Instituto Tecnológico Autónomo de México

El problema de admisión a universidades con cotas inferiores y comunes

Tesis

que para obtener el título de

licenciado en matemáticas aplicadas

presenta

Ilan Jinich Fainsod

Asesor: DR RAMON ESPINOSA ARMENTA

México, D.F. 2018

"Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada "**TÍTULO DE LA TESIS**", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Bailléres Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación".

AUTOR

Fecha

Firma

"To life, to life, L'Chaim!"

Agradecimientos

¡Muchas gracias a todos!

Prefacio

PUEDEN QUITAR ESTA PARTE

Índice general

Capítulo 1

Introducción

"Matchmaker, matchmaker, Make me a match, Find me a find, Catch me a catch"

1.1. El problema de admisión a universidades

Descripción del problema

Definición 1.1.1. (Gale Shapley 1962) Decimos que una asignación de solicitantes a universidades es inestable si existen dos solicitantes α y β asignados a universidades A y B respectivamente, con la propiedad de que α prefiere estar en B que en A y B prefiere tener a α que a B. Es decir, existen una universidad y un solicitante que se prefieren entre ellos a sus respectivas asignaciones. Alternativamente una asignación de solicitantes a universidades es estable si no es inestable.

Definición 1.1.2. (Gale Shapley 1962) Una asignación es considera optima si cada solicitante esta mejor o igual respecto a sus preferencias que en cualquier otra asignación estable.

1.2. El problema del matrimonio estable

"Even the worst husband, God forbid, is better than no husband, God forbid."

Definición 1.2.1. Definimos la matriz de preferencias para un problema con n y con m mujeres como una matriz con n filas y m columnas donde donde la primera entrada de la celda (i, j) represente el orden de preferencia que le asigna el hombre i a la mujer j y análogamente la segunda entrada representa el orden de preferencia que le da la mujer j al hombre i.

Ejemplo 1.2.1. Supongamos que contamos con tres hombres α, β y γ y con tres mujeres A, B y C y la matriz de preferencias

$$\begin{pmatrix} & A & B & C \\ \alpha & 1,3 & 2,2 & 3,1 \\ \beta & 3,1 & 1,3 & 2,2 \\ \gamma & 2,2 & 3,1 & 1,3 \end{pmatrix}$$

aquí por ejemplo el orden preferencias de α es (A, B, C) y el orden de preferencias de C es (γ, β, α).

Definición 1.2.2. Análogo a la definición 1.1.1, decimos que un conjunto de matrimonios es inestable si existe un hombre y una mujer que se prefieren entre si a sus respectivas parejas. Alternativamente un conjunto de matrimonios es estable si no es inestable.

Ejemplo 1.2.2. Retomando el ejemplo 1.2.1.
El conjunto de parejas (α, A), $(\beta, B)\ y\ (\gamma, C)$ es estable porque a pesar de las preferencias de las mujeres cada hombre esta con su primera opción, es decir, los hombres prefieren a su pareja a cualquier otra mujer.

Ejemplo 1.2.3. Retomando el ejemplo 1.2.1.
El conjunto de parejas (α, A), (γ, B) y (β, C) es inestable porque γ prefiere a A que a su pareja actual (B) y A prefiere a γ que a su pareja actual (α).

1.2.1. Algoritmo de Gale Shapley

Ejemplo 1.2.4. Ejemplo de 4x4

Teorema 1.2.3 (Teorema de Gale Shaley). *El algoritmo de Gale Shapley termina en una emparejamiento estable.*

Demostración. ■

Lema 1.2.4. *Bajo el emparejamiento obtenido por Gale Shapley, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja.*

Demostración. Supongamos que en el emparejamiento de Gale Shapley m ($m \geq 2$) hombres terminan con la última mujer de su lista como pareja, eso significa que cada uno de esos m hombres invito a salir a todas las mujeres. Entonces cada mujer fue invita a salir por lo menos m veces, lo cual es una contradicción porque el algoritmo acaba cuando invitan a salir a la última mujer y a esta solo la invitan a salir una vez. Por lo tanto, solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja. ■

Corolario 1.2.5. *Si en un emparejamiento estable por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas, entonces existe dos o más emparejamientos estables en el problema.*

