参考答案与提示

第 1 讲　与三角形有关的线段

例 1　2.　**提示**:$3-2<x<3+2$,即 $1<x<5$,故可填 2(答案不唯一,1 到 5 之间的数均可).

例 2　(1)7 或 8.　(2)10.　(3)8 或 16.

提示:(1)分两种情况:若底边长为 3,则周长为 $2+2+3=7$;若底边长为 2,则周长为 $2+3+3=8$,故答案为 7 或 8.

(2)分两种情况:若腰长为 2.　$\because 2+2=4$,　$\therefore$不能组成三角形,　$\therefore$腰长不可能为 2;若腰长为 4.　$\because 4+2>4$,　$\therefore$能组成三角形,此时三角形的周长为 $4+4+2=10$.

综上所述,此等腰三角形的周长为 10.

(3)依题意,设 $AD=DC=x$,分两种情况:

若 $AB+AD=15$,则 $2x+x=15$,解得 $x=5$.

$\therefore$有 $BC+CD=21$,故 $BC=21-5=16$.

$\because 10+10>16$,　$\therefore$能组成三角形. 此时 $BC=16$.

若 $AB+AD=21$,则 $2x+x=21$,解得 $x=7$.

$\therefore$有 $BC+CD=15$,故 $BC=15-7=8$.

$\because 14+8>14$,　$\therefore$能组成三角形. 此时 $BC=8$.

综上所述,此等腰三角形的底边长为 16 或 8.

例 3　作图如图 D1-1①②所示.

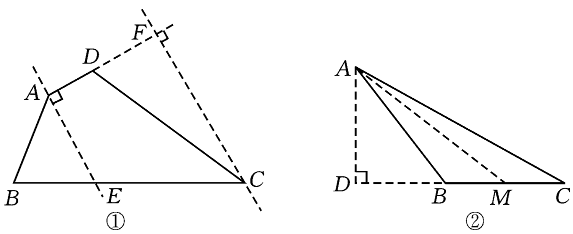


图 D1-1

例 4　1∶4.　**提示**:连接 BE,　$\because$点 D 是 AB 上的中点,

$\therefore AD=BD$.

$\because\triangle ADE$ 的边 AD 上的高与$\triangle BDE$ 的边 BD 上的高相等,

$\therefore S_{\triangle ADE}=S_{\triangle BDE}$,　$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABE}$.

同理 $S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$,　$\therefore S_{\triangle ADE}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

例 5　(1)$BP+PC<AB+AC$(三角形两边之和大于第三边).

(2)$\triangle BPC$ 的周长小于$\triangle ABC$ 的周长.

理由如下:

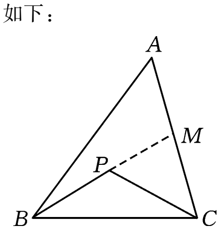


图 D1-2

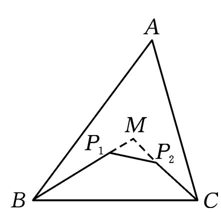


图 D1-3

如图 D1-2,延长 BP 交 AC 于点 M,在$\triangle ABM$ 中,

$BP+PM<AB+AM$,　①

在$\triangle PMC$ 中,$PC<PM+MC$,　②

由①+②,得 $BP+PC+PM<AB+AC+PM$.

$\therefore BP+PC<AB+AC$,即$\triangle BPC$ 的周长小于$\triangle ABC$ 的周长.

(3)四边形 BP_1P_2C 的周长小于$\triangle ABC$ 的周长. 理由如下:

如图 D1-3,分别延长 BP_1,CP_2 交于点 M,$BM+CM<AB+AC$.

又$\because P_1P_2<P_1M+P_2M$,

$\therefore BP_1+P_1P_2+P_2C<BM+CM<AB+AC$.

故四边形 BP_1P_2C 的周长小于$\triangle ABC$ 的周长.

[变式题组]

1. $1<c<5$.　**提示**:由 $\sqrt{a^2-9}+(b-2)^2=0$ 知 $a^2-9=0$,$(b-2)^2=0$. $a>0$,$b>0$,　$\therefore a=3$,$b=2$,则 $1<c<5$.

2. $\frac{P}{3}\leqslant m<\frac{P}{2}$.　**提示**:设三角形的三边长分别为 m,a,b.

①当 $m>a\geqslant b$ 时,$m<a+b$,

$\therefore 2m<m+a+b=P$,　$\therefore m<\frac{P}{2}$.

②当 $m=a=b$ 时,m 的值最小,

即 $m+a+b=3m=P$,　$\therefore m=\frac{P}{3}$.

综合①②可知 $\frac{P}{3}\leqslant m<\frac{P}{2}$.

3. $a+3b+c$.　**提示**:$\because a-b-c=a-(b+c)<0$,$a-c+b>0$,$a+b+c>0$,　$\therefore |a-b-c|+|a-c+b|+|a+b+c|=b+c-a+a-c+b+a+b+c=a+3b+c$.

4. (1)设腰长为 x,则底边长为 $12-2x$. 根据三角形三边关系有 $\begin{cases}x+x>12-2x,\\12-2x>0.\end{cases}$　$\therefore 3<x<6$.

(2)设腰长为 x,则 $\begin{cases}x+x>8-2x,\\8-2x>0,\end{cases}$ 解得 $2<x<4$.

$\because x$ 为整数,　$\therefore x=3$.

故三角形三边的长分别为 3,3,2.

5. 13 cm.　**提示**:设 $AB=AC=x$,$BD=DC=y$,$AD=z$,则 $2x+2y=34$,即 $x+y=17$. 又 $x+y+z=30$,故 $z=30-(x+y)=13$,即 $AD=13$ cm.

6. 3.　**提示**:由题知 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 12=6$,

而 $S_{\triangle AGF}=S_{\triangle BFG}=S_{\triangle BDG}=S_{\triangle AGE}=S_{\triangle DCG}$,且 $S_{\triangle GHC}=\frac{1}{2}S_{\triangle DGC}$,

$\therefore S_{\triangle BGF}+S_{\triangle GHC}=S_{\triangle BGF}+\frac{1}{2}S_{\triangle BGF}=\frac{3}{2}S_{\triangle BGF}=3$.

7. 8 cm^2.　**提示**:由题知:$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle AEC}=S_{\triangle BED}=S_{\triangle EDC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,

而 $S_{\triangle BEF}=\frac{1}{2}S_{\triangle BEC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,　$\therefore S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BEF}=8\ \text{cm}^2$.

8. (1)在$\triangle AOB$ 中,$OA+OB>AB$,　①

在$\triangle AOC$ 中,$OA+OC>AC$,　②

在$\triangle BOC$ 中,$BO+OC>BC$.　③

由①+②+③,得 $2(OA+OB+OC)>AB+AC+BC$.

故 $OA+OB+OC>\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$.

(2)$AB+AC>OB+OC$,　①

同理,$AB+BC>OA+OC$,　②

$AC+BC>OA+OB$.　③

由①+②+③,得 $2(AB+AC+BC)>2(OA+OB+OC)$,

即 $AB+AC+BC>OA+OB+OC$.

(3)由 $AB+AC+BC=10$ km,点 O 为$\triangle ABC$ 内一点,以及(1)(2)知$\frac{1}{2}(AB+BC+AC)<OA+OB+OC<AB+BC+AC$,所以 5 km$<OA+OB+OC<$10 km.所以水管长度应在 5 km 到 10 km 之间.

9. 34. **提示**:有序列举.设三角形的三边长分别为 a,b,c 且 $a<b<c$.当 $a=1$ 时,不构成三角形;当 $a=2$ 时,可构成三角形,有 6 种,即(2,3,4),(2,4,5),(2,5,6),(2,6,7),(2,7,8),(2,8,9);同理,当 $a=3,4,5,6,7$ 时分别有 9,9,6,3,1 种.共计 34 种.

10. 设长度为 12 的高对应的边长为 x,则长度为 4 的高对应的边长为 $3x$,则第三边(设为 y)满足 $3x-x<y<3x+x$,即 $2x<y<4x$.故第三边上的高(设为 z)满足$\frac{12x}{4x}<z<\frac{12x}{2x}$,即 $3<z<6$,因为 z 为整数,所以 $z=4$ 或 5.当 $z=4$ 时,三角形为等腰三角形,不符合题意.故 $z=5$.

11. (1)当 $n=4$ 时,有(2,3,3).

当 $n=5$ 时,有(2,4,4),(3,3,4).

当 $n=6$ 时,有(2,5,5),(3,4,5),(4,4,4).

(2)当 $n=12$ 时,$a+b+c=24$,且 $a+b>c$,

$a\leqslant b\leqslant c$,得 $8\leqslant c\leqslant 11$,即 $c=8,9,10,11$.

故可得(a,b,c)共有 12 组:

$A(2,11,11)$,$B(3,10,11)$,$C(4,9,11)$,$D(5,8,11)$,

$E(6,7,11)$,$F(4,10,10)$,$G(5,9,10)$,$H(6,8,10)$,

$I(7,7,10)$,$J(6,9,9)$,$K(7,8,9)$,$L(8,8,8)$.

(3)按边分类:

①等腰三角形:A,F,J,L.

②不等腰三角形:B,C,D,E,G,H,K.

按角分类:

①锐角三角形:A,F,G,J,K,L.

②直角三角形:H.

③钝角三角形:B,C,D,E,I.

[能力平台]

1. C **提示**:三条线段若能组成三角形须满足任意两边之和大于第三边.

2. A **提示**:三角形具有稳定性.

3. D **提示**:设三角形的三边长为 $x,x+1,x+2$,依题意有 $x+x+1+x+2=18$,解得 $x=5$.

4. A **提示**:在$\triangle ABC$ 中, $\because \angle BAC=50°$,$\angle ABC=60°$,

$\therefore \angle C=70°$.

$\because AE$ 平分$\angle BAC$, $\therefore \angle BAE=\angle EAC=25°$.

又 $AD\perp BC$, $\therefore \angle DAC=90°-70°=20°$.

$\therefore \angle EAD=\angle EAC-\angle DAC=25°-20°=5°$.

$\therefore \angle EAD+\angle ACD=70°+5°=75°$.故选 A.

5. A **提示**:由折叠得$\angle A=\angle A'$, $\because \angle BDA'=\angle A+\angle AFD$,$\angle AFD=\angle A'+\angle CEA'$,$\angle A=\alpha$,$\angle CEA'=\beta$,$\angle BDA'=\gamma$,

$\therefore \angle BDA'=\gamma=\alpha+\alpha+\beta=2\alpha+\beta$.

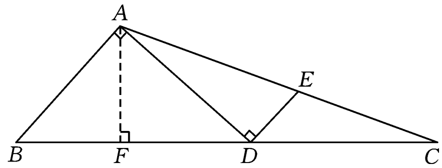
6. B **提示**:如图,过点 A 作 $AF\perp BC$ 于点 F,易知$\triangle ABF$ 是等腰直角三角形. $\therefore AF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}$.

$\because AD\perp AB$,$DE\perp AD$, $\therefore DE /\!/ AB$.

$\because AB=2DE$, $\therefore DE$ 是$\triangle ABC$ 的中位线.

$\therefore CD=BD=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$, $\therefore BC=4\sqrt{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AF\cdot BC=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=4$.



第 6 题图

7. 17. **提示**:由$|a-3|+(b-7)^2=0$ 知 $a=3$,$b=7$.

①当腰长为 3 时,底边长为 7,此时 $3+3<7$(舍去).

②当腰长为 7 时,底边长为 3,则三角形的周长为 $2\times7+3=17$.

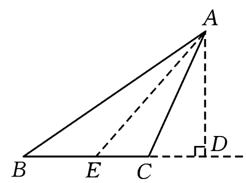
8. 三角形三边应满足 $8-5<1+2x<5+8$,即 $1<x<6$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $1<x<6$.

9. $\because BC=2BD=2$,$AH=2$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AH=2$.

$\therefore\triangle ABC$ 的面积为 2.

10. (1)如图所示.



第 10 题图

(2)$\because AD$ 是 BC 边上的高, $\therefore \angle D=90°$.

又$\because \angle B=30°$,$\angle ACB=130°$,

$\therefore \angle BAD=180°-\angle B-\angle D=60°$,

$\angle BAC=180°-\angle B-\angle ACB=20°$.

$\because AE$ 为$\angle A$ 的平分线,

$\therefore \angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC=10°$,

$\therefore \angle EAD=\angle BAD-\angle BAE=50°$.

11. C **提示**:设三角形的三边分别为 a(最小边),$3a$(最大边),b,

则 $a<b<3a$. ①

又$\because 2a<b<4a$(三角形三边关系), ②

由①②,得 $2a<b<3a$.

又 $4a+b=120$,则 $b=120-4a$,则 $6a<120<7a$,

即 $17.1<a<20$,且 a 为整数,

故 a 的取值为 18 或 19.

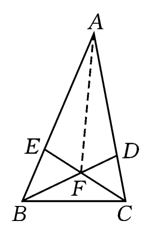
12. $\frac{204}{13}$. **提示**:如图,连接 AF,则有

$\frac{S_{\triangle AEF}+4}{S_{\triangle AFD}}=\frac{S_{\triangle AEF}+S_{\triangle BFE}}{S_{\triangle AFD}}=\frac{BF}{FD}=\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle CDF}}=\frac{5}{3}$,

$\frac{S_{\triangle AFD}+3}{S_{\triangle AEF}}=\frac{S_{\triangle AFD}+S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{CF}{FE}=\frac{S_{\triangle BCF}}{S_{\triangle BEF}}=\frac{5}{4}$,

解得 $S_{\triangle AEF}=\frac{108}{13}$,$S_{\triangle AFD}=\frac{96}{13}$,

所以四边形 $AEFD$ 的面积是$\frac{204}{13}$.



第 12 题图

13. (1)36. (2)2. (3)$\frac{1}{6}$. **提示**:(1)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}AC\cdot BE=\frac{1}{2}AB\cdot CF$,

$\therefore BC\cdot AD=AC\cdot BE=AB\cdot CF$,

即 $16\times3=AC\cdot4=AB\cdot6$,

$\therefore AC=12$,$AB=8$.

$\therefore C_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=36$.

(2)设$\triangle ABC$在BC边上的高为h.

则$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h$.

$\because E$为BD的中点，$\therefore ED=\frac{1}{2}BD$.

$\because F$为DC的中点，$\therefore DF=\frac{1}{2}DC$.

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD+\frac{1}{2}DC=\frac{1}{2}BC$.

$\therefore S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}EF\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}BC\cdot h=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=2\ \text{cm}^2$.

(3)设$S_{\triangle BOF}=x$,$S_{\triangle BOD}=y$.

$\because$点E,O分别是AC,BE的中点,$S_{\triangle ABC}=1$,

$\therefore S_{\triangle AOE}=S_{\triangle COE}=S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}=\frac{1}{4}$.

$\therefore S_{\triangle AOF}=\frac{1}{4}-x,S_{\triangle ACF}=\frac{3}{4}-x,S_{\triangle BCF}=\frac{1}{4}+x$.

$\therefore \dfrac{\frac{1}{4}-x}{x}=\dfrac{\frac{3}{4}-x}{\frac{1}{4}+x}$,即$\frac{1}{16}-x^2=\frac{3}{4}x-x^2$.

解得$x=\frac{1}{12}$.

又$S_{\triangle COD}=\frac{1}{4}-y,S_{\triangle ACD}=\frac{3}{4}-y,S_{\triangle ABD}=\frac{1}{4}+y$,

$\therefore \dfrac{y}{\frac{1}{4}-y}=\dfrac{\frac{1}{4}+y}{\frac{3}{4}-y}$,得$y=\frac{1}{12}$.

故$S_{\text{四边形}BDOF}=x+y=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$.

第2讲　与三角形有关的角

例1　(1)依题意有方程组$\begin{cases}\angle A+\angle B=100^\circ,\\ \angle C=4\angle A,\\ \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,\end{cases}$

解得$\begin{cases}\angle A=20^\circ,\\ \angle B=80^\circ,\\ \angle C=80^\circ,\end{cases}$

故$\angle A:\angle B:\angle C=1:4:4$.

(2)依题意有$\begin{cases}\angle C=2\angle B<90^\circ,\\ \angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,\\ \angle A<90^\circ,\end{cases}$解得$30^\circ<\angle B<45^\circ$.

例2　(1)C　(2)180°.

例3　(1)$\because\triangle BEF$沿EF折叠得到$\triangle DEF$，$\therefore\angle B=\angle D$.

$\because\angle CFD=\angle BMF+\angle B=\angle BMF+\angle D$，$\therefore\beta=\alpha+\angle D$.

(2)$\beta=180^\circ-\alpha+\angle D$.

(3)$\beta=\alpha+2\angle D$.

例4　在$\triangle ABC$中,$\angle A=90^\circ$,而$\angle CBA+\angle BCA+\angle A=180^\circ$,

$\therefore\angle CBA+\angle BCA=90^\circ$.

又$\because BP,CP$分别平分$\angle CBA$与$\angle BCA$,

$\therefore\angle CBP=\frac{1}{2}\angle CBA,\angle BCP=\frac{1}{2}\angle BCA$,

从而$\angle CBP+\angle BCP=\frac{1}{2}\angle CBA+\frac{1}{2}\angle BCA$

$=\frac{1}{2}(\angle CBA+\angle BCA)=45^\circ$,

$\therefore$在$\triangle PBC$中,$\angle P=180^\circ-(\angle CBP+\angle BCP)$

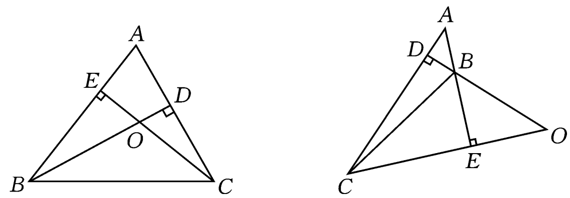
$=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

当木棒向上或向下滑动时,$\angle P$的度数不变,仍为135°.事实上,木棒向上或向下滑动,不影响$\angle A$的大小,所以$\angle CBA+\angle BCA$仍为90°,$\angle CBP+\angle BCP$还是45°,因而$\angle P=180^\circ-(\angle CBP+\angle BCP)=180^\circ-45^\circ=135^\circ$.

例5　(1)当$\triangle ABC$为锐角三角形时(如图D2-1①),

$\because\angle ABD+\angle A=90^\circ,\angle A=60^\circ$，$\therefore\angle ABD=30^\circ$.

$\because\angle BOC=\angle ABD+\angle BEC$，$\therefore\angle BOC=30^\circ+90^\circ=120^\circ$.



①　　　　②

图D2-1

(2)当$\triangle ABC$为钝角三角形时(如图D2-1②),

$\because\angle A+\angle ACO=90^\circ,\angle BOC+\angle ACO=90^\circ$,

$\therefore\angle BOC=\angle A=60^\circ$.

[变式题组]

1. (1)$90^\circ,30^\circ$.　(2)$30^\circ,60^\circ,90^\circ$.　(3)$90^\circ$.　(4)$45^\circ$.

2. B　**提示:**在$\triangle ABC$中,$\angle B=60^\circ,\angle C=25^\circ$,

$\therefore\angle BAC=180^\circ-60^\circ-25^\circ=95^\circ$.

又DE是AC的垂直平分线,

$\therefore\angle DAE=\angle DCE=25^\circ$.

$\therefore\angle BAD=\angle BAC-\angle DAE=95^\circ-25^\circ=70^\circ$.

3. B　**提示:**$\angle BEC=\angle ECM-\angle EBM=\frac{1}{2}\angle ACM-\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}(\angle ACM-\angle ABC)=\frac{1}{2}\angle A=30^\circ$.

4. (1)C　**提示:**由$AB\parallel CD$,且$\angle ABE=60^\circ$知,$\angle CFE=60^\circ$.

又$\angle D=50^\circ$，$\therefore\angle E=\angle CFE-\angle D=60^\circ-50^\circ=10^\circ$.

(2)25°.

5. (1)$\because\angle A+\angle B+\angle AOB=180^\circ,\angle D+\angle C+\angle DOC=180^\circ$,

又$\because\angle AOB=\angle DOC$，$\therefore\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$.

(2)连接BC,连接AD并延长交BC于点E.

$\because\angle BDE=\angle B+\angle BAD,\angle CDE=\angle C+\angle CAD$,

又$\because\angle BDE+\angle CDE=\angle BDC$,

$\therefore\angle BDC=\angle B+\angle C+\angle BAD+\angle CAD=\angle B+\angle C+\angle A$.

(3)180°.　(4)360°.　(5)180°.　(6)360°.

6. B　**提示:**由题知EF为AB的垂直平分线,

$\because BF=AF$，$\therefore\angle B=\angle EAF=45^\circ$.

$\therefore AF\perp BC$,点F为BC的中点.

$\therefore EF$为$\triangle ABC$的中位线,而$EF=\frac{3}{2}$.

$\therefore EF=\frac{1}{2}AC$.　$\therefore AC=3$.

$\because AB=AC$且$\angle BAC=90^\circ$，$\therefore BC=\sqrt{2}AC=3\sqrt{2}$.

7. 30°.　**提示:**依题意,设$\angle B=\angle C=x,\angle ADE=\angle AED=y$,

$\angle EDC+x=y$,　①

$\angle EDC+y=x+60^\circ$,　②

由①+②,得$2\angle EDC=60^\circ$，$\therefore\angle EDC=30^\circ$.

8. (1)**方法一**　$\because BO$平分$\angle ABC$,CO平分$\angle ACB$,

$\therefore\angle ABO=\angle OBC,\angle ACO=\angle BCO$.

$\because 2\angle OBC+2\angle BCO+\angle A=180°$,

$\therefore \angle OBC+\angle BCO=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

在$\triangle OBC$中，$\angle BOC=180°-\angle OBC-\angle OCB=180°-90°+\frac{1}{2}\angle A=90°+\frac{1}{2}\angle A$.

同理可得$\angle BDC=90°-\frac{1}{2}\angle A$.

$\therefore \angle BOC+\angle BDC=90°+\frac{1}{2}\angle A+90°-\frac{1}{2}\angle A=180°$.

方法二 易知$\angle OBD=\angle OCD=90°$,

在四边形$OBDC$中，$\angle BOC+\angle BDC=180°$.（对角互补）

(2)由题可知$\angle D=90°-\frac{1}{2}\angle A<90°$,

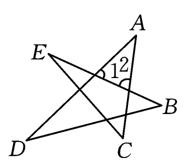
同理$\angle E=90°-\frac{1}{2}\angle B<90°$,

$\angle F=90°-\frac{1}{2}\angle C<90°$,

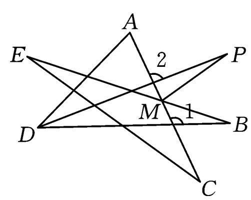
$\therefore \triangle DEF$为锐角三角形.

9. (1)如图D2-2，$\because \angle 1=\angle B+\angle D$，$\angle 2=\angle C+\angle E$,

$\therefore \angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=\angle A+\angle 1+\angle 2=180°$.



图D2-2



图D2-3

(2)如图D2-3，$\because \angle AMB=\angle 1+\angle B$，$\angle 1=\angle A+\angle ADB$,

$\therefore \angle AMB-\angle ADB=\angle A+\angle B$.

$\because \angle 2=\angle AMP+\angle P$，$\angle 2=\angle ADP+\angle A$,

$\therefore \angle AMP-\angle ADP=\angle A-\angle P$.

又$\because \angle AMB=2\angle AMP$，$\angle ADB=2\angle ADP$,

$\therefore 2\angle AMP-2\angle ADP=\angle A+\angle B$,

$\therefore 2(\angle AMP-\angle ADP)=\angle A+\angle B$,

$\therefore 2(\angle A-\angle P)=\angle A+\angle B$,

$\therefore \angle A-\angle B=2\angle P$.

[能力平台]

1. 140°.

2. 90°.

3. 10°.

4. 44°. **提示：**由题知$3\angle EBC+3\angle ECB+\angle A=180°$,

且$\angle A=48°$,

$\therefore \angle EBC+\angle ECB=\frac{180°-48°}{3}=44°$.

同理$2\angle EBC+2\angle ECB+\angle D=180°$,

$\therefore \angle D=180°-2\times 44°=92°$，而$\angle E=180°-44°=136°$,

$\therefore \angle E-\angle D=136°-92°=44°$.

5. 280°. **提示：**$\because \angle 1+\angle 2=180°-\angle A=140°$，$\angle 3+\angle 4=180°-\angle A=140°$，$\therefore \angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=280°$.

6. 30°. **提示：**由题知，若特征角为100°，则另一个内角为50°，此时最小角为$180°-100°-50°=30°$.

7. ①②④. **提示：**$\because \angle BAC=\angle ADB=\angle ADC=90°$,

且BE，AG分别平分$\angle ABC$，$\angle DAC$,

$\angle ABC+\angle C=90°$，$\angle ABD+\angle BAD=90°$,

$\therefore \angle C=\angle BAD$，①正确.

又$\because \angle AEF+\angle ABF=90°$，$\angle AFE+\angle EBD=90°$,

$\therefore \angle AEF=\angle AFE$，②正确.

由②可知，$\triangle AEF$为等腰三角形，$\therefore AG\perp EF$，④正确.

8. 60° **提示：**由题知$\angle ABE=20°$，$\angle ACD=30°$，且$\angle BDC+\angle BEC=170°$,

$\therefore \angle BFD+\angle CFE=140°$，且$\angle BFD=\angle CFE=70°$,

即$\angle FBC+\angle FCB=70°$，又$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180°$,

$\therefore \angle A=180°-(70°+20°+30°)=180°-120°=60°$.

9. (1)120°. **提示：**由题知$\angle B=30°$，且$\angle BOC=60°$,

$\therefore \angle OCB=90°$，即$\angle AOC=30°$，$\therefore \angle AOD=90°+30°=120°$.

(2)110°. **提示：**当$\angle BOC=70°$时，$\angle AOC=20°$,

$\therefore \angle AOD=90°+20°=110°$.

(3)$\angle AOC=\angle BOD$. 理由如下：

$\because \angle AOC+\angle BOC=90°$，$\angle BOC+\angle BOD=90°$,

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.

(4)依然成立.

$\because \angle AOC=\angle AOB+\angle BOC=90°+\angle BOC$,

$\angle BOD=\angle DOC+\angle BOC=90°+\angle BOC$,

$\therefore \angle AOC=\angle BOD$.

10. (1)$B\left(\frac{10}{3},0\right)$，$C\left(\frac{40}{3},0\right)$.

(2)设$\angle ACB=\alpha$,

$\because \angle ABC-\angle ACB=90°$，$\therefore \angle ABC=90°+\alpha$,

$$\therefore \angle BAC=180°-\angle ABC-\angle ACB$$
$$=180°-(90°+\alpha)-\alpha$$
$$=90°-2\alpha.$$

$\because AD$平分$\angle BAC$，$\therefore \angle DAC=\frac{1}{2}\angle BAC=45°-\alpha$,

$\therefore \angle ADO=\angle DAC+\angle ACB=45°-\alpha+\alpha=45°$.

(3)$FM\perp PQ$. 理由如下：依题意设$\angle DQP=\angle AQM=\alpha$，$\angle FMG=\angle DMQ=\beta$. 延长$FM$交$PQ$于点$N$.

$\because \angle AQM=\angle QMO+\angle ADO$，$\therefore \alpha=\beta+45°$，即$\alpha-\beta=45°$.

$\because \angle MNQ+\angle NMO=\angle NQD+\angle ADO$,

$\therefore \angle MNQ+\beta=\alpha+45°$,

$\therefore \angle MNQ=\alpha-\beta+45°=90°$，$\therefore FM\perp PQ$.

11. 不妨设$\angle ADP=\angle PDM=\alpha$，$\angle ABP=\angle PBC=\beta$.

$\because \angle P=\angle ADP-\angle ABP$，$\therefore \angle P=\alpha-\beta$.

同理可得$\angle DMB=2\alpha-2\beta$,

$\therefore \angle DMB=2\angle P$.

同理可得$\angle CME=2\angle Q$,

$\because \angle DMB=\angle CME$，$\therefore 2\angle P=2\angle Q$，即$\angle P=\angle Q$.

12. (1)$\angle BAD+\angle C=180°$.

设$\angle AMD=2x$，$\angle ANB=2y$,

则$\angle BAD=\angle MAN=2x+2y+\angle C$,

$\angle MON=x+y+\angle C$. 又$\angle MON=90°$,

从而$\angle BAD+\angle C=(2x+2y+\angle C)+\angle C$

$=2(x+y+\angle C)=180°$.

(2)$n=7$.

设$\angle FEO=x$，$\angle FMO=y$，$\angle ENO=z$,

在$\triangle MFE$中，$y+11.25°=x$. ①

在$\triangle NEO$中，$z+4x=90°$. ②

在△NMO中，$2z+(n+1)y=90°$. ③
又有 $z+ny=3x+11.25°$. ④
由①代入④有 $z+(n-3)y=45°$.
从而 $2z+(2n-6)y=90°$. ⑤
由③与⑤有 $n+1=2n-6$，于是 $n=7$.

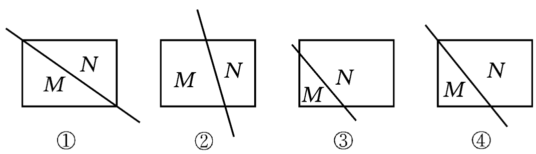
第3讲 多边形的边、角及其应用

例1 125. **提示：**∵过 m 边形的一个顶点共有7条对角线，∴$m=7+3=10$. ∵n 边形没有对角线， ∴$n=3$.

∵k 边形的对角线的条数为 k， ∴$\frac{1}{2}k(k-3)=k$， ∴$k=5$.

∴$(m-k)^n=(10-5)^3=125$.

例2 D **提示：**一条直线分割长方形，有4种分割方法：
(1)如图D3-1①，两个三角形，则 $M+N=180°+180°=360°$.
(2)如图D3-1②，两个四边形，则 $M+N=360°+360°=720°$.
(3)如图D3-1③，一个三角形和一个五边形，则 $M+N=180°+(5-2)\times180°=720°$.
(4)如图D3-1④，一个三角形和一个四边形，则 $M+N=180°+360°=540°$.



图D3-1

故 $M+N$ 可能为360°，540°，720°，不可能为630°.

例3 设这个多边形为 m 边形，少加的内角为 n 度，显然 $0<n<180$.
方法一 ∵$(m-2)\times180=1\ 125+n$，
∴$1\ 125<(m-2)\times180<1\ 305$. ∴$8\frac{1}{4}<m<9\frac{1}{4}$.
∵m 为整数， ∴$m=9$，$n=135$.
方法二 ∵$(m-2)\times180=1\ 125+n=6\times180+45+n$，
∴$\begin{cases}m-2=7,\\45+n=180,\end{cases}$ ∴$\begin{cases}m=9,\\n=135.\end{cases}$

例4 B **提示：**依题意得 $(108\div12)\times\alpha=360°$，所以 $\alpha=40°$.

例5 连接 BF，则因为∠AOG=∠FOB，
所以∠A+∠G=∠ABF+∠BFG.
∴∠A+∠OBC+∠C+∠D+∠E+∠OFE+∠G
=(∠A+∠G)+∠OBC+∠C+∠D+∠E+∠OFE
=(∠ABF+∠BFG)+∠OBC+∠C+∠D+∠E+∠OFE
$=(5-2)\times180°=540°$.

例6 B **提示：**正三角形的每个内角为60°，正六边形的每个内角为120°，建立方程 $60a+120b=360$，化简为 $a+2b=6$. 又因为 a，b 均为整数，故 $a=2$ 时，$b=2$；$a=4$ 时，$b=1$. 则 $a+b$ 的值为4或5.

[变式题组]

1. 八. **提示：**∵$n-3=5$， ∴$n=8$.
2. 135，十. **提示：**∵n 边形共有 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 条对角线，
∴$\frac{1}{2}\times18\times(18-3)=\frac{1}{2}\times18\times15=135$.
∵$\frac{1}{2}n(n-3)=35$，
∴$n(n-3)=70$. ∴$n=10$ 或 $n=-7$(舍去).
3. 9，$\frac{1}{2}n(n-3)$，6 051.
4. (1)360°. (2)6. (3)D
(4)C **提示：**这个多边形每个外角为 $180°-156°=24°$，$360\div24=15$.
(5)150. **提示：**设这个多边形为 a 边形，这个内角为 b 度，
∵$(a-2)\times180=2\ 550+b=14\times180+30+b$，
∴$\begin{cases}a-2=15,\\30+b=180.\end{cases}$ ∴$\begin{cases}a=17,\\b=150.\end{cases}$
5. C **提示：**∵∠ABC+∠DCB=360°−(∠A+∠D)=360°−α，
∴∠P=180°−$\frac{1}{2}$(∠ABC+∠DCB)=180°−$\frac{360°-\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$.
6. $BE\parallel DF$. 理由如下：
∵∠A+∠C=180°，
∴∠ABC+∠ADC=360°−(∠A+∠C)=180°.
又∵∠ABE=∠EBC，∠ADF=∠FDC，
∴∠EBC+∠FDC=90°.
又∵∠EBC+∠BEC=90°，
∴∠FDC=∠BEC， ∴$FD\parallel BE$.
7. C **提示：**∵$(n-2)\cdot180°=2\times360°$， ∴$n=6$.
8. 72°. **提示：**过点 B 作 $BF\parallel l_1$，
∵$l_1\parallel l_2$， ∴∠2=∠ABF.
由正多边形内角和公式 $(n-2)\times180°$ 知 $(5-2)\times180°=540°$.
∴每一个内角为 $540°\div5=108°$.
即∠ABC=108°. ∴∠CBF=108°−∠2.
又 $BF\parallel l_2$， ∴∠1+∠CBF=180°.
即∠1+108°−∠2=180°. 故∠1−∠2=72°.
9. (1)3. **提示：**多边形外角中最多有3个外角是钝角，即最多有3个内角是锐角.
(2)2 009. **提示：**n 边形中最多有3个内角是锐角，故最少有 $(n-3)$ 个非锐角. 故2 012边形的内角中非锐角的个数至少有2 009个.
(3)7. **提示：**n 边形中最多有3个内角是锐角，故 $n=3+4=7$.
10. 720°. **提示：**连接 AF，∵∠G+∠H=∠HAF+∠GFA，
∴∠BAH+∠B+∠C+∠D+∠E+∠EFG+∠G+∠H=$(6-2)\times180°=720°$.
11. (1)连接 AD，设 BD 与 CE 交于点 H.
∠DAF+∠F+∠ADF=180°，∠C，∠BDA，∠DAC 之和刚好等于∠BHE. 故∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G=540°.
(2)连接 AB，DF. 令∠ABF=∠1，∠BAD=∠2，∠GDF=∠3，∠CFD=∠4，则有∠C+∠G=∠4+∠3，∠1+∠2=∠ADF+∠BFD=∠ADG+∠3+∠BFC+∠4=∠D+∠F+∠C+∠G，
∴∠A+∠B+∠C+∠D+∠E+∠F+∠G=∠A+∠B+∠E+∠1+∠2=(∠A+∠2)+(∠B+∠1)+∠E=180°.
12. B **提示：**另一个角为 $360°-60°-90°-120°=90°$. 故另一个正多边形是正四边形.

[能力平台]

1. C **提示：**∵在五边形 $ABCDE$ 中，∠A+∠B+∠E=300°，
∴∠EDC+∠BCD=240°.
又∵DP，CP 分别平分∠EDC，∠BCD，
∴∠PDC+∠PCD=120°.

∴在△CDP中，$\angle P=180^\circ-(\angle PDC+\angle PCD)=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

2. B　**提示：**$\angle ABC=\dfrac{(5-2)\times180^\circ}{5}=108^\circ$.

∵$AB=BC$，　∴$\angle CAB=36^\circ$.

∵$\angle ABE=\angle E=\dfrac{(6-2)\times180^\circ}{6}=120^\circ$，$\angle ADE+\angle E+\angle ABE+\angle CAB=360^\circ$，

∴$\angle ADE=360^\circ-120^\circ-120^\circ-36^\circ=84^\circ$.

3. C　**提示：**设$\angle ABD=\angle DBP=\alpha$，$\angle ACE=\angle ECP=\beta$.

∴$2\alpha+2\beta=120^\circ-70^\circ=50^\circ$，

∴$\alpha+\beta=25^\circ$，　∴$\angle BFC=70^\circ+25^\circ=95^\circ$.

4. 9.　**提示：**由$(n-2)\times180^\circ=900^\circ$知为$n=7$，且周长为63的正多边形．∴边长为$63\div7=9$.

5. 120.　**提示：**由外角为30°知构成正12边形，故该正12边形的周长为$12\times10=120$ m.

6. 120°.　**提示：**设$\angle ABD=\angle DBC=\alpha$，

$\angle ACE=\angle ECM=\beta$，则$\angle BAC=2\beta-2\alpha$，

又$\angle BDC=130^\circ$，$\angle E=50^\circ$，　∴$2\alpha+50^\circ=\beta$.　①

在△BCD中，$\alpha+180^\circ-2\beta=50^\circ$.　②

由①②知$\beta-\alpha=60^\circ$，

∴$\angle BAC=2(\beta-\alpha)=2\times60^\circ=120^\circ$

7. B　**提示：**设这个内角的度数为x°，边数为n，则有$(n-2)\times180-x=2\,570$，$180n=2\,930+x$，　∴$n=\dfrac{2\,930+x}{180}$.

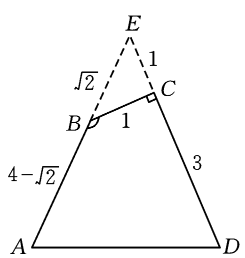
∵n为正整数，$0<x<180$，　∴$n=17$，

∴这个内角的度数为$180^\circ(17-2)-2\,570^\circ=130^\circ$.

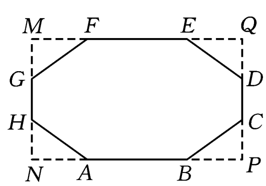
8. 67.5°.　**提示：**如图，延长AB，DC交于点E.易知$BE=\sqrt{2}$，$CE=1$，

∵$AB=4-\sqrt{2}$，$CD=3$，　∴$AE=ED=4$，且$\angle E=45^\circ$，

∴△EAD为等腰三角形，　∴$\angle A=\angle D=\dfrac{135^\circ}{2}=67.5^\circ$.



第8题图



第9题图

9. $32+\sqrt{2}$.　**提示：**如图，双向延长AB，CD，EF，GH得四边形$MNPQ$.原八边形的内角都相等，其每一个内角均为$\dfrac{(8-2)\times180^\circ}{8}=135^\circ$，每一个外角均为$45^\circ$，　∴四边形$MNPQ$为矩形．△$BPC$，△$DQE$，△$FMG$，△$ANH$都是等腰直角三角形．设$GH=x$，$HA=y$，由$MQ=NP$得$MF+FE+EQ=NA+AB+BP$，　∴$\sqrt{2}+6+\dfrac{5\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}y+7+2\sqrt{2}$，　∴$y=3-\sqrt{2}$.∵$MN=QP$，　∴$x=3+2\sqrt{2}$.故八边形的周长为$7+4+2+5+6+2+3+2\sqrt{2}+3-\sqrt{2}=32+\sqrt{2}$.

10. 设多边形除$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$外，其他角为$\angle A_i$($i=4,5,\cdots,4n+2$)，不妨设$0^\circ<\angle A_i\leqslant90^\circ$，则此多边形的外角和必大于$360^\circ$，这与多边形的外角和等于$360^\circ$矛盾，所以对每个$i$，$90^\circ<\angle A_i<180^\circ$.又因它们都为$30^\circ$的整数倍，所以$\angle A_i=120^\circ$或$150^\circ$($i=4,5,\cdots,4n+2$).

设$\angle A_4$，$\angle A_5$，…，$\angle A_{4n+2}$中有k个120°的角，t个150°的角，则$k+t=4n-1$(k，t为非负整数)，则

$[(4n+2)-2]\cdot180^\circ=3\times90^\circ+k\cdot120^\circ+(4n-1-k)\cdot150^\circ$，或$60^\circ\cdot k+30^\circ\cdot(4n-1-k)=360^\circ-3\times90^\circ$，

整理得$n=1-\dfrac{k}{4}$.又n是自然数，k为非负整数，

∴$k=0$，$n=1$.

11. 如图，在CD，AF上分别取点G，H.

作直线GH.

∵$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=720^\circ$，

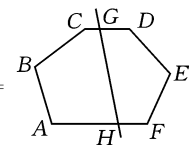
且$\angle A+\angle B+\angle C=\angle D+\angle E+\angle F$.

∴$\angle A+\angle B+\angle C=360^\circ$.

∵$\angle A+\angle B+\angle C+\angle CGH+\angle AHG=540^\circ$，

∴$\angle CGH+\angle AHG=180^\circ$.　∴$CD/\!/AF$.

∴该六边形必有两条对边平行.



第11题图

第4讲　全等三角形

例1　∵$AB=CD$，　∴$AB+BC=CD+BC$，　∴$AC=DB$.

