第二章 最优投资组合理论的数学分析

例　　子

- Triad共同投资基金公司允许其客户投资在以下几种证券
  - 国债1030(101030)：回报率为 5.7%.
  - 天坛生物： 期望回报率为 19%， 回报率标准差为 25%.
  - 招商银行：期望回报率为 10%， 回报率标准差为 15%.

因思想 而光华

- 你的客户倾向于投资招商银行，因为他不愿意承担天坛生物那么高的风险，又希望投资的回报比国债高。

- 投资者目标的刻画：理性框架与行为框架
- 证券回报率的期望值
  - 如何估计
  - 如果估计有偏差，有什么后果，如何控制不良结果?
- 风险的度量：方差、损失概率、峰度与偏度、值风险
- 如果你是 Triad 投资公司的咨询顾问，你是否有更好的投资方法，使得客户的投资在不增加风险的条件下，有更高的期望回报率
- 是否存在策略，回报为8%，但不承担风险
- 是否对不同的客户，提出不同的投资策略
- 如果有更多的证券可供投资，结论又如何?
- 融资融券限制对投资的影响
- 有哪些交易成本? 交易成本对投资的影响?
- 如果你有确切的信息，天坛生物的收益率被高估4%，如何修改投资决策；如果你只有30%的把握，天坛生物的收益率被高估4%，如何修改投资决策?
- 如何随着环境变化调整投资策略?

本章主要内容

- 投资者投资目标的刻画
- Markowitz模型的数学分析
- Behavioral Portfolio Theory (BPT)
- 投资中的个人信息处理
  - Black-Litterman 模型
- 投资中的交易成本

投资过程

- 确定投资目标
  - 风险与收益的权衡
- 宏观分析和证券分析
  - 证券分析：基本分析、技术分析
- 构造最优投资组合
  - 择时：资本配置、资产配置
  - 选股：证券选择
- 调整最优投资组合
- 业绩评估

投资过程

- 哪一步最体现能力?
- 给定原材料，构造最优投资组合
- Garbage in and garbage out

一、投资者需求

一期模型

- 一期投资模型：投资者在期初投资，在期末获得回报。
  - 一期模型是对现实的一种近似，如对零息债券、欧式期权的投资。
  - 虽然许多问题不是一期模型，但作为一种简化，对一期模型的分析是分析多期模型的基础。

- 建立在期望效用最大化基础之上的资产定价和消费选择是一种非常广泛和完美的方法。
- 但是，期望效用模型无法描述投资者的许多实际行为，需要行为模型来进行补充。

1.1 Markowitz模型

- 从Markowitz(1952)提出了资产选择的均值-标准差模型以后，这种模型得到了长足发展。尽管均值-标准差不能用来完全刻画个体的偏好，但由于它的灵活性以及经验上的可检验性，均值-标准差分析得到了广泛的应用。

二次效用函数和服从正态分布的资产回报率

- 一般来说，资产回报率的均值和标准差并不能完全包含个体作选择时所需要的信息。但是，在一定的假设之下，个体的期望效用函数能够仅仅表示为资产回报率均值和标准差的函数，从而，投资者可以只把资产回报率的均值和标准差作为选择的目标。
- 当效用函数是二次函数或者资产回报率服从正态分布时，均值-标准差可以用来完全刻画个体的偏好。

二次效用函数和服从正态分布的资产回报率

假设个体的初始财富为w_0，个体通过投资到各种金融资产上来最大化他的期末财富$\tilde{w}$带来的期望效用。设个体的Von-Neumann-Morgonstern效用函数为u，在期末财富的期望值这一点，对效用函数进行Taylor展开：

$$u(\tilde{W}) = u\left(E[\tilde{W}]\right) + u'\left(E[\tilde{W}]\right)\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right) + \frac{1}{2}u''\left(E[\tilde{W}]\right)\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right)^2 + R_3$$

这里 $R_3 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} u^{(n)}\left(E[\tilde{W}]\right)\left(\tilde{W} - E[\tilde{W}]\right)^n$

二次效用函数和服从正态分布的资产回报率

假设上述Taylor展式收敛且期望运算和求和运算可以交换顺序，则个体的期望效用可以表示成：

$$E\left[u(\tilde{W})\right] = u\left(E[\tilde{W}]\right) + \frac{1}{2}u''\left(E[\tilde{W}]\right)\sigma^2\left(\tilde{W}\right) + E[R_3] \qquad (1)$$

这里，

$$E[R_3] = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}u^{(n)}\left(E[\tilde{W}]\right)m^n(\tilde{W}) \qquad (2)$$

而 $m^n\left(\tilde{W}\right)$ 表示 $\tilde{W}$ 的 n 阶中心矩。

(1)式说明个体偏好不仅依赖于财富的期望和方差，还依赖财富的高阶矩。但是，当所有的高阶矩为0，或者高阶矩是期望和方差的函数时，期望效用就仅仅只是期望和方差的函数，从而均值-方差可以用来完全刻画个体的偏好。下面的定理说明了这个条件成立的充分性。

二次效用函数和服从正态分布的资产回报率

定理： 如果u是一个整解析函数，则

(a) 对任意分布的期末财富$\tilde{W}$，存在函数$v(\cdot):R\to R$使得，$E\left[u(\tilde{W})\right]=v\left(E(\tilde{W}),Var(\tilde{W})\right)$当且仅当$u(\tilde{W})=a+b\tilde{W}+c\tilde{W}^2$，这里，$a,b,c$为常数。

(b) 对任意偏好函数u，如果期末财富$\tilde{W}$服从正态分布，则存在函数$v(\cdot):R\to R$，使得，

$$E\left[u(\tilde{W})\right]=v\left(E(\tilde{W}),Var(\tilde{W})\right)。$$

注： 1. 尽管二次效用函数有这样好的性质，但二次效用函数有满足性和递增的绝对风险回避。

2. 由于正态分布是关于中心轴对称的，所以与一般股票的责任有限性相矛盾。

无差异曲线

- 当期末财富 服从正态分布时，期望效用只由回报率的期望和标准差就可定义，
  - 通过均值-标准差选择来决定取舍——无差异曲线
  - 无差异曲线的形状
  - 选择效用最大的无差异曲线

无差异曲线

由回报率的定义，当期末财富服从正态分布时，回报率也服从正态分布，所以，我们不妨就设资产的回报率服从以$\bar{r}$为均值，以σ为标准差的正态分布时,这时我们能够把效用函数表示成

$$U = U(r;\bar{r},\sigma)$$

由定理，期望效用为

$$V(\bar{r},\sigma) \equiv E(U) = \int_{-\infty}^{\infty} U(r) f(r;\bar{r},\sigma) dr$$

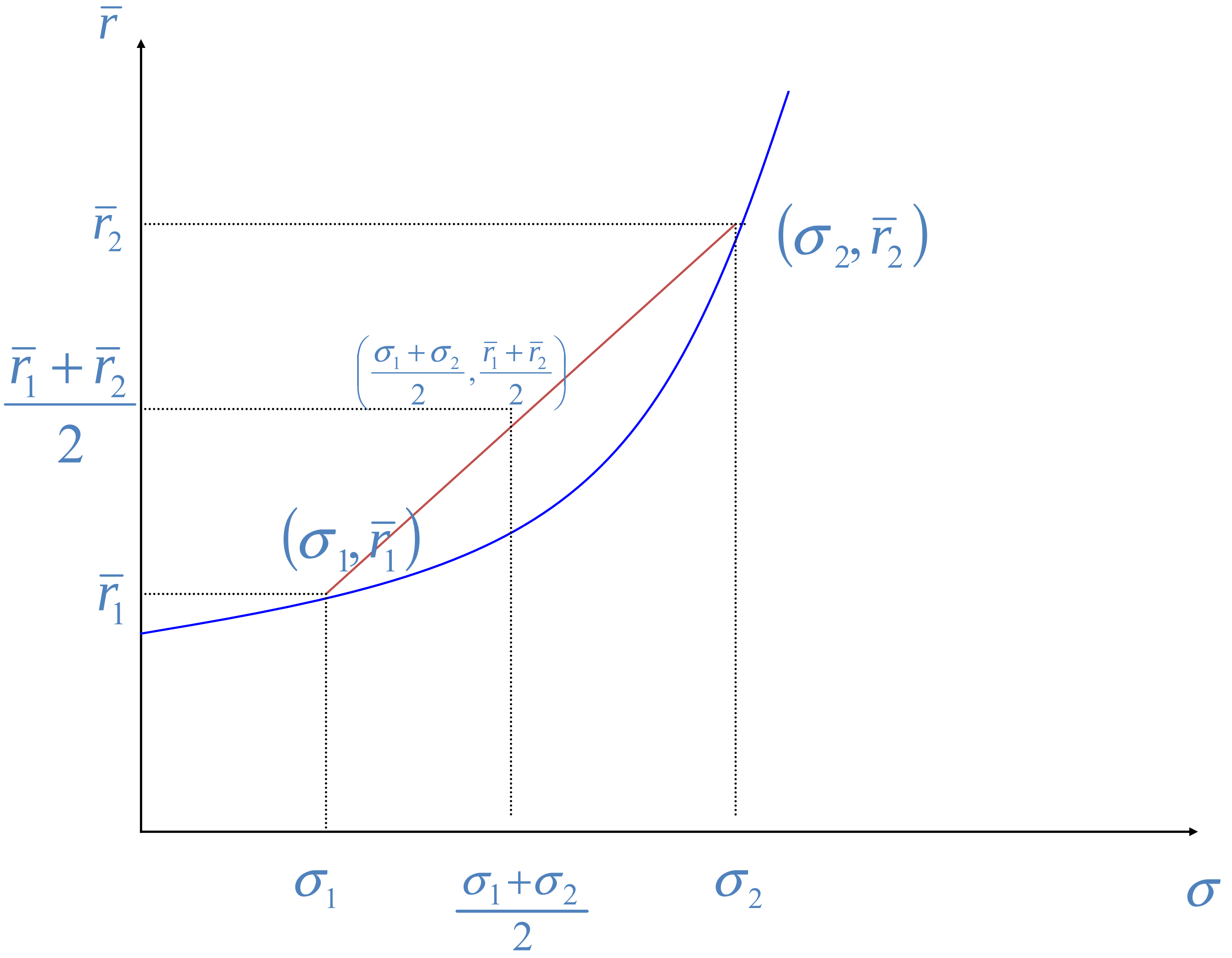
即，期望效用可以表示成均值与标准差的函数，从而，我们可以把无差异曲线表示成均值与标准差的函数，即，在均值—方差平面上的无差异曲线。下面的定理说明了风险厌恶者的无差异曲线是凸的。

无差异曲线

- 定理：当资产的回报率 $\tilde{r}$ 服从以 $\bar{r}$ 为均值，以 σ 为标准差的正态分布时，风险厌恶者的回报与风险之间的边际替代率是正的，无差异曲线是凸的，并且，位于更西北方向的无差异曲线的效用更高。

因思想 而光华

风险回避者的无差异曲线



投资者需求

- 所有风险厌恶者的无差异曲线如图中所示：在均值-标准差平面上，为严格增的凸函数，并且，越在西北方的无差异曲线，其效用越高。

问题思考

- 风险的度量
  - 标准差
  - 半方差
  - 损失概率
  - 三阶矩、四阶矩
- 对风险的态度
  - 风险厌恶

对风险的认知

- 所有当前的风险或不确定性下的选择理论都是认知的和结果论的。他们假设人们评估选择方案的各种结果的可能性，并通过某种基于期望的演算来整合这些信息，从而做出决策。
  - 期望效用理论认为，风险选择可以通过假设人们评估选择方案可能结果的严重性和可能性来预测（尽管是主观的，也可能带有偏见或错误），并通过某种基于预期的演算来整合这些信息，从而得出决策。
  - 决策情境和迫在眉睫的风险选择引发的情绪被视为附带现象，也就是说，不是决策过程的组成部分。从这个意义上说，这里假设风险决策本质上是一种认知活动。
- 另一种理论观点，即"感知风险假说"，强调了决策时所经历的情感的作用。根据临床、生理学和其他心理学子领域的研究，他们表明，对危险情况的情绪反应往往与对这些风险的认知评估有关。
- Loewenstein， Weber， Hsee，Welch，Risk as Feelings，Psychological Bull ，2001.
- Gao, Liu, Shi，Do people feel less at risk? Evidence from disaster experience，JFE，2020.

