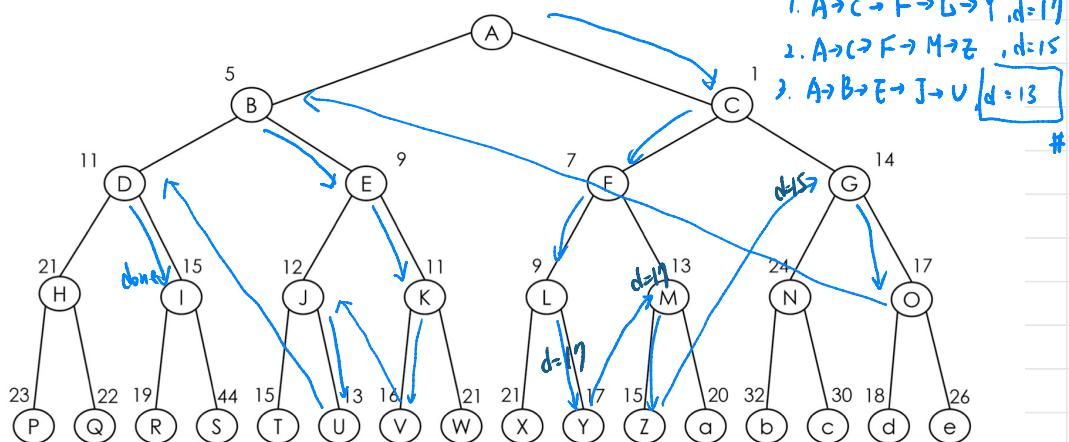


1. (10%) Depict the search path in the following MIMO sphere decoder using the Schnorr-Euchner (SE) search method.



2. (15%) Consider a MISO system with four transmit antennas using a space-time block code (STBC) given as below:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} s_1^* & 0 & 0 & 0 & s_2^* & -s_3^* & s_4 \\ 0 & s_1^* & 0 & -s_2^* & 0 & -s_4^* & -s_3 \\ 0 & 0 & s_1^* & s_3^* & s_4^* & 0 & -s_2 \\ -s_4^* & s_3^* & s_2^* & 0 & 0 & 0 & s_1 \end{bmatrix}$$

where the columns indicate different time slots. Assuming that the channel is time-invariant and noiseless during the transmission of the STBC, the received signal can be expressed as $\mathbf{y} = \mathbf{h}\mathbf{X}$, where $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_7]$ is a 1×7 vector such that y_i is

the received signal at the i th timeslot, and $\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3, h_4]$ is a 1×4 vector with h_1, h_2, h_3 , and h_4 being the channel gain for the first, second, third, and fourth antennas, respectively.

- (a) (4%) Find the code rate R .

$$(a) R = \frac{Ls}{K} = \frac{4}{7}$$

(b) (4%) Is this an orthogonal design code? Give your reason.

$$\begin{aligned}
 X \cdot X^H &= \begin{bmatrix} s_1^* & 0 & 0 & 0 & s_2^* & -s_3^* & s_4 \\ 0 & s_1^* & 0 & -s_2^* & 0 & -s_4^* & -s_3 \\ 0 & 0 & s_1^* & s_2^* & s_3^* & 0 & -s_2 \\ -s_4^* & s_3^* & s_2^* & 0 & 0 & 0 & s_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_1^* & 0 & 0 & -s_4^* \\ 0 & s_1^* & 0 & s_3^* \\ 0 & 0 & s_1^* & s_2^* \\ 0 & -s_2^* & s_3^* & 0 \\ s_2^* & 0 & s_4^* & 0 \\ -s_3^* & -s_4^* & 0 & 0 \\ s_4 - s_3 - s_2 & s_1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} |s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2 \end{bmatrix} \\
 &= (|s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2) I
 \end{aligned}$$

\Rightarrow It is orthogonal code, Yes!

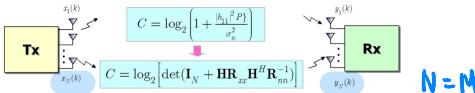
(c) (7%) After some manipulations, the received signal can be expressed as

$\hat{y} = \mathbf{Hs}$, where $s = [s_1, s_2, s_3, s_4]^T$ is a 4×1 signal vector, \mathbf{H} is a 7×4 matrix,

and \hat{y} is a 7×1 vector. Find \mathbf{H} and derive the expression of \hat{y} .

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 &= h_1 s_1^* - h_4 s_4^* \\
 y_2 &= h_2 s_1^* + h_4 s_3^* \\
 y_3 &= h_3 s_1^* + h_4 s_2^* \\
 y_4 &= -h_2 s_2^* + h_3 s_3^* \\
 y_5 &= h_1 s_2^* + h_3 s_4^* \\
 y_6 &= -h_1 s_3^* - h_2 s_4^* \\
 y_7 &= h_1 s_4 - h_2 s_3 - h_3 s_2 + h_4 s_1
 \end{aligned} \right\} \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* & 0 & 0 & -h_4^* \\ h_2^* & 0 & h_4^* & 0 \\ h_3^* & h_4^* & 0 & 0 \\ 0 & -h_2^* & h_3^* & 0 \\ 0 & h_1^* & 0 & h_3^* \\ 0 & 0 & -h_1^* & -h_4^* \\ h_4 & -h_3 & -h_2 & h_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s \end{bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{s}$$

3. (15%) Consider the MIMO channel capacity as described in course slides:



Assume that there are N transmit antennas and N receive antennas. Given that the total transmission power is P and the noise is i.i.d. with zero mean and variance σ_n^2 . Derive capacity under the following conditions in terms of N , P , σ_n^2 and singular values of some matrix.

Note: Express your answers explicitly and define the parameters or variables used clearly. Derivation is required to get full score.

H denotes an i.i.d. Rayleigh fading channel matrix.

- (a) (5%) Derive the channel capacity when CSI is unknown to the transmitter.

Assuming i.i.d transmitted signals such that $R_{xx} = (\frac{P}{N}) I_N$ and uncorrelated noise such that $R_{nn} = \sigma_n^2 I_N$

$$\Rightarrow C = \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left[\det \left(I_N + \frac{P}{N} \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} I_N H H^H \right) \right] \right\} = \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left[\det \left(I_N + \frac{r}{N} H H^H \right) \right] \right\}, r = \text{SNR} = \frac{P}{\sigma_n^2}$$

Given EVD of $H H^H = U \Lambda U^H$ and $\text{rank}(H) = N$

$$\begin{aligned} \Rightarrow C &= \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left[\det \left(I_N + \frac{r}{N} U \Lambda U^H \right) \right] \right\} = \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left(I_N + \frac{r}{N} \Lambda U U^H \right) \right\} \\ &= \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left[\det \left(I_N + \frac{r}{N} \Lambda \right) \right] \right\} = \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left[\prod_{i=1}^N \left(1 + \frac{r}{N} \lambda_i \right) \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{r}{N} \lambda_i \right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_H \left\{ \log_2 \left(1 + \frac{1}{N} \frac{P}{\sigma_n^2} \lambda_i \right) \right\} \text{ (bps / Hz)} \end{aligned}$$

$\{ \lambda_i, i=1, 2, 3, \dots, N \}$ are equal to $N \mathbb{E}\{ |h|_F^2 \}$
 H : full rank, $\text{rank}(H) = N$

$$\therefore C \approx N \log \left(1 + \mathbb{E}\{ |h|_F^2 \} \frac{P}{N \sigma_n^2} \right)$$

- (b) (5%) Following (a), when SNR is high, show that the channel capacity can be approximated as

$$C \approx \log_2 \det(R_{xx}) + \log_2 \det \left(\frac{1}{\sigma_n^2} H H^H \right)$$

and give the expression of R_{xx} .

$$C = \log_2 \left[\det \left(I_N + H R_{xx} H^H R_{nn}^{-1} \right) \right]$$

! SNR is high ($\frac{P}{N \sigma_n^2}$ large), $\approx \det(R_{xx} H^H R_{nn}^{-1} H)$

$$\therefore C \approx \log_2 \left[\det \left(H R_{xx} H^H R_{nn}^{-1} \right) \right] = \log_2 \det(R_{xx}) + \log_2 \det(H^H R_{nn}^{-1} H)$$

$$= \log_2 \det(R_{xx}) + \log_2 \det \left(\frac{1}{\sigma_n^2} H H^H \right) \because R_{nn} = \sigma_n^2 I_N$$

(d) (5%) Derive the channel capacity when CSI is known to the transmitter.

