中国科学技术大学
University of Science and Technology of China

电动力学 C 复习提要

杨春雨

中国科学技术大学 化学物理系

2023 年 2 月 22 日

目录

复习重点

- Maxwell 方程组的建立；
- 能量密度和能流密度；
- 分离变量法求静电场、电多极矩；
- 自由空间平面波求解；
- 介质和导体场的求解；
- 菲涅尔公式的导出及其应用；
- 谐振腔和波导管求解以及模式限制；
- 矢势和标势；
- 规范不变性和规范条件；
- 推迟势；
- 电偶极辐射

1　矢量运算

1. 高斯定理

$$\iint \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint \nabla\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \tag{1.1}$$

2. 斯托克斯定理

$$\oint_L \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{1.2}$$

3. ∇ 算符的运算规律

$$\nabla f(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\nabla u \tag{1.3}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.4}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{A}(u) = \nabla u\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u} \tag{1.5}$$

$$\nabla(\psi\phi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\psi \tag{1.6}$$

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{f}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{f} + \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{f} \tag{1.7}$$

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A} \tag{1.8}$$

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{f}) = \varphi\nabla\times\boldsymbol{f} + (\nabla\varphi)\times\boldsymbol{f} \tag{1.9}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\nabla\times\boldsymbol{f})\cdot\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{g}) \tag{1.10}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{f}\times\boldsymbol{g}) = (\boldsymbol{g}\cdot\nabla)\boldsymbol{f} + (\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f} - (\boldsymbol{f}\cdot\nabla)\boldsymbol{g} - (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} \tag{1.11}$$

$$\nabla(\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{f}\times(\nabla\times\boldsymbol{g}) + \boldsymbol{g}\times(\nabla\times\boldsymbol{f}) + (\nabla\cdot\boldsymbol{g})\boldsymbol{f} + (\nabla\cdot\boldsymbol{f})\boldsymbol{g} \tag{1.12}$$

4. 球坐标系中的散度和旋度

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} \tag{1.13}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi} \tag{1.14}$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \tag{1.15}$$

2　电磁学现象的基本规律

1. 电流守恒定律

$$\oint_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}V \tag{2.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{2.2}$$

2. 安培定律

$$\boldsymbol{F} = I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{2.3}$$

3. 毕奥-萨伐尔定律

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\times\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V' \tag{2.4}$$

$$\tag{2.5}$$

对于细导线的情形

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_L\frac{I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{2.6}$$

4. 电磁感应定律

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.7}$$

5. 位移电流

$$\boldsymbol{J}_D = \varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.8}$$

6. 真空中的 Maxwell 方程组（微分形式）

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & (2.9)\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 & (2.10)\\ \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & (2.11)\\ \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\left(\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) & (2.12)\end{cases}$$

7. 真空中的 Maxwell 方程组（积分形式）

$$\begin{cases}\oint_S \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & (2.13)\\ \oint_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 & (2.14)\\ \int_l \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_S\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} & (2.15)\\ \int_L \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0\int_S\left(\boldsymbol{J}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} & (2.16)\end{cases}$$

8. 洛伦兹力公式

$$\boldsymbol{f} = \rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{2.17}$$

9. 束缚电荷密度为

$$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P} \tag{2.18}$$

$$\int \rho_P \mathrm{d}V = -\int \boldsymbol{P} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{2.19}$$

10. 电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \quad \text{or } \boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} \tag{2.20}$$

11. 磁化电流

$$I_M = \int_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.21}$$

$$\int_S \boldsymbol{J}_M \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oint_L \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{2.22}$$

12. 极化电流

$$\boldsymbol{J}_P = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{2.23}$$

13. 磁场强度

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M} \quad \text{or } \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2.24}$$

14. 介质中的 Maxwell 关系（微分形式）

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} & (2.25) \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \dfrac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} & (2.26) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho & (2.27) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 & (2.28) \end{cases}$$

15. 介质中的 Maxwell 关系（积分形式）

$$\begin{cases} \oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} & (2.29) \\ \oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = I_f + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} & (2.30) \\ \oint_S \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = Q_f & (2.31) \\ \oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 & (2.32) \end{cases}$$

