293

Contrôle de cours 1 (1 heure)

Tbie 17,5/20

Nom : **Prénom :** **Classe :** E1

N.B. : Le barème est sur 20. Il y a en tout quatre questions de cours.

1 Polynômes

Cours 1 : divisibilité et division euclidienne (3 points)

Soit $(E, F) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On suppose de plus que E n'est pas le polynôme nul.

1. Donner la définition mathématique de $E \mid F$ ainsi qu'un exemple avec $E = 2X - 1$ et F de degré 2.

0,5 Si $E|F$ alors $F = EQ$ avec $Q \in (\mathbb{R}[X])$

0,5 Exemple : $E = 2X-1$ et $F = (4X^2-1)$

2. (a) Énoncer soigneusement le théorème de la division euclidienne de F par E.

1 $\exists!(Q,R) \in (\mathbb{R}[X])^2$, $F = EQ + R$ avec $\deg(E) > \deg(R)$ ✓

(b) Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de $F = X^3 - 3X^2 + 5X - 7$ par $E = X - 1$.

1

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 - 3X^2 + 5X - 7 & X - 1 \\
\hline
-(X^3 - X^2) & X^2 - 2X + 3 \\
\quad -2X^2 + 5X - 7 & \\
\quad -(-2X^2 + 2X) & \\
\qquad 3X - 7 & \\
\qquad -(3X - 3) & \\
\qquad\quad -4 &
\end{array}
$$

$X^3 - 3X^2 + 5X - 7 = (X^2 - 2X + 3)(X - 1) - 4$

$(Q, R) = (X^2 - 2X + 3, -4)$

Cours 2 : racines (6 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement supérieur à 3. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

1,5 a) 1 racine de $P \Longleftrightarrow (X-1) \mid P$. b) $(X-1)^2 \mid P \Longrightarrow P(1) = 0$ c) $P(0) = 0 \Longleftarrow (X^2 - X) \mid P$

2. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ et $P^{(3)}(a) \neq 0$. Quel est l'ordre exact de multiplicité de la racine a ? À quoi cet énoncé est-il équivalent en termes de divisibilité ? Traduire ensuite à l'aide de quantificateurs ce que vous avez écrit.

1 La racine a est d'ordre de multiplicité exactement égale à 3 de P. Ce qui signifie que $(X-a) \mid P$, $(X-a)^2 \mid P$, $(X-a)^3 \mid P$ et $(X-a)^4 \nmid P$

~~$\forall X \in \mathbb{R}$~~, $(X-a) \mid P$, $(X-a)^2 \mid P$, $(X-a)^3 \mid P$ et $(X-a)^4 \nmid P$

$\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ $P(X) = (X-a)^3 Q$ et $Q(a) \neq 0$

3. Donner un exemple d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré 6 qui admet -1 comme racine d'ordre de multiplicité exactement 3 et tel que $P(0) = P'(0) = 0$. On ne vous demande pas de justifier.

1 $P(X) = (X+1)(X+1)(X+1)X^2(X+2) = (X+1)^3(X+2)X^2$

4. Soit $P(X) = X^3(X+2)^2(X^2 - X - 6)(X^2 + X + 1)$.

   (a) Donner le degré de P en expliquant brièvement comment vous l'avez obtenu.

   0,5 P est de degré 9 car $X^{3+1+1+2+2} = X^9$
   (degré le plus élevé dans chaque polynomes de P)

   (b) Écrire P comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (justifier brièvement). Donner ensuite toutes les racines réelles de P.

   1,5 (X^2-X-6) admet -2 et 3 comme racine donc on peut l'écrire sous la forme $(X-3)(X+2)$
   $P(X) = X^3(X+2)(X+2)(X-3)(X+2)(X^2+X+1)$
   (X^2+X+1) n'admet pas de racines réelles
   Soit S l'ensembles des racines réelles de P :
   $S = \{0, -2, 3\}$

2 Équations différentielles

Cours 3 (7 points)

Soit l'équation différentielle (E_0) $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ où a et b sont deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
On note S_0 l'ensemble de toutes les solutions de (E_0).
Un professeur demande à un élève d'expliciter précisément l'ensemble S_0 au tableau. L'élève note alors :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-F(t)} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$ Cette égalité est notée $(\star)$ par la suite.