Determine \mathbf{R}_{xx} that maximizes the capacity.

Assuming CSI is known to Tx, then maximum capacity:

$$C = \log_2 (\det(I_N + \frac{1}{\sigma_n^2} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H} \mathbf{H}^H)) = \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{P_i}{\sigma_n^2} \lambda_i \right)$$

If \mathbf{R}_{xx} is known

$$\begin{aligned} \max C &= \sum_{i=1}^N \log_2 \left(1 + P_i \lambda_i \right), \\ \text{s.t. } &\sum_{i=1}^N P_i \leq P \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_i: \text{分配给 } i^{\text{th}} \text{ subchannel } \text{的 power} \\ \lambda_i: \mathbf{H} \mathbf{H}^H \text{ } i^{\text{th}} \text{ eigenvalue} \\ N: \text{rank}(\mathbf{H}) \end{array} \right.$$

用 water filling 有最佳解, $P_i = (\lambda^{-1} - \lambda_i^{-1})^+, \quad i=1, 2, \dots, N$

其中 λ^{-1} is chosen to satisfy $\sum_{i=1}^N P_i = P$

λ_i^{-1} are eigenvalues of $\mathbf{H}^H \mathbf{R}_{xx}^{-1} \mathbf{H} = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^H$

$$\therefore \mathbf{R}_{xx} = \mathbf{V} \text{diag}\{[P_1, P_2, \dots, P_N]^T\} \mathbf{V}^H$$

4.

隨著 5G、6G 系統對 mmWave 的使用需求提升，Massive MIMO 成為提升 Capacity 與抗衰落能力的關鍵。然而，在大規模天線陣列中若採用 fully digital precoding，需為每根天線配置一組 RF chain，造成極高硬體成本與功耗，實作困難。

Hybrid precoding 技術透過數位 precoder 配合類比 precoder（多為相位移器 network）結構，可顯著降低 RF chain 數量，在保留效能的同時，實現硬體可行性。

在 Multi-User Massive MIMO 場景中，Hybrid precoding 設計尤為重要，需在以下層面取得平衡：

- Array gain
- Multi-user interference (MUI) suppression
- Hardware efficiency：控制 RF chain 數與功耗
- Channel adaptivity

在 Hybrid precoding 系統中，總體 precoding 矩陣可拆解為 類比 precoder 與 數位 precoder 的乘積 $F = F_{RF}F_{BB}$

4.1 Hybrid Precoding 架構分類與技術

問題：Fully digital precoding 雖然性能最優，但需為每根天線配置一組 RF chain，當天線數達到數十至上百時，硬體成本與功耗太大了，無法直接應用於大型 mmWave MU-Massive MIMO 系統。

4.1.1 Fully-Connected Architecture

目標：設計一種近似 optimal 的 precoding，用少數幾個 RF beam + baseband precoding 來近似整體 optimal precoding(每個 RF chain 經由相位移器 network 連接至所有天線，提供高度靈活的波束成形能力)

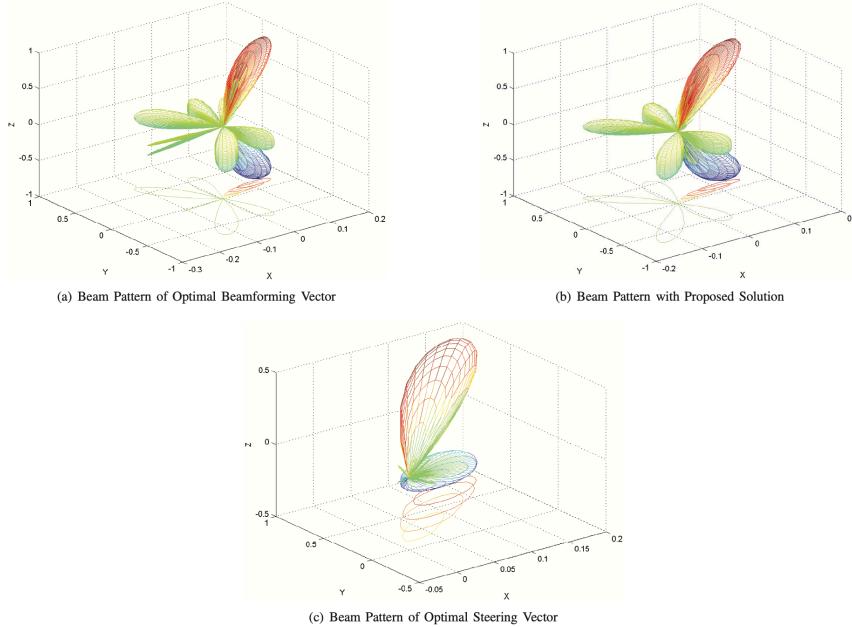
mmWave 通道具備 sparsity 特性，其 channel model 通常可表達為：

$$\mathbf{H} = \gamma \sum_{i,\ell} \alpha_{i\ell} \Lambda_r(\phi_{i\ell}^r, \theta_{i\ell}^r) \Lambda_t(\phi_{i\ell}^t, \theta_{i\ell}^t) \mathbf{a}_r(\phi_{i\ell}^r, \theta_{i\ell}^r) \mathbf{a}_t(\phi_{i\ell}^t, \theta_{i\ell}^t)^*,$$

大部分能量集中於少數幾條 dominant path，為 Sparse Precoding 提供設計依據。
論文中提出 Spatially Sparse Precoding 使 optimal precoder 近似於 Hybrid precoder

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{RF}^{opt}, \mathbf{F}_{BB}^{opt}) &= \arg \min_{\mathbf{F}_{BB}, \mathbf{F}_{RF}} \|\mathbf{F}_{opt} - \mathbf{F}_{RF}\mathbf{F}_{BB}\|_F, \\ \text{s.t. } \mathbf{F}_{RF} &\in \mathcal{F}_{RF}, \\ \|\mathbf{F}_{RF}\mathbf{F}_{BB}\|_F^2 &= N_s, \end{aligned}$$

利用 mmWave 頻段 channel 具備 sparsity 的特性，將 precoding 透過 Orthogonal Matching Pursuit (OMP)，以貪婪法逐步選擇 beamforming vector，最終以少數 RF beam 結合數位 precoding 達到近似 fully digital precoding 效能。



透過 OMP 選取數個 dominant beamforming vectors，最終 hybrid beam pattern 可接近 fully digital precoding 效能，如上圖所示。該圖展示了 (a)fully digital precoding、(b)Hybrid precoding 方案與(c)單一 steering vector 之 beam pattern 比較，可觀察出 Hybrid precoding 已能有效近似理想 beamforming 效果，驗證了 Sparse Precoding 方法之有效性。

該方法的一大優勢是計算複雜度低，OMP 演算法可在合理時間內完成 precoder 設計，且能有效擴展至 Multi-User Massive MIMO 場景。此外，透過少量 RF chain 配合 baseband precoding，系統能以接近理想 precoding 效能運作，大幅降低硬體成本。

然而，此方法仍有若干限制。首先，系統需具備 **完整或高準確度的channel knowledge**，否則 precoding 效果會明顯下降。此外，OMP 為貪婪法，雖然實用但無法保證全局最優解，性能上與理想 precoding 存在一定 gap。再者，Fully-connected 架構本身硬體複雜度仍高，尚需與硬體優化技術搭配使用。

