

10. Interferenz, Beugung und Streuung

Literatur:
Demtröder - Ex-Physik-2

Aus der Linearität der Wellengleichung

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (10.1)$$

folgt, dass mit beliebigen Lösungen \mathbf{E}_1 und \mathbf{E}_2 auch jede Linearkombination $\mathbf{E} = a\mathbf{E}_1 + b\mathbf{E}_2$ eine Lösung von (10.1) ist.

Um das gesamte Wellenfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ in einem beliebigen Raumpunkt P zur Zeit t zu erhalten, muss man die Amplituden der sich in P überlagernden Teilwellen $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t)$ addieren (Superpositionsprinzip). Die Gesamtfeldstärke

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m A_m(\mathbf{r}, t) e^{i\varphi_m} \quad (10.2)$$

des Wellenfeldes hängt sowohl von den Amplituden $A_m(\mathbf{r}, t)$ als auch von den Phasen φ_m der sich überlagernden Teilwellen ab. Sie ist im allgemeinen Fall sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Diese Überlagerung von Teilwellen heißt **Interferenz** (siehe auch Bd. 1, Abschn. 11.10). Das gesamte Raumgebiet, in dem sich Teilwellen überlagern, bildet das Interferenzfeld, dessen räumliche Struktur durch die ortsabhängige Gesamtintensität $I(\mathbf{r}, t) \propto |\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)|^2$ bestimmt wird. Räumliche Begrenzungen des Wellenfeldes können einen Teil der interferierenden Wellen unterdrücken, die dann in der Summe (10.2) fehlen (siehe Abschn. 10.7 und 11.3.4). Diese *unvollständige Interferenz* führt zu Beugungerscheinungen, welche eine zusätzliche Strukturierung des Wellenfeldes verursachen.

10.1 Zeitliche und räumliche Kohärenz

Eine zeitlich stationäre Interferenzstruktur kann nur dann beobachtet werden, wenn sich die Phasendifferenzen $\Delta\varphi = \varphi_j - \varphi_k$ zwischen beliebigen Teilwellen

\mathbf{E}_j , \mathbf{E}_k im Raumpunkt $P(\mathbf{r})$ während der Beobachtungsdauer Δt um weniger als 2π ändern. Man nennt die Teilwellen dann **zeitlich kohärent**. Eine sich zeitlich ändernde Phasendifferenz $\Delta\varphi$ kann mehrere Ursachen haben:

1. Die Frequenz ν kann sich zeitlich ändern
2. Die Lichtquelle sendet endliche Wellenzüge mit statistisch verteilten Phasen aus
3. Der Brechungsindex des Mediums zwischen Quelle und Beobachter kann zeitlich fluktuieren

Die maximale Zeitspanne Δt_c , während der sich Phasendifferenzen zwischen allen im Punkt P überlagerten Teilwellen um höchstens 2π ändern, heißt **Kohärenzzeit**.

Um uns dies klar zu machen, betrachten wir eine Lichtquelle, die Licht mit der Zentralfrequenz ν_0 und der spektralen Breite $\Delta\nu$ aussendet. Dieses Licht kann als Überlagerung vieler monochromatischer Teilwellen mit Frequenzen ν innerhalb des Frequenzintervalls $\nu_0 \pm \Delta\nu/2$ aufgefasst werden.

Die Phasendifferenz $\Delta\varphi$ zwischen solchen Teilwellen mit den Frequenzen $\nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2$ und $\nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2$ ist für $\Delta\varphi(t_0) = 0$:

$$\Delta\varphi(t) = 2\pi(\nu_2 - \nu_1)(t - t_0).$$

Sie wächst linear mit der Zeit t an. Nach der Kohärenzzeit $\Delta t_c = 1/\Delta\nu$ ist sie auf $\Delta\varphi(\Delta t_c) = 2\pi$ angewachsen. Die Kohärenzzeit Δt_c einer Lichtwelle ist also gleich dem Kehrwert der spektralen Frequenzbreite $\Delta\nu$ (Abb. 10.1):

$$\Delta t_c = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (10.3)$$

Für alle anderen Komponenten, deren Frequenzdifferenz kleiner als $\Delta\nu$ ist, ist $\Delta\varphi(\Delta t_c) < 2\pi$. Die

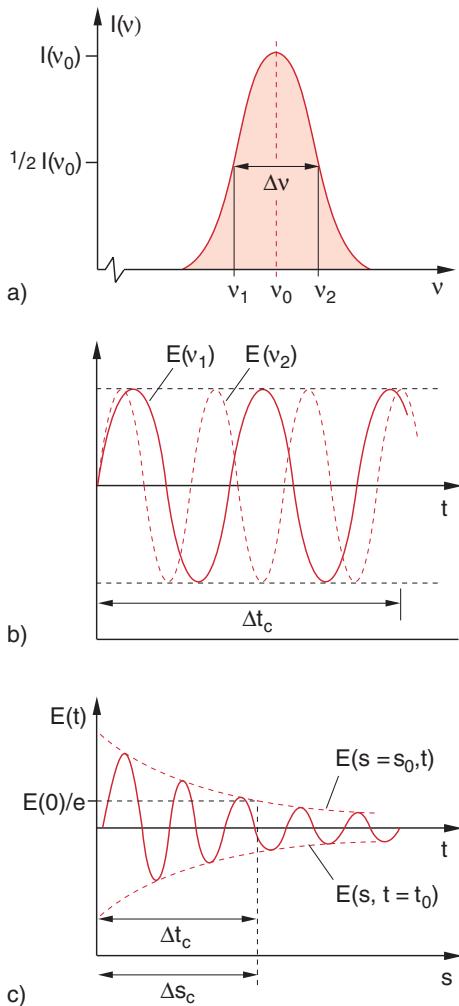


Abb. 10.1a–c. Zur zeitlichen Kohärenz einer Welle mit der spektralen Frequenzbreite Δv . Die Kohärenzzeit ist $\Delta t_c = 1/\Delta v$. (a) Spektralverteilung $I(v)$; (b) zeitliche Überlagerung zweier Teilwellen; (c) zeitlicher Verlauf der Gesamtfeldstärke aller Komponenten in (a)

Überlagerung aller Komponenten enthält daher alle Phasendifferenzen zwischen 0 und 2π , und für den zeitlichen Mittelwert der Überlagerung gilt:

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t_c} \int_0^{\Delta t_c} \sum_m A_m(\mathbf{r}) e^{i\varphi_m} dt \equiv 0.$$

Man kann dies auch folgendermaßen darstellen: Die Überlagerung aller Komponenten $E_i(v)$ führt zu einem zeitlich abklingenden endlichen Wellenzug $E(t)$, der nach der Kohärenzzeit Δt_c auf $1/e$ seiner Anfangsamplitude abgeklungen ist (Abb. 10.1c). Die Strecke

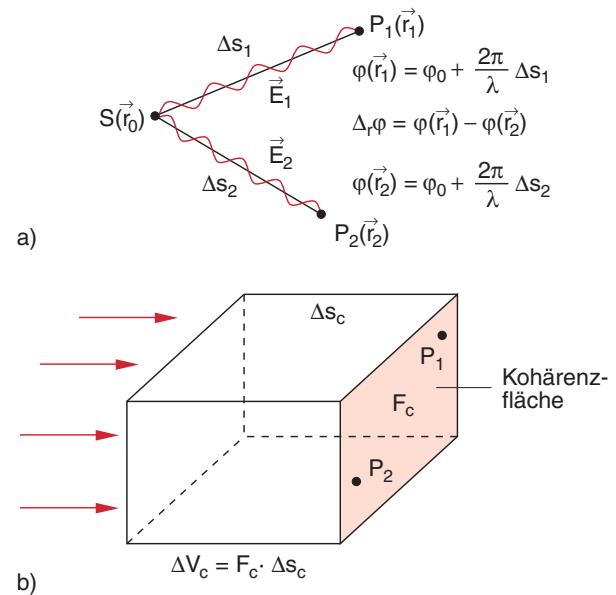


Abb. 10.2. (a) Phasendifferenz $\Delta_r\varphi$ zwischen den Phasen $\varphi(\mathbf{r}_1)$ und $\varphi(\mathbf{r}_2)$ einer monochromatischen Welle an zwei verschiedenen Raumpunkten; (b) Kohärenzfläche F_c und Kohärenzvolumen

$\Delta s_c = c \cdot \Delta t_c$, die das Licht während der Kohärenzzeit Δt_c zurücklegt, heißt **Kohärenzlänge**.

Die Phasendifferenzen $\Delta\varphi_{j,k}$ zwischen den Teilwellen E_j und E_k können für die verschiedenen Orte $P(\mathbf{r})$ des Überlagerungsgebietes durchaus verschieden sein, weil die Phasendifferenzen $\Delta\varphi_i = (2\pi/\lambda_i)\Delta s$ bei gleicher Wellenlänge λ noch vom Weg $\Delta s = \overline{SP}$ zwischen Lichtquelle S und Beobachtungspunkt P abhängen. Ändert sich die räumliche Differenz

$$\Delta_r\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{r}_1) - \varphi_i(\mathbf{r}_2) \quad (10.4)$$

der Phase φ_i einer beliebigen Teilwelle E_i während der Beobachtungszeit Δt um weniger als 2π , so heißt das Wellenfeld räumlich kohärent (Abb. 10.2). Die Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, auf der $\Delta_r\varphi_i = 0$ erfüllt ist, heißt **Kohärenzfläche** F_c .

Das Produkt aus Kohärenzfläche und Kohärenzlänge Δs_c heißt **Kohärenzvolumen** ΔV_c [10.1].

Nur innerhalb des Kohärenzvolumens können Interferenzstrukturen beobachtet werden.

BEISPIELE

- Für Licht mit der Spektralbreite $\Delta\nu = 2 \cdot 10^9$ Hz (typische Dopplerbreite einer Spektrallinie im sichtbaren Bereich) ist $\Delta t_c = 1/\Delta\nu = 5 \cdot 10^{-10}$ s. Die Kohärenzlänge $\Delta s_c = c \cdot \Delta t_c$ beträgt dann $\Delta s_c = 0,15$ m.

- Eine ebene Welle

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} \cdot e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

ist auf der gesamten Ebene $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = \text{const}$ räumlich kohärent. Ist sie monochromatisch ($\Delta\nu = 0$), so ist ihre Kohärenzlänge unendlich groß. Die Welle ist dann im gesamten Raum kohärent. Ist ihre Frequenzbreite $\Delta\nu > 0$, so ist sie nur in einem Volumen mit der Länge $\Delta s_c = v_{\text{Ph}}/\Delta\nu = c/(n \cdot \Delta\nu)$ im Medium mit Brechungsindex n , das aber senkrecht zu \mathbf{k} unendlich ausgedehnt ist, kohärent.

- Eine monochromatische Kugelwelle ist im gesamten Raumgebiet kohärent. Allgemein gilt: Wellen, die von „punktförmigen“ Lichtquellen (die es natürlich nur als idealisierte Näherung gibt) emittiert werden, sind im gesamten Raumgebiet räumlich kohärent.

Wir wollen nun diese Begriffe Kohärenz und Interferenz an mehreren Beispielen für die experimentelle Realisierung kohärenter Wellen und ihrer Überlagerung demonstrieren.

10.2 Erzeugung und Überlagerung kohärenter Wellen

Um kohärente Teilwellen zu erzeugen, deren Überlagerung zu beobachtbaren Interferenzerscheinungen führt, gibt es prinzipiell zwei Methoden:

- Die Sender (d. h. die Erregerzentren für die Teilwellen) werden phasenstarr miteinander gekoppelt (Abb. 10.3).
- Die von *einer* Quelle S ausgehende Welle wird in zwei oder mehr Teilwellen aufgespalten, die dann verschieden lange Wege durchlaufen, bevor sie wieder überlagert werden und in den Punkten P_1 oder P_2 beobachtet werden können (Abb. 10.4).

Die erste Methode lässt sich experimentell für akustische Wellen realisieren (siehe Bd. 1, Abschn. 11.10),

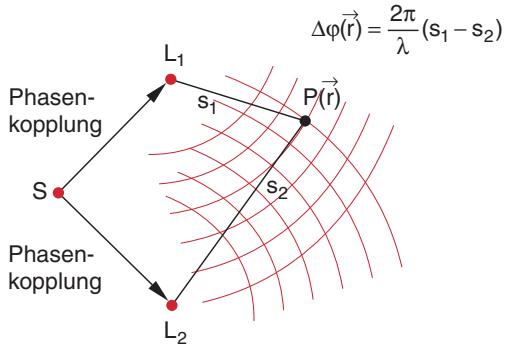


Abb. 10.3. Phasenstarre Kopplung zweier Quellen L_1 und L_2 an einen Sender S zur Erzeugung kohärenter Teilwellen, die sich im Interferenzgebiet mit zeitlich konstanten, aber ortsabhängigen Phasendifferenzen $\Delta\varphi(\mathbf{r})$ überlagern

indem man z. B. zwei oder mehr räumlich getrennte Lautsprecher L_i durch die gleiche Wechselspannungsquelle antreibt.

Im Fall von Lichtwellen sind die Sender energetisch angeregte Atome (siehe Bd. 3), die im Allgemeinen unabhängig voneinander mit statistisch verteilten Phasen Lichtwellen emittieren. Das von der gesamten Lichtquelle ausgesandte Licht ist deshalb inkohärent, sodass die erste Methode für klassische Lichtquellen (z. B. Glühlampen, Gasentladungslampen, Sonne) nicht ohne weiteres anwendbar ist.

Durch eine kohärente Lichtwelle kann man die Atome zu phasengekoppelten erzwungenen Schwingungen anregen (siehe Abschn. 8.2). So schwingen z. B. alle Atome auf einer Ebene $z = z_0$ in Abb. 8.4 in Phase. Dies setzt jedoch die Existenz einer kohärenten anregenden Welle voraus. Mit speziellen Lichtquellen, den Lasern, lassen sich solche kohärenten intensiven Lichtwellen erzeugen, und unter speziellen Bedingungen ist

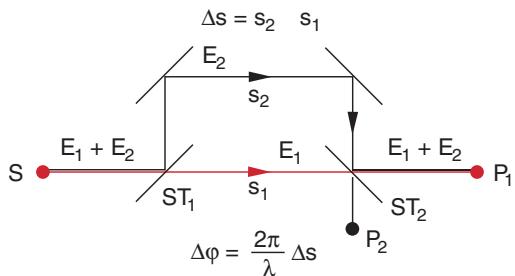


Abb. 10.4. Zweistrahl-Interferenz durch Strahlteilung in zwei Teilbündel, die nach Durchlaufen unterschiedlicher Wege wieder überlagert werden

es auch möglich, zwei verschiedene Laser phasenstarr miteinander zu koppeln. Solche Laser werden oft zur Demonstration von Interferenz- und Beugungsphänomenen verwendet, weil ihre Intensität wesentlich höher und das Kohärenzvolumen speziell stabilisierter Laser wesentlich größer ist als das üblicher Lichtquellen. Man nennt deshalb solche speziellen Laser auch kohärente Lichtquellen. Ihre physikalischen Grundlagen setzen Kenntnisse der Atomphysik voraus, sodass sie, ebenso wie die technische Realisierung, ausführlich in Bd. 3 besprochen werden.

In den meisten Fällen ist man in der Optik jedoch, auch bei Verwendung von Lasern, auf die zweite Methode angewiesen, um Interferenzphänomene zu studieren, d.h. man verwendet *eine* Lichtquelle, deren ausgesandte Strahlung durch verschiedene Arten von Strahlteilern so aufgespalten wird, dass die einzelnen Teilwellen unterschiedliche Weglängen durchlaufen, bevor sie wieder überlagert werden.

Überlagert man zwei Teilwellen, so spricht man von **Zweistrahl-Interferenz** im Gegensatz zur **Vielstrahl-Interferenz** bei der kohärenten Überlagerung vieler Teilwellen.

Die Interferenz bildet die Basis für alle Interferometer. Dies sind Anordnungen, bei denen die Zweistrahl- oder Vielstrahl-Interferenz ausgenutzt wird zur Messung von Wellenlängen. Auch Änderungen kleiner Strecken im Submikrometerbereich oder von Brechungsindizes transparenter Medien und ihrer Abhängigkeit von Temperatur oder Druck können mit ihnen bestimmt werden.

Man beachte:

Interferenzerscheinungen als räumlich strukturierte, zeitlich konstante Intensitätsverteilung $I(\mathbf{r})$ der überlagerten Wellen lassen sich nur in einem begrenzten Raumgebiet der überlagerten Wellen beobachten, in dem die Wegdifferenzen Δs kleiner sind als die Kohärenzlänge $\Delta s_c = c \cdot \Delta t_c$. Wir werden sehen, dass das Kohärenzvolumen sowohl von der räumlichen als auch von der zeitlichen Kohärenz des Wellenfeldes abhängt.

10.5 Beugung

Als Beugung bezeichnet man in der Optik das Phänomen, dass ein Lichtbündel beim Durchgang durch begrenzende Öffnungen oder beim Vorbeigang an Kanten nicht transmittierender Medien, die einen Teil des Lichtbündels absorbieren oder reflektieren, teilweise aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt wird. Man beobachtet dann Licht auch in solchen Richtungen, in die es nach der geometrischen Optik nicht kommen dürfte.

10.5.1 Beugung als Interferenzphänomen

Wir betrachten in Abb. 10.35 N regelmäßig angeordnete Oszillatoren mit dem Abstand d auf der x -Achse, die durch eine in z -Richtung laufende Welle zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden und deshalb wieder Wellen abstrahlen. In der Ebene $z = z_0$ sind alle Oszillatoren in Phase.

Wenn wir die Gesamtamplitude der von allen Oszillatoren in die Richtung θ gestreuten Welle berechnen wollen, müssen wir berücksichtigen, dass die einzelnen Teilwellen verschieden lange Wege durchlaufen. Der Wegunterschied zwischen benachbarten Teilwellen ist $\Delta s = d \cdot \sin \theta$. Er verursacht einen Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta s = \frac{2\pi}{\lambda} d \cdot \sin \theta \quad (10.38)$$

zwischen benachbarten Teilwellen.

Die Gesamtamplitude von N streuenden Atomen auf der Geraden in x -Richtung in Abb. 10.35 ist dann für gleiche Teilamplituden $A_j = A$ der einzelnen Streuer:

$$E = A \cdot \sum_{j=1}^N e^{i(\omega t + \varphi_j)} = A \cdot e^{i\omega t} \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\varphi},$$

wenn wir die Phase der ersten Teilwelle $\varphi_1 = 0$ setzen. Die Summe der geometrischen Reihe ist:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N e^{i(j-1)\Delta\varphi} &= \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1} \\ &= e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \cdot \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\frac{N}{2}\Delta\varphi}}{e^{i\Delta\varphi/2} - e^{-i\Delta\varphi/2}} \\ &= e^{i\frac{N-1}{2}\Delta\varphi} \cdot \frac{\sin[(N/2)\Delta\varphi]}{\sin(\Delta\varphi/2)}. \end{aligned} \quad (10.39)$$

Die Intensität $I = c\varepsilon_0|E|^2$ der Welle in Richtung θ ist dann mit (10.38)

$$I(\theta) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 [N\pi(d/\lambda) \sin \theta]}{\sin^2 [\pi(d/\lambda) \sin \theta]}, \quad (10.40)$$

wobei $I_0 = c\varepsilon_0 A^2$ die von einem Sender ausgestrahlte Intensität ist. Der Verlauf dieser Funktion hängt entscheidend vom Verhältnis d/λ ab.

Für $d < \lambda$ hat $I(\theta)$ nur **ein** Maximum für $\theta = 0$ und fällt dann für größere Werte von θ auf $I = 0$ ab (siehe Bd. 1, Abschn. 11.11). Wir wollen uns das Verhalten von $I(\theta)$ für kleine Winkel θ ansehen, wo die Näherung $\sin \theta \approx \theta$ gilt. Für $d < \lambda$ und $\sin \theta \ll 1$ ist

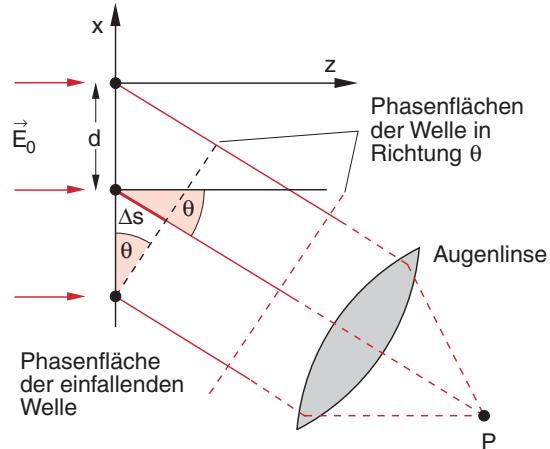


Abb. 10.35. Zur Herleitung von (10.40)

auch $\pi(d/\lambda) \sin \theta \ll 1$, und wir können (10.40) daher schreiben als

$$I(\theta) = N^2 I_0 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (10.41)$$

mit $x = N\pi(d/\lambda) \sin \theta$. Die Funktion $(\sin x/x)^2$ ist in Abb. 10.36 dargestellt. Man sieht, dass sie nur im Bereich $-\pi \leq x \leq +\pi$ größere Werte annimmt. Die Fläche unter dem zentralen Maximum

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \approx 0,9 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \quad (10.42)$$

enthält etwa 90% der gesamten in alle Winkel θ gestreuten Intensität.

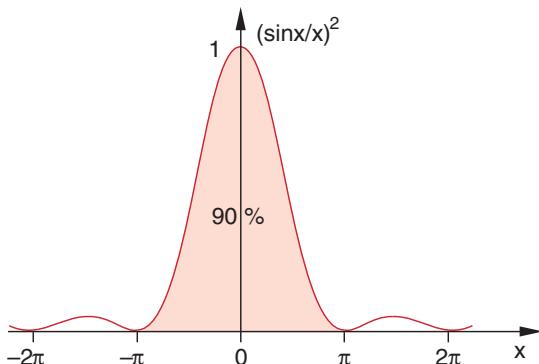
Ist die Breite $D = N \cdot d$ der Oszillator-Anordnung groß gegen die Wellenlänge λ ($N \cdot d \gg \lambda$), so folgt für den Bereich $|x| < \pi$ dass $\sin \theta \ll x/\pi < 1$, d.h. die Intensität $I(\theta)$ hat nur merkliche Werte in einem sehr engen Winkelbereich $|\Delta\theta| = \lambda/(N \cdot d) \ll 1$ um die Richtung $\theta = 0$ der einfallenden Welle.

BEISPIEL

$$D = 1 \text{ cm}, \quad \lambda = 500 \text{ nm} \Rightarrow \sin \theta < 5 \cdot 10^{-7}/10^{-2} = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Dieses Ergebnis macht folgende erstaunliche Tatsache deutlich:

Obwohl jeder einzelne Oszillator seine Strahlungsenergie in alle Raumrichtungen von $\theta = -\pi$ bis $\theta = +\pi$ abstrahlt, führt die Überlagerung von regelmäßig angeordneten Oszillatoren mit einem Abstand

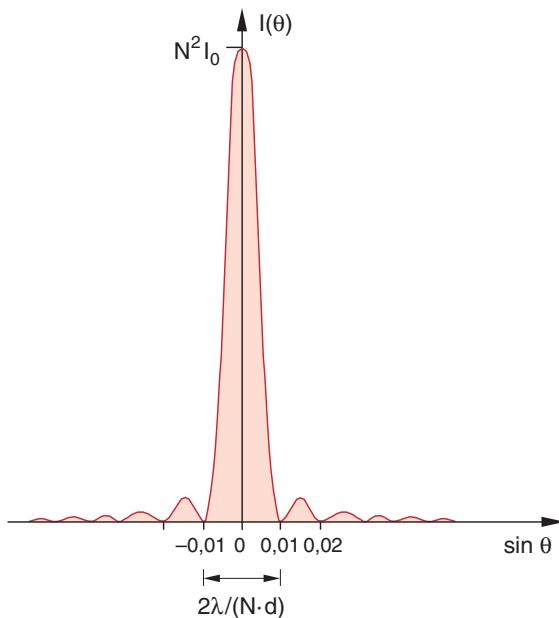
Abb. 10.36. Die Funktion $(\sin x/x)^2$

$d < \lambda$ zu einer Gesamtintensität, die im Wesentlichen in Vorwärtsrichtung in einem engen Winkelbereich $\theta = 0 \pm \Delta\theta$ emittiert wird. Die Größe $\Delta\theta$ hängt ab von der Gesamtbreite D der Oszillatorenanordnung. Die halbe Fußpunktsbreite der Intensitätsverteilung $I(\theta)$ $I_0 \cdot (\sin x/x)^2$ in Abb. 10.36 ist

$$\Delta x = \pi \Rightarrow \Delta\theta = \lambda/(N \cdot d) = \lambda/D.$$

Für $D \rightarrow \infty$ geht $\Delta\theta \rightarrow 0$ (Abb. 10.37).

Die Ausbreitung der Wellen in Richtung $\theta \neq 0$ heißt Beugung. Wir sehen, dass sie durch Interferenz vieler

Abb. 10.37. Die Streuintensität $I(\theta)$ für $d < \lambda$ und $D = N \cdot d = 100\lambda$. Die Fußpunktsbreite $\Delta\alpha$ zwischen den Nullstellen von $I(\theta)$ ist $\Delta\theta = 2\lambda/(N \cdot d)$

Teilwellen zustande kommt und nur durch die endliche räumliche Begrenzung der Oszillatoren bzw. die Begrenzung des einfallenden Lichtbündels bewirkt wird.

Man beachte:

Die Gesamtamplitude der N in Phase schwingenden Oszillatoren, die jeweils eine Welle mit der Amplitude A_0 aussenden, ist $N \cdot A_0$, ihre Intensität in der Vorwärtsrichtung ist dann $N^2 A_0^2$ d.h. N dieser Oszillatoren haben **nicht** die Gesamtintensität NI_0 (wie man naiv annehmen könnte).

10.5.2 Beugung am Spalt

Wenden wir das im vorigen Abschnitt vorgestellte Modell auf den Durchgang einer ebenen Welle durch einen Spalt der Breite b an (Abb. 10.38), so müssen wir Folgendes bedenken:

Jeder Raumpunkt P im Spalt ist Ausgangspunkt einer Kugelwelle, weil sich elektrische und magnetische Feldstärke der einfallenden Welle in P zeitlich ändern und deshalb dort (auch im Vakuum!), wie durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben, neue Felder E und B bilden, die zu Sekundärwellen Anlass geben. Diese Sekundärwellen überlagern sich (Huygenssches Prinzip, siehe Bd. 1, Abschn. 11.11).

Ersetzen wir einen Sender in Abb. 10.35 durch eine Strecke Δb von kontinuierlich verteilten Sendern, so haben wir im Spalt $N = b/\Delta b$ „Senderstrecken“, deren Senderamplitude $A = N \cdot A_0 \cdot \Delta b/b$ proportional zur Länge Δb ist. Statt (10.40) erhalten wir dann:

$$I(\theta) = N^2 I_0 \left(\frac{\Delta b}{b} \right)^2 \frac{\sin^2 [\pi(b/\lambda) \sin \theta]}{\sin^2 [\pi(\Delta b/\lambda) \sin \theta]}. \quad (10.43)$$

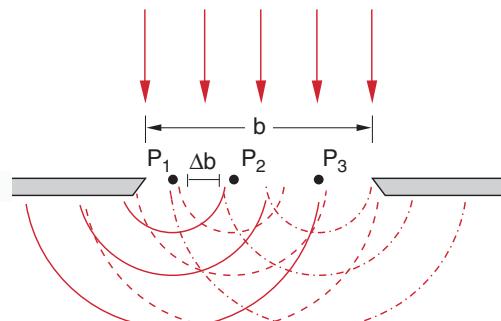


Abb. 10.38. Beugung am Spalt

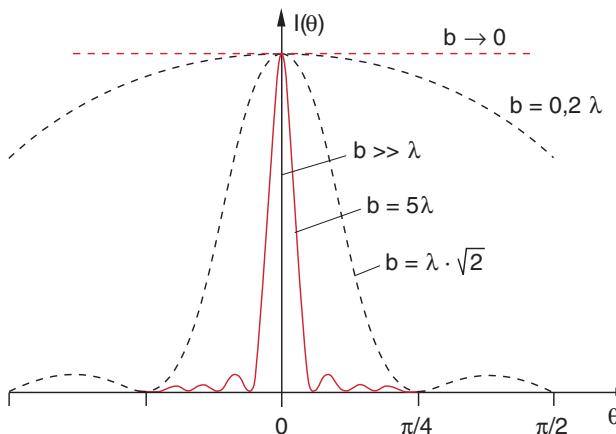


Abb. 10.39. Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei der Beugung am Spalt für verschiedene Werte des Verhältnisses b/λ von Spaltbreite b zu Wellenlänge λ

wobei I_0 die von einem Senderelement Δb emittierte Intensität ist. Mit der Abkürzung $x = \pi \cdot (b/\lambda) \sin \theta$ und $\Delta b = b/N$ wird daraus:

$$I(\theta) = I_0 \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2(x/N)}. \quad (10.44)$$

Lassen wir nun $N \rightarrow \infty$ gehen, d. h. $\Delta b \rightarrow 0$, so geht $\sin^2(x/N) \rightarrow x^2/N^2$, $N^2 I_0$ geht gegen die Gesamtintensität I_S des Spaltes und wir erhalten:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I(\theta) = N^2 I_0 \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} = I_S \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}. \quad (10.45)$$

Diese bereits in Abb. 10.36 gezeigte Funktion ist in Abb. 10.39 als Funktion des Beugungswinkels θ aufgetragen. Das meiste Licht geht geradeaus ($\theta = 0$). Die Verteilung $I(\theta)$ wird null für $\sin \theta = \lambda/b$, hat aber für $\theta > \lambda/b$ noch viele mit wachsendem θ immer kleiner werdende Maxima.

Dies kann man sich auch anschaulich klar machen (Abb. 10.40). Für $\sin \theta = \lambda/b$ ist der Wegunterschied Δs zwischen dem ersten und dem letzten Teilbündel im gebeugten Licht gerade $\Delta s_m = \lambda$. Teilt man das gesamte gebeugte Lichtbündel in zwei Hälften, so gibt es zu jedem Teilbündel in der ersten Hälfte genau ein Teilbündel in der zweiten Hälfte mit dem Wegunterschied $\Delta s = \lambda/2$, sodass sich alle diese Teilbündel durch destruktive Interferenz auslöschen. Für $\Delta s = 3/2\lambda$ teilt man in drei gleiche Teilbündel auf, von denen sich zwei durch destruktive Interferenz auslöschen, während das dritte Teilbündel übrigbleibt (erstes Nebenmaximum in $I(\theta)$).

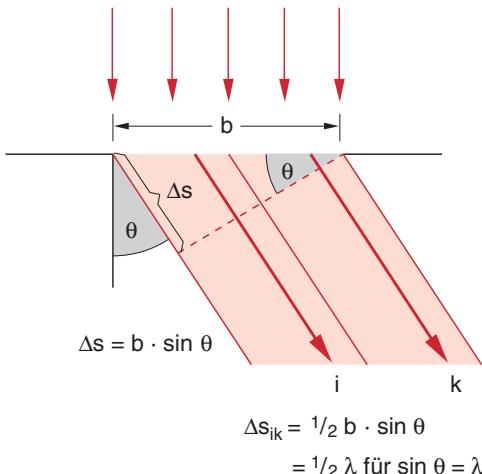


Abb. 10.40. Zur anschaulichen Darstellung der Intensitätsminima für $\sin \theta = \lambda/b$

Die Intensitätsverteilung $I(\theta)$ ist für verschiedene Verhältnisse b/λ in Abb. 10.39 dargestellt. Unabhängig vom Wert b/λ geht in das zentrale Beugungsmaximum der Bruchteil 0,9 der gesamten vom Spalt durchgelassenen Lichtleistung (siehe (10.42)).

Für $b \gg \lambda$ wird das zentrale Maximum von $I(\theta)$ sehr schmal, d. h. seine Fußpunktsbreite $\Delta\theta = 2\lambda/b$ wird klein: Das Licht geht im Wesentlichen geradeaus weiter.

