

文献:

[1] 杨新华.陈传尧.疲劳与断裂（第二版）[M].华中科技大学出版社.2018.

1 绪论

1.1 认识疲劳

在材料的某点或某些点承受扰动应力,且在足够多的循环扰动作用之后形成裂纹或完全断裂,由此所发生的局部永久结构变化的发展过程称为**疲劳**。

疲劳具有以下特点:

1. 只有在承受扰动应力(fluctuating stress)作用的条件下,疲劳才会发生。
2. 疲劳破坏起源于高应力或高应变的局部。
3. 疲劳破坏是要在足够多次的扰动载荷作用之后形成裂纹或完全断裂。应该将总寿命看作裂纹萌生(initiation)寿命和扩展(propagation)寿命之和。
4. 疲劳是一个发展过程。

对于扰动载荷随时间变化的过程,我们使用载荷谱(load spectrum)或者应力谱(stress spectrum)来进行描述。常常关注最大最小值,比较重要的是应力比。

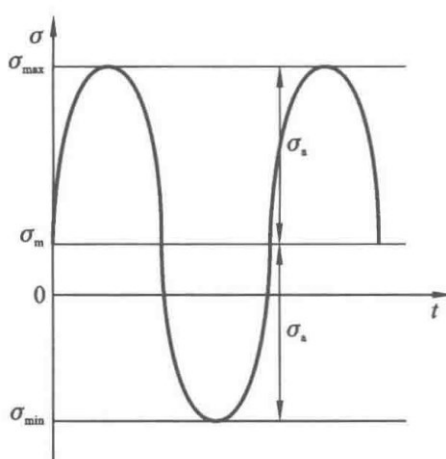


图 恒幅应力循环载荷

和扰动应力水平相比,扰动载荷的频率和波形对疲劳的影响尽管是次要的因

素，有时候也需要引起足够的重视。例如,在腐蚀环境下，频率对疲劳的影响往往会被显著放大。

1.2 疲劳断口特征

1.2.1 宏观特征

要辨别疲劳产生的原因，必须对断口特征进行观察和描述。

1. 有裂纹源、疲劳裂纹扩展区和最后的瞬时断裂区（瞬断区）三个部分。
2. 裂纹扩展区断面较光滑平整，通常可见“海滩条带”（beach mark）,有腐蚀痕迹。
3. 裂纹源通常在高应力局部或材料缺陷处。
4. 与静强度破坏相比，即使是延性材料，也没有明显的塑性变形。
5. 工程实际中的表面裂纹一般呈半椭圆形。

表 1.1 疲劳破坏与静强度破坏的主要区别

破坏类型	疲劳破坏	静强度破坏
作用应力水平	较低	达到或超过极限应力
破坏形式	经历局部损伤累积过程	无损伤累积过程,瞬间发生破坏
断口特征	光滑,有海滩条带或腐蚀痕迹,有裂纹源、裂纹扩展区、瞬断区三个分区	断口粗糙、新鲜、无表面磨蚀或腐蚀痕迹、无分区
	无明显塑性变形	延性材料塑性变形明显
应力集中的影响	应力集中对寿命影响大	应力集中对极限承载能力影响不大

1.2.2 微观特征

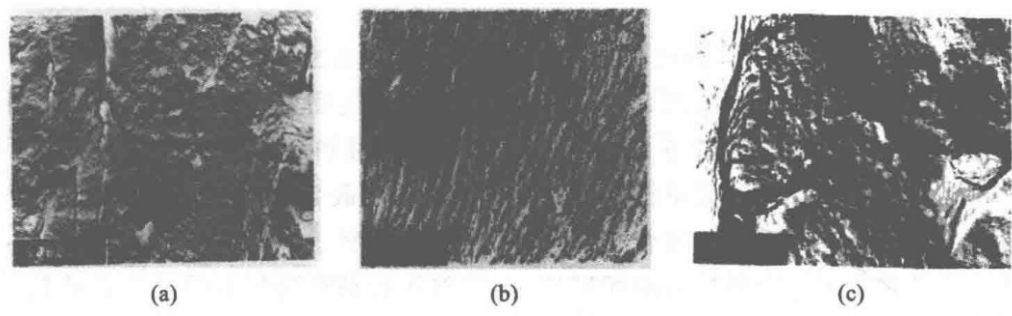


图 1.6 Cr12Ni2WMoV 钢疲劳断口微观观察照
(a) 微解理型;(b) 条纹型;(c) 微孔聚成型

疲劳断口分析不仅有助于分析和判断构件的失效原因，而且可以为改进疲劳研究和抗疲劳设计提供参考。因此，发生疲劳破坏后,应当尽量保护好断口，避免损失宝贵的信息。

1.3 疲劳破坏机理

金属大多是多晶体，各晶粒有各自不同的排列取向。在高应力作用下，材料晶粒中易滑移平面的方位如果与最大切应力方向一致，则容易发生滑移。滑移一般在晶粒内部进行的，当其穿过晶粒之后，会形成“驻留滑移带”，这就是裂纹萌生的机理。

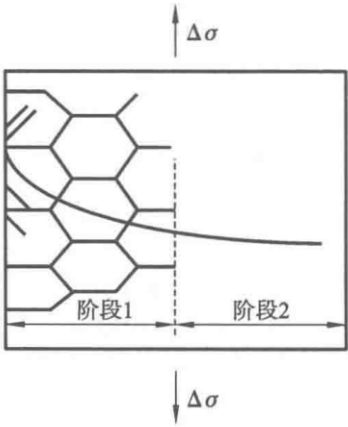


图 1.9 裂纹扩展的两个阶段

Laird(1967)观察了延性材料裂纹尖端几何形状在对称循环应力作用下的改变，提出了描述疲劳裂纹扩展的“塑性钝化模型”。

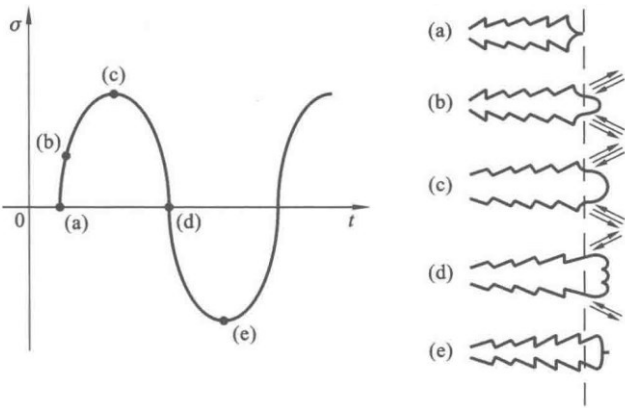


图 1.10 塑性钝化过程

2 高周疲劳

裂纹萌生的寿命低于一万次即低周疲劳，主要是在高应力下的弹塑性问题。

裂纹萌生的寿命高于一万次即高周疲劳，主要是在低应力下的弹性问题。

裂纹萌生的寿命高于一百万次即超高周疲劳。

2.1 基本 S-N 曲线

2.1.1 数学表达

由于裂纹萌生的实时判定比较困难，在工程上为了简便，一般认为裂纹扩展的时间比较短，对整个寿命的影响很小，断裂失效的寿命即裂纹萌生的寿命。在给定的应力比下，施加不同应力幅的循环应力，记录失效时的载荷循环次数(即寿命)。以寿命为横轴、应力幅为纵轴，描点并进行数据拟合，即可得到如图 2.1 所示的 S-N 曲线。