1.2 行为模型

- 前景理论（PT）的三个主要结论
  - （a）个人根据财富的变化而不是总财富做出决策；
  - （b）风险规避并不是全局普遍存在的，个人在损失方面寻求风险；
  - （c）个人扭曲客观概率，并以系统的方式主观地改变它们。
- Tversky和Kahneman（1992）扩展了PT并提出了累积前景理论，其中进行转换的是累积概率而不是概率本身。

二、选择投资组合

已知收益和风险

假设无摩擦证券市场上存在N种可交易风险资产，所有资产回报率期望和方差均有限且期望互不相等，N种风险资产线性独立（任何一种资产的风险回报不能表示成别的资产的风险回报的线性组合）。N种风险资产回报率以向量$\tilde{r}$表示，$\tilde{r}=(\tilde{r}_1,\cdots,\tilde{r}_N)^T$，$\bar{r}$表示其期望值向量，$\bar{r}=(\bar{r}_1,\cdots,\bar{r}_N)^T$。$N$种风险资产回报率的协方差矩阵以$V$表示

$$V=\begin{pmatrix} Var(\tilde{r}_1) & Cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_2) & \cdots & Cov(\tilde{r}_1,\tilde{r}_N) \\ Cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_1) & Var(\tilde{r}_2) & \cdots & Cov(\tilde{r}_2,\tilde{r}_N) \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ Cov(\tilde{r}_N,\tilde{r}_1) & Cov(\tilde{r}_N,\tilde{r}_2) & \cdots & Var(\tilde{r}_N) \end{pmatrix}。$$

V是对称的。因为对于任意的N维常数向量$w=(w_1,\cdots,w_N)^T$，$w\neq 0$， $\sum w_i\tilde{r}_i\neq 0$，有$Var(\sum w_i\tilde{r}_i)>0$，所以$V$是正定的。

例如：三只股票A，B，C

- 假设A，B，C三只股票期望回报率为

$$\bar{r} = (0.162, 0.246, 0.228)'$$

- 方差-协方差矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{bmatrix}$$

2.1 Markowitz框架

- 以投资组合收益率的期望值刻画收益
- 以投资组合收益率的方差刻画风险

数学分析：
不具有无风险资产的有效证券组合前沿

定义：一个证券组合 w_p 称为**前沿证券组合**，如果它在所有具有相同期望回报的证券组合中具有最小方差，即：w_p 是如下二次规划的解

$$\min_{\{w\}} \frac{1}{2} w^T V w$$

s.t.

$$w^T \bar{r} = E\left[\tilde{r}_p\right]$$

$$w^T \vec{1} = 1$$

这里 $\vec{1} = (1, \cdots, 1)$ 是每个分量均为1的N维向量。

思考题

- 风险度量？
- 有哪些交易成本？如何加入交易成本？
- 多期模型？

不具有无风险资产的有效证券组合前沿

构造Lagrangian乘子：

$$L = \frac{1}{2} w^T V w + \lambda\left(E(r_p) - w^T \bar{r}\right) + \gamma\left(1 - w^T \vec{1}\right)$$

这里 λ, γ 是正常数。

求一阶条件：

$$\frac{\partial L}{\partial w} = V w_p - \lambda \bar{r} - \gamma \bar{1} = \vec{0} \qquad (10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E[r_p] - w_p{}^T \bar{r} = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = 1 - w_p{}^T \vec{1} = 0 \qquad (12)$$

这里 $\vec{0}$ 是0的N维向量。

因思想 而光华

不具有无风险资产的有效证券组合前沿

引入下列记号：

$$
\begin{aligned}
A &= \bar{1}^T V^{-1}\bar{r} = \bar{r}^T V^{-1}\bar{1} \\
B &= \bar{r}^T V^{-1}\bar{r} \\
C &= \bar{1}^T V^{-1}\bar{1} \\
D &= BC - A^2
\end{aligned}
$$

由 V 的正定性知 $B > 0, C > 0$ 。

因为 $(A\bar{r} - B\bar{1})^T V^{-1}(A\bar{r} - B\bar{1}) = B(BC - A^2)$ ，由 V 的正定性知 $D > 0$ 。

由 V 的正定性知满足一阶条件也是充分条件。

因思想 而光华

不具有无风险资产的有效证券组合前沿

回报率为 $E[r_p]$ 的唯一前沿证券组合

$$w_p = g + hE[r_p] \tag{13}$$

这里

$$g = \frac{1}{D}\left[B(V^{-1}\bar{1}) - A(V^{-1}\bar{r})\right]$$

$$h = \frac{1}{D}\left[C(V^{-1}\bar{r}) - A(V^{-1}\bar{1})\right]$$

因为一阶条件是 w_p 以 $E[\tilde{r}_p]$ 为期望回报率的前沿证券组合的充要条件，所以，任何前沿证券组合均可表示成(13)式，反过来，由(13)式表示的任何证券组合均为前沿证券组合。所有前沿证券组合的集称为**证券组合前沿**。

性质

性质： g是回报为0的前沿证券组合，$g+h$是回报为1的前沿证券组合。

性质： 整个证券组合前沿可以由前沿证券组合g和$g+h$生成。

性质： 整个证券组合前沿可以由任何两个不同的前沿证券组合生成。

性质： 前沿证券组合的任何线性组合仍为前沿证券组合。

证券组合前沿方程

对于任何两个前沿证券组合，其回报率的协方差为：

$$Cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = w_p^T V w_q = \frac{C}{D}\left[E(\tilde{r}_p) - \frac{A}{C}\right]\left[E(\tilde{r}_q) - \frac{A}{C}\right] + \frac{1}{C} \qquad (14)$$

从而，对于任意前沿证券组合，其回报率的期望和标准差满足如下的方程：

$$\frac{\sigma^2(\tilde{r}_p)}{1/C} - \frac{\left(E\left[\tilde{r}_p\right] - A/C\right)^2}{D/C^2} = 1 \qquad (15)$$

证券组合前沿

在均值—标准差平面上，方程(15)是以$(0, A/C)$为中心，以$E[\tilde{r}_p] = A/C \pm \sqrt{\frac{D}{C}}\sigma(\tilde{r}_p)$为渐进线的双曲线。如下图：

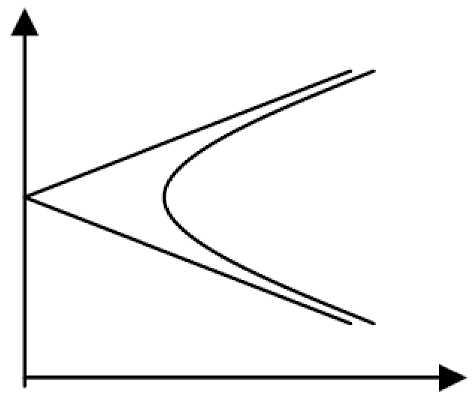


图 均值—标准差平面的证券组合前沿

注： 所有组合只能在双曲线的右侧。

最小分差证券组合

在图中，点$\left(\sqrt{1/C}, A/C\right)$是所有可行证券组合中具有最小方差的点，我们称为**最小方差证券组合**，以 mvp 表示。关于 mvp，有如下的性质：

性质： 最小方差证券组合回报率与任意证券组合（不一定是前沿证券组合）回报率的协方差总等于最小方差证券组合回报率的方差。即：

$$Cov\left(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}\right) = Var\left(\tilde{r}_{mvp}\right) = \frac{1}{C} \qquad (16)$$

有效证券组合

- 定义：比MVP回报率高的前沿证券组合称为有效证券组合，既不是有效证券组合又不是 MVP的前沿证券组合称为非有效证券组合。
- **性质**：有效证券组合的任何凸组合仍为有效证券组合。

零—协方差证券组合

性质：对于前沿上的任意证券组合p， $p \neq mvp$， 均存在唯一的前沿证券组合， 以 $zc(p)$ 表示， 使得 $Cov\left(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{zc(p)}\right) = 0$ 。 该证券组合称为p的**零-协方差证券组合。**

证明：由(14)式有

$$Cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q) = w_p^T V w_q = \frac{C}{D}\left[E(\tilde{r}_p) - \frac{A}{C}\right]\left[E(\tilde{r}_q) - \frac{A}{C}\right] + \frac{1}{C}$$

令上式等于零，得到

$$E\left[\tilde{r}_{zc(p)}\right] = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{E\left[\tilde{r}_p\right] - A/C} \qquad (17)$$

从而，得到存在性和唯一性。 #

零—协方差证券组合

注：(1). 由(17)式知，$E[\tilde{r}_p] = A/C - \dfrac{D/C^2}{E[\tilde{r}_{zc(p)}] - A/C}$，所以 $zc(p)$ 的零—协方差证券组合为p，即，$zc(zc(p)) = p$。

(2). 由 (13) 式 知 ， 对 任 何 前 沿 证 券 组 合 p ，$Cov(\tilde{r}_p, \tilde{r}_{mvp}) = \dfrac{1}{C} > 0$，所以 mvp 不存在零—协方差证券组合。

(3). 由(17)式知，如果p是有效证券组合，则 $E[\tilde{r}_{zc(p)}] < A/C$，从而为非有效证券组合。反之亦成立。

(4). 在均值—方差平面上，过p点作证券组合前沿的切线，交于纵轴，交点的纵坐标即为$E[\tilde{r}_{zc(p)}]$。

任意证券组合与前沿证券组合*p*和 *zc(p)*的关系。

设 p 为一前沿证券组合， $p \neq mvp$， q 为任意一个证券组合，$\tilde{r}_p$ 与 $\tilde{r}_q$ 之间的协方差为

$$Cov\left(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q\right) = w_p{}^T V w_q = \frac{CE\left[\tilde{r}_p\right] - A}{D} E\left[\tilde{r}_q\right] + \frac{B - AE\left[\tilde{r}_p\right]}{D},$$

从而

$$E\left[\tilde{r}_q\right] = \left(1 - \beta_{qp}\right) E\left[\tilde{r}_{zc(p)}\right] + \beta_{qp} E\left[\tilde{r}_p\right], \tag{18}$$

这里，

$$\beta_{qp} = \frac{Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}。 \tag{19}$$

即：任意证券组合 q 的期望回报率可以表示成 p 与 $zc(p)$ 的线性组合，权分别为 $\beta_{qp}, 1 - \beta_{qp}$ 。

零—协方差证券组合

因为 $zc(zc(p)) = p$，所以

$$E[\tilde{r}_q] = (1-\beta_{qzc(p)})E[\tilde{r}_p] + \beta_{qzc(p)}E[\tilde{r}_{zc(p)}]。$$

由 $E[\tilde{r}_p] \neq E[\tilde{r}_{zc(p)}]$ 知

$$\beta_{qzc(p)} = 1 - \beta_{qp}，$$

所以有

$$E[\tilde{r}_q] = \beta_{qp}E[\tilde{r}_p] + \beta_{qzc(p)}E[\tilde{r}_{zc(p)}]。$$

问题

- 给我们什么样的启示?

