

# 离散数学作业 Problem set 1

## Problem 1

下列哪些是命题？这些命题的真值是什么？

- a) 别过去。
- b) 几点了？
- c) 在缅甸州没有黑苍蝇。
- d)  $4 + x = 5$ 。
- e) 月亮是由绿色的奶酪构成的。
- f)  $2^n \geq 100$ 。

## Problem 2

(行测题) 陈红、李明、朱智、韩冬四个人在玩一个游戏，韩冬作为游戏主持人在其他三个人背后的贴纸上分别写了 1 个数字。3 个人都不知道自己背后的数字是什么，但是可以看到另外两个人背后的数字。陈红说李明的数字比朱智的数字大，李明说陈红的数字比朱智小，朱智说陈红的数字比李明的数字小。主持人说三个人当中至多有一个人说了假话。假设主持人说的是假话，那么陈红，李明，朱智三个人背后数字的大小顺序可能是 ( )

- A) 陈红 > 李明 > 陈红
- B) 朱智 > 李明 > 陈红
- C) 李明 > 朱智 > 陈红
- D) 李明 > 陈红 > 朱智

### Problem 3

假设在通往两个房间的门上均写着提示。第一扇门上的提示为：“在这个房间里有一位美女，而在另一个房间里则是一只老虎”；在第二扇门上写着“在两个房间中有一个是美女，并且有一个是老虎”。假定你知道其中一个提示是真的，另一个是假的。那么哪扇门后面是美女呢？

### Problem 4

判断下列这些条件语句是真是假：

- a) 如果  $1 + 1 = 2$ ，则  $2 + 2 = 5$       b) 如果  $1 + 1 = 2$ ，则  $2 + 2 = 4$   
c) 如果  $1 + 1 = 3$ ，则  $2 + 2 = 5$       d) 如果  $2 + 2 = 4$ ，则  $1 + 2 = 3$

### Problem 5

用真值表验证德·摩根第一定律。

### Problem 6

证明  $\neg(p \leftrightarrow q)$  和  $\neg p \leftrightarrow q$  逻辑等价。

### Problem 7

判断  $(\neg p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg q$  是否为永真式。

## Problem 8

用真值表证明  $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 。

## Problem 9

证明  $(p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s)$  和  $(p \rightarrow r) \rightarrow (q \rightarrow s)$  不是逻辑等价。

## Problem 10

试判断下列复合命题是否是可满足的。

a)  $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

b)  $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s)$

c)  $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (q \vee \neg r \vee s) \wedge (\neg p \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)$

## Problem 11

请查阅书籍和资料，使用与、或、非的逻辑门，实现一个一位加法器，其中必须包含一个进位  $C_0$ ，一个溢出  $C_1$ 。然后思考如何通过一位加法器实现一个二位加法器，用二位加法器实现一个四位加法器、用四位加法器实现一个八位加法器、十六位加法器、三十二位加法器。

## Problem 12

如果论域为实数集合，下列各语句的真值是什么？

- a)  $\exists x(x^3 = -1)$                       b)  $\exists x(x^4 < x^2)$   
 c)  $\forall x((-x)^2 = x^2)$                       d)  $\forall x(2x > x)$

### Problem 13

离散数学班上有 1 个主修数学的新生, 12 个主修数学的二年级学生, 15 个主修计算机科学的二年级学生, 2 个主修数学的三年级学生和 1 个主修计算机科学的四年级新生。用量词表达下列语句, 再给出其真值。

- a) 班上有个三年级学生  
 b) 班上每个学生都主修计算机科学  
 c) 班上有个学生既不主修数学, 也不是三年级学生  
 d) 班上每个学生要么是二年级学生, 要么主修计算机科学

### Problem 14

证明两个语句  $\neg\exists x\forall yP(x, y)$  和  $\forall x\exists y\neg P(x, y)$  是逻辑等价的, 这里在  $P(x, y)$  中两个量词的第一和第二变元具有相同的论域。

### Problem 15

用推理规则证明: 如果  $\forall x(P(x) \vee Q(x))$  和  $\forall x(\neg Q(x) \vee S(x))$ ,  $\forall x(R(x) \rightarrow \neg S(x))$  和  $\exists x\neg P(x)$  为真, 则  $\exists x\neg R(x)$  为真

### Problem 16

用消解法证明复合命题  $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$  不是可满足的。

### Problem 17

用归谬法证明：没有有理数  $r$  使得  $r^3 + r + 1 = 0$ 。[提示：假设  $r = a/b$  是一个根，这里  $a, b$  是整数， $a/b$  是既约的。通过乘以  $b^3$ ，得到一个整数的等式。那么看看是否  $a$  和  $b$  是某一个奇数或偶数。]

### Problem 18

证明在任意 64 天中至少有 10 天在每星期的同一天里。

### Problem 19

证明方程  $x^2 + y^2 = z^2$  有无穷多个正整数解  $x, y, z$ 。[提示：令  $x = m^2 - n^2$ ,  $y = 2mn$ ,  $z = m^2 + n^2$ ,  $m, n$  为整数]

### Problem 20

证明任一个有理数和任一个无理数之间都有一个无理数。