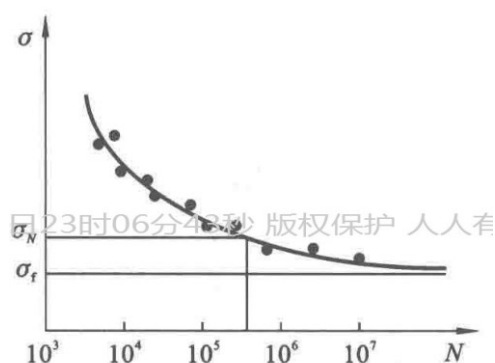


图 2.1 S-N 曲线

在 S-N 上对应于寿命 N 的应力，称为寿命图 N 的条件疲劳强度，以下简称疲劳强度，记作 σ_N 。在 $R=-1$ 的对称循环载荷下寿命为 N 的疲劳强度，记作 $\sigma_{N(R=-1)}$ 。寿命 N 趋于无穷大时所对应的应力，称为材料的疲劳极限(endurance limit)，记作 σ_f 。在 $R=-1$ 的对称循环载荷下的疲劳极限，记作 $\sigma_{f(R=-1)}$ ，简记为 σ_{-1} 。

目前最受认可的数学拟合，是 Basquin 公式。

2) Basquin 公式

1910 年, Basquin 在研究材料的弯曲疲劳特性时, 提出了描述材料 S-N 曲线的幂函数表达式, 即

$$\sigma^m N = c \quad (2-3)$$

对式(2-3)两边同时取对数, 有

$$\lg \sigma = a + b \lg N \quad (2-4)$$

式中, $a = \frac{\lg c}{m}$, $b = -\frac{1}{m}$ 。式(2-4)表明, 应力和寿命之间存在对数线性关系。

2.1.2 近似估计

对于疲劳极限, 认为是静强度极限的若干倍, 系数 k 对于弯曲疲劳一般取 0.5, 拉压疲劳取 0.35, 对称扭转疲劳取 0.29。

$$\sigma_f = \begin{cases} k\sigma_u, & \sigma_u < 1400 \text{ MPa} \\ 1400k, & \sigma_u \geq 1400 \text{ MPa} \end{cases}$$

而对于 SN 曲线的估计, 可以利用两点来拟合 Basquin 公式的系数。即

$$N = 10^3, \sigma = 0.9\sigma_u$$

$$N = 10^7, \sigma = \sigma_f = k\sigma_u$$

2.2 平均应力的影响

对材料来说, 受拉显然对于孔洞的产生和扩大有正向作用, 所以材料在疲劳上一般是耐压不耐拉的。换言之, 平均应力的上升, 会使得在相同应力幅下的寿命缩短。这时候如果需要保持寿命不变, 也就需要减小应力幅值。

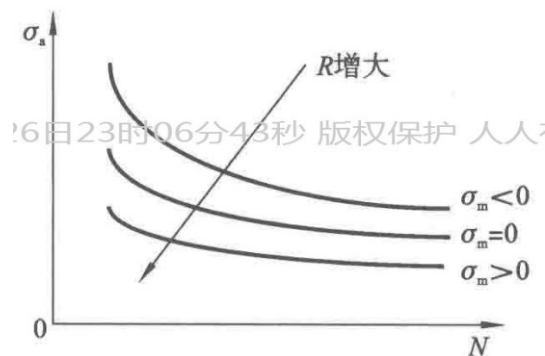


图 2.4 平均应力对 S-N 曲线的影响

对图 2.4 涉及到的三个量, 把幅值和均值作为横纵坐标, 可以得到等寿命曲线。对其进行归一化后, 再分别采用抛物线方程和线性方程进行拟合, 可以得到下面的方程。

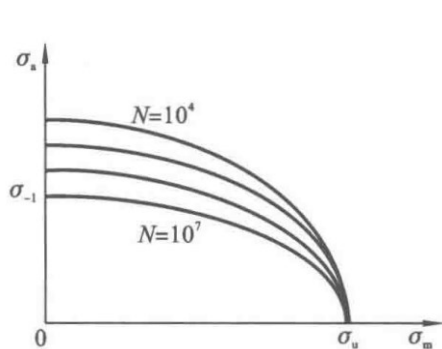


图 2.5 等寿命曲线

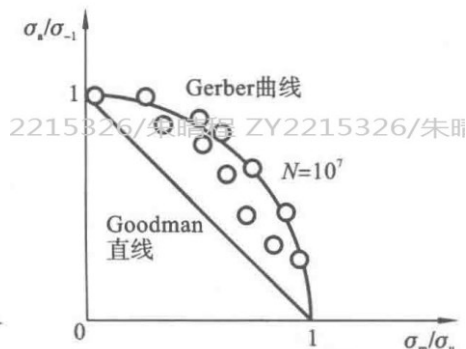


图 2.6 Haigh 图

$$Goodman: \frac{\sigma_a}{\sigma_{N(R=-1)}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_u} = 1 \quad (1.1)$$

$$Gerber: \frac{\sigma_a}{\sigma_{N(R=-1)}} + \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u}\right)^2 = 1 \quad (1.2)$$