16. 介质中的边值关系

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 & (2.33) \\ \boldsymbol{e}_n \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \boldsymbol{\alpha} & (2.34) \\ \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \sigma & (2.35) \\ \boldsymbol{e}_n \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0 & (2.36) \end{cases}$$

17. 能流密度和能量密度

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2.38}$$

18. 线性介质中有

$$\omega = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2.39}$$

3 静电场

1. 电场强度是电势的负梯度
$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi \tag{3.1}$$

2. 边值条件
$$\begin{cases}\phi_i=\phi_j\\ \varepsilon_i\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_i=\varepsilon_j\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right)_j\end{cases} \tag{3.2}$$

3. 除了上述的边值条件之外，有自由电荷的体系还会有带电量的限制
$$\int\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}S=\frac{Q}{\varepsilon}\Rightarrow\int\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}S=-\frac{Q}{\varepsilon} \tag{3.3}$$

4. Poisson 方程
$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{3.4}$$

5. 拉普拉斯方程
$$\nabla^2\varphi=0 \tag{3.5}$$

6. 拉普拉斯方程的通解为
$$\begin{aligned}\psi(R,\theta,\psi)=&\sum_{m,n}\left(a_{mn}R^n+\frac{b_{mn}}{R^{n+1}}\cos m\phi\right)P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi\\&+\sum_{m,n}\left(c_{mn}R^n+\frac{d_{mn}}{R^{n+1}}\sin m\phi\right)P_n^m(\cos\theta)\sin m\phi\end{aligned} \tag{3.6}$$

7. 轴对称情形下为
$$\psi(R,\theta)=\sum_n\left(a_nR^n+\frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{3.7}$$

   其中勒让德多项式的通项为
$$P_n(x)=\frac{1}{2^nn!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^n}\left(x^2-1\right)^n \tag{3.8}$$

   球对称情形对应 $n=0$ 的情况。

8. 对于真空中的一个电荷分布，电荷量、电偶极矩、电四极矩分别为
$$Q=\int_V\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V',\quad \boldsymbol{p}=\int_V\rho(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\mathrm{d}V',\quad \mathcal{D}_{ij}=\int_V 3x_i'x_j'\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'. \tag{3.9}$$

9. 其激发的电势按照电多极矩展开为
$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{x})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\boldsymbol{x}')\left[\frac{1}{R}-\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{2!}\sum_{ij}x_i'x_j'\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right]\mathrm{d}V'\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{R}-\boldsymbol{p}\cdot\nabla\frac{1}{R}+\frac{1}{6}\sum_{ij}\mathcal{D}_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\frac{1}{R}+\cdots\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

10. 电四极矩可以被重写成

$$\mathcal{D}_{ij} = \int_V (3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij})\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' \tag{3.11}$$

因此

$$\mathcal{D}_{11} + \mathcal{D}_{22} + \mathcal{D}_{33} = 0 \tag{3.12}$$

所以电四极矩只有 5 个独立分量。

11. 电四极矩写成张量形式为

$$\overleftrightarrow{\mathcal{D}} = \int_V (3\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}' - r'^2\overleftrightarrow{I})\rho(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' \tag{3.13}$$

12. 静电场的能量

$$W = \frac{1}{2}\int_V \rho\varphi\mathrm{d}V \tag{3.14}$$

4 静磁场

静电场静磁场对比

静电场	静磁场
$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$	$\nabla\times\boldsymbol{H} = 0$
$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = (\rho_f + \rho_p)/\varepsilon_0$	$\nabla\cdot\boldsymbol{H} = \rho_m/\mu_0$
$\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$	$\rho_m = -\nabla\cdot\boldsymbol{M}$
$\boldsymbol{E} = -\nabla\psi$	$\boldsymbol{H} = -\nabla\psi_m$
$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H} + \mu_0\boldsymbol{M}$
$\nabla^2\varphi = -(\rho_f + \rho_p)/\varepsilon_0$	$\nabla^2\psi_m = -\rho_m/\mu_0$

表 1: 静电场静磁场对比

1. 恒定电流磁场的基本方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}, \tag{4.1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{4.2}$$

