

塑性力学

1 绪论

弹性力学对所研究的对象最基本的特征做出了描述，假设物体是连续的、均匀的、各向同性的，服从线弹性(linear elasticity)规律、变形(位移和应变)是微小的，且物体内部无初应力。从学科结构的严密性和系统性来看，弹性力学是固体力学所有学科中的典范，它是学习固体力学其他分支学科的基础。

塑性力学是金属压力加工、结构极限设计、板壳理论、复合材料力学、蠕变力学、断裂力学、冲击动力学、爆炸力学以及弹塑性有限元分析等课程必不可少的基础。

脆性：物体经受变形而破坏时，变形很小就破坏。近似用弹性理论分析

韧性：物体经受变形而破坏时，变形很大才破坏称为韧性或延性。韧性物体再开始出现永久变形到最终破坏之间还有很大一段能承受载荷的能力，为发挥材料的潜力，应该应用塑性力学的分析。

1.1 塑性变形的实验观察

1.1.1 单轴拉伸（压缩）实验

弹性阶段 elastic region+初始屈服 initial yield+塑性阶段 plastic region+颈缩 necking（几何失稳 instability）

比例极限 proportional limit，弹性极限 elastic limit，屈服应力 yield stress

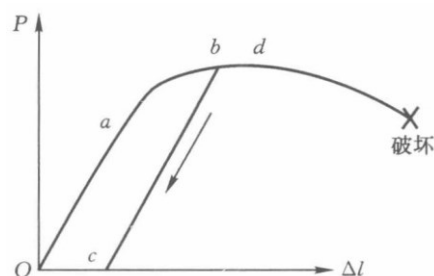


图 1.1 金属材料拉伸实验的典型载荷-伸长量曲线

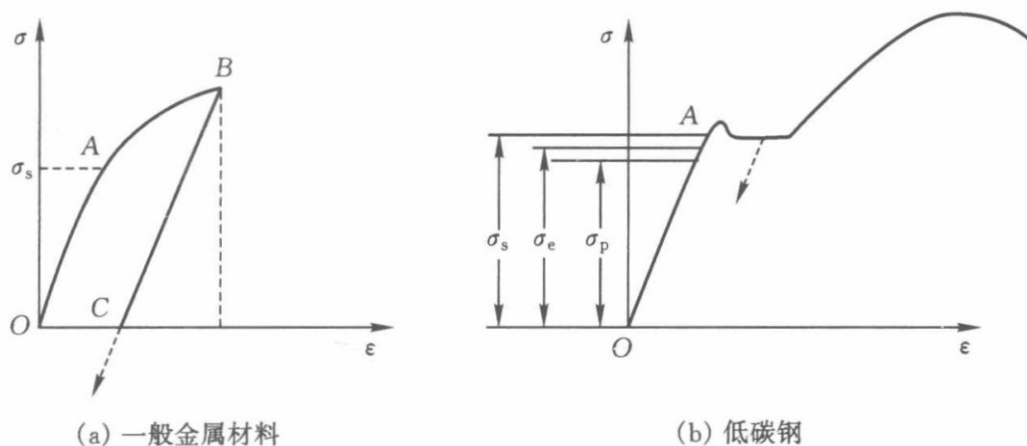


图 1.3 金属材料拉伸实验的名义应力-应变曲线

经典塑性力学采用的基本假设如下：

- ①. 材料是均匀的、连续的，在初始屈服前是各向同性的。
- ②. 基于 Bridgman 的试验结果，静水应力状态不影响塑性变形而只产生弹性的体积变化，即在塑性状态时，材料的体积是不可压缩的。换言之，塑性变形是在体积不变（不可压缩）的情况下进行的，即有 $\varepsilon_x^p + \varepsilon_y^p + \varepsilon_z^p = 0$ 。
- ③. 材料是稳定的或递增强化的。图 1.8 已经说明了在应力循环下塑性功不可逆，存在关系式 $(\sigma - \sigma_0) \cdot d\varepsilon^p \geq 0, d\sigma \cdot d\varepsilon^p \geq 0$ ，这个表达式是 Drucker 关于稳定材料塑性功不可逆在一维情况下的形式，它们是关于材料是否稳定的条件。
- ④. 材料是非粘性的，材料的力学性能与温度、时间无关。这一假设有两层含义：(a) 当温度不高、时间不长时，忽略材料的蠕变效应、松弛效应；(b) 在应变率不大的情况下，忽略应变率对塑性变形的影响，也就是说，这里主要是研究在常温、静载荷下的金属塑性特性。
- ⑤. 弹性性质与塑性变形无关，即弹性模量不随塑性变形而改变，这对金属材料是近似正确的，但是对岩土材料则会出现弹塑性耦合的情况。

1.2 应力应变简化模型（图 1.19）

1.2.1 理想弹塑性模型

对于软钢或强化率较低材料，当应变不太大时可忽略强化，而假设如图 1.19

(a) 中实线所示情形。为简单起见，考虑从零应力开始，在历史上未曾卸过载的情形，则塑性规律可写作：

$$\begin{aligned} |\varepsilon| < \varepsilon_s, \sigma &= E\varepsilon \\ |\varepsilon| \geq \varepsilon_s, \sigma &= \sigma_s \end{aligned} \quad (1.1)$$

1.2.2 线性强度弹塑性模型

$$\begin{aligned} |\sigma| < \sigma_s, \varepsilon &= \sigma / E \\ |\sigma| \geq \sigma_s, \varepsilon &= \frac{\sigma_s}{E} + \frac{\sigma - \sigma_s}{E'} \end{aligned} \quad (1.2)$$

1.2.3 幂次强化模型

$$|\sigma| = A|\varepsilon|^n, A > 0, 0 < n < 1 \quad (1.3)$$

1.3 实际工程意义

以图 1.22 所示的两端固定的等截面直杆为例，说明结构在外载荷作用下的弹塑性响应。对于由理想塑性材料制成的结构，其变形随着载荷的单调增加，依次可分为三个阶段。

首先是**弹性阶段**，结构内各部分都处于弹性状态。使结构处于弹性状态的最大载荷称为最大弹性载荷，用 P_e 表示。

接着，随着载荷的增加，结构中有一部分材料进入塑性状态，但其变形受到相邻弹性部分的约束，仍属于弹性量级，因而整个结构的变形也是弹性量级的。这一阶段称为**约束塑性变形阶段**。

最后，随着载荷的继续增加，结构的全部或足够大的部分进入塑性状态，致使弹性部分丧失了对塑性区的约束作用，因而结构的整体刚度明显削弱，变形显著增加。这一阶段称为**自由塑性变形阶段**。使结构达到自由塑性变形阶段的载荷称为极限载荷，用 P_p 表示。由于材料是理想塑性的，自由塑性变形阶段的开始也意味着达到其极限状态。在载荷不变的情况下，结构可“无限地”变形，形成塑性流动。

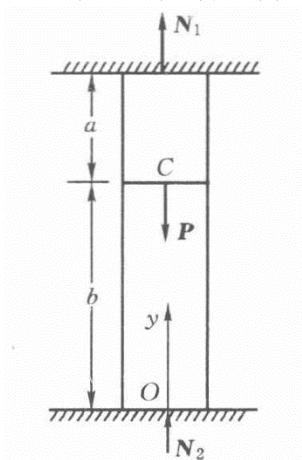
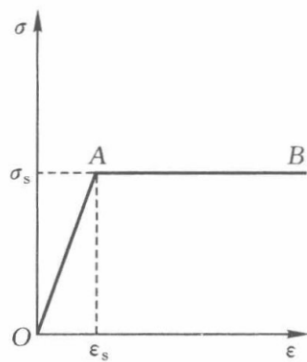
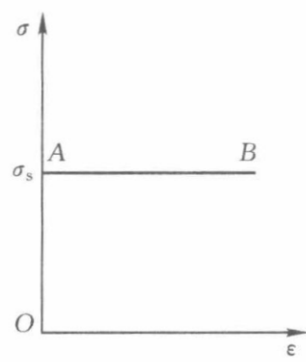


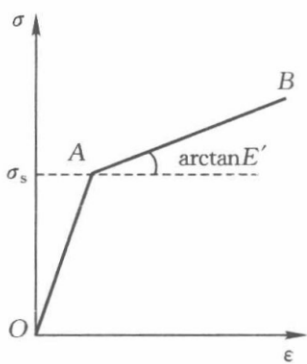
图 1.22 受轴向载荷



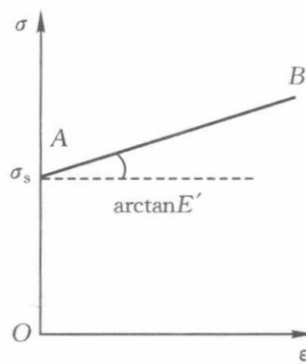
(a) 理想弹塑性模型



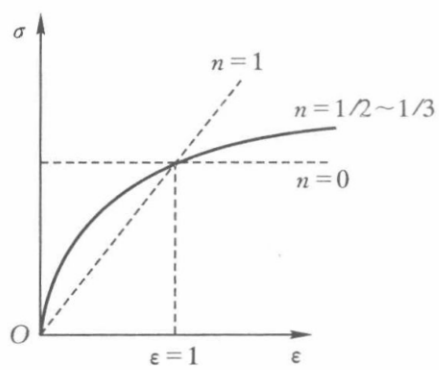
(b) 理想刚塑性模型



(c) 线性强化弹塑性模型



(d) 线性强化刚塑性模型



(e) 幂强化弹模型

图 1.19 应力-应变曲线的简化模型

2 屈服条件

在以定量的手段描述塑性行为之前，还应注意到，材料由弹性变形状态进入塑性变形状态时存在一个临界点，即弹性极限。因而首先确定材料在怎样的受力程度上开始发生塑性变形或进入塑性阶段是极为重要的。本章的内容就是要讨论在复杂应力状态下如何确定材料进入塑性阶段的判据或准则问题，也就是要建立屈服条件的问题。

