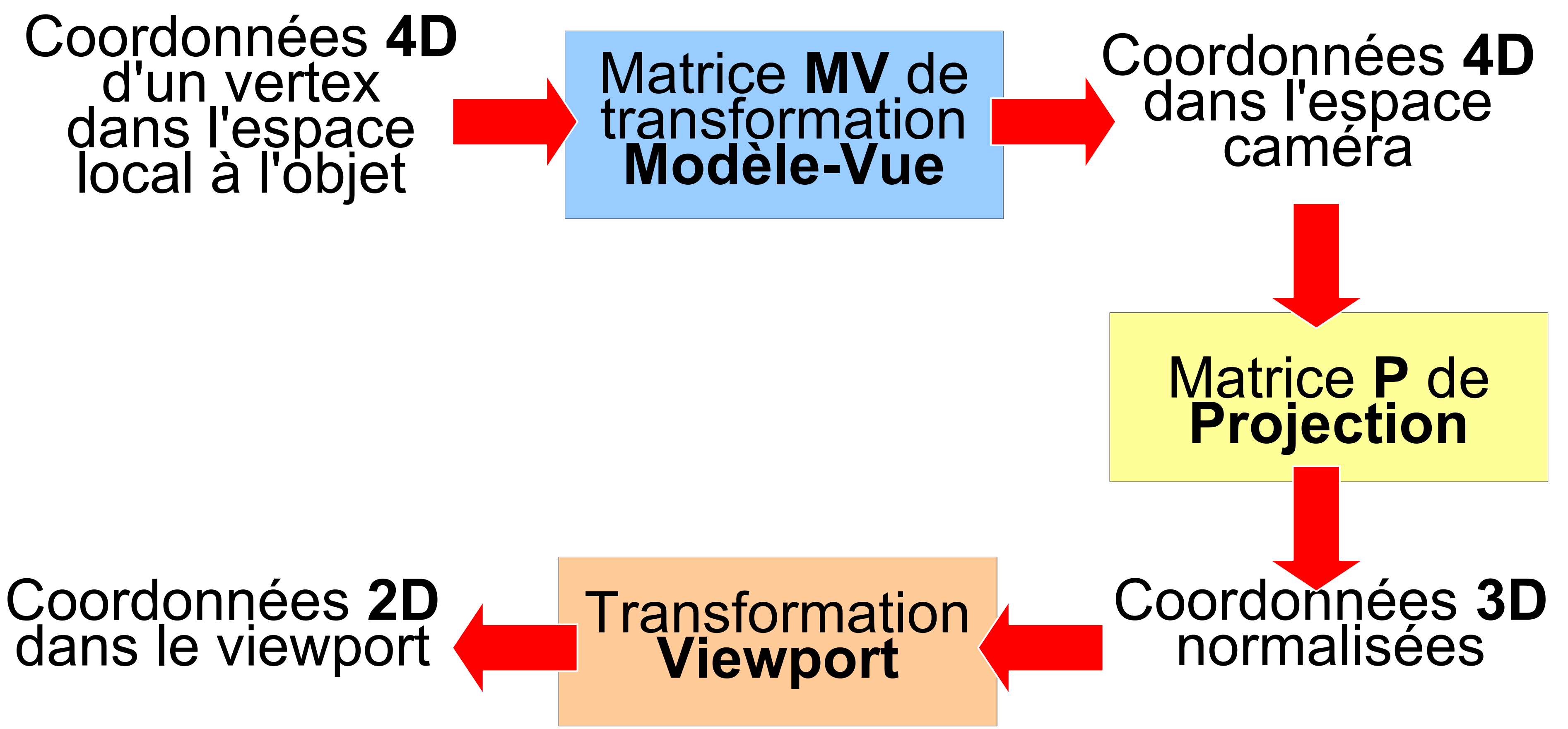
- **Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D**
- **Les transformations linéaires Modèle**
- **Orientation d’un objet avec un quaternion**
- **La transformation Viewport**
- **Droites, plans et calculs d'intersection**

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Les transformations linéaires Modèle
- Orientation d’un objet avec un quaternion
- La transformation Viewport
- Droites, plans et calculs d'intersection

Séquence des transformations appliquées à chaque vertex d'un objet

Les coordonnées de chaque vertex extrait par une primitive d'affichage subissent les transformations suivantes :



Séquence des transformations appliquées à chaque vertex d'un objet

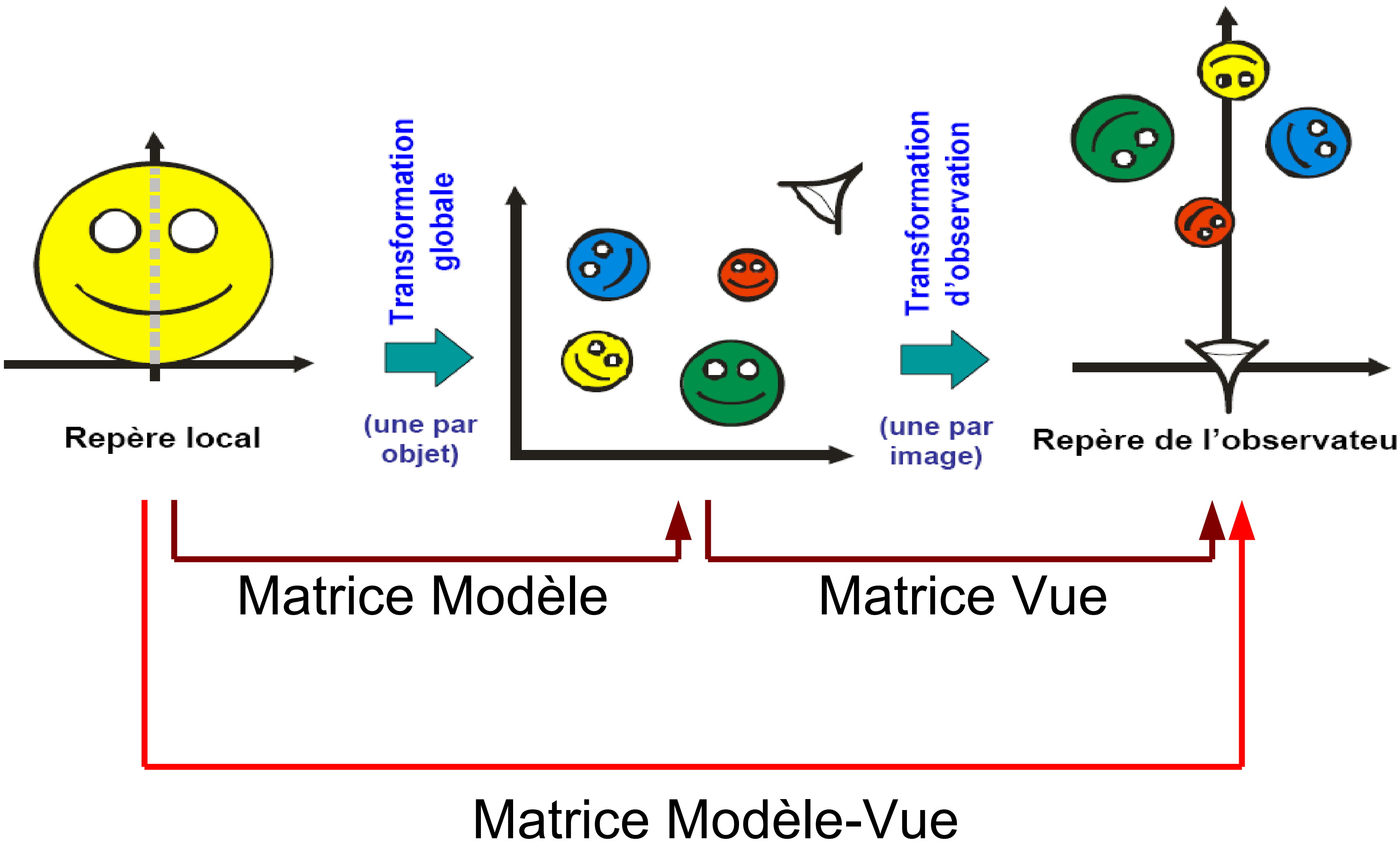
Coordonnées **4D** d'un vertex dans l'espace local à l'objet → **Matrice MV de transformation Modèle-Vue** → Coordonnées **4D** dans l'espace caméra

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

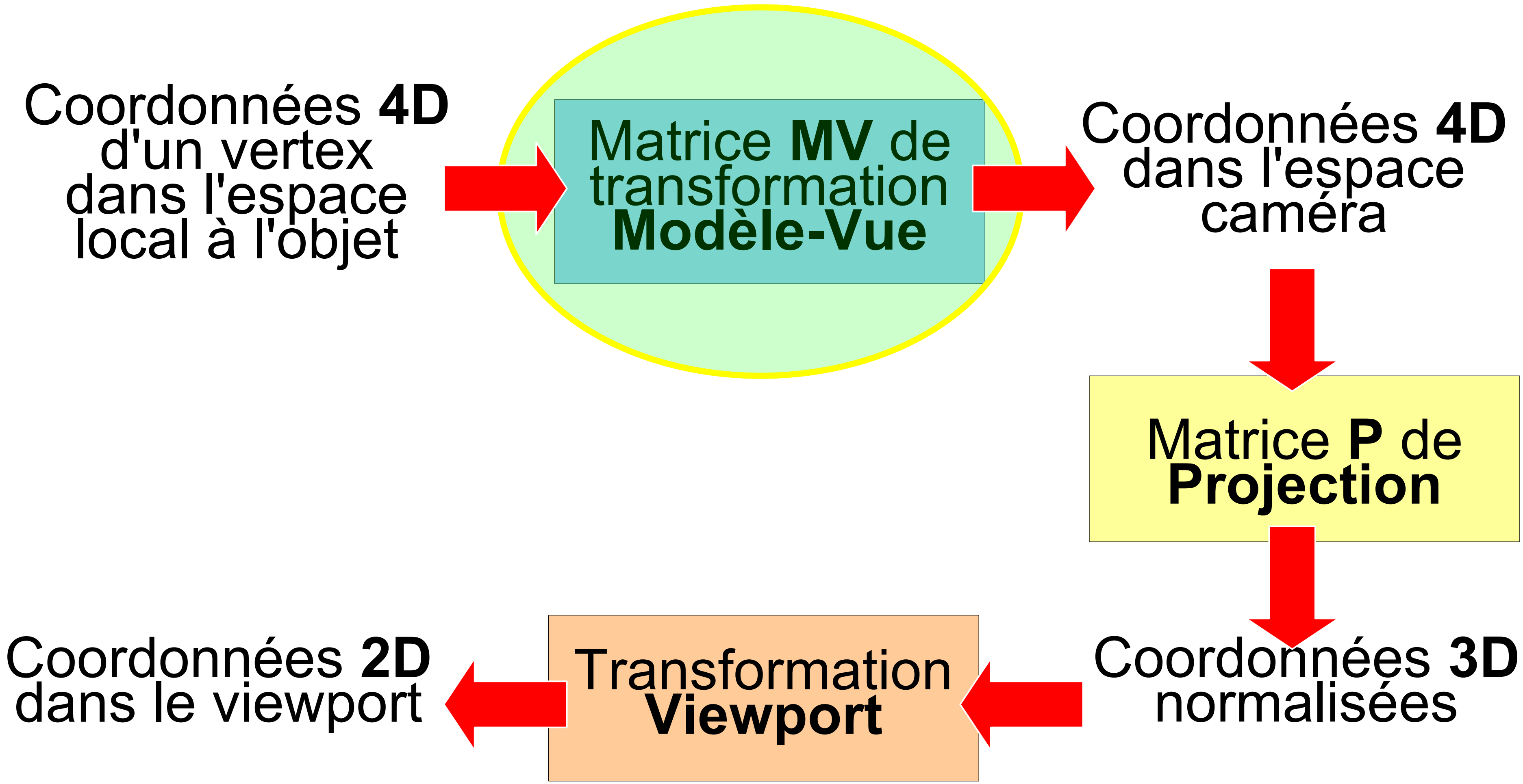
$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} = MV \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

La matrice Modèle-Vue peut être décomposée en deux matrices : une matrice Modèle M et une matrice Vue V. Dans ce cas : MV = V*M.

