MV52
Synthèse d'images

CM #4

Transformations géométriques
Vue et *Projection*

Fabrice LAURI
fabrice.lauri@utbm.fr

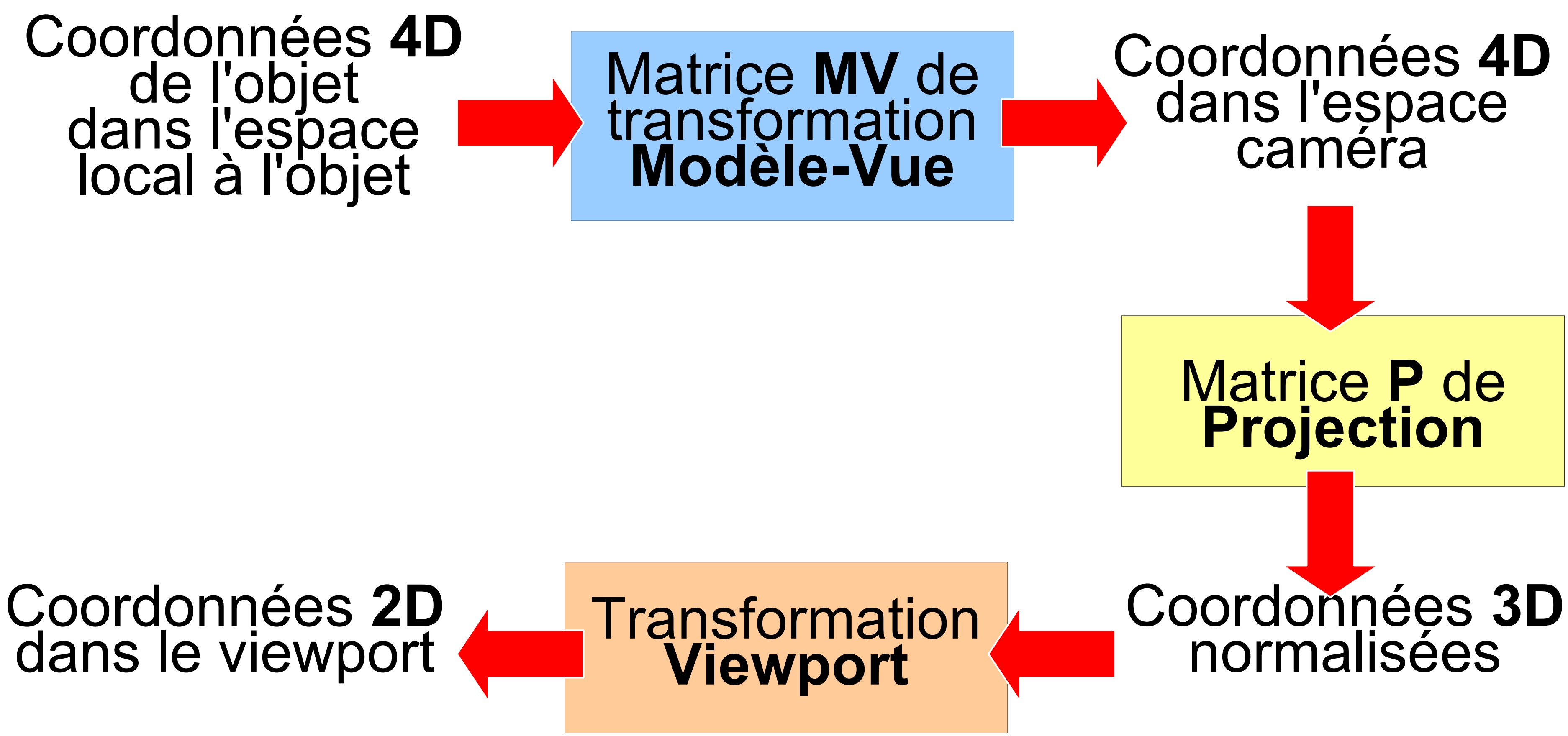
Plan du cours

- **Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D**
- **Matrice Vue**
- **Types de projections**
- **Projections perspectives**
- **Projections orthogonales**

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Matrice Vue
- Types de projections
- Projections perspectives
- Projections orthogonales

Séquence des transformations appliquées à un objet



Séquence des transformations appliquées à un objet

Coordonnées **4D** de l'objet dans l'espace local à l'objet → Matrice **MV** de transformation **Modèle-Vue** → Coordonnées **4D** dans l'espace caméra

$$\begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix} = MV \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \\ z_o \\ w_o \end{pmatrix}$$

Séquence des transformations appliquées à un objet

$$\begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

Coordonnées **4D** dans l'espace caméra

Matrice **P** de **Projection**

$$\begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c / w_c \\ y_c / w_c \\ z_c / w_c \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ w_c \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ w_e \end{pmatrix}$$

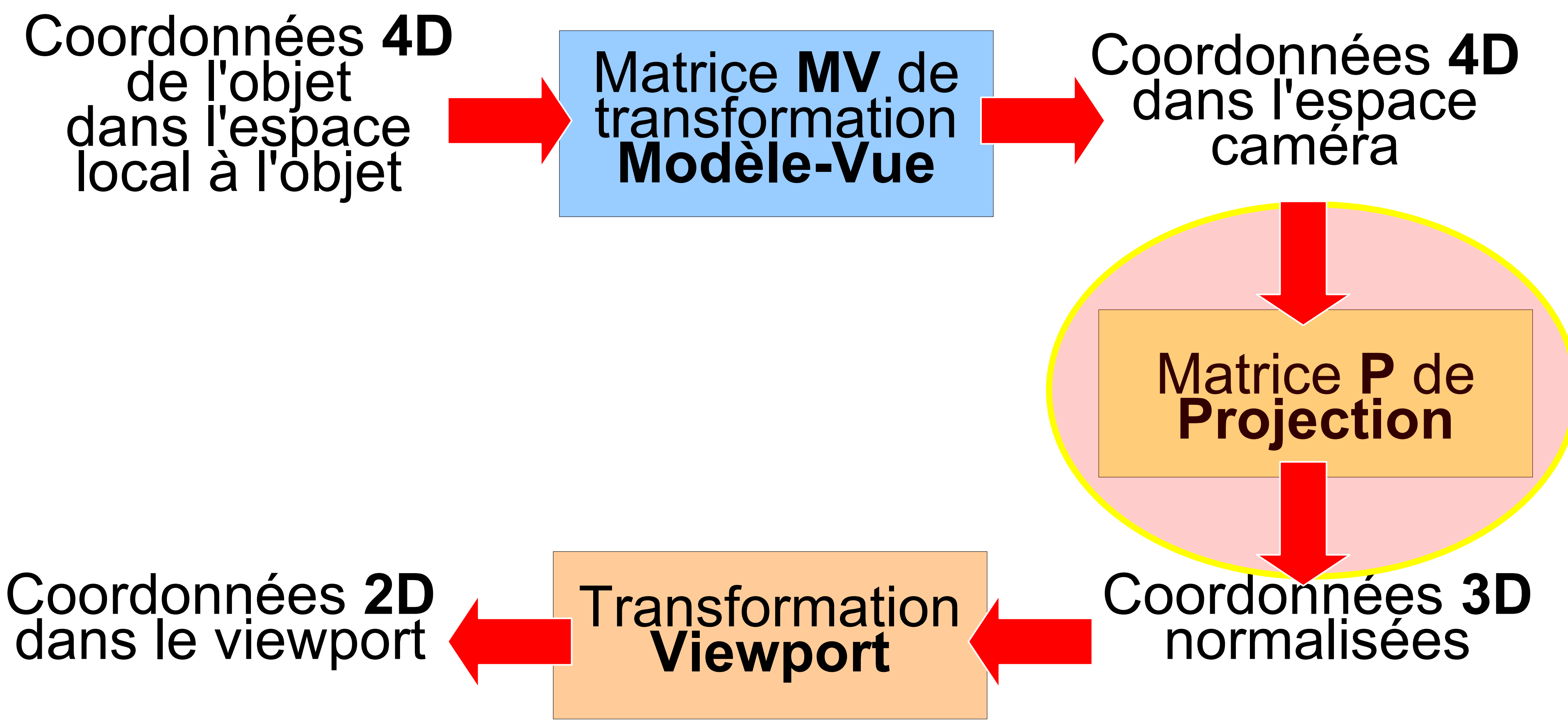
Coordonnées **3D** normalisées

Séquence des transformations appliquées à un objet

$$\begin{pmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p_x/2)\,x_d + o_x \\ (p_y/2)\,y_d + o_y \\ [(b_f - b_n)/2]\,z_d + (b_f + b_n)/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x_d \\ y_d \\ z_d \end{pmatrix}$$

Coordonnées **2D** dans le viewport ← Transformation **Viewport** ← Coordonnées **3D** normalisées

Séquence des transformations appliquées à un objet



Plan du cours

- **Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D**
- **Matrice Vue**
- **Types de projections**
- **Projections perspectives**
- **Projections orthogonales**

La Matrice Vue

La matrice Vue V (matrice 4x4), se définit à partir de la position P (vecteur 3D) de la caméra et de son orientation R (matrice 3x3).