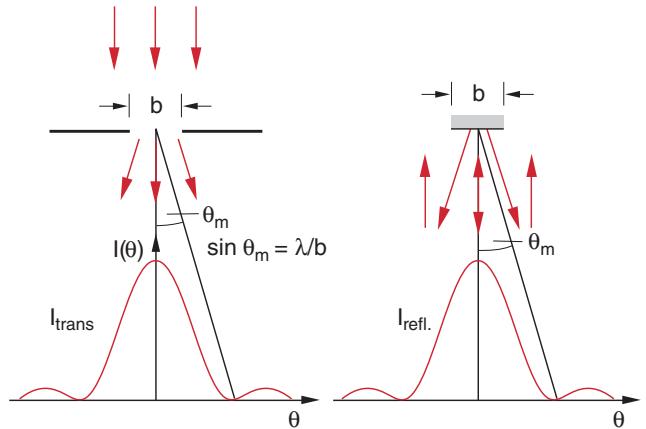
BEISPIEL

$$b = 1000\lambda \Rightarrow \Delta\theta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \stackrel{\wedge}{=} 0,11^\circ.$$

Man beachte jedoch, dass auch bei durch die Beugung bedingten kleinen Divergenz eines parallelen Lichtbündels dessen Bündeldurchmesser größer wird. Für $\lambda = 500 \text{ nm}$ ist der Bündeldurchmesser am Spalt: $b = 0,5 \text{ mm}$, in einer Entfernung von $d = 1 \text{ m}$ hinter dem Spalt aber schon $b + d \cdot \Delta\theta \approx 2,5 \text{ mm}$. Das Lichtbündel ist dort aufgrund der Beugung bereits auf den fünfzehnfachen Durchmesser aufgeweitet.

Für $b \leq \lambda$ gibt es kein Minimum mehr für die Funktion $I(\theta)$, weil das Minimum gemäß (10.43) bei $\sin \theta = \lambda/b$ auftreten muss. Das zentrale Beugungsmaximum ist über den ganzen Halbraum hinter dem Spalt ausgedehnt. Man sieht deshalb keine Beugungsstrukturen mehr, sondern eine monoton abfallende Verteilung der Intensität $I(\theta)$ über alle Winkel θ von 0 bis $\pm\pi/2$.

Die durch einen Spalt der Breite b transmittierte Intensität einer Welle mit Wellenlänge λ zeigt eine Beugungsverteilung $I_t(\theta)$ um die Einfallrichtung $\theta = 0$, die abhängt vom Verhältnis λ/b . Für $\lambda/b \ll 1$ gibt es ein zentrales Beugungsmaximum mit einer Fußpunktbreite $\Delta\theta = 2\lambda/b$ und kleinere Nebenmaxima bei $\theta_m = \pm(2m + 1)\lambda/2b$. Für $\lambda/b > 1$ ist die Intensität I_t des zentralen Maximums über den gesamten Winkelbereich $|\theta| \leq 90^\circ$ verteilt.



Bei der Beugung einer ebenen Welle, die senkrecht auf eine kreisförmige Blende mit Radius R fällt, muss die Intensitätsverteilung $I(\theta)$ der gebeugten Welle rotationssymmetrisch um die Symmetrieachse der Blende sein (Abb. 10.41). Die etwas aufwändigeren Rechnung ([10.10], siehe auch Abschn. 10.6) ergibt statt (10.43) die Verteilung

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2 \quad (10.46)$$

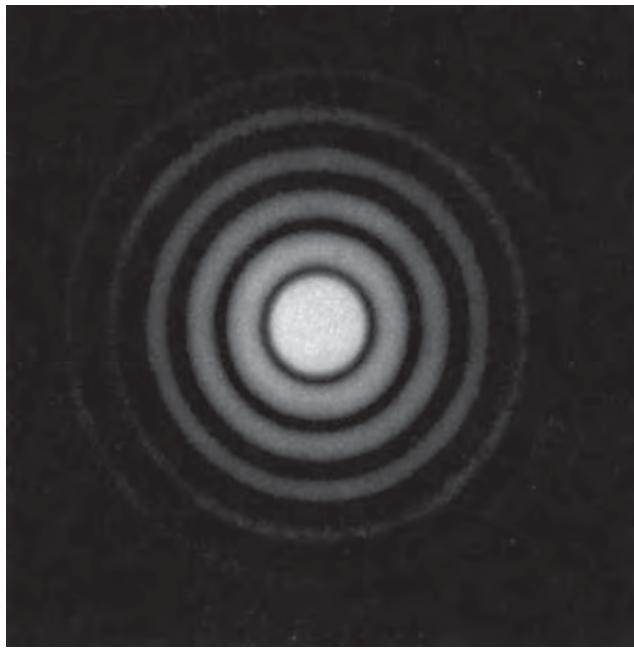


Abb. 10.41. Ringförmige Beugungsstruktur hinter einer Kreisblende, die mit parallelem Licht beleuchtet wird. Aus M. Cagnet, M. Francon, J. C. Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen* (Springer, Berlin, Göttingen 1962)

Abb. 10.42. Äquivalenz der Beugung des durch eine Blende transmittierten Lichtes und des an einem Spiegel gleicher Breite b reflektierten Lichtes

mit

$$x = \frac{2\pi R}{\lambda} \cdot \sin \theta ,$$

wobei $J_1(x)$ die Besselfunktion erster Ordnung ist. Die Intensitätsverteilung (10.46) hat Nullstellen bei $x_1 = 1,22\pi, x_2 = 2,16\pi, \dots$, sodass die erste Nullstelle von $I(\theta)$ bei $\sin \theta_1 = 0,61\lambda/R$ liegt.

Die Lage der Nebenmaxima I_{M_i} und ihre Intensitäten sind:

$$\begin{aligned} I_{M_1} &= 0,0175 I_0 & \text{bei } \sin \theta_{M_1} = 0,815\lambda/R , \\ I_{M_2} &= 0,00415 I_0 & \text{bei } \sin \theta_{M_2} = 1,32\lambda/R , \\ I_{M_3} &= 0,0016 I_0 & \text{bei } \sin \theta_{M_3} = 1,85\lambda/R . \end{aligned}$$

Man beachte:

Beugungerscheinungen lassen sich nicht nur beim Durchgang eines Lichtbündels durch eine begrenzende Öffnung beobachten, sondern auch bei der Reflexion an einer begrenzten Spiegelfläche (Abb. 10.42). So erhält man z. B. durch Reflexion an einer spiegelnden Kreisfläche ein Beugungs-Intensitätsmuster im reflektierten Licht, das völlig dem im transmittierten Licht durch eine Öffnung der gleichen Form entspricht (siehe Abschn. 10.7.5).

10.5.3 Beugungsgitter

Fällt eine ebene Welle senkrecht auf eine Anordnung von N parallelen Spalten in der Ebene $z = 0$ (Beu-

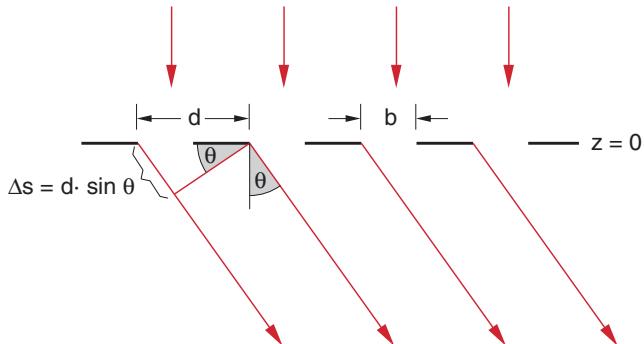


Abb. 10.43. Beugungsgitter von N parallelen Spalten, das senkrecht von einer ebenen Lichtwelle beleuchtet wird

gungsgitter, Abb. 10.43), so ist die Intensitätsverteilung $I(\theta)$ durch zwei Faktoren bestimmt:

- Die Interferenz zwischen den Lichtbündeln der verschiedenen Spalte. Die daraus resultierende Verteilung entspricht genau der im Abschn. 10.5.1 behandelten kohärenten Emission von N Sendern, die zur Intensitätsverteilung (10.40) führte.
- Die durch die Beugung an jedem Spalt verursachte Intensitätsverteilung (10.43).

Ist b die Spaltbreite und d der Abstand zwischen benachbarten Spalten, so ergibt sich gemäß (10.43) und (10.40) für die in Richtung θ gegen die z -Richtung

emittierte Intensität

$$I(\theta) = I_S \cdot \frac{\sin^2 [\pi(b/\lambda) \sin \theta]}{[\pi(b/\lambda) \sin \theta]^2} \cdot \frac{\sin^2 [N\pi(d/\lambda) \sin \theta]}{\sin^2 [\pi(d/\lambda) \sin \theta]}, \quad (10.47)$$

wobei I_S die von einem einzelnen Spalt durchgelassene Intensität ist. Der erste Faktor beschreibt die Beugung am Einzelspalt und der zweite Faktor die Interferenz zwischen N Spalten.

Maxima von $I(\theta)$ treten in denjenigen Richtungen auf, für welche der Wegunterschied zwischen äquivalenten Teilbündeln aus benachbarten Spalten

$$\Delta s = d \cdot \sin \theta = m \cdot \lambda \quad (10.48)$$

ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist. Wie groß diese Maxima sind, hängt von der Beugungsverteilung der Einzelspalte, d. h. vom ersten Faktor in (10.47) ab. Die Beugung sorgt dafür, dass überhaupt Licht in die Richtungen $\theta > 0$ gelangt. Je breiter die Spalte sind, desto geringer werden die möglichen Winkel θ , bei denen noch eine merkliche Intensität $I(\theta)$ auftritt.

In Abb. 10.44 ist als Beispiel die Verteilung $I(\theta)$ für ein Beugungsgitter aus acht Spalten gezeigt, bei dem das Verhältnis d/b von Spaltabstand d zu Spaltbreite b den Wert 2 hat.

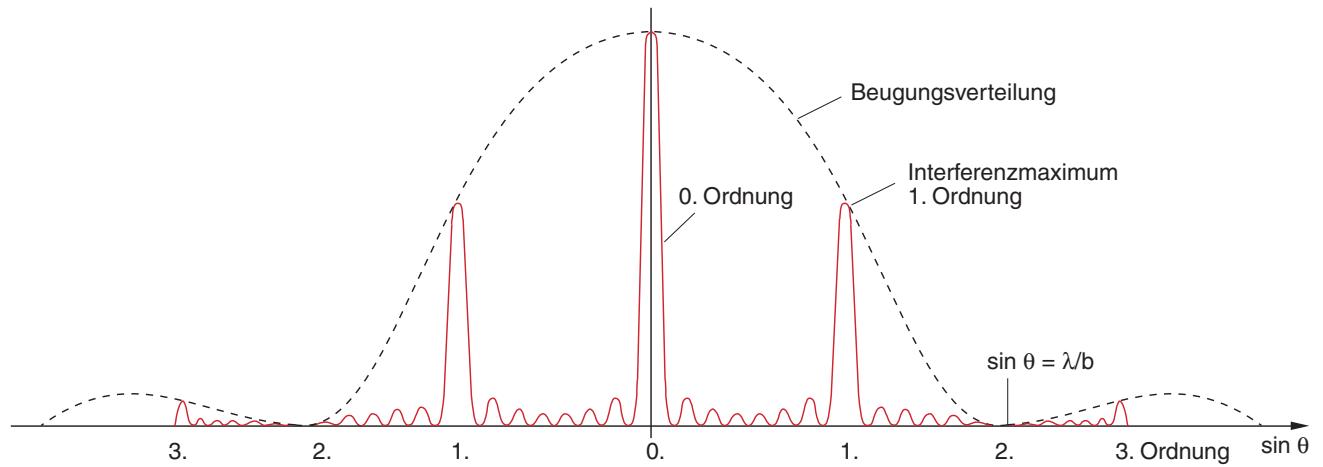


Abb. 10.44. Intensitätsverteilung $I(\theta)$ bei einem Beugungsgitter mit acht Spalten, bei dem $d/b = 2$ ist. In die zweite

Interferenzordnung gelangt wegen des Beugungsminimums kein Licht

Die einzelnen Hauptmaxima heißen **Beugungsmaxima m-ter Ordnung** (besser sollten sie Interferenzmaxima genannt werden). Wie man aus (10.48) sofort sieht, ist die höchste mögliche Ordnung m_{\max} wegen $\sin \theta < 1$ durch

$$m_{\max} = d/\lambda,$$

also durch das Verhältnis von Spaltabstand d zu Wellenlänge λ gegeben. Die Hauptmaxima treten auf, wenn der Nenner des zweiten Terms in (10.47) null wird. Der 2. Faktor hat dann den Wert N^2 , sodass die Intensität in den Hauptmaxima durch die Beugungsverteilung des ersten Faktors (gestrichelte Kurve in Abb. 10.44) bestimmt wird.

Zwischen den Hauptmaxima liegen bei N Spalten $N - 2$ kleine Nebenmaxima, bei Winkeln θ_p , für die der Zähler des zweiten Faktors in (10.47) den Wert 1 hat, der Nenner aber $\neq 0$ ist, also für

$$\sin \theta_p = \frac{(2p+1)\lambda}{2N \cdot d} \quad (p = 1, 2, \dots, N-2).$$

Die Höhe dieser Nebenmaxima kann man dem zweiten Faktor in (10.47) entnehmen. Für das p -te Maximum erhält man:

$$I(\theta_p) = \frac{I_0}{N^2} \frac{1}{\sin^2 [(2p+1)\pi/(2N)]},$$

was bei ungerader Zahl N für das mittlere Maximum ($p = (N-1)/2$) dann $I = I_0/N^2$ ergibt. Für genügend große N sind die Nebenmaxima also vernachlässigbar.

Man sieht aus Abb. 10.44, dass die Intensität in den Interferenzmaxima m -ter Ordnung von der Winkelbreite der Beugungsintensität abhängt. Die Spaltbreite b muss also genügend klein sein, damit genügend Intensität in die 1. Interferenzordnung gelangt.

Die Beugungsgitter spielen in der Spektroskopie eine große Rolle bei der Messung von Lichtwellenlängen λ . Allerdings braucht man dazu Gitter mit etwa 10^5 Spalten. Da diese Transmissionsgitter technisch schwierig herzustellen sind, benutzt man **Reflexionsgitter**, die durch Ritzen von Furchen in eine ebene Glasplatte oder durch holographische Verfahren (siehe Abschn. 12.4 hergestellt werden [10.11]).

Um die Verhältnisse bei Reflexion, Beugung und Interferenz quantitativ darzustellen, führen wir zwei verschiedene Normalenvektoren ein: Die Gitternormale, die senkrecht auf der Basisebene des ganzen

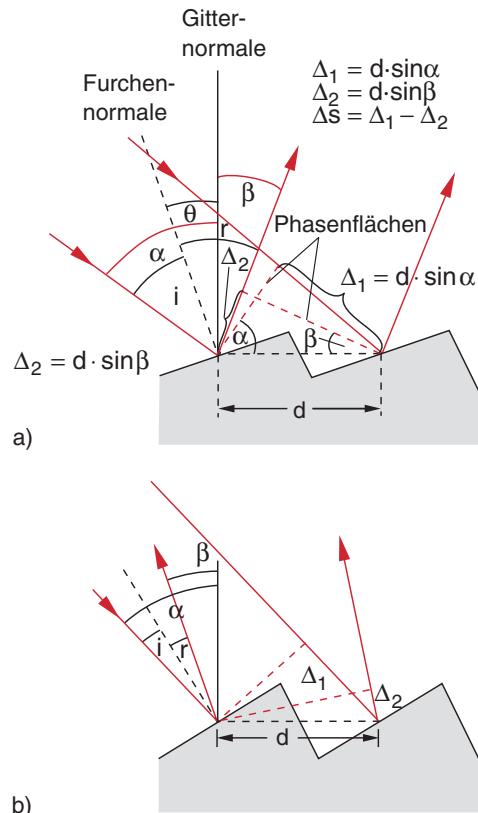


Abb. 10.45a,b. Optisches Reflexionsgitter. (a) Einfallender und reflektierender Strahl liegen auf verschiedenen Seiten, (b) auf der gleichen Seite der Gitternormalen

Gitters steht, und die Furchenflächennormale, die senkrecht auf der geneigten Fläche einer Furche steht (Abb. 10.45). Fällt eine ebene Welle unter dem Einfallswinkel α gegen die Gitternormale ein, so besteht zwischen den von benachbarten Furchen in Richtung β reflektierten Teilbündeln der Gangunterschied

$$\Delta s = \Delta_1 - \Delta_2 = d(\sin \alpha - \sin \beta), \quad (10.49a)$$

wenn der Beugungswinkel β nicht auf der gleichen Seite der Gitternormalen liegt wie der Einfallswinkel α (Abb. 10.45a). Liegen Einfalls- und Beugungsrichtung auf der selben Seite wie die Gitternormalen (Abb. 10.45b), so gilt:

$$\Delta s = \Delta_1 + \Delta_2 = d(\sin \alpha + \sin \beta). \quad (10.49b)$$

Damit man beide Fälle mit der gleichen Formel beschreiben kann, wählt man folgende Konvention: Der Einfallswinkel α wird immer als positiv definiert. Der Beugungswinkel β wird als positiv definiert, wenn

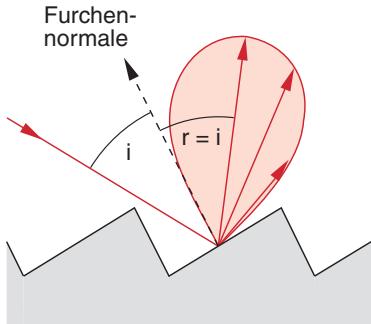


Abb. 10.46. Beugungsbedingte Intensitätsverteilung des an einer Furche des Gitters reflektierten Lichtes um den Reflexionswinkel $r = i = \alpha - \theta$

Einfalls- und Reflexionsstrahl auf der selben Seite der Gitternormalen liegen, sonst ist β negativ. Man kann dann für beide Fälle einheitlich schreiben:

$$\Delta s = d(\sin \alpha + \sin \beta), \quad (10.49c)$$

Man erhält bei vorgegebener Einfallsrichtung α nur in solchen Richtungen β konstruktive Interferenz, für welche die Gittergleichung

$$d(\sin \alpha + \sin \beta) = m \cdot \lambda \quad (10.50)$$

erfüllt ist.

Eine unter dem Winkel i gegen die Furchenflächen normale einfallende Welle wird unter dem Winkel $r = i$ reflektiert. Man entnimmt Abb. 10.45, dass $i = \alpha - \theta$ und $r = \theta - \beta$ gilt (β ist negativ!). Für den Furchennormalenwinkel θ gegen die Gitternormale (**Blazewinkel**) gilt also

$$\theta = \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (10.51)$$

Da der Einfallsinkel α im Allgemeinen durch die Konstruktion des Gitterspektrometers fest vorgegeben ist, der Winkel β aber durch den Furchenabstand d und die Wellenlänge λ bestimmt wird, kann der Blazewinkel nach (10.50)

$$\theta = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{m \cdot \lambda}{d} - \sin \alpha \right]$$

nur für einen bestimmten Wellenlängenbereich optimiert werden.

Er wird so gewählt, dass für die Mitte λ_m des zu messenden Wellenlängenbereiches $\Delta\lambda$ der Winkel β_m ,

bei dem das Interferenzmaximum m -ter Ordnung auftritt, gleich dem Reflexionswinkel $r = \theta - \beta$ ist. Dann geht fast die gesamte reflektierte Intensität in die m -te Ordnung. Wegen der Beugung an jeder Furche der Breite b wird das reflektierte Licht in einen Winkelbereich $\Delta\beta$ um $\beta_m = r - \theta$ gebeugt (Abb. 10.46), sodass man einen größeren Wellenlängenbereich $\Delta\lambda$ mit nur wenig variierender Intensität $I(\beta)$ messen kann.

BEISPIEL

Ein optisches Gitter mit $d = 1 \mu\text{m}$ werde mit parallelem Licht ($\lambda = 0,6 \mu\text{m}$) unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ$ beleuchtet. Die erste Interferenzordnung mit $m = 1$ erscheint nach (10.50) unter dem Winkel β , für den $\sin \beta = (\lambda - d \cdot \sin \alpha)/d$ gilt, d. h. $\sin \beta = 0,1 \Rightarrow \beta \approx +5,74^\circ$. Der Beugungswinkel β liegt also auf der anderen Seite der Gitternormale wie der Einfallswinkel α . Für $m = -1$ erhält man:

$$\sin \beta = -\frac{\lambda}{d} - \sin \alpha = -1,1.$$

d. h. die 1. Ordnung tritt nicht auf. Der optimale Blazewinkel ist dann nach (10.51) $\theta \approx 18^\circ$ für $\beta = +6^\circ$, d. h. $r = i = 12^\circ$.

Die Fußpunktsbreite der Intensitätsverteilung $I(\beta)$ (d. h. der Winkelabstand $\Delta\beta$ zwischen den beiden benachbarten Nullstellen rechts und links von β_1) um das Maximum, das für $m = 1$ bei dem Reflexionswinkel $\beta = \beta_1$ liegen möge, kann aus (10.47) für $\theta = \beta$ berechnet werden zu $\Delta\beta = \lambda/N \cdot d$.

Dies entspricht genau der Breite der Beugungsverteilung an einem Spalt der Breite $b = N \cdot d$, also der Breite des gesamten Gitters. Die Intensitätsverteilung der vom Gitter reflektierten Interferenzmaxima hat die gleiche Winkelbreite wie das zentrale Beugungsmaximum bei einem Spiegel oder Spalt der Breite $b = N \cdot d$.

Ist der Blazewinkel Θ so gewählt, dass das einfallende Licht senkrecht auf die Furchenfläche fällt ($\alpha = \theta$), so wird die m -te Interferenzordnung für die Wellenlänge λ in die Einfallsrichtung zurückreflektiert ($\beta = \alpha$), wenn gilt:

$$\Delta s = 2d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda.$$

Gitter, die als wellenlängenselektierende Spiegel wirken, die das Licht für eine Wellenlänge in die Einfallsrichtung reflektieren, obwohl der Einfallsinkel $\alpha \neq 0$ ist, heißen **Littrow-Gitter** (Abb. 10.47).

10.7 Allgemeine Behandlung der Beugung

Wir wollen nun einen allgemeinen Weg diskutieren, wie man Beugungserscheinungen an beliebigen Öffnungen oder Hindernissen berechnen kann. Obwohl solche Berechnungen häufig nur durch numerische Verfahren möglich sind, gibt die hier vereinfacht wiedergegebene Darstellung der Fresnel-Kirchhoffschen Beugungstheorie einen vertieften Einblick in die Grundlagen der Fresnelschen Beugung.

10.7.1 Das Beugungsintegral

Wir betrachten in Abb. 10.53 eine beliebige Öffnung σ in einem Schirm, der in der x - y -Ebene $z = 0$ steht, und wollen die Frage klären, welche Intensitätsverteilung sich in der x' - y' -Ebene $z = z_0$ ergibt, wenn die Öffnung beleuchtet wird. In der Ebene $z = 0$ möge die Feldamplitude

$$E_S(x, y) = E_0(x, y) \cdot e^{i\varphi(x, y)} \quad (10.68)$$

sein. Stammt die Beleuchtung z. B. aus einer praktisch punktförmigen Lichtquelle L im Punkte $(0, 0, -g)$ die eine Lichtwelle mit der Amplitude A gleichmäßig in alle Richtungen emittiert, (Abb. 10.53b), so ist

$$E_0(x, y) = \frac{A}{R} = \frac{A}{\sqrt{g^2 + x^2 + y^2}} \quad \text{und} \\ \varphi = (\omega t - kR). \quad (10.68a)$$

Von einem infinitesimalen Flächenelement $d\sigma(x, y)$ in der Ebene $z = 0$ werden nach dem Huygensschen Prinzip Sekundärwellen abgestrahlt, die zur Feldstärke im Punkte $P(x', y')$ den Beitrag

$$dE_P = C \cdot \frac{E_S \cdot d\sigma}{r} e^{-ikr} \quad (10.69)$$

Wie wir im Abschnitt 10.6.1 diskutiert haben, kann der Proportionalitätsfaktor C durch $C = i \cdot \cos \theta / \lambda$ ausgedrückt werden.

Die gesamte von einer Lichtquelle beleuchtete Öffnung S des Schirmes bei $z = 0$ ergibt dann im Punkt P die Feldamplitude

$$E_P = \iint S E_S \cdot \frac{e^{-ikr}}{r} dx dy, \quad (10.70)$$

wobei sich das zweidimensionale Flächenintegral über alle Flächenelemente $d\sigma = dx \cdot dy$ der Öffnung erstreckt. Das Integral (10.70) heißt **Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegral**.

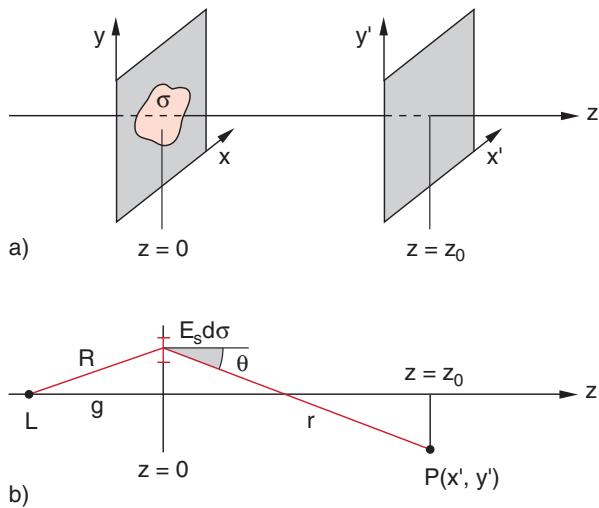


Abb. 10.53a,b. Zur Herleitung des Fresnel-Kirchhoffschen Beugungsintegrals

Ist die Entfernung r zwischen den Punkten $S(x, y)$ in der Blendenöffnung und dem Beobachtungspunkt $P(x', y')$ groß gegen die Werte x, y der Blendenpunkte, so kann man wegen $x/z_0 \ll 1, y/z_0 \ll 1$ im Nenner von (10.70) $r \approx z_0$ setzen. Die Phase im Exponenten hängt jedoch empfindlich von der Entfernung r ab. Deshalb müssen wir hier eine bessere Näherung verwenden. In der Taylor-Entwicklung der Wurzel

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{z_0^2 + (x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &\approx z_0 \left(1 + \frac{(x - x')^2}{2z_0^2} + \frac{(y - y')^2}{2z_0^2} + \dots \right) \end{aligned} \quad (10.71)$$

berücksichtigen wir deshalb alle Glieder bis zum quadratischen Term und vernachlässigen erst die höheren Terme. Mit $\cos \theta = z_0/r \approx 1$ und $C = (i/\lambda)$ (siehe 10.62) wird dann das Beugungsintegral (10.70)

$$\begin{aligned} E(x', y', z_0) &= i \frac{e^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_S(x, y) \\ &\cdot \exp \left[\frac{-ik}{2z_0} ((x - x')^2 + (y - y')^2) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (10.72)$$

Man kann damit bei Kenntnis der Feldverteilung $E(x, y)$ über eine Fläche $z = 0$ die Feldverteilung $E(x', y', z_0)$ in einer Ebene $z = z_0$ berechnen.

Die hier verwendete Näherung heißt **Fresnel-Näherung**. Ist der Durchmesser der beugenden Fläche sehr klein gegen z_0 , so kann man die Näherung weiter vereinfachen. Wenn gilt:

$$z_0 \gg \frac{1}{\lambda} (x^2 + y^2),$$

so lassen sich die quadratischen Terme x^2, y^2 in (10.71) vernachlässigen, d. h.

$$r \approx z_0 \left(1 - \frac{xx'}{z_0^2} - \frac{yy'}{z_0^2} + \frac{x'^2 + y'^2}{2z_0^2} \right).$$

Ziehen wir nun die quadratischen Terme in x', y' vor das Integral (10.72) (weil die Integration über x und y erfolgt), so hängt die Phase linear von x und y ab und es ergibt sich statt (10.72):

$$E(x', y', z_0) = A(x', y', z_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_S(x, y) \cdot \exp \left[\frac{+ik}{z_0} (x'x + y'y) \right] dx dy \quad (10.73)$$

mit

$$A(x', y', z_0) = \frac{ie^{-ikz_0}}{\lambda z_0} \cdot e^{(-i\pi)/(\lambda z) \cdot (x'^2 + y'^2)}.$$

Diese Näherung heißt **Fraunhofer-Beugung**, bei der die Beugungerscheinungen im Fernfeld beobachtet werden. Der allgemeine Fall, bei der die lineare Näherung nicht mehr anwendbar ist, heißt **Fresnel-Beugung**. Wir wollen dies an einigen Beispielen verdeutlichen.

10.7.2 Fresnel- und Fraunhofer-Beugung an einem Spalt

Ein schmaler Spalt in y -Richtung mit der Breite $\Delta x = b \gg \lambda$ möge mit einem parallelen Lichtbündel beleuchtet werden (Abb. 10.54). Wir wollen die Intensitätsverteilung $I(x', z_0)$ des gebeugten Lichtes in der Ebene $y = 0$ für verschiedene Entfernungen z_0 der Beobachtungsebene $z = z_0$ von der Spaltebene $z = 0$ bestimmen. Das Beugungsintegral (10.72) reduziert sich auf ein eindimensionales Integral

$$E(P) = C \cdot E_S \int_{-b/2}^{+b/2} \frac{1}{r} e^{-ikr} dx, \quad (10.74)$$

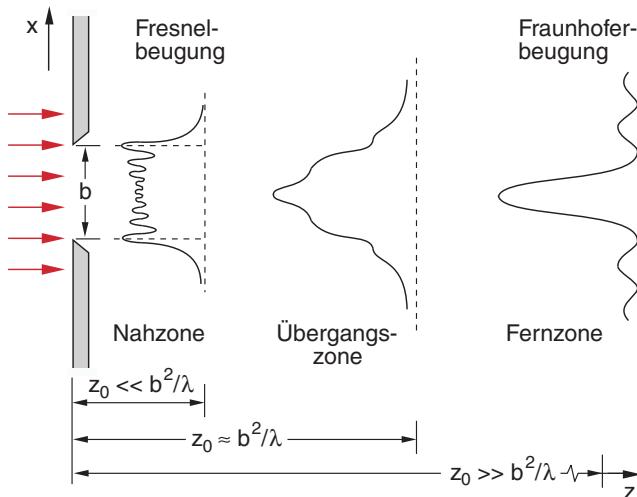


Abb. 10.54. Fresnel- und Fraunhoferbeugung an einem Spalt. Gezeigt sind von links nach rechts die Intensitätsverteilungen in der Nahzone, in einer mittleren Entfernung und in sehr großer Entfernung, wo man die bekannte Fraunhoferbeugung erhält

wobei

$$r = [(x - x')^2 + z_0^2]^{1/2} = z_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x - x'}{z_0}\right)^2}$$

die Entfernung des Aufpunktes $P = (x', 0, z_0)$ von einem Spaltpunkt $(x, 0, 0)$ ist. Die Feldamplitude E_S ist über die Spaltfläche konstant und kann daher vor das Integral gezogen werden. Wir unterscheiden nun drei Entfernungszonen für z_0 :

- Die Nahzone (z_0 ist nicht wesentlich größer als die Spaltbreite $b \gg \lambda$). Dann ist der Radius $r_1 = \sqrt{z_0 \cdot \lambda}$ der ersten Fresnelzone klein gegen b , und viele Fresnelzonen tragen zur Feldamplitude im Punkt P bei, d. h. die Phase der Gesamtwellen in P variiert stark mit x' . Wir erhalten durch numerische Integration von (10.74) die linke in Abb. 10.54 gezeigte Intensitätsverteilung $I(P) \propto |E(P)|^2$.
- Eine mittlere Entfernungszone, bei der nur noch wenige Fresnelzonen beitragen (mittlere Verteilung $I(x')$ in Abb. 10.54).
- Eine Fernzone ($z_0 \gg b$) bei der der Radius $r_1 = \sqrt{z_0 \lambda}$ der ersten Fresnelzone größer ist als b . Dies ist der Bereich der Fraunhofer-Beugung (rechte Intensitätsverteilung in Abb. 10.54). Hier gilt für r die Näherung (10.73). Die von x

unabhängigen Terme der Exponentialfunktion und der praktisch konstante Nenner r in (10.74) können dann vor das Integral gezogen werden, und man erhält damit die Fraunhofer-Beugungsformel (10.43) (siehe Aufgabe 10.5).

Man sieht hieraus, dass die üblicherweise dargestellte Fraunhofer-Beugungsverteilung eine Näherung ist, die nur für Entfernungen gilt, die sehr groß sind gegen die Dimensionen der beugenden Öffnung.

Man kann das (unendlich entfernte) Fernfeld durch eine Linse hinter der beugenden Öffnung in die Brennebene dieser Linse abbilden. Auch hier muss allerdings die Brennweite groß gegen die Breite des Beugungsspaltes sein.

10.7.3 Fresnel-Beugung an einer Kante

Fällt ein paralleles Lichtbündel in z -Richtung auf einen undurchlässigen Schirm in der x - y -Ebene $z = 0$, welcher den Halbraum $x < 0$ abdeckt, sodass eine Kante des Schirms entlang der y -Achse verläuft, so beobachtet man hinter dem Schirm die in Abb. 10.55 gezeigten Beugungsstrukturen. Auch in den abgedeckten Halbraum $x' < 0$ gelangt Licht, und im nichtabgedeckten Halbraum $x' > 0$ oszilliert die Intensität $I(x')$.

