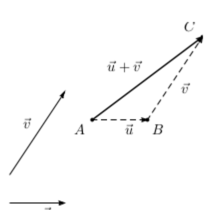
Géométrie élémentaire du plan et de l'espace

Géométrie élémentaire du plan :**Rappel**

Addition vectorielle: Rappel

Rappelons que pour former la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{V}$, il suffit de considérer trois points A, B, C de $\mathscr{P}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Le vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ est alors donné par

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Géométrie élémentaire du plan **Rappel**

Vecteurs colinéaires, unitaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{V}$ sont *colinéaires* si il existe un réel λ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ ou un réel η tel que $\vec{v} = \eta\vec{u}$.

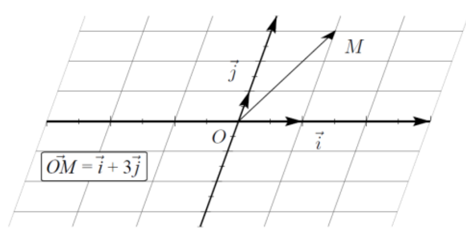
Rque : Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs du plan. Il est d'ailleurs le seul vecteur du plan à vérifier cette propriété

Vecteur unitaire ou normé

Un vecteur est dit unitaire ou normé si sa norme est 1.

Géométrie élémentaire du plan : **Modes de repérage dans le plan**

- Repères Cartésiens



Repère cartésien

Base

- Un couple de vecteur $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ de $\mathscr{V}$ est une *base* de $\mathscr{V}$ si et seulement si ces deux vecteurs sont non colinéaires.
- Une base est dite *orthogonale* si les deux vecteurs la composant sont orthogonaux.
- Elle est dite *orthonormale* si elle est orthogonale et si les deux vecteurs la composant sont de plus unitaires.

Géométrie élémentaire du plan : **Modes de repérage dans le plan**

- Caractérisation des bases du plan

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in \mathscr{V}$. Le couple $(\vec{u}, \vec{v})$ forme une base du plan si et seulement si :

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = 0 \implies \alpha = \beta = 0}$$

Repère Cartésien, Origine d'un repère, repère orthogonal, orthonormal

Un *repère cartésien* $\mathscr{R}$ du plan $\mathscr{P}$ est donné par un triplet $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$où O est un point de $\mathscr{P}$ et où $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme une base de $\mathscr{V}$.

- Le point O est l'*origine du repère*.
- Si les deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux, on dit que $\mathscr{R}$ est un *repère orthogonal*. Si ils sont de plus unitaires, le repère $\mathscr{R}$ est alors dit *orthonormal*.
- Les droites passant par O de vecteur directeur respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont appelés *axes du repère* $\mathscr{R}$ et sont notés (Ox) et (Oy).

Géométrie élémentaire du plan : **Modes de repérage dans le plan**

Repère orthonormal direct

Un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$est dit *direct* si l'angle $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

Coordonnées cartésiennes d'un vecteur, d'un point

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère du plan $\mathscr{P}$.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathscr{V}$et $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de $\mathscr{V}$. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

  Ce couple (x, y) représente les *coordonnées (ou les composantes) du vecteur* $\vec{u}$ *dans la base* $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On notera cela sous une des formes suivantes :

$$\vec{u}(x, y), \quad \vec{u}\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \quad \text{ou} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

- Soit M un point du plan $\mathscr{P}$ et $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère $\mathscr{R}$ de $\mathscr{P}$. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Ce couple (x, y) représente les *coordonnées du point* M *dans le repère* $\mathscr{R}$. De même que précédemment, on écrira :

$$M(x; y), \quad M\left|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right. \quad \text{ou} \quad M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Géométrie élémentaire du plan :**Modes de repérage dans le plan**