数学分析：
具有无风险资产的有效证券组合前沿

- 关于无风险债券，指的是回报率确定的证券，投资者在期初购买这种证券时，就确定地知道期末的回报。通常来说，企业发行的债券具有违约风险，所以不是无风险证券。而政府发行的国库券违约的可能性很小，可以视为无风险证券。我们购买国库券相当于贷款给政府，而卖空国库券相当于向政府借钱，**所以买卖债券只不过是手段，而实质是存在无风险借贷的市场**。因此，当我们谈到存在无风险债券和存在无风险借贷的机会时，指的是一回事，我们将交差使用这两种术语。

具有无风险资产的有效证券组合前沿

假设无摩擦的证券市场存在 N 种风险资产和一种无风险资产。N 种风险资产满足在本节一开始给出的假设。以 r_f 表示无风险利率。设 p 是由所有 $N+1$ 种上市资产形成的一个前沿证券组合，w_p 表示在 N 种风险资产上的权，则 w_p 是如下规划的解：

$$\min \frac{1}{2} w^T V w$$

$$\text{s.t. } w^T \bar{r} + (1 - w^T \vec{1}) r_f = E\left[\tilde{r}_p\right]$$

具有无风险资产的有效证券组合前沿

由Lagrangian方法，得

$$w_p = V^{-1}(\bar{r} - r_f \bar{1}) \frac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{H}, \tag{20}$$

这里，

$$H = (\bar{r} - r_f \bar{1})^T V^{-1} (\bar{r} - r_f \bar{1}) = B - 2Ar_f + Cr_f^{\,2} > 0 。$$

p 的回报率的方差为

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = w_p^{\,T} V w_p = \frac{\left(E[\tilde{r}_p] - r_f\right)^2}{H}, \tag{21}$$

等价的，(21)可以写成

$$\sigma(\tilde{r}_p) = \begin{cases} \dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} \\ -\dfrac{E[\tilde{r}_p] - r_f}{\sqrt{H}} \end{cases} \quad 如果 \begin{cases} E[\tilde{r}_p] \geq r_f \\ E[\tilde{r}_p] \leq r_f \end{cases} 。 \tag{22}$$

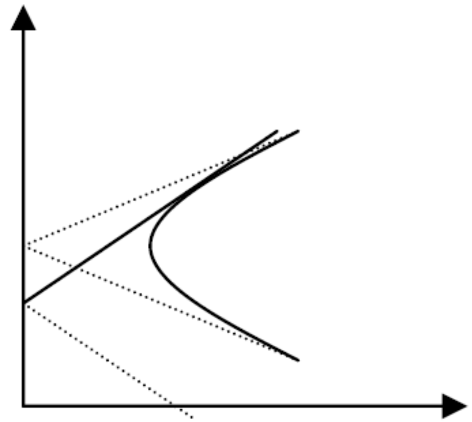
具有无风险资产的有效证券组合前沿

即：所有 $N+1$ 种上市资产形成的证券组合前沿，由过点 $(0, r_f)$ 斜率分别为 $\sqrt{H}, -\sqrt{H}$ 的半射线组成。下面我们分情况讨论。

具有无风险资产的有效证券组合前沿

1. $r_f < A/C$

在这种情况下的证券组合前沿如下图所示



图当$r_f < A/C$时的证券组合前沿

这里，e是射线$r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$与所有风险资产形成的证券组合前沿的切点。现证明如下：

具有无风险资产的有效证券组合前沿

过点$(0, r_f)$作证券组合前沿的切线，由上一节关于零-协方差证券组合的内容知$E[\tilde{r}_{zc(e)}] = r_f$，所以$E[\tilde{r}_e] = A/C - \dfrac{D/C^2}{r_f - A/C}$，而该切线的斜率为

$$\frac{E[\tilde{r}_e] - r_f}{\sigma(\tilde{r}_e)} = \left(\frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{r_f - A/C} - r_f\right)\frac{C(r_f - A/C)}{\sqrt{H}} = \frac{H}{Cr_f - A}\frac{Cr_f - A}{\sqrt{H}} = \sqrt{H}$$

从而，该切线与射线$r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$重合。

在线段$\overline{r_f e}$上的任何证券组合是证券组合e与无风险证券的凸组合。而射线$r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$上其余的证券组合是卖空无风险证券而投资在风险资产上。由风险厌恶者无差异曲线的形状，我们知道投资者不会在射线$r_f - \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$上投资，即，有效集为位于射线$r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$上的前沿证券组合。

具有无风险资产的有效证券组合前沿

2． $r_f > A/C$

在这种情况下的证券组合前沿如下图所示

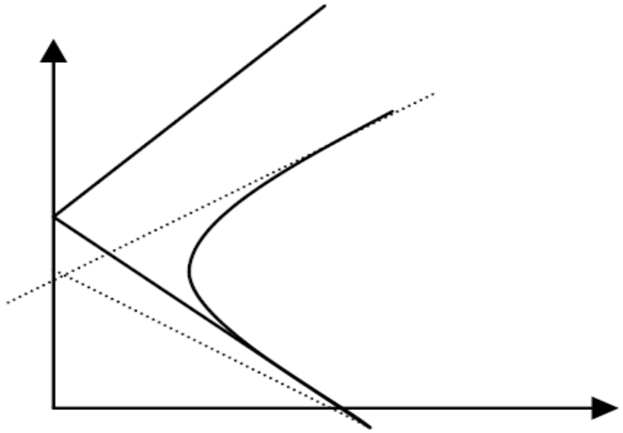


图 当 $r_f > A/C$ 时的证券组合前沿

射线 $r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$ 上的证券组合是卖空证券组合 e' 而投资在无风险资产上。同样地，由风险厌恶者无差异曲线的形状，我们知道不会在射线 $r_f - \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$ 上投资，即，有效集为位于射线 $r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$ 上的前沿证券组合。

具有无风险资产的有效证券组合前沿

3． $r_f = A/C$

在这种情形下，因为

$$H = B - 2Ar_f + Cr_f^{\,2} = B - 2A\left(A/C\right) + C\left(A/C\right)^2 = \frac{D}{C} > 0$$

所以，$E[\tilde{r}_p] = \dfrac{A}{C} \pm \sqrt{D/C}\,\sigma(\tilde{r}_p)$ 是风险资产形成的证券组合前沿的渐近线。同样地，由风险厌恶者无差异曲线的形状，我们知道不会在射线 $r_f - \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$ 上投资，即，有效集为位于射线 $r_f + \sqrt{H}\sigma(\tilde{r}_p)$ 上的前沿证券组合。在这种情况下的证券组合前沿如下图所示

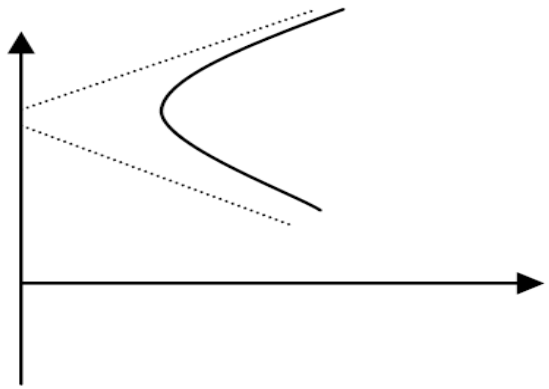


图 当 $r_f = A/C$ 时的证券组合前沿

具有无风险资产的有效证券组合前沿

在前两种情形下，证券组合前沿分别是由无风险资产和切点证券组合 e 和 e' 形成的。在这种情形下，由于不存在切点证券组合，证券组合前沿不可能由风险资产形成的前沿证券组合和无风险资产生成。由(20)式知道此时

$$\bar{1}^T w_p = \bar{1}^T V^{-1}\left(e - A/_C\,\bar{1}\right)\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H} = \left(A - \frac{A}{C}C\right)\frac{E[\tilde{r}_p]-r_f}{H} = 0$$

因此，任何前沿证券组合都把所有的财富投资在无风险资产上，而在风险资产上的净投资为零。

具有无风险资产的有效证券组合前沿

设 p 为一前沿证券组合，$E[\tilde{r}_p]\neq r_f$，q 为任意一个证券组合，由(20)式，$\tilde{r}_p$ 与 $\tilde{r}_q$ 之间的协方差为

$$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p{}^T V w_q=\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)\left(E[\tilde{r}_q]-r_f\right)\Big/H$$

由（21）式知

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\frac{Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)}{\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)^2\Big/H}\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)=\beta_{qp}\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right) \qquad (23)$$

这个式子独立于 r_f 与 A/C 之间的关系。

2.2 Behavioral Portfolio Theory

- PT的每一个主要要素都与MV分析的假设相矛盾
  - MV框架假设预期效用最大化和风险规避，而上述要素（a）和（b）与这两个假设相矛盾。
  - 如果个人主观地扭曲概率，MV分析似乎不合适，因为即使客观概率分布是正态的，主观分布也不是。
- 因此，MV框架似乎与PT完全不兼容
  - PT是否意味着应该放弃MV框架，而MV框架在金融领域如此重要？
  - 是否可以使用MV的一些有效机制（例如，它提供的有效的分散化算法）来使得带有PT偏好的投资者受益？

随机占优规则

- 使用随机占优规则来进行研究
  - 假设ε^1和ε^2是两个随机变量，则随机占优理论是与ε^1和ε^2的CDF上的某些条件有关，在这些条件下，对于某个集合$u \in U$
  $$E[u(\varepsilon^1)] < E\left[u\left(\varepsilon^2\right)\right]$$
  - 随机占优的标准概念涉及三种情况：
    - （a）U是所有递增函数的集合（一阶随机占优，FSD）；
    - （b）U是递增和凹函数的集合（二阶随机占优，SSD）；
    - （c） U是具有正三阶导数的递增和凹函数的集合（ u“‘>0，这反映了对正偏度的偏好）（三阶随机，TSD）。

随机占优规则

- 随机占优理论已扩展到S形函数集，包括Kahneman和Tversky（1979）提出的前景理论值函数族（前景随机占优，PSD），作为对不确定性下个人决策的更好描述。

一阶随机占优

- 设F和G是具有累积分布函数F(x)和G(x)的两个随机投资，并且设U_1表示所有非递减效用函数的集合。
- F一阶随机占优G（即$EU_F \geq EU_G$，对于所有效用函数$U \in U_1$）当且仅当

$$F(x) \leq G(x) \quad \text{对于所有}x\text{成立}$$

具有至少一个严格不等式成立。
- 当二者都是正态分布且$\sigma_F = \sigma_G$时，MV规则与FSD一致，即MV $\Leftrightarrow$ FSD。
- 请注意，期望效用能被扩展成为泰勒级数，以使得选择依赖于所有分布矩，例如，均值、方差、偏度等。然而，如果$F(x) \leq G(x)$对于所有x成立，则所有非递减效用函数都优先选择F而不是G，而不考虑对方差、偏斜和更高矩的偏好。

