§2. Предел и непрерывность функции

Пусть $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Если $x \in E$ и $y = f(x)$, то $y = (y_1, \ldots, y_m)$ и, значит, для каждого $i = 1, \ldots, m$ определена функция $f_i\colon E \to \mathbb{R}$ по правилу $f_i(x) = y_i$. Эта функция называется *i-й координатной функцией* f. Пишут $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Определение (по Коши). Точка $b \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* функции $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ в точке a, если a — предельная точка E и

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U'_\delta(a) \cap E\colon f(x) \in U_\varepsilon(b)$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\colon (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon).$$

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Определение (по Гейне). Точка $b \in \mathbb{R}^m$ называется *пределом* функции $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ в точке a, если a — предельная точка E и

$$\forall \{x^{(k)}\},\ x^{(k)} \in E \setminus \{a\}\colon\ (x^{(k)} \to a \Rightarrow f(x^{(k)}) \to b).$$

Пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Также как и при $n = m = 1$ доказывается эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне.

Теорема 1. *Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}^m$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \iff \lim\limits_{x\to a} f_i(x) = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$.*

▲ Рассмотрим последовательность точек $x^{(k)} \in E \setminus \{a\}$, сходящуюся к a. По определению предела по Гейне левая часть означает, что $f(x^{(k)}) \to b$, а правая — что $f_i(x^{(k)}) \to b_i$ для $i = 1, \ldots, m$. Поэтому их равносильность вытекает из леммы о покоординатной сходимости. ■

Следствие. Пусть f, $g\colon E \to \mathbb{R}^m$ и $\alpha\colon E \to \mathbb{R}$. Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ и $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \beta$, то существуют

$$\lim_{x\to a}(f \pm g)(x) = b \pm c, \qquad \lim_{x\to a}(\alpha f)(x) = \beta b, \qquad \lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\beta} b$$

(в последнем случае предполагается, что $\alpha(x) \neq 0$ на E и $\beta \neq 0$).

▲ Пусть $\{x^{(k)}\}$ — последовательность точек $E \setminus \{a\}$, сходящаяся к a, и пусть $i \in \{1, \ldots, m\}$. По Т1 и определению предела по Гейне имеем $f_i(x^{(k)}) \to b_i$, $g_i(x^{(k)}) \to c_i$ и $\alpha(x^{(k)}) \to \beta$ при $k \to \infty$. Но тогда по свойствам сходящихся последовательностей $(f+g)_i(x^{(k)}) = f_i(x^{(k)}) \pm g_i(x^{(k)}) \to b_i \pm c_i$, $(\alpha f)_i(x^{(k)}) = \alpha(x^{(k)}) f_i(x^{(k)}) \to \beta b_i$ и $(\frac{1}{\alpha} f)_i(x^{(k)}) = \frac{f_i(x^{(k)})}{\alpha(x^{(k)})} \to \frac{1}{\beta} b_i$ при $k \to \infty$. Поэтому по определению предела по Гейне $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g)_i(x) = b_i \pm c_i$, $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f)_i(x) = \beta b_i$ и $\lim\limits_{x\to a}(\frac{1}{\alpha} f)_i(x) = \frac{1}{\beta} b_i$. Осталось снова воспользоваться Т1. ■

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна в точке* $a \in E$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(a) \cap E\colon\ f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$$

или, что эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\colon\ (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Также как и при $n = m = 1$ доказывается, что если a — изолированная точка E, то f непрерывна в точке a; если a — предельная точка E, то f непрерывна в точке $a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Тогда по Т1 получаем, что непрерывность функции f в точке a эквивалентна непрерывности в этой точке всех ее координатных функций.

Замечание. Если функции f, g и α (обозначения следствия Т1) непрерывны в точке a, то $f \pm g$, αf и $\frac{1}{\alpha} f$ также непрерывны в точке a. Действительно, если a — изолированная точка E, то это верно всегда, если a — предельная точка E, то это вытекает из следствия Т1.