对于一个微元体对应的任何一般三维应力状态，可以找到三个称为“主应力”的正应力，它们分别作用在不存在切应力的三个互相垂直的平面上。下面对求解主应力的过程进行推导。

2.1 应力偏张量及其性质

对于一个三维斜截面，其单位法向量为 $\vec{n} = (l_1, l_2, l_3)^T$ （则应对应有 $\cos \langle \vec{i}, \vec{n} \rangle = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}} = l_1$ ，其他两方向类似），坐标系界面内的应力分布为：

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

则在斜截面上的合力可以表示为：

$$\vec{P} = \sigma_{ij} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sigma_x + l_2 \tau_{xy} + l_3 \tau_{xz} \\ l_1 \tau_{yx} + l_2 \sigma_y + l_3 \tau_{yz} \\ l_1 \tau_{zx} + l_2 \tau_{zy} + l_3 \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

把该合应力分解为正应力和切应力分量：

$$\begin{cases} \vec{\sigma}_n = \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{|\vec{P}| \cdot |\vec{n}|} \vec{P} \\ \vec{\tau}_n = \vec{P} - \vec{\sigma}_n \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} |\vec{\sigma}_n| = l_1 P_x + l_2 P_y + l_3 P_z \\ |\vec{\tau}_n| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 - \sigma_n^2} \end{cases} \quad (2.2)$$

在空间应力状态下，如适当地选择坐标轴，可使得一点的剪应力为零而只剩正应力，这样三个相互垂直的坐标轴的方向称为应力张量的主方向（或称主轴），与主方向垂直的面叫主平面，该面上存在的正应力叫主应力。要使合应力为主应力，应当使得切应力分量为 0，或者斜截面上的合力即为正应力分量，即 $\vec{\tau}_n = 0$

或 $\vec{P} = \vec{\sigma}_n$ 。后者可以如下表达：

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} \\ \vec{\sigma}_n &= \begin{pmatrix} \sigma_n \cos \langle \vec{i}, \vec{n} \rangle \\ \sigma_n \cos \langle \vec{j}, \vec{n} \rangle \\ \sigma_n \cos \langle \vec{k}, \vec{n} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n l_1 \\ \sigma_n l_2 \\ \sigma_n l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (2.3)$$

可以等效写作：

$$\begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\quad (2.4)$$

要使该方程有非零解（即可以找到主方向），应令系数矩阵对应的行列式为 0（也可以理解成主应力 σ_n 是 $\det[\sigma_{ij}]$ 对应的特征值），可整理得到下面的三次方程来求解主应力：

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0\quad (2.5)$$

式中

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 - I_1^2) \\ \quad = -(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \\ I_3 = \det[\sigma_{ij}] \end{cases}$$

在坐标变换时，应力分量会改变，但主应力的值不变，因此系数 I_1 ， I_2 和 I_3 的值与坐标轴的取向无关，它们分别称为应力张量的第一、第二、第三不变量。如果取应力主轴为坐标轴，则可得到由主应力表示的应力不变量

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \\ I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \end{cases}$$

主应力是描述所考虑固体中某一点所处应力状态的物理量，所以这些应力不变量的任何组合也是一个不变量。原方程求解得到的 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 即为三个主应力，

并有 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 。

另外，通过一个主方向且与另外两个主方向成 45° 角的平面上的剪应力也是一个重要的应力数值，将这些面上的剪应力称为主剪应力。

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \tau_2 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}, \tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.6)$$

2.1.1 应力张量的分解及偏应力张量

引出只会使各向同性连续体的体积发生变化的静水压力/静水应力/平均正应力/体积应力（mean normal stress）为 σ_m ：

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{I_1}{3} \quad (2.7)$$

引出应力的偏分量（偏应力）的定义，**偏应力分量引起塑性变形，使物体的形状发生变化**。由偏应力也可以引出一组新的标量不变量。

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} - \frac{I_1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

2.1.2 应力偏量的性质

主方向和不变量分别为：

$$\begin{cases} J_1 = S_x + S_y + S_z = S_{ii} = 0 \\ J_2 = -(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x) + (S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2) \\ \quad = \frac{1}{2}(S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2S_{xy}^2 + 2S_{yz}^2 + 2S_{zx}^2 - J_1^2) = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \\ J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki} \end{cases} \quad (2.9)$$

若由主应力偏量表示，则有

$$\begin{cases} J_1 = S_1 + S_2 + S_3 = 0 \\ J_2 = -(S_1 S_2 + S_2 S_3 + S_3 S_1) = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \\ J_3 = S_1 S_2 S_3 \end{cases} \quad (2.10)$$

应力偏张量的第二不变量 J_2 非常重要，可以用 σ_{ij} 表示如下：

$$\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \\
&= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\
&= \frac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]
\end{aligned} \tag{2.11}$$

2.1.3 几个相关概念

取考察点的三个应力主方向为坐标轴方向，等斜面的方向向量

$$\vec{n} = (l, m, n)^T = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T;$$

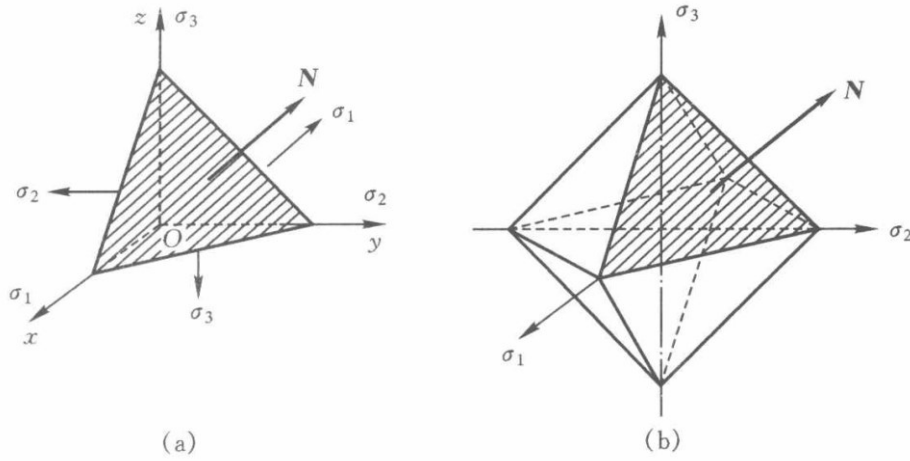


图 2.1 等斜面上（正八面体面）的应力

参考公式(2.1)、(2.2)，等斜面上的总应力为：

$$\begin{aligned}
\vec{F}_s &= \sigma_{ij} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 l \\ \sigma_2 m \\ \sigma_3 n \end{pmatrix} \\
F_s^2 &= (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)
\end{aligned}$$

正应力(octahedral normal stress)和剪应力(octahedral shear stress)分别为：

$$\begin{cases} \sigma_s = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m \\ \tau_s = \sqrt{F_s^2 - \sigma_s^2} = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2} \end{cases} \tag{2.12}$$

等效应力/应力强度（可以结合公式(2.11)得到各种不同的表达形式）

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_s = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.13)$$

结合公式(2.6)对主剪应力的定义，可重新表示 J_2 ：

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \\ &= \frac{2}{3} (\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2) \end{aligned}$$

推导剪应力强度为 T ，用来表征塑性变形，它是将复杂应力状态化作一个具有相同效应的纯剪状态时的剪应力。

$$T = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_s \quad (2.14)$$

以上介绍的 τ_s 、 σ_i 和 T 均与应力球张量无关，它们直接与单纯的形状变化相关联，故在塑性力学中均有应用。

2.2 应力空间、 π 平面和 Lode 参数

2.2.1 主应力空间和 π 平面

一点应力状态的表示可采用六个独立的应力分量，也可以用三个主应力的大小及其相应的三个主方向，还可以用应力张量的三个不变量及应力主方向。其中用三个主应力的大小及其相应的三个主方向的方式表示应力状态对应的空间就是主应力空间，对应有应力状态矢。应力状态矢的矢端描出的轨迹就称为相应点的应力路径（历史），即应力空间中一曲线表示了一点应力状态的变化过程。

在应力空间中做一直线 L ，它过原点，且与三个坐标轴的夹角相等，称之为等倾线 L 。过原点且垂直于等倾线的平面即为偏量平面 π （这也恰恰说明三个偏应力不可能是全正或者全负的）。 \overline{OQ} 为应力偏量， \overline{ON} 为静水应力。