Das Beugungsintegral (10.74) wird jetzt für den Beobachtungspunkt $P(x', z_0)$

$$E(P) = C \cdot E_S \int_0^\infty \frac{e^{-ik\sqrt{(x-x')^2 + z_0^2}}}{\sqrt{(x-x')^2 + z_0^2}} dx. \quad (10.75)$$

Für $x' \ll z_0$ lässt sich das Integral durch Reihenentwicklung der Wurzel näherungsweise lösen [10.13] und ergibt die in Abb. 10.55c gezeigte Intensitätsverteilung $I(x')$.

10.7.4 Fresnel-Beugung an einer kreisförmigen Öffnung

Wird eine kreisförmige Öffnung mit Radius a in einem sonst undurchsichtigen Schirm mit parallelem Licht beleuchtet, so erhält man im Abstand z_0 hinter der Öffnung eine um die z -Achse rotationssymmetrische Beugungsstruktur (Abb. 10.56), deren Verlauf $I(\varrho)$ mit $\varrho^2 = x'^2 + y'^2$ vom Radius a der Blende und von der Entfernung z_0 zwischen Beobachtungsebene und Schirm abhängt.

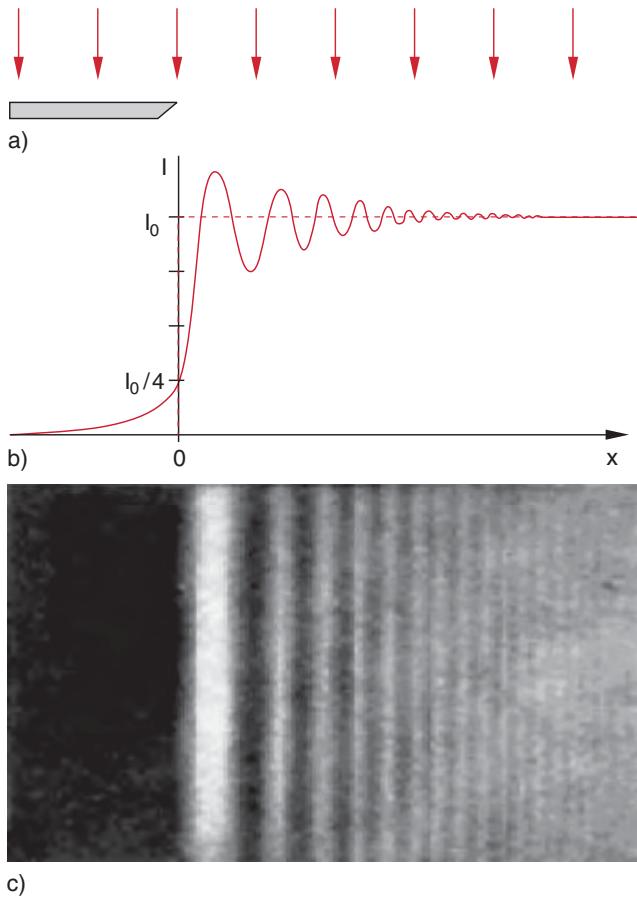


Abb. 10.55a–c. Intensitätsverteilung hinter einer beugenden Kante; (a) Schemazeichnung, (b) aus dem Beugungsintegral berechneter Verlauf. Der gestrichelte Verlauf würde sich nach der geometrischen Optik ergeben, (c) beobachtete Struktur. (aus D. Meschede: *Gerths Physik*, 21. Aufl. (Springer, Berlin, Heidelberg 2002)

Die Intensität im zentralen Punkt $P_0(\varrho = 0)$ ist maximal, wenn $z_0 = a^2/\lambda$ gilt, weil dann die erste Fresnelzone mit Radius $r_1 = \sqrt{z_0 \cdot \lambda} = a$ gleich der Fläche der Blendenöffnung ist (siehe Abschn. 10.6.1). Macht man den Abstand z_0 kleiner (bzw. den Blendenradius a größer), sodass $z_0 = a^2/2\lambda$ wird, so enthält die Blendenöffnung die beiden ersten Fresnelzonen, deren Beiträge zur Feldamplitude P_0 destruktiv interferieren, sodass dann die Intensität in P_0 fast null wird. Man beobachtet dann einen dunklen Punkt im Zentrum der Beugungsstruktur.

Die Intensität $I(P_0)$ auf der Symmetriearchse variiert also bei festem Blendenradius a oszillatorisch

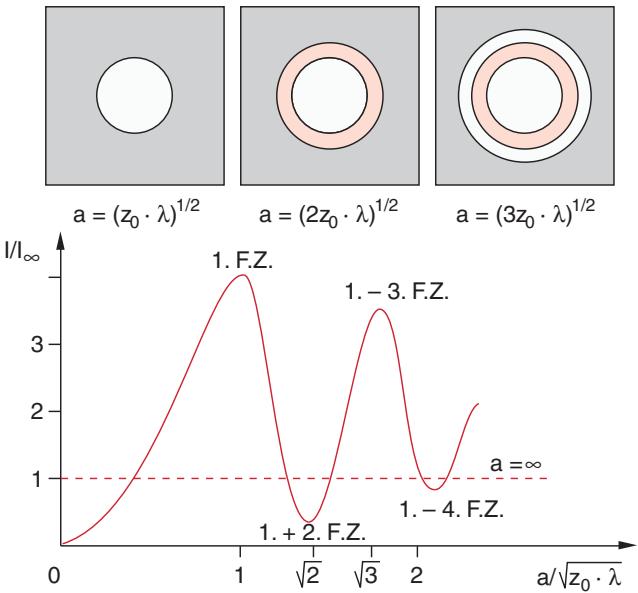


Abb. 10.56. Beugungsintensität in einem Punkt $P(z_0)$ auf der Achse als Funktion des Radius a einer Kreisblende. Im oberen Teil sind die Fresnelzonen für Blenden mit $a = \sqrt{n z_0 \cdot \lambda}$ für die Werte $n = 1, 2, 3$ illustriert, zu denen die Extrema der unteren Kurve gehören. Das Licht durch die 2. Fresnelzone hat einen Wegunterschied von $\lambda/2$ und interviert destruktiv. Die gestrichelte Kurve gibt die Intensität ohne Schirm ($a = \infty$) an

mit dem Abstand z_0 der Beobachtungsebene von der Beugungsebene.

Eine analoge Intensitätsverteilung wird bei der Beugung an einer undurchlässigen Kreisscheibe mit Radius a beobachtet (Abb. 10.57). Auch hier beobachtet man maximale Helligkeit auf der Achse, wenn $z_0 = a^2/\lambda$ ist und minimale für $z_0 = a^2/2\lambda$.

10.7.5 Babinet'sches Theorem

Aus (10.72) sehen wir, dass die Feldstärke \mathbf{E}_P im Beobachtungspunkt P bestimmt ist durch das Flächenintegral über die Feldstärke \mathbf{E}_S auf einer Flächenöffnung σ in einem Schirm zwischen Lichtquelle und Beobachtungspunkt. Um die Beugungerscheinungen an komplizierten Öffnungen oder Hindernissen zu beschreiben, ist ein von J. Babinet (1794–1872) aufgestelltes Prinzip nützlich, das Folgendes besagt:

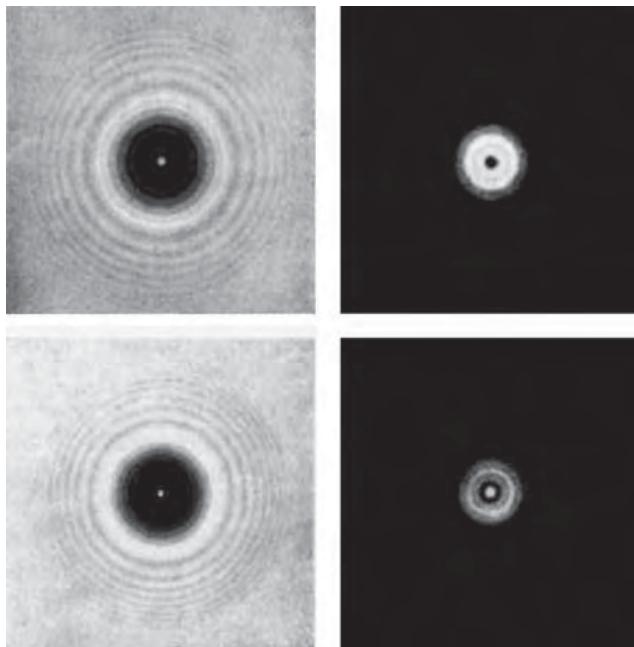


Abb. 10.57. Vergleich der Beugungsstruktur hinter einer Kreisblende (rechts) mit denen hinter einer undurchsichtigen Scheibe gleicher Größe (links). Die Bilder oben und unten sind in zwei verschiedenen Abständen von den beugenden Strukturen beobachtet. Aus W. Weizel, *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Bd. 1 (Springer, Berlin, Göttingen 1949)

Teilt man die Fläche σ in zwei Teilflächen σ_1 und σ_2 , so ist die im Punkte P gemessene Feldstärke

$$E_P(\sigma) = E_P(\sigma_1) + E_P(\sigma_2),$$

wobei $E_P(\sigma_i)$ die Feldstärke ist, die man in P messen würde, wenn nur die Öffnung σ_i vorhanden wäre.

Ganz allgemein gilt bei einer Aufteilung in N Teilgebiete:

$$E_P(\sigma) = \sum_{i=1}^N E_P(\sigma_i). \quad (10.76)$$

BEISPIELE

1. Eine kreisringförmige Blende mit den Radien ϱ_1 und ϱ_2 ergibt eine Feldamplitude $E_P = E_P^{(1)} - E_P^{(2)}$, wobei $E_P^{(i)}$ die von einer kreisförmigen Blende ϱ_i erzeugte Feldamplitude ist und man natürlich die unterschiedlichen Phasen von $E_P^{(1)}$ und $E_P^{(2)}$ im Punkte P berücksichtigen muss.

2. Benutzt man z. B. die Aufteilung einer rechteckigen Blende wie in Abb. 10.58a, so kann man die Beugungsverteilung hinter der komplizierten Öffnung σ_1 als Differenz

$$E_P(\sigma_1) = E_P(\sigma) - E_P(\sigma_2)$$

der Beugungsverteilung an zwei einfacheren Strukturen σ und σ_2 erhalten.

Man nennt zwei Öffnungen σ_1 und σ_2 *komplementär* zueinander, wenn σ_1 an den Stellen blockiert, an denen σ_2 Licht durchlässt. Weitere Beispiele für komplementäre Beugungsflächen sind eine kreisförmige Öffnung in einem undurchlässigen Schirm (Abb. 10.58b) und eine undurchlässige Kreisscheibe gleicher Größe oder ein Spalt und ein Draht gleicher Dicke (Abb. 10.58c).

Im Falle von Abb. 10.58b,c ergibt die Summe $\sigma_1 + \sigma_2$ die gesamte, unbegrenzte Fläche σ , die keine Beugungerscheinungen erzeugt, weil sie keine Begrenzungen hat. Für die Beugungsverteilung der Feldstärken $E(P)$ gilt daher:

$$E_P(\sigma_1) = -E_P(\sigma_2). \quad (10.77)$$

Für die Intensitätsverteilungen $I(P) = |(E_P)|^2$ erhält man also das Ergebnis, dass die Beugungerscheinungen einer Blende und einer gleich großen Scheibe gleich sind, wenn man die auf geometrischem Wege (d. h. ohne Beugung) von der Lichtquelle S durch die Blende zum Punkt 1 gelangende Intensität abzieht.

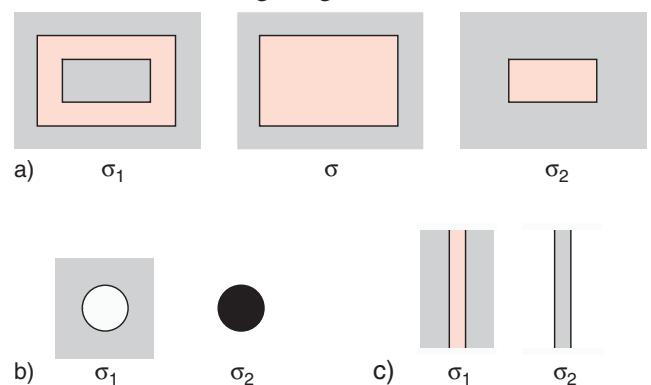


Abb. 10.58a–c. Komplementäre Beugungsflächen: (a) rechteckige Blenden, (b) kreisförmige Öffnung und undurchlässige Kreisscheibe gleicher Größe, (c) Spalt und Draht gleicher Dicke

10.8 Fourierdarstellung der Beugung

Man kann mithilfe des Fouriertheorems die Beugung an beliebig geformten Öffnungen ganz allgemein und mathematisch elegant beschreiben. Dies hat die moderne Optik sehr befriedigt und soll deshalb hier kurz dargestellt werden.

10.8.1 Fourier-Transformation

Sei $f(x)$ eine beliebige (auch komplexe) quadratintegrierbare Funktion, d. h. das Integral

$$\int_{-x_0}^{+x_0} |f(x)|^2 dx$$

muss für $x_0 \rightarrow \infty$ endlich bleiben. Dann definieren wir als Fouriertransformierte zu $f(x)$ die Funktion

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-iux} dx. \quad (10.78)$$

Um $f(x)$ aus $F(u)$ zu bestimmen, multipliziert man (10.78) mit $e^{i2\pi ux'}$ und integriert beide Seiten über die Variable u . Dies ergibt, wenn wir anschließend x' in x umbenennen:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{+iux} du. \quad (10.79)$$

Man nennt die beiden Funktionen $f(x)$ und $F(u)$ ein Fourierpaar und die Variablen x und u Fourierkonjugierte Variable. Die Maßeinheiten von x und u müssen zueinander reziprok sein, da das Produkt $u \cdot x$ im Exponenten dimensionslos sein muss.

BEISPIEL

Es soll das Frequenzspektrum $F(\omega)$ einer zeitlich exponentiell abklingenden Lichtamplitude (Abb. 10.59)

$$E(t) = A_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t \quad (10.80)$$

bestimmt werden. Mit $u = \omega$, $x = t$ und $E(t) = f(x)$ ergibt sich mit der Anfangsbedingung $A_0(t < 0) = 0$ aus (10.78):

$$F(\omega) = \frac{A_0}{\sqrt{\pi/2}} \int_0^{+\infty} e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t \cdot e^{-i\omega t} dt. \quad (10.81)$$

Das Integral ist elementar lösbar und ergibt für $\omega \gg \omega_0 - \omega$

$$F(\omega) = \frac{\gamma A_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + \gamma^2}. \quad (10.82)$$

$F(\omega)$ gibt die Amplitude $A(\omega)$ der Lichtwelle bei der Frequenz ω an. Das Frequenzspektrum der Intensität $I \propto A \cdot A^*$ ist dann das Lorentzprofil

$$I(\omega) = \frac{C}{[(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2]}, \quad (10.83)$$

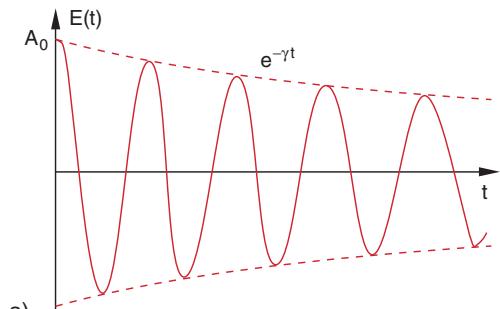
wobei die Konstante C so gewählt werden kann, dass $\int I(\omega) d\omega$ die Gesamtintensität I_0 wird.

In der Beugungstheorie benötigt man die zweidimensionale Fouriertransformation:

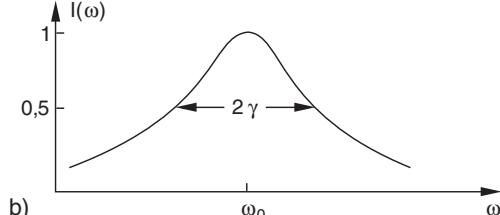
$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \cdot e^{-i2\pi(u \cdot x + v \cdot y)} dx dy \quad (10.84a)$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \cdot e^{i2\pi(u \cdot x + v \cdot y)} du dv \quad (10.84b)$$

Lässt sich $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ in ein Produkt aus zwei Funktionen nur einer Variablen separieren, so gilt



a)



b)

Abb. 10.59a,b. Experimentell abklingende Lichtamplitude (a) und Fouriertransformierte $I(\omega)$ von $EE^*(t)$

auch für die Fouriertransformierte:

$$F(u, v) = F_1(u) \cdot F_2(v), \quad (10.85)$$

wobei $F_1(u)$ die Fouriertransformierte von $f_1(x)$ und $F_2(v)$ von $f_2(y)$ ist.

10.8.2 Anwendung auf Beugungsprobleme

Wir wollen den allgemeinen Fall behandeln, dass auf eine Fläche σ in der Ebene $z = 0$ mit der Transmissionsfunktion $\tau(x, y)$ eine Lichtwelle mit der Feldstärkeverteilung $E_e(x, y)$ fällt. Für eine Blende wäre z. B. $\tau(x, y) = 1$ innerhalb der Blendenöffnung und $\tau = 0$ außerhalb. Direkt hinter der Fläche ist

$$E(x, y) = \tau(x, y) \cdot E_e(x, y). \quad (10.86)$$

Die Amplitudenverteilung $E(x', y', z_0)$ in der Ebene $z = z_0$ kann dann aus dem Beugungsintegral (10.73) berechnet werden. Setzt man (10.86) in (10.73) ein und vergleicht das Integral mit (10.84), wobei $u = x' / (\lambda z_0)$, $v = y' / (\lambda z_0)$ zu setzen ist, so sieht man, dass

$$f(x, y) = E(x, y) = \tau(x, y) \cdot E_e(x, y) \quad (10.87)$$

die Amplitudenverteilung direkt nach der Beugungsebene $z = 0$ darstellt. Die Feldstärkeverteilung $E(x', y')$ der Fraunhoferschen Beugungsstruktur in der Beobachtungsebene $z = z_0$ ist nach (10.73)

$$E(x', y') = A(x', y', z_0) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E_e(x, y) \cdot \tau(x, y) \cdot e^{-i2\pi(x'x + y'y)/(\lambda z_0)} dx dy. \quad (10.88)$$

Der Vergleich mit (10.84) liefert dann:

$$E(x', y', z_0) = F(u, v) \cdot A(x', y', z_0). \quad (10.89a)$$

Wir erhalten daher das wichtige Ergebnis:

Die Amplitudenverteilung des Fraunhoferschen Beugungsbildes in der Ebene $z = z_0$ ist proportional zur Fouriertransformierten $F(x', y')$ der Funktion $f(x, y) = \tau(x, y) \cdot E_e(x, y)$ wobei $\tau(x, y)$ die Transmissionsfunktion ist.

Die Intensitätsverteilung in der Beobachtungsebene ist dann:

$$I(x', y') \propto |E(x', y')|^2 = |F(x', y')|^2, \quad (10.89b)$$

weil $|A(x', y')|^2 = 1$ ist.

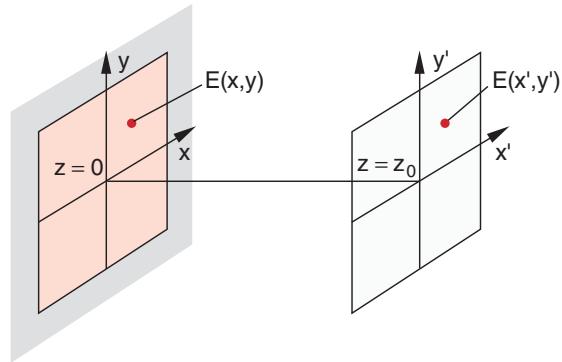


Abb. 10.60. Zur Fourierdarstellung der Fraunhofer-Beugung

Wir wollen dieses Ergebnis zur Illustration auf die Beugung an einer rechteckigen Öffnung anwenden. Weitere Beispiele folgen im Abschn. 12.5.

Rechteckige Blende

Wir betrachten in Abb. 10.61 eine rechteckige Öffnung (Breite a und Höhe b) in einem sonst undurchlässigen Schirm. Dann gilt für die Transmissionsfunktion

$$\tau(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } -a/2 < x < +a/2, \\ & -b/2 < y < b/2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fällt auf diese Öffnung eine ebene ausgedehnte Lichtwelle, so ist $E_e(x, y) = E_0 = \text{const.}$ Wir können die Öffnung in schmale Streifen mit der Breite dx zerlegen

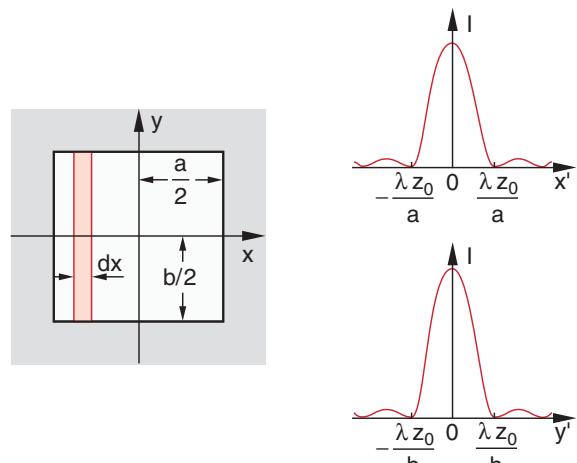


Abb. 10.61. Zur Beugung an einer rechteckigen Blende

und erhalten dann für den Feldstärkeanteil $dE(x', y')$, der durch einen Streifen der Blende erzeugt wird, gemäß (10.88) den Beitrag:

$$\begin{aligned} dE(x', y') & \quad (10.90a) \\ = E_0 e^{-2\pi i x' x / (\lambda z_0)} dx \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2\pi i y' y / (\lambda z_0)} dy. \end{aligned}$$

Integration über alle Streifen gibt die Feldverteilung in der Beobachtungsebene:

$$\begin{aligned} E(x', y') & \quad (10.90b) \\ = E_0 \cdot \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-2\pi i x' x / (\lambda z_0)} dx \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-2\pi i y' y / (\lambda z_0)} dy. \end{aligned}$$

Ausführen der Integration ergibt:

$$E(x', y') = E_0 \cdot \frac{\lambda^2 z_0^2}{\pi^2 x' y'} \cdot \sin \frac{\pi x' a}{\lambda z_0} \cdot \sin \frac{\pi y' b}{\lambda z_0}. \quad (10.91)$$

Da die Intensität in der Beugungsebene durch $I(x', y') = |A|^2 |E|^2$ gegeben ist, erhält man aus (10.91)

$$I(x', y') = I_0 \cdot \frac{\sin^2(\pi x' a / \lambda z_0)}{(\pi x' a / \lambda z_0)^2} \cdot \frac{\sin^2(\pi y' b / \lambda z_0)}{(\pi y' b / \lambda z_0)^2}. \quad (10.92)$$

Vergleicht man dies mit (10.45) und setzt $\sin \theta = x' / z_0$ bzw. y' / z_0 , so sieht man, dass dies mit dem auf ganz andere Weise hergeleiteten Ergebnis übereinstimmt. Eine rechteckige Öffnung hat also eine Beugungsstruktur, die man als Überlagerung der Beugung an zwei zueinander senkrechten, unendlich langen Spalte mit den Breiten a bzw. b ansehen kann.

In der Astronomie werden statt des Linsenfernrohrs in Abb. 11.13 überwiegend Spiegelteleskope benutzt (Abb. 11.16), weil man Hohlspiegel mit größerem Durchmesser herstellen kann als Linsen [11.5]. Damit wird die Lichtstärke des Fernrohrs größer (siehe Abschn. 11.4). Die größten zur Zeit gebauten Teleskope (Europäische Südsternwarte in Chile und das Keck-Teleskop auf Hawaii) haben einen Spiegeldurchmesser von 10 m. Es gibt verschiedene Anordnungen (siehe Bd. 4) für den optischen Strahlengang. Beim Cassegrain-Teleskop wird das vom Hauptspiegel gesammelte Licht gebündelt auf einen Fangspiegel reflektiert, der es durch ein kleines Loch im Hauptspiegel über das Okular ins Auge bzw. auf den Detektor leitet.

11.3 Die Rolle der Beugung bei optischen Instrumenten

Wir hatten im Abschnitt 11.2 diskutiert, dass durch die Vergrößerung mit Hilfe optischer Instrumente feinere Details des Gegenstandes erkannt werden können. Diese Erhöhung des räumlichen Auflösungsvermögens wird begrenzt durch die Beugungerscheinungen. Dies soll an zwei Beispielen, dem Fernrohr und dem Mikroskop, illustriert werden.

11.3.1 Auflösungsvermögen des Fernrohrs

Wir betrachten in Abb. 11.17b das Bild zweier Sterne S_1 und S_2 mit dem Winkelabstand δ . Wegen ihrer großen Entfernung können die Sterne als punktförmige Lichtquellen angesehen werden, sodass das Licht von jedem Stern als ebene Welle behandelt werden kann. Wegen der Beugung an der begrenzenden Öffnung einer Teleskoplinse mit Durchmesser D ist das Zwischenbild in der Brennebene von L_1 kein Punkt, sondern es entsteht eine radial-symmetrische Intensitätsverteilung (siehe Abb. 10.41), deren Verlauf entlang der x -Achse in der x - z -Ebene in Abb. 11.17a für einen einzelnen Stern dargestellt ist. Der Durchmesser d_{Beug} des zentralen Beugungsmaximums zwischen den Nullstellen der Besselfunktion ist nach Abschn. 10.5 gegeben durch

$$d_{\text{Beug}} = 2f_1 \cdot \sin \alpha_{\text{Beug}} \approx 2,44 \cdot f_1 \lambda / D . \quad (11.8a)$$

In Abb. 11.17b sind die beiden beugungsbedingten Intensitätsverteilungen der Bilder zweier nahe benach-

barter Sterne gezeigt. Beobachtet wird die Überlagerung der beiden Verteilungen $I_1(x - x_1)$ und $I_2(x - x_2)$ um die beiden Bildpunkte $F_1(x_1, z_0)$ und $F_2(x_2, z_0)$ in der Brennebene $z = z_0$.

Wenn das Hauptmaximum von $I_1(x_1)$ der Beugungsstruktur von S_1 näher an x_2 rückt als das erste Minimum von $I_2(x - x_2)$, lässt die Überlagerung $I(x) = I_1 + I_2$ keine getrennten Maxima mehr erkennen, d. h. man kann nicht mehr entscheiden, ob es sich um zwei getrennte Lichtquellen S_1 und S_2 handelt (**Rayleigh-Kriterium**, siehe Aufgabe 11.4 und Abschn. 11.5.3). Da das erste Minimum bei einem Winkelabstand $\Theta = 1,22 \cdot \lambda / D$ liegt (siehe Abschn. 10.5), ist der kleinste noch auflösbare Winkelabstand begrenzt auf

$$\delta_{\min} = 1,22 \cdot \lambda / D . \quad (11.8b)$$

Bei diesem Winkelabstand hat die Überlagerung der beiden Besselfunktionen $I_1(x - x_1) + I_2(x - x_2)$ noch zwei erkennbare Maxima bei $x = x_1$ und $x = x_2$ mit einer Einbuchtung

$$I(x = (x_1 + x_2)/2) \approx 0,85 I_{\max} .$$

Wir definieren deshalb als beugungsbegrenztes **Winkelauflösungsvermögen** die Größe

$$R_W = \frac{1}{\delta_{\min}} = \frac{D}{1,22 \lambda} . \quad (11.8c)$$

Das räumliche Auflösungsvermögen eines optischen Instrumentes ist also begrenzt durch das Verhältnis D/λ von Durchmesser D der Instrumentenöffnung zu Wellenlänge λ .

BEISPIEL

$$\lambda = 500 \text{ nm}, D = 1 \text{ m}, f_1 = 10 \text{ m} \Rightarrow \delta_{\min} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,13'' \Rightarrow d_{\text{Beug}} = 6 \mu\text{m}$$

Diese beugungsbegrenzte Auflösung spielt allerdings für Teleskope mit $D > 10 \text{ cm}$ auf der Erde im Allgemeinen keine Rolle, da die Auflösung durch statistische Fluktuation des Brechungsindex der Erdatmosphäre (Luftunruhe) auf etwa $1''$ beschränkt ist. Mit

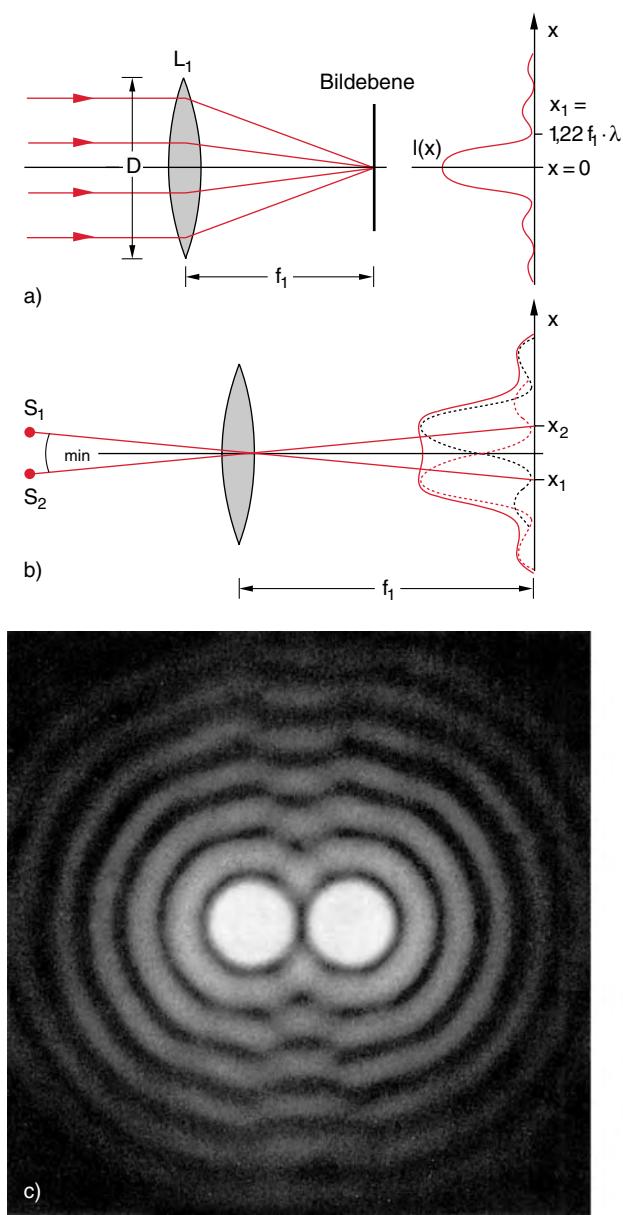


Abb. 11.17a–d. Zur Begrenzung des Winkelauflösungsvermögens eines Fernrohres durch die Beugung an der Teleskopöffnung. (a) Beugungsbedingte Intensitätsverteilung in der Brennebene von L_1 bei punktförmiger Lichtquelle. (b) Überlagerung der gerade noch auflösbareren Bilder zweier Lichtquellen. (c) Beugungsbild zweier auflösbarer punktförmiger Lichtquellen. (d) Rayleighgrenze der Auflösung. [(c,d) aus M. Cagnet, M. Françon, J.C. Thrierr: *Atlas optischer Erscheinungen* (Springer, Berlin, Göttingen 1962)]

einer speziellen Technik, der *Speckle-Interferometrie* [11.6], oder auch bei Verwendung adaptiver Optik (Abschn. 12.3) lässt sich die Luftunruhe teilweise „überlisten“, sodass man auch mit großen Teleskopen fast beugungsbegrenzte Winkelauflösung erreichen kann.

Beim Hubble-Teleskop im Weltraum entfällt die Luftunruhe völlig, und man erreicht in der Tat die beugungsbegrenzte Auflösung. Bei einem Spiegel-durchmesser von $D = 2,4\text{ m}$ bedeutet dies bei einer Wellenlänge $\lambda = 500\text{ nm}$ eine Winkelauflösung von $2,54 \cdot 10^{-7}\text{ rad} \stackrel{\Delta}{=} 0,052''$. Dies entspricht einer

räumlichen Auflösung auf dem Mond (380 000 km Entfernung) von $\Delta x_{\min} = 96 \text{ m}$.