二阶随机占优

- 设F和G是具有累积分布函数F(x)和G(x)的两个随机投资，并且设U_2表示所有非递减且风险规避效用函数的集合。
- F二阶随机占优G（即$EU_F \geq EU_G$，对于所有效用函数$U \in U_2$）当且仅当

$$I_{SSD}(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} [G(z) - F(z)]dz \geq 0 \quad \text{对于所有}x\text{成立}$$

具有至少一个严格不等式成立。

- 当分布为正态时，Markowitz的MV规则与SSD一致，即SSD $\Leftrightarrow$ MV。换句话说，在具有正态分布和风险规避的期望效用框架下，MV是一个最优规则。

前景随机占优

- 设F和G是具有累积分布函数$F(x)$和$G(x)$的两个随机投资，并且设U_S表示所有S型效用（或值）函数的集合（对所有$x \neq 0$，$U' \geq 0$，对所有$x > 0$，$U'' > 0$，对所有$x < 0$，$U'' < 0$），则F前景随机占优G当且仅当

$$I_{PSD}(x) \equiv \int_{\underline{x}}^{\overline{x}} [G(z) - F(z)]dz \geq 0 \quad （4）$$

对于所有$\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$成立，且至少有一个严格不等式成立。

- 从图形上看，F前景随机占优G当且仅当对所有满足$\underline{x} \leq 0 \leq \overline{x}$的区间$[\underline{x}, \overline{x}]$，分布函数F和G在该区间上围住区域的面积是正的。

例子

- 为了说明PSD规则，考虑两个潜在选择，具有S型值函数的个体更青睐哪一个？

Two alternative investments

F		G	
Probability	Outcome	Probability	Outcome
1/4	−12	1/3	−10
1/4	3.5	1/3	5
1/4	10	1/3	15
1/4	14		

- 个体值函数

$$V(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & \text{if } x \geq 0 \\ -\lambda(-x)^{\beta} & \text{if } x < 0 \end{cases}, \tag{5}$$

- 参数值的选取

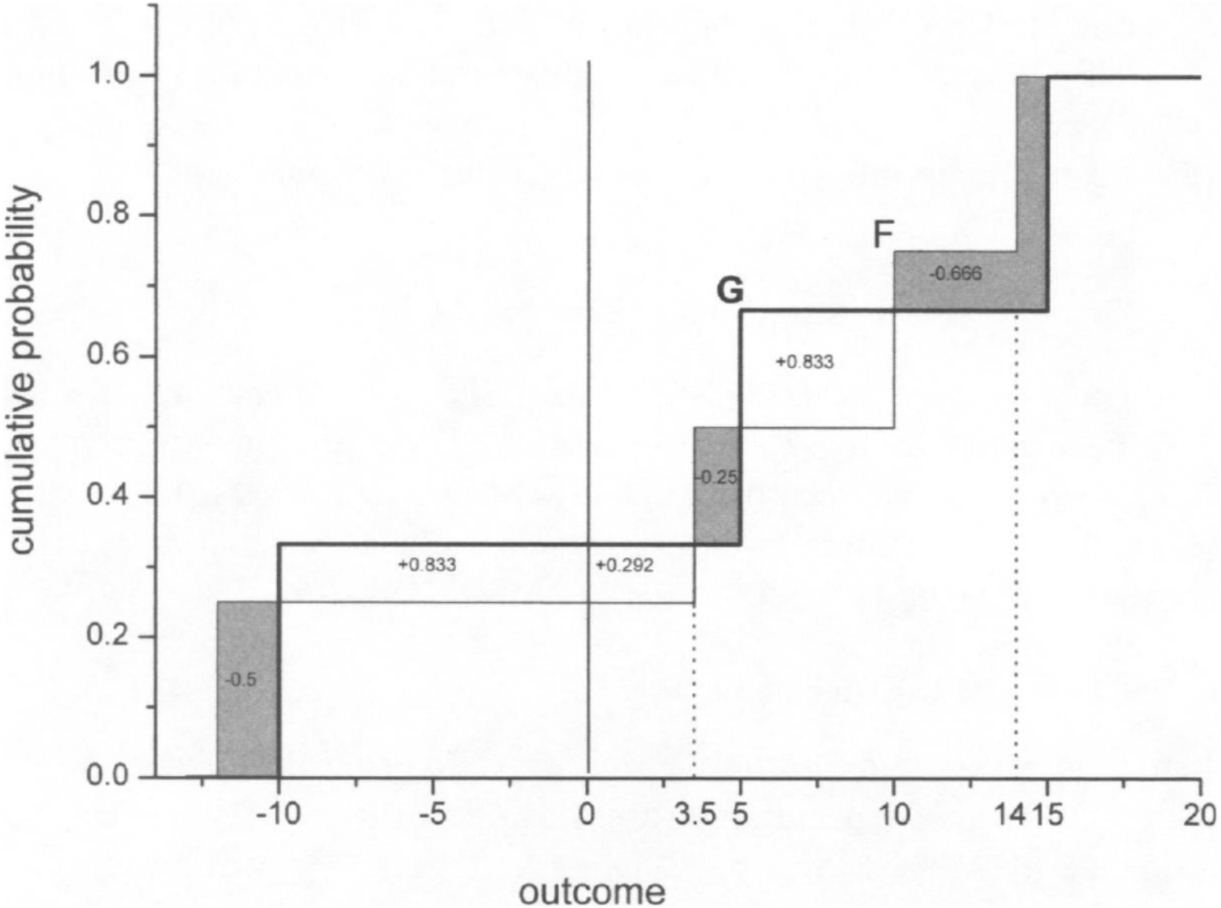
$$\alpha = \beta = 0.88，\lambda = 2.25$$

- 两个前景的期望值

$$EV_F = \tfrac{1}{4}(-2.25)(-(-12))^{0.88} + \tfrac{1}{4}3.5^{0.88} + \tfrac{1}{4}10^{0.88} + \tfrac{1}{4}14^{0.88} = 0.190$$
$$EV_G = \tfrac{1}{3}(-2.25)(-(-10))^{0.88} + \tfrac{1}{3}5^{0.88} + \tfrac{1}{3}15^{0.88} = -0.703.$$

- 因为$EV_F > EV_G$，这意味着具有上述参数的方程（5）S型偏好的个人更喜欢前景F而不是G。
- 对于具有不同参数的个人，或者具有完全不同的S形值函数形式的个体，该怎么选择？他们都喜欢F，还是有些S型值函数的人更喜欢前景G？PSD标准提供了一个答案。

两个累积分布之间的区域



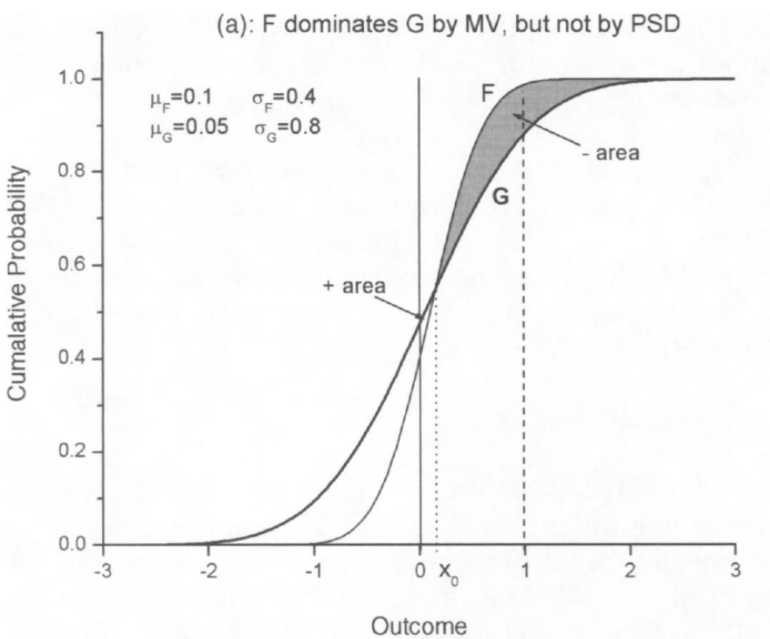
- 从图中很容易验证方程（4）成立，因此F通过PSD占优G。这意味着，对于这两个特定的前景，具有任何S形函数的个体（不仅是方程（5）给出的特定函数），更喜欢F而不是G。
- 在其他随机占优规则中，PSD规则的优势在于，它为所有具有S形偏好的个体的选择提供了一个标准，而不需要知道值函数的具体参数或精确函数形式。
- 该标准是基于投资组合框架中导出PSD有效集的基础。

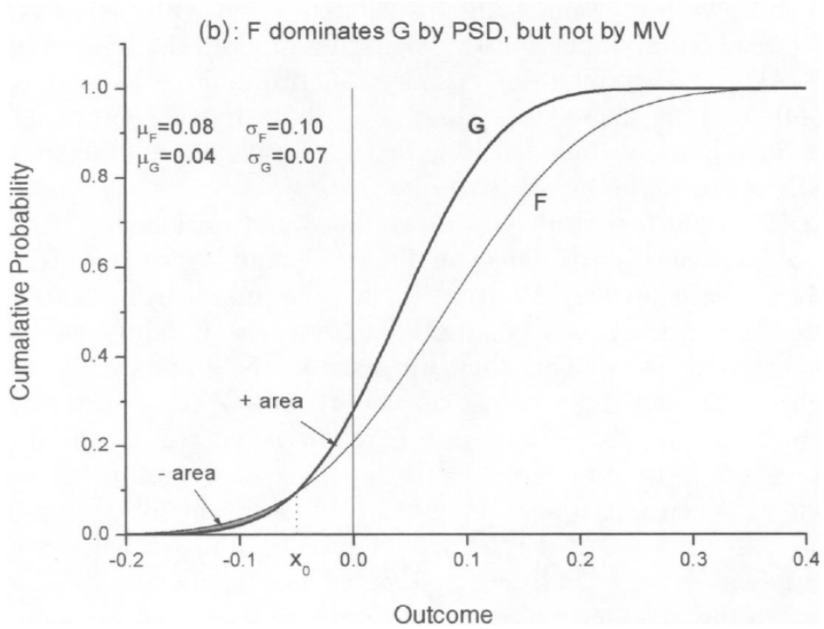
PSD-与MV-有效集

- 当考虑两种不同投资时，MV占优与PSD之间通常没有关系。换言之，一种投资可以通过MV而不是PSD获得占优地位，反之亦然。

正态CDF的两种情况

- 在左图中，F通过MV占优G，因为它具有较高的均值和较低的方差。然而，由于等式（4）不成立，F并不能通过PSD占优G。右图说明了相反的情况，即F通过PSD占优G（“+面积”大于“-面积”，因此方程（4）成立），而不能通过MV占优（ $\sigma_F > \sigma_G$ ）。