Rappel : la phase TnL



Séquence des transformations appliquées à chaque vertex d'un objet



Plan du cours

- **Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D**
- **Les transformations linéaires Modèle**
- **Orientation d’un objet avec un quaternion**
- **La transformation Viewport**
- **Droites, plans et calculs d'intersection**

Transformations linéaires

Transformation : modifie la position d'un point.

Transformation linéaire : s'il existe une matrice pour effectuer ce calcul.

Soient $\vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{Y} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et M une matrice 3x3.

Y est l'image de X par la transformation linéaire M ssi :

$$\vec{Y} = M\,\vec{X}$$

Matrices orthogonales

Définition
Une matrice inversible est *orthogonale* ssi $M^{-1} = M^T$.

Théorème 1
Si les n vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ forment une base orthonormale, alors la matrice telle que chaque colonne i est égale au vecteur V_i est orthogonale.

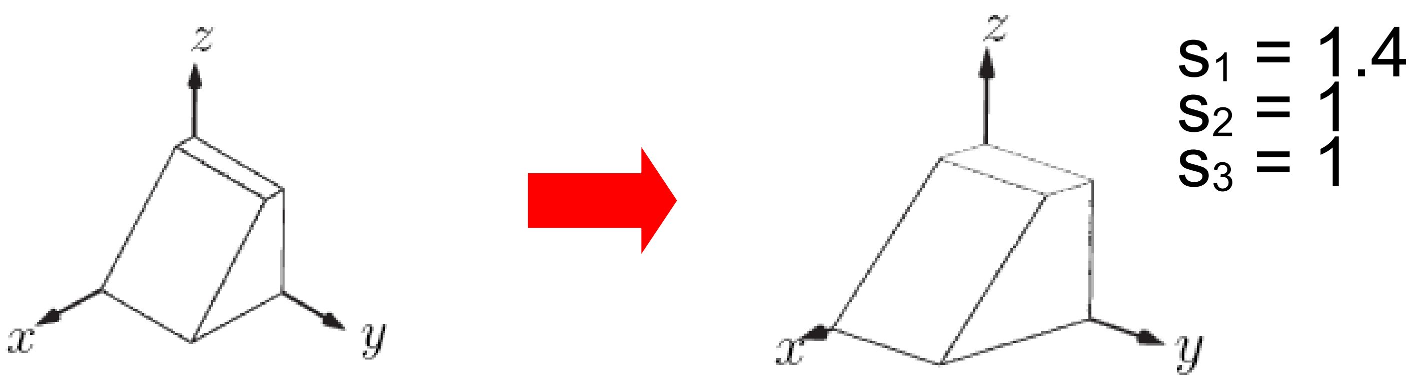
Théorème 2
Une matrice orthogonale préserve les longueurs et les angles, c'est-à-dire :

$$\|M P\| = \|P\| \qquad (M P_1).(M P_2) = P_1.P_2$$

Matrice de changement d'échelle

Matrice diagonale M telle que :

$$M = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{pmatrix}$$



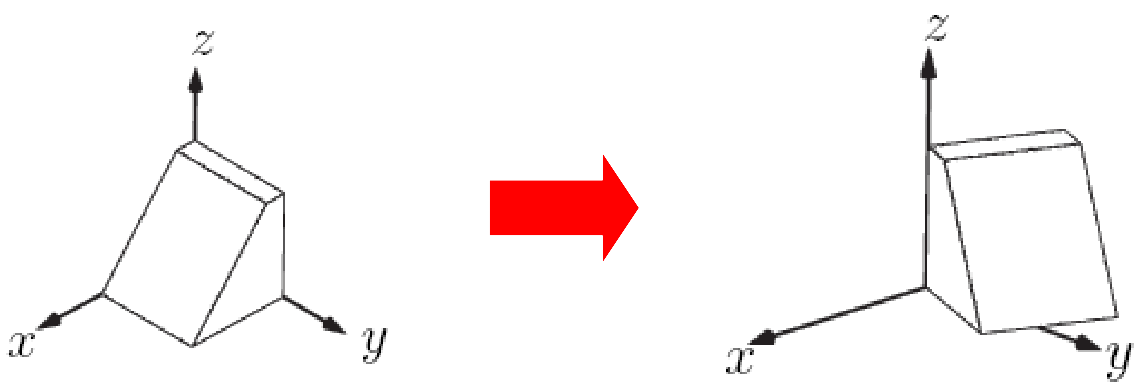
Mise à l'échelle uniforme : $s_1 = s_2 = s_3$

Matrice de rotation autour de l'axe Oz

Matrice M à appliquer à un vecteur X :

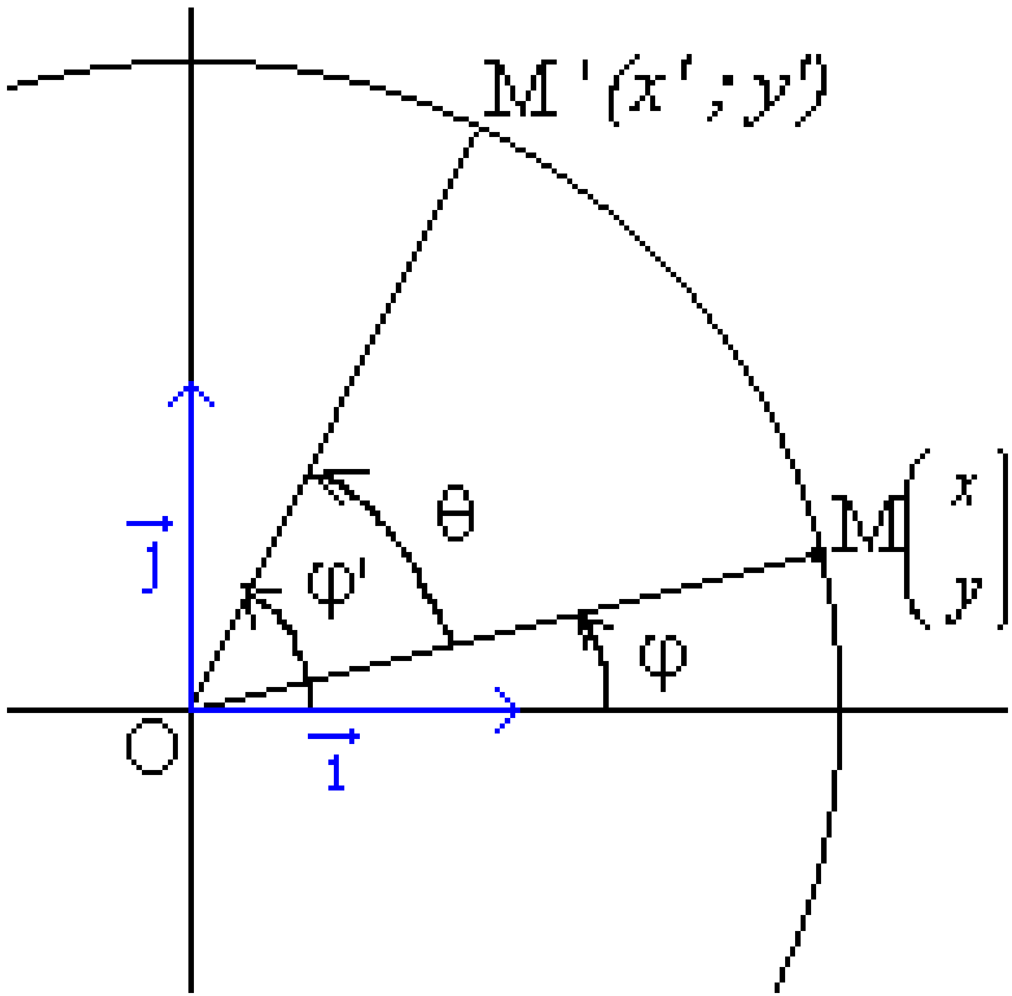
$$M = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a : angle de rotation dans le **sens trigonométrique**



a = π/4

Rappel de la rotation dans le plan



Considérons le plan muni d'un repère orthonormal (O,i,j).
Soit M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle theta.

x = OM cos phi
y = OM sin phi

x' = OM' cos phi'
y' = OM' sin phi'

x' = OM cos (phi+theta)
y' = OM sin (phi+theta)

Or cos (a+b) = cos a cos b – sin a sin b
sin (a+b) = sin a cos b + sin b cos a

D'où :

x' = OM (cos phi cos theta – sin phi sin theta)
y' = OM (sin phi cos theta + sin theta cos phi)

x' = OM cos phi cos theta – OM sin phi sin theta
y' = OM sin phi cos theta + OM sin theta cos phi

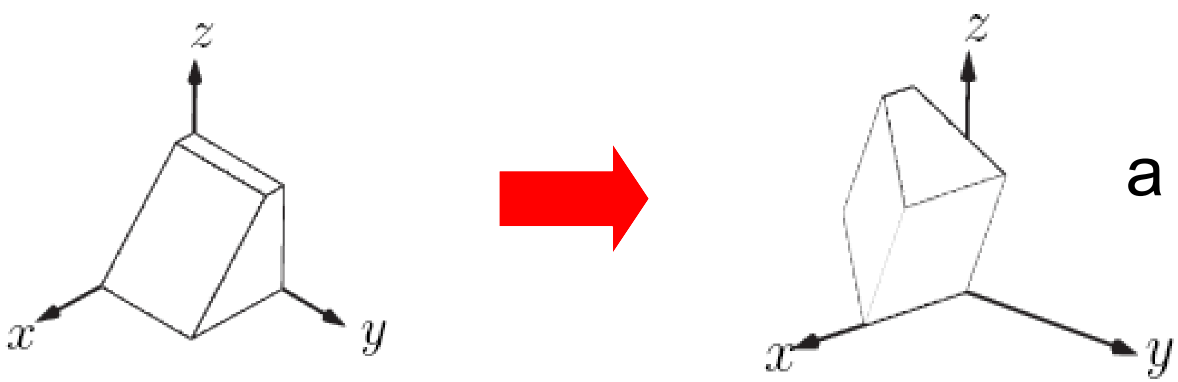
x' = x cos theta – y sin theta
y' = x sin theta + y cos theta

