Algèbre linéaire I

(6 semaines)

(du lundi 5 février 2018 au vendredi 6 avril 2018)

Exercice 1

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifiez votre réponse.

1. $\mathbb{C}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $A = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) = 694\}$
4. $B = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) \geqslant 496\}$
5. $C = \{P \in \mathbb{R}[X],\ d^\circ(P) \leqslant 64\}$
6. $D = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P' = 0\}$
7. $E = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f \text{ croissante}\}$
8. $F = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f(0) = 0\}$
9. $G = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f \text{ paire}\}$
10. $H = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ \lim\limits_{+\infty} f = +\infty\}$
11. $I = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R},\ f \text{ continue}\}$
12. $J = \{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$
13. $K = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \text{ convergente}\}$
14. $L = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \text{ divergente}\}$
15. $M = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$
16. $N = \{(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n^2\}$
17. $O = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$
18. $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 1\}$
19. $Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ xy = 0\}$
20. $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 = z^2\}$

Exercice 2

Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev E. Montrer que

$$F \cup G \text{ sev de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Exercice 3

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - y - z = 0\}$ et $G = \{(a + b, a, a + 3b); (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Montrer que F et G sont des $\mathbb{R}$-ev.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et F, G et H trois sev de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \oplus H = E$. Peut-on en conclure que $G = H$? Justifier votre réponse.

Exercice 5

Soient A et B deux parties d'un $\mathbb{R}$-ev E. Montrer que

$$\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$$

Exercice 6

Soient $u_1 = (1, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 0, 0, 1)$ et $u_4 = (0, 1, 0, 1)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$.
Montrer que $\text{Vect}(u_1, u_2)$ et $\text{Vect}(u_3, u_4)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 7

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$ et $G = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}^3\}$.
Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8

Soient $F = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ telle que } f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $G = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \text{ telle que } \exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ f(x) = k\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^\mathbb{R} = F \oplus G$.

Exercice 9

Considérons le sev F de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(1) = f(2) = 0$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

Exercice 10

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sev de E. Soit $X = \{x_1, ..., x_n\} \subset E$

1. Montrer que $\text{Vect}(F \cup G) = F + G$
2. Montrer que $\text{Vect}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i ;\ (\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n \right\}$

Exercice 11

Exprimer les $\mathbb{R}$-ev suivants sous forme de sous-espaces vectoriels engendrés :

1. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y \text{ et } z = 0\}$
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y\}$
3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = y = z\}$
4. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y = 0 \text{ et } x + z = 0\}$
5. $I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - y + z = 0\}$
6. $J = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tel que } x - z = 0 \text{ et } 3x + 2y + 3z = 0\}$
7. $K = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5 \text{ tel que } x + y + t = 0,\ x - u + t = 0,\ y + z + u = 0 \text{ et } 2y + z + t = 0\}$

Exercice 12

Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{array} \right.$$ où les a_{ij} sont des réels.

2. $$\Delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2(X+1)P - (X^2 - 2X + 1)P' \end{array} \right. .$$

3. $$I : \left\{ \begin{array}{ccc} C^0(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$$ où $C^0(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Soit E, F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des $\mathbb{R}$-ev.
2. Montrer que f injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.
3. Montrer que f surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.

Exercice 14

Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$. On note comme d'habitude $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que : $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 15

Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Montrer que

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}\big(\mathrm{Ker}(g)\big)$.
2. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Exercice 16

Soient $f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y, x-y) \end{array} \right.$, $f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z, y-z, x+y) \end{array} \right.$

et $f_3 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(-1), P(0), P(1)\big) \end{array} \right.$.

Déterminer les noyaux de f_1, f_2 et f_3.

Exercice 17

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $(u,v) \in \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que

$$E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(v) \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$$

Exercice 18

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$p \circ f = f \circ p \Longrightarrow \big[f(\mathrm{Ker}(p)) \subset \mathrm{Ker}(p) \quad \text{et} \quad f(\mathrm{Im}(p)) \subset \mathrm{Im}(p)\big]$$

Exercice 19

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, p un projecteur (c'est-à-dire $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p$ où $p^2 = p \circ p$) et $s = 2p - id$ où id est l'endomorphisme identité de E.

1. Montrer que $id - p$ est un projecteur.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(id - p) = \mathrm{Ker}(p)$.
4. Montrer que $s^2 = id$.
5. Soit $(y, z) \in \mathrm{Im}(p) \times \mathrm{Ker}(p)$. Montrer que $s(y + z) = y - z$.
6. Soit $\Theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & g \end{array} \right.$ où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$

   Montrer que Θ est un projecteur puis déterminer $\mathrm{Ker}(\Theta)$ et $\mathrm{Im}(\Theta)$.

Exercice 20

1. Factoriser le polynôme $X^2 - 5X + 6$.
2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que $f^2 - 5f + 6id = 0$.
   a. Vérifier que $(f - 2id) - (f - 3id) = id$.
   b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f - 2id) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3id) = E$.

Exercice 21

Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées

1. dans $\mathbb{R}^2$: $\big((1,2),(3,5)\big)$
2. dans $\mathbb{R}^3$: $\big((1,2,3),(1,-2,-3),(3,-2,-3)\big)$
3. dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\big(1, X+1, (X-1)^2\big)$
4. dans $\mathbb{R}^{]-1,1[}$: $\left(f : x \mapsto \dfrac{1}{x-1} \; ; \; g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}\right)$
5. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $(f : x \mapsto x \; ; \; g : x \mapsto |x| \; ; \; h : x \mapsto 1 - x)$
6. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\big(f : x \mapsto 1 \; ; \; g : x \mapsto \cos^2(x) \; ; \; h : x \mapsto \cos(2x)\big)$
7. dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\big(f : x \mapsto e^x \; ; \; g : x \mapsto e^{x+1} \; ; \; h : x \mapsto e^{x+2}\big)$

Exercice 22

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathscr{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?
2. $\mathscr{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. $\mathscr{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Exercice 23

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les 3 vecteurs $u = (1, 1, -1)$, $v = (-1, 1, 1)$ et $w = (1, -1, 1)$. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ dans cette base.

Exercice 24

Soient $P_0 = 1$; $P_1 = 1 + X$, $P_2 = (1 + X)^2$ et $P_3 = (1 + X)^3$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soit $Q = X^3 + 2X^2$. Donner les coordonnées de Q dans $\mathscr{B}$.
3. En déduire une primitive de $x \longmapsto (x^3 + 2x^2)(1 + x)^{3/2}$

Exercice 25

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a_1, a_2, ..., a_n des réels deux à deux distincts. Pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on note

$$L_i(X) = \prod_{k \neq i} \left(\frac{X - a_k}{a_i - a_k} \right)$$

Montrer que $B = (L_1, ..., L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Exercice 26

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f et exhiber une de ses bases.
3. Déterminer l'image de f.

Exercice 27

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y+z \\ x \end{pmatrix} \end{array} \right.$

1. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension en exhibant une de ses bases.
2. Déterminer l'image de f.

Exercice 28

Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y) \end{array} \right.$

1. Déterminer le noyau de f et donner sa dimension en exhibant une de ses bases. En déduire la dimension de l'image de f.
2. Soit $u = e_1 + e_2$ et $v = e_2 - e_3$. Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
3. En déduire que (u, v) est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 29

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie n paire et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\left(f^2 = 0 \text{ et } \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big) = \frac{n}{2}\right) \iff \big(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)\big)$$

Exercice 30

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que

$$\big(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)\big) \iff \big(E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)\big)$$