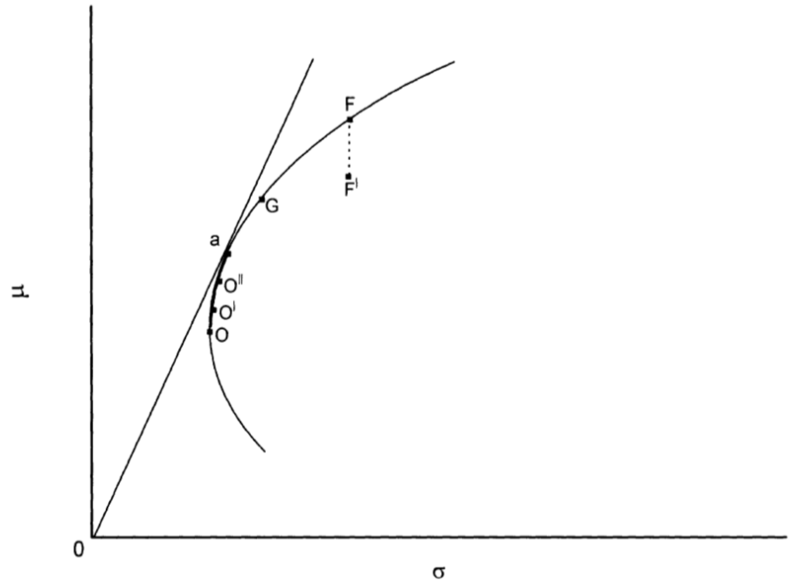
PSD-与MV-有效集

- 然而，在投资组合的背景下，当一个人可以跨资产进行多元化时，结果表明MV有效集合和PSD有效集合之间存在着非常密切的关系。
- 下面的两个定理说明了这种关系。当采用客观概率分布时，定理1导出PSD有效集。定理2是对投资者可能主观扭曲概率的情况的推广。

PSD-与MV-有效集

- 这两个定理都基于以下三个标准假设
  - 假设1：收益是正态分布的；
  - 假设2：投资组合可以不受限制地形成；
  - 假设3：没有两种资产是完全相关的，对所有i,j，$|\rho_{ij}| < 1$。

- 定理1：假设采用客观概率分布，则
  - （i）PSD有效集是MV有效集的子集；
  - （ii）从PSD有效集中排除的MV有效集合的部分至多是位于最小方差组合和从原点到前沿的切点之间的部分。



因思想 而光华

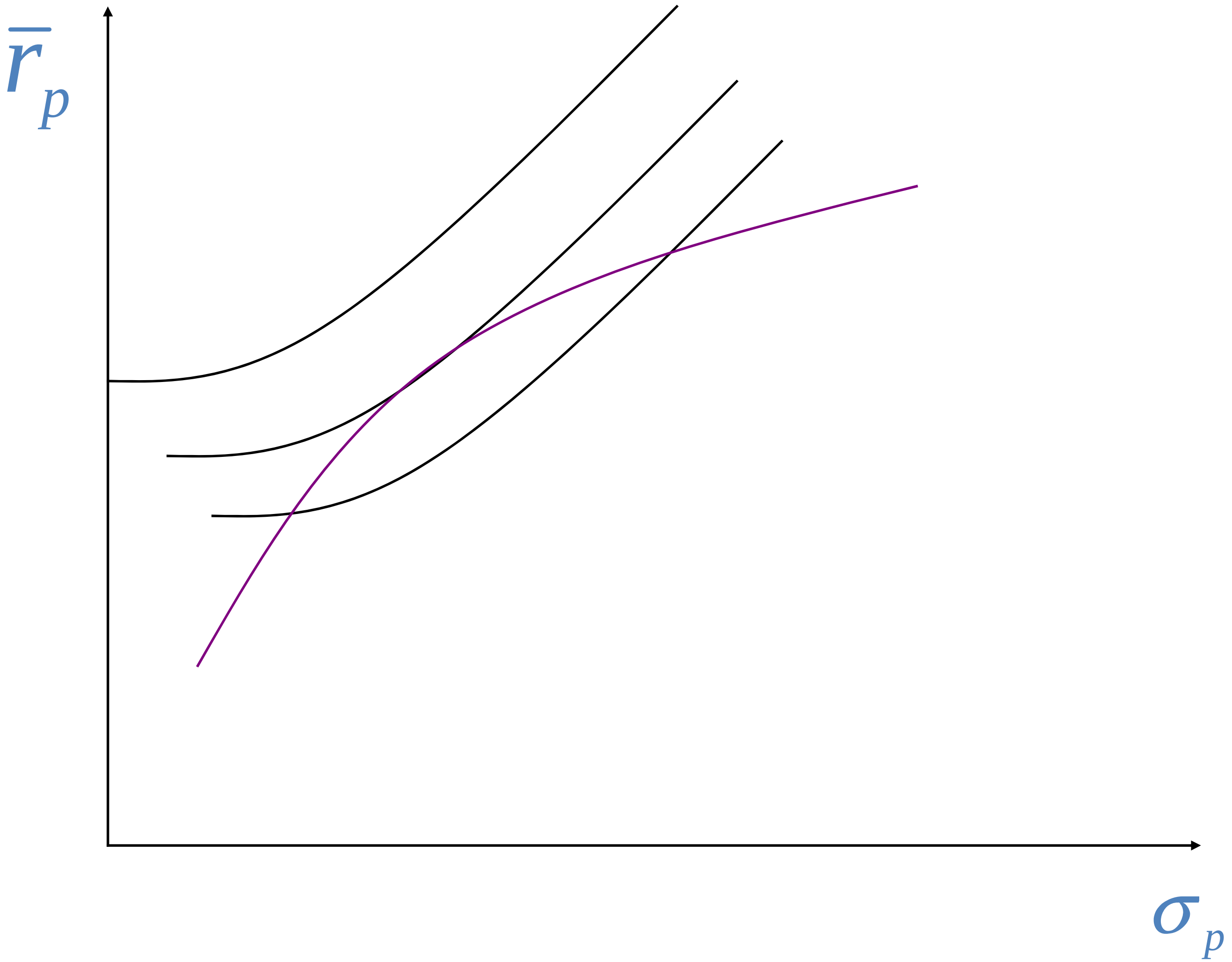
- 定理2：假设客观概率被任何不违反FSD的变换主观扭曲时，例如，累积前景理论变换，则，PSD有效集是MV有效集的子集。

- 综上所述，累积PT有效集和众所周知的MV有效集几乎一致。
- 这两个基石范式之间的严重矛盾似乎是先验的，但结果差异却是最小的。

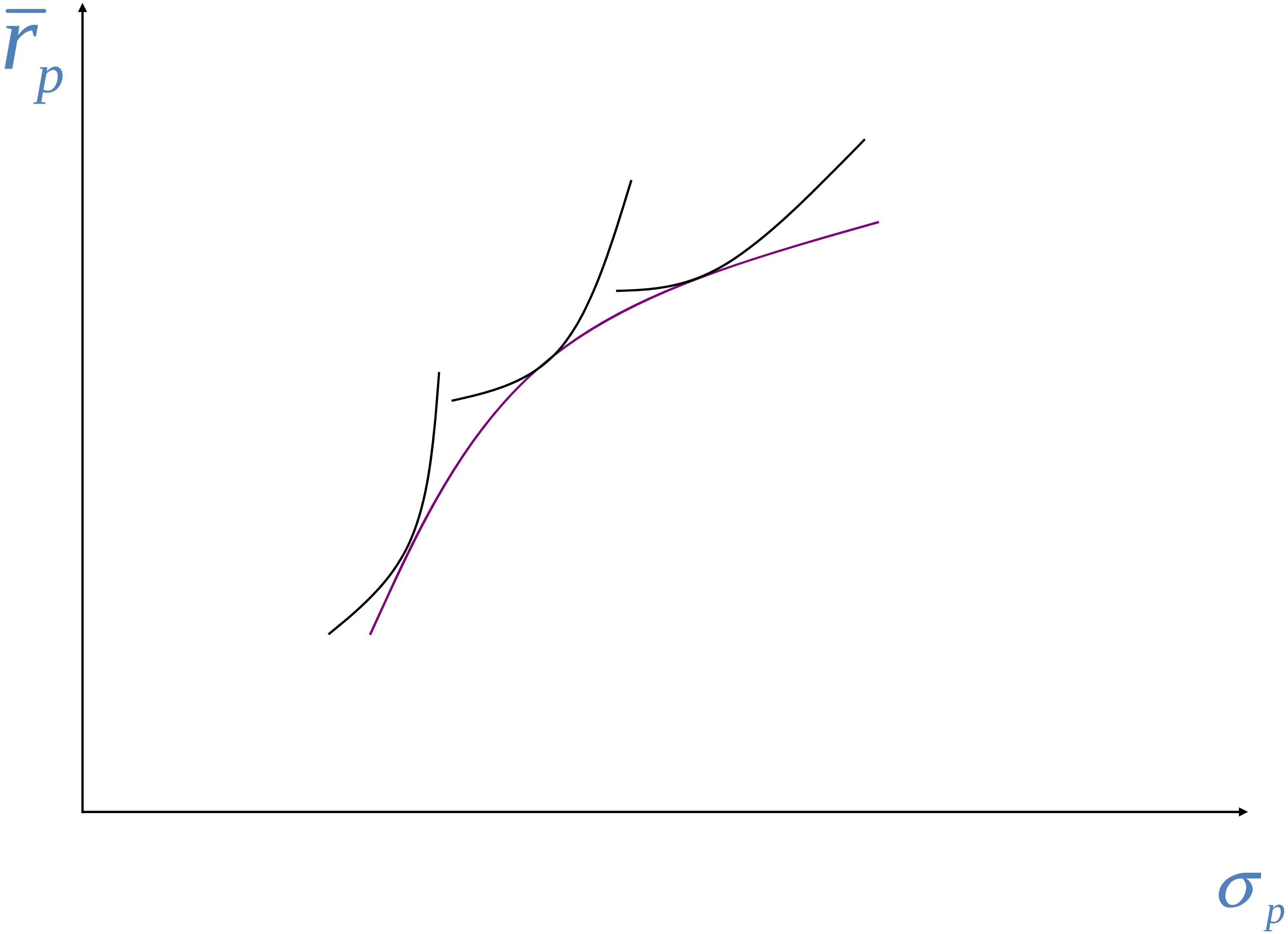
- 尽管在金融和经济领域的大多数实证研究中，概率扭曲被忽略，分析了两种情形下的MV和PSD有效，一种没有概率扭曲，一种有概率扭曲，如CPT所建议的那样。注意，在第二种情况下，变换后的CDF不一定是正态的，并且可能具有非零偏度和更高的奇数矩。
- 我们证明在这两种情况下，PSD有效集都是（客观）MV有效前沿的子集，并且它通常几乎完全与MV有效集一致。
- 这一结果的含义是，人们可以使用众所周知的MV优化技术来为PT投资者推导出有效集合。
- MV分析和PT这两个框架都被这一结果得到了加强：
  – MV框架被证明对更广泛的偏好类别有效，
  – 提供了PT框架下构建PT-有效投资组合的算法。
- 因此，尽管PT和MV框架中的假设之间存在尖锐的矛盾，但即使在PT偏好下，MV分析仍然是投资组合优化的核心。

