INSTITUTO TECNOLOGICO AUTONOMO DE MEXICO

EL PROBLEMA DE ASIGNACION DE MEDICOS RESIDENTES A HOSPITALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS

P R E S E N T A

JUAN BERNARDO MARTINEZ PARENTE CASTAÑEDA

ASESOR: DR. RAMON ESPINOSA ARMENTA
REVISOR; M. EN C. JAVIER ALFARO PASTOR

CIUDAD DE MEXICO 2016

"Con fundamento en los artículos 21 y 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor y como titular de los derechos moral y patrimonial de la obra titulada "**EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE MÉDICOS RESIDENTES A HOSPITALES**", otorgo de manera gratuita y permanente al Instituto Tecnológico Autónomo de México y a la Biblioteca Raúl Baillères Jr., la autorización para que fijen la obra en cualquier medio, incluido el electrónico, y la divulguen entre sus usuarios, profesores, estudiantes o terceras personas, sin que pueda percibir por tal divulgación una contraprestación".

Juan Bernardo Martínez Parente Castañeda

Fecha

Firma

A mis padres, Adriana y Javier,
y a mi hermana, Sofía,
(y también a Karin, Andrea y José)
porque sin ustedes no estaría donde estoy.

Agradecimientos

Definición. Denotamos por Ω al conjunto de personas que a lo largo de 25 años me han apoyado y aconsejado.

Proposición. $1 \ll |\Omega| < \infty$. Es decir, la cantidad de gente en Ω, pese a que es finita, es muy grande.

Tecnicismos aparte, quiero agradecer primeramente al profesor Ramón Espinosa por su tiempo y dedicación y por sugerirme el tema de esta tesis, al cual me gustaría sacarle más jugo en el futuro. Agradezco muchísimo también el apoyo de mis sinodales, Ana Paulina Figueroa, Marta Cabo y Javier Alfaro.

Gracias a mis papás, Adriana y Javier, y a mi hermana, Sofía, por estar siempre ahí para mí, y sin quienes este ciclo no cerraría. Han hecho más por mí de lo que puedo expresar con plabras. Gracias también a mi “mamá Karin” y a mis otros dos hermanos, Andrea y José.

De forma un tanto indirecta pero no menos obvia, esta tesis fue posible gracias a todos los profesores que, por largos años, me han educado, enseñado y aconsejado. Quiero mencionar especialmente a Mariane, en cuya ausencia no habría aprendido a amar las matemáticas a tiempo, y quien me dio el empujón que necesitaba para estudiar Matemáticas Aplicadas.

También agradezco a mi familia extendida, en especial a Anita y Lili, Caro y Geñis, Gloria y Carlos, Ceci y Pilar, Jerry y Xóchitl, e Hilde.

Por último, quiero agradecer a mis amigos: a los Kamelåså, Diana, Arkin y Luis; a los Carleñoños, Adjani, Alexis y (otra vez) Arkin; al Roomie; a toda la gente del CARLE (con especial cariño a Lilyth y a Jesús); a los de *El Supuesto* (ustedes saben de quiénes hablo); a Mario y Enrique, y a todos en Las Quince Letras.

Corolario. A todos y a aquellos que no aparecen explícitamente en estas páginas: muchas, muchísimas gracias. Valen chorros.

Quiero agregar un *disclaimer* respecto al Problema del Matrimonio Estable. En él se asume el binarismo de género con la intención de simplificar el modelado del problema. Otros factores como preferencia o identidad sexual no son relevantes en los resultados del mismo.

Prefacio

En 1952 se fundó el Programa Nacional de Asignación de Residentes (NRMP por sus siglas en inglés) de los Estados Unidos, el cual recibe a la fecha más de 40,000 solicitudes de estudiantes de medicina. El objetivo del NRMP es asignar a los médicos en alguno de los programas de residencia que son parte del mismo de forma óptima para todos los involucrados y de acuerdo con los deseos y necesidades tanto de los hospitales como de los estudiantes.

Tales criterios son plasmados en listas: las listas que crean los médicos están compuestas por los hospitales en los que desean realizar su residencia, ordenados de manera descendente desde el favorito de cada uno hasta el menos deseado y con la posibilidad de omitir aquellos hospitales en los que por ningún motivo desean realizar su residencia; similarmente, los hospitales enlistan a los médicos siguiendo pautas que dependen de los resultados de exámenes o entrevistas, entre otros.

El NRMP permite la posibilidad de que los médicos hagan sus solicitudes en parejas –por ejemplo, un matrimonio de médicos podría requerir, por algún motivo, hacer la residencia en hospitales cercanos–.

Matemáticamente, el problema es fácil de resolver cuando los médicos hacen las solicitudes de manera individual; cuando se añade la posibilidad de que participen por parejas, puede no existir una solución.

En esta tesis se estudia el problema de asignación de residentes a hospitales. El objetivo es demostrar que el caso en que se permite la participación de parejas es difícil de resolver matemáticamente, *i.e.* que pertenece a la clase de problemas $\mathcal{NP}$-completos. Para esto se procederá como sigue:

En el primer capítulo se introduce el Problema del Matrimonio Estable (PME), el cual ofrece una primera aproximación al problema de las asignaciones (en este caso llamadas «emparejamientos») estables. Se formaliza la noción de estabilidad, optimalidad y de orden total estricto, este último para complementar la idea de las listas de preferencias ordenadas. Se exhibe también un algoritmo que resuelve eficientemente el problema, así como algunas de sus propiedades.

En el segundo capítulo se presenta un caso particular del PME, el Problema de Asignación de Residentes (PAR). Se presentan y formalizan las diferencias con respecto al PME y se propone una modificación del algoritmo que resuelve el PAR de forma igualmente eficiente.

El tercer capítulo es crucial para el objetivo de este trabajo. En él se da una introducción a la teoría de los problemas de decisión y de las clases de complejidad (estudiados por la Teoría de Complejidad Computacional). Se habla de las reducciones polinomiales y se profundiza en el Problema de Satisfacibilidad Booleana (SAT) y en un caso particular denominado 3SAT.

El cuarto capítulo presenta el Problema de los Compañeros de Cuarto (PCC), una modificación del PME. Se estudian sus propiedades computacionales; específicamente se demuestra su pertenencia a la clase de problemas $\mathcal{NP}$-completos realizando una reducción polinomial de 3SAT al mismo.

Finalmente, en el quinto capítulo se formaliza el Problema de Asignación de Residentes con parejas. Se combinan los resultados de los dos capítulos anteriores para demostrar su $\mathcal{NP}$-completez.

Los resultados principales están basados en los presentados por Gale y Shapley (1962) y Ronn (1990), quienes estudiaron el PME, el PCC y el PAR, la relación entre ellos y sus propiedades.

Por último, se presentan las conclusiones y las futuras investigaciones que, desde el criterio del autor de esta tesis, podrían continuarse sobre este tema.

Índice general

CAPÍTULO 1

El problema del matrimonio estable

Imaginemos una comunidad en la que viven n mujeres solteras y n hombres solteros. Cada individuo desea encontrar una persona del sexo opuesto con la que pueda contraer matrimonio. Para alcanzar ese objetivo, cada individuo ordena a las personas del sexo opuesto según sus gustos y preferencias. ¿Será posible juntar n parejas, de forma que no existan una mujer y un hombre que se prefieran mutuamente en lugar de a sus respectivas parejas?

1.1. Modelado del problema

El problema del matrimonio estable (PME) se puede abordar desde la perspectiva de la investigación de operaciones, haciendo uso, entre otras herramientas, de la teoría de gráficas para representar el problema visualmente (ver Apéndice A). En esta sección se construirá un modelo que buscará describir y resolver el problema.

Definición 1.1. *Una gráfica* ***bipartita*** *es una gráfica cuyo conjunto de vértices V puede ser dividido en dos conjuntos ajenos M y H tales que toda arista incide en un vértice de M y un vértice de H. Llamamos* ***bipartición*** *de V a la pareja (M, H).*

Ejemplo 1.1. La siguiente gráfica $G = (M \cup H, E)$ es bipartita:

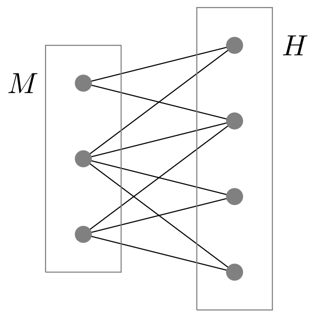


Figura 1.1: Una gráfica bipartita.

$\square$

Empecemos suponiendo que M es el conjunto de mujeres solteras y H el conjunto de hombres solteros en el pueblo. Claramente, ocurre que $M \cap H = \varnothing$. Podemos definir una gráfica G cuyo conjunto de vértices esté dado por la bipartición (M, H) y cuyas aristas sean todas las posibles formas de concretar matrimonios entre los individuos, es decir que G es completa.

Definición 1.2. *Decimos que la relación binaria $\succ$ entre los elementos de un conjunto A es un* ***orden total estricto*** *si para toda $a, b, c \in A$ se cumple que*

- *si $a \succ b$, entonces $b \not\succ a$;*
- *si $a \succ b$ y $b \succ c$, entonces $a \succ c$;*
- *si $a \neq b$, entonces $a \succ b$ o $b \succ a$, pero no ambas.*

Hemos dicho que cada mujer soltera y cada hombre soltero de la comunidad ordena a las personas del sexo opuesto de acuerdo con sus gustos y preferencias. Matemáticamente, esto quiere decir que a cada individuo soltero de la comunidad se le asocia un orden total estricto compuesto por todos los individuos solteros del sexo opuesto.

Ahora bien, de entre todas las posibles formas en las que se pueden concretar matrimonios, supongamos que se escoge una arbitraria. La siguiente definición busca caracterizar formalmente dicha serie de matrimonios:

Definición 1.3. *Sean M y H conjuntos tales que $M \cap H = \varnothing$. Un* ***emparejamiento*** *en $M \cup H$ es una función biyectiva*

$$\mathcal{M} : M \cup H \to M \cup H$$

tal que

- *$\mathcal{M}(m) \in H$ para toda $m \in M$,*
- *$\mathcal{M}(h) \in M$ para toda $h \in H$, y*
- *$\mathcal{M}(\mathcal{M}(z)) = z$ para toda $z \in M \cup H$.*

La definición anterior se puede adaptar a la perspectiva de teoría de gráficas de la siguiente manera:

Definición 1.4. *Sea $G = (V, E)$ una gráfica bipartita. Un* ***emparejamiento*** *en G es un conjunto $\mathcal{S} \subseteq E$ cuyas aristas no tienen vértices en común, es decir que cada vértice es extremo de a lo más una arista. En el contexto de gráficas bipartitas, es decir si $G = (M \cup H, E)$, cada arista de $\mathcal{S}$ incide en un vértice de M y un vértice de H. Decimos que el* *vértice $v \in V$ está **$\mathcal{S}$-emparejado** si v es el extremo de una arista de $\mathcal{S}$; en caso contrario, decimos que v es **$\mathcal{S}$-libre**. Por último, si todo vértice en G está emparejado, decimos que $\mathcal{S}$ es un emparejamiento **perfecto**.*

Ejemplo 1.2. Sea $G = (M \cup H, E)$, con $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ y $E = \{m_1h_1, m_1h_2, m_2h_1, m_2h_3, m_2h_4, m_3h_2, m_3h_3, m_3h_4\}$. Gráficamente:

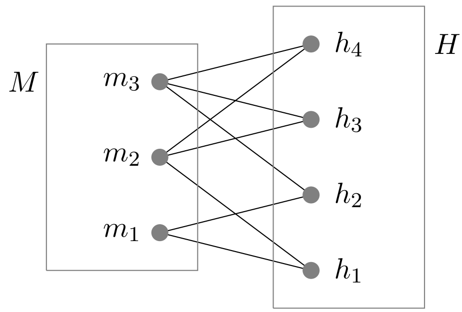


Figura 1.2: Gráfica G.

Sea ahora $\mathcal{M}$ un emparejamiento tal que $\mathcal{M}(m_1) = h_1$, $\mathcal{M}(m_2) = h_3$ y $\mathcal{M}(m_3) = h_4$. Obsérvese que por la definición de emparejamiento, lo anterior es equivalente a $\mathcal{M}(h_1) = m_1$, $\mathcal{M}(h_3) = m_2$ y $\mathcal{M}(h_4) = m_3$.

El emparejamiento $\mathcal{M}$ es análogo gráficamente al emparejamiento $\mathcal{S}$ en G, con $\mathcal{S} = \{m_1h_1, m_2h_3, m_3h_4\}$, mostrado a continuación:

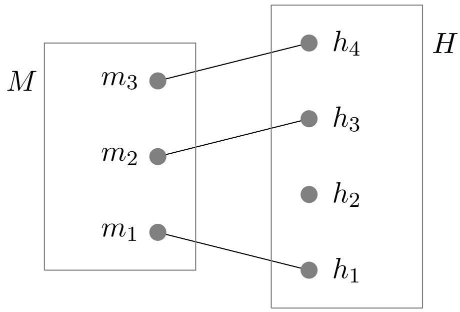


Figura 1.3: Emparejamiento S en G.