11.3.2 Auflösungsvermögen des Auges

Die Pupille des menschlichen Auges hat einen Durchmesser, der, je nach einfallender Lichtintensität und verlangter Schärfentiefe, zwischen $D = 1\text{--}8 \text{ mm}$ variieren kann. Die Augenlinse erzeugt dann von einer punktförmigen Lichtquelle (bei Vernachlässigung aller Linsenfehler), aufgrund der Beugung ein Beugungsscheibchen auf der Netzhaut, das einen Durchmesser

$$d_{\text{Beug}} = 2,44 \lambda f / D$$

hat. Für grünes Licht ($\lambda = 550 \text{ nm}$), das im Augapfel (Brechungsindex $n = 1,33$) zu $\lambda = 413 \text{ nm}$ wird, ergibt dies für $f = 24 \text{ mm}$, $D = 2 \text{ mm}$:

$$d_{\text{Beug}} \approx 10 \mu\text{m}.$$

Dies entspricht etwa dem mittleren Abstand der Lichtrezeptoren (Zäpfchen) in der Zone des schärfsten Sehens (Fovea), wo die Packungsdichte der Rezeptoren maximal ist.

Die entsprechende beugungsbedingte Winkelauflösung für $\lambda = 550 \text{ nm}$ ist $\delta \approx 1,22 \lambda / D \approx 1' \approx 2,9 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$, sodass das Auge nur Strukturen bis zu minimalen Abständen

$$\Delta x_{\min} = s_0 \cdot \delta_{\min} \approx 25 \text{ cm} \cdot 2,9 \cdot 10^{-4} \approx 70 \mu\text{m}$$

auflösen kann, wenn sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite s_0 befindet.

Anmerkung

Das Auflösungsvermögen hängt auch ab von der Form des Gegenandes und vom Kontrast.

11.3.3 Auflösungsvermögen des Mikroskops

Auch beim Mikroskop ist die erreichbare räumliche Auflösung prinzipiell durch die Beugung begrenzt.

Wir betrachten in Abb. 11.18 einen Punkt P_1 des beleuchteten Objektes in der Beobachtungsebene, die den Abstand g von der Objektivlinse L_1 mit Durchmesser D hat.

In der Bildebene im Abstand b von L_1 entsteht als Bild des Punktes P_1 ein Beugungsscheibchen mit dem

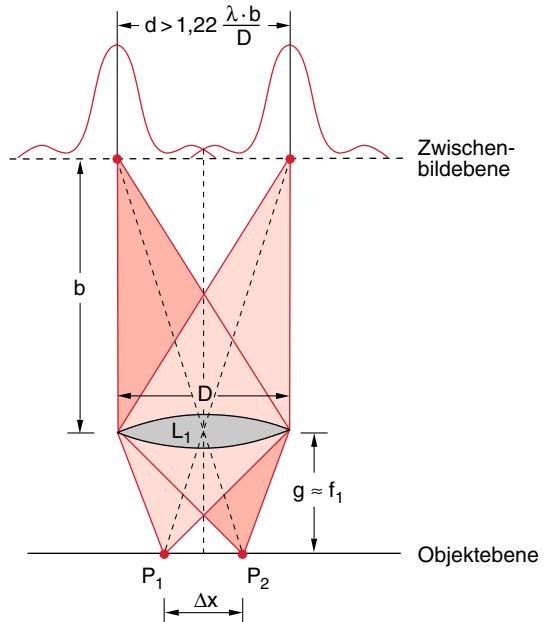


Abb. 11.18. Zur Herleitung des Auflösungsvermögens eines Mikroskops

Fußpunkt durchmesser der zentralen Beugungsordnung

$$d_{\text{Beug}} = 2,44 \cdot \lambda \cdot b / D.$$

Damit ein benachbarter Punkt P_2 des Objektes mit Abstand $\Delta x = \overline{P_1 P_2}$ noch als räumlich getrennt von P_1 beobachtbar ist, muss der Abstand der Maxima beider Beugungsscheibchen mindestens $0,5 d_{\text{Beug}} = 1,22 \lambda b / D$ betragen. Dies entspricht nach der Abbildungsgleichung einer Linse einem Objektabstand

$$\Delta x_{\min} = \frac{1}{2} d_{\text{Beug}} \cdot \frac{g}{b} = 1,22 \lambda \cdot \frac{g}{D}.$$

Im allgemeinen Fall liegt die Objektebene praktisch in der Brennebene von L_1 , sodass $g \approx f$. Dies ergibt für den kleinsten noch auflösbaren Abstand zweier Objektpunkte:

$$\Delta x_{\min} = 1,22 \cdot \lambda \cdot f / D. \quad (11.9)$$

Der von der Objektivlinse L_1 erfasste maximale Öffnungswinkel 2α ist durch

$$2 \sin \alpha = D / f \quad (11.10)$$

bestimmt.

Durch Verwendung von Immersionsöl mit einem großen Brechungsindex ($n = 1,5$) zwischen Objekt und Objektiv lässt sich wegen $\lambda_n = \lambda_0/n$ ein Faktor 1,5 für die Auflösung gewinnen. Man erhält damit

$$\Delta x_{\min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda_0}{2n \cdot \sin \alpha}. \quad (11.11a)$$

Man nennt die Größe $n \cdot \sin \alpha$ die **numerische Apertur** (*NA*) des Mikroskops. Damit lässt sich (11.11a) schreiben als

$$\Delta x_{\min} = 0,61 \frac{\lambda}{NA}. \quad (11.11b)$$

BEISPIEL

$n = 1,5; \sin \alpha = 0,8$ (d. h. $2\alpha \approx 106^\circ$)

$\Rightarrow NA = 1,2 \Rightarrow \Delta x_{\min} \approx 0,5 \lambda$.

In Worten:

Strukturen, die kleiner sind als die halbe Wellenlänge des beleuchtenden Lichtes, können nicht aufgelöst werden.

Um eine höhere Auflösung zu erreichen, muss die Wellenlänge λ verringert werden. Deshalb wird intensiv an der Entwicklung der Röntgenmikroskopie (mit Fresnel-Linsen) gearbeitet, oder man verwendet zur Auflösung kleiner Strukturen Elektronenmikroskope (siehe Bd. 3).

Anmerkung

Man kann in günstigen Fällen allerdings auch mit sichtbarem Licht noch Strukturen $\Delta x < \lambda/2$ auflösen, wenn man die Technik der Nahfeldmikroskopie verwendet (siehe Abschn. 12.2).

In vielen Fällen spielt nicht nur die laterale Auflösung (senkrecht zur Achse des Mikroskops) sondern auch die axiale räumliche Auflösung in Richtung der Lichtausbreitung eine Rolle. Beim normalen Mikroskop ist dies die Rayleigh-Länge z_R ($2z_R$ gibt die Strecke um den Fokus an, innerhalb der sich der Durchmesser des fokussierten Lichtbündels um den Faktor $\sqrt{2}$ ändert (Abb. 11.19), der Querschnitt sich also verdoppelt gegenüber dem Minimalwert πw_0^2 im

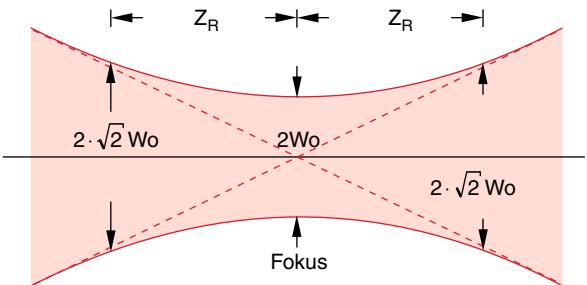


Abb. 11.19. Zur Definition der Rayleigh-Länge

Fokus). Die Rayleigh-Länge ist $z_R = \pi w_0^2 / \lambda$, wobei w_0 der Durchmesser des Lichtbündels im Fokus ist und λ die Wellenlänge des Lichtes. Setzt man für w_0 die kleinste noch auflösbare Strecke $\Delta x = 0,7\lambda$ in Luft ($n = 1$) ein, so erhält man die Rayleigh-Länge $\Delta z \approx 1,5\lambda$.

Hier kann eine von St. Hell [11.7] entwickelte „ 4π -Anordnung“ die axiale Auflösung deutlich verbessern. Das durch die Probe laufende kohärente Licht mit Amplitude E_1 (es wird ein Laser verwendet) wird von einem sphärischen Spiegel reflektiert und wieder in den Fokus der hinlaufenden Welle fokussiert (Abb. 11.20). Hier entsteht durch Überlagerung der beiden Wellen die Interferenzstruktur

$$E(z, r, \phi) = E_1(z, r, \phi) + E_2(-z, r, \phi)$$

einer stehenden Welle mit der Intensitätsverteilung $I(z, r, \phi) \sim E^2$.

Weil die Intensität im Fokus am höchsten ist und mit zunehmendem Abstand vom Fokus stark abnimmt, wird die Intensitätsverteilung $I(z)$ im Fokus ein schmales Maximum haben mit der vollen Halbwertsbreite

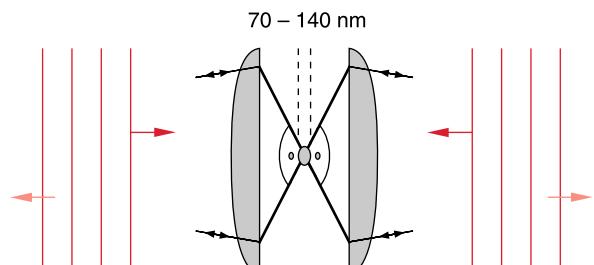


Abb. 11.20. 4- π -Geometrie zur Verbesserung der axialen Auflösung

$\Delta z \approx \lambda/4$. Dies ist eine Verbesserung um den Faktor 6 gegenüber der herkömmlichen Methode.

Auch die radiale Auflösung kann erheblich verbessert werden durch ein Laser-Verfahren, bei dem die Moleküle durch einen Laser mit einem radialen Gaußprofil $I(r) = I_0 \exp[-(r/a)^2]$ angeregt und durch einen zweiten Laser mit einem zentrischen radialen Ringprofil abgeregert werden, sodass nur ein enger Bereich um $r = 0$ an angeregten Molekülen übrig bleibt, die zur Fluoreszenz beitragen.

Eine weitere Methode zur Verbesserung der radiauen Auflösung ist die konfokale Mikroskopie, die im Abschn. 12.1 behandelt wird, oder die im Abschn. 12.2 vorgestellte Nahfeld-Mikroskopie.

11.3.4 Abbesche Theorie der Abbildung

Dass die Beugung für die Abbildung eine entscheidende Rolle spielt, wurde bereits von Ernst Abbe (1840–1905) erkannt, der dies anhand der Bildentstehung im Mikroskop (Abb. 11.21) illustrierte.

Ein Objekt (z.B. zwei Spalte S_1 und S_2 mit dem Abstand d) werde von unten mit parallelem Licht beleuchtet. Die nullte Beugungsordnung erscheint in der Richtung des durchgehenden Lichtes. Sie enthält jedoch keine Information über den Spaltabstand. Erst die höheren Beugungsordnungen, die bei den Winkeln Θ_m gegen die Einfallrichtung erscheinen, geben wegen

$$d \cdot \sin \Theta_m = m \cdot \lambda \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Auskunft über den Spaltabstand d . Man sieht aus Abb. 11.21, dass zur Entstehung der Bilder B_1 und B_2 sowohl die +1. als auch die -1. Beugungsordnung notwendig ist.

Die Objektivlinse L_1 des Mikroskops muss also mindestens das Licht der ± 1 . Beugungsordnung unter dem Winkel Θ_1 noch erfassen können, d.h. die numerische Apertur NA muss bei Verwendung von Immersionsöl mit Brechungsindex n mindestens

$$NA = n \sin \alpha > n \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{d} \quad (11.12)$$

sein, um die räumliche Auflösung $\Delta x_{\min} = d$ zu erreichen. Daraus ergibt sich

$$d \geq \frac{\lambda}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda}{NA},$$

was bis auf einen Faktor 0,6 mit (11.11b) übereinstimmt.

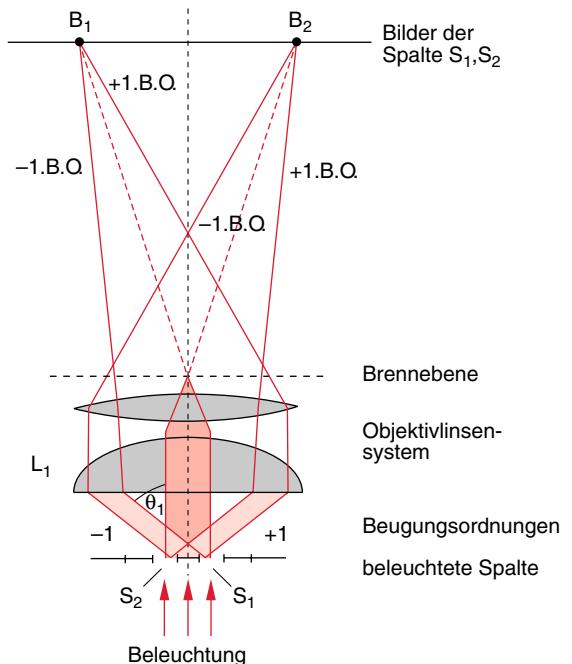


Abb. 11.21. Zur Abbeschen Theorie der Bildentstehung im Mikroskop

Experimentell kann man die Abbesche Abbildungstheorie eindrucksvoll demonstrieren, indem man ein Kreuzgitter in der x -y-Brennebene von L_1 mit parallelem Licht von hinten beleuchtet und hinter L_1 zwei zueinander senkrechte Spalte in x - bzw. y -Richtung mit variabler Spaltbreite stellt (Abb. 11.22). Wird einer der beiden Spalte so weit verengt, dass nur noch die nullte Beugungsordnung des Gitters durchgelassen wird, so verschwindet im Gitterbild in der Beobachtungsebene B_1 die Struktur des Gitters in einer Richtung, aus dem Kreuzgitter wird ein Strichgitter mit den Strichen senkrecht zur Richtung des engen Spaltes. Verengt man auch noch den anderen Spalt, so verschwindet die Gitterstruktur in der Bildebene vollständig. Durch einen Strahlteiler St kann ein Teil des Lichtes abgelenkt werden, um in der Ebene B_2 die Fraunhofersche Beugungsstruktur des Gitters zu beobachten, sodass man sehen kann, welche Beugungsordnungen von der Blende durchgelassen werden.

Im Rahmen der Fourierdarstellung der Beugung (Abschn. 10.8) lässt sich die Fraunhofersche Beugungsstruktur als Fouriertransformierte der Feldverteilung in der Beugungsebene ansehen. Das Bild

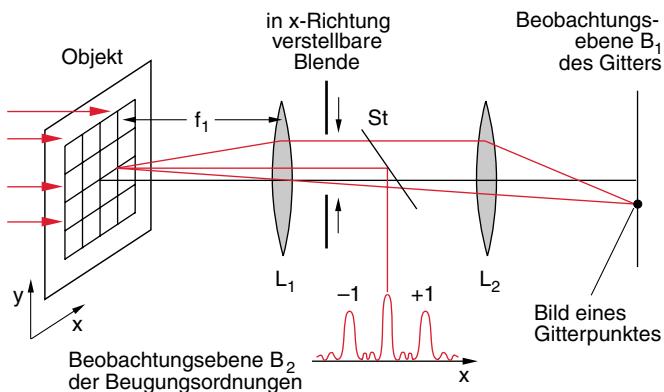


Abb. 11.22. Zur Demonstration der Abbeschen Theorie

des Objektes in der Beobachtungsebene B_1 ist dann durch die Fouriertransformierte der Beugungsverteilung gegeben. Fehlen räumliche Strukturen in der Beugungsverteilung (weil sie durch die Blende abgeschnitten werden), so fehlen die entsprechenden Fouriergrößen im realen Bild, d.h. die Konturen des Bildes werden verwaschen (siehe Kap. 12).

Punkte P des Gegenstandes G ausgesandt wird, und damit auch die sammelbare Lichtleistung. Die Blende wirkt als Eintrittspupille. Das reelle Bild der Blende in der Bildebene wirkt als Austrittspupille, die nur bildseitige Lichtbündel mit dem Öffnungswinkel Ω' durchlässt.

Da ein selbstleuchtender Gegenstand im Allgemeinen Licht in den gesamten Raumwinkel 4π abstrahlt,

11.4 Die Lichtstärke optischer Instrumente

Neben der räumlichen Auflösung ist für viele Anwendungszwecke die Lichtstärke optischer Instrumente von entscheidender Bedeutung. Beispiele dafür sind Fotoapparate, astronomische Teleskope, Diaprojektoren, Spektrographen etc.

Die von einem optischen Instrument durchgelassene Lichtleistung hängt von der seitlichen Begrenzung der das Gerät durchsetzenden Lichtbündel ab. Diese Begrenzungen können durch die Linsenfassung, durch zusätzliche Blenden im Strahlengang oder durch die Größe von Prismen oder Gittern in Spektrographen bestimmt sein.

Wir bezeichnen den allen Lichtbündeln gemeinsamen Querschnitt auf der Objektseite des Instruments als **Eintrittspupille**, während dieser auf der Bildseite **Austrittspupille** heißt.

Bei der einfachen Abbildung eines Gegenstandes durch eine Linse (Abb. 11.23) ist der Linsenquerschnitt die gemeinsame Eintritts- und Austrittspupille. Setzt man jetzt eine Blende B in den Objektraum vor der Linse (Abb. 11.24), so begrenzt diese Blende den maximalen Öffnungswinkel Ω für Licht, das von jedem

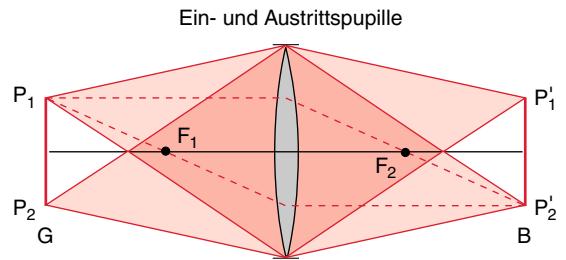


Abb. 11.23. Bei einer Abbildung durch eine Linse ist ohne weitere Blenden im Strahlengang die Linsenfassung Eintritts- und Austrittspupille

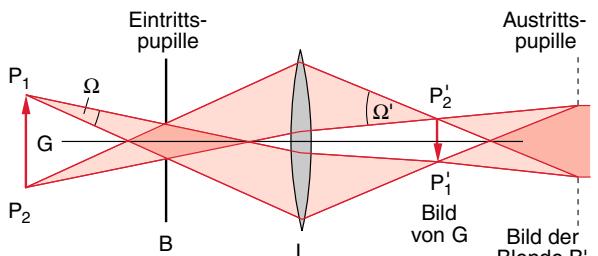
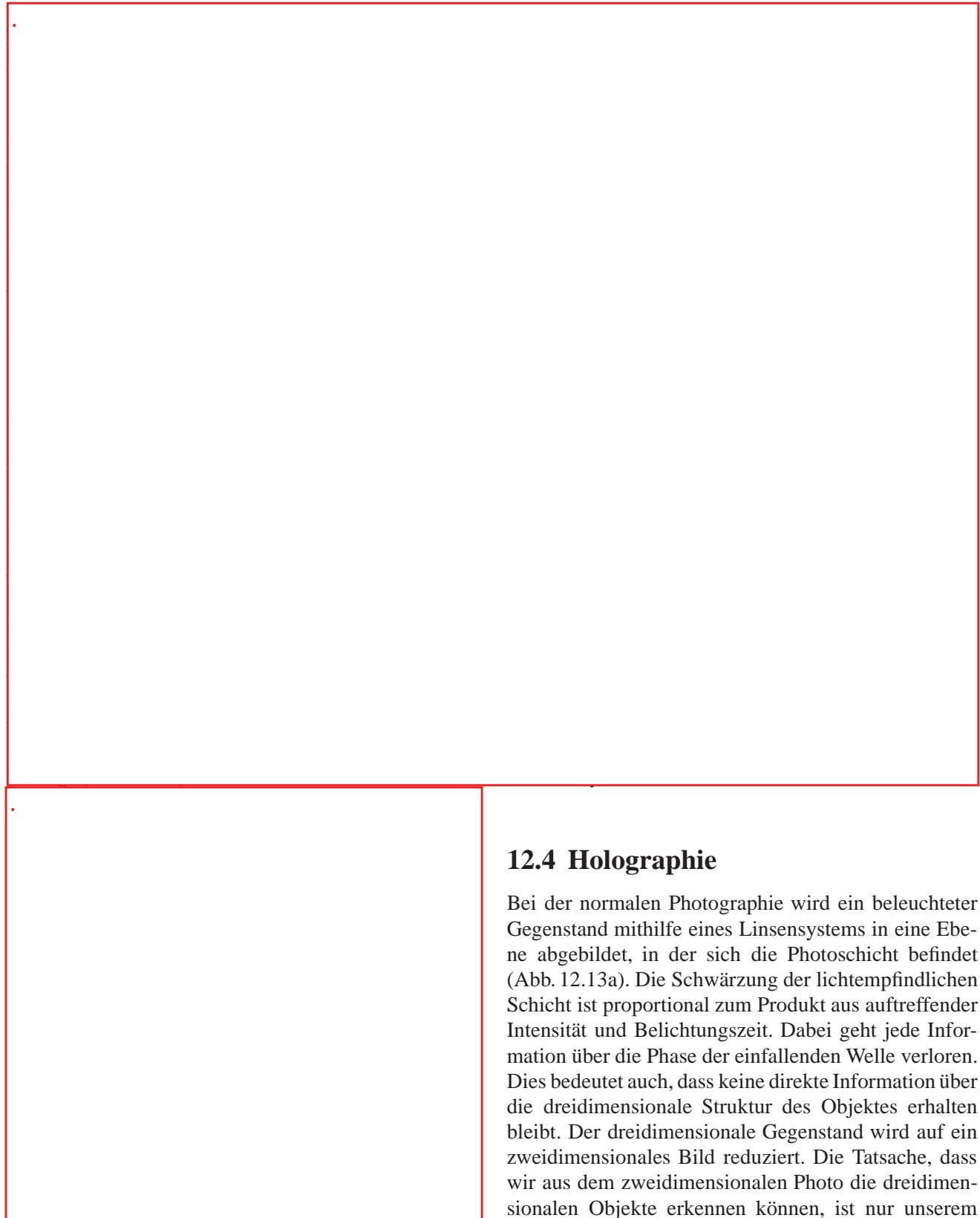


Abb. 11.24. Die Blende B im Objektraum wirkt als Eintrittspupille, ihr reelles Bild B' im Bildraum als Austrittspupille, falls nicht weitere, noch engere Begrenzungen in den Strahlengang eingeführt werden



12.4 Holographie

Bei der normalen Photographie wird ein beleuchteter Gegenstand mithilfe eines Linsensystems in eine Ebene abgebildet, in der sich die Photoschicht befindet (Abb. 12.13a). Die Schwärzung der lichtempfindlichen Schicht ist proportional zum Produkt aus auftreffender Intensität und Belichtungszeit. Dabei geht jede Information über die Phase der einfallenden Welle verloren. Dies bedeutet auch, dass keine direkte Information über die dreidimensionale Struktur des Objektes erhalten bleibt. Der dreidimensionale Gegenstand wird auf ein zweidimensionales Bild reduziert. Die Tatsache, dass wir aus dem zweidimensionalen Photo die dreidimensionalen Objekte erkennen können, ist nur unserem

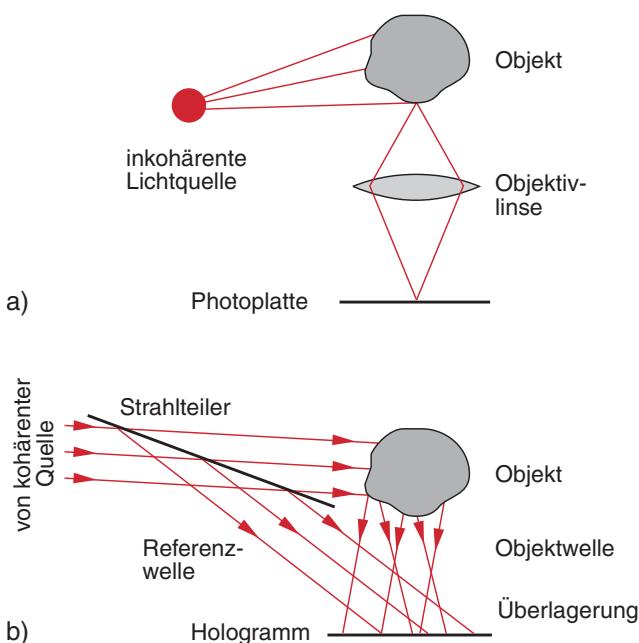


Abb. 12.13a,b. Vergleich der Aufnahmetechnik (a) für ein übliches Photo, (b) für ein Hologramm

Gehirn zu verdanken, das durch Vergleich mit früher gespeicherten Informationen den realen Gegenstand rekonstruieren kann.

Dennis Gábor (1900–1979) hatte 1948 erstmals die Idee, durch Überlagerung zweier kohärenter Teilwellen, nämlich der vom Objekt gestreuten Beleuchtungswelle und einer von derselben Lichtquelle stammenden Referenzwelle, ein Interferenzmuster auf der Photoplatte zu speichern, das Informationen über Amplitude und Phase der vom Objekt gestreuten Welle und damit über die Entfernung der verschiedenen Objektpunkte von der Photoplatte enthält (Abb. 12.13b). Man nennt die durch die Interferenz von Referenz- und Objektwelle erzeugte Schwärzungsverteilung auf der Photoplatte ein **Hologramm**, aus dem sich nach der Entwicklung der Photoplatte durch erneutes Beleuchten mit Licht derselben Wellenlänge ein dreidimensionales Bild des Objektes „rekonstruieren“ lässt. Damit war das Prinzip der Holographie erfunden, wofür Gábor 1971 den Nobelpreis erhielt.

Da man für dieses Verfahren jedoch kohärente Lichtquellen genügend hoher Intensität benötigt, konnte Gábor sein holographisches Verfahren nur unvollkommen in der Praxis realisieren. Erst nach

der Entwicklung des Lasers (siehe Bd. 3) hat die Holographie ihren Siegeszug angetreten [12.17].

12.4.1 Aufnahme eines Hologramms

In Abb. 12.14 ist das Prinzip der Aufnahme eines Hologramms schematisch dargestellt: Der Ausgangsstrahl des Lasers, der eine monochromatische kohärente Lichtquelle darstellt, wird durch eine Linse (bzw. ein Linsensystem) aufgeweitet und dann durch einen Strahlteiler in zwei Teilbündel aufgespalten: Die

$$E_0 = A_0 e^{i(\omega t - k_0 \cdot r)} \quad (12.1)$$

wird direkt auf die Photoplatte gerichtet, die wir in die x - y -Ebene legen. Das andere Teilbündel beleuchtet das Objekt. Das vom Objekt in Richtung der Photoplatte gestreute Licht hat auf der Photoplatte die Amplitude

$$E_s(x, y) = A_s e^{i[\omega t + \varphi_s(x, y)]}, \quad (12.2)$$

wobei die Phase $\varphi_s(x, y)$ von der Entfernung der Objektpunkte, welche das Licht streuen, abhängt. Die Amplitude $E_s(x, y)$ ist die Summe aller Streuamplituden, die von den einzelnen Objektpunkten in den Punkt (x, y) gestreut werden. Auch die im Punkt (x, y) auftretende Phase $\varphi(x, y)$ wird durch die Überlagerung der Phasen der Streuanteile von den verschiedenen Objektpunkten bestimmt. Die gesamte Intensität auf der

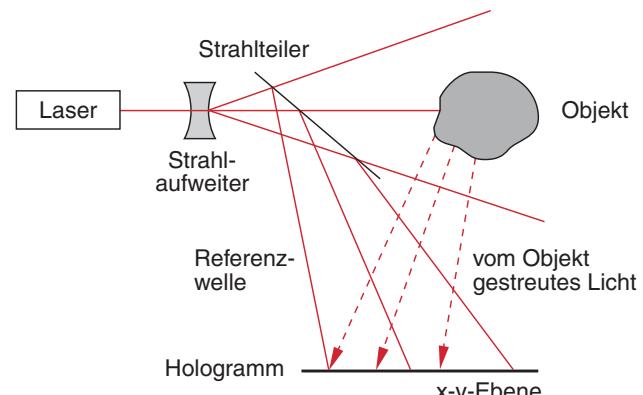


Abb. 12.14. Möglicher optischer Aufbau zur Aufnahme eines Hologramms

Photoplatte am Ort $\mathbf{r}_0 = \{x, y, 0\}$ ist dann

$$\begin{aligned} I(x, y) &= c\varepsilon_0 |E_s(x, y) + E_0(x, y)|^2 \\ &= c\varepsilon_0 \left| A_0^2 + A_s^2 + A_0^* A_s e^{i[k_0 \cdot \mathbf{r}_0 - \varphi_s(\mathbf{r}_0)]} \right. \\ &\quad \left. + A_0 A_s^* e^{-i[k_0 \cdot \mathbf{r}_0 - \varphi_s(\mathbf{r}_0)]} \right| \quad (12.3) \\ &= c\varepsilon_0 |A_0^2 + A_s^2 + 2A_0 A_s \cos(\varphi_0 - \varphi_s)|, \end{aligned}$$

wobei $\varphi_0 = \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}_0$ ist. Die von x und y abhängige Phasendifferenz $(\varphi_0 - \varphi_s)$ wird durch die optischen Wegdifferenzen zwischen Referenz- und Streuwelle bestimmt. Der phasenabhängige Interferenzterm in (12.3) enthält die gewünschte Information über die Entfernung der verschiedenen Objektpunkte von den Punkten (x, y) der Photoplatte.

BEISPIELE

- Das Objekt sei eine Ebene, die von einer ebenen Welle beleuchtet wird und diese reflektiert. Wir erhalten in der Ebene der Photoplatte $\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_0 = k_0 x \sin \alpha_1$, $\varphi_s = -k_0 x \sin \alpha_2 \Rightarrow (\varphi_0 - \varphi_s) = k_0 x (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$ (Abb. 12.15). Die Kosinusfunktion in (12.3) hat dann eine Periode von $\Delta x = \lambda / (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)$. Die Überlagerung von Referenz- und Objektwelle führt daher zu einer periodischen Intensitätsmodulation am Ort der

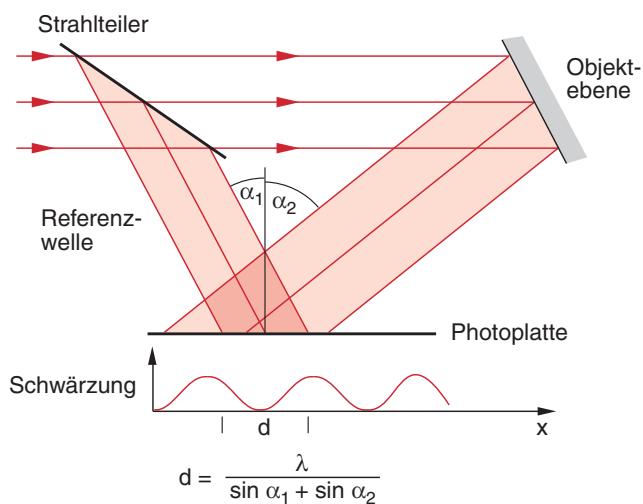


Abb. 12.15. Erzeugung eines holographischen Beugungsgitters durch Überlagerung zweier ebener Wellen, deren Wellenvektoren die Winkel α_1 und α_2 gegen die Normale zur Gitterebene haben

Photoplatte in x -Richtung mit einem räumlichen Abstand der Intensitätsmaxima

$$d = \frac{\lambda}{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2},$$

der von den Winkeln α_1, α_2 zwischen den Wellennormalen der beiden interferierenden Wellen und der Normale auf die Photoplatte abhängt. Auf der entwickelten Photoplatte entsteht daher ein periodisches Muster von Streifen mit einer sinusförmigen Schwärzungsmodulation.

Das so entstandene periodische Schwärzungsmuster kann als holographisches Transmissionsgitter mit dem Gitterabstand d verwendet werden. Beleuchtet man das Hologramm mit einer ebenen Welle vom Aufnahme-Laser, so erscheint bei richtiger Wahl des Winkels α als Beugungswelle des periodischen Gitters eine ebene Welle, die als Phasenfläche die Objektebene hat.

Wird die photoempfindliche Schicht so gewählt, dass z. B. die belichteten Stellen durch chemische Verfahren entfernt werden können, so lässt sich durch Ätzverfahren mit nachfolgender Beschichtung mit einer reflektierenden Schicht auch ein holographisches Reflexionsgitter herstellen. Diese Gitter sind fehlerfrei, was die Gitterkonstante d angeht. Sie haben jedoch den Nachteil, dass ihre Oberfläche sinusförmig moduliert ist im Gegensatz zu den geritzten Gittern, die eine treppenförmige Struktur haben. Das Reflexionsvermögen von holographischen Gittern ist daher geringer, und es gibt auch keinen Blazewinkel (siehe Abschn. 10.5.2).

