a.

(a)

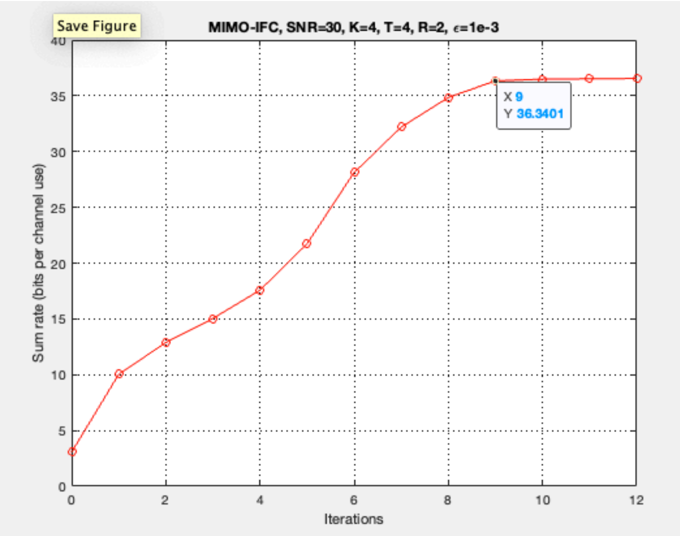

Fig 1_a MIMO
K = 4, T = 4, R = 2, I = 4, d = min(4,2) = 2, SNR = 30 dB

從Fig 1_a可以觀察到：

- 使用 WMMSE algorithm（Weighted Minimum Mean Square Error）時，**sum-rate** 隨著迭代次數**monotonic increase**；
- 約在第 10~12 次iteration左右趨於converge；
- 最終達到約 36.9 bits per channel use 的 sum-rate。

這與paper Fig.1(b) 的趨勢一致，驗證了 WMMSE algorithm 能夠在MIMO interference channel中快速達到穩定效能，並且reliable。

(b)

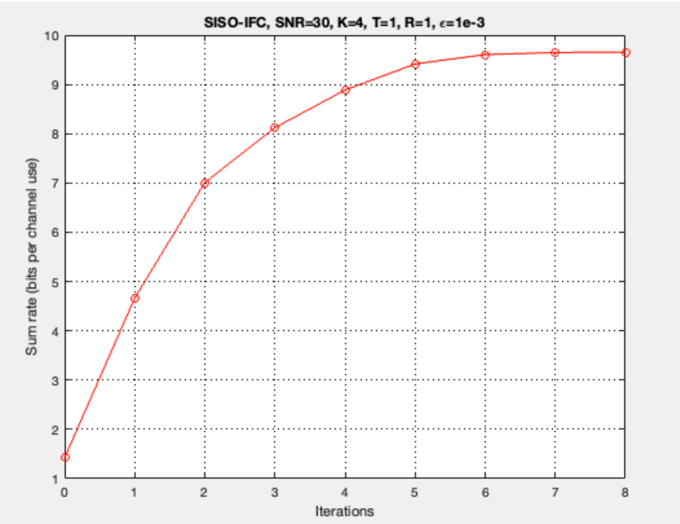

Fig 1_b SISO
K = 4, T = 1, R = 1, I = 4, d = min(1,1) = 1, SNR = 30 dB

從Fig 1_b可以觀察到：

- WMMSE algorithm 同樣展現**monotonic increase**特性。
- 收斂只需約 8 次迭代，快於 MIMO 情況，原因是問題維度（矩陣大小）較小。
- 最終 sum-rate 約為 9.7 bits per channel use，明顯低於 MIMO 案例。

這也對應原paper Fig.1(a) 所展示的結果，並顯示天線數量與支援的datastream直接影響system capacity。

Conclusion:

- **Dimension Dependence**：MIMO 下，由於多天線與多datastream，WMMSE 能更有效分攤干擾並提升傳輸效率，sum-rate 高出許多; SISO 雖然效能受限，但 WMMSE 仍能快速找到接近最優的 beamforming 解。

- **Block-Coordinate Descent:** WMMSE algorithm 透過交替更新**U（MMSE receiver）、W（weight matrix）、V（beamformer）三個，每一步都解決convex子問題，使 overall utility monotonic increase。**

- 兩種情況下的收斂行為都證實了paper中指出的：**WMMSE algorithm 具有良好的convergence，並能有效提升 multi-user interference channel的效能**

b.
比較了兩種algorithm的效能：

- **WMMSE**：WMMSE algorithm 執行一次隨機初始化

- **WMMSE 10rand int**：執行 WMMSE algorithm 共 10 次，每次不同的初始化，並選出 sum-rate 最佳結果

- SNR 從 5 dB 增加到 30 dB，間隔為 5 dB。

(a)