Lorsque V est appliquée sur P (en coordonnées homogènes), les coordonnées obtenues sont à l'origine, c'est-à-dire que : V $\begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sous ces hypothèses et pour vérifier ce résultat :

$$V = \begin{pmatrix} R & -RP \\ 0^T & 1 \end{pmatrix}$$

Car :

$$V\,P = \begin{pmatrix} R & -RP \\ 0^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RP - RP \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

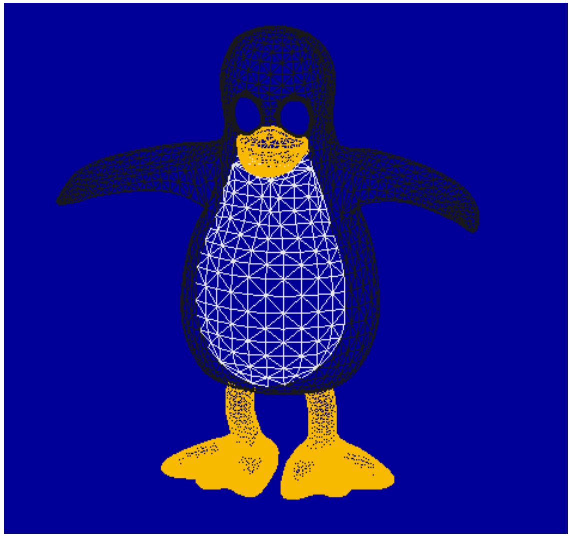
où 0 représente ici un vecteur colonne 3D ; 1 est un scalaire.

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Matrice Vue
- Types de projections
- Projections perspectives
- Projections orthogonales

La projection

- La visualisation d’une scène 3D sur un écran nécessite le passage d'un espace 3D à un espace 2D : c’est le rôle de la **projection**.
- Projection d’un objet = projection de l’ensemble de ses vertices sur un plan.



Types de projection

Projections perspectives

- 1 point de fuite
- 2 points de fuite
- 3 points de fuite

Projections parallèles

Projections orthographiques

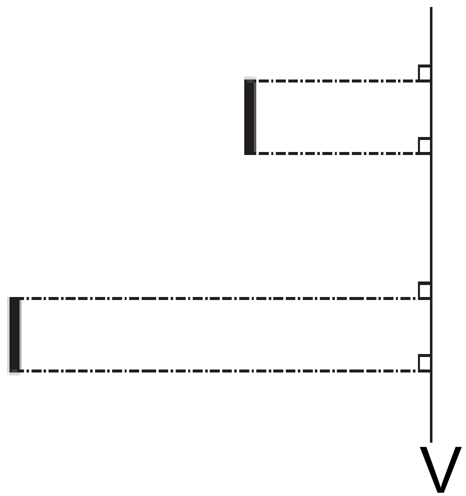
Orthogonales
(Vue selon un axe du repère)

- Isométriques
- Dimétriques
- Trimétriques

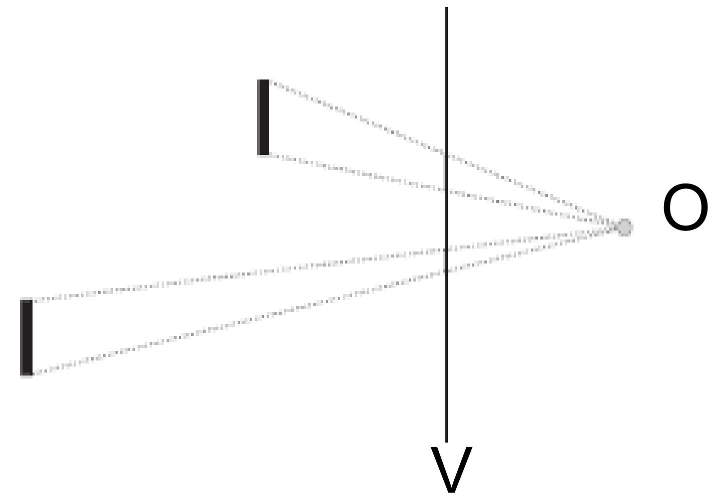
Projections obliques

- Cavalière
- Cabinet

Types de projection



Projection parallèle
selon une
direction de projection



Projection perspective
selon un
centre de projection

Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Matrice Vue
- Types de projections
- Projections perspectives
- Projections orthogonales

La projection perspective

Effet visuel similaire au système visuel humain.

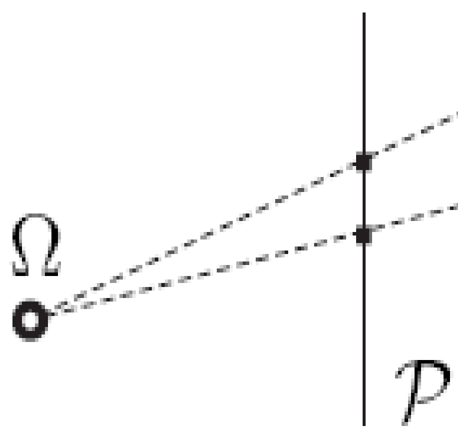
L'image P' d'un point P par une projection en perspective de centre O sur le plan V est l'intersection de la droite OP passant par V.

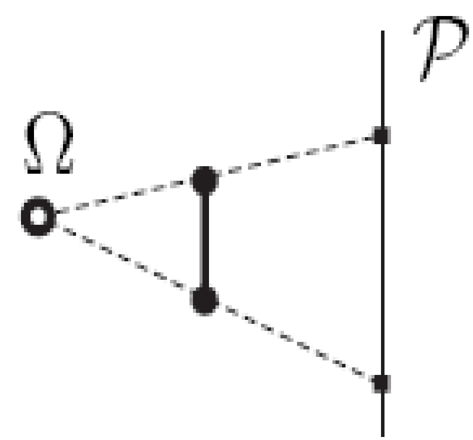
Coordonnées du projeté d'un point ?

La projection perspective

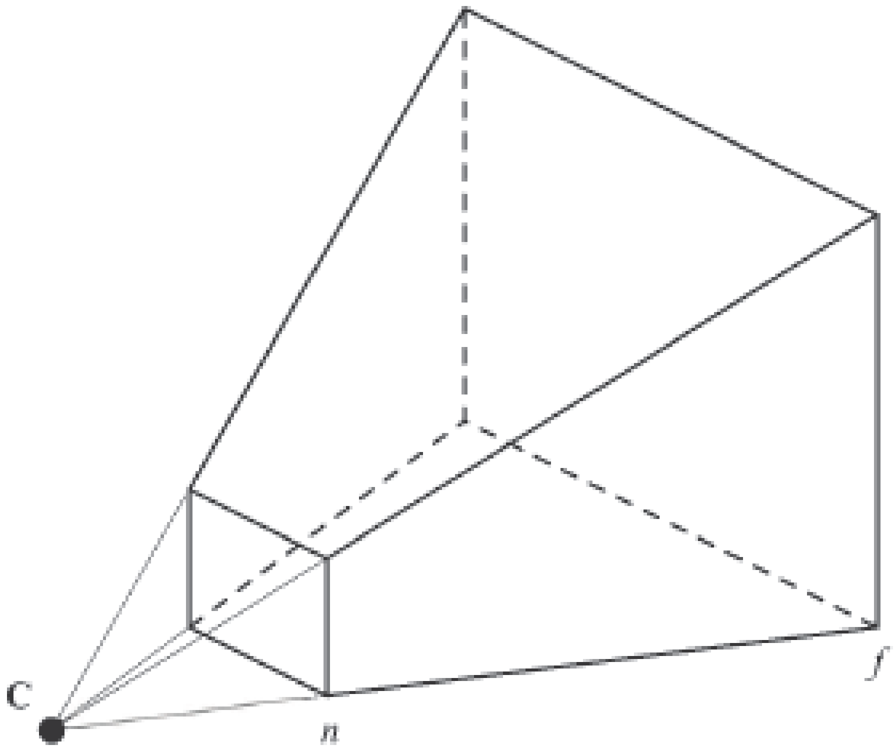
Propriétés

- Deux droites parallèles dans la scène ne le sont plus après une projection perspective
- La taille d'un objet est inversement proportionnelle à sa distance au centre de projection :