- Eine ebene Welle wird mit einer Kugelwelle überlagert (Abb. 12.16). Das entstehende Hologramm zeigt ein ringförmiges Schwärzungsmuster und entspricht genau einer Fresnelschen Zonenplatte. Wird das entwickelte Hologramm mit einer ebenen Welle beleuchtet, so wird diese in einem Punkt P_0 fokussiert, der dem Zentrum der Kugelwelle bei Aufnahme des Hologramms entspricht.

Die Schwärzung der Photoplatte ist proportional zur auftretenden Intensität, wobei der Kontrast zwischen maximaler und minimaler Schwärzung von den Amplituden der beiden interferierenden Teilwellen abhängt.

Zur Erzielung eines ausreichenden Kontrastverhältnisses müssen die beiden Wellen jedoch nicht unbedingt die gleiche Amplitude haben. Ist z. B.

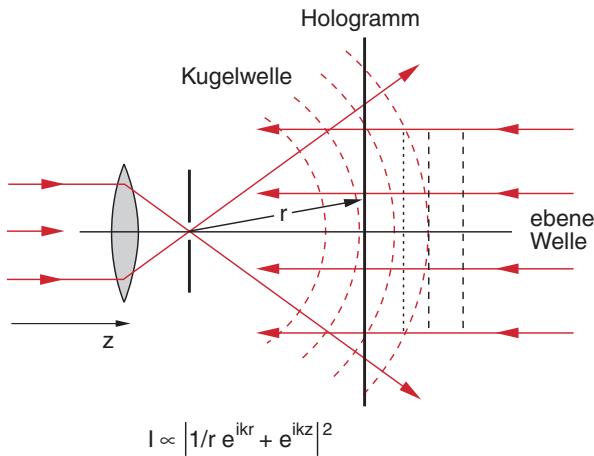


Abb. 12.16. Die Überlagerung einer ebenen Welle mit einer Kugelwelle gleicher Frequenz führt zu einer ringförmigen Intensitätsmodulation. Das dazugehörige Hologramm entspricht einer Fresnelschen Zonenplatte

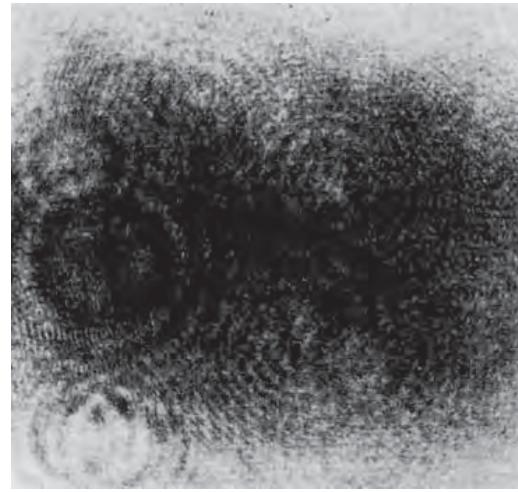


Abb. 12.17. Hologramm eines Schachbrettmusters [aus H. Nassenstein: Z. Angew. Physik 22, 37–50 (1966)]

die Intensität der Objektwelle nur 1% der Referenzintensität, so ist das Amplitudenverhältnis $E_s/E_r = 0,1$ und der *Kontrast* $K = I_{\max}/I_{\min} = (1,1/0,9)^2 = 1,5$.

Man beachte:

Während bei der üblichen Photographie einem jeden Punkt des Objektes ein wohldefinierter Bildpunkt auf der Photoplatte entspricht, wird bei der Erzeugung eines Hologramms die von einem Objektpunkt ausgehende Streuwelle über die gesamte Photoplatte verteilt.

Dies bedeutet, dass jedes Teilstück des Hologramms bereits Informationen über das gesamte Objekt enthält. Man kann z. B. ein Hologramm in zwei Teile zerschneiden. Aus jedem Teilstück lässt sich wieder ein dreidimensionales Bild des Objektes gewinnen, wenn auch mit etwas geringerer Qualität als aus dem ganzen Hologramm.

12.4.2 Die Rekonstruktion des Wellenfeldes

Um aus dem Hologramm, das die Informationen über das Objekt in „verschlüsselter“ Form enthält (Abb. 12.17), ein dreidimensionales Bild des Objek-

tes zu gewinnen, muss die belichtete Photoplatte nach ihrer Entwicklung mit einer kohärenten ebenen Rekonstruktionswelle

$$E_r = A_r \cdot e^{i(\omega t - k_r \cdot r)} \quad (12.4)$$

derselben Lichtfrequenz ω wie bei der Aufnahme des Hologramms beleuchtet werden (Abb. 12.18). Die durch das Hologramm transmittierte Amplitude

$$A_T = T(x, y) \cdot A_r \quad (12.5)$$

ist von der Schwärzung der Photoplatte bei der Aufnahme abhängig, die proportional zur Intensität (12.3) bei der Aufnahme des Hologramms ist. Die Transmission der entwickelten Platte ist

$$T(x, y) = T_0 - \gamma I(x, y) \quad (12.6)$$

(γ ist der Schwärzungskoeffizient der Photoplatte und $I(x, y)$ die auf das Hologramm bei der Belichtung auftreffende Intensität (12.3)), sodass die transmittierte Rekonstruktionswelle

$$E_T = T(x, y) \cdot A_r \cdot e^{i(\omega t - k_r r)}$$

die Amplitude

$$\begin{aligned} A_T &= A_r T_0 - \gamma A_r (A_0^2 + A_s^2) \\ &\quad - \gamma A_r A_0^* A_s e^{i(k_0 \cdot r_0 - \varphi_s)} \\ &\quad - \gamma A_r A_0 A_s^* e^{-i(k_0 \cdot r_0 - \varphi_s)} \end{aligned} \quad (12.7)$$

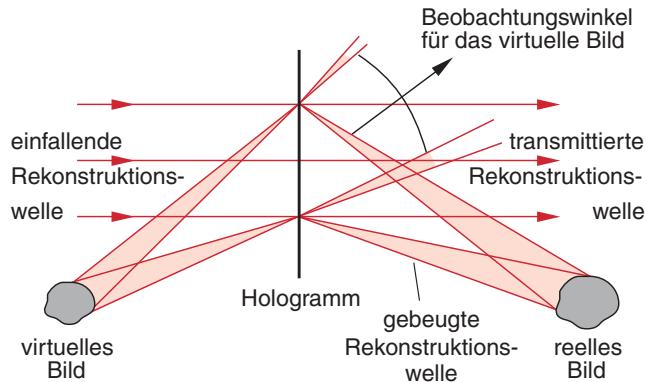


Abb. 12.18. Rekonstruktion des Hologramms

hat. Die ersten beiden Terme beschreiben eine von (x, y) unabhängige Schwächung der transmittierten Rekonstruktionswelle. Die letzten beiden Terme entsprechen neuen Wellen

$$\begin{aligned} E_{T_1} &= -\gamma A_0^* A_r A_s e^{i[\omega t - (\mathbf{k}_r - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_0 - \varphi_s]} \\ E_{T_2} &= -\gamma A_0 A_r A_s^* e^{i[\omega t - (\mathbf{k}_r + \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}_0 + \varphi_s]} \end{aligned} \quad (12.8)$$

deren Richtung durch den Wellenvektor $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_r - \mathbf{k}_0$ bzw. $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_r + \mathbf{k}_0$ gegeben ist. Man beachte, daß die Richtung dieser Wellen nicht identisch mit der auf das Hologramm auffallenden Rekonstruktionswelle sein muß. Die Rekonstruktionswelle wird an den Schwärzungsstrukturen des Hologramms, das wie ein Amplitudengitter wirkt, gebeugt.

Beide Wellen tragen Informationen über die Amplitude A_s und Phase φ_s der bei der Aufnahme verwendeten Streuwelle, da sie genau die Amplitude

$$E_s = A_s \cdot e^{i(\omega t - \varphi_s)} \quad \text{bzw.} \quad A_s^* \cdot e^{i(\omega t + \varphi_s)}$$

enthalten, die auch bei der Aufnahme des Hologramms vom Objekt auf die Photoplatte traf.

Wie man aus Abb. 12.18 sieht, treten zwei Bilder auf: ein virtuelles Bild, das der Welle E_{T_1} entspricht und das man beim Betrachten hinter dem Hologramm sieht, und ein reelles Bild, welches durch E_{T_2} erzeugt wird und das man auch auf einem Schirm, den man an den Ort dieses Bildes stellt, sichtbar machen kann (allerdings dann nur zweidimensional).

Schaut man durch das Hologramm gegen die Richtung einer dieser Wellen (12.8), so erscheint dem Auge das dreidimensionale Bild des Gegenstandes, wie er bei der Aufnahme des Hologramms vom Ort der Photoplatte aus zu sehen war [12.19, 20].

Anmerkung

Verwendet man für die Rekonstruktionswelle eine andere Wellenlänge λ_r als λ_s der Streuwelle, so erscheint das rekonstruierte Bild im Maßstab λ_r/λ_s vergrößert oder verkleinert.

12.4.3 Weißlichtholographie

Die weite populäre Verbreitung holographischer Bilder wurde durch die Entwicklung der Weißlichtholographie möglich, weil man hier zur *Rekonstruktion* der Bilder keinen Laser mehr braucht, sondern eine gewöhnliche inkohärente Lichtquelle (z.B. eine Glühlampe oder die Sonne) verwenden kann. Wie kann man das verstehen? Man muss zur *Erzeugung* eines Weißlichthologramms, für die man auch hier einen Laser braucht, eine spezielle Anordnung wählen (Abb. 12.19). Eine dünne Photoschicht (wenige μm dick) auf einem Glasträger, dessen Dicke groß ist gegen die Dicke der Photoschicht, wird von oben mit dem aufgeweiteten Strahl eines Lasers beleuchtet (Referenzwelle) und von unten mit dem vom Objekt zurückgestreuten Licht (Objektwelle).

In der Photoschicht entstehen dann durch die Überlagerung der intensiven ebenen Referenzwelle und

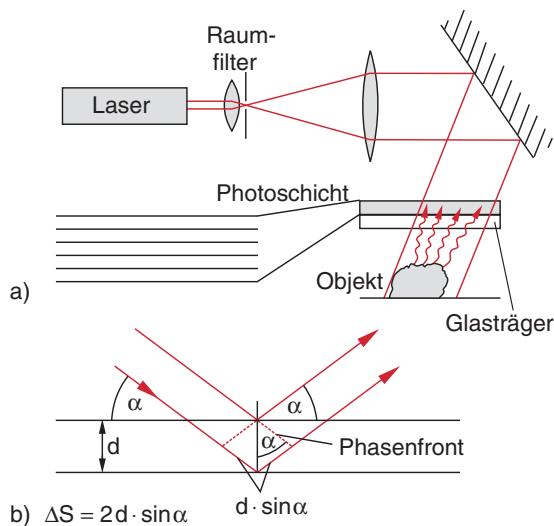


Abb. 12.19a,b. Weißlichtholographie: (a) Aufnahme des Hologramms, (b) Selektive Reflexion am entwickelten Hologramm durch Interferenz der an parallelen Schichten reflektierten Teilwellen

der schwächeren Objektwelle Interferenzmaxima und -minima, die im Wesentlichen parallel zur Oberfläche der Photoplatte verlaufen und zu einer Schichtstruktur der Schwärzung der Photoplatte führen (siehe z. B. Abb. 12.15). Bei einer Beleuchtungswellenlänge von $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ und einer Schichtdicke von $10 \mu\text{m}$ erhält man etwa 20 parallele geschwärzte Schichten, die den Interferenzschichten maximaler Intensität entsprechen.

Bei der Beleuchtung der entwickelten Photoplatte mit Licht der Wellenlänge λ wird das Licht an den einzelnen Schichten der Dicke d teilweise reflektiert und die verschiedenen reflektierten Teilbündel haben bei einem Einfallswinkel α gegen die Schichtebene und einem Abstand d zwischen den Ebenen den Wegunterschied (Abb. 12.19b) $\Delta s = 2d \cdot \sin \alpha$. Nur für solche Wellenlängen λ tritt konstruktive Interferenz auf, für die gilt:

$$2d \cdot \sin \alpha = m \cdot \lambda \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (12.9)$$

(Bragg-Bedingung). Das bei der Aufnahme des Hologramms erzielte Schichtgitter selektiert daher bei der Beleuchtung mit weißem Licht je nach Einfallswinkel α die passende Wellenlänge λ aus, sodass das rekonstruierte Objekt in der jeweiligen Wellenlänge λ entsprechenden Farbe erscheint. Ändert man den Einfallswinkel α , so ändert sich deshalb auch die Farbe.

12.4.4 Holographische Interferometrie

In den Abschnitten 10.3 und 10.4 wurden einige klassische Interferometer vorgestellt, die auf der Zweistrahlinterferenz bzw. der Vielstrahlinterferenz beruhten und mit denen sehr empfindlich sowohl kleine Änderungen Δs optischer Weglängen $s = n \cdot L$ gemessen werden konnten als auch Wellenlängen von Spektrallinien.

Die holographische Interferometrie erweitert die Möglichkeiten der klassischen Interferometer beträchtlich und lässt sich auf viele interessante Bereiche der Technik und auch der Biologie anwenden. Es gibt im Wesentlichen drei Verfahren [12.22]:

Beim Echtzeitverfahren wird von einem Objekt in Ruhe ein Hologramm aufgenommen. Die Hologrammplatte wird dann, ohne sie zu bewegen, am festen Ort der Aufnahme entwickelt und mit der Referenzwelle beleuchtet, sodass ein Hologrammbild wie in Abb. 12.18 erzeugt wird. Verändert man jetzt das Objekt, das am gleichen Ort bleibt, in der gewünschten

Weise (indem man es z. B. belastet oder erwärmt), so wird es sich nur sehr wenig ändern. Beleuchtet man es jetzt wieder genau wie bei der 1. Aufnahme des Hologramms, so werden sich diese Änderungen in Phasenverschiebungen der Signalwelle äußern. Die Überlagerung dieser Signalwelle vom veränderten Objekt mit der Rekonstruktionswelle vom Hologramm des unveränderten Objektes führt zu Interferenzstrukturen im holographischen Bild, die nur für diejenigen Teile des Objektes auftreten, die sich verändert haben. Auf diese Weise kann man Gestaltsänderungen feststellen, die wesentlich kleiner als eine Wellenlänge des beleuchtenden Lichtes sind. Zur Illustration zeigt Abb. 12.20a solche Interferenzstreifen, wie sie bei diesem Echtzeitverfahren beobachtet werden, wenn man ein Weinglas holographisch aufnimmt, das Hologramm entwickelt (dabei schrumpft die Filmschicht etwas) und es dann erneut beleuchtet und das holographische Bild mit der vom Hologramm erzeugten Rekonstruktion überlagert. Das rekonstruierte Bild ist aufgrund der Schrumpfung der Photoplatte etwas gedehnt, und die Überlagerung ergibt horizontale Interferenzstreifen. Füllt man jetzt das Glas mit Leuchtgas aus einem Feuerzeug, so bewirkt das aufsteigende Gas im Glas eine Änderung der Brechzahl, die sich als Verformung der Interferenzstreifen bemerkbar macht (Abb. 12.20b).

Beim Doppelbelichtungsverfahren wird ein Hologramm des Objektes vor der Änderung aufgenommen und dann bei feststehender Photoplatte noch mal nach der Änderung. Will man z. B. die Verformung einer Metallplatte beim Einwirken von Kräften messen, so wird ihr Hologramm vor der Verformung aufgenommen. Dann wird die Metallplatte, ohne sie aus ihrer Position zu entfernen, durch eine äußere Kraft verformt und wieder auf derselben Photoplate ein Hologramm des verformten Körpers aufgenommen (Doppelbelichtung der feststehenden Photoplate).

Die Streuwelle E_s von den verformten Stellen des Objekts hat bei der zweiten Belichtung des Hologramms eine andere Phase als bei der ersten Belichtung, sodass die Gesamtschwärzung des Hologramms von der Größe der Verformung abhängt. Zur Illustration ist in Abb. 12.21 das Doppelbelichtungshologramm einer Aluminiumplatte gezeigt, die durch die Membran eines Lautsprechers um wenige μm verformt wurde.

Ein weiteres Beispiel ist die in Abb. 12.22 gezeigte Glühbirne, von der einmal im eingeschalteten

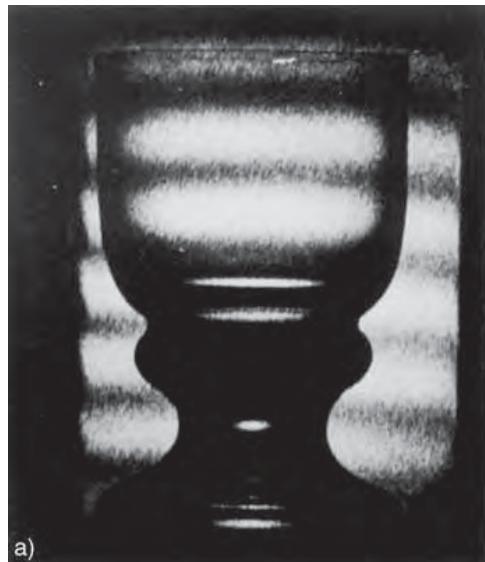


Abb. 12.20a,b. Echtzeit-holographische Interferometrie. (a) Interferenz zwischen originaler Objektwelle und vom Hologramm rekonstruierter Welle, (b) Veränderung der Interferenz durch Füllen des Glases mit Leuchtgas aus einem Feuerzeug



Abb. 12.21. Holographisches Interferogramm der Verformung einer Aluminiumscheibe. Das Hologramm wurde jeweils 15 s lang vor und nach der Verformung belichtet. (Dr. R. Lessing, Spindler & Hoyer, Göttingen) [12.21]

Zustand bei stromdurchflossenen Glühfaden ein Hologramm aufgenommen wurde und dann, wenige Sekunden später, im ausgeschalteten Zustand. Das rekonstruierte Doppelbelichtungshologramm zeigt die Konvektion des Füllgases über dem Glühfaden und die thermische Verformung des Glaskörpers. Der Streifenabstand entspricht einer Verformung um eine halbe Wellenlänge.

Bei periodisch schwingenden Objekten kann man eine Hologrammaufnahme machen, bei der die Belichtungsdauer lang ist gegen die Schwingungsperiode. Da sich das Objekt am längsten an den Umkehrpunkten

der Schwingung aufhält (dort ist die Geschwindigkeit der schwingenden Teile null), werden die während dieser Schwingungsphasen vom Objekt gestreuten Wellen



Abb. 12.22. Konvektionsströme oberhalb des Glühfadens einer Glühlampe und thermische Verformung des Glaskolbens. (Aus M. Cagnet, M. Francon, S. Mallick: *Atlas optischer Erscheinungen*, Ergänzungsband, Springer Berlin, Heidelberg 1971)

stärker zur Beleuchtung des Hologramms beitragen als die Positionen, in denen sich die Oberfläche schnell bewegt, und die deshalb nur kurzzeitig auftreten. Sie werden daher im Hologramm bei der Rekonstruktion stärker sichtbar. Wie schon in den Beispielen der vorigen Abschnitte (z. B. Abb. 12.21) deutlich wurde, werden das Schwingungsverhalten von Körpern, die Auslenkungsamplituden und die räumliche Verteilung der Schwingungsstrukturen durch holographische Interferometrie sichtbar gemacht, wobei auch noch Auslenkungen $\Delta s < \lambda/2$ deutlich nachgewiesen werden können.

12.4.5 Anwendungen der Holographie

Von den vielen möglichen und zum Teil bereits realisierten Anwendungen sollen hier, außer den bereits in den vorigen Abschnitten behandelten Beispielen nur wenige herausgegriffen werden:

Eine interessante Anwendung der Holographie benutzt die digitale Berechnung eines Hologramms für Objekte im Sollzustand. Ein solches im Rechner gespeichertes Hologramm kann dann in ein reales Hologramm auf eine Photoplatte (z. B. über den Ausgabedrucker auf eine Folie) übertragen werden. Die Überlagerung der Bilder, die auf einem solchen „digitalen“ Hologramm bei Beleuchtung mit der Auslesewelle erzeugt werden, mit dem holographischen Bild des realen Objektes lässt sofort (wie im vorigen Abschnitt diskutiert wurde) alle kleinen Abweichungen erkennen. So wird z. B. bei der Endpolitur eines großen Spiegels eines astronomischen Teleskops das Hologramm dieses Spiegels mit dem digital berechneten Hologramm der Sollfläche (ideales Rotationsparaboloid) überlagert, wodurch alle Stellen, an denen die reale Spiegeloberfläche von der Sollfläche abweicht, gleichzeitig sichtbar gemacht werden. Dies verkürzt den sonst sehr langwierigen Schleifprozess erheblich.

Anwendungen in der Autoindustrie sind z. B. holographische Doppelbelichtungsaufnahmen eines Autoreifens bei zwei verschiedenen Fülldrägen, aus denen sehr kleine Ausbeulungen aufgrund unterschiedlicher Reifenwandstärke sofort sichtbar werden.

Mithilfe der holographischen Interferometrie lässt sich die Wachstumsgeschwindigkeit von Pilzen innerhalb von wenigen Sekunden messen, indem man den Pilz mit dem Doppelbelichtungsverfahren zweimal holographisch aufnimmt und die Interferenzstreifen

ausmisst. So lässt sich z. B. die Nährstoffzufuhr bei Pilzkulturen optimieren.

Eine interessante Anwendung in der Medizin ist die holographische Vermessung des Kopfes von Personen. Vergleicht man das dadurch erhaltene dreidimensionale Bild mit einer Röntgenaufnahme des Schädels, so lässt sich durch Vergleich der beiden Aufnahmen die räumlich aufgelöste Struktur des Weichgewebes bestimmen. Erstellt man eine Kartei dieser Verteilung für bestimmte Gesichtstypen, so kann man bei Operationen von Missbildungen im Gesicht oder von Unfallverletzungen dem Chirurgen bildlich am Computer vor der Operation genau zeigen, welche Gesichtsveränderungen bestimmte Eingriffe in die Knochenstruktur bewirken, sodass er entscheiden kann, wie er am besten operieren sollte [12.25].

Von großer Bedeutung werden wahrscheinlich in Zukunft holographische Speicher sein, die nach den bisherigen Ergebnissen sehr große Informationsdichten haben werden, da man auf engem Raum viele Hologramme überlagern kann. Als Speichermaterial kommen z. B. ferroelektrische Kristalle in Frage. Durch das im Volumenhologramm herrschende elektrische Feld

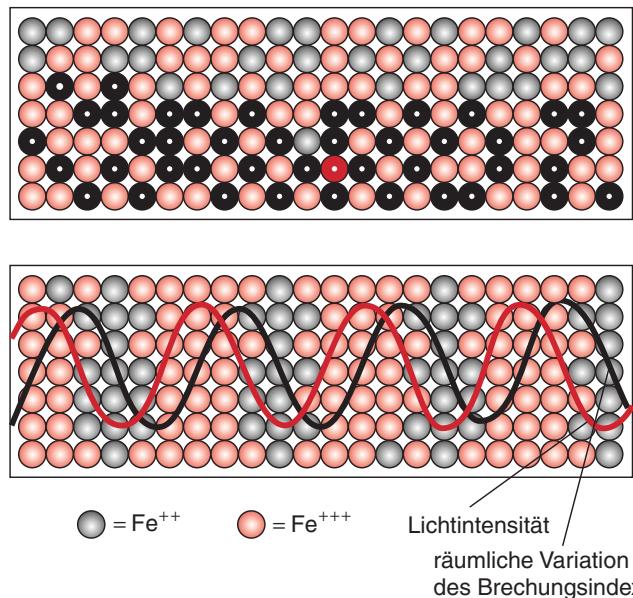


Abb. 12.23a,b. Holographischer Speicher in einem ferroelektrischen Kristall (LiNbO_3 mit Eisenionen Fe^{2+} bzw. Fe^{3+} dotiert). (a) vor und (b) nach der Belichtung. Die rote Kurve gibt die Lichtintensität, die schwarze den räumlichen Verlauf der Ladungsdichte an, die den Brechungsindex beeinflusst [nach Smith]

der Lichtwelle werden Ladungen verschoben, sodass das Hologramm hier nicht als Schwärzungsmuster einer Photoplatte, sondern als Raumladungsverteilung vorliegt, die zu einem räumlichen Brechungsindexmuster führt (Abb. 12.23). Solche Hologramme können dann wieder ausgelesen werden durch eine Referenzwelle [12.22–26].

Literatur:

Meschede - Optik, Licht und Laser

7 Laser

Der Laser hat sich zu einem wichtigen Instrument nicht nur in der physikalischen Forschung, sondern weit darüberhinaus in fast allen Bereichen des täglichen Lebens entwickelt. Mehr als 50 Jahre nach der experimentellen Realisierung des ersten Lasers kommt man kaum noch daran vorbei, ihn zu den wichtigsten Erfindungen des 20. Jahrhunderts zu zählen.

Wir wollen in diesem Kapitel die Funktionsprinzipien anhand besonders wichtiger Lasersysteme vorstellen. Im nächsten Kapitel geben wir eine Einführung in die theoretische Beschreibung ihrer wichtigsten physikalischen Eigenschaften, und den Halbleiterlasern ist ein eigenes Kapitel gewidmet, weil sie mit ihren kompakten, preisgünstig herstellenden Bauformen in besonderer Weise zur noch immer wachsenden Bedeutung des Lasers beitragen.

Laser = Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation

Das Wort *Laser* ist zu einem selbstständigen Begriff der Alltagssprache geworden. Es leitet sich aber von seinem historischen Vorgänger, dem *Maser* ab. Das englische Acronym (**Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation**) bedeutet soviel wie „Mikrowellen-Verstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung“

Natürliche Maser- und Laserquellen Wir wollen unter einem Laser grundsätzlich die Quelle eines intensiven, kohärenten Lichtfeldes verstehen. Laserlicht erscheint uns absolut artifiziell, und ganz sicher haben unsere Vorfahren niemals die Wirkung eines kohärenten Lichtstrahls erlebt.¹ Es gibt aber im Kosmos mehrere natürliche Quellen von kohärenter Strahlung, die i. Allg. zu langwellig sind, um noch als Laser zu gelten und daher als Maser identifiziert werden [126]. Sie kommen in der Nähe heißer Sterne vor, wo z.B. in molekularen Gasen Inversion erzeugt werden kann. Ein Beispiel mit relativ kurzer Wellenlänge ist das Wasserstoffgas, das die Umgebung eines Sterns mit

¹Interferenz- und Kohärenzphänomene lassen sich aber auch in unserer alltäglichen Umgebung beobachten. Man nehme ein Stück dünnen, feinen Stoff und beobachte hindurch entfernte, am besten farbige Lichter, zum Beispiel die Rücklichter eines Autos. Und das Funkeln der Sterne hat die Menschen zu allen Zeiten fasziniert!

dem Namen *MWC349* in der Cygnus-Konstellation umgibt und durch die UV-Strahlung des heißen Sterns zum Leuchten angeregt wird. Das scheibenförmig angeordnete Wasserstoff-Gas verstärkt die Fern-Infrarot-Strahlung des Sterns bei der Wellenlänge von $169 \mu\text{m}$ millionenfach, so daß es sich auf der Erde nachweisen läßt.

Allerdings herrschen im Weltall völlig andere Dichte- und Temperaturverhältnisse als unter irdischen Bedingungen. Unter den 130 heute bekannten kosmischen Maser- und Laser-Wellenlängen von 10 verschiedenen Molekülen werden nur zwei Linien im Labor beobachtet: Neben Vibrationsübergängen des HCN-Moleküls [149] interessanterweise gerade diejenige Linie des Ammoniak-Moleküls, mit der Townes und seine Mitarbeiter 1954 den ersten irdischen Maser betrieben [63]. Die Eigenschaften der kosmischen Maser und Laser liefern den Astronomen interessante Daten über die Dynamik großer Molekülwolken.

Laser-Verstärker und -Oszillatoren

Der Lasers hat historische Wurzeln in der Hochfrequenz- und der Gasentladungsphysik. Man hatte vom Maser gelernt, daß es möglich war, mit einem invertierten molekularen oder atomaren System einen Verstärker und Oszillator für elektromagnetische Strahlung zu konstruieren, und in einer berühmten Arbeit [148] hatten Arthur Schawlow und Charles Townes die Eigenschaften eines „optischen Masers“, der dann Laser genannt wurde, zunächst theoretisch vorhergesagt.

Die optischen Eigenschaften atomarer Gase waren schon lange in Entladungen studiert worden und man hatte auch die Frage gestellt, ob sich durch eine geeignete Situation eine Inversion und damit Lichtverstärkung erzielen ließe. So wird verständlich, daß der erste Dauerstrich-Laser mit einem überraschend komplizierten System, einem Gasgemisch aus Helium- und Neon-Atomen, im Jahr 1961 von dem amerikanischen Physiker Ali Javan [84] bei der infraroten Wellenlänge von $1,152 \mu\text{m}$ realisiert wurde.

Der Laser besitzt eine enge Analogie zu einem elektronischen Verstärker, der durch positive Rückkopplung zu Schwingungen angeregt wird, und dessen Oszillationsfrequenz durch den Frequenzgang von Verstärkung und Rückkopplung bestimmt wird (Abb. 7.1). Es ist bekannt, daß ein Verstärker mit positiver Rückkopplung schwingt, wenn die Verstärkung größer wird als die Verluste,

$$\text{Oszillationsbedingung: } \text{Verstärkung} \geq \text{Verluste} .$$

Die Amplitude wächst dann immer weiter an, bis die Verluste durch Auskopplung oder auch im Oszillatorkreis die Verstärkung gerade noch kompensieren. Die effektive Verstärkung sinkt und man spricht von „gesättigter Verstärkung“ (s. auch Abschn. 8.1.2).

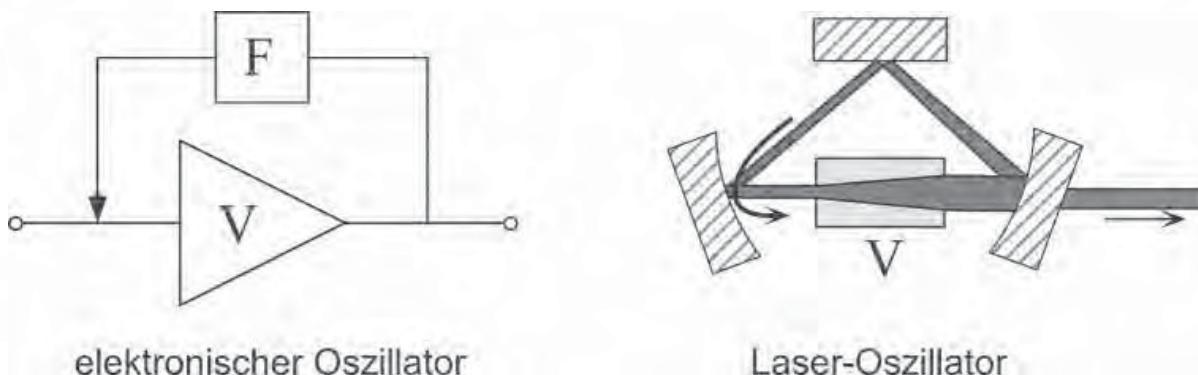


Abb. 7.1 Analogie zwischen einem Laser und einem elektronischen Verstärker (V), der durch Rückkopplung zum Oszillatator wird. Die Oszillatofrequenz kann zum Beispiel durch ein Filter (F) im Rückkoppelpfad selektiert werden.

Beim Laser wird Rückkopplung durch die Resonatorspiegel erzielt. Zur Verdeutlichung wurde ein Ringresonator mit drei Spiegeln gewählt. Sowohl das Verstärkungsmedium als auch die wellenlängenabhängige Reflektivität der Resonatorspiegel bestimmen die Laserfrequenz.

Wie wir aus dem Kapitel über Licht und Materie schon wissen, benötigen wir eine Inversion des Lasermediums, um Verstärkung einer Lichtwelle zu erzielen. Wenn der Verlustkoeffizient α_V heißt, muß die Bedingung konkret nach Gl.(6.50) lauten

$$\frac{N}{V} \sigma_Q \frac{-\Delta N_0/N}{1+I/I_0} > \alpha_V .$$

Im einfachsten Bild müssen sich dazu stets sehr viel mehr Atome im oberen angeregten Zustand als im unteren befinden ($\Delta N_0 > 0$). Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, erlöscht die Laseroszillation oder schwingt erst gar nicht an. Von einem idealen Laser wünscht man sich eine frequenzunabhängige, möglichst hohe Verstärkung. Weil aber solch ein System bis heute nicht gefunden worden ist, wird eine Vielzahl von Lasertypen verwendet. Die wichtigsten Varianten, die wir in Tab. 7.1 grob eingeteilt haben, wollen wir mit ihren technischen Konzepten, Stärken und Schwächen vorstellen.