1. Le professeur demande à l'élève d'être plus précis et d'écrire F en fonction de a et de b. Qu'écrit l'élève ? Vous donnerez aussi F' en fonction de a et de b.

1 Soit $F(t) = \int \frac{b(t)}{a(t)}$, une primitive de $\frac{b(t)}{a(t)}$. Donc $F'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$

2. Nous cherchons à présent à démontrer ce théorème rigoureusement.

   (a) Soit $y_0 \in S_0$ une solution de (E_0).
   On introduit la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$: $z : t \longmapsto y_0(t)e^{F(t)}$. Calculer la dérivée de z sur $\mathbb{R}$. En déduire que z est une fonction constante et conclure sur la forme de y_0.

   $\forall t \in \mathbb{R}, z'(t) = y_0'(t)e^{F(t)} + y_0(t) \times F'(t) \times e^{F(t)}$
   $= y_0'(t)e^{F(t)} + y_0(t) \times \frac{b(t)}{a(t)} \times e^{F(t)}$
   $= \frac{e^{F(t)}}{a(t)}(y_0'(t)a(t) + y_0(t)b(t))$ or $a(t)y_0'(t)+b(t)y_0(t) = 0$
   $= \frac{e^{F(t)}}{a(t)} \times 0 = 0$ car $y_0 \in S_0$

   2 Donc on en deduit que z est une constante (La derivée d'une constante est egale à 0)
   On a donc $z(t) = y_0(t)e^{F(t)} = K \Rightarrow y_0(t) = Ke^{-F(t)}$
   $\Rightarrow y_0(t) = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}}$
   Donc y_0 est de la forme $y_0 = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}}$

(b) Quelle inclusion de l'égalité ($\star$) venez-vous de démontrer ?

0,5 $\subset$

Merci d'être plus claire !

(c) Montrer l'autre inclusion de l'égalité ($\star$).

Définissons ~~y solution de (E_0) sous la forme~~ de la forme $y(t) = Ke^{-F(t)}$

$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = K \times (-F'(t)) e^{-F(t)}$
$= -F'(t) \times Ke^{-F(t)}$
$= -F'(t) \times y(t)$ or $F'(t) = \frac{b(t)}{a(t)}$
$= -\frac{b(t)}{a(t)} \times y(t)$

1 Soit $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = a(t)\left(\frac{-b(t)}{a(t)}y(t)\right) + b(t)y(t) = -b(t)y(t) + b(t)y(t)$
$= 0$

Donc y bien solution de (E_0)

Donc $y \in S_0$ donc $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto ke^{-F(t)} \end{array} \right\} \subset S_0$

3. Résoudre (E_0) $(t^4 + 1)y' + 2t^3 y = 0$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $y_0 = Ke^{-\int \frac{b(t)}{a(t)}}$ Soit $f(t) = \frac{+2t^3}{t^4+1}$ donc $F(t) = +\frac{1}{2}\ln(t^4+1)$

1,5 Donc $y_0 = Ke^{-\frac{1}{2}\ln(t^4+1)}$
$= K \times \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$

(sous la forme $f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$ donc $F = -\frac{1}{2}\ln(u)$ avec $u = t^4+1$)

Donc $S_0 = \{ y_0 = K \times \frac{1}{\sqrt{t^4+1}},\ K \in \mathbb{R} \}$ ✓ Bien

3 Développements limités

Cours 4 (4 points)

Donner les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 3 de

1. $f(x) = e^x$
$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ ✓

2. $g(x) = \cos(x)$
$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$ ✓

(Avec $o(x^3) = x^3 \mathcal{E}(x)$ où $\lim_{x \to 0} \mathcal{E}(x) = 0$)

3

3. $h(x) = \sin(x)$
$h(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$ ✓

4. $i(x) = \ln(1 + x)$
$i(x) = x \cancel{+ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}} + o(x^3)$

$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$