⑤ Fibonacci $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, $f_0 = 1$, $f_1 = 1$

a) $x^k = [f_{k+1}, f_k]^T$ $\quad x^{k-1} = [f_k, f_{k-1}]^T$

$$x^k = A\, x^{(k-1)} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k-1} \end{bmatrix}$$ ✓

b)

$$\det(\lambda I - A) = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$A - \lambda I$

$$= (\lambda - 1)\lambda - 1 = 0$$ ✓

$$= \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Autovalores $\Rightarrow$ $\therefore \lambda_1 = 1/2 + \sqrt{5}/2$; $\lambda_2 = 1/2 - \sqrt{5}/2$

mult. algebraica = 2.

Para λ_1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (1+\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & (1+\sqrt{5})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,61 & 1 \\ 1 & -1,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$-0,61\, x + y = 0$ si $y = 1 \Rightarrow x = 1,61$

$x - 1,61\, y = 0$

λ_1

$$\therefore E_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1,61 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Para λ_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (1-\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{5})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,61 & 1 \\ 1 & 0,61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$1,61\, x + y = 0$ si $y = 1 \Rightarrow x = -0,61$

$x + 0,61\, y = 0$

λ_2

$$\therefore E_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -0,61 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$\alpha E_1 + \beta E_2 =$ $\quad$ mult geométrica = 2

$$\begin{bmatrix} \alpha\, 1,61 \\ \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\beta\, 0,61 \\ \beta \end{bmatrix} = \quad \begin{matrix} \alpha 1,61 - \beta 0,61 = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \alpha = \frac{0,61\,\beta}{1,61} \\ \alpha = \beta \end{matrix}\right\} \alpha, \beta = 0 \ !!!$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \to$ Tiene 2 autovectores linealmente independientes $\therefore$ A es diagonalizable. ✓

c) Dado que A es diagonalizable la podemos expresar como $A = SDS^{-1}$

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

?

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$S = \frac{1}{|S'|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & -\lambda_1 \end{bmatrix}$$ ✓

$$S = \begin{bmatrix} 1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_2/_{-\lambda_1-\lambda_2} \\ -1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1/_{-\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix}$$

Para encontrar el k-esimo elemento de la serie de Fibonacci elevamos A^k :

$A = S^{-1} D S \quad \therefore \quad A^k = S^{-1} D^k S \quad [S^{-1}$ inversa de $S]$

$$A^k = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_2/_{-\lambda_1-\lambda_2} \\ -1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1/_{-\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix}$$ ✓

Podemos utilizar la fórmula $x_{(k)} = A^k x_{(0)} = S D^k S^{-1} x_{(0)}$ donde $x_{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es el vector inicial de la secuencia.

$$x(k) = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_2/_{-\lambda_1-\lambda_2} \\ -1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1/_{-\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \\ -\lambda_1^k & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_2/_{-\lambda_1-\lambda_2} \\ -1/_{-\lambda_1-\lambda_2} & -\lambda_1/_{-\lambda_1-\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} f_{k+1} \\ f_k \end{bmatrix} = A^k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-\lambda_1 - \lambda_2} \begin{bmatrix} -\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & (-\lambda_1^{k+1})(-\lambda_2) + \lambda_2^{k+1}(-\lambda_1) \\ -\lambda_1^k - \lambda_2^k & (-\lambda_1^k)(-\lambda_2) + (-\lambda_1)(\lambda_2^k) \end{bmatrix}$$

B = ok pero faltó despejar de ahí $f_k = \dots$