Transformación de variables:

① Sea $\begin{cases} x \sim N(0,1) \\ y = x^2 \end{cases}$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(x^2 \leq y) = P(|x| \leq \sqrt{y}) =$$
$$= P(\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}) =$$
$$= P(x \leq \sqrt{y}) - P(x \leq -\sqrt{y}) =$$
$$= F_x(\sqrt{y}) - F_x(-\sqrt{y})$$

Queremos conocer función de densidad, derivamos $F_Y(y)$:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \frac{d}{dy}(F_x \sqrt{y}) - \frac{d}{dy} F_x(-\sqrt{y}) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(\sqrt{y}) - \left[-\frac{1}{2\sqrt{y}} f_x(-\sqrt{y}) \right] (*)$$

Dado que x sigue una distribución $N(0,1)$, con función de densidad:

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (**)$$

Reemplazo $(**)$ en $(*)$:

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sqrt{y}^{\cancel{2}}}{2}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^{\cancel{2}}}{2}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1/2} \cdot e^{-y/2}$$

↓

Distribución chi-cuadrado.

con $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$