# Contrôle de cours 2 (1 heure)

**Nom :** **Prénom :** **Classe :** E1

15/20

N.B. : Le barème est sur 20. Il y a en tout 4 questions de cours.

## 1 Espaces vectoriels

### Cours 1 : familles de vecteurs (6 points) 6/6

Soient $E$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $E$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

1. (a) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille libre de $E$.

0,5 $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \; \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_E \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$

(b) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille liée de $E$.

0,5 $\exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0,\dots,0)\}, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = 0_E$ et $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$

(c) Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}_2[X]$. Parmi les vecteurs $P_1 = 2$, $P_2 = X + 1$, $P_3 = X$, $P_4 = X^2 + X$ et $P_5 = X^2 + 2X + 2$, donner sans justifier d'une part une famille libre de $E$ composée de 3 vecteurs et d'autre part, une famille liée de $E$ composée de 3 vecteurs.

1 Soit $F_{libre} = ((2), (X^2+X), (X))$

Soit $F_{liée} = ((X+1), (2), (X))$

2. On suppose que $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E$.

(a) Que cela signifie-t-il ? Vous devez répondre en utilisant des quantificateurs.

0,5 $\forall u \in E, \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, u = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$

(b) Dans cette question uniquement, $E = \mathbb{R}^2$. Proposer sans justifier une famille génératrice de $E$ parmi les vecteurs $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (-2, 4)$, $u_3 = (-1, 1)$ et $u_4 = (-1, -2)$.

0,5 $F_{gen} = ((-2, 4), (-1, 1))$ (On pouvait mettre les 4)

3. On suppose que $e_1$ est une combinaison linéaire de $e_2$, $e_3$ et $e_4$. Montrer rigoureusement que

$$\text{Vect}((e_1, e_2, e_3, e_4)) = \text{Vect}((e_2, e_3, e_4))$$

3

$\boxed{\subset}$ Soit $e \in \text{Vect}((e_1, e_2, e_3, e_4))$,

$\exists(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in \mathbb{R}^4, e = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_4 e_4$

Or $\exists(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^3, e_1 = \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$

Donc $e = \alpha_1(\lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4$

$= e_2(\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2) + e_3(\alpha_1\lambda_3 + \alpha_3) + e_4(\alpha_1\lambda_4 + \alpha_4)$

Ainsi $e \in \text{Vect}((e_2, e_3, e_4))$

$\boxed{\supset}$ Soit $e \in \text{Vect}((e_2, e_3, e_4))$,

$\exists(\mu_2, \mu_3, \mu_4) \in \mathbb{R}^n, e = \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 + \mu_4 e_4 + 0 e_1$

Donc $e \in \text{Vect}((e_1, e_2, e_3, e_4))$

Donc $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) \subset \text{Vect}(e_2, e_3, e_4) \subset \text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4)$

donc $\text{Vect}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \text{Vect}(e_2, e_3, e_4)$

## Cours 2 : bases (3 points) 1/3 − 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $\mathcal{B} = (e_1 = (1,0,1), e_2 = (0,1,1), e_3 = (1,1,0))$. Rappeler à l'aide de quantificateurs ce que signifie « $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3$ ». Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ de coordonnées 1, 2 et 3 dans la base $\mathcal{B}$ (en respectant l'ordre des vecteurs de $\mathcal{B}$). Trouver $x$, $y$ et $z$.

$\forall u \in \mathbb{R}^3, \exists! (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3, u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$ !!

0

$\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \mathcal{B}$ libre et generatrice ici $n = 3$

$\Leftrightarrow \forall (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_n) \in \mathbb{R}^3, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$

et $\forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^3, u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$

1

$(x,y,z) = 1(1,0,1) + 2(0,1,1) + 3(1,1,0)$ ~~avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$~~

0,5 $(x,y,z) = (4,5,3)$

$u = e_1 + 2e_2 + 3e_3$

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F = \mathrm{Vect}\,(((1,2,0), (3,-2,1), (4,0,1)))$. Trouver la dimension de $F$. Justifier soigneusement.

$v_1$, $v_2$, $v_3$

Vérifions si F est famille libre

$(v_1, v_2, v_3)$ generatrice par def de Vect

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} a+3b+4c=0 \\ 2a-2b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+3b+4c=0 \\ 2a=2b \\ b=-c \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a=-c \\ a=b \\ b=-c \end{cases}$

$v_2 = v_3 - v_1$ ! ! !

F n'est pas libre

Donc F est bien ~~une famille~~ libre $(c=-c \Rightarrow c=0)$

0,5/2

F est une famille de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ et $3=3$ donc F est une famille generatrice donc ~~F~~ $(v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$

$\dim F = \mathrm{card}\,|v_1, v_2, v_3| = 3$

# 2 Applications linéaires

## Cours 3 : exemples (3 points) 1/3 − 2

Donner, sans justifier, un exemple : 1) d'un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$, 2) d'une application non linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$, 3) d'une application linéaire non nulle de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}[X]$.

1

1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x-y, 2y, z) \end{cases}$ ✓

2) ~~$f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x, 2y) \end{cases}$~~

$(x+1, 2y)$

linéaire

2) $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}[X] \\ (x,y,z) \mapsto P(\cancel{x+y+z}) \end{cases}$

$x + yX + zX^2$

## Cours 4 : noyau et image (8 points) 7/8 −1

Soient $E$ et $F$ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Donner la définition mathématique de $\mathrm{Ker}(f)$.

1 $\mathrm{Ker}(f) = \{u \in E, f(u) = 0_F\}$

2. Donner la définition mathématique de $\mathrm{Im}(f)$.

1 $\mathrm{Im}(f) = \{v \in F, \exists w \in E, v = f(w)\}$
$= \{f(v), v \in E\}$

3. **Donner et démontrer** une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « $f$ injective »

1 $f$ injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $f$ injective, donc $\forall (u,u') \in E^2, f(u) = f(u') \Rightarrow u = u'$

Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$, car $f$ linéaire

$f(u) = 0_F$, $f(0_E) = 0_F$ donc $f(u) = f(0_E) \Rightarrow u = 0_E$ (par injectivité

Donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$, De plus $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$

Soient $(u,u') \in E^2$ tel que $f(u) = f(u')$

3

$f(u) = f(u') \Rightarrow f(u) - f(u') = 0_F$ car $f$ linéaire
$\Rightarrow f(u - u') = 0_F$
$\Rightarrow u - u' \in \mathrm{Ker}(f)$
$\Rightarrow u - u' \in \{0_E\}$ par notre hypothèse
$\Rightarrow u - u' = 0_E$
$\Rightarrow u = u'$

Donc $f$ injective

TB

4. **Donner** une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « $f$ surjective »

1 $f$ surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$

5. Donner sans justifier un exemple d'une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(((1, 0, -2)))$

0
$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (x, 0, \cancel{-2x}) \end{cases}$

$(y, z + 2x, 0)$