28+

12 03

EPITA

Mathématiques

Contrôle S2

durée : 3 heures

Février 2023

Nom :

Prénom :

Classe : E1

NOTE : $\frac{31}{40}$ T. Bren $\frac{15,5}{20}$

Le barème est sur 40 points. La note sera ramenée à une note sur 20 en divisant par 2.

Consignes :

- Lire le sujet en entier avant de commencer. Il y a en tout 7 exercices.
- **La rigueur de votre rédaction sera prise en compte dans la note.**
- **Un malus d'un point sur la note sur 20 sera appliqué aux copies manquant de propreté.**
- Documents et calculatrices interdits.
- Aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

4,5/6 - 1,5

Exercice 1 : polynômes (6 points)

On considère le polynôme $P(X) = X^6 - X^5 - 3X^4 + 7X^3 + 14X^2 + 6X$.

1. Montrer que -1 est une racine de P et trouver son ordre exact de multiplicité.

Si $P(-1)$ est une racine de P alors $P(-1)=0$

$P(-1) = (-1)^6 - (-1)^5 - 3(-1)^4 + 7(-1)^3 + 14(-1)^2 + 6(-1)$
$= 1+1-3-7+14-6$
$= 0$

Donc -1 est bien une racine de P

$P'(X) = 6X^5 - 5X^4 - 12X^3 + 21X^2 + 28X + 6$
$P'(-1) = 0$

2

$P''(X) = 30X^4 - 20X^3 - 36X^2 + 42X + 28$ et $P''(-1) = 0$

$P^{(3)}(X) = 120X^3 - 60X^2 - 72X + 42$ et $P^{(3)}(-1) = 114 \neq 0$ $-120+$ -66

(-1) est une racine de P d'ordre de multiplicité exactement égale à 3.

2. Que peut-on en déduire en termes de divisibilité ?

0,5

On en deduit que $(X+1)^3 \mid P(X)$ et $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X+1)^3 \times Q(X)$

et $(X+1)^4 \nmid P$

3. En vous aidant d'une seule division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

On sait que $(X+1)^3 \mid P(X)$ et $P(X) = (X+1)^3 Q(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$

$$
\begin{array}{l|l}
X^6 - X^5 - 3X^4 + 7X^3 + 14X^2 + 6X & (X+1)^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 \\
\hline
-(X^6 + 3X^5 + 3X^4 + X^3) & X^3 - 4X^2 + 6X \\
\quad -4X^5 - 6X^4 + 6X^3 + 14X^2 + 6X & \\
\quad -(-4X^5 - 12X^4 - 12X^3 - 4X^2) & \\
\quad\quad 6X^4 + 18X^3 + 18X^2 + 6X & \\
\quad\quad -(6X^4 + 18X^3 + 18X^2 + 6X) & \\
\quad\quad\quad 0 &
\end{array}
$$

2

Donc $P(X) = (X+1)^3 (X^3 - 4X^2 + 6X)$
$= (X+1)^3 X (X^2 - 4X + 6)$

or $(X^2 - 4X + 6)$ n'admet pas de racines réelles

Donc $P(X) = X(X+1)^3(X^2-4X+6)$ en produit de polynome irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$

TB

Exercice 2 : équations différentielles (6 points) 6/6

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

1. On considère l'équation différentielle (E_1) : $(x+1)y' - 2y = (x+1)^3 \cos(3x)$ sur $I =]-1, +\infty[$.

   (a) Résoudre (E_1) sur I.

Résolution de l'équation (E_0) : $(x+1)y' - 2y = 0$

$y_0 = Ke^{-\int \frac{b}{a}}$ Soit $f(x) = \frac{-2}{x+1}$ et $F(x) = -2\ln(x+1)$

avec $b = -2$ et $a = (x+1)$ (car $f = \frac{1}{u} \times u'$ avec $u(x) = x+1$)

Donc $y_0 = Ke^{2\ln(x+1)}$
$= K \times (x+1)^2$, $k \in \mathbb{R}$

On cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme :

$y_p = K(x) \times (x+1)^2$

$y_p' = K'(x) \times (x+1)^2 + K(x) \times (2x+2)$

$(x+1)y_p' - 2y_p = (x+1)^3 \cos(3x)$

$\Rightarrow (x+1)(K'(x) \times (x+1)^2 + K(x) \times (2x+2)) - 2(K(x) \times (x+1)^2) = (x+1)^3 \cos(3x)$