更工程化地，你可以使用等寿命疲劳图来方便地预估寿命或设计加载（原理见 24 页）。

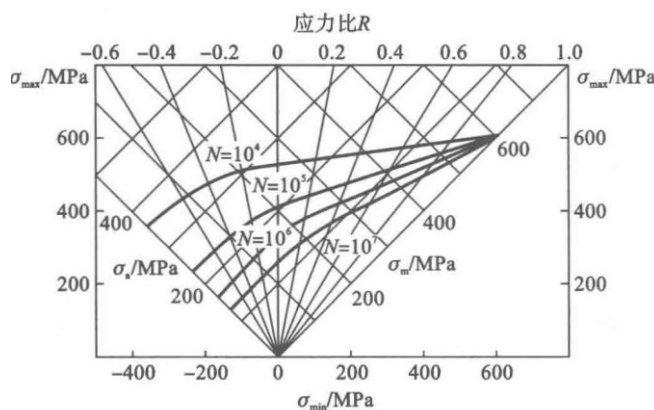


图 2.9 7075-T6 铝合金的等寿命疲劳图

2.3 影响疲劳性能的若干因素

- 1) 加载方式的影响：危险程度上，扭转>拉压>弯曲；
- 2) 尺寸效应：实验室一般使用小尺寸构件来得到 SN 曲线，真实的大尺寸构建的疲劳寿命更低，所以可以引入一个尺寸修正因子（一般小于 1）来修正。

另外，一般尺寸效应对长寿命疲劳的影响较大。当应力水平比较高，寿命比较短时，材料分散性的影响相对较小，因此，如果用上述尺寸修正因子修正整条 S-N 曲线，则将过于保守。

- 3) 表面光洁度影响：根据疲劳的局部性，粗糙的表面将加大构件局部应力集中程度，从而缩短裂纹萌生寿命。因此类似于尺寸修正，表面光洁度的影响也可以通过引入一个小于 1 的修正因子（即表面光洁度系数）来描述（如图 2.11）。

一般来说,材料强度越高,表面光洁度的影响越大;另外,应力水平越低,寿命越长,表面光洁度的影响也越大。

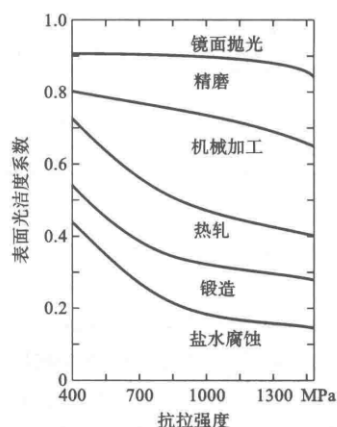


图 2.11 不同表面加工条件、不同材料强度下的表面光洁度系数

- 4) 表面处理的影响：疲劳裂纹大多起源于表面。因此,为了提高疲劳性能,除改善表面光洁度以外,还可以采用各种方法（如喷丸, 渗碳, 渗氮）在构件表面引入压缩残余应力(residual stress),以达到提高疲劳寿命的目的。
- 5) 温度和环境的影响：材料在诸如海水、水蒸气、酸碱溶液等腐蚀性介质环境下发生的疲劳,称为腐蚀疲劳。腐蚀介质的作用对疲劳是不利的。在腐蚀疲劳过程中,力学作用与化学作用相互耦合,与常规的疲劳相比,破坏进程会大大加快。金属材料的疲劳极限一般随温度的降低而增大。

2.4 缺口疲劳/应力集中的影响

研究缺口件的疲劳寿命有两种思路,一种是把局部最大应力和光滑件的 SN 曲线进行对比;一种是把名义应力和标准缺口件的 SN 曲线进行对比。前者主要在有限元计算中得以应用,后者更为方便,是在工程中常用的方法,因此下面提到的概念都主要用于修正原先的 SN 曲线。

这里简写, K_t 为弹性应力集中系数, K_f 为疲劳缺口系数。

$$\left\{ \begin{array}{l} K_t = \frac{\sigma_{\max}}{S} \\ K_f = \frac{\sigma_f}{\sigma'_f} \end{array} \right\} \Leftarrow q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} Peterson : q = \frac{1}{1 + \frac{p}{r}} \\ Neuber : q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a}{r}}} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

对缺口件的 SN 曲线进行修正，方法仍然是取两点来拟合 Basquin 公式。

$$\begin{aligned} N = 10^3, \sigma = K'_f \sigma_{10^3} \text{ 或 } N = 1, \sigma = \sigma_u \\ N = 10^6, \sigma = K_f \sigma_f \end{aligned} \quad (1.4)$$

多轴应力状态的疲劳寿命预测

一般来说，人们总是希望以单轴的疲劳极限来预计复合应力作用下的疲劳极限，并以静载复合应力作用下的强度条件为准则。方法是按照这些强度理论计算出“相当应力” σ_{eq} 。(包括相当的应力幅和相当的平均应力等)，再利用材料 S-N 曲线，即可定出相应的疲劳寿命。

对于具有一定塑性性质的材料，常用“最大剪应力理论”或“畸变能理论”来计算等效应力。

2.5 变幅循环载荷作用下的疲劳

2.5.1 变幅载荷谱

在开展疲劳问题分析之前，必须首先确定零、构件或结构在工作状态下所承受的扰动载荷谱，将一定时间段内的工作情况合并，作为载荷谱中一个典型的载荷循环块，其称为典型载荷谱块。整个变幅载荷谱可以看作典型载荷谱块的重复。

2.5.2 Miner 线性损伤累积理论

假设零构件在某恒幅循环应力 σ_i 作用下的寿命为 N_i ，则其在经受该应力水平 n_i 次循环后受到的损伤可以定义为

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (1.5)$$

则对于变幅载荷，如果零构件在 k 个应力水平下各经受一定次数的循环，其受到的总损伤可以定义为

$$D = \sum_{i=1}^k D_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (1.6)$$

线性损伤累积理论存在两个明显的局限:一是不能反映载荷作用次序的影响;二是零、构件在发生疲劳破坏时的损伤值为 1 的假设与大多数实际情况不符。

笔者持有以下怀疑:

- 1) 首先得明确什么是损伤(怎么直接地不拐弯地定义损伤)、损伤应该用什么东西来衡量? 而该理论就认为恒幅载荷作用下的损伤的累积随着循环周期的累积是均匀(私认为不能说线性, 就是均匀)的, 这种简化可信吗?

从感性的角度来说, 损伤应该和裂纹的长度深度等成正相关。而裂纹萌生阶段的时间比较长、扩展阶段的时间比较短, 也就是从肉眼观察上看, 先是没有裂纹, 其次才突然萌生后并快速扩展直到断裂。相对应地, 损伤一开始应该很小(甚至为 0), 然后随时间增长, 并且在萌发之后累积得更快了。基于这些思考, 线性理论预测的损伤值应该会偏小。

事实上, 也有人认为是偏保守的, 所以只能说是不准确的, 和载荷作用的顺序也有些关系。

- 2) 这里讨论的对象是高周疲劳, 假设在单个典型载荷谱块中, 某一种载荷水平的循环次数相对比较少, 还能用高周疲劳的寿命次数来计算吗? 会不会可能它并没有造成损伤?