Теорема 2 (о непрерывности композиции). *Пусть $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g\colon Y \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, где $f(X) \subset Y$. Если функция f непрерывна в точке a, функция g непрерывна в точке $b = f(a)$, то композиция $g \circ f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ непрерывна в точке a.*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда в силу непрерывности функции g в точке b, $\exists \sigma > 0\ \forall y \in U_\sigma(b) \cap Y\colon$ $g(y) \in U_\varepsilon(g(b))$. Далее, в силу непрерывности f в точке a, $\exists \delta > 0\ \forall x \in U_\delta(a) \cap X\colon\ f(x) \in U_\sigma(b)$.

Так что $\forall x \in U_\delta(a) \cap X\colon\ g(f(x)) \in U_\varepsilon(g(f(a)))$. Следовательно, функция $g \circ f$ непрерывна в точке a. ■

Определение. Функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывна* на E, если f непрерывна в каждой точке E. Класс непрерывных на множестве E функций обозначают $C(E)$.

Примеры. 1) Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ рассмотрим функцию $p_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $p_i(x) = x_i$, которая называется *проектированием* на i-ю координатную ось. Функция p_i непрерывна на $\mathbb{R}^n$: определение непрерывности выполняется для $\delta = \varepsilon$ ввиду $|p_i(x) - p_i(a)| = |x_i - a_i| \leqslant |x - a|$.

2) Функция $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{(k_1,\dots,k_n)} a_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, где суммирование ведется по конечному числу наборов $(k_1, \dots, k_n)$ неотрицательных целых чисел, называется *многочленом* (n переменных). Функция f непрерывна как линейная комбинация непрерывных функций $p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{i_n}$.

3) Отождествляя $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}$ получим, что скалярное произведение $(.,.)\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ является всюду непрерывной функцией, т.к. $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$ есть многочлен $2n$ переменных.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Множество $W \subset E$ называется *открытым в* E, если найдется открытое в $\mathbb{R}^n$ множество U, что $W = E \cap U$.

Пример. Пусть $E = \{(x, 0)\colon\ -\infty < x \leqslant 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Тогда множество $W = \{(x, 0)\colon\ -1 < x \leqslant 1\}$ открыто в E, поскольку $W = E \cap U_2(1, 0)$. Отметим, что W не является открытым в $\mathbb{R}^2$.

Покажем, что непрерывность f на E эквивалентна тому, что прообраз любого открытого множества открыт в E.

Теорема 3 (критерий непрерывности). *Функция $f\colon E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на E $\iff$ для каждого открытого множества V из $\mathbb{R}^m$ множество $f^{-1}(V)$ открыто в E.*

▲ ($\Rightarrow$) Пусть множество V открыто в $\mathbb{R}^m$. Если $x \in f^{-1}(V)$, то $f(x) \in V$ и в силу открытости V существует $U_{\varepsilon_x}(f(x)) \subset V$. Функция f непрерывна в точке x, поэтому найдется $\delta_x > 0$, для которого $f(U_{\delta_x}(x) \cap E) \subset U_{\varepsilon_x}(f(x))$. Положим $U = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_{\delta_x}(x)$. Тогда множество U открыто и $f^{-1}(V) = E \cap U$. Действительно, включение $E \cap U \subset f^{-1}(V)$ следует из того, что $U_{\delta_x}(x) \cap E \subset f^{-1}(V)$; обратное включение очевидно.

($\Leftarrow$) Пусть $x \in E$ и $\varepsilon > 0$. Шар $U_\varepsilon(f(x))$ открыт в $\mathbb{R}^m$, поэтому множество $f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))) = E \cap U$ для некоторого множества U, открытого в $\mathbb{R}^n$. Поскольку $x \in U$ и U открыто, то существует $U_\delta(x) \subset U$. Но тогда $U_\delta(x) \cap E \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(x)))$, т.е. $f(U_\delta(x) \cap E) \subset U_\varepsilon(f(x))$. Отсюда вытекает непрерывность функции f в точке x. ■

Непрерывные функции на компактных множествах

Теорема 4. *Если $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то $f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}^m$.*

