/323

EPITA

Mathématiques

Partiel S1

durée : 3 heures

Janvier 2023

Nom :

Prénom :

Classe : E1

$\frac{11}{20}$

Beaucoup de très bonnes choses rigoureuses : c'est bien.
Mais encore des points à renforcer.

NOTE : $\frac{21,5}{40}$

Le barème est sur 40 points. La note sera divisée par 2 pour obtenir une note sur 20.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. **Il y a en tout 8 exercices.**
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 : encore des intégrales (3 points)

1. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $I = \int_1^2 (x-1)\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x$

0

2. Sans intégration par parties ni changement de variable, calculer $J = \int_0^1 \frac{x^2+2}{x^3+6x+1}\,\mathrm{d}x$

Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+6x+1}$ avec $u = x^3+6x+1$ et $u' = 3x^2+6$

donc $f = \frac{1}{3}\frac{u'}{u}$ donc $F = \frac{1}{3}\ln(u)$

Donc $J = \left[\frac{1}{3}\ln(x^3+6x+1)\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}\ln(1) - \frac{1}{3}\ln(8)$

$= \frac{1}{3}\ln(8)$

1 TB

Exercice 2 : cours sur les polynômes (4 points)

Soient A et B deux polynômes à coefficients réels.

1. Que savez-vous du degré de $A+B$ et de $A \times B$?

0,5

deg(A+B) est inferieur au degrés maximum de A et B

dg(A×B) ?

2. Un étudiant doit énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B. Il écrit sur sa copie :

« $\exists\,(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A = BQ + R$ et $0 \leq R < B$ »

Son professeur lui compte faux. Rectifier correctement l'énoncé ci-dessus pour qu'il corresponde effectivement au théorème demandé (et avoir tous les points).

0

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*, \exists (q,r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = bq+r$ et $0 \leq r < |b|$

⚠ c'est la div euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$

3. Effectuer la division euclidienne de $A = 2X^4 + X - 3$ par $B = X^2 - X + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
2X^4+X-3 & X^2-X+1 \\
-\ (2X^4-2X^3+2X^2) & 2X^2+2X \\
2X^3-2X^2+X-3 & \\
-\ (2X^3-2X^2+2X) & \\
-X-3 &
\end{array}
$$

$(q,r) = (2X^2+2X, -X-3)$

1 TB

4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Que signifie que α est une racine de A ? Donner un exemple d'un polynôme A de degré 3 qui admet 42 comme racine.

Si α est une racine de A, quand $X=\alpha$, $A=0$

Exemple : $A = X^3 - 42X^2$ Ici A admet 42 comme racine

1

TB

Exercice 3 : nombres complexes (3 points)

Considérons l'équation (E) $(z+\sqrt{3}-i)(z^2-2z+2)=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

$(z+\sqrt{3}-i)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow (z+\sqrt{3}-i)=0$ ou $(z^2-2z+2)=0$

Soit $(z^2-2z+2)=0$ un polynôme de 2nd degrés de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=-2$ et $c=2$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 4-4\times1\times2$
$= -4$ $\Delta<0$ donc le polynome admet 2 racines dans $\mathbb{C}$

$z_1 = \frac{2-2i}{2}$ Et $(z+\sqrt{3}-i)=0 \Leftrightarrow z=-\sqrt{3}+i$
$=1-i$ Donc $(z+\sqrt{3}-i)(z^2-2z+2)=0 \Leftrightarrow z=-\sqrt{3}+i$ ou
$z_2 = 1+i$ $z=1+i$ ou $z=1-i$

1

2. Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E).

Soit $z_1=-\sqrt{3}+i$, $z_2=1+i$, $z_3=1-i$

$\lvert z_1\rvert=2$	$\lvert z_2\rvert=\sqrt{2}$	$\lvert z_3\rvert=\sqrt{2}$
$\cos\theta_1=\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\cos\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos\theta_3=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\theta_1=\frac{1}{2}$	$\sin\theta_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sin\theta_3=-\frac{\sqrt{2}}{2}$
Donc $z_1=2e^{i\frac{5\pi}{6}}$	$z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	$z_3=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

1

TB

Exercice 4 : arithmétique (11 points)

Les parties sont indépendantes. Les résultats de la question 1. peuvent être admis et utilisés par la suite.

1. Soient p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$.

(a) Montrer que $p \wedge a = 1$ ou $p \mid a$.

Si $p \mid a$ alors $a=pK$ C'est ce qu'il faut expliquer

ou si $p \nmid a$, comme p est premier alors p et a sont premiers entre eux

donc $p \wedge a = 1$.

Donc $p \mid a$ ou $p \wedge a = 1$

0

(b) Montrer que $p \wedge a = 1$ si et seulement si $\exists\, b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1[p]$.

0

2. Considérons le nombre premier $p = 47$. On cherche à résoudre l'équation (E) $23x \equiv 1[47]$ d'inconnue $x \in [\![1, 46]\!]$.

(a) Trouver dans $\mathbb{Z}^2$ une solution particulière (x_0, y_0) à l'équation (E_1) $23x + 47y = 1$.