2.5.3 相对 Miner 理论

如果考虑载荷作用的次序, 构件发生疲劳破坏的临界条件可以写作:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} = Q \quad (1.7)$$

Q 一般取 0.3-3.0 之间, 你可以通过试验或者经验获取构建在典型载荷谱下断裂时得到的 Q 来帮助预测新的、相似构建在典型谱下的寿命。

2.6 随机载荷谱与循环计数法

2.6.1 随机载荷谱

随机载荷谱是指载荷随时间随机变化的载荷谱。在载荷谱中, 载荷-时间历程曲线发生斜率变号的点称为反向点。

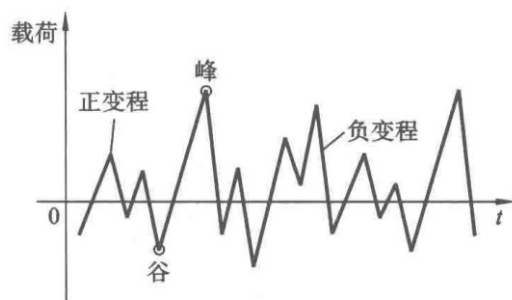


图 2.21 随机载荷谱示意图

2.6.2 雨流计数法

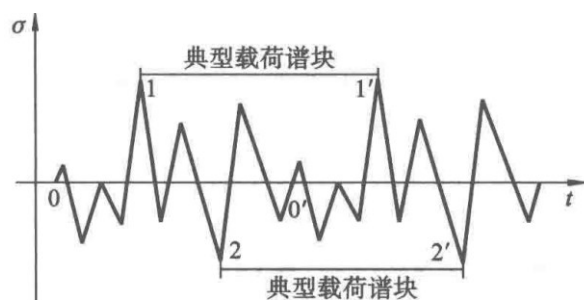


图 2.22 典型载荷谱块的选取

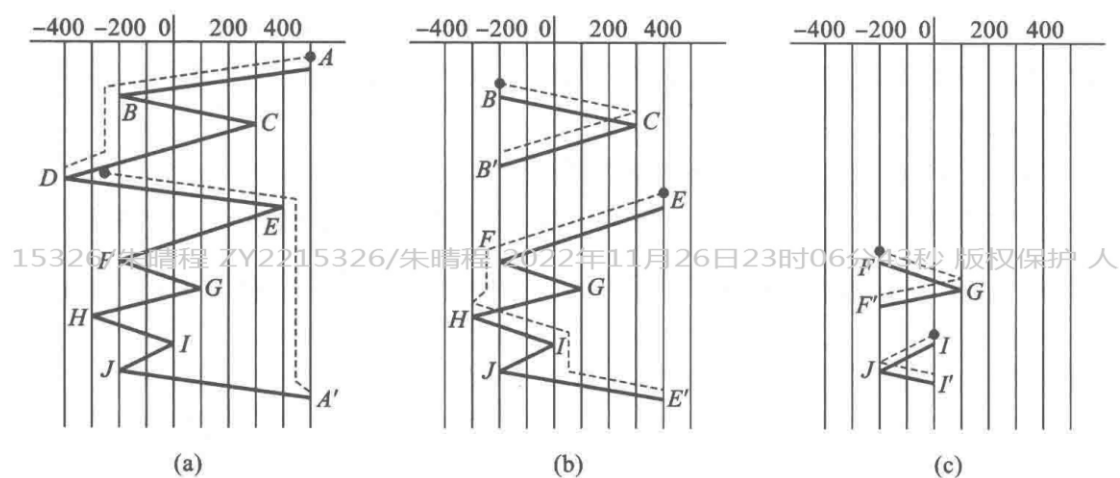


图 2.23 雨流计数的主要过程

(a)第一次雨流；(b)第二次雨流；(c)第三次雨流

2.6.3 不同载荷之间的相互转换

不同载荷之间的相互转换必须遵守损伤等效（fatigue damage equivalence）的原则。即，

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} \quad (1.8)$$

3 疲劳应用统计学

本章尽管一直在介绍疲劳寿命的分布形式，但是整体上是有一个递进思路的。在真实绘制疲劳寿命的 N-S 曲线时，必须做多个载荷的疲劳试验，并且对每一个载荷重复多次，这称为“多载荷多点的 P-S-N 曲线”。而下文中的两个分布是介绍某一载荷下寿命分布的形式满足正态分布或威布尔分布（即单载荷多点）；而线性回归小节是介绍每个载荷做一次试验时 S-N 曲线应该如何拟合出来（即单载荷多点）。

3.1 疲劳数据的分散性

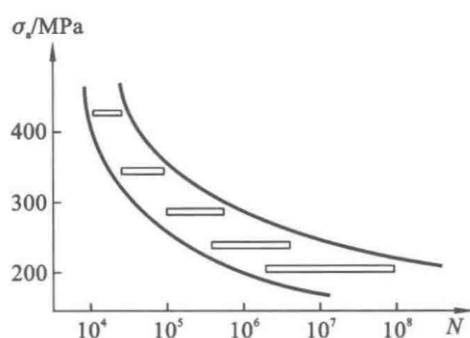


图 3.1 7075-T6 铝合金在不同应力水平下的寿命分布

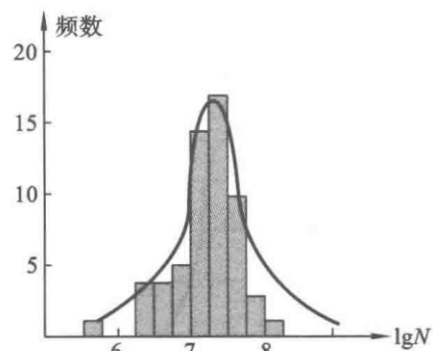


图 3.2 7075-T6 铝合金在 207 MPa 应力水平下的寿命分布直方图

3.2 正态分布

3.2.1 给定疲劳寿命下的失效概率估计

疲劳寿命样本可以通过如下公式取得平均值和样本数据方差：

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\end{aligned}\tag{2.1}$$

把分布转化为标准正态分布就可以得到失效概率。

3.2.2 置信水平

假设寿命估计值小于真值的概率为 γ ，则 γ 称为这一估计的置信度。置信度 γ 通常取为 90% 或 95%。将失效概率为 P_f 、置信度为 γ 的对数寿命写为

$$x_{p(\gamma)} = \bar{x} + ks \quad (2.2)$$

3.3 威布尔分布

正态分布在描述疲劳寿命的分布时，不能反映构件疲劳寿命有一个大于等于零的下限这一物理事实。威布尔分布(Weibull distribution)可以弥补这一不足。威布尔分布是 Waloddi Weibull 于 1951 年在研究滚珠轴承的疲劳寿命分布时提出的，现已得到广泛的应用。