在△BFD和△CEA中，$\begin{cases}BF=CE,\\BD=CA,\\DF=AE,\end{cases}$

∴△$BFD\cong$△CEA(SSS)，　∴$\angle FBC=\angle ECB$.

在△BFC和△CEB中，$\begin{cases}BF=CE,\\\angle FBC=\angle ECB,\\BC=CB,\end{cases}$

∴△$BFC\cong$△CEB(SAS)，　∴$\angle FCB=\angle EBC$，　∴$BE/\!/CF$.

例2　证明：在BC上截取$BF=BD$，则△$BDP\cong$△BFP.

∵$\angle BPC=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle A=120^\circ$，

∴$\angle BPD=\angle BPF=\angle CPF=\angle CPE=60^\circ$.

易证△$CPF\cong$△CPE(SAS)，　∴$CF=CE$.

∵$BC=BF+CF$，　∴$BC=BD+CE$.

例3　(1)∵$BD\perp AE$于点D，$CE\perp AE$于点E，

∴$\angle ADB=\angle AEC=90^\circ$.

∵$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ADB=90^\circ$，

∴$\angle ABD+\angle BAD=\angle CAE+\angle BAD$，

∴$\angle ABD=\angle CAE$.

在△ABD和△CAE中，

$\begin{cases}\angle ABD=\angle CAE,\\\angle ADB=\angle CEA,\\AB=CA,\end{cases}$

∴△$ABD\cong$△CAE(AAS).

∴$BD=AE$，$AD=CE$.

∵$AE=AD+DE$，

∴$BD=AE=AD+DE=CE+DE$.

(2)$BD=DE-CE$.理由如下：

∵$BD\perp AE$于点D，$CE\perp AE$于点E，

∴$\angle DAB+\angle DBA=90^\circ$.

∵$\angle BAC=90^\circ$，

∴$\angle DAB+\angle CAE=90^\circ$.　∴$\angle DBA=\angle CAE$.

在△DBA和△EAC中，

$\begin{cases}\angle ADB=\angle CEA=90^\circ,\\ \angle DBA=\angle EAC,\\ AB=CA,\end{cases}$

$\therefore \triangle DBA\cong\triangle EAC$(AAS). $\therefore BD=AE,AD=CE$.

$\therefore BD=AE=DE-AD=DE-CE$.

(3)$BD=DE-CE$.

例 4 (1)作$\angle BOC$的平分线交BD于点G,则$\angle DOG=\angle BOG=45^\circ$.

$\because \triangle COB$为等腰直角三角形, $\therefore \angle C=45^\circ$, $\therefore \angle C=\angle GOB$.

$\because OF\perp BD$于点E, $\therefore \angle 2+\angle 3=90^\circ$.

又$\because \angle 1+\angle 3=90^\circ$, $\therefore \angle 1=\angle 2$,

$\therefore \triangle FCO\cong\triangle GOB$(ASA), $\therefore FC=GO$.

又$\because \angle C=\angle DOG=45^\circ,CD=DO$, $\therefore \triangle CDF\cong\triangle ODG$(SAS),

$\therefore \angle ODB=\angle CDF$.

(2)$OF+DF=BD$.

证明:$\because \triangle OGB\cong\triangle CFO,\triangle ODG\cong\triangle CDF$,

$\therefore OF=BG,DF=DG$,

$\therefore OF+DF=BG+DG=BD$.

例 5 (1)$BD=CE\neq DE$;

面积相等的三角形是$\triangle ABD$和$\triangle ACE$,$\triangle ABE$和$\triangle ACD$.

(2)**方法一** 如图 D4-1,分别过点D,B作CA,EA的平行线,两线交于点F,DF与AB交于点G,

$\therefore \angle ACE=\angle FDB,\angle AEC=\angle FBD$.

在$\triangle AEC$和$\triangle FBD$中,又$\because CE=BD$,可证$\triangle AEC\cong\triangle FBD$.

$\therefore AC=FD,AE=FB$.

在$\triangle AGD$中,$AG+DG>AD$.在$\triangle BFG$中,$BG+FG>FB$.

$\therefore AG+DG-AD>0,BG+FG-FB>0$.

$\therefore AG+DG+BG+FG-AD-FB>0$,即$AB+FD>AD+FB$.

$\therefore AB+AC>AD+AE$.

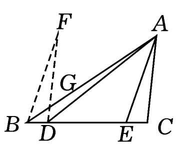


图 D4-1

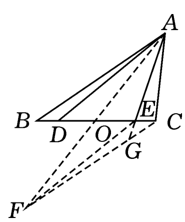


图 D4-2

方法二 如图 D4-2,取DE的中点O,连接AO并延长到点F,使得$FO=AO$,连接EF,CF.

在$\triangle ADO$和$\triangle FEO$中,$\angle AOD=\angle FOE,DO=EO,FO=AO$,可证$\triangle ADO\cong\triangle FEO$.

$\therefore AD=FE$. $\because BO=CO$,

同理可证$\triangle ABO\cong\triangle FCO$, $\therefore AB=FC$.

延长AE交CF于点G.

在$\triangle ACG$中,$AC+CG>AE+EG$.在$\triangle EFG$中,$EG+FG>EF$.

可得$AC+CG+EG+FG>AE+EG+EF$.

$\therefore AC+CG+FG>AE+EF$,

即$AB+AC>AD+AE$.

[变式题组]

1. B

2. $BD=CE$或$\angle BAD=\angle CAE$或$\angle ADB=\angle AEC$.

3. 延长DB至点E,使$BE=AB$,

连接AE,则$\angle ABC=2\angle E=2\angle C$,即$\angle C=\angle E$.

在$\triangle ADC$与$\triangle ADE$中,$\begin{cases}\angle ADC=\angle ADE\\ \angle C=\angle E,\\ AD=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADC\cong\triangle ADE$, $\therefore CD=DE$,

而$DE=DB+BE=BD+AB$, $\therefore AB+BD=CD$.

4. (1)在题图 4-8②中$BD=DP$成立.

证明:过点D作$DF\perp AD$交AB的延长线于点F.

$\because AD\parallel BC,\angle ABC=45^\circ$, $\therefore \angle BAD=\angle PAD=45^\circ$.

$\therefore \triangle ADF$是等腰直角三角形. $\therefore AD=DF,\angle F=45^\circ$.

$\because \angle BDP=\angle ADF=90^\circ$,

$\therefore \angle ADP=\angle FDB$.

在$\triangle ADP$与$\triangle FDB$中,

$\begin{cases}\angle PAD=\angle BFD,\\ AD=FD,\\ \angle ADP=\angle FDB,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADP\cong\triangle FDB$(ASA). $\therefore DP=BD$.

(2)在题图 4-8③中$BD=DP$.

5. A **提示**:因为$AB>AD$,故在AB上截取$AE=AD$,连接CE,

$\because \angle EAC=\angle DAC,AC$为公共边, $\therefore \triangle ACE\cong\triangle ACD$,

$\therefore CD=CE$.在$\triangle BCE$中,$CB-CE<BE$,即$AB-AD>CB-CD$,故选 A.

6. (1)延长AD到点E,使$DE=AD$,连接CE,

则$AE=2AD$,$\triangle ABD\cong\triangle ECD$(SAS),

$\therefore AB=EC$.在$\triangle ACE$中有$AC+CE>AE$,

即$AC+AB>2AD$.

(2)延长ED至点G,使$DG=DE$,连接CG,FG.

由FD垂直平分EG可得$EF=FG$.

由$\triangle EDB\cong\triangle GDC$(SAS)可得$BE=CG$.

在$\triangle FCG$中,$CF+CG>FG$,即$CF+BE>EF$.

[能力平台]

1. C **提示**:$\because \triangle ADC\cong\triangle BDF$, $\therefore BD=AD=4$.

又$CD=2$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$.

2. B **提示**:$\because \triangle ABD\cong\triangle EFC$,

$\therefore \angle ECF=\angle ADB,\angle A=\angle E=80^\circ$,

又$\angle F=60^\circ$,

$\therefore \angle ECF=\angle ADB=180^\circ-80^\circ-60^\circ=40^\circ$,

$\therefore \angle CGD=180^\circ-2\times 40^\circ=100^\circ$.

3. B **提示**:$\because OA\perp OB,OC\perp OD$, $\therefore \angle AOD=\angle COB$.

又$OA=OC,OD=OB$,

$\therefore \triangle AOD\cong\triangle COB$(SAS),故①正确.

易知$\triangle AOB\cong\triangle COD$(SAS), $\therefore CD=AB$,故②正确.

$\angle CDA=\angle CDO-\angle ADO=\angle ABC=\angle ABO-\angle CBO$,故③正确.

4. B **提示**:证 $Rt\triangle ADC\cong Rt\triangle CEB$ 得 $AD=3=CE,CD=EB=1$, $\therefore DE=CE-CD=3-1=2$.

5. (1)$\because \begin{cases}\angle EDC=\angle FDB,\\ DC=DB,\\ \angle ECD=\angle FBD,\end{cases}$

$\therefore \triangle BDF\cong\triangle CDE$(ASA). $\therefore BF=CE$.

(2)由(1)已证$\triangle BDF\cong\triangle CDE$,

$\therefore DF=DE$.

$\because AE+AF=AE+(DF+AD)=AE+(DE+AD)$

$=AE+ED+AD=2AD=20$,

$\therefore AD=10$.

6. (1)$\because D$为BC的中点, $\therefore BD=DC$,

又 $DE=DG$， $\therefore \triangle BDE\cong CDG(SAS)$， $\therefore BE=CG$.

(2)连接 FG， $\because DF\perp EG$， $\therefore \triangle FDE\cong\triangle FDG(SAS)$.

$\therefore EF=FG$.

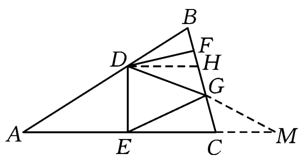
在$\triangle GCF$中,$CF+CG>GF$，

即 $CF+BE>EF$.

7. 如图,作 $DH\parallel AC$ 交 BC 于点 H,则易得等腰$\triangle DBH$，

$\therefore BF=HF$.延长 DG,EC交于点M. $\because \angle DEM=90°$,$DG=EG$， $\therefore DG=MG$， $\therefore \triangle DHG\cong\triangle MCG$，

$\therefore GH=GC$， $\therefore \frac{FG}{BC}=\frac{1}{2}$.



第 7 题图

8. (1)$\because \angle ACB=\angle DEB=90°$且 M 为 BD 的中点，

$\therefore EM=\frac{1}{2}BD=CM$.

(2)$\because \angle ACB=90°$,$\angle A=50°$， $\therefore \angle ABC=40°$.

在四边形 $BCDE$ 中,$\angle EDC=180°-40°=140°$.

在四边形 $CDEM$ 中,$\angle CME=360°-140°\times 2=80°$.

即$\angle EMF=180°-\angle CME=180°-80°=100°$.

(3)$\because \triangle DAE\cong\triangle CEM$， $\therefore CM\perp EM$.

又 $DE=CM$,$CM=DM=EM$.

$\therefore \triangle DEM$为等边三角形.

$\therefore \angle MEF=\angle MBF=30°$.

连接 AM， $\because AE=ME$， $\therefore \angle EAM=\angle EMA=15°$，

又$\angle MCB=\angle MBC=15°$，

$\therefore \angle ACN=\angle AMN=75°$且点 N 为 MC 的中点.

$\therefore \triangle ANC\cong\triangle ANM(SAS)$. $\therefore AN\perp CM$.

$\therefore AN\parallel EM$.

9. (1)$\triangle ACP\cong\triangle BPQ$,且 $PC\perp PQ$.理由如下：

当 $t=1$ 时,$AP=BQ=1$,$BP=AC=3$，

又$\angle A=\angle B=90°$，

在$\triangle ACP$ 和$\triangle BPQ$ 中，

$AP=BQ$,$\angle A=\angle B$,$AC=BP$，

$\therefore \triangle ACP\cong\triangle BPQ(SAS)$， $\therefore \angle ACP=\angle BPQ$，

$\therefore \angle APC+\angle BPQ=\angle APC+\angle ACP=90°$，

$\therefore \angle CPQ=90°$,即线段 PC 与线段 PQ 垂直.

(2)①若$\triangle ACP\cong\triangle BPQ$，

则 $AC=BP$,$AP=BQ$,可得$\begin{cases}3=4-t,\\t=xt,\end{cases}$解得$\begin{cases}t=1,\\x=1.\end{cases}$

②若$\triangle ACP\cong\triangle BQP$，

则 $AC=BQ$,$AP=BP$,可得$\begin{cases}3=xt,\\t=4-t,\end{cases}$解得$\begin{cases}t=2,\\x=1.5.\end{cases}$

综上所述,存在 $t=1$,$x=1$ 或 $t=2$,$x=1.5$,使得$\triangle ACP$ 与$\triangle BPQ$ 全等.

10. (1)由题意得 $a+b-4=0$,$a-2b+2=0$，

$\therefore a=2$,$b=2$， $\therefore OA=OB=2$，

$\therefore \triangle AOB$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle OAB=\angle OBA=45°$.

(2)过点 O 作 $OF\perp OE$ 交 AE 于点 F，

$\because BE\perp AE$， $\therefore \angle AOB=\angle AEB=90°$，

$\therefore \angle OBE=\angle OAF$,易证$\triangle OBE\cong\triangle OAF(ASA)$，

$\therefore OE=OF$， $\therefore \triangle OEF$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \angle AEO=45°$.

(3)过点 F 作 $FG\perp OF$ 交 OE 的延长线于点 G,过点 F 作 $FH\perp FB$ 交x 轴于点 H,连接 HG 并延长 DE 交 HG 于点 I，

$\because \angle EOF=45°$,$\angle HBF=\angle ABO=45°$，

$\therefore \triangle HFB$ 为等腰直角三角形，

易证$\triangle HFG\cong\triangle BFO(SAS)$， $\therefore FG=FO$,$GH=OB=OA$，

$\therefore \triangle FGO$ 为等腰直角三角形.又$\angle GHF=\angle OBF=135°$，

$\therefore \angle GHO=90°$.

$\therefore HI=OD=IG$，

易证$\triangle EIG\cong\triangle EDO(AAS)$,$\triangle FEG\cong\triangle FEO(SAS)$，

$\therefore \angle GEF=\angle OEF=\frac{1}{2}\times 180°=90°$，

$\therefore \triangle FEO$ 是等腰直角三角形，

$\therefore EF=EO$ 且 $EF\perp EO$.

11. (1)①由 $CA=CB$,$CD=CE$ 且$\angle ACB=\angle DCE=90°$，

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle BCD(SAS)$.

②由①知$\angle CAF=\angle CBD$ 且$\angle ACB=90°$，

$\therefore \angle AFB=90°$， $\therefore AE\perp BD$.

(2)当$\angle ACB=\alpha=60°$时,$\triangle ABC$ 为等边三角形，

易知$\triangle ACE\cong\triangle BCD(SAS)$.

$\therefore \angle CAE=\angle CBD$,$\angle ACB=\angle AFB$.

又 $\alpha=60°$， $\therefore \angle AFB=60°$.

(3)当$\angle ACB=\alpha$ 时,$\angle AFB=\alpha$，

$\therefore \angle AFD=180°-\alpha$.

12. C **提示:**证$\triangle BEC\cong\triangle BEA$,$\triangle BDF\cong\triangle CDA$.

13. 18. **提示:**过点 A 作 $AE\perp AC$ 交 CD 的延长线于点 E.证明$\triangle EAD\cong\triangle CAB$,即有 $AE=AC$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle EAC}=\frac{6\times 6}{2}=18$.

14. 如图,连接 BD,AE,在$\triangle DAB$ 和$\triangle BCF$ 中，

$DA=BC$,$\angle DAB=\angle BCF=90°$,$AB=CF$，

$\therefore \triangle DAB\cong\triangle BCF(SAS)$，

$\therefore \angle DBA=\angle BFC$,$BD=BF$.

$\therefore \angle DBA+\angle ABF=90°$,即$\angle DBF=90°$.

$\therefore \triangle DBF$ 是等腰直角三角形.

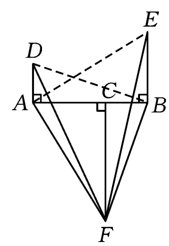
故$\angle BFD=45°$.

又$\because \angle AFB=51°$，

$\therefore \angle AFD=\angle AFB-\angle BFD=51°-45°=6°$.

同理,$\angle EFB=6°$.

$\therefore \angle DFE=\angle AFB-\angle AFD-\angle EFB=51°-6°-6°=39°$.



第 14 题图

15. **方法一** 如图①,过点 C 作 $CG\perp AC$ 交 AF 的延长线于点 G.

$\because \angle ABD=\angle GAD$,$AB=AC$，

$\therefore Rt\triangle BAD\cong Rt\triangle ACG$，

$\therefore AD=DC=CG$,$\angle G=\angle BDA$.

又$\angle DCB=45°=\angle GCF$,$CF=CF$，

则$\triangle DCF\cong\triangle GCF$,得$\angle G=\angle CDF$.

故$\angle ADB=\angle G=\angle CDF$.

方法二 如图②,作$\angle BAC$ 的平分线与 BD 相交于点 G，

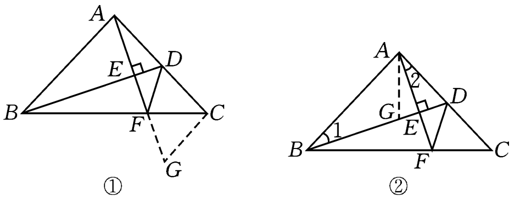
在$\triangle ABG$ 和$\triangle ACF$ 中,$\begin{cases}AB=AC,\\\angle 1=\angle 2,\\\angle BAG=\angle ACF=45°,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABG\cong\triangle CAF$， $\therefore AG=CF$.

在$\triangle AGD$和$\triangle CFD$中，$\begin{cases} AG=CF, \\ \angle GAD=\angle C=45^\circ, \\ AD=CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AGD \cong \triangle CFD$.　$\therefore \angle ADG=\angle CDF$.

即$\angle ADB=\angle CDF$.



①　　②

第 15 题图

16. (1)过点 C 作 $CD\perp y$ 轴于点 D.

易证$\triangle AOB\cong\triangle BDC$.

$\therefore OB=CD=5$，　$\therefore$点 $B(0,5)$.

(2)$\dfrac{CD}{AM}=\dfrac{1}{2}$.

(3)$PB=2$，过点 E 作 $EG\perp y$ 轴于点 G.

易证$\triangle ABO\cong\triangle BEG$，　$\therefore BG=AO$，再证$\triangle EGP\cong\triangle FBP$，

则 $GP=BP$.　$\therefore PB=\dfrac{1}{2}BG=\dfrac{1}{2}AO=2$.

第 5 讲　角平分线

例 1　$\because AD$ 平分$\angle BAC$，$CD\perp AC$，$DE\perp AB$，

$\therefore CD=DE$.　$\because BE=CF$，

$\therefore \triangle CDF\cong\triangle EDB$(SAS).　$\therefore BD=DF$.

例 2　过点 P 分别作 $PD\perp BC$，$PE\perp CA$，$PF\perp AB$，垂足分别为点 D,E,F.

$\because \angle 1=\angle 2$，　$\therefore PD=PF$. 同理 $PD=PE$，　$\therefore PE=PF$.

$\therefore AP$ 平分$\angle BAC$.

例 3　①③④.

例 4　9.　**提示**：共 10 种情形，其后打"√"的是正确的命题，其后打"×"的是错误的命题.

(1)①②③⇒④⑤√

(2)①②④⇒③⑤√

(3)①②⑤⇒③④√

(4)①③④⇒②⑤√

(5)①③⑤⇒②④√

(6)①④⑤⇒②③√

(7)②③④⇒①⑤×

(8)②③⑤⇒①④√

(9)②④⑤⇒①③√

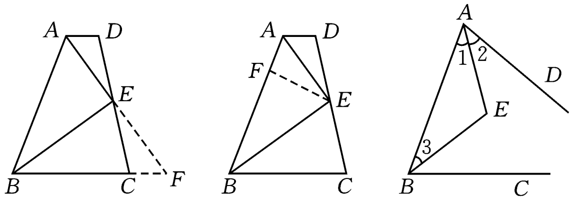
(10)③④⑤⇒①②√

以上 10 个命题中有 9 个是正确的命题，1 个是错误的命题，正确的命题的证明关键是作辅助线，下面选取两个命题作辅助线，证明过程请读者自己思考.

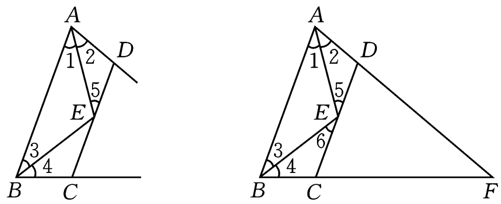
对于第(3)个命题(如图 D5-1①)，延长 AE 交 BC 的延长线于点 F，证明略.

对于第(9)个命题(如图 D5-1②)，在 AB 上截取 $AF=AD$，连接 EF，证明略.

对于第(7)个命题，②③④⇒①是错误的命题. 以下给出一位解题者的探究，并给出他的思维过程.



①　　②　　③



④　　⑤

图 D5-1

若任意作两个角，如图 D5-1③所示. 因为我们是在举反例，所以显然刻意使得 AD 与 BC 不平行，然后作$\angle DAB$ 的平分线，使其与$\angle ABC$ 的平分线交于点 E. 此时满足条件②③，若要继续满足条件④，则需找到一条过点 E 的直线，且与 AD 边交于点 D，与 BC 边交于点 C，还要满足 E 为 CD 的中点(如图 D5-1④). 显然这条直线不太好作. 我们继续让条件特殊化，但同时仍然满足条件②③，例如可设$\angle DAB=\angle ABC$(如图 D5-1⑤)，此时$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$，我们只需过点 E 作 AB 的平行线. 图中点 D,C 即为所求. 易证 $ED=EC$，即满足条件④，但图中显然不满足条件①，由此特例可说明②③④⇒①是错误的命题.

[变式题组]

1. 15 cm².　**提示**：过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F.

$\because BD$ 平分$\angle ABC$，　$\therefore DE=DF=2$ cm.

$\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle DBC}$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 9\times 2+\dfrac{1}{2}\times 6\times 2=15$ cm².

2. C　**提示**：$\because \angle A=54^\circ$，$\angle B=48^\circ$，

$\therefore \angle ACB=180^\circ-54^\circ-48^\circ=78^\circ$.

又 CD 平分$\angle ACB$，

$\therefore \angle BCD=\angle DCE=\dfrac{1}{2}\angle ACB=\dfrac{1}{2}\times 78^\circ=39^\circ$.

$\because DE\parallel BC$，　$\therefore \angle CDE=\angle BCD=39^\circ$.

3. $\because AO$ 平分$\angle DAE$，$OD\perp AB$，$OE\perp AC$，　$\therefore OD=OE$.

$\because \angle DOB=\angle EOC$，　$\therefore \triangle BDO\cong\triangle CEO$(ASA).

$\therefore BO=CO$.

4. 过点 D 作 $DG\perp BC$ 于点 G，$DH\perp AB$ 于点 H.

$\because BF$ 平分$\angle ABE$，　$\therefore DG=DH$.

$\because DA=DC$，

$\therefore \text{Rt}\triangle DHA\cong\text{Rt}\triangle DGC$.　$\therefore \angle DAH=\angle DCG$.

设 CD 与 AB 相交于点 M.

$\because \angle AMC=\angle ABC+\angle DCG=\angle ADC+\angle DAH$，

$\therefore \angle ABC=\angle ADC$.

5. C　**提示**：证$\triangle AFC\cong\triangle ABE$，可得 $CF=BE$，故①对. 过点 A 作 $AG\perp CF$ 于点 G，$AH\perp BE$ 于点 H.

$\because S_{\triangle AFC}=S_{\triangle ABE}$，　$\therefore \dfrac{1}{2}CF\cdot AG=\dfrac{1}{2}BE\cdot AH$.

$\therefore AG=AH$，故 OA 平分$\angle EOF$，故③对.

$\because \triangle AFC\cong\triangle ABE$，　$\therefore \angle AFC=\angle ABE$.

$\because \angle AMF=\angle BMO$，　$\therefore \angle FAM=\angle BOM=60^\circ$，

从而$\angle BOC=180^\circ-\angle BOM=120^\circ$，故④对.

对于②，假设结论成立，即$\angle AMO=\angle ANO$，则$\angle AFM+\angle FAM=\angle AEN+\angle EAN$.　$\because \angle EAN=\angle FAM=60^\circ$，

$\therefore \angle AFM=\angle AEN$.　$\because \angle ABN=\angle AFM$，　$\therefore \angle ABN=\angle AEN$，　$\therefore AB=AE$，这与题设矛盾. 当然也可以先证$\triangle AMO\cong\triangle ANO$，再证$\triangle AMF\cong\triangle ANE$，从而推出 $AF=AE$，这与题设矛盾. 故②错误.

6. (1)过点 E 作 $EF\perp AC$ 于点 F，$EG\perp BD$ 于点 G，$EH\perp CB$ 于点 H，如图 D5-2 所示.

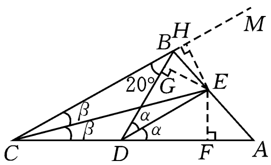


图 D5-2

$\because\angle ABC=100°$，$\angle CBD=20°$，

$\therefore\angle DBA=\angle ABH=80°$.

$\therefore BA$ 是$\triangle CBD$ 外角的平分线.

(2)$\because CE$ 平分$\angle ACB$，

$\therefore EH=EF$.

$\because BA$ 平分$\angle DBH$， $\therefore EG=EH$.

$\therefore EG=EF$. $\therefore DE$ 平分$\angle BDA$.

设$\angle BDE=\angle EDF=\alpha$，$\angle BCE=\angle DCE=\beta$，

则 $2\alpha-2\beta=20°$， $\therefore\alpha-\beta=10°$.

$\because\angle CED=\alpha-\beta$， $\therefore\angle CED=10°$.

[能力平台]

1. B **提示**：PQ 的最小值就是点 P 到 OM 的垂线段的长度，因为 OP 平分$\angle MON$，根据角平分线的性质：角平分线上的点到角两边的距离相等，得 PQ 的最小值就是 PA 的长，即 $PQ_{\min}=2$.

2. A **提示**：因为 $DE\perp AB$，所以$\angle AED=90°$. 又 AD 是$\angle CAB$ 的角平分线，$AC\perp CD$，由角平分线的性质得 $DC=DE$，又 $AD=AD$，故$\triangle ACD\cong\triangle AED$，所以$\angle ADC=\angle ADE$，故①成立；在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，故$\angle BAC+\angle B=90°$，在 Rt$\triangle BDE$中，$\angle B+\angle EDB=90°$，因此$\angle BAC+\angle B=\angle B+\angle EDB$，即$\angle BAC=\angle BDE$，故②成立；我们已证$\triangle ACD\cong\triangle AED$，故 $AC=AE$，因此 $AB=AE+EB=AC+BE$，④成立；当$\angle B=60°$时，$\angle EDB=30°$，$\angle ADE=75°$，显然$\angle EDB\neq\angle ADE$，故③不成立.

3. D **提示**：$\because AB=AC$，且$\angle A=36°$，BD 平分$\angle ABC$，

$\therefore\angle ABD=\angle A=36°$，$\triangle ABD$ 为等腰三角形，还有$\triangle BED$，$\triangle BCD$，$\triangle AED$，$\triangle ABC$，共 5 个.

4. C **提示**：过点 D 作 $DE\perp AB$ 于点 E，

$\because AD$ 平分$\angle BAC$， $\therefore DC=DE$.

又 $BD:CD=9:7$，且 $BC=32$， $\therefore BD=18$，$CD=14$.

即 $DE=14$.

5. C **提示**：延长 AP 交 BC 的延长线于点 E，

$\because AP$ 垂直 PB 且 PB 平分$\angle ABC$，

$\therefore\angle ABP=\angle EBP$.

又 $BP=BP$，$\angle APB=\angle BPE=90°$，

$\therefore\triangle ABP\cong\triangle EBP$(ASA).

$\therefore S_{\triangle BAP}=S_{\triangle BEP}$，$AP=PE$.

$\therefore S_{\triangle APC}=S_{\triangle PCE}$.

设 $S_{\triangle ACE}=m$， $\therefore S_{\triangle ABE}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACE}=8+m$，

$\therefore S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABE}-\dfrac{1}{2}S_{\triangle ACE}=\dfrac{8+m}{2}-\dfrac{m}{2}=4\ \text{cm}^2$.

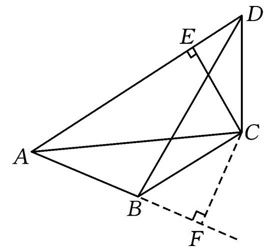
6. D **提示**：如图，过点 C 作 $CF\perp AB$，易知 $CE=CF$，Rt$\triangle CED\cong$ Rt$\triangle CFB$(HL).

$\therefore\angle FBC=\angle EDC$.

$\therefore\angle ABC+\angle ADC=180°$，故①正确；易知②正确；$AB+AD=AF-BF+AE+ED=2AE$，故③正确；

$AD-AB=AE+BF-(AF-BF)$

$=AE+BF-AF+BF=2BF=2ED$，故④正确.



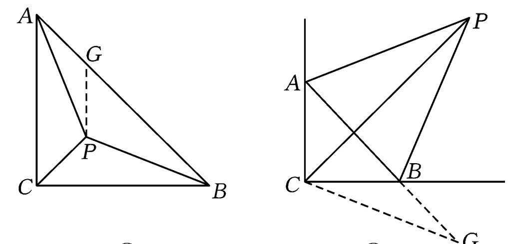
第 6 题图

7. (1)如图①，在 AB 上截取 $BG=BC$，连接 PG，

易证$\triangle PBC\cong\triangle PBG$(SAS)， $\therefore\angle BCP=\angle BGP=45°$.

又$\angle PAG=22.5°$， $\therefore\angle APG=22.5°$. $\therefore AG=PG=PC$.

$\therefore AB=AG+GB=PC+BC$.



① ②

第 7 题图

(2)第(1)小题中结论不成立. 理由如下：

如图②，延长 AB 至点 G，使 $BG=CB$，连接 CG.

$\therefore\angle BCG=\angle BGC$. $\because\angle CAB=\angle ABC=45°$，

$\therefore\angle CBG=135°$，$\angle BCG=\angle BGC=22.5°$.

$\therefore\angle ACG=112.5°$，$\angle PCB=45°$，$\angle PBC=112.5°$.

易证$\triangle ACG\cong\triangle CBP$(ASA).

$\therefore PC=AG=AB+BG=AB+BC$.

8. (1)15°.

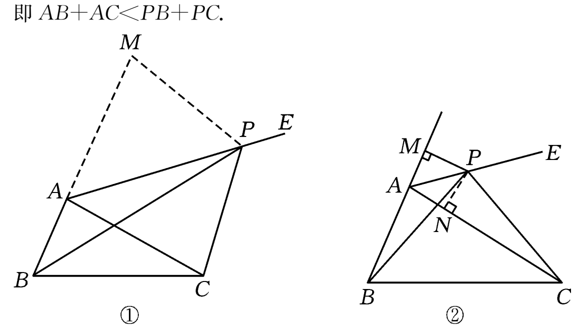
(2)如图①，在射线 BA 上取点 M，使 $AM=AC$，连接 PM.

$\because AE$ 平分$\angle MAC$， $\therefore\angle MAE=\angle CAE$.

易证$\triangle MAP\cong\triangle CAP$(SAS)， $\therefore PC=PM$.

在$\triangle PBM$ 中，$PB+PM>BM=AB+AC$，

即 $AB+AC<PB+PC$.



① ②

第 8 题图

(3)如图②，过点 P 作 $PN\perp AC$ 于点 N，

$\because AP$ 平分$\angle MAC$，

$\therefore PM=PN$. $\therefore AM=AN$.

$\because\angle BPC=\angle BAC$， $\therefore\angle ABP=\angle ACP$.

易证$\triangle PMB\cong\triangle PNC$(AAS).

$\therefore BM=NC$.

$\therefore\dfrac{AC-AB}{AM}=\dfrac{AN+NC-(BM-AM)}{AM}$

$=\dfrac{AM+NC-BM+AM}{AM}$

$=\dfrac{2AM}{AM}=2.$

9. D　**提示：**如图，过点 C 作 $CF\perp AD$ 的延长线于点 F，易证 $\triangle CFD\cong\triangle CEB$.

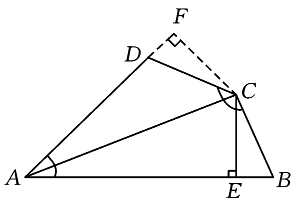
$\because AB+AD=2AD+2BE=2(AD+BE)=2AE$，

即 $AE=\dfrac{1}{2}(AB+AD)$，①正确.

$\because \angle D+\angle B=180^\circ$，　$\therefore \angle DAB+\angle DCB=180^\circ$，②正确.

由 $\triangle CFD\cong\triangle CEB$ 知，$CD=CB$，③正确.

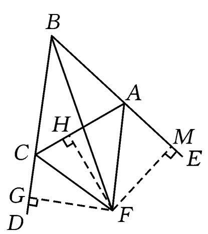
$S_{\triangle ACE}-S_{\triangle BCE}=S_{\triangle ACF}-S_{\triangle CFD}=S_{\triangle ACD}$，④正确.



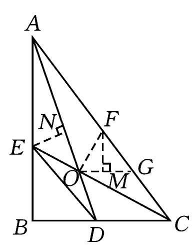
第 9 题图

10. 9.　**提示：**延长 MF，BA 交于点 E，延长 FM 至点 P，使 $MP=MF$，可证得 $AE=AF$，$BE=BP$，即 $AB+AE=AB+AF=AB+AC-CF=CF$，　$\therefore CF=\dfrac{1}{2}(AB+AC)=\dfrac{1}{2}(7+11)=9$.

11. 如图，分别过点 F 作 $FG\perp BC$ 于点 G，$FH\perp CA$ 于点 H，$FM\perp AB$ 于点 M. 先证 $FH=FM$，得到 AF 平分 $\angle CAE$，再证 $\angle CAB=2\angle CFB$.　$\therefore \angle CAF=(180^\circ-2\times35^\circ)\times\dfrac{1}{2}=55^\circ$.



第 11 题图



第 12 题图

12. (1)①$OE=OD$. ②$AE+CD=AC$. ③$S_1+S_2=S_3$. 在 AC 上截取 $AF=AE$，连接 OF，先证 $\triangle AOE\cong\triangle AOF$，再证 $\angle AOE=\angle AOF=60^\circ$. 再证 $\triangle COF\cong\triangle COD$. 从而 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle AOF}$，$S_{\triangle COD}=S_{\triangle COF}$.　$\therefore S_1+S_2=S_3$.

(2)$S_1+S_2+S_4=S_3$.

如图，在 AC 上截取 $AF=AE$，$CG=CD$，连接 OF，OG，则 $\triangle AEO\cong\triangle AFO$，$\triangle CDO\cong\triangle CGO$.　$\therefore OF=OE$，$OG=OD$.

过点 F 作 $FM\perp OG$ 于点 M，过点 E 作 $EN\perp AO$ 于点 N，易证 $\angle EON=\angle FOM=45^\circ$，再证 $\triangle OFM\cong\triangle OEN$.

$\therefore EN=FM$. $S_4=\dfrac{1}{2}OD\cdot EN$，$S_{\triangle OFG}=\dfrac{1}{2}OG\cdot FM$，

$\therefore S_4=S_{\triangle OFG}$，故 $S_1+S_2+S_4=S_{\triangle COG}+S_{\triangle AOF}+S_{\triangle OFG}=S_3$.

(3)$S_1+S_2+2S_4=S_3$.

第 6 讲　轴对称及轴对称变换

例 1　A

例 2　(1)D　(2)20°.　**提示：**对于(1)，　$\because DE\perp AB$，点 D 为 AB 的中点，

$\therefore AE=BE$.

$\because \triangle BCE$ 的周长为 8，即 $BE+CE+BC=8$，

$\therefore AE+CE+BC=8$，即 $AC+BC=8$.

$\because AC=5$，　$\therefore BC=3$. 故选 D.

对于(2)，　$\because$ 点 D，E 分别为 AB，AC 垂直平分线上的点，

$\therefore AD=BD$，$AE=CE$，

故设 $\angle BAD=\angle B=\alpha$，$\angle EAC=\angle C=\beta$.

$\therefore \angle DAE=\alpha+\beta-(180^\circ-\alpha-\beta)=2(\alpha+\beta)-180^\circ=2\times100^\circ-180^\circ=20^\circ$.

例 3　D　**提示：**如题图②，作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，则点 A' 的坐标为$(-1,4)$. 连接 $A'B$ 交 y 轴于点 C，过点 A' 作 $A'D\perp x$ 轴，

$\because A'D=4$，$BD=3-(-1)=4$，

$\therefore A'D=BD$，$\triangle A'BD$ 为等腰直角三角形.

$\therefore \angle AA'C=45^\circ$，　$\therefore OC=4-1=3$.　$\therefore$ 点 C 的坐标为$(0,3)$.

例 4　(1)如图 D6-1①所示.　　(2)如图 D6-1②所示.

(3)如图 D6-1③所示，点 P 的坐标是$(2,0)$.

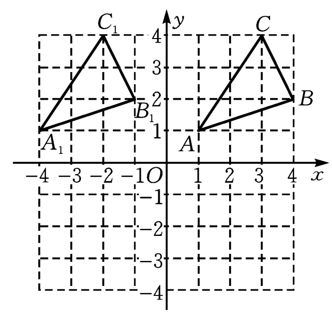


图 D6-1①

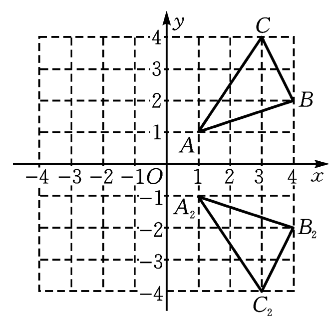


图 D6-1②

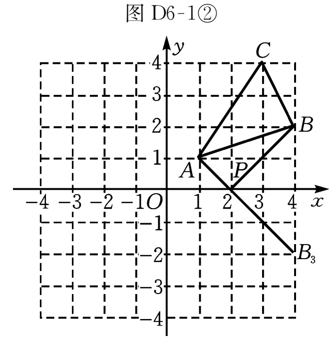


图 D6-1③

[变式题组]

1. 3.

2. (1)E，F，G，H；EH，EF；GH；$\angle GFE$；$\angle EHG$.

(2)平行；因为每对对应点连接成的线段被对称轴垂直平分，即 $EA\perp MN$，$BF\perp MN$，　$\therefore AE\parallel BF$.

(3)能.

3. A　**提示：**$\because$ 平角 $\angle AOB$ 三等分，　$\therefore \angle O=60^\circ$.　$\because 90^\circ-60^\circ=$

30°，∴剪出的直角三角形沿折痕展开依次得到底角是 30°的等腰三角形，再沿另一折痕展开得到一个角是 30°的直角三角形. 最后沿折痕 AB 展开得到等边三角形.

4. (1)10 cm. (2)22 cm.

5. 作点 A 关于 y 轴的对称点 A'，点 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接 $A'B'$ 分别交 x 轴、y 轴于点 C，D，则点 C，D 即为所求.

6. (1)如图 D6-2 所示.

(2)重叠部分的面积$=\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times2\times2=8-2=6$.

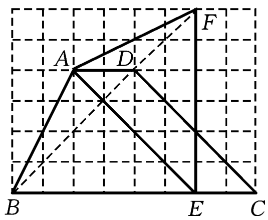


图 D6-2

7. 如图 D6-3 所示.

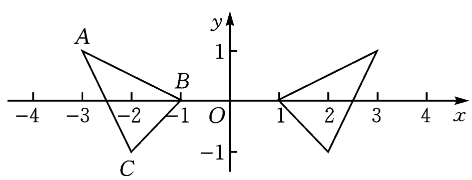


图 D6-3

[能力平台]

1. A

2. B 提示：是轴对称图形的有长方形、线段、圆、角.

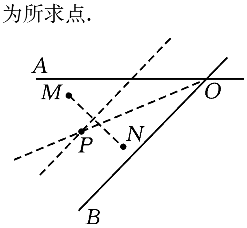
3. -25. **4.** C **5.** 3.

6. C 提示：$\because AD=BD$，又$\because AD+DC+AC=17$，$\therefore BD+DC+AC=17$，$\therefore BC+AC=17$，$\therefore BC=17-5=12$ cm，故选 C.

7. D 提示：展开后图形的一个内角为 60°或 120°，∴剪口与折痕所成角为 30°或 60°.

8. B 提示：②④对.

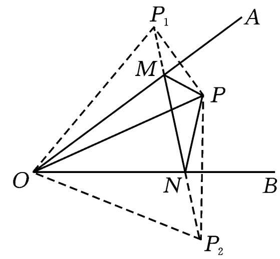
9. (1)如图，点 P 即为所求点.



