
断裂力学

ClancyCC

[1] 酆正能,关志东,张纪奎,王军,贺小帆. 应用断裂力学[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2012.

[2] 张慧梅. 断裂力学[M]. 中国矿业大学出版社, 2018.

1 绪论

1.1 简述历史

Griffith 为了解释结晶体的拉伸强度远小于其理论强度这一事实, 对脆性材料的断裂问题进行了研究, 他提出一个大胆创新思想: 当构件中存在裂纹时, 也就是固体材料中出现了一个新表面。如假想裂纹扩展一个微量, 构件将释放出一定量的应变能, 系统所释放出来的应变能的一部分转化为表面能; 而要使裂纹扩展, 则需要克服阻力 (所需表面能), 也就是说要作一定量的功。当能量释放率或裂纹扩展单位长度所释放出来的应变能 (亦称裂纹扩展力) 大于阻力时, 裂纹才会发生扩展。根据上述准则, 可得到含裂纹构件发生断裂时应力为

$$\sigma_i \propto \sqrt{\frac{2E\gamma}{a}} \quad (1.1)$$

式中, γ 为材料的表面能, a 为裂纹长度, E 为材料的弹性模量。由式(1.1)可以看出, 断裂应力随着结构内部所含裂纹长度的增大而降低。Griffith 理论的成功, 是把宏观缺陷在几何上理想化之后, 把它作为连续介质力学中的一种边界条件, 则连续介质力学的方法在分析含缺陷的材料的强度和韧性问题上仍然有效, 所以 Griffith 是连续介质力学断裂理论的奠基人。尽管 Griffith 理论对脆性材料较合适, 对金属材料应用误差较大, 但其在断裂力学的发展上无疑是很重要的一步。

Irwin 通过实验确定对一定的材料, 在脆断情况下, 确实有一个临界应力强度因子, 它只与材料有关, 而与试件的几何形状、尺寸以及外加载荷形式无关。这个临界应力强度因子称为材料的断裂韧性, 它表征材料抵抗裂纹扩展的能力。此后便将 Griffith 理论的能量释放率概念与一个更便于计算的裂纹顶端的参量—

—应力强度因子 K 联系起来，从而为线弹性断裂力学奠定了理论基础。

近年来，将概率和统计学与断裂力学结合形成了概率断裂力学分支，应用这种理论和方法进行耐久性和可靠性设计，成为机械产品安全性和可靠性的重要设计方法之一，细观断裂力学、纳观断裂力学和宏观与微观断裂力学等呈蓬勃发展趋势。但是，断裂力学还是一门年轻的学科，它还很不成熟，还有大量有待于深入研究和探讨的问题。

1.2 研究对象

断裂学科是从金相学、金属物理和化学等观点研究断裂的微观机理及物理本质，以及从力学观点研究断裂的宏观现象和微观机理等的学科，统称断裂学科。断裂力学是研究材料和结构在含有裂纹情况下的力学特性的学科。

在断裂力学出现以后，人们对宏观的断裂规律有了进一步的认识，对传统的设计思想进行了改善与补充；不仅对有缺陷构件进行剩余强度和寿命分析，以保证产品安全可靠，或制定正确合理的检验损伤标准。

1.3 研究内容

断裂力学的目的是定量地研究承载体由于含有一条主裂纹发生扩展（包括静载下扩展及疲劳载荷下的扩展）而产生失效的条件。因此，它必须能定量地确定促使裂纹扩展的“推动力”、材料（或结构）阻止裂纹扩展的“阻力”以及在什么条件下结构发生失效，也就是要建立断裂准则。用什么参量表征裂纹“推动力”以及如何计算它的数值，是断裂力学研究中极为重要的一个课题。

把断裂力学原理应用于疲劳裂纹扩展的分析，并用于估算含裂纹结构的寿命，是断裂力学研究的一个极其重要的部分。在工程结构的断裂分析中需要回答下列问题：

- ①结构的剩余强度与裂纹长度有什么样的函数关系？
- ②在已知外载荷作用下，结构中容许的裂纹长度（即临界裂纹长度）是多大？
- ③结构中存在（或假定的）某长度的初始裂纹时，扩展到临界裂纹长度需要多少时间（或多少次载荷循环）？
- ④在结构（或产品）交付使用时，容许有多大的裂纹存在而结构是安全可靠的？