Tab. 7.1 Lasertypen

	Gase	Flüssigkeiten	Festkörper
Festfrequenz	Neutralatome Ionen		Seltene-Erd-Ionen 3d-Ionen
Vielfrequenz	Moleküle		
Durchstimmbar		Farbstoffe	3d-Ionen, Halbleiter Farbzentren

7.1 Die Klassiker: Helium-Neon-Laser

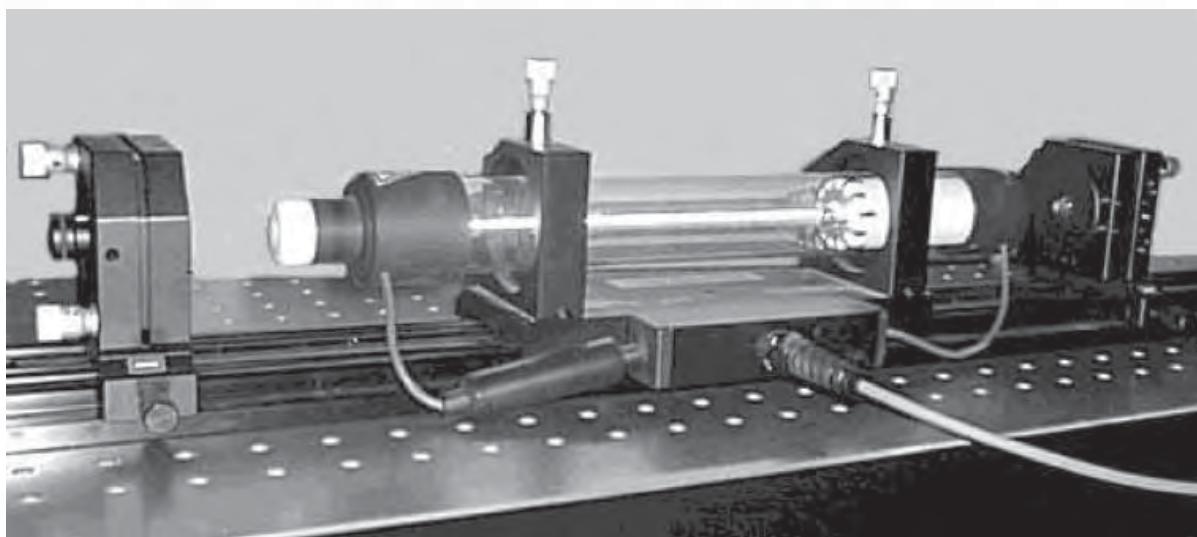


Abb. 7.2 Helium-Neon-Laser in offener, experimenteller Bauform. Der Strom wird der Entladungsrohre durch die beiden Kabel zugeführt. Resonatorspiegel und Laserrohr sind feinjustierbar gelagert.

Der Helium-Neon- oder kürzer HeNe-Laser hat bei der wissenschaftlichen Untersuchung der physikalischen Eigenschaften von Laserlichtquellen eine unübertroffene Rolle gespielt, beispielsweise bei der experimentellen Untersuchung der Kohärenzeigenschaften. Er ist schon deshalb der „Klassiker“ unter allen Lasersystemen. Wir wollen wichtige Lasereigenschaften an diesem System beispielhaft vorstellen.

7.1.1 Konstruktion

Der Helium-Neon-Laser bezieht seine Verstärkung aus einer Inversion in den metastabilen atomaren Anregungen des Neon-Atoms. (Das Leuchten der Neon-Atome ist uns auch von den sprichwörtlichen Neon-Röhren bekannt.)

Verstärker

In Abb. 7.3 sind die entscheidenden atomaren Niveaus mit einigen wichtigen Kenngrößen und ausgewählten Laserwellenlängen („Linien“) vorgestellt. Wir können den HeNe-Laser im Bild unabhängiger Atome gut verstehen, weil das Gasgemisch relativ dünn ist. Die Neon-Atome werden nicht direkt durch die Entladung angeregt, sondern durch Energieübertrag von Helium-Atomen, die durch Elektronenstoß in die metastabilen 1S_0 und 3S_1 -Niveaus angeregt werden. Das Neon-Atom besitzt eng benachbarte Energieniveaus, so daß resonante Stoßprozesse einen effizienten Energietransfer ermöglichen.

Die Anregung und der Laserübergang sind im HeNe-Laser auf zwei verschiedene atomare Systeme verteilt, was bei der Realisierung des wünschenswerten Vier-Niveau-System hilfreich ist. Allerdings gibt es ein Problem im unteren Laserniveau der Neon-Atome (Abb. 7.3), das ebenfalls metastabil ist und nicht durch strahlende Zerfälle entleert werden kann. In einem engen Entladungsrohr führen aber Wandstöße zu einer ausreichenden Entleerung des unteren Laserniveaus.

Betriebsbedingungen

Die Inversion kann nur in einem im Vergleich zur atmosphärischen Umgebung relativ dünnen Gasgemisch aufrecht erhalten werden. Der Helium-Druck p beträgt einige 10 mbar, das He:Ne Mischungsverhältnis ca. 10:1. Die Helium-Entladung wird bei einem Strom von mehreren mA und einer Spannung von 1 – 2 kV betrieben und brennt in einer Kapillarröhre (Abb. 7.4, Durchmesser $d \leq 1$ mm), an deren Wänden die metastabilen Neon-Atome (Abb. 7.3) durch Stoßrelaxation wieder in den Grundzustand zurückfallen und für einen weiteren Anregungszyklus zur Verfügung stehen.

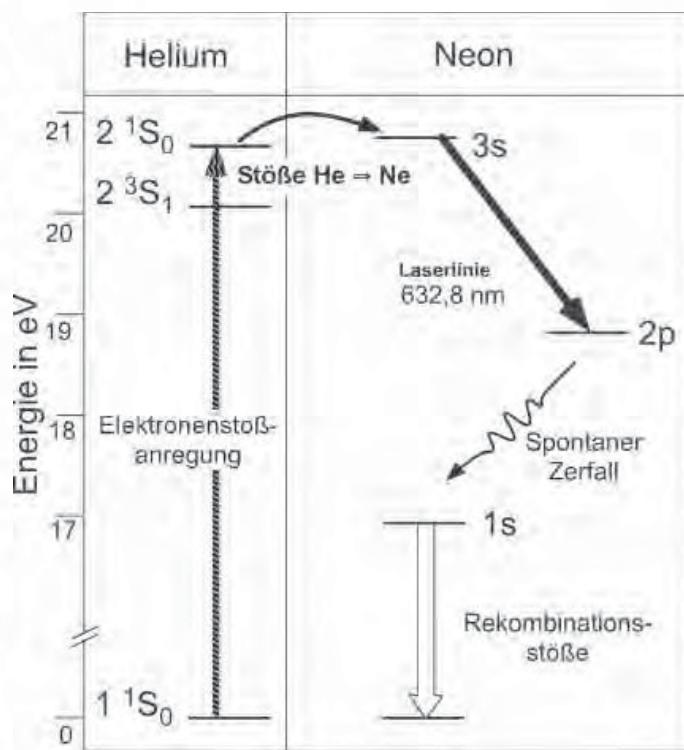


Abb. 7.3 Energieniveaus von Helium- und Neon-Atomen mit dem bekanntesten optischen Übergang bei 632,8 nm. Als Nomenklatur werden die spektroskopischen Bezeichnungen verwendet. Zu den Energieniveaus sind auch die Lebensdauern angegeben.

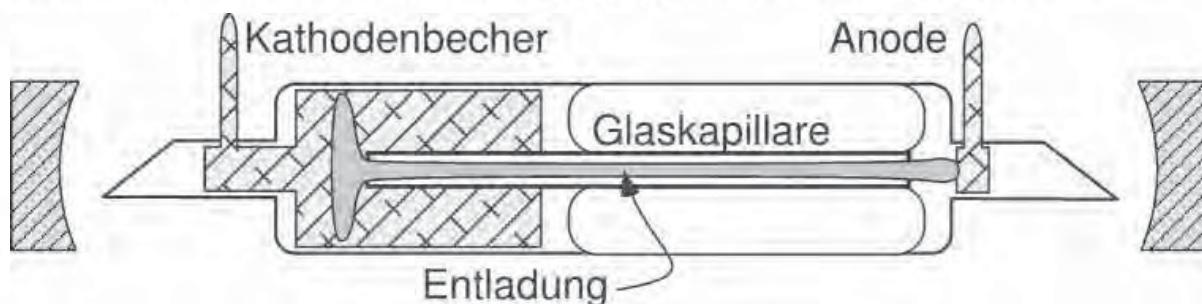


Abb. 7.4 Schematische Darstellung eines Helium-Neon-Laserrohrs. Der große Kathodenbecher verhindert die schnelle Abtragung durch die Entladung. Die Brewsterfenster an den Enden des Laserrohr verringern die Verluste an den Fenstern und legen die Laserpolarisation eindeutig fest.

Die Entladung wird mit einem Spannungspuls von 7 – 8 kV gezündet. Dieses Bauprinzip ist allen HeNe-Lasern gemeinsam, lediglich bei der Baulänge und beim Gasfülldruck gibt es je nach Anwendung geringe Unterschiede. Empirisch findet man optimale Verhältnisse für das Druck-Durchmesser-Produkt bei

$$p \cdot d \simeq 5 \text{ mbar} \cdot \text{mm}.$$

Die Ausgangsleistung kommerzieller HeNe-Laser variiert zwischen gerade noch augensicheren 0,5 mW und 50 mW. Sie hängt vom Entladungsstrom und der Rohrlänge ab, die beide nicht beliebig vergrößert werden können. Die Verstärkung ist proportional zur Dichte invertierter Neon-Atome. Diese erreicht aber schon bei wenigen 10 mA ihr Maximum, weil zunehmende Elektronenstöße die Atome wieder abregen. Die Rohrlänge lässt sich auch nicht wesentlich über $\ell = 1 \text{ m}$ steigern, weil einerseits der Durchmesser der Gaußmode mit zunehmendem Spiegelabstand wächst und nicht mehr in die Kapillare passt und weil andererseits die 3,34 μm -Linie bei größerer Baulänge auch ohne Spiegel als Superstrahler anschwingt und dann konkurrierenden Laserlinien Energie entzieht.

Laserresonator

Die Resonatorspiegel können in die Entladungsröhre integriert und schon bei der Fertigung endgültig justiert werden. Insbesondere für Experimentierzwecke wird ein externer Resonator mit manuell justierbaren Spiegeln verwendet und das Rohr mit Fenstern abgeschlossen. Im einfachsten Fall besteht der Resonator lediglich aus zwei (dielektrischen) Spiegeln und dem Entladungsrohr. Um Verluste zu vermeiden, werden die Fenster entweder entspiegelt oder als Brewster-Fenster geformt.

Beispiel: Strahlungsfeld im HeNe-Laserresonator.

Die Laserspiegel bestimmen die Geometrie des Laser-Strahlungsfeldes nach den Regeln der Gaußoptik (s. Abschn. 2.3): Sie müssen so gewählt werden, daß das invertierte Neon-Gas in der Kapillare möglichst optimal ausgenutzt wird. Für einen Laserresonator mit symmetrischem Resonator mit Spiegelradien $R = 100\text{cm}$ (Reflektivitäten 95% und 100%) und $\ell = 30 \text{ cm}$ Abstand erhält man für die rote 633 nm-Linie eine TEM₀₀-Mode mit den Parametern

Konfokaler Parameter:	$b = 2z_0 = 71 \text{ cm}$
Strahltaille:	$2w_0 = 0,55 \text{ mm}$
Divergenz:	$\Theta_{\text{div}} = 0,8 \text{ mrad}$
Leistung innen/außen	$P_i/P_a = 20\text{mW}/1\text{mW}$

Der Laserstrahl paßt im Resonator auf ganzer Länge problemlos in den typischen Querschnitt des Plasmarohrs von ca. 1 mm hinein, und auch in einer Entfernung von 10 m hat er erst einen Querschnitt von gut 4 mm.



5.8 Holographie

Zu den erstaunlichsten und attraktivsten Möglichkeiten der Optik zählen die Fähigkeit zur Bildwiedergabe, der wir schon ein ganzes Kapitel (4) gewidmet hatten. Unter den verschiedenen Methoden ruft im allgemeinen die Holographie (von griech. *holo*, Vorsilbe für ganz, unversehrt) das größte Erstaunen hervor. Die Attraktion geht von der vollständig dreidimensionalen Wiedergabe eines aufgezeichneten Objektes aus! Wir wollen uns hier auf die Vorstellung der interferometrischen Grundprinzipien der Holographie beschränken und verweisen für ein intensiveres Studium auf die Spezialliteratur [69].

5.8.1 Holographische Aufnahme

Bei der konventionellen Aufnahme eines Bildes, ob es nun noch mit einem almodischen Film oder mit einer modernen CCD-Kamera geschieht, wird stets die räumliche Intensitätsverteilung des Lichtes auf dem Film oder im Datenregister gespeichert. Bei einer holographischen Aufnahme werden stattdessen Amplitude und Phase des Lichtfeldes registriert, indem das vom Objekt gestreute Lichtfeld, die Signalwelle (Amplitudenverteilung $E_S(x, y) = 1/2\{\mathcal{E}_S(x, y)e^{-i\omega t} + c.c.\}$) mit einer kohärenten Referenzwelle überlagert wird,

$E_R(x, y) = 1/2\{\mathcal{E}_R(x, y)e^{-i\omega t} + c.c.\}$. Es handelt sich also um eine interferometrische Aufnahme eines Objektes, weil das Interferenzmuster die Bildinformation enthält!

Durch die Überlagerung von Bild- und Referenzwelle entsteht die Intensitätsverteilung

$$2I(x, y)/c\epsilon_0 = |E_S + E_R|^2 = |\mathcal{E}_S|^2 + |\mathcal{E}_R|^2 + \mathcal{E}_S \mathcal{E}_R^* + \mathcal{E}_S^* \mathcal{E}_R \quad (5.29)$$

Dabei haben wir schon angenommen, daß Signal- und Referenzwelle eine hinreichende, wohldefinierte Phasenbeziehung besitzen, weil sie zum Beispiel aus derselben kohärenten Lichtquelle stammen. Andernfalls wären die Mischterme unerwünschten zeitlichen Schwankungen unterworfen. Die Beleuchtungsstärke auf dem Filmmaterial – das gemeinhin nichtlineare Eigenschaften hat – wird so eingestellt, daß man einen linearen Zusammenhang zwischen der Transmission und der Intensitätsverteilung erreicht,

$$T(x, y) = T_0 + \tau I(x, y) \quad . \quad (5.30)$$

Die holographische Aufnahme wird heute, nachdem Laser mit großer Kohärenzlänge routinemäßig verfügbar sind, nach dem *offaxis*-Verfahren von Leith-Upatnieks hergestellt, das in Abb. 5.29 zu sehen ist.

Die historischen Experimente von D. Gabor wurden dagegen als *inline*- oder „Sichtlinien“-Hologramme gewonnen, weil dabei geringere Anforderungen an die Kohärenz der Lichtquelle gestellt werden. Die monochromatische Signallwelle breite sich in der Anordnung von Abb. 5.29 in z -Richtung aus, und die transversale Phasenverteilung $\phi(x, y)$ sei verursacht durch das beleuchtete Objekt,

$$E_S = \mathcal{E}_S e^{-i\omega t} e^{ik_z z} e^{i\phi(x, y)} \quad .$$

Die (nahezu) ebene Referenzwelle werde mit identischer Frequenz ω unter dem Winkel θ mit der z -Achse eingestrahlt. Der Wellenvektor k besitze die Komponenten $k_z = k \cos \theta$ und $k_y = k \sin \theta$

$$E_R = \mathcal{E}_R e^{-i\omega t} e^{ik_z z_0} e^{ik_y y} \quad .$$

In Anlehnung an Gl.(5.29) erhalten wir in der Ebene P mit $\phi_0 = k_z z_0$ die Intensitätsverteilung

$$I_P(x, y) = I_S + I_R + \{\mathcal{E}_S \mathcal{E}_R^* e^{i\phi_0} e^{-i(k_y y + \phi(x, y))} + c.c.\} \quad . \quad (5.31)$$

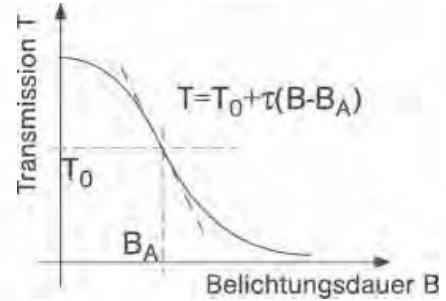


Abb. 5.28 Die Holographie nutzt den linearen Anteil in der Schwärzung des Filmmaterials.

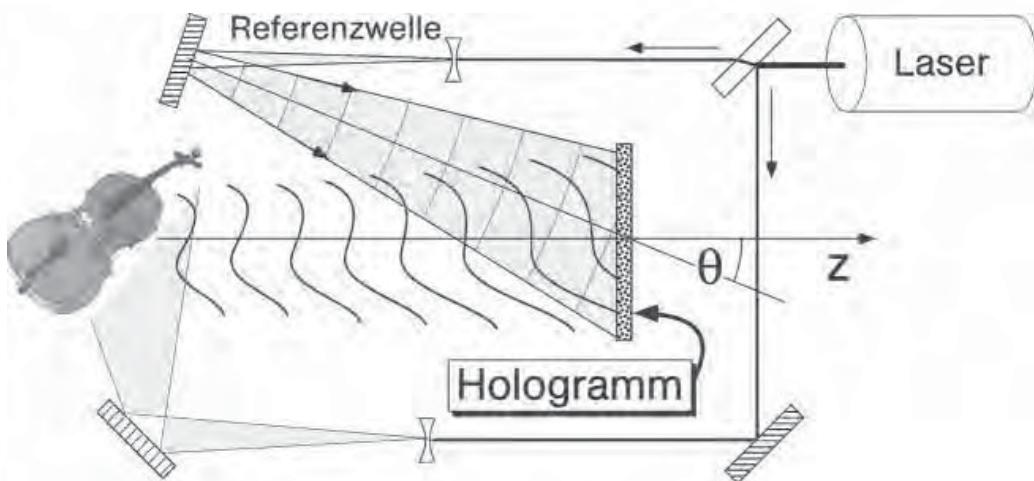


Abb. 5.29 Aufnahme eines Hologramms nach dem Leith-Upatnieks-Verfahren.

Alle Beiträge verursachen eine Schwärzung des Filmmaterials. Die Referenzwelle wird im allgemeinen in guter Näherung einer ebenen Welle entsprechen und deshalb eine gleichmäßige Schwärzung verursachen. Die Schwärzung durch die Signalwelle, die wir der Einfachheit halber mit konstanter Amplitude angenommen hatten, wird jedoch im allgemeinen eine inhomogene Intensitätsverteilung verursachen, weil von einem unregelmäßigen Objekt keine ebenen Wellenfronten ausgehen. Dieses Phänomen ist in anderem Zusammenhang auch als „Laser-Speckelmuster“ bekannt und wird in Abschn. 5.9 näher besprochen.

5.8.2 Holographische Wiedergabe

Die große Faszination der Holographie tritt erst bei der Wiedergabe zutage, denn der holographische Film – das „Hologramm“ – enthält für unser Auge keinerlei Information. Zur Rekonstruktion muß man lediglich das Objekt entfernen und das Hologramm allein mit der Referenzwelle beleuchten. Durch Beugung entstehen dann die Sekundärwellen aus Abb. 5.30. Formal können wir die Sekundärwellen gewinnen, indem wir die Feldverteilung E_{rek} der Rekonstruktion unmittelbar nach Durchtritt durch das Hologramm betrachten. Wir können vier unterschiedliche Beugungswellen U_0, U_0^H und $U_{\pm 1}$ angeben,

$$\begin{aligned} E_{rek} &= T(x, y)E_R \\ &= T_0 E_R + \tau E_R I_R + \tau E_R I_S + \tau |E_R|^2 E_S + \tau E_R^2 E_S^* \\ &= U_0(x, y) + U_0^H(x, y) + U_1(x, y) + U_{-1}(x, y) \end{aligned}$$

die wir im einzelnen betrachten wollen. Eigentlich ist es sehr kompliziert, das Beugungsfeld des komplizierten Hologramms zu bestimmen. Glücklicherweise können wir aber die einzelnen Beiträge gut mit bekannten Wellenformen identifizieren, die sich auf natürliche Weise aus der lokalen Feldverteilung fortsetzen.

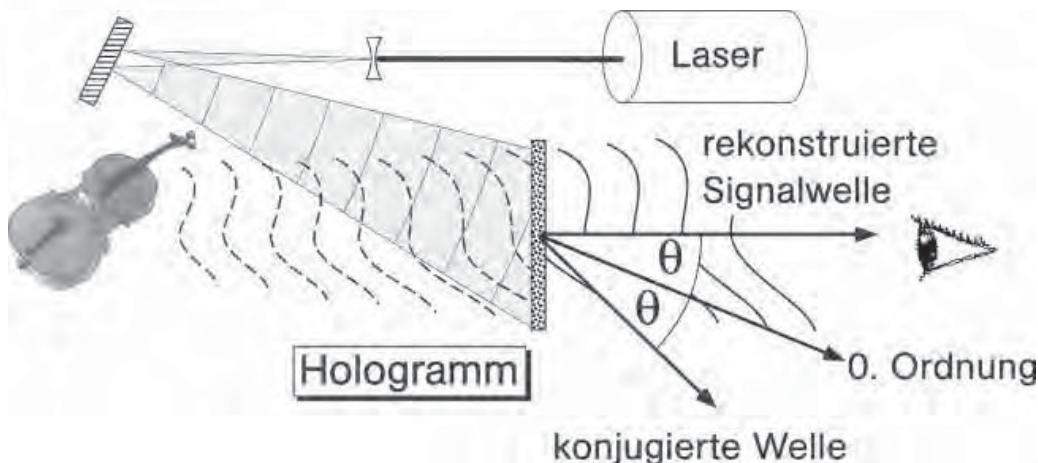


Abb. 5.30 Wiedergabe eines Hologramms mit Sekundärwellen (vgl. Abb. 5.29).

0. Ordnung

$$U_0(x, y) = (T_0 + \tau I_R) \mathcal{E}_R e^{-i\omega t} e^{i(k_y y + k_z z)}$$

In 0. Ordnung wird die einfallende Referenzwelle fortgesetzt und nur wegen der Abschwächung mit einem konstanten Faktor $(T_0 + \tau I_R) < 1$ multipliziert.

Halo

$$U_0^H(x, y) = \tau I_S \mathcal{E}_R(x, y) e^{-i\omega t} e^{i(k_y y + k_z z)}$$

Wie schon oben erwähnt, verursacht die Signalwelle eine im allgemeinen inhomogene Schwärzung. Die dadurch verursachte Sekundärwelle propagiert ebenfalls in 0. Ordnung, die Beugung am Speckelmuster führt aber zu einer Verbreiterung im Vergleich zur transmittierten Referenzwelle und wird gelegentlich als „Halo“ bezeichnet.

Rekonstruierte Signalwelle

$$U_1(x, y) = \tau \mathcal{E}_S e^{i\phi(x, y)} \mathcal{E}_R \mathcal{E}_R^* e^{-i\omega t} e^{ikz}$$

Offensichtlich ist mit diesem Beitrag bis auf einen konstanten Faktor genau die Signalwelle wiederhergestellt worden! Die rekonstruierte Signalwelle breitet sich in z -Richtung aus, was wir in Analogie zur Beugung am Gitter als 1. Ordnung bezeichnen wollen. Das virtuelle Bild enthält alle Informationen des rekonstruierten Objektes und kann deshalb – innerhalb des Lichtkegels – von allen Seiten betrachtet werden.

Konjugierte Welle

$$U_{-1}(x, y) = \tau \mathcal{E}_R^2 \mathcal{E}_S e^{-i\omega t} e^{-i\phi(x, y)} e^{i(2k_y y + (2k_z - k)z)}$$

In einem Vektordiagramm können wir die Ausbreitungsrichtung des konjugierten Strahls bestimmen. Für kleine Winkel $\theta = k_y/k_z$ gilt $2k_z - k \simeq k_z$ und $k_{conj}^2 = 4k_y^2 + (2k_z - k)^2 \simeq k^2$. Die Achse des konjugierten Strahls läuft daher unter dem Winkel 2θ zur z -Achse und verschwindet spätestens bei $\theta = \pi/4$. In der Schreibweise

$$U_{-1}(x, y) = \tau \mathcal{E}_R^2 \left(\mathcal{E}_S e^{i\phi(x, y)} \right)^* e^{-i(\omega t - k(\sin(2\theta)y + \cos(2\theta)z))}$$

wird die „phasenkonjugierte“ Form dieses Strahls im Vergleich zur Objektwelle deutlich. Physikalisch gesehen wird die Krümmung der Wellenfronten invertiert, die Welle läuft also scheinbar rückwärts in der Zeit. Wieder in Anlehnung an die Beugung am Gitter bezeichnet man diese Welle auch als die -1. Beugungsordnung.

Die drei interessierenden Sekundärwellen sind in Abb. 5.30 vorgestellt. Die gebeugten Strahlen lassen sich im Gegensatz zum Sichtlinienhologramm in der off-axis-Holographie geometrisch leicht trennen und beobachten.

5.8.3 Eigenschaften

Hologramme verfügen über einige faszinierende Eigenschaften, die hier aufgezählt werden sollen.

Räumliche Bildwiedergabe. Weil die vom Objekt ausgesandte Signalwelle rekonstruiert wird, erscheint auch das virtuelle Bild, das der Betrachter durch die holographische Platte hindurch sieht, in seiner Räumlichkeit, man kann hinter Kanten und Ecken blicken, falls denn eine Sichtverbindung im beleuchteten Bereich besteht.

Stückweise Rekonstruktion. Aus jedem Bruchstück eines Hologramms lässt sich das gesamte Objekt rekonstruieren. Das scheint zunächst widersprüchlich, wird aber in der Analogie zur Beugung am Gitter schnell klar: Auch dort werden an immer kleineren Bruchstücken stets dieselben Beugungsordnungen beobachtet. Allerdings nimmt die Breite der einzelnen Beugungsordnungen zu, d.h. die Auflösung des Gitters wird verringert, weil die Anzahl der ausgeleuchteten Spalte abnimmt. In ähnlicher Weise nimmt bei der Rekonstruktion aus einem holographischen Bruchstück die Auflösung ab, im Bild verschwinden die feineren Strukturen, während die Gesamtform der Signalwelle erhalten bleibt.

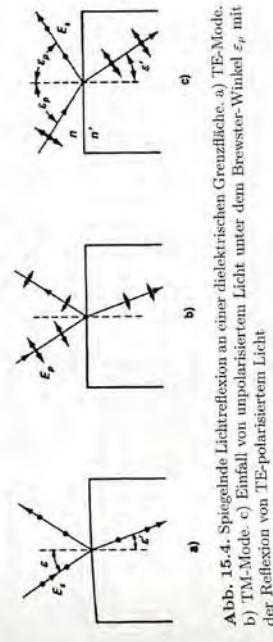
Vergrößerung. Wenn bei der Rekonstruktion einer Objektwelle Licht einer anderen Wellenlänge verwendet wird, dann ändert sich der Abbildungsmaßstab entsprechend.

1. Brewster-Winkel /2/

15.2 Polarisierung bei Reflexion an dielektrischen Oberflächen

425

An einer Oberfläche spiegelnd reflektiertes Licht ist – außer bei senkrechtem Einfall – zumindest teilweise polarisiert. Dies lässt sich am einfachsten beim Blick durch ein Polarisationsfilter beobachten, dessen Transmissionsschicht man um die Ausbreitungsrichtung des reflektierten Lichtes dreht. Hierbei stellt man ein Helligkeitsminimum fest, wenn die TA-Achse in der Ausfallsebene des Lichtes liegt. Dies wird bei polarisierenden Sonnenblenden ausgenutzt. Mit ihrer Hilfe soll das Untergestrand reflektierte und vornehmlich horizontal polarisierte Licht unterdrückt werden, folglich müssen die TA der Brillengläser vertikal stehen.



Zum physikalischen Verständnis des Vorgangs ist in Abb. 15.4 eine ebene dielektrische Oberfläche gezeichnet, auf die ein Lichtstrahl unter beliebigem Winkel einfällt. Die einfallende unpolarisierte Welle lässt sich in zwei zueinander senkrecht polarisierte Anteile zerlegen, deren \vec{E} -Vektoren senkrecht (E_s , s. Abb. 15.4 a) und parallel (E_p , s. Abb. 15.4 b) zu der durch die Einfall- und Normalenrichtung festgelegten Einfallsebene stehen. Man spricht hier von s- und p-Polarisation oder TE- (transversal elektrisch) und TM-Wellen (transversal magnetisch). (\vec{E} und \vec{B} stehen senkrecht, so dass \vec{E} in der Ebene liegt, wenn \vec{B} dazu senkrecht orientiert ist.)

Die Komponente E_s , die TE-Welle (s. Abb. 15.4 a), regt die Elektronen an der Oberfläche des Dielektrikums zu erzeugenden Schwingungen parallel zur Grenzfläche an. Sie strahlen dann als Dipolschwingende Elementarwellen ab, die lediglich in zwei Richtungen – die des reflektierten und die des gebrochenen Strahles – konstruktiv interferieren und weiterliniert sind. Eine Ebene liegt hierbei immer senkrecht zur Schwingungsrichtung der influenzierten Dipole und damit in einer Richtung, in die ein Hertzscher Dipol maximal

426 15 Erzeugung von polarisiertem Licht

strahlt (s. Abb. 15.7). Im Gegensatz hierzu tritt bei der TM-Welle (Komponente E_p , s. Abb. 15.4 b) ein mit veränderlicher Winkel ϵ zwischen den Schwingungsrichtungen der Hertzschénen Dipole des gebrochenen Strahls und der Ausbreitungsrichtung der reflektierten Welle auf. Da die Strahlintensität eines Dipoles mit diesem Winkel variiert ($I \sim \sin^2 \alpha_d$, s. (15.6)), werden TE- und TM-Wellen mit unterschiedlicher Intensität abgestrahlt, und das reflektierte Licht ist teilpolarisiert. Für den Grenzfall, dass α_d Null wird, dass also Dipolachse und Richtung der reflektierten Welle übereinstimmen und damit reflektierter und gebrochener Strahl senkrecht aufeinander stehen ($\epsilon + \epsilon' = 90^\circ$), tritt überhaupt keine Abstrahlung der Dipole in Reflexionsrichtung auf (s. Abb. 15.4 c). Es verbleibt nur die TE-Welle und das reflektierte Licht ist vollständig polarisiert. Der Einfallswinkel ϵ_p , unter dem das reflektierte Licht zu 100% TE-polarisiert ist, wird als *Brewster-Winkel* bezeichnet. Nach dem Brechungsgesetz ist:

$$n \sin \epsilon_p = n' \sin \epsilon' \quad (15.3)$$

Da der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen steht, muss gelten: $\epsilon' = 90^\circ - \epsilon_p$. Damit erhalten wir aus (15.3) (unter Verwendung von $\sin(90^\circ - \epsilon_p) = \cos \epsilon$) für den

$$\text{Brewster-Winkel} \quad \epsilon_p = \arctan \left(\frac{n'}{n} \right) \quad (15.4)$$

Brewster-Winkel treten sowohl beim Übergang von optisch dünner nach dicker (n') als auch im umgekehrten Fall auf und sind für diese beiden Fälle verschieden. Beim Übergang Luft → Glas ($n' \approx 1.5$) ist z.B. $\epsilon_p = 56.3^\circ$, für die umgekehrte Richtung gilt hingegen $\epsilon_p = 33.7^\circ$. Wegen (15.4) und der allgemeinen Beziehung $\tan \alpha = 1 / \tan(90^\circ - \alpha)$ sind ϵ_p und ϵ_p' komplementär, d.h. $\epsilon_p + \epsilon_p' = 90^\circ$.

Die Erzeugung polarisierten Lichtes durch Reflexion ist ziemlich ineffizient, da z.B. bei einem Luft-Glas-Übergang nur 15% der Intensität der TE-Komponente (also 7.5% des einfallenden Lichtes) reflektiert werden (s. Fresnel'sche Formeln, Kap. 20). Dem kann durch Stapelung einzelner Platten (*Glasplättensatz*) begegnet werden (s. Abb. 15.5). Solche Polarisatoren sind im sichtbaren Spektralbereich bedeutungslos, werden aber bisweilen im Ultravioletten und Infrarot eingesetzt. Statt einzelner Platten lassen sich – auch im Sichtbaren – vorteilhaft dielektrische Vielfachschichten (s. Kap. 19) verwenden, die als polarisationsempfindliche Reflektoren, Strahlenteiler (polarizing beam splitter) und Durchlassfilter Anwendung finden.