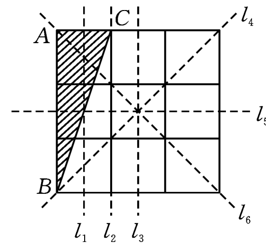
第 9 题图

(2)因为到 M，N 的距离相等，且到两公路距离相等，
故作 MN 的垂直平分线和$\angle AOB$ 的角平分线，求其交点.
所得交点 P 可满足要求.

10. C 提示：如图，分别作点 P 关于 OA，OB 的对称点 P_1，P_2，连接 PP_1，PP_2，OP_1，OP_2，P_1P_2，P_1P_2 与 OA，OB 分别交于点 M，N，此时$\triangle PMN$ 的周长最小，为 P_1P_2，
$\because \angle AOB=30°$，$\therefore \angle P_1OP_2=60°$，且 $OP_1=OP=OP_2$.
$\therefore \triangle OP_1P_2$ 为等边三角形，
$\therefore \angle MPN=\angle OP_1M+\angle OP_2N=120°$，故①正确；
$\triangle PMN$ 的周长即为 P_1P_2，而 $P_1P_2=OP_1=OP_2=OP=8$，即$\triangle MNP$ 的最小周长为 8，故④正确.



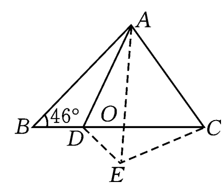
第 10 题图



第 11 题图

11. B 提示：由图可知满足条件的对称线共有 6 条，因此满足条件的格点三角形共有 6 个.

12. 如图，作$\triangle ABD$ 关于 AD 的轴对称图形$\triangle AED$.
则$\angle EAD=21°$，$AE=AB$，$DE=BD$.
易知$\angle ADC=21°+46°=67°$，
故$\angle ADE=\angle ADB=180°-67°=113°$，
$\angle CDE=113°-67°=46°$.
连接 CE，$\because DC=AB$，
$\therefore \triangle CDE\cong\triangle ABD\cong\triangle AED$.
设 O 为 AE 与 DC 的交点.
$\because \angle CDE=\angle OED=46°$，$\therefore OD=OE$.
又$\because DC=AE$，$\therefore OA=OC$，
$\therefore \angle OCA=\angle OAC$，故$\angle COE=2\angle ACO$.
易知$\angle COE=2\times46°=92°$.
因此 $2\angle ACO=\angle COE=92°$，
从而$\angle ACO=46°=\angle OAC$.
$\therefore \angle CAD=\angle OAC+\angle EAD=67°$.



第 12 题图

第 7 讲 等腰三角形

例 1 12°. 提示：设$\angle A=x$，则$\angle P_2P_1N=2\angle A=2x$，$\angle P_2P_1P_3=\angle P_2P_3P_1=\angle P_{12}P_{14}P_{13}=\angle P_{14}P_{12}P_{13}=2x$，$\angle P_{12}P_{13}N=\angle A+\angle P_{14}P_{12}P_{13}=x+2x=3x$，$\angle P_4P_3N=4x$，…，$\angle P_8P_9N=7x$，
$\therefore \angle AP_7P_8=\angle AP_8P_7=7x$，
$\therefore \angle A+\angle AP_7P_8+\angle AP_8P_7=x+7x+7x=180°$，
$\therefore x=12°$.

例 2 $\because AB=AD$，AF 平分 BD，
$\therefore \angle BAC=\angle DAC$.
$\because \angle BAC=\angle DAE$，
$\therefore \angle DAC=\angle DAE$.
$\because AC=AE$，
$\therefore \triangle ACG\cong\triangle AEG$，
$\therefore CG=EG$.

例 3 B 提示：如图 D7-1 所示，当 $BC_1=AC_1$，$AC=CC_2$，$AB=BC_3$，$AC_4=CC_4$，$AB=AC_5$，$AB=AC_6$，$BC_7=CC_7$ 时，都能得到符合题意的等腰三角形.

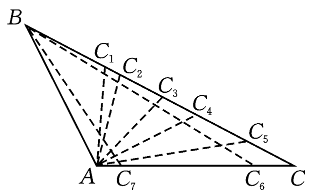
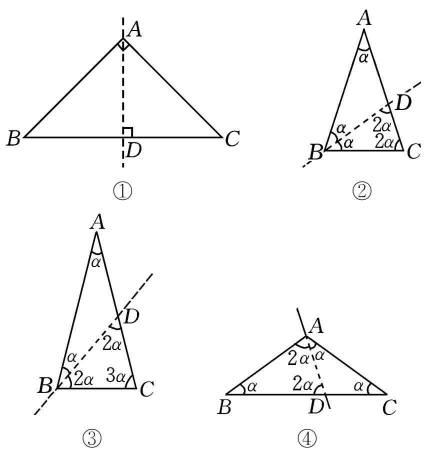


图 D7-1

例 4 若$\triangle ABC$为等腰直角三角形，如图 D7-2①，过点 A 作底边上的高，其所在的直线刚好满足条件，此时$\angle BAC=90°$.
若$\triangle ABC$为锐角三角形，则有图 D7-2②和图 D7-2③两种情况.
在图 D7-2②中，$\triangle ABD$，$\triangle BCD$ 均为等腰三角形，
设$\angle A=\angle ABD=\alpha$，则$\angle BDC=2\alpha=\angle ACB$.
$\therefore \alpha+2\alpha+2\alpha=180°$，即 $\alpha=36°$.　$\therefore \angle A=36°$.



D7-2

在图 D7-2③中，$\angle A=\angle ABD=\alpha$，$\angle BDC=\angle DBC=2\alpha$，$\angle C=3\alpha$，
$\therefore \alpha+3\alpha+3\alpha=180°$，$\alpha=\frac{180°}{7}$.　$\therefore \angle A=\frac{180°}{7}$.
如图 D7-2④，若$\triangle ABC$为钝角三角形，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 均为等腰三角形，设$\angle B=\angle C=\alpha$，则$\angle BAD=\angle BDA=2\alpha$，$\angle DAC=\angle C=\alpha$，
$\therefore \alpha+\alpha+3\alpha=180°$，$\alpha=36°$.
$\therefore \angle BAC=108°$.
综上，$\triangle ABC$的顶角的度数为 $90°$或 $36°$或$\frac{180°}{7}$或 $108°$.

例 5 如图 D7-3，过点 D 作 $DG\parallel AC$，交 BC 于点 G，
则$\angle DGB=\angle ACB$.
$\because AB=AC$，　$\therefore \angle B=\angle ACB$，
$\therefore \angle DGB=\angle B$，　$\therefore BD=DG$.
$\because BD=CF$，　$\therefore GD=CF$.
$\because DG\parallel AC$，　$\therefore \angle DGE=\angle FCE$，$\angle GDE=\angle CFE$.
$\therefore \triangle DGE\cong\triangle FCE$，　$\therefore DE=FE$，即点 E 是 DF 的中点.

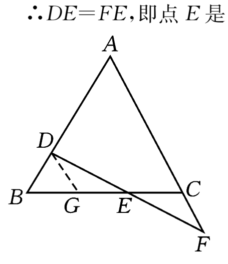


图 D7-3

［变式题组］

1. $70°$.　**提示：**先证$\triangle BED\cong\triangle CDF$，得出$\angle BDE=\angle CFD$.
$\because \angle BDE+\angle EDF=\angle CFD+\angle C$，
$\therefore \angle EDF=\angle C=(180°-40°)\times\frac{1}{2}=70°$.

2. (1)108，36.　**提示：**作线段 BD，使得 $AD=DB$，如图 D7-4①所示. $\triangle ADB$ 与$\triangle DBC$ 为等腰三角形，顶角$\angle ADB=108°$，$\angle DBC=36°$.（作法不唯一）
(2)在图 D7-4②中画两条线段如图所示，四个等腰三角形分别是$\triangle ABD$，$\triangle BCD$，$\triangle BEC$，$\triangle CED$.（作法不唯一）
(3)$2n$，n.

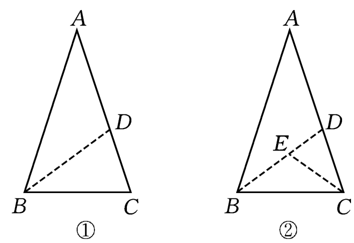


图 D7-4

3. 45.　**提示：**设$\angle DCE=x$，$\angle ACD=y$，则$\angle ACE=x+y$，$\angle BCE=90°-\angle ACE=90°-x-y$，根据等边对等角得出$\angle ACE=\angle AEC=x+y$，$\angle BDC=\angle BCD=\angle BCE+\angle DCE=90°-y$. 因此在$\triangle DCE$中，利用三角形内角和定理可列出方程 $x+(90°-y)+(x+y)=180°$，解方程即可求出$\angle DCE=45°$.

4. $\triangle CEF$ 是等腰三角形. 证明如下：
$\because AE$ 平分$\angle CAB$，　$\therefore \angle CAE=\angle EAB$.
$\because \angle CEF+\angle CAE=90°$，$\angle AFD+\angle EAB=90°$，
$\therefore \angle CEF=\angle AFD$.
$\because \angle CFE=\angle AFD$，　$\therefore \angle CEF=\angle CFE$，
$\therefore CF=CE$，　$\therefore \triangle CEF$ 是等腰三角形.

5. $\because \angle ADE=\angle B+\angle BAD$，$\angle DAE=\angle DAC+\angle CAE$，
又$\because \angle BAD=\angle DAC$，且$\angle B=\angle EAC$，
$\therefore \angle ADE=\angle DAE$，　$\therefore \triangle AED$为等腰三角形.
又$\because EF\perp AD$，　$\therefore EF$ 为$\angle AED$ 的角平分线，
$\therefore \angle AEF=\angle BEF$.

6. **方法一**　$\because AB=AC$，　$\therefore$点 A 在 BC 的垂直平分线上.
$\because BD=CD$，　$\therefore$点 D 在 BC 的垂直平分线上.
$\because$两点确定一条直线，　$\therefore AD$ 为 BC 的垂直平分线.
$\therefore AE\perp BC$.
方法二　$\because AB=AC$，$BD=CD$，$AD=AD$，
$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACD$，　$\therefore \angle BAD=\angle CAD$.
$\therefore AE$ 为$\angle BAC$ 的平分线.
$\because AB=AC$，　$\therefore AE\perp BC$.

7. $36°$或 $90°$.　**提示：**设一个角为 x，则另一个角为 $2x$，
若这个角为顶角，则 $x+2x+2x=180°$，解得 $x=36°$，则顶角为 $36°$；若这个角为底角，则 $x+x+2x=180°$，解得 $x=45°$，则顶角为 $90°$. 综上，顶角为 $36°$或 $90°$.

8. $63°$或 $27°$.　**提示：**如图 D7-5，分锐角三角形和钝角三角形两种情况，利用等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可求出它的底角.
在$\triangle ABC$ 中，设 $AB=AC$，$BD\perp AC$ 于点 D.
①若$\triangle ABC$ 是锐角三角形(如图 D7-5①)，
则$\angle A=90°-36°=54°$，
底角$=(180°-54°)\div 2=63°$.

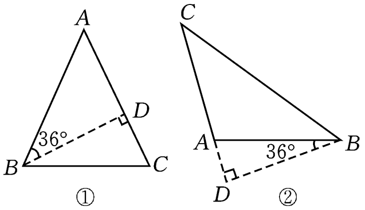


图 D7-5

②若△ABC是钝角三角形(如图 D7-5②)，

则$\angle BAC=36°+90°=126°$，

此时底角$=(180°-126°)\div 2=27°$.

9. $20°$或$40°$. **提示:**$\because\angle DCA=\alpha, CD=CA$, $\therefore\angle CDA=\dfrac{180°-\alpha}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$,$\angle FAD=\angle CAD-\angle CAB=90°-\dfrac{\alpha}{2}-30°=60°-\dfrac{\alpha}{2}$,$\angle DFA=30°+\alpha$. 若$30°+\alpha=90°-\dfrac{\alpha}{2}$,则$\alpha=40°$;若$30°+\alpha=60°-\dfrac{\alpha}{2}$,则$\alpha=20°$.

10. $70°$. **提示:**过点B在三角形外作$\angle ABN=20°$且使BN交CA的延长线于点N,连接MN,先证△$NMC\cong$△BMC,再证$AB=BM$.

[能力平台]

1. C **提示:**$\angle BGH=\angle BHK$,$\angle ABC=2\angle BGH=\angle ACB=2\angle BAC$,$5\angle BAC=\angle ABC+\angle ACB+\angle BAC=180°$.

$\therefore\angle BAC=36°$.

2. C **提示:**分别考虑以A,O,P三点为顶点的情况.

3. C **提示:**设$\angle A=\alpha$,由$MN\perp AB$且平分AB知,$\angle ABD=\alpha$,又$\angle DBC=15°$,且$AB=AC$, $\therefore\angle ABC=\angle C=\alpha+15°$.

由$\angle A+\angle ABC+\angle C=180°$知$\alpha+(\alpha+15°)\times 2=180°$,

$\therefore\alpha=50°$. 即$\angle A=50°$.

4. B **提示:**由题意知可证△$ABD\cong$△ACE,

$\therefore BD=CE=2$. $\because\angle BAC=\angle DAE=30°$,

$\therefore\angle B=\angle ACE=\angle ACB=75°$.

延长EC,过点D作EC的延长线的垂线DG.

则$\angle DCG=30°$, $\therefore DG=\dfrac{1}{2}CD=\dfrac{5}{2}$.

$\therefore S_{\triangle DCE}=\dfrac{1}{2}\times CE\times DG=\dfrac{1}{2}\times 2\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}$.

5. 3. **提示:**原式$=(a+b)(c+1)=12\times 2=8\times 3=6\times 4$. 底边的长只能为$c$. 满足条件的三角形有 3 个:$c=1$,$a=b=6$;$c=2$,$a=b=4$;$c=3$,$a=b=3$.

6. $\dfrac{5}{4}$. **提示:**过点C作$CF\perp AB$于点F,延长BA,过点D作$DE\perp BA$,易证△$BED\cong$△CFB(AAS).

$\therefore BE=CF$. $\because AB=\sqrt{5}$, $\therefore AF=BF=ED=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

$\therefore S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{5}{4}$.

7. $\sqrt{3}$. **提示:**$\because AB=AC$,且$\angle A=36°$,

$\therefore\angle B=\angle ACB=(180°-36°)\times\dfrac{1}{2}=72°$.

由翻折性质可知$AE=CE=\sqrt{3}$,$\angle A=\angle ACE=36°$,

$\therefore\angle ECB=\angle ACB-\angle ACE=36°$.

$\therefore\angle BEC=180°-\angle B-\angle ECB=72°$.

$\therefore\angle BEC=\angle B$. $\therefore EC=BC=\sqrt{3}$.

8. 3. **提示:**过点E作$EF\parallel CD$交AC的延长线于点F,证△$BDE\cong$△FEC.

9. 延长AE交BC的延长线于点F. $\because\angle ACB=90°$,

$\therefore\angle ACF=\angle ACB=90°$,$\angle CBD+\angle CDB=90°$.

$\because\angle ADE=\angle CDB$, $\therefore\angle CBD+\angle ADE=90°$.

$\because AE\perp BE$, $\therefore\angle BEA=\angle BEF=90°$.

$\therefore\angle CAF+\angle ADE=90°$. $\therefore\angle CBD=\angle CAF$.

$\because AC=BC$, $\therefore$△$CBD\cong$△CAF(ASA). $\therefore BD=AF$.

$\because BD$平分$\angle ABC$, $\therefore\angle ABD=\angle CBD$.

$\because BE=BE$, $\therefore$△$ABE\cong$△FBE. $\therefore AE=EF=\dfrac{1}{2}AF$.

$\therefore AE=\dfrac{1}{2}BD$. $\therefore BD=2AE$.

10. (1)4,4,$45°$.

(2)过点E作$EF\perp BH$于点F,

易知$S_{\triangle BEH}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle BHG}=\dfrac{3}{2}$,

$\therefore EF=1$,$BF=FE=1$. $\therefore HF=2$.

过点G作$GM\perp EF$于点M,则 Rt△$GME\cong$Rt△HFE,

$\therefore GM=HF=2$,$EM=EF=1$,

$\therefore FM=2$, $\therefore$点G的坐标为(2,5).

(3)过点B作$BF\perp OB$交NM于点F,

$\therefore$△$OAD\cong$△BOF(AAS).

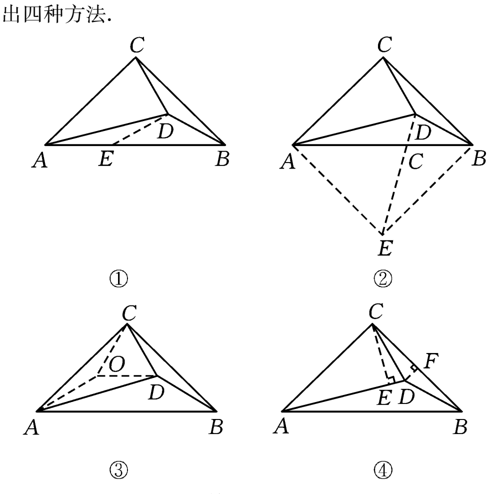
$\therefore\angle ODA=\angle BFO$,$BF=OD=BC$,$\angle MBF=\angle MBC=45°$,

$\therefore$△$BCM\cong$△BFM(SAS).

$\therefore\angle BCM=\angle BFM$. 又$\because\angle BFM+\angle BFO=180°$,

$\therefore\angle ADO+\angle BCM=180°$.

11. 给出四种方法.



第 11 题图

(1)如图①,在AB上截取$AE=CD$,连接DE.

(2)如图②,将△ACB沿AB边翻折到△ABE,连接DE.

(3)如图③,以CD为边在△ACD内作等边△OCD,连接AO.

(4)如图④,作$CE\perp AD$于点E,作$DF\perp BC$于点F.

12. $30°$. **提示:**如图,在AM上取一点D,使得$BD=BA$,连接DN,BD,

则$BD=BA=BN$,且$\angle ABD=20°$,

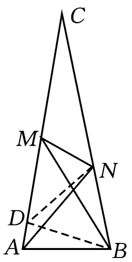
从而$\angle BDN=60°$,$\angle MDN=40°$.

$\because\angle DBM=\angle DMB=40°$,

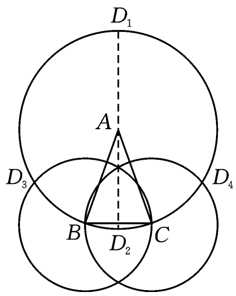
$\therefore DM=DB=DN$,

$\therefore \angle DMN=\dfrac{180^\circ-40^\circ}{2}=70^\circ$，

故$\angle NMB=\angle DMN-\angle DMB=70^\circ-40^\circ=30^\circ$.



第 12 题图



第 13 题图

13. 20，80，200，320． **提示：**如图，以点 A 为圆心，以 AB 长为半径作圆 A，分别以 B，C 为圆心，以 BC 长为半径作圆 B 和圆 C，BC 的中垂线交圆 A 于 D_1，D_2 两点，圆 B 与圆 A 交于点 D_3，圆 C 与圆 A 交于点 D_4. D_1，D_2，D_3，D_4 四点即为所求，$\angle BAD_2=20^\circ$，$\angle BAD_4=80^\circ$，$\angle BAD_1=200^\circ$，$\angle BAD_3=320^\circ$.

第 8 讲　等边三角形

例 1　(1)$\because \triangle ABC$ 为正三角形，

$\therefore AB=AC$，$\angle BAC=\angle C=60^\circ$.

$\because AE=CD$，　$\therefore \triangle ABE\cong\triangle CAD$.

(2)$\because \triangle ABE\cong\triangle CAD$，　$\therefore \angle 1=\angle 2$.

$\because \angle 2+\angle 3=60^\circ$，

$\therefore \angle 1+\angle 3=60^\circ$.

$\therefore \angle BPQ=\angle 1+\angle 3=60^\circ$.

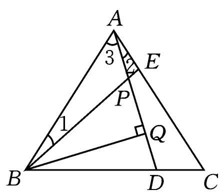


图 D8-1

(3)$\because BQ\perp AD$，　$\therefore \angle PQB=90^\circ$，

$\therefore \angle PBQ=30^\circ$，　$\therefore BP=2PQ=2\times 3=6$.

$\because PE=1$，　$\therefore BE=BP+PE=7$.

$\because \triangle ABE\cong\triangle CAD$，　$\therefore AD=BE=7$.

例 2　连接 AM.　$\because MN$ 垂直平分 AB，　$\therefore BM=AM$，

则$\angle B=\angle MAB$.　$\because \angle BAC=120^\circ$，$AB=AC$，

$\therefore \angle C=\angle B=30^\circ$，　$\therefore \angle MAB=30^\circ$，

$\therefore \angle MAC=120^\circ-30^\circ=90^\circ$.

在 Rt$\triangle MAC$ 中，　$\because \angle C=30^\circ$，

$\therefore CM=2MA$，　$\therefore CM=2BM$.

例 3　(1)$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AC=BC$，$\angle ABC=\angle ACB=60^\circ$.

$\because AC/\!/PQ$，

$\therefore \angle CPQ=\angle ACB=60^\circ$.

$\because AB/\!/CQ$，　$\therefore \angle ABC=\angle PCQ=60^\circ$.

$\therefore \triangle CPQ$ 为等边三角形，　$CP=CQ$，

$\therefore \triangle ACP\cong\triangle BCQ$，　$\therefore AP=BQ$.

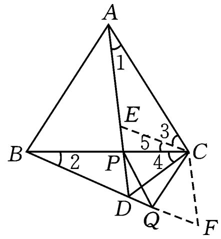


图 D8-2

(2)$AD=BD+CD$. 理由如下：

在 AD 上截取 $AE=BD$，连接 CE(如图 D8-2 所示).

$\because \triangle ACP\cong\triangle BCQ$，　$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又$\because AC=BC$，　$\therefore \triangle AEC\cong\triangle BDC$.

$\therefore CE=CD$，$\angle 3=\angle 4$.

$\because \angle 3+\angle 5=60^\circ$，　$\therefore \angle 4+\angle 5=60^\circ$，

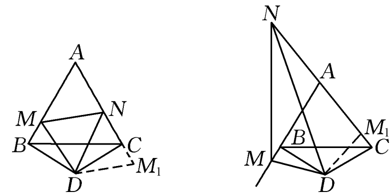
$\therefore \triangle CDE$ 为等边三角形，　$\therefore ED=CD$.

$\because AD=AE+ED$，　$\therefore AD=AE+CD=BD+CD$.

当然，也可以延长 BD 到点 F，使 $BF=AD$. 连接 CF，同学们可以尝试写出过程.

例 4　$BM+CN=MN$.　证明如下：

如图 D8-3①，延长 AC 至点 M_1，使 $CM_1=BM$，连接 DM_1，



①　②

图 D8-3

则$\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$.

$\because BD=CD$，　$\therefore$Rt$\triangle BDM\cong$Rt$\triangle CDM_1$.

$\therefore MD=M_1D$，$\angle MDB=\angle M_1DC$，

$\therefore \angle MDM_1=(120^\circ-\angle MDB)+\angle M_1DC=120^\circ$.

又$\because \angle MDN=60^\circ$，　$\therefore \angle M_1DN=\angle MDN=60^\circ$.

$\therefore \triangle MDN\cong\triangle M_1DN$.

$\therefore MN=NM_1=NC+CM_1=NC+MB$.

附加题：$CN-BM=MN$.　证明如下：

如图 D8-3②，在 CN 上截取 CM_1，使 $CM_1=BM$，连接 DM_1.

$\because \angle ABC=\angle ACB=60^\circ$，$\angle DBC=\angle DCB=30^\circ$，

$\therefore \angle DBM=\angle DCM_1=90^\circ$.

$\because BD=CD$，　$\therefore$Rt$\triangle BDM\cong$Rt$\triangle CDM_1$.

$\therefore \angle MDB=\angle M_1DC$，$DM=DM_1$.

$\because \angle BDM+\angle BDN=60^\circ$，　$\therefore \angle CDM_1+\angle BDN=60^\circ$.

$\therefore \angle NDM_1=\angle BDC-(\angle M_1DC+\angle BDN)=120^\circ-60^\circ=60^\circ$.

$\therefore \angle M_1DN=\angle MDN$.

$\because ND=ND$，　$\therefore \triangle MDN\cong\triangle M_1DN$.

$\therefore MN=M_1N=NC-CM_1=NC-MB$.

［变式题组］

1. C　**提示：**①有两个角为 60°，则另一个角也为 60°，故①对；②三个外角和为 360°，而三个外角都相等，则每个外角为 120°，每个内角为 60°，此三角形为等边三角形，故②对；③反例有等腰直角三角形斜边上的高也是斜边上的中线，故③错；④是等边三角形的判定定理，故④对.

2. (1)$\because \triangle ACD$ 和$\triangle BCE$ 为等边三角形，

$\therefore AC=DC$，$CE=CB$，$\angle ACD=\angle ECB=60^\circ$.

又$\angle ACE=\angle ACD+\angle DCE$，$\angle DCB=\angle DCE+\angle ECB$，

而$\angle ACD=\angle ECB$，　$\therefore \angle ACE=\angle DCB$.

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle DCB$(SAS).

(2)由$\triangle ACE\cong\triangle DCB$，得到$\angle MAC=\angle NDC$；易证$\triangle ACM\cong\triangle DCN$，得到 $CM=CN$.

$\because \angle MCN=60^\circ$，　$\therefore \triangle MCN$ 为等边三角形，

$\therefore \angle CMN=60^\circ=\angle MCA$，　$\therefore MN/\!/AB$.

(3)先证$\angle EFB=\angle MAC+\angle FBC=\angle MAC+\angle AEC=\angle ECB=60^\circ$，得到$\angle AFB=120^\circ$，再证 CF 平分$\angle AFB$. 过点 C 作 $CG\perp AE$ 于点 G，$CH\perp BD$ 于点 H.

$\because \triangle ACE\cong\triangle DCB$，　$\therefore DB=AE$，$S_{\triangle ACE}=S_{\triangle DCB}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}DB\cdot CH=\dfrac{1}{2}AE\cdot CG$，

$\therefore CG=CH$，从而 CF 平分$\angle AFB$.

$\therefore \angle AFC=\dfrac{1}{2}\angle AFB=\dfrac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$.

3. (1)$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，　$\therefore AB=BC$，$\angle ABD=\angle BCE=60^\circ$.

又 $BD=CE$， ∴$\triangle ABD\cong\triangle BCE$(SAS).

∴$\angle BAD=\angle EBC$. ∴$\angle APE=180°-\angle BPA=180°-(180°-\angle BAP-\angle ABP)=\angle BAP+\angle ABP=\angle ABP+\angle EBC=\angle ABC=60°$.

(2)延长 PD 至点 F,使 $PF=BP$,连接 BF,CF,则$\triangle BPF$ 为等边三角形,则 $BP=BF$;再证$\triangle ABP\cong\triangle CBF$(SAS),

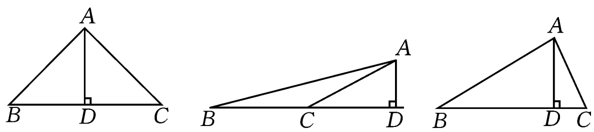
∴$AP=CF$,$\angle BFC=\angle BPA=120°$.

∵$\angle BFP=60°$， ∴$\angle PFC=60°$. 在 Rt$\triangle PFC$ 中,

∵$\angle PCF=90°-60°=30°$， ∴$CF=2PF$,故 $AP=2BP$,

∴$BP:AP=1:2$.

4. 15°,90°或 75°. **提示**:有三种情况,若 BC 为底,如图 D8-4①,$AD\perp BC$， ∵$AB=AC$， ∴$BD=CD=AD$， ∴$\angle BAC=90°$.



① ② ③

图 D8-4

若 BC 为腰,有两种情形:如图 D8-4②， ∵$AD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AC$， ∴$\angle ACD=30°$， ∴$\angle BAC=15°$.

如图 D8-4③， ∵$AD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB$,

∴$\angle ABC=30°$,

∴$\angle BAC=\frac{180°-30°}{2}=75°$.

5. (1)在 AC 上截取 $CF=CD$,连接 DF,则$\triangle CDF$ 为等边三角形， ∴$DF=CD$.

∵$\angle AGE=\angle DAC+\angle ADG=\angle ACE+\angle E$,

易知$\angle ADG=\angle ACE=60°$,

∴$\angle DAC=\angle E$.

再证$\triangle ADF\cong\triangle EDC$,得到 $AD=DE$.

此题也可过点 D 作 $DH\parallel AC$ 交 EC 的延长线于点 H,证$\triangle DEH\cong\triangle DAC$.

(2)结论仍然成立,即 $AD=DE$. 在 CE 上截取 $CF=CD$,连接 DF,证$\triangle ACD\cong\triangle EFD$ 即可.

6. 如图 D8-5,延长 BD 至点 E,使 $BE=AB$,连接 CE,AE,

∵$\angle ABE=60°$,$BE=AB$,

∴$\triangle ABE$ 为等边三角形.

∴$\angle AEB=60°$.

又∵$\angle ACD=60°$,

∴$\angle ACD=\angle AEB$.

∵$AB=AC$,$AB=AE$,

∴$AC=AE$.

∴$\angle ACE=\angle AEC$.

∴$\angle DCE=\angle DEC$.

∴$DC=DE$.

∴$AB=BE=BD+DE=BD+DC$.

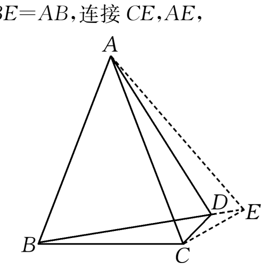


图 D8-5

7. (1)连接 BD,发现$\triangle ABD$ 为等边三角形,以 CD 为边向四边形 $ABCD$ 外作等边$\triangle CDE$,发现$\triangle ACD\cong\triangle BED$. 则 $AC=BE=BC+CE=BC+DC$.

(2)补充图形,使之符合(1)的要求,已有$\angle APD=120°$. 以 AD 为边向四边形 $ABCD$ 外作等边$\triangle ADE$,由(1)知 $AP+PD=PE$. 从而 $PA+PD+PC\geqslant BD$ 变化为 $PE+PC\geqslant BD$,注意到 $PE+PC\geqslant EC$,考虑证明 $EC=BD$,观察发现$\triangle CAE\cong\triangle BAD$. ∴$AP+PD+PC\geqslant BD$.

[能力平台]

1. C **提示**:①③④正确,②错误.

2. C **提示**:连接 AM,AN,$\triangle AMN$ 为等边三角形.

3. D **提示**:$\angle MPN$ 可围绕点 P 旋转,$\angle MPN=60°$. 依据角平分线性质可证明 $PM=PN$,得$\triangle PMN$ 为等边三角形. 故满足条件的$\triangle PMN$ 有无数个.

4. B **提示**:作 $QM\perp AC$ 于点 M,则$\triangle APE\cong\triangle CQM$,$\triangle PDE\cong\triangle QPM$.

5. D **提示**:对于①,在 AC 上截取 $AE=AO$,则$\triangle AOE$ 为等边三角形,易证$\triangle APO\cong\triangle ECO$,故$\angle APO=\angle ACO$.

故$\angle APO+\angle DCO=\angle ACO+\angle DCO=\angle ACD=30°$,故①对;

对于②,∵ $\triangle APO\cong\triangle ECO$， ∴ $\angle AOP=\angle EOC$,

∴$\angle AOP+\angle POE=\angle EOC+\angle POE=60°$,即$\angle POC=60°$.

又∵$PO=OC$， ∴$\triangle POC$ 为等边三角形,故②对;

由①②易知,$AO=AE$,$AP=EC$,故 $AO+AP=AE+EC=AC$,故③对;

对于④,过点 C 作 $CF\perp AP$ 于点 F,则 $CF=CD$,$S_{四边形AOCP}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AO\cdot DC+\frac{1}{2}AP\cdot CF=\frac{1}{2}AO\cdot CF+\frac{1}{2}AP\cdot CF=\frac{1}{2}(AO+AP)\cdot CF=\frac{1}{2}AC\cdot CF=\frac{1}{2}AB\cdot CF=S_{\triangle ABC}$,故④对.

6. (1)1,2.

(2)∵$\angle AMD=60°$， ∴$\angle BAM+\angle ABM=60°$.

又∵$\angle BAM+\angle CAE=60°$， ∴$\angle CAE=\angle ABM$.

∵$AB=AC$,$\angle BAD=\angle C=60°$， ∴$\triangle ABD\cong\triangle CAE$.

∴$AD=CE$.

又∵$CD=nAD$， ∴不妨设 $AD=a$,则 $CD=na$.

∴$\frac{BE}{AB}=\frac{na}{na+a}=\frac{n}{n+1}$.

当 $n=2$ 时,$\frac{BE}{AB}=\frac{2}{3}$， ∴$2AB=3BE$.

(3)3.5. **提示**:当$\frac{BE}{AB}=\frac{7}{9}$时,$\frac{n}{n+1}=\frac{7}{9}$,$n=3.5$.

7. ∵$\triangle ABC$ 是等边三角形,$AE=CD$,则有$\triangle DAC\cong\triangle EBA$,$\angle DAC=\angle EBA$,$\angle EBA+\angle BAF=60°$.

∵$CF\perp BE$,$\angle BFD=\angle FBA+\angle BAF$， ∴$\angle CFD=30°$.

在 BF 上截取 $BM=AF$,连接 AM,可证$\triangle BMA\cong\triangle AFC$,可得$\angle AMF=\angle CFD=30°$,

又$\angle MAF=\angle BAC-\angle BAM-\angle FAC=\angle BAC-(\angle ACF+\angle FAC)=\angle BAC-\angle DFC$,还可得$\angle MAF=30°$,

∴$MF=AF=BM$， ∴$AF:BF=1:2$.

8. (1)在 NC 的延长线上截取 $CE=BM$,连接 DE.

易证$\triangle DBM\cong\triangle DCE$(SAS). ∴$DM=DE$.

又 $MN=BM+CN$， ∴$MN=NE$.

∴$\triangle MND\cong\triangle END$(SSS).

∴$\angle MDN=\angle NDE=\frac{1}{2}\angle BDC=\frac{1}{2}\times120°=60°$.

(2)连接 AD,则 $AD\perp BC$,易知$\angle ABD=\angle ACD=90°$,$AD\perp BC$ 且平分 BC， ∴AD 平分$\angle BAC$,

∴$\angle DAB=\angle DAC=30°$， ∴$AD=2BD=2CD$.

即 $AD=BD+CD$.

9. (1)$60°$.

(2)①易证$\triangle ACM\cong\triangle BAN$， $\therefore\angle N=\angle AMC$，

$\therefore\angle APC=\angle N+\angle PCN=\angle AMC+\angle BCM=60°$，

$\therefore\angle CPN=120°$.

②$\because\angle CPN=120°$，$\triangle CPN$为等腰三角形，

$\therefore\angle N=\angle PCN=\angle BMC=\angle BCM=30°$.

$\because MG\perp BC$，$\angle MBG=60°$， $\therefore BM=BC=2BG=CN$，

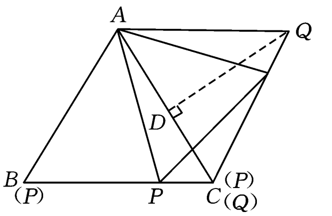
$\therefore GN=5BG$， $\therefore n=5$.

10. A **提示：**因为点P从B点开始延B向C运动，则点Q沿如图所示的CQ方向运动. 当点P到C点时，点Q到了如图所示的位置.

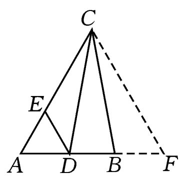
过点Q作$QD\perp AC$于点D.

$\because\triangle ACQ$为等边三角形，

$\therefore$点Q运动的路径即为CQ的长度，而$CQ=2DC=AC=6$.



第10题图



第11题图

11. $20°$. **提示：**如图，延长AB到点F，使$BF=AD$，连接CF. 易知$\triangle ADE$为等边三角形，则$\angle EDB=120°$.

又$CE=ED+DB=AD+DB=DB+BF=DF$，

所以$\triangle ACF$也为等边三角形.

由$\angle EDB=120°$，$\angle CDB=2\angle CDE$，知$\angle CDB=80°$.

在等边$\triangle ACF$中，由$AD=BF$，知$CD=CB$，

因此$\angle DCB=180°-2\angle CDB=20°$.

12. $2\leqslant AD<3$. **提示：**由于$DA=DE$，要使AD最长，须使DE最长，当$DC=AD$时，由于$\angle A=60°$，

所以$\triangle ACD$为等边三角形，又D为AB的中点，即$AD=3$.

但点E不与点B，C重合，所以$AD<3$.

当$DE\perp BC$时，DE最短. 由$\angle B=30°$知$DE=\frac{1}{2}BD$，

即$AD+BD=AD+2AD=6$，$AD=2$.

故AD的取值范围为$2\leqslant AD<3$.

13. (1)$\because D$是等边三角形ABC的边BC的中点，$\angle ADE=60°$，

$\therefore\angle ADB=90°$，$\angle BDE=\angle BAD=30°$，$\angle BED=90°$，

在$\mathrm{Rt}\triangle BED$和$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，

$\therefore BD=2BE$，$AB=2BD=4BE$，

$\therefore AE=AB-BE=3BE$.

(2)过点A作$AF\perp ED$于点F，$AH\perp DM$的延长线于点H，

$\because\angle AFD=\angle AHD=90°$，而$\angle ADF=\angle ADH=60°$，

$\therefore AF=AH$.

又$\angle BAC=60°$，在四边形$AFDH$中，$\angle FAH=60°$，

$\therefore\angle EAF=\angle MAH$. 易证$\triangle AFE\cong\triangle AHM$.

$\therefore AE=AM$.

又$AB=AC$， $\therefore AB-AE=AC-AM$， $\therefore BE=CM$.

(3)延长CF至点N，使$FN=BE$，连接BN，EN，

$\because CF/\!/BE$， $\therefore\angle BEN=\angle ENF$，$\angle BCF=\angle ABC=60°$.

又$\because EN=NE$， $\therefore\triangle BEN\cong\triangle FNE$.

$\therefore\angle BNE=\angle FEN$， $\therefore EF/\!/BN$.

$\therefore\angle CDF=\angle CBN$.

又$\because\angle ADE+\angle ADC+\angle CDF=180°$，$\angle ACD+\angle ADC+\angle CAD=180°$，$\angle ADE=\angle ACB=60°$，

$\therefore\angle CDF=\angle CAD$.

又$\angle CDF=\angle CBN$，

$\therefore\angle CAD=\angle CBN$.

又$CA=CB$，$\angle BCF=\angle ACB=60°$，

$\therefore\triangle ACD\cong\triangle BCN$. $\therefore CD=CN=CF+BE$.

14. **方法一** 如图①，过点B作$BF/\!/DE$交AC于点F，$\triangle ADE$为等边三角形， $\therefore\triangle ABF$为等边三角形，

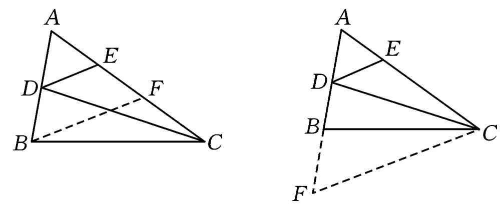
$\therefore\angle DEC=\angle CFB=120°$，$AF=BF$.

$\because DB+DE=EC$， $\therefore AF=BF=AB=EC$，

$\therefore DE=AE=CF$， $\therefore\triangle EDC\cong\triangle FCB$，$\angle FCB=\angle EDC$，

$\because\angle ADE=60°$，$\angle BDC=2\angle EDC$，

$\therefore\angle FCB=\angle EDC=40°$， $\therefore\angle ECD=20°$， $\therefore\angle DCB=20°$.



① ②

第14题图

方法二 如图②，延长AB至点F，使$AF=AC$，连接CF，则$\triangle ADE$，$\triangle AFC$均为等边三角形，

$\therefore AF=AC=CF$，$\angle A=\angle F$，

$\because DB+DE=EC$， $\therefore DF=EC=AB$， $\therefore AD=FB$，

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle FBC$， $\therefore\angle ACD=\angle FCB$，

$\because\angle ADE=60°$，$\angle BDC=2\angle EDC$， $\therefore\angle EDC=40°$，

$\therefore\angle FCB=\angle ACD=20°$， $\therefore\angle DCB=20°$.

第9讲 等腰直角三角形和直角三角形

例1 (1)$\because\angle BAC=90°$，$AB=AC$， $\therefore\angle B=\angle ACB=45°$.

$\because FC\perp BC$， $\therefore\angle BCF=90°$，

$\therefore\angle ACF=90°-45°=45°$， $\therefore\angle B=\angle ACF$.

$\because\angle BAC=90°$，$FA\perp AE$，

$\therefore\angle BAE+\angle CAE=90°$，$\angle CAF+\angle CAE=90°$，

$\therefore\angle BAE=\angle CAF$.