⑤结构设计时，可采用哪些止裂措施来提高结构的寿命和安全性？

2 线弹性断裂力学

用弹性力学的线性理论研究含裂纹体在载荷作用下的力学行为和失效准则的工程学科称为线弹性断裂力学。首先要研究裂纹尖端附近的应力场和位移场（及应变场），确定促使裂纹扩展的“推动力”，即表征裂纹尖端场强的特征参量；还要通过实验和分析，测定材料抵抗裂纹扩展的“阻力”，从而建立裂纹扩展而导致结构失效的条件，即断裂准则。

按裂纹的受力特点和位移特点，可以把它们抽象化为 3 种基本类型：

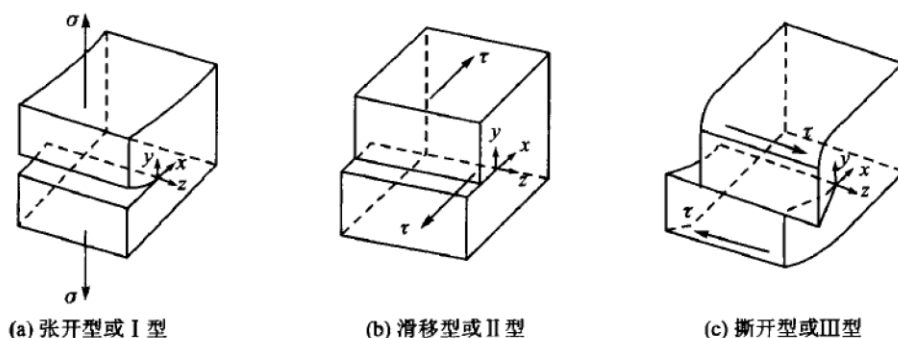


图 2-1 裂纹的基本类型

任何形式的裂纹，都可看做上述 3 种基本类型的组合。本章将首先从应力场强度的观点，然后从能量的观点，研究裂纹体的力学行为和失效准则。

2.1 线弹性裂纹尖端场

除非材料是理想弹性的，否则含裂纹体在任何外载荷下，在其裂纹尖端都必有塑性变形。当裂纹很尖锐时，在尖端处的应力集中程度是很高的，其局部高应力必然导致材料屈服。因此，严格地说，在处理带裂纹体的力学行为时，应该考虑塑性问题。但是，在外载荷不太大，裂纹尖端塑性区与裂纹本身尺寸相比小得多的情况下，可认为整个构件的力学行为主要由小塑性区外的广大弹性区所决定。因此，在线弹性断裂力学分析中，可认为材料是线弹性的，并且暂不考虑裂纹尖端极小范围内的屈服问题。下面具体介绍含裂纹体平面问题的复变函数解法

应力函数可以写成

$$\Phi = \text{Re}[\bar{z}\phi(z) + \chi(z)] \quad (1.1)$$

式中 z ， \bar{z} 为共轭复数， $z = x + iy$ ，剩下两个为解析函数，则应力函数可以

进一步表示为艾雷函数的一般形式，即

$$\Phi = x \operatorname{Re} \phi(z) + y \operatorname{Im} \phi(z) + \operatorname{Re} \chi(z) = \psi_1 + x\psi_2 + y\psi_3 \quad (1.2)$$

2.1.1 张开型裂纹尖端附近应力场和位移场

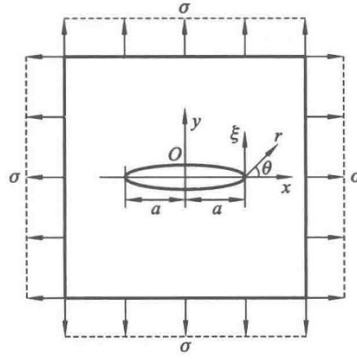
取应力函数为

$$\Phi_I = \operatorname{Re} \bar{Z}_I(z) + y \bar{Z}_I'(z) \quad (1.3)$$

则应力分量的表达式为

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial y^2} = \operatorname{Re} Z_I(z) - y \operatorname{Im} Z_I'(z) \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi_I}{\partial x^2} = \operatorname{Re} Z_I(z) + y \operatorname{Im} Z_I'(z) \\ \tau_{xy} &= \frac{-\partial^2 \Phi_I}{\partial x \partial y} = -y \operatorname{Re} Z_I'(z) \end{aligned} \quad (1.4)$$

下面用“解无限大板中心穿透 I 型裂纹问题”的实例来解释应力函数的设计合理性。



从边界条件出发，定义一 westergaard 应力函数为 $Z_I = \frac{\sigma z}{\sqrt{z^2 - a^2}}$ ，应力函数

应该满足以下三个条件：

- ① $|x| < a, y = 0$ 时，有 $\operatorname{Re} Z_I(z) = 0$ ，则 $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ；
- ② 当 $x, y \rightarrow \infty$ ，就有 $z \rightarrow \infty$ 且 $Z_I(z) \rightarrow \sigma, Z_I'(z) \rightarrow 0$ ，则 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \tau_{xy} = 0$