Algorithm 1 Spatially Sparse Precoding via Orthogonal Matching Pursuit

Require: \mathbf{F}_{opt}

- 1: $\mathbf{F}_{\text{RF}} = \text{Empty Matrix}$
- 2: $\mathbf{F}_{\text{res}} = \mathbf{F}_{\text{opt}}$
- 3: **for** $i \leq N_t^{\text{RF}}$ **do**
- 4: $\Psi = \mathbf{A}_t^* \mathbf{F}_{\text{res}}$
- 5: $k = \arg \max_{\ell=1, \dots, N_{\text{cl}} N_{\text{ray}}} (\Psi \Psi^*)_{\ell, \ell}$
- 6: $\mathbf{F}_{\text{RF}} = [\mathbf{F}_{\text{RF}} | \mathbf{A}_t^{(k)}]$
- 7: $\mathbf{F}_{\text{BB}} = (\mathbf{F}_{\text{RF}}^* \mathbf{F}_{\text{RF}})^{-1} \mathbf{F}_{\text{RF}}^* \mathbf{F}_{\text{opt}}$
- 8: $\mathbf{F}_{\text{res}} = \frac{\mathbf{F}_{\text{opt}} - \mathbf{F}_{\text{RF}} \mathbf{F}_{\text{BB}}}{\|\mathbf{F}_{\text{opt}} - \mathbf{F}_{\text{RF}} \mathbf{F}_{\text{BB}}\|_F}$
- 9: **end for**
- 10: $\mathbf{F}_{\text{BB}} = \sqrt{N_s} \frac{\mathbf{F}_{\text{BB}}}{\|\mathbf{F}_{\text{RF}} \mathbf{F}_{\text{BB}}\|_F}$
- 11: **return** $\mathbf{F}_{\text{RF}}, \mathbf{F}_{\text{BB}}$

優點：

- 充分利用 mmWave channel sparsity → 高效能、低 RF chain 數
- 適合 Multi-User MIMO，OMP 法可擴展到多用戶
- Fully-connected 架構下可接近 optimal precoding 性能
- OMP 計算複雜度合理，適合實作

缺點：

- 需完整或準確的 channel knowledge (channel estimation 負擔較重)
- OMP 是貪婪法 (greedy)，非全局最優解 → 仍有性能 gap
- Fully-connected 架構本身硬體仍複雜，實作成本高
- 不適用於 Partially-connected / Dynamic Hybrid → 要搭配進一步擴展

4.1.2 Partially-Connected Architecture

目標：Partially-connected Architecture 被提出作為工程上更實用之折衷方案，每個 RF chain 僅連接至 subarray，可大幅降低硬體成本與功耗，特別適用於大規模 Massive MIMO 系統。

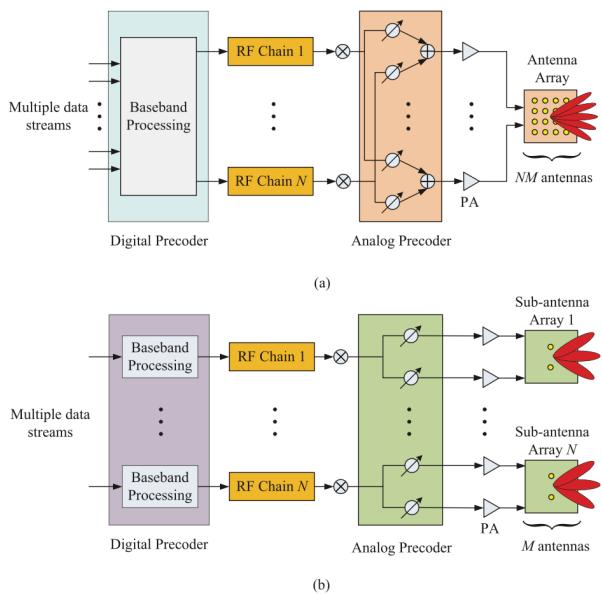


Fig. 1. Two typical architectures of the hybrid precoding in mmWave MIMO systems: (a) Fully-connected architecture, where each RF chain is connected to all BS antennas; (b) Sub-connected architecture, where each RF chain is connected to only a subset of BS antennas.

在 Partially-connected Hybrid precoding 架構中，總體發射訊號模型可表達為

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{a}}_2 & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \bar{\mathbf{a}}_N \end{bmatrix}_{NM \times N}$$

$$\mathbf{y} = \sqrt{\rho} \mathbf{H} \mathbf{A} \mathbf{D} \mathbf{s} + \mathbf{n} = \sqrt{\rho} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{s} + \mathbf{n},$$

Partially-connected Architecture 中的 A 採用 block-diagonal 結構，對應到實際硬體設計中 RF chain 僅連接至subarray，實作簡單且能耗較低，為目前大規模 mmWave 系統實作時之主流架構選擇

mmWave 通道具備 sparsity 特性，其通道模型常表示為：

$$\mathbf{H} = \gamma \sum_{l=1}^L \alpha_l \Lambda_r(\phi_l^r, \theta_l^r) \Lambda_t(\phi_l^t, \theta_l^t) \mathbf{f}_r(\phi_l^r, \theta_l^r) \mathbf{f}_t^H(\phi_l^t, \theta_l^t),$$

由於路徑數 L 有限，主能量集中於少數幾條 dominant path，Partially-connected 架構即便波束靈活度受限，仍可透過合理 precoder 設計有效捕獲主路徑能量，達成良好 beamforming 效果。

Hybrid precoding 設計之主要目標為最大化 achievable rate，其公式為：

$R = \log_2 \left| \mathbf{I}_K + \frac{\rho}{N\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{P}^H \mathbf{H}^H \right|$ 由於 Partially-connected 結構中 precoder 靈活度下降，設計挑戰在於如何針對 block-diagonal 結構 \mathbf{P} 進行有效優化，提升 achievable rate 並抑制 MUI。

論文提出 SIC-based Hybrid precoding 方法，將 total achievable rate 進一步拆解為 sub-rate 優化問題，逐步進行 precoder 設計，提升系統效能與 Multi-user 適應性

$$R = \sum_{n=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{\rho}{N\sigma^2} \mathbf{p}_n^H \mathbf{H}^H \mathbf{T}_{n-1}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{p}_n \right)$$

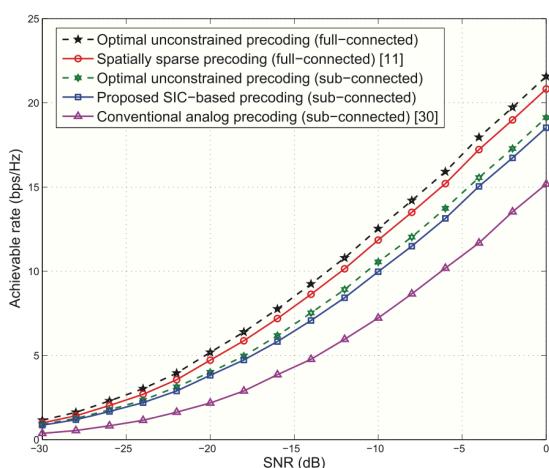


Fig. 3. Achievable rate comparison for an $NM \times K = 64 \times 16$ ($N = 8$) mmWave MIMO system.