$\mathcal{S}$ no es perfecto, pues vemos que existe un vértice $\mathcal{S}$-libre, h_2. $\square$

No obstante, el problema que nos interesa es concretar parejas de forma que no existan una mujer y un hombre que se prefieran mutuamente en lugar de a sus respectivas parejas; esto es que sean parejas *estables*:

Definición 1.5. *Supongamos que para cada elemento $m \in M$ se define un orden total estricto $\succ_m$ de elementos en H, y para cada elemento $h \in H$ se define un orden total estricto $\succ_h$ de elementos en M. Consideremos además un emparejamiento $\mathcal{M}$ en $M \cup H$. Decimos que $\mathcal{M}$ es* ***estable*** *si no existen $m \in M$ ni $h \in H$ tales que*

- $\mathcal{M}(h) \neq m$,
- $m \succ_h \mathcal{M}(h)$,
- $h \succ_m \mathcal{M}(m)$

En otras palabras, un emparejamiento es inestable si existen m y h que son adyacentes en $\mathcal{S}$ pero que se prefieren mutuamente en términos del orden total estricto asociado con cada uno, de lo que prefieren al elemento con el que realmente están emparejados.

Definición 1.6. *Si M y H son conjuntos tales que $M \cap H = \varnothing$, decimos que $\mathcal{M}^*$ es un emparejamiento* ***óptimo*** *en $M \cup H$, si para cualquier emparejamiento estable $\mathcal{M}$ en $M \cup H$, ocurre que para cualquier individuo $z \in M \cup H$,*

$$\mathcal{M}^*(z) \succ_z \mathcal{M}(z) \text{ o } \mathcal{M}^*(z) = \mathcal{M}(z),$$

es decir que $\mathcal{M}^*$ es óptimo si bajo cualquier otro emparejamiento estable $\mathcal{M}$, cada individuo tendrá una pareja igual o menos preferida que bajo $\mathcal{M}^*$.

Ejemplo 1.3. (Gale y Shapley, 1962) Supongamos que existe una comunidad con tres mujeres (m_1, m_2, m_3) y tres hombres (h_1, h_2, h_3), todos solteros y que han establecido sus preferencias como se muestra en la siguiente tabla:

	m_1	m_2	m_3
h_1	(1,3)	(2,2)	(3,1)
h_2	(3,1)	(1,3)	(2,2)
h_3	(2,2)	(3,1)	(1,3)

Tabla 1.1: Preferencias de las mujeres y hombres de la comunidad.

El primer elemento de las parejas (i, j) de la tabla (i) indica el orden de preferencia que cada hombre asigna al conjunto de mujeres; el segundo (j), el orden de preferencia que cada mujer asigna al conjunto de hombres.

Existen seis emparejamientos posibles:

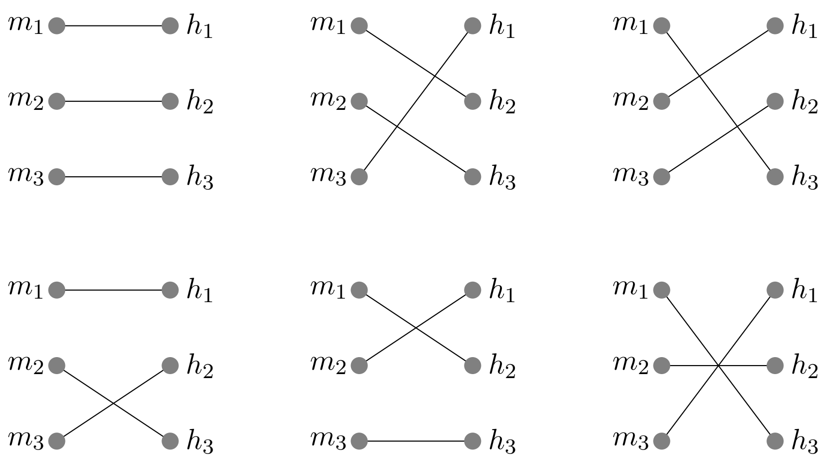


Figura 1.4: Los seis emparejamientos que se pueden formar con las mujeres y hombres de la comunidad.

De los tres emparejamientos superiores, el primero resulta de asignar a cada hombre la primera mujer de su lista; el segundo de asignar a cada mujer el primer hombre de su lista; y el tercero de asignar a todos su segunda opción. Los tres son estables. Por el contrario, los tres emparejamientos inferiores son inestables: es fácil ver que cualesquiera dos matrimonios podrían intercambiar parejas y obtener así un matrimonio preferible al anterior. $\square$

1.2. El algoritmo de Gale-Shapley

Una vez descrita la forma en que se puede modelar el PME, es natural preguntarse si para cualquier orden de preferencias entre las n mujeres y los n hombres es posible encontrar *siempre* un emparejamiento estable. Con el procedimiento descrito a continuación, presentado por Gale y Shapley (1962), se obtiene un emparejamiento que, como se verá después, resulta ser estable:

Durante la primera etapa, cada hombre le propone matrimonio a la mujer que más le gusta (la primera de su lista de preferencias). Similarmente, cada mujer rechaza a todos los hombres que se le hayan declarado, excepto al que más le guste (el hombre más arriba en su lista de preferencias). Este hombre, por el momento, será solamente su prometido y no su marido, ya que ella puede esperar a que algún hombre que le guste más que su prometido se le declare.

En la segunda etapa, los hombres que continúan solteros (porque fueron rechazados anteriormente) le proponen matrimonio a la segunda mujer en sus listas. Igual que antes, las mujeres rechazarán a todos menos al que más prefieran entre su actual prometido y el resto de los hombres que en esta etapa se le declararon.

Las siguientes etapas son similares a la anterior en cuanto a que cada hombre soltero le propondrá matrimonio a la mujer más arriba en su lista de preferencias y que no lo haya rechazado antes, y cada mujer se quedará con el hombre que más le guste de aquellos que se le declararon y su actual prometido.

Claramente, ningún hombre puede proponerle matrimonio a la misma mujer más de una vez. De ahí que necesariamente cada mujer reciba una propuesta en algún momento. El procedimiento llega a su fin cuando no haya ningún hombre ni mujer solteros. En ese punto, cada pareja concretada debe contraer matrimonio. Algorítmicamente, podemos estructurar el procedimiento de la siguiente forma:

Datos: $M \leftarrow$ conjunto de mujeres solteras,
$H \leftarrow$ conjunto de hombres solteros,
listas de preferencias de cada individuo.
Resultado: Emparejamiento estable entre M y H
mientras *exista un hombre soltero $h \in H$ que no le haya propuesto matrimonio a todas las mujeres,* **hacer**
    $m \leftarrow$ primera mujer en la lista de preferencias de h a quien no le haya propuesto matrimonio aún;
    si *m no tiene prometido* **entonces**
        asignar h a m como prometido;
    si no, si *m prefiere a h sobre su actual prometido, h'* **entonces**
        volver soltero a h';
        asignar h a m como prometido;
    en otro caso
        m rechaza a h;
    fin
fin

Algoritmo 1: Algoritmo de Gale-Shapley para emparejamientos estables.

1.2.1. Un ejemplo

Consideremos el siguiente ejemplo, presentado por Gale y Shapley (1962), en el que los hombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ y las mujeres A, B, C, D han establecido sus listas de preferencias como se muestra en la siguiente tabla:

	A	B	C	D
α	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,3)
β	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,4)
γ	(3,1)	(1,4)	(2,3)	(4,2)
δ	(2,2)	(3,1)	(1,4)	(4,1)

Tabla 1.2: Preferencias de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B, C$ y D.

En este caso, el algoritmo de Gale-Shapley requiere de diez iteraciones. Los resultados obtenidos en cada una se resumen a continuación:

	Iteración									
Mujer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	$\alpha, \cancel{\beta}$	α	α	$\cancel{\alpha}, \delta$	δ	δ	$\cancel{\delta}, \gamma$	γ	γ	γ
B	γ	$\cancel{\gamma}, \beta$	β	β	$\cancel{\beta}, \alpha$	α	α	$\cancel{\alpha}, \delta$	δ	δ
C	δ	δ	$\cancel{\delta}, \gamma$	γ	γ	$\cancel{\gamma}, \beta$	β	β	$\cancel{\beta}, \alpha$	α
D										β

Tabla 1.3: Resultados de las iteraciones del algoritmo de Gale-Shapley aplicado de acuerdo con la tabla (1.2). En cada iteración se especifican los pretendientes de cada mujer y, en caso de tener más de uno, los que son rechazados están tachados.

En la primera iteración, cada hombre se declara ante la primera mujer en su lista. La mujer A recibe una propuesta tanto de α como de β; como ella prefiere a α, rechaza a β y se queda (temporalmente) con el primero. B y C reciben una sola propuesta de γ y δ, respectivamente, mientras que D no recibe ninguna propuesta.

En la segunda iteración, β es el único hombre sin prometida, por lo que se le declara a la segunda mujer de su lista, B. Ahora, B tiene dos pretendientes, γ y β, de los cuales prefiere β, por lo que rechaza al primero y se queda por el momento con el segundo.

Las siguientes iteraciones siguen un proceso similar: en la tercera, γ se le declara a C (la segunda mujer en su lista), quien rechaza a δ en su favor; en la cuarta es δ quien se le declara a la segunda mujer de su lista, A, y ésta rechaza a su actual pretendiente, α, en favor de δ.

Es fácil ver que las últimas iteraciones tienen también la misma estructura (ver tabla (1.3)). En cada una de ellas existe sólo un hombre soltero, quien se le declara a la mujer que sigue en su lista y que no lo ha rechazado antes. Como se tienen cuatro hombres y cuatro mujeres, el proceso concluye cuando ya no queda ningún hombre soltero. En la siguiente sección probaremos algunas de las principales propiedades del algoritmo; veremos que el proceso necesariamente concluye (y, por lo tanto, no cae en un ciclo) en una asignación estable. Al final, los matrimonios concretados son los siguientes:

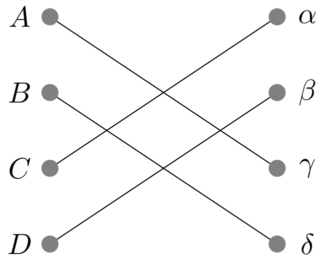


Figura 1.5: Gráfica que muestra el emparejamiento resultante de aplicar el algoritmo de Gale-Shapley de acuerdo con la tabla (1.2).

1.2.2. Propiedades del algoritmo

Proposición 1.1. *El algoritmo de Gale-Shapley para n mujeres y n hombres solteros es $O(n^2)$.*[1]

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que mujeres y hombres están etiquetados arbitrariamente desde 1 hasta n: $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ y $\{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$, respectivamente. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz cuadrada tal que el elemento a_{ij} indica qué mujer ocupa el j-ésimo lugar en la lista de preferencias del hombre i. Por ejemplo, si $a_{21} = k$, entonces $m_k \succ_{h_2} m_l$ para toda $l \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$.

En el peor de los casos, cada hombre contraerá matrimonio con la última mujer de su lista de preferencias, es decir que $\mathcal{M}(h_i) = a_{in}$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, al final del proceso, cada uno de los n hombres

[1]Recomendamos referirse al Anexo B para leer sobre la teoría de complejidad computacional.

se le habrá declarado a las n mujeres. Dicho de otra forma, durante el proceso se habrán concretado $n \times n = n^2$ parejas. $\square$

Teorema 1.1. *El emparejamiento obtenido mediante el algoritmo de Gale-Shapley es estable.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $m_1, m_2 \in M$ dos mujeres y $h_1, h_2 \in H$ dos hombres tales que el emparejamiento $\mathcal{M}$ obtenido mediante el algoritmo es $\mathcal{M}(m_1) = h_1$, $\mathcal{M}(m_2) = h_2$. Supongamos que $m_2 \succ_{h_1} m_1$, es decir que h_1 prefiere a una mujer que no es su esposa. No existe inestabilidad: h_1 se le declaró a m_2 y fue rechazado en favor de h_2. Es claro entonces que, aunque h_1 prefiere a m_2 (una mujer que no es su esposa), m_2 prefiere a su actual marido sobre h_1 y el emparejamiento es estable. $\square$

Definición 1.7. *Sean M y H conjuntos tales que $M \cap H = \varnothing$. Decimos que $m \in M$ y $h \in H$ son una **pareja válida** si existe un emparejamiento estable $\mathcal{M}$ en $M \cup H$ tal que $\mathcal{M}(m) = h$.*

Teorema 1.2. *El emparejamiento $\mathcal{M}^*$ obtenido con el algoritmo de Gale-Shapley es óptimo para el género que lleva a cabo las declaraciones.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los hombres son quienes se declaran ante las mujeres. Sabemos que $\mathcal{M}^*$ es estable, por lo que toda pareja bajo $\mathcal{M}^*$ es válida. Sean ahora $m \in M$ y $h \in H$ tales que m es la mujer válida para h que está más arriba en su lista de preferencias, pero $m \succ_h \mathcal{M}^*(h)$. Esto quiere decir que existe al menos un hombre que, en algún momento, durante la ejecución del algoritmo, fue rechazado por su mujer válida preferida.

Supongamos entonces que m rechazó a h en favor de h' y que este fue el primer rechazo que ocurrió durante la ejecución del algoritmo.