需要注意的是，尽管 Z 是复变函数，但最终的应力和应力函数各表达式为实变函数。此后，为了考虑裂纹尖端场，将坐标原点移到裂纹尖端，从而引入新的坐标 $\xi = z - a = re^{i\theta}$ ，就有

$$\begin{aligned}
Z_1(\xi) &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} = \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\
Z'_1(\xi) &= -\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} \xi^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{a}{2}} r^{-\frac{3}{2}} \left(-\cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\bar{Z}_1(\xi) &= 2\sigma \sqrt{\frac{a}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} = 2\sigma \sqrt{\frac{ar}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)
\end{aligned}$$

则尖端处用极坐标表示的应力为

$$\begin{cases}
\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
\end{cases}$$

$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ 称为 I 型裂纹的应力强度因子, 由远场应力和裂纹尺寸决定。

2.1.2 II 型裂纹尖端附近应力场和位移场

2. 无穷远处受均匀剪力作用情况

如图 2-3 所示的含中心裂纹无限大板, 在无穷远处作用均匀剪力, 这是 II 型裂纹。

这种情况的 Westergaard 应力函数为

$$Z_{II}(z) = \frac{\tau z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2-21)$$

它满足下列边界条件: $y=0$ 时, $\sigma_y=0$; $y=0, |x|<a, \tau_{xy}=0$; $z \rightarrow \infty, \tau_{xy}=\tau$ 。

应用与上节类似的处理方法, 可得到裂纹尖端附近的应力场和位移场

$$\begin{cases}
\sigma_x = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\
\sigma_y = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\
\tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)
\end{cases} \quad (2-22)$$

$$\begin{cases}
u = \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\
v = \frac{-K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\kappa - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right]
\end{cases} \quad (2-23)$$

式中, $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$ 为应力强度因子。

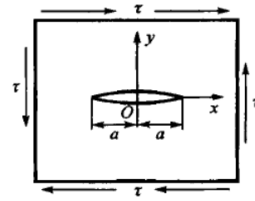


图 2-3 含中心裂纹无限大板受均匀剪力

2.1.3 III型裂纹尖端附近应力场和位移场

III型裂纹问题又称为反平面 (anti-plane) 问题, 由于该问题只有沿 z 方向且与 z 方向坐标无关的位移分量, 即 $u_x = u_y = 0, u_z = u_z(x, y)$ 。

应力函数可写成

$$Z_{\text{III}}(z) = \frac{qz}{\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (2-24)$$

由式(2-12)与式(2-24)可以看出:当 $z \rightarrow \infty$ 时, $\tau_{yx_1} = q$; 当 $y=0, |x| < a$ 时, $\tau_{yx_1} = 0$, 即 $Z_{\text{III}}(z)$ 满足无穷远处和裂纹面上的边界条件。它是本问题的解。以裂纹尖端为原点的坐标系中, 将 $z = a + re^{i\theta}$ 代入式(2-24), 然后展开。在研究 $|r/a| \ll 1$ 处的应力时, 可略去 (r/a) 及 $(r/a)^2$ 等小量, 得到

$$Z_{\text{III}}(z) = \frac{K_{\text{III}}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

式中, $K_{\text{III}} = q\sqrt{\pi a}$ 为应力强度因子。由式(2-12)可得

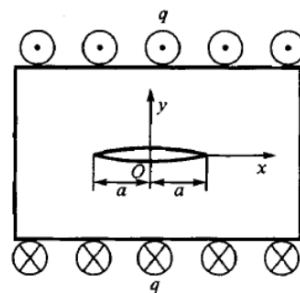


图 2-4 含裂纹无限大板受离面剪切

2.2 应力强度因子

不管何种类型的裂纹, 其尖端应力场都可以表示成如下形式:

$$\sigma_{ij} = \frac{K_N}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta), i, j = 1, 2, 3 \quad (1.5)$$

很明显, 除了位置坐标 r 和 θ 以外, 裂纹尖端应力场由应力强度因子决定, 因子越大, 裂纹尖端应力场越强。应力分量有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性。

对于工程中的有限尺寸构件, 需要对应力强度因子进行修正, 因此更一般地写为:

$$K_N = \sigma\sqrt{\pi a} f(a, W, \dots) \quad (1.6)$$

采用应力强度因子作为低应力脆性断裂发生与否的控制参量, 对于 I 型开裂来说, 断裂判据可以写为

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} f(a, W, \dots) \leq K_{IC} \quad (1.7)$$