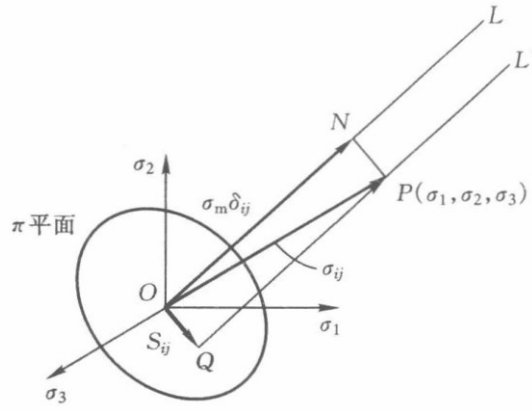


图 2.2 应力矢量在等倾线和等斜面上的分解

自行简证：

$\overrightarrow{OP} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ，令 $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ ，即为 \overrightarrow{ON} 的单位方向向量。则

$$\overrightarrow{ON} = |\overrightarrow{OP}| \cos \langle \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{ON} \rangle \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cos \langle \overrightarrow{OP}, \vec{n} \rangle \vec{n} = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{OP}| |\vec{n}|} |\overrightarrow{OP}| \vec{n}$$

$$= (\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) = \sigma_m (1, 1, 1)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_m (1, 1, 1) = (S_1, S_2, S_3)$$

2.2.2 应力偏量的二维表示

因为应力偏量均在平面内，所以可以使用直角坐标系或极坐标系进行二维表示。这里的对应关系是： $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 投影在 π 平面上后分别为 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ ，且 σ'_2 轴与直角坐标系的 y 轴重合。

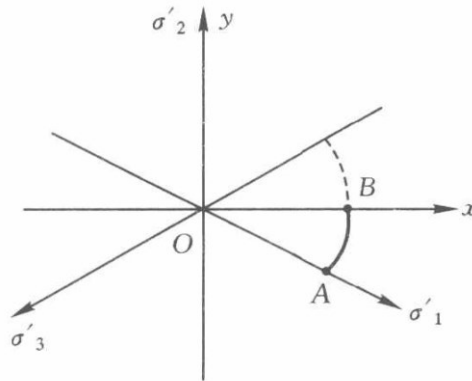


图 2.2 应力偏量的二维表示

转换关系如下：

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(S_1 - S_3) \\ y = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{6}} = \frac{2S_2 - S_1 - S_3}{\sqrt{6}} \end{cases} \quad (2.15)$$

$$r_\sigma = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{2}T = \sqrt{3}\tau_8 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_i$$

$$\tan\theta_\sigma = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mu_\sigma$$

式中, θ_σ 称为 Lode 罗德应力角, 它反映了各应力偏量之间的比例特征; r_σ 则反映了它们之间的数量特征。

$$\mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \frac{2S_2 - S_1 - S_3}{S_1 - S_3} = 2 \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} - 1 \quad (2.2.3)$$

μ_σ 称为 Lode 应力参数, 它反映了中间主应力与其他两个主应力的比值, 和平均应力 σ_m 无关, 故它是反映应力偏量特征的一个量。

若有 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, 则有

$$\begin{aligned} -1 &\leq \mu_\sigma \leq 1 \\ -30^\circ &\leq \theta_\sigma \leq 30^\circ \end{aligned}$$

以下几个特殊情况的 μ_σ 值。

- ① 单向拉伸状态: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \sigma_1 > 0$, 则 $\mu_\sigma = -1$;
- ② 纯剪状态: $\sigma_1 = -\sigma_3, \sigma_2 = 0$, 则 $\mu_\sigma = 0$;
- ③ 单向压缩状态: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 < 0$, 则 $\mu_\sigma = 1$ 。

综上, 无论通过主应力信息还是二维坐标, 都可以较为方便地得到应力偏量。

即 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightarrow (S_1, S_2, S_3) \Leftrightarrow (x, y) \Leftrightarrow (r_\sigma, \mu_\sigma)$ 。

这里自行证明公式(2.15):

由于 σ_2 轴投影后与 y 轴重合, 所以首先找到 x, y 轴上单位向量在实际三维空间中的表示。显然在 σ_2 轴上的向量 $(0, \sigma_2, 0)$ 在 π 平面上的投影应为其偏应力 $(-\frac{\sigma_2}{3}, \frac{2\sigma_2}{3}, -\frac{\sigma_2}{3})$, 故 y 轴上单位向量在实际三维空间中的表示应为 $\vec{y} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$ 。设 x 轴上单位向量在实际三维空间中的表示应为 $\vec{x} = (a, b, c)$,

则有:

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot \vec{n} = a + b + c = 0 \\ \vec{x} \cdot \vec{y} = -a + 2b - c = 0 \\ |\vec{x}|^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = 0 \\ c = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

则对于任意的应力状态 $\overrightarrow{OP} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ ，其在 π 平面上的投影应当为 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \sigma_m(1, 1, 1) = (S_1, S_2, S_3)$ ，可用下式求解出 x, y 的表达式。

$$\begin{cases} x = \frac{|\overrightarrow{OQ}| \cos \langle \overrightarrow{OQ}, \vec{x} \rangle}{|\vec{x}|} = \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_1 - S_3) \\ y = \frac{|\overrightarrow{OQ}| \cos \langle \overrightarrow{OQ}, \vec{y} \rangle}{|\vec{y}|} = \overrightarrow{OQ} \cdot \vec{y} = \frac{2S_2 - S_1 - S_3}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

另外，这里如果使用 $\overrightarrow{OQ} = x\vec{x} + y\vec{y}$ 来解方程组，是超定故难以解决的。这里保持疑问？

2.3 应变偏张量和等效应变

与应力张量相类似，可以将应变张量分解为应变球张量和应变偏张量。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_m & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon_m & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon_m \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

可以简单写为

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_m \delta_{ij} + e_{ij}, \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \quad (2.17)$$

应变球张量表示各个方向受相同的伸缩应变，它只引起体积的改变（等向体积膨胀或收缩），而不产生形状改变，体积应变 $\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 3\varepsilon_m$ 。而应变偏量张量的三个正应变之和为零，说明它没有体积变形，只反映变形中形状改变的那部分。

类似于 2.1 节中的推导,可以得出等斜面上的正应变和剪应变分别为

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_8 &= \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = \epsilon_m \\ \gamma_8 &= \frac{2}{3}\sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}J'_2} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.10)$$

类似地可以定义应变强度(或称等效应变) ϵ_i

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

值得说明的是,以上两节中引入了等效应力和等效应变的概念与定义,并试图从单向拉伸状态下它们与拉伸应力和拉伸应变分别相等来解释其定义式中的系数。但是,更为本质的原因应归为二者塑性功等效。也就是说,对于复杂应力状态,采用上述等效应力和等效应变,可以保证其塑性变形功与简单应力状态下的塑性变形功相等。

2.4 初始屈服条件和初始屈服曲面

应力状态是由 6 个独立的应力分量确定的,则屈服条件应该和这 6 个应力分量有关,还和材料的性质有关,即复杂应力状态下的屈服条件可以写成下面的函数关系:

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (2.18)$$

初始屈服面应该具有以下性质:

- 1) 在应力空间中,屈服面是母线平行于等倾线 L 的等截面柱面。
这是由于柱面上平行于 L 的一条线上偏应力都是相等的,而静水压力是不影响屈服条件的。
- 2) 屈服曲线是外凸的(推导过程可见 3.2.3 节)。
- 3) 由于应力空间中屈服点应当是关于对称轴(各向同性)和关于原点对称(拉压一致)的,故屈服曲线是关于 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 和 $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ 的垂线对称的。

因此只要能确定 π 平面上 30° 范围内屈服曲线的形状,即可获得整个屈服曲线。

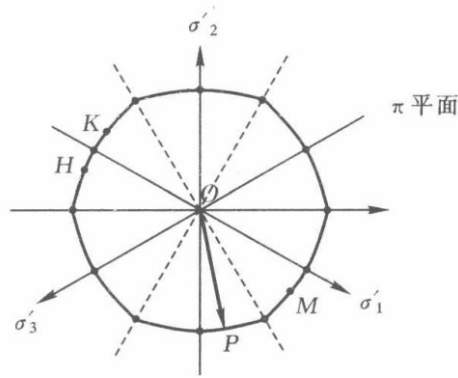


图 2.6 屈服曲线有六个对称轴

2.5 常用的屈服条件

2.5.1 Tresca 屈服条件

金属的塑性变形是由于剪切应力引起金属中晶体滑移而造成的，因此：当最大剪应力达到材料所固有的某个定值时，材料开始进入塑性状态，即开始屈服。

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{k}{2} \quad (2.19)$$

k 是和材料有关的一个常数。由于一般情况下，往往无法事先判明各点的三个主应力大小的次序，所以通常将该条件写成如下形式：

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - k^2][(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - k^2][(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - k^2] = 0 \quad (2.20)$$

由公式(2.15)可知，在 π 平面上 -30° 到 30° 的范围内， x 是一定值，屈服曲线是一直线。则 Tresca 屈服条件在 π 平面上是一个正六边形，称为 Tresca 六边形。在应力空间中，其表示的屈服面是以 L 为轴线的六棱柱面。