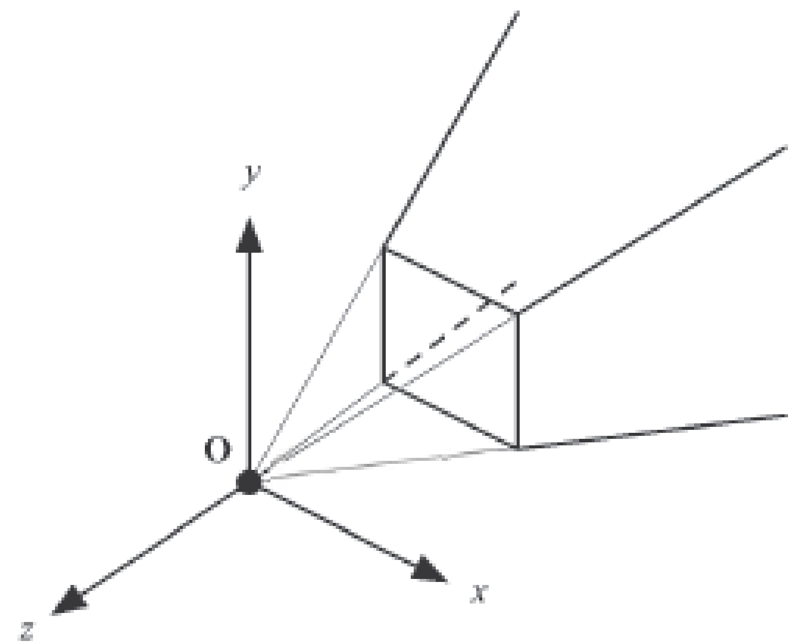




Pyramide de vision (*View frustum*)

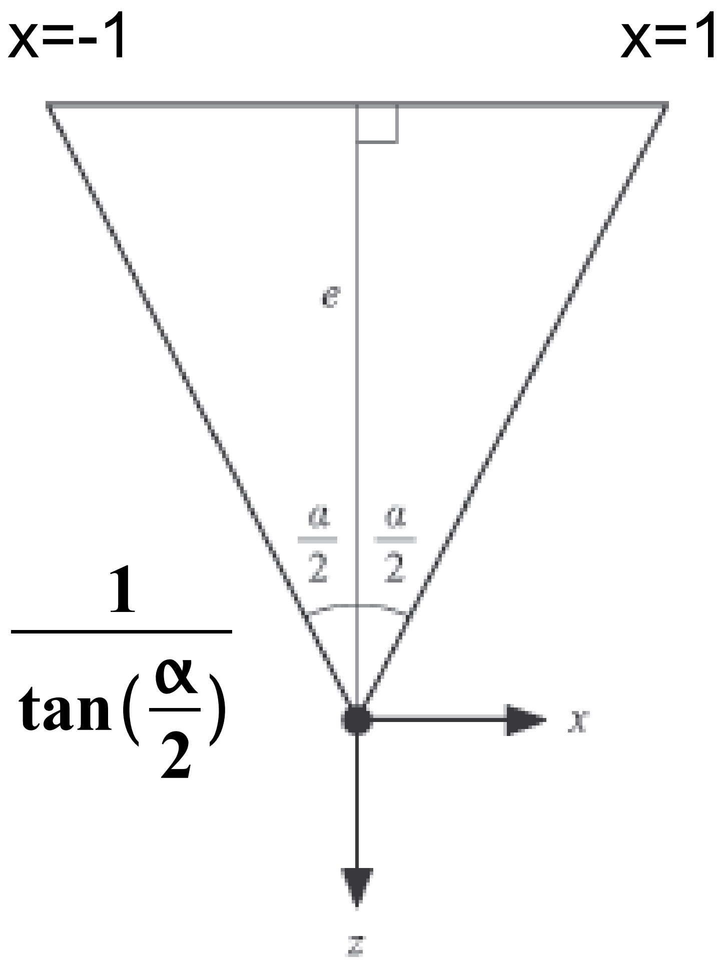


Pyramide de vision

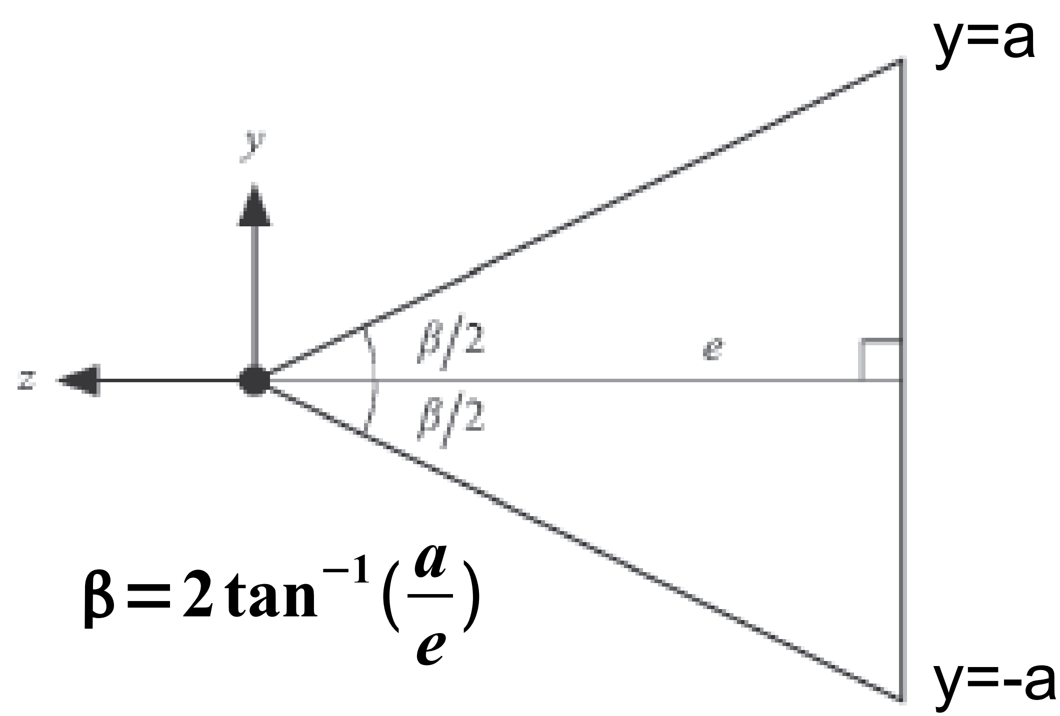


Espace camera dans OpenGL

Plan de projection



$$e = \frac{1}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$$

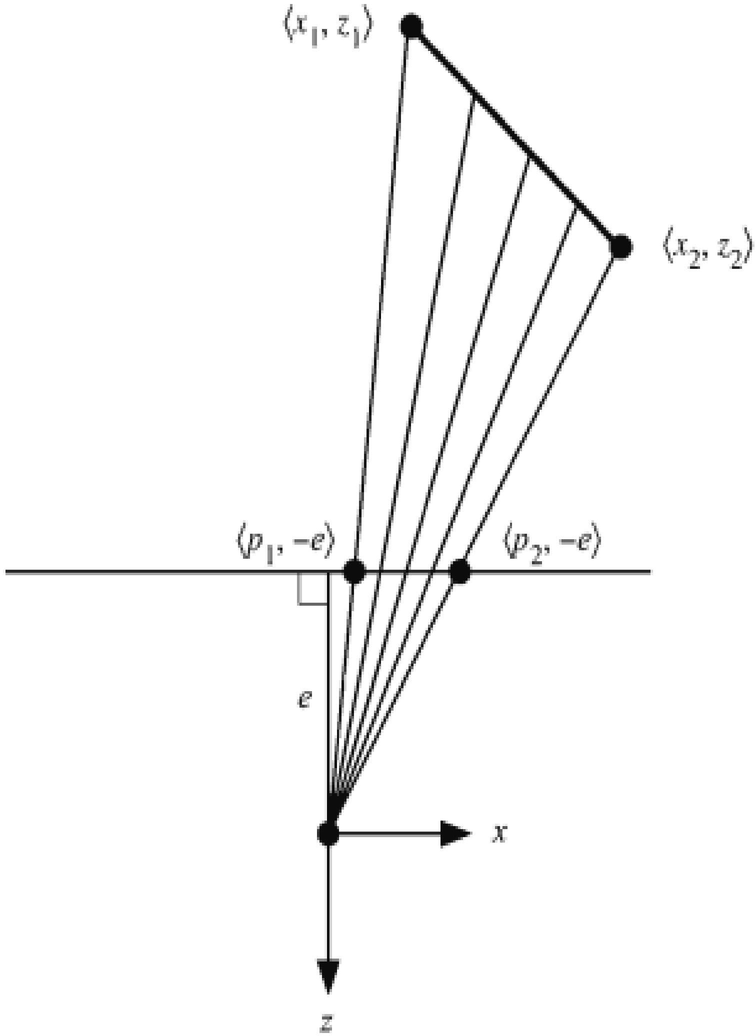


$$\beta = 2\tan^{-1}(\frac{a}{e})$$

e : longueur focale de la caméra
α : angle du champs de vision horizontal
β : angle du champs de vision vertical

a : *aspect ratio*
= height / width

Interpolation correcte en projection perspective



Interpolation non linéaire :