2.3 应力强度因子的解析法计算

计算方法有:

解析法: 复变函数法, 权函数法, 变分法

数值法: 边界配置法、有限元法、无网格法

实验法: 柔度法、光弹法、激光全息

其中复变函数解法的基本思路是: 选择合适的解析函数 Z , 验证其满足内外边界条件, 最后通过求极限计算 K 。

2.3.1 无限大板的复变函数解法

以裂纹面受集中力为例，

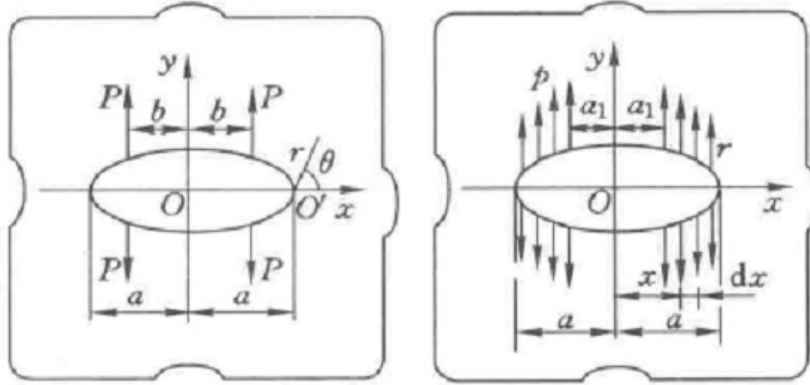


图 2.1 无限大板裂纹面受集中力和均布压力

取复变函数 Z 为：

$$Z_1(z) = \frac{2Pz\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi(z^2 - b^2)\sqrt{z^2 - a^2}}$$

可以证明，该解析函数满足此裂纹问题的下述边界条件：

- ① $z \rightarrow \infty$ 时, $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ 。
- ② 当 $y = 0$ 时, 在 $|x| < a$, 除 $|x| = b$ 外的裂纹面上, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, 即除去 4 个力作用点外, 裂纹面自由。
- ③ 如切出 xy 坐标系第一象限的薄平板, 在 x 轴所在的截面上, 沿 y 方向内力的总和应该等于劈开力 P , 即 $\int_0^\infty \sigma_y dx = P$ 。

把坐标原点移至裂纹右尖端后, 新坐标 $\xi = z - a$

$$\begin{aligned} Z_1(\xi) &= \frac{2P(\xi + a)\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi[(\xi + a)^2 - b^2]\sqrt{\xi(\xi + 2a)}} \\ K_I &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} Z_1(\xi) = \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \sqrt{2\pi\xi} \frac{2P(\xi + a)\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi[(\xi + a)^2 - b^2]\sqrt{\xi(\xi + 2a)}} \\ &= \lim_{|\xi| \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{2\pi}P(\xi + a)\sqrt{a^2 - b^2}}{\pi[(\xi + a)^2 - b^2]\sqrt{\xi + 2a}} = \frac{2P\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(a^2 - b^2)}} \end{aligned}$$

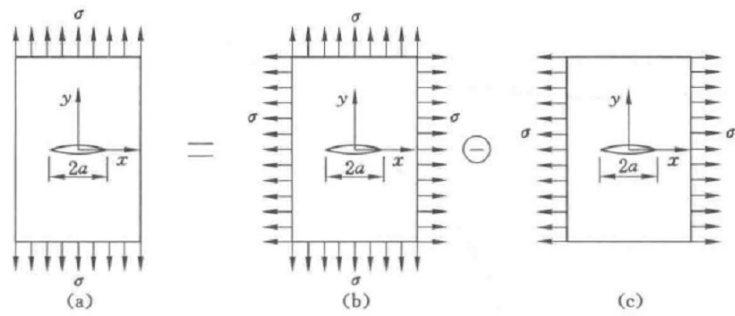
此后, 对于裂纹面收到均布压力的问题, 可以视作对上面受集中力问题的积分叠加。具体: 在距坐标原点任意距离 x 处取一微分 dx , 其上张力 $dP = p dx$, 可以视作集中力。则

$$K_I = \int_{a_1}^a \frac{2(pdx)\sqrt{a}}{\sqrt{\pi(a^2 - x^2)}} = p\sqrt{\pi a} \quad (1.8)$$