Tresca 屈服条件的特点是：

- 1) 物理观念明确，有清楚的物理解释；
- 2) 当已知三个主应力次序时，是主应力的线性函数，表达式形式简单；
- 3) 未考虑中间主应力 σ_2 对屈服的贡献；
- 4) 当主应力顺序未知时，形式过于复杂；
- 5) 屈服曲线上有角点，为非光滑曲线，这给数学处理上带来了困难。

2.5.2 Von Mises 屈服条件

Von Mises 提出将 Tresca 六边形的外接圆作为屈服曲线，其方程可表示为：

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}k\right)^2 \quad (2.21)$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2k^2$$

Mises 在提出这个屈服条件时，认为自己提出的条件只是近似的，并非准确的屈服条件。但以后的实验结果表明，对于韧性金属材料，它更接近于实验情况。该条件表明，当应力强度达到某一确定数值时，材料即进入屈服状态，它就称为应力强度不变条件，又称 Mises 屈服条件。在应力空间中，Mises 条件表示的屈服面是以 L 为轴线、垂直于 π 平面的圆柱面。

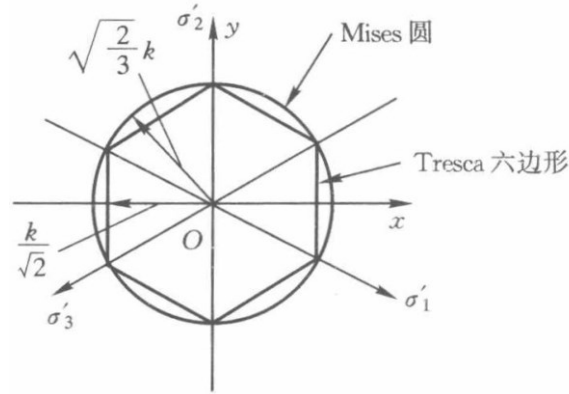


图 2.10 Tresca 和 Mises 屈服曲线

2.5.3 双剪屈服条件 twin-shear yield criterion

单元体应力状态存在三个主剪应力（见公式(2.6)），但是由于 $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$ ，所以只有两个独立量，因此选取两个较大的剪应力作为屈服条件的变量来建立屈服条件。

$$\begin{cases} f = \tau_2 + \tau_3 = C, \text{当 } \tau_3 \geq \tau_1 \text{ 时} \\ f = \tau_2 + \tau_1 = C, \text{当 } \tau_3 \leq \tau_1 \text{ 时} \end{cases}, C = \sigma_s \quad (2.22)$$

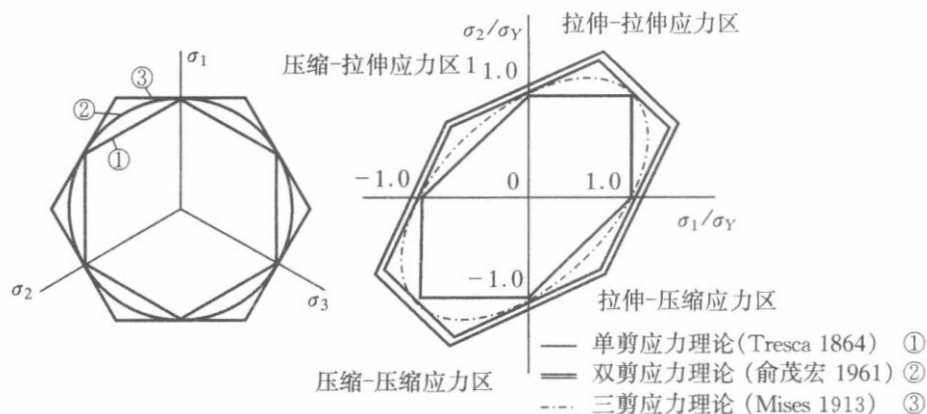


图 2.11 外凸屈服条件的三种典型屈服曲线

2.5.4 统一屈服准则 Unified yield criterion

统一屈服准则的数学建模为

$$f = \tau_2 + b\tau_3 = C, \quad \text{当 } \tau_3 \geq \tau_1 \text{ 时} \quad (2.5.12a)$$

$$f = \tau_2 + b\tau_1 = C, \quad \text{当 } \tau_3 \leq \tau_1 \text{ 时} \quad (2.5.12b)$$

式中: C 为材料强度参数, 同样可以根据材料单向拉伸试验加以确定。

将式(2.1.2)的主剪应力公式和单向拉伸试验条件代入式(2.5.12a)或式(2.5.12b), 可得材料参数为

$$C = \frac{1+b}{2}\sigma_s \quad (2.5.13)$$

[1] 俞茂宏. 强度理论百年总结[J]. 力学进展, 2004,34(4): 529 - 560.

[2] M H Yu. Generalized Plasticity[M]. Berlin: Springer, 2005.

2.6 后继屈服条件

考虑单向拉伸应力状态, 对理想弹塑性材料(见下图(a)), 初始屈服点即为材料能达到的极限状态, 进入塑性后屈服应力点不变。但对强化材料(见下图(b)), 应力水平超过初始屈服点后, 若发生卸载则材料会处在后继弹性状态, 若再加载, 当应力达到新的水平时才会重新屈服。由于材料的强化特性, 它比初始屈服点高。为区别起见, 称之为后继屈服点或强化点。

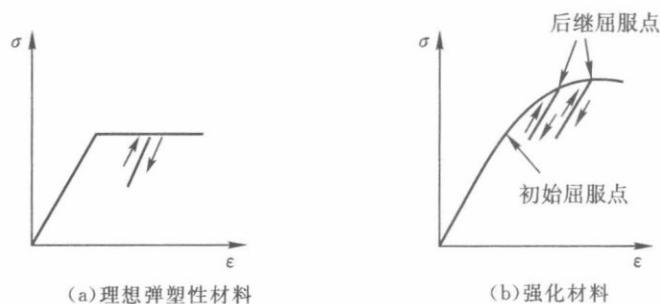


图 2.24 单向拉伸应力状态的初始屈服和后继屈服

考虑复杂应力状态时，会有各种应力状态的组合能达到初始屈服或后继屈服，在应力空间中这些应力点的集合构成的曲面称为初始屈服面或后继屈服面。

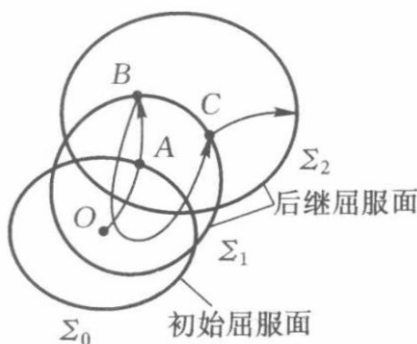


图 2.25 复杂应力状态的初始屈服面和后继屈服面

表示后继屈服条件的函数关系称为后继屈服函数或加载函数。由于它不仅和该瞬时的应力状态有关，而且和塑性变形的大小及其历史（加载路径）有关，因而可表示为

$$f(\sigma_{ij}, \xi_\beta) = 0 \quad (2.23)$$

式中， ξ_β 是表征由于塑性变形引起物质微观变化的参量，他们与**塑性变形历史**有关。当不产生新的塑性变形时， ξ_β 不变，强化面不变。随着 ξ_β 变化，强化面的大小、形状和位置都可能产生相应的改变。现在的任务就是要确定后继屈服面的形状及它随出的发展的变化规律。

2.6.1 关于强化的假设

在单向拉伸应力状态下，如果把材料加载到 $|\sigma| = \sigma_1 > \sigma_s$ 后卸载，然后再反向加载。一般来说不同材料的反向加载屈服点的变化规律是不同的。为了简化计算，

则做出两个极端假设和一个特殊的中间假设：

1) 等向强化（各向同性强化，ABCFG），在 $-\sigma_1$ 处发生压缩屈服；

2) Bauschinger 型强化（ABCDE），在 $\sigma_1 - 2\sigma_s$ 处发生压缩屈服；

包辛格效应指正向强化反向软化，故和上述概念相近但不完全相同。

3) 压缩屈服应力与拉伸强化无关（ABCHI），不论拉伸强化的程度如何，压缩屈服应力保持不变，即 $-\sigma_s$ 时发生压缩屈服。

所有其他的中间假设，都可以由等向强化假设和包辛格型假设线性组合得到。

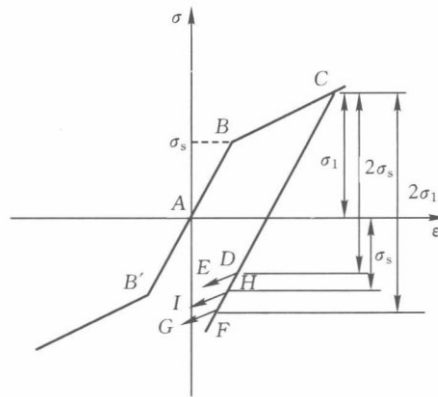


图 2.26 单向拉压下关于强化的假设

2.6.2 ※单一曲线假设

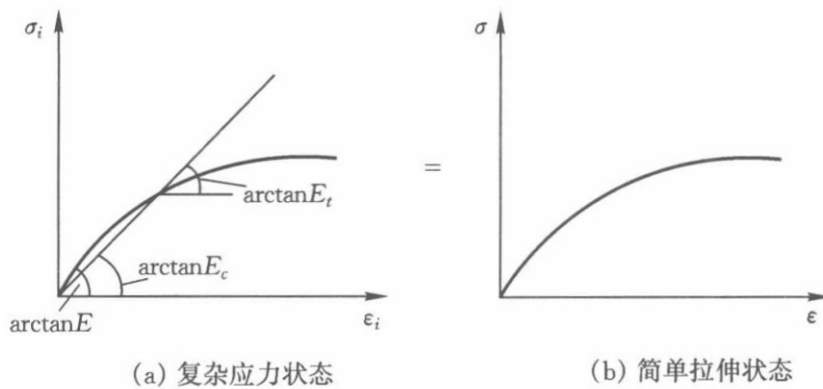


图 2.27 金属材料拉伸实验的典型载荷-伸长量曲线

单一曲线假设认为，对于塑性变形中保持各向同性的材料，在各应力分量成比例增加的所谓简单加载的情况下，其强化特性可以用应力强度和应变强度之间的确定的函数关系来表示，即