Como m y h son una pareja válida, existe un emparejamiento estable $\mathcal{M}'$ de forma que $h = \mathcal{M}'(m)$ y $\mathcal{M}'(h') = m' \neq m$. También ocurre que m' y h' son una pareja válida porque $\mathcal{M}'$ es estable.

Como h fue el primer hombre en ser rechazado, se sigue que m es la mujer válida preferida de h' y por lo tanto $m \succ_{h'} m'$. Sin embargo, ocurre también que $m \succ_{h'} m'$. Así, vemos que $(m, h), (m', h') \in \mathcal{M}'$, pero m y h' se prefieren mutuamente que a sus respectivas parejas. Esto constituye una contradicción, puesto que habíamos supuesto que $\mathcal{M}'$ es estable. Concluimos que la suposición de que algún hombre fue rechazado por su pareja válida preferida es falsa, y de ahí que $\mathcal{M}^*$ es óptimo. $\square$

Hasta ahora hemos trabajado bajo el supuesto de que existen n mujeres y n hombres, pero eso no es necesario. Si hubiesen p hombres y q mujeres, con $p < q$, entonces el algoritmo concluiría cuando p mujeres tuvieran un prometido, y si $p > q$, concluiría cuando cada uno de los p hombres tuviera una prometida o bien hubiera sido rechazado por todas las mujeres en su lista de preferencias.

Esta generalización del PME da pie al planteamiento de problemas semejantes, entre los que se encuentran los siguientes:

- El problema de los compañeros de cuarto (Irving, 1985).
- El problema de admisión a universidades (Gale y Shapley, 1962).
- El problema de asignación de médicos residentes a hospitales (Ronn, 1990).

En los siguientes capítulos presentaremos el problema de asignación de residentes a hospitales en su formulación general y veremos que es posible obtener una solución en tiempo polinomial. Después hablaremos del problema de los compañeros de cuarto, el cual, como veremos, no siempre tiene una solución en tiempo polinomial. Por último, relacionaremos este resultado con una modificación del problema de asignación de residentes, probando que también dicho problema es irresoluble en tiempo polinomial.

CAPÍTULO 2

El problema de asignación de residentes a hospitales

La formulación del problema de asignación de residentes (PAR) se puede considerar como una generalización del PME. La teoría es abordada por Ronn (1990), mientras que Biró, Fleiner, *et al.* (2009) lo hacen en su variante del problema de admisión a universidades. Por otro lado, desde la década de 1950, dos algoritmos que resuelven el problema han sido utilizados en el Programa Nacional de Asignación de Residentes de los EE.UU. (NRMP por sus siglas en inglés).

2.1. Descripción del problema

Consideremos un conjunto de p estudiantes de medicina que desean realizar su residencia en alguno de los q hospitales de la ciudad. Es realista suponer que $p \geq q$. Igual que antes, cada estudiante ordena a los hospitales de acuerdo con sus preferencias. Cada hospital, por su parte, tiene un número limitado de plazas disponibles para ser ocupadas por residentes, así como una lista de preferencias conformada por todos los posibles residentes. Todas las plazas son idénticas. Si algún estudiante no desea ser asignado por ningún motivo a determinado hospital, puede omitirlo de su lista, y los hospitales pueden optar por no otorgar una plaza a un estudiante si así lo desea. El objetivo es asignar un hospital a cada estudiante, de forma que no existan un residente y un hospital que se prefieran el uno al otro en lugar de aquellos a quienes han sido asignados y tomando en cuenta el cupo límite de cada hospital.

En adelante, nos referiremos a los estudiantes de medicina que están por ser asignados a un hospital para hacer su residencia como *residentes*. Supondremos también que cada vez que hablemos de hospitales, lo haremos solo de aquellos a los que los residentes puedan ser asignados. Por último, denotaremos con R al conjunto de residentes y con H al conjunto de hospitales, con $|R| = p$ y $|H| = q$ y de tal forma que $R \cap H = \varnothing$.

La siguiente definición será útil para caracterizar la estabilidad de una asignación en el contexto del PAR:

Definición 2.1. *Sea $r \in R$ un residente. Definimos la lista de* ***hospitales candidatos*** *de r como el conjunto de hospitales a los cuales el residente aceptaría ser asignado y lo denotamos con $\mathcal{C}_r$. Notemos que $\mathcal{C}_r \subseteq H$. Similarmente, entendemos la lista de* ***residentes candidatos*** *de un hospital $h \in H$ como el conjunto de residentes que h aceptaría en la asignación, y lo denotamos con $\mathcal{C}_h \subseteq R$.*

Definición 2.2. *Definimos el* ***cupo*** *del hospital $h \in H$ como el número máximo de plazas dentro del mismo que pueden ser ocupadas por residentes y lo denotamos por $c(h) \geq 0$.*

Es fácil ver que una asignación arbitraria de residentes en hospitales, respetando el cupo de cada uno, no conforma un emparejamiento, pues, si representamos los conjuntos R y H mediante una gráfica bipartito, tal asignación implicaría la posibilidad de que una o más aristas incidentes en vértices distintos de R incidan en un mismo vértice de H. Por ejemplo, supongamos que $p = 4$, $q = 2$, $c(h_1) = 3$, $c(h_2) = 1$ y que se tiene la siguiente asignación:

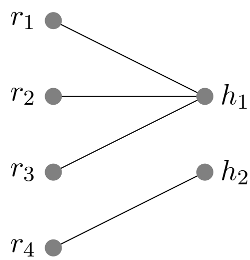


Figura 2.1: En el PAR, las asignaciones no necesariamente conforman un emparejamiento.

La diferencia entre el PME y el PAR es que, en aquel, hombres y mujeres son monógamos o, dicho de otra forma, el "cupo" es igual a uno para todos los individuos, lo que potencialmente podría dejar a muchos individuos sin pareja. En el PAR se busca satisfacer el cupo de cada hospital en medida de lo posible, de modo que un menor número residentes quedará sin asignar.

Definición 2.3. *Supongamos que cada estudiante $r \in R$ define un orden total estricto $\succ_r$ de hospitales en $\mathcal{C}_r$, y que cada hospital $h \in H$ define un orden total estricto $\succ_h$ de estudiantes en $\mathcal{C}_h$. Decimos que una asignación de elementos de R en elementos de H es* ***inestable*** *si ocurre alguna de las siguientes situaciones:*

- *Existe un residente $r \in R$ tal que el hospital h al que fue asignado no está en $\mathcal{C}_r$, es decir que prefiere permanecer no asignado que aceptar su asignación.*
- *Existe un hospital $h \in H$ tal que alguno de sus vecinos en R no está en $\mathcal{C}_h$, es decir que prefiere no aceptar alguno de los residentes que le fueron asignados.*
- *Existen un residente $r \in R$ y un hospital $h \in H$ que se prefieren mutuamente en términos del orden total estricto de cada uno de lo que r prefiere al hospital al que fue asignado y de lo que h prefiere a r sobre los residentes que actualmente tiene asignados.*

2.2. El algoritmo de Gale-Shapley modificado

Podemos modificar el algoritmo de Gale-Shapley (presentado en la sección 2.2) para resolver el PAR. El algoritmo resultante es el mismo que utiliza el Programa Nacional de Asignación de Residentes o NRMP de los EE.UU. Dicho programa es una organización privada sin fines de lucro establecida en 1952 como respuesta al descontento que existía entre los estudiantes de medicina por el mercado sumamente competitivo entre hospitales por la obtención de residentes. En el primer algoritmo utilizado (vigente hasta 1997), los hospitales eran los que se "declaraban" a los estudiantes, por lo que la asignación final resultaba óptima para los hospitales (teorema (1.2)). Esto ocasionó que los residentes mintieran sobre sus preferencias para ser asignados a hospitales que consideraban "mejores", entre otras formas de elusión de las reglas del programa.

En el algoritmo, los residentes son quienes se "declaran" a los hospitales (solicitan la residencia), lo cual devuelve un resultado estable y óptimo para los estudiantes, igual que en el caso del PME. El algoritmo modificado es de la siguiente forma:

Datos: $R \leftarrow$ conjunto de residentes,
$H \leftarrow$ conjunto de hospitales,
listas de preferencias de cada residente y de cada hospital,
cupos de cada hospital.
Resultado: Asignación estable entre R y H
mientras *exista un residente sin asignar* $r \in R$ *que no haya enviado una solicitud a cada hospital en* $\mathcal{C}_r$ **hacer**
  $h \leftarrow$ primer hospital en la lista de preferencias de r al que r aún no haya enviado una solicitud;
  si h *aún tiene cupo y* $r \in \mathcal{C}_h$ **entonces**
    asignar r a h;
  si no, si *el cupo de* h *está lleno y* h *prefiere a* r *sobre algún* r' *que ya le fue asignado* **entonces**
    asignar r a h;
    desasignar r' de h;
  en otro caso
    h rechaza a r;
  fin
fin

Algoritmo 2: Algoritmo de Gale-Shapley para el PAR.

2.2.1. Un ejemplo

Supongamos que se desea asignar a los residentes $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ en los hospitales A, B, C, los cuales tienen cupos $c(A) = 3, c(B) = 2, c(C) = 1$, respectivamente, y de acuerdo con las listas de preferencias definidas en la siguiente tabla:

	A	B	C
α	(1,4)	(2,3)	(3,2)
β	(1,5)	(3,2)	(2,0)
γ	(0,6)	(1,4)	(0,1)
δ	(0,3)	(1,0)	(2,0)
ε	(3,2)	(1,1)	(2,4)
ζ	(1,1)	(0,0)	(2,3)

Tabla 2.1: Preferencias de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, A, B$ y C.

El primer elemento de las parejas (i, j) de la tabla (i) indica el orden de preferencia que cada residente asigna al conjunto de hospitales; el segundo (j), el orden de preferencia que cada hospital asigna al conjunto de residentes. Si un residente no desea por ningún motivo ser asignado a un hospital determinado (o viceversa), entonces $i = 0$ (o bien $j = 0$).

Se requieren seis iteraciones, cuyos resultados se muestran a continuación:

	Iteración					
Hospital	1	2	3	4	5	6
A	α, β, ζ		$\alpha, \cancel{\beta}, \zeta, \delta$			
B	$\gamma, \cancel{\delta}, \varepsilon$				$\cancel{\gamma}, \varepsilon, \beta$	
C		$\cancel{\delta}$		$\cancel{\beta}$		γ

Tabla 2.2: Resultados de las iteraciones del algoritmo de Gale-Shapley modificado aplicado de acuerdo con la tabla (2.1).

En la primera iteración, todos los residentes envían solicitudes a sus hospitales preferidos. A tiene un cupo de tres plazas, por lo que acepta a α, β y ζ; B cuenta solo con dos plazas, por lo que debe rechazar a δ, ya que éste está por debajo de γ y ε en su lista de preferencias.

En la segunda iteración, δ es el único residente sin asignar, por lo que solicita una posición en su segundo hospital preferido, C. Sin embargo, δ no es un residente candidato de C, por lo que es rechazado.

δ solicita la residencia en su tercer hospital preferido, A, en la tercera iteración. Ahora hay cuatro residentes que hicieron su solicitud en A, pero éste tiene solo tres plazas, de modo que debe rechazar al que menos prefiere, β.

Lo mismo que sucedió con δ en la segunda iteración ocurre con β en la cuarta; en la quinta, γ es rechazado por B por cuestión de cupo. Finalmente, γ hace una solicitud en C, quien lo acepta por ser su residente preferido.

El proceso concluye una vez que todos los residentes han sido asignados. La asignación final es la siguiente:

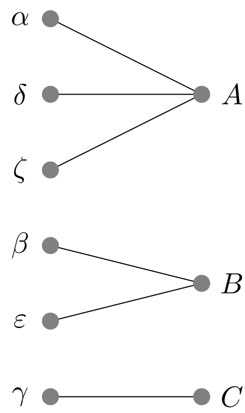


Figura 2.2: Resultado de aplicar el algoritmo de Gale-Shapley modificado de acuerdo con la tabla (2.1).

2.2.2. Propiedades del algoritmo

El resultado del algoritmo de Gale-Shapley modificado, al igual que el de su versión original (algoritmo 1), es una asignación estable y óptima. Ambas pruebas son análogas al caso para el PME (teoremas 1.1 y 1.2), considerando por supuesto que cada hospital h tiene un cupo $c(h) \geq 1$. Por el momento dejaremos pendiente la discusión de la complejidad del algoritmo, para poder profundizar sobre las clases de complejidad en el siguiente capítulo y poder entonces estudiar el caso del PAR con parejas y el problema de los compañeros de cuarto (capítulos 4 y 5).

CAPÍTULO 3

Clases de complejidad

3.1. Problemas de decisión

La teoría de complejidad computacional se interesa especialmente por los problemas de decisión:

Definición 3.1. *Decimos que $\mathcal{L}$ es un* ***problema de decisión*** *si las únicas respuestas posibles son «sí» o «no». Resolver un problema de decisión significa encontrar todas las ocurrencias para las que la respuesta es positiva.*

Definición 3.2. *Una* ***instancia*** *de un problema es un valor fijo posible de los* inputs *o parámetros del mismo. Una* ***sí-instancia*** *es una asignación de los parámetros de tal forma que la respuesta al problema de decisión es afirmativa, y una* ***no-instancia*** *es tal que la asignación de parámetros devuelve una respuesta negativa.*

Los problemas de decisión se pueden clasificar en varios conjuntos dependiendo de su complejidad computacional (ver anexo B). Existen varias clases de complejidad; las tres principales son descritas en este capítulo.