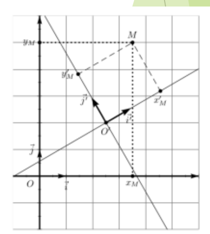
- Changement de repère

Soit M un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x', y') dans un premier repère $\mathscr{R}'$ et de coordonnées (x, y) dans un second repère $\mathscr{R}$. Soient $(x_{O'}, y_{O'})$ les coordonnées de O′ dans $\mathscr{R}$, (α,β), (γ,δ) les coordonnées respectives de $\vec{\imath}\,'$ et $\vec{\jmath}\,'$ dans $\mathscr{R}$. Les nouvelles coordonnées (x, y) de M en fonction des anciennes (x', y') sont données par les relations

$$\boxed{\begin{cases} x - x_{O'} &= \alpha x' + \gamma y' \\ y - y_{O'} &= \beta x' + \delta y' \end{cases}}$$

$$\begin{aligned} x'\vec{\imath}\,' + y'\vec{\jmath}\,' &= \overrightarrow{O'M} \\ &= \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \\ &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'} \\ &= x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - x_{O'}\vec{\imath} - y_{O'}\vec{\jmath} \\ &= (x - x_{O'})\vec{\imath} + (y - y_{O'})\vec{\jmath} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x'\vec{\imath}\,' + y'\vec{\jmath}\,' &= x'(\alpha\vec{\imath} + \beta\vec{\jmath}) + y'(\gamma\vec{\imath} + \delta\vec{\jmath}) \\ &= (\alpha x' + \gamma y')\vec{\imath} + (\beta x' + \delta y')\vec{\jmath} \end{aligned}$$



Sous forme matricielle, cette relation s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O'} \\ y_{O'} \end{pmatrix}$.

Géométrie élémentaire du plan : **Modes de repérage dans le plan**

- Changement de repère entre deux repères orthonormaux directs

Soient $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et $\mathscr{R}(O', \vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$ deux repères orthonormaux directs. Notons $\theta = \left(\widehat{\vec{\imath}, \vec{\imath}\,'}\right)$. Les nouvelles coordonnées (x, y) d'un point M du plan $\mathscr{P}$ dans le repère $\mathscr{R}$ s'expriment en fonction des anciennes (x', y') dans le repère $\mathscr{R}'$ par

$$\boxed{\begin{cases} x - x_{O'} &= \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ y - y_{O'} &= \sin\theta x' + \cos\theta y' \end{cases}}$$

où $(x_{O'}, y_{O'})$ représente les coordonnées de O′ dans le repère $\mathscr{R}$.

$$\begin{cases} \vec{\imath}\,' = \cos\theta\vec{\imath} + \sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{\jmath}\,' = -\sin\theta\vec{\imath} + \cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

Équation cartésienne

Soit $\mathscr{R}$ $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère. Une équation $F(x, y) = 0$ est une *équation cartésienne* d'une partie $\mathscr{A}$ du plan si on a l'équivalence

$$M(x, y) \in \mathscr{A} \Leftrightarrow F(x, y) = 0.$$

Exemple

- $y - x - 1 = 0$ est la droite affine dirigée par le vecteur $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et passant par le point de coordonnées $(0, 1)$.
- $x^2 + y^2 - 1 = 0$ est une équation du cercle de centre O et de rayon 1.

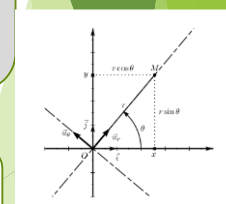
Géométrie élémentaire du plan :**Modes de repérage dans le plan**

- Repères polaires

Soit $\mathscr{R}(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$un repère orthonormal direct. Soit θ un réel. Soit $\mathscr{R}(\theta)$ le repère $(\mathrm{O}, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ image de $\mathscr{R}$ par une rotation de centre O et d'angle θ. Ce repère, qui est encore orthonormal direct, est le *repère polaire* attaché au réel θ. De plus

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{\imath} + \cos\theta\,\vec{\jmath} \end{cases}}.$$

Le point O est appelé le *pôle* et la droite orientée $(\mathrm{O}, \vec{\imath})$ est appelée l'*axe polaire* de ce repère.



Coordonnées polaires d'un point

On rapporte le plan $\mathscr{P}$ à un repère orthonormal direct $\mathscr{R}(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On dit que $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$ est un couple de *coordonnées polaires* pour le point $\mathrm{M}(x, y)$ ø, $\mathscr{P}$ si et seulement si $\boxed{\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}}$

Géométrie élémentaire du plan :**Modes de repérage dans le plan**

- Comment calculer les coordonnées polaires d'un point à partir de ses coordonnées cartésiennes

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{P}$ *de coordonnées cartésiennes* (x, y) *dans un repère orthonormal direct* $\mathscr{R}$ *tel que* $x \neq 0$. *Un couple de coordonnées polaires pour* M *est donné par* (r, θ) *avec*

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{et} \quad r = \frac{x}{\cos\theta}.$$

Équation polaire

Soit $\mathscr{R}$ $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un repère orthonormal direct. Une équation $\mathrm{F}(r, \theta) = 0$ est une *équation polaire* d'une partie $\mathscr{A}$ du plan lorsqu'un point M appartient à $\mathscr{A}$ si et seulement si l'un des couples de coordonnées polaires (r, θ) de M vérifie $\mathrm{F}(r, \theta) = 0$.