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) \quad (2.24)$$

该函数形式和应力状态形式无关，而只与材料特性有关。故可根据在简单应力状态下的材料实验来确定。

2.6.3 等向强化模型 (isotropic hardening)

在等向强化模型中，假定不考虑 Bauschinger 效应，即不计塑性变形引起的材料模量变化(各向异性)；而认为材料在某一方向载荷下发生强化后，则在相反方向必有相同程度的强化，即后继屈服面在应力空间中的中心位置及形状保持不变，只是随着塑性变形增加而逐渐等向地扩大。

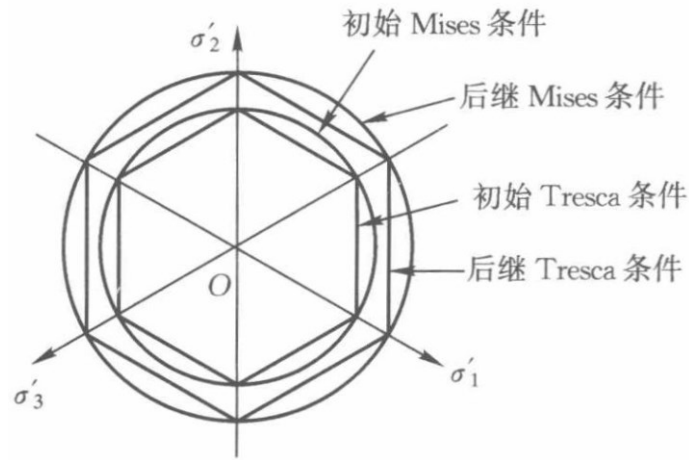


图 2.29 等向强化模型中基于各向同性和无包辛格效应的后继屈服曲线

如果初始屈服条件为 $f^*(\sigma_{ij}) = 0$ ，可以把等向强化后的后继屈服条件写作：

$$f = f^*(\sigma_{ij}) - \psi(\xi) = 0 \quad (2.25)$$

随着塑性变形的发展和强化程度的增加， $\psi(\xi)$ 从初始值按一定函数关系递增。通常认为强化程度要么是总塑性功的函数、要么是总塑性变形量的函数。

如果考虑各向异性，则初始屈服条件为正圆或正六边形，后继屈服条件不是；如果考虑包辛格效应，则屈服曲线的形状会逐渐改变，而不是均匀扩大。

2.6.4 随动硬化模型

将简单应力状态下的 Bauschinger 型强化推广到复杂应力状态，就是随动强化模型。该模型认为在塑性变形过程中，屈服面的大小和形状都不改变，只是在应力空间作刚性移动，即屈服面的中心位置随塑性变形而变（见图 2.31）。该模型在一定程度上可以反映 Bauschinger 效应。

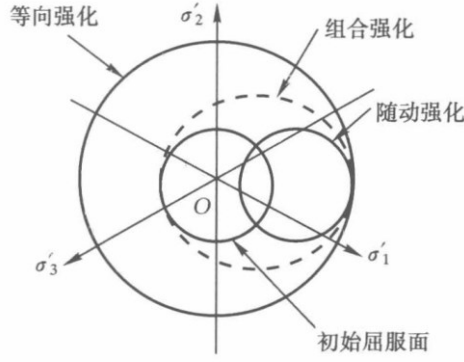


图 2.31 几种强化模型

当初始屈服条件为 $f^*(\sigma_{ij}) - \psi_0 = 0$ 时，后屈服条件写作：

$$f = f^*(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \psi_0 = 0 \quad (2.26)$$

式中， ψ_0 为常数，内变量 α_{ij} 是表征屈服面中心移动的二阶对称张量，称为移动张量或背应力(shift tensor 或 back stress)，其依赖于塑性变形量。 α_{ij} 的演化规律主要有：线性随动强化模型、Ziegler 模型、Armstrong-Frederick 模型、Eisenberg-Phillips 非线性演化模型、Chaboche 模型等。

这里简单记录线性随动强化模型：

$$\alpha_{ij} = c \cdot \varepsilon_{ij}^p \quad (2.27)$$

对简单拉伸的情形：

$$S_1 = \frac{2}{3}\sigma, S_2 = S_3 = -\frac{1}{3}\sigma$$

$$\varepsilon_1^p = \varepsilon^p, \varepsilon_2^p = \varepsilon_3^p = -\frac{1}{2}\varepsilon^p$$

则使用 Von Mises 屈服的后继屈服条件为：

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)(S_{ij} - c\varepsilon_{ij}^p)} - \sigma_s = \sigma - \frac{3}{2}c\varepsilon^p - \sigma_s = 0$$

从而求得

$$\sigma = \sigma_s + \frac{3}{2}c\varepsilon^p = \sigma_s + E_p\varepsilon^p$$

式(2.27)有时被称为完全随动强化模型。文献中把在六维应力空间中屈服面作平动（或在三维主应力空间中作平动）的模型统称为完全随动强化模型，而把在低维应力空间直接将屈服曲线作平动的模型称为简单随动强化模型。

2.6.5 组合强化模型

将随动强化模型和等向强化模型结合起来，即认为后继屈服面的形状、大小和位置随的发展而变化。这就是组合强化模型。

$$f = f^*(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \psi(\xi) = 0 \quad (2.28)$$

2.7 加载、卸载准则

由公式(2.23)可知，随着 ξ_β 变化，加载面的大小、形状和位置都可能产生相应的改变。在不考虑应变率效应的假定下，应力状态将始终不能位于加载面之外。当应力位于加载面之内时，应力的变化将不引起内变量 ξ 的变化，材料不产生新的塑性变形，因此可认为应力与应变之间呈弹性响应。当应力位于加载面之上并继续加载时，应力的变化就会引起内变量 ξ 的改变而使材料进一步产生新的塑性变形。此时的加载面将变为

$$f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}, \xi_\beta + d\xi_\beta) = 0 \quad (2.29)$$

在材料的弹-塑性加载过程中，加载面应满足

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta = 0 \quad (2.30)$$

这就是一致性条件（consistency condition）。其物理意义表示，在加载（非卸载）过程中，材料的应力点始终处于屈服面上。如果将强化条件写为 $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, \xi) = 0$ ，其中 ξ 为强化参数，则一致性条件的一般形式为

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (2.31)$$

在塑性力学中认为，只要有新的塑性变形发生就称为加载。材料进入塑性后的本质特点是：加、卸载时呈不同的响应规律。对单向应力状态，仅凭 σ 的变化即可判定材料是否会有新的塑性变形发生，但对复杂应力状态需要引入下面的准则：

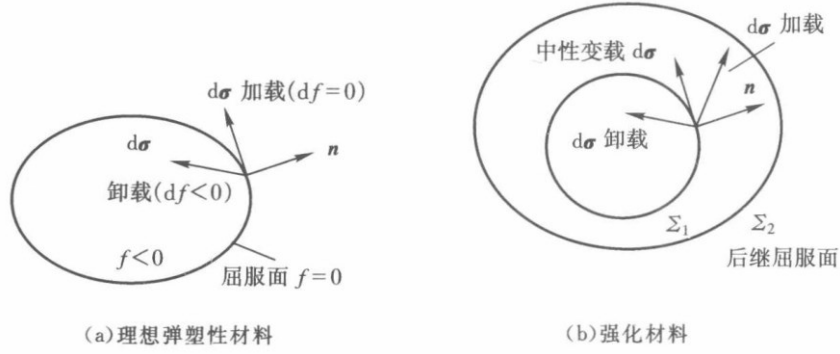


图 2.36 加载与卸载准则

2.7.1 理想塑性材料的加载和卸载

理想塑性材料（或称“理想弹塑性材料”）不发生强化，它的强化条件就是屈服条件。换言之，后继屈服条件和初始屈服条件一致，材料到达屈服强度之后可以继续累积塑性变形，但应力点始终保持在屈服面上。

应力点保持在屈服面上并移动，称为加载；应力点离开屈服面，由塑性状态退回到弹性状态，称为卸载。

$$\begin{cases} f(\sigma_{ij}) < 0 & \text{弹性状态} \\ f(\sigma_{ij}) = 0 & \text{且} \begin{cases} df = f(\sigma_{ij} + d\sigma_{ij}) - f(\sigma_{ij}) = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 & \text{加载} \\ df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 & \text{卸载} \end{cases} \end{cases}$$