▲ Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ множества $f(K)$. По критерию непрерывности $f^{-1}(G_\lambda) = K \cap U_\lambda$ для некоторого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества U_λ. Если $x \in K$, то $\exists \lambda_0 \in \Lambda$, что $f(x) \in G_{\lambda_0}$ и, значит, $x \in f^{-1}(G_{\lambda_0}) \subset U_{\lambda_0}$. Поэтому семейство $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ образует открытое покрытие K. Так как K — компакт, из этого покрытия можно выделить конечное покрытие $U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_N} \supset K$. Откуда $(U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_N}) \cap K \supset K$, т.е. $f^{-1}(G_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(G_{\lambda_N}) \supset K$ и, значит, $G_{\lambda_1} \cup \ldots \cup G_{\lambda_N} \supset f(K)$. По определению $f(K)$ — компакт. ■

Следствие (Теорема Вейерштрасса). Если $f\colon K \to \mathbb{R}$ непрерывна на компакте K, то существуют точки x_i, $x_s \in K$, что $f(x_s) = \sup\limits_{x \in K} f(x)$ и $f(x_i) = \inf\limits_{x \in K} f(x)$.

▲ По предыдущей теореме $f(K)$ — компакт в $\mathbb{R}$, то есть $f(K)$ замкнуто и ограничено. Так как $f(K)$ ограничено, то $M = \sup\limits_{x\in K} f(x) \in \mathbb{R}$. Точка M не может быть внешней точкой $f(K)$ (иначе M не является точной гранью $f(K)$). Так как $f(K)$ замкнуто, то M принадлежит $f(K)$, то есть $\exists x_s \in K\colon\ f(x_s) = M$. Для $\inf\limits_{x\in K} f(x)$ доказательство аналогично. ■

Определение. Функция $f\colon E \to \mathbb{R}^m$ называется *равномерно непрерывной* на E, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, x' \in E\colon\ (|x' - x| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x)| < \varepsilon).$$

Теорема 5 (Кантор). *Если функция $f\colon K \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^n$, то f равномерно непрерывна на K.*

▲ Пусть $\varepsilon > 0$. Так как f непрерывна на K, то

$$\forall x \in K\ \exists \delta_x > 0\, \forall y \in K\colon\ |y - x| < \delta_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{1}$$

Семейство окрестностей $\{B_{\delta_x/2}(x)\}_{x\in K}$ образует открытое покрытие K. В силу компактности K из него можно выделить конечное покрытие $U_{\delta_{x_1}/2}(x_1), \dots, U_{\delta_{x_N}/2}(x_N)$. Положим $\delta = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \frac{1}{2}\delta_{x_k}$, тогда $\delta > 0$. Покажем, что δ искомое (в определении равномерной непрерывности). Действительно, пусть $x, x' \in K$, $|x' - x| < \delta$. Найдется $k \in \{1, \dots, N\}$, что $x \in U_{\delta_{x_k}/2}(x_k)$, тогда и $|x' - x| < \frac{1}{2}\delta_{x_k}$. Тогда

$$|x' - x_k| \leqslant |x' - x| + |x - x_k| < \frac{1}{2}\delta_{x_k} + \frac{1}{2}\delta_{x_k} = \delta_{x_k},$$

откуда в силу (1)

$$|f(x') - f(x)| \leqslant |f(x') - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. ■$$

Связные множества

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *несвязным*, если существуют непустые открытые в E множества E_1, E_2, что $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ и $E_1 \cup E_2 = E$, т.е. E представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется *связным*, если оно не является несвязным.

Замечание. Множество S несвязно $\iff$ найдутся два непересекающихся открытых в $\mathbb{R}^n$ множества U и V, что $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$ и $S \cap U \neq \varnothing$, $S \cap V \neq \varnothing$.

Пример. $\varnothing, \{a\}$ — связные множества.

Напомним, что *промежутком* называется любое подмножество $\mathbb{R}$, содержащее вместе с каждой парой точек и все точки, лежащие между ними.

Теорема 6. *Множество $I \subset \mathbb{R}$ связно $\iff$ I — промежуток.*

▲ ($\Rightarrow$) Если I не является промежутком, то для некоторых точек x, $y \in I$ $(x < y)$ отрезок $[x, y]$ не содержится в I. Тогда между x и y найдется точка $z \notin I$. Рассмотрим $(-\infty, z) \cap I$ и $(z, +\infty) \cap I$. Это непустые (содержат соответственно точки x и y), открытые в I множества, объединение которых совпадает с I. Значит, множество I несвязно.