Exemple

- $\theta = 0$ est l'axe $(\mathrm{O}, \vec{\imath})$ de $\mathscr{R}$.
- $r = 1$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Géométrie élémentaire du plan :**Produit scalaire**

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan $\mathscr{V}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$ (on rencontrera aussi les notations $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ ou encore $(\vec{u}\mid\vec{v})$) est défini, de manière géométrique, par :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \text{ si les deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ \vec{u}.\vec{v} = 0 \text{ sinon.} \end{cases}}$$

Remarque $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|.\|\vec{u}\|\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}}\right) = \|\vec{u}\|^2$. En résumé, $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$.

Proposition : Deux vecteurs u et v de V sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = \pi/2\ [\pi]$ *et* $\cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 0$

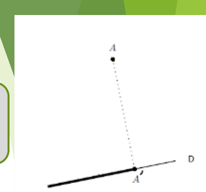
Mesure algébrique

Soit D une droite de $\mathscr{P}$ orientée par un vecteur unitaire $\vec{u}$. Soient A et B deux points distincts de D. La mesure algébrique $\overline{AB}$ est l'unique réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{u}$.

Géométrie élémentaire du plan :**Produit scalaire**

- **Projection orthogonale**

Soit D une droite et soit A un point du plan $\mathscr{P}$. Il existe un unique point A' de D tel que le vecteur AA' soit orthogonal à la droite D. Ce point est appelé le *projeté orthogonal* de A sur D.



Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est *symétrique* : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$.

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ *et* $\vec{v}.\vec{u} = \|\vec{v}\|\,\|\vec{u}\|\cos(\widehat{\vec{v},\vec{u}})$

la fonction cosinus est paire.

Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormale et soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées $\vec{u}\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix}x'\\y'\end{vmatrix}$ dans cette base.

Alors $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

$$\begin{aligned}\vec{u}.\vec{v} &= (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}).(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= x\vec{\imath}.(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})+y\vec{\jmath}.(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})\\ &= x.x'\vec{\imath}.\vec{\imath}+xy'\vec{\imath}.\vec{\jmath}+yx'\vec{\jmath}.\vec{\imath}+yy'\vec{\jmath}\vec{\jmath}\end{aligned}$$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath} = 0 \quad \vec{\jmath}.\vec{\jmath} = \|\vec{\jmath}\|.\|\vec{\jmath}\| = 1,$

$\vec{\imath}.\vec{\imath} = \|\vec{\imath}\|.\|\vec{\imath}\| = 1$

Géométrie élémentaire du plan :**Produit scalaire**

- **Expression de la norme**

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base orthonormale. Soient $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ dans cette base. Alors

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Si $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormal et que A et B sont deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ dans ce repère alors

$$\boxed{AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

Géométrie élémentaire du plan :**Produit scalaire**

- Interprétation en termes de nombres complexes

Un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ étant fixé, on peut identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{C}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives z et z', alors

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{Re}(\bar{z}.z').}$$

Géométrie élémentaire du plan :**Déterminant**

Le *déterminant* de deux vecteurs du plan $\mathscr{V}$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ est défini, de manière géométrique, par :

$$\boxed{\begin{cases} \det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) & \text{si les deux vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non nuls} \\ \det(\vec{u},\vec{v}) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}}$$

Proposition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\boxed{\det(\vec{u},\vec{v}) = 0}$.

Propriétés du déterminant

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 0\ [\pi]$ *et* $\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right) = 0$.

$\det(\vec{u},\vec{u}) = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{u}\|\sin\left(\widehat{\vec{u},\vec{u}}\right) = 0.$

Le déterminant est *antisymétrique* : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors $\boxed{\det(\vec{u},\vec{v}) = -\det(\vec{v},\vec{u})}$.