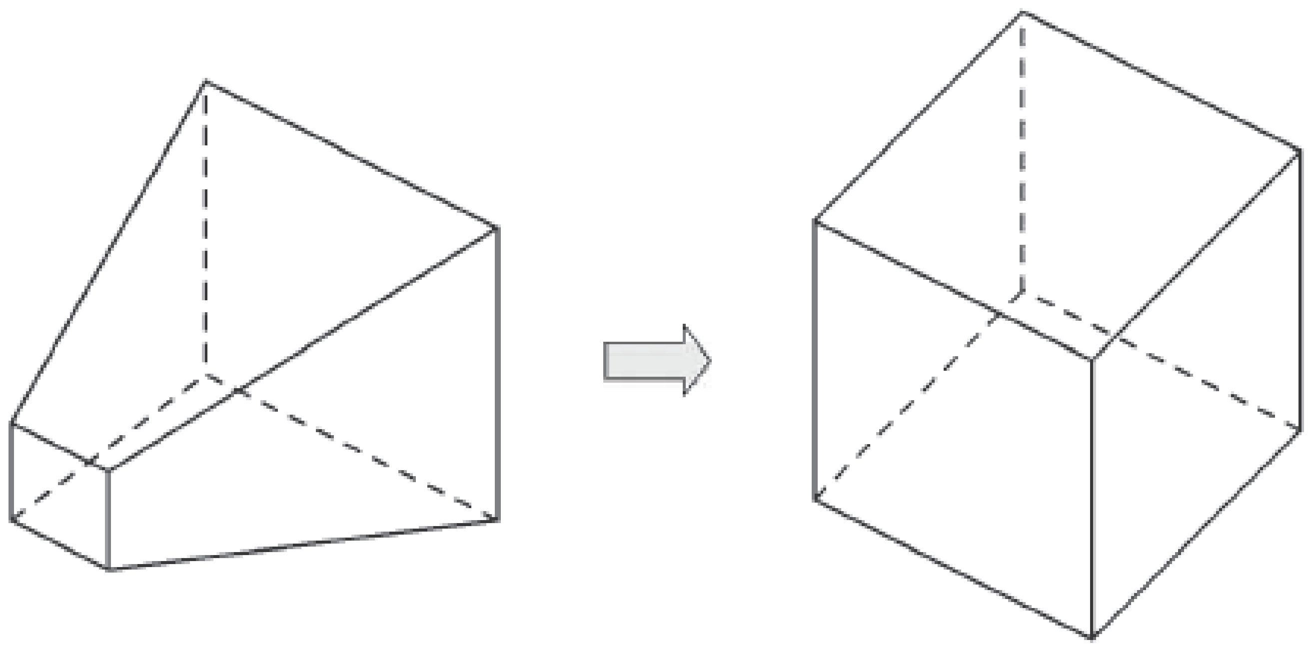
- de la profondeur d'un vertex (coordonnée z)

$$\frac{1}{z_3} = \frac{1}{z_1}(1-t) + \frac{1}{z_2}t$$

- des attributs associés à un vertex (couleur, coordonnées de texture...)

$$\frac{b_3}{z_3} = \frac{b_1}{z_1}(1-t) + \frac{b_2}{z_2}t$$

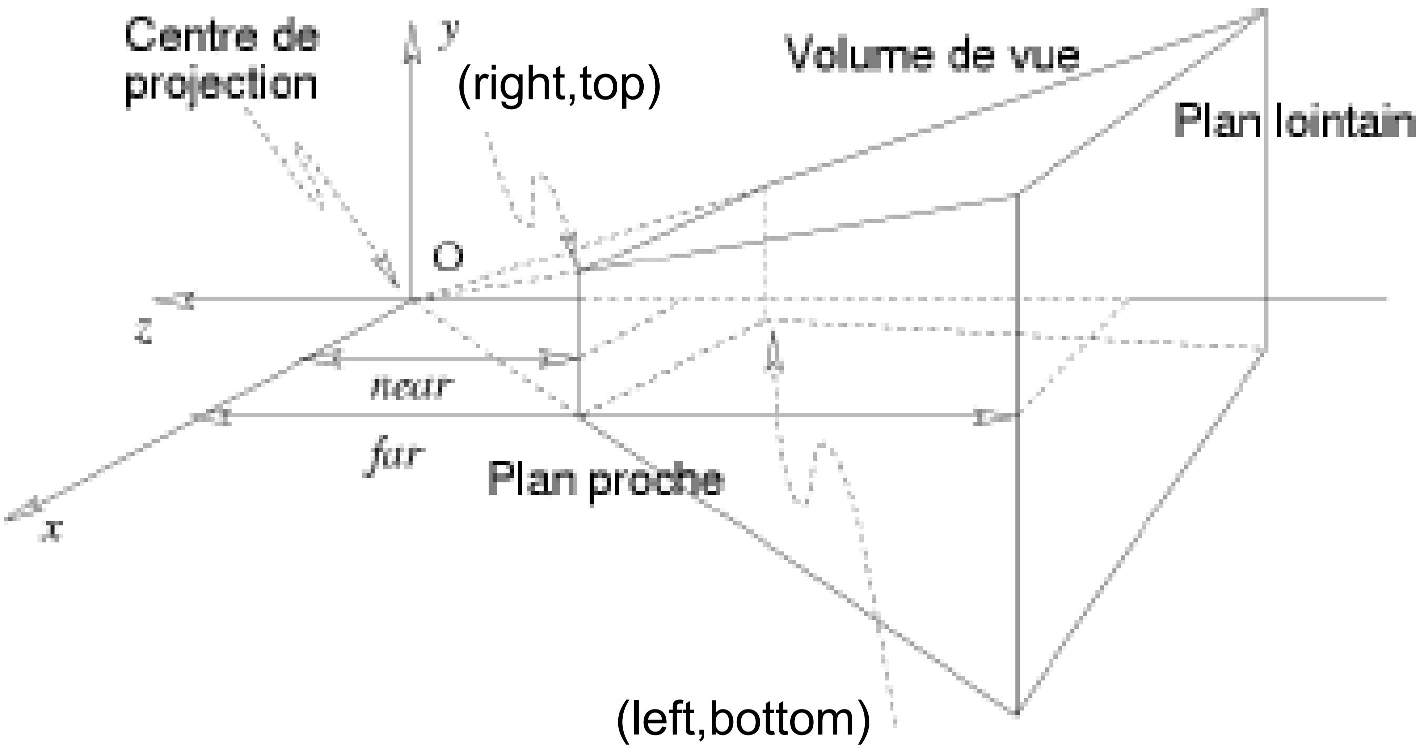
Pyramide de vision et cube clippé homogène



Pyramide de vue vers espace normalisé (clippé homogène), de coordonnées comprises entre -1 et 1

Projection perspective

Soit un point P = <Px, Py, Pz, 1> résidant dans la pyramide de vue.
La pyramide de vue peut être définie par les paramètres l,r,b,t,n et f...



Matrice de projection perspective

$$\begin{pmatrix} 2\frac{n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration...

Démonstration...

Le plan proche est tel que z=-n.
Les coordonnées x et y du projeté P' de P sur le plan proche sont donc :

$$l \leqslant x = -\frac{n}{P_z} P_x \leqslant r \qquad\qquad b \leqslant y = -\frac{n}{P_z} P_y \leqslant t$$

Les fonctions linéaires suivantes permettent de ramener les valeurs de x et y dans [-1;1] :

$$x' = (x - l)\frac{2}{r-l} - 1 \qquad\qquad y' = (y - b)\frac{2}{t-b} - 1$$

$$x' = \frac{2\mathrm{n}}{r-l}\left(-\frac{P_x}{P_z}\right) - \frac{r+l}{r-l} \qquad\qquad y' = \frac{2\mathrm{n}}{t-b}\left(-\frac{P_y}{P_z}\right) - \frac{t+b}{t-b}$$

Démonstration...

La profondeur d'un vertex étant interpolée hyperboliquement, la coordonnée z' de P' vérifie :

$$z' = A\frac{1}{P_z} + B$$

Or :

$$-1 = A\frac{1}{-n} + B \quad \text{et} \quad 1 = A\frac{1}{-f} + B$$

Après résolution :

$$A = \frac{2nf}{f-n} \quad \text{et} \quad B = \frac{f+n}{f-n}$$

Démonstration...