对于非正则屈服面(即 n 沿曲面的变化允许出现不连续性，像 Tresca 屈服条件中在两个屈服条件的“交点”处)，如果设该屈服面由 n 个正则曲面 $f_k = 0$ 构成，则有

$$f_k(\sigma_{ij}) < 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{应力处在弹性状态} \quad (a)$$

$$\left. \begin{aligned} f_k(\sigma_{ij}) < 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad k \neq l \\ f_l(\sigma_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{应力处在 } f_l = 0 \text{ 的曲面上} \quad (b)$$

$$\left. \begin{aligned} f_k(\sigma_{ij}) < 0 \quad k = 1, 2, \dots, n \quad k \neq l, k \neq m \\ f_l(\sigma_{ij}) = f_m(\sigma_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} \text{应力处在 } f_l = 0 \text{ 及 } f_m = 0 \text{ 两曲面的交线上} \quad (c)$$

(2.7.7)

2.7.2 强化材料的加载和卸载

共有加载、卸载和中性变载三种情形：

$$f(\sigma_{ij}, \xi_\rho) = 0, \text{ 且 } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} > 0 \text{ 加载} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0 \text{ 中性变载} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0 \Leftrightarrow \mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\sigma} < 0 \text{ 卸载} \end{cases} \quad (2.32)$$

对于处在 $f_l = 0$ 及 $f_m = 0$ 两个加载面“交线”处的应力, 其加载和卸载准则为

$$\left. \begin{aligned} f_l = 0, f_m = 0 \quad & \text{当} \quad \max\left(\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) > 0 \quad \text{加载} \\ & \text{当} \quad \max\left(\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) = 0 \quad \text{中性变载} \\ & \text{当} \quad \max\left(\frac{\partial f_l}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}, \frac{\partial f_m}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij}\right) < 0 \quad \text{卸载} \end{aligned} \right\} \quad (2.7.14)$$

3 本构方程

在实现对材料塑性响应行为作定量描述的过程中，已经有了初始屈服条件 $f(\sigma_{ij})=0$ 和强化条件（加载函数，后继屈服条件） $f(\sigma_{ij}, \xi_\beta)=0$ 。接下来还需要得到 σ_{ij} 和 ε_{ij} 的关系，还需要确定与初始屈服、后继加载面相关联的流动法则，即应力与应变之间的定性关系

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{kl}, \xi_\beta)$$

3.1 几个有关的概念

3.1.1 应变增量张量与应变速率张量

当介质处在运动状态时，设质点的速度为 $v_i(x, y, z, t)$ ，若以变形过程中某一时刻 t 为起始点，经过无限小时间间隔 dt 后，质点产生无限小位移 $du_i = v_i dt$ 。则有应变增量张量为

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(du_{i,j} + du_{j,i}) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})dt \quad (3.1)$$

应变速率张量为

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (3.2)$$

类似地，定义应变增量强度

$$d\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2} \quad (3.3)$$

但是，由于 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ 和 ε_{ij} 一个从初始位置开始计算，一个从瞬时状态计算，因此一般情况下 $\dot{\varepsilon}_{ij} \neq \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt}$ ，只有在小变形时才有等号成立。二者的主轴一般也不重合。

3.1.2 塑性应力率和塑性应变率

在塑性力学中,应力不仅与应变有关,而且还与整个变形历史有关。仍以一组内变量 $\xi_\beta (\beta=1,2,\dots,n)$ 为参数刻划变形历史,则一般情况下应力可写为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta) \quad (3.1.5)$$

当 ξ_β 固定时, σ_{ij} 与 ϵ_{ij} 之间有单一对应关系,这时应变也可通过应力表示为

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta) \quad (3.1.6)$$

于是,应力和应变的变化率或增量可表示如下

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \epsilon_{kl}} \dot{\epsilon}_{kl} + \frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta = \dot{\sigma}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (3.1.7)$$

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \epsilon_{kl}} d\epsilon_{kl} + \frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \xi_\beta} d\xi_\beta \quad (3.1.8)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\partial \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.1.9)$$

$$d\epsilon_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \xi_\beta} d\xi_\beta \quad (3.1.10)$$

现令

$$L_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}(\epsilon_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \epsilon_{kl}}, \quad M_{ijkl} = \frac{\partial \epsilon_{ij}(\sigma_{kl}, \xi_\beta)}{\partial \sigma_{kl}} \quad (3.1.11)$$

$$\text{弹性应力率} \quad \dot{\sigma}_{ij}^e = L_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad \text{塑性应力率} \quad \dot{\sigma}_{ij}^p = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta \quad (3.1.12)$$

$$\text{弹性应变率} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^e = M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \text{塑性应变率} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial \xi_\beta} \dot{\xi}_\beta \quad (3.1.13)$$

截图 弹性应力率、塑性应力率、弹性应变率、塑性应变率的定义

L 和 M 都和内变量有关,这说明弹性性质是依赖于塑性变形的,因而弹性变形与塑性变形是耦合的。为了简化问题,今后只讨论弹性变形与塑性变形无耦合的情况,这时有

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^p, \epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (3.4)$$

$$\sigma_{ij}^e = L_{ijkl} \epsilon_{kl}^e; \epsilon_{ij}^e = M_{ijkl} \sigma_{kl}^e \quad (3.5)$$

式中, L_{ijkl} 和 M_{ijkl} 是仅仅依赖于材料性质的常数,而 σ_{ij}^p 和 ϵ_{ij}^p 仅是内变量的函数,只有当内变量改变时这两者才会相应改变。当 $\xi_\beta = 0$ 时即为广义胡克定律。

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.1.16a)$$

将其写为分量形式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{11} &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{11} - \nu(\dot{\sigma}_{22} + \dot{\sigma}_{33})], & \dot{\epsilon}_{23} &= \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \dot{\sigma}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{22} &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{22} - \nu(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{33})], & \dot{\epsilon}_{31} &= \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \dot{\sigma}_{31} \\ \dot{\epsilon}_{33} &= \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{33} - \nu(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22})], & \dot{\epsilon}_{12} &= \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \dot{\sigma}_{12} \end{aligned} \right\} \quad (3.1.16b)$$

上式可以改写为偏应力率与偏应变率之间的关系式

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \dot{S}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{S}_{ij}; \quad \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} \dot{\sigma}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk} \quad (3.1.17)$$

式中: E 为杨氏模量; ν 为泊松比; μ 为剪切模量; $\frac{1}{2\mu} = (1+\nu)/E$; 体积模量 $K = E/3(1-2\nu)$ 。上式也可以写成增量形式

$$de_{ij} = \frac{1}{2\mu} dS_{ij}; \quad d\epsilon_{kk} = \frac{1}{3K} d\sigma_{kk} \quad (3.1.17a)$$

前者是 5 个独立式子(因为 $S_{ii} = 0$), 后者是一个独立式子, 所以仍是 6 个独立方程。

为了便于推广到塑性情况, 并与塑性本构方程的写法一致, 广义胡克定律关系式(3.1.17)的全量形式也可写成

$$e_{ij} = \frac{3\epsilon_i}{2\sigma_i} S_{ij}; \quad \sigma_i = 3\mu\epsilon_i \quad (3.1.18)$$

以上讨论表明, 当弹性张量给定时, 弹塑性本构方程的建立就归结为正确给出关于塑性应力率和塑性应变率的表达式或者关于塑性应力增量和塑性应变增量的表达式的问题。

3.2 Drucker 公设

美国力学家德鲁克 (D. Drucker) 针对一般应力状态的加载过程, 提出了一个关于材料强化的重要假设, 即 Drucker 强化公设。根据这个公设, 不但可以导出加载曲面(包括屈服曲面)的一个重要且普遍的几何性质——加载面的外凸性, 以及加载、卸载准则, 而且可以建立塑性变形规律即塑性本构关系。

3.2.1 稳定材料和不稳定材料

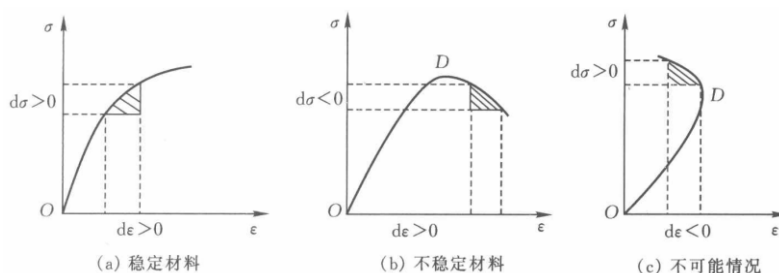


图 3.1 拉伸应力应变曲线

3.2.2 Drucker 公设(Drucker's Stability Postulate)

对 ABCDE 这样的加载路径, 加载阶段产生的弹性应变在卸载阶段可以恢复, 相应的弹性应变能也可完全释放出来, 剩下的是消耗于不可恢复的塑性变形的塑性功 (图中阴影部分), 它是不可逆的, 将恒大于零。这部分塑性功可以分为图 3.2 中所示的两块阴影面积 M_1 、 M_2 两部分, 由此可写出如下两个不等式

$$\begin{aligned} (\sigma - \sigma^0) \cdot d\epsilon^p &> 0 \\ d\sigma \cdot d\epsilon^p &\geq 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