Géométrie élémentaire du plan :**Déterminant**

- Déterminant dans une base orthonormale directe

Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base orthonormale directe et soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées $\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ et $\vec{v}\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix}$ dans cette base. Alors

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx'$$

On notera $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$ le déterminant $\det(\vec{u},\vec{v})$. On a donc

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y}$$

Interprétation en terme de nombres complexes

Un repère orthonormal direct $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ étant fixé, on peut identifier $\mathscr{V}$ et $\mathbb{C}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour affixes respectives z et z', alors

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v}) = \operatorname{Im}(\bar{z}.z').}$$

Géométrie élémentaire du plan : **Droites**

- **Représentation paramétrique d'une droite**

Soit $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan passant par un point A de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathscr{R}$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$. D admet comme *représentation paramétrique* :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases} ; t \in \mathbb{R}}$$

Si $M(x, y) \in D$ *alors les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\vec{u}$ *sont colinéaires. Il existe donc un réel* t *tel que* $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$

Équation cartésienne d'une droite

Soient $\mathscr{R}(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal du plan, α, β, c trois réels tels que α et β ne sont pas tous deux nuls.

1. La droite D passant par le point A de coordonnées (x_A, y_A) dans $\mathscr{R}$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}\begin{vmatrix}-\beta\\ \alpha\end{vmatrix}$ admet une équation cartésienne de la forme
$$\boxed{\alpha x + \beta y + c = 0}.$$
2. Réciproquement, l'ensemble des points du plan d'équation $\alpha x + \beta y + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{vmatrix}-\beta\\ \alpha\end{vmatrix}$.
3. Deux telles équations représentent deux droites confondues si et seulement si elles sont proportionnelles.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in D &\Longrightarrow \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0 \\ &\Longrightarrow \begin{vmatrix} -\beta & x - x_A \\ \alpha & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow -\left(\alpha(x - x_A)) + \beta(y - y_A)\right) = 0 \\ &\Longrightarrow \alpha x + \beta y = -(\alpha x_A + \beta y_A) \end{aligned}$$

Géométrie élémentaire du plan : **Droites**

- **Vecteur normal à une droite**

Soit D une droite du plan et $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de D.

$\vec{n}$ est un *vecteur normal* à D.

Équation d'une droite définie par un point et un vecteur normal

Un repère orthonormal étant fixé, la droite D passant par le point $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}\,(\alpha, \beta)$ a pour équation $\boxed{\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0}$.

$M(x, y)$ *un point du plan.* $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, $\alpha(x - x_A) + \beta(y - y_A) = 0$

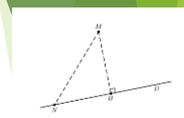
Proposition

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, on considère une droite D d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + c = 0$. Alors le vecteur $\boxed{\vec{u}\,(-\beta, \alpha)}$ est un vecteur directeur de D et $\boxed{\vec{v}\,(\alpha, \beta)}$ est un vecteur normal à D.

Géométrie élémentaire du plan :**Droites**

- **Distance d'un point à une droite**

Soit D une droite et M un point du plan. On appelle *distance de* M *à* D et on note $d(\mathrm{M},\mathrm{D})$ la plus petite distance entre M et un point de D.



Soit $\mathscr{R}$ $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormal direct du plan. Soit D une droite du plan :

- passant par un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, y_\mathrm{A})$
- de vecteur normal $\vec{n}$
- de vecteur directeur $\vec{u}$
- et d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$.

Soit $\mathrm{M}(x_\mathrm{M}, y_\mathrm{M})$ un point du plan, alors

$$\boxed{d(\mathrm{M},\mathrm{D}) = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \vec{u}\right)\right|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_\mathrm{M} + by_\mathrm{M} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: Préambule

- **Vecteurs coplanaires**

Trois vecteurs non nuls sont *coplanaires* si l'un des trois est élément du plan engendré par les deux autres (ou ce qui est équivalent si l'un de trois est combinaison linéaire des deux autres).

Base de l'espace

Un triplet de vecteurs de $\mathscr{V}$: $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une *base* de $\mathscr{V}$ si il est formé de trois vecteurs non coplanaires.

Coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathscr{V}$. Tout vecteur $\vec{x}$ de $\mathscr{V}$ s'exprime comme une combinaison linéaire unique des 3 vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathscr{V}, \quad \exists!(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$$

Le triplet (α,β,γ) est appelé *coordonnées* de $\vec{x}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. On notera :

$$\vec{x}\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right. \text{ ou } \vec{x}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \text{ ou aussi } \vec{x}(\alpha,\beta,\gamma)$$

Géométrie élémentaire de l'espace: Préambule

- Base orthogonale, orthonormale

Soit $\mathscr{B}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une base de $\mathscr{V}$. Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont deux à deux orthogonaux, on dit que la base $\mathscr{B}$ est *orthogonale*. Si ils sont de plus unitaires, on dit que $\mathscr{B}$ est *orthonormale*.

Orientation d'un plan dans l'espace

Étant donnés un plan $\mathscr{P}$ et un vecteur normal $\vec{n}$ à ce plan, il existe une unique orientation du plan $\mathscr{P}$ telle que pour toute base orthonormale directe $(\vec{u}, \vec{v})$ de ce plan, le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ forme une base orthonormale directe de $\mathscr{E}$. On dit que le *plan* $\mathscr{P}$ *est orienté par* $\vec{n}$.

Géométrie élémentaire de l'espace: **Mode de repérage dans l'espace**

Coordonnées d'un point dans un repère cartésien

Soit $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère cartésien de l'espace. Soit $M \in \mathscr{E}$ un point de l'espace. Il existe un unique triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$. Ce triplet s'appelle les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$. On le note :

$$M\left|\begin{matrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{matrix}\right. \text{ ou } M\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} \text{ ou aussi } M(\alpha, \beta, \gamma)$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Mode de repérage dans l'espace**

- Calculs avec les coordonnées

Soit $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère cartésien de l'espace. Soient $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ des vecteurs de coordonnées, dans $\mathscr{R}$:

$$\vec{u}\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}'\begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix}$$

Soient $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$. Les coordonnées du vecteur $\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}'$ sont :

$$\boxed{\alpha\vec{u} + \beta\vec{u}'\begin{vmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \alpha' y' \\ \alpha z + \alpha' z' \end{vmatrix}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Mode de repérage dans l'espace**

- Norme d'un vecteur

Soit $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\vec{u}\,(x, y, z)$ dans la base associée à ce repère. On a :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

corollaire

Soient $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère *orthonormal* de l'espace, $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$ des points de l'espace alors

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + (z_B - z_A)^2}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Produit scalaire**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient O, A, B trois points de $\mathscr{E}$ tel que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\mathscr{P}$ la plan contenant ces 3 points. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ leur produit scalaire dans le plan $\mathscr{P}$. En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on a

$$\vec{u}.\vec{v} = (\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$$

où θ est une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ dans le plan $\mathscr{P}$.

Deux vecteurs non nuls de $\mathscr{V}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Expression dans une base orthonormale

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Produit scalaire**

Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soient $\mathscr{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace, (x, y, z) et (x', y', z') les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{R}$. On a

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

- Propriétés du produit scalaire

Le produit scalaire est *symétrique* : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$ alors :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Produit vectoriel**

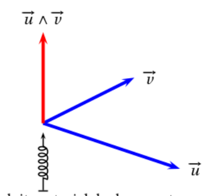
On suppose qu'on a choisi une orientation de l'espace. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathscr{V}$. Soient $\mathscr{P}$ un plan de l'espace contenant ces deux vecteurs et $\overrightarrow{k}$ un vecteur normal **unitaire** à $\mathscr{P}$. Fixant $\overrightarrow{k}$, on fixe une orientation de $\mathscr{P}$. On appelle *produit vectoriel* de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$, donné par

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\, \overrightarrow{k}.$$

Norme du produit vectoriel de deux vecteurs

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{V}$:

$$\boxed{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = |\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})| = \|\overrightarrow{u}\| . \|\overrightarrow{v}\| . \left|\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})\right|}$$



Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace

Géométrie élémentaire de l'espace: **Produit vectoriel**

- **Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs via le produit vectoriel :**

Deux vecteurs de V sont colinéaires si et seulement si leur produit vectoriel est nul

- **Propriétés du produit vectoriel**

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont éléments de $\mathscr{V}$ alors

$$\boxed{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u} = -\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}$$