Ainsi :

$$x' = \frac{2n}{r-l}\left(-\frac{P_x}{P_z}\right) - \frac{r+l}{r-l} \qquad y' = \frac{2n}{t-b}\left(-\frac{P_y}{P_z}\right) - \frac{t+b}{t-b}$$

et :

$$z' = -\frac{2nf}{f-n}\left(-\frac{1}{P_z}\right) - \frac{f+n}{f-n}$$

ou encore :

$$-P_z x' = \frac{2n}{r-l} P_x + \frac{r+l}{r-l} P_z \qquad -P_z y' = \frac{2n}{t-b} P_y + \frac{t+b}{t-b} P_z$$

et :

$$-P_z z' = \frac{f+n}{f-n} P_z - \frac{2nf}{f-n}$$

Matrice de projection perspective

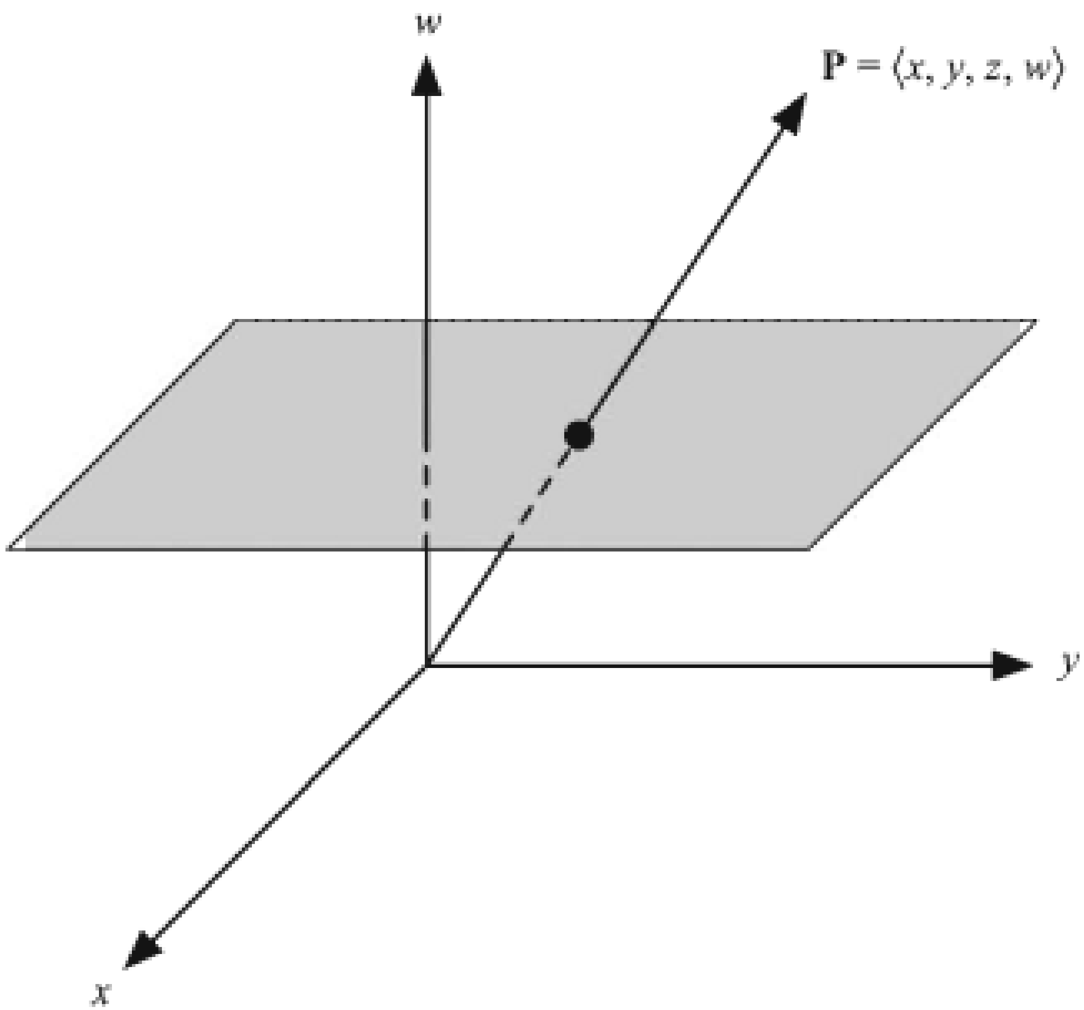
Donc :

$$P' = \begin{pmatrix} \dfrac{2n}{r-l} & 0 & \dfrac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \dfrac{2n}{t-b} & \dfrac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{f+n}{f-n} & -\dfrac{2nf}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} P$$

Avec : $n = \dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$

Angle du champs de vision horizontal

Rappel : interprétation géométrique de la coordonnée homogène w



Passage d'un point 4D vers un point 3D...

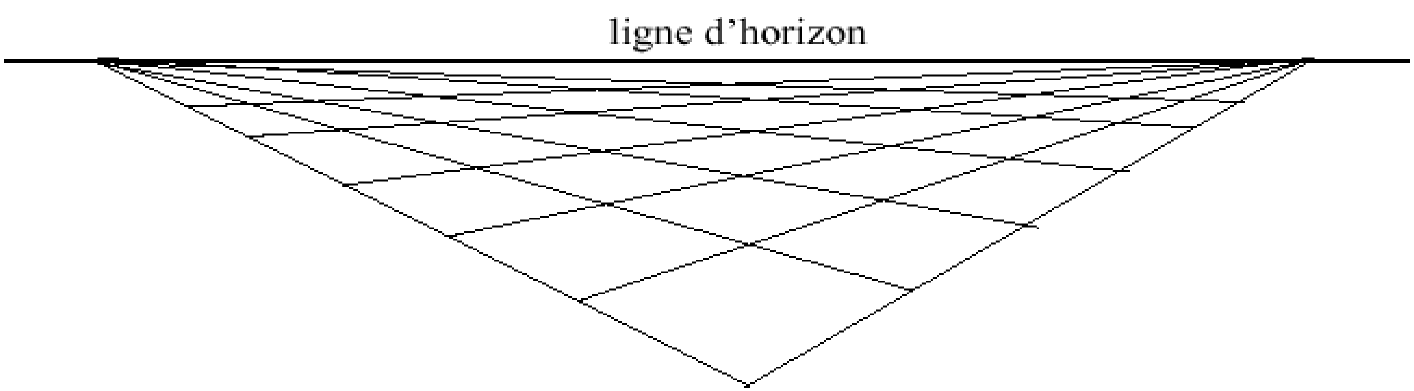
Points de fuite et ligne d'horizon

Point de fuite

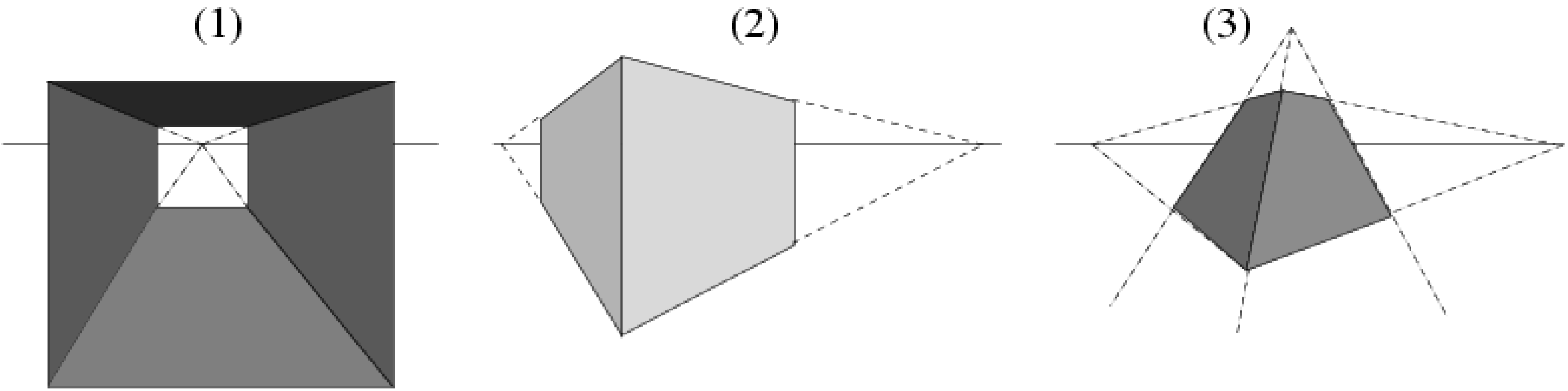
Deux droites parallèles dans la scène s'intersectent en un point dans le plan de projection.

Ligne d'horizon

Chaque couple différent de droites définit un nouveau point de fuite. Ces points de fuite forment une droite dans le plan de projection : c'est la ligne d'horizon.