$47 = 23\times 2 + \boxed{1}$ $\qquad 47 \wedge 23 = 1$
$23 = 1\times 23 + 0$

Donc $1 = 47 - 23\times 2$ $\qquad$ Une solution particulière à l'équation (E_1) est $(-2, 1)$.

0,5

(b) Résoudre (E_1) dans $\mathbb{Z}^2$.

On sait que $23x + 47y = 1$ et $23\times(-2) + 47\times 1 = 1$

Donc $23x + 47y = 23\times(-2) + 47\times 1$

$\Rightarrow 23(x+2) = 47(-y+1)$ $\qquad$ ⚠ dans le lemme de Gauss il faut

Donc $23 \mid 47(-y+1)$ or ~~$23 \nmid 47$~~ car $23 \wedge 47 = 1$ (question a)
donc d'après le lemme de Gauss $23 \mid (-y+1)$

Donc $\exists K \in \mathbb{Z}$ tel que $23K = (-y+1)$

et $23(x+2) = 47(-y+1) \Rightarrow 23(x+2) = 47\times 23K$
$\Rightarrow 47K = (x+2)$

2

On a donc $\begin{cases} 47K = x+2 \\ 23K = (-y+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 47K - 2 \\ y = -23K + 1 \end{cases}$

Vérifions dans l'équation
$23(47K-2) + 47(-23K+1)$
$= 23\times 47K - 2\times 23 + 47\times -23 + 1\times 47 = 23\times(-2) + 47\times 1$
$= 1$

Donc $S = \{47K-2, -23K+1\}, K \in \mathbb{Z}$.

TB

(c) En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E). En déduire les solutions de (E) dans $[\![1, 46]\!]$.

Soit S_2 les solutions dans $\mathbb{Z}$ de (E)
Donc d'après b., $S_2 = \{47K-2, K \in \mathbb{Z}\}$ $\qquad$ Il faut expliquer

1

Il faut que $47K - 2 \in [\![1, 46]\!]$ $\qquad$ et $47\times 1 - 2 = 45$

Les solutions de (E) dans $[\![1, 46]\!]$ sont donc $\{45\}$ $\qquad$ ah!

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

(a) Montrer que $ab \equiv 0[47] \iff a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$.

$ab \equiv 0[47] \Leftrightarrow ab = 47k \Leftrightarrow 47 | ab$
$\Leftrightarrow 47|a$ ou $47|b$
$\Leftrightarrow a \equiv 0[47]$ ou $b \equiv 0[47]$

0,5

⚠ ceci n'est vrai que parce que 47 premier $\Rightarrow 47|a$ ou $47 \wedge a = 1$ alors Gauss $\Rightarrow 47|b$

(b) En déduire que $a^2 \equiv 1[47] \iff a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$.

0,5

$\Leftarrow$ $a \equiv 1[47] \Rightarrow a^2 \equiv 1^2[47]$
$a \equiv -1[47] \Rightarrow a^2 \equiv (-1)^2[47]$ ✓

(c) Trouver tous les $a \in [\![1,46]\!]$ tels que $a^2 \equiv 1[47]$.

0

~~$a^2 \equiv 1[47]$ et d'apres la question precedente $a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$~~
~~Donc $S = \{\sqrt{47k-1}, \sqrt{47k+1}\}$ avec $k \leq \frac{46^2-1}{47}$~~

$a^2 \equiv 1[47] \Leftrightarrow a \equiv 1[47]$ ou $a \equiv -1[47]$ et $a \in [\![1,46]\!] \Rightarrow a = 1$ ou $a = 46$

(d) Soient $a \in [\![1,46]\!]$ et $k \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne de a^{46k} par 47 ? Justifier.

0,5

$a^{46k} = ((a^2)^{20} \times a^6)^k$ or $a^2 \equiv 1[47]$ donc $(a^2)^{20} \equiv 1[47]$ et $a^{40} \times a^6 \equiv 1[47]$
donc $(a^{46})^k \equiv 1^k[47]$ donc $a^{46k} \equiv 1[47]$

$(a^2 \equiv 1[47]$
$\Rightarrow a^4 \equiv 1^2[47]$
$\Rightarrow a^4 \times a^2 \equiv 1 \times 1[47]$

⚠ ceci n'est pas une hypothèse ici.

Exercice 5 : suites 1 (4,5 points)

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n \sim v_n$, $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$ en $+\infty$?

$u_n \sim v_n$ signifie que u_n et v_n sont equivalentes, que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ ✓
$u_n = o(v_n)$ signifie que u_n est négligeable, soit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ ✓
$u_n = O(v_n)$ signifie que u_n est dominée, soit que $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée. ✓

1,5

TB

2. Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$, $= o(\cdot)$, $= O(\cdot)$ en citant toutes les comparaisons possibles et en justifiant vos réponses.

   (a) $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = e^n - n$.