顯示不同 precoding 方法在 mmWave MIMO 系統中的 achievable rate 表現。論文提出之 **SIC-based Hybrid precoding** (藍色方形線) 於 Partially-connected 架構下，性能接近 Optimal unconstrained precoding (sub-connected)，且明顯優於 Conventional analog precoding (紫色三角形線)。

結果證明 Partially-connected 架構結合高效 precoder 設計 (如 SIC-based 方法)，可在硬體複雜度與功耗大幅降低下，仍達成接近 optimal 效能，為 mmWave Multi-User Massive MIMO 系統之實用選擇之一。

優點：

- 硬體成本低：相位移器數 $O(N_{antennas})$ ，Routing 簡單
- 功耗低：整體系統能效高，適合移動裝置與基地台應用
- 易於大規模實作

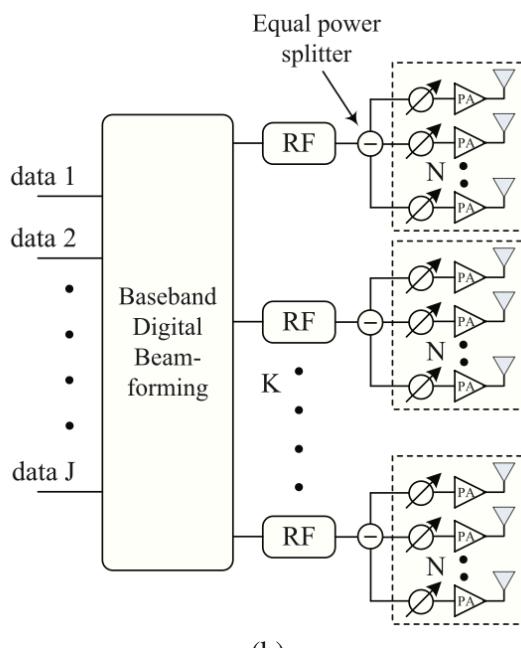
缺點：

- 波束靈活度下降：波束成形自由度受限
- MUI suppression 能力下降：多用戶場景需更複雜 precoder 設計補償
- 固定連接限制系統 adaptivity，特別是在高速變化通道環境（如 high-mobility 場景）下，系統性能易受影響

4.1.3 Dynamic Hybrid Precoding

說明：

Dynamic Hybrid Precoding 近年被提出作為進一步提升 Hybrid precoding 效能與靈活度之設計方案。相較於 Fixed Fully-connected 或 Partially-connected 架構，Dynamic Hybrid Precoding 允許 RF chain 與天線之連接關係可動態調整（如透過 switch network 或 reconfigurable phase shifter network），使系統能根據通道狀態自適應調整 precoding 架構，提升波束靈活度與系統效能



在該架構下，系統發射訊號模型可表達為：

$$y_j = \mathbf{v}_j^* \mathbf{H}_j \mathbf{W} \mathbf{F} \mathbf{s} + \mathbf{v}_j^* \mathbf{n}_j, \quad \forall j \in \mathcal{J},$$

Hybrid precoding 設計主要目標為提升系統 sum-rate，同時考量能量效率。在論文中，數位precoder 使用 Zero-Forcing (ZF) 設計如下： $F = H^*(HH^*)^{-1}\Lambda$ ，類比precoder透過動態配置subarray與 RF chain 之連接狀態 (switch matrix)，自適應最佳化 beam pattern，以提升 dominant path 能量捕獲能力，並改善 Multi-user interference (MUI) 抑制效果。

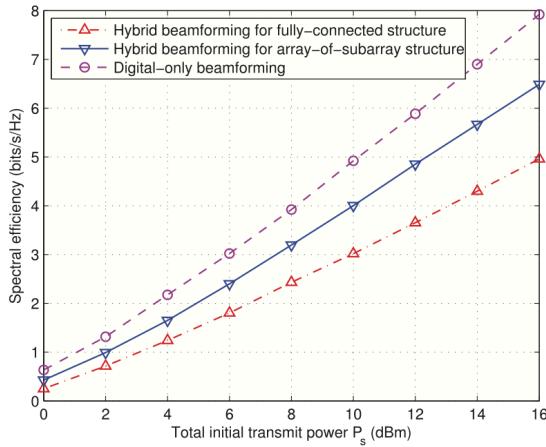


Fig. 3. System spectral efficiency versus total initial transmit power.

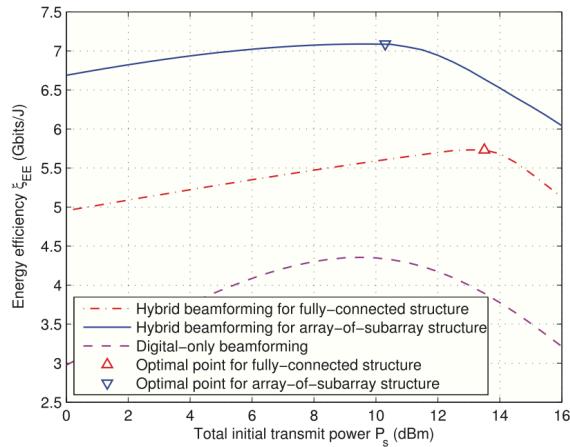


Fig. 4. System energy efficiency versus total initial transmit power.

優點：

- 波束靈活度大幅提升，可動態適應通道變化
- 有助於 Multi-user 系統之 MUI suppression
- 適用於高 mobility 場景（如 vehicular mmWave 通訊）
- 整體性能可接近 Fully-connected precoding，且硬體成本仍低於 Fully-connected 固定架構

缺點：

- Switch network 設計需高效，增加控制複雜度
- 系統 reconfiguration latency 需控制，避免影響性能
- 優化問題複雜，需設計高效演算法（greedy search、ML-based dynamic precoding）

4.1.4 Low Complexity Hybrid Precoding Algorithms

說明：

Hybrid precoding 設計中，低複雜度演算法為實現大規模 Multi–User Massive MIMO 系統之關鍵。由於 optimal Hybrid precoding 問題通常為non convex問題，直接求解計算負擔極高，難以滿足實時需求。因此，眾多研究提出 **Low Complexity Hybrid Precoding Algorithms**，以有效降低 precoding 設計之計算成本，提升系統可實作性與適應性。

系統模型可表示為

$$\mathbf{y} = \sqrt{P} \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{MS}*} \mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}*} \mathbf{H} \mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{BS}} \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{BS}} \mathbf{s} + \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{MS}*} \mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}*} \mathbf{n}.$$

為以低計算成本求解以下 precoding 優化問題：

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}\star}, \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{MS}\star}) = \\ \arg \min_{\mathbf{F}_{\text{opt}}} \|\mathbf{F}_{\text{opt}}^{\text{MS}} - \mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}} \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{MS}}\|_F, \\ \text{s.t. } [\mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}}]_{:,i} \in \left\{ [\mathbf{A}_{\text{can}}]_{:,l} \mid 1 \leq l \leq N_{\text{can}} \right\}, \\ \|\mathbf{F}_{\text{RF}}^{\text{MS}} \mathbf{F}_{\text{BB}}^{\text{MS}}\|_F^2 = N_S. \end{aligned} \tag{16}$$

Matching Pursuit / Basis Pursuit 類方法核心思路：

- 逐步 greedy 地從 codebook 中挑出最佳 beamforming vector
- 達成 low complexity precoder 設計 → 避免解 full non-convex optimization

代表性方法：

- Alternating Minimization (交替最小化)**：將 precoding 優化問題拆解為數位 precoder 與類比 precoder 交替優化，快速收斂，計算負擔低。
- Codebook-Based Hybrid Precoding**：利用預設 precoding codebook 快速選取 precoder，適合低延遲場景。
- Deep Learning-Based Hybrid Precoding**：利用深度學習模型學習 precoding 函數，可即時推斷 precoder，適應高速變化頻道。

優點：

- 大幅降低 precoding 設計計算成本
- 可適應大規模天線系統
- 易於實時實作，適用於 Multi–user Massive MIMO 場景

- 可與各種 Hybrid precoding 架構靈活結合

缺點：

- Alternating Minimization 難以保證全局最優解
- Codebook-based 方法性能受限於 codebook 設計
- Deep Learning 方法需大量訓練

4.2 小結

Hybrid precoding 是推動 Multi–User Massive MIMO (MU–Massive MIMO) 系統實用化之關鍵技術之一，針對不同應用場景可靈活選擇架構與優化方法，達成系統性能、能效與實作成本之最佳平衡。

總結分析：

- **Fully-connected**：理論性能佳，工程上多作為 baseline
- **Partially-connected**：實作成熟，能效高，商用 prototype 採用主流
- **Dynamic Hybrid**：學研前沿，適合未來高 mobility / AI 驅動場景
- **Low complexity algorithms**：必備技術，保證 MU 系統實時性與適應性