2. 引入磁场的矢势

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4.3}$$

则

$$\int_S \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_S \nabla\times\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{4.4}$$

3. 矢势的物理意义：它沿任意闭合回路的环量代表通过以该回路为边界的任意曲面的磁通量。

4. 矢势的非唯一性：

$$\nabla\times(\boldsymbol{A} + \nabla\psi) = \nabla\times\boldsymbol{A} \tag{4.5}$$

5. 矢势的库伦规范条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0 \tag{4.6}$$

6. 矢势的微分方程

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \mu \boldsymbol{J} \Rightarrow \nabla^2 \boldsymbol{A} = -\mu \boldsymbol{J} \tag{4.7}$$

矢势的每一个分量都满足 Poisson 方程。

7. 矢势微分方程的一个特解为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{r}\mathrm{d}V' \tag{4.8}$$

8. 磁场能量

$$\mathcal{W} = \int_V \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}\mathrm{d}V \Rightarrow \mathcal{W} = \int_V \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{4.9}$$

9. 磁场总能量（外磁场 $\boldsymbol{A}_e$）

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_e)\cdot(\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}_e)\mathrm{d}V \tag{4.10}$$

10. 磁场与外磁场的相互作用能量

$$\mathcal{W}_i = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}_e + \boldsymbol{J}_e\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V = \int \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{A}_e\mathrm{d}V \tag{4.11}$$

11. 不存在电流的区域内，有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{4.12}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = f(\boldsymbol{H}) \tag{4.14}$$

于是就可以类比电场引入磁标势。具体类比参见表1。

12. 对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 做多极展开

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\left[\frac{1}{R} - \boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R} + \frac{1}{2!}\sum_{i,j} x_i' x_j' \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\frac{1}{R} + \cdots\right]\mathrm{d}V' \tag{4.15}$$

13. 展开式的第一项为

$$\boldsymbol{A}^{(0)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi R}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' = 0 \tag{4.16}$$

14. 展开式的第二项为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\boldsymbol{x}'\cdot\nabla\frac{1}{R}\mathrm{d}V' \tag{4.17}$$

15. 对于闭合线圈

$$\boldsymbol{A}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\int_V \boldsymbol{x}'\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3}\cdot\frac{1}{2}\oint_L (\boldsymbol{x}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\times\boldsymbol{R} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{4.18}$$

16. 磁矩

$$\boldsymbol{m} = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{x}'\times\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V' \tag{4.19}$$

17. 特别地，对于电流线圈

$$\boldsymbol{m} = \frac{I}{2}\oint_L \boldsymbol{x}'\times\mathrm{d}\boldsymbol{l}' \tag{4.20}$$

18. 磁场

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = \nabla \times \boldsymbol{A}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}(\boldsymbol{m} \cdot \nabla)\frac{\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{4.21}$$

因为 $\boldsymbol{m}$ 是常矢量

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla(\boldsymbol{m} \cdot \frac{\boldsymbol{R}}{R^3}) \tag{4.22}$$

19. 磁标势

$$\varphi_m^{(1)} = \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{R}}{4\pi R^3} \tag{4.23}$$

因为

$$\boldsymbol{B}^{(1)} = -\mu_0 \nabla \varphi_m^{(1)} \tag{4.24}$$

5 电磁波的传播

1. $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的波动方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{5.1}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \tag{5.2}$$

2. 时谐电磁波

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) e^{-i\omega t} \tag{5.3}$$

3. 时谐电磁波的 Maxwell 方程组

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E} = i\omega\mu \boldsymbol{H}, \\ \nabla \times \boldsymbol{H} = -i\omega\varepsilon \boldsymbol{E}, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{H} = 0 \end{cases} \tag{5.4}$$

4. 时谐电磁波的 Maxwell 方程组的等价形式

$$\begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0, \\ \boldsymbol{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \boldsymbol{E} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \nabla^2 \boldsymbol{B} + k^2 \boldsymbol{B} = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \\ \boldsymbol{E} = \frac{i}{\omega\mu\varepsilon} \nabla \times \boldsymbol{B} \end{cases} \tag{5.5}$$

5. Helmholtz 方程

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} + k^2 \boldsymbol{E} = 0 \tag{5.6}$$