在$\triangle ABE$和$\triangle ACF$中，$\begin{cases}\angle BAE=\angle CAF,\\ AB=AC,\\ \angle B=\angle ACF,\end{cases}$

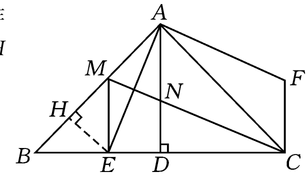
$\therefore\triangle ABE\cong\triangle ACF(\mathrm{ASA})$， $\therefore BE=CF$.

(2)①如图D9-1，过点E作$EH\perp AB$于点H，则$\triangle BEH$是等腰直角三角形，

$\therefore HE=BH$，$\angle BEH=45°$.

$\because AE$平分$\angle BAD$，$AD\perp BC$，

$\therefore DE=HE$，



图D9-1

$\therefore DE=BH=HE$.

$\because BM=2DE$， $\therefore HE=HM$，

$\therefore\triangle HEM$是等腰直角三角形，

$\therefore\angle MEH=45°$， $\therefore\angle BEM=45°+45°=90°$， $\therefore ME\perp BC$.

②由题意得$\angle CAE=45°+\frac{1}{2}\times45°=67.5°$，

$\therefore\angle CEA=180°-45°-67.5°=67.5°$，

$\therefore \angle CAE=\angle CEA=67.5^\circ$， $\therefore AC=CE$.

在 Rt$\triangle ACM$ 和 Rt$\triangle ECM$ 中，$\begin{cases}CM=CM,\\AC=CE,\end{cases}$

$\therefore$ Rt$\triangle ACM\cong$Rt$\triangle ECM$(HL)，

$\therefore \angle ACM=\angle ECM=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22.5^\circ$.

又$\because \angle DAE=\frac{1}{2}\times 45^\circ=22.5^\circ$， $\therefore \angle DAE=\angle ECM$.

$\because \angle BAC=90^\circ, AB=AC, AD\perp BC$， $\therefore AD=CD=BD$.

在$\triangle ADE$ 和$\triangle CDN$ 中，$\begin{cases}\angle DAE=\angle DCN,\\AD=CD,\\\angle ADE=\angle CDN,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADE\cong\triangle CDN$(ASA)，

$\therefore DE=DN$.

例 2 如图 D9-2①，过点 A 作 $AE\perp AC$，交 CD 的延长线于点 E，

$\because \angle 1+\angle 2=90^\circ, \angle 2+\angle 3=90^\circ$， $\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because \angle ABC+\angle ADC=360^\circ-90^\circ\times 2=180^\circ, \angle ADE+\angle ADC=180^\circ$， $\therefore \angle ABC=\angle ADE$.

$\because AB=AD$， $\therefore \triangle ABC\cong\triangle ADE$， $\therefore AC=AE=2$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

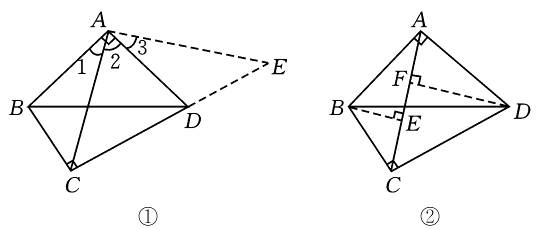


图 D9-2

当然此题还可以推出$\angle ACB=\angle ACD=45^\circ$，如图 D9-2②，过点 B 作 $BE\perp AC$ 于点 E，过点 D 作 $DF\perp AC$ 于点 F.

$\because S_{四边形ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BE+\frac{1}{2}AC\cdot DF$

$=\frac{1}{2}AC\cdot(BE+DF)=\frac{1}{2}AC\cdot AC$，

$\therefore AC=BE+DF$. 易证$\triangle ABE\cong\triangle DAF$.

$\therefore AF=BE, DF=AE$.

$\therefore AC=BE+DF=BE+AE=AE+CE$.

$\therefore CE=BE$. $\therefore \angle ACB=45^\circ$.

例 3 B **提示**：如图 D9-3，过点 C 作 $CF\perp AC$ 交 AM 的延长线于点 F. 易证$\triangle ABD\cong\triangle CAF$，得到 $AD=CF$， $\because AD=DC$，$\therefore DC=CF$，再证$\triangle DEC\cong\triangle FEC$. $\therefore DE=EF$， $\therefore BD=AF=AE+EF=AE+DE$，故①对；

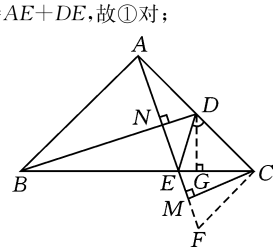


图 D9-3

先证$\triangle ABN\cong\triangle CAM$，得到 $BN=AM, AN=CM, BN-CM=AM-CM=AM-AN=MN$，故②对；

由于$\triangle ABD\cong\triangle CAF$， $\therefore \angle ADB=\angle CFE$，由于$\triangle DEC\cong\triangle FEC$， $\therefore \angle CFE=\angle CDE$， $\therefore \angle ADB=\angle CDE$，故③对；

对于④，假设$\angle BDE=45^\circ$，则$\angle ADB=\angle CDE=(180^\circ-45^\circ)\div 2=67.5^\circ$，从而$\angle ABD=90^\circ-67.5^\circ=22.5^\circ$，$\angle DBC=45^\circ-22.5^\circ=22.5^\circ$. 若过点 D 作 $DG\perp BC$ 于点 G，则 $DG=AD=DC$，与 Rt$\triangle DGC$中斜边大于直角边矛盾，故④错.

例 4 (1)$\because \angle QAE+\angle AQE=90^\circ, \angle QAE+\angle BAP=90^\circ$，

$\therefore \angle AQE=\angle PAB$.

$\because QE\perp AB, \angle ABC=90^\circ$， $\therefore \angle ABC=\angle QEA$.

$\because AP=AQ$， $\therefore \triangle PAB\cong\triangle AQE$.

(2)$\because \triangle PAB\cong\triangle AQE$， $\therefore QE=AB$.

$\because AB=BC$， $\therefore QE=BC$.

$\because \angle QEB=\angle ABC=90^\circ, \angle QME=\angle CMB$，

$\therefore \triangle QEM\cong\triangle CBM$. $\therefore EM=MB$.

$\because AB=BC, AE=BP$，

$\therefore AB-AE=BC-BP$，即 $EB=PC$.

$\therefore 2MB=PC$. $\therefore \frac{PC}{MB}=2$.

(3)过点 A 作 $AG\perp AD$ 交 QF 于点 G. $\because \angle QAP=\angle GAD$，

$\therefore \angle QAP-\angle GAP=\angle GAD-\angle GAP$， 即$\angle QAG=\angle PAD$.

$\because AQ\perp QF, AP\perp PD$， $\therefore \angle AQG=\angle APD$. $\because AQ=AP$，

$\therefore \triangle AQG\cong\triangle APD$， $\therefore DP=QG, AG=AD$.

$\because \angle BAC=45^\circ$， $\therefore \angle GAF=\angle GAC-\angle BAC=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，

$\therefore \angle BAC=\angle GAF$. $\because AF=AF$， $\therefore \triangle GAF\cong\triangle DAF$，

$\therefore GF=DF$， $\therefore \frac{QF-DP}{DF}=\frac{QF-QG}{DF}=\frac{GF}{DF}=1$.

例 5 (1)$\because A(-6,0), B(0,6)$， $\therefore OA=OB=6$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$.

(2)过点 E 作 $EG\perp OA$ 的延长线于点 G，则$\angle EGD=\angle DOB=90^\circ$.

$\because \angle EDG+\angle BDO=90^\circ, \angle EDG+\angle DEG=90^\circ$，

$\therefore \angle BDO=\angle DEG$.

又$\because ED=BD$， $\therefore \triangle EGD\cong\triangle DOB$，

$\therefore DG=OB=6, DO=EG$.

设 $DA=a$，则 $DO=EG=6+a$，

$\because AG=GD+DA=6+a$， $\therefore EG=GA$，

$\therefore \angle EAG=45^\circ$， $\therefore \angle OAF=\angle EAG=45^\circ$.

$\because \angle AOF=90^\circ$， $\therefore \angle OAF=\angle OFA$，

$\therefore OF=OA=6$， $\therefore F(0,-6)$.

(3)过点 O 作 AF 的垂线交 AF 于点 G，交 AE 于点 O'. 过点 O' 作 x 轴的垂线，交 AF 于点 M，交 x 轴于点 N. 此时点 M, N 即为所求. 若在 AF 上任取一点 M'(异于点 M)，显然 $OM'=M'O'$，点 M' 到 x 轴的最短距离为过点 M' 作 x 轴的垂线，有 $N'M'+M'O=N'M'+M'O'$，显然有 $N'M'+M'O'>NO'$. 所以 NO'的值最小.

[变式题组]

1. $8\sqrt{2}$. **提示**：$\because \triangle ABD\cong\triangle EBD, AB=AC, DE=CE$，

$\therefore \triangle DEC$ 的周长$=DE+CE+DC=AD+DC+CE=AC+CE=AB+CE=BE+CE=BC$.

2. $(-1,1)$或$(3,3)$. **提示**：有两种情形，如图 D9-4 所示. 以 AB 为正方形的一条对角线，作一个正方形 AC_1BC_2，则点 C_1 和 C_2 即为所求. 其具体坐标可利用证明全等三角形的方法来求解.

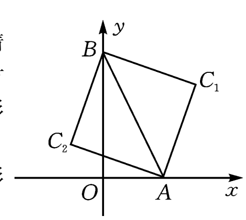


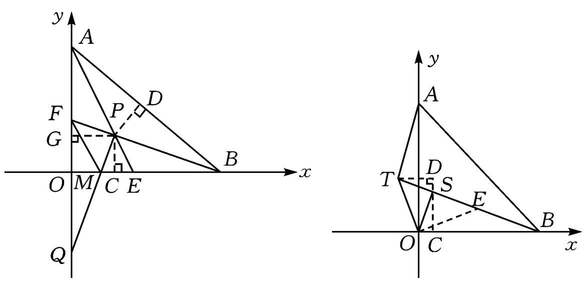
图 D9-4

3. A **提示**：设 AD 与 CE 相交于点

G,证$\triangle ACG\cong\triangle AEG$,
$\therefore AC=AE$,故①对.
连接DF,DE,易证$\triangle CAD\cong\triangle EAD$.
$\therefore CD=DE$, $DE\perp AB$. $\because\angle ABC=45°$, $\therefore\angle BDE=\angle ABC=45°$. $\therefore DE=EB$, $\therefore CD=BE$,故②对.
$\because CF=BE$, $\therefore CF=CD$,故Rt$\triangle CFD$为等腰直角三角形,易证$\triangle CFD\cong\triangle EBD$, $\therefore FD=DB$, $\therefore\angle DBF=\angle DFB=\frac{1}{2}\times45°=22.5°$. 又$\because\angle BCE=\angle CAD=22.5°$, $\therefore\angle BCE=\angle CBF$. $\therefore CP=PB$. 同理可得$CP=PF$, $\therefore PF=PB$.
$\because FD=DB$, $\therefore PD\perp BF$,故③④均对.

4. (1)$\because\angle ACB=90°$,$\angle A=40°$,
$\therefore\angle ABC=90°-40°=50°$.
$\therefore\angle CBD=180°-50°=130°$.
又BE是$\angle CBD$的平分线,
$\therefore\angle CBE=\frac{1}{2}\angle CBD=\frac{1}{2}\times130°=65°$.
(2)在Rt$\triangle CBE$中,$\angle CBE=65°$,
$\therefore\angle CEB=90°-65°=25°$.
又$DF\parallel BE$, $\therefore\angle CEB=\angle F=25°$.
即$\angle F=25°$.

5. (1)135°.
(2)如图D9-5①,过点P作$PD\perp AB$于点D,$PG\perp OA$于点G,$PC\perp OB$于点C.
$\because AP$平分$\angle OAB$,
$\therefore PD=PG$,同理$PC=PD$.
$\therefore PC=PG$.
$\because\angle FPG+\angle GPM=90°$,
$\angle GPM+\angle MPC=360°-90°\times3=90°$,
$\therefore\angle FPG=\angle MPC$,
$\therefore\triangle FPG\cong\triangle MPC$. $\therefore FP=PM$,
又$FP\perp PM$, $\therefore\angle MFP=45°$.
$\because\angle APF=180°-\angle APB=180°-135°=45°$,
$\therefore\angle MFP=\angle APF$, $\therefore FM\parallel AP$,
$\therefore\angle OFM=\angle OAE=\frac{1}{2}\angle OAB$, $\therefore\frac{\angle OFM}{\angle OAB}=\frac{1}{2}$.



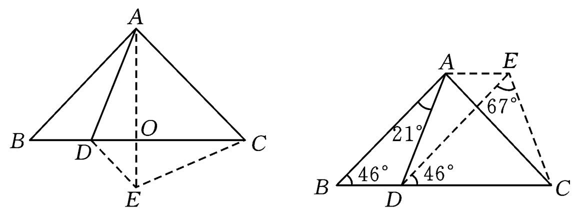
① ②
图 D9-5

(3)如图D9-5②,过点O作$OE\perp OT$交TB于点E,易证$\triangle ATO\cong\triangle BEO$. $\therefore TO=OE$.
又$\because TO\perp OE$, $\therefore\angle OTE=45°$.
$\because OS\perp TE$, $\therefore\triangle TOS$为等腰直角三角形.
过点S作$SC\perp OB$于点C,过点T作$TD\perp CS$的延长线于点D.
易证$\triangle TDS\cong\triangle SCO$,设$TD=SC=b$,$DS=OC=a$.
则$\begin{cases}b-a=2\sqrt{2}-2,\\b+a=2,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=2-\sqrt{2},\\b=\sqrt{2},\end{cases}$ $\therefore S$的坐标为$(2-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

[能力平台]

1. D 提示:$\because AD$,BE分别为$\angle BAC$,$\angle ABC$的平分线,
$\therefore\angle DPB=\frac{1}{2}\angle CAB+\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times90°=45°$,
$\therefore\angle APB=180°-\angle BPD=180°-45°=135°$,故①对.
$\because PF\perp AD$, $\therefore\angle F=\frac{1}{2}\angle BAC$,易证$\triangle ABP\cong\triangle FBP$(AAS),
$\therefore AB=BF$,故②对.
由②可知$AP=FP$, $\therefore\triangle APH\cong\triangle FPD$(ASA),
$\therefore PH=PD$,故③对.
过点P作$PM\perp CD$于点M,$PN\perp AH$于点N,
又$\because\triangle APH\cong\triangle FPD$,
$\therefore PM=PN$, $\therefore$点P在$\angle ACB$的平分线上,故④对.

2. **方法一** 如图①,作$\triangle ABD$关于AD的轴对称图形$\triangle AED$,
则$\angle EAD=21°$,$AE=AB$,$DE=BD$,
又$\angle ADC=21°+46°=67°$,故$\angle ADE=\angle ADB=180°-67°=113°$,$\angle CDE=113°-67°=46°$.
连接CE,可证$\triangle CDE\cong\triangle ABD\cong\triangle AED$,$\angle ODE=\angle OED=46°$,得$OD=OE$,又$DC=AE$,则$AO=CO$,$\angle OCA=\angle OAC$,$\angle COE=2\angle ACO$,$\angle COE=2\times46°=92°=2\angle ACO$.
从而$\angle ACO=46°=\angle OAC$,
所以,$\angle DAC=\angle DAE+\angle EAC=67°$.



① ②
第 2 题图

方法二 如图②,过点A作$AE\parallel BC$,过点D作$DE\parallel AB$,连接EC.
$\because\angle EDC=\angle ABC=46°$,$DE=AB=CD$,
$\therefore\angle DCE=\angle CED=\frac{1}{2}\times(180°-46°)=67°$,
$\because\angle ADC=\angle ABC+\angle BAD=46°+21°=67°$,
$\therefore\angle ADC=\angle DCE$, $\therefore AD=EC$.
$\therefore$梯形$ADCE$为等腰梯形,
$\therefore AC=DE$(等腰梯形的对角线相等),
$\therefore AC=AB=CD$. $\therefore\angle DAC=\angle ADC=67°$.

3. (1)$\because\angle CGB=90°+\angle ECD$, $\angle CEA=90°+\angle ECD$,
$\therefore\angle CGB=\angle CEA$, 易证$\angle A=\angle BCG=45°$.
又$\because AC=CB$, $\therefore\triangle AEC\cong\triangle CGB$, $\therefore AE=CG$.
(2)$BE=CM$.证明如下:
先证$\triangle AHC\cong\triangle CFB$,得到$CH=BF$,
再证$\angle HCM=\angle FBE$,从而$\triangle BEF\cong\triangle CMH$,
$\therefore BE=CM$.

4. (1)先证$\triangle ACH\cong\triangle BCD$,得出$\angle CDB=\angle H$,$CH=CD$.
$\because CF\parallel AB$, $\therefore\angle HCF=45°=\angle DCF$.
又$CF=CF$, $\therefore\triangle HCF\cong\triangle DCF$,
$\therefore\angle CDF=\angle H$, $\therefore\angle CDB=\angle CDF$.
(2)先证$\triangle ACH\cong\triangle BCD$,得出$\angle CDB=\angle CHA$,$CH=CD$,
再证$\angle DCF=\angle HCF=45°$,得出$\triangle HCF\cong\triangle DCF$,
$\therefore\angle CDF=\angle CHF$.

$\because \angle CHA+\angle CHF=180°$， $\therefore \angle CDB+\angle CHF=180°$.

5. (1)$AM\perp DE$，$AM=\frac{1}{2}DE$.

(2)结论不变. 理由如下：

延长 AM 至点 F，使 $MF=AM$，连接 BF，延长 MA 交 DE 于点 N.

先证$\triangle ACM\cong\triangle FBM$，得出 $BF\parallel AC$，$BF=AC$.

再证$\angle FBA=180°-\angle BAC$

$=360°-90°\times2-\angle BAC=\angle DAE$，

得出$\triangle DAE\cong\triangle ABF$，

$\therefore DE=AF=2AM$，$\angle ADE=\angle BAF$.

$\because \angle BAF+\angle DAN=180°-90°=90°$，

$\therefore \angle ADE+\angle DAN=90°$， $\therefore AM\perp DE$.

6. D　**提示：**延长 AM，BD 相交于点 N，

则$\triangle ABD\cong\triangle AND$. $\therefore AB=AN$，$DN=DB$，

$\triangle ACE\cong\triangle BCN$， $\therefore CE=CN$.

$\therefore AC+CE=AC+CN=AN=AB$，故①对.

又$\because BD=DN$， $\therefore BD=\frac{1}{2}BN=\frac{1}{2}AE$，故②对.

过点 C 作 $CF\perp CD$ 交 AE 于点 F，易证$\triangle ACF\cong\triangle BCD$.

$\therefore CF=CD$， $\therefore \angle CDF=45°$， 故③对.

易证$\triangle CDM\cong\triangle NDM$， $\therefore CM=MN$，

$\therefore \frac{AC+AB}{AM}=\frac{AM-CM+AM+CM}{AM}=2$，故④对.

7. A　**提示：**过点 E 作 $EF\perp CB$ 于点 F，则$\triangle ACD\cong\triangle DFE$.

设 $CD=x=EF$，则 $BE=2x$，$BF=\sqrt{3}x$，$DF=AC=1$.

由 $CD+DF+BF=BC$ 得 $x+1+\sqrt{3}x=\sqrt{3}$，

$\therefore x=2-\sqrt{3}$，即 $BE=2x=4-2\sqrt{3}$.

8. (1)依题意有$\begin{cases}\sqrt{a-b}=0,\\ \sqrt{a^2-144}=0,\\ a+12\neq0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=12,\\ b=12.\end{cases}$

$\because OB=OA=12$， $\therefore \angle OBA=\angle OAB$.

(2)如图①，过点 B 作 $BC\perp OF$ 于点 C，$AD\perp OF$ 于点 D，

$\because OA=AF$，

$\therefore$设$\angle AOF=\angle OFA=\alpha$，则$\angle FAx=2\alpha$，

$\therefore \angle NAF=\frac{1}{2}\angle MAF=(90°-2\alpha)\times\frac{1}{2}=45°-\alpha$，

$\therefore \angle DNA=45°-\alpha+\alpha=45°$.

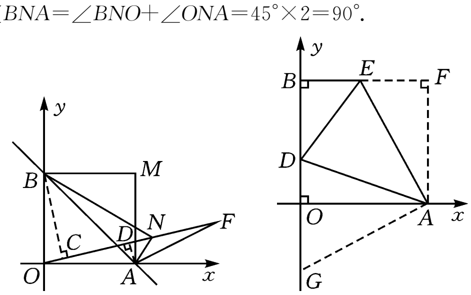
$\therefore$设 $DN=DA=c$，易证$\triangle BOC\cong\triangle OAD$.

$\therefore$设 $BC=OD=d$，则 $CN=CD+DN=(d-c)+c=d=BC$.

$\therefore \angle BNO=45°$.

又$\angle ONA=45°$，

$\therefore \angle BNA=\angle BNO+\angle ONA=45°\times2=90°$.



①　　②

第 8 题图

(3)如图②，过点 A 作 $AF\perp BE$ 交 BE 的延长线于点 F.

在 BO 的延长线上截取 $OG=EF$.

易证$\triangle EAF\cong\triangle GAO$，

再证$\triangle DEA\cong\triangle DGA$，

设 $BE=x$，则 $EF=12-x$.

$\because S_{正方形AOBF}=S_{\triangle DGA}+S_{\triangle DEA}+S_{\triangle BDE}$，

$\therefore \frac{1}{2}\times(4+12-x)\times12\times2+\frac{1}{2}\times8x=12\times12$，解得 $x=6$.

$\therefore$线段 EB 的长度为 6.

第 10 讲　整式的乘法

例 1　D　**提示：**因为 $a^3+a^3=2a^3$，所以选项 A 错误；因为 $3a-a=2a$，所以选项 B 错误；因为$(a^3)^2=a^6$，所以选项 C 错误；因为 $a\cdot a^2=a^3$，所以选项 D 正确.

例 2　(1)2.　(2)64.　**提示：**(1)$\because 3^{2m+1}+3^{2m}=324$，即 $3^{2m}\times3+3^{2m}=324$. $\therefore 3^{2m}\times(3+1)=324$， 故 $3^{2m}=81=3^4$，

$\therefore 2m=4$，$m=2$.

(2)$\because 8^x\cdot16^y=(2^3)^x\cdot(2^4)^y=2^{3x}\cdot2^{4y}=2^{3x+4y}$，而 $3x+4y-6=0$，

$\therefore 8^x\cdot16^y=2^6=64$.

例 3　$S_{阴影}=\frac{1}{2}(AE+CF)\cdot AB=\frac{1}{2}(3x-1+2x+2)\cdot(x+3)$

$=\frac{1}{2}(5x+1)(x+3)=\frac{1}{2}(5x^2+15x+x+3)$

$=\frac{1}{2}(5x^2+16x+3)$

$=\frac{5}{2}x^2+8x+\frac{3}{2}$.

例 4　$\because x^2+x-1=0$，

$\therefore 2\,002x^3+2\,001x^2-2\,003x-2\,019$

$=(2\,002x^3+2\,002x^2-2\,002x)-x^2-x-2\,019$

$=(2\,002x^3+2\,002x^2-2\,002x)-(x^2+x-1)-2\,020$

$=2\,002x(x^2+x-1)-(x^2+x-1)-2\,020$

$=-2\,020$.

例 5　$\because (a^2+b^2)xy+ab(x^2+y^2)=a^2xy+b^2xy+abx^2+aby^2$

$=(a^2xy+abx^2)+(b^2xy+aby^2)=ax(ay+bx)+by(bx+ay)$

$=(ay+bx)(ax+by)$，

又$\because a+b=x+y=3$， $\therefore (a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by=9$.

$\because ax+by=7$， $\therefore bx+ay=2$. $\therefore$原式$=2\times7=14$.

[变式题组]

1. D

2. (1)$(-a)^{n+1}$或$(-1)^{n+1}a^{n+1}$.　(2)3^{n+3}.　(3)$-(x+y)^7$.

(4)$(a-b)^7$ 或$-(b-a)^7$.　(5)$-x^m$.　(6)x^5.

3. (1)$-p^{18}$.　(2)p^{18}.　(3)$-(m-n)^{17}$或$(n-m)^{17}$.

4. $\because a^m=5$，$a^n=2$，

$\therefore a^{3m+2n}=a^{3m}\cdot a^{2n}=(a^m)^3\cdot(a^n)^2=5^3\times2^2=500$.

5. $\because 3^m=a$，$3^n=b$，

$\therefore 3^{m+n}=3^m\cdot3^n=ab$.

$3^{2m+3n}=3^{2m}\cdot3^{3n}=(3^m)^2\cdot(3^n)^3=a^2b^3$.

6. (1)$\because 9^{n+1}-3^{2n}=72$，

$\therefore (3^2)^{n+1}-3^{2n}=72$，

$\therefore 3^{2n+2}-3^{2n}=72$，

$\therefore 3^{2n}\times3^2-3^{2n}=72$，

$\therefore 3^{2n}\times8=72$， $\therefore 3^{2n}=9=3^2$， $\therefore n=1$.

(2)8.　**提示：**$4^x\cdot32^y=(2^2)^x\cdot(2^5)^y=2^{2x}\cdot2^{5y}=2^{2x+5y}$.

$\because 2x+5y-3=0$， $\therefore 2x+5y=3$， $\therefore 4^x\cdot32^y=2^3=8$.

7. (1)原式$=-6x^3y^2+8x^2y^3$.　(2)原式$=a^3-8b^3$.

(3)原式$=m^5+1$.　(4)原式$=-2ab$.

8. C　提示:平行四边形的面积$=(2a)^2-(a+2)^2=4a^2-(a+2)\cdot(a+2)=4a^2-a^2-4a-4=3a^2-4a-4$.

9. A　提示:由$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\cdots,\frac{1}{a},\frac{1}{90},\frac{1}{b},\cdots$观察可知,$\frac{1}{1\times2},\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},\frac{1}{4\times5},\cdots,\frac{1}{8\times9},\frac{1}{9\times10},\frac{1}{10\times11},\cdots$,即$a=8\times9=72,b=10\times11=110$,　$\therefore a+b=72+110=182$.

10. C　提示:剩余空地的长、宽分别为$(x-1)$ m和$(x-2)$ m,则面积为$(x-1)(x-2)\ \mathrm{m}^2$.

11. 9.　提示:$\because x^2+x+1=0$,　$\therefore x^3-x^2-x+7=x^3+x^2+x-2x^2-2x-2+9=x(x^2+x+1)-2(x^2+x+1)+9=9$.

12. 180.　提示:$\because x^2-8x-3=0$,　$\therefore x^2-8x=3$,　$\therefore(x-1)\cdot(x-3)(x-5)(x-7)=[(x-1)(x-7)][(x-3)(x-5)]=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)=(3+7)(3+15)=10\times18=180$.

13. B　提示:$\because 25^x=2\ 000$,　$\therefore(25^x)^{\frac{1}{x}}=2\ 000^{\frac{1}{x}}$,

即$2\ 000^{\frac{1}{x}}=25$.　①

同理$2\ 000^{\frac{1}{y}}=80$.　②

①×②得$2\ 000^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=25\times80=2\ 000$,　$\therefore\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$.

14. 设$a^5=b^4=m^{20},c^3=d^2=n^6$($m,n$为自然数),

则$a=m^4,b=m^5,c=n^2,d=n^3$.

由$c-a=19$得$(n+m^2)(n-m^2)=19$.

$\because$19为质数,且$n+m^2,n-m^2$均为自然数,$n+m^2>n-m^2$,

$\therefore\begin{cases}n+m^2=19,\\n-m^2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=3,\\n=10.\end{cases}$

$\therefore d-b=10^3-3^5=1\ 000-243=757$.

[能力平台]

1. A　提示:原式$=4m^2\cdot(-m^3)+4m^2\times3m^3=-4m^5+12m^5=8m^5$.

2. B　提示:$\because(a^m\cdot a^{2n})\cdot(b^{n+2}\cdot b^{2m})=a^5b^3$,

$\therefore a^{m+2n}\cdot b^{2m+n+2}=a^5\cdot b^3$,

即$\begin{cases}m+2n=5,\\2m+n+2=3,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}m=-1,\\n=3,\end{cases}$　$\therefore m+n=2$.

3. B　提示:$\because 2^a\cdot2^c=3\times12=36,(2^b)^2=6^2=36$,即$2^a\cdot2^c=(2^b)^2$,故$2^{a+c}=2^{2b}$,即$a+c=2b$.

4. C　提示:原式$=(x^2y^2-4-2x^2y^2+4)\div\frac{1}{2}xy$

$=-x^2y^2\div\frac{1}{2}xy$

$=-2xy$.

又$(x+y)^2=3,(x-y)^2=7$.

$\therefore 4xy=-4$,　$\therefore xy=-1$,

即原式$=-2xy=-2\times(-1)=2$.

5. (1)a^2-12.　(2)$7m+4$.　(3)-8.　(4)-4.

6. (1)7.　提示:$\because(-2ax^by^{2c})(3x^{b-1}y)=-6ax^{2b-1}y^{2c+1}=12x^{11}y^7$,

$\therefore\begin{cases}-6a=12,\\2b-1=11,\\2c+1=7,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}a=-2,\\b=6,\\c=3,\end{cases}$　$\therefore a+b+c=7$.

(2)36.　提示:$\because(a^mb^2\cdot ab^n)^5=a^{5m+5}b^{5n+10}=a^{15}b^{20}$,且$a,b$互质,

$\therefore\begin{cases}5m+5=15,\\5n+10=20,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}m=2,\\n=2,\end{cases}$　$\therefore(3m)^n=36$.

(3)7.　提示:$\because 2^{x+3}\cdot3^{x+3}=36^{x-2}$,

$\therefore(2\times3)^{x+3}=(6^2)^{x-2}$,　$\therefore 6^{x+3}=6^{2x-4}$,　$\therefore x+3=2x-4,x=7$.

(4)4.　提示:$\because(x^2+mx+8)(x^2-3x+n)$

$=x^4-3x^3+nx^2+mx^3-3mx^2+mnx+8x^2-24x+8n$

$=x^4+(m-3)x^3+(n-3m+8)x^2+(mn-24)x+8n$,

且展开式中不含x^3项和x^2项,

$\therefore\begin{cases}m-3=0,\\n-3m+8=0,\end{cases}$　$\therefore\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$　$\therefore m+n=4$.

7. 原式$=15a^3b-5a^2b^2+4a^2b^2-12a^3b-9a^2b^2$

$=3a^3b-10a^2b^2$.

当$a=-2,b=3$时,原式$=-432$.

8. 原式$=2(x-1)^2=2(x^2-2x+1)$.

当$x^2-2x-1=0$时,原式$=4$.

9. (1)$\because x^2+x-1=0$,即$x^2=1-x$,

$\therefore x^3+2x^2+3=x^2\cdot x+2x^2+3$

$=(1-x)x+2(1-x)+3$

$=-x^2-x+5$

$=-(x^2+x-1)+4$

$=4$.

(2)$\because 1+x+x^2+x^3=0$,

$\therefore x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$

$=x(1+x+x^2+x^3)+x^5(1+x+x^2+x^3)$

$=0$

10. **方法一**　用赋值法解.

设$x^3+ax^2+1=(x-1)A$,其中A为多项式,

令$x=1$,代入上式,得$1^3+a+1=0$,　$\therefore a=-2$.

方法二　用待定系数法解.

设$x^3+ax^2+1=(x-1)(x^2-mx-1)$,即

$x^3+ax^2+1=x^3-(m+1)x^2+(m-1)x+1$.

对比得$m-1=0,a=-(m+1)$,

$\therefore m=1$,　$\therefore a=-2$.

11. 方程两边同乘以8,得

$2^{x+3}+2^{y+3}+2^{z+3}=37$.

$\because x>y>z$,要使上式左边为奇数,只有$2^{z+3}=1$,

即$z=-3$,则$2^{x+3}+2^{y+3}=36$,

即$2^{x+1}+2^{y+1}=9$.

要使上式左边为奇数,只有$2^{y+1}=1$,即$y=-1$.

从而有$2^{x+1}=8$,即$x=2$,

故$x=2,y=-1,z=-3$,　$\therefore xyz=6$.

12. E　提示:当$n\geqslant0$时,$4\ 000\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n=2^5\times5^3\times\frac{2^n}{5^n}$是整数,则$n=0,1,2,3$,当$n<0$时,$4\ 000\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^n=2^5\times5^3\times\frac{5^{-n}}{2^{-n}}$是整数,则$n=-1,-2,-3,-4,-5$,因此$n$共有9个取值.

13. (1)-5.　提示:$\because a^{3m}=2,b^{3n}=3$,

$\therefore(a^{2m})^3+(b^n)^3-a^{2m}\cdot b^{3n}\cdot a^{4m}=(a^{3m})^2+b^{3n}-(a^{3m})^2b^{3n}$

$=2^2+3-2^2\times3=4+3-12=-5$.

(2)9.　提示:$\because x^2-px+q=x^2-x-2$对一切实数$x$均成立,　$\therefore p=1,q=-2$,　$\therefore p^2-4q=9$.

(3)$-\frac{7}{8}$.　提示:$\because(x+2y+m)(2x-y+n)=2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6$,　$\therefore 2x^2+3xy-2y^2+(2m+n)x+(2n-m)y+mn=2x^2+3xy-2y^2-x+8y-6$.

$\therefore\begin{cases}2m+n=-1,\\2n-m=8,\\mn=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-2,\\n=3.\end{cases}$ $\therefore\dfrac{m^3+1}{n^2-1}=-\dfrac{7}{8}$.

(4)0. **提示**:$\because 1+x+x^2+x^3=0$,

$\therefore x+x^2+x^3+\cdots+x^{2\,020}$

$=x(1+x+x^2+x^3)+\cdots+x^{2\,017}(1+x+x^2+x^3)$

$=0+\cdots+0$

$=0$.

14. 4. **提示**:由已知$\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{1-b}{1+b}$,得$(1+a)(1+b)=(1-a)(1-b)$,

即 $1+a+b+ab=1-a-b+ab$,

$\therefore a+b=0$,即 $a=-b$.

故$(2+a)(2+b)+b^2=(2-b)(2+b)+b^2=4-b^2+b^2=4$.

15. 890. **提示**:由题意得$\dfrac{n^3+100}{n+10}$为整数,

且$\dfrac{n^3+100}{n+10}=\dfrac{(n+10)(n^2-10n+100)-900}{n+10}$

$=n^2-10n+100-\dfrac{900}{n+10}$,

$\therefore$900 能被 $n+10$ 整除, $\therefore n$ 的最大值为 890.

16. $\because 3a^2-8b+c=0$,

$\therefore c=8b-3a^2$,代入 $a+b^2-2c-2=0$,

得 $a+b^2-2(8b-3a^2)-2=0$.

$\therefore(b-8)^2=66-6a^2-a$.

$\therefore 66-6a^2-a$ 为完全平方数, $\therefore a=3$.

$\therefore b=5$ 或 11,$c=13$ 或 61.

$\therefore abc$ 的最大值为 $3\times11\times61=2\,013$.

第 11 讲 乘法公式(一)

例 1 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

例 2 (1)原式$=(-x)^2-(2y)^2=x^2-4y^2$.

(2)原式$=(100-2)\times(100+2)\times10\,004=(10\,000-4)\times(10\,000+4)$

$=10\,000^2-4^2=100\,000\,000-16=99\,999\,984$.

例 3 (1)原式$=(-4m)^2+2\cdot(-4m)\cdot n+n^2=16m^2-8mn+n^2$.

(2)原式$=[-(2x+3)]^2=(2x+3)^2=(2x)^2+2\cdot2x\cdot3+3^2$

$=4x^2+12x+9$.

(3)原式$=x^2+10x+25-(x^2-5x+6)=15x+19$.

(4)原式$=(100-2)^2=100^2-2\times100\times2+2^2$

$=10\,000-400+4=9604$.

例 4 (1)原式$=(1\,990^2-1\,989^2)+(1\,988^2-1\,987^2)+\cdots+(2^2-1^2)$

$=(1\,990+1\,989)(1\,990-1\,989)+(1\,988+1\,987)(1\,988-1\,987)+\cdots+(2+1)(2-1)$

$=1\,990+1\,989+1\,988+1\,987+\cdots+2+1$

$=\dfrac{1}{2}(1\,990+1)\times1\,990$

$=\dfrac{1}{2}\times1\,991\times1\,990$

$=1\,981\,045$.

(2)原式$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{1\,999}\right)\left(1+\dfrac{1}{1\,999}\right)\left(1-\dfrac{1}{2\,000}\right)\left(1+\dfrac{1}{2\,000}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{1\,998}{1\,999}\times\dfrac{2\,000}{1\,999}\times\dfrac{1\,999}{2\,000}\times\dfrac{2\,001}{2\,000}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\,001}{2\,000}=\dfrac{2\,001}{4\,000}$.

例 5 设 $m=2\,010-a$,$n=2\,008-a$,即有 $mn=2\,009$,$m-n=2$.

故 $m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=2^2+2\times2\,009=4\,022$.

[变式题组]

1. C **提示**:几何图形的面积 $S=(a+b)^2=a^2+b^2+ab+ab=a^2+2ab+b^2$.

2. (1)$S_1=a^2-b^2$,$S_2=\dfrac{1}{2}(2a+2b)(a-b)=(a+b)(a-b)$.

(2)$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

3. (1)原式$=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$.

(2)原式$=(-2y)^2-x^2=4y^2-x^2$.

(3)原式$=(-b)^2-(2a)^2-[(-a)^2-(2b)^2]$

$=b^2-4a^2-a^2+4b^2$

$=5b^2-5a^2$.

(4)原式$=123^2-(123-1)(123+1)=123^2-(123^2-1^2)=1$.

(5)原式$=y^2-2^2-(y^2+4y-5)=-4y+1$.

(6)原式$=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$

$=\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)$

$=x^4-\dfrac{1}{16}$.

4. (1)原式$=[-(a+b)]^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(2)原式$=9y^2+12xy+4x^2$.

(3)原式$=9a^2+12ab+4b^2-(9a^2-12ab+4b^2)=24ab$.

(4)原式$=2x^2+4x-x-2-x^2+4x-4-x^2-4x-4=3x-10$.

(5)原式$=(2-0.001)^2=4-2\times2\times0.001+0.001^2$

$=4-0.004+0.000\,001=3.996\,001$.

5. A **提示**:原式$=(2-1)\times(2+1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times\cdots\times(2^{2n}+1)$

$=(2^2-1)\times(2^2+1)\times(2^4+1)\times\cdots\times(2^{2n}+1)$

$=(2^4-1)\times(2^4+1)\times\cdots\times(2^{2n}+1)=\cdots$

$=(2^{2n}-1)\times(2^{2n}+1)=(2^{2n})^2-1=2^{4n}-1$.

6. B **提示**:原式$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{10}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{10}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\cdots\times\dfrac{9}{10}\times\dfrac{11}{10}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{11}{10}=\dfrac{11}{20}$.

7. 原式$=(7-1)\times(7+1)\times(7^2+1)\times(7^4+1)\times(7^8+1)+1=7^{16}-1+1=7^{16}$.

8. -3^9. **提示**:当 $x=1$ 时,$(2\times1+1)^9=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=3^9$.

当 $x=-1$ 时,$[2\times(-1)+1]^9=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_9=-1$.

$\therefore(a_0+a_2+a_4+a_6+a_8)^2-(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)^2$

$=(a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9)(a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5+a_6-a_7+a_8-a_9)=3^9\times(-1)=-3^9$.

9. $\because a\neq0$,由 $a^2+1=3a$ 得 $a+\dfrac{1}{a}=3$,

$\therefore a^2+\dfrac{1}{a^2}=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2-2a\cdot\dfrac{1}{a}=3^2-2=7$.

10. $2^8+2^{10}+2^n=(2^4)^2+(2^5)^2+(2^{\frac{n}{2}})^2$,

(1)若原式可写成$(2^4+2^5)^2$ 的形式,展开后比较次数得 $n=10$.

(2)若原式可写成$(2^4+2^{\frac{n}{2}})^2$ 的形式,展开后比较次数得 $n=10$.

(3)若原式可写成$(2^5+2^{\frac{n}{2}})^2$ 的形式,展开后比较次数得 $n=4$.

综上所述,$n=4$ 或 10.

［能力平台］

1. B　提示：三式相加得$(a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2=0$，

$\therefore a=3, b=-1, c=1$，即$a+b+c=3-1+1=3$.

2. A　提示：原式$=2\,020^2-(2\,020-1)(2020+1)$

$=2\,020^2-2\,020^2+1$

$=1$.

3. D　提示：由$(y+a)^2=y^2-8y+b$知$y^2+2ay+a^2=y^2-8y+b$.

$\therefore 2a=-8, a^2=b$，

$\therefore a=-4, b=16$.

