

1. (30%) Use the demodulated signal in matrix form on page 64 of Chapter 3 to show that the received signal  $Y_k$  with insufficient CP is given by

$$Y_k = H_k X_k + \sum_{k'=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'}^{(-)} - \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ICI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'} + N_k,$$

where  $\mathbf{H}_{ISI}$  is a  $N \times N$  upper triangular Toeplitz matrix with first row being

$[0, \dots, 0, h[L_h-1], \dots, h[N_g+1]]$ , and  $\mathbf{H}_{ICI} = \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{J}^{Ng}$ .

$$Y_k = H_k X_k + \sum_{k'=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ISI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'}^{(-)} - \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{F} \mathbf{H}_{ICI} \mathbf{F}^{-1}]_{k+1, k'+1} X_{k'} + N_k$$

同一個OFDM symbol ISI  
乘上不同freq載波

$H_{ISI}$ :  $N \times N$  upper triangular Toeplitz matrix with first row  $\rightarrow 0, 0, \dots, h[L_h-1], \dots, h[N_g+1]$

$$H_{ISI} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h[L_h-1] & h[L_h-2] & \cdots & h[N_g+1] \\ 0 & \ddots & & 0 & h[L_h-1] & h[N_g+2] & \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & h[L_h-1] \end{bmatrix}$$

$$H_{ICI} = H_{ISI} \mathbf{J}^{Ng}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{exactly one entry of } 1 \text{ in each row and column, with other entry } 0.$$



若CP是夠的

$$\Gamma = [0_{N \times Ng} \quad I_{N \times N}] \quad G = \begin{bmatrix} h[0] & 0 & \cdots & 0 \\ h[1] & h[0] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h[N_g] & h[N_g-1] & \cdots & h[0] \end{bmatrix} \quad G^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & h[L_h-1] & \cdots & h[1] \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{若 } Ng \geq L_h - 1 \Rightarrow \Gamma (G + G^{(-)}) = \Gamma G + \Gamma \overset{\uparrow}{G^{(-)}} [0_{N \times Ng} \quad I_N] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$I_{S2}$  can be eliminated.

$$Y = F \cdot \underbrace{\Gamma G \Theta F^{-1}}_u X = F \cdot \underbrace{H_e F^{-1}}_u X = [Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}]^T$$

但若CP不夠

$$\begin{aligned} Y &= F \cdot \Gamma G \underbrace{u}_u + F \cdot \Gamma G^{(-)} \underbrace{u^{(-)}}_u + N \\ &= F \cdot \underbrace{\Gamma G \Theta F^{-1}}_u X + F \cdot \underbrace{\Gamma G^{(-)} \Theta F^{-1} X^{(-)}}_u + N \end{aligned}$$

$$= F \cdot \underbrace{H_{e,CP}}_{H_e} F^{-1} X + F \cdot \underbrace{H_{e,CP}^{(-)}}_{H_e} F^{-1} X^{(-)} + N$$

$$H_{e,CP} = H_e - \begin{bmatrix} 0 & \cdots & h[L_h-1] & h[L_h-2] & \cdots & h[N_g+1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ddots & 0 & h[L_h-1] & \ddots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = H_e - H_{ISI} J = H_e - H_{ICI}$$

$$H_{e, CP}^{(-)} = H_{ISI}$$

$$Y = F(H_e - H_{ICL}) F^{-1} X + F H_{ISI} F^{-1} X^{(+)}) + N$$

$$Y = \underbrace{F H_e F^{-1} X}_{\text{H}_e X} - F H_{ICL} F^{-1} X + F H_{ISI} F^{-1} X^{(+)}) + N$$

$$Y = \underbrace{H_e X}_{\text{H}_e X} - F H_{ICL} F^{-1} X + F H_{ISI} F^{-1} X^{(+)}) + N$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H_1 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & H_2 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & H_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{N+1} \end{bmatrix} - F H_{ICL} F^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{N+1} \end{bmatrix} + F H_{ISI} F^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{(+)} \\ X_2^{(+)} \\ \vdots \\ X_{N+1}^{(+)} \end{bmatrix} + N$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_0 X_0 \\ H_1 X_1 \\ \vdots \\ H_{N+1} X_{N+1} \end{bmatrix} - F H_{ICL} F^{-1} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{N+1} \end{bmatrix} + F H_{ISI} F^{-1} \begin{bmatrix} X_1^{(+)} \\ X_2^{(+)} \\ \vdots \\ X_{N+1}^{(+)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_0 \\ \vdots \\ N_{N+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Y_k = H_k X_k - \sum_{k'=0}^{N-1} [F H_{ICL} F^{-1}]_{k+1, k+1} X_{k'} + \sum_{k'=0}^{N+1} [F H_{ISI} F^{-1}]_{k+1, k+1} X_k^{(+)} + N_k$$