三、最优投资组合

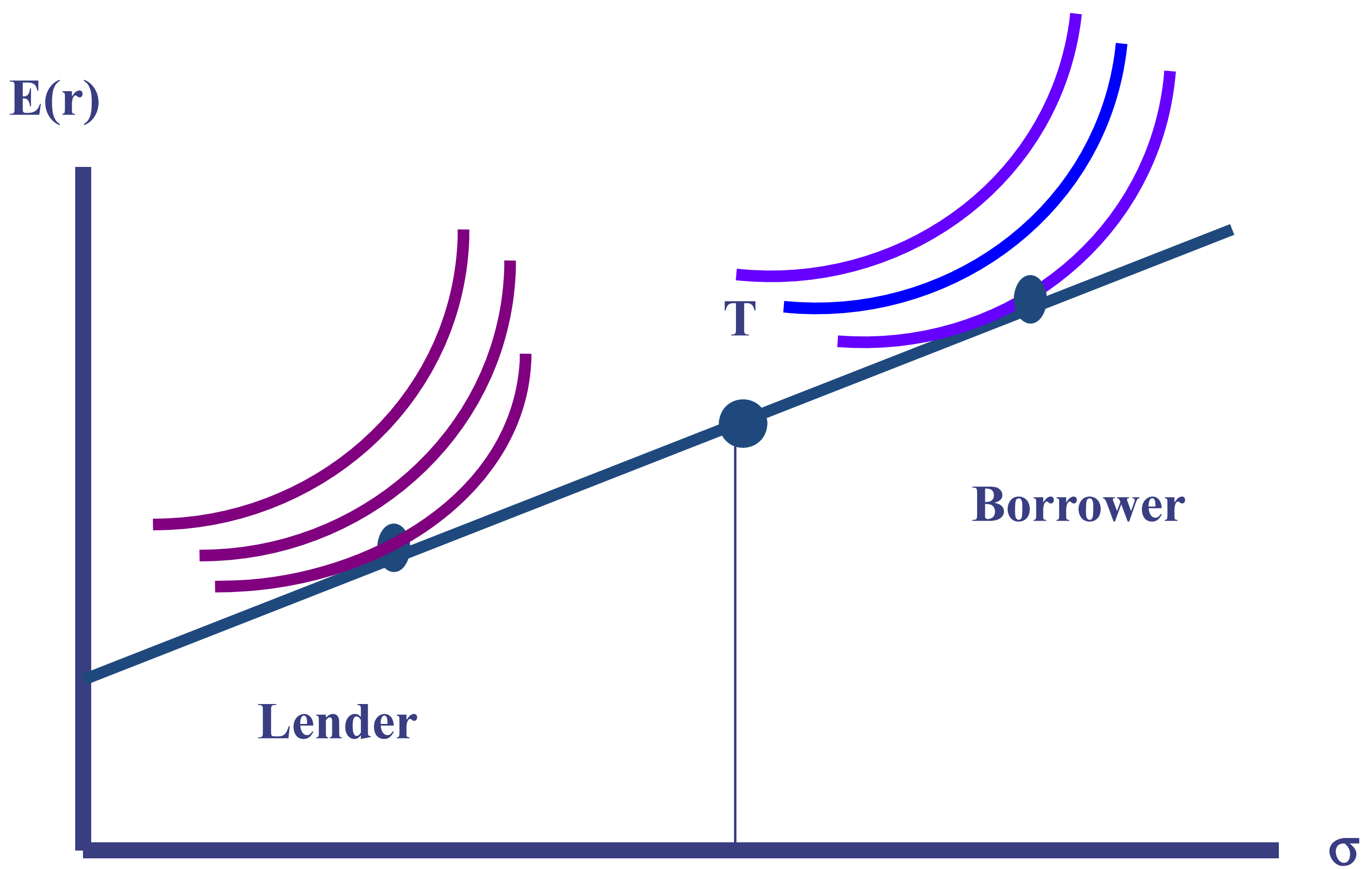
不存在无风险证券时的风险厌恶者的最优投资策略



– 不同风险厌恶程度的投资者的最优投资策略



存在无风险证券时的风险厌恶者的最优投资策略



风险厌恶者的最优证券组合

- 利用效用函数直接求最优证券组合

$$\max_{w} E[U(W_1)]$$
$$\text{s.t. } W_1 = W_0\left(1 + w^T\vec{r}\right)$$

- 当效用函数是二次效用函数$U(W_1) = W_1 - \frac{\lambda}{2}{W_1}^2$或者资产收益率满足正态分布时，问题变成

$$\max_{w} E\left[\bar{r}_p\right] - \frac{\lambda}{2}Var\left[\bar{r}_p\right]$$
$$\text{s.t. } \quad w^T\vec{1}\text{=1}$$

- 等价于

$$\max_{w} w^T\bar{r} - \frac{\lambda}{2}w^TVw$$
$$\text{s.t. } \quad w^T\vec{1}\text{=1}$$

思考

- 当投资者具有前景理论中的效用函数时，最优投资组合是什么？
- 我国证券市场的股票的回报率服从什么分布？主要大类资产的回报率服从什么分布？当股票的回报率服从对数正态分布时，最优投资组合是什么？

四、两基金分离

——投资回报率要求

两基金分离：没有无风险资产

- 证券组合前沿可以由两个不同的前沿证券组合产生。因此，在正态分布假设下，投资者偏好有效证券组合，他们只需要简单的持有两个前沿证券组合或者共同基金的线性组合。
- 两基金分离：对任何可行证券组合而言，存在两个共同基金的组合，使得投资者对该合成组合的偏好程度不低于原始的证券组合，称回报率向量 $\tilde{r}=(\tilde{r}_1,\cdots,\tilde{r}_N)'$ 具有两基金分离性质。

两基金分离：没有无风险资产

- **定义**：如果存在两个共同基金 α_1 和 α_2 ，使得对于任何组合 q ，存在一个实数 λ ，对于所有凹函数 $u(\cdot)$ ，下式成立

$$E\left[u\left(\lambda\tilde{r}_{\alpha_1}+(1-\lambda)\tilde{r}_{\alpha_2}\right)\right]\geq E\left[u\left(\tilde{r}_q\right)\right]$$

称资产回报率向量具有两基金分离性

两基金分离：没有无风险资产

- **性质**：如果资产回报率向量具有两基金分离性质，则两个分离基金 α_1 和 α_2 一定是前沿证券组合。

两基金分离：没有无风险资产

- 任何前沿证券组合的线性组合仍在前沿上
- 因为任何前沿证券组合的权重是唯一确定的，且两个不同的前沿证券组合能够张成整个证券组合前沿，所以当两基金分离性质成立时，任何两个不同的前沿证券组合都可以当成两个基金。
- 特别地，选取任何前沿证券组合，$p \neq mvp$ 及其零-协方差组合 $zc(p)$ 作为两个基金

  对任何组合 q

$$\tilde{r}_q = \left(1 - \beta_{qp}\right)\tilde{r}_{zc(p)} + \beta_{qp}\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp}$$

- 这里 $\beta_{qp} = \dfrac{Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}$ $\quad Cov\left(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_{qp}\right) = Cov\left(\tilde{r}_{zc(p)}, \tilde{\varepsilon}_{qp}\right) = E\left[\tilde{\varepsilon}_{qp}\right] = 0$

两基金分离：没有无风险资产

- 定义

$$\tilde{Q}\left(\beta_{qp}\right)=\left(1-\beta_{qp}\right)\tilde{r}_{zc(p)}+\beta_{qp}\tilde{r}_{p}$$

则两基金分离成立的充要条件是

$$E\left[\tilde{\varepsilon}_{qp}\middle|\tilde{Q}\left(\beta_{qp}\right)\right]=0$$

- 除了两基金，没有额外的信息
- 对未来投顾行业的启发
  - 目标不只均值-标准差
  - 怎样加入私有信息

例子

- 当回报率向量服从多元正态分布，且期望回报率不相等时，两基金分离成立。

思考

- 中国市场散户与机构规模的长期趋势
- GRUBER, JF, 1996, Another Puzzle: The Growth in Actively Managed Mutual Funds

两基金分离：具有无风险资产的有效证券组合前沿

设 p 为一前沿证券组合，$E[\tilde{r}_p]\neq r_f$，q 为任意一个证券组合，由(20)式，$\tilde{r}_p$ 与 $\tilde{r}_q$ 之间的协方差为

$$Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)=w_p{}^T V w_q=\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)\left(E[\tilde{r}_q]-r_f\right)\Big/H$$

由（21）式知

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\frac{Cov(\tilde{r}_p,\tilde{r}_q)}{\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)^2\Big/H}\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right)=\beta_{qp}\left(E[\tilde{r}_p]-r_f\right) \tag{23}$$

这个式子独立于 r_f 与 A/C 之间的关系。

两基金分离：具有无风险资产的有效证券组合前沿

- 对任何组合 q

$$\tilde{r}_q = \left(1-\beta_{qp}\right) r_f + \beta_{qp}\tilde{r}_p + \tilde{\varepsilon}_{qp}$$

$$\beta_{qp} = \frac{Cov(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)}$$

$$Cov\left(\tilde{r}_p, \tilde{\varepsilon}_{qp}\right) = E\left[\tilde{\varepsilon}_{qp}\right] = 0$$

两基金分离：存在无风险资产

- 当存在无风险资产时，如果 $r_f < A/C$，设*e*为切点证券组合，对任意可行的证券组合*q*

$$E[\tilde{r}_q]-r_f=\beta_{qe}\left(E[\tilde{r}_e]-r_f\right)$$

- 从而

$$\tilde{r}_q=\left(1-\beta_{qe}\right)r_f+\beta_{qe}\tilde{r}_e+\tilde{\varepsilon}_{qe}$$

$$Cov\left(\tilde{r}_e,\tilde{\varepsilon}_{qe}\right)=E\left[\tilde{\varepsilon}_{qe}\right]=0$$

两基金分离：存在无风险资产

- **性质：**回报率向量 $\left\{(\tilde{r}_1,\cdots,\tilde{r}_N)',r_f\right\}$ 具有两基金分离性的充分必要条件

$$E\left[\tilde{\varepsilon}_{je}\middle|\tilde{r}_e\right]=0,\ j=1,2,\cdots,N$$

- 正态分布是其特殊情形

五、Markowitz 模型的应用

5.1 Markowitz模型的问题

- 参数估计中的计算量
- 参数估计中的精度
- 利用看似合理的均值与方差估计，得到不合理的投资组合权重
- 两个重要假设
  - 回报率满足正态分布
  - 时间序列的平稳性（回报率同分布假设）

Markowitz模型的问题

- 一期模型与多期模型

5.2 Markowitz模型在投资组合管理中的应用

- T是什么？
- 更多应用在资产类的最优配置层面
- FOF

六、Black-Litterman 模型

- 为了得到最优证券组合，我们需要估计所有证券的期望回报率、协方差，计算证券组合前沿
- 方法一：完全忽略市场的观点，而利用自己掌握的信息估计所有证券的期望回报率、协方差
  - 例如：利用历史的数据
  - 该方法存在问题

- 方法二：接受市场的观点，简单的持有市场证券组合
  - 如果你拥有市场价格还没有反映的信息，该方法并不告诉该如何处理

- 方法三：把方法一、二结合起来

- 计算计划持有的证券的beta值
- 利用这些beta值，利用CAPM，计算 $E[r_i]$ 和 σ_{ij}
- 加上我们的观点，计算调整的参数
- 利用这些估计，应用Markowitz 模型计算最优投资组合

- 注意，如果
  - 我们从市场证券组合中的所有资产开始
  - 利用第二步计算得到的 σ_{ij} 和 $E[r_i]$ 作为参数
  - 我们得到的最优投资组合就应该是市场证券组合

例子：利用GE, IBM, Exxon (XON), 和 GM 从94年1月到98年12月的月度数据

	Excess Returns					
	Mean(%)	Std(%)	alpha(%)	beta	Std(%)	(%)
IBM	3.22	8.44	1.72	1.14	7.13	28.5
XON	1.41	4.03	0.63	0.59	3.28	33.7
GM	0.64	7.34	-0.69	1.02	6.14	30.0
GE	2.26	5.86	0.90	1.04	4.15	49.9
VW	1.31	4.02				
Rf	0.39	0.05				

- ---VW 是NYSE, AMEX, 和 NASDAQ所有普通股的价值加权指标
- Rf 是 1-month T-Bill yield, 99年1月为 4.394%/year (0.359%/month)

- 相关系数

$$\rho_{ij} = \frac{\beta_i \beta_j \sigma_M^2}{\sigma_i \sigma_j}$$

	IBM	XON	GM	GE
IBM	1	0.32	0.30	0.39
XON	0.32	1	0.33	0.42
GM	0.30	0.33	1	0.40
GE	0.39	0.42	0.40	1

- 把参数（1）期望回报率，（2）回报率标准差，（3）相关系数矩阵带入Excel spreadsheet，切点证券组合权重为：

	Weight(%)
IBM	29.6
XON	49.4
GM	-21.4
GE	42.4

- 合理吗? 为什么?