威布尔分布的密度函数可以表示为

$$f(N) = \frac{b}{N_a - N_0} \left(\frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^{b-1} e^{-\left(\frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^b}, N \geq N_0 \quad (2.3)$$

N 的失效概率 P_f 或分布函数 $F(N)$

$$F(N) = 1 - e^{-\left(\frac{N - N_0}{N_a - N_0} \right)^b} \quad (2.4)$$

可以取二次对数，得到线性关系

$$\lg \lg [1 - F(N)]^{-1} = b \lg(N - N_0) + \lg \lg e - b \lg(N_a - N_0) \quad (2.5)$$

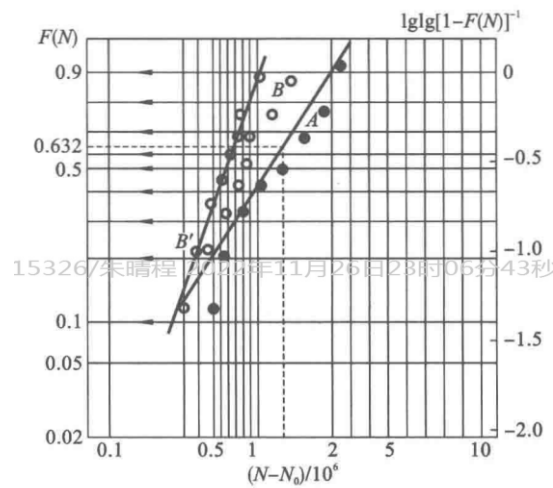


图 3.8 威布尔概率坐标纸及其应用

3.4 线性回归分析

3.4.1 相关关系和回归方程

对于变量 X 的每一确定值，变量 Y 都有可以预测的一个或几个确定值与之对应，则称变量 Y 与 X 之间具有确定性关系。如果当变量 X 取某确定值时，变

量 Y 并无确定的值与之对应，与之对应的是一个确定的概率分布，则称变量 Y 与 X 之间具有相关关系。

设随机变量 X 、 Y 间存在着相关关系，当 X 取某值 x 时， Y 的数学期望记作 $E(Y/X=x)$ ，他是 x 的函数，即

$$E(Y/X=x)=f(x) \quad (2.6)$$

而 Y 的总体分布参数通常是位置的，一般只能通过样本数据求其估计量 y ，故有

$$y=f(x) \quad (2.7)$$

3.4.2 用最小二乘法拟合回归方程

3.4.3 相关系数及相关关系检验

注意到 Q 、 L_{yy} 均恒为正，故相关系数 $|r| \leq 1$ 。当 $|r| \rightarrow 1$ 时， $Q \rightarrow 0$ ，表示数据点基本上都在回归直线上，变量 X 、 Y 相关密切； $|r|$ 越小，表示偏差平方和 Q 越大，相关性越差；若 $|r|$ 很小，甚至趋近于零，则变量 X 、 Y 之间不具有所假定形式的相关关系，或者二者完全不相关。由式(3-29)中的第二式可知，相关系数 r 与 B 同号， $r > 0$ 则 $B > 0$ ，回归直线斜率为正，称为正相关； $r < 0$ 则 $B < 0$ ，回归直线斜率为负，称为负相关，如图3.10所示。

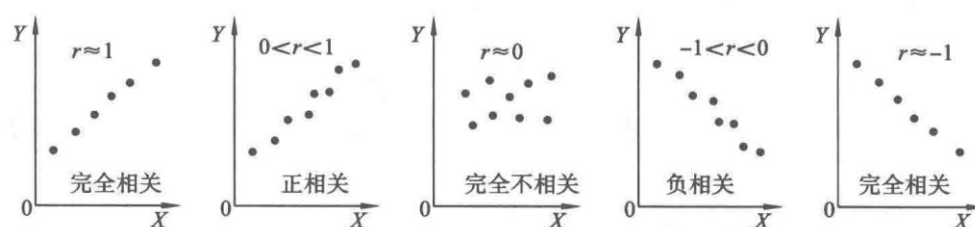


图 3.10 相关系数的几何意义

3.5 S-N 曲线和 P-S-N 曲线

3.5.1 利用回归方程进行统计推断

回归方程经过相关关系检验后，即可用来描述随机变量间的相关关系。

当 X 取某一值 z 时，随机变量 Y 虽然没有一个确定值 y 与之对应，但可由回归方程求出 y 的数学期望 \bar{y} 。 \bar{y} 只是 y 的估计量，而真实的 y 总是围绕 \bar{y} 上下波动的。

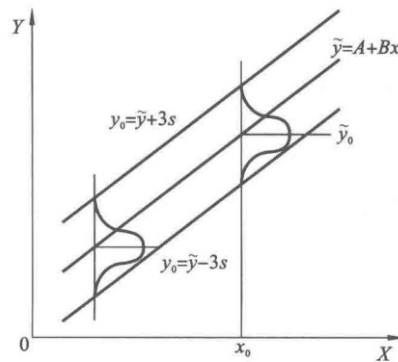


图 3.11 利用回归方程进行统计推断

假设这种波动可以用正态分布表达，那意味着对于任一 x ，与之对应的 y 的分布满足正态分布。当样本容量 n 较大时，分布参数可以通过下式估计：

$$\begin{aligned} \mu &= y = A + Bx \\ s &= \sqrt{\frac{Q}{n-2}} = \sqrt{\frac{L_{yy} - B^2 L_{xx}}{n-2}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

如图 3.11 所示，中间的用最小二乘法得到的曲线对应的就是数学期望值 y 所在的曲线，在 x_0 处实际的 y 落在 y 之上或之下的概率都为 50%。如果取 $u_p = 3$ ，查标准正态分布表可得 $P_f = 99.87\%$ ，即实际的 y 落在 $y = y + 3s$ 的概率为 99.87%。

Ps: 这里取 $u_p = 3$ 其实是有意和 3σ 法则相关联。如果把这个 XY 换成 N-S 曲线，则上述的概率值就是和失效概率有关，不过因为 N-S 曲线是一个负相关的关系，所以需要进一步分析。