4. 2.　提示：由$(x+y)(x-y)=64$知，$x+y>x-y>0$且$x+y$与$x-y$的奇偶性相同，得$\begin{cases}x+y=32,\\x-y=2\end{cases}$或$\begin{cases}x+y=16,\\x-y=4,\end{cases}$即$\begin{cases}x=17,\\y=15\end{cases}$或$\begin{cases}x=10,\\y=6.\end{cases}$

5. 1.　提示：$\because x^2+2x+m$是完全平方式，$\therefore x^2+2x+m=x^2+2x+1+m-1=(x+1)^2+m-1$，$\therefore m-1=0$，$\therefore m=1$.

6. (1)原式$=x^2+y^2-x^2=y^2$.

(2)原式$=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$.

(3)原式$=a^2-144b^2-(4b^2-9a^2)=a^2-144b^2-4b^2+9a^2$

$=10a^2-148b^2$.

7. (1)原式$=2x^2+8x-x-4-x^2+6x-9-x^2-6x-9=7x-22$.

(2)原式$=4x^2-9-(4x^2-4x+1)=4x-10$.

8. $\because x^2+2y^2-2xy-2y+1=0$，

$\therefore x^2+y^2-2xy+y^2-2y+1=0$，即$(x-y)^2+(y-1)^2=0$，

$\therefore\begin{cases}x-y=0,\\y-1=0,\end{cases}$　$\therefore x=y=1$，　$\therefore x+y=2$.

9. (1)原式$=4x^3-8x^2-4x+x(25-4x^2)$

$=4x^3-8x^2-4x+25x-4x^3$

$=-8x^2+21x$.

当$x=-1$时，

原式$=-8\times(-1)^2+21\times(-1)=-8-21=-29$.

(2)原式$=x^2-1-x^2+x=x-1$.

当$x=\frac{1}{2}$时，原式$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

(3)原式$=x^4+4x^2+4-2(x^2-4)(x^2+4)-(x^4-4x^2+4)$

$=x^4+4x^2+4-2x^4+32-x^4+4x^2-4$

$=-2x^4+8x^2+32$.

当$x=-\frac{1}{2}$时，

原式$=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^4+8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+32=\frac{271}{8}$.

10. (1)$\because 1-6y+9y^2+4y^2-4y+1=13y^2-13$，$\therefore 2-10y=-13$，

解得$y=\frac{3}{2}$.

(2)$6x+7(4x^2-9)-28\left(x^2-\frac{1}{4}\right)\geqslant 4$，$\therefore 6x+28x^2-63-28x^2+7\geqslant 4$，$\therefore 6x\geqslant 4-7+63$，$\therefore 6x\geqslant 60$，$\therefore x\geqslant 10$.

11. (1)$\because a-b=9, ab=5$，

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=9^2+2\times 5=91$.

(2)$\because a+b=8, ab=12$，

$\therefore (a-b)^2=(a+b)^2-4ab=8^2-4\times 12=64-48=16$.

12. B　提示：$\because M=(x^2+1)^2-4x^2=x^4-2x^2+1$，

又$\because N=(x^2+1)^2-x^2=x^4+2x^2+1-x^2=x^4+x^2+1$，

$\therefore M-N=(x^4-2x^2+1)-(x^4+x^2+1)=-3x^2$.

$\because x\neq 0$，　$\therefore -3x^2<0$，即$M<N$.

13. 4 054.　提示：设$2\,026-a=m$，$2\,024-a=n$，则$mn=2\,025$，$m-n=2$.　$\therefore m^2+n^2=(m-n)^2+2mn=4+4\,050=4\,054$.

14. (1)设$\begin{cases}a+b+c=1, & ①\\a^2+b^2+c^2=2, & ②\\a^3+b^3+c^3=3, & ③\end{cases}$

①^2－②得$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$，

$\because a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，

$\therefore abc=\frac{1}{3}(a^3+b^3+c^3)-\frac{1}{3}(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)=\frac{1}{3}\times 3-\frac{1}{3}\times 1\times\left(2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{6}$.

(2)将②式平方得

$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=4$.

$\therefore a^4+b^4+c^4=4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

$=4-2[(ab+ac+bc)^2-2abc(a+b+c)]$

$=4-2\times\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{6}\times 1\right]$

$=4-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{25}{6}$.

第12讲　乘法公式(二)

例1　(1)$(a+b+c)^2=(a+b+c)(a+b+c)$

$=a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$.

也可以这样解：$(a+b+c)^2=[(a+b)+c]^2$

$=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$.

(2)$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$，$(b-c)^2=b^2+c^2-2bc$，

$(c-a)^2=c^2+a^2-2ca$.

由于$a-b=-1$，$b-c=-1$，$c-a=2$，我们有$a^2+b^2-2ab=1$，$b^2+c^2-2bc=1$，$c^2+a^2-2ca=4$.

三式相加，可得$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=6$. 即原式$=3$.

例2　由题设可知$a^2-a-2\,015=0$，　①

$b^2-b-2015=0$，　②

$a-b\neq 0$.　③

由①＋②得$(a^2+b^2)-(a+b)-4\,030=0$，　④

由①－②得$(a^2-b^2)-(a-b)=0$，　⑤

将③与⑤联立，可得$a+b=1$，　⑥

将⑥代入④，可得$a^2+b^2=4\,031$，　⑦

将⑥两边平方，可得$a^2+b^2+2ab=1$，　⑧

将⑦代入⑧，可得$ab=-2\,015$，　⑨

从而由⑦和⑨有$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=8\,061$，　⑩

由⑩有$a-b=\pm\sqrt{8\,061}$.

例3　156.　提示：设所求正整数为x，则有$x+100=y^2$，　①

$x+168=z^2$，　②

其中y, z都为正整数.

由②－①得$z^2-y^2=68$，　③

由③有$(z+y)(z-y)=68$，　④

又因为$z+y$与$z-y$奇偶性相同，

所以由④可得$z+y=34$，$z-y=2$.　⑤

解出$z=18$，$y=16$，　⑥

将⑥代入①可知$x=156$.

例4　B　提示：由题设知x, y为整数，$x^2+y^2\leqslant 2x+2y$，　①

将①变形为$(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$， ②

由②可知$(x-1)^2$与$(y-1)^2$有下列可能值：

$\begin{cases}(x-1)^2=0,\\(y-1)^2=0,\end{cases}\begin{cases}(x-1)^2=0,\\(y-1)^2=1,\end{cases}\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=0,\end{cases}\begin{cases}(x-1)^2=1,\\(y-1)^2=1.\end{cases}$

由这些方程组求出(x,y)的可能值为(1,1)，(1,0)，(1,2)，(0,1)，(2,1)，(0,0)，(0,2)，(2,0)，(2,2).

[变式题组]

1. D　**提示**：∵$\begin{cases}m^2=n+2, & ①\\ n^2=m+2, & ②\end{cases}$

∴由①－②得$(m+n)(m-n)=n-m$.　∵$m\neq n$，　∴$m+n=-1$.

∴$m^3-2mn+n^3=m^3-mn+n^3-mn=m(m^2-n)+n(n^2-m)=2m+2n=2(m+n)=-2$.

2. (1)3，7.　(2)$s_n=s_{n-1}+s_{n-2}$.　(3)$s_7=a^7+b^7=29$.

3. 1，2，4，5，8，9，10，13，16，17，18，20.

提示：$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$.然后列举：

若$y=0$，$x=1,2,3,4$，好数为1，4，9，16；

若$y=1$，$x=0,1,2,3$，好数为2，5，10，17；

若$y=2$，$x=0,1,2$，好数为8，13，20；

若$y=3$，$x=0$，好数为18.

4. D　**提示**：设$x_1,x_2,\cdots,x_{2\,008}$中有$a$个$-1$，$b$个1，$c$个2，

则$\begin{cases}-a+b+2c=200, & ①\\ a+b+4c=2\,008, & ②\end{cases}$

∴$\begin{cases}a=904-c,\\ b=1\,104-3c.\end{cases}$

∵$\begin{cases}a\geqslant 0,\\ b\geqslant 0,\\ c\geqslant 0,\end{cases}$　∴$\begin{cases}904-c\geqslant 0,\\ 1\,104-3c\geqslant 0,\\ c\geqslant 0,\end{cases}$　∴$0\leqslant c\leqslant 368$.

所求式子为$-a+b+8c=-a+b+2c+6c=200+6c$.

∵$0\leqslant c\leqslant 368$，　∴$0\leqslant 6c\leqslant 2\,208$，　∴$200\leqslant 200+6c\leqslant 2\,408$，

故$x_1^3+x_2^3+x_3^3+\cdots+x_{2\,008}^3$的最大值为2 408.

5. B　**提示**：**方法一**　取特殊值$a=2$，$b=-2$，$c=0$符合题设.

方法二　∵$a=b+4$，代入到$ab+c^2+4=0$，

得$(b+4)b+c^2+4=0$，

∴$(b+2)^2+c^2=0$，　∴$b=-2$，$c=0$.再求出$a=2$.

[能力平台]

1. C　**提示**：由于$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$且$2\,004=502^2-500^2$，$2\,005=1\,003^2-1\,002^2$，$2\,007=1\,004^2-1\,003^2$，而$2\,006=2\times 1\,003$.$a-b$与$a+b$的奇偶性相同，$2\times 1\,003$为一奇一偶，故2 006不能表示为两个整数的平方差.

2. B　**提示**：原式$=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$，

而$a-b=-1$，$b-c=-2$，$c-a=1$，

∴原式$=\frac{1}{2}\times(1+4+1)=3$.

3. B　**提示**：由$2a^2-2ab+b^2+4a+4=0$知$(a^2+4a+4)+(a^2-2ab+b^2)=0$，$(a+2)^2+(a-b)^2=0$，　∴$a=-2$，$b=-2$.

∴$a^2b+ab^2=ab(a+b)=4\times(-4)=-16$.

4. A　**提示**：∵$m=x+y$，∴①正确；　∵$x-y=n$，　∴②正确；

由①②知$m+n=2x$，$m-n=2y$，　∴$m^2-n^2=4xy$，　∴③正确；

∵$m^2+n^2=(x+y)^2+(x-y)^2=x^2+y^2+2xy+x^2+y^2-2xy=2(x^2+y^2)$，　∴④正确.

5. C　**提示**：$(x+y)(x-y)=2\,009=7^2\times 41$，有6个正因数，分别为1，7，41，49，287和2 009，因此对应的方程组为：

$\begin{cases}x+y=-1,-7,-41,-49,-287,-2\,009,1,7,41,49,287\text{或}2\,009,\\ x-y=-2\,009,-287,-49,-41,-7,-1,2\,009,287,49,41,7\text{或}1,\end{cases}$

故(x,y)共有12种不同的表示方法.

6. ± 8.　**提示**：由$(a+b+1)(a+b-1)=63$知

$(a+b)^2-1=63$，　∴$(a+b)^2=64$，

∴$a+b=\pm 8$.

7. $\pm\sqrt{14}$.　**提示**：∵$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4$，

又$a-\frac{1}{a}=\sqrt{10}$，　∴$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=14$，

∴$a+\frac{1}{a}=\pm\sqrt{14}$.

8. 1.　**提示**：∵$a-b=1$，　∴$a=b+1$，

∴$a^2-b^2-2b=(b+1)^2-b^2-2b=1$.

9. 13.　**提示**：∵$a^2+b^2+c^2+42<ab+9b+8c$，

∴$4a^2+4b^2+4c^2+168<4ab+36b+32c$，

$4a^2-4ab+b^2+3b^2-36b+108+4c^2-32c+64<4$，

即$(2a-b)^2+3(b-6)^2+4(c-4)^2<4$.

∵a,b,c为正整数，

∴只有$3(b-6)^2=0$，$4(c-4)^2=0$且$(2a-b)^2=0$时，不等式成立，

∴$b=6$，$c=4$，$a=3$，故$a+b+c=13$.

10. $m(m+1)(m+2)(m+3)+1$

$=[m(m+3)][(m+1)(m+2)]+1$

$=(m^2+3m)(m^2+3m+2)+1$

$=(m^2+3m)^2+2(m^2+3m)+1$

$=(m^2+3m+1)^2$

∴原式为完全平方式.

11. 解：设原长方形的每列有x名同学，则

$\begin{cases}8x+120=m^2, & ①\\ 8x-120=n^2, & ②\end{cases}$

m,n均为正整数，且$m>n$.

由①－②得$(m+n)(m-n)=240=2^4\times 3\times 5$，$m^2,n^2$均为8的倍数，则$m,n$能被4整除.

因$m+n$，$m-n$均能被4整除，

∴$\begin{cases}m+n=60,\\ m-n=4,\end{cases}$或$\begin{cases}m+n=20,\\ m-n=12,\end{cases}$

∴$\begin{cases}m=32,\\ n=28\end{cases}$或$\begin{cases}m=16,\\ n=4,\end{cases}$

即$8x=m^2-120=904$或$8x=m^2-120=136$.

∴$x=113$或$x=17$，故原长方形队列中有113人或17人.

12. C　**提示**：$2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=-2$，$xy=-1$，$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=4$.

13. B　**提示**：原式$=\frac{-3-7-11-15-\cdots-195-199}{5\,050}$

$=\frac{(-3-199)\times 50\div 2}{5\,050}=\frac{-202\div 2\times 50}{101\times 50}$

$=-1$.

14. 7.　**提示**：∵$(a^2+2a+1)+(b^2-4b+4)=0$，$(a+1)^2+(b-2)^2=0$，　∴$a=-1$，$b=2$，　∴$2a^2+4b-3=7$.

15. 99.　**提示**：原式$=(2\,024-2\,013)^2-2(2\,024-2\,013)=11^2-2\times 11=99$.

16. (1)由$\begin{cases}c+b=3a^2-6a+3,\\ c-b=a^2-2a+3,\end{cases}$得$\begin{cases}c=2a^2-4a+3,\\ b=a^2-2a.\end{cases}$

$\therefore 2b-c=2(a^2-2a)-(2a^2-4a+3)=-3$.

(2)$\because c=2a^2-4a+3=2(a-1)^2+1, 2(a-1)^2\geqslant 0$,

$\therefore c\geqslant 1$,

故 c 的最小值为 1.

(3)$\because \frac{c}{b}=\frac{2a^2-4a+3}{a^2-2a}=2+\frac{3}{a^2-2a}$为整数，

$\therefore a^2-2a$ 为 3 的约数.

若 $a^2-2a=1$，a 不为整数；若 $a^2-2a=-1$，则 $a=1$；

若 $a^2-2a=3$，则$(a-1)^2=4$， $\therefore a=-1$ 或 3；

若 $a^2-2a=-3$，则 $a^2-2a+1=-2$，即$(a-1)^2=-2$，方程无解.

$\therefore a=1$ 或 -1 或 3.

(4)$\because b\neq 0$， $\therefore a^2-2a\neq 0$， $\therefore a\neq 0$ 且 $a\neq 2$.

当 $a<0$ 或 $a>2$ 时，$a^2-2a>0$， $\therefore \frac{c}{b}=2+\frac{3}{a^2-2a}>2$.

当 $0<a<2$ 时， $\because a^2-2a=(a-1)^2-1$，

$\therefore -1\leqslant a^2-2a<0$， $\therefore \frac{3}{a^2-2a}\leqslant -3$，

$\therefore 2+\frac{3}{a^2-2a}\leqslant -1$，即$\frac{c}{b}\leqslant -1$. 故$\frac{c}{b}>2$ 或$\frac{c}{b}\leqslant -1$.

17. (1)由 $x^2-2xy+2y^2+6y+9=0$ 知

$(x^2-2xy+y^2)+(y^2+6y+9)=0$，

$\therefore (x-y)^2+(y+3)^2=0$，

$\because (x-y)^2\geqslant 0, (y+3)^2\geqslant 0$， $\therefore x=y=-3$，

$\therefore xy=(-3)^2=9$.

(2)由 $a^2+b^2-10a-12b+61=0$ 知

$a^2-10a+25+b^2-12b+36=0$，

$\therefore (a-5)^2+(b-6)^2=0$，

$\because (a-5)^2\geqslant 0, (b-6)^2\geqslant 0$， $\therefore a=5, b=6$.

又$\because \triangle ABC$ 的三边长 a, b, c 均为正整数，

故 $6\leqslant c<11$(c 为最大边).

(3)$\because P=2x^2+4y+13, Q=x^2-y^2+6x-1$，

$\therefore P-Q=(2x^2+4y+13)-(x^2-y^2+6x-1)$

$=x^2+y^2-6x+4y+14$

$=x^2-6x+9+y^2+4y+4+1$

$=(x-3)^2+(y+2)^2+1$.

$\because (x-3)^2\geqslant 0, (y+2)^2\geqslant 0$， $\therefore P-Q\geqslant 1$. 即 $P>Q$.

第 13 讲　因式分解

例 1　C　**提示：** 原式$=(3x+2)(-x^6+3x^5-2x^6+x^5)+(x+1)\times(3x^6-4x^5)$

$=(3x+2)(-3x^6+4x^5)+(x+1)(3x^6-4x^5)$

$=-(3x^6-4x^5)(3x+2-x-1)$

$=-(3x^6-4x^5)(2x+1)$.

例 2　$x(x+3)(x-3)$.

提示： $x^3-9x=x(x^2-9)=x(x+3)(x-3)$.

例 3　-1.　**提示：** a^2+ab+b^2-a-2b

$=a^2+(b-1)a+b^2-2b$

$=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2-\frac{3}{2}b-\frac{1}{4}$

$=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2-1\geqslant -1$.

当且仅当 $a+\frac{b-1}{2}=0, b-1=0$，

即 $a=0, b=1$ 时，等号成立，故所求的最小值为-1.

例 4　**方法一**　原式$=x^3+x^2-4x^2+4=x^2(x+1)-4(x+1)(x-1)=(x+1)(x-2)^2$.

方法二　原式$=x^3+1-3x^2+3=(x+1)(x^2-x+1)-3(x+1)(x-1)$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$.

方法三　原式$=x^3+x^2-4x^2-4x+4x+4$

$=x^2(x+1)-4x(x+1)+4(x+1)$

$=(x+1)(x^2-4x+4)=(x+1)(x-2)^2$.

例 5　$x(x+2)(x+3)$.

提示： 原式$=x(x^2+5x+6)=x(x+2)(x+3)$.

例 6　(1)设 1 001$=a$，则

原式$=\frac{(2a+1)^2-4a(2a+1)+2a(4a+4)-(2a+1)(2a+2)}{(2a+1)^2-(3a+2)(2a+1)-(2a+1)(2a+3)+(2a+3)(3a+2)}$

$=\frac{2a-1}{2a+2}=\frac{667}{668}$.

(2)原式$=\frac{(7^2+4\times 7+8)(7^2-4\times 7+8)(15^2+4\times 15+8)\times}{(3^2+4\times 3+8)(3^2-4\times 3+8)(11^2+4\times 11+8)\times}$
$\frac{(15^2-4\times 15+8)\times\cdots\times(39^2+4\times 39+8)(39^2-4\times 39+8)}{(11^2-4\times 11+8)\times\cdots\times(35^2+4\times 35+8)(35^2-4\times 35+8)}$

$=\frac{(3\times 7+8)(7\times 11+8)(11\times 15+8)(15\times 19+8)\times\cdots\times}{[(-1)\times 3+8](3\times 7+8)(7\times 11+8)(11\times 15+8)\times\cdots\times}$
$\frac{(35\times 39+8)(39\times 43+8)}{(31\times 35+8)(35\times 39+8)}$

$=\frac{39\times 43+8}{(-1)\times 3+8}=337$.

[变式题组]

1. B　**提示：** A 选项中，$(3-x)(3+x)=9-x^2$，这是整式乘法的过程；C 选项中，$(y+1)(y-3)=-(3-y)(y+1)$，不属于因式分解；D 选项中，$4yz-2y^2z+z=z(4y-2y^2+1)$，提取公因式出现错误.

2. 10 000.　**提示：** $87^2+87\times 26+13^2=(87+13)^2=100^2=10\ 000$.

3. D　**提示：** $\because x^2+kxy+64y^2$ 是完全平方式，又$(x\pm 8y)^2=x^2\pm 16xy+64y^2$， $\therefore k=\pm 16$.

4. $2(x+2y)(x-2y)$.　**提示：** $2x^2-8y^2=2(x^2-4y^2)=2(x+2y)(x-2y)$.

5. B　**提示：** 运用平方差公式可知 $x^2-9y^2=(x+3y)(x-3y)$是正确的.

6. $a(a+2b)(a-2b)$.

提示： $a^3-4ab^2=a(a^2-4b^2)=a(a+2b)(a-2b)$.

7. $(m+3)(m-3)$.　**提示：** $(m+1)(m-9)+8m=m^2-8m-9+8m=m^2-9=(m+3)(m-3)$.

8. $(x-y+2)(x-y-2)$　**提示：** $y^2-4-2xy+x^2=(y^2-2xy+x^2)-4=(x-y)^2-4=(x-y+2)(x-y-2)$.

9. 3.　**提示：** $\because n^2-m^2=1\ 998^2-1\ 997^2=3\ 995=5\times 17\times 47$，$\therefore (n-m)(n+m)=5\times 17\times 47$. 对于 3 995 的任意整数分解均可得到$(m, n)$，故满足条件的整数对$(m, n)$共有 3 对.

10. 1.　**提示：** $\because m=2n+1$， $\therefore m-2n=1$． $\therefore m^2-4mn+4n^2=(m-2n)^2=1$.

11. $\frac{15}{2}$.　**提示：** $\because x-2y=3, 2x+4y=5$， $\therefore x^2-4y^2=(x+2y)(x-2y)=3\times\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$.

12. 18.　**提示：** $\because ab=2, a-2b=-3$，

$\therefore$ 原式$=ab(a^2-4ab+4b^2)=ab(a-2b)^2=2\times(-3)^2=18$.

13. (1)原式$=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2$

$=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$.

(2)原式$=x^3-16x+5x+20=x(x+4)(x-4)+5(x+4)$

$=(x+4)(x^2-4x+5)$.

(3)原式$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3abc-3a^2b-3ab^2$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3(a+b+c)ab$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-ac-bc+c^2-3ab]$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$.

14. A　**提示:** $ax^2-4ax+4a=a(x^2-4x+4)=a(x-2)^2$.

15. B　**提示:** $a=\frac{2\,004^2\times(2\,004-2\,003)-2\,003\times2\,005}{2\,002^2\times(2\,003-2\,002)-2\,003\times2\,001}=\frac{2\,004^2-(2\,004-1)(2\,004+1)}{2\,002^2-(2\,002+1)(2\,002-1)}=1$,同理 $b=1$, $\therefore a=b$.

16. A　**提示:** 设 $x=2\,006$,则 $m=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2=(x+1-x)^2+2x(x+1)+[x(x+1)]^2=[x(x+1)+1]^2=(x^2+x+1)^2$.

17. 因为 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$,所以令原式 $=(x+my+1)\times(x+ny+2)$,展开并比较对应项系数可得 $k=-3$.

[能力平台]

1. D　**提示:** 二次三项式 x^2-5x+p 能分解则必须有 $25-4p\geqslant0$,即 $p\leqslant\frac{25}{4}$.整数范围内能进行因式分解,因而只要把 p 分解成两个整数相乘,且和为 -5,这样的数有无数组,因而整数 p 的取值可以有无数个.

2. D　**提示:** 设 $x^3+ax^2+bx+8=(x+1)(x+2)(x+c)=x^3+(3+c)x^2+(2+3c)x+2c$.比较得 $c=4$,从而有 $a=7,b=14$, $\therefore a+b=21$.

3. D　**提示:** 原式 $=a^2-2ab+b^2-4(ac-ab-c^2+bc)$
$=a^2+b^2+4c^2-2ab+4ab-4bc-4ac$
$=a^2+b^2+4c^2+2ab-4ac-4bc$
$=(a+b-2c)^2\geqslant0$.

4. C　**提示:** $\because a+bc+b+ca=24\Rightarrow(a+b)(c+1)=24=12\times2=8\times3=6\times4$,又 $\because a+b\geqslant c+1\geqslant2$, $\therefore$ 这样的三角形有 3 个.

5. (1)3.　**提示:** $\because m-n=-1$,
$\therefore(m-n)^2-2m+2n=(m-n)^2-2(m-n)$
$=(-1)^2-2\times(-1)=3$.

(2)-28.　**提示:** $\because x+y=-6,x^2-y^2=24$,
$\therefore(x+y)(x-y)=24,-6(x-y)=24,x-y=-4$,
$\therefore\begin{cases}x=-5,\\y=-1,\end{cases}$ $\therefore5x+3y=5\times(-5)+3\times(-1)=-28$.

6. 7 或 1.　**提示:** $\because a^2-ab-ac+bc=7$,
$\therefore a(a-b)-c(a-b)=7$, $\therefore(a-b)(a-c)=7$.
$\because a,b$ 为正整数, $\therefore a>b$, $\therefore a-b>0,a-c>0$,
$\therefore(a-b)(a-c)=1\times7=7\times1$, $\therefore\begin{cases}a-b=1,\\a-c=7\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-b=7,\\a-c=1,\end{cases}$
即 $a-c=7$ 或 1.

7. 3.　**提示:** $\because x=2m+n+2$ 和 $x=m+2n$ 时,多项式 x^2+4x+6 的值相等.
$\therefore$ 二次函数 $y=x^2+4x+6$ 的对称轴为
直线 $x=\frac{2m+n+2+m+2n}{2}=\frac{3m+3n+2}{2}$.
又对称轴为直线 $x=-2$,
$\therefore\frac{3m+3n+2}{2}=-2$, $\therefore m+n=-2$,
$\therefore$ 当 $x=3(m+n+1)=3\times(-1)=-3$ 时,$x^2+4x+6=(-3)^2-4\times3+6=3$.

8. $\because a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-6c+9=0$,
$\therefore(a^2-2ab+b^2)+(c^2-6c+9)+(b^2-2bc+c^2)=0$.
$\therefore(a-b)^2+(c-3)^2+(b-c)^2=0$.
$\because(a-b)^2\geqslant0,(c-3)^2\geqslant0,(b-c)^2\geqslant0$,
$\therefore\begin{cases}(a-b)^2=0,\\(c-3)^2=0,\\(b-c)^2=0,\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}a=3,\\b=3,\\c=3,\end{cases}$ $\therefore ab^c=3\times3^3=3\times27=81$.

9. $\because(a^2+b^2-10)(a^2+b^2)+25=0$,
$\therefore(a^2+b^2)^2-10(a^2+b^2)+25=0$,
$\therefore(a^2+b^2-5)^2=0$, $\therefore a^2+b^2=5$.
$\because a-b=1$, $\therefore(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=1$, $\therefore5-2ab=1,ab=2$.
$\therefore(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=5+2\times2=9$,
$\therefore a+b=3$ 或 -3.

10. $x^2-(a+5)x+5a-1=(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc$,
$\therefore\begin{cases}b+c=-a-5, & ①\\bc=5a-1, & ②\end{cases}$
①×5+②得 $bc+5(b+c)=-26$,
$bc+5(b+c)+25=-1,(b+5)(c+5)=-1$,
$\therefore\begin{cases}b+5=1,\\c+5=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+5=-1,\\c+5=1,\end{cases}$
$\therefore\begin{cases}b=-4,\\c=-6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-6,\\c=-4,\end{cases}$ $\therefore a=5$.

11. B　**提示:** $M-N=a^2b+b^2c+c^2a-ab^2-bc^2-ca^2$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)-ab^2+ac^2$
$=a^2(b-c)+bc(b-c)-a(b+c)(b-c)$
$=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)$
$=(b-c)(a-c)(a-b)$
$\because a>b>c$, $\therefore b-c>0,a-b>0,c-a<0$, $\therefore M-N>0$

12. A　**提示:** 原式 $=\frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}+3ab$
$=(a+b)^2=5$.

13. 3.　**提示:** $\because a+b+c=3$, ①
$a^2+b^2+c^2=3$, ②
由②−①×2+3,得 $a^2+b^2+c^2-2(a+b+c)+3=0$,
$\therefore(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=0$. $\therefore a=b=c=1$.

14. 171.　**提示:** 原式 $=(a+1)(b+1)(c+1)=2^2\times3\times167$.即当 $a+1=4,b+1=3,c+1=167$ 时,$a+b+c$ 最小,最小值为 171.

15. $n^4-16n^2+100=n^4+20n^2+100-36n^2=(n^2+10)^2-36n^2=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)$.
$\because n^2+6n+10\neq1$ 而 n^4-16n^2+100 为质数,且 n 为正整数,
$\therefore n^2-6n+10=1$,即 $n^2-6n+9=0$, $\therefore(n-3)^2=0$,
$\therefore n=3$.

16. 由 $3a^2-10ab+8b^2+5a-10b=0$,可得
$(a-2b)(3a-4b+5)=0$, $\therefore a-2b=0$ 或 $3a-4b+5=0$.
(ⅰ)当 $a-2b=0$ 时,
$u=9a^2+72b+2=36b^2+72b+2=36(b+1)^2-34$.
于是当 $b=-1$ 时,u 的最小值为 -34,此时 $a=-2,b=-1$.
(ⅱ)当 $3a-4b+5=0$ 时,
$u=9a^2+72b+2=16b^2+32b+27=16(b+1)^2+11$.
于是当 $b=-1$ 时,u 的最小值为 11,此时 $a=-3,b=-1$.
综上可知,u 的最小值为 -34.

第 14 讲　分式的概念、性质及运算

例 1　(1)由 $x^2-1=0$,得 $x=\pm1$.
当 $x=1$ 时,$x-1=0$,故 $x=1$ 不合题意;
当 $x=-1$ 时,$x-1=-2\neq0$,所以 $x=-1$ 时分式的值为 0.
(2)依题意得 $x-2\neq0$,解得 $x\neq2$.

(3)依题意得$\begin{cases}x-3>0,\\x+2<0\end{cases}$或$\begin{cases}x-3<0,\\x+2>0,\end{cases}$解得$-2<x<3$.

例 2 D **提示**:$\because c\neq0$, $\therefore \dfrac{a}{b}=\dfrac{ac}{bc}$正确,故 A 正确.

$\dfrac{-a-b}{a+b}=\dfrac{-(a+b)}{a+b}=-1$,故 B 正确.

$\dfrac{0.5a+b}{0.2a-0.3b}=\dfrac{(0.5a+b)\times10}{(0.2a-0.3b)\times10}=\dfrac{5a+10b}{2a-3b}$,故 C 正确.

$\because \dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{-(y-x)}{x+y}$,当 $y-x=0$ 时,$\dfrac{-(y-x)}{x+y}=\dfrac{y-x}{y+x}=0$;当 $y-x\neq0$ 时,$\dfrac{-(y-x)}{x+y}\neq\dfrac{y-x}{x+y}$,故 D 错误.

例 3 -3. **提示**:$\because a^2+3ab+b^2=0$, $\therefore a^2+b^2=-3ab$,

$\therefore$原式$=\dfrac{b^2+a^2}{ab}=\dfrac{-3ab}{ab}=-3$.

例 4 (1)原式$=\left[\dfrac{a}{(a+b)(a-b)}-\dfrac{a-b}{(a+b)(a-b)}\right]\div\dfrac{b}{b-a}$

$=\dfrac{b}{(a+b)(a-b)}\cdot\dfrac{b-a}{b}=-\dfrac{1}{a+b}$.

(2)$\because \dfrac{1}{x(x+3)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}\right)$,

$\therefore$原式$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+6}+\cdots+\dfrac{1}{x+99}-\dfrac{1}{x+102}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+102}\right)=\dfrac{34}{x(x+102)}$.

[变式题组]

1. $x\neq-3$.

2. C **提示**:当$\dfrac{x-2}{x+1}=0$时,$x-2=0$,$x+1\neq0$,所以 $x=2$.

3. (1)$x=1$ 时,y 的值为 0.

(2)依题意得$\begin{cases}x-1>0,\\2-3x>0\end{cases}$或$\begin{cases}x-1<0,\\2-3x<0,\end{cases}$ $\therefore \dfrac{2}{3}<x<1$.

4. (1)D (2)A (3)D **提示**:依题意有$\dfrac{2a}{a+b}=\dfrac{2\cdot2a}{2a+4b}$.

当 $a=0$ 时,分式的值不变;当 $a\neq0$ 时,$\dfrac{1}{a+b}=\dfrac{2}{2a+4b}$,

$\therefore 2a+2b=2a+4b$, $\therefore b=0$.

5. (1)$\dfrac{1}{7}$. (2)$\dfrac{1}{2n+3}$.

提示:原式$=\dfrac{\overbrace{1+\cdots+1+1+1}^{n+1个}}{(2n+2)+(2n+1)+\cdots+(6+5)+(4+3)+(2+1)}$

$=\dfrac{n+1}{\dfrac{(1+2n+2)(2n+2)}{2}}=\dfrac{1}{2n+3}$.

6. $-\dfrac{1}{2}$. **提示**:$\because \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}=3$, $\therefore 2b+a=6ab$,

$\therefore \dfrac{2a-5ab+4b}{4ab-3a-6b}=\dfrac{2(a+2b)-5ab}{4ab-3(a+2b)}=\dfrac{2\times6ab-5ab}{4ab-3\times6ab}=\dfrac{7ab}{-14ab}$

$=-\dfrac{1}{2}$.

7. (1)$\because ab=1$, $\therefore \dfrac{a}{a+1}+\dfrac{b}{b+1}=\dfrac{a(b+1)+b(a+1)}{(a+1)(b+1)}=\dfrac{ab+a+ab+b}{ab+a+b+1}=\dfrac{2+a+b}{2+a+b}=1$.

(2)$\because abc=1$, $\therefore \dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$

$=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{ab}{abc+ab+a}+\dfrac{abc}{a^2bc+abc+ab}$

$=\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{ab}{ab+a+1}+\dfrac{1}{ab+a+1}=\dfrac{ab+a+1}{ab+a+1}=1$.

8. A **提示**:当 $k=2,3,\cdots,99$ 时,由 $\dfrac{1}{k^3}<\dfrac{1}{k(k^2-1)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(k-1)k}-\dfrac{1}{k(k+1)}\right]$.

$\therefore S<1+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{1\times2}-\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{2\times3}-\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{98\times99}-\dfrac{1}{99\times100}\right]=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{99\times50}\right)<\dfrac{5}{4}$.

又 $S>1$, $\therefore 1<S<\dfrac{5}{4}$.

$\therefore 4<4S<5$,

故 $4S$ 的整数部分等于 4.

9. (1)原式$=\dfrac{(x+1)(x-1)}{y^2}\cdot\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x-1}{y}$.

(2)原式$=\dfrac{a}{a+2}-\dfrac{4}{a(a+2)}=\dfrac{a^2}{a(a+2)}-\dfrac{4}{a(a+2)}=\dfrac{a^2-4}{a(a+2)}$

$=\dfrac{(a+2)(a-2)}{a(a+2)}=\dfrac{a-2}{a}$.

(3)原式$=\dfrac{2a}{a+1}-\dfrac{2(a-2)}{(a-1)(a+1)}\times\dfrac{(a-1)^2}{a-2}=\dfrac{2a}{a+1}-\dfrac{2(a-1)}{a+1}$

$=\dfrac{2}{a+1}$.

(4)原式$=\dfrac{m^2}{(m+1)^2}\times\dfrac{m+1}{m}=\dfrac{m}{m+1}$.

[能力平台]

1. C **提示**:$\because \dfrac{(x-8)(x+1)}{|x|-1}=0$, $\therefore (x-8)(x+1)=0$ 且 $|x|-1\neq0$, $\therefore x=8$.

2. A **提示**:原式$=\dfrac{2}{x-1}\div\dfrac{2+x-1}{x^2-1}$

$=\dfrac{2}{x-1}\times\dfrac{x^2-1}{x+1}$

$=2$.

3. C **提示**:原式$=\dfrac{a^2-4}{a}\cdot\dfrac{a^2}{a-2}$

$=a(a+2)$

$=a^2+2a$.

$\because a^2+2a-1=0$, $\therefore$原式$=1$.

4. (1)$m=3$. **提示**:$\because \dfrac{(m-1)(m-3)}{(m-1)(m-2)}=0\Rightarrow\dfrac{m-3}{m-2}=0$,

$\therefore m=3$.

(2)$x\neq0$ 且 $x\neq\pm1$. **提示**:$\because \begin{cases}1-|x|\neq0,\\|x|\neq0.\end{cases}$

$\therefore x\neq\pm1, x\neq0$.

5. $\dfrac{1\,128}{35}$. **提示**:对已知三式取倒数,得 $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2(a+b)}$,$\dfrac{1}{bc}=\dfrac{1}{3(b+c)}$,$\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{4(c+a)}$.

$\therefore \begin{cases}\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2},\\\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3},\\\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{4},\end{cases}$解得 $a=\dfrac{24}{5}$,$b=\dfrac{24}{7}$,$c=24$.

$\therefore a+b+c=\dfrac{24}{5}+\dfrac{24}{7}+24=\dfrac{1\,128}{35}$.

6. 1. **提示**:由 $x^2-x-1=0$ 知 $x^2=x+1$,

$\therefore \dfrac{x^3+x+1}{x^4}=\dfrac{x^3+x^2}{x^4}=\dfrac{x^2(x+1)}{x^4}=\dfrac{x^4}{x^4}=1$.

7. 原式$=\frac{a}{(a+2)(a-2)}\cdot\frac{a+2}{a(a-3)}+\frac{1}{a-2}=\frac{1}{a-3}$.

$\because a$ 与 2,3 可以作为$\triangle ABC$的三边长,且 a 为整数,

$\therefore 1<a<5$,即 $a=2,3$ 或 4. 当 $a=2$ 或 3 时,原式没有意义.

当 $a=4$ 时,原式$=\frac{1}{4-3}=1$. 综上可知 $a=4$,原式$=1$.

8. 原式$=\left[\frac{(x-1)^2}{x(x-1)}+\frac{(x+2)(x-2)}{x(x+2)}\right]\div\frac{1}{x}$

$=\left(\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}\right)\cdot x$

$=2x-3$.

$\because x$ 为满足$-3<x<2$的整数且 $x^2-x\neq0$,$x^2+2x\neq0$,$x\neq0$,

$\therefore x\neq0$ 且 $x\neq1$ 且 $x\neq-2$.

$\therefore x=-1$. 即原式$=2x-3=2\times(-1)-3=-5$.

9. 原式右边$=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}=\frac{(A+C)x^2+(B-A)x-B}{x^2(x-1)}$

$=\frac{2x^2+x-11}{x^2(x-1)}$,得 $A+C=2$,$B-A=1$,$-B=-11$.

解得 $A=10$,$B=11$,$C=-8$.

从而 $A+B+C=13$.

10. C　**提示:**原式$=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}\right)$

$=16-2\times\frac{a+b+c}{abc}=16$.

11. C　**提示:**由$\frac{x}{2y}=\frac{y}{x-y}$知

$(x+y)(x-y)=x^2-y^2=y^2+xy=y(x+y)$,

$\therefore x=-y$(舍)或 $x=2y$,

原式$=\frac{x^2-2xy-3y^2}{x^2+4xy+3y^2}=\frac{x-3y}{x+3y}=\frac{-y}{5y}=-\frac{1}{5}$.

12. C　**提示:**由条件可知 $b^2+c^2-a^2=-2bc$,

$a^2+b^2-c^2=-2ab$,$a^2+c^2-b^2=-2ac$,

$\therefore$原式$=\frac{1}{-2bc}+\frac{1}{-2ac}+\frac{1}{-2ab}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)$

$=-\frac{1}{2}\times\frac{a+b+c}{abc}$

$=0$.

13. 4.　**提示:**原式$=3+\frac{6}{2x-1}$,

由题知$(2x-1)\mid 6$,$2x-1=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$,

只有当 $2x-1=\pm1,\pm3$ 时,x 才为整数,

即满足条件的 x 有 4 个.

14. $\frac{5}{7}$.　**提示:**由$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$知 $x+y=5xy$,

原式$=\frac{2(x+y)-5xy}{x+y+2xy}=\frac{10xy-5xy}{7xy}=\frac{5}{7}$.

15. $\because\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}=\frac{A(2x-1)+B(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$

$=\frac{(2A+B)x-(A+B)}{(x-1)(2x-1)}$,

且$\frac{5x-4}{(x-1)(2x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{2x-1}$,

$\therefore\begin{cases}2A+B=5,\\A+B=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}A=1,\\B=3.\end{cases}$

16. (1)$A=\frac{a-2}{(a+1)^2}\div\frac{a^2+a-3a}{a+1}$

$=\frac{a-2}{(a+1)^2}\times\frac{a+1}{a^2-2a}$

$=\frac{1}{a^2+a}$.

(2)当 $a=3$ 时,$f(3)=\frac{1}{12}=\frac{1}{3\times4}$,

当 $a=4$ 时,$f(4)=\frac{1}{20}=\frac{1}{4\times5}$,

……

当 $a=11$ 时,$f(11)=\frac{1}{132}=\frac{1}{11\times12}$,

$\therefore\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{11\times12}$,$\frac{x-2}{2}-\frac{7-x}{4}\leqslant$ $\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$,

$2x-4-7+x\leqslant1$,$3x\leqslant12$,$x\leqslant4$.