4.3 Reference :

- [1] O. E. Ayach, S. Rajagopal, S. Abu-Surra, Z. Pi, and R. W. Heath, "Spatially Sparse Precoding in Millimeter Wave MIMO Systems," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 13, no. 3, pp. 1499–1513, Mar. 2014.
- [2] X. Gao, L. Dai, S. Han, C. I, and R. W. Heath, "Energy-Efficient Hybrid Analog and Digital Precoding for MmWave MIMO Systems With Large Antenna Arrays," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 34, no. 4, pp. 998–1009, Apr. 2016.
- [3] C. Lin and G. Y. Li, "Energy-Efficient Design of Indoor mmWave and Sub-THz Systems With Antenna Arrays," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 15, no. 7, pp. 4660–4672, Jul. 2016.
- [4] A. Alkhateeb, O. E. Ayach, G. Leus, and R. W. Heath, "Hybrid precoding for millimeter wave cellular systems with partial channel knowledge," in *Information Theory and Applications Workshop (ITA)*, 2013.

purely digital/analog only) and write a brief technical survey. (clearly showcasing the reference sources)

5. **(25%)** Given a desired signal from $\theta_0 = 0^\circ$ and two interferers, design three receive beamformers based on the MVDR, MSINR, and MMSE beamforming methods, respectively. The received signal $\mathbf{x}(k)$ is generated according to the following formula:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{a}(\theta_0)s_p(k) + \mathbf{a}(\theta_1)s_1(k) + \mathbf{a}(\theta_2)s_2(k) + \mathbf{n}(k), k = 1, \dots, 10^4$$

where

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{j\pi\sin(\theta)}, \dots, e^{j(N-1)\pi\sin(\theta)}]^T,$$

$s_p(k)$ is the pilot signal known to the receiver, $\mathbf{n}(k)$ is AWGN, and the number of receive antenna $M = 16$. Please answer the following questions: (You should use the signal \mathbf{x} and s_p given in the attached “signal.mat” file to answer the questions)

- (a) **(5%)** Plot the power of the beampattern ($|\mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}|^2, \theta = -90^\circ, \dots, 89^\circ$) of the beamformers, e.g., the figure in p. 23, Chapter 4. (y-axis: Power (dB); x-axis: Angle (degree))
- (b) **(5%)** Plot the phase of the beampattern ($\angle \mathbf{a}^H(\theta)\mathbf{w}, \theta = -90^\circ, \dots, 89^\circ$) of the beamformers. (y-axis: Phase (radian); x-axis: Angle (degree))
- (c) **(5%)** Observe the results you get in (a) and (b), where are the interferers? ($\theta_1 = ?, \theta_2 = ?$)
- (d) **(5%)** Based on the results you get in (a) and (b), are the interferences coherent with the desired signal? Why?
- (e) **(5%)** Compare the results of MVDR and MMSE beamformers in (a) and (b), which beamformer gives better SNR? Why?

(a)

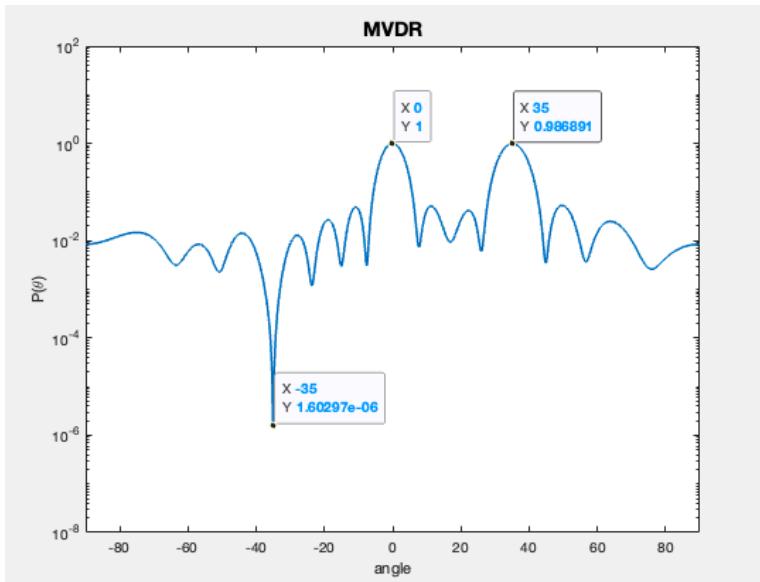


Fig 1

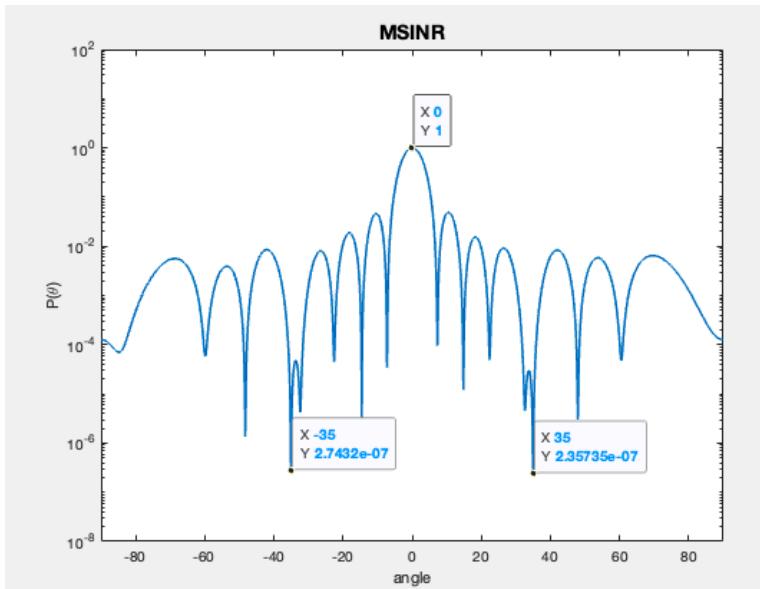


Fig 2

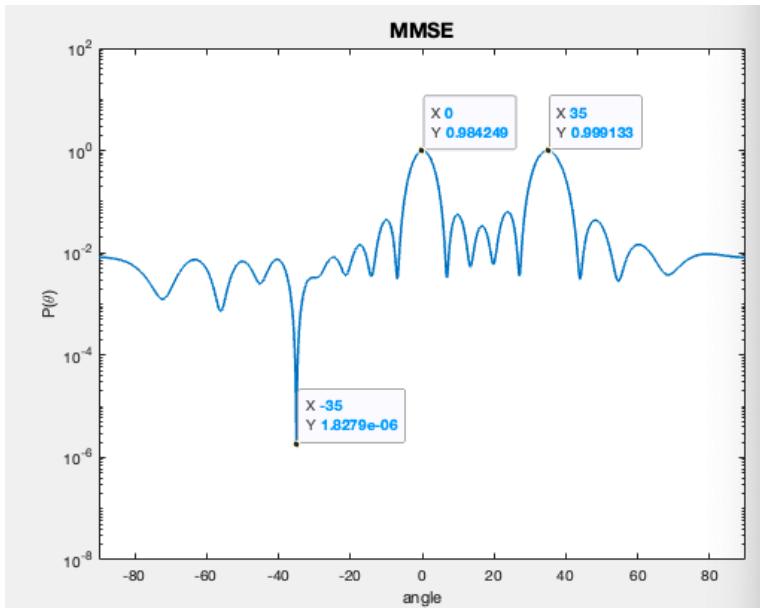


Fig 3

(b)