Le produit vectoriel est antisymétrique

Géométrie élémentaire de l'espace: **Produit vectoriel**

- **Expression dans une base orthonormale directe**

Soit $\mathscr{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de $\mathscr{V}$ de coordonnées respectives (x,y,z) et (x',y',z') dans $\mathscr{B}$. Les coordonnées (X,Y,Z) de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont données par :

$$\boxed{X=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}} \quad \boxed{Y=\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}} \quad \boxed{X=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{vmatrix} yz'-y'z \\ zx'-z'x \\ xy'-x'y \end{vmatrix}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Déterminant ou produit mixte**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $\mathscr{V}$. On appelle *déterminant* ou *produit mixte* de ces trois vecteurs le nombre réel, noté $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ ou $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$, et donné par :

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=(\vec{u}\wedge\vec{v}).\vec{w}}$$

Expression dans une base orthonormale directe

Soit $\mathscr{B}(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ une base orthonormale directe de $\mathscr{V}$. Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$ et soient (x,y,z), (x',y',z') et (x'',y'',z'') leurs coordonnées respectives dans cette base. Alors :

$$\boxed{\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x''\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}-y''\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}+z''\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Déterminant ou produit mixte**

- Propriétés du produit mixte

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$.

- On change le signe du produit mixte de trois vecteurs en permutant deux de ces trois vecteurs :

$$\det(\vec{v},\vec{u},\vec{w}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (1)$$

$$\det(\vec{u},\vec{w},\vec{v}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (2)$$

$$\det(\vec{w},\vec{v},\vec{u}) = -\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) \quad (3)$$

- Le produit mixte est invariant par permutation circulaire

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \det(\vec{v},\vec{w},\vec{u}) = \det(\vec{w},\vec{u},\vec{v}) \quad (4)$$

On résume ces trois propriétés en disant que le produit mixte est *antisymétrique*.

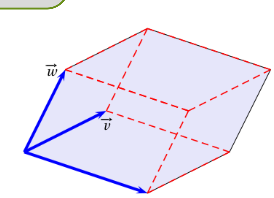
Géométrie élémentaire de l'espace: **Déterminant ou produit mixte**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$. Si deux de ces trois vecteurs sont égaux alors le produit mixte de ces trois vecteurs $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est nul.

Interprétation du produit mixte en terme de volume

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathscr{V}$. Notons $\mathcal{V}$ le volume du parallélépipède $\mathscr{P}$ construit à partir de ces 3 vecteurs. On a :

$$\boxed{\mathcal{V} = |\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})|}$$



Géométrie élémentaire de l'espace: **Plans dans l'espace**

- Représentation paramétrique des plans

Soit $\mathcal{R}\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace $\mathcal{E}$. Soient : $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{E}$, $\vec{u}\,(x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}}, z_{\vec{u}})$ et $\vec{v}\,(x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}}, z_{\vec{v}})$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Soient $M(x, y, z)$ un point de l'espace et $\mathcal{P}$ le plan affine passant par A et engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On a équivalence entre :

1. M est élément de $\mathcal{P}$
2. il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
3. il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + \alpha x_{\vec{u}} + \beta x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \alpha y_{\vec{u}} + \beta y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}} \end{cases}$$

Le système

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + \alpha x_{\vec{u}} + \beta x_{\vec{v}} \\ y = y_A + \alpha y_{\vec{u}} + \beta y_{\vec{v}} \\ z = z_A + \alpha z_{\vec{u}} + \beta z_{\vec{v}} \end{cases}}$$

est une *équation paramétrique* de $\mathcal{P}$.

Géométrie élémentaire de l'espace: **Plans dans l'espace**

- Représentation cartésienne

Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathcal{E}$ Soit A un point de $\mathcal{P}$ et $(\vec{u}, \vec{v})$ un couple de vecteurs engendrant $\mathcal{P}$. On a équivalence entre :

1. le point M est élément de $\mathcal{P}$.
2. le produit mixte $\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est nul.

Corollaire

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $C(x_C, y_C, z_C)$ trois points non alignés de l'espace $\mathcal{E}$. Alors $M(x, y, z) \in \mathcal{E}$ est élément du plan affine $\mathcal{P}$ passant par A, B et C si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & x_B - x_A & x_C - x_A \\ y - y_A & y_B - y_A & y_C - y_A \\ z - z_A & z_B - z_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Plans dans l'espace**

- Équation cartésienne d'un plan

- Soit $\mathscr{P}$ un plan affine passant par un point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace $\mathscr{E}$ et admettant le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ comme vecteur normal alors une équation cartésienne de $\mathscr{P}$ est

$$\boxed{a(x-x_A)+b(y-y_A)+c(z-z_A)=0}$$

- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation $ax+by+cz=d$ où a, b, c, d sont des réels et où a, b, c ne sont pas tous nuls est un plan affine de vecteur normal $\boxed{\vec{n}(a,b,c)}$.