where  $[A]_{i,j}$  :  $(i, j)$  th entry of A      QED

2. (70%) Consider an OFDM system with the following scenario:

(i) An OFDM signal is transmitted via 9 independent Rayleigh multipath fading paths with path delays being uniform over  $[0, \dots, 9T_d]$  (i.e.,  $L_h = 10$ ), where  $T_d$  is the sampling duration. The fading gains are assumed i.i.d. complex Gaussian random variables with zero-mean and unit variance, and treated as constant over a single packet due to the slow fading assumption (but vary from packet to packet).

(ii) The adopted system parameters are as follows:

- Number of subcarriers:  $N = 256$
- OFDM SNR:  $\text{SNR}_i = \sigma_s^2 / \sigma_n^2$  with  $\sigma_s^2$  and  $\sigma_n^2$  denoting signal and AWGN power (note the SNR definition for OFDM)
- Data modulation: QPSK
- Length of CP:  $N_g = 16$
- Channel is invariant during each packet
- 10 OFDM symbols per packet

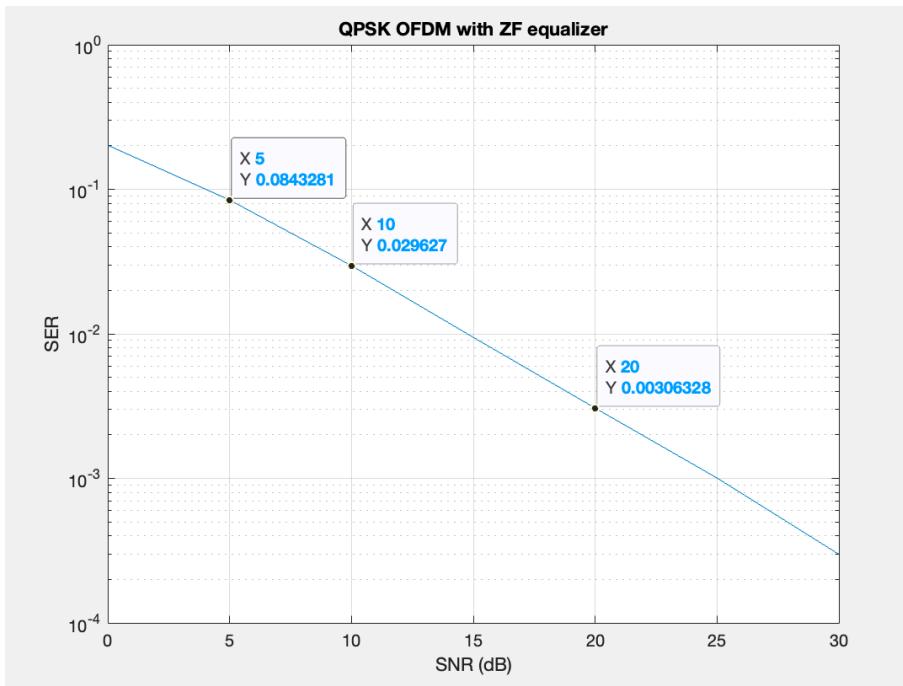
OFDM傳輸環境：

- 用9個Rayleigh multi path fading，delay均勻分布在 $[0, \dots, 9Ts]$ ，最大delay spread對應到 $L_h = 10$
- Frequency selective channel
- Slow fading assumption ->代表通道固定，在每個pkt內

Assuming perfect channel estimation, perform the following tasks and **COMMENT** on your results.

(a) Plot the SER curve for  $\text{SNR}_i = 0 : 5 : 30 \text{ dB}$  using 1000 packets.