第 15 讲　分式的化简与求值

例 1　原式$=\frac{a(a+2)+1}{a+2}\div\frac{a^2-4+3}{a+2}=\frac{(a+1)^2}{a+2}\cdot\frac{a+2}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{a+1}{a-1}$.

当 $a-2=0$,即 $a=2$ 时,原式$=3$.

例 2　原式$=\frac{-x^2}{x(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=-\frac{x}{x-1}$,

$\because\begin{cases}-x\leqslant1,\\2x-1<4,\end{cases}$　$\therefore -1\leqslant x<\frac{5}{2}$.

$\because\begin{cases}x-1\neq0,\\x\neq0,\\x+1\neq0,\end{cases}$　$\therefore x\neq\pm1,0$.

$\because x$ 为整数,　$\therefore$将 $x=2$ 代入化简后的式子,得原式$=-2$.

例 3　原式$=\frac{x+2-3}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x(x+2)}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

$=x-\frac{x}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$.

$\because x^2-x-1=0$,　$\therefore x^2=x+1$,则原式$=1$.

例 4　D　**提示:**由题设可知$\frac{a+b}{ab}=1$,$\frac{b+c}{bc}=\frac{1}{2}$,$\frac{c+a}{ca}=\frac{1}{3}$.

从而有$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$,$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}$,$\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$.

三式相加有 $2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{11}{6}$.

从而有$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{11}{12}$.

有$\frac{1}{c}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-\frac{1}{12}$,

故知 $c=-12$.

例 5　A　**提示:**设$\frac{a+b-c}{c}=k$,从而有$\frac{a-b+c}{b}=k$,$\frac{-a+b+c}{a}=k$.

化为整式方程有$\begin{cases}a+b-c=kc,\\a-b+c=kb,\\-a+b+c=ka,\end{cases}$

三式相加,可得 $a+b+c=k(a+b+c)$.

题设 $a+b+c\neq0$,故知 $k=1$.

从而$\begin{cases}a+b-c=c,\\a-b+c=b,\\-a+b+c=a,\end{cases}$　可知$\begin{cases}a+b=2c,\\a+c=2b,\\b+c=2a,\end{cases}$

于是$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=8$.

[变式题组]

1. 原式$=\frac{2a}{(a+b)(a-b)}-\frac{a-b}{(a+b)(a-b)}=\frac{1}{a-b}$,

当$a=3,b=1$时,原式$=\frac{1}{3-1}=\frac{1}{2}$.

2. 原式$=\frac{2a^2-3ab+b^2}{(a+b)(a-b)}+\frac{ab-b^2}{(a+b)(a-b)}=\frac{2a}{a+b}$,

当$a=-2,b=1$时,原式$=\frac{2\times(-2)}{-2+1}=4$.

3. 原式$=\frac{x+1+x-1}{x-1}+\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}+\frac{2(1-x)}{(x+1)(x-1)}$

$=\frac{2x}{x-1}+\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}-\frac{2}{x+1}$

$=\frac{2x(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}+\frac{x(x+1)^2}{(x+1)(x-1)^2}-\frac{2(x-1)^2}{(x+1)(x-1)^2}$

$=\frac{3x^3+3x-2}{(x+1)(x-1)^2}$

由题意可知$-2\leqslant x\leqslant 2$,$x-1\neq 0$,$x^2-2x+1\neq 0$,$x^2-1\neq 0$,

故取一个合适的整数作为x的值时,可取$x=0$,

当$x=0$时,原式$=\frac{3\times 0+3\times 0-2}{1\times 1}=-2$.

4. (1)$A=\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}-\frac{x}{x-1}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x-1}$.

(2)解不等式组$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-3<0\end{cases}$得$1\leqslant x<3$.

$\because x$为整数, $\therefore x=1$或2.

当$x=1$时,$A=\frac{1}{x-1}$中的分母为0,无意义;

当$x=2$时,$A=\frac{1}{2-1}=1$.

故A的值为1.

5. 0. **提示:**化简为$\frac{x+y}{xy}-(1-x-y+xy)$.

6. -23. **提示:**化简为$1+\frac{24}{x^2-4x}$.

7. D **提示:**由条件式得出$x+\frac{1}{x}=13$,从而可知$x^2+\frac{1}{x^2}$,继而可知$x^4+\frac{1}{x^4}$.

8. 由条件式得出$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2},\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3},\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{4}$,

从而$\frac{1}{a}+\frac{1}{d}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)-\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$, $\therefore\frac{ad}{a+d}=\frac{12}{5}$.

9. 2或-1. **提示:**分$a+b+c=0$和$a+b+c\neq 0$两种情形.

10. 设$ax=by=cz=k$,从而$a=\frac{k}{x},b=\frac{k}{y},c=\frac{k}{z}$,于是$a+b+c=k$,$a^3x^2+b^3y^2+c^3z^2=k^2(a+b+c)=(a+b+c)^3$.

[能力平台]

1. D **提示:**原式$=\left[\frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2}+\frac{2-x}{x+2}\right]\times\frac{x-2}{x}$

$=\left(\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}\right)\times\frac{x-2}{x}$

$=\frac{x+2}{x}-\frac{(x-2)^2}{x(x+2)}$

$=\frac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x(x+2)}$

$=\frac{2x\times 4}{x(x+2)}=\frac{8}{x+2}$.

2. A **提示:**由$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=4$知$b-a=4ab$,原式$=\frac{a-b-2ab}{2(a-b)+7ab}=\frac{-4ab-2ab}{-8ab+7ab}=\frac{-6ab}{-ab}=6$.

3. A **提示:**原式$=\frac{4-c^2}{2-c}+\frac{4-a^2}{2-a}+\frac{4-b^2}{2-b}$

$=c+2+a+2+b+2$

$=(a+b+c)+6=3+6=9$.

4. 1. **提示:**由$a^2+1=\frac{1}{a},b^2+1=\frac{1}{b}$知$a>0,b>0,a^2-b^2=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\Rightarrow(a+b)(a-b)=\frac{b-a}{ab}$,

$\therefore[ab(a+b)+1](a-b)=0$, $\therefore a=b$,

$\therefore 2\ 015^{|a-b|}=2\ 015^0=1$.

5. $\frac{37}{2}$. **提示:**$a+\frac{1}{a}=-4$.

原式$=\frac{a^2+\frac{1}{a^2}+m}{3\left(a+\frac{1}{a}\right)+m}=\frac{14+m}{m-12}=5$,解得$m=\frac{37}{2}$.

6. $\frac{1}{24}$. **提示:**由条件可知$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=15,\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=17,\frac{1}{c}+\frac{1}{a}=16$,三式相加得$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=48$,故原式$=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{1}{24}$.

7. 原式$=\left[\frac{x(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right]\div\left(\frac{x^2-1}{x^2-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$

$=\frac{x^2}{x+1}\div\frac{x^2-2}{x^2-1}$

$=\frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{x^2-2}$

$=\frac{x^2(x-1)}{x^2-2}$.

当$x=\sqrt{2}+1$时,原式$=\frac{(\sqrt{2}+1)^2\times(\sqrt{2}+1-1)}{(\sqrt{2}+1)^2-2}=\frac{3\sqrt{2}+4}{1+2\sqrt{2}}$.

8. 原式$=\left(\frac{x^2-2x+4}{x-1}+\frac{-x^2+3x-2}{x-1}\right)\cdot\frac{x-1}{(x+2)^2}$

$=\frac{x+2}{x-1}\cdot\frac{x-1}{(x+2)^2}=\frac{1}{x+2}$.

解方程$x^2-4x+3=0$得$x=3$或$x=1$(舍去).

代入化简后的式子得,原式$=\frac{1}{x+2}=\frac{1}{5}$.

9. (1)$\because x^2=9x-1$, $\therefore x+\frac{1}{x}=9$,

$\therefore\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=81$, $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=79$.

$\therefore$原式$=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{79+1}=\frac{1}{80}$.

(2)由$\frac{x^2-9}{x-3}=0$得$x=-3$,

$\therefore$原式$=\frac{x^2}{x-3}-\frac{9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=x+3=0$.

(3)原式$=\frac{x(2-x)}{x^2(x+1)}\cdot\frac{(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{x+1}{x(2-x)}$.

$\because 4x+3=0$, $\therefore x=-\frac{3}{4}$. $\therefore$原式$=-\frac{4}{33}$.

10. (1) $\because \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{a+b}$, $\therefore \frac{a+b}{ab}=\frac{3}{a+b}$,

$\therefore 3ab=a^2+2ab+b^2$. $\therefore ab=a^2+b^2$, 设 $ab=m$.

$\therefore$ 原式 $=\frac{2m+3m}{m-2m}=-5$.

(2) $\because \frac{(x-5)A+(x+1)B}{(x+1)(x-5)}=\frac{3x-3}{(x+1)(x-5)}$,

$\therefore \begin{cases} A+B=3, & ① \\ B-5A=-3, & ② \end{cases}$

由①－②得 $6A=6$, $\therefore A=1$,

$\therefore \begin{cases} A=1, \\ B=2. \end{cases}$

(3) 原式 $=\frac{1}{x+1}-\frac{x+3}{(x+1)(x-1)}\times\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)}$

$=\frac{1}{x+1}-\frac{x-1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$.

$\because x+2=\frac{1}{x}$. 又 $x\neq 0$,

$\therefore x^2+2x=1$, $\therefore$ 原式 $=\frac{2}{1+1}=1$.

(4) 原式 $=\frac{1+a-a^2}{a(a+1)}\times\frac{a+1}{4}\times\frac{a}{(a+1)(a-1)}$

$=\frac{1+a-a^2}{4(a+1)(a-1)}=\frac{1+a-a^2}{4(a^2-1)}$.

$\because a^2-1=2a$, $\therefore 4(a^2-1)=8a, 1+a-a^2=-a$,

$\therefore$ 原式 $=-\frac{1}{8}$.

11. A **提示:** 原式 $=\frac{21-5m}{m^2-9}-\frac{m}{(m+3)(m-3)}\times\frac{m+3}{m}-\frac{m-3}{m+3}$

$=\frac{21-5m}{m^2-9}-\left(\frac{1}{m-3}+\frac{m-3}{m+3}\right)$

$=\frac{21-5m}{m^2-9}-\frac{m+3+m^2-6m+9}{m^2-9}$

$=\frac{21-5m-m^2+5m-12}{m^2-9}=\frac{9-m^2}{m^2-9}=-1$

与 m 取值无关.

12. A **提示:** $\frac{x}{1+x}=\frac{a}{a+2b+3c}$, $\frac{y}{1+y}=\frac{2b}{a+2b+3c}$, $\frac{z}{1+z}=\frac{3c}{a+2b+3c}$ $\therefore \frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}=1$.

13. $\frac{3}{2}$. **提示:** $\because y^2=2-\frac{1}{2}y, x=y+2$,

原式 $=\frac{x-y^2}{y}=\frac{y+2-2+\frac{1}{2}y}{y}=\frac{\frac{3}{2}y}{y}=\frac{3}{2}$.

14. $\frac{92}{17}$. **提示:** $\because a=11-(b+c)$,

$\therefore \frac{a}{b+c}=\frac{11-(b+c)}{b+c}=\frac{11}{b+c}-1$,

故原式 $=\frac{11}{a+b}-1+\frac{11}{b+c}-1+\frac{11}{c+a}-1$

$=11\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3$

$=11\times\frac{13}{17}-3=\frac{92}{17}$.

15. 由条件知 $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, 于是 $\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+x^4}=\frac{1}{1+a^4}+\frac{1}{1+\frac{1}{a^4}}=\frac{1}{1+a^4}+\frac{a^4}{a^4+1}=1$, 故原式 $=3$.

16. $\because a^2-3a-1=a^2-3a+abc=a(bc+a-3)=a(bc-b-c+1)=a(b-1)(c-1)$,

$\therefore \frac{a}{a^2-3a-1}=\frac{1}{(b-1)(c-1)}$, 同理可得 $\frac{b}{b^2-3b-1}=\frac{1}{(a-1)(c-1)}$, $\frac{c}{c^2-3c-1}=\frac{1}{(a-1)(b-1)}$.

$\therefore \frac{1}{(b-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(c-1)}+\frac{1}{(a-1)(b-1)}=\frac{4}{9}$, 得 $\frac{4}{9}(a-1)(b-1)(c-1)=(a-1)+(b-1)+(c-1)$.

$\because abc=-1, a+b+c=4$, $\therefore ab+bc+ac=-\frac{1}{4}$,

故 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)=\frac{33}{2}$.

第16讲　分式方程及其应用

例1 (1) 方程两边同乘以 $(x-2)(x+3)$, 得

$$6(x+3)=x(x-2)-(x-2)(x+3),$$

即 $6x+18=x^2-2x-x^2-x+6$,

化简得 $9x=-12, x=-\frac{4}{3}$.

经检验, $x=-\frac{4}{3}$ 是原方程的解.

(2) $\frac{7}{x(x+1)}+\frac{3}{x(x-1)}=\frac{6}{(x+1)(x-1)}$.

去分母得 $7(x-1)+3(x+1)=6x$,

即 $7x-7+3x+3=6x$,

所以 $x=1$.

检验: 当 $x=1$ 时, $x(x+1)(x-1)=0$.

所以 $x=1$ 不是原分式方程的解. 故原分式方程无解.

例2 原方程可化为 $\frac{1}{x+2\,004}+\frac{1}{x+2\,006}=\frac{1}{x+2\,007}+\frac{1}{x+2\,003}$,

即 $\frac{1}{x+2\,006}-\frac{1}{x+2\,007}=\frac{1}{x+2\,003}-\frac{1}{x+2\,004}$,

$\frac{(x+2\,007)-(x+2\,006)}{(x+2\,006)(x+2\,007)}=\frac{(x+2\,004)-(x+2\,003)}{(x+2\,003)(x+2\,004)}$,

$\frac{1}{(x+2\,006)(x+2\,007)}=\frac{1}{(x+2\,003)(x+2\,004)}$,

$(x+2\,006)(x+2\,007)=(x+2\,003)(x+2\,004)$,

$x^2+4\,013x+4\,026\,042=x^2+4\,007x+4\,014\,012$,

$6x=-12\,030$,

$x=-2\,005$.

经检验, $x=-2\,005$ 是原方程的根.

$\therefore$ 原方程的解是 $x=-2\,005$.

例3 C

例4 -1 或 $-\frac{3}{2}$ 或 -2. **提示:** 去分母得 $(x-2)+a(x-1)=2(a+1)$,

整理得 $(a+1)x=3a+4$, ①

当 $a=-1$ 时, 方程①无解, 此时原分式方程无解;

当 $a\neq -1$ 时, 原方程有增根为 $x=1$ 或 $x=2$.

当增根为 $x=1$ 时, $\frac{3a+4}{a+1}=1$, 解得 $a=-\frac{3}{2}$;

当增根为 $x=2$ 时, $\frac{3a+4}{a+1}=2$, 解得 $a=-2$.

综上所述, $a=-1$ 或 $a=-\frac{3}{2}$ 或 $a=-2$.

例5 设开始 x 人准备买香烟, 一箱香烟的总价为 y 元, 依题意可得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{y}{x-15}-\dfrac{y}{x}=15, & ①\\ \dfrac{y}{(x-15)-5}-\dfrac{y}{x-15}=10, & ②\end{cases}$$

即$\begin{cases}\dfrac{1}{x-15}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{15}{y}, & ③\\ \dfrac{1}{x-20}-\dfrac{1}{x-15}=\dfrac{10}{y}. & ④\end{cases}$

由③×2=④×3,得$\dfrac{2}{x-15}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{3}{x-20}-\dfrac{3}{x-15}$,

解得 $x=40$.

经检验,$x=40$ 是原方程的根.

答:开始准备共同购买香烟的有 40 人.

［变式题组］

1. B **提示:**$\because \dfrac{3}{x}-\dfrac{7}{x+1}=0$, $\therefore \dfrac{3(x+1)-7x}{x(x+1)}=0$.

$\therefore \dfrac{3-4x}{x(x+1)}=0$. $\therefore x=\dfrac{3}{4}$.

当 $x=\dfrac{3}{4}$ 时,$x(x+1)\neq 0$, $\therefore x=\dfrac{3}{4}$ 是原方程的解.

2. C **提示:**点 $P(1-2a,a-2)$ 关于原点的对称点为 $P'(2a-1,2-a)$,且在第一象限内,a 为整数, $\therefore 2a-1>0,2-a>0$,

$\therefore \dfrac{1}{2}<a<2$, $\therefore a=1$. 故方程$\dfrac{x+1}{x-a}=2\Rightarrow\dfrac{x+1}{x-1}=2\Rightarrow x+1=2x-2\Rightarrow x=3$. 当 $x=3$ 时,$x-1\neq 0$,

$\therefore x=3$ 是原分式方程的解.

3. 去分母得 $3(x-1)=x(x+1)-(x+1)(x-1)$,

去括号得 $3x-3=x^2+x-x^2+1$,

解得 $x=2$,

经检验,$x=2$ 是原分式方程的解.

4. $\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{1}{2}$. **提示:**因为 $y\neq 0$,从而 $x+y\neq x-y$,必有 $x+y=xy=\dfrac{x}{y}$或$x-y=xy=\dfrac{x}{y}$. 易知 $x\neq 0$,从而 $y^2=1$. 当 $y=1$ 时,均无解;当 $y=-1$ 时,$x=\dfrac{1}{2}$或$-\dfrac{1}{2}$.

5. D **提示:**解分式方程得 $x=-m-3$,

$\therefore\begin{cases}x=-m-3>0,\\ x+1\neq 0,\end{cases}$解得 $m<-3$.

6. A **提示:**解分式方程得 $x=4+m$, $\because$方程无解, $\therefore x=4+m=-1$, $\therefore m=-5$.

7. -1.

8. (1)设第一批杨梅每件进价 x 元,根据题意得

$\dfrac{1\,200}{x}\times 2=\dfrac{2\,500}{x+5}$,解得 $x=120$.

经检验,$x=120$ 是原方程的根.

答:第一批杨梅每件进价 120 元.

(2)第二次共购买$\dfrac{2\,500}{120+5}=20$(件),

设至少打 y 折. 根据题意得

$(150-120-5)\times 20\times 80\%+\left(150\times\dfrac{y}{10}-120-5\right)\times 20\times(1-80\%)\geqslant 320$,

解得 $y\geqslant 7$.

答:剩余的杨梅每件售价至少打七折.

［能力平台］

1. D **提示:**由$\dfrac{m-1}{x-1}=2$ 知 $x=\dfrac{m+1}{2}$,又 $x\geqslant 0$,且 $x\neq 1$,

$\therefore \dfrac{m+1}{2}\geqslant 0$ 且$\dfrac{m+1}{2}\neq 1$, $\therefore m\geqslant -1$ 且 $m\neq 1$.

2. C **提示:**由不等式组得 $0<\dfrac{a+2}{4}\leqslant 1$, $\therefore -2<a\leqslant 2$,解分式方程得 $y=2-a\geqslant 0$,且 $2-a\neq 1$,得 $a=-1,0,2$,故整数 a 的解之和为 $-1+2=1$.

3. D **提示:**由 $x+\dfrac{2}{x-1}=a+\dfrac{2}{a-1}$ 知 $x-1+\dfrac{2}{x-1}=a-1+\dfrac{2}{a-1}$,即 $x-1=a-1$ 或 $x-1=\dfrac{2}{a-1}$,解得 $x_1=a$ 或 $x_2=\dfrac{2}{a-1}+1=\dfrac{a+1}{a-1}$.

4. $2y+\dfrac{1}{y}=4$. **提示:**$\because \dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x-1}{x}=4$,又设$\dfrac{x}{x-1}=y$,

$\therefore$原方程可变为 $2y+\dfrac{1}{y}=4$.

5. $(x+2)\left(\dfrac{10}{x}-0.5\right)=12$.

6. (1)设乙工程队单独完成这项工作需要 x 天,由题意得

$\dfrac{30}{120}+36\left(\dfrac{1}{120}+\dfrac{1}{x}\right)=1$,解得 $x=80$.

经检验,$x=80$ 是原方程的解.

答:乙工程队单独做需要 80 天完成.

(2)因为甲队做其中一部分用了 x 天,乙队做另一部分用了 y 天,所以$\dfrac{x}{120}+\dfrac{y}{80}=1$,即 $y=80-\dfrac{2}{3}x$,又 $x<46,y<52$,

所以$\begin{cases}80-\dfrac{2}{3}x<52,\\ x<46,\end{cases}$解之得 $42<x<46$,

因为 x,y 均为正整数,所以 $x=45,y=50$.

答:甲队做了 45 天,乙队做了 50 天.

7. (1)原方程去分母得 $m-1-x=0$, $\therefore m=x+1$.

由题意将$x=1$ 代入 $m=x+1$,得 $m=2$.

将 $m=2$ 代入 $x^2+kx+6=0$,得 $k=-5$.

(2)设方程的另一根为 a,根据根与系数的关系得 $2a=6$,则 $a=3$.

8. D **提示:**由题知$-3=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{x}{2-x}$,即$-3x+6=3+x$,得 $x=\dfrac{3}{4}$.

经检验,$x=\dfrac{3}{4}$是分式方程的解.

9. 1,2,4. **提示:**去分母得$(x-1)(x+1)-x(x-2)=ax+1$,$x^2-1-x^2+2x=ax+1$,$(2-a)x=2$,由原方程无解得 $2-a=0$ 或 $x=2,-1$,当 $x=2$ 时,$a=1$,当 $x=-1$ 时,$a=4$,故 $a=1,2,4$.

10. (1)设船由 A 港漂流到 B 港需要 x 小时,

依题意得$\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{x}$,解得 $x=48$.

经检验,$x=48$ 是原方程的解,且有意义.

(2)设救生圈在 x 时落入水中. 由(1)知水的速度为$\dfrac{1}{48}$,则

$(6+6-x)\left(\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{48}\right)=\left(\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{48}\right)\times 2$,解得 $x=10$.

经检验,$x=10$ 是原方程的解,且符合实际意义.

11. 由条件得 $a-\dfrac{1}{a}=1$,又$\dfrac{2\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)-3x}{\left(a-\dfrac{1}{a}\right)+2x}=-\dfrac{93}{112}$,

即$\dfrac{2(1+2)-3x}{1+2x}=-\dfrac{93}{112}$,解得 $x=\dfrac{51}{10}$.

12. 方法一 设从楼下到楼上扶梯共有 S 级,小红登 55 级的同时扶梯走$(S-55)$级,王兵登 60 级的同时扶梯走$(S-60)$级,依题意有

$\dfrac{55}{S-55}\times 2=\dfrac{60}{S-60}$,解得 $S=66$(级).

方法二 设小红单位时间登 x 级,王兵单位时间登 $2x$ 级,扶梯单位时间走 y 级,所以小红从楼下到楼上的时间为$\dfrac{55}{x}$,王兵从楼下到楼上的时间为$\dfrac{60}{2x}$,

依题意有 $55+y\times\dfrac{55}{x}=60+y\times\dfrac{60}{2x}$,解得$\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{5}$.

扶梯从楼下到楼上共有 $55+y\times\dfrac{55}{x}=55+55\times\dfrac{1}{5}=66$(级).

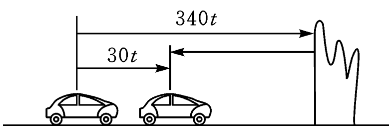
方法三 设扶梯上移一级需 x 单位时间,小红登一级扶梯需 $2y$ 单位时间,王兵登一级需 y 单位时间,依题意有

$55\times 2y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}\right)=60\times y\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$,解得 $x=10y$,

故扶梯自动上移级数是王兵登的级数的$\dfrac{1}{10}$,所以从楼下到楼上自动扶梯共有 $60+60\times\dfrac{1}{10}=66$(级).

13. 设软件升级前每小时生产 x 个零件,得$\dfrac{240}{x}-\dfrac{240}{\left(1+\frac{1}{3}\right)x}=\dfrac{40}{60}+\dfrac{20}{60}$,$x=60$,$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)x=80$.

14. (1)如图①,设经过 t s 后司机听到回声,则 $30t+340t=2\times 925$,解得 $t=5$.所以经过 5 s 后司机听到回声.



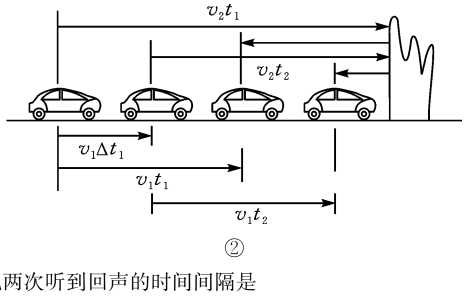
①

(2)设汽车的行驶速度是 v_1,声音的传播速度是 v_2,汽车两次鸣笛的时间间隔是 Δt_1;汽车第一次鸣笛 t_1 时间后,司机第一次听到回声;汽车第二次鸣笛 t_2 时间后,司机第二次听到回声;汽车第一次鸣笛时,与山壁的距离为 s.

如图②,如果司机先听到第一次鸣笛的回声,则有$\begin{cases}2s=v_1t_1+v_2t_1,\\2(s-v_1\Delta t_1)=v_1t_2+v_2t_2,\end{cases}$两式相减,

得 $2v_1\Delta t_1=(v_1+v_2)(t_1-t_2)$,

即 $t_1-t_2=\dfrac{2v_1\Delta t_1}{v_1+v_2}$.



②

司机两次听到回声的时间间隔是

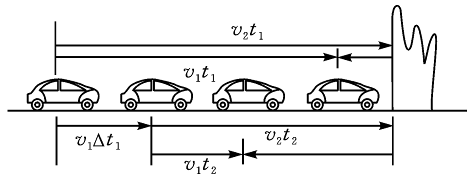
$\Delta t_2=\Delta t_1+t_2-t_1=\Delta t_1-(t_1-t_2)=\dfrac{v_2-v_1}{v_1+v_2}\Delta t_1$,

代入数据,得 $4=\dfrac{340-v_1}{v_1+340}\times 4.5$,

解得 $v_1=20(\mathrm{m/s})$.

如图③,如果司机先听到第二次鸣笛的回声,

同理可得 $t_1-t_2=\dfrac{2v_1\Delta t_1}{v_1+v_2}$.



③

第 14 题图

司机两次听到回声的时间间隔是

$\Delta t_2=(t_1-t_2)-\Delta t_1=\dfrac{v_1-v_2}{v_1+v_2}\Delta t_1$,

代入数据,得 $4=\dfrac{v_1-340}{v_1+340}\times 4.5$,

解得 $v_1=5\ 780(\mathrm{m/s})$.这样的速度不切合实际.

所以汽车的行驶速度是 20 m/s.

第 17 讲 二次根式的性质和运算

例 1 (1)D (2)$x\geqslant 5$ 或 $x<1$. **提示:**(1)由题意得$\begin{cases}x+1\geqslant 0,\\x\neq 0,\end{cases}$解得 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 0$,故选 D.

(2)由$\begin{cases}|x-3|-2\geqslant 0,\\x^2-4x+3\neq 0\end{cases}$得$\begin{cases}x\geqslant 5 \text{ 或 } x\leqslant 1,\\x\neq 3 \text{ 且 } x\neq 1.\end{cases}$故 $x\geqslant 5$ 或 $x<1$.

例 2 (1)由$\begin{cases}x\geqslant 0,\\-x\geqslant 0\end{cases}$得 $x=0$, $\therefore y=2$,故 $y^x=2^0=1$.

(2)由$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\4-x^2\geqslant 0\end{cases}$得 $x=\pm 2$, $\therefore y=0$, $\therefore x+y=\pm 2$.

(3)$\because a^2-4a+\sqrt{b-3}=-4$,

$\therefore a^2-4a+4+\sqrt{b-3}=0$,即$(a-2)^2+\sqrt{b-3}=0$.

$\because (a-2)^2\geqslant 0$,$\sqrt{b-3}\geqslant 0$, $\therefore (a-2)^2=0$ 且 $\sqrt{b-3}=0$.

$\therefore a=2$ 且 $b=3$. $\therefore a^2-2b=2^2-2\times 3=-2$.

例 3 (1)$\sqrt{30}$,$\sqrt{17(a^2+b^2)}$. (2)C

例 4 B **提示:**当 $x<1$ 时,原式$=1-x+2-x=3-2x$;当 $1\leqslant x<2$ 时,原式$=x-1+2-x=1$;当 $x\geqslant 2$ 时,原式$=x-1+x-2=2x-3$.

例 5 (1)原式$=1-3+\sqrt{5}+9-\sqrt{5}=7$.

(2)原式$=2\sqrt{3}\times(5\sqrt{3}+\sqrt{3}-4\sqrt{3})=12$.

(3)C **提示:方法一** $\because$被开方数$\dfrac{1}{b-a}\geqslant 0$,分母 $b-a\neq 0$,

$\therefore b-a>0$, $\therefore a-b<0$,

$\therefore$原式$=-(b-a)\sqrt{\dfrac{1}{b-a}}=-\sqrt{(b-a)^2\cdot\dfrac{1}{b-a}}=-\sqrt{b-a}$.

方法二 易知此式结果为负,故可能选 C 或 D,又知 $b-a>0$,故选 C.

例 6 (1)原式$=\dfrac{(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}\div\dfrac{2ab-a^2-b^2}{2ab}$

$=\dfrac{a-b}{ab}\cdot\dfrac{-2ab}{(a-b)^2}=-\dfrac{2}{a-b}$.

当 $a=2+\sqrt{3}$,$b=2-\sqrt{3}$时,

原式$=-\dfrac{2}{(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})}=-\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)由 $\frac{(1-\sqrt{b}+\sqrt{a})^2+(1-\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{(1-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2}=-4$，

得 $2[(1-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})^2]=-4(1-\sqrt{b})^2+4(\sqrt{a})^2$，

整理得 $6(1-\sqrt{b})^2=2a$，即 $3(1-\sqrt{b})^2=a$.

由于 $a+b=1$， ∴$3(1-\sqrt{b})^2=1-b=(1-\sqrt{b})(1+\sqrt{b})$，

整理得 $(1-\sqrt{b})(3-3\sqrt{b}-1-\sqrt{b})=0$，

∴$1-\sqrt{b}=0$ 或 $2-4\sqrt{b}=0$.

当 $1-\sqrt{b}=0$，即 $b=1$ 时，$a=0$，不合题意，故舍去；

当 $2-4\sqrt{b}=0$，即 $b=\frac{1}{4}$ 时，$a=\frac{3}{4}$.

∴$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}}=\sqrt{3}$.

[变式题组]

1. D 提示：要使 $\sqrt{-2x+4}$ 有意义，必须使 $-2x+4\geqslant 0$，解得 $x\leqslant 2$.

2. C 提示：由 $x-3\geqslant 0$ 得 $x\geqslant 3$.

3. B 提示：由 $x-2\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$ 得 $x\geqslant 2$.

4. $m\leqslant -4$. 提示：由 $x^2+4x-m\geqslant 0$ 得 $x^2+4x+4-4-m\geqslant 0$.

5. $-2\leqslant x<-1$ 或 $3<x\leqslant 4$. 提示：∵$3-|x-1|\geqslant 0$ 且 $|x-1|-2>0$， ∴$|x-1|\leqslant 3$ 且 $|x-1|>2$，
∴$-2\leqslant x\leqslant 4$ 且 $x>3$ 或 $x<-1$，即 $-2\leqslant x<-1$ 或 $3<x\leqslant 4$.

6. -2，-2.

7. -1 或 -7. 提示：∵$x^2-9\geqslant 0$ 且 $9-x^2\geqslant 0$， ∴$x=\pm 3$，$y=4$，
∴$x-y=-1$ 或 -7.

8. 15. 提示：∵$|x-3|\geqslant 0$，$y-6\geqslant 0$ 且 $|x-3|+\sqrt{y-6}=0$，
∴$x=3$，$y=6$，又三角形为等腰三角形，故周长为 $6+6+3=15$.

9. 2 020. 提示：∵$a-2\,020\geqslant 0$， ∴$a-2\,019+\sqrt{a-2\,020}=a$.
∴$a-2\,020=2\,019^2$. ∴$a-2\,019^2=2\,020$.

10. 3. 提示：由 $2|a+3|+4-b=0$ 和 $c^2+4b-4c-12=0$ 知 $a=-3$，$b=4$. ∵$(c-2)^2+4b-16=0$， ∴$c=2$，
∴$a+b+c=-3+4+2=3$.

11. C 提示：$\sqrt{2a^3}=a\cdot\sqrt{2a}$，$\sqrt{8x}=2\sqrt{2x}$，故最简二项根式有两个.

12. D

13. $-b$. 提示：由图可知 $b<0<a$，
∴$|a-b|-\sqrt{a^2}=a-b-a=-b$.

14. $2(a+b+c)$. 提示：∵$a+b+c>0$，$a-b-c<0$，$b-a-c<0$，$c-b-a<0$， ∴原式 $=a+b+c+b+c-a+a+c-b+b+a-c=2(a+b+c)$.

15. $1\leqslant a\leqslant 3$. 提示：∵$\sqrt{(1-a)^2}+\sqrt{(3-a)^2}=2$，
即 $|1-a|+|3-a|=2$.
①若 $a<1$，则原式 $=1-a+3-a=4-2a$.
②若 $a>3$，则原式 $=a-1+a-3=2a-4$.
③若 $1\leqslant a\leqslant 3$，则原式 $=a-1+3-a=2$.
故 a 的取值范围是 $1\leqslant a\leqslant 3$.

16. $1-x$. 提示：由 $|1-x|=1+|x|$ 得 $x\leqslant 0$，
∴$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|=-(x-1)=1-x$.

17. D 提示：由 $|a|=-a$ 得 $a\leqslant 0$，则 $|2a-\sqrt{a^2}|=|2a+a|=|3a|=-3a$.

18. 原式 $=\frac{1}{2}\sqrt{8}-\sqrt{\frac{1}{2}}-\sqrt{\frac{9}{2}}+2\sqrt{50}$

$=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{3}{2}\sqrt{2}+10\sqrt{2}$

$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+10\right)\times\sqrt{2}=9\sqrt{2}$.

19. 原式 $=2\sqrt{3}-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$.

20. 原式 $=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{x}+\frac{6}{2}\sqrt{x}-2x\cdot\frac{1}{x}\sqrt{x}$

$=2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-2\sqrt{x}=3\sqrt{x}$.

代入 $x=1$，得原式 $=3\sqrt{x}=3$（答案不唯一，但 x 取值要有意义）.

21. (1)$4\sqrt{3}$. 提示：$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-1)\times[\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)]=4\sqrt{3}$.

(2)原式 $=\frac{3-(x+1)(x-1)}{x-1}\cdot\frac{(x-1)^2}{x-2}=-x^2-x+2$.

代入 $x=-\sqrt{2}$，得原式 $=\sqrt{2}$.

22. C 提示：令 $a=\sqrt[n]{2\,021}$，从而 $x=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$，$\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$，$a^n=2\,021$.

23. $\frac{4}{m}$. 提示：设 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=n$，且 $n>0$，
则 $(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1})=mn$，
∴$(x+3)-(x-1)=mn$，即 $mn=4$，
∴$n=\frac{4}{m}$，即 $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\frac{4}{m}$.

24. 10 581. 提示：在拓展结论中，由 $(\sqrt{m+1}+\sqrt{m})^6=2(2m+1)(16m^2+16m+1)-1$ 知 $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^6=2\times(2\times 5+1)(16\times 5^2+16\times 5+1)-1=10\,581$.

[能力平台]

1. D 提示：由 $\sqrt{a}\geqslant 0$ 且 $\sqrt{-ab}>0$ 知 $a\geqslant 0$，$-ab>0$，
∴$ab<0$，$a>0$，$b<0$. ∴点 $P(a,b)$ 在第四象限.

2. B 提示：∵$(m-1)^2\geqslant 0$，$\sqrt{n-15}\geqslant 0$，
∴$m-1=0$，$n-15=0$， ∴$m=1$，$n=15$，
∴$\sqrt{m+n}=\sqrt{16}=4$，即 4 的平方根为 ± 2.

3. C 提示：原式 $=|2-x|+|x-4|$，
①当 $x<2$ 时，原式 $=(2-x)+4-x=6-2x$.
②当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时，原式 $=(x-2)+(4-x)=2$.
③当 $x>4$ 时，原式 $=(x-2)+(x-4)=2x-6$.
综上可知，x 的取值范围是 $2\leqslant x\leqslant 4$.

4. D 提示：由条件知 $-1\leqslant a\leqslant 1$，$-1\leqslant b\leqslant 1$，$(a+1)(b-2)\geqslant 0$，
∴$a\leqslant -1$， ∴$a=-1$，$b=0$， ∴$\sqrt{3+a+2b}=\sqrt{2}$.

5. B 提示：∵$ab>0$ 且 $a+b<0$， ∴$a<0$，$b<0$.

①$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$，错误；

②$\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=1$，正确；

③$\sqrt{ab}\div\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{ab\cdot\frac{b}{a}}=\sqrt{b^2}=-b$，正确.

6. B 提示：∵$x+1\geqslant 0$ 且 $x-3\neq 0$， ∴$x\geqslant -1$ 且 $x\neq 3$.

7. A 提示：∵$\sqrt{4}<\sqrt{7}<\sqrt{9}$，即 $2<\sqrt{7}<3$，而 $a<\sqrt{7}<b$，且 a，b 为两个连续的整数， ∴$a=2$，$b=3$.

8. D 提示：∵$\sqrt{135}=3\sqrt{15}=k\sqrt{15}$， ∴$k=3$.
又 $\sqrt{450}=15\sqrt{2}=15\sqrt{m}$， ∴$m=2$.

又 $\sqrt{180}=6\sqrt{5}=6\sqrt{n}$，　$\therefore n=5$.　$\therefore m<k<n$.

9. 2.　**提示:**从最小的正整数 1 开始逐步代入检验，看是否满足最简二次根式的条件.

经验证，当 $a=2$ 时，$\sqrt{3a+5}$是最简二次根式，且 2 最小.

10. (1)原式$=-1+3\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$.

(2)原式$=\frac{1}{2}+1+2\sqrt{3}-1=\frac{1}{2}+2\sqrt{3}$.

(3)原式$=\sqrt{24\times\frac{1}{3}}-4\times\frac{1}{4}\sqrt{2}\times1=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

(4)原式$=4+27-5+1=27$.

(5)原式$=\frac{2}{3}+4+\frac{1}{3}-4=1$.

(6)原式$=2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3}-2+2-\sqrt{3}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(7)原式$=4+2-|1-3|=4+2-2=4$.

11. 原式$=\left[\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)^2}-\frac{a}{a-b}\right]\cdot\frac{a(a-b)}{b^2}$

$=\frac{a+b-a}{a-b}\cdot\frac{a(a-b)}{b^2}=\frac{a}{b}$,

$\because \sqrt{a+1}+|b-\sqrt{3}|=0$,

$\therefore a=-1, b=\sqrt{3}$,

$\therefore$原式$=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

12. 由图可知 $a<b<0<c$,

$\therefore a+b<0, c-a+b>0, b-c<0$,

$\therefore$原式$=-a+a+b+c-a+b+b-c-b$

$=-a+2b$.

13. C　**提示:**由条件知$\begin{cases}2\sqrt{a}+3|b|=6,\\4\sqrt{a}-9|b|=6c,\end{cases}$

解得 $\sqrt{a}=\frac{3c+9}{5}, |b|=\frac{4-2c}{5}$.

由$\sqrt{a}\geqslant0, |b|\geqslant0$ 知$\begin{cases}\frac{3c+9}{5}\geqslant0,\\\frac{4-2c}{5}\geqslant0,\end{cases}$

解得$-3\leqslant c\leqslant2$.

14. 2 019.　**提示:**原式$=(\sqrt{2}-1)+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+(\sqrt{2\,020}-\sqrt{2\,019})(\sqrt{2\,020}+1)$

$=(\sqrt{2\,020}-1)(\sqrt{2\,020}+1)$

$=2\,020-1=2\,019$.

15. 由二次根式 $\sqrt{a}$中 $a\geqslant0$ 得$\begin{cases}x-199+y\geqslant0,\\199-x-y\geqslant0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}x+y\geqslant199,\\x+y\leqslant199,\end{cases}$

$\therefore x+y=199$.

$\therefore \sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=0$,

$\therefore\begin{cases}3x+5y-2-m=0,\\2x+3y-m=0,\end{cases}$

$\therefore m=201$.

16. (1)因为 $n<\sqrt{n^2+n}<n+1$，所以 $\sqrt{n^2+n}$的整数部分为 n.

(2)$a=2, b=\frac{\sqrt{7}-1}{2}$，原式$=10$.

(3)①由于 $\sqrt{x^2}<\sqrt{x^2+2}<\sqrt{x^2+2+\frac{1}{x^2}}$且 $x>0$,

故 $x<\sqrt{x^2+2}<x+\frac{1}{x}$，即 $0<f(x)-x<\frac{1}{x}$.