3.2. Clases $\mathcal{P}$ y $\mathcal{NP}$

En primer lugar están los problemas de decisión que pertenecen a la clase $\mathcal{P}$, mismos que son considerados «factibles» en el sentido de que pueden ser resueltos rápidamente. Los algoritmos usados para resolver los problemas en este conjunto son $O(p(n))$, donde $p(n)$ es un polinomio. Este hecho da pie a la notación $\mathcal{P}$.

El PME pertenece a la clase $\mathcal{P}$, pues existe un algoritmo de orden $p(n) = n^2$ que lo resuelve (el algoritmo de Gale-Shapley). Notemos que el PME se puede replantear como una pregunta, convirtiéndose en un problema de decisión: «dados los conjuntos M de n mujeres solteras y H de n hombres solteros, y $2n$ listas cuyos elementos conforman un orden total estricto respecto a las preferencias de cada individuo hacia a los individuos del sexo opuesto, ¿existe un emparejamiento estable entre M y H?». El algoritmo de Gale-Shapley no sólo responde que sí, sino que además encuentra el emparejamiento estable (y óptimo) que cumple con esas características.

Existen muchos problemas triviales pertenecientes a la clase $\mathcal{P}$, así como muchos más complejos. Algunos ejemplos de estos son:

- Encontrar el máximo común divisor de dos o más números naturales.
- Determinar si un número natural p es primo.
- Determinar si una gráfica G es conexa.

- Encontrar el árbol de recubrimiento mínimo de una gráfica G mediante el algoritmo de Kruskal (1956) o el algoritmo de Prim (1957).
- Programación lineal, *e.g.* mediante el algoritmo de Karmarkar (1984).

La siguiente clase de complejidad se denota por $\mathcal{NP}$. Este conjunto contiene a los problemas que son fácilmente *verificables*. Esto quiere decir que, dada una sí-instancia de un problema de decisión $\mathcal{L}$, se puede verificar que en efecto se trata de una sí-instancia mediante un algoritmo de orden polinomial. Es fácil ver que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$; de hecho, uno de los problemas abiertos más importantes de las matemáticas es el de determinar si $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ o no.

Entre los problemas en $\mathcal{NP}$ se encuentran los siguientes:

- Factorizar un número entero.
- Determinar si existe un ciclo hamiltoniano en una gráfica G (Karp, 1972).
- La 3-colorabilidad de una gráfica G.
- El problema del agente viajero.
- El problema de satisfacibilidad booleana.

3.3. Problemas $\mathcal{NP}$-completos

Definición 3.3. *Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{R}$ dos problemas de decisión. Decimos que $\mathcal{L}$ es* ***polinomialmente reducible*** *a $\mathcal{R}$ si cualquier instancia de $\mathcal{L}$ se puede transformar en tiempo polinomial en una instancia de $\mathcal{R}$. En un ejercicio de reducción polinomial, llamamos* ***problema original*** *a $\mathcal{L}$ y* ***problema generado*** *a $\mathcal{R}$.*

Observación. La relación de reducibilidad polinomial respeta la propiedad de transitividad: si $\mathcal{Q}$ es polinomialmente reducible a $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}$ es polinomialmente reducible a $\mathcal{R}$, entonces $\mathcal{Q}$ es polinomialmente reducible a $\mathcal{R}$.

Definición 3.4. *Decimos que un problema de decisión $\mathcal{L}$ es $\mathcal{NP}$-**completo** si $\mathcal{L} \in \mathcal{NP}$ y se cumple que cualquier $\mathcal{Q} \in \mathcal{NP}$ es polinomialmente reducible a $\mathcal{L}$.*

La idea de reducción polinomial podría tener implicaciones trascendentales. En primera instancia, si existiera un problema $\mathcal{L}$ en $\mathcal{P}$ tal que para todo $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{NP}$, $\mathcal{Q}$ es polinomialmente reducible a $\mathcal{L}$, entonces $\mathcal{Q}$ estaría en $\mathcal{P}$ para toda $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{NP}$, es decir, $\mathcal{NP} \subseteq \mathcal{P}$, lo cual implicaría que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

3.3.1. El problema de satisfacibilidad booleana

Muchos ejemplos de problemas $\mathcal{NP}$-completos provienen de la lógica proposicional (Arora y Barak, 2009); el problema de satisfacibilidad booleana, abreviado como SAT, es uno de ellos. Dicho problema se plantea a continuación.

Definición 3.5. *Llamamos **booleana** a una variable $v \in \{0,1\}$ y decimos que B es una **función booleana** si*

$$B : \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}$$

y además la regla de B utiliza únicamente los operadores lógicos de conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$).

Definición 3.6. *Decimos que una función booleana B está en su **forma normal conjuntiva** (FNC) si es de la forma*

$$B(b_1, \ldots, b_n) = \bigwedge_i \left(\bigvee_j v_{ij} \right),$$

*donde cada $v_{ij} = b_q$ o bien $b_{ij} = \bar{b}_q := \neg b_q$, para $q \in \{1, \ldots, n\}$. Los términos v_{ij} se llaman **literales**, y la disyunción de los literales se llama **cláusula**. Un caso particular es la **k-FNC** de B, la cual es de la forma*

$$B(b_1, \ldots, b_n) = \bigwedge_i \left(\bigvee_j^k v_{ij} \right),$$

es decir que cada cláusula tiene exactamente k literales.

Definición 3.7. *Decimos que una función booleana B es **satisfacible** si existe $z = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ tal que $B(z) = 1$, e **insatisfacible** en caso contrario.*

El problema de satisfacibilidad booleana (abreviado como SAT) consiste en determinar si existe $z = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n$ tal que B sea satisfacible. 3SAT es un caso particular que consiste en determinar si una función booleana en su 3-FNC es satisfacible.

Teorema 3.1. ***(Teorema de Cook-Levin)*** *Cualquier problema de decisión $\mathcal{Q} \in \mathcal{NP}$ es polinomialmente reducible al SAT, es decir que el SAT es $\mathcal{NP}$-completo.*

Como el SAT no es el tema central de esta tesis, prescindiremos de la demostración del teorema de Cook-Levin. Esta puede ser consultada en Cook (1998) y en Garey y Johnson (1979).

El SAT y 3SAT son usados muy frecuentemente para demostrar que otros problemas son $\mathcal{NP}$-completos: es factible reducir dichos problemas a instancias del SAT y 3SAT debido a su estructura combinatoria mínima (Arora y Barak, 2009). No se conoce ningún algoritmo que resuelva el SAT de manera eficiente, aunque tampoco se ha probado la existencia o no existencia de tal algoritmo. Encontrar una sería equivalente a probar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, dando fin al debate $\mathcal{P}$ *vs.* $\mathcal{NP}$.

En el siguiente capítulo presentaremos el problema de los compañeros de cuarto en su formulación general y demostraremos su $\mathcal{NP}$-completez al reducirlo a 3SAT.

CAPÍTULO 4

El problema de los compañeros de cuarto

Irving (1984) planteó el problema de los compañeros de cuarto (PCC) a partir de una modificación al PME. La principal diferencia entre ambos problemas es que en el PCC se desea obtener un emparejamiento estable entre los elementos de un solo conjunto (dicho de otra forma, la gráfica no es bipartita). Además, existen instancias del problema para las cuales no es posible conseguir un emparejamiento estable.

4.1. Descripción del problema

El problema consiste en un conjunto de $2n$ personas que deben pasar la noche en un hotel que cuenta con exactamente n habitaciones dobles. Para decidir quién compartirá habitación con quién, cada individuo ordena a las otras $2n-1$ personas de acuerdo con sus preferencias. ¿Es posible determinar las n parejas de forma que ningún par de individuos se prefieran mutuamente en lugar de a sus respectivos compañeros de cuarto?

En este modelo permitiremos adicionalmente la posibilidad de *empates* en las listas de preferencias de los individuos, *i.e.* la posibilidad de que dos o más personas sean igualmente preferidas por alguien.

Definición 4.1. *Decimos que la relación binaria $\succeq$ entre los elementos de un conjunto A es un **orden débil** si para toda $a, b, c \in A$ se cumple que*

- *$a \succeq b$ o $b \succeq a$ (**completez**);*
- *si $a \succeq b$ y $b \succeq c$, entonces $a \succeq c$ (**transitividad**).*

Teorema 4.1. *Sea $\succeq$ orden débil en el conjunto finito A. Entonces, existe $f : A \to \mathbb{Z}$ tal que*

$$a \succeq b \quad \Leftrightarrow \quad f(a) \geq f(b).$$

Demostración. Consideremos el orden débil $\succeq$ de elementos en A. Sea f tal que

$$\begin{aligned} &f : A \to \mathbb{Z} \\ &f(a) \mapsto \Big|\{x \in A : a \succeq x\}\Big|. \end{aligned}$$

Supongamos entonces que $a \succeq b$. Si existe $x \in A$ tal que $b \succeq x$, entonces, por la propiedad de transitividad, $a \succeq x$. Así,

$$\{x \in A : b \succeq x\} \subseteq \{x \in A : a \succeq x\}$$

y, por lo tanto,

$$f(a) \geq f(b).$$

Supongamos ahora que $a \not\succeq b$. Por la propiedad de completez, $b \succeq a$. De esta forma, si $a \succeq x$, entonces $b \succeq x$. Por lo tanto,

$$\{x \in A : a \succeq x\} \subset \{x \in A : b \succeq x\}.$$

La contención es estricta por la propiedad de completez. Se sigue entonces que

$$f(b) \geq f(a).$$

Concluimos entonces que $a \succeq b$ si y sólo si $f(a) \geq f(b)$. $\square$

Corolario 4.1. *Sea $\succeq$ un orden débil de elementos en A. Supongamos que $|A| = n$. Entonces, podemos etiquetar los elementos de A como $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de tal forma que*

$$a_1 \succeq a_2 \succeq \cdots \succeq a_n.$$

La prueba del corolario se sigue directamente del teorema anterior.

Observación. Sean C un conjunto de individuos y $a, b, c \in C$. Si $\succeq_a$ es el orden débil definido por las preferencias de a, entonces escribiremos $b \succeq_a c$ para indicar que a prefiere a b antes que a c, y $b \sim_a c$ para indicar que a prefiere a b tanto como a c. Esto es válido por lo siguiente:

Proposición 4.1. *Sean $a, b \in A$. La relación binaria $\sim$ definida por $a \sim b$ si y sólo si $a \succeq b$ y $b \succeq a$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Teniendo en cuenta la completez del orden débil $\succeq$ y dado $a \in A$, se sigue que $a \succeq a$ y por lo tanto $a \sim a$. Concluimos entonces que $\sim$ es reflexiva. Ahora, como

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \succeq b \wedge b \succeq a \quad \Leftrightarrow \quad b \succeq a \wedge a \succeq b \quad \Leftrightarrow \quad b \sim a,$$

se sigue que la relación es simétrica. Por último, supongamos que $a \sim b$ y $b \sim c$. Se sigue que $a \succeq b \wedge b \succeq a$ y $b \succeq c \wedge c \succeq b$. Así, como $a \succeq b$ y $b \succeq c$, vemos que $a \succeq c$. De igual forma, como $c \succeq b$ y $b \succeq a$, tenemos que

$c \succeq a$. Por lo tanto, $a \sim c$ y concluimos que la relación $\sim$ es transitiva. Por consiguiente, $\sim$ es una relación de equivalencia. $\square$

Aquí, la noción de emparejamiento es idéntica a la de la definición (1.4) para el caso no bipartito, resultando en una partición de C en dos conjuntos de tamaño n. Podemos caracterizarla también como sigue:

Definición 4.2. *Sea C tal que $|C| = 2n$. Un emparejamiento en C es una función inyectiva $\mathcal{M} : C \to C$ tal que $\mathcal{M}(a) \neq a$ y $\mathcal{M}(\mathcal{M}(a)) = a$ para toda $a \in C$.*

Definición 4.3. *Supongamos que para cada elemento $x \in C$ se define un orden débil $\succeq_x$ de elementos en C. Consideremos además un emparejamiento $\mathcal{M}$ en C. Decimos que $\mathcal{M}$ es estable si no existen $a, b \in C$ tales que*

- *$\mathcal{M}(a) \neq b$;*
- *$b \succeq_a \mathcal{M}(a)$;*
- *$a \succeq_b \mathcal{M}(b)$.*

Observación. Podemos decir equivalentemente que $\mathcal{M}$ es **estable** si para todos los individuos i tales que $i \succeq_a \mathcal{M}(a)$ ocurre que $a \not\succeq_i \mathcal{M}(i)$. Es decir, $\mathcal{M}$ es estable si aquellos individuos que a prefiere antes que a su asignación prefieren a sus actuales compañeros antes que a a. Podemos decir que a *no puede mejorar* su actual asignación.

Otra diferencia importante del PCC respecto al PME es que existen instancias del problema en las que no es posible concretar un emparejamiento estable. El siguiente ejemplo ilustra tal caso.