Équation normale d'un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine d'équation $ax+by+cz=d$. Comme dit plus haut, le vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}$. Si ce vecteur est de plus unitaire, c'est à dire si

$$\|\vec{n}\|^2 = a^2+b^2+c^2 = 1$$

alors l'équation $ax+by+cz=d$ est appelée équation normale de $\mathscr{P}$.

Géométrie élémentaire de l'espace: **Plans dans l'espace**

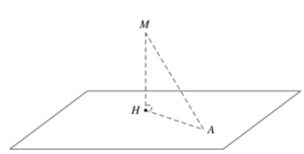
- PROPOSITION

Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans de l'espace de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont sécants alors leur intersection est une droite de vecteur directeur $\vec{n} \wedge \vec{n}'$.

Distance d'un point à un plan

Soit $\mathscr{P}$ un plan affine de vecteur normal $\vec{n}$. Soit M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$. On appelle *distance du point* M *au plan* $\mathscr{P}$ la distance MH. On la note : $d(M, \mathscr{P})$. C'est la plus petite distance du point M à un point A de $\mathscr{P}$:

$$\forall A \in \mathscr{P}, \quad d(M, \mathscr{P}) = HM \leqslant AM.$$



Géométrie élémentaire de l'espace: **Plans dans l'espace**

- Deux méthodes de calcul de la distance d'un point à un plan
  - Quand le plan est donné par un point et deux vecteurs directeurs

Soit $\mathscr{P}$ un plan défini passant par un point A, engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et de vecteur normal $\vec{n}$. Soit M un point de l'espace. On a

$$\boxed{d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\left|(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|} = \frac{\left|\det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)\right|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}}$$

  - Quand le plan est donné par une équation cartésienne

On rapporte le plan à un repère orthonormal $\mathscr{R}$. Soient $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $\mathrm{M}(x_\mathrm{M},y_\mathrm{M},z_\mathrm{M})$ un point de l'espace. On a

$$\boxed{d(\mathrm{M},\mathscr{P}) = \frac{\left|ax_\mathrm{M}+by_\mathrm{M}+cz_\mathrm{M}+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

Géométrie élémentaire de l'espace: **Droites dans l'espace**

- Représentation paramétrique d'une droite

Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de l'espace. Soit $\mathscr{D}$ une droite passant par un point $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},y_\mathrm{A},z_\mathrm{A})$ et de vecteur directeur $\vec{u}(x_{\vec{u}},y_{\vec{u}},z_{\vec{u}})$. Une équation paramétrique de $\mathscr{D}$ est :

$$\boxed{\begin{cases} x = x_\mathrm{A} + t x_{\vec{u}} \\ y = y_\mathrm{A} + t y_{\vec{u}} \\ z = z_\mathrm{A} + t z_{\vec{u}} \end{cases}}$$

Représentation cartésienne

Soit $\mathscr{R}$ un repère orthonormal de l'espace. On se donne des réels a,b,c,d et a',b',c',d' tels que les triplets (a,b,c) et (a',b',c') sont non nuls et non proportionnels. L'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient le système

$$(\star)\quad \boxed{\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}}$$

est une droite de vecteur directeur $\boxed{\vec{n}\wedge\vec{n}'}$ où $\vec{n}(a,b,c)$ et $\vec{n}'(a',b',c')$.
Réciproquement, toute droite admet au moins un système d'équations de ce type.

Géométrie élémentaire de l'espace: **Droites dans l'espace**

- Distance d'un point à une droite

Soit $\mathscr{D}$ une droite de l'espace passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit M un point de l'espace. On a

$$\boxed{d(\mathrm{M},\mathscr{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$$

Calcul de la distance entre deux droites non parallèles

Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites non parallèles de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$, passant respectivement par les points M et M'. On a :

$$\boxed{d(\mathscr{D},\mathscr{D}') = \frac{\left|\det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u}',\overrightarrow{\mathrm{MM}'}\right)\right|}{\left\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\right\|}}$$