Eine andere interessante Anwendung ist das *Brewster-Fenster*, das in gleicher Weise wie eine Einzoplatté eines Plattensatzes arbeitet (s. Abb. 15.6). Linear TM-polarisiertes Licht fällt unter dem Brewster-Winkel ϵ_p auf die obere Fläche und wird vollständig durchgelassen, da es aber auch auf die untere Fläche unter

427 15.2 Polarisierung bei Reflexion an dielektrischen Oberflächen

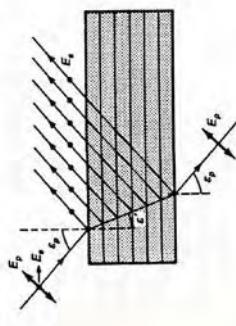


Abb. 15.2 Polarisierung bei Reflexion an dielektrischen Oberflächen

427 15.2 Polarisierung bei Reflexion an dielektrischen Oberflächen

dem Brewster-Winkel ϵ_p trifft, arbeitet die Platte als perfektes Fenster mit 100% Durchlässigkeit.

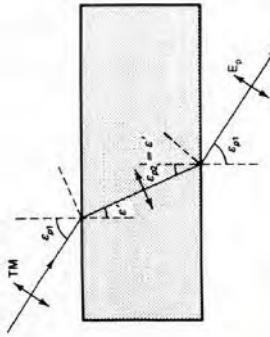


Abb. 15.5. Plattenstapel als Polarisator

Das aktive Medium eines Lasers befindet sich häufig zwischen zwei Brewster-Fenstern, die Spiegel des Resonators liegen außerhalb. Da bei jedem der zahlreichen Durchgänge des Lichtes durch die Brewster-Fenster TM-Wellen zu 100% TE-Wellen aber nur teilweise durchgelassen werden, wird die TE-Welle so stark unterdrückt, dass das austretende Laserlicht TM-polarisiert ist.

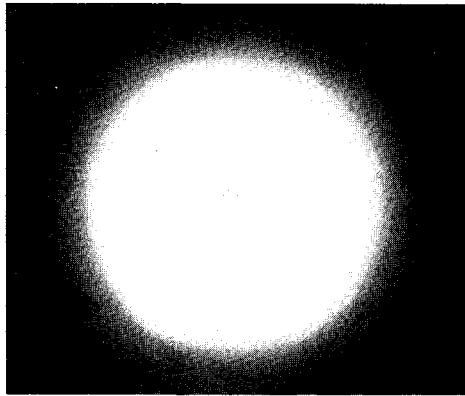


Bild 2 TEM_{10} (ax. sym.)

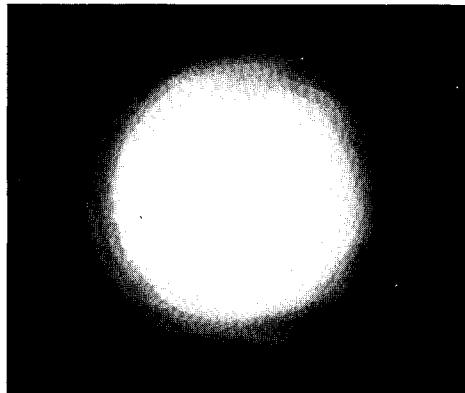


Bild 3 TEM_{00}

Ein reiner TEM_{00} -Mode läßt sich jedoch jederzeit einstellen. Man dreht eine Justierschraube des Auskoppelspiegels ($R = 98\%$) solange, bis sich die gewünschte Schwingungsform einstellt.

Durch Aufweiten des Laserstrahls mit einer Linse, z.B. Plankonvex-Linse $f = 30 \text{ mm} 063042$, lassen sich die TEM-Moden leicht beobachten (siehe auch Versuch Nr. 18).

Insbesondere bei den Beugungsversuchen ist darauf zu achten, daß der Laser in einen reinen TEM_{00} -Mode schwingt, da man dann sehr scharfe Beugungsbilder erhält.

Versuchsbeschreibungen

1

Versuch zur Erläuterung Fresnelscher Zonen

Nach dem Huygensschen Prinzip (Christian Huygens, 1629 bis 1695) kann jeder Punkt einer Wellenfläche (Flächen gleicher Phase) als Quellpunkt einer von ihm ausgehenden Kugelwelle, einer sogenannten Elementarwelle, aufgefaßt werden. Die so entstehenden unendlich vielen Elementarwellen überlagern sich bei ihrer weiteren Ausbreitung und interferieren miteinander, wobei sie als neue Wellenflächen gerade die Wellenflächen der ursprünglichen Kugelwelle ergeben. J. A. Fresnel (1788 bis 1827) benutzte dieses Prinzip, um die Lichtverteilung hinter einer kreisförmigen Öffnung zu bestimmen, die von einer auf der Mittelsenkrechten vor ihr befindlichen punktförmigen Lichtquelle erzeugt wird. Bild 4 zeigt die Sachlage:

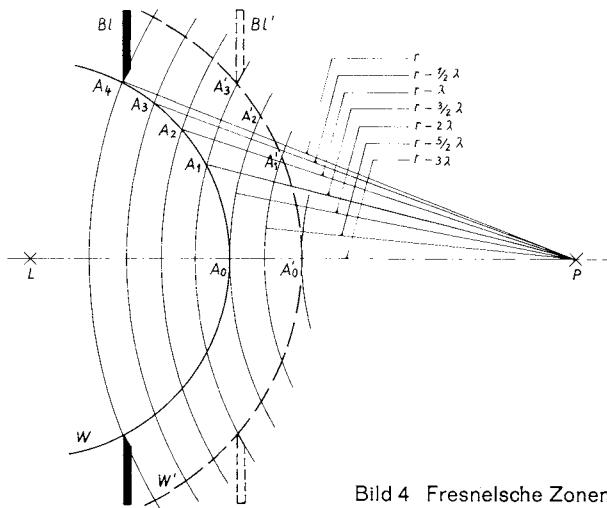


Bild 4 Fresnelsche Zonen

Fresnel teilte den innerhalb der Blende B_1 liegenden Teil der Wellenfläche W in Zonen $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ auf, deren Abstand von einem beliebigen Punkt P sich von Zone zu Zone (beginnend bei A_0) um eine halbe Wellenlänge des verwendeten Lichtes verlängert. Ist die Blende nun so groß, daß eine gerade Zahl von Zonen zur Wirkung kommt, so herrscht im Punkt P Dunkelheit, weil sich die Elementarwellen dieser Zonen wegen des Gangunterschiedes einer halben Wellenlänge von Zone zu Zone durch Interferenz im Punkte P auslöschen.

Verschiebt man nun die Blende B_1 nach B_1' , so daß eine ungerade Zahl von Zonen für die neue Wellenfläche W' zur Wirkung kommt, dann herrscht im Punkt P Helligkeit, da die Interferenz der Elementarwellen im Punkte P keine vollständige Auslöschung ergibt.

Diese Überlegungen treffen natürlich auch für alle Punkte zu, die seitlich von der Achse liegen. Das Ergebnis ist ein konzentrisches Ringsystem um den Punkt P . Verschiebt man die Blende in Achsenrichtung, dann wird die Mitte dieses Ringsystems (Punkt P) abwechselnd hell und dunkel; das gleiche erreicht man durch Öffnen und Schließen einer verstellbaren Blende, z.B. einer Irisblende.

Bild 5 zeigt das Versuchsergebnis für eine Blende, die derart plaziert wurde, daß eine gerade Zahl von Zonen zur Wirkung kommt. Das Zentrum des konzentrischen Ringsystems ist dunkel.

Bild 6 zeigt die Wirkung von einer ungeraden Zahl von Fresnelschen Zonen; das Ergebnis ist eine helle Mitte im Ringsystem.

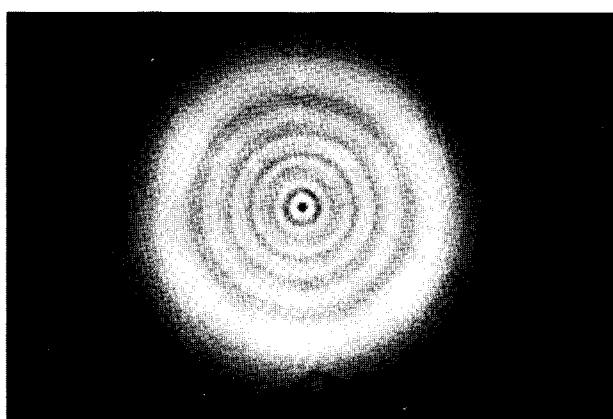


Bild 5

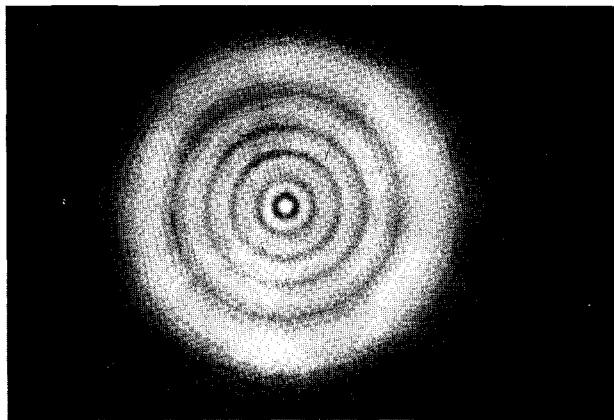


Bild 6

Versuchsaufbau:

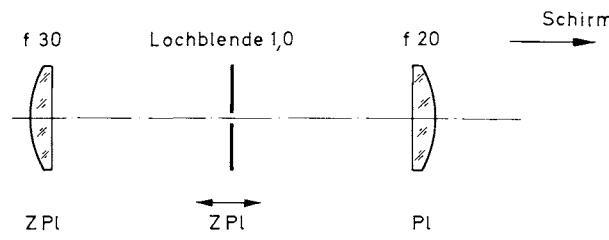


Bild 7

2

Beugung an einer Kante

Läßt man Licht auf den Rand eines Schirmes fallen, erhält man keinen scharfen Schatten hinter dem Schirm. Der Raum außerhalb des geometrischen Schattens ist von hellen und dunklen Streifen parallel zur Kante des Schirmes durchzogen. Das Licht wird an der Kante abgebeugt, und einzelne Lichtbündel interferieren miteinander. Für den Abstand der dunklen Streifen außerhalb des geometrischen Schattens gilt:

$$x_k = \sqrt{E \lambda \left(k - \frac{1}{4} \right)} \quad (k = 2, 4, 6, \dots)$$

Darin bedeutet E die Entfernung von der Kante bis zur Beobachtungsebene und λ die Wellenlänge des Laserlichtes (633 nm).

Innerhalb der Schattengrenze ist der Abstand der Interferenzstreifen enger, und der Intensitätsunterschied zwischen Helligkeit und Dunkelheit vermindert sich sehr viel rascher.

Bild 8 zeigt die mit einer Linse $f = 30$ mm vergrößerte Beugungsfigur einer Kante.

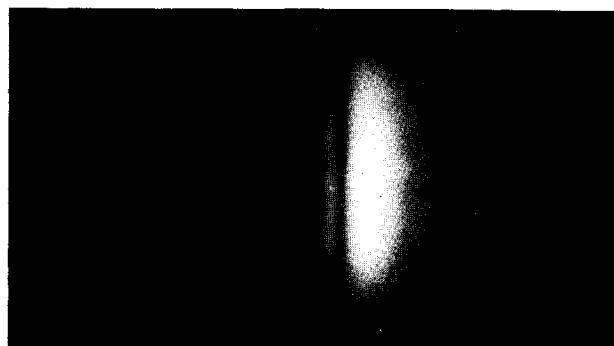


Bild 8

Versuchsaufbau:

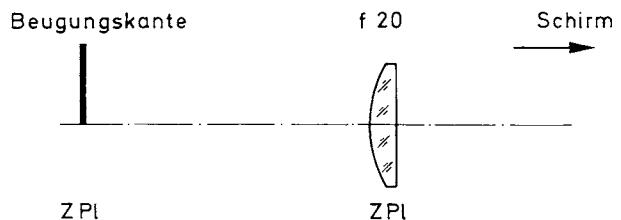


Bild 9

3

Beugung am Einfachspalt

Wird ein Spalt kohärent beleuchtet, dann breitet sich das Licht hinter dem Spalt nicht geradlinig in der ursprünglichen Einfallrichtung senkrecht zum Spalt aus, sondern als Folge der Beugung nach allen Richtungen. Nach dem Huygens-Fresnelschen Prinzip gehen von jedem Punkt der Beugungsöffnung Sekundärwellen aus. Diese interferieren miteinander.

Mit der folgenden Gleichung kann man die Intensität I_α in jeder beliebigen Richtung bestimmen:

$$I_\alpha = b^2 \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right)^2}$$

Darin bedeuten b = Spaltbreite; α = Beugungswinkel; λ = Wellenlänge des verwendeten Lichtes.

Es sollen nun die Beugungswinkel α_k bestimmt werden, für die ein Intensitätsminimum besteht. Die Nullstellen des Zählers der obigen Gleichung geben die Lage dieser Minima an:

$$\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha \right) = 0$$

Diese Bedingung wird erfüllt für $\sin \alpha_k = \frac{k \lambda}{b}$ ($k = 1; 2; 3; \dots$). $k = 0$ muß gesondert behandelt werden, da sich für $I_\alpha = b^2 \cdot \frac{0}{0}$, also ein unbestimmter Ausdruck errechnet. Die Lösung ergibt sich durch zweimalige Differentiation von Zähler und Nenner, wenn für $\frac{b}{\lambda} \sin \alpha = \varphi$ gesetzt wird:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\pi \varphi)}{\pi^2 \varphi^2} = \frac{\pi \cos^2(\pi \varphi) - \pi \sin^2(\pi \varphi)}{\pi} = 1$$

Damit wird für unabgelenkte Strahlen ($\sin \alpha_0 = 0$) $I_0 = b^2$, der größte Intensitätswert, der auftreten kann. Die Maxima der Helligkeit liegen nicht genau an den Stellen, wo der Zähler seine Maxima hat, da die Variable ja auch im Nenner steht. Die Abweichungen sind aber nicht sehr groß, so daß man für die entsprechenden Beugungswinkel α'_k angenähert schreiben kann:

$$\sin^2 \left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin \alpha' \right) = 1$$

Diese Gleichung wird erfüllt für

$$\frac{\pi b}{\lambda} \cdot \sin \alpha'_k = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}, \dots$$

oder allgemein geschrieben:

$$\sin \alpha'_k = -\frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{b} \quad (k = 1; 2; 3; \dots)$$

Die aufeinanderfolgenden Minima sowie die Maxima haben einen in Einheiten von $\sin \alpha$ konstanten Abstand von $\frac{\lambda}{b}$. Nur der Abstand der beiden Minima erster Ordnung rechts und links beträgt das Doppelte, nämlich $\frac{2\lambda}{b}$, weil das Minimum für $k = 0$ ausfällt. Demnach hat das zentrale Helligkeitsmaximum die doppelte Breite wie die übrigen Maxima. Mit kleiner werdender Spaltbreite b wird der Abstand der Minima und Maxima größer, da b im Nenner steht.

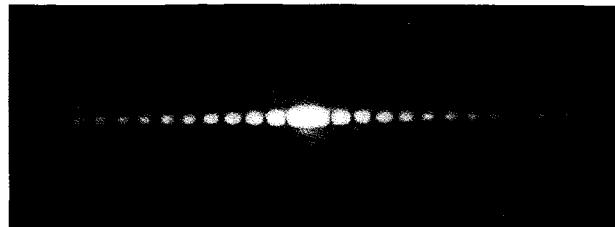


Bild 10 Beugung am Spalt 0.4 mm

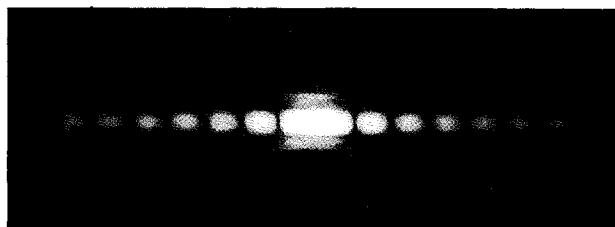


Bild 11 Beugung am Spalt 0.3 mm

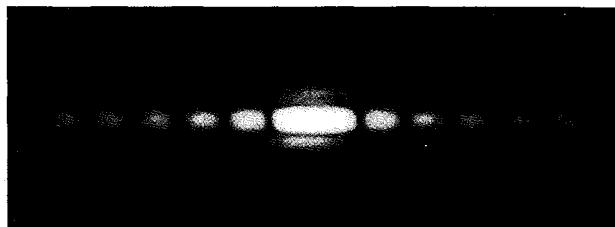


Bild 12 Beugung am Spalt 0.2 mm

Die Beugungerscheinung wird also mit größer werdender Öffnung sowie mit kleiner werdender Wellenlänge schwächer. Für die Extremwerte $b = \infty$ oder $\lambda = 0$ würde überhaupt keine Beugung stattfinden, d. h. die Gesetze der geometrischen Optik würden in Strenge gelten. Daß diese in vielen Fällen wenigstens angenähert gelten, liegt an der Kleinheit der verwendeten Lichtwellenlänge. Je mehr man jedoch zu längeren Wellenlängen übergeht, desto stärker werden die Abweichungen von der geometrischen Optik und desto sorgfältiger müssen die Gesetze der Wellenoptik berücksichtigt werden.

Aus den oben genannten Beziehungen läßt sich bei bekannter Spaltbreite und durch Ausmessen des Beugungswinkels die Wellenlänge des verwendeten Lichtes bestimmen.

Versuchsaufbau:



Bild 13

Die Linsen $f = 150$ mm und $f = 20$ oder 30 mm bilden zusammen ein Abbildungsfernrohr, mit dem die Beugungerscheinungen auf einem weißen Schirm vergrößert abgebildet werden können. Die Scharfeinstellung des Fernrohres erfolgt ohne Beugungsobjekt und ist dann erreicht, wenn auf dem Schirm ein vergrößerter Lichtfleck mit kleinstmöglichem Durchmesser erscheint. Zweckmäßigerweise schiebt man die Linse $f = 20$ mm oder 30 mm bis zum Ende der Führungsstangen und verschiebt die Linse $f = 150$ mm zur Scharfeinstellung.

4

Babinet'sches Theorem; Beugung am Draht

Durch die Beugung am Spalt wird außerhalb des Zentralbildes eine bestimmte Amplitudenverteilung der Lichtwellen erzeugt. Ersetzt man den Spalt durch einen Draht, dessen Durchmesser gleich der Spaltbreite ist, so liefert dieser außerhalb des geometrischen Schattens eine Amplitudenverteilung, die der durch den Spalt erzeugten genau entgegengesetzt ist.

Die beiden Beugungerscheinungen müssen sich nämlich kompensieren, wenn man den Beugungsspalt bzw. den Beugungsdraht fortnimmt. Es herrscht also außerhalb des Zentralbildes auf dem Schirm Dunkelheit.

In beiden Beugungerscheinungen ist die Intensitätsverteilung identisch. Dies gilt nicht nur für Spalt und Draht, sondern auch für andere Objekte: Komplementäre Schirme, d. h. Schirme, bei denen Öffnungen und undurchsichtige Partien vertauscht sind, liefern bei Fraunhofer-Beugung (im parallelen Licht) außerhalb des Bereiches der geometrischen Abbildung die gleichen Beugungerscheinungen.

Dieses Theorem wurde zuerst von A. Babinet (1837) ausgesprochen und nach ihm benannt.

Bild 16 zeigt den Vergleich der Beugung am Draht mit der Beugung am Spalt. Das Verhältnis der Spaltbreite b zur Drahtstärke d beträgt:

$$b : d = 1 : 1$$

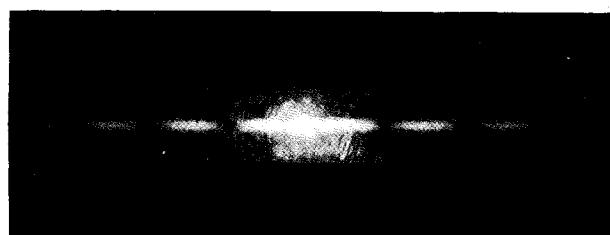


Bild 14 Beugung am Draht 0.1 mm

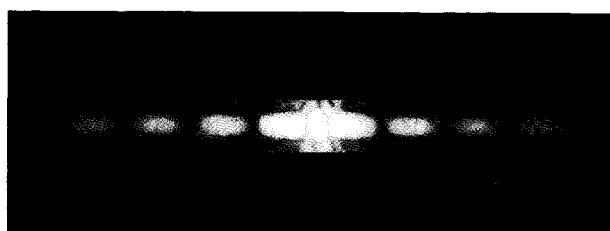


Bild 15 Beugung am Draht 0.2 mm

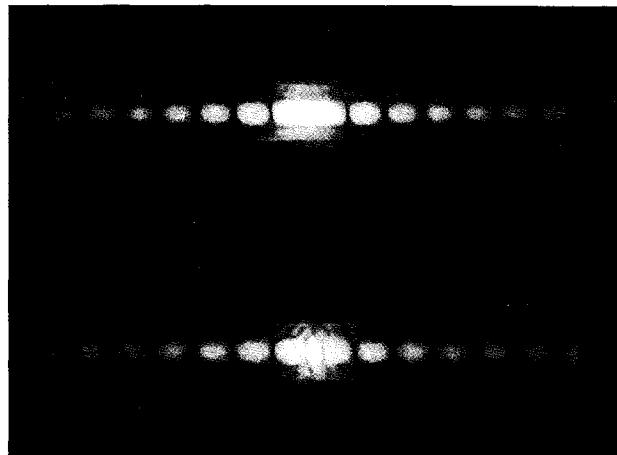


Bild 16 Beugung am Spalt 0.3 mm
Beugung am Draht 0.3 mm

Versuchsaufbau:



Bild 17

5

Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichtes durch die Beugung am Spalt

Das Beugungsbild des Spaltes fällt auf einen Bogen Millimeterpapier, der beispielsweise auf einen weißen Schirm 03 6340 geklebt ist. Die unter dem $\sin \alpha_k = k \frac{\lambda}{b}$ erscheinenden Minima lassen sich in dieser Weise leicht nachzeichnen und anschließend ausmessen.

Wenn E die mittlere Entfernung vom mittleren Maximum auf dem Schirm zum Spalt ist und $2x$ der Abstand der beiden äquidistanten Minima k -ter Ordnung, so gilt für genügend großes E :

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \frac{x}{E} \text{ und man erhält } \frac{x}{E} = k \frac{\lambda}{b} \text{ oder } \lambda = \frac{bx}{kE}$$

Diese Beziehung zeigt, daß insbesondere die Spaltbreite b durch ihre Schmalheit (Größenordnung 0.1 mm) mit Toleranzen von nur wenigen 0.01 mm das Meßergebnis stark beeinflußt.

Man wird also für diesen Versuch zunächst die Spaltbreite genau bestimmen bzw. aus den Ergebnissen mit der angenommenen Spaltbreite den Korrekturfaktor c_b errechnen:

$$c_b = \frac{633}{\lambda_m}$$

λ_m = mittlere aus dem Versuch errechnete Wellenlänge.

Beispiel:

Für eine angenommene Spaltbreite $b_1 = 0.2 \text{ mm}$ und eine Entfernung Schirm-Spalt von 1700 mm wurde für die 5., 10., 15. und 18. Ordnung ein Abstand x von 33, 66, 99 und 119 mm gemessen. Mit diesen Werten errechnet sich eine mittlere Wellenlänge von $\lambda_{m1} = 776 \text{ nm}$, die den Korrekturfaktor zu $c_{b1} = 0.815$ ergibt. Der Spalt hatte folglich eine Breite b von 0.163 mm, was die Nachmessung im Meßmikroskop bestätigte.

In gleicher Weise „eicht“ man die Blenden 0.3 und 0.4 und kommt dann auf einen sehr guten Wert für die Laserwellenlänge, wenn diese in nachfolgenden Versuchen aus verschiedenen Parametern für E und die drei zur Verfügung stehenden b experimentell ermittelt werden soll.

Für kurze Entfernungen E besteht die Schwierigkeit, daß die Minima in dem Beugungsbild sehr eng beieinander liegen und sich nur ungenau nachzeichnen lassen. Hier kann man nun das schon bei früheren Versuchen benutzte Abbildungsfernrohr einsetzen. Zunächst wird das Fernrohr scharf eingestellt: Der Spalt ist noch nicht eingesetzt, die „Okularlinse“ mit $f = 20 \text{ mm}$ Brennweite wird auf dem Ende der Stangen befestigt (siehe Bild 18) und die „Objektivlinse“ so verschoben, daß auf dem Schirm bzw. dem Bogen Papier der kleinstmögliche vergrößerte Lichtfleck erscheint. Dies ist dann die Scharfeinstellung des Fernrohres.

Fügt man jetzt einen Spalt in die vor der Objektivlinse stehende Aufnahmepalte ein, dann erscheint auf dem Schirm ein vergrößertes Beugungsbild.

Die Auswertung erfolgt nach den gleichen Formeln unter Berücksichtigung der Fernrohrvergrößerung, die sich aus dem Verhältnis der Brennweite der Objektivlinse zur Brennweite der Okularlinse ergibt:

$$V = \frac{f_1}{f_2} = \frac{150}{20} = 7.5$$

Die Formel für die Wellenlänge lautet dann:

$$\lambda = \frac{b \cdot x}{E \cdot k \cdot 7.5}$$

Da auch hier die Vergrößerung kein exakter Wert ist, wird man wieder mit einem Korrekturfaktor zu rechnen haben:

$$c_v = \frac{\lambda_m}{633}$$

Beispiel:

Für eine Entfernung Spalt-Schirm von 1700 mm wurden für die Spaltbreiten 0.2, 0.3 und 0.4, multipliziert mit ihrem jeweiligen Korrekturfaktor c_b , die mittleren Wellenlängen 539, 540 und 543 nm errechnet bzw. experimentell bestimmt. Das ergibt eine gemittelte Wellenlänge von $\lambda_m = 541 \text{ nm}$, die zu dem Korrekturfaktor c_v für die Vergrößerung führt:

$$c_v = \frac{541}{633} = 0.85.$$

Die Vergrößerung muß also mit exakt $7.5 \times 0.85 = 0.64$ berücksichtigt werden. Dieser Faktor c_v gilt natürlich nur für eine vorgegebene Entfernung E , in diesem Falle für $E = 1700 \text{ mm}$.

Versuchsaufbau:

Spalt, Strichgitter

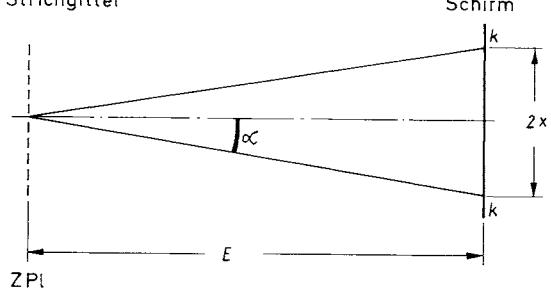


Bild 18

6

Beugung durch mehrere, kongruente, regelmäßig angeordnete Öffnungen

Für die Beugungsintensität mehrerer in regelmäßigen Abständen nebeneinanderliegender gleicher Öffnungen (Gitter) gilt im Beugungspunkt die Gleichung:

$$I_\alpha = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} s \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} s \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{p\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)}$$

Darin bedeuten: b = Spaltbreite, s = Abstand zweier Spalte (Gitterkonstante); p = Anzahl der interferierenden parallelen Strahlenbündel (Gitter mit p Öffnungen); α = Beugungswinkel; λ = Wellenlänge des verwendeten Lichtes (632,8 nm).

Diese Gleichung gibt also für jede gebeugte Richtung α die Intensität I_α des Lichtes im Beugungspunkt an.

I_α ist ein Produkt zweier Ausdrücke, von denen der erste die Intensitätsverteilung am Einfachspalt darstellt (siehe Beugung am Einfachspalt). Der zweite Ausdruck beschreibt das Zusammenwirken von p Spalten. Betrachtet man nun die Richtungen, in denen der Einzelspalt ein Minimum liefert, dann muß der erste Faktor = 0 werden. Damit wird aber auch der gesamte Ausdruck $I_\alpha = 0$. Daraus folgt, daß die Minima des Einzelspaltes in jedem Falle erhalten bleiben. Durch das Hinzufügen der übrigen Beugungsöffnungen kann an diesen Stellen niemals Helligkeit entstehen.

Umgekehrt kann aber an den Stellen, an denen der Einzelspalt Maxima liefert, Dunkelheit entstehen, wenn nämlich der zweite Faktor = 0 wird. Dies gilt für alle Fälle von Beugung durch gleichgestaltete Öffnungen. Die zu erwartende Beugungerscheinung geht aus der für einen einzelnen Spalt dadurch hervor, daß die Maxima noch von dunklen Interferenzstreifen durchzogen werden.

Der bequemeren Ausdrucksweise wegen werden im folgenden nach Fraunhofer die Maxima und Minima eines Einzelspaltes als Minima und Maxima erster Klasse, die durch das Zusammenwirken mehrerer Öffnungen entstehenden als Minima und Maxima zweiter Klasse bezeichnet.

Es soll zunächst die Beugungerscheinung an Doppel-spalten untersucht werden ($p = 2$). Es lautet dann die Intensitätsgleichung in der Richtung α :

$$I_\alpha = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b}{\lambda} s \sin \alpha\right)}{\left(\frac{\pi b}{\lambda} s \sin \alpha\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)}$$

Wie beim Einzelspalt erhält man nun die Minima I. Klasse für die Nullstellen des Zählers des ersten Faktors. Diese Bedingung wird erfüllt für $\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{b}$ ($k = 1; 2; 3; \dots$) (siehe Beugung am Einzelspalt). Für $k=0$ erhält man wieder das zentrale Maximum I. Klasse.

Die Minima II. Klasse sind durch die Nullstellen des Zählers des zweiten Faktors bestimmt:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right)} = 0$$

Setzt man für $\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha = \varphi$, dann kann man schreiben:

$$\frac{\sin^2 2\varphi}{\sin^2 \varphi} = 0, \text{ oder:}$$

$$\frac{4 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = 4 \cos^2 \varphi = 4 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right);$$

$$4 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha\right) = 0 \text{ wird erfüllt für}$$

$$\sin \alpha_h = \frac{2h+1}{2} \frac{\lambda}{s} \quad (h = 0; 1; 2; \dots)$$

Es entstehen also neue Minima II. Klasse an den Stellen:

$$\sin \alpha_0 = \frac{\lambda}{2s}; \quad \sin \alpha_1 = \frac{3\lambda}{2s}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{5\lambda}{2s}; \dots$$

$$\sin \alpha_h = \frac{2h+1}{2s} \lambda.$$

Diese Minima haben den Abstand $\frac{\lambda}{s}$, und dieser ist, da $s > b$ sein muß, kleiner als der Abstand $\frac{\lambda}{b}$ der Minima erster Klasse. Das zentrale Maximum I. Klasse hat die Breite $\frac{2\lambda}{b}$; demnach liegen in diesem Maximum $\frac{2\lambda}{b} : \frac{\lambda}{s} = \frac{2s}{b}$ Minima II. Klasse. Bild 19 zeigt das Ergebnis eines Doppelspaltes mit Spaltbreite $b = 0.25$ mm und Spaltabstand $s = 0.75$ mm. Für diese Werte errechnet man 6 Minima II. Klasse im zentralen Hauptmaximum erster Klasse, was durch den Versuch bestätigt wird.

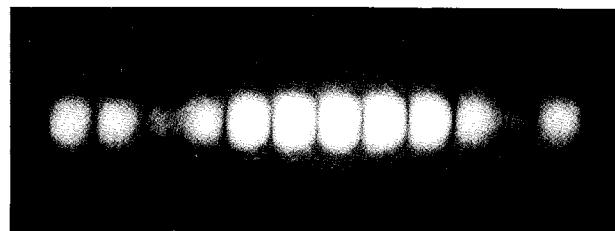


Bild 19

An das zentrale Maximum I. Klasse schließen sich dann die breiten Minima I. Klasse und die Maxima I. Klasse und erster Ordnung an, durchzogen von Minima II. Klasse.

Der Versuch mit einem Spalt der Spaltbreite 0.25 und des Spaltabstandes 0.50 mm nach Bild 20 ergibt ebenfalls das richtige Ergebnis von 4 Minima im zentralen Hauptmaximum.