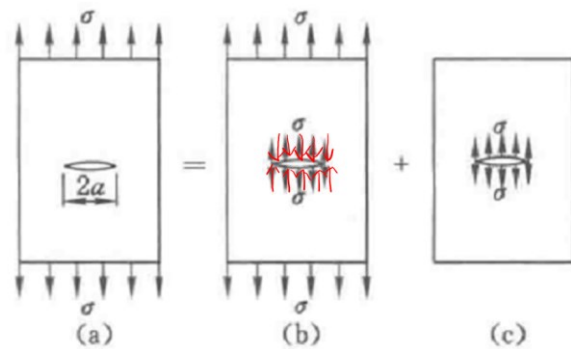
值得注意的是，这个结果和无穷远处受到拉伸应力的 I 型裂纹尖端应力场结果一致，有一定实际意义。

此外，对于裂纹体在若干外力作用下，裂纹尖端产生的应力强度因子等于各个外力单独作用下产生的应力强度因子的代数和。例如对于如下问题，有

$$K_a = K_b - K_c = \sigma\sqrt{\pi a} - 0 = \sigma\sqrt{\pi a}$$

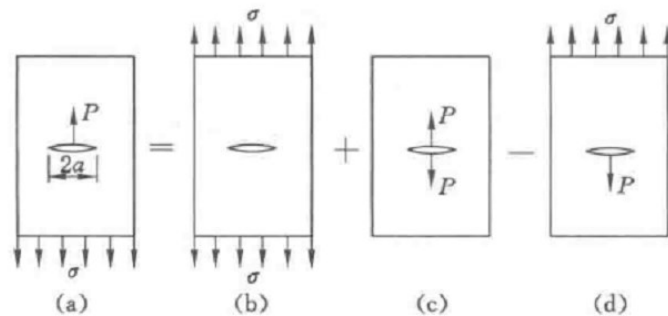


再如下情形，也有 $K_c = K_a - K_b = \sigma\sqrt{\pi a} - 0 = \sigma\sqrt{\pi a}$



再如下方的铆钉孔问题，有：

$$\begin{cases} K_a = \sigma\sqrt{\pi a} + \frac{P}{\sqrt{\pi a}} - K_d \Rightarrow K = \frac{1}{2}(\sigma\sqrt{\pi a} + \frac{P}{\sqrt{\pi a}}) \\ K_a = K_d = K \end{cases}$$



2.3.2 有限大板

可以根据裂纹尺寸和结构尺寸的相对大小来区分有限大板和无限大板。针对有限大板——双边对称裂纹的问题，先考虑无数个有限大板周期排列，令无限大板含有无限多个均匀相距 $2b$ 而各长 $2a$ 的共线裂纹。

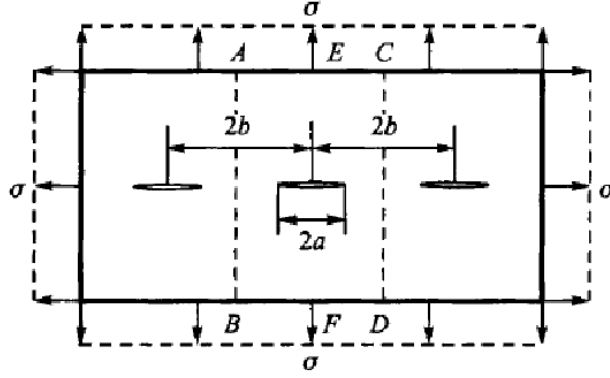


图 2.2 有限大板周期排列和切分

则复变 Z 函数写作:

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{2b}}{\left[\sin^2 \frac{\pi z}{2b} - \sin^2 \frac{\pi a}{2b} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$Z_1(z) = \frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{2b}}{\left[\left(\sin \frac{\pi z}{2b} + \sin \frac{\pi a}{2b} \right) \left(\sin \frac{\pi z}{2b} - \sin \frac{\pi a}{2b} \right) \right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{\sigma \sin \frac{\pi z}{2b}}{\left[4 \sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{2b} (z+a) \cos \frac{1}{2} \frac{\pi}{2b} (z-a) \right]^{\frac{1}{2}}} \times$$

$$\frac{1}{\left[\sin \frac{1}{2} \frac{\pi}{2b} (z-a) \cos \frac{1}{2} \frac{\pi}{2b} (z+a) \right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_1} \sqrt{z - z_1} Z_1(z)$$

此处 $z_1 = a$, 当 $z \rightarrow a$ 时, 有

$$\cos \left[\frac{1}{2} \frac{\pi}{2b} (z-a) \right] \rightarrow 1, \quad \sin \left[\frac{\pi}{4b} (z-a) \right] \rightarrow \frac{\pi}{4b} (z-a)$$

$$K_I = \sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z-a} \frac{\sigma \sin \frac{\pi a}{2b}}{2 \left[\sin \frac{\pi a}{2b} \cos \frac{\pi a}{2b} \cdot \frac{\pi}{4b} (z-a) \right]^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\sqrt{2\pi} \frac{\sigma \sin \frac{\pi a}{2b}}{2 \left[\frac{\pi}{4b} \sin \frac{\pi a}{2b} \cos \frac{\pi a}{2b} \right]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \sigma \left(\frac{b}{\pi} \tan \frac{\pi a}{2b} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{2b}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