$\Rightarrow K'(x)(x+1)^3 + K(x)(x+1)^2 2 - 2K(x) \times (x+1)^2 = (x+1)^3 \cos(3x)$

$\Rightarrow K'(x)(x+1)^3 = (x+1)^3 \cos(3x)$

$\Rightarrow K'(x) = \cos(3x)$

Donc $K(x) = \frac{1}{3}\sin(3x)$

Et $y_p = K(x) \times (x+1)^2$ donc $y_p = \frac{1}{3}\sin(3x) \times (x+1)^2$

Donc $S = \{y = K \times (x+1)^2 + \frac{1}{3}\sin(3x) \times (x+1)^2,\ K \in \mathbb{R}\}$

TB

3

   (b) Trouver les solutions de (E_1) telles que $y(0) = 1$.

Pour que $y(0) = 1$ il faut que

$K \times (0+1)^2 + \frac{1}{3}\sin(3 \times 0) \times (0+1)^2 = 1$

$\Rightarrow K \times 1^2 = 1 \Rightarrow K = 1$

Donc les solutions de E_1 telles que $y(0) = 1$

sont $S = \{y = (x+1)^2 + \frac{1}{3}\sin(3x) \times (x+1)^2,\ k \in \mathbb{R}\}$

0,5

2. Soit (E_2) : $y'' + 4y' + 13y = (25x^2 + 16x + 2)e^{2x}$ sur $J = \mathbb{R}$.

(a) Montrer que $y_p : x \longmapsto x^2e^{2x}$ est une solution particulière de (E_2).

$y_p = x^2e^{2x}$ et $y_p' = 2xe^{2x} + x^2 \times 2e^{2x}$

et $y_p'' = 2x \times 2e^{2x} + 2e^{2x} + 2x \times 2e^{2x} + x^2 4e^{2x}$

1

$y_p'' + 4y_p' + 13y_p = 8xe^{2x} + 2e^{2x} + x^2 4e^{2x} + 4(2xe^{2x} + x^2 2e^{2x}) + 13x^2e^{2x}$
$= e^{2x}(8x + 2 + 4x^2 + 8x + 8x^2 + 13x^2)$
$= e^{2x}(16x + 2 + 25x^2)$

Bien

Donc $y_p : x \longmapsto x^2e^{2x}$ est bien une solution particulière de (E_2)

(b) Trouver toutes les solutions de (E_2).

Nous savons que $y_p = x^2e^{2x}$

Résolvons $y'' + 4y' + 13y = 0$

Soit l'équation associée : $r^2 + 4r + 13r = 0$

1,5

$\Delta = -36$ donc le polynome admet 2 racines non réelles

$\mathbb{R}$

Soit $x_1 = -2 - 3i$ et $x_2 = -2 + 3i$

Donc $y_0 = e^{-2x}(K_1\cos(3x) + K_2\sin(3x))$ avec $(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$

Donc $S = \{y = x^2e^{2x} + e^{-2x}(K_1\cos(3x) + K_2\sin(3x)), (K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2\}$

Exercice 3 : études locales (6,5 points)

6/6,5 -0,5

1. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rappeler les définitions mathématiques de : $f(x) \sim g(x)$ et $f(x) = o(g(x))$ au voisinage de a.

$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

1

et $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

2. Donner, en justifiant, un équivalent simple (autre que la fonction elle même) de $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 6x$ en $a = 0$ ET en $a = +\infty$.

$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 6x$ car $\lim_{x \to 0} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6x}{6x} = \frac{3x^3 - 2x^2}{6x} + \frac{6x}{6x}$
$= 0 + 1 = 1$

2

ET

Bien

$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^3$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 6x}{3x^3} = \frac{x^3(3 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^2})}{x^3(3)}$
$= \frac{3}{3}$
$= 1$

3. Soient h et k deux fonctions telles qu'au voisinage de 0

$$h(x) = 1 + 2x + x^2 - 3x^3 + o(x^3) \quad \text{et} \quad k(x) = -x + 3x^2 + o(x^2)$$

(a) Donner un équivalent le plus simple possible en 0 de : $h(x)$ (sans justifier), $k(x)$ (sans justifier) et $xh(x) + k(x)$ (en justifiant).