Matrice de rotation autour de l'axe Ox

Matrice M à appliquer à un vecteur X :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{pmatrix}$$

a : angle de rotation dans le **sens trigonométrique**



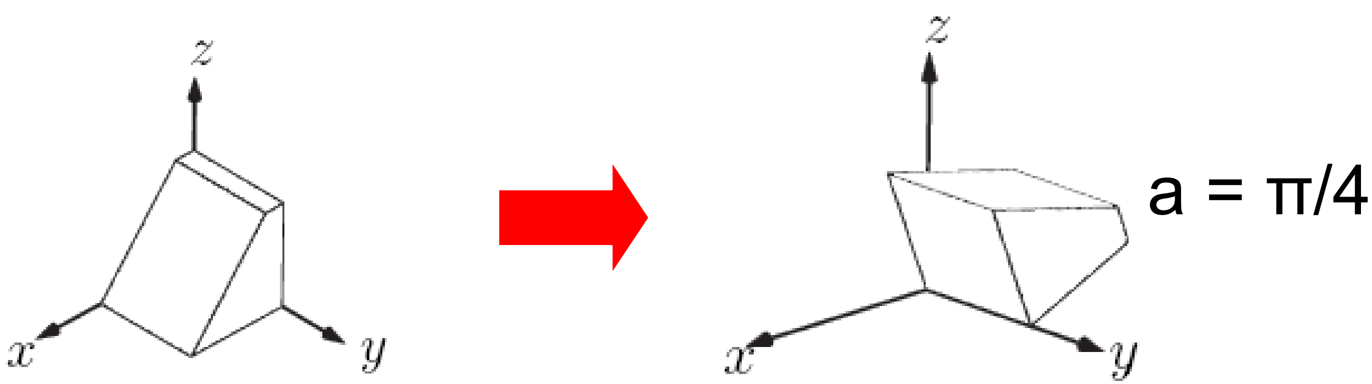
a = π/4

Matrice de rotation autour de l'axe Oy

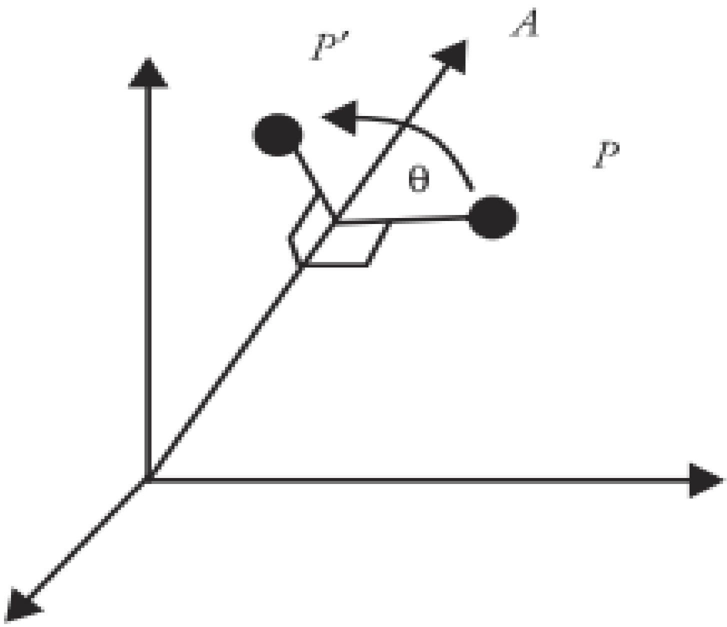
Matrice M à appliquer à un vecteur X :

$$M = \begin{pmatrix} \cos a & 0 & \sin a \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$$

a : angle de rotation dans le **sens trigonométrique**



Rotation autour d'un axe $A=(a_x\ a_y\ a_z)^T$ normé



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_x \cdot a_x & a_x \cdot a_y & a_x \cdot a_z \\ a_y \cdot a_x & a_y \cdot a_y & a_y \cdot a_z \\ a_z \cdot a_x & a_z \cdot a_y & a_z \cdot a_z \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$M = \hat{A} + \cos\theta \cdot (I - \hat{A}) + \sin\theta \cdot A^*$$

$$P' = M \cdot P$$

Changement de repère

Soient $C=(O,(e_1,e_2,e_3))$ et $C'=(O',(e'_1,e'_2,e'_3))$ deux repères dans le même espace affine.

Tout point P ayant les coordonnées $(x\ y\ z)^T$ dans C et $(x'\ y'\ z')^T$ dans C' vérifie :

$P = O + x\, e_1 + y\, e_2 + z\, e_3$
$P = O' + x'\, e'_1 + y'\, e'_2 + z'\, e'_3$
c'est-à-dire :

$$P = O + \begin{pmatrix} e_1^x & e_2^x & e_3^x \\ e_1^y & e_2^y & e_3^y \\ e_1^z & e_2^z & e_3^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O' + \begin{pmatrix} e'^x_1 & e'^x_2 & e'^x_3 \\ e'^y_1 & e'^y_2 & e'^y_3 \\ e'^z_1 & e'^z_2 & e'^z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Changement de repère

Lorsque C=(O,(e_1,e_2,e_3)) tels que :
O=$(0\ 0\ 0)^T$, $e_1=(1\ 0\ 0)^T$, $e_2=(0\ 1\ 0)^T$ et $e_3=(0\ 0\ 1)^T$
alors :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O' + \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

et :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \end{pmatrix}^{-1} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - O' \right]$$

Translation

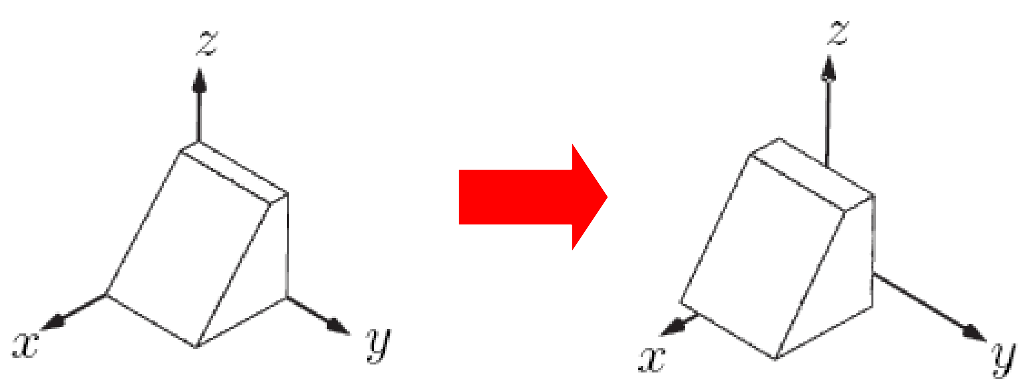
Translation d'un vecteur X par un vecteur T :

$$\vec{Y} = \vec{X} + \vec{T}$$

Impossible de représenter une translation par une transformation linéaire de la forme :

$$\vec{Y} = M\,\vec{X}$$

où M est une matrice 3x3.



Problème : la composition des transformations

Problème de la composition des transformations avec des translations :

$$P' = M_2(M_1 P + T_1) + T_2 = (M_2 M_1) P + M_2 T_1 + T_2$$

Nécessite donc de stocker M_2M_1 et $M_2T_1+T_2$ à chaque étape de composition de 2 transformations.

Solution : les coordonnées homogènes

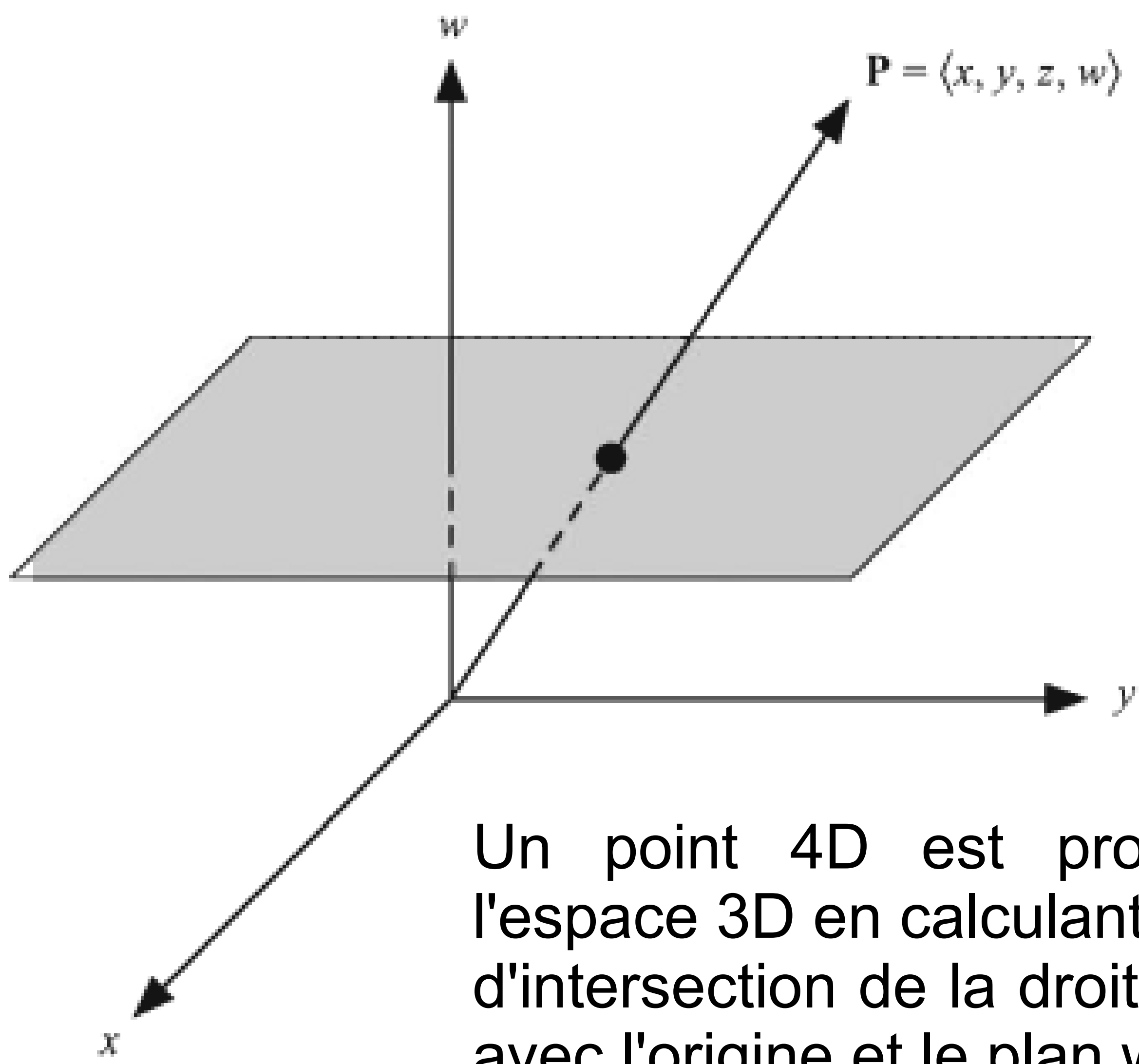
Utiliser des vecteurs à 4 dimensions et des matrices 4x4.