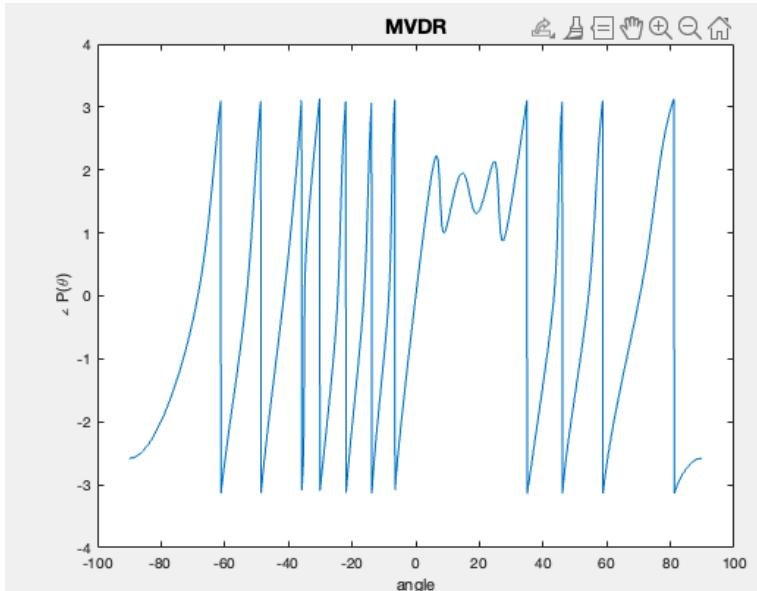


Fig 4

MSINR

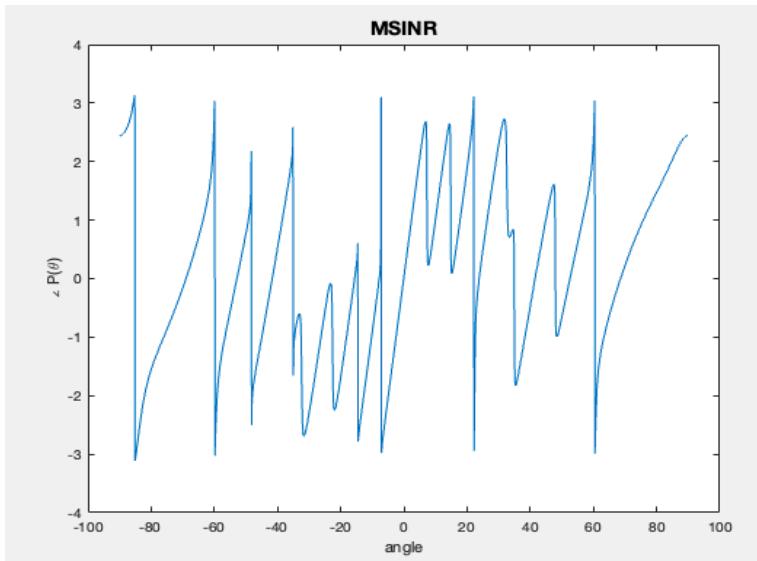


Fig 5

MMSE

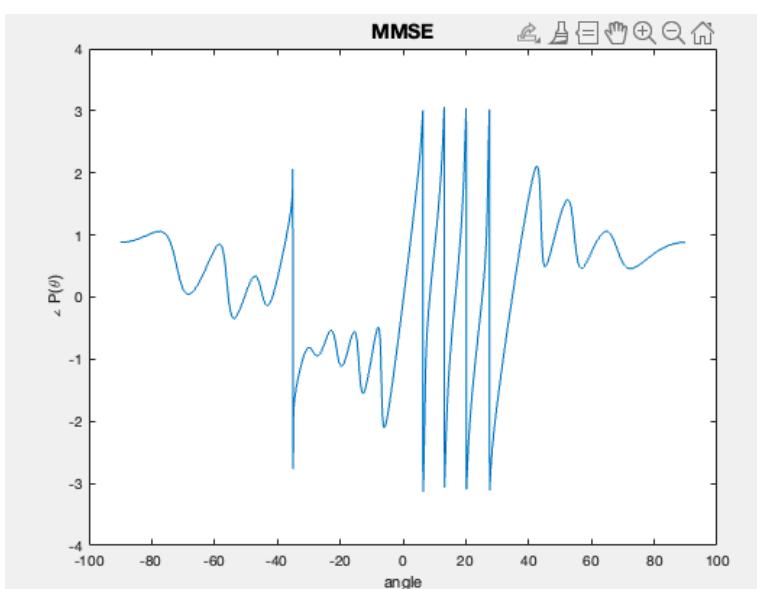
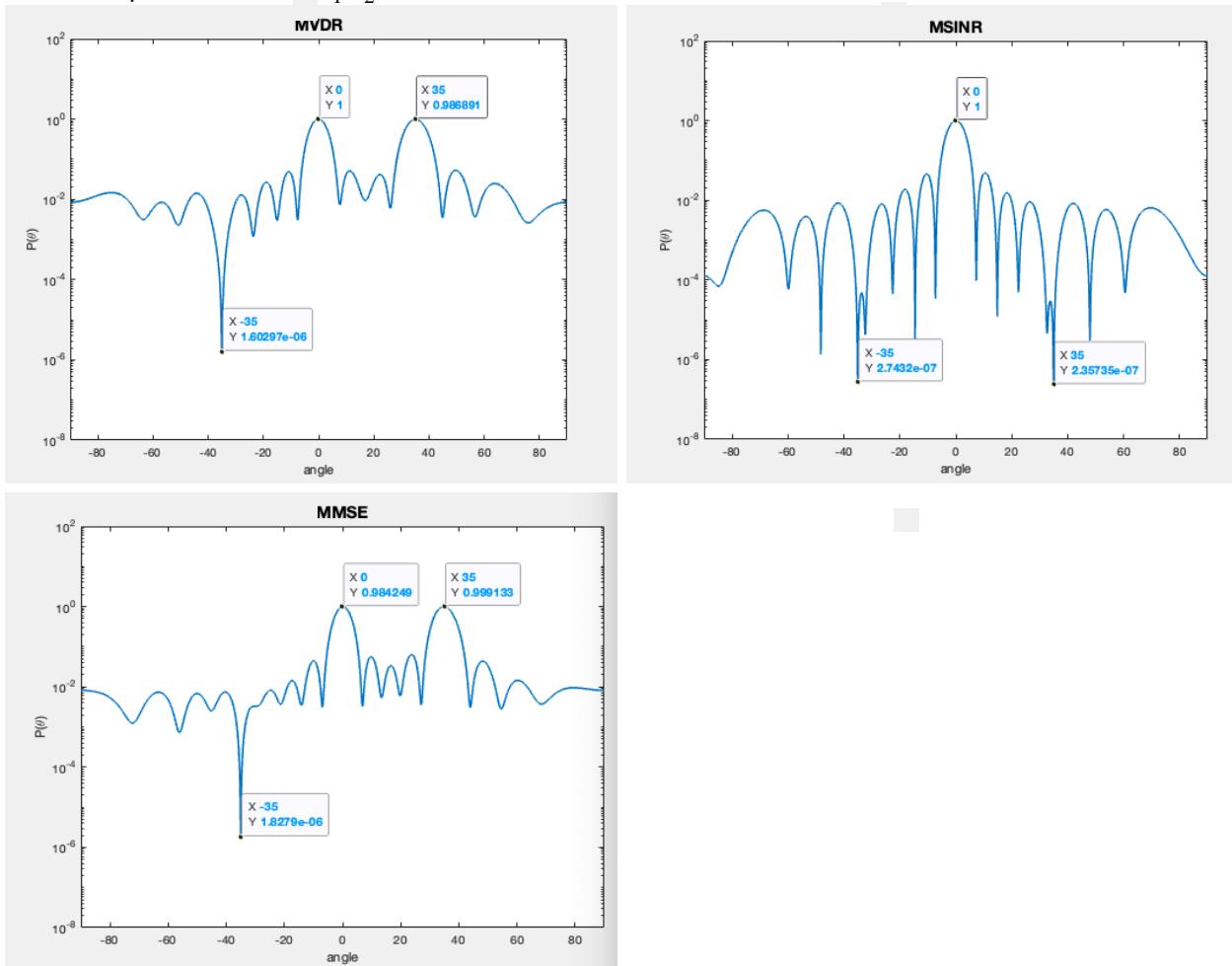