6. Helmholtz 方程的一个解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} \tag{5.7}$$

7. 波矢量 $\boldsymbol{k}$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5.8}$$

8. 波矢量和电场强度关系

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cdot \nabla e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)} = i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E} = 0. \tag{5.9}$$

9. 平面电磁波的磁场

$$\boldsymbol{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla \times \boldsymbol{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\boldsymbol{k}}{k} \times \boldsymbol{E} = \sqrt{\mu\varepsilon}\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{E}. \tag{5.10}$$

10. 电磁波的电场和磁场之比

$$\frac{|\boldsymbol{E}|}{|\boldsymbol{B}|} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v \tag{5.11}$$

真空中这个比值就是光速。

11. 电磁波的能量密度

$$w = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}(\varepsilon E^2 + \mu B^2) = \varepsilon E^2 = \mu B^2 \tag{5.12}$$

12. 电磁场的能流密度

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\boldsymbol{E}\times(\boldsymbol{e}_k\times\boldsymbol{E}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E^2\boldsymbol{e}_k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}w\boldsymbol{e}_k = vw\boldsymbol{e}_k \tag{5.13}$$

13. 周期均值公式：如果

$$f(t) = f_0 e^{-i\omega t},\quad g(t) = g_0 e^{-i\omega t+\phi} \tag{5.14}$$

那么

$$\overline{fg} = f_0 g_0 \cos\phi = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(f * g) \tag{5.15}$$

14. 能量密度和能流密度的均值

$$\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2\mu}B^2 \tag{5.16}$$

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\mu}E_0^2\boldsymbol{e}_k \tag{5.17}$$

15. 反射定理和折射定律

$$\theta = \theta',\quad \frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{c}{c''} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}}{\varepsilon_2\mu_2} \tag{5.18}$$

16. 菲涅尔公式

- $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面的时候

$$\frac{E'}{E} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''} = -\frac{\sin(\theta-\theta'')}{\sin(\theta+\theta'')} \tag{5.19}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta''} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta''+\theta)} \tag{5.20}$$

- 当 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面的时候

$$\frac{E'}{E} = \frac{\tan(\theta-\theta'')}{\tan(\theta+\theta'')} \tag{5.21}$$

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')\cos(\theta-\theta'')} \tag{5.22}$$

17. 布儒斯特定律：在 $\theta + \theta'' = 90°$ 的情况下 $\boldsymbol{E}$ 平行于入射面的分量没有反射波，因而反射光变成垂直于入射面偏振的完全偏振光。这时的入射角被称为布儒斯特角。

18. 全反射：假设 $\sin\theta > n_{21}$，于是

$$k''_x = k_x = k\sin\theta \tag{5.23}$$

$$k'' = k\frac{v_1}{v_2} = kn_{21} \tag{5.24}$$

因此 $k'' < k''_x$，

$$k''_z = \sqrt{k''^2 - k''^2_x} = ik\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2} = i\kappa \tag{5.25}$$

折射波电场为

$$\boldsymbol{E}'' = \boldsymbol{E}''_0 e^{-\kappa z} e^{i(k''_x z - \omega t)} \tag{5.26}$$

19. 做对应 $\sin\theta'' \to \frac{k''_x}{k''} = \frac{\sin\theta}{n_{21}}$， $\cos\theta = \frac{k''_z}{k''} = \frac{ik\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{kn_{21}} = i\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{n_{21}^2} - 1}$，可以得到

垂直入射

$$\frac{E'}{E} = \frac{\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta + i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = e^{-2i\delta}, \quad \tan\phi = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{\cos\theta} \tag{5.27}$$

平行入射

$$\frac{E'}{E} = \frac{n_{21}^2\cos\theta - i\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos\theta + i\theta\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}} = e^{-2i\delta}, \quad \tan\delta = \frac{\sqrt{\sin^2\theta - n_{21}^2}}{n_{21}^2\sin 2\theta} \tag{5.28}$$