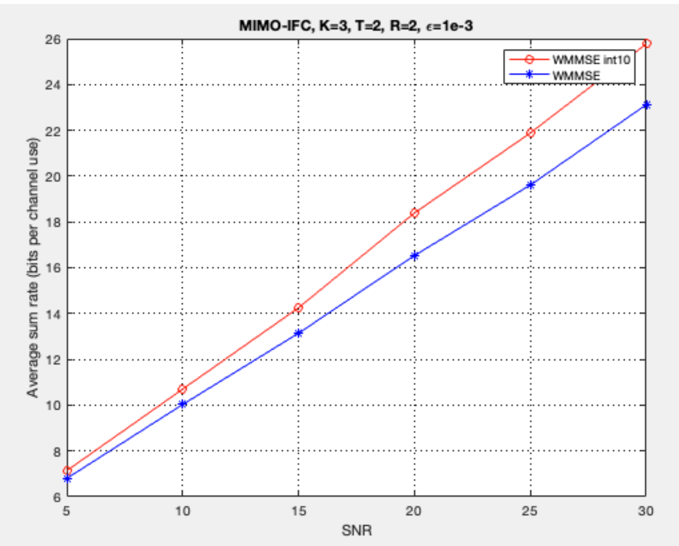

Fig 2_a MIMO
K = 3, T = 2, R = 2, I = 2, d = min(2,2) = 2

從Fig 2_a可以觀察到：

- 無論是 WMMSE 或 WMMSE 10rand int，average sum-rate皆隨著 SNR 呈現**線性成長**趨勢，這與Shannon Capacity Formula($C = log_2(1+SNR)$)一致。當 SNR 增加時，capacity以log速率提升。在中高 SNR 區間（5—30 dB）內，log曲線的曲率變小，因此在圖形上呈現近似線性的增長趨勢。

- 10次初始化效果顯著：WMMSE_10rand_int表現得比只做一次初始化好很多，尤其在高 SNR 區間差異明顯，顯示 WMMSE 存在 **local optimum** 問題，透過多次隨機初始化可以更接近 **global optimum**。

- 根據paper Fig. 3 的說明：「repeating the WMMSE algorithm ten times can close this performance gap」，我們的模擬結果與paper一致。透過多次隨機初始化（10 次執行），確實可以縮小 WMMSE 與最佳解之間的效能差距，有效克服演算法容易陷入 local optimum的問題。

(b)

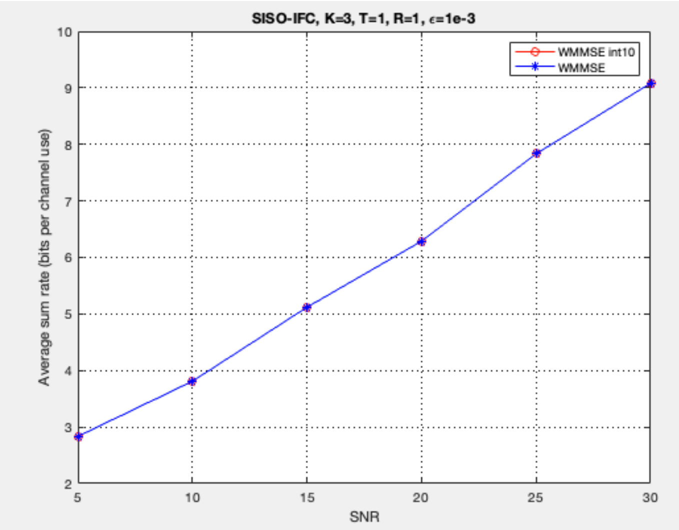

Fig 2_b SISO
K = 3, T = 1, R = 1, I = 2, d = min(1,1) = 1

從Fig 2_b可以觀察到：

- WMMSE vs WMMSE_10rand_int 幾乎重合：在 SISO 設定下，兩條曲線幾乎完全重合，顯示：WMMSE algorithm 本身幾乎能找到 global optimum

- 論文 Fig.2 說明：paper 指出：「the performance gap between single-run WMMSE and the optimal solution is small...」我們的模擬結果完全驗證了這一點。

- 由於沒有 spatial multiplexing 增益，SISO 的總傳輸率低於 MIMO 是預期之內的結果。

Conclusion:

WMMSE algorithm 是一種有效率的 block coordinate descent 方法，能在 MIMO 和 SISO 下有效地最大化sum-rate。但它存在 local optimum 問題，因此在高維MIMO 系統中建議透過 **multiple random initializations** 來避免陷入suboptimal。

c.