Les coordonnées ajoutées sont les **coordonnées homogènes**.

Pour les vecteurs homogènes, 4ème coordonnées w est telle que :

- w = 1 pour un point
- w = 0 pour une direction

Interprétation géométrique de la coordonnée w



Un point 4D est projeté dans l'espace 3D en calculant le point d'intersection de la droite le reliant avec l'origine et le plan w=1.

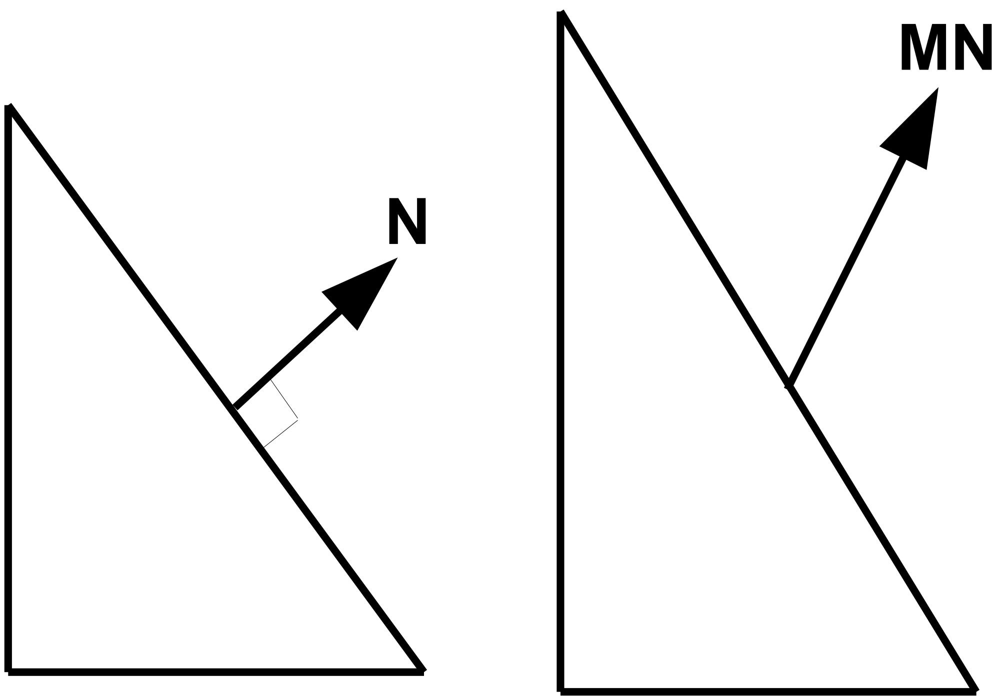
Coordonnées homogènes

Pour les matrices homogènes :

$$F = \begin{pmatrix} M & T \\ & \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & T_x \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & T_y \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse de la matrice homogène F ?

Incidence des transformations sur les normales



Application de la même matrice M
sur la normale et les vertices d'un triangle

Puisque tangente et normale sont perpendiculaires, la tangente T et la normale N associée à un vertex vérifient : N.T=0, ou : $N^T T=0$.
Cette équation doit aussi être vérifiée pour la tangente T' et la normale N' du vertex transformé.
Soit la matrice M de transformation : T'=MT.
Nous voudrions trouver la matrice G telle que : N'.T' = (GN).(MT) = 0.
Ceci donne :
$(GN).(MT)=(GN)^T(MT)=N^TG^T(MT)$.
Puisque $N^T T=0$, l'équation est satisfaite si $G^TM=I$ (matrice identité).
Nous concluons donc que : G = (M-1)T.

Donc :

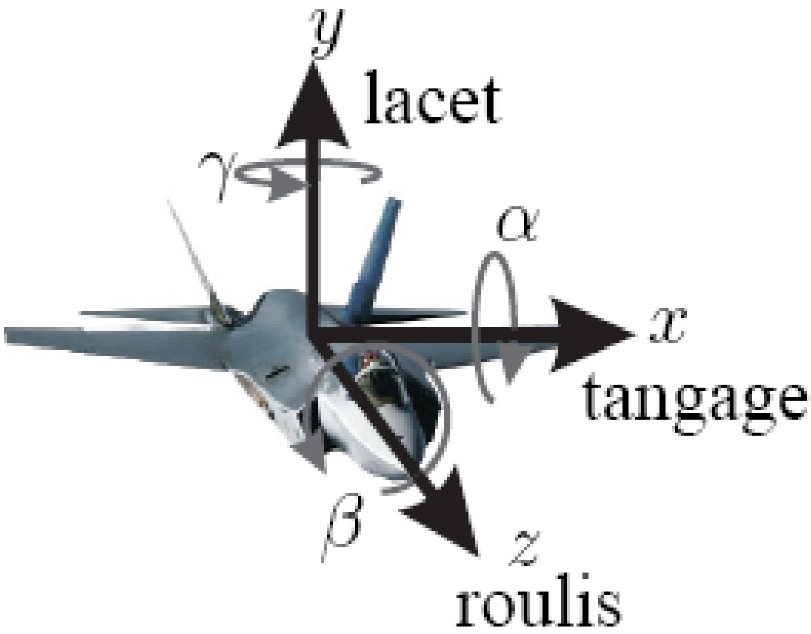
Une normale est correctement transformée en utilisant la transposée inverse de la matrice de transformation utilisée pour transformer les points.

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Les transformations linéaires Modèle
- Orientation d’un objet avec un quaternion
- La transformation Viewport
- Droites, plans et calculs d'intersection

Orientation et transformation d'Euler

L'orientation d'un objet 3D peut être représentée par une transformation d'Euler à l'aide de 3 angles :



Transformation d'Euler : $\mathbf{T(\alpha,\beta,\gamma) = R_z(\gamma)\, R_x(\beta)\, R_y(\alpha)}$

Problème de la transformation d'Euler : le *Gimbal Lock* (verrouillage du cadran)

Gimbal Lock : survient dans le cas d'enchaînement de plusieurs rotations

Certaines séquences de rotations : fusion d'un axe en un autre.
Conséquence : un degré de liberté supprimé...

Manière la plus simple de comprendre ce problème : le coder avec des rotations d'angles d'Euler...

Un outil efficace pour éviter le *Gimbal Lock* : le quaternion

- Un quaternion permet de représenter l'orientation d'un objet 3D
- Quaternion : généralisation d'un nombre complexe à l'espace à 4 dimensions
  - Nombre complexe : de la forme $c = a+bi$, où $i^2 = -1$
  - Quaternion : de la forme $q = s+xi+yj+zk$, tel que $i^2=j^2=k^2=-1$ et $ij=k$, $jk=i$, $ki=j$.
- Quaternions unitaires (de norme égale à 1) : les seuls quaternions encodant des orientations.
- Arithmétique des quaternions...

Arithmétique des quaternions

Notation vectorielle

$$q = <s,x,y,z> = <s,v> = s + \mathbf{v} = s + xi + yj + zk$$

Multiplication non commutative

$$q_1q_2 = <s_1,v_1>*<s_2,v_2> = <s_1s_2-v_1.v_2, s_1v_2 + s_2v_1 + v_{1x}v_2>$$

Conjugué q* d'un quaternion q

Soit $q = <s,v>$.

Alors $q^* = <s,-v>$.

Et : $qq^* = q^*q = q.q = ||q||^2 = q^2$

Arithmétique des quaternions

Inverse d'un quaternion

$$q^{-1} = q^* / ||q||^2$$

Donc pour un quaternion unitaire, $q^{-1} = q^*$.

Norme d'un quaternion

$$||q|| = (s^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

Notation et interprétation des rotations

Soit $P=(x\ y\ z)^T$ un point.

- $q_P = \langle 0,x,y,z \rangle$ représente le vecteur P (sous forme de quaternion)
- $q_R =$ **$\langle \cos \theta/2, v \sin \theta/2 \rangle$** représente la rotation d'angle θ autour d'un axe v **normé**

- Image de P par la rotation R :

$$R(P) = q_R\, q_P\, q_R^{-1}$$

Composition de rotations

- Si q_1 et q_2 représentent respectivement les rotations R_1 et R_2, alors :

$$q = q_2 \, q_1$$

représente la composition de ces 2 rotations, c'est-à-dire R_1 puis R_2

- Image de P par la rotation R_1 suivie de la rotation R_2 :

$$R_2(\, R_1(\, P \,)\,) = (q_2 \, q_1) \, q_P \, (q_2 \, q_1)^{-1} = q_2 \, (q_1 \, q_P \, q_1^{-1}) \, q_2^{-1}$$

Matrice de rotation associé à un quaternion

- Soit q = s + xi + yj + zk avec ||q|| = 1 le quaternion représentant une rotation.

- La matrice M_R correspondante est :

$$M_R = \begin{bmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy-2sz & 2xz+2sy \\ 2xy+2sz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2sx \\ 2xz-2sy & 2yz+2sx & 1-2x^2-2y^2 \end{bmatrix}$$

Quaternion associé à une matrice de rotation

- Soit :

$$M_R = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

- Le quaternion associé dépend :
  - Du signe de la trace $T=r_{00}+r_{11}+r_{22}$ de la matrice
  - De la valeur du maximum de la diagonale si $T < 0$

