323

Contrôle de cours 2 (1 heure)

15,5 / 20

Nom : **Prénom :** **Classe :** E1

N.B. : Le barème est sur 20.

Bien

1 Arithmétique

Exercice 1 : divisibilité et division euclidienne (3,5 points)

1. (a) Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. Donner la définition mathématique de $n \,|\, m$.

0,5 $n|m \iff \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $m = nk$

(b) Application : donner tous les diviseurs de 4 dans $\mathbb{Z}$.

0 $S = \{1, 2, 4\} \cup \{-1, -2, -4\}$

2. (a) Soit $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Énoncer avec soin le théorème de la division euclidienne de n par m.

1 $\exists ! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = mq + r$ avec $0 \leq r < |m|$ Bien

(b) On donne l'égalité : $-358 = 21 \times (-18) + 20$.

(i) Donner le quotient q_1 et le reste r_1 de la division euclidienne de -358 par 21. Justifier.

0,5 $q_1 = -18$ et $r_1 = 20$

$0 \leq 20 < 21$

(ii) Donner le quotient q_2 et le reste r_2 de la division euclidienne de -358 par -18. Justifier.

0 ~~$q_2 = -17$ et $r_2 = -1$ car $-358 = 21 \times (-17) - 1$~~

$0 \leq r_2 < |-18|$

Exercice 2 : congruence (5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$.

1. Donner la définition mathématique de $a \equiv b \, [n]$

0,5 $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que, $a = b + nk \iff n | a - b$

2. Montrer que si $a \equiv c \, [n]$ et $b \equiv d \, [n]$ alors $ab \equiv cd \, [n]$.

Si $a \equiv c [n]$ et $b \equiv d [n]$ alors $\exists (k, k') \in \mathbb{Z}^2$:

tel que $a = c + nk$ et $b = d + nk'$

2– Donc $a \times b = (c + nk) \times (d + nk')$

$= cd + cnk' + nkd + n^2kk'$

$= cd + n(ck' + kd + kkn)$ or $(ck' + kd + kk') \in \mathbb{Z}$

$= cd + nk''$ On pose $(ck' + kd + kk') = k''$

$ab \equiv cd [n]$

Donc si $a \equiv c [n]$ et $b \equiv d [n]$, on a bien $ab \equiv cd [n]$.

3. Dans le même esprit que la question précédente, que dire de $a+b$ et a^8 modulo n dans la cas où $a \equiv c\,[n]$ et $b \equiv d\,[n]$? Ne pas justifier.

0,5 $a+b \equiv c+d\,[n]$ et $\cancel{a+b \equiv a^8\,[n]}$ donc $\cancel{(c+d)+nk = a^8+nk'}$

!!

4. $24^3 + 78$ est-il divisible par 7 ? Justifier.

$24 \equiv 3\,[7]$ car $24 = 3+7\times 3$ donc $24^3 \equiv 3^3\,[7]$
$\equiv 27\,[7]$
$\equiv 6\,[7]$

1,5 Donc $24^3+78 \equiv 6+78\,[7]$
$\equiv 7\times 12\,[7]$ donc 24^3+78 est divisible par 7.
$\equiv 0\,[7]$

Exercice 3 : lemme de Gauss (3 points)

Énoncer et démontrer le lemme de Gauss.

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$,
$a|bc$ et $a \wedge b = 1 \Rightarrow a|c$

Bien

Si $a|bc$, $\exists K \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = aK$. De plus si $a \wedge b = 1$, d'après le théorème de Bézout et son corollaire, $\exists (u,v) \in \mathbb{Z}$ tel que $au+bv=1$.

3 $c = c(au+bv) = cau+cbv = cau+aKv = a(cu+Kv)$

Or $(cu+Kv) \in \mathbb{Z}$ donc $a|c$.

(Si $a|c$, $\exists K' \in \mathbb{Z}$ tel que $c = aK'$. Ici on pose $cu+Kv = K'$.
On a donc bien $c = aK'$ donc $a|c$.)

Exercice 4 : pgcd (2,5 points)

On se donne les deux entiers $a = 2^3 \times 3 \times 21$ et $b = 90$.
Les deux questions sont indépendantes.

1. Trouver $a \wedge b$. Donnez quelques explications sur votre calcul.

On écrit b en produit de facteurs premiers. Soit $b = 2\times 3^2 \times 5$

1 On a, $a = 2^3 \times 3 \times 21$, on l'écrit en produits de facteurs premiers
Soit, $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$

Oui

Au final, on obtient $a \wedge b = 2 \times 3^2 = 18$.

2. Trouver le reste de la division euclidienne de a^{22} par 23. Justifiez rigoureusement votre réponse.

$2^3 \times 3 \equiv 1\,[23]$ donc $2^3 \times 3 \times 21 \equiv 21\,[23]$ donc $a \equiv 21\,[23]$
~~Donc~~ 23 est premier $a \nmid 23$

0 Donc par le petit théorème de Fermat, $\cancel{a^{22} \equiv 21\,[23]}$

p premier
et $p \nmid a$) $\Rightarrow$ $a^{p-1} \equiv 1\,[p]$

2 Les suites

Exercice 5 (6 points)

Soit (u_n) une suite.

1. Rappeler les définitions mathématiques (avec les quantificateurs) de :

1 (a) (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$

1 (b) (u_n) est bornée : $\exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$

2. Donner un exemple d'une suite (non constante) :

(a) divergente (justifier brièvement).

$\forall n \in \mathbb{N}$ Soit $u_n = 3n+4$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n = +\infty$

0,5 (u_n) diverge en $+\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 3n+4 = +\infty$

(b) majorée par 3 (justifier brièvement).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ Soit $v_n = \frac{1}{n} + 2$, $v_1 = 1+2 = 3$ et (v_n) est ~~decroissante~~ décroissante

car $v_{n+1} - v_n \leq 0$

0,5 Donc v_n est majorée par 3 $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

(c) strictement croissante et convergente (justifier proprement).

$\forall n \in \mathbb{N}$ Soit $(w_n) = 5n^2 + 6$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} - w_n = 5(n+1)^2 + 6 - (5n^2+6)$

$= 5(n^2) + 10n + 5 + 6 - 5n^2 - 6$

$= 10n + 5$

0,5 or $n \in \mathbb{N}$ donc $10n+5 > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ donc $w_{n+1} - w_n > 0$

Donc w_n est bien strictement croissante.

De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 5n^2 + 6 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (w_n) = +\infty$ donc w_n est bien pas convergente

J'ai lu divergente sur la consigne mince !

3. Soit $q \in \mathbb{R}$. Prenons $(u_n) = (q^n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur q pour que la suite (u_n) converge. Donner la limite dans ce cas là.

1,5 Pour que la suite (u_n) converge il faut que $-1 < q \leq 1$

Quand $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ et quand $q = 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$ Oui