20. 在导体中电荷密度随时间呈指数衰减

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t} \tag{5.29}$$

弛豫时间 $\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$，当 $\omega \ll \tau^{-1}$ 或者 $\frac{\sigma}{\omega\sigma} \gg 1$ 是，可以认为 $\rho(t) = 0$，于是良导体条件

$$\frac{\sigma}{\omega\sigma} \gg 1 \tag{5.30}$$

21. 导体内的 Maxwell 方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.31}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{5.32}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0 \tag{5.33}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{5.34}$$

22. 一定频率的电磁波的 Maxwell 方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = i\omega\mu\boldsymbol{H} \tag{5.35}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H} = \sigma\boldsymbol{E} - i\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{5.36}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{5.37}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 \tag{5.38}$$

23. 引入复电容率

$$\varepsilon' = \varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \tag{5.39}$$

上述方程即和绝缘介质中完全一致。

24. 对应于复电容率的波矢为

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\beta} + i\boldsymbol{\alpha} \tag{5.40}$$

25. 对应的电磁波表达式为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{x}} e^{i(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)} \tag{5.41}$$

26. 对应的磁场为

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu\omega}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \frac{1}{\mu\omega}(\beta + i\alpha)\boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} \tag{5.42}$$

27. 特别的，良导体情形下，有

$$\boldsymbol{H} \approx \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\mu}} e^{i\frac{\pi}{4}} \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} \tag{5.43}$$

磁场相位相比于电磁滞后 $\pi/4$，且

28. $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 满足

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2\mu\varepsilon \tag{5.44}$$

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}\omega\mu\sigma \tag{5.45}$$

这是由于

$$k^2 = \beta^2 - \alpha^2 + 2i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta} = \omega^2\mu(\varepsilon + i\frac{\sigma}{\omega}) \tag{5.46}$$

29. 对良导体情形 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$，因此 $k \approx \sqrt{i\omega\mu\sigma}$，此时

$$\alpha = \beta \approx \sqrt{\frac{\sigma\mu\omega}{2}} \tag{5.47}$$

30. 穿透深度

$$\delta = \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\varepsilon\omega}} \tag{5.48}$$

31. 趋肤效应：高频电磁波，电磁场以及与其相互作用的高频电流只集中于表面很薄的一层内。

32. 电流热效应引起的损耗功率密度为

$$\overline{p} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{J}_f^* \times \boldsymbol{E}) \tag{5.49}$$

33. 反射系数：反射能流和入射能流之比

$$R = \frac{|E'|^2}{|E|^2} \approx 1 - 2\sqrt{\frac{2\omega\varepsilon_0}{\sigma}} \tag{5.50}$$

34. 波导是中空的金属管，谐振腔是中空的金属腔。

35. 理想导体边界条件：在导体表面上，电场线和界面正交，磁感应线和界面正切。

36. 导体边界条件

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{E} = 0 & (5.51) \\ \boldsymbol{e}_n \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{\alpha} & (5.52) \\ \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{D} = \sigma & (5.53) \\ \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{B} = 0 & (5.54) \end{cases}$$

上面两个和下面两个是等价的，一些讨论可以参见课本 P129。我们可以理解为，导体界面上电场切向分量为零，法向分量的导数为零，磁场反之。

37. 矩形谐振腔中的电磁波的电场强度满足

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z, \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z, \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z, \end{cases} \quad \begin{array}{c} k_x = \frac{m\pi}{L_1}, k_y = \frac{n\pi}{L_2}, k_z = \frac{p\pi}{L_3}, \\ m, n, p = 1, 2, \cdots \end{array} \tag{5.55}$$

38. A_1, A_2, A_3 中只有两个是独立的，因为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \Rightarrow k_x A_1 + k_y A_2 + k_z A_3 = 0 \tag{5.56}$$

所以对于给定的 (m, n, p) 有两种不同的振动模式。

39. 矩形波导中的电磁波满足

$$\begin{cases} E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}, \\ E_y = A_2 \sin k_x x \cos k_y y e^{ik_z z}, \\ E_z = A_3 \sin k_x x \sin k_y y e^{ik_z z}, \end{cases} \quad k_x = \frac{m\pi}{a}, k_y = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.57}$$

40. 矩形波导中的电场和磁场不会同时为横波。

41. 一个波导有最低截止频率（截止频率以下电磁波是衰减的）

$$\omega_{c,mn} = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \tag{5.58}$$

