Contrôle de cours 1 (1 heure)

$\cancel{12{,}5}$ 13 / 20

Nom : **Prénom :** **Classe :** E1

N.B. : Le barème est sur 20.

Très bon début mais il faut revoir le dénombrement !

1 Un peu de logique

Exercice 1 (3,5 points) 3/3,5

1. Soient P, Q et R trois assertions. Donner la négation de « $P \wedge Q$ », « $P \vee (Q \wedge R)$ » et de « $P \Longrightarrow Q$ »

$\neg(P\wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$ et $\neg(P\vee(Q\wedge R)) = \neg P \wedge \neg(Q\wedge R)$
$\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$ $= \neg P \vee (\neg Q \wedge \neg R)$ 1

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

1) $x < 1 \Rightarrow x \leq 1$. 2) $x^2 + x - 6 > 0 \Leftarrow x > 2$. 3) $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow x = e^3$. 4) x multiple de $3 \Leftarrow x$ multiple de 6.

TB 2

2 Ensembles et fonctions

Exercice 2 (6 points) 4,5/6

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$.

1. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est injective »

$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

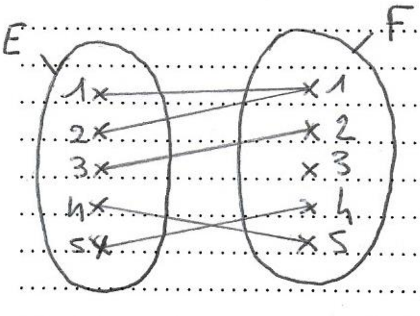
2. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de « f est surjective »

$\forall y \in F, \exists x \in E,\ y = f(x)$

2 Bien

3. Prenons le cas $E = F = [\![1, 5]\!]$.

(a) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ vérifiant $f(\{1, 2, 5\}) = \{1, 4\}$. Votre fonction f est-elle injective ? surjective ? Justifiez.



f n'est ni injective, ni surjective car si f vérifie $f(\{1,2,5\}) = \{1,4\}$ alors il y aura forcément une image qui aura deux antécédents donc elle n'est pas injective. De plus il reste 3 images $\{2,3,5\}$ et uniquement 2 antécédents $\{3,4\}$. Il y aura donc une image sans antécédents. Donc elle n'est pas surjective.

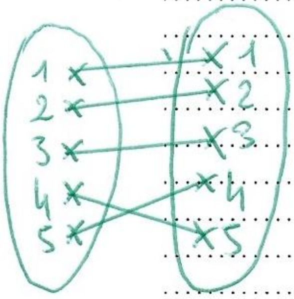
Contre-exemples des propriétés :
- $f(1) = f(2)$ et $1 \neq 2$
- Il n'existe pas de x pour lequelle $f(x) = 3$

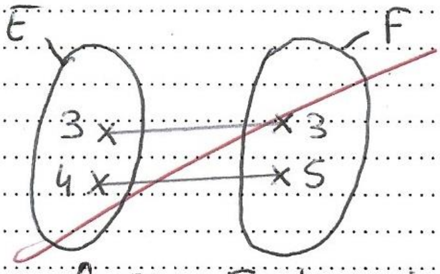
Les propriétés ne seront pas vérifiées.

TB

2,5

(b) Dessiner (graphe, patates...) une fonction $f : E \longrightarrow F$ bijective telle que $f^{-1}(\{3,5\}) = \{3,4\}$.





Ceci n'est pas une fonction de $[\![1,5]\!]$ dans $[\![1,5]\!]$

$f : E \to F$ bijective $E = \{3,4\}$ $F = \{3,5\}$

0

3 Intégration

Exercice 3 (4,5 points) 2,5/4,5

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

$I = \left[\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}(\sqrt{8}-1)$

0

$u = x^2+1 \quad u' = 2x$

$f(x) = \frac{1}{2}u'u^{1/2}$

$f(x) = \frac{1}{2}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1}$

$= \frac{1}{3}u^{3/2}$

2. Énoncer proprement le théorème d'intégration par parties sans oublier ses hypothèses.

$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$

I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in I^2$ et u,v ~~continues~~ $\mathcal{C}^1$ sur I

1

u,v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$

3. Démontrer soigneusement la formule d'intégration par parties.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b)\in I^2$ et u et v continues sur I

$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + v'(x)\times u(x)$

$\Rightarrow \int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b u'(x)v(x) + v'(x)u(x)\,dx$

$\Rightarrow [u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b v'(x)u(x)\,dx$

$\Rightarrow \int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)\,dx$

1,5

TB

4 Dénombrement

Exercice 4 (2,5 points) 1,5/2,5

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$.

Compléter la fin des phrases suivantes :

1. Le nombre de 5-uplets de E sans répétition est $5! = \cancel{240}$ 120
2. Le nombre de 3-uplets de E avec répétition est $\cancel{\frac{5!}{2!3!} = 10}$ $5^3 = 125$
3. Le nombre de 4-uplets de E sans répétition et commençant par a est $\cancel{\frac{5!}{(5-4)!4!} - \frac{4!}{(4-3)!3!}} =$ * 1,5
4. Le nombre de sous-ensembles de E est 2^5 ✓
5. Le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de E est $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = 10$ ✓

*3. $1 \times A_4^3 = 24$

Exercice 5 (3,5 points) 1,5/3,5

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

1. Rappeler l'expression de $\binom{n}{k}$ et rappeler ce que compte cette quantité.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ Elle compte le nombre de k elements parmis n elements ?

?

nombre de sous ensembles à k élèments parmi n élèments

1

2. Considérons un ensemble E de cardinal n.

Expliquer (d'un point de vue dénombrement) pourquoi il y a autant de sous-ensembles de E à k éléments que de sous-ensembles de E à $n - k$ éléments. Démontrer ensuite cette affirmation par le calcul.

Soit $|P_k| = \binom{n}{k}$ et $|P_{n-k}| = \binom{n}{n-k}$ Soit $A \in E$ ~~donc~~ si $|A| = k$ $|\bar{A}| = n-k$

~~soit $A = \binom{n}{k}$ et $\bar{A} = \binom{n}{n-k}$~~

Il y a bijection donc :

t.q $|A| = k$ alors $|\bar{A}| = n-k$

$C : P_k \to P_{n-k}$ C'est injective

$\forall (A_1, A_2) \in (P_k)^2$ $\bar{A_1} = \bar{A_2} \Rightarrow A_1 = A_2$

donc :

C'est surjective

$\forall B \in P_{n-k}$ $\exists A \in P_k$ $(A = \bar{B})$ $C(A) = (\bar{B}) = B$

Donc C est une bijective, entre deux ensembles de cardinal fini donc $|P_k| = |P_{n-k}|$ $\Leftrightarrow \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Nous voulons démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Donc $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(\cancel{n}-k))!(n-k)!}$ ✓

??

0,5

$= \frac{n!}{(n-k)!k!}$