Ejemplo 4.1. (Ronn, 1988) Supongamos que $C = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ y que cada individuo establece sus preferencias como sigue:

Individuo	Preferencias
a_1	$a_2 \succeq a_3 \succeq a_4$
a_2	$a_3 \succeq a_1 \succeq a_4$
a_3	$a_1 \succeq a_2 \succeq a_4$
a_4	orden arbitrario

Tabla 4.1: Preferencias de a_1, a_2, a_3 y a_4.

Existen únicamente 3 posibles emparejamientos:

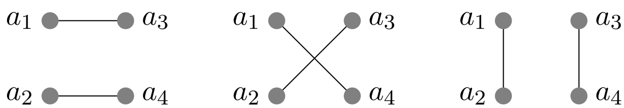


Figura 4.1: Ninguno de los tres emparejamientos posibles es estable.

Podemos ver claramente que, en los tres casos, el compañero de a_4 siempre preferirá a alguien distinto de a_4 que, de hecho, también lo prefiere antes que a su actual compañero.

4.2. $\mathcal{NP}$-completez del PCC

En esta sección demostraremos que el PCC es un problema $\mathcal{NP}$-completo mediante una reducción polinomial de 3SAT al PCC. La prueba sigue la forma de la proporcionada por Ronn (1988). El problema de decisión que consideraremos es «¿existe un emparejamiento estable en una instancia dada del PCC (con empates)?».

Empezaremos por describir las instancias de 3SAT y del PCC en las cuales nos basaremos para probar la $\mathcal{NP}$-completez del último.

Sea S una instancia de 3SAT dada por $V = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un conjunto de variables booleanas, $C = (C_1, C_2, \ldots, C_r)$ un conjunto de cláusulas y la función booleana

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \bigwedge_{j=1}^{r} C_j \text{ con } C_j = (L_{j1} \vee L_{j2} \vee L_{j3}),$$

donde $L_{jq} = X_i$ o bien $L_{jq} = \bar{X}_i$ para $q = 1, 2, 3$. Adicionalmente definimos para $q = 1, 2, 3$ las variables

$$l_{jq} = \begin{cases} x_{ik}^V & \text{si } L_{jq} = X_i \\ \\ x_{ik}^F & \text{si } L_{jq} = \bar{X}_i \end{cases}$$

donde el subíndice k indica la k-ésima ocurrencia del literal L_{jq}.

Sea R la instancia del PCC que describimos a continuación. R cuenta con tres grupos de **agentes**:

- A cada cláusula C_j asociamos la tríada de agentes u_j, v_j, w_j.
- A cada literal X_i asociamos seis **agentes literales** $x_{ik}, x_{ii}^V, x_{ik}^F$, para $k = 1, 2$. Aquí, las letras V y F representan los valores lógicos «verdadero» y «falso» y el subíndice k representa la k-ésima ocurrencia del literal X_i (sin pérdida de generalidad, hacemos el

supuesto adicional de que cada literal aparece un máximo de dos veces).

- Consideramos un conjunto adicional $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ de **agentes basura**. Notemos que $|C| = r = |\mathcal{B}|$.

Con esto podemos plantear las listas de preferencias de u_j, v_j, w_j para cada $j = 1, \dots, r$ como sigue:

Agente	Lista de preferencias
u_j	$l_{j(1)} \succeq l_{j(2)} \succeq l_{j(3)} \succeq v_j \succeq w_j \succeq \cdots$
v_j	$w_j \succeq u_j \succeq \cdots$
w_j	$u_j \succeq v_j \succeq \cdots$

Tabla 4.2: Preferencias de los agentes u_j, v_j y w_j.

Mediante la notación $l_{j(q)}$ se busca indicar que el orden de l_{j1}, l_{j2} y l_{j3} es arbitrario; los puntos suspensivos representan el resto de los agentes, ordenados arbitrariamente en todos los casos.

Por ejemplo, supongamos que $C_5 = (X_3 \vee \bar{X}_7 \vee \bar{X}_9)$ y que C_5 contiene la primera ocurrencia de los literales X_3 y $\bar{X}_7$ y la segunda ocurrencia del literal $\bar{X}_9$. La lista de preferencias de u_5 sería entonces

$$x_{31}^V \succeq X_{71}^F \succeq X_{92}^F \succeq v_5 \succeq w_5 \succeq \cdots .$$

Ahora, para $k \in \{1, 2\}$ y $k' := 3 - k$, podemos establecer las listas de preferencias del segundo grupo de agentes:

Agente	Lista de preferencias
x_{ik}	$x_{ik}^V \sim x_{ik}^F \succeq \cdots$
x_{ik}^V	$x_{ik} \succeq x_{ik'}^F \succeq u_j \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$
x_{ik}^F	$x_{ik} \succeq x_{ik'}^V \succeq u_j \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$

Tabla 4.3: Preferencias de los agentes x_{ik}, x_{ik}^V y x_{ik}^F.

Notemos primero que todos los elementos basura aparecen en el mismo orden en las listas de preferencias de cada x_{ik}^V y x_{ik}^F. Además, los puntos suspensivos al final de las listas representan, una vez más, el resto de los agentes, ordenados también arbitrariamente. Por último, el subíndice j de las u_j indica la cláusula que contiene la k-ésima ocurrencia de X_i o $\bar{X}_i$ (dependiendo de si se trata de x_{ik}^V o x_{ik}^F, respectivamente), con k alcanzando el valor máximo de 2. En caso de que X_i o $\bar{X}_i$ no aparezcan en suficientes cláusulas, b_1 aparecerá inmediatamente después de $x_{ik'}^F$ o $x_{ik'}^V$, según sea el caso.

Para ilustrar esto, supongamos que la cláusula $C_3 = (X_1 \vee \bar{X}_2 \vee X_4)$ contiene la primera ocurrencia de las variables X_1 y $\bar{X}_2$, la cláusula $C_5 = (X_1 \vee \bar{X}_6 \vee X_7)$ contiene la segunda aparición de X_1 y que $\bar{X}_2$ no aparece más. En ese caso, tendríamos las siguientes listas de preferencias:

Agente	Lista de preferencias
x_{11}^V	$x_{11} \succeq x_{12}^F \succeq u_3 \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$
x_{12}^V	$x_{12} \succeq x_{11}^F \succeq u_5 \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$
x_{21}^F	$x_{21} \succeq x_{22}^V \succeq u_3 \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$
x_{22}^F	$x_{22} \succeq x_{21}^V \succeq b_1 \succeq \cdots b_r \succeq \cdots$

Tabla 4.4: Ejemplo de listas de preferencias de acuerdo con la tabla (4.3).

Quedan pendientes las listas de preferencias de los elementos de $\mathcal{B}$:

Agente	Lista de preferencias
b_p	$x_{11}^V \succeq x_{12}^V \succeq x_{11}^F \succeq x_{12}^F \succeq x_{21}^V \succeq x_{22}^V \succeq x_{21}^F, x_{22}^F \succeq \cdots$
	$\succeq x_{n1}^V \succeq x_{n2}^V \succeq x_{n1}^F, x_{n2}^F \succeq \cdots$
	$\succeq b_r \succeq b_{r-1} \succeq \cdots \succeq b_{p+1} \succeq b_{p-1} \succeq \cdots \succeq b_1 \succeq \cdots$

Tabla 4.5: Preferencias de los agentes basura b_p.

Todos los agentes x_{ik}^V y x_{ik}^F aparecen en el mismo orden para todos los b_p, $p = 1, \ldots, r$. Los agentes no especificados se ordenan arbitrariamente al final de cada lista.

Lema 4.1. *Sea $\mathcal{M}$ un emparejamiento estable de R. Entonces,*

$$\mathcal{M}(x_{ik}) = x_{ik}^V \text{ o bien } \mathcal{M}(x_{ik}) = x_{ik}^F. \tag{4.1}$$

Demostración. El resultado se sigue del hecho que x_{ik}^V y x_{ik}^F están empatados en el primer lugar de las preferencias de x_{ik} y este último es el preferido tanto de x_{ik}^V como x_{ik}^F. De no cumplirse (4.1), se contradiría el supuesto de que $\mathcal{M}$ es estable. □

Lema 4.2. *Sea $\mathcal{M}$ un emparejamiento estable de R. Si x_{ik} y $x_{ik'}$ son asignados bajo $\mathcal{M}$ a agentes con superíndices opuestos, entonces los agentes x restantes deben ser asignados uno a otro. Simbólicamente,*

$$\mathcal{M}(x_{ik}) = x_{ik}^V \text{ y } \mathcal{M}(x_{ik'}) = x_{ik'}^F \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(x_{ik}^F) = x_{ik'}^V$$

o bien

$$\mathcal{M}(x_{ik}) = x_{ik}^F \text{ y } \mathcal{M}(x_{ik'}) = x_{ik'}^V \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}(x_{ik}^V) = x_{ik'}^F.$$

Demostración. Si x_{ik} y $x_{ik'}$ son asignados a agentes con superíndices opuestos, entonces, por la forma en que planteamos las preferencias más arriba, los dos agentes restantes se vuelven la mejor opción uno para el otro. No existe otra asignación para los agentes x restantes que mantenga la estabilidad de $\mathcal{M}$. □

Lema 4.3. *Sea $\mathcal{M}$ un emparejamiento estable de R. Definimos el conjunto $V_{ik} = \{x_{ik}^V, x_{ik}^F, x_{ik'}^V, x_{ik'}^F\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, $k \in \{1, 2\}$ y $k' = 3 - k$. Entonces, un máximo de dos elementos de V_{ik} son asignados bajo $\mathcal{M}$ a agentes del conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_r\}$. Además, si dos* *elementos de V_{ik} son asignados a elementos de U, estos tienen necesariamente el mismo superíndice (V o F).*

Demostración. Por el lema (4.1) vemos que x_{ik} es asignado a uno de los primeros dos elementos de V_{ik} y $x_{ik'}$ es asignado a uno de los últimos dos elementos de $V_{ik'}$. Por lo tanto, restan dos elementos de V_{ik} que pueden ser asignados a elementos de U. El lema (4.2) elimina la posibilidad de que los dos elementos restantes de V_{ik} tengan superíndices opuestos. □

Lema 4.4. *Sea $\mathcal{M}$ un emparejamiento estable de R. Entonces, todos los agentes u_j son emparejados bajo $\mathcal{M}$ con algún agente l_{jq}, para $q = 1, 2, 3$.*

Demostración. Recordemos la inestabilidad que se genera en el ejemplo (4.1). De manera similar, si $\mathcal{M}(u_j) \neq l_{jq}$ para toda $q = 1, 2, 3$, entonces cualquier forma en que los agentes u_j, v_j, w_j sean emparejados creará inestabilidad, pues ninguno de ellos estará satisfecho con la asignación. □

Teorema 4.2. *La instancia R del PCC tiene un emparejamiento estable si y sólo si la instancia asociada S de 3SAT es satisfacible.*

Demostración. Empecemos por probar la condición necesaria. Sea $\mathcal{M}$ un emparejamiento estable de R. Por el lema (4.4), cada agente u_j es asignado a alguno de los agentes literales l_{jq} de su lista de preferencias. Queremos definir una asignación de valores $Z = (X_1, \ldots, X_n) \in \{0, 1\}^n$

tal que f sea satisfacible. Para esto, hacemos

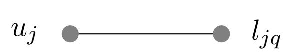
$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{M}(u_j) = x_{ik}^F \\ \\ 1 & \text{si } \mathcal{M}(u_j) = x_{ik}^V \end{cases}$$

A los agentes u_j restantes que no sean asignados a agentes x se les pueden asignar arbitrariamente los valores 0 y 1.

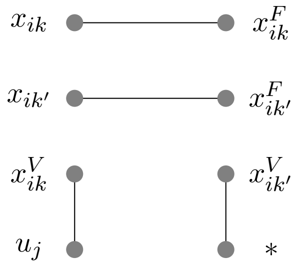
f está bien definida, ya que si a X_i se le asignan dos valores, por el lema (4.3) estos deben ser consistentes. Por lo tanto, f es satisfacible.

Probar la condición suficiente requiere de más cuidado. Sea $Z = (X_1, \ldots, X_n) \in \{0,1\}^n$ tal que la función booleana f de R es satisfacible. Para esta parte de la demostración, necesitamos construir un emparejamiento estable $\mathcal{M}$ en S a partir de Z.