特别的，$a > b$ 的时候截止频率

$$\omega_{c,10} = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\varepsilon}} \tag{5.59}$$

若管为真空，截止波长为 $2a$。

6 电磁波的辐射

1. 一般情况下，电场是有旋有源的场，电场和矢势关系

$$\nabla \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) = 0 \tag{6.1}$$

2. 因此电场满足

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\nabla \psi \tag{6.2}$$

所以

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \psi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.3}$$

3. 规范变换

$$\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\psi \tag{6.4}$$

$$\varphi\to\varphi'=\varphi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{6.5}$$

4. 规范不变性：当势做规范变换的时候，所有的物理量和物理规律都应该保持不变。

5. 规范条件：

   (a) 库伦规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \tag{6.6}$$

   (b) 洛伦兹规范：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{6.7}$$

6. 矢势和标势满足的基本方程为

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{6.8}$$

$$\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.9}$$

7. 库伦规范下：

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{6.10}$$

$$\nabla^2\varphi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.11}$$

8. 洛伦兹规范下

$$\nabla^2\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\mu_0\boldsymbol{J} \tag{6.12}$$

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{6.13}$$

   这是非齐次的波动方程，被称为**达朗贝尔方程**。

9. 如果电荷产生的势场是中心对称的，那么其达朗贝尔方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\delta(\boldsymbol{x}) \tag{6.14}$$

   有如下的解

$$\varphi=\frac{f(t-\frac{r}{c})}{r}+\frac{g(t+\frac{r}{c})}{r} \tag{6.15}$$

10. 上述方程的解最终为

$$\varphi(r,t)=\frac{Q(\boldsymbol{x}',t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{6.16}$$

   由场的叠加性，一般的电荷分布激发的标势为

$$\varphi(\boldsymbol{x},t)=\int_V\frac{\rho(\boldsymbol{x}',t-r/c)}{4\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}V' \tag{6.17}$$

11. 类比可以得到矢势满足

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t-r/c)}{r}\mathrm{d}V' \tag{6.18}$$

12. 对于交变电流 $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}',t)=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')e^{-i\omega t}$，其矢势为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{J(\boldsymbol{x}')e^{ikr-\omega t}}{r}\mathrm{d}V'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t} \tag{6.19}$$

13. 取 $r\approx R-\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{x}'$（$R$ 为场点到原点的距离），对 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 近似展开得到

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\int_V J(\boldsymbol{x}')(1-ik\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{x}'+\cdots)\mathrm{d}V' \tag{6.20}$$

14. 因为 $\int_V J(\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V'=\dot{\boldsymbol{p}}$，所有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})=\frac{\mu_0e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}} \tag{6.21}$$

15. 只保留一次项的情形下 $\nabla\to ik\boldsymbol{e}_R$，$\dfrac{\partial}{\partial t}\to -i\omega$，因此

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\frac{\mu_0ike^{ikR}}{4\pi R}\boldsymbol{e}_R\times\dot{\boldsymbol{p}}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{p}\sin\theta\boldsymbol{e}_\phi \tag{6.22}$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B}=c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0c^2R}(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{e}_R)\times\boldsymbol{e}_R=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0c^3R}\ddot{p}\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta \tag{6.23}$$

16. 电磁场的平均能流密度 $\overline{\boldsymbol{S}}$ 为

$$\overline{\boldsymbol{S}}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H})=\frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[(\boldsymbol{B}^*\times\boldsymbol{e}_R)\times\boldsymbol{E}\right]=\frac{c}{2\mu_0}|\boldsymbol{B}|^2\boldsymbol{e}_R=\frac{\ddot{p}^2\sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\boldsymbol{e}_R \tag{6.24}$$

17. 辐射功率 P 可以对能流密度积分得到

$$P=\oint_S|\overline{\boldsymbol{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|\ddot{\boldsymbol{p}}|^2}{3c^3} \tag{6.25}$$