此后沿着 AB 和 CD 把板切开，可以得到一块含裂纹长度为 $2a$ 的有限板。

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2}$$

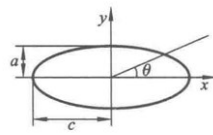
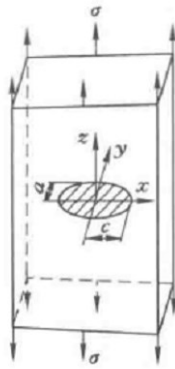
当 $\frac{a}{W}$ 很小时， $\left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2}$ 接近 1.0，该问题也可以近似退化成无限大板。

对于含有边缘裂纹的有限宽板，可沿 EF 和 CD 切开。但是对于边缘裂纹来说，EF 边上的正应力距离裂纹边缘很近，这一应力使裂纹张开位移减少。因此应力强度因子也相应减小。实际上，这一边缘是无正应力的，真实的应力强度因子要稍大 12% 左右。

$$K_I = 1.12 \sigma \sqrt{\pi a}$$

2.3.3 三维裂纹——无限大体深埋椭圆裂纹

对于三维深埋椭圆裂纹，G.R. Irwin 在 1961 年对其强度因子给出了如下的表达。



$$K_I = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \left(\sin^2 \theta + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \theta \right)^{\frac{1}{4}}$$

$E(k)$ 为第二类完全椭圆积分，即

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{\frac{1}{2}} d\theta$$

可见，埋藏椭圆裂纹周边的应力强度因子随考察点所处位置的不同而不同，是角度 θ 的函数。在工程问题中，通常最关心沿短、长半轴处裂纹尖端的应力强度因子。很容易证明，当 $\theta = \pi/2$ 时，即在短轴方向的裂纹尖端，应力强度因子取得最大值，且

$$K_{I(\theta=\pi/2)} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

当 $\theta = 0$ 时，即在长轴方向的裂纹尖端，应力强度因子取得最小值，且

$$K_{I(\theta=0)} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{E(k)} \sqrt{\frac{a}{c}}$$

换言之，椭圆形裂纹的短轴方向更容易扩展裂纹，椭圆形裂纹有向正圆形发

展的趋势。如果 $a=c$ ，则裂纹为圆盘形。此时， $E(k)=\pi/2$ ， $K_I=\frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi a}$ 。这表明，在垂直于裂纹面的远场均匀拉应力作用下，无限大体中圆盘形埋藏裂纹的应力强度因子在裂纹尖端的圆周上处处相等。

当 $c \rightarrow \infty$ 时，问题转变为在无限大体这种含有一场为 $2a$ 的中心穿透裂纹问题，此时 $(c^2 - a^2)/c^2 \rightarrow 1$ 且 $E(k)=1$ ，因此短轴方向（即裂纹深度方向）裂纹尖端的应力强度因子为 $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ 。

2.3.4 半无限大体半椭圆表面裂纹

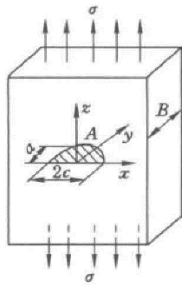


图 4-2 表面裂纹

在许多情况下，裂纹往往首先从构件表面开始。因此，工程上更多遇到的是表面裂纹问题。目前一般把表面裂纹看成长半轴为 c 、短半轴为 a 的半椭圆裂纹考虑。这里介绍基本上满足工程需要的近似结果。基本思想是利用上面得到的无限大体内椭圆形裂纹问题的解答，然后进行自由表面的修正，从而得到表面裂纹应力强度因子的近似结果。

根据平面边裂纹(半无限大板边裂纹)的处理方法，将椭圆形裂纹无限大体沿 xz 面一分为二，便出现表面裂纹，如图 4-2 所示。切开后原侧面对裂纹的限制消失，含裂纹而成为无约束自由表面，扩展更容易；又由于前后自由表面不对称，所以对裂纹有影响，故应在椭圆片裂纹解中加入修正系数，作为表面裂纹问题的近似解。综合考虑前后自由表面的影响，要得到一个总的修正系数。