Quaternion associé à une matrice de rotation

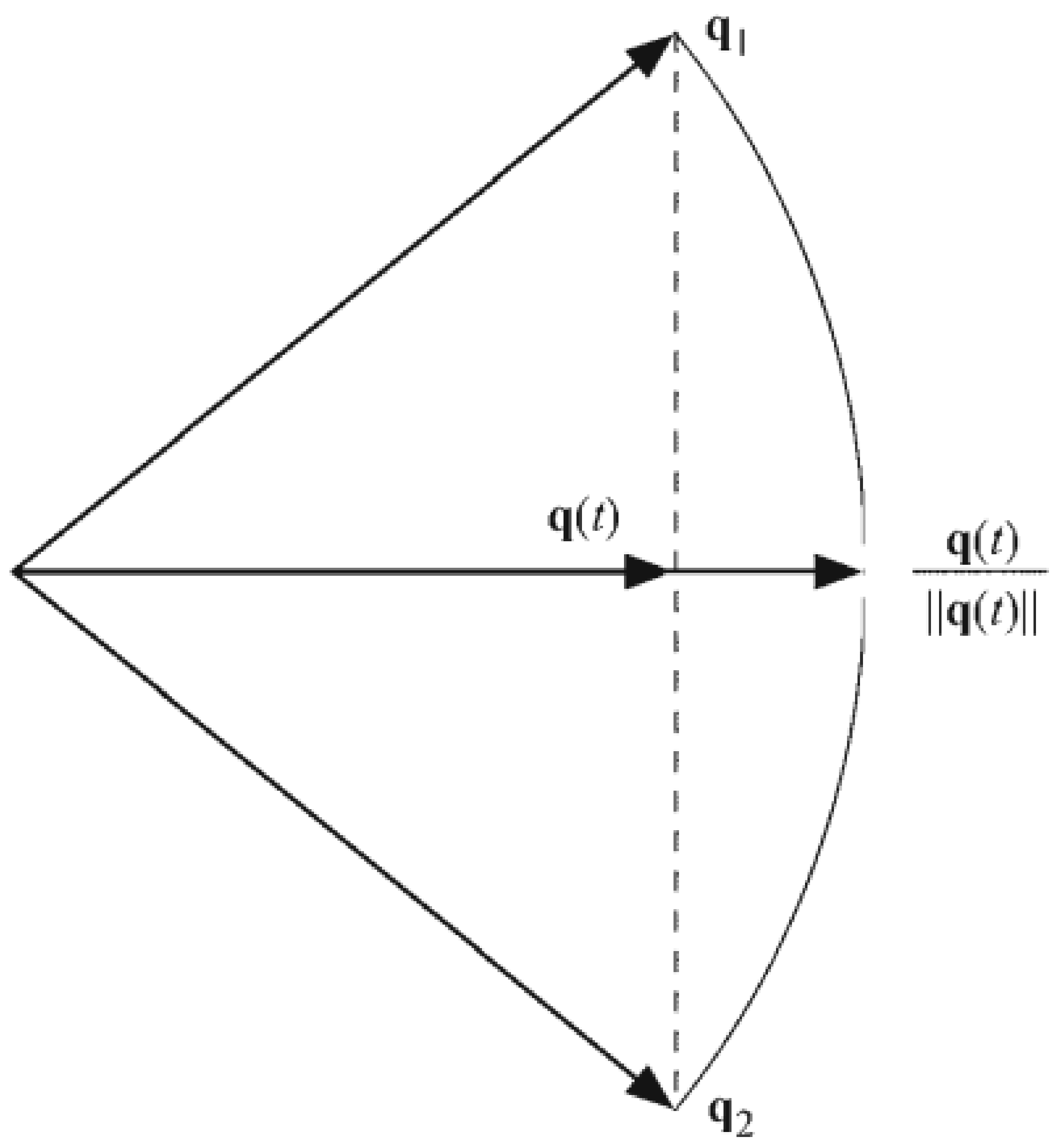
	$T > 0$	$T \leq 0$ $r_{00} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$	$T \leq 0$ $r_{11} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$	$T \leq 0$ $r_{22} = \max\{r_{00}, r_{11}, r_{22}\}$
s	$(\sqrt{T+1})/2$	$(r_{12} - r_{21})/(4x)$	$(r_{20} - r_{02})/(4y)$	$(r_{01} - r_{10})/(4z)$
x	$(r_{21} - r_{12})/(4s)$	$(\sqrt{r_{00} - r_{11} - r_{22} + 1})/2$	$(r_{01} + r_{10})/(4y)$	$(r_{02} + r_{20})/(4z)$
y	$(r_{02} - r_{20})/(4s)$	$(r_{01} + r_{10})/(4x)$	$(\sqrt{r_{11} - r_{00} - r_{22} + 1})/2$	$(r_{12} + r_{21})/(4z)$
z	$(r_{10} - r_{01})/(4s)$	$(r_{02} + r_{20})/(4x)$	$(r_{12} + r_{21})/(4y)$	$(\sqrt{r_{22} - r_{00} - r11 + 1})/2$

Interpolation de quaternions

- But : générer des orientations intermédiaires entre deux orientations clés q_1 et q_2

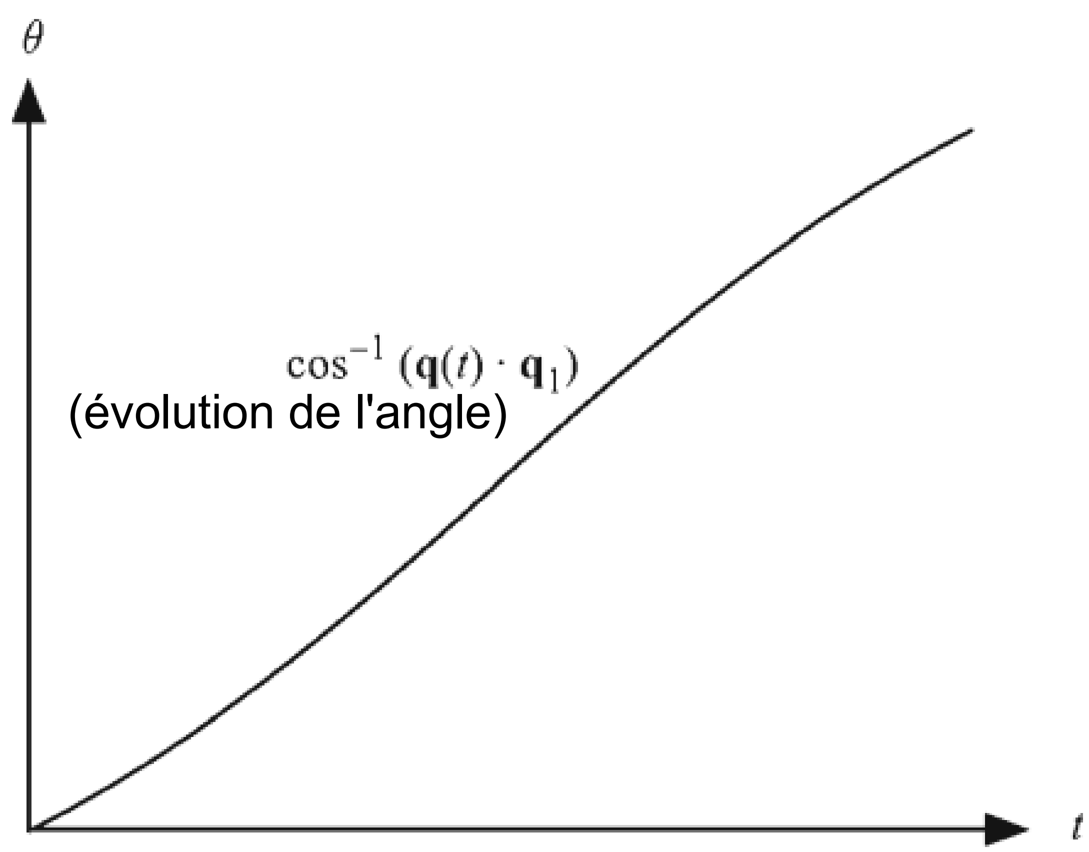
- La plus simple des interpolations : interpolations linéaires
  - $q(t) = (1-t)\, q_1 + t\, q_2$
  - Problème : la condition $||q(t)|| = 1$ n'est pas assurée

Problème de l'interpolation linéaire de quaternions



Interpolation de quaternions

- $1^{ère}$ solution : renormaliser en chaque point
  - $q(t) = ((1-t)\, q_1 + t\, q_2) / ||(1-t)\, q_1 + t\, q_2||$
  - Problème : le pas de modification de l'angle n'est pas constant



Interpolation de quaternions

- 2ème solution : Spherical LinEar inteRPolation
  Si q_1 et q_2 sont séparés d'un angle θ, cette technique permet de génèrer des quaternions formant un angle θt entre q(t) et q_1 lorsque t varie de 0 à 1.

$$q(t) = \frac{\sin \theta(1-t)}{\sin \theta} q_1 + \frac{\sin \theta t}{\sin \theta} q_2$$

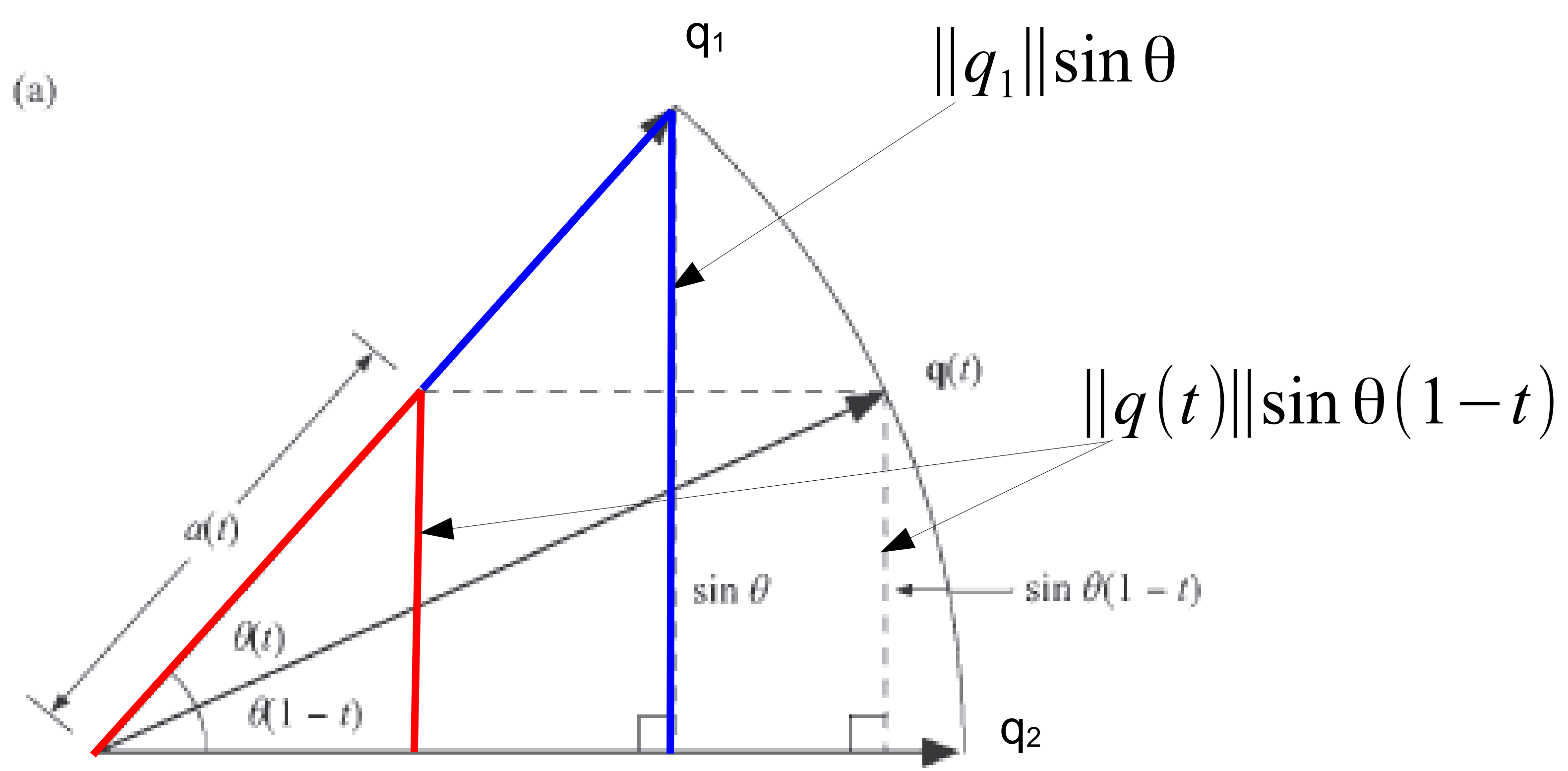
avec $\sin\theta = (1 - (q_1.q_2)^2)^{1/2}$ et $\theta = \cos^{-1}(q_1.q_2)$

et $q_1.q_2 > 0$ pour garantir que l'interpolation prend le chemin le plus court.