Fig 6

(c)根據(a)(b)的結果，看power圖，除了0度（主波數）方向之外，有兩個明顯的高點，即為干擾方向 (lobe peak)，去回推 θ_1, θ_2



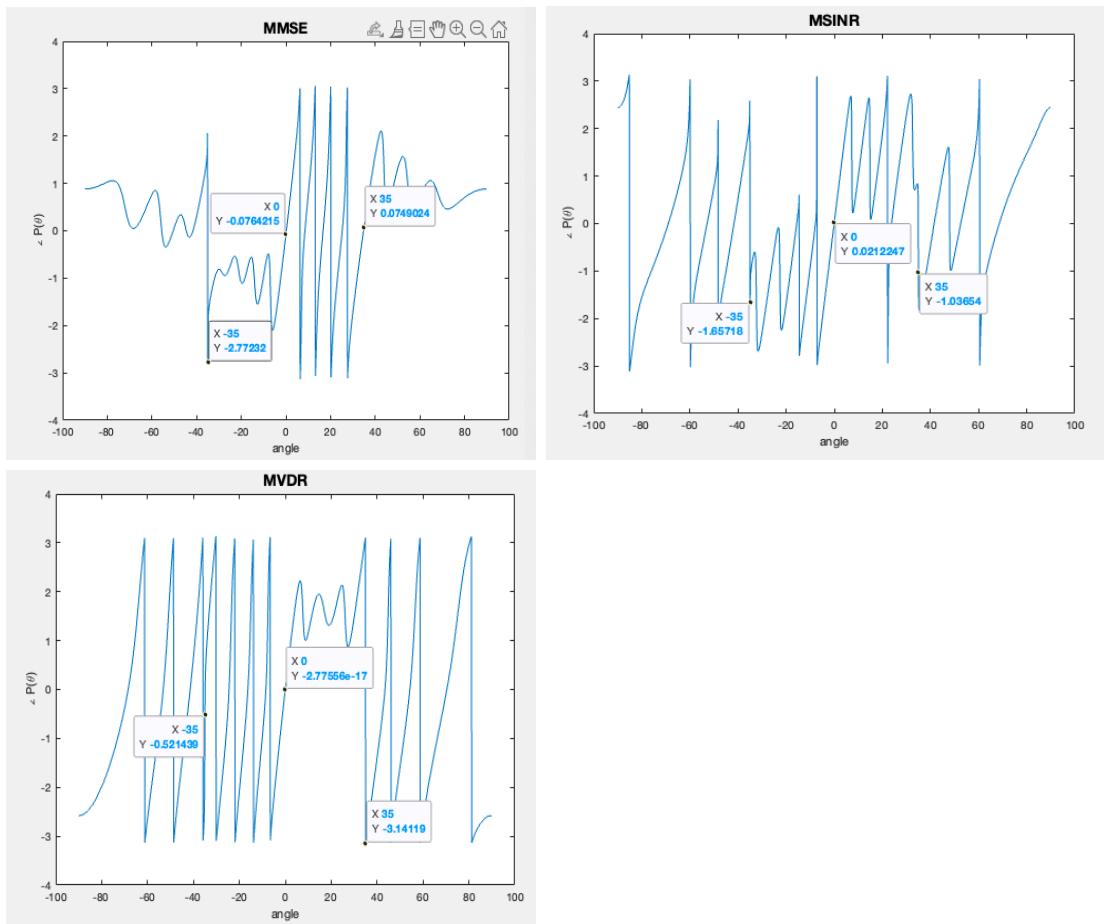
根據 MVDR、MSINR 與 MMSE 的波束圖觀察結果，可以明顯看出在 $\theta_1 \approx -35^\circ$ 和 $\theta_2 \approx +35^\circ$ 位置出現明顯的 deep null。

這代表該兩個方向上存在干擾訊號，推測兩個干擾源分別位於約 -35° 與 $+35^\circ$ 角度附近。

(d)干擾訊號與desired signal若為 coherent，代表兩者之間具有高度相關性（存在特定比例關係），常見於訊號經由multipath抵達接收端，導致以不同到達角度接收相同訊號。

在此情況下，若干擾與 desired signal coherent，beamformer之效能通常會明顯下降，原因如下：

- MVDR beamformer：在面對 coherent 干擾時，由於干擾與 desired signal 線性相關，MVDR beamformer 為了最小化總接收功率，容易將 desired signal 和 coherent 干擾做破壞性相加，進而破壞主波束形狀，且通常無法在干擾方向形成明確的 deep null。
- MMSE beamformer：由於 MMSE 之設計目標為 MSE，若干擾為 coherent，MMSE beamformer 會試圖同時接收 desired signal 與干擾訊號，可能在干擾方向形成建設性相加，無法有效抑制該方向能量。



觀察本題(a)、(b)結果：

- 在 **Power beam pattern** 中，MVDR、MSINR、MMSE beamformer 於 $\theta_1 \approx -35^\circ$ 方向皆能形成明顯的 deep null，主波束方向 $\theta_0 = 0^\circ$ 則保持。而於 $\theta_2 \approx +35^\circ$ 方向，雖能觀察到一定程度之能量抑制，但抑制程度相較 θ_1 為輕，特別在 MMSE 與 MVDR beamformer 中該方向仍保有較明顯能量，**此現象可能反映該方向干擾訊號具備部分 coherent 成分。**
- 在 **Phase beam pattern** 中，於 $\theta_1 \approx -35^\circ$ 處觀察到 phase 劇烈變化或跳動，為 beamformer 於 non coherent 干擾方向進行 nulling 常見現象。而於 $\theta_2 \approx +35^\circ$ 處，特別在 MMSE beamformer 圖中 phase 變化相較 θ_1 上較為平穩，且搭配 power pattern 中該方向未形成完全 deep null，整體行為較符合 coherent 干擾訊號造成 beamformer 無法完全 suppress 該方向能量、phase 呈現平滑變化之特性。

綜合分析結果可推測，干擾訊號於 $\theta_1 \approx -35^\circ$ 為 **non-coherent 干擾**，而於 $\theta_2 \approx +35^\circ$ 則**可能包含 coherent 成分**，因此 beamformer 於該方向抑制效果相對有限，phase 圖亦呈現 coherent 行為。

(e)

於 $\theta_0 = 0^\circ$ 方向皆能有效保留 desired signal，然而在干擾方向 $\theta_2 \approx +35^\circ$ ，由於可能存在 coherent 成分，兩者表現出明顯差異：

1. MVDR beamformer 之目標為 maximize SINR under distortionless constraint，於 non-coherent 干擾方向（如 $\theta_1 \approx -35^\circ$ ）能有效 suppress 能量，提升 SNR。然而於 $\theta_2 \approx +35^\circ$ 方向，coherent 成分導致 MVDR 嘗試 suppress 該方向能量時產生破壞性相加現象，進而影響 desired direction 增益，整體 SNR 因而下降。
2. MMSE beamformer 則以最小化整體 mean square error 為目標，當干擾訊號具 coherent 成分時，MMSE 允許在 desired direction 與 coherent 干擾方向進行建設性相加，保留 desired signal 能量之同時部分接受 coherent 干擾，進而提升整體接收品質與 SNR。
3. 綜合比較，在本題情境下，由於 θ_2 方向可能存在 coherent 干擾成分，MMSE beamformer 於 desired direction 保留較多訊號能量，整體 SNR 優於 MVDR beamformer，符合設計理論預期。

6. (30%) Consider four MIMO detectors: MMSE detector, MMSE-OSIC detector, K -best sphere decoder, and Maximum-likelihood (ML) detector. Basic assumptions and some parameters are given as follows:

- Four antennas are employed at both Tx and Rx.
- The channel is assumed to be flat fading.
- Four data streams are transmitted and detected.
- QPSK modulation is adopted for each data stream.
- CSI is available at Tx, and precoding is adopted before transmission.
- A codebook of precoders is given (see the Matlab sample program).
- Select a precoder according to the maximum capacity criteria in p. 175 of Chapter 4.
- The selected precoder is known to Rx.
- $K= 6$ is adopted for the K -best sphere decoder.
- AWGN is assumed at Rx.
- The decision is performed as follows:

$$\hat{x}_R = \begin{cases} 1, & \text{if } \text{Real}(x) \geq 0 \\ -1, & \text{if } \text{Real}(x) < 0 \end{cases}, \quad \hat{x}_I = \begin{cases} 1, & \text{if } \text{Imag}(x) \geq 0 \\ -1, & \text{if } \text{Imag}(x) < 0 \end{cases}.$$

The channel matrix of each device is modeled as $\mathbf{H}_i = \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H}_{w,i} \mathbf{R}_t^{1/2}$, $i = 1, 2$,

where \mathbf{R}_t , \mathbf{R}_r , and \mathbf{H}_w are the correlation matrix at the Tx, the correlation matrix at the Rx, and a matrix of i.i.d. complex Gaussian random variables with zero mean and unit variance. Effective channel correlation can be adjusted by choosing a parameter ρ in \mathbf{R}_t and \mathbf{R}_r (see the Matlab sample program).

Conduct the following simulations under different channel conditions:

- (a) (7%) Uncorrelated channel with $\rho = 0$.
- (b) (7%) Medium-correlation channel with $\rho = 0.5$.
- (c) (7%) Fully correlated channel with $\rho = 1$.

Now, instead of using codebook-based precoding, please implement the **singular value decomposition (SVD) precoding** on p.169 of Chapter 4

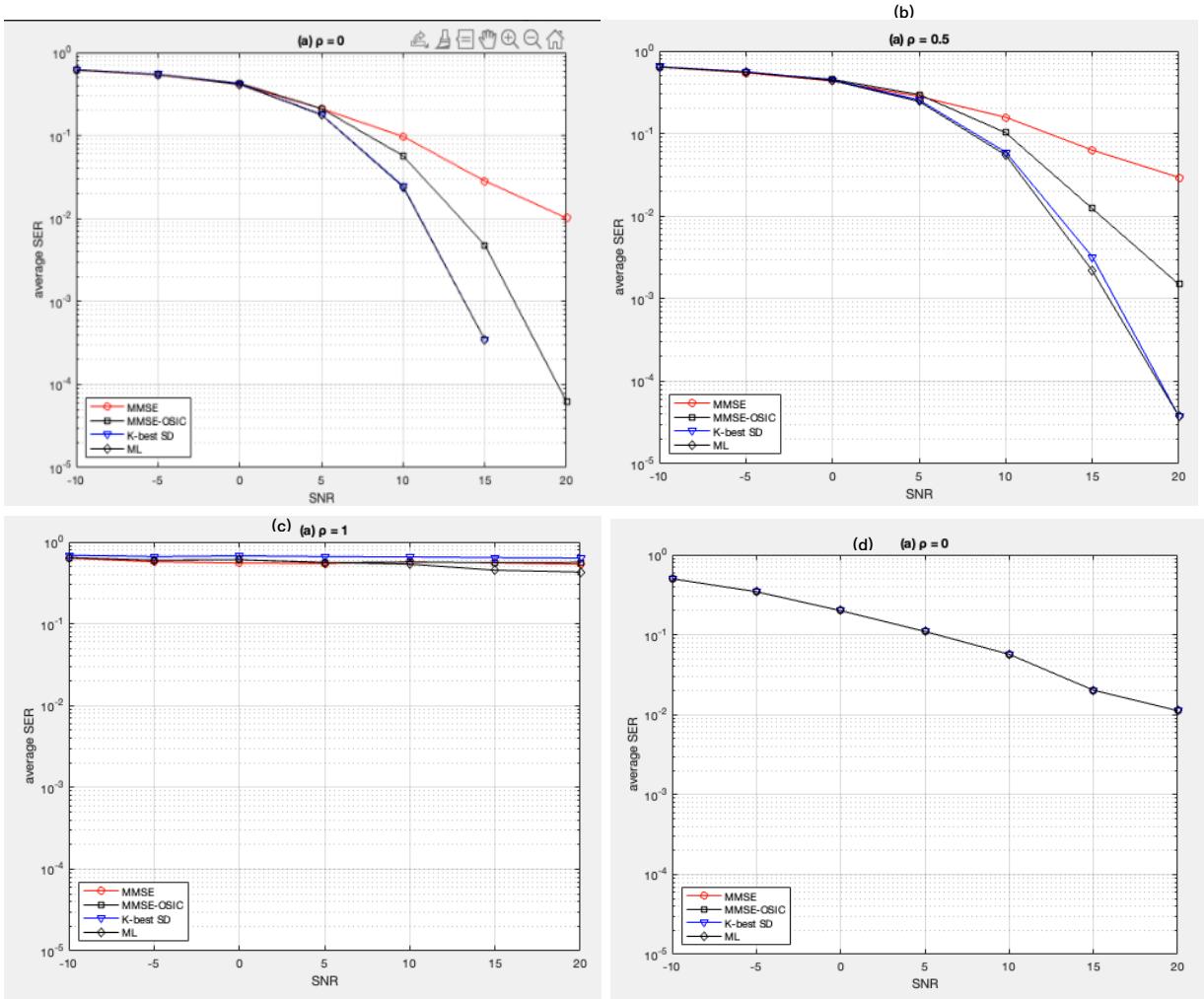
- (d) (9%) Repeat the simulation of (a) with SVD precoding. Is there any difference between the performance of the four detectors? Why?

For each of (a)-(d), plot the average SER (i.e., SER averaged over different data

streams) versus SNR for each of the four detectors and **COMMENT** on your results.

Note: the range of SNR is -10 dB to 20 dB with an increment of 5 dB.

6.



由 (a)(b)(c) 可觀察到

- MMSE detector 表現最差，主要因為 MMSE 僅進行linear等化，未能有效抑制ISI。
- MMSE-OSIC 相較於 MMSE，多採用 SIC技術，透過逐層檢測與消除已檢測符號對後續符號的干擾，雖然計算複雜度略高，但有效提升檢測性能。
- ML detector 為理論上的 optimal solution，透過窮舉所有可能的符號組合，選取最小 Euclidean distance 之解，能夠達到最佳的SER)表現，但complexity呈指數增長。
- K-best Sphere Decoder (K-best SD) 則為 near-optimal solution，透過剪枝機制降低搜尋空間，在複雜度與性能之間取得trade off，因此其表現與 ML detector 接近。
- 在不同channel correlation, ρ 下，可發現當 ρ 越低，SER 表現越佳。原因在於通道相關性越低時，通道矩陣 H 的 rank 越大，代表系統可利用之 diversity order (空間自由度) 越高，能有效降低 error rate。反之，當 ρ 越高，通道之間趨於相似， H 的 rank 趨向降低，diversity 亦降低，進而使 SER 表現變差。

(d) 觀察到四種 detector 表現趨近一致，進一步分析 SVD precoding 影響可發現，透過 SVD 分解後 $H=U\Sigma VH$ ，precoder 直接對應至 V 前 Da_Str 個向量，使得 effective channel 轉換為 diagonal matrix Σ 。然而當某些 singular value (channel gain) 極低時，該通道路徑幾乎無法承載有效訊號能率，導致接收訊號能率極低，易受雜訊影響進而產生 symbol error。此外，SVD precoding 將原本多輸入 MIMO 系統轉換為獨立 SISO 通道，降低了系統能利用的 **spatial diversity**，因此當特定 singular value 過低時，系統缺乏額外 diversity 以對抗低 channel gain 導致的效能變差，進而使四種 detector 在此情境下皆無法顯著改善 SER 表現。