Ejercicio 7 :

Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Se define el producto interno como:

$$\langle A, B \rangle = Tr\,(A^H B)$$

Antes de demostrar que efectivamente es un producto interno debemos tener en cuenta que:

- La traza es un operador lineal (i)
- $Tr\,(A) = Tr\,(A^T)$ (ii)

Ahora debemos verificar que se cumple:

① Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $u, v, w \in V$

- $\phi(u+v, w) = \phi(u,w) + \phi(v,w)$

✓

$$\langle A+C, B\rangle = Tr\,((A+C)^H B) = Tr\,((A^H + C^H)B) =$$
$$= Tr\,((A^H B + C^H B)) = Tr\,(A^H B) + Tr\,(C^H B) =$$
$$\langle A, B\rangle + \langle C, B\rangle$$

Por (i) la traza es distributiva respecto a la suma

- $\phi(\alpha \cdot u, v) = \alpha \cdot \phi(u,v)$

~~Por (i) puedo sacar α afuera~~

$$\langle \alpha A, B\rangle = Tr\,((\alpha A)^H B) = Tr\,(\bar{\alpha} A^H B) = \bar{\alpha}\, Tr\,(A^H B)$$
$$= \bar{\alpha} \langle A, B\rangle$$

porque $(\alpha \cdot A)^H = \alpha^H \cdot A^H = \bar{\alpha} \cdot A^H$

$\alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha^T = \alpha$

✓

② $\phi(u,v) = \overline{\phi(v,u)}$

$$\langle A, B\rangle = Tr\,(A^H B) \qquad \langle B, A\rangle = Tr\,(B^H A)$$

$$\langle A, B \rangle = \overline{Tr\left(\overline{A^H B}\right)} = \overline{Tr\left(A^T \overline{B}\right)} \overset{\text{Por (ii)}}{=} \overline{Tr\left(\left(A^T \overline{B}\right)^T\right)} =$$

Por (i) el conjugado de la traza es la traza del conjugado.

$$= \overline{Tr\left(\overline{B}^T A^{TT}\right)} =$$

$$= \overline{Tr\left(B^H A\right)} =$$

$$= \overline{\langle B, A \rangle}$$

③ $\phi(v, v) \geqslant 0$ y $\phi(v, v) = 0$ si $v = 0$

$$\langle A, A \rangle \geqslant 0 \quad y \quad \langle A, A \rangle = 0 \quad si \quad A = 0$$

$$\langle A, A \rangle = tr\left(A^H A\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left(A^H\right)_{kj}(A)_{jk}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\left(\alpha_{kj} + \beta_{kj}\, i\right)}\left(\alpha_{kj} + \beta_{kj}\, i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left(\alpha_{kj} - \beta_{kj}\, i\right)\left(\alpha_{kj} + \beta_{kj}\, i\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}^2 - \overbrace{i^2}^{1}\beta_{kj}^2 =$$

otra forma:

$\overline{A_{ij}} \cdot A_{ij} = \|A_{ij}\|^2 \geqslant 0$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}^2 + \beta_{kj}^2 \geqslant 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\alpha_{kj}}\ \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}^2 + \beta_{kj}^2 = 0$$

Esto implica que todos los valores de A deben ser 0.

B