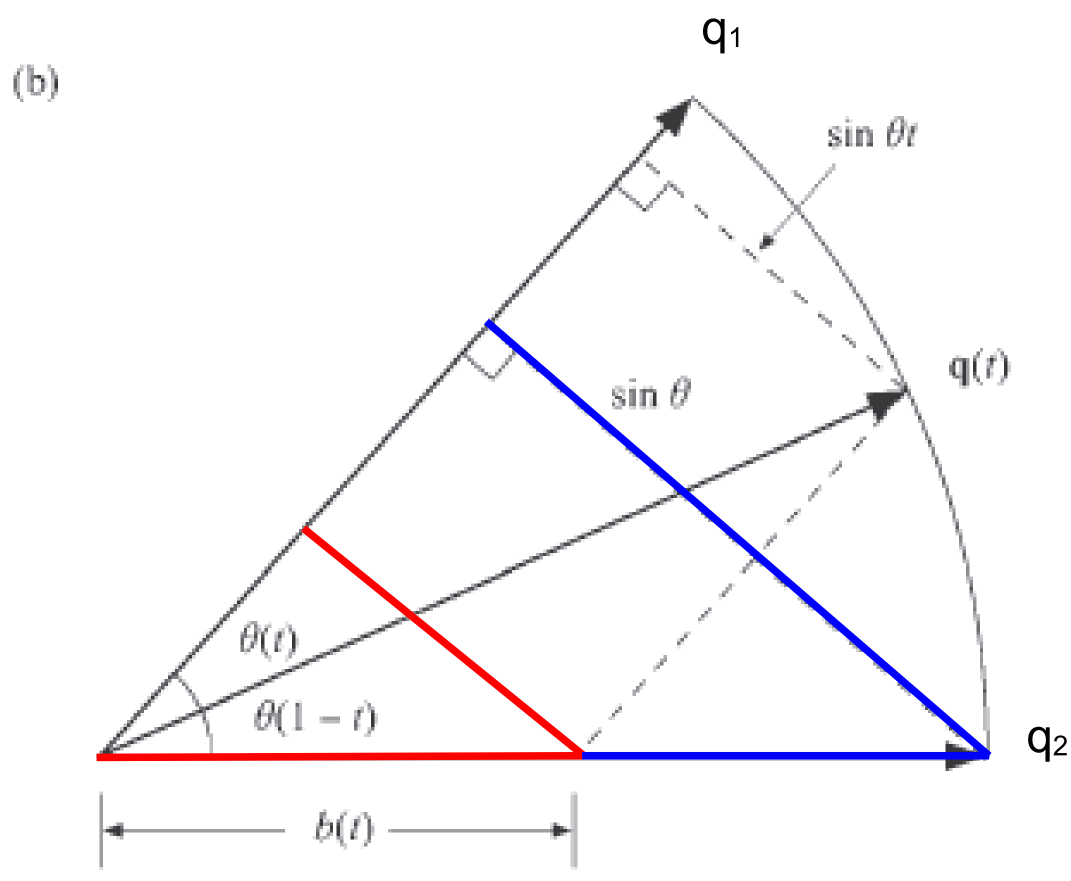
Cette interpolation possède les bonnes propriétés.

Interpolation de quaternions (SLERP)

Soit q(t) = a(t) q_1 + b(t) q_2.
La construction de triangles similaires permet de déterminer a(t) et b(t)...



Interpolation de quaternions (SLERP)



Avantages de SLERP

- Interpolation de matrices de rotations : calculs compliqués, résultats décevants
- Interpolation de quaternions : contrôle du chemin exact de la rotation et de sa vitesse
- Mouvement lissé qui correspond mieux à la réalité physique

Avantages de SLERP

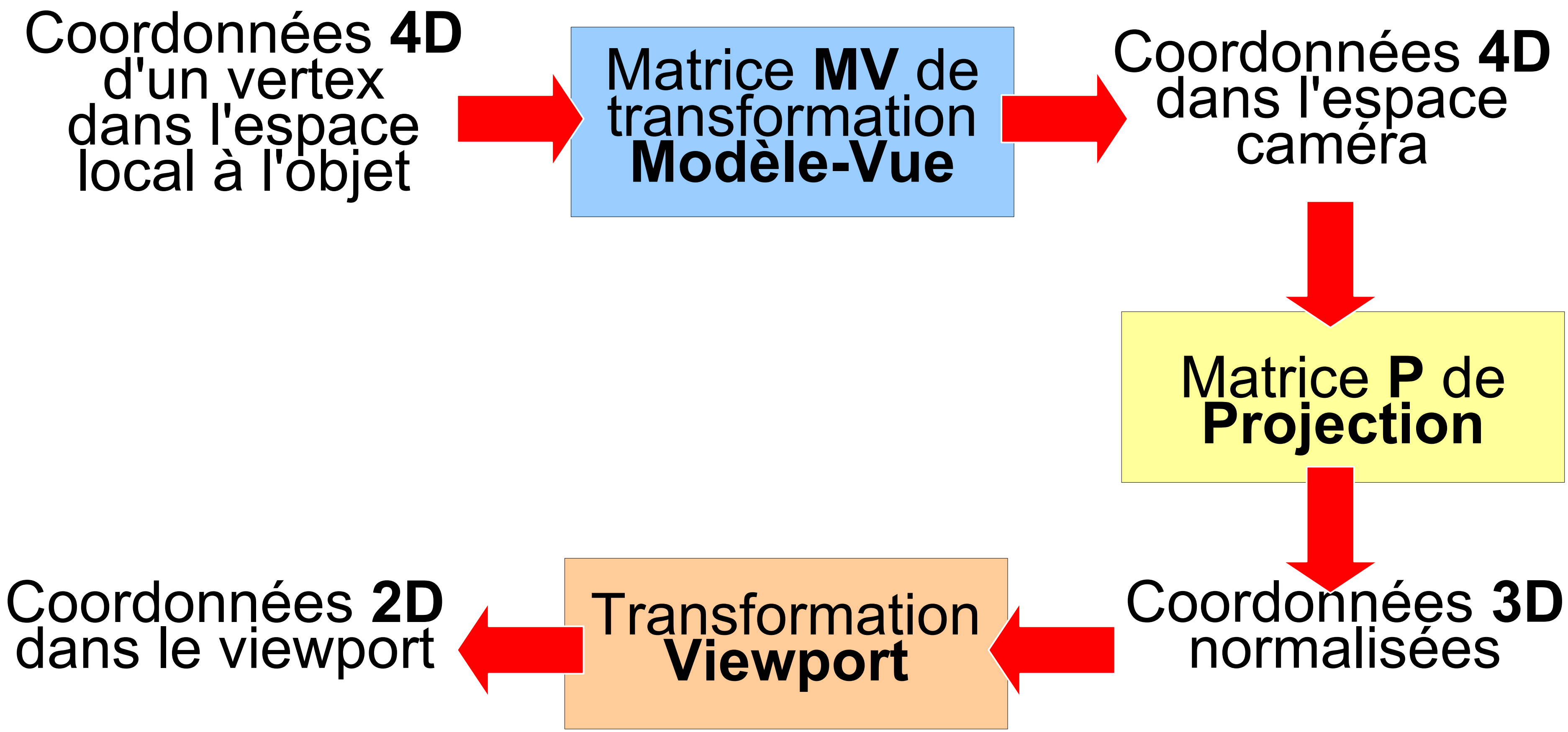
- Place mémoire
  - Quaternion : 4 scalaires à stocker
  - Matrice de rotation : 9 scalaires à stocker

- Temps de calcul plus rapide avec des quaternions :
  - Composition de 2 quaternions : 16 multiplications et 12 additions
  - Composition de 2 matrices : 27 multiplications et 18 additions

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Les transformations linéaires Modèle
- Orientation d’un objet avec un quaternion
- La transformation Viewport
- Droites, plans et calculs d'intersection

Séquence des transformations appliquées à chaque vertex d'un objet



Séquence des transformations appliquées à chaque vertex d'un objet

Coordonnées **4D** d'un vertex dans l'espace local à l'objet

Matrice **MV** de transformation **Modèle-Vue**

Coordonnées **4D** dans l'espace caméra

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} = MV \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

Séquence des transformations appliquées à un objet

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

Coordonnées **4D** dans l'espace caméra

Matrice **P** de **Projection**

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c / w_c \\ y_c / w_c \\ z_c / w_c \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

Coordonnées **3D** normalisées

Séquence des transformations appliquées à un objet

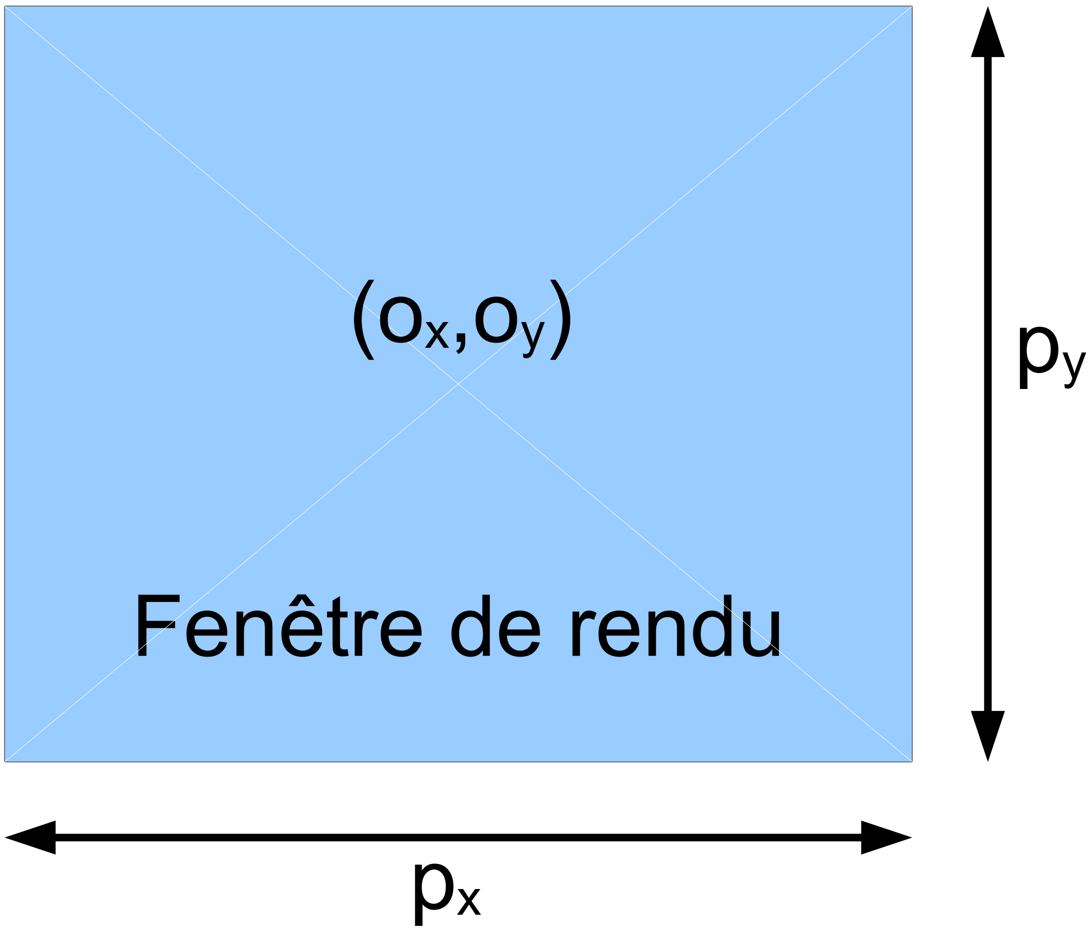
$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} \in [-1;1]^3$$

Coordonnées **2D** dans le viewport ← Transformation **Viewport** ← Coordonnées **3D** normalisées

La transformation Viewport

Elle est définie par les informations suivantes :



Séquence des transformations appliquées à un objet

$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_x/2)x_d + o_x \\ (p_y/2)y_d + o_y \\ [(b_f - b_n)/2] z_d + (b_f + b_n)/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix}$$

Coordonnées **2D** dans le viewport ← Transformation **Viewport** ← Coordonnées **3D** normalisées

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Les transformations linéaires Modèle
- Orientation d’un objet avec un quaternion
- La transformation Viewport
- Droites, plans et calculs d'intersection

Rappels

- Equation d'un segment, d'une droite...
- Equation d'un plan...

