Corrigé du contrôle 2

Exercice 1 (4,5 points)

1. En posant $u(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ et $v'(x) = 1$, on a $v(x) = x$ et

$$u'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   Donc $I = \left[x \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$.

   Ainsi $I = 1 - \sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

2. En posant $u = \sqrt{t}$, on a $t = u^2$ donc $\mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$.

   Ainsi $J = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

   donc $J = 2\Big[\arctan(u)\Big]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

3. En posant $u = \ln(t)$, on a $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$.

   Ainsi $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\Big[\ln(1+u^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 2 (2 points)

1. On peut en conclure que $(w_n) = (u_n + v_n)$ est divergente. En effet supposons par l'absurde que (w_n) converge alors $(v_n) = (w_n - u_n)$ convergerait (comme somme de deux suites convergentes) ce qui contredit l'hypothèse.

2. On ne peut rien conclure comme l'illustrent les 2 exemples suivants :

   $(u_n) = (n)$ et $(v_n) = (1-n)$. (u_n) et (v_n) divergent et $(u_n + v_n) = (1)$ converge.
   $(u_n) = (n)$ et $(v_n) = (e^n)$. (u_n) et (v_n) divergent et $(u_n + v_n) = (n + e^n)$ diverge.

Exercice 3 (3,5 points)

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \times \dfrac{n^n}{n!} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \leqslant 1$, donc (u_n) est décroissante.

   Comme de plus la suite réelle (u_n) est minorée par 0, elle est convergente.

3. $u_n = \dfrac{n}{n} \times \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n} \times \cdots \times \dfrac{2}{n} \times \dfrac{1}{n}$.

   Comme les $n-1$ premiers termes positifs de ce produit sont inférieurs ou égaux à 1, on a $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

4. On a donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (u_n) converge vers 0.

Exercice 4 (2 points)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n}$$
u_n est donc la somme de n termes dont le plus grand est $\frac{1}{n^2+1}$. Ainsi
$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$
Or
$$\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
Donc, via le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$nu_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$
nu_n est donc la somme de n termes dont le plus grand est $\frac{n}{n^2+1}$ et le plus petit est $\frac{n}{n^2+n}$. Ainsi
$$\frac{n^2}{n^2+n} \leqslant nu_n \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}$$
Or
$$\frac{n^2}{n^2+n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$
et
$$\frac{n^2}{n^2+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$
Donc, via le théorème des gendarmes, (nu_n) converge vers 1.

Exercice 5 (3 points)

1. $n^2\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right) = n^2\left(\left(1+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{1/2}-1\right) = n^2\left(1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)-1\right).$

   Donc $n^2\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right) = \frac{1}{2}+o(1).$

   Ainsi, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2\left(\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-1\right) = \frac{1}{2}.$

2. $\left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\ln\left[\ln(e)+\ln\left(1+\frac{1}{en}\right)\right]}.$

   Donc $\left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{en}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{n\left(\frac{1}{en}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{\frac{1}{e}+o(1)}.$

   Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\ln\left(e+\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{\frac{1}{e}}.$

Exercice 6 (3 points)

Soit $n \geqslant 1$.

$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2}$$

soit encore $v_{n+1} - v_n = -\dfrac{1}{n(n+1)^2} \leqslant 0$ donc (v_n) est décroissante.

$v_n - u_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ainsi (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 7 (3 points)

1. E est un $\mathbb{R}$-ev car c'est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}[X]$.

   En effet, $E \subset \mathbb{R}[X]$, $E \neq \emptyset$ puisque le polynôme nul est dans E.

   D'autre part, si $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda P + Q \in E$ car

   $$(\lambda P + Q)(1) = \lambda P(1) + Q(1) = \lambda P'(2) + Q'(2) = (\lambda P + Q)'(2)$$

2. F est un $\mathbb{R}$-ev car c'est un sev du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$.

   En effet, $E \subset \mathbb{R}^2$, $E \neq \emptyset$ puisque le vecteur nul $(0,0)$ est dans E.

   D'autre part, si $\big(u = (x,y), v = (x', y')\big) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y') \in F$ car

   $$\sqrt{\pi}(\lambda x + x') - \ln(3)(\lambda y + y') = \lambda\big(\sqrt{\pi}x - \ln(3)y\big) + \sqrt{\pi}x' - \ln(3)y' = 0$$

3. G n'est pas un $\mathbb{R}$-ev car par exemple $(u_n) = \big((-1)^n\big) \in G$, $(v_n) = \big(1 - (-1)^n\big) \in G$ mais $(u_n) + (v_n)$ qui est la suite constante égale à 1 n'est pas dans G.