$h(x) \underset{x \to 0}{\sim} 1$ et $k(x) \underset{x \to 0}{\sim} -x$

$h(x) = 1 + 2x + o(x)$ et $k(x) = -x + 3x^2 + o(x^2)$

2 $xh(x) = x + 2x^2 + o(x^2)$

Donc $xh(x) + k(x) = x + 2x^2 - x + 3x^2 + o(x^2)$
$= 5x^2 + o(x^2)$

Donc $xh(x) + k(x) \underset{x \to 0}{\sim} 5x^2$

(b) A-t-on assez d'informations pour donner le développement limité de $h(x) + k(x)$ à l'ordre 1 ? À l'ordre 2 ? À l'ordre 3 ? Donner le développement limité quand la réponse est oui.

A l'ordre 1 et 2 oui mais pas à l'ordre 3

$h(x) + k(x) = 1 + o(1)$

1/1,5 $h(x) + k(x) = 1 + 2x - x + o(x) = 1 + x + o(x)$

$h(x) + k(x) = 1 + 2x + x^2 - x + 3x^2 + o(x^2)$
$= 1 + x + 4x^2 + o(x^2)$

Exercice 4 : développements limités (5 points)

3,5 /5 -1,5

Dans cet exercice, vous prendrez soin de rappeler les développements limités usuels que vous devez utiliser.

1. Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $f(x) = \cos(x)e^{-2x}$.

oh! Dommage!

$\cos(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$

0,5 Donc $e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2!} + \frac{(-2x)^3}{3!} + o(x^3)$
$= 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)$

Donc $f(x) = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + o(x^3)\right)\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + o(x^3)\right)$

$f(x) = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{2} + o(x^3)$

$f(x) = 1 - 2x + \frac{5x^2}{2} - \frac{7x^3}{3} + o(x^3)$

2. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x) = \sqrt{1+x}$ à partir d'un des cinq DL usuels.

$g(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ $\quad (1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + o(x^2)$

1 $\quad g(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)x^2}{2} + o(x^2)$

$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

3. Trouver le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $h(x) = \ln\left(1 + \sqrt{1+x}\right)$.

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$\ln(1 + 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)) = \ln(2(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)))$

$= \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2))$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

2 $\quad \ln(1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 + o(x^2)) = (\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2) - \frac{(\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2)^2}{2} + o(x^2)$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}x^2 - \frac{1}{32}x^2 + o(x^2)$

$= \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + o(x^2)$

$h(x) = \ln(2) + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + o(x^2)$ $\quad$ TB

Exercice 5 : calculs de limites (3,5 points) 2,5/3,5 $\quad$ −1

1. Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})}$. Vous devez utiliser les DL !

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin(x) = x + o(x^2)$ $\quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} + o(x^2)$

1/2 $\quad \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + 1 - x + \frac{x^2}{2} - 2 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} = \frac{x^2 + o(x^2)}{\frac{x}{2} + o(x^2)} \sim \frac{x^2}{\frac{x}{2}}$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})} = \lim_{x\to 0} x^2 \times \frac{2}{x}$

$= 2x$ $\quad$ or $\lim_{x \to 0} 2x = 0$

donc $\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{\sin(\frac{x}{2})} = 0$

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x$. Vous devez utiliser les DL.

On pose $X=\frac{1}{x}$ Bre

$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\ln(1+X))^{\frac{1}{X}}$

1,5

$(1+\ln(1+X))^{\frac{1}{X}} = e^{\ln(1+\ln(1+X))^{\frac{1}{X}}} = e^{\frac{1}{X}\ln(1+\ln(1+X))}$

$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$ $\ln(1+X-\frac{X^2}{2}+o(X^2)) = X - \frac{X^2}{2} - \frac{(X-\frac{X^2}{2})^2}{2} + o(X^2)$

$= X - X^2 + o(X^2)$

$\frac{1}{X}(X-X^2+o(X^2)) = 1 - X + o(X)$

$\lim_{x\to+\infty}(1+\ln(1+\frac{1}{x}))^x = e^1$

Exercice 6 : espaces vectoriels 1 (8 points)

5/8 -3

1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ? Justifiez rigoureusement votre réponse.

(a) $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\le y\}$

$E\subset\mathbb{R}^2$ qui est un sev de référence

- $0_{\mathbb{R}^2}\in E$ car si $x=0$ et $y=0$ alors $x\le y$
- Soit $(u,v)\in E$ tel que $u(x,y)$ avec $x\le y$
  $v(x_1,y_1)$ avec $x_1\le y_1$

0

$u+v(x+x_1,y+y_1)$ et $x+x_1\le y+y_1$ car $x\le y$ et $x_1\le y_1$

Donc $u+v\in E$

faux si $\lambda<0$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda u(\lambda x,\lambda y)$ ~~$\lambda x\le\lambda y$~~ car $x\le y$

Donc $\lambda u\in E$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}^2$ donc un $\mathbb{R}$-ev.