- 看起来我们持有这样极端的投资组合不太合理
  – CAPM 中的均衡分析说明市场知道某些我们不了解的有关将来期望回报率的信息！

- 利用 CAPM 来获得市场中的信息
  - SML:

$$E[r_i] = r_f + \beta_i \left(E[r_M] - r_f \right)$$

	$E[r_i]$ (%)
IBM	1.91
XON	0.99
GM	1.70
GE	1.73

- 利用新的均衡期望回报率，得到:

	Weight(%)
IBM	13.6
XON	33.3
GM	16.4
GE	36.6

  - 权重更合理吗? 为什么？
  - 为什么这些权重不是市场证券组合中的权重?
  - 如果只让你持有这四种股票，这是你想持有的权重吗?

- 但是，在某些时间我们认为市场是错误的，或者认为我们知道市场所不知道的信息 (非常危险的假设!)

如果是有关回报率的

- 假设我认为市场低估了IBM 下个月的盈利，IBM 的期望回报率应该比 现 在 高2％。
  - 对别的证券没有额外信息
  - 认为beta值不变

– In this case, 方差、协方差不变，但期望回报率变为:

	$E[r_i]$ (%)
IBM	3.91
XON	0.99
GM	1.70
GE	1.73

– 新的权重为:

	Weight(%)
IBM	54.1
XON	17.7
GM	8.7
GE	19.5

- 如果我只是部分相信IBM 的期望回报率应该比现在高2％
  - What should I do in this case?

投资者观点与市场均衡的结合

- 如何把投资者的一些观点转化成所有资产的期望回报率是B-L模型最复杂的特性，也是最重要的创新
  - 有关将来回报率的两个不同的信息来源：投资者观点和市场均衡
  - 假设两个信息来源都是不确定，都以概率分布来表示
  - 选择与两个信息来源尽可能一致的期望回报率

例　子

- 假设市场中只有三种资产A，B，C
- 投资者的信息来源
  - 均衡收益率
  - 自己的信息
- 信息都不确定

市场均衡信息

- 假设这三种资产A，B，C，每个资产的超额回报率表示为

$$R_A = \pi_A + \gamma_A Z + v_A$$

$$R_B = \pi_B + \gamma_B Z + v_B$$

$$R_C = \pi_C + \gamma_C Z + v_C$$

这里

R_i =资产 i 的超额回报

π_i =资产 i 的均衡风险酬金

γ_i =公共因素对资产 i 的影响

Z =公共因素

v_i =对资产 i 的独立冲击

市场均衡信息

- 资产超额回报的协方差矩阵 Σ 由共同因素及独立冲击决定。
- 如果上述结构是确信的

$$E[R_A] = \pi_A + \gamma_A E[Z] + E[v_A]$$

- 一般来说，我们无法了解产生协方差矩阵的回报率的真实结构

市场均衡信息

- 假设市场不一定处于均衡状态，即 $E[Z]$ 与 $E[v_i]$ 不一定为0
- 假设均值 $E[R_i]$ 是不能观测的随机变量，其均值为 π_i
- 关于$E[R_i]$的不确定性是由$E[Z]$ 和$E[v_i]$ 的不确定性导致的，假设关于$E[Z]$和 $E[v_i]$不确定性的程度与 Z 和 v_i 的波幅有关，即 $E[R_i]$分布的协方差矩阵的结构与 Σ 成比例，假设为 $\tau\Sigma$

投资者观点

- 假设投资者的观点：预期资产A比资产B收益率高Q，这里Q是给定值
  - 从大量样本推断出描述性统计
  - A和B的超额回报均值之差的概率分布
- 对观点的确信度的测度，以便在与均衡相结合时，确定给予观点的权重
  - 确定观测值的数量
  - 概率分布的标准差
- 假设均值服从正态分布
  - $E[R]$ 的均衡分布服从 $N(\pi, \tau\Sigma)$，这里 $\pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$

投资者观点

- 特殊情况：100%确信观点

$$E[R_A]-E[R_B]=Q$$

- 计算期望回报的条件分布，满足上述约束

$$\underset{E[R]}{Min}(E[R]-\pi)\tau\Sigma^{-1}(E[R]-\pi)'$$

Subject to

$$PE[R]'=Q$$

解为

$$\pi' + \tau\Sigma\cdot P'\cdot[P\cdot\tau\Sigma\cdot P']^{-1}\cdot[Q-P\cdot\pi'],$$

投资者观点

- 一般情况

$$PE[R]' = Q + \varepsilon$$

这里P和Q给定，ε 是不能观测的正态分布的随机向量 $N(0,\Omega)$

对角矩阵 Ω

解为

$$E[R] = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$
$$[(\tau\Sigma^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

进一步假设

- 假设

$$(\gamma_A, \gamma_B, \gamma_C) = (3,1,2)$$

一般来说，我们不知道具体结构，更不要说gama的值

- 均衡风险酬金 $(1,1,1)$

情形1

- 如果回报率之间相关性由共同因素导致，独立性冲击很小
- 假设协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} 9.1 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 1.1 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 4.1 \end{bmatrix}$$

- 均衡风险酬金

$$(1,1,1)$$

- 确信观点 $E[R_A]-E[R_B]=2\%$
- 条件均值

$$(3.9,1.9,2.9)$$

- 资产的所有波幅都由共同因素的运动导致，A的期望回报率比B表现好，所以，原因应该是共同因素的冲击导致的，从而，C的表现也应该比均衡时好。

情形2

- 如果独立性冲击比共同因素有更大的影响
- 假设协方差矩阵为

$$\begin{bmatrix} 19.0 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 11.0 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 14.0 \end{bmatrix}$$

- 确信观点

$$E[R_A]-E[R_B]=2\%$$

- 条件均值

$$(2.3, 0.3, 1.3)$$

因思想 而光华

- 资产A的大部分波幅都由独立冲击的运动导致，尽管A的期望回报率比B表现可能有部分是由共同冲击导致的，但对C的影响会小很多。

情形3

- 如果对观点不确信：$E[R_A]-E[R_B]$的均值为2%，方差为1%
- 假设协方差矩阵为

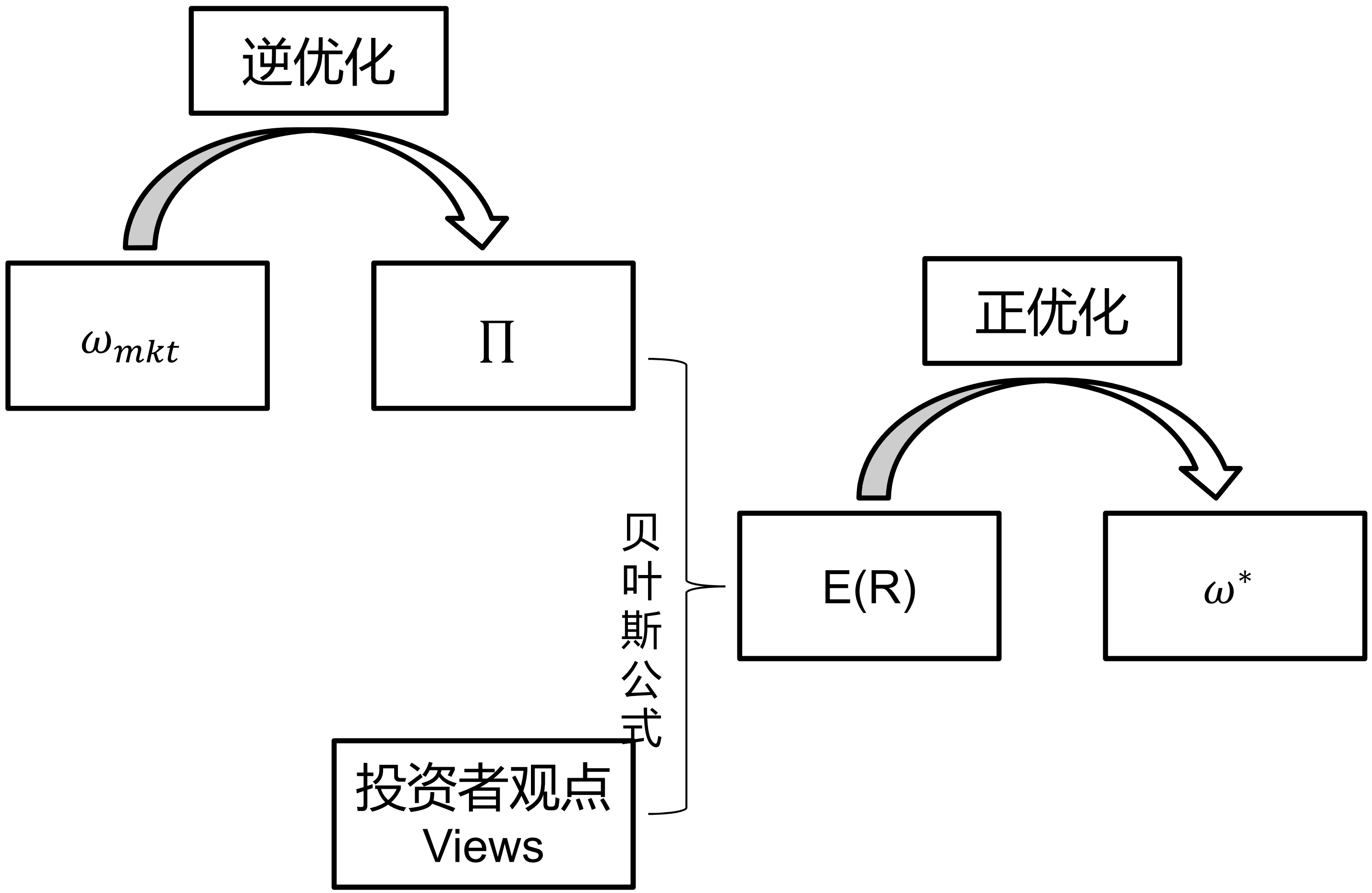
$$\begin{bmatrix} 9.1 & 3.0 & 6.0 \\ 3.0 & 1.1 & 2.0 \\ 6.0 & 2.0 & 4.1 \end{bmatrix}$$

- 条件均值 $(3.3, 1.7, 2.5)$

- 尽管资产的所有波幅还是大部分由共同因素的运动导致，但由于对自己的观点不够确信，A的期望回报率比B表现好的幅度减小，共同因素对C的影响也会小。

一般模型

- 期望收益率是不确定的，需要估计
- 有两个不同的信息来源：投资者观点和市场均衡信息
- 核心
  - 假设两个信息来源都是不确定，都以概率分布来表示
  - 选择与两个信息来源尽可能一致的期望回报率