參數	值	說明
Subcarrier N	256	為了抵抗multi-path失真
CP長度 $N_g$	16	$N_g \geq L_h - 1 = 9$ ，滿足避免ISI
每個封包OFDM	10	去統計平均SER
調變方式	QPSK	每個symbol 2 bits
SNR range	0 : 5 : 30 dB	



comment :

1. SER (y軸為log scale) 隨SNR變高而呈現指數下降

- 在AWGN+QPSK情況下

$$\text{QPSK的 } P_{SER} = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) - \left(Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)\right)^2 = 2Q\left(\sqrt{2SNR}\right) - \left(Q\left(\sqrt{2SNR}\right)\right)^2$$

當在SNR高於10dB時， $Q(x) \approx \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$ ，代表 $P_{SER} \propto e^{-kSNR}$ ，那SER會呈現指數遞減，在log-scale上幾乎呈現直線的斜率。

- 在Rayleigh fading+QPSK情況下

$$P_{SER} \approx \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{SNR}{2 + SNR}}\right)$$

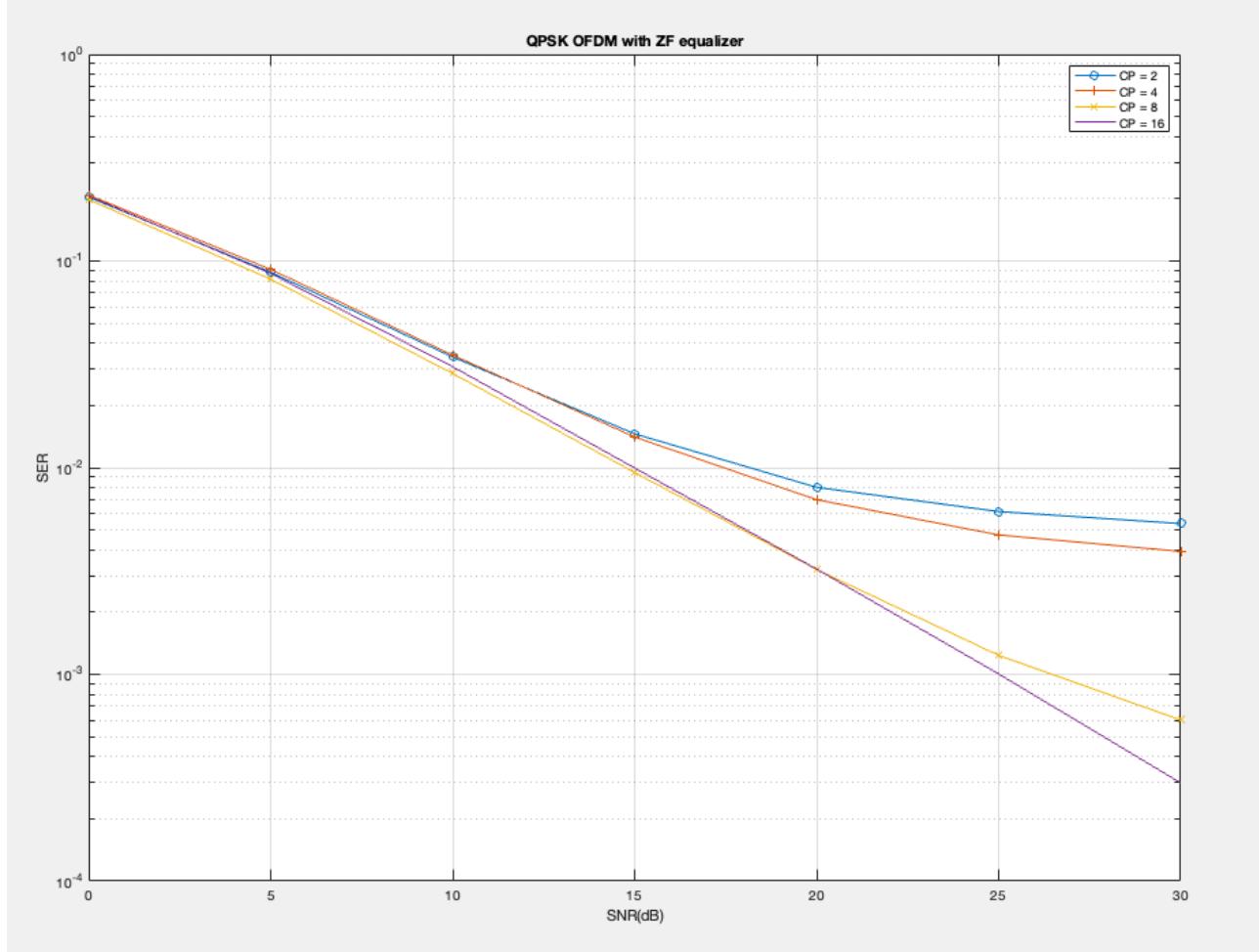
即使在Rayleigh fading中，中高SNR，錯誤率仍會下降的很快，因為ZF原本可能會放大雜訊的效應變弱了。