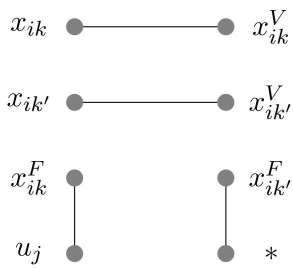
Empecemos por elegir para cada cláusula $C_j = (L_{j1} \vee L_{j2} \vee L_{j3})$ el primer literal L_{jq} que cumpla que $L_{jq} = 1$. Podemos decir que, gracias a este literal, la cláusula C_j (por ser una disyunción) se satisface. Como Z satisface f, necesariamente existe tal literal para cada $j = 1, \ldots, r$. Ahora, bajo $\mathcal{M}$, admitamos las siguientes asignaciones:
A cada u_j asignamos l_{jq} respetando la elección de L_{jq}:



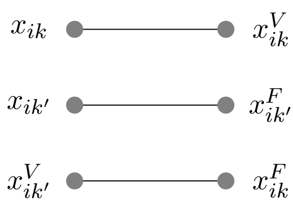
Si $l_{jq} = x_{ik}^V$, asignamos x_{ik} a x_{ik}^F. El lema (4.3) confirma la asignación:



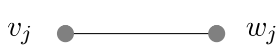
Si $l_{jq} = x_{ik}^F$, asignamos x_{ik} a x_{ik}^V. También aquí, el lema (4.3) confirma la asignación:



Por cada i tal que ningún elemento de $V_{ik} = \{x_{ik}^V, x_{ik}^F, x_{ik'}^V, x_{ik'}^F\}$ fue asignado a un u_j, hacemos la siguiente asignación (que se sigue del lema (4.2)):



A cada v_j asignamos w_j:



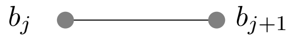
Resta ver qué sucede con los elementos x_{ik}^V y x_{ik}^F cuyas contrapartes $x_{ik'}^V$ y $x_{ik'}^F$ fueron asignadas a agentes u_j pero que ellos mismos no fueron asignados a agentes u_j ni a agentes literales (es decir, falta definir quiénes son los $*$ en las gráficas de arriba). Observemos que existen a lo sumo r agentes u_j asignados a agentes l_{jq} (esto debido a que $|U| = r$). Supongamos que son s. Entonces, falta determinar la asignación de dichos s agentes más los r elementos basura.

Notemos que $r + s$ necesariamente es un número par: si r es impar, entonces s también debe ser impar. Ocurre de igual forma que si r es par, entonces s es par. Esto garantiza que no quedarán elementos sin emparejar. También $r - s$ es siempre un número par.

Conviene separar los elementos restantes en tres conjuntos: B_1, el conjunto de d agentes literales que aún falta emparejar; B_2, el conjunto de los d primeros elementos basura $\{b_1, \ldots, b_d\}$; y B_3, el conjunto de los últimos $r - d$ elementos basura $\{b_{d+1}, \ldots, b_r\}$, mismo que posiblemente sea vacío.

Ahora, consideremos únicamente dentro de las listas de preferencias de los agentes literales en B_1 a los elementos de B_2. Hagamos lo mismo viceversa. Así, hemos creado una («sub»)instancia del PME dentro de la instancia del PCC que estamos construyendo: tenemos dos conjuntos ajenos B_1 y B_2 con el mismo número de elementos cada uno y una lista de preferencias asociada a cada elemento, misma que conforma un orden total estricto puesto que no hay empates. Llamemos a esta instancia R'. Sabemos además que en el PME existe siempre al menos un emparejamiento estable. Llamemos $\mathcal{M}'$ a tal emparejamiento en la instancia R'. En $\mathcal{M}$, asignemos $\mathcal{M}'$ a los agentes de B_1 y B_2.

Respecto a los elementos basura de B_3, asignemos a cada b_j el elemento subsiguiente para toda $j = d+1, \ldots, r-1$:



Hemos construido un emparejamiento $\mathcal{M}$ en R. Falta ver que $\mathcal{M}$ es efectivamente estable, lo cual vamos a verificar mostrando que ningún agente puede mejorar su asignación.

Es claro que todos los agentes que son asignados a aquellos que ocupan el primer lugar de su lista de preferencias no pueden mejorar su asignación. Estos son todos los agentes x_{ik} que por el lema (4.1) fueron asignados a x_{ik}^V o x_{ik}^F (incluyendo a estos últimos), así como todos los v_j.

En cuanto a los x_{ik}^V y $x_{ik'}^F$ que por el lema (4.2) fueron asignados unos a otros, no es posible mejorar su situación, pues los únicos agentes que éstos prefieren antes que a sus compañeros son los x_{ik} que, por lo que dijimos arriba, ya se encuentran en una asignación óptima.

Los agentes x_{ik}^V que fueron asignados a u_j tampoco pueden mejorar su asignación. La razón es que los agentes que ellos prefieren antes que a u_j son x_{ik} o $x_{ik'}^F$, que ya hemos eliminado como posibles mejoras. El mismo argumento se da para los agentes x_{ik}^F asignados a u_j (también prefieren a x_{ik} y $x_{ik'}^V$ antes que a u_j, pero ya no es válido considerarlos).

Si existe un agente literal que u_j prefiere antes que a l_{jq}, entonces aquel debió haber sido asignado a u_j en lugar de su actual compañero.

Ejemplifiquemos esto como sigue: supongamos que la cláusula $C_2 = (\bar{X}_1, X_2, X_4)$ contiene la primera aparición de las variables X_1, X_2, X_4, y que bajo Z, $(X_1, X_2, X_4) = (1, 1, 0)$. Esto quiere decir que X_2 es la primera variable en satisfacer C_2. Supongamos también que la lista de preferencias de u_2 es

$$l_{23} \succeq l_{22} \succeq l_{21} \succeq v_2 \succeq w_2 \succeq \cdots,$$

o equivalentemente

$$x_{41}^V \succeq x_{21}^V \succeq x_{11}^F \succeq v_2 \succeq w_2 \succeq \cdots.$$

Ahora, por lo que dijimos, $\mathcal{M}(u_2) = x_{21}^V$. Técnicamente, u_2 prefiere a x_{42}^V antes que a x_{21}^V, pero bajo $\mathcal{M}$ nunca llegaría a ser su compañero porque se contradiría la elección de $L_{22} = X_2$ como el primer agente en satisfacer C_2.

Los w_j no pueden mejorar, pues los únicos agentes a quienes prefieren son los u_j.

Hasta este punto hemos eliminado la posibilidad de mejorar la asignación de todos los agentes fuera de B_1, B_2 y B_3. Recordemos ahora que el emparejamiento $\mathcal{M}'$ es estable bajo R'. $\mathcal{M}'$ mantiene su estabilidad en R por las siguientes dos razones. Primero, bajo R', los agentes literales en B_1 prefieren a todos los elementos basura que a ellos mismos. Además, dado d, prefieren a los primeros d elementos basura antes que a los últimos $r - d$. Esto se traduce en que prefieren a los elementos de B_2 más que a los de B_1 y B_3. Si volvemos a R, los agentes que volvemos a considerar en las listas de preferencias ya están todos en situaciones ideales para ellos, por lo que concluimos que la asignación de los elementos de B_1 es inmejorable. Segundo, los elementos de B_2 prefieren a los agentes literales antes que a el resto de los elementos basura (que están en B_3). Sin embargo, ya no queda ningún agente literal que pueda mejorar. Por lo tanto, tampoco pueden mejorar su asignación.

Finalmente, el elemento de B_3 preferido por todos y aún candidato a ser asignado es b_r, tanto en R' como en R. b_r es entonces asignado a su mejor opción, b_{r-1}. El siguiente elemento, b_{r-2}, no puede ser asignado a b_r ni a b_{r-1}, por lo que su mejor opción es b_{r-3}. Con argumentos análogos llegamos hasta b_{d+2}, cuyo único candidato factible es b_{d+1}. Ningún elemento de B_3 puede entonces mejorar su asignación en R.

Por todos los argumentos anteriores, podemos concluir que $\mathcal{M}$ es estable, y por lo tanto el teorema queda demostrado. $\square$

En el siguiente capítulo nos valdremos del resultado que acabamos de obtener para demostrar la $\mathcal{NP}$-completez del PAR con parejas.

CAPÍTULO 5

El PAR con parejas

En el capítulo 2 vimos que, en el caso simple, el PAR siempre tiene una solución estable que se puede encontrar en tiempo polinomial. Sin embargo, la naturaleza del PAR cambia notablemente cuando se permite que parejas soliciten la residencia médica —por ejemplo, cuando dos médicos están casados y por conveniencia desean ser asignados a hospitales cercanos—. Existen instancias con y sin empates en las que no se puede garantizar la existencia de una solución estable. Además, la noción de estabilidad es ligeramente diferente.

5.1. Descripción del problema

Empecemos por describir la forma de las listas de preferencias de las parejas (los residentes que hacen las solicitudes individualmente tienen listas de preferencias como las descritas en el capítulo 2, es decir, cada una conforma un orden total estricto).

Definición 5.1. *Una* ***lista de preferencias conjunta*** *es una lista de pares ordenados de hospitales* (h, h')*, con* $h, h' \in H$*, asociada a una pareja ordenada de residentes* (r, r')*, con* $r, r' \in R$*.*

Vamos a considerar únicamente el caso sin empates. Así, los elementos de dichas listas también conforman un orden total estricto. Si una pareja de residentes (r, r') es asignada a la pareja de hospitales (h, h'), esto quiere decir que r es asignado a h y r' a h'.

Ahora bien, al entrar en juego las parejas de residentes, debemos modificar la noción de inestabilidad de una asignación.

Definición 5.2. *En el PAR con parejas, decimos que una asignación es* ***inestable*** *si:*

- *existen un residente r y un hospital h que constituyen una inestabilidad en el sentido ordinario, es decir que que r y h no están asignados una a otro pero que se prefieren sobre la asignación actual;*

- *existe una pareja de residentes que puede mejorar su asignación. Supongamos que la pareja* (r, r') *fue asignada al par de hospitales* (h_1, h_2)*. Entonces existe un hospital* h_3 *que prefiere a alguno de los dos residentes, digamos* r*, sobre su actual asignación (considerando que todas las plazas disponibles son iguales), y además la asignación conjunta* (h_3, h_2) *es preferida por la pareja de residentes sobre* (h_1, h_2)*. Un caso particular del escenario anterior es cuando existen dos hospitales* (h_3, h_4) *que la pareja* (r, r') *prefiere sobre* (h_1, h_2)*, y ambos hospitales prefieren a* r *y* r' *sobre alguna de sus actuales asignaciones).*

5.2. $\mathcal{NP}$-completez

En adelante nos referiremos al PAR con parejas como el problema de asignación. Vamos a demostrar que éste es $\mathcal{NP}$-completo utilizando el resultado obtenido en la sección 4.2; haremos una reducción polinomial del PCC a dicho problema. Específicamente, reduciremos el problema de decisión «Dada una instancia del PCC, ¿existe un emparejamiento estable?» al problema de decisión «Dada una instancia del problema de asignación, ¿existe una asignación estable?». Al igual que en el capítulo anterior, la forma de la prueba seguirá la de Ronn (1988).

La notación que usaremos es la siguiente. Primero, supondremos que en el PCC hay n individuos, que denotaremos mediante un índice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Segundo, en el problema de asignación habrá un hospital h_i por cada individuo i del PCC. Tercero, por cada hospital existirán $n-1$ residentes denotados r_{ij}, con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. r_{ij} denota entonces a un *único* residente. Más adelante veremos la utilidad de esta notación. Por último, la posibilidad de no ser asignados será incorporada a las listas de preferencias utilizando la letra u.

Sea R la instancia del PCC que describimos a continuación. Sólo permitiremos la existencia de un empate en cada lista de preferencias, y supondremos que dicho empate ocurre entre los dos individuos en posiciones más altas en la lista. Como veremos más adelante, es preciso pedir también que si un individuo a es parte de un empate en alguna lista, entonces en la lista de a no existen empates. Por último, requeriremos que si un individuo b tiene un empate en su lista, entonces, en cualquier emparejamiento estable (si existe), b sea emparejado con alguno de los dos individuos empatados.

Supongamos que tenemos un conjunto de individuos

$$\mathcal{C} = \{1, \ldots, n\},$$

con $|\mathcal{C}| = 2k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, que serán emparejados de acuerdo con las listas de preferencias $\mathcal{L}_i$ (para cada $i \in \mathcal{C}$). Recordemos que dichas listas conforman un orden débil y, por lo tanto, podemos etiquetar a los individuos de cada lista. Esto lo haremos de la siguiente forma. Sea $\mathcal{C}_i = \mathcal{C} \setminus \{i\}$. A cada individuo i en $\mathcal{C}$ asociamos una función $\kappa_i : \mathcal{C}_i \to \mathcal{C}_i$ de tal forma que $\kappa_i(j)$ indica qué persona es la que ocupa el j-ésimo lugar en la lista de preferencias de i. Como ya mencionamos, puede existir un empate entre los primeros dos individuos de cada lista. Las listas de preferencias serían entonces como se muestra en la tabla:

	$\mathcal{L}_i$
Sin empate	$\kappa_i(1) \succeq \kappa_i(2) \succeq \cdots \succeq \kappa_i(n-1)$
Con empate	$\kappa_i(1) \sim \kappa_i(2) \succeq \cdots \succeq \kappa_i(n-1)$

Tabla 5.1: Dos diferentes posibilidades para la lista de preferencias del individuo i.