- Distance d'un point à une droite...
- Distance d'un point à un plan...

- Intersection entre deux droites...
- Intersection entre une droite et un plan...
- Intersection entre trois plans...
- Intersection entre deux plans...

- Application d'une transformation à un plan...

Equation d’un segment et d’une droite

Soit A et B deux points.

Equation d'un segment :

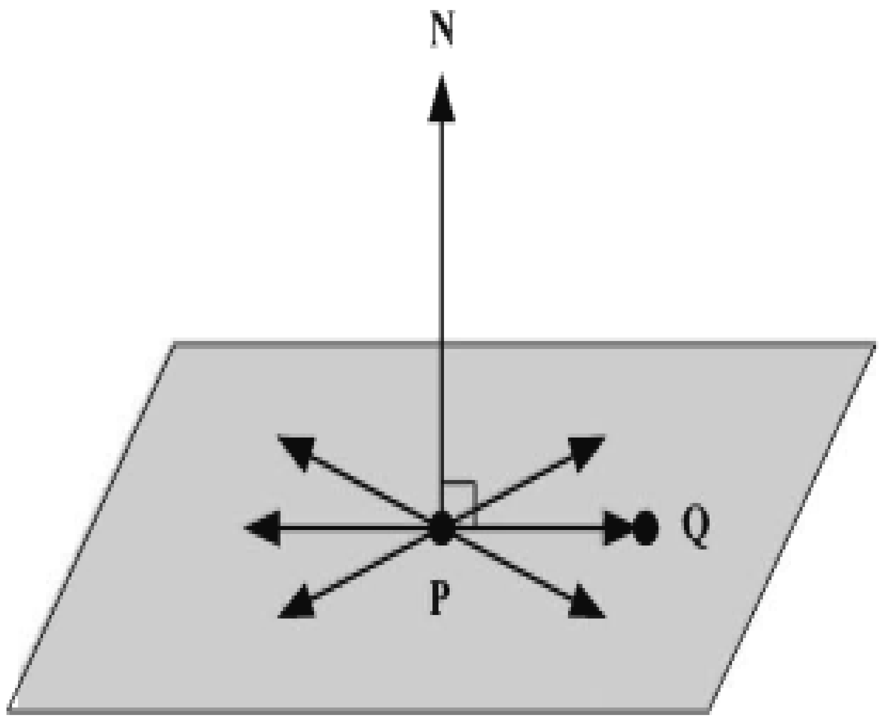
Tout point P(t) faisant partie du segment [AB] peut s’écrire : $P(t) = (1-t)\,A + t\,B = A + t\,(B-A)$
Avec t compris entre 0 et 1.

Equation d’une droite :

Tout point P(t) d’une droite passant par A et B peut s’écrire : $P(t) = (1-t)\,A + t\,B = A + t\,V$
avec t un réel et $V=(B-A)$.

Equation d'un plan

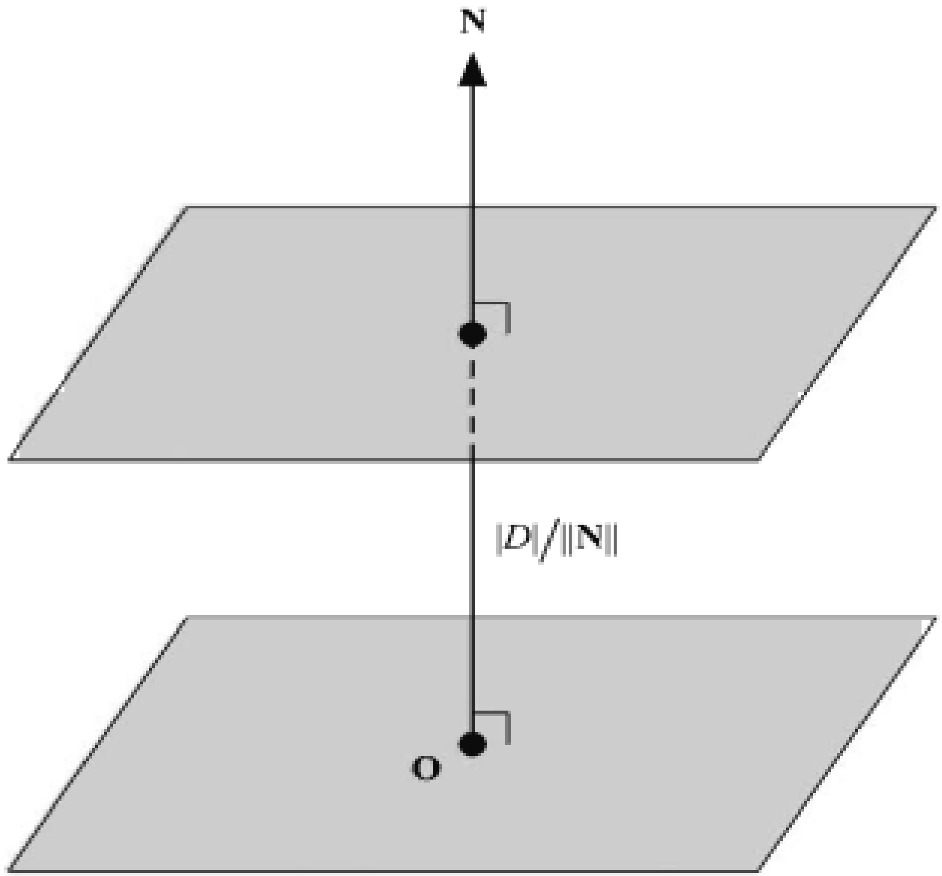
Soit P un point connu du plan et Q un point quelconque.



Un point Q appartient au plan si :

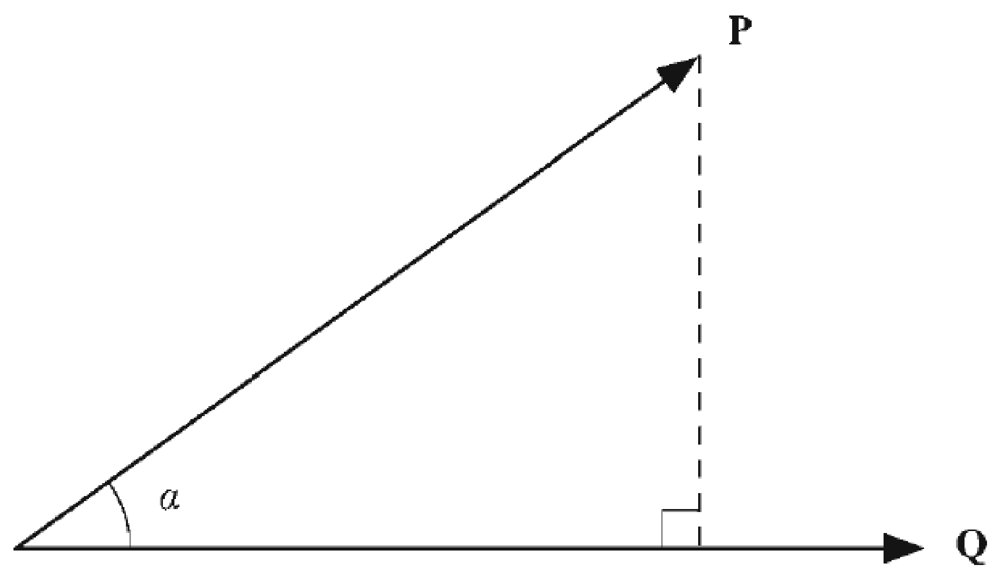
N.(Q-P) = 0
N.Q – N.P = 0
N.Q + D = 0 avec D=-N.P

L'équation d'un plan peut donc être défini par <N,D>.



Distance signée du plan à un plan parallèle à lui et passant par l'origine.

Projeté d'un point sur une droite



Projeté de P sur le vecteur Q ?

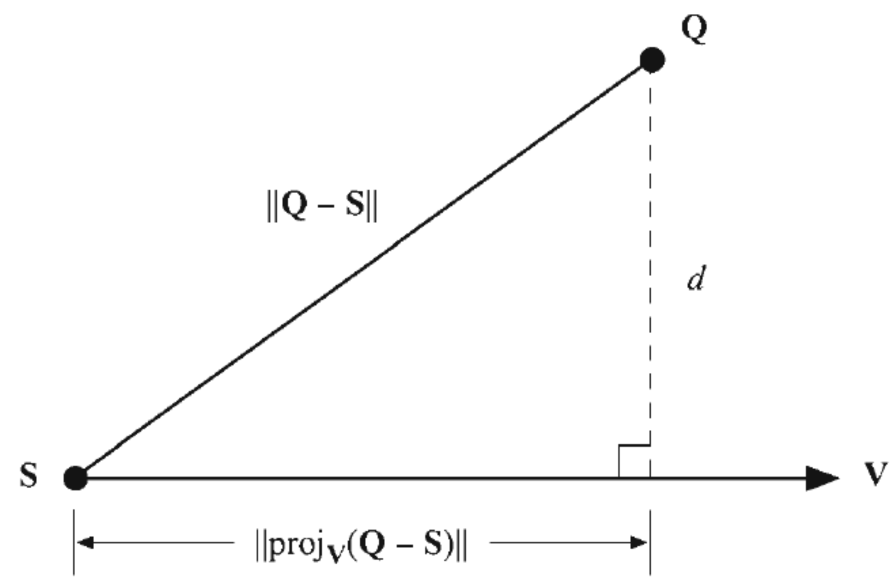
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \|\mathbf{P}\| \|\mathbf{Q}\| \cos \alpha .$$

Norme du projeté du point P sur Q : $\|\mathbf{P}\| \cos \alpha = \dfrac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}.$

Projeté du point P sur Q : $\operatorname{proj}_{\mathbf{Q}} \mathbf{P} = \dfrac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|^2} \mathbf{Q}$

Pour obtenir un vecteur de même norme et parallèle au vecteur Q, on multiplie par Q/||Q||.