表明应力在塑性应变上做功非负, 其中第二式的等号适用于理想塑性材料。将式(3.6)推广到复杂应力状态式, 结合热力学第一定律, 认为稳定材料塑性功不可逆, 即为特鲁克公设。

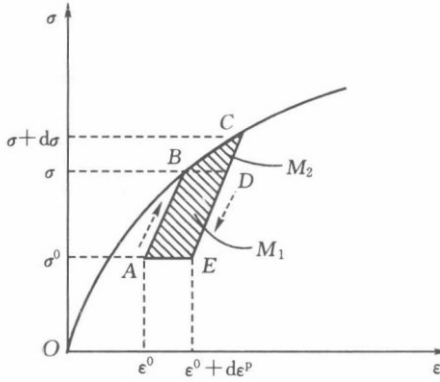


图 3.2 塑性功不可逆

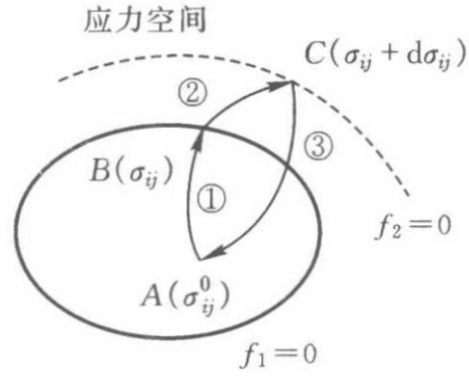


图 3.3 德鲁克公设的说明

图 3.3 即为图 3.2 的推广情形, 在该应力循环中, 附加应力所做的功是非负的, 即要求

$$W_D = \oint_{\sigma_{ij}^0} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij} = \oint_{\sigma_{ij}^0} (\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.7)$$

式中, σ_{ij}^* 表示上述应力循环过程中任一时刻瞬时应力状态。塑性变形只在路径②才产生, 所以如果略去高阶小量, Drucker 公设就是要求

$$(\sigma_{ij}^* - \sigma_{ij}^0) \cdot d\epsilon_{ij}^p + \frac{1}{2} d\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.8)$$

这里可区分两种情况:

①若起始状态处于加载面的内部时, 即 $\sigma_{ij} \neq \sigma_{ij}^0$, 则由于 $d\sigma_{ij}$ 是任意的无穷小量, 与 σ_{ij} 相比属高阶小量可略去不计, 则可得出

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0) \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.9)$$

其中等号对于中性变载成立。

②若起始状态位于加载面之上，即 $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0$ ，则有

$$d\sigma_{ij} \cdot d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.10)$$

等号对于中性变载和理想塑性材料均成立，式(3.10)称为 Drucker 稳定性条件。根据该条件可以推知材料一定是稳定的，如果能构造出应力闭循环的话。它也被认为是强化的数学定义，而被称为强化的唯一性条件。

由于塑性功是耗散能，所以上述不等式又称为最大塑性功原理 (the principle of maximum plastic dissipation)，它与 Drucker 公设是等价的，凡是满足这些不等式的材料就是稳定材料。弹性材料、理想弹塑性材料和强化材料都是稳定性材料。

3.2.3 Drucker 公设的重要推论

1) 屈服面（包括初始屈服面和后继屈服面）的外凸性。

简述：本质是式(3.9)，如果是内凹的，则可以找到一个 AB 和塑性应变增量的夹角是钝角，违反了德鲁克公设。

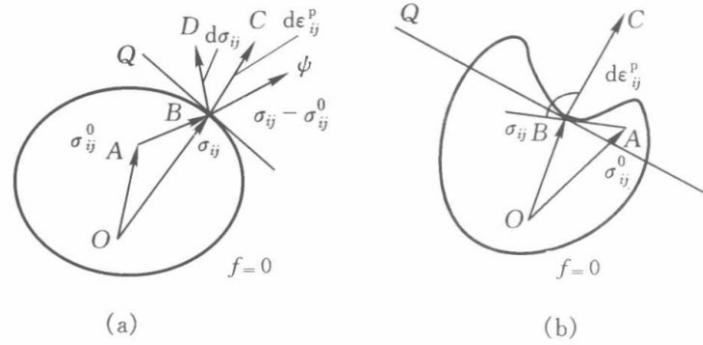


图 3.4 屈服面的外凸性

2) 塑性应变增量矢量沿屈服面的法向性（即正交流动法则）。

简述：如果非正交，则对于当前屈服面上的点，此处与塑性应变增量相切的平面会和当前屈服面相割，则也可以找到某一点使得式(3.9)不成立，违反了德鲁克公设。

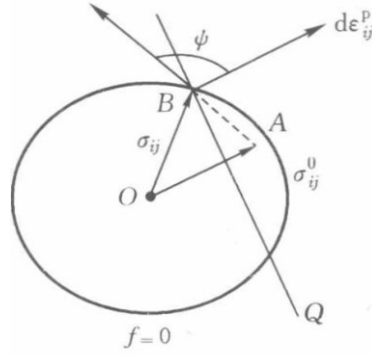


图 3.5 塑性应变矢量的法向性

又因为有屈服面上任一点的外法线方向和它的梯度方向一致，所以可以得到

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, d\lambda \geq 0 \quad (3.11)$$

式中， $d\lambda$ 是非负的比例系数，是一个标量。该式称为正交流动法则 (normality rule, 正交性)。因此，特鲁克公设的几何意义是当塑性应变增量不为 0 时，应力增量式中在屈服面的外法线一侧（即应力在塑性应变上不做负功）。

3.2.4 两点讨论

- 1) 对于不稳定材料，认为特鲁克公设始终成立，只不过面对这种材料软化的现象不能有公设导出特鲁克稳定性条件。
- 2) 依留申公设是在应变空间里建立的公设。当材料存在应变软化时，在应变空间中进行讨论更为方便。依留申公设可以表述为：弹塑性材料在应变空间中任意的应变闭循环内，外力所作的功是非负的。若所作的功是正的，表示材料有塑性变性；若所作的功为零，则只有弹性变形。

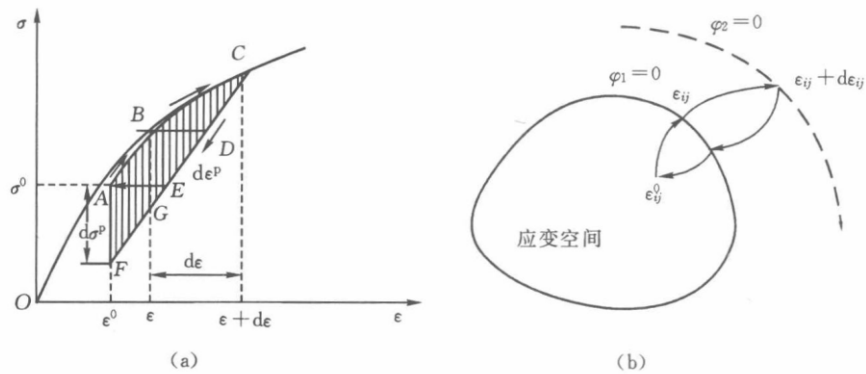


图 3.7 应变循环路径示意图

有必要讲德鲁克公设和依留申公设的加载图进行对比：

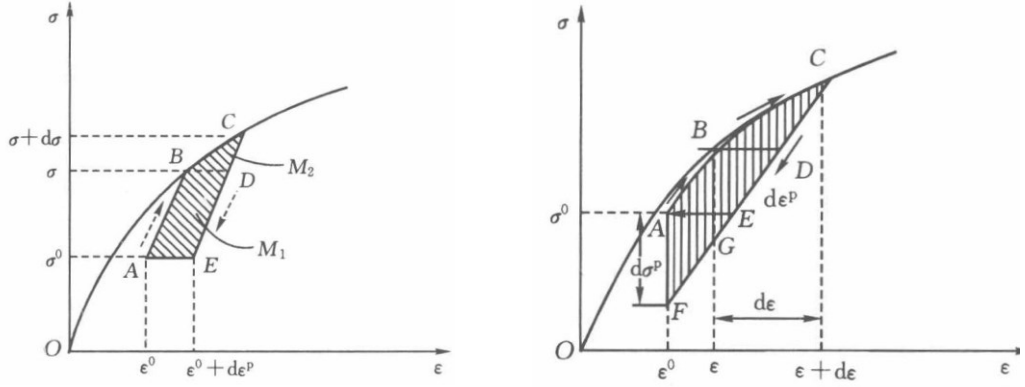


图 两种公设加载情形的对比

依留申公设是在应变空间中进行加载和卸载，因此比作图多出一个 AEF 的面积，这部分面积在依留申公设的观点中被认为是 $d\sigma^p$ （笔者称为“应力塑性增量”，读者无命名）导致的。首先我们结合公式(3.7)导出右图阴影部分面积的计算公式（即依留申公设的观点）：

$$W_I = \oint_{\epsilon_{ij}^0} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = W_D + \frac{1}{2} \sigma_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p \geq 0 \quad (3.12)$$