7 一些例题

1. 从电磁场的能流角度证明导线中的欧姆定律，书本 p32；
2. 带电导体球（需要注意总电量的限制）、电场中的介质球等产生的电势问题，书本 p48；
3. 证明由金属表面辐射进入金属中的能量全部转变成了焦耳热，学习指导 p82；
4. 证明推迟势导出的矢势和标势满足洛伦兹规范条件，书本 p160；
5. 证明：矩形波导中不会存在 TM_{0m} 和 TM_{n0} 模式，学习指导 p84（运用 $\boldsymbol{E}$ 来表示 $\boldsymbol{H}$ 找出内在关系）；

8 2022 秋学期样题

1. (10 分) 什么是布儒斯特角？自然光以此角入射时有什么现象？为什么？

   入射角和折射角之和是 90° 的时候的入射角称为布儒斯特角，这个时候反射光电场的平行于入射面的分量为零，反射光沿着垂直于入射面的方向偏振。

2. (10 分) 写出矢势满足的达朗贝尔方程和它的解，该解为什么称为推迟势？

   达朗贝尔方程：
   $$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{Q(\boldsymbol{x})}{\varepsilon}\delta(\boldsymbol{x})$$
   其解为
   $$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}', t - r/c)}{R}\mathrm{d}V'$$
   其被称为推迟势是因为其势场的相位其反应了电荷产生的场的传递需要时间，场点相比于源点推迟了 r/c。

3. (10 分) 真空中有随时间变化的球对称电荷分布，即 $\rho = \rho(r,t)$，证明任一点传导电流密度和位移电流密度严格抵消。

   $\rho = \rho(r,t)$，所以 $\boldsymbol{D}$ 只依赖于 r，取半径为 r 的球面进而就有
   $$\int_S \boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V \rho(r',t)\mathrm{d}V = 4\pi\int_0^r \rho(r',t){r'}^2\mathrm{d}r'$$
   所以
   $$\boldsymbol{D} = \frac{1}{r^2}\int_0^r \rho(r',t){r'}^2\mathrm{d}r'$$
   而位移电流
   $$\boldsymbol{J}_D = \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{r^2}\int_0^r \rho(r',t){r'}^2\mathrm{d}r'$$
   同时，依据电流守恒，
   $$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_f = -\frac{\partial\rho(r,t)}{\partial t}$$
   从而有
   $$\int_S \boldsymbol{J}_f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_V -\frac{\partial\rho(r',t)}{\partial t}\mathrm{d}V = 4\pi\int_0^r -\frac{\partial\rho(r',t)}{\partial t}{r'}^2\mathrm{d}r'$$
   因此
   $$\boldsymbol{J}_f = \frac{1}{r^2}\int_0^r -\frac{\partial\rho(r',t)}{\partial t}{r'}^2\mathrm{d}r'$$
   所以
   $$\boldsymbol{J}_f + \boldsymbol{J}_D = 0.$$

4. (10 分) 导出 $\boldsymbol{E}$ 垂直于入射面时的菲涅耳透射公式 $\dfrac{E''}{E} = \dfrac{2\cos\theta\sin\theta''}{\sin(\theta+\theta'')}$ 。

   假设界面上自由电流为零，由边界条件
   $$\begin{cases} \boldsymbol{e}_n\times(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \\ \boldsymbol{e}_n\cdot(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0 \end{cases}$$

可以得到

$$\begin{cases} E + E' = E'' \\ H\cos\theta - H'\cos\theta = H''\cos\theta'' \end{cases}$$

以及

$$\boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$$

近似取 $\mu = 1$，联立可以得到

$$\frac{E''}{E} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_2}\cos\theta''}$$

因为

$$\frac{\sin\theta}{\sin\theta''} = \frac{\varepsilon_2\mu_2}{\varepsilon_1\mu_1}$$

代入即可证明。

5. (10 分) 一真空矩形波导管内 $f = 1.5\times10^{10}$ Hz 的的横电波只能以 $\mathrm{TE}_{10}, \mathrm{TE}_{01}, \mathrm{TE}_{11}$ 模式传播, 求波导管长边的取值范围。同频横磁波可以有什么模式在该波导管内传播？

显然需要满足

$$c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} < 2f$$

如果我们假设 $a > b$，那么还应该满足的关系是

$$\frac{4}{a^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \Rightarrow a < \sqrt{3}b, \quad \frac{2c}{a} > 2f$$