则线性回归分析的基本方法流程如下：

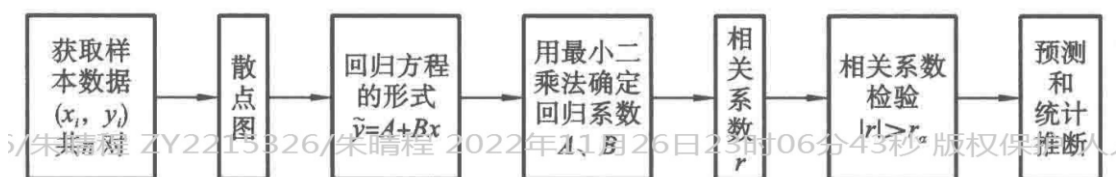


图 3.12 线性回归分析框图

根据式 (3.8)，用这种方法得到的 N-S 曲线，在任何一个载荷下的方差都是相等的，就不能反映图 3.1 所示的不同寿命下的波动范围不一样的现象。因此需要做多载荷多点的疲劳试验来解决这一问题，也就是得到 P-S-N 曲线（其实就是做了 2 次线性回归，下面四个图是一个例子）。

表 3.9 2A12 铝合金板材的对数疲劳寿命 $x = \lg N$ 试验数据 ($R = 0.1$)

i	$\sigma_{\max} / \text{MPa}$				$P_f = \frac{i}{n+1}$	$P_s = 1 - P_f$
	199	166	141.2	120.2		
1	4.914	5.093	5.325	5.721	0.0909	0.9091
2	4.914	5.127	5.360	5.851	0.1818	0.8182
3	4.929	5.130	5.435	5.859	0.2727	0.7273
4	4.964	5.140	5.441	5.938	0.3636	0.6364
5	4.964	5.146	5.470	6.012	0.4545	0.5455
6	4.982	5.167	5.471	6.015	0.5455	0.4545
7	4.982	5.188	5.501	6.082	0.6364	0.3636
8	4.996	5.204	5.549	6.136	0.7273	0.2727
9	5.029	5.220	5.582	6.138	0.8182	0.1818
10	5.063	5.248	5.612	6.165	0.9091	0.0909

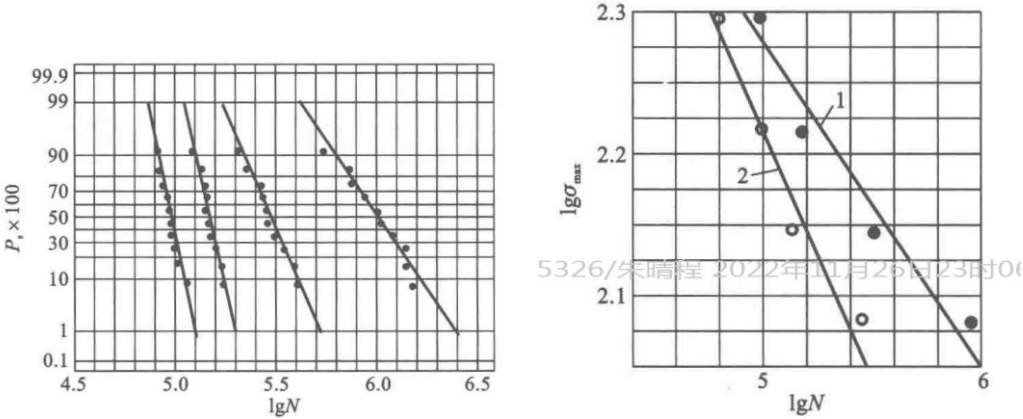


图 3.13 在正态概率坐标纸上对数寿命与存活概率关系 图 3.14 在双对数坐标图上的 S-N 曲线

表 3.10 不同应力水平下的拟合结果

i	$\sigma_{\max} / \text{MPa}$	A	B	r	$\lg \sigma_{\max}$	$x = A + Bu_p$	
						$P_s = 50\%$	$P_s = 99.9\%$
1	199.0	4.7937	0.0566	0.975	2.2989	4.9737	4.7988
2	166.0	5.1663	0.0571	0.988	2.2201	5.1663	4.9899
3	141.2	5.4746	0.1084	0.989	2.1498	5.4746	5.1396
4	120.2	5.9917	0.1722	0.973	2.0799	5.9917	5.4596

4 低周疲劳

事实上，区分低周疲劳和高周疲劳的标准，并不是循环周次的多少，而是材料有没有进入塑性状态。

众所周知，对于延性较好的材料，一旦发生屈服，即使应力的变化非常小，应变的变化也会比较大，而且应力和应变之间的关系也不再是一一对应的关系。应变成为比应力更敏感的参量，因此采用应变作为低周疲劳问题的控制参量显然更好一些。

4.1 单调应力应变响应

应力应变曲线上任一点的应变可以表示为弹性应变和塑性应变之和。把 Hooke 定律和 Holomon 关系结合得到著名的 Remberg-Osgood 弹塑性应力应变关系。

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.1)$$

式中，K 表示强度系数，具有应力量纲；n 为应变强化指数，是无量纲量。

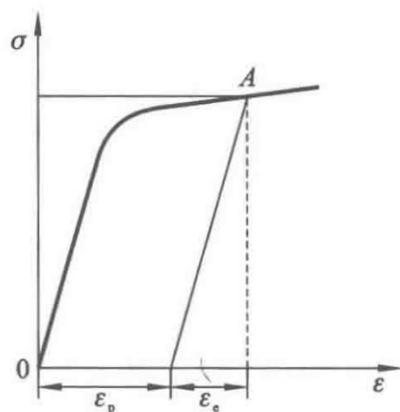


图 4.2 单调应力-应变曲线

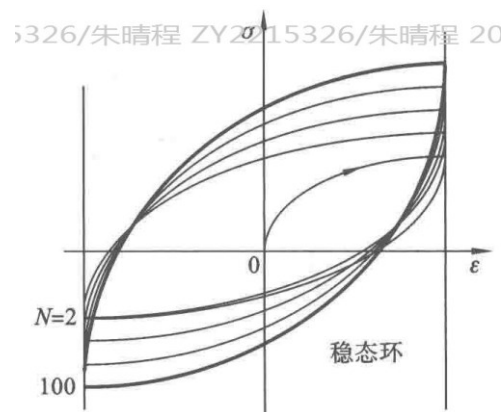


图 4.3 低碳钢的循环应力-应变响应

4.2 循环应力应变响应

4.2.1 滞回行为

在恒幅应变循环试验中，连续监测材料的应力-应变响应，可以得到一系列的环状曲线。图 4.3 就是在恒幅对称应变循环下得到的低碳钢循环应力-应变响应。这些环状曲线反映了材料在循环载荷作用下应力、应变的连续变化，通常称

为滞回曲线或滞回环（hysteresis loops）。

滞回环具有以下特点：

- 1) 滞回环随循环次数而改变，表明循环次数对应力-应变响应有影响。
- 2) 经过一定循环周次之后，有稳态滞回环出现。
- 3) 有循环强化和软化现象。循环强化和软化现象与材料及其热处理状态有关。一般说来，低强度、软材料趋于循环强化，而高强度、硬材料趋于循环软化。