- 雖然處於 Rayleigh 多徑衰減通道中，但透過subcarrier分解與 ZF，每個subcarrier近似處於flat fading環境，使得整體 SER 與 AWGN 下的 QPSK 表現趨近一致，特別在中高 SNR 區域 (如  $SNR > 10$  dB) 下降斜率明顯

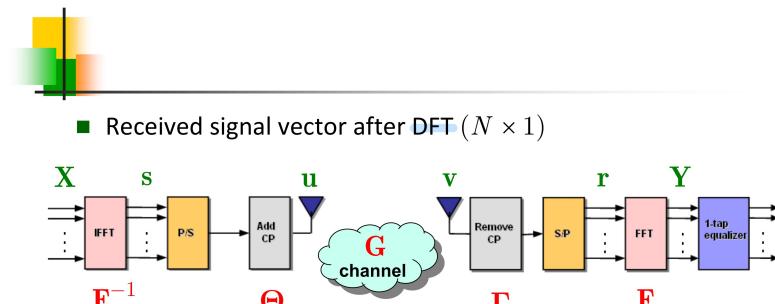
2. multipath和子載波數

- 共有9條獨立multipath，這時候會產生frequency selective channel，如果子載波數不足，那頻率的解析度就不足，會造成ICI
- 如果滿足 $N >> Lh$ ，每個子載波頻寬窄 → 可假設「每個子載波只受到一個通道增益影響」 (Flat fading on subcarrier)
- $N=256$ ，則頻率解析度 $1/N = 0.0039$ ，可以解決multipath

(b) Repeat (a) with different CP lengths:  $N_g = 16, 8, 4$  and  $2$ .



這題主要是比較不同的CP情況下，SER的變化

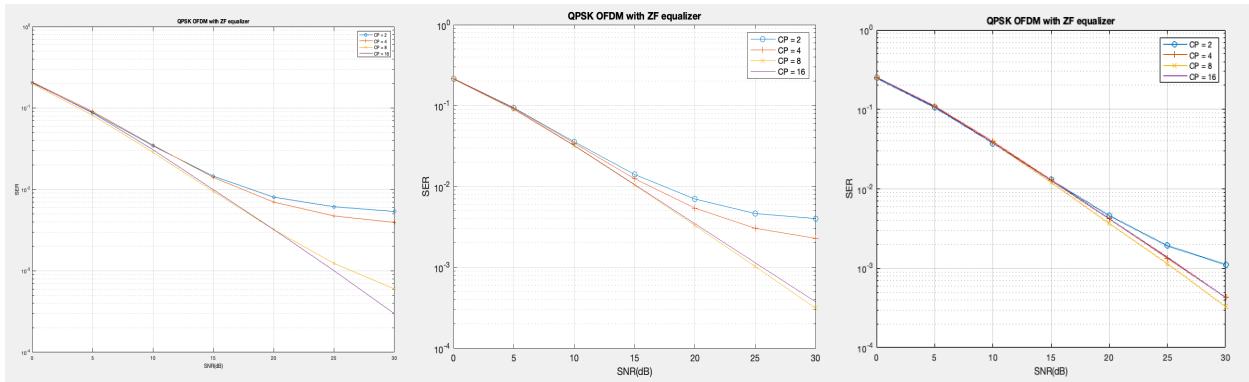


$$\begin{aligned} \mathbf{Y} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}_e \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{X} \\ &= [Y_0, Y_1, \dots, Y_{N-1}]^T \end{aligned}$$

Comment:

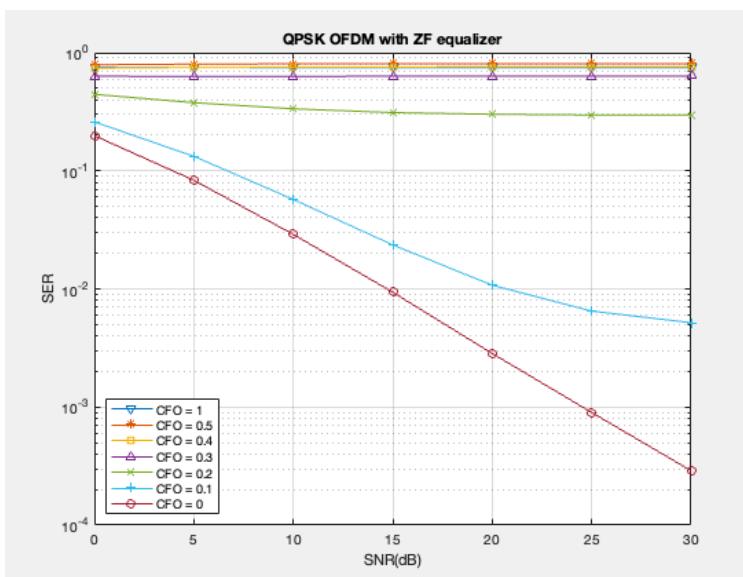
- 當CP長度不夠時， $H_e$ 就不會是circulant matrix，那 $H = FH_eF^{-1}$ 就不會是一個對角化矩陣，也就是說這時候equalizer就沒辦法很簡單的用one tap equalizer解決 ( $Y_k = H_k X_k$ )，與此同時也會產生ICI.ISI的問題，如question 1所證明的
- 這題給的 $L_h = 10$ ，所以給cp至少要大於等於9 ( $N_g \geq L_h - 1 = 9$ )

- 雖然縮短 CP 可以減少傳輸開銷（提升頻譜效率），但過短的 CP 將無法完整涵蓋通道延遲擴展，導致破壞 circular convolution 假設並產生 ICI，進而使 SER 性能惡化。
  - A. 當  $N_g = 8 \text{ or } 16$ ，曲線下降趨勢與之前相近，表示 ICI 干擾影響仍可接受。
  - B. 當  $N_g = 4$ ，明顯開始偏離理論斜率，尤其在中高 SNR 時仍無法壓低 SER，表示錯誤主要不是來自雜訊而是 ICI。
  - C. 當  $N_g = 2$  效果最差，SER 幾乎不再下降，顯示出很嚴重的 ICI 讓 detector 失效
- 可以用 TEQ 去把 channel 長度壓在 CP 內



圖中清楚展現了通道 delay  $L_h$  對 OFDM 系統容忍 CP 長度的影響。當通道愈短時，系統對 CP 長度的需求降低；而在  $L_h = 10$  的情況下，CP 長度不足將直接導致 ICI 產生，破壞正交性並降低解調效能。此結果驗證 CP 長度需依據通道環境動態調整，否則即使 SNR 再高也無法改善 SER 表現

(c) Repeat (a) with different frequency offsets:  $f_{\text{offset}} T = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$  and  $1.0$ .



觀察：

當  $\text{CFO} = 0$  (ideal)，SER 隨 SNR 增加快速下降，ZF 能準確解碼，每個子載波幾乎無互相干擾。輕微 CFO (0.1)：SER 較理想情況略高，但仍可接受。

CFO ( $\geq 0.2$ ) : 出現error floor(即使SNR繼續提高，SER卻無法再下降，而是停留在某個值的現象)

極端 CFO = 1 : BER 接近 0.5 (完全失效)。表示頻偏與子載波間距相同，完全破壞正交性 (直接抓錯載波)，救不回來。

comment :

- subcarrier間的正交性是 OFDM 的基礎，但 CFO 會導致失去正交。
- 一旦失去正交，就會產生ICI。
- 有些問題不是提高功率就能解決的，在有同步誤差的情況下 (例如這裡的 CFO)，再高的 SNR 也無法改善 SER。
- 了維持 OFDM 系統的正交性並抑制 ICI，實務上常透過插入 pilot symbol 或training symbol preamble 設計來進行 CFO estimation 與補償。