②$f(x)$的整数部分为 x，由 1 002＋1 003＋…＋2 005＝1 509 514，得 M 的整数部分为 1 509 514.

第 18 讲　二次根式的化简求值

例 1　$2\,019^2+3\times2\,019+1$.　**提示:**被开方数的第一项为 1，然后是连续四个数的乘积，这四个连续数的第一项与开方后的结果的关系为这一项的平方加上它的 3 倍，再加 1.

例 2　(1)$4-\sqrt{7}, \frac{\sqrt{2}}{3}$.

(2)①原式$=2-\sqrt{3}+3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2$;

②原式$=[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2\,010}-\sqrt{2\,009})](\sqrt{2\,010}+1)=(\sqrt{2\,010}-1)(\sqrt{2\,010}+1)=2\,010-1=2\,009$.

(3)$\because x=5+2\sqrt{6}, y=5-2\sqrt{6}, xy=1, x+y=10$,

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=10^2-2=98$.

原式$=\frac{x^2+y^2}{xy}=98$.

(4)由分子有理化有 $a=\frac{1}{\sqrt{2\,006}+\sqrt{2\,005}}, b=\frac{1}{\sqrt{2\,007}+\sqrt{2\,006}}$,

$c=\frac{1}{\sqrt{2\,008}+\sqrt{2\,007}}$,　$\therefore a>b>c$.

例 3　-9.　**提示:**由 $m=1+\sqrt{2}$ 得 $m^2-2m=1$，　$\therefore 7m^2-14m=7$.

同理 $3n^2-6n=3$，　$\therefore (7+a)(3-7)=8$.　$\therefore a=-9$.

例 4　(1)C　(2)B　**提示:**(1)取 $n=1$，易知 C 正确. 再一般化，此时目标明确.

$\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+(n+1)^2+n^2}{n^2(n+1)^2}}$

$=\sqrt{\frac{n^2(n+1)^2+2n(n+1)+1}{[n(n+1)]^2}}$

$=\sqrt{\left[\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}\right]^2}=\frac{n(n+1)+1}{n(n+1)}$

$=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

(2)$\because\sqrt{6}\times\sqrt{1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}=\sqrt{6}\times\sqrt{1+(1+\sqrt{3})}=\sqrt{12+6\sqrt{3}}$

$=\sqrt{(3+\sqrt{3})^2}=3+\sqrt{3}$,

$\therefore a+b\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$,　即$(a-3)+(b-1)\sqrt{3}=0$.

$\because a, b$ 为有理数,

$\therefore a=3, b=1$,　即 $a+b=4$.

例 5　设 $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{5}$，则 $a^2+b^2-c^2=0, 2\sqrt{6}=2ab$.

原式$=\frac{2ab}{a+b-c}=\frac{2ab(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)}=\frac{2ab(a+b+c)}{(a+b)^2-c^2}$

$=\frac{2ab(a+b+c)}{a^2+b^2+2ab-c^2}=a+b+c=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

例 6　$\because a=\frac{16}{\sqrt{17}+1}=\sqrt{17}-1$，　$\therefore a+1=\sqrt{17}, a^2+2a+1=17$,

$\therefore a^2+2a-16=0$.

原式$=(a^5+2a^4-16a^3)-(a^3+2a^2-16a)+a^2+2a-17$

$=a^3(a^2+2a-16)-a(a^2+2a-16)+(a^2+2a-16)-1$

$=(a^2+2a-16)(a^3-a+1)-1=-1.$

[变式题组]

1. $\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$.　**2.** 2.　**3.** 2 019.

4. $\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}\ (n\geqslant1)$. 证明：$\sqrt{n+\frac{1}{n+2}}=\sqrt{\frac{n^2+2n+1}{n+2}}=\sqrt{\frac{(n+1)^2}{n+2}}=(n+1)\sqrt{\frac{1}{n+2}}(n\geqslant1)$.

5. $\sqrt{2\,020}-1$.　**6.** 194.

7. 1.　**提示:** $\because (x-\sqrt{x^2-2\,020})(y-\sqrt{y^2-2\,020})=2\,020$,

$\therefore x-\sqrt{x^2-2\,020}=\frac{2\,020}{y-\sqrt{y^2-2\,020}}=y+\sqrt{y^2-2\,020}$,

$y-\sqrt{y^2-2\,020}=\frac{2\,020}{x-\sqrt{x^2-2\,020}}=x+\sqrt{x^2-2\,020}$.

由以上两式相减得 $x=y$，所以 $(x-\sqrt{x^2-2\,020})^2=2\,020$，解得 $x^2=2\,020$.

$\therefore 3x^2-2y^2+3x-3y-2\,019=3x^2-2x^2+3x-3x-2\,019=x^2-2\,019=2\,020-2\,019=1$.

8. 2.　**9.** 16.　**10.** $-\sqrt{2}$.　**11.** 1.

12. B　**提示:** $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

13. B　**提示:** 原方程可化为 $(a-5)^2+(\sqrt{b-4}-1)^2+|\sqrt{c-1}-2|=0$.

14. $3+2\sqrt{2}$.　**提示:** 由已知条件可得 $(x-2)^2+(y-1)^2=0$，故 $x=2,y=1$，代入原式即可.

15. (1)0.　**提示:** $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{8}+1)^2}$,　$\therefore x=1,y=2$.

(2)$3\sqrt{2}$.　**提示:** 设 $x=\sqrt{8+\sqrt{63}}+\sqrt{8-\sqrt{63}}$,

$\therefore x^2=18$.

(3)1.　**提示:** 原式 $=2\times\sqrt{1-2\sqrt{2}+2}+\sqrt{9-12\sqrt{2}+8}=2\times\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=1$.

16. 原式 $=(\sqrt{3}+1)^{2\,019}[(\sqrt{3}+1)^2-2(\sqrt{3}+1)-2]+2\,021=2\,021$.

17. B　**提示:** 由 $x=\frac{1+\sqrt{2\,019}}{2}$,　$\therefore (2x-1)^2=2\,019$，即 $4x^2-4x-2\,018=0$,　$\therefore 4x^3-2\,022x-2\,019=x(4x^2-4x-2\,018)+(4x^2-4x-2\,018)-1=-1$.　$\therefore$ 原式 $=(-1)^{2\,021}=-1$.

18. $\because \left(a+\frac{1}{8}\sqrt{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sqrt{2}+\frac{1}{8}}\right)^2$,

$\therefore a^2+\frac{\sqrt{2}}{4}a=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore a^2=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)$.

$\therefore a^4+a+1=\frac{1}{8}(1-a)^2+a+1=\frac{(a+3)^2}{8}$.

$\because a>0$,

$\therefore a^2+\sqrt{a^4+a+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-a)+\frac{\sqrt{2}}{4}(a+3)=\sqrt{2}$.

19. $\frac{8}{3}$.　**20.** $\frac{8}{15}$，$\frac{6}{5}$.

[能力平台]

1. B　**提示:** $\because a<1$,　$\therefore 1-a>0$.

又 $-a^3(1-a)\geqslant0$,　$\therefore a\leqslant0$,

即 $\sqrt{-a^3(1-a)}=-a\sqrt{a(a-1)}$.

2. A　**提示:** $\because 0<a<1$,　$\therefore a>a^2>a^3$,　$\therefore 7a+1=a+3a+3a+1>a^3+3a^2+3a+1=(a+1)^3$.

得 $\sqrt[3]{7a+1}>a+1$.

同理 $\sqrt[3]{7b+1}>b+1$，$\sqrt[3]{7c+1}>c+1$，$\sqrt[3]{7d+1}>d+1$,

相加得 $p>(a+b+c+d)+4=5$，即 $p>5$.

3. D　**提示:** $\because \sqrt{x}+2\sqrt{y}=5\sqrt{2}$，则 $\sqrt{x}$，$2\sqrt{y}$，$5\sqrt{2}$ 为同类二次根式，

$\therefore \begin{cases}x=18,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=50,\\y=0.\end{cases}$

故整数对 (x,y) 有 3 组.

4. D　**提示:** $\because \sqrt{3}m^2-2m=6$,　$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}m^2-3m=9$.

$\therefore \frac{3\sqrt{3}}{2}m^2-3m+5=9+5=14$.

5. C　**提示:** 由 $x^2+y^2-4x-2y+5=0$ 得 $(x-2)^2+(y-1)^2=0$,

$\therefore x=2,y=1$.

$\therefore \frac{\sqrt{x}+y}{\sqrt{3y-2\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}$.

6. 6.　**提示:** 由 $\frac{x^2-2}{5x-4}\geqslant0$，$\frac{x^2-2}{4-5x}\geqslant0$，知 $\frac{x^2-2}{5x-4}=0$,

$\therefore x^2=2,y=2$.　$\therefore x^2+y^2=2+4=6$.

7. 4.　**提示:** $\because a+b+c=0$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$,

$\therefore \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=16$,

即 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2(a+b+c)}{abc}=16$.

$\therefore \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}=\sqrt{16}=4$.

8. (1)
$$f(x)=\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}-\sqrt{x^4-4x^2+9}}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}}{\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}}$$
$$=\frac{(x^4-3x^2+9)-(x^4-4x^2+9)}{x(\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9})}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^4-3x^2+9}+\sqrt{x^4-4x^2+9}}$$
$$=\frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^2+3x^2}+\sqrt{(x^2-3)^2+2x^2}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+2}}.$$

(2)当 $x=\frac{3}{x}$，即 $x=\sqrt{3}$ 时，

$\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+3}+\sqrt{\left(x-\frac{3}{x}\right)^2+2}$ 取得最小值 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$,

于是 $f(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,

所以 $f(x)_{\max}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$，此时 $x=\sqrt{3}$.

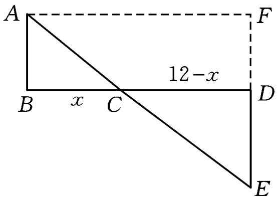
9. (1)$AC+CE=\sqrt{25+(8-x)^2}+\sqrt{x^2+1}$.

(2)当 A,C,E 三点共线时，$AC+CE$ 的值最小.

(3)如图，作 $BD=12$，过点 B 作 $AB\perp BD$，过点 D 作 $DE\perp BD$，且使 $AB=2$，$DE=3$，连接 AE 交 BD 于点 C.

设 $BC=x$，则 $CD=12-x$，AE 的长即为 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{(12-x)^2+9}$ 的最小值. 过点 A 作 $AF\parallel BD$ 交 ED 的延长线

于点 F,则 $DF=AB=2$,$EF=ED+DF=5$,$AF=BD=12$,$AE=\sqrt{AF^2+EF^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$,即原式的最小值为 13.



第 9 题图

10. C　**提 示:** $\sqrt[3]{a(b-4)}+\sqrt{ab-3a+2b-6}=\sqrt[3]{a(b-4)}+\sqrt{a(b-3)+2(b-3)}=\sqrt[3]{a(b-4)}+\sqrt{(b-3)(a+2)}$,

$\because a^2+b^2=4$,　$\therefore -2\leqslant a\leqslant 2$,$-2\leqslant b\leqslant 2$,$a+2\geqslant 0$,$b-3<0$,

$\therefore (b-3)(a+2)\leqslant 0$.

又原式有意义,得$(b-3)(a+2)\geqslant 0$,　$\therefore (b-3)(a+2)=0$,

而 $b-3<0$,　$\therefore a=-2$,$a^2+b^2=4$,得 $b=0$,故原式$=2$.

11. D　**提示:** 原式$=\dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{(3+2\sqrt{2})^2}}-\dfrac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+1}{3+2\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-2\sqrt{2}}$

$=(\sqrt{2}+1)(3-2\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)(3+2\sqrt{2})$

$=3\sqrt{2}-4+3-2\sqrt{2}-3\sqrt{2}-4+3+2\sqrt{2}$

$=-2$.

12. 4.　**提示:** 设 $\sqrt{x^2-xy}-\sqrt{xy-y^2}=t$,

则$(x^2-xy)-(xy-y^2)=9t$,

即 $x^2-2xy+y^2=9t=(x-y)^2=36$,

$\therefore t=4$.

即 $\sqrt{x^2-xy}-\sqrt{xy-y^2}=4$.

13. 0.　**提示:** 由 $x=\dfrac{b-\sqrt{b^2-412}}{2}$ 得 $b-2x=\sqrt{b^2-412}$,

即 $b^2-4bx+4x^2=b^2-412$,

$\therefore x^2-bx+103=0$.

14. 由①得 $y^2-x^2=-xy-yz$,

由②得 $z^2=xz+y^2$,$z^2-y^2=xz$,

$\therefore \dfrac{y^2+z^2-x^2}{2yz}=\dfrac{xz+y^2-xy-yz}{2yz}=\dfrac{(x-y)(z-y)}{2yz}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x-y}{y}\cdot\dfrac{z-y}{z}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{y+z}{x}\cdot\dfrac{z-y}{z}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{z^2-y^2}{xz}=\dfrac{1}{2}$.

15. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{[\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}+\sqrt[3]{(x-1)^2}](\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1})}$

$=\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}{2}$,

$\therefore f(1)=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$,$f(3)=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}$,$f(5)=\dfrac{\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}}{2}$,$\cdots$,

$f(999)=\dfrac{\sqrt[3]{1\,000}-\sqrt[3]{998}}{2}$.

$\therefore f(1)+f(3)+\cdots+f(2k-1)+\cdots+f(999)=\dfrac{\sqrt[3]{1\,000}}{2}=5$.

16. 原式可变形为$(\sqrt{m}+2\sqrt{n}-3)(\sqrt{m}+2\sqrt{n}+1)=0$,

又$\because m,n$ 为正数,　$\therefore \sqrt{m}+2\sqrt{n}=3$.

$\therefore \dfrac{\sqrt{m}+2\sqrt{n}-8}{\sqrt{m}+2\sqrt{n}+2\,002}=\dfrac{3-8}{3+2\,002}=-\dfrac{1}{401}$.

第 19 讲　勾股定理(一)

例 1　(1)11.　**提示:** $AC^2+BC^2=(\sqrt{2})^2+3^2=11$.

(2)如图 D19-1,分别以 AC,BC,AB 为一边作正方形 $ACED$,正方形 $BCNM$,正方形 $ABHF$.

延长 DE 交 MN 于点 Q,

连接 QC,平移 QC 至 AG,BP 位置,直线 GP 分别交 AF,BH 于点 T,S,则四边形 $ABST$ 即为所求.

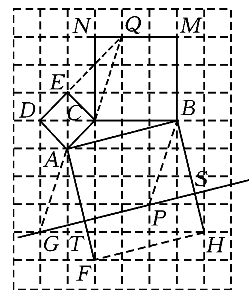


图 D19-1

例 2　C　**提示:** 设 $BN=x$,由折叠的性质可得 $DN=AN=9-x$.

$\because D$ 是 BC 的中点,　$\therefore BD=3$.

在 Rt$\triangle NBD$ 中,$x^2+3^2=(9-x)^2$,解得 $x=4$,

故线段 BN 的长为 4.

例 3　$3(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.　**提示:** 如图 D19-2,$\triangle BCD$ 是等腰直角三角形,$\triangle ACD$ 是等边三角形.

在 Rt$\triangle BCD$ 中,

$CD=\sqrt{BC^2+BD^2}=6\sqrt{2}$ cm,

$\therefore BE=CE=\dfrac{1}{2}CD=3\sqrt{2}$ cm.

在 Rt$\triangle ACE$ 中,

$AE=\sqrt{AC^2-CE^2}=3\sqrt{6}$ cm.

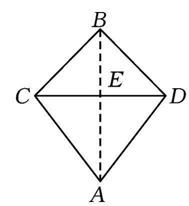


图 D19-2

$\therefore$ 从顶点 A 爬行到顶点 B 的最短距离为$(3\sqrt{2}+3\sqrt{6})$ cm.

例 4　$\sqrt{41}$.　**提示:方法一**　作 $AD'\perp AD$,$AD'=AD$,连接 CD',DD'(如图 D19-3①).

$\because \angle BAC+\angle CAD=\angle DAD'+\angle CAD$,即$\angle BAD=\angle CAD'$,

在$\triangle BAD$ 与$\triangle CAD'$中,

$\begin{cases} BA=CA, \\ \angle BAD=\angle CAD', \\ AD=AD', \end{cases}$　$\therefore \triangle BAD\cong\triangle CAD'$(SAS).

$\therefore BD=CD'$,$\angle ADD'=\angle AD'D=45^\circ$.

由勾股定理得 $DD'=\sqrt{AD^2+(AD')^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$,

$\because \angle ADC+\angle D'DA=\angle D'DC=90^\circ$,

$\therefore$ 由勾股定理得 $CD'=\sqrt{DC^2+(DD')^2}=\sqrt{9+32}=\sqrt{41}$,

$\therefore BD=CD'=\sqrt{41}$.

方法二　如图 D19-3②,过点 C 作 $CE\perp AD$ 于点 E,过点 B 作 $BF\perp AD$ 交 DA 的延长线于点 F.

$\because \angle ADC=45^\circ$,　$\therefore CE=DE=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$,

$\therefore AE=4-\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$. 易证$\triangle AEC\cong\triangle BFA$(HL).

$\therefore AF=CE=\frac{3}{2}\sqrt{2}, BF=AE=4-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

$\therefore DF=AD+AF=4+\frac{3}{2}\sqrt{2}.$

$\therefore BD^2=DF^2+BF^2=\left(4+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2+\left(4-\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2=41.$

$\therefore BD=\sqrt{41}.$

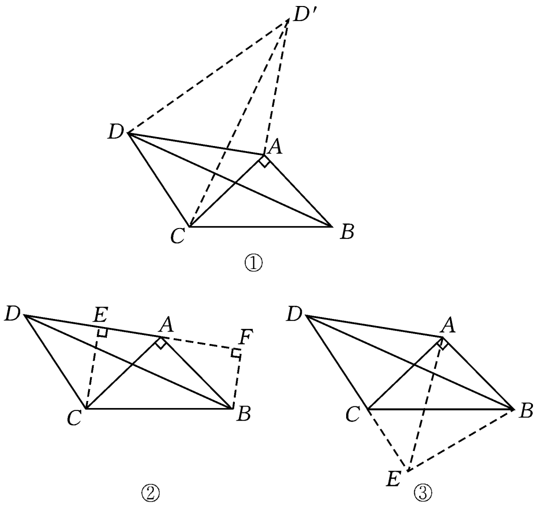


图 D19-3

方法三　如图 D19-3③，过点 A 作 $AE\perp AD$ 交 DC 的延长线于点 E，连接 EB. 易证$\triangle DAC\cong\triangle EAB$，再证$\angle DEB=90°$，从而算出 BD 的长.

［变式题组］

1. C　**提示**：如图 D19-4，过点 A 作 $AE\perp BC$ 交 BC 于点 E，

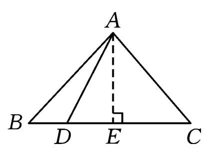


图 D19-4

$\because AB=AC$，

$\therefore BE=EC=\frac{1}{2}BC=4$（三线合一）.

$\therefore AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=3.$

$\because AD$ 的长为正整数，

$\therefore AD=3$ 或 4（点 E 左、右各有一点使得 $AD=4$）.

$\therefore D$ 点的个数共有 3 个.

2. B　**提示**：$\because DE$ 为 AC 的垂直平分线，　$\therefore AD=CD.$

$\therefore\angle DCA=\angle A=90°-60°=30°.$　$\because\angle DCB=60°-30°=30°$，

$\therefore DE=BD=2$，　$\therefore CE=2\sqrt{3}, AC=2CE=4\sqrt{3}.$

3. 连接 BP. 设 $AP=PC=x$，

则 $AB^2=BP^2-AP^2=(BD^2+PD^2)-AP^2$

$=[BD^2+(PC^2-DC^2)]-AP^2$

$=6^2+(x^2-3^2)-x^2=27$，

故 $AB=3\sqrt{3}.$

4. A　**提示**：在 Rt$\triangle DCB$ 中，$DC:CB=1:\sqrt{3}$，　$\therefore CD=\frac{4}{\sqrt{3}}$，

故 $CD=C'D=\frac{4}{\sqrt{3}}$. 在 Rt$\triangle DEC'$中，$DC':DE=\sqrt{3}:2$，

$\therefore DE=\frac{4}{\sqrt{3}}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{8}{3}.$

5. $\frac{3}{2}$.　**提示**：如图 D19-5，设 $BE=EB'=x$，则 $EC=4-x$.

$\because AB=3, BC=4$，

$\therefore AC=5$，　$\therefore B'C=5-3=2.$

在 Rt$\triangle B'EC$ 中，$\because B'E^2+B'C^2=EC^2$，

$\therefore x^2+2^2=(4-x)^2$，　$\therefore x=\frac{3}{2}$，

即 $B'E=\frac{3}{2}.$

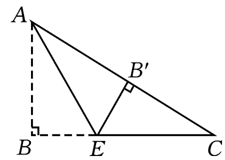


图 D19-5

6. 25.　**7.** 20.

8. (1) $\because\angle DAC=\angle EAB=60°$，

$\therefore\angle DAC+\angle BAC=\angle EAB+\angle BAC$，即$\angle EAC=\angle BAD.$

$\because AC=AD, AB=AE$，

$\therefore\triangle EAC\cong\triangle BAD$(SAS).

$\therefore\angle AEC=\angle ABD.$

如图 D19-6①，$\angle EGB$ 为$\triangle AEG$，$\triangle GBF$ 的外角，

$\therefore\angle EGB=\angle AEC+\angle EAB=\angle ABD+\angle EFB.$

$\therefore\angle EFB=\angle EAB=60°$，

故$\angle BFC=180°-\angle EFB=180°-60°=120°.$

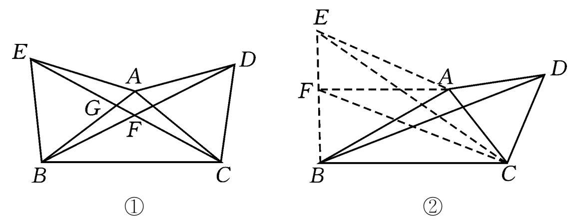


图 D19-6

(2) ① $2\sqrt{5}$.

② $\triangle ABC$ 的面积不变，且 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{5}$. 理由如下：

如图 D19-6②，作$\angle BAE=\angle CAD$，且使 $AE=AB$，连接 BE，过点 A 作 $AF\perp EB$ 于点 F. 连接 CE, CF.

$\because\angle BAE=\angle CAD$，　$\therefore\angle BAE+\angle BAC=\angle CAD+\angle BAC.$

又$\because AC=AD, AE=AB$，

$\therefore\triangle EAC\cong\triangle BAD$(SAS)，

$\therefore DB=EC=6.$

$\because\alpha+\beta=90°$，$\angle ACD=\angle ABE=\beta$，且$\angle ABE+\angle ABC=\angle EBC$，

$\therefore\angle EBC=90°.$

$\because\angle EBC=90°$，$\angle FBC=90°$，

$\therefore FA\parallel BC$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle FBC}=\frac{1}{2}BC\cdot BF=\frac{1}{2}\times4\times\left(2\sqrt{5}\times\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{5}.$

9. (1) 如图 D19-7①②所示.

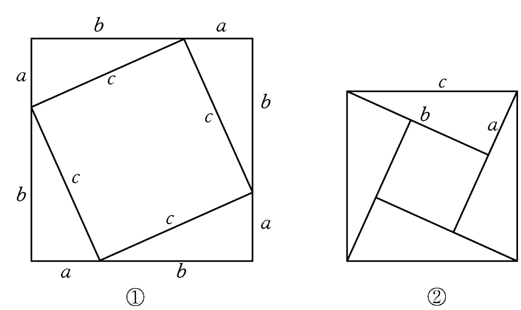


图 D19-7

(2) ① $\because$ 大正方形的面积可表示为 $(a+b)^2$，也可表示为 $c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，

$\therefore(a+b)^2=c^2+4\times\frac{1}{2}ab$，即 $a^2+b^2+2ab=c^2+2ab$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

②∵大正方形的面积可表示为 c^2，也可以表示为 $\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$，

∴$c^2=\frac{1}{2}ab\times4+(b-a)^2$，即 $c^2=2ab+b^2-2ab+a^2$，

∴$c^2=a^2+b^2$，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方.

[能力平台]

1. C　**提示：**∵$AD/\!/BC$，　∴设$\angle DAC=\angle ACB=x$，则 $\angle ACD=2\angle ACB=2x$.　∵$DE\perp BC$，　∴$\angle ADE=90°$.

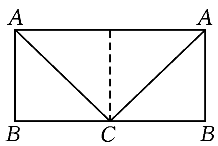
∵点 G 为 AF 的中点，　∴$AG=GD$，

∴$\angle GAD=\angle ADG=x$，

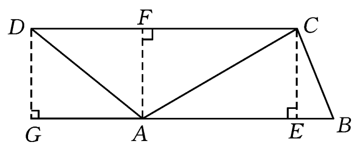
∴$\angle DGC=\angle GAD+\angle ADG=2x=\angle ACD$，　∴$GD=DC=3$.

∵$EC=1$，　∴$DE=\sqrt{DC^2-EC^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

2. A　**提示：**圆柱的侧面展开图如图所示，最小周长为 $2AC=2\sqrt{2^2+2^2}=4\sqrt{2}$ dm.



第 2 题图



第 3 题图

3. B　**提示：**如图，设 $AE=x$，则 $BE=2-x$. 由 $2^2-x^2=1-(2-x)^2$，得 $x=\frac{7}{4}$. 从而 $AF=DG=CE=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$GB=AG+AB=DF+AB=\frac{7}{4}+2=\frac{15}{4}$，故 $BD=\sqrt{15}$.

4. 12 或 30，6 或 30.　**提示：**由 $x^2+(x+1)^2=25$，得 $x=3$.

由 $x^2+25=(x+1)^2$，得 $x=12$.

5. $\frac{10}{3}$.　**提示：**作 $DE\perp AB$ 于点 E，设 $CD=x$，

则 $BE=13-5=8$，$DE=x$，$BD=12-x$，

由 $x^2+8^2=(12-x)^2$，得 $x=\frac{10}{3}$.

6. (6 048，2).　**提示：**由题意可知 $OA=\frac{3}{2}$，$OB=2$.

由勾股定理得 $AB=\frac{5}{2}$.　∴$OC_2=2+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=6$.

∴点 B_2 的坐标为(6，2). 同理可得 $B_4(12,2)$，$B_6(18,2)$，…，

∴点 $B_{2\,016}$的横坐标为 1 008×6=6 048，

∴点 $B_{2\,016}$的坐标为(6 048，2).

7. 如图，延长 CB，DE 相交于点 F.

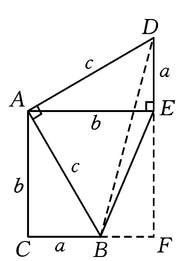
连接 DB，则 $BF=b-a$.

∵$S_{四边形ABFD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BDF}$

$=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b+a)(b-a)$，

且 $S_{四边形ABFD}=S_{四边形ABFE}+S_{\triangle AED}$

$=\frac{1}{2}(b+b-a)b+\frac{1}{2}ab$，



第 7 题图

∴$\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}(b+a)(b-a)=\frac{1}{2}(b+b-a)b+\frac{1}{2}ab$.

∴$c^2=a^2+b^2$，即 $a^2+b^2=c^2$.

8. D　**提示：**①当$\angle C$ 是最大角时，有$\angle C<90°$，

∴$c<\sqrt{a^2+b^2}$，即 $c<\sqrt{10}$.

②当$\angle B$ 是最大角时，有$\angle B<90°$，

∴$b^2<a^2+c^2$，即 $9<1+c^2$，　∴$c>2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

∴第三边 c 的取值范围为$\sqrt{8}<c<\sqrt{10}$.

9. A　**提示：**由于三角形的三条高线的长度分别为 x,y,z，则其相应的三边 a,b,c 的比为 $a:b:c=\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$，故只有(12，15，20)为直角三角形.

10. D　**提示：**设 $AD=a$，$BD=b$. 可令 $AC=\sqrt{ax}$，

则 $BC=\sqrt{bx}$，由 $ax-a^2=bx-b^2$ 得

$(a-b)[x-(a+b)]=0$.　∴$a=b$ 或 $x=a+b$.

分别推出$\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

11. $\sqrt{10}$.　**提示：**作 $PE\perp AB$ 于点 E，$PF\perp BC$ 于点 F.

设 $PE=m$，$PF=n$，

则 $m^2+(5-n)^2=(\sqrt{5})^2$，$(5-m)^2+n^2=5^2$，

解得$(m,n)=(1,3)$，$(2,4)$.

当 $m=2$，$n=4$ 时，$PE>AE$，舍去. 故 $PB=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}$.

12. $4\sqrt{2}$.　**提示：**延长 BA 至点 E，设 $AE=BC=1$，连接 DE，可证$\triangle ADE\cong\triangle CDB$. 得$\triangle BDE$ 为等腰直角三角形，从而 $BD=DE=4\sqrt{2}$.

13. (1)如图，连接 AD.

∵$AB=AC$，

∴$\angle BAC=\angle ADB=90°$，

∴$\angle 3=\angle C$.

∵$ED\perp DF$，　$AD\perp BC$，

∴$\angle 1=\angle 2$.　∵$AD=CD$，

∴$\triangle ADE\cong\triangle CDF$(ASA).

∴$AE=FC$.　∵$AB=AC$，

∴$BE=AF$.

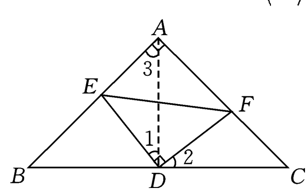
在 Rt$\triangle AEF$ 中，$AE^2+AF^2=EF^2$，

∴$BE^2+CF^2=EF^2$.

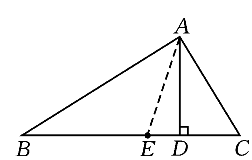
(2)由(1)知，$EF=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

又∵$\triangle ADE\cong\triangle CDF$，

∴$DE=DF$，　∴$S_{\triangle DEF}=\left(\frac{13}{2}\right)^2=\frac{169}{4}$.



第 13 题图



第 14 题图

14. (1)∵$\angle BAC=90°$，

∴$(BD+DC)^2=AB^2+AC^2$，

∴$BD^2+CD^2+2BD\cdot CD=AB^2+AC^2$，

∴$2BD\cdot CD=(AB^2-BD^2)+(AC^2-CD^2)$.

∵$AD\perp BC$，　∴$AB^2-BD^2=AC^2-CD^2=AD^2$.

∴$2BD\cdot CD=2AD^2$，

∴$AD^2=BD\cdot CD$.

(2)设 $BD=a$，$CD=b$. 由(1)得 $ab=AD^2$，　∴$AD=\sqrt{ab}$.

如图，取 BC 的中点 E，连接 AE.

∵$AE\geqslant AD$，当且仅当 E，D 重合时取等号，此时 $a=b$，

又∵$AE=\frac{1}{2}BC=\frac{a+b}{2}$，

$\therefore \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(3) $\because a,b,c>0$ 且 $b^2+ab+ac+bc=4$，

$\therefore b(a+b)+c(a+b)=4$，即 $(a+b)(b+c)=4$，

而 $a+2b+c=(a+b)+(b+c) \geqslant 2\sqrt{(a+b)(b+c)}=2\sqrt{4}=4$，

$\therefore a+2b+c$ 的最小值为 4，当且仅当 $a+b=b+c$，即 $a=c$ 时成立.

第 20 讲　勾股定理(二)

例 1　如图 D20-1，连接 AC.

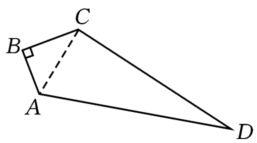


图 D20-1

$\because \angle B=90°$，　$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

在 $\triangle ACD$ 中，　$\because 5^2+12^2=169=13^2$，　$\therefore AC^2+CD^2=AD^2$.

$\therefore \angle ACD=90°$.

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times5\times12=36$.

例 2　$15^2+112^2=113^2$.

例 3　B　**提示**：对于①，　$\because a^2+b^2=c^2$，即两边之和等于第三边，不能构成三角形，故①错；

对于②，　$\because (\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2=a+b>c=(\sqrt{c})^2$，故②错；

对于③，由面积公式知 $ab=ch$，

$\therefore a^2b^2=c^2h^2$，　$\therefore \frac{1}{h^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}$，

$\therefore \frac{1}{h^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$，故③对.

例 4　$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，　$\therefore BA=BC$. 可将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 60°得到 $\triangle BEA$，连接 EP，如图 D20-2 所示，

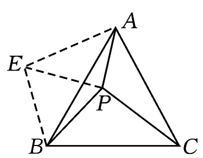


图 D20-2

$\therefore BE=BP=4, AE=PC=5, \angle PBE=60°$，

$\therefore \triangle BPE$ 为等边三角形，

$\therefore PE=PB=4, \angle BPE=60°$.

在 $\triangle AEP$ 中，$AE=5, AP=3, PE=4$，　$\therefore PE^2+PA^2=AE^2$，

$\therefore \triangle APE$ 为直角三角形，且 $\angle APE=90°$，

$\therefore \angle APB=\angle APE+\angle BPE=90°+60°=150°$.

[变式题组]

1. D　**提示**：$\because 1+2=3$，不能构成三角形，　$\therefore$ A 错误；　$\because 1^2+1^2=(\sqrt{2})^2$，　$\therefore$ 三角形为等腰直角三角形，故 B 错误；底边上的高是 $\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，可知这个三角形是顶角为 120°，底角为 30°的等腰三角形，故 C 错误；　$\because 1^2+(\sqrt{3})^2=2^2$，可知这个三角形是三个角分别为 30°，60°，90°的直角三角形，符合"智慧三角形"的定义，故 D 正确.

2. B　**提示**：$\because 15^2+20^2=25^2$，　$\therefore$ 此三角形为直角三角形.

故最长边上的高为 $h=\frac{15\times20}{25}=12$.

3. B　**提示**：$\because (2n^2+2n+1)^2-(2n^2+2n)^2=(2n^2+2n+1+2n^2+2n)(2n^2+2n+1-2n^2-2n)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$，

$\therefore$ 三边构成直角三角形.

4. B　**提示**："三角形数"1，3，6，10，…，可写成 1，1+2，1+2+3，1+2+3+4，…；"正方形数"1，4，9，16，…，可写成 1^2，2^2，3^2，4^2，…. 故第 n 个三角形数为 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$；第 n 个正方形数为 n^2. 故第 $n-1$ 个三角形数与第 n 个三角形数之和为第 n 个正方形数，形式为 $\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=n^2$. 当 $n=9$ 时，$36+45=81$.

5. (1) n^2-1，$2n$，n^2+1.

(2) 以 a,b,c 为边的三角形是直角三角形. 理由如下：

$\because a^2+b^2=(n^2-1)^2+(2n)^2=n^4-2n^2+1+4n^2=(n^2+1)^2=c^2$，

$\therefore$ 以 a,b,c 为边的三角形是直角三角形.

6. 设这 7 个连续正整数正中间的数为 n，依题意有 $(n-3)^2+(n-2)^2+(n-1)^2+n^2=(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$.

整理得 $n^2-24n=0$，即 $n(n-24)=0$.　$\because n\neq0$，　$\therefore n=24$.

故满足条件的整式为 $21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2$.

7. $\because a^2+b^2+c^2+338=10a+24b+26c$，

$\therefore a^2-10a+25+b^2-24b+144+c^2-26c+169=0$，

即 $(a-5)^2+(b-12)^2+(c-13)^2=0$.

$\because (a-5)^2\geqslant0, (b-12)^2\geqslant0, (c-13)^2\geqslant0$，

$\therefore (a-5)^2=0, (b-12)^2=0, (c-13)^2=0$.

$\therefore a=5, b=12, c=13$.

$\because 5^2+12^2=13^2$，　$\therefore a^2+b^2=c^2$，

$\therefore$ 该三角形为直角三角形.

8. (1) 锐角，钝角.　(2) $>$，$<$.

(3) $\because c$ 为最长边，　$\therefore 4\leqslant c<6$.

当 $a^2+b^2>c^2$，$c^2<20$，即 $4\leqslant c<2\sqrt{5}$ 时，$\triangle ABC$ 为锐角三角形；当 $a^2+b^2=c^2$，$c^2=20$，即 $c=2\sqrt{5}$ 时，$\triangle ABC$ 为直角三角形；当 $a^2+b^2<c^2$，$c^2>20$，即 $2\sqrt{5}<c<6$ 时，$\triangle ABC$ 为钝角三角形.

9. **方法一**　如图 D20-3①，过点 B 作 $BE\perp BP$，使 $BE=BP$，连接 EC，PE.

先证 $\triangle ABP\cong\triangle CBE$，得 $CE=AP=1$.

在 $\triangle PEC$ 中，

$\because PE=2\sqrt{2}, EC=1, PC=3, (2\sqrt{2})^2+1^2=3^2$，

$\therefore PE^2+EC^2=PC^2$.

$\therefore \angle PEC=90°$.

$\therefore \angle BEC=\angle BEP+\angle PEC=45°+90°=135°$.

$\therefore \angle APB=\angle BEC=135°$.

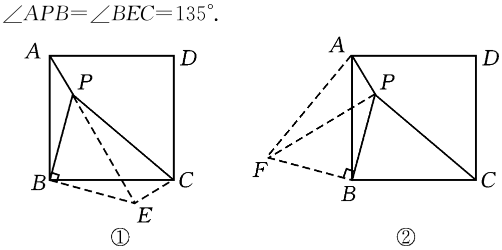


图 D20-3

方法二　如图 D20-3②，过点 B 作 $BF\perp BP$ 于点 B，使 $BF=BP$，连接 AF，PF.

先证 $\triangle CBP\cong\triangle ABF$，

再证$\triangle AFP$中$\angle FPA=90^\circ$.

$\therefore \angle APB=\angle BPF+\angle APF=135^\circ$.

10. 如图 D20-4,延长 AD 到点 E,使 $AD=DE$,连接 CE,则$\triangle ABD\cong\triangle ECD$.

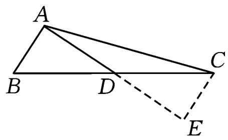


图 D20-4

$\therefore DE=AD=6,CE=AB=5$,

$\therefore AE=2DE=12,CE=5,AC=13$.

$\because 5^2+12^2=13^2$,

$\therefore AE^2+CE^2=AC^2$,

$\therefore \angle AEC=90^\circ$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle CED}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ACE}$

$=\frac{1}{2}\times12\times5=30$.

$\because \angle AEC=90^\circ$, $\therefore \angle BAD=90^\circ$,

$\therefore BD^2=AB^2+AD^2=5^2+6^2$.

$\therefore BD=\sqrt{61},BC=2BD=2\sqrt{61}$.

[能力平台]

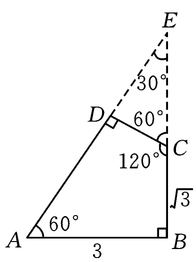
1. C 提示:$\because DE$为折痕, $\therefore AE=EB=5$ cm,

设 $CD=x$ cm,则 $BD=(8-x)$ cm$=AD$.

在 Rt$\triangle ACD$ 中,$6^2+x^2=(8-x)^2$,

$\therefore x=\frac{7}{4}$ cm,即 $CD=\frac{7}{4}$ cm.

2. B 提示:延长 AD,BC 交于点 E,则在 Rt$\triangle ABE$ 中,$\angle E=30^\circ$,$\angle A=60^\circ$,且 $AB=3$,



第 2 题图

$\therefore AE=6,BE=3\sqrt{3}$,且 $BC=\sqrt{3}$,

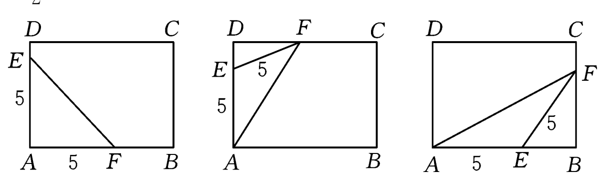
$\therefore CE=2\sqrt{3}$,

$\therefore CD=\sqrt{3},DE=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$,

$\therefore AD=6-3=3$.

3. 10. 提示:$S_{\triangle EJH}=24,S_{\text{正方形}EFGH}=24\times4+2\times2=100$.

4. $\frac{25}{2}$或 $5\sqrt{6}$或 10. 提示:裁剪如下图:



第 4 题图

5. $4\sqrt{3}$或 $4\sqrt{7}$或 4. 提示:$\angle BAM=90^\circ$或$\angle ABM=90^\circ$或$\angle AMB=90^\circ$.

6. (1)$\because \angle DAE=\angle CAE+\angle CAD,\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$,

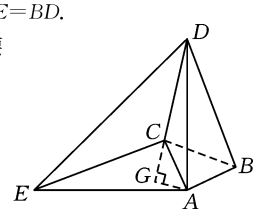
$\angle DAE=\angle BAC$,

$\therefore \angle CAE=\angle BAD$.

在$\triangle ACE$和$\triangle ABD$中,$\begin{cases}AC=AB,\\ \angle CAE=\angle BAD,\\ AE=AD,\end{cases}$

$\therefore \triangle ACE\cong\triangle ABD$(SAS). $\therefore CE=BD$.