姑且认为 $d\sigma^p$ 是使材料回归起始应力值后继续使其恢复到起始应变值的驱动应力，本质上克服的是加载过程中突破原有屈服面后继续做的功。

重写依留申公设的表达式：

$$W_I = (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^0) d\sigma_{ij}^p + \frac{1}{2} d\epsilon_{ij} d\sigma_{ij}^p \geq 0 \quad (3.13)$$

绕这么一圈，最后要归到对不稳定材料的描述上去。

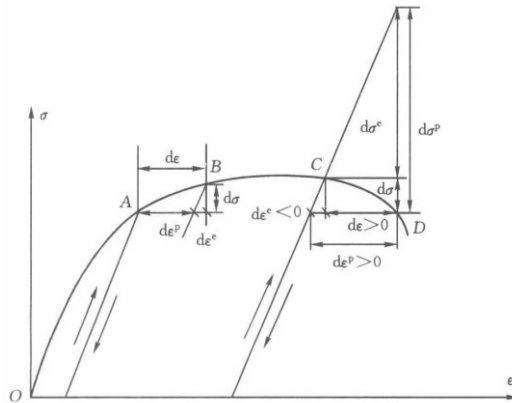


图 3.8 强化与软化行为示意图

图中 AB 段为强化段的应力增量和应变增量示意图,其特点是: $d\sigma > 0$, $d\epsilon > 0$, $d\sigma d\epsilon > 0$, 且 $d\epsilon^e > 0$, $d\epsilon^p > 0$, 故有两个不等式 $d\sigma d\epsilon^p > 0$ 和 $d\epsilon d\sigma^p > 0$, 分别满足 Drucker 公设和依留申公设,这就表明,对于稳定材料而言,两个公设均是适用的。

图中 CD 段为软化段的应力增量和应变增量示意图,其特点是: $d\sigma < 0$, $d\epsilon > 0$, $d\sigma d\epsilon < 0$, 且 $d\epsilon^e < 0$, $d\epsilon^p > 0$, 故有两个不等式 $d\sigma d\epsilon^p < 0$ 和 $d\epsilon d\sigma^p > 0$,前者不满足 Drucker 公设,而后者满足依留申公设。这表明对于不稳定材料,Drucker 公设不成立,而依留申公设仍然成立。

这里还有待继续理解。因为这两个公设煞费苦心要做的事情我还是不太清晰,尤其是第二个公设还是有点绕。不过我觉得应该是要辅助建立本构关系的,或者说起码是要可以验证本构关系是否正确的。

3.3 增量型本构关系（塑性流动理论）

目前广为采用的描述塑性变形规律的理论可分为两大类。

- 1) 全量理论 (total theory of plasticity; 又称塑性形变理论, deformation theory of plasticity), 它认为在塑性状态下仍是应力和应变全量之间的关系。
- 2) 增量理论 (incremental theory), 又称流动理论 (flow theory), 它是描述材料处于塑性状态时, 应力与应变增量或应变速率之间关系的理论, 它针对加载过程中每一瞬时的应力状态来确定该瞬时的应变增量。换言之, 增量理论认为, 在塑性状态下是塑性应变增量 (或应变率) 和应力及应力增量 (或应力率) 之间的关系。

前面已经知道, 在塑性变形过程中, 应力和应变没有一一对应关系, 但是, 在某一给定状态下, 有一个应力增量, 相应地必有唯一的应变增量。因此, 在一般塑性变形条件下, 只能建立应力与应变增量之间的关系。这种用增量形式表示的本构关系, 称为增量理论或流动理论。其出发点就是只有按增量形式建立起来的理论, 才能追踪整个的加载路径并求解塑性力学问题。

构成塑性本构关系的基本要素包括如下三方面:

- ①初始屈服条件, 它可以判定塑性变形何时开始、划分塑性区和弹性区的范围, 以便分别采用不同的本构关系来分析;
- ②加载函数, 即描述材料强化特性的强化条件;
- ③与初始屈服以及后继屈服面相关联的某一流体法则, 即应力和应变 (或它们的增量) 之间的定性关系, 这一关系包括方向关系 (即两者主轴之间的关系)

和分配关系（即两者之间的比例关系）。实际上就是研究它们的偏量之间的关系。

理想弹塑性材料的 Von Mises 屈服条件为 $\sigma_i = \sigma_s \Rightarrow f(\sigma_{ij}) = J_2 - \frac{1}{3}\sigma_s^2 = 0$ ，故可由 $J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = -(S_1S_2 + S_2S_3 + S_3S_1)$ 知

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J_2}{\partial S_{ij}} = S_{ij}$$

带入公式(3.11)得

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij} \quad (3.14)$$

该式称为 Mises 流动法则。结合公式(2.17)引出的 $d\epsilon_{ij}^p = d\epsilon_m^p \delta_{ij} + de_{ij}^p$ 以及塑性不可压性（即 $d\epsilon_{ii}^p = 0$ ），有 $d\epsilon_{ij}^p = de_{ij}^p$ 。最后得到

$$\begin{aligned} de_{ij}^p &= d\lambda \cdot S_{ij} \\ \frac{de_x^p}{S_x} &= \frac{de_y^p}{S_y} = \frac{de_z^p}{S_z} = \frac{de_{xy}^p}{\tau_{xy}} = \frac{de_{yz}^p}{\tau_{yz}} = \frac{de_{zx}^p}{\tau_{zx}} = d\lambda \end{aligned} \quad (3.15)$$

可见塑性应变增量（“**塑性偏应变增量**”似乎更好）是与应力偏量成比例的。这里得出材料塑性的本构方程为：

$$\begin{aligned} d\epsilon_x^p &= \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z)], & d\epsilon_{yz}^p &= d\lambda\tau_{yz} \\ d\epsilon_y^p &= \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x)], & d\epsilon_{zx}^p &= d\lambda\tau_{zx} \\ d\epsilon_z^p &= \frac{2}{3}d\lambda[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)], & d\epsilon_{xy}^p &= d\lambda\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.16)$$

①理想弹塑性材料的本构关系——Prandtl-Reuss 关系

$$\begin{cases} de_{ij} = \frac{1}{2\mu}dS_{ij} + d\lambda \cdot S_{ij} \\ d\epsilon_{ii} = \frac{1}{3K}d\sigma_{ii} \end{cases} \quad (3.17)$$

因此下面只要确定了 $d\lambda$ ，便可以彻底确定本构关系。它可以通过形状应变能增量或者塑性应变增量来确定，这里介绍后者。根据，

$$J_2 = \frac{1}{2}[S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$$

将 $d\epsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij}$ 带入上式，得

$$\frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}{(d\lambda)^2} = J_2 = \frac{1}{3} \sigma_s^2$$

在塑性状态下有

$$d\lambda = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}}{\sigma_s} = \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_s} \quad (3.18)$$

在塑性变形的过程中，比例系数 $d\lambda$ 不仅与材料的屈服极限有关，而且还和变形程度有关，是变化的。但是，在变形某一瞬间，应变偏量增量的每一分量与相对应的应力偏量分量的比值都是相同的 $d\lambda$ 。

本构方程相应化为：

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_s} \left[\sigma_x - \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_z) \right], & d\varepsilon_{yz}^p &= \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_s} \tau_{yz} \\ d\varepsilon_y^p &= \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_s} \left[\sigma_y - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_x) \right], & d\varepsilon_{zx}^p &= \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_s} \tau_{zx} \\ d\varepsilon_z^p &= \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_s} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right], & d\varepsilon_{xy}^p &= \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_s} \tau_{xy} \end{aligned} \quad (3.19)$$

②理想刚塑性材料的本构关系——Levy-Mises 关系

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot S_{ij} \\ \frac{d\varepsilon_x}{S_x} &= \frac{d\varepsilon_y}{S_y} = \frac{d\varepsilon_z}{S_z} = \frac{d\varepsilon_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{d\varepsilon_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{d\varepsilon_{zx}}{\tau_{zx}} = d\lambda \end{aligned} \quad (3.20)$$

其本构方程与式(3.19)一致，只不过角标 p 可以全部去掉。

总结一下，Lévy-Mises 塑性增量理论中的假设如下：

- ① 材料是理想刚塑性的，即 $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p$ ；
- ② 材料是不可压缩的，即 $e_{ij} = \varepsilon_{ij}$ ；
- ③ 材料满足 Mises 屈服条件，即 $\sigma_i = \sigma_s$ 。
- ④ 应变偏量增量与应力偏量成比例，即 $d\varepsilon_{ij} \propto S_{ij}$ ；

在增量理论中，我们得到了塑性应变增量的分量与应力偏量之间的关系。为要得到总塑性应变分量与应力分量之间的关系应将方程(4-76)对全部加载路径积分，从而求出总应变分量与瞬时应力分量之间的关系。由此可见，应力与应变的全量关系必然与加载的路径有关。而全量理论(或称变形理论)则企图直接建立用全量形式表示的与加载路径无关的本构关系。但我们知道，塑性应变一般地不是

与加载路径无关的，所以，全量理论一般说来是不正确的。不过从理论上讲，沿路径积分总是可以的，但要在积分结果中引出明确的应力应变的全量关系式，而又不包含应变历史的因素，则仅在某些特殊情况下方为可能。