逆优化
ω_{mkt}
Π
正优化
贝叶斯公式
E(R)
ω^*
投资者观点
Views

均衡方法（The Equilibrium Approach）

- 寻找 Neutral reference point——提供预期收益的有效参考值
  - 历史平均（Historical Averages）
    - 用历史平均超额收益来代表市场上中性观点
    - 相当于假设能在过去一段时间表现良好的组合权重是中性的
  - 等均值（Equal Means）
    - 用所有待配置资产回报率的均值作为市场中性观点
    - 显然忽视了资产的不同风险
  - 风险调整后的等均值法（Risk-Adjusted Equal Means）
    - 不同资产单位风险的超额收益是不同资产单位风险的超额收益的均值
    - 忽视了资产收益的相关性
  - **以上方法只是从资产的需求方面，即历史收益和风险的度量进行考虑**
  - **均衡方法（The Equilibrium Approach）**
    - 对市场组合应用CAPM模型逆优化得到资产隐含收益率作为市场中性观点
    - CAPM模型反映了市场上供需双方的相互作用（例：Australian Government Bond）

投资者自己的观点

- 观点（Views）：指不同于均衡收益的个体估计
  - 观点的个数不限 （Selective Views）：观点可以只针对那些有深度分析研究的资产，一般需要少于资产个数
  - 不同观点的不确定性相互独立（Confidence Level）：每个观点指定了一个置信度用于反映观点持有者的不确定性，每个观点的置信度相互独立，不需要相同
  - **观点本身可以是相对的（Relative Views）：观点的表达可以是："A资产收益率高于均衡值1个百分点"、"A资产收益率低于B资产收益率2个百分点"，而不需要是绝对观点："A资产收益率为6%"**

第一步：逆优化求解均衡作为中性参照点

- 资本市场均衡：资产按照其在市场组合中的权重进行配置
- 根据CAPM模型，在投资者为风险规避者的前提下，投资者的效用函数可以表达为如下形式：

$$U = \omega^T \prod - (\frac{\lambda}{2}) \omega^T \sum \omega$$

- 其中U为效用函数，ω为组合中各资产的权重向量，$\prod$为各资产的均衡超额收益率向量，λ为风险厌恶系数

第一步：逆优化求解均衡作为中性参照点

- 将效用函数对权重求一阶导数，并令其为零，可得

$$\frac{dU}{d\omega} = \prod - \lambda \sum \omega = 0$$

$$\omega_{mkt} = (\lambda \sum)^{-1} \prod$$

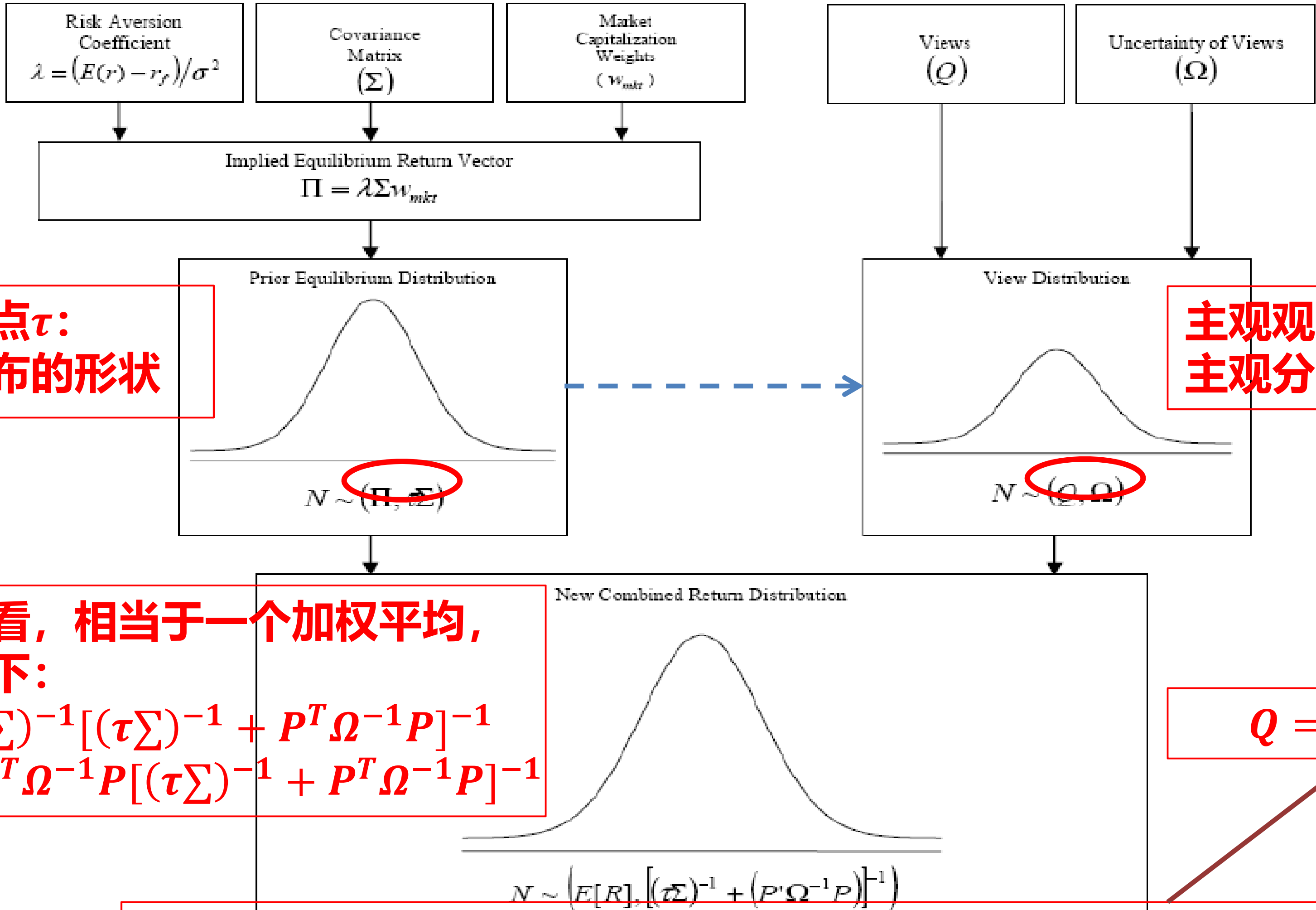
- 由上式可得均衡收益率的表达如下：

$$\prod = \lambda \sum \omega_{mkt}$$

- 该公式表示出了市场隐含的期望收益率
- λ是风险厌恶系数，表示了单位风险的超额收益

$$\lambda = \frac{E(R_m - R_f)}{\sigma_m^2}$$

第二步：结合中性参照点和观点，得到收益的后验分布



客观观点τ：
先验分布的形状

主观观点Ω：
主观分布的形状

从结果看，相当于一个加权平均，
权重如下：

$\prod$: $(\tau\sum)^{-1}[(\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$

$E(R)$: $P^T\Omega^{-1}P[(\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}$

$$Q = PE(R)$$

$$E(R) = [(\tau\sum)^{-1} + P^T\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\sum)^{-1}\prod + P^T\Omega^{-1}Q]$$

第二步：结合中性参照点和观点，得到收益的后验分布

- 假设中性参考点服从正态分布
  - $E[R]$ 的均衡分布服从 $N(\pi, \tau\Sigma)$

第二步：结合中性参照点和观点，得到收益的后验分布

- 投资者观点

$$PE[R]' = Q + \varepsilon$$

这里P和Q给定， ε 是不能观测的正态分布的随机向量 $N(0,\Omega)$

对角矩阵 Ω

第二步：结合中性参照点和观点，得到收益的后验分布

- 参数选择——观点收益向量、观点选择矩阵

$$P \cdot E(R) = Q + \varepsilon = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k,1} & \cdots & p_{k,n} \end{bmatrix}$$

  - ε：代表了投资者对观点的不确定性，体现了其信心水平
  - 第i个观点：$\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} E(R_j) = Q_i$
  - 例："资产1收益率高于资产2一个百分点"，则有$p_{i,1} = 1, p_{i,2} = -1, p_{i,j} = 0 (j = 3, \dots, n), Q_i = 1\%$

第三步：基于更新的收益分布，求解最优投资组合

- 根据Markowitz模型：

$$\max_{\omega} \omega'\mu - \frac{\lambda}{2}\omega'\Sigma\omega$$

$$\omega = (\lambda\Sigma)^{-1}\mu$$

- ω为组合中个资产的权重向量，μ为各资产的均衡超额收益率向量，λ为风险厌恶系数
- 当$\mu = E(R)$时，得到无约束条件下新的资产组合权重向量

$$\omega^* = \omega_{mkt} + P'\left(\frac{\Omega}{\tau} + P\Sigma P'\right)^{-1}\left(\frac{Q}{\lambda} - P\Sigma\omega_{mkt}\right)$$

七、交易成本

交易成本

- 到现在为止，我们只是在收益与风险之间做权衡。
- 在组合构建中，第三要考虑的因素就是交易成本——从一个组合调整到另一个组合所花费的成本。
- 交易成本是我们为交易付出的代价。

交易成本

- 交易成本除了会使得组合构建问题变得复杂，还有其特殊内在的困难
  - 如何权衡在某一时点产生的交易成本与在一个投资期上产生的收益率及风险?
  - 更困难的问题包括什么决定交易成本，如何衡量交易成本，以及如何避免交易成本等。

如何权衡交易成本

- 找到收益与风险的正确权衡是一个一维问题。
- 而交易成本使这个问题变为一个二维问题
  - 收益与风险之间的权衡依然存在
  - 收益与交易成本之间的新权衡

考虑交易成本的最优投资组合

- 希望获得高收益、低风险以及低交易成本。

$$\max_{w} w^T\bar{r} - \lambda w^T V w - TC$$

$$\text{s.t.}\quad w^T\vec{1}=1$$

交易成本的种类和度量

- 交易成本如何产生
- 怎样估计交易成本

交易成本

- 交易成本随着交易规模以及对快速执行交易的意愿而增长。
- 交易成本很难衡量，同时，能够精确估计交易成本——尤其是不同股票的交易成本之间的差异，将显著地提高实现的附加值。

交易成本

- 交易成本包括
  - 佣金commissions
  - 买卖差价the bid/ask spread
  - 市场冲击market impact
  - 机会成本opportunity cost

交易成本

- 佣金是执行交易而付给经纪人的每股费用，是交易成本中最小的部分，并且也是最容易测量的部分。
- 买卖差价是市场中股票的最高买价（the highest bid）与最低卖价（the lowest offer）的差值，衡量了购买一股（at the offer）并马上卖出（at the bid）所造成的损失，近似等于交易一股的成本，只有当真正交易时才能确定这笔成本。

交易成本

- 市场冲击是交易额外的股份时所需支付的成本。
  - 为了购买一股，你需要支付最低卖价。为了购买100 000股，你需要支付比最低卖价高得多的价格。
  - 购买100 000股时的价格是通过交易发现的，它不是一个先验可知的量。
- 市场冲击很难衡量，因为它是交易多股相对于交易一股时的额外成本，而在市场中，你不可能在相同的条件下分别测试交易多股和交易一股的情形。
- 每笔交易都会改变市场。

交易成本的处理

- 两个处理交易成本的角度
  – 通过降低换手率来减少交易成本，同时尽可能接近最优投资组合；
  – 通过最优交易执行来降低交易成本。

交易，一个组合优化问题

- 交易是一个组合优化问题，但它与组合构建问题不同。
- 设想已经完成了组合构建(或再平衡)的步骤。持有的是当前组合，而希望持有的是组合构建流程输出的目标组合。通过交易来完成从当前组合到目标组合的转换。
- 在预定的交易时段内规划这些交易——最先交易哪只股票，其次交易哪只等——是一个组合优化问题。