3.

① 目標：$\max_{V} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i_k=1}^{I_k} \alpha_{i_k} R_{i_k}$, s.t. $\sum_{i=1}^{I_k} Tr(V_{i_k} V_{i_k}^H) \le P_k, \forall k=1,2 \cdots K$

$R_{i_k} \triangleq \log\det\left(I + H_{i_k k} V_{i_k} V_{i_k}^H H_{i_k k}^H \left(\sum_{(l,j)\neq(i,k)} H_{i_k j} V_{l_j} V_{l_j}^H H_{i_k j}^H + \sigma_{i_k}^2 I\right)^{-1}\right)$

② 因為 non-convex problem 很難解

從 (7) 下手

$$\min_{W,U,V} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_{i_k} \left(Tr(W_{i_k} E_{i_k}) - \log\det(W_{i_k})\right)$$

(i) 固定 V，最佳 U_{i_k}

$U_{i_k}^{opt} = J_{i_k}^{-1} H_{i_k,k} V_{i_k}$

$J_{i_k} = \sum_{j=1}^{K} \sum_{l=1}^{I_j} H_{i_k,j} V_{l_j} V_{l_j}^H H_{i_k,j}^H + \sigma_{i_k}^2 I$, closed form 代入

(ii) 固定 U_{i_k}，最佳 W_{i_k}

對 (7) 微分 $\Rightarrow W_{i_k}^{opt} = \underbrace{E_{i_k}^{-1}}_{(3)\text{ 定義}} \cdots (19)$

(iii) 將 (ii).(i) 代回 (7)

$\because Tr(W_{i_k} E_{i_k}) = Tr(E_{i_k}^{-1} E_{i_k}) = d$

$-\log\det(W_{i_k}) = \log\det(E_{i_k})$

$$(7) \Rightarrow \min_{W,U,V} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_{i_k}\left(Tr(W_{i_k} E_{i_k}) - \log\det(W_{i_k})\right) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{I_k} \alpha_{i_k}\left(d + \log\det(E_{i_k})\right)$$

$\Rightarrow$ 等價於 $\max_{V} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i_k=1}^{I_k} \alpha_{i_k} R_{i_k}$，原 weighted sum rate maximization

透過最佳化 U_{i_k}. W_{i_k}，weighted sum-rate maximum problem and the minimization problem is equivalent

d.

(1).u_{i_k} (utility function)

- 嚴格遞增
- 連續可微分
- Concave function of R

(2)$c_{i_k} = -u_{i_k}(-log\ det(E))$ (cost function)

- 嚴格遞增：E 愈小（MSE 愈低），成本愈小
- 連續可微分：方便計算梯度
- strictly convex on E > 0

(3)$\gamma_{i_k} = (\nabla c_{i_k} E_{i_k})^{-1}$ (the inverse mapping of the gradient map)

- 隨W增大，γ_{i_k} monotone變小
- continuous, bijective mapping from W > 0 E > 0

若以上條件(1~3)成立，則 sum-utility maximization (10) 與 matrix-weighted sum-MSE minimization (12) **具有相同的 global optimal solution**。

(4)舉一個符合條件的u_{i_k}（proportional fairness utility）

$$u_{i_k}(R) = logR$$

- 嚴格遞增 $\frac{du}{dR} = 1/R > 0$
- 連續可微分 $\forall R > 0$
- Concave function of R $\frac{d^2u}{dR^2} = -1/R^2 < 0$

對應$c_{i_k} = -u_{i_k}(-log\ det(E)) = -log(log\ det(E))$ strictly convex on E > 0

$\gamma_{i_k} = (\nabla c_{i_k} E_{i_k})^{-1}$也滿足，所以可以確定theorem 2 適用

e.

(1) Robust WMMSE under Imperfect CSI：實際系統中，CSI通常是估計而來，會存在誤差。因此，可延伸paper設計Robust WMMSE，處理 CSI 誤差，採用 worst-case optimization(考慮 CSI 落在某個不確定集合中的最壞情況) 或 stochastic programming(考慮 CSI 服從某個統計分布（如高斯分布）時的期望效能最佳化) 方法。

(2) 與機器學習結合：隨著 **Deep Learning** 與 **Reinforcement Learning** 在無線通訊中的應用，可將 WMMSE 結合學習方法，以降低計算成本與應對複雜環境，像是利用神經網路學習 **beamformer** 的設計規則，近似傳統 WMMSE 解的輸出

(3) Multi-objective WMMSE：同時最大化 sum-rate、最小化干擾、最大化user fairness