Ahora describiremos la instancia T del problema de asignación. Supongamos que por cada individuo i en $\mathcal{C}$ existe un hospital, es decir que

$$H = \{h_1, \ldots, h_n\},$$

y que $c(h_i) = 1$ para toda $i = 1, \dots, n$. Supongamos también que para $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tales que $i \neq j$ tenemos un residente r_{ij}; tenemos por lo tanto $n(n-1)$ residentes:

$$\begin{aligned} R = \{&r_{12}, r_{13}, \dots, r_{1n}, \\ &r_{21}, r_{23}, \dots, r_{2n}, \cdots \\ &r_{n1}, r_{n2}, \dots, r_{n,n-1}\}. \end{aligned}$$

En el problema de asignación, los residentes pueden ser parte de una pareja y enviar sus solicitudes tanto en conjunto como por separado. Sin embargo, en T, todos los residentes participarán en parejas. Recordemos que no se permiten empates y que pueden existir tanto residentes o posiciones en hospitales sin asignar, las cuales vamos a denotar por la letra u. Vamos a ver que los individuos empatados en R, así como las listas $\mathcal{L}_i$, serán de suma utilidad para el planteamiento de T. Definamos el conjunto

$$E = \{j \in \mathcal{C} : \text{ existe un empate en } \mathcal{L}_j\}.$$

Supongamos que el empate en $\mathcal{L}_j$ ocurre entre los individuos $k, l \in \mathcal{C}$, con $k < l$. Notemos que E^c es el conjunto de individuos i tales que $\mathcal{L}_i$ no contiene ningún empate. De esta forma, podemos definir las listas de preferencias de los hospitales como sigue:

Más adelante veremos la utilidad de contar con estos dos tipos de listas. Notemos que, cuando hay empates en $\mathcal{L}_j$, las preferencias de h_j están determinadas en parte por los dos individuos empatados, k y l. Entonces h_j coloca a r_{kj} y r_{lj} en ese orden a la cabeza de su lista.

Hospital	Lista de preferencias
h_i, con $i \in E^c$	$r_{i,\kappa_i(1)} \succ r_{i,\kappa_i(2)} \succ \cdots r_{i,\kappa_i(n-1)} \succ u$
h_j, con $j \in E$	$r_{kj} \succ r_{lj} \succ r_{j,\kappa_j(3)} \succ r_{j,\kappa_j(4)} \succ \cdots r_{j,\kappa_j(n-1)} \succ u$

Tabla 5.2: Listas de preferencias del los hospitales dependiendo de si individuo correspondiente en R está o no empatado.

Consideremos a los mismos $k < l$ empatados en $\mathcal{L}_j$ (si es que existen). En este caso, existen dos parejas, (r_{kj}, r_{lj}) y (r_{jk}, r_{jl}); a los residentes restantes los organizamos en parejas de la forma (r_{ij}, r_{ji}). Así, las listas de preferencia serán como se muestra en la siguiente tabla:

Pareja	Lista de preferencias
(r_{kj}, r_{lj}), con $j \in E$	$(h_j, h_l) \succ (h_k, h_j) \succ (u, u)$
(r_{jk}, r_{jl}), con $j \in E$	(u, u)
(r_{ij}, r_{ji}), con $j \in E^c$	$(h_i, h_j) \succ (u, u)$

Tabla 5.3: Listas de preferencias del los residentes que corresponden a dos individuos empatados en R.

Observemos que en cualquier emparejamiento estable, los residentes (r_{jk}, r_{jl}) no serán asignados a ningún par de hospitales. Además, los tres tipos de parejas están bien planteadas gracias al supuesto de que dos individuos empatados en R no pueden tener empates en sus respectivas listas de preferencias.

Lema 5.1. *En una asignación estable $\mathcal{A}$ en T existe* ***a lo más*** *un hospital sin asignar.*

Demostración. Supongamos que h_p y h_q son dos hospitales sin residentes asignados bajo $\mathcal{A}$. Existen dos posibles casos:

La primera posibilidad es que los índices p y q correspondan a la pareja de residentes (r_{pq}, r_{qp}). Esto es que, bajo R, los individuos p y q no están empatados entre ellos en ninguna lista de preferencias. En tal caso, por la tabla (5.3), el par de hospitales (h_p, h_q) es la opción preferida por (r_{pq}, r_{qp}) sobre cualquier otra. De igual forma, por la tabla (5.2), tanto h_p como h_q prefieren ser asignados a cualquier residente sobre la opción de permanecer sin asignación. Esto contradice al supuesto de que $\mathcal{A}$ es estable.

La segunda posibilidad es que el residente r_{pq} sea miembro de una pareja de la forma (r_{pq}, r_{sq}). En otras palabras, bajo R, los individuos p y s están empatados en $\mathcal{L}_q$ (si bajo T la pareja (r_{pq}, r_{sq}) no cuenta con hospitales en su lista, entonces tomamos (r_{qp}, r_{sp}), lo que querría decir que q y s están empatados en $\mathcal{L}_p$). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $p < s$. En la tabla (5.3) podemos ver que las preferencias de la pareja (r_{pq}, r_{sq}) son

$$(h_q, h_s) \succ (h_p, h_q) \succ (u, u).$$

Asimismo, por la tabla (5.2), sabemos que la lista de preferencias de h_q es

$$r_{pq} \succ r_{sq} \succ r_{q,\kappa_q(3)} \succ \cdots \succ r_{q,\kappa_q(n-1)} \succ (u, u).$$

Por hipótesis, no existen empates en $\mathcal{L}_p$. Por lo tanto, la lista de preferencias de h_p está dada (ver tabla (5.2)) por

$$r_{p,\kappa_p(1)} \succ r_{p,\kappa_p(2)} \succ \cdots \succ r_{p,\kappa_p(n-1)} \succ (u,u).$$

Es claro que tanto h_p como h_q podrían mejorar su situación bajo $\mathcal{A}$ si fuesen asignados, por ejemplo, a (r_{pq}, r_{sq}). Esta pareja también mejoraría situación, pues sabemos que no fue asignada al par de hospitales que encabeza su lista debido a que h_q no fue asignado en $\mathcal{A}$. El hecho de que todos puedan mejorar su situación contradice la hipótesis de estabilidad de $\mathcal{A}$. $\square$

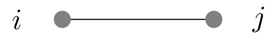
Corolario 5.1. *En una asignación estable $\mathcal{A}$ en T, todos los hospitales son asignados a un residente.*

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{A}$ es estable, cada pareja de residentes es asignada a un par de hospitales o bien no es asignada. Se sigue que el número de hospitales sin asignar es siempre par. Por el lema anterior, el número de hospitales sin asignar es necesariamente menor a dos. Por lo tanto, no existe ningún hospital bajo $\mathcal{A}$ sin asignar. $\square$

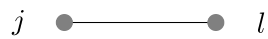
Teorema 5.1. *La instancia T del problema de asignación tiene una asignación estable si y sólo si la instancia asociada R del PCC tiene un emparejamiento estable.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar la condición necesaria, supongamos que $\mathcal{A}$ es una asignación estable en T. Por el lema (5.1), los n hospitales son asignados a algún residente. Vamos a construir un emparejamiento estable $\mathcal{M}$ para la instancia S del PCC.

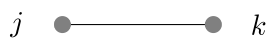
A cada pareja de la forma (r_{ij}, r_{ji}) que fue asignada a su par preferido de hospitales (la única otra posibilidad es que no fuesen asignados a ninguno), hagamos en $\mathcal{M}$



Para las parejas (r_{kj}, r_{lj}) que fueron asignadas al par de hospitales (h_j, h_l), hacer



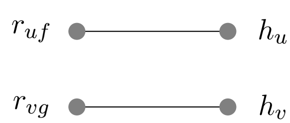
y para las que fueron asignadas al par (h_k, h_j), hacer



Ahora, para probar que $\mathcal{M}$ es estable, supongamos que no es así. Esto significa que existen dos individuos $u, v \in \mathcal{C}$ tales que $\mathcal{M}(u) \neq v$ pero que

$$v \succeq_u \mathcal{M}(u) = f$$
$$u \succeq_v \mathcal{M}(v) = g.$$

f y g no pueden estar empatados en $\mathcal{L}_u$ ni en $\mathcal{L}_v$, ya que, si ese fuera el caso, estarían empatados a la cabeza de dichas listas y no habría inestabilidad. Por lo tanto, en $\mathcal{A}$, tenemos que



Existen dos posibilidades:

1. u no es parte de un empate en $\mathcal{L}_v$ y v no es parte de un empate en $\mathcal{L}_u$,
2. existe $w \in \mathcal{C}$ tal que $v \sim w$ en $\mathcal{L}_u$ (o análogamente, existe $w \in \mathcal{C}$ tal que $u \sim w$ en $\mathcal{L}_v$; basta con analizar el primer caso).

Si ocurre (1), tendríamos que

$$r_{uv} \succ_{h_u} r_{uf}$$
$$r_{vu} \succ_{h_v} r_{vg}.$$

Sin embargo, la pareja (r_{uv}, r_{vu}) prefiere al par de hospitales (h_u, h_v) sobre la opción de no ser asignados. Es decir, $\mathcal{A}$ es inestable; no obstante, esto contradice la hipótesis del teorema.

Si ocurre (2), tendríamos que

$$r_{wu} \succ_{h_u} r_{uf}$$
$$r_{wv} \succ_{h_v} r_{vg}.$$

Similarmente al caso anterior, la pareja (r_{wu}, r_{vu}) prefiere al par de hospitales (h_u, h_v) sobre la opción de no ser asignados. Una vez más, tendríamos que $\mathcal{A}$ es inestable, contradiciendo la hipótesis. Concluimos que $\mathcal{M}$ es estable.

Probemos ahora la condición suficiente. Supongamos que $\mathcal{M}$ es un emparejamiento estable entre los elementos de $\mathcal{C}$. Mostraremos para cada i, j tales que $\mathcal{M}(i) = j$ cómo serán la asignación $\mathcal{A}$ para los hospitales h_i y h_j:

- si existe la pareja (r_{ij}, r_{ji}), le asignamos el par (h_i, h_j) (como se indica en la tabla (5.3));
- si no existe la pareja (r_{ij}, r_{ji}), debe existir un $k \in \mathcal{C}$ tal que la lista de la pareja (r_{kj}, r_{ij}) contiene hospitales (si la lista de esa pareja solo contiene la posibilidad (u, u), entonces debe existir la pareja (r_{ki}, r_{ji}) cuya lista sí contiene hospitales). Asignamos entonces h_j a r_{kj} y h_i a r_{ij} (o, en el segundo caso, h_j a r_{ki} y h_i a r_{ji}).

Veremos que $\mathcal{A}$ es estable probando que ningún residente ni hospital puede mejorar su asignación.

Las parejas de la forma (r_{ij}, r_{ji}), con $j \in E^c$, no pueden mejorar su asignación, pues fueron asignadas a su primera opción, (h_i, h_j).

Consideremos las parejas de la forma (r_{kj}, r_{lj}) (con $j \in E$). Es claro que si fueron asignadas a su primera opción, (h_j, h_l), entonces no hay manera de mejorar la asignación. Si, por otro lado, fueron asignadas a su segunda opción, (h_k, h_j), tampoco hay mejora, ya que h_j fue asignado a su primera opción, r_{lj}. Notemos que estas parejas necesariamente fueron asignadas a un par de hospitales, pues corresponden a empates en T y habíamos supuesto que, en cualquier emparejamiento estable, si en $\mathcal{L}_i$ están empatados los individuos k y l, entonces $\mathcal{M}(i) = k$ o bien $\mathcal{M}(i) = l$.

Hemos eliminado la posibilidad de mejora para todas las parejas de residentes que fueron asignadas a pares de hospitales. En cuanto a las parejas que *no* fueron asignadas a ningún hospital, éstas tampoco pueden mejorar su situación. Primero tenemos a las parejas de la forma (r_{jk}, r_{jl}), quienes tenían como única alternativa no ser asignadas y, por lo tanto, no pueden mejorar su asignación. Las parejas restantes *sin asignar* son de la forma (r_{ij}, r_{ji}). En la lista de preferencias de estas parejas se encuentran los pares de (h_i, h_j). Si, bajo $\mathcal{A}$, h_i es asignado a r_{gi}, es claro que entonces $i \in E$. Por lo tanto,

$$r_{gi} \succ_{h_i} r_{ik} \text{ para toda } k \in \mathcal{C}_i.$$

Análogamente, si, bajo $\mathcal{A}$, h_j es asignado r_{lj}, tendríamos que $j \in E$ y

$$r_{lj} \succ_{h_j} r_{jk} \text{ para toda } k \in \mathcal{C}_j.$$

Alternativamente, si h_i es asignado a r_{ig} y h_j a r_{jl} bajo $\mathcal{A}$, se seguiría que $i, j \in E^c$. Así, para que hubiera inestabilidad, se requeriría que

$$r_{ij} \succ_{h_i} r_{ig} \quad \text{y} \quad r_{ji} \succ_{h_j} r_{jl},$$

lo que a su vez implicaría que, en R,

$$j \succeq_i g \quad \text{e} \quad i \succeq_j l.$$

Esto implicaría que $\mathcal{M}$ es inestable, contrario a la hipótesis del teorema. Con esto eliminamos como candidatos a mejorar su situación a todas las parejas de residentes.

Finalmente, es claro que no existe mejora para los hospitales h_i, pues sólo pueden mejorar siendo asignados a residentes, que hemos eliminado de consideración.

Por consiguiente, $\mathcal{A}$ es estable. Podemos concluir que el problema de asignación es $\mathcal{NP}$-completo.