(b) $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x-y=0\}$.

$F\subset\mathbb{R}^3$ qui est un sev de reference

- $0_{\mathbb{R}^3}\in F$ car $0-0=0$
- Soit $(u,v)\in F$ avec $u(x,x,z)$ et $v(x_1,x_1,z_1)$

$u+v(x+x_1,x+x_1,z+z_1)$ $x+x_1-(x+x_1)=0$

2

donc $u+v\in F$

Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda u(\lambda x,\lambda x,\lambda z)$ $\lambda x-\lambda x=0$

donc $\lambda u\in F$

donc F est un sev de $\mathbb{R}^3$ donc un $\mathbb{R}$ev

(c) $G = \{P \in \mathbb{R}[X],\ X \mid P\}$

$X \mid P \Rightarrow P(X) = XQ(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$

$G \subset \mathbb{R}[X]$ qui est un sev de reference

- $0_{\mathbb{R}[X]}$ soit $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(X) = 0$ appartient à G car si on prend $x = 0$, $P(0) = 0 \times Q(0) = 0$

Bien

2

- Soit $(P, B) \in G$ avec $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$
$B(X) = XQ'(X)$ $Q'(X) \in \mathbb{R}[X]$

$P(X) + B(X) = XQ(X) + XQ'(X)$
$= X(Q(X) + Q'(X))$ et $(Q(X) + Q'(X)) \in \mathbb{R}[X]$
donc $P(X) + B(X) \in G$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda P(X) = \lambda X Q(X)$ et ~~$\lambda X \in \mathbb{R}$~~
donc $\lambda P(X) \in G$ Donc G est un sev de $\mathbb{R}[X]$ donc un $\mathbb{R}$ev

2. Dans cette question, il n'est pas demandé de justifier les réponses.

Donner un sous-espace vectoriel de E (autre que E et $\{0_E\}$) dans les cas suivants :

(a) $E = \mathbb{R}^4$

1

$C = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$
C est un sev de E

(b) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

0

$D = \{f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ \cancel{x \in \mathbb{R}},\ f(x) = \alpha(x)\}$

D est un sev de E

(c) $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (u_n) \text{ converge}\}$

0

~~$I = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha u_n = 1\}$~~
~~I est un sev de E~~

Exercice 7 : espaces vectoriels 2 (5 points)

3,5 | 5 −1,5

Les deux questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = 0\} \text{ et } G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y\}$$

(a) A-t-on $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$? Justifier.

0,5

Non car le vecteur $(0, 0, 3) \in F \cap G$ et est $\neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Bien

(b) Rappeler la définition mathématique de l'ensemble $F + G$.

0 $F+G = \{w = u+v, \cancel{w \in F \times G \text{ et}}\ u \in F, v \in G\}$

(c) Le vecteur $u = (1, 2, 3)$ appartient-il à $F + G$? Justifier.

0,5 $(0,1,1) \in F$ et $(1,1,2) \in G$

Et $(0+1, 1+1, 1+2) = (1,2,3)$ donc $u \in F+G$

(d) La décomposition que vous avez trouvé est-elle unique ? Justifier. Pourquoi en étiez-vous certain avant même de faire le moindre calcul ?

0,5 On peut aussi l'écrire avec $(0,1,2) \in F$ et $(1,1,1) \in G$

Donc elle n'est pas unique

Car z n'a pas de contraintes sur les deux sous espaces vectoriels

Car $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

2. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. ($n \in \mathbb{N}^*$)

(a) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille libre de E.

0 $\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n, \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \ \cancel{\text{avec}} \Rightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (0, \dots, 0)$

(b) Donner la définition mathématique de : $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

0,5 $\forall u \in E, \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $u = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$

(c) Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner un exemple d'une famille libre composée de 2 vecteurs et un exemple d'une famille liée composée de 3 vecteurs. Justification non demandée.

0,5 $\mathcal{F}_1 = ((-1,2,3), (1,0,0))$

0,5 $\mathcal{F}_2 = ((1,1,1), (2,2,2), (3,3,3))$

(d) Dans $E = \mathbb{R}^2$, donner un exemple d'une famille génératrice de E. Justification non demandée.

0,5 $\mathcal{F}_3 = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$