4.2.2 循环应力幅-应变幅曲线

利用在不同应变水平下的恒幅对称循环疲劳试验，可以得到一族稳态滞回环。将这些稳态滞回环绘制在同一坐标图内，如图 4.4 所示，然后将每个稳态滞回环的顶点连成一条曲线。该曲线反映了在不同稳态滞回环中与循环应变幅对应的应力幅响应，因此称为循环应力幅-应变幅曲线。用下式描述循环应力幅-应变幅曲线：

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa} = \frac{\sigma_a}{E} + \left(\frac{\sigma_a}{K'}\right)^{\frac{1}{n'}} \quad (3.2)$$

式中， K' 表示强度系数，具有应力量纲； n' 为应变强化指数，是无量纲量。

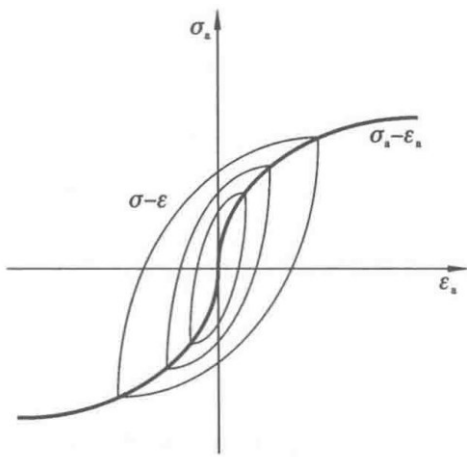


图 4.4 循环应力幅-应变幅曲线

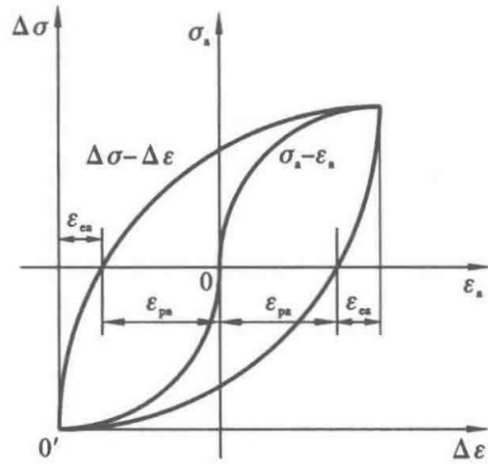


图 4.5 滞回环

假设滞回环与循环应力幅-应变幅曲线几何相似，则在应力幅-应变幅坐标系中的应力幅 σ_a 和应变幅 ε_a ，分别与在应力范围和应变范围坐标系中的 $\frac{\Delta\sigma}{2}$ 和 $\frac{\Delta\varepsilon}{2}$ 。

则滞回环方程可以写作

$$\frac{\Delta \varepsilon}{2} = \frac{\Delta \sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_e + \Delta \varepsilon_p = \frac{\Delta \sigma}{E} + 2 \left(\frac{\Delta \sigma}{2K'} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.3)$$

4.3 低周疲劳分析

4.3.1 E-N 曲线

照标准试验方法，在 $R=-1$ 的对称循环载荷下，开展给定应变幅下的对称恒幅循环疲劳试验，可得到图 4.10 所示的应变-寿命曲线。图中，载荷用应变幅 ε_a 表示，寿命用载荷反向次数表示。注意到每个载荷循环有两次载荷反向，若 N 为总的载荷循环次数，则 $2N$ 就是总的载荷反向次数。

真实试验时一般获取的是总应力、总应变和材料的弹性模量，但低周疲劳下总应变和寿命之间不成对数线性关系，但弹性和塑性应变分别与寿命成对数线性关系。因此首先计算两个应变，其次拟合关系。

$$\begin{cases} \varepsilon_{pa} = \varepsilon_a - \varepsilon_{ea} \\ \varepsilon_{ea} = \frac{\sigma}{E} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ea} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b \\ \varepsilon_{pa} = \varepsilon_f' (2N)^c \end{cases} \quad (3.5)$$

应变-寿命关系可以表示为：

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa} = \frac{\sigma_f'}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (3.6)$$

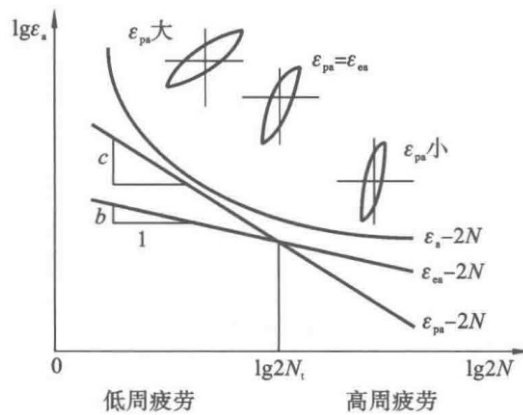


图 4.10 典型的应变-寿命曲线

如图 4.10，在长寿命区间，总应变幅以弹性应变幅为主，可以把式 (4.6) 改

写为 $\varepsilon_{ea}^m N = c_1$ 与反映高周疲劳性能的 Basquin 公式一致；在长寿命区间，总应变幅以塑性应变幅为主，可以把式（4.6）改写为 $\varepsilon_{pa}^m N = c_2$ ，这就是著名的 Manson-Coffin 公式。

4.3.2 平均应力的影响

采用下述经验公式考虑平均应力的影响：

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ea} + \varepsilon_{pa} = \frac{\sigma_f' - \sigma_m}{E} (2N)^b + \varepsilon_f' (2N)^c \quad (3.7)$$

注意到在式（4.7）中，b、c 都小于零，因此当寿命 N 相同时，平均应力越大，可承受的应变幅 ε_a 越小；或应变幅不变，平均应力越大，则寿命 N 越短。可见，拉伸平均应力是有害的，压缩平均应力则可提高疲劳寿命。

4.4 随机载荷下的应力应变响应

4.4.1 材料的记忆特性

图 4.6 是材料在“加载-卸载-加载”过程中应力-应变曲线的示意图。如果只有单调加载，应力应变曲线将由 A 经 B 到 D，但如果加载到 B 处后卸载，则曲线会沿路径 BC 变化；到 C 处后，如果又重新加载，则曲线沿 CB' 回到 B' 点，如果还继续加载，则材料好像“记得”本来的路径，仍然沿 ABD 路径走向 D 点。