Demostración. Llamemos m al emparejamiento estable donde por lo menos dos hombres están emparejados con la última mujer de sus respectivas listas y llamemos m' al emparejamiento de Gale Shapley. Por el teorema 1.2.3 sabemos que el algoritmo de Gale Shapley siempre acaba en un emparejamiento estable y además en ese emparejamiento estable solo un hombre puede terminar con la última mujer de su lista como pareja por el lema 1.2.4. Por lo tanto m y m' son diferentes y como ambos son emparejamientos estables entonces el número de emparejamientos estables en el problema es mayor o igual a dos. ■

Corolario 1.2.6. *El número máximo de propuestas en el algoritmo es* $n^2 - n + 1$

Demostración. Por el lema 1.2.4 sabemos que a lo más un hombre acaba emparejado con la última mujer de su lista, por lo tanto el peor emparejamiento posible para el algoritmo es uno donde $n - 1$ hombres terminan con la penúltima mujer de sus respectivas listas y un hombre termina con la última. Para llegar a esta situación de acuerdo al algoritmo, los $n - 1$ hombres deben de realizar $n-1$ propuestas cada uno y el otro hombre debe de realizar n propuestas. Esto es $(n-1)(n-1)+n$ propuestas que es igual a $n^2 - n + 1$ propuestas. ■

Observación 1.2.7. La complejidad del algoritmo de Gale Shapley es del orden de n^2.

Ejemplo 1.2.5. Aquí va el ejemplo de 2x2 del lema Considere la matriz de preferencias

$$\begin{pmatrix} & A & B \\ \alpha & 1,1 & 2,1 \\ \beta & 1,2 & 2,2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2.6. Aquí va el ejemplo de 3x3 del lema
Considere la matriz de preferencias

$$\begin{pmatrix} & A & B & C \\ \alpha & 1,2 & 3,2 & 2,1 \\ \beta & 2,3 & 3,1 & 1,2 \\ \gamma & 2,1 & 3,3 & 1,3 \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Problemas NP-Completos

2.1. Clases de complejidad

Algo que nos interesa mucho cuando atacamos un problema de computación es que tan dificíl es de resolver y si existe una mejor manera de hacerlo. La complejidad computacional nos permite estudiar esto. Para encarrilarnos hay que empezar con algunas definiciones.

Definición 2.1.1. Se dice que un problema es un problema de decisón si admite dos posibles respuestas “Si” o “No”. Resolverlo es encontrar todas las soluciones en las que la respuesta es “Si”.

Definición 2.1.2. Un problema esta en la clase NP si existe un algoritmo polinomial para verificar que la respuesta de una solución dada es “Si”.

Ejemplo 2.1.1 (Problema del clima). Supongamos que Mariana le dice a Adrián que esta lloviendo, si Adrián decide verificar si esto es cierto solo tiene que realizar tres pasos:

1. Caminar a la ventana.
2. Abrir la ventana.
3. Ver el cielo.

Por lo tanto a Adrián le toma un tiempo constante verificar si esta lloviendo lo que implica que este problem esta en NP.

Definición 2.1.3. Se dice que un problema de decisión esta en P si existe un algoritmo polinomial que lo resuelve.

Observación 2.1.4 ($P \subseteq NP$)*.* Si un problema de decisión pertenece a P entonces pertenece a NP.

Observación 2.1.5*.* Si A es un problema de decisión en P y existe un algoritmo polinomial que reduce resolver el problema de decisión B a resolver el problema A entonces B esta en P.

Vale la pena mencionar algunos ejemplos de problemas que estan en P:

1. El problema de admisión a universidades.

2. Verificar si un numero es primo.

3. Encontrar la ruta más corta entre dos vertices en una gráfica.

4. El problema de la ruta critica.

Una conjetura famosa que vale la pena mencionar es si $P = NP$, es decir si todo problema en NP tambien se enecuentra en P. La persona que lo demuestra además de ganar fama y traajo es acredor a un permio de un millon de dolares.

2.2. El $k - SAT$

2.3. Problemas NP-Completos

"Chaos is a ladder'

Teorema 2.3.1 (Teorema de Cook-Levin)**.** *El 3-SAT es NP-Completo.*

Donde esta la demostración.

Capítulo 3

Conclusiones

Concluyo que

Apéndice A

Álgebra Lineal

Cosas.