($\Leftarrow$) Предположим, что промежуток I не является связным множеством. Тогда найдутся непустые непересекающиеся открытые в $\mathbb{R}$ множества U и V, что $I = (I \cap U) \cup (I \cap V)$ и $I \cap U \neq \varnothing$, $I \cap V \neq \varnothing$. Пусть $x \in I \cap U$ и $y \in I \cap V$. Без ограничения общности можно считать, что $x < y$. Так как I — промежуток, то $[x, y] \subset I$. Разделим отрезок $[x, y]$ пополам и через $[x_1, y_1]$ обозначим ту половину, левый конец которой лежит в U, а правый в V. Снова разделим $[x_1, y_1]$ пополам и т.д. По индукции построим последовательность стягивающихся отрезков $\{[x_k, y_k]\}$, такую что $x_k \in U$ и $y_k \in V$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть z — общая точка отрезков $[x_k, y_k]$. Поскольку $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = z = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, то z является граничной точкой как для U, так и для V, а т.к. U и V открыты, то $z \notin U$ и $z \notin V$, что противоречит условию $z \in I \subset U \cup V$. ■

Теорема 7. *Если функция $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ непрерывна на связном множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, то множество $f(S)$ связно в $\mathbb{R}^m$.*

▲ Если множество $f(S)$ несвязно, то существуют открытые в $\mathbb{R}^m$ множества U и V, что $f(S) = (f(S) \cap U) \cup (f(S) \cap V)$ и $f(S) \cap U \neq \varnothing$, $f(S) \cap V \neq \varnothing$. Тогда множества $f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(V)$ открыты в S (по критерию непрерывности), непусты и не пересекаются (т.к. U, V непусты и не пересекаются) и $S = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$, что невозможно, т.к. S связно. ■

Следствие (Теорема о промежуточных значениях). Если $f\colon S \to \mathbb{R}$ непрерывна на связном множестве $S \subset \mathbb{R}^n$, то f принимает все промежуточные значения (т.е. если $u, v \in f(S), u < v$, то $[u, v] \subset f(S)$).

▲ По T7 $f(S)$ — связное подмножество прямой. По T6 $f(S)$ — промежуток, который вместе с каждой парой своих точек содержит все точки, лежащие между ними. ■

Определение. Открытое связное множество называется *областью.*

Имеется класс множеств, для которых проверка связности оказывается несколько проще.

Определение. Множество E в $\mathbb{R}^n$ называется *линейно связным*, если для любых точек x, $y \in E$ существует непрерывная функция $\gamma\colon [a, b] \to E$ из некоторого отрезка $[a, b]$ в E такая, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$.

Пример. Покажем, что шар $U_r(a)$ — линейно связное множество.

Пусть x, $y \in U_r(a)$. Для $t \in (0, 1)$ рассмотрим точку $tx + (1-t)y$. Поскольку

$$|tx + (1-t)y - a| = |t(x-a) + (1-t)(y-a)| \leqslant t|x-a| + (1-t)|y-a| \leqslant tr + (1-t)r = r,$$

то эта точка лежит в $U_r(a)$. Осталось положить $\gamma\colon [0, 1] \to U_r(a)$, $\gamma(t) = tx + (1-t)y$, и воспользоваться определением линейной связности.

Лемма. *Линейно связное множество связно.*

▲ Предположим, что линейно связное множество E несвязно. Тогда существуют открытые в $\mathbb{R}^n$ множества U и V, что $E = (E \cap U) \cup (E \cap V)$ и $E \cap U \neq \varnothing$, $E \cap V \neq \varnothing$. Пусть $x \in U$ и $y \in V$. Так как множество E линейно связно, то существует непрерывная функция $\gamma\colon [a, b] \to E$, что $\gamma(a) = x$ и $\gamma(b) = y$. Тогда $\gamma^{-1}(U)$ и $\gamma^{-1}(V)$ — непустые непересекающиеся открытые в $[a, b]$ множества такие, что $[a, b] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V)$, но это противоречит связности отрезка $[a, b]$. ■