5.3. El algoritmo de Gale-Shapley revisitado

Como ya hemos dicho, en general es posible que soliciten la residencia tanto parejas como estudiantes individuales. La variación del algoritmo de Gale-Shapley que aquí presentamos devuelve una asignación no necesariamente estable, ya que esta puede no existir. Recordemos la notación para los conjuntos de candidatos, $\mathcal{C}_h$ y $\mathcal{C}_r$.

La esencia de esta versión del algoritmo es que, cada vez que el miembro de una pareja es rechazado o su asignación previa es deshecha, si su pareja había sido asignada, entonces ambos deben permanecer sin asignar hasta la siguiente iteración (si su pareja no había sido asignada o también fue rechazada, se cumple inmediatamente esta condición).

Datos: $R \leftarrow$ conjunto de residentes (individuales o en parejas),
$H \leftarrow$ conjunto de hospitales,
listas de preferencias de cada residente o pareja de residentes y de cada hospital,
cupos de cada hospital.

Resultado: Asignación entre R y H

mientras *exista un residente sin asignar* $r \in R$ *que no haya enviado una solicitud a cada hospital en* $\mathcal{C}_r$ **hacer**
- $h \leftarrow$ primer hospital en la lista de preferencias de r al que r aún no haya enviado una solicitud;
- **si** h *aún tiene cupo y* $r \in \mathcal{C}_h$ **entonces**
  - asignar r a h;
- **si no, si** *el cupo de* h *está lleno y* h *prefiere a* r *sobre algún* r' *que ya le fue asignado* **entonces**
  - asignar r a h;
  - desasignar r' de h;
  - **si** *resulta que* (r', r'') *es una pareja y* h'' *había sido asignado a* r'' **entonces**
    - desasignar r'' de h'';
- **en otro caso**
  - h rechaza a r;
  - **si** *resulta que* (r, r'') *es una pareja y* h'' *había sido asignado a* r'' **entonces**
    - desasignar r'' de h'';
- **fin**

fin

Algoritmo 3: Algoritmo de Gale-Shapley para el PAR con parejas.

CAPÍTULO 6

Conclusión

En esta tesis se construyó el camino para la demostración de la $\mathcal{NP}$-completez del problema de asignación de médicos residentes con parejas a hospitales. Se vio que, pese a ser un problema sencillo de plantear, no necesariamente se resuelve de forma igualmente sencilla.

Se empezó por estudiar el Problema del Matrimonio Estable (PME), un problema muy simple que sirvió como primera aproximación a los problemas de asignación. Por esta razón, resultó útil estudiar algunas de sus propiedades –su estabilidad y optimalidad–, así como el algoritmo que lo resuelve. Con ello fue posible presentar y estudiar a su vez el Problema de Asignación de Residentes, que puede ser visto como una generalización del PME.

Posteriormente se dio una introducción al estudio de complejidad computacional. Se habló de los problemas de decisión y de cómo relacionar a dos de estos mediante una reducción polinomial. Se describieron las clases $\mathcal{P}$ y $\mathcal{NP}$ y se vio que el PME y el PAR pertenecen a la clase $\mathcal{P}$ y se describió el Problema de Satisfacibilidad Booleana o SAT, el cual es $\mathcal{NP}$-completo.

Se describió el Problema de los Compañeros de Cuarto (PCC), otro problema que surge de una modificación del PME. Se mostró su pertenencia a la clase de problemas $\mathcal{NP}$-completos reduciéndolo polinomialmente al SAT. Esta demostración fue necesaria para la última parte de la tesis, en la cual se expuso el PAR con parejas, que resulta ser también $\mathcal{NP}$-completo. Esta propiedad fue demostrada relacionando el problema con el PCC.

La aportación de esta tesis consiste en la condensación de distintos textos –principalmente los de Gale y Shapley (1962) y Ronn (1990), aunque también otros– y en la formalización de los resultados obtenidos en ellos, así como en la formalización y unificación de la notación. Se desea también proporcionar un punto de partida en el estudio del PAR, pues aún queda trabajo por hacer no sólo en el campo teórico, sino también en el aspecto práctico. Existen muchos problemas reales que son, en esencia, idénticos al PAR (por ejemplo, el Problema de Admisión a Universidades (Biró, Fleiner, *et. al.*)). Se pueden investigar alternativas para la obtención de resultados óptimos para la mayoría de los residentes y hospitales involucrados, incorporando por ejemplo alguna aleatorización en el proceso, como la que proponen Roth y Peranson (1999), o bien abordando el problema desde otra perspectiva, como quizá programación dinámica o programación entera.

En el prefacio se mencionó brevemente el caso de los Estados Unidos, donde el Programa Nacional de Asignación de Residentes utiliza algoritmos esencialmente idénticos a los presentados aquí para asignar eficiente y óptimamente a los estudiantes de medicina en alguno de los hospitales con plazas para residencia. En México, sin embargo, la asignación está basada únicamente en el Examen Nacional de Aspirantes a Residencias Médicas (ENARM). Sería interesante proponer una modificación a la forma en la que los estudiantes mexicanos son admitidos a los programas de residencia del país, ya que la inclusión de listas de preferencias, como ocurre en otros países, aporta una importante riqueza al proceso. Esta riqueza, de ser explotada, mejoraría el escenario al que se enfrentan los médicos, los hospitales y los pacientes en el país.

APÉNDICE A

Gráficas

Definición A.1. *Una gráfica simple es una pareja ordenada* $G = (V, E)$*, donde* V *es un conjunto finito no vacío cuyos elementos son llamados* ***vértices*** *o* ***nodos*** *y* E *es un conjunto cuyos elementos son subconjuntos de cardinalidad 2 de* V*, llamados* ***aristas****.*

Definición A.2. *Decimos que la arista* $e = \{u, v\}$ *es* ***incidente*** *a los vértices* u *y* v*, que son a su vez los* ***extremos*** *de* e*. Decimos también que* u *y* v *son* ***adyacentes****. Para simplificar la notación, podemos escribir* $e = \{u, v\} = uv = vu$*.* G *es* ***completo*** *si cualquier par de vértices es adyacente en* E*. Por último, el* ***orden*** *de* G *se refiere al número de vértices, mientras que el* ***tamaño*** *se refiere al número de aristas, denotados usualmente por* n *y* m*, respectivamente.*

Definición A.3. *Sea* $G = (V, E)$ *una gráfica y* $v \in V$*. Llamamos* ***vecinos*** *de* v *a los elementos del conjunto* $\mathcal{N}(v) = \{u \in V : uv \in E\}$*.*

Una gráfica $G = (V, E)$ se puede representar geométricamente utilizando puntos para los vértices y líneas para las aristas. Esta representación no es única; los vértices y aristas se pueden configurar de cualquier forma sobre el plano y la gráfica en esencia será el mismo.

Ejemplo A.1. Sean $V = \{a, b, c, d, e\}$ y $E = \{e_1 = ab, e_2 = bc, e_3 = be, e_4 = cd, e_5 = ce, e_6 = de\}$. Los extremos de e_1 son a y b; b y c son adyacentes; e_3 incide en b y e; y $\mathcal{N}(b) = a, c, e$. Además, el orden y el tamaño de la gráfica son $n = 5$ y $m = 6$, respectivamente.

Por último, las dos figuras de abajo representan a la gráfica $G = (V, E)$ geométricamente:

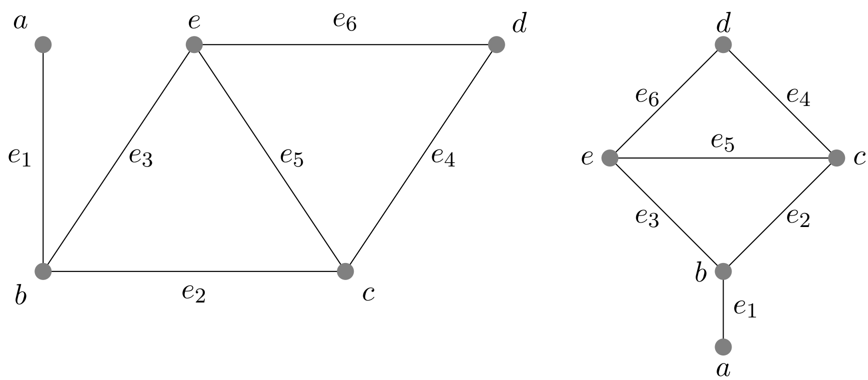


Figura A.1: Dos formas geométricas de representar G.

APÉNDICE B

Complejidad computacional

Podemos entender la palabra *cómputo* como el proceso de producir un resultado (*output*) a partir de un conjunto de datos de entrada (*inputs*). Dicho proceso requiere de la repetición de distintas *operaciones básicas*. Por ejemplo, para el cómputo del producto de dos números reales, recibiremos como *input* $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$ y, sumando $b - 1$ veces a a sí mismo, obtendremos el *output* $c = ab$.

Ahora bien, un *problema computacional* es un problema que, generalmente, es resuelto mediante el uso de una computadora o, equivalentemente, que puede ser resuelto realizando mecánicamente una serie operaciones matemáticas, *i.e.* con un algoritmo (Arora y Barak, 2007).

La *eficiencia* de un algoritmo puede ser cuantificada contando el número total de *operaciones básicas* (en nuestro caso, consideramos las operaciones de suma, multiplicación y comparación de elementos como operaciones básicas) que se realizan dependiendo del *tamaño* de los datos de entrada. Suponemos que cada una de dichas operaciones requiere una sola unidad de tiempo. Por esto mismo, la eficiencia de un algoritmo es más importante que la tecnología usada para ejecutarlo (Arora y Barak, 2007). Formalizando:

Definición B.1. *El* ***tamaño*** *de un problema es el número de variables de entrada, n.*

Definición B.2. *Definimos la* ***función de complejidad*** *de un algoritmo como el número de operaciones básicas que se deben realizar para que el algoritmo termine en el peor de los casos y la denotamos con $f(n)$, donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y n es el tamaño del problema.*

Definición B.3. *Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Decimos que $f = O\big(g(n)\big)$ si existen $N \in \mathbb{N}$ y una constante c tales que para toda $n > N$,*

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

Ejemplo B.1. La función $f(n) = 3n^4 + 2n^2 + 6n + 1$ satisface que

$$f(n) = 3n^4 + 2n^2 + 6n + 1 < 3n^4 + 2n^4 + 6n^4 + n^4 = 12n^4,$$

por lo que $f(n) \leq 12 \cdot g(n)$, con $g(n) = n^4$. Por lo tanto, $f = O(n^4)$.

Definición B.4. *Si f, g son funciones de complejidad de los algoritmos A y B, decimos que A es más eficiente que B si $f = O\big(g(n)\big)$ pero $g \neq O\big(f(n)\big)$.*

Estas definiciones constituyen una introducción al tema de complejidad computacional. En el capítulo 3 las damos por entendidas y hablamos de las *clases de complejidad*, concepto que utilizamos a lo largo de la presente tesis.

Bibliografía

Arora, Sanjeev, y Barak Boaz. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Princeton University Press, 2007.

Biró, Péter, Tamás Fleiner *et. al.* «The College Admissions problem with lower and common quotas». (University of Glasgow) (2009).

Cravioto Lagos, María. *Problemas NP-completos* (tesis de licenciatura). Tomada del acervo ITAM. (2008).

Dadashzadeh, Mohammad, y Sara Dadashzadeh. «The Match: A Case Study In Algorithm Analysis Of The National Resident Matching Program». *Journal of Business Case Studies* (The Clute Institute) 11, nº 4 (2015): 141-150.

Espinosa Armenta, Ramón. *Matemáticas Discretas*. Editorial Alfaomega, 2010.

Gale, David y Lloyd S. Shapley. «College Admissions and the Stability of Marriage». *The American Mathematical Monthly* 69, nº 1 (enero 1962): 9-15.

Gusfield, Dan, y Robert W. Irving. *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*. The MIT Press, 1989.

Irving, Robert W. «An Efficient Algorithm for the “Stable Roommates” Problem». *Journal of Algorithms* 6, nº 4 (diciembre 1985): 577-595.

Karmarkar, Narendra. «A new polynomial-time algorithm for linear programming». *Combinatorica* 4, nº 4 (1984): 373-395.

Karp, Richard M. «Reducibility Among Combinatorial Problems». En *Complexity of Computer Computations*, de R.E. Miller y J.W. Thatcher. Plenum Press (1972): 85-103.

Kawas Merino, Lorena. *Emparejamientos estables y sus variantes* (tesis de licenciatura). Tomada del acervo ITAM. (2011).

Kruskal, Joseph B. «On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem». *Proceedings of the American Mathematical Society* 7 (1956): 48-50.

Prim, Robert C. «Shortest connection networks and some generalizations». *Bell System Technical Journal* 36, nº 6 (noviembre 1957): 1389-1401.

Ronn, Eytan. «NP-Complete Stable Matching Problems». *Journal of Algorithms* (Academic Press) 11, (1990): 285-304

Roth, Alvin E., y Elliott Peranson. «The Redesign of the Matching Market for American Physicians: Some Engineering Aspects of Economic Design». *The American Economic Review* 89, nº 4 (septiembre 1999): 748-780.

Velasco Pérez, Marcela. *Emparejamientos estables óptimos: el problema del matrimonio* (tesis de licenciatura). Tomada del acervo ITAM. (2003).