Exemples de projection avec points de fuite

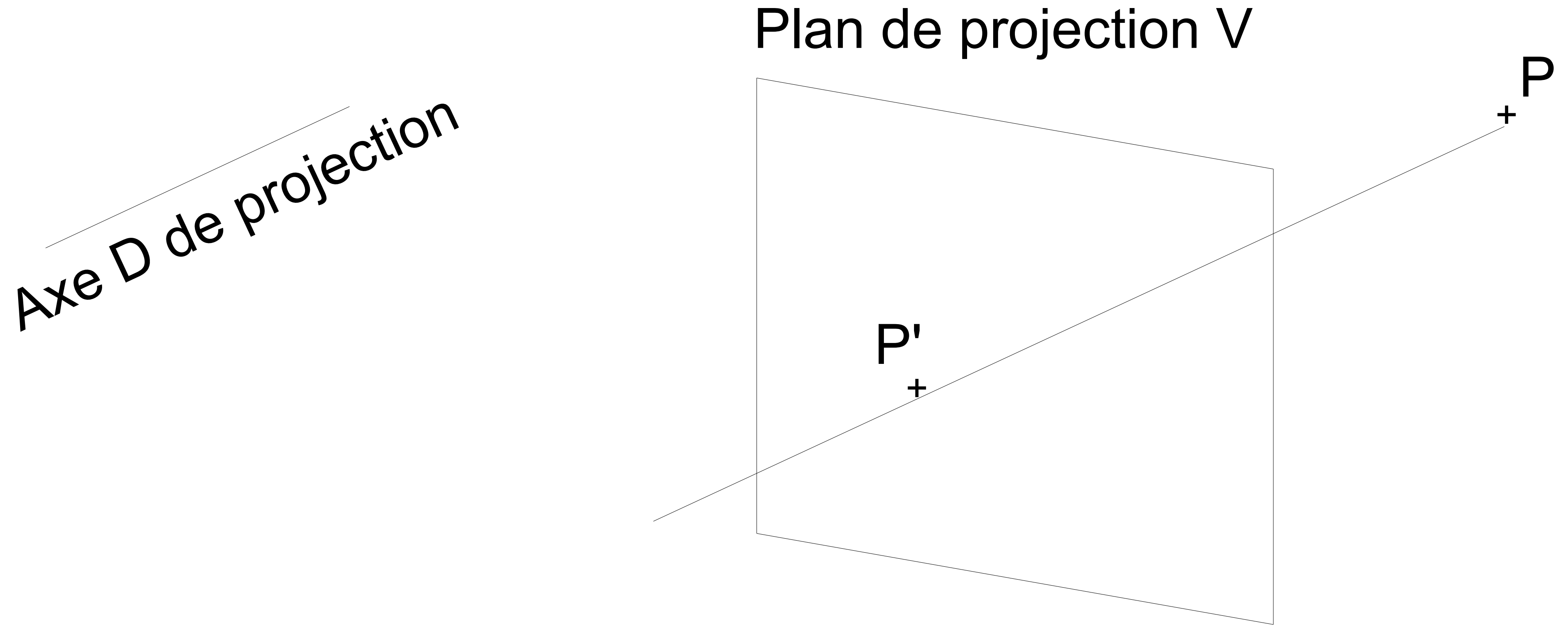


Plan du cours

- Séquence des transformations géométriques appliquées aux vertices des objets 3D
- Matrice Vue
- Types de projections
- Projections perspectives
- Projections orthogonales

Projection parallèle

L'image P' d'un point P par une projection parallèle sur le plan V selon un axe D est l'intersection avec le plan V de la droite parallèle à D et passant par P.



Projection parallèle

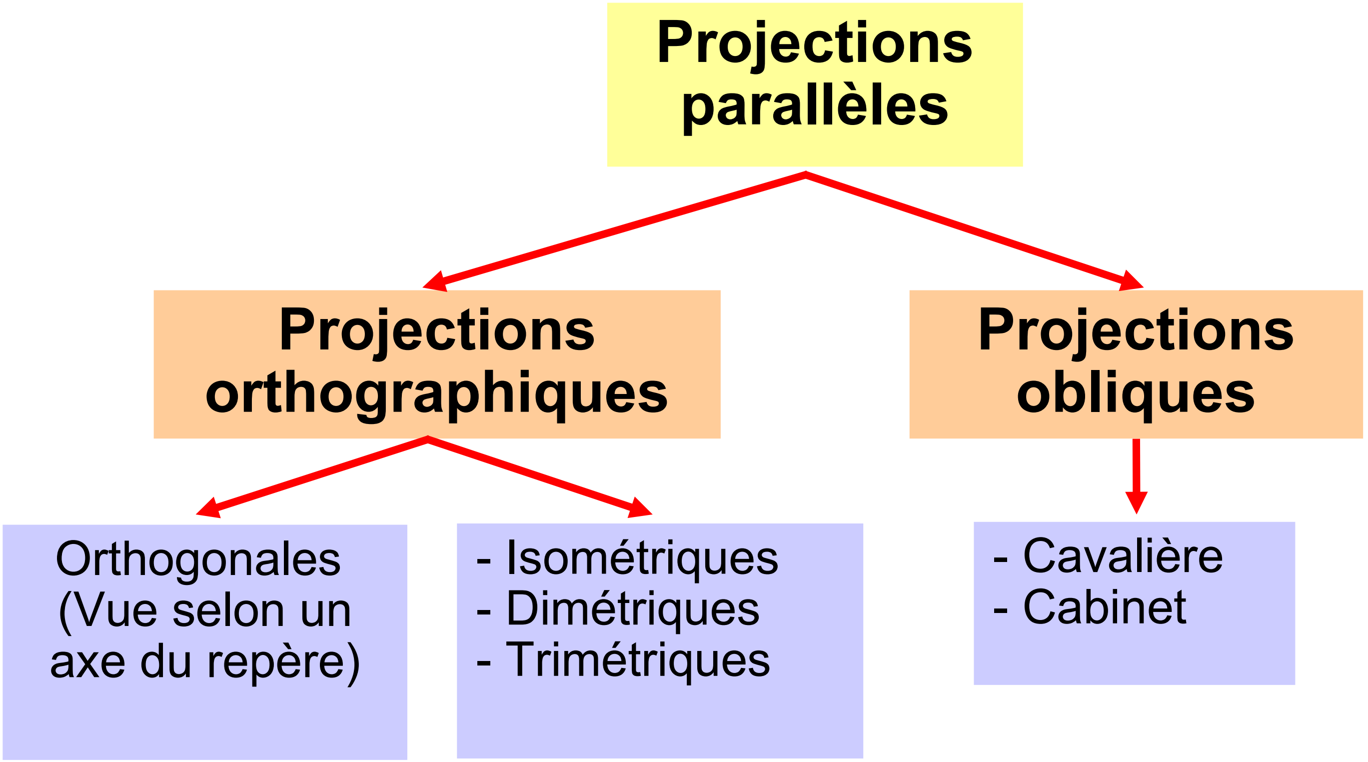
Propriétés

- Deux droites parallèles dans la scène le sont également après une projection parallèle
- Conserve le rapport des distances selon un ou plusieurs axes
- Conserve les formes

Se décomposent en deux grandes classes :

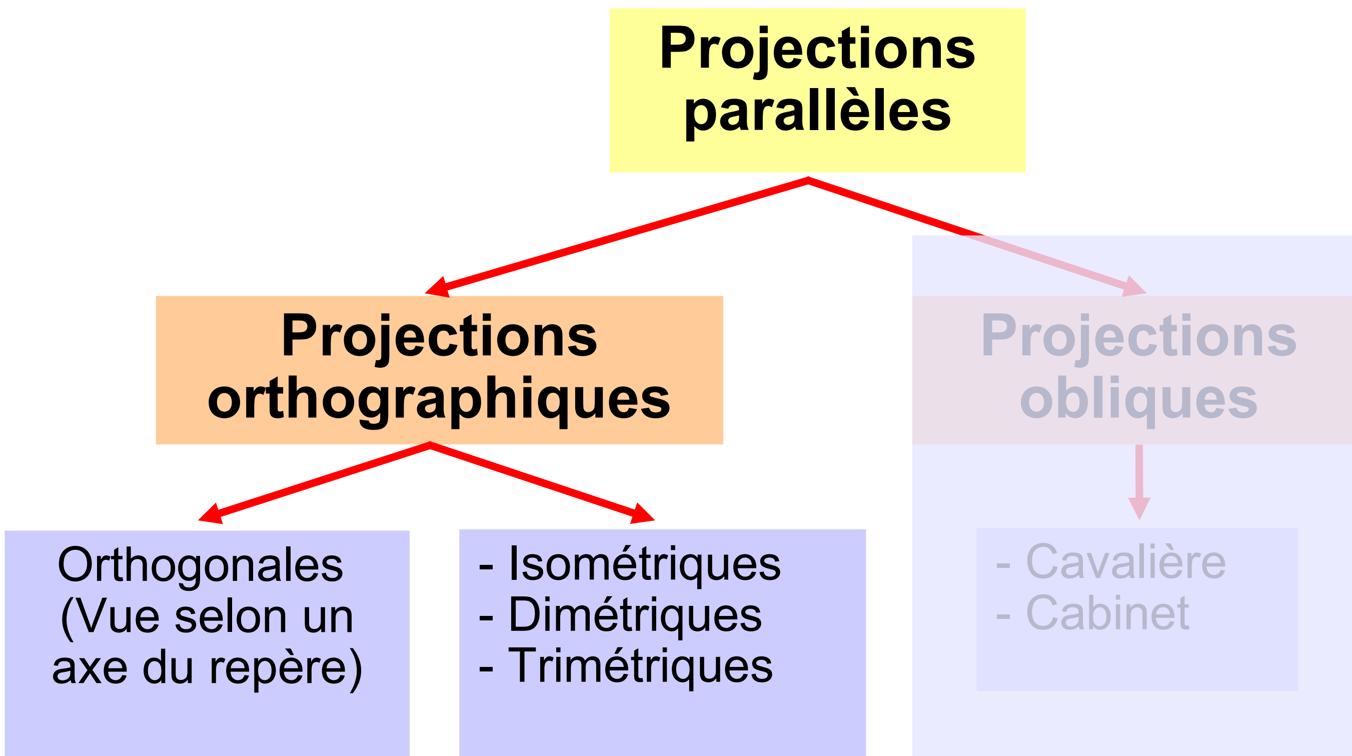
1) Les projections orthographiques
2) Les projections obliques

Les projections parallèles



Les projections orthographiques

La direction de projection est **perpendiculaire** au plan de projection.