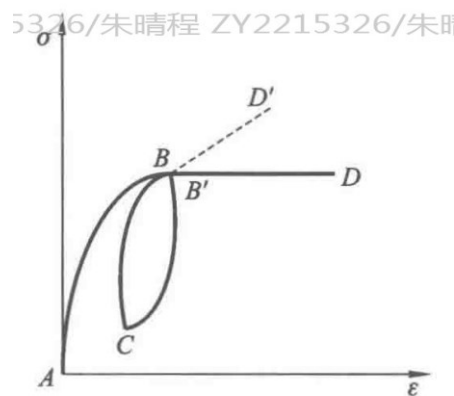


图 4.6 材料的记忆特性

- 1) 如果应变第二次到达某值，并且此前在该值处曾发生过应变变化的反向，则应力-应变曲线将形成封闭环。
- 2) 越过封闭环顶点后，应力-应变曲线并不会受到封闭环的影响，就好像具备记忆能力一样，仍然沿着原来的路径发展。

4.4.2 对典型应变谱块的应力响应

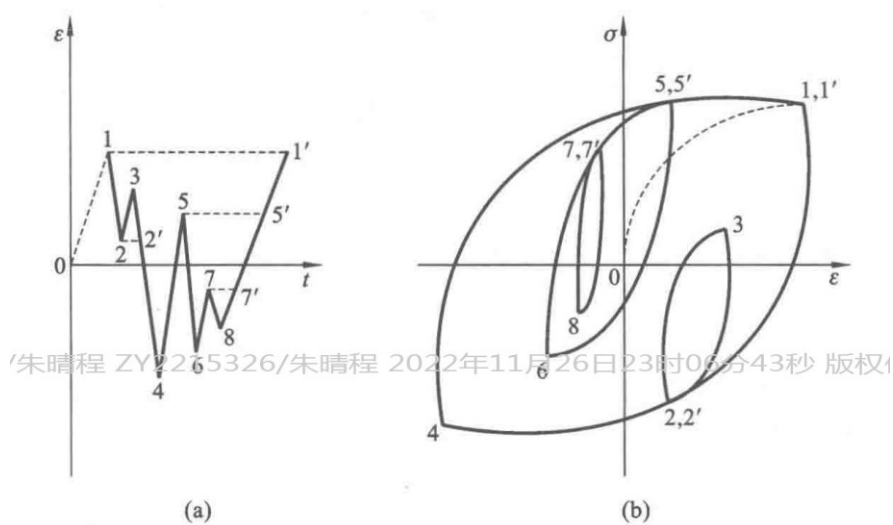


图 4.7 某构件的典型载荷谱块与应力-应变响应

针对一个典型载荷谱块，可以认为在此之前构件已经经历了许多循环，因此循环应力-应变响应已经进入稳态。则针对这样的问题，仍然可以采用高周疲劳随机载荷响应中的雨流计数法来处理，本质如此，但处理方式稍有不同。

对于典型谱块的第一个点，可以采用循环应力幅-应变幅方程描述，即式(4.2)。

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} + \left(\frac{\sigma_1}{K'}\right)^{\frac{1}{n}}$$

而由点 1 到点 2 是一个卸载过程，处于某滞回环的下半支，因此必须采用式(4.3)的增量形式的滞回环方程描述，即

$$\Delta\varepsilon_{1-2} = \frac{\Delta\sigma_{1-2}}{E} + 2\left(\frac{\Delta\sigma_{1-2}}{2K'}\right)^{\frac{1}{n}}$$

式中， $\Delta\varepsilon_{1-2} = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$ ， $\Delta\sigma_{1-2} = |\sigma_1 - \sigma_2|$ 。对于点 2 以后的所有加载或卸载过程都可以用增量形式的滞回环方程描述。

4.5 局部应力集中/缺口件的疲劳

4.5.1 从名义应力应变到局部应力应变

假设在循环载荷作用下缺口根部发生的疲劳损伤,与承受同样应力或应变历程的光滑件发生的疲劳损伤相同,这样就可以将缺口件的疲劳问题转化为光滑件的疲劳问题。

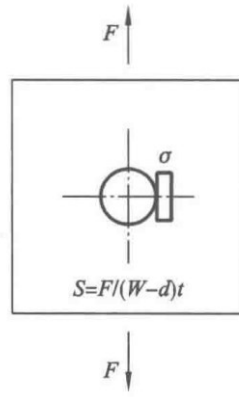


图 4.15 缺口根部的应力集中

名义应力 S 可以定义为：

$$S = \frac{F}{A} = \frac{F}{(W-d)t} \quad (3.8)$$

名义应变 e 可以由 Remberg 方程得到：

$$e = \frac{S}{E} + \left(\frac{S}{K'}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (3.9)$$

应力水平低时就等效为弹性问题，可以由弹性应力集中系数 K_t 求解局部应力应变

$$\sigma = K_t S, \varepsilon = K_t e \quad (3.10)$$

应力水平高时就等效为弹塑性问题，需要重新定义集中系数 K_σ 、 K_ε 。

$$\sigma = K_\sigma S, \varepsilon = K_\varepsilon e \quad (3.11)$$

- 1) 平面应变情形， S 代隆贝格求 e ， e 代 $K_\varepsilon = K_t$ 和 (4.11) 求 ε ， ε 再代隆贝格得到 σ
- 2) 平面应力情形： S 代隆贝格求 e ，再联立隆贝格和 Neuber 曲线接触局部应力应变。Neuber 曲线的推导：

$$K_\sigma K_\varepsilon = K_t^2 \Rightarrow K_\sigma K_\varepsilon e S = K_t^2 e S \Rightarrow \varepsilon \sigma = K_t^2 e S \quad (3.12)$$

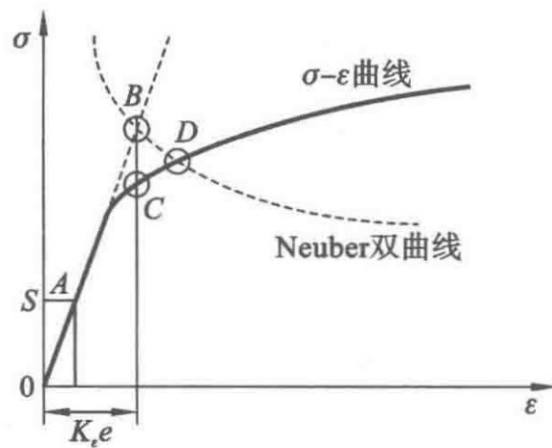


图 4.16 缺口根部的应力应求解

4.5.2 循环应力-应变响应分析和寿命估算

其实也就是把上述求出来的局部应力和局部应变带入 E-N 曲线或者 Manson-Coffin 公式即可。在变幅载荷作用下，仍然可以采用 Palmgren-Miner 理论 进行损伤累积和寿命估算。

可以参考原书 84 页例 4.4 来帮助理解。

至此，疲劳力学完结。