1) 前表面修正

仅考虑前自由表面的影响，对应力强度因子做出修正，以消除裂纹前缘的影响。则此时半无限大体表面半椭圆裂纹最深点处的应力强度因子 K 的近似表达式为

$$K_I = M_1 \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{E(k)} = 1.12 \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{E(k)}$$

$$M_1 = 1.0 + 0.12\left(1 - \frac{a}{2c}\right)^2$$

2) 后表面修正

若裂纹深度 a 与板厚度 W 之比不是很小，且另一侧不对称，必须考虑后表面对裂纹前缘应力场的影响。Paris-Sih 建议采用有限宽板中心穿透裂纹的宽度修

正系数，称后表面修正系数

$$M_2 = \left(\frac{W}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{W} \right)^{1/2}$$

式中，W 为板的厚度。

2.4 确定应力强度因子的数值方法

2.4.1 有限单元法

所谓有限元方法，就是将连续体离散成有限单元来分析。每一个单元通过结点与周围的单元相连接，以此来替代原来的连续体，单元之间的相互联系力可以用节点位移来表达。而各节点的力又相互平衡，从而可以根据节点的平衡方程组求解出全部节点位移的近似解。然后利用节点位移求出应力分量，进而求出应力强度因子 K。

2.4.2 边界配位法

对于有限宽板或裂纹分布复杂的情况，难以选择能满足控制方程的全部边界条件的解析函数，边界配置法的思路是选择满足控制方程和裂纹表面边界条件的函数，该函数在其余边界上仅需满足有限个点的条件，而不是满足这些边界上所有点的条件；根据有限个点的条件，求解应力函数展开式中的待定系数，一般是求解一组线性代数方程组，可以借助计算机求解。这种方法得到的解是近似解。边界配置法主要用于解决平面问题的单边裂纹试样的应力强度因子。

所谓边界配位法，就是用一组线性代数方程去代替弹性力学的微分方程。下面以 Williams 对单边直裂纹问题的解：

1957 年，Williams^[2] 首先讨论了单边直裂纹问题的解。这类问题的基本方程仍然是二维双调和方程：

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \Phi = 0 \quad (3-13)$$

Williams 提出了一个由无穷级数表示的应力函数来处理有限尺寸的平面裂纹问题。对于 I 型裂纹，Williams 应力函数为

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} r^{\frac{n}{2}+1} F_n(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n r^{\frac{n}{2}+1} \left[\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)\theta - \frac{\frac{n}{2}+(-1)^n}{\frac{n}{2}+1} \cos\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta \right] \quad (3-14)$$

式中， r, θ 是以裂尖为原点的极坐标； C_n 为待定系数。

可以证明，上述应力函数 $\Phi(r, \theta)$ 不仅能满足双调和方程 $\nabla^2 \nabla^2 \Phi(r, \theta) = 0$ ，而且不论系数 C_n 取什么值，总能满足裂纹面边界条件，即在 $\theta = \pm \pi$ 处， $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$ 。对于其余边界条件，

对于其余的边界条件（诸如复杂的裂纹分布等），只要利用有限尺寸的构件

在边界上选择足够多的点，利用这些点的边界条件，即可反过来确定系数 C_n 。显然，这样确定的系数和应力函数必然满足选定点的边界条件，至于其余的边界条件只能近似满足，这样确定的应力函数只是问题的近似解。此方法称为边界配置法，所选取的那些边界点称为边界配置点。

边界配置法的优点是计算简单方便，但只适用于单边裂纹或半无限裂纹问题，并且是裂纹表面不受力的情况；对于稍微复杂一些的几何形状和载荷情况，应力函数 ϕ 所需要满足的边界条件难以确定。边界配置法的收敛性尚未得到证明，只能取不同数目配置点进行试算；如果应力强度因子值很接近，就认为解是稳定的。

2.4.3 权函数法

权函数法是一种求解在任意受载条件下裂纹应力强度因子的高效方法，这种解法的高效性在于它把影响应力强度因子的两个因素，即载荷与几何作了变量分离，权函数仅仅反映了裂纹提的几何特性，它可以根据一种受载情况下的已知解确定。一经到处，他就能被用来不受限制地求解任意加载条件下的 K 值，求解中只需作一个积分运算：