   $\frac{e^n - n}{n^2+1} = \cancel{\frac{n^2\left(\frac{1}{e^n} - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\frac{1}{e^n} - \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^2}}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \cancel{\frac{\frac{1}{e^n} - \frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = 0}$ $= +\infty$

   0,5

   Donc $v_n = o(u_n)$. Or toute suite convergente est bornée donc $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$

   (b) $u_n = n^2 - n + 1$ et $v_n = n^2 - 1$.

   $\frac{n^2 - n + 1}{n^2 - 1} = \frac{n^2\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$

   1

   Donc $u_n \sim v_n$. Or toute suite convergente est bornée donc $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$

3. Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Donner un équivalent simple de (u_n) en $+\infty$. Justifier.

   $u_n = \frac{-1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \Leftrightarrow u_n + \frac{1}{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n + \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = 0$ $\cancel{\frac{u_n}{-\frac{1}{2n}} = 1 + \varepsilon_n}$

   0,5

   Or $\frac{u_n + \frac{1}{2n}}{\frac{1}{n}} = n u_n + \frac{1}{2}$ pour que $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n + \frac{1}{2} = 0$,

   $\cancel{n \times -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2} = 0}$ $\rightarrow u_n = -\frac{1}{2n}$ +

   Donc $u_n \sim \left(-\frac{1}{2n}\right)$

   Explication à revoir.

Exercice 6 : suites 2 (5,5 points)

Considérons la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^2 + 6x - 8}{8}$ définie sur $\mathbb{R}$ et la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} &= f(u_n) \\ u_0 &\in \mathbb{R} \text{ donné} \end{cases}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 cette suite est-elle constante ?

   u_n est constante $\Leftrightarrow u_0 = f(u_0)$

   Soit $\frac{u_0^2 + 6u_0 - 8}{8} = u_0 \Leftrightarrow u_0^2 - 2u_0 - 8$ (polynomes du 2nd degrés)

   $\Delta = 4 + 32$
   $= 36$ $\Delta > 0$ donc $u_{0_1} = \frac{2-6}{2} = -2$ et $u_{0_2} = \frac{2+6}{2} = 4$

   1

   Donc (u_n) est constante si $u_0 = -2$ ou $u_0 = 4$

2. Faire le tableau (complet) des variations de f sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+6x-8}{8}$. Et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{8}(2x+6)$

$= \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$

$\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

x	$-\infty$		-3		-2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{17}{8}$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

1

✓ TB

3. Pour la suite de l'exercice, nous prendrons $u_0 \in]-2,4[$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2,4[$.

D'après le tableau de variation, si $u_0 \in]-2,4[$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2,4[$

car $f(]-2,4[) =]-2,4[$

0,5

4. Étudier la monotonie de (u_n).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 6u_n - 8}{8} - u_n$

$= \frac{u_n^2 - 2u_n - 8}{8}$ (nous avons déjà calculé le discriminant au 1) On trouvait -2 et 4

u_n	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$u_{n+1}-u_n$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Or $u_0 \in]-2,4[$ donc d'après la 3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-2,4[$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

donc (u_n) est décroissante

1

✓ TB

5. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, donner sa limite.

D'après la 4, (u_n) est décroissante et d'après le tableau de variation, (u_n) est minorée par $-\frac{17}{8}$

~~Donc~~ d'après le théorème des convergences monotones, (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Et $\ell = f(\ell)$ et u_n décroissante donc d'après le 1,

$\ell = -2$ ✓

un peu rapide.

1,5

Exercice 7 : une démonstration (4 points)

Soit (u_n) une suite.

1. Soit $l \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) converge vers l ».

0

2. Rappeler la définition avec les quantificateurs de « (u_n) est bornée ».

$\exists m, n \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant u_n \leqslant M$

0,5

3. Montrer que si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.

Où !

0

4. Expliquer pourquoi la réciproque est fausse.

Exercice 8 : exercice original (5 points)

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que

$$\forall (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ 0 \leq u_{p+q} \leq \frac{p+q}{pq}$$

En considérant des suites extraites de (u_n), étudier le comportement de (u_n) en $+\infty$ (convergence ou divergence). Justifier avec soin.

Soit deux suites extraites de u_n, (u_{p+q}) et $(u_{2(p+q)})$

On sait que $0 \leq u_{p+q} \leq \frac{p+q}{pq}$ or $\frac{p+q}{pq} = \frac{pq\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)}{pq}$

$= \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$

or $\lim\limits_{(q,p)\to+\infty} \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 0$

donc d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{+\infty} u_{p+q} = 0$

Et $0 \leq u_{2(p+q)} \leq \frac{2(p+q)}{4pq}$ De la même manière

$\lim\limits_{+\infty} u_{2(p+q)} = 0$

Si les deux suites extraites sont convergentes vers la même limite alors (u_n) est convergente sinon divergente.

Ici u_{p+q} et $u_{2(p+q)}$ converge vers 0 donc u_n converge vers 0.

Bien l'idée mais il doit être + précise

Il aurait fallu choisir des suites extraites

$(u_{2n}) = (u_{n+n})$

$(u_{2n+1}) = (u_{(n+1)+n})$

pour être plus rigoureuse.