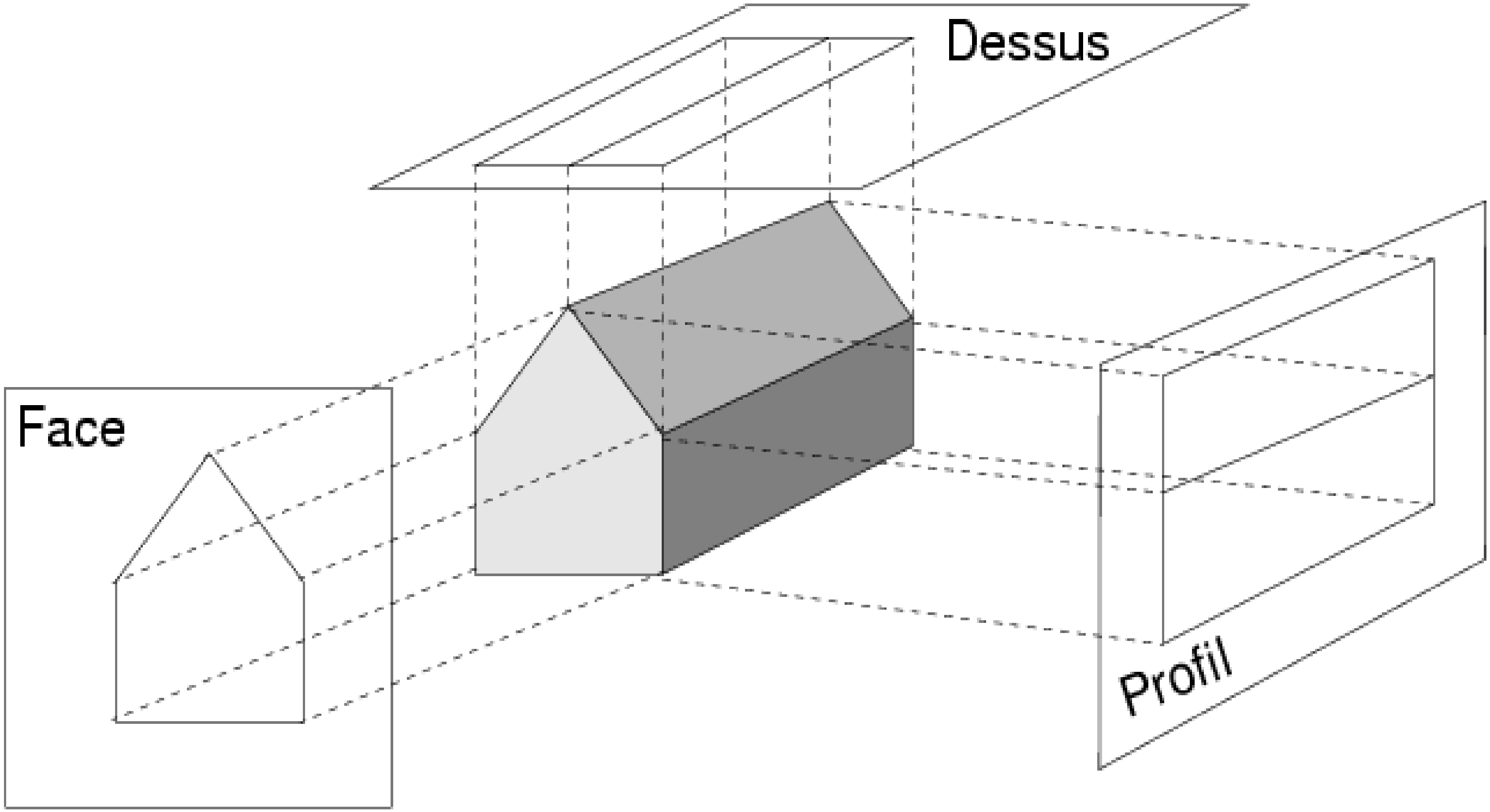
Projection orthogonale

- La direction de projection est parallèle à l’un des axes du repère.

- Exemples :
  - Vue de face
  - Vue de profil
  - Vue de dessus

- Les angles et les distances dans les plans parallèles aux plans du repère sont conservés

Projection orthogonale



Matrice de projection orthogonale

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{n-f} & -\frac{f+n}{n-f} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration...

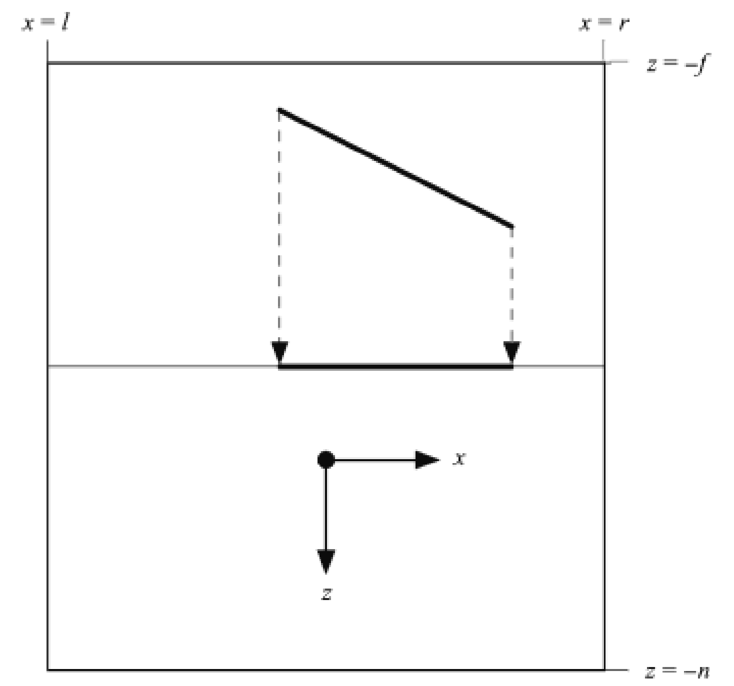
Démonstration

Le volume de vue pour une projection orthogonale est définie par un parallélogramme à des distances near et far dans le plan xOy, respectivement.
Puisqu'il n'y a pas de distortion dûe à la perspective, la coordonnée de profondeur d'un vertex en perspective orthographique peut être interpolée linéairement.
Ainsi les fonctions de mapping sont linéaires pour les trois axes.
Les fonctions de mapping des coordonnées x et y de l'intervalle [l;r] et [b;t], respectivement, vers l'intervalle [-1;1] sont donnés par :

$$x' = \frac{2}{(r-l)} x - \frac{r+l}{r-l}$$

et

$$y' = \frac{2}{(t-b)} y - \frac{t+b}{t-b}$$



Démonstration

De manière similaire mais en prenant l'opposé pour z, tel que : -n → -1 et -f →1, on peut transformer la coordonnée z de l'intervalle [-f ;-n] vers l'intervalle [-1;1] en utilisant la fonction :

$$z' = \frac{-2}{(f-n)} z - \frac{f+n}{f-n}$$

Projection axonométrique

- La direction de projection n'est pas parallèle à l'un des axes du repère.