Distance d'un point à une droite



Distance de Q à la droite V ?

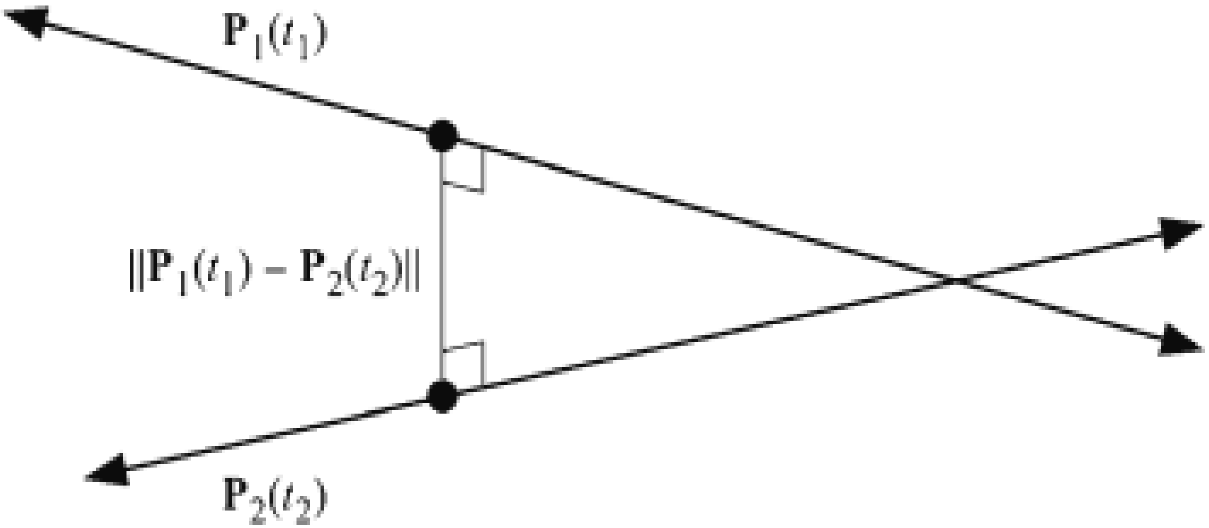
En utilisant le théorème de Pythagore :

$$d^2 = (\mathbf{Q}-\mathbf{S})^2 - [\text{proj}_\mathbf{V}(\mathbf{Q}-\mathbf{S})]^2$$
$$= (\mathbf{Q}-\mathbf{S})^2 - \left[\frac{(\mathbf{Q}-\mathbf{S})\cdot\mathbf{V}}{V^2}\mathbf{V}\right]^2.$$

donc

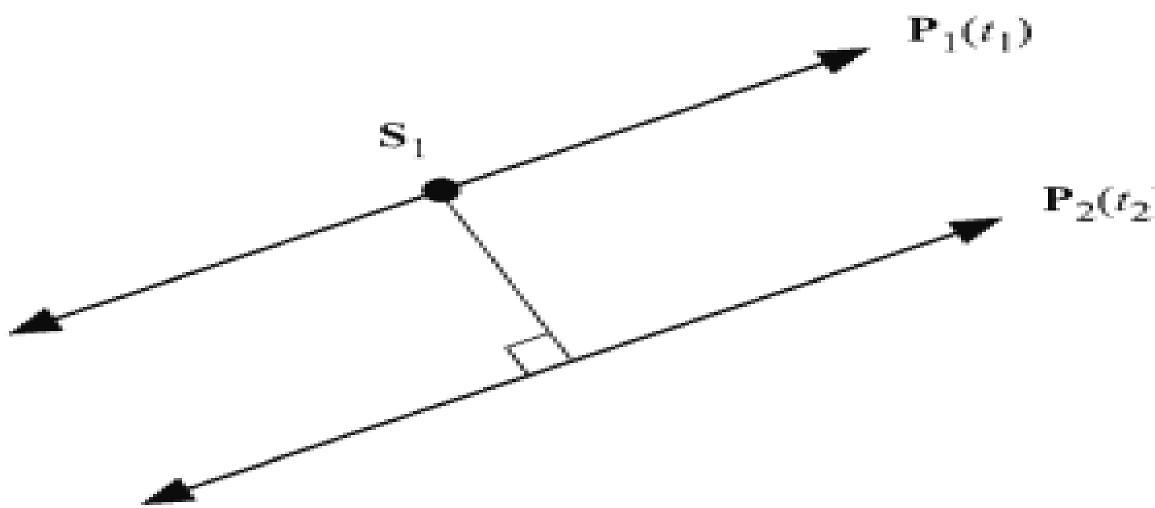
$$d = \sqrt{(\mathbf{Q}-\mathbf{S})^2 - \frac{[(\mathbf{Q}-\mathbf{S})\cdot\mathbf{V}]^2}{V^2}}.$$

Distance entre deux droites



$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1^2 & -\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 & -V_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{V}_1 \\ (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2)^2 - V_1^2 V_2^2} \begin{bmatrix} -V_2^2 & \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \\ -\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 & V_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{V}_1 \\ (\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) \cdot \mathbf{V}_2 \end{bmatrix}$$



Intersection entre une droite et un plan

Soit une droite $P(t)=S+t\,V$ et un plan $<N,D>$.

La droite intersecte le plan si $N.P(t) + D = 0$.

C'est-à-dire :

$N.(S + t\,V) + D = 0$

$N.S + t\,N.V + D = 0$

$t = -\,(N.S + D) / N.V$

Si t peut être calculé, P(t) est le point de la droite intersectant le plan.

Si $N.S+D=0$: infinité de solutions, puisque la droite est sur le plan.

Si $N.V = 0$: aucune solution, puisque la droite est parallèle au plan.

Intersection entre trois plans

Soient trois plans <N_1,D_1>, <N_2,D_2> et <N_3,D_3>.

P est le point d'intersection des trois plans s'il vérifie :

$N_1.P + D_1 = 0$ $\quad$ $N_1^TP + D_1 = 0$

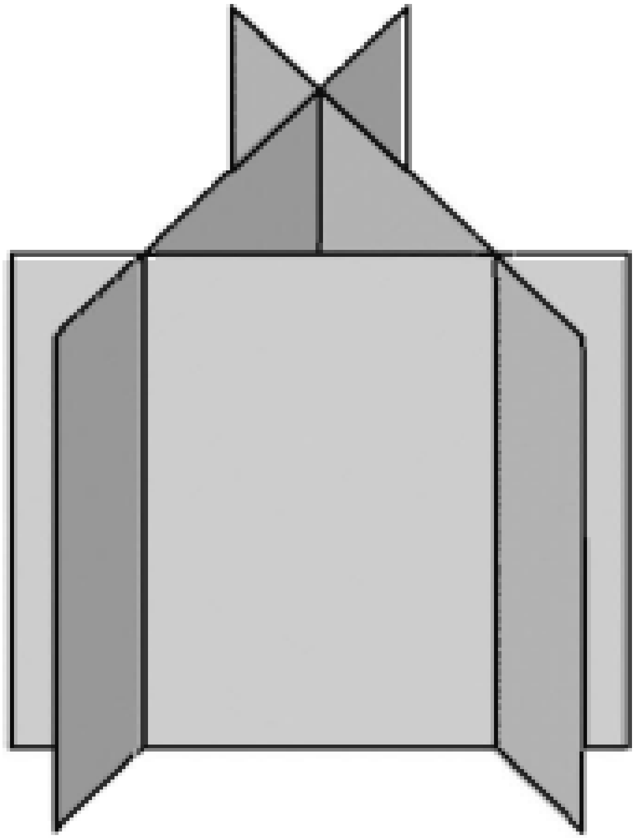
$N_2.P + D_2 = 0$ $\quad$ $N_2^TP + D_2 = 0$

$N_3.P + D_3 = 0$ $\quad$ $N_3^TP + D_3 = 0$

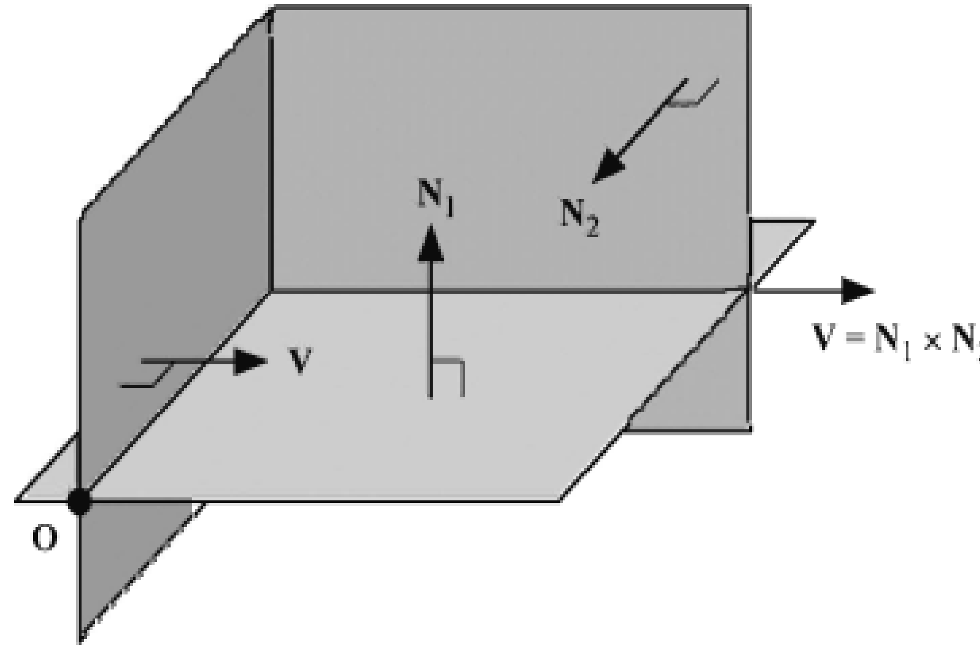
$$\begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ N_3^T \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \\ -D_3 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ N_3^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \\ -D_3 \end{pmatrix}$$ si la matrice $\begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ N_3^T \end{pmatrix}$ est inversible.

Intersection entre plans



Intersection de 3 plans.
Aucun point commun d'intersection



Intersection de deux plans en une droite de vecteur directeur V.
Un des points de cette droite est le point d'intersection avec un 3ème plan de normale V et passant par l'origine.

Intersection entre deux plans

Soient deux plans $<N_1,D_1>$, $<N_2,D_2>$ s'intersectant en une droite de vecteur directeur V.

P est le point d'intersection des deux plans s'il vérifie :

$N_1.P + D_1 = 0$ $\quad$ $N_1^TP + D_1 = 0$

$N_2.P + D_2 = 0$ $\quad$ $N_2^TP + D_2 = 0$

$V.P = 0$ $\quad$ $V^TP = 0$

$$\begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ V^T \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ V^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -D_1 \\ -D_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$ si la matrice $\begin{pmatrix} N_1^T \\ N_2^T \\ V^T \end{pmatrix}$ est inversible.