因为能且只能传播 $\mathrm{TE}_{10}, \mathrm{TE}_{01}, \mathrm{TE}_{11}$ 模式，所以

$$c\sqrt{\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2}} < 2f$$

上述问题就变成了一个线性规划问题。

对于相同频率的横磁波，只能以 TM_{11} 模式来传播。（原因参见上面罗列的例题）

6. (10 分) 一半径为 a 的圆形薄板电荷面密度 $\sigma = kr^3$, 其中 k 为常数, 求其在远处产生的电势 (精确到电四极矩)。

对于电荷量和电偶极矩有

$$Q = \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta k r^3 = \frac{\pi}{2}ka^3$$

$$\boldsymbol{p} = \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta k r^3 (r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}) = 0$$

对于电四极矩，显然 $D_{33}, D_{23}, D_{32}, D_{13}, D_{31}$ 都为零，而

$$D_{11} = D_{22} = 3\int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta k r^3 \cdot r^2 \sin^2\theta \cdot r = \frac{3\pi}{7}ka^7$$

$$D_{21} = D_{12} = 3\int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta k r^3 \cdot r^2 \sin\theta\cos\theta \cdot r = 0$$

因此，电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{R} + \frac{3\pi}{7}ka^7\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1}{R}\right)\right]$$

7. (20 分) 半径为 a 的薄球壳上的电势为 $\varphi = V_0\cos(2\theta)$, θ 是极角, 求球内、外电势分布及球壳上的电荷密度。

电势具有轴对称性，所以我们的电势也具有轴对称性，因此

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n R^n + \frac{b_n}{R^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

球内电势为 φ_1，球外为 φ_2，边界条件为

$$\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = V_0\cos(2\theta)$$
$$\varphi_1(0)\ \text{is finite},\quad \varphi_0(+\infty) = 0$$

代入即可得到

$$\begin{cases}\varphi_1 = -\frac{1}{3}V_0 + \frac{4V_0}{3a^2}R^2 P_2(\cos\theta)\\ \varphi_2 = -\frac{aV_0}{3R} + \frac{4V_0 a^3}{3R^3}P_2(\cos\theta)\end{cases}$$

球壳上的电荷密度为

$$\sigma = \boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = \varepsilon\boldsymbol{e}_r\cdot(\nabla\varphi_1(a) - \nabla\varphi_2(a)) = \frac{4\varepsilon V_0}{a}(3\cos^2\theta - 1) - \frac{2\varepsilon V_0}{3a}$$

8. (20 分) 原点处有一电偶极子, 其电偶极矩大小 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$, 处于 xOy 平面内并与 x 轴夹 α 角, 求辐射电磁场分布、平均能流密度, 以及总辐射功率。已知径向基矢与直角坐标基矢的关系为

$$\boldsymbol{e}_R = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\boldsymbol{e}_z$$

矢势

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi}\int_V \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}')}{R}\mathrm{d}V' = \frac{\mu_0 e^{ikR}}{4\pi R}\dot{\boldsymbol{p}}$$

对应的电磁场分别为

$$\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\mu_0 ike^{ikR}}{4\pi R}(\boldsymbol{e}_R\times\dot{\boldsymbol{p}}) = \frac{\mu_0 k\omega e^{ikR}}{4\pi R}(\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{p})$$
$$\boldsymbol{E} = \frac{ic}{k}\nabla\times\boldsymbol{B} = c\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{e}_R = \frac{\mu_0 k\omega e^{ikR}}{4\pi R}(\boldsymbol{e}_R\times\boldsymbol{p})\times\boldsymbol{e}_R$$

能流密度

$$\overline{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B}) = \frac{\mu_0^2 k^2\omega^2}{32\pi^2 R^2}\left(p^2 - (\boldsymbol{e}_R\cdot\boldsymbol{p})^2\right)\boldsymbol{e}_R$$

辐射功率

$$P = \oiint |\overline{\boldsymbol{S}}|R^2\mathrm{d}\Omega$$

杨春雨

2023 年 2 月 22 日于中国科大