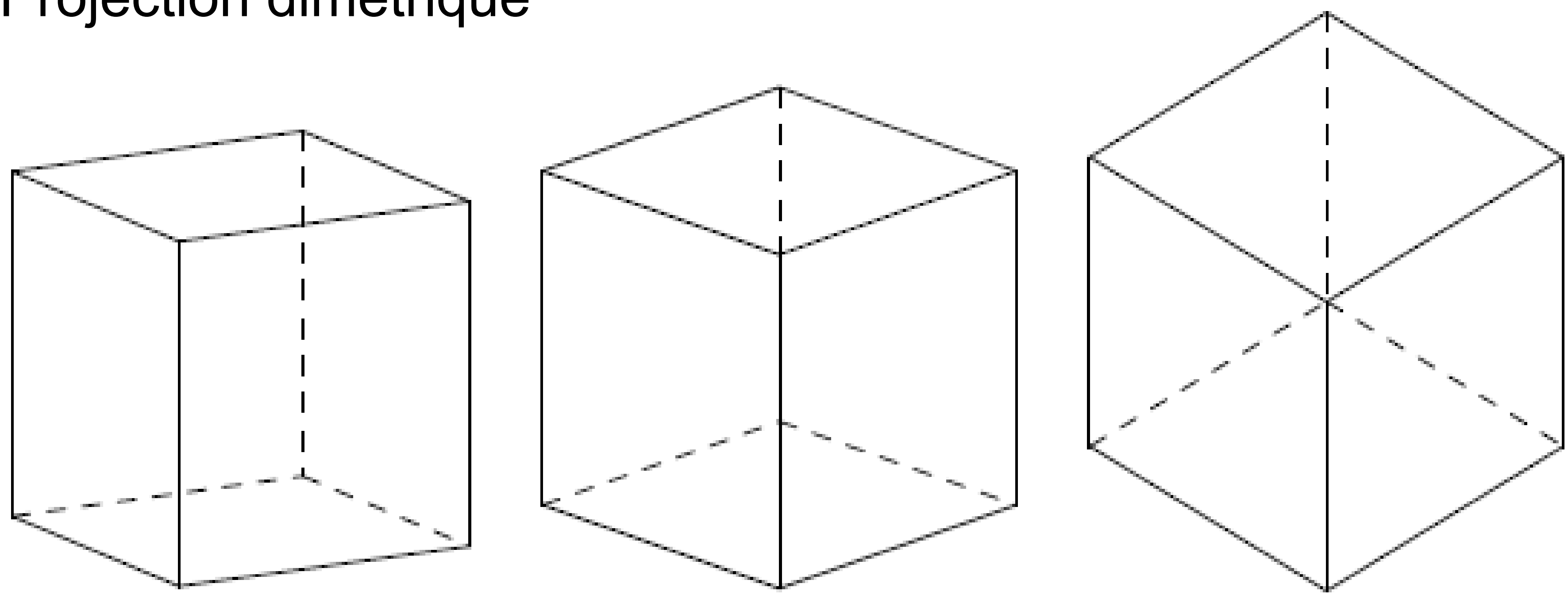
- Les distances sont modifiées dans un rapport constant sur chaque axe.

- Plusieurs cas de figure peuvent alors se présenter :
  - La projection **isométrique** : la direction de projection fait le **même angle avec chacun** des axes du repère.
  - La projection **dimétrique** : la direction de projection fait le **même angle avec deux des trois** axes du repère.
  - La projection **trimétrique** : la direction de projection fait un **angle différent avec chacun** des axes du repère.

Exemple de projections axonométriques

Projection isométrique

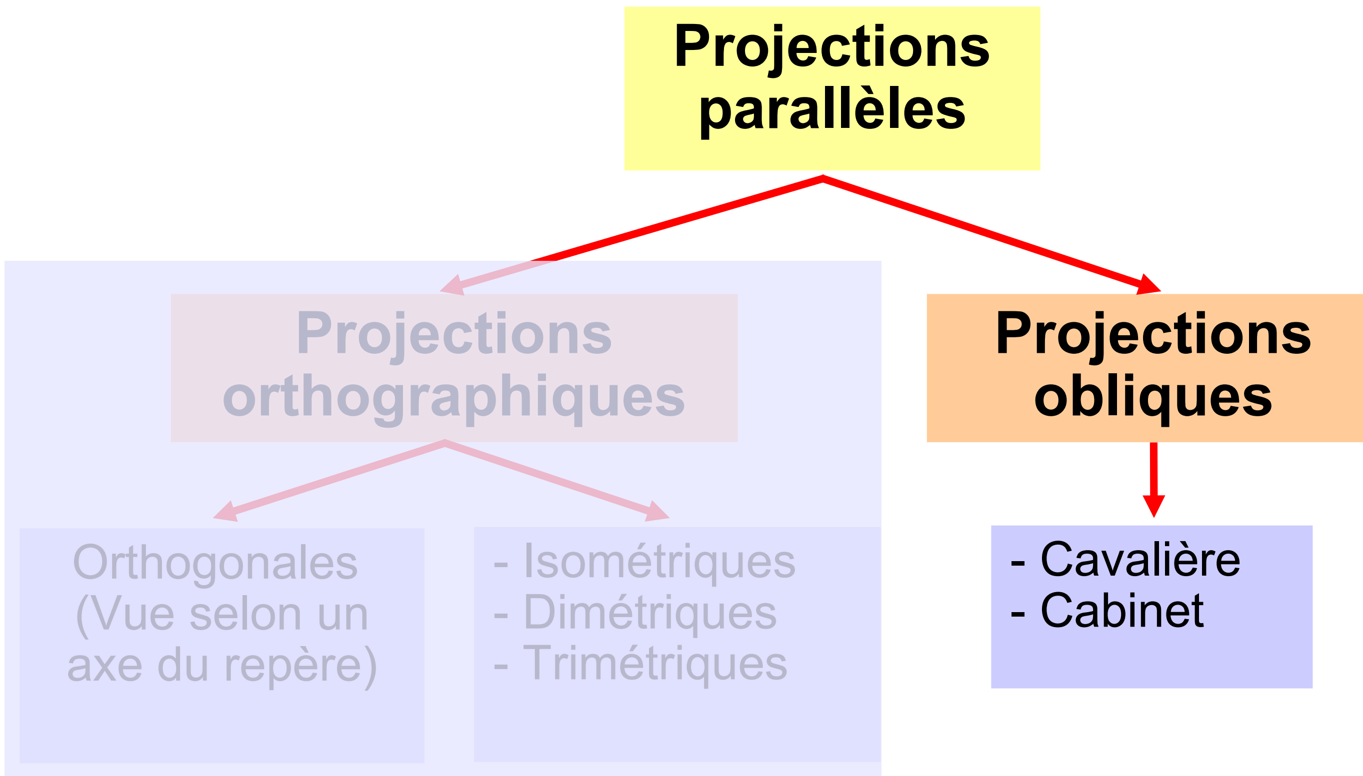
Projection dimétrique



Projection trimétrique

Les projections obliques

La direction de projection n’est **pas perpendiculaire** au plan de projection.



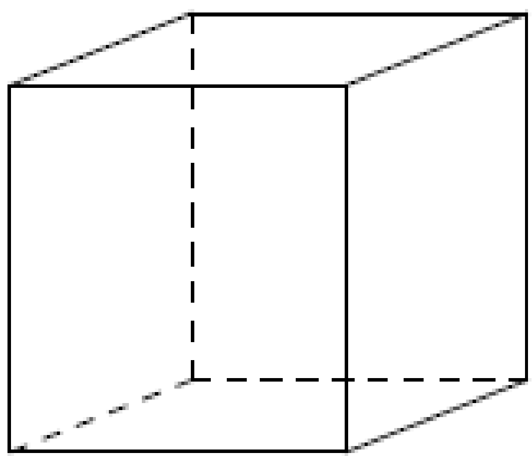
Les projections obliques

On distingue deux cas :

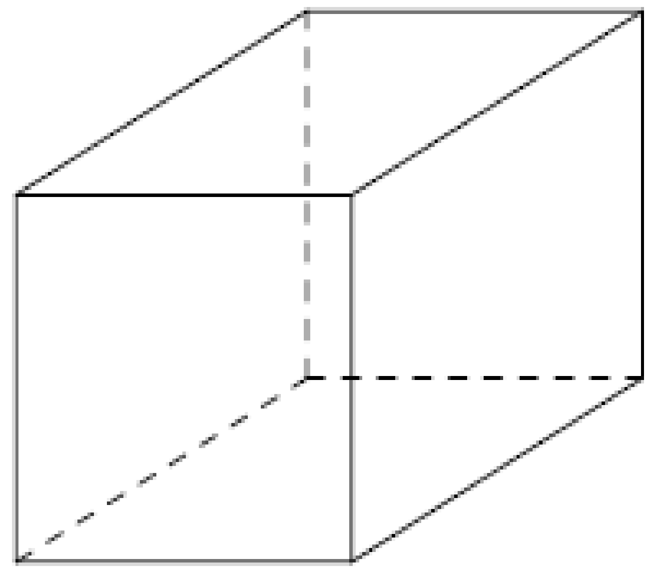
- La projection **cavalière** : la direction de projection est choisie de manière à ce que la **taille de la projection d'un objet ne dépend pas de son éloignement**.

- La projection **cabinet** : la direction de projection est choisie telle que les **perpendiculaires au plan xOy soient raccourcies de moitié**.

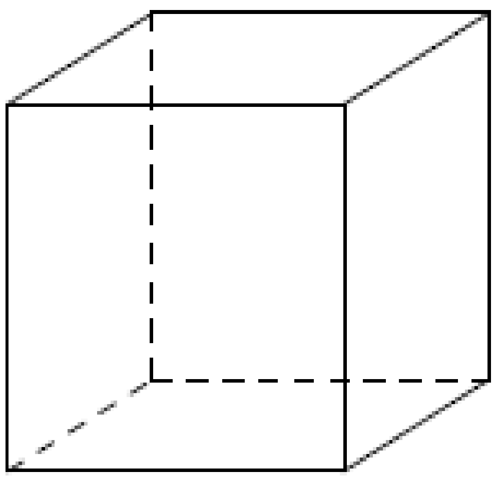
Les projections obliques



Oblique quelconque



Cavalière



Cabinet