Preuve : Théorème de Lagrange
Soit G un groupe, et H un sous-groupe de G.

On va démontrer que $\#H \mid \#G$ en créant une partition de G, dont chaque partie aura le même cardinal que H.

I-Relation d'équivalence $\sim$ sur G

1) Définition de la relation

Soit $\sim$ la relation telle que : $\forall x, y \in G,\ x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow \exists h \in H : xh = y$

a) $\sim$ est réflexive :

$x \sim x, x \in G$ car $x^{-1}x = e \in H$

b) $\sim$ est symétrique :

$x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \Leftrightarrow (x^{-1}y)^{-1} = y^{-1}x \in H \Leftrightarrow y \sim x$

c) $\sim$ est transitive :

$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H \\ x \sim z \Leftrightarrow x^{-1}z \in H \end{array}\right\} \Rightarrow (x^{-1}y)(y^{-1}z) = x^{-1}(yy^{-1})z = x^{-1}z \in H \Leftrightarrow x \sim z$$

2) Classes d'équivalence

Soit $x \in G$.

xH est la classe d'équivalence égale à $\{y \in G | x \sim y\}$, on peut ainsi partitionner G en un ensemble de classes d'équivalence $(x_iH)_{i \in I}$, on à donc :

$G = \coprod_{i \in I} x_iH$ d'où l'égalité $\#G = \sum_{i \in I} \#(x_iH)$

N.B. : L'ensemble des classes que l'on vient de définir se note G/H.

3) Equipotence entre H et xH

Soit $x \in G$.

$xH = \{y \in G | x \sim y\} = \{y \in G | \exists h \in H : y = xh\}$. On a donc l'application $\varphi : \begin{array}{c} H \to xH \\ h \mapsto xh \end{array}$ qui est bijective.

a) Surjectivité : $xH = \{xh | h \in H\} = \varphi(H)$

b) Injectivité : $h, h' \in H : \varphi(h) = \varphi(h') \Rightarrow xh = xh' \Rightarrow h = h'$ en multipliant par x^{-1} à gauche.

Ainsi, φ est bijective, on en déduit $\#H = \#(xH)$

II-Divisibilité

On reprend l'égalité $\#G = \sum_{i \in I} \#(x_iH)$, on sait à présent que pour tout x de G on a $\#H = \#(xH)$, donc on a bien $\#H | \#G$.