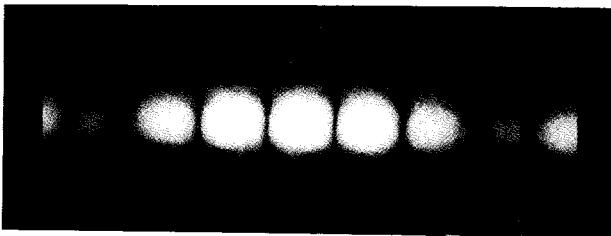


Bild 20

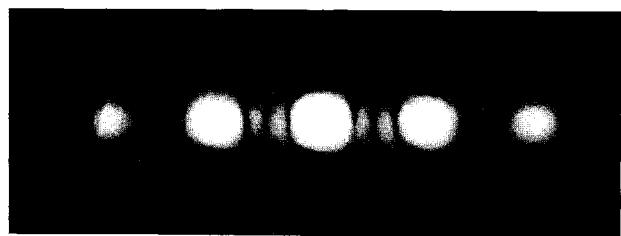


Bild 21

Unberücksichtigt blieben bisher die Maxima II. Klasse. Sie liegen an den Stellen, für die der zweite Faktor $= \pm 1$ wird:

$$4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha \right) = \pm 1$$

Diese Gleichung wird erfüllt für $\frac{\pi}{\lambda} s \sin \alpha = 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots; k'\pi$.

Diese Maxima liegen danach an den Stellen, für die $\sin \alpha_{k'} = \frac{k'\lambda}{s}$ ist:

$$\sin \alpha_0 = 0; \sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{s}; \sin \alpha_2 = \frac{2\lambda}{s} \dots$$

Die Maxima II. Klasse liegen also gerade zwischen den Minima II. Klasse, deren Abstand vorher beschrieben wurde.

Diese Maxima werden Hauptmaxima genannt, da für größere Werte p noch kleinere Maxima vorhanden sind.

Die möglichen Maxima II. Klasse brauchen nicht immer alle aufzutreten, nämlich dann nicht, wenn eines oder mehrere derselben auf ein Minimum I. Klasse fallen. Diese Minima bleiben ja unter allen Umständen erhalten. Der beschriebene Fall tritt z.B. dann ein, wenn das k -te Minimum erster Klasse: $\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{b}$ mit dem k' -ten Maximum II. Klasse: $\sin \alpha_{k'} = \frac{k'\lambda}{s}$ zusammenfällt.

Dann gilt:

$$\frac{k\lambda}{b} = \frac{k'\lambda}{s} \text{ d.h. } \frac{b}{s} = \frac{k}{k'}$$

Ist nun z.B. $2b = s$, wie bei dem oben beschriebenen Spalt, dann ist $\frac{k}{k'} = \frac{1}{2}$; es fehlt dann jedes zweite Maximum II. Klasse, da es mit einem Minimum I. Klasse zusammenfällt. In diesem Falle treten nur die ungeradzahligen Maxima II. Klasse auf.

Erhöht man die Zahl p der Spalte, dann bleibt im Prinzip alles wie bisher, nur treten die Hauptmaxima immer stärker hervor. Da diese Maxima II. Klasse durch das Verschwinden von Zähler und Nenner des zweiten Faktors der Intensitätsgleichung bestimmt waren, werden die Intensitäten derselben immer stärker, und zwar proportional zu p^2 . Die Maxima werden höher und schmäler, und zwischen den Hauptmaxima bilden sich Nebenmaxima, die mit zunehmendem p zahlreicher ($p-2$), aber auch immer schwächer werden.

Bei großem p , wie man es bei optischen Gittern hat, herrscht zwischen den Hauptmaxima Dunkelheit. Bild 22 zeigt die Beugung an einem Gitter mit $p = 100/\text{cm}$ (Versuchsaufbau siehe Bild 25).

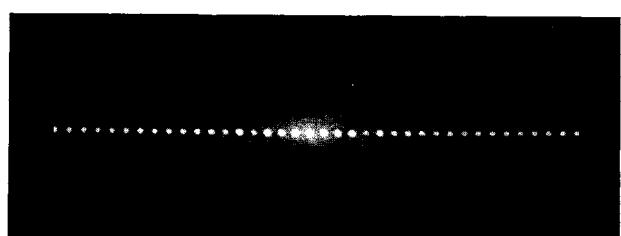


Bild 22

Zusammenfassend lässt sich über die Beugung an mehreren Öffnungen folgendes sagen:

Bei der Beugung an vielen in gleichmäßigen Abständen nebeneinanderliegenden Öffnungen liegen die Hauptmaxima an den Stellen

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{s} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots, k)$$

Darin bedeutet s den Abstand der Mitten zweier benachbarter Öffnungen, der bei einem Gitter Gitterkonstante genannt wird. Die Beugungsmaxima sind um so intensiver und schmäler, je größer die Zahl der beugenden Öffnungen ist. Steht die Gitterkonstante s zur Breite b der Öffnungen in einem rationalen Verhältnis, so fallen gewisse der durch die obige Gleichung gegebenen Maxima aus. Dies kann mit dem Dreifach-Spalt $s = 0.5 \text{ mm}$ und $b = 0.25$ sowie den anderen Mehrfach-Spalten leicht im Versuch überprüft werden.

Versuchsaufbau:



Bild 23

7

Beugung an einem Drahtkreuzgitter

Für die Beugung an einem Drahtkreuzgitter mit einem Drahtabstand von 0.1 mm und einer Drahtdicke von 0.04 mm gelten die gleichen Überlegungen wie die für Beugungen an gleichmäßigen Öffnungen, Versuch 6. Die für die x-Richtung geltenden Formeln muß man für die y-Richtung erweitern und erhält dann die für rechteckige Öffnungen zutreffenden Intensitätsformeln. Das charakteristische Beugungsbild eines Drahtkreuzgitters zeigt Bild 24.

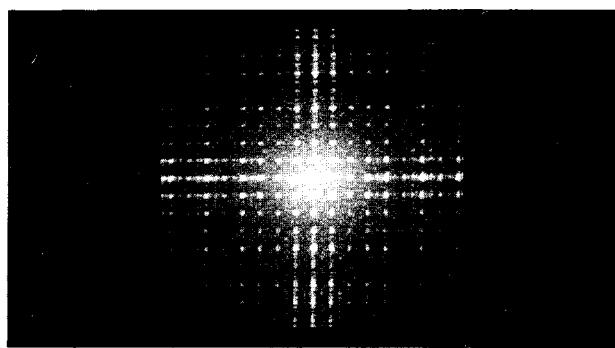
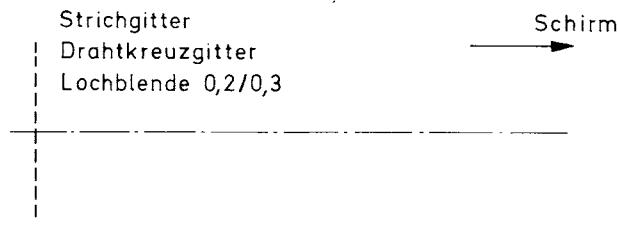


Bild 24

Versuchsaufbau:



Z Pl
Bild 25

8

Bestimmung der Wellenlänge des Laserlichtes durch die Beugung am Gitter

Bei der Beugung am Gitter gilt für die Beugungswinkel der auftretenden Maxima:

$$\sin \alpha_k = \frac{k\lambda}{s} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Darin bedeutet s den Abstand der Mitten zweier benachbarter Öffnungen, in unserem Fall $s = 0.1 \text{ mm}$ (Gitterkonstante).

Die Versuchsdurchführung erfolgt genauso wie bei Versuch 5. Für die Wellenlänge ist:

$$\lambda = \frac{s x}{k E}$$

Bei großen Beugungsordnungen (großes k) gilt nicht mehr $\sin \alpha = \frac{x}{E}$.

Man muß hier den $\sin \alpha_k$ berechnen, der sich wie folgt ausdrücken läßt:

$$\sin \alpha_k = \frac{x}{\sqrt{E^2 + x^2}}$$

Man errechnet dann die Wellenlänge nach:

$$\lambda = \frac{1}{k} s \frac{x}{\sqrt{E^2 + x^2}}$$

Darin bedeuten: E = Entfernung Gitter-Schirm; x = Abstand des k-ten Minimums vom zentralen Maximum; s = Gitterkonstante (0.1 mm).

Beispiel

Für eine Entfernung E = 1700 mm wurden für die Ordnungen k = 3, 6, 9 und 12 die Minima gemessen zu x = 31, 62, 93, 124 mm. Daraus errechnet sich eine Wellenlänge von $\lambda = 610 \text{ nm}$. Dieses Ergebnis zeigt, wie schon bei vorhergehenden Versuchen, daß das fotografisch hergestellte Gitter nicht mit beliebiger Genauigkeit von 0.1 mm für die Gitterkonstante hergestellt werden kann. Der Korrekturfaktor für die angenommene Gitterkonstante beträgt

$$c_G = \frac{633}{\lambda_m} = \frac{633}{610} = 1.037$$

Die wahre Gitterkonstante ist also 0.1037 mm.

Versuchsaufbau:

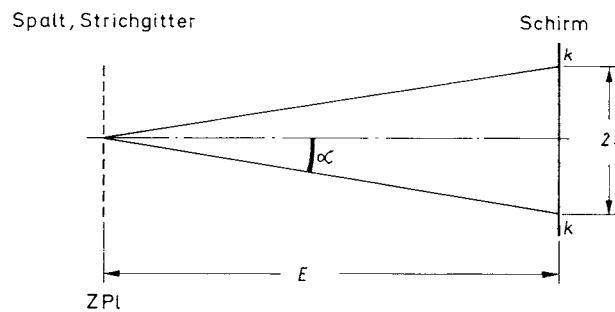


Bild 26

9

Beugung an Lochblenden

Eine kreisförmige Öffnung vom Durchmesser d liefert bei kohärenter Beleuchtung ein Beugungsbild aus konzentrischen hellen und dunklen Ringen (siehe Bild 27, 28, 29).

Die dunklen Ringe erscheinen unter den Beugungswinkeln α_d , für die folgende Beziehungen gelten:

$$\sin \alpha_{d1} = 1.22 \frac{\lambda}{d}; \sin \alpha_{d2} = 2.23 \frac{\lambda}{d}; \sin \alpha_{d3} = 3.23 \frac{\lambda}{d}$$

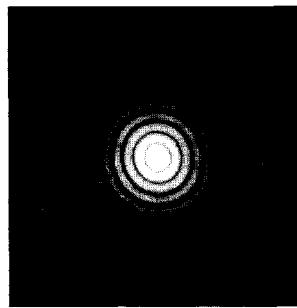


Bild 27 Beugung an der Lochblende 0.2 mm

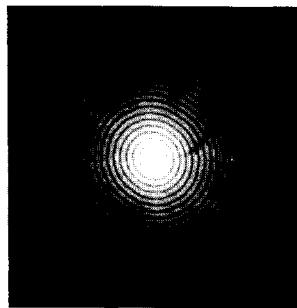


Bild 28 Beugung an der Lochblende 0.3 mm

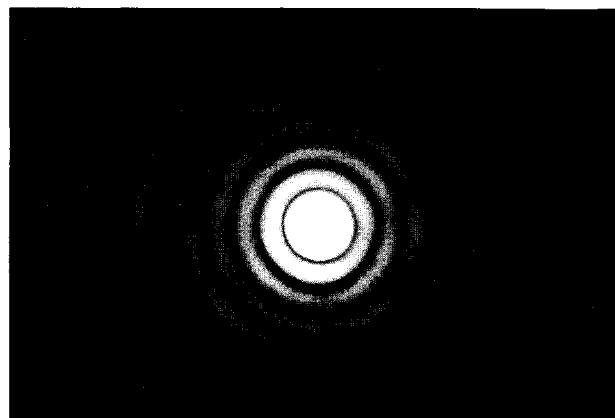


Bild 29 Beugung an der Lochblende 1.0 mm mit Vergrößerungsfernrohr

Die hellen Ringe erscheinen an den Stellen α_h , für die gilt:

$$\sin \alpha_{h1} = 1,63 \frac{\lambda}{d}; \sin \alpha_{h2} = 2,67 \frac{\lambda}{d}; \sin \alpha_{h3} = 3,69 \frac{\lambda}{d}$$

Die Betrachtungen sollen hier auf drei Ringe beschränkt bleiben.

Die Gleichungen für die übrigen Ringe kann man sehr schnell aus dem Versuch ermitteln.

Versuchsaufbau:

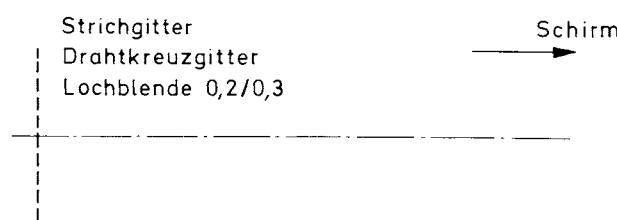
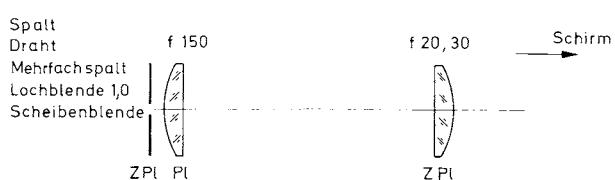


Bild 30



10

Beugung an einer Scheibenblende, Poissonscher Fleck

Die Beugung an der Scheibenblende 04 0170 liefert den Poissonschen Fleck. Das am Rande dieses Scheibchens parallel auftreffende, abgebeugte Licht ergibt als Beugungsfigur eine helle Mitte im Schattengebiet, umgeben von konzentrischen Ringen.

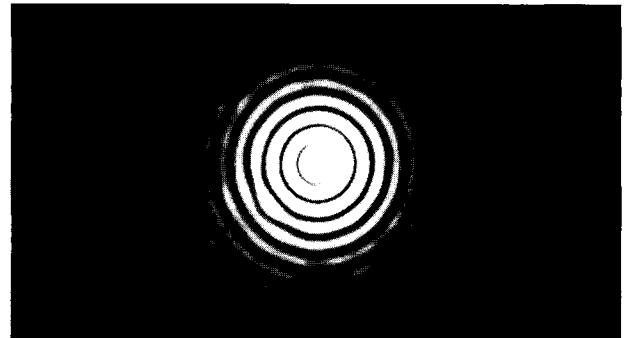


Bild 32 Beugung an der Scheibenblende

An den Stellen, an denen die abgebeugten Lichtwellen den Gangunterschied $2k\lambda$, $k = 0, 1, 2, 3 \dots$ haben, tritt Aufhellung ein. Es muß daher für $k = 0$ (Mitte der geometrischen Lichtgrenze) auch Aufhellung eintreten. Dies ist der Poissonsche Fleck.

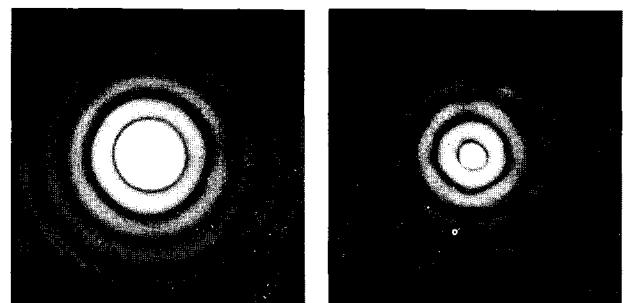


Bild 33

Auch hier gilt das Babinet'sche Theorem (siehe Beugung am Draht). Bild 33 zeigt die Beugung an der Scheibenblende und an einer Lochblende gleichen Durchmessers.

Versuchsaufbau:



Bild 34

11

Bildentstehung im Mikroskop

Eine sehr interessante Anwendung von Beugung und Interferenz stellen die Untersuchungen E. Abbé's über die Leistungsfähigkeit von Mikroskopen bei durchstrahlten, aber nicht selbstleuchtenden Objekten dar.

Mit einem Mikroskop sollen durchleuchtete Objekte mit sehr feinen Strukturen erkannt werden. Als ein solches Objekt kann ein Strichgitter dienen, in unserem Fall eines mit 100 Strichen/cm. Würde man dieses Gitter auf den Tisch eines Mikroskopes legen, dann würde das durch das Gitter hindurchtretende Licht an ihm gebeugt werden. Es entstehen also neben dem Zentralbild, das entstehen würde, wenn kein Gitter vorhanden wäre, in der Brennebene des Objektivs auf beiden Seiten noch die spektral abgebeugten, zerlegten Bilder der Lichtquelle. Bei Vorhandensein einer parallelen Lichtquelle (Laser) würde sich ein nach Bild 35 dargestellter Sachverhalt ergeben:

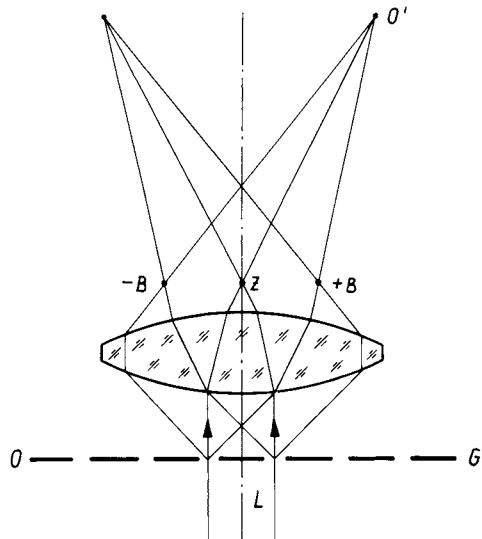


Bild 35

Von dem parallel einfallenden Licht L wird in der Brennebene des Objektivs das Zentralbild Z und die daran sich anschließenden Beugungsbilder $+B$ und $-B$ (hier nur zwei angedeutet) gebildet. In der Brennebene des Objektivs entsteht also das Beugungsbild der unendlich entfernten Lichtquelle (paralleles Licht), von Abbé „primäres Bild“ genannt.

Diese Bilder interessieren aber bei einem Mikroskop nicht, man will ja ein Bild des Objektes haben. Aus Bild 35 ist nun zu erkennen, daß die Strahlen, die die Beugungsbilder der Lichtquelle liefern, in ihrem weiteren Verlauf hinter der Brennebene des Objektivs in der zur Objektebene O konjugierten Bildebene O' das reelle Bild des Objektes liefern müssen: von Abbé „sekundäres Bild“ genannt.

Daraus folgt, daß ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen primärem und sekundärem Bild besteht. Da alle Beugungsbilder zum Aufbau des reellen Bildes mitwirken, sind im Prinzip auch alle notwendig, um ein vollkommen ähnliches Abbild des Objektes zu liefern. Jede Störung oder teilweise Beseitigung der Beugungsbilder in der Brennebene des Objektivs bringt zwangsläufig eine Störung des sekundären Bildes mit sich. In dem Bild 35 liegt eine solche Störung vor, da nicht alle Beugungsordnungen in das Objektiv eintreten können, sondern nur die ersten beiden. Es ist also unter diesen Bedingungen eine Bildstörung zu erwarten. Aus den vorhergehenden Versuchen war zu sehen, daß die Intensitäten der Beugungsordnungen mit zunehmender Ordnungszahl abnehmen. Folglich sind für die Bildentstehung die Beugungsbilder der ersten Ordnungen die wichtigsten. Abbé hat nun gezeigt, daß zum Erkennen der Gitterstruktur mit der Gitterkonstanten s außer dem zentralen Lichtbündel noch mindestens die erste Beugungsordnung von dem Objektiv durchgelassen werden muß.

Wie vorher ermittelt wurde, ist der Winkel, unter dem das erste Beugungmaximum auftritt, gegeben durch

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{s}$$

λ ist hier die Wellenlänge des Lichtes im Raum zwischen Objekt und Objektiv. Arbeitet man zur Erreichung starker Vergrößerungen mit einer Flüssigkeitsimmersion, dann muß man die in diesem Medium mit dem Brechungsquotienten n entstehende neue Lichtwellenlänge berücksichtigen. Es wird dann

$$\sin \alpha_1 = \frac{\lambda}{ns}$$

Zur einwandfreien Erkennung der Gitterstruktur darf daher der Öffnungswinkel des Objektivs, d. h. der halbe Winkel, unter dem das Objektiv vom Gegenstand aus erscheint, nicht kleiner sein als der Beugungswinkel α_1 . Dadurch ist der mit einem Mikroskop gerade noch auflösbare Abstand zweier Objektpunkte gegeben durch

$$s = \frac{\lambda}{n \sin \alpha} = \frac{\lambda}{A}$$

A wird nach Abbé die numerische Apertur des Objektivs genannt. Das Auflösungsvermögen U eines Mikroskops ist der reziproke Wert von s , also:

$$U = \frac{A}{\lambda}$$

Die Bilder 36, 38, 39, 40 zeigen die Auswirkungen auf das sekundäre Bild, wenn das primäre Bild gestört wird. Die Störung wird durch eine Beugungsordnungsblende hervorgerufen, mit der man verschiedene Ordnungen ausblenden kann.

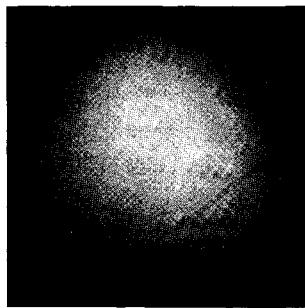
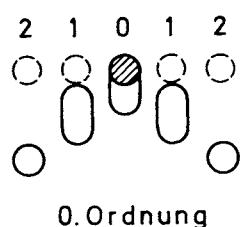


Bild 36

In Bild 36 wird nur die nullte Ordnung von der Blende durchgelassen und die anderen ausgeblendet. Das entspricht der Abbildung der Lichtquelle ohne Gitter, da das Beugungsspektrum ja nicht mehr zur Entstehung des sekundären Bildes beitragen kann. Die Folge ist, daß man nur eine gleichmäßig beleuchtete Fläche ohne jegliche Gitterstruktur sieht.

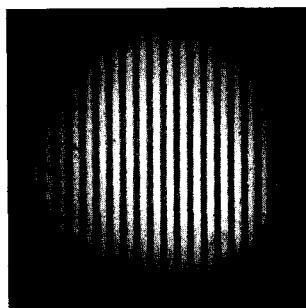


Bild 37 Direkte Abbildung des Gitters

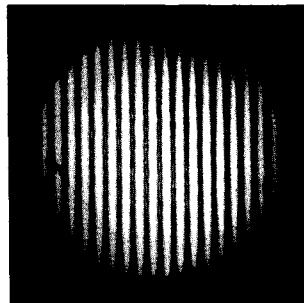
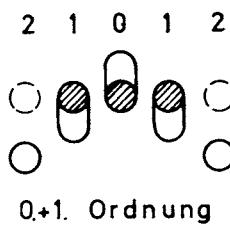


Bild 38

Erst die Hinzunahme der ersten beiden Ordnungen ergibt eine identische Abbildung des Gitters, wie der Vergleich der Bilder 37 und 38 zeigt.

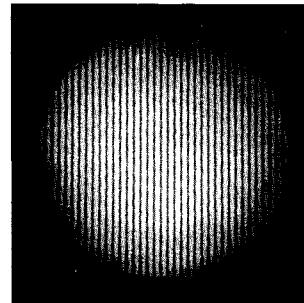
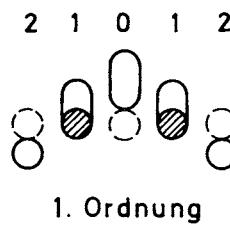


Bild 39

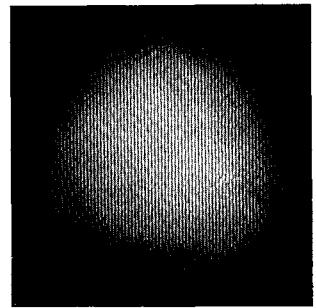
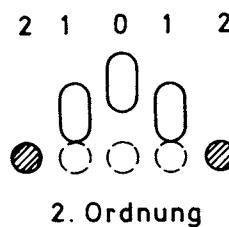


Bild 40

Eindrucksvoll wird der Versuch nach Bild 39 und 40, wenn nur die ersten beiden Ordnungen durchgelassen werden. Es erscheint zwar jetzt auch ein sekundäres Bild mit einer Gitterstruktur, jedoch ist diese nicht mehr identisch mit dem Objekt. Durch den Eingriff in das primäre Bild entsteht ein Abbild eines Gitters mit größerer Strichzahl, obwohl ein solches gar nicht vorhanden ist.

Diese Versuchsergebnisse zeigen, wie wichtig die Überlegungen von Abbé für den Mikroskopbau sind. Zusammenfassend kann man folgendes sagen:

Objekte gleicher Struktur können verschiedene sekundäre Bilder liefern, wenn ihr primäres Bild auf irgend eine Weise im Mikroskop ungleich gemacht wird. Desgleichen können verschiedene Strukturen das gleiche sekundäre Bild liefern, wenn die Verschiedenheit der zugehörigen primären Bilder im Mikroskop künstlich beseitigt wird. (Exakte mathematische Formulierungen der Abbéschen Theorie siehe "Principles of Optics" Born and Wolf, Third Revised Edition, Pergamon Press Frankfurt, Seite 418.)

Versuchsaufbau:

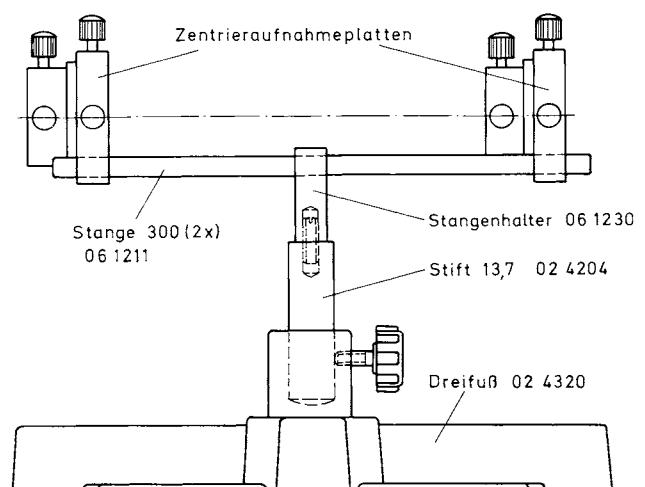


Bild 41

Der Hilfsaufbau wird nach Bild 41 vorgenommen und in einen Dreifuß*) gesetzt. Eine Aufnahmeplatte Pl mit eingefügter Lochblende 1.0 wird auf das dem Laser zugewandte Ende des Hilfsaufbaus geschoben. Diesen justiert man nun derart, daß der Strahl durch die Blende geht. So werden die in Bild 36, 38, 39, 40 gezeigten Stellungen der Beugungsordnungsblende im primären Bild mit Hilfe der Zentrieraufnahmeplatten ermöglicht.

*) Bei Verwendung einer Dreikantschiene in einen Stativreiter

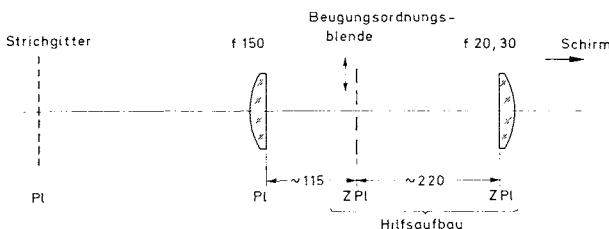


Bild 42

Nach der Justierung setzt man den Versuchsaufbau nach Bild 42 zusammen. Die verschiedenen Stellungen der Beugungsordnungsblende erreicht man durch vertikales Verschieben der Zentrieraufnahmplatte mit der oberen Rändelschraube.

In P_1 wird Dunkelheit herrschen, wenn der Gangunterschied der Strahlen $L'P_1 - LP_1 = L'A = \frac{\lambda}{2}$ ist. Dies trifft natürlich auch für die Punkte $P_2; P_3; \dots; P_n$ zu. Es entsteht auf dem Schirm S ein System dunkler Streifen, wie Bild 44 zeigt.

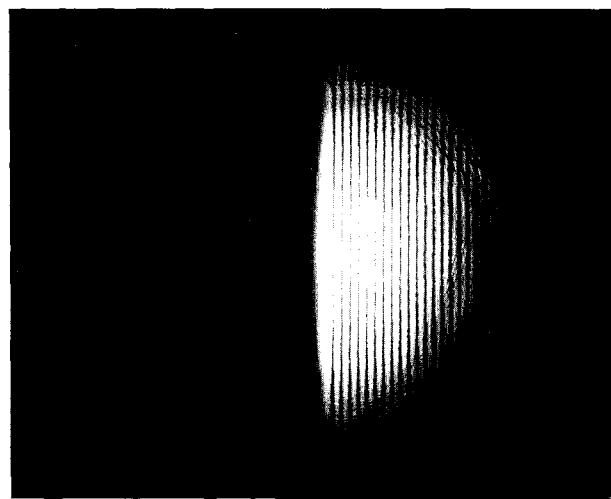


Bild 44

Bezeichnet man die Strecken $P_1P_n; P_2P_n; P_3P_n; \dots; P_{n-1}P_n$ mit Δ , dann kann man wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke $L'AL$ und MHP_1 schreiben:

$$\Delta : E = \frac{\lambda}{2} : a$$

Voraussetzung bei dieser Betrachtung ist, daß a hinreichend klein gewählt wird. Nur dann stimmen die beiden Dreiecke in allen Winkeln ungefähr überein. Aus der obigen Beziehung läßt sich die Wellenlänge berechnen:

$$\lambda = \frac{2 \Delta a}{E}$$

Versuchsaufbau:

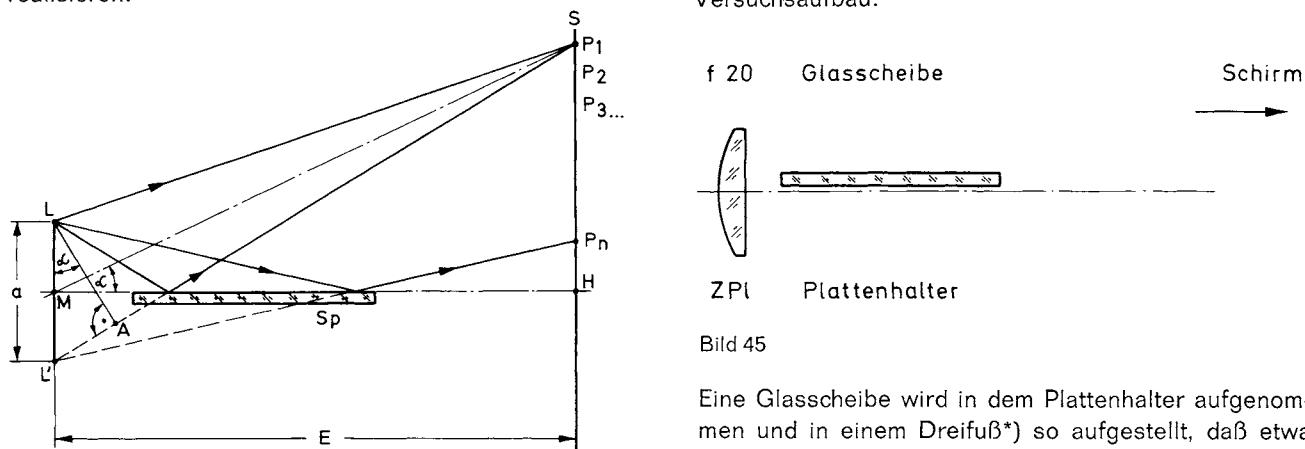


Bild 43

Von einer reellen Lichtquelle L (Laserfokus) fällt ein Teil des ausgestrahlten Bündels nahezu streifend auf einen Spiegel Sp. Es wird eine zweite virtuelle kohärente Lichtquelle L' erzeugt, so daß auf dem Schirm S Interferenzen zwischen dem reflektierten und dem direkten Licht entstehen.

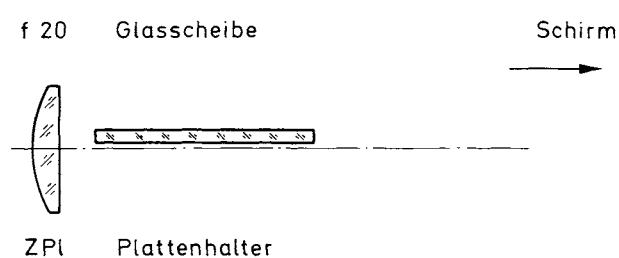


Bild 45

Eine Glasscheibe wird in dem Plattenhalter aufgenommen und in einem Dreifuß*) so aufgestellt, daß etwa die Hälfte des Lichtbündels fast streifend reflektiert wird. Auf dem Schirm wird dann durch Drehen der Glasplatte direktes und reflektiertes Licht zur Deckung gebracht, und es entstehen sofort Interferenzstreifen. Die Glasplatte muß möglichst nahe an die Linse $f = 20$ mm gebracht werden.

*) Bei Verwendung einer Dreikantschiene in einem Stativreiter