$$K = \int_0^a m(a, x) \cdot \sigma(x) dx$$

式中 $m(a, x)$ 即为权函数，后者为应力分布。除了灵活通用、简单经济等特点外，这一方法所得的结果有高的可靠性。

对于表达式为 $K = f\sigma\sqrt{\pi a}$ 的应力强度因子，当采用二维权函数法求解裂纹问题时，上式的 f 可以由下式确定

$$f = \int_0^a \frac{\sigma(x)}{\sigma} \frac{m(a, x)}{\sqrt{\pi a}} dx$$

上式把强度因子的求解转化成了对权函数的确定上来，而权函数的推导除了采用有限元等数值方法，一般还会利用权函数与参考载荷下裂纹面张开位移之间的关系（略）解决。

3 裂纹尖端的能量变化率

研究裂纹扩展规律有两种观点：一种是裂纹尖端应力场强度观点，认为裂纹扩展的临界状态是裂纹尖端应力强度因子达到材料的临界值，即断裂韧性，由此建立的脆性断裂准则称为 K 准则；一种是裂纹尖端能最平衡的观点，认为裂纹扩展的动力是构件在裂纹扩展中所释放出来的能量（用单位面积释放率 G 来度量）提供产生新裂纹表面所消耗的能量，由此建立的脆性断裂准则，称为 G 准则。

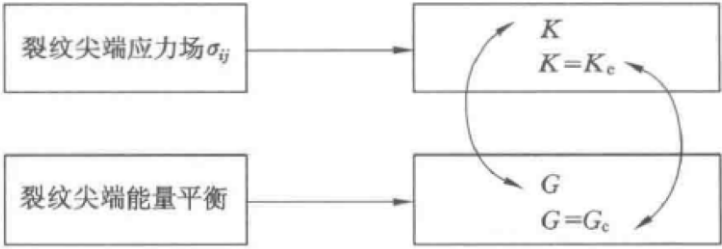


图 3-1 裂纹尖端应力强度因子和能量的关系

本章着重介绍能抗释放率理论.首先有必要阐述弹性系统的总势能。先介绍保守系统的概念：保守系统即在加载和卸载过程中，无摩擦、无热能释放、无耗散功、不计能出损失的系统。

3.1 弹性系统的总势能

弹性系统受力变形后，作用在系统上的力分为外力和内力两大类。因此，系统相对于某参考状态的势能也分为外力势能和内力势能，它们的总和称为总势能。通常取弹性系统未受力状态作为参考状态.外力势能和内力势能的大小分别用系统从现有状态到参考状态时作用在其上的外力和内力所做的功来度量。

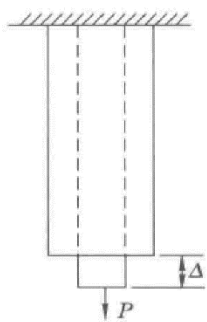


图 3-3 静力加载弹性体

以图 3.3 所示的上端固定，下端自由，并在自由端受一外力 F 作用的等直杆为例。因等直杆从现有状态回到参考状态时，外力作用点的位移 Δ 与外力 P 方向相反，所以外力势能为：

$$W_p = -P\Delta$$

在受力过程中，弹性体每一点将产生内力和形变。当外力去除后，形变将完全恢复，内力在形变恢复的过

程中要做功。因此，图 3-3 所示的弹性体在外力 P 作用下具有形变能，记为 U ，此即内力势能。

$$U = \int_0^{\Delta} P d\Delta$$

应变能函数 U 是一个状态函数，也就是说只决定于弹性体的初始状态和最终状态，与状态变化的具体过程无关。

这样，图 3-2 所示弹性体相对于未受力状态的总势能为：

$$\Pi = U - P\Delta$$

3.2 裂纹扩展时的能量变化率

Griffith 的能量观点认为，如果裂纹有扩展，系统必然会释放一定的能量；与此同时，形成新裂纹表面也需要消耗能量，根据这两种能量的关系可以解释低应力脆断现象。

定义 I：裂纹扩展单位面积系统所释放的能量，称为能量释放率，用 G 表示，记为：

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{-\Delta \Pi}{\Delta A} \right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} \quad (3-3)$$

式中， Π 为系统总势能； A 为裂纹面积；由于 G 的量纲为[力/长度]，又将其称为裂纹扩展单位长度的裂纹扩展力。

定义 II：裂纹扩展单位面积需要消耗的表面能，称为裂纹扩展阻力，用 G_c 表示，记为：

$$G_c = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \Gamma}{\Delta A} = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} \quad (3-4)$$

式中， Γ 为系统的表面能。

事实上，根据推导在能量平衡时有

$$G = G_c$$

此即 Friffrith 能量释放率断裂准则，他不过是能量平衡方程的不同表达形式。

它表明，当弹性体的能量释放率等于形成新裂纹表明的能量消耗率时，裂纹扩展处于临界状态。当 $G < G_c$ 时，裂纹不会扩展，当 $G > G_c$ ，裂纹必将扩展。