(2)如图,连接 BC,$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形.



第 6 题图

$\therefore BC=\sqrt{2}AC=2\sqrt{2}$.

$\therefore BC^2+CD^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2$

$=16=BD^2$,

$\therefore \angle DCB=90^\circ$,

$\therefore \angle ACD=90^\circ+45^\circ=135^\circ$.

(3)如图,过点 A 作 $AG\perp DC$,交 DC 的延长线于点 G,$\angle GCA=45^\circ$,

$\therefore AG=GC=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=\sqrt{2},DG=DC+CG=3\sqrt{2}$.

在 Rt$\triangle ADG$ 中,$AD=\sqrt{DG^2+AG^2}=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{5}$,

$\therefore DE=\sqrt{2}AD=2\sqrt{10}$.

7. 如图,作 $AD\perp BC$,交 BC 于点 D.

$\because \triangle ABC$ 为等腰三角形, $\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=4$ cm.

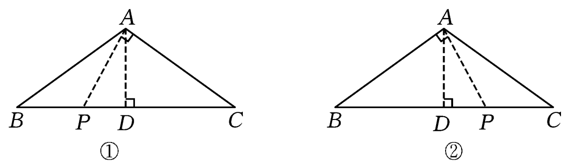
在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=3$ cm.

(1)如图①,当点 P 运动 t 秒,$PA\perp AC$ 时,

$\because AP^2=PD^2+AD^2=PC^2-AC^2$,

$\therefore PD^2+AD^2=PC^2-AC^2$. $\therefore PD^2+3^2=(PD+4)^2-5^2$.

$\therefore PD=2.25$ cm, $\therefore BP=4-2.25=1.75=0.25t$. $\therefore t=7$ s.



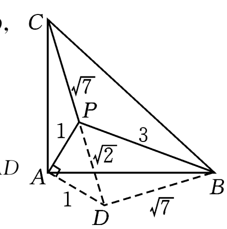
第 7 题图

(2)如图②,当点 P 运动 t 秒后,$PA\perp AB$ 时,同理可证 $PD=2.25$ cm,

$\therefore BP=4+2.25=6.25=0.25t$, $\therefore t=25$ s.

$\therefore$点 P 运动的时间为 7 s 或 25 s.

8. 如图,过点 A 作 $AD\perp AP$,使 $AP=AD$,连接 PD,DB.



第 8 题图

$\because AP\perp AD,AP=AD=1$,

$\therefore PD=\sqrt{AP^2+AD^2}=\sqrt{2}$.

$\because \angle CAP+\angle PAB=\angle PAB+\angle BAD$

$=90^\circ$,

$\therefore \angle CAP=\angle BAD$.

$\because CA=AB,AP=AD$,

$\therefore \triangle CAP\cong\triangle BAD$. $\therefore DB=CP=\sqrt{7}$.

$\because (\sqrt{2})^2+(\sqrt{7})^2=3^2$,

$\therefore PD^2+DB^2=PB^2$, $\therefore \angle PDB=90^\circ$.

$\therefore \angle CPA=\angle ADB=45^\circ+90^\circ=135^\circ$.

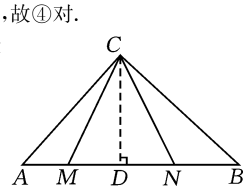
9. A 提示:连接 DF,易证$\triangle AEC\cong\triangle AFB$, $\therefore CE=BF$. 故①对. 再证$\triangle DAE\cong\triangle DAF$, $\therefore DF=DE$. 在 Rt$\triangle BFD$ 中,$BF^2+BD^2=DF^2$, $\therefore BD^2+CE^2=DE^2$,故②对.

$\because \triangle ADE$ 与$\triangle ADF$ 关于 AD 成轴对称, $\therefore EF\perp AD$.

$\therefore S_{\text{四边形}AEDF}=\frac{1}{2}AD\cdot EF$,故 $S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}S_{\text{四边形}AEDF}=\frac{1}{4}AD\cdot EF$,故③对. 在 Rt$\triangle BFE$ 中,$BE^2+BF^2=EF^2$,

$\therefore BE^2+CE^2=AE^2+AF^2=2AE^2$,故④对.

10. C 提示:对于②,如图,过点 C 作 $CD\perp AB$ 于点 D,



第 10 题图

则 $AD=DB=CD$.

$\because CM^2-CN^2=(MD^2+CD^2)-(CD^2+DN^2)=DM^2-DN^2$,

$NB\cdot NA-MB\cdot MA=(BD-DN)(AD+DN)-(BD+DM)(AD-DM)=(BD-DN)\cdot$

$(BD+DN)-(BD+DM)(BD-DM)=BD^2-DN^2-(BD^2-DM^2)=DM^2-DN^2$， $\therefore CM^2-CN^2=NB\cdot NA-MB\cdot MA$，故②对. ①③也对，理由略.

11. 17.　**提示：**在 AB 上截取 $AE=AD=9$，过点 C 作 $CF\perp AB$ 于点 F，则 $CF=8$，$AC=17$.

12. 16.　**提示：**过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，则 $AP^2+BP\cdot PC=AD^2+PD^2+(BD-DP)(DC+PD)=AB^2$.

13. (1) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{(ch)^2}=\frac{1}{h^2}$.

(2) $$(c+h)-(a+b)=\left(c+\frac{ab}{c}\right)-(a+b)=\frac{c^2+ab-ac-bc}{c}=\frac{(c-a)(c-b)}{c}.$$

$\because c>a, c>b$， $\therefore (c+h)-(a+b)>0$. $\therefore a+b<c+h$.

(3) $\because (c+h)^2=c^2+2ch+h^2=a^2+b^2+2ab+h^2=(a+b)^2+h^2$，

$\therefore$ 以 $a+b, h, c+h$ 为边的三角形是直角三角形.

14. 如图，过点 A 作 $AE\parallel BC$ 交 CD 于点 E，过点 B 作 $BF\perp AE$ 于点 F，作 $CG\perp AE$ 于点 G，则 $\angle 1=45°$，$\angle 2=60°$，则 $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形，四边形 $BCGF$ 为长方形.

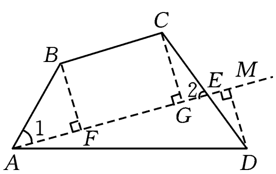
又 $\because AB=\sqrt{6}$，$BC=5-\sqrt{3}$， $\therefore BF=AF=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{3}$，

$\therefore CG=BF=\sqrt{3}$. $\therefore CE=\frac{2}{\sqrt{3}}CG=2$，$EG=\frac{1}{\sqrt{3}}CG=1$.

$\therefore AE=AF+FG+GE=AF+BC+GE=6$，$DE=CD-EC=6-2=4$，过点 D 作 $DM\perp AE$，交 AE 的延长线于点 M，则 $\angle MED=\angle 2=60°$.

$\therefore EM=\frac{1}{2}DE=2$，$DM=\frac{\sqrt{3}}{2}DE=2\sqrt{3}$.

在 $Rt\triangle AMD$ 中，$AD=\sqrt{AM^2+DM^2}=\sqrt{(6+2)^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{19}$.



第 14 题图

第 21 讲　平行四边形

例 1　C　**提示：**$\because AB=8$，$AD=6$，

折叠纸片，使得 AD 边落在 AB 边上，

$\therefore BD=8-6=2$，$\angle EAD=45°$.

又 $\because \triangle AED$ 沿 DE 向右翻折，AE 与 BC 的交点为 F，

$\therefore AB=AD-DB=6-2=4$，

$\because \triangle ABF$ 为等腰直角三角形.

$\therefore BF=AB=4$， $\therefore CF=BC-BF=6-4=2$，

而 $EC=DB=2$， $\therefore S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

例 2　(1)①与②；①与③；①与④；①与⑤；②与⑤；④与⑤.

(2) a. ②与③的反例：如图 D21-1①；

b. ②与④的反例：如图 D21-1②；

c. ③与④的反例：如图 D21-1③；

d. ③与⑤的反例：如图 D21-1④.

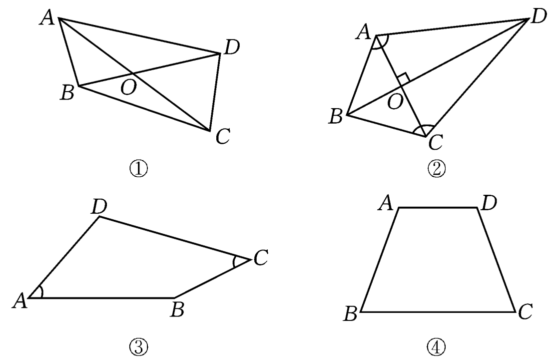


图 D21-1

例 3　D　**提示：**如图 D21-2①，A 选项，延长 AC，BE 交于点 S，

$\because \angle CAD=\angle EDB=45°$，

$\therefore AS\parallel ED$，则 $SC\parallel DE$.

同理 $SE\parallel CD$， $\therefore$ 四边形 $SCDE$ 是平行四边形，

$\therefore SE=CD$，$DE=CS$，

则此人走的路线长是 $AC+CD+DE+EB=AC+CS+SE+EB=AS+BS$.

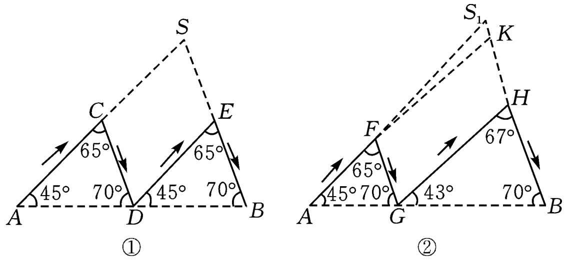


图 D21-2

如图 D21-2②，B 选项，延长 AF，BH 交于点 S_1，作 $FK\parallel GH$，交 BH 的延长线于点 K，

$\because \angle SAB=\angle S_1AB=45°$，$\angle SBA=\angle S_1BA=70°$，$AB=AB$，

$\therefore \triangle SAB\cong\triangle S_1AB$， $\therefore AS=AS_1$，$BS=BS_1$.

$\because \angle FGH=67°=\angle GHB$， $\therefore FG\parallel KH$.

$\because FK\parallel GH$， $\therefore$ 四边形 $FGHK$ 是平行四边形，

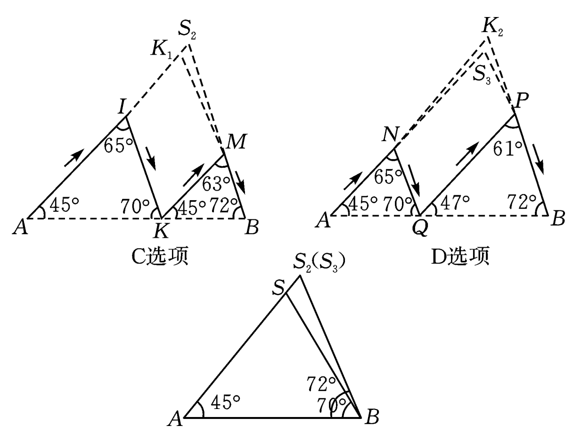
$\therefore FK=GH$，$FG=KH$，

则此人走的路线长是 $AF+FG+GH+HB=AF+FK+KH+HB$.

$\because FS_1+S_1K>FK$，

$\therefore AS+BS>AF+FK+KH+HB$，

即 $AC+CD+DE+EB>AF+FG+GH+HB$.



同理可得 $AI+IK+KM+MB<AS_2+BS_2<AN+NQ+QP+PB$，又 $AS+BS<AS_2+BS_2$，故选 D.

例 4 如图 D21-3，取 BC 的中点 D，连接 ND 和 MD，于是得到等式 $ND \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}BF$，$MD \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} \frac{1}{2}CE$，$\because BF=CE$，$\therefore MD=ND$.

$\therefore \angle 1=\angle 2$，又$\because \angle 1=\angle 3$，$\angle 2=\angle 4$，

$\therefore \angle 3=\angle 4$. $\therefore AP=AQ$.

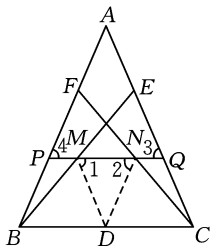


图 D21-3

［变式题组］

1. D **提示：** 当 $\angle BAD$ 为锐角时（如图 D21-4①），

$\because S_{\square ABCD}=AE\cdot BC=15$，$\therefore AE=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$.

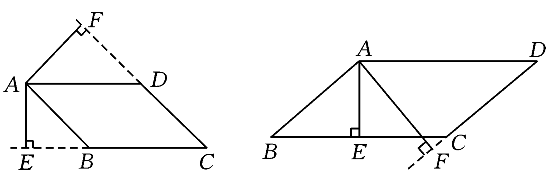
$\therefore EB=\sqrt{5^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$\therefore CE=BC+EB=6+\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

同理 $CF=CD+DF=5+3\sqrt{3}$.

$\therefore CE+CF=6+\frac{5}{2}\sqrt{3}+5+3\sqrt{3}=11+\frac{11}{2}\sqrt{3}$.

当 $\angle BAD$ 为钝角时（如图 D21-4②），$CE=BC-BE=6-\frac{5}{2}\sqrt{3}$，

$CF=3\sqrt{3}-5$，$\therefore CE+CF=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$.



① ②

图 D21-4

2. 4. **提示：** $\because O$，E 分别为 AC，AD 的中点，

$\therefore OE=\frac{1}{2}CD$，$ED=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC$，$OD=\frac{1}{2}BD$，

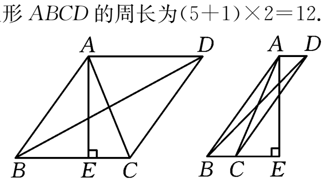
$\therefore OE+OD+ED=\frac{1}{2}(CD+BC+BD)=\frac{1}{2}\times 8=4$.

3. 12 或 20. **提示：** 连接 AC，BD，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，有两种情形.

如图 D21-5①，当 $\angle ACB$ 为锐角时，$EB=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，$EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$，$\therefore BC=EB+EC=5$，平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $(5+5)\times 2=20$.

同理，如图 D21-5②，当 $\angle ACB$ 为钝角时，$BC=BE-CE=3-2=1$，

$\therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $(5+1)\times 2=12$.



① ②

图 D21-5

4. B **提示：** $\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$AB=3$，$BC=4$，

$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$.

$\because$ 四边形 $ADCE$ 为平行四边形，

$\therefore OD=OE$，$OA=OC=2.5$，

$\therefore$ 当 OD 取最小值时，线段 DE 最短，此时 $OD\perp BC$，

$\therefore OD=\frac{1}{2}AB=1.5$，$\therefore ED=2OD=3$.

5. (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore OC=OA$，$AB\parallel CD$，$\therefore \angle OAB=\angle OCD$，

又 $\angle COE=\angle AOF$，

$\therefore \triangle OAF\cong\triangle OCE$（ASA）. $\therefore OE=OF$.

(2) 由(1)知，$\triangle OAF\cong\triangle OCE$（ASA）.

$\therefore AF=CE$，$EF+FB+BC+CE=OE+OF+FB+BC+AF=2OE+AB+BC=1.5\times 2+5+4=12$.

(3) 20.

6. (1) $\because$ 在 Rt$\triangle OAB$ 中，点 D 为 OB 的中点，

$\therefore AD=\frac{1}{2}OB$，$OD=BD=\frac{1}{2}OB$，$\therefore DO=DA$.

$\therefore \angle DAO=\angle DOA=30^\circ$，$\angle EOA=90^\circ$. $\therefore \angle AEO=60^\circ$.

又$\because \triangle OBC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle BCO=\angle AEO=60^\circ$. $\therefore BC\parallel AE$.

$\because \angle BAO=\angle COA=90^\circ$，

$\therefore CO\parallel AB$，即四边形 $ABCE$ 为平行四边形.

(2) 设 $OG=x$，由折叠可知 $AG=GC=8-x$.

在 Rt$\triangle ABO$ 中，

$\because \angle OAB=90^\circ$，$\angle AOB=30^\circ$，$BO=8$，$AB=4$，

$\therefore AO=\sqrt{OB^2-AB^2}=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle OAG$ 中，$OG^2+OA^2=AG^2$，

$\therefore x^2+(4\sqrt{3})^2=(8-x)^2$. $\therefore x=1$，即 $OG=1$.

7. (1) 是真命题.

证明如下：$\because AB\parallel CD$，$\therefore \angle ABO=\angle CDO$，

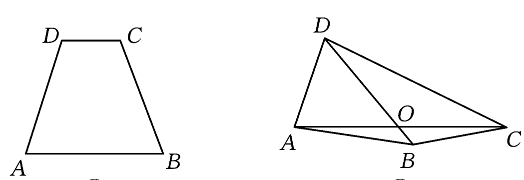
又$\because \angle AOB=\angle COD$，$AO=CO$，$\therefore \triangle ABO\cong\triangle CDO$.

$\therefore AB=CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

(2) 假命题：①四边形 $ABCD$ 中，如果 $AB\parallel CD$，$AD=BC$，那么四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

②四边形 $ABCD$ 中，AC 交 BD 于点 O，如果 $AO=CO$，$AD=BC$，那么四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

反例：



① ②

图 D21-6

如图 D21-6①，四边形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD$，$AD=BC$，但四边形$ABCD$不是平行四边形.

如图 D21-6②，四边形 $ABCD$ 中，$AO=CO$，$AD=BC$，但四边形 $ABCD$ 不是平行四边形.

8. (1) $\because$ 点 F 为 CE 的中点，$\therefore CE=CD=2CF=4$.

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，$\therefore AB=CD=4$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，由勾股定理得 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{7}$.

(2) 如图 D21-7，延长 AG，BC 交于点 H.

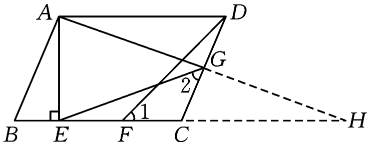


图 D21-7

$\because CE=CD,\angle 2=\angle 1,\angle ECG=\angle DCF$,

$\therefore \triangle CEG\cong\triangle CDF$, $\therefore CG=CF$.

$\because$点 F 为 CE 的中点,即 $CF=EF=\frac{1}{2}CE,CE=CD$,

$\therefore CG=GD=\frac{1}{2}CD$.

$\because AD/\!/BC$, $\therefore \angle GAD=\angle H,\angle ADG=\angle HCG$,

$\therefore \triangle ADG\cong\triangle HCG$, $\therefore AG=HG$.

$\because \angle AEH=90^\circ$, $\therefore EG=\frac{1}{2}AH=GH$,

$\therefore \angle GEH=\angle H=\frac{1}{2}\angle AGE$,即$\angle CEG=\frac{1}{2}\angle AGE$.

9. 取 AB 的中点 H,连接 MH,NH.

由三角形中位线的性质知 $MH\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}BD,NH\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}AC$.

$\therefore MH=NH$, $\therefore \angle NMH=\angle MNH$.

又$\because \angle EGF=\angle NMH,\angle EFN=\angle MNH$,

$\therefore \angle EGF=\angle EFN$. $\therefore EF=EG$.

[能力平台]

1. D **提示:**$\because CE=CB$ 且 $CF\perp EB$, $\therefore \angle CEB=\angle CBE$.

又 $CD/\!/AB$, $\therefore \angle EBF=\angle CBE$, $\therefore BE$ 平分$\angle CBF$,①正确.

$\because CF$ 为 BE 的垂直平分线,且 $CE=CB$,

$\therefore CF$ 平分$\angle DCB$,②正确.

易知 BE 垂直平分 CF,③正确.

$\because$点 P 在 CF 的垂直平分线上, $\therefore PF=PC$,④正确.

2. 100. **提示:**过点 D 作 $DE/\!/AC$,交 BC 的延长线于点 E,

$\therefore$四边形 $ACED$ 为平行四边形,由等底同高的两个三角形面积相等,得出 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DCE}$. $\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BDE}$.

$\because AC\perp BD$, $\therefore \triangle BDE$ 为直角三角形.

$\because AD=6,BC=14$, $\therefore BE=20$.

$\because S_{四边形ABCD}=S_{\triangle BDE}$,

$\therefore$当$\triangle BDE$ 为等腰直角三角形时,$S_{最大}=100$.

3. 3. **提示:**由题知 BQ 为 AE 的垂直平分线, $\therefore AB=BE$.

由题意知 CP 为 AD 的垂直平分线, $\therefore AC=CD$.

$\because C_{\triangle ABC}=26$,且 $BC=10$, $\therefore AB+AC=16$.

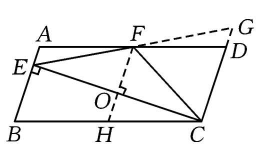
$\therefore AB+AC=BE+CD=16$. $\therefore BD+DE+DE+CE=16$.

$\therefore DE=6$. 又点 P,Q 分别为 AD,AE 的中点,

$\therefore PQ=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\times 6=3$.

4. $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. **提示:**$\because \angle BAC=90^\circ$, $\therefore S_{\square ABCD}=BC\cdot AE=AB\cdot AC$.

5. ①②④. **提示:**如图,过点 F 作 $FH/\!/AB$ 交 BC 于点 H,交 CE 于点 O,延长 EF,CD 交于点 G.



第 5 题图

$\because EF=FG$, $\therefore S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CFG}$.

$\because \triangle AEF\cong\triangle DGF$,

$\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle DGF}$,

$\therefore 2S_{\triangle CEF}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle CFG}=S_{\triangle CEF}+S_{\triangle CDF}+S_{\triangle AEF}=S_{梯形AECD}>\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$.

而 $S_{\triangle BEC}<\frac{1}{2}S_{\square ABCD}$, $\therefore S_{\triangle BEC}<2S_{\triangle CEF}$,故③错误.

由题意知,$FH/\!/AB$,

$\therefore \angle AEF=\angle EFH,\angle BEC=\angle EOF=90^\circ$.

又$\because AB/\!/CD$, $\therefore \angle DCB=\angle CEB=90^\circ$.

$\because EF=FG$. $\therefore CF=\frac{1}{2}EG=EF$,故②正确.

$\because EF=CF$, $\therefore OF$ 垂直平分 CE,

易证 $\mathrm{Rt}\triangle EOF\cong\mathrm{Rt}\triangle COF$.

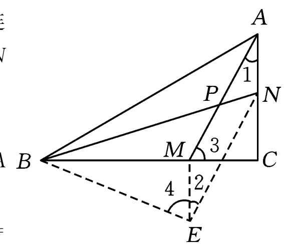
$\therefore \angle EFH=\angle CFH$.

由四边形 $CDFH$ 是菱形,可得$\angle CFH=\angle CFD,\angle DCF=\frac{1}{2}\angle BCD$,故①正确.

$\therefore \angle AEF=\angle EFH=\angle CFH=\angle CFD$,

即$\angle DFE=3\angle AEF$,故④正确.

6. 如图,过点 M 作 $ME\underline{\underline{/\!/}}AN$,连接 NE,BE,则四边形 $AMEN$ 为平行四边形,



第 6 题图

得 $NE=AM,ME\perp BC$.

$\because ME=CM,\angle EMB=\angle MCA=90^\circ,BM=AC$.

$\therefore \triangle BEM\cong\triangle AMC$,得 $BE=AM=NE,\angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4$.

$\because \angle 1+\angle 3=90^\circ$,

$\therefore \angle 2+\angle 4=90^\circ$且 $BE=NE$.

$\therefore \triangle BEN$ 为等腰直角三角形,$\angle BNE=45^\circ$.

$\because AM/\!/NE$, $\therefore \angle BPM=\angle BNE=45^\circ$.

7. (1)$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB/\!/CD$,

$\therefore \angle CDB=\angle ABD$,即$\angle FDO=\angle EBO$.

在$\triangle DOF$ 与$\triangle BOE$ 中, $\because\begin{cases}\angle DOF=\angle BOE,\\ \angle FDO=\angle EBO,\\ DF=BE,\end{cases}$

$\therefore \triangle BOE\cong\triangle DOF$(AAS), $\therefore BO=DO$.

(2)$\because AB/\!/CD$,

$\therefore \angle GDF=\angle A,\angle GFD=\angle GEA$,

$\because EF\perp AB$, $\therefore \angle GFD=90^\circ$.

$\because \angle A=45^\circ$, $\therefore \angle GDF=45^\circ$, $\therefore \angle G=45^\circ$, $\therefore DF=FG$.

$\because FG=1$ $\therefore DF=1,DG=\sqrt{2}$.

$\because \angle BDG=90^\circ$, $\therefore DO=BO=DG=\sqrt{2}$, $\therefore BD=2\sqrt{2}$.

$\because \angle A=45^\circ,\angle ADB=90^\circ$, $\therefore AD=BD=2\sqrt{2}$.

8. A **提示:**由三角形的两边之和大于第三边,两边之差小于第三边可知,$1=\frac{12-10}{2}<m<\frac{10+12}{2}=11$,即 $1<m<11$.

9. C **提示:**设 AE 交 BF 于点 H.

$\because AB=AF$,且 AG 平分$\angle BAF$.

$\therefore AH\perp BF$ 且平分 BF.

由 $BF=6,AB=5$ 可知,$AH=4$, $\therefore AE=2AH=8$.

10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **提示:**当$\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$时,$\angle CAB=30^\circ$,$\triangle ABC\cong\triangle EAF,EF=AC=AD$. 又 $EF/\!/AD$,故四边形 $ADFE$ 是平行四边形.

11. 5. **提示:**设直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 D. 过点 B 作 BE 垂直直线 $x=4$ 于点 E,则$\triangle AOD\cong\triangle CBE,BE=OD=1$,表明点

B 总在直线 $x=5$ 上. 当点 B 在 x 轴上时,对角线 OB 的长最小.

12. (1)当 $\alpha=60°$时,$BE=5$,$BC=10$,则 $CE=5\sqrt{3}$.

(2)连接 CF,延长 CF,BA 交于点 G.

易证$\triangle DCF\cong\triangle AGF$,即点 F 为 GC 的中点.

$\therefore EF=GF=FC$,$AG=CD=5$.

当 $60°<\alpha<90°$时,点 E 在线段 AB 上,且异于 A,B 两点.

$\because F$ 为 AD 的中点, $\therefore AF=5$,

$\therefore\angle G=\angle AFG=\angle CFD=\angle AEF$,

$\therefore\angle EFD=\angle EFC+\angle CFD=2\angle AEF+\angle CFD=3\angle AEF$,

即存在 $k=3$,使$\angle EFD=3\angle AEF$ 成立.

13. (1)$AF=5$.

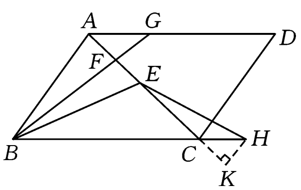
(2)如图,过点 H 作 $HK\perp AC$ 交 AC 的延长线于点 K,

则$\triangle AFG\cong\triangle HKC$,且都为等腰直角三角形,

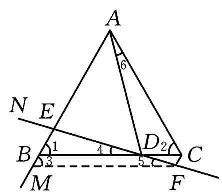
$\therefore AF=EF=CK=HK$. 又$\triangle BFC$ 为等腰直角三角形.

$\therefore BF=CF=CE+EF=CE+CK=EK$,

$\triangle BEF\cong\triangle EHK$,故 $EB=EH$.



第 13 题图



第 14 题图

14. (1)如图,在等边$\triangle ABC$ 中,

$BC=AC$,$\angle 1=\angle 2=60°$,

$\because\angle ADN=60°$,$\angle ADN+\angle 4=\angle 2+\angle 6$,

$\therefore\angle 4=\angle 6$.

$\because FM\parallel BC$,$CF\parallel AB$,

$\therefore$四边形 $BMFC$ 为平行四边形,$\angle 1=\angle 3$,$\angle 4=\angle 5$,

$\therefore BC=FM$,$CF=BM$,$\angle 6=\angle 5$,$\angle 3=\angle 2$.

$\therefore\triangle ADC\cong\triangle FEM$(ASA). $\therefore CD=EM$,

$\therefore CF+BE=BM+BE=EM=CD$.

(2)$CF+CD=BE$,$CF=CD+BE$.

(3)$BE=8$,$CD=4$ 或 8.

第 22 讲 矩形

例 1 (1)在矩形 $ABCD$ 中,$AB\parallel CD$,

$\therefore\angle EAO=\angle FCO$.

又$\because\angle AOE=\angle COF$,$AE=CF$,

$\therefore\triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS). $\therefore OE=OF$.

(2)连接 OB, $\because BE=BF$,$OE=OF$, $\therefore BO\perp EF$.

$\therefore$在 Rt$\triangle BEO$ 中,$\angle BEF+\angle ABO=90°$,

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

由矩形的性质知 $OA=OB=OC$,

$\therefore\angle BAC=\angle ABO$.

又$\because\angle BEF=2\angle BAC$,

即 $2\angle BAC+\angle BAC=90°$,解得$\angle BAC=30°$.

$\because BC=2\sqrt{3}$, $\therefore AC=2BC=4\sqrt{3}$.

$\therefore AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{(4\sqrt{3})^2-(2\sqrt{3})^2}=6$.

例 2 (1)因为 $EF\parallel BC$,所以$\angle BCE=\angle OCE=\angle OEC$.

所以 $OE=OC$,作 BC 的延长线 CD,$\angle FCD=\angle CFO=\angle FCO$,

所以 $OF=OC$,即 $EO=FO$.

(2)当点 O 运动到 AC 的中点时,由(1)知 $OA=OC=OE=OF$.

又 CE 和 CF 分别是$\angle BCA$ 的内角、外角平分线,所以$\angle ECF=90°$. 故当点 O 运动到 AC 的中点时,四边形 $AECF$ 为矩形.

例 3 3 或 6. **提示:**(1)当$\angle EFC=90°$时,如图 D22-1①,

$\because\angle AFE=\angle B=90°$,$\angle EFC=90°$, $\therefore$点 A,F,C 共线.

$\because$矩形$ABCD$的边 $AD=8$, $\therefore BC=AD=8$.

在 Rt$\triangle ABC$ 中,$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$.

设 $BE=x$,则 $CE=BC-BE=8-x$,

由翻折的性质得 $AF=AB=6$,$EF=BE=x$.

$\therefore CF=AC-AF=10-6=4$,

在 Rt$\triangle CEF$ 中,$EF^2+CF^2=CE^2$,

即 $x^2+4^2=(8-x)^2$,解得 $x=3$,即 $BE=3$.

(2)当$\angle CEF=90°$时,如图 D22-1②,由翻折的性质得,$\angle AEB=\angle AEF=\frac{1}{2}\times 90°=45°$, $\therefore$四边形 $ABEF$ 是正方形,

$\therefore BE=AB=6$. 综上所述,BE 的长为 3 或 6.

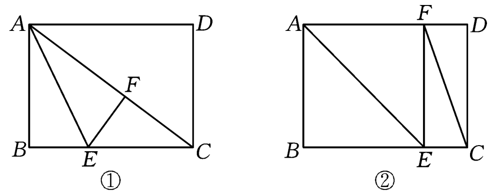


图 D22-1

例 4 C **提示:**对于①, $\because AD\parallel BC$, $\therefore\angle ADB=\angle DBC$.

$\because\angle FBD=\angle DBC$, $\therefore\angle FBD=\angle ADB$, $\therefore BF=DF$,故①对;

对于②, $\because AD=BC=BE$, $\therefore AD-DF=BE-BF$,即$AF=EF$,

$\therefore\angle EAF=\angle AEF$. $\because\angle AFE=\angle BFD$, $\therefore\angle AEF=\angle EAF=\angle FBD=\angle FDB$, $\therefore AE\parallel BD$,

$\therefore$四边形 $ABDE$ 是等腰梯形,故②对;

对于③,图中只有 5 对全等三角形,

即$\triangle ABD\cong\triangle EDB$;$\triangle EDB\cong\triangle CDB$;$\triangle ABD\cong\triangle CDB$;$\triangle ABF\cong\triangle EDF$;$\triangle ABE\cong\triangle EDA$,故③错;

对于④,不妨设$BF=FD=x$,则 $AF=8-x$.

在 Rt$\triangle ABF$ 中,有 $x^2=(8-x)^2+6^2$, $\therefore x=\frac{25}{4}$,

$\therefore$四边形 $BCDF$ 的周长为 $2\times\frac{25}{4}+8+6=\frac{53}{2}$ cm,故④对;

对于⑤,分别过点 A,E 作 $AG\perp BD$ 于点 G,$EH\perp BD$ 于点 H. 易证得 $BG=DH=3.6$,

$\therefore AE=BD-BG-DH=10-3.6\times 2=2.8$,故⑤对. 综上所述,故选 C.

[变式题组]

1. 5 或 6. **提示:**如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=CD=4$,$BC=AD=6$. 如图 D22-2①,当 $PB=PC$ 时,点 P 是 BC 的中垂线与 AD 的交点,则 $AP=DP=\frac{1}{2}AD=3$. 在 Rt$\triangle ABP$ 中,由勾股定理得 $PB=\sqrt{AP^2+AB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$;如图 D22-2②,当 $BP=BC=6$ 时,$\triangle BPC$ 也是以 PB 为腰的等腰三角形.

综上所述,PB 的长度是 5 或 6.

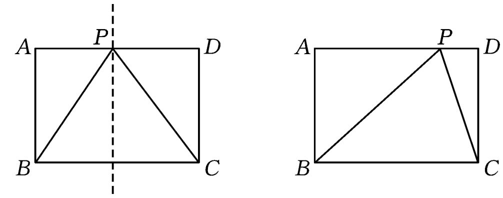


图 D22-2

2. $2\pm\sqrt{3}$.

3. $2+\sqrt{5}$或$\sqrt{5}-2$.

4. 7.　**提示:**先证明$\triangle GCF\cong\triangle GDE$,得到$CF=DE$,$EG=FG$.设$CF=DE=x$,易知$EF=BF=4+2x$,$EG=FG=2+x$.在$\mathrm{Rt}\triangle EDG$中,$x^2+4^2=(2+x)^2$,解得$x=3$,故$BC=7$.

5. (1)$\because O$是AC的中点,　$\therefore OA=OC$.
又$\because AE=CF$,　$\therefore OE=OF$.
又$\because DF\parallel BE$,　$\therefore \angle OEB=\angle OFD$.
又$\because \angle EOB=\angle FOD$,　$\therefore \triangle BOE\cong\triangle DOF$.
(2)$\because \triangle BOE\cong\triangle DOF$,　$\therefore OD=OB$.
又$\because OA=OC$,　$\therefore$四边形$ABCD$是平行四边形.
又$\because OD=\frac{1}{2}AC$,$OD=\frac{1}{2}BD$,　$\therefore AC=BD$,
$\therefore$四边形$ABCD$是矩形.

6. (1)$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,
$\therefore AB\parallel DC$,$AB=DC$,　$\therefore \angle ABF=\angle ECF$.
$\because EC=DC$,　$\therefore AB=EC$,
在$\triangle ABF$和$\triangle ECF$中,$\angle AFB=\angle EFC$,
$\therefore \triangle ABF\cong\triangle ECF$.
(2)$\because AB=EC$,$AB\parallel EC$,
$\therefore$四边形$ABEC$是平行四边形,　$\therefore FA=FE$,$FB=FC$.
$\because$四边形$ABCD$是平行四边形,　$\therefore \angle ABC=\angle D$.
又$\because \angle AFC=2\angle D$,　$\therefore \angle AFC=2\angle ABC$,
$\because \angle AFC=\angle ABC+\angle BAF$,　$\therefore \angle ABC=\angle BAF$.
$\therefore FA=FB$.　$\therefore FA=FE=FB=FC$.
$\therefore AE=BC$.　$\therefore$四边形$ABEC$是矩形.

7. A　**提示:**$\because$点C'是AB边的中点,$AB=6$,　$\therefore BC'=3$,
由图形折叠的性质知,$C'F=CF=BC-BF=9-BF$,
在$\mathrm{Rt}\triangle C'BF$中,$BF^2+BC'^2=C'F^2$,
$\therefore BF^2+9=(9-BF)^2$,解得$BF=4$.

8. D　**提示:**设$BE=x$,则$CE=BC-BE=16-x$,
$\because$沿EF翻折后点C与点A重合,
$\therefore AE=CE=16-x$,在$\mathrm{Rt}\triangle ABE$中,$AB^2+BE^2=AE^2$,
即$8^2+x^2=(16-x)^2$,解得$x=6$,
$\therefore AE=16-6=10$,由翻折的性质得$\angle AEF=\angle CEF$.
$\because$矩形$ABCD$的对边$AD\parallel BC$,　$\therefore \angle AFE=\angle CEF$,
$\therefore \angle AEF=\angle AFE$,　$\therefore AE=AF=10$,
如图D22-3,过点E作$EH\perp AD$于点H,则四边形$ABEH$是矩形.
$\therefore EH=AB=8$,$AH=BE=6$,　$\therefore FH=AF-AH=10-6=4$,
在$\mathrm{Rt}\triangle EFH$中,$EF=\sqrt{EH^2+FH^2}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$.

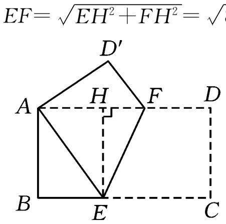


图 D22-3

9. A　**提示:**取AB的中点C,过点P作$PD\perp AB$于点D,则$PC=\frac{1}{2}AB$,$PD\leqslant PC$,　$\therefore AB\geqslant 2PD=OP=10$.

10. 18.　**提示:**过点P作$EF\parallel CD$交AD于点E,交BC于点F,则$DP^2-AP^2=DE^2-AE^2$.同理$PC^2-PB^2=CF^2-BF^2$.
$\because$四边形$AEFB$,四边形$EDCF$为矩形,
$\therefore DE=CF$,$BF=AE$,　$\therefore DP^2-AP^2=PC^2-BP^2$,
$\therefore PD^2-3^2=5^2-4^2$,　$\therefore PD^2=18$.

11. 2.　**提示:**若四边形$ABEC$为矩形,则$BF=AF$,
$\therefore \angle ABF=\angle FAB$,
$\therefore \angle AFC=\angle ABF+\angle FAB=2\angle ABF=2\angle D$.
又$\because \angle AFC=n\angle D$.　$\therefore n=2$.

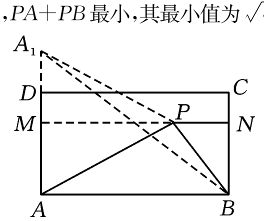
[能力平台]

1. C　**提示:**连接DF交AE于点G,$DF=2DG=\frac{4\sqrt{2}}{3}$,
$\because ED=EF=EC$,　$\therefore \angle DFC=90^\circ$,$CF=\sqrt{CD^2-DF^2}=\frac{2}{3}$.

2. D　**提示:**由题意,EF是AC的垂直平分线,
$\therefore AE=EC$,　$\therefore \triangle CDE$的周长为$CE+CD+ED=AE+ED+CD=AD+DC=10\ \text{cm}$.

3. B　**提示:**先证$\angle DEF=\angle MEF=\angle N$,再证$\triangle EBF\cong\triangle NBF$,再证$\triangle DFE\cong\triangle CFN$即可.

4. D　**提示:**如图,过点P作MN,使$MN\parallel AB$,作点A关于MN的对称点A_1,连接PA_1,A_1B,则$PA_1=PA$.设点P到AB的距离为h,由$AB=5$,$AD=3$,$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}$可得$h=2$,则$AA_1=4$,因为$PA+PB=PA_1+PB\geqslant A_1B$,所以当点$P$为$A_1B$与$MN$的交点时,$PA+PB$最小,其最小值为$\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

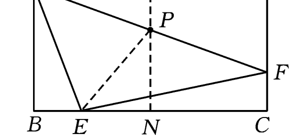


第 4 题图

5. D　**提示:**$\because \angle A=90^\circ$,$PE\perp AB$,$PF\perp AC$,
$\therefore \angle A=\angle AEP=\angle AFP=90^\circ$.　$\therefore$四边形$AFPE$为矩形.
$\therefore EF=AP$.要使EF最小,只要AP最小即可.
过点A作$AP\perp BC$于点P,此时AP最小.
在$\mathrm{Rt}\triangle BAC$中,$\angle A=90^\circ$,$AC=8$,$AB=6$,　$\therefore BC=10$,
由三角形面积公式得$\frac{1}{2}\times 8\times 6=\frac{1}{2}\times 10\times AP$,　$\therefore AP=4.8$.
即$OF=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}AP=2.4$.

6. $(-2\sqrt{3},6)$.　**提示:**过点B_1作$B_1E\perp y$轴于点E,则$\angle AOB=\angle DOC_1=\angle DB_1E=30^\circ$.

7. $\frac{4\sqrt{10}}{3}$.　**提示:**如图,取AD的中点M,作$MN\perp BC$于点N,交AF于点P,连接PE,得正方形$ABNM$,$BE=NE=1$.
设$MP=x$,则$PE=x+1$,$PN=2-x$,
由$(x+1)^2=(2-x)^2+1^2$得$x=\frac{2}{3}$,
$DF=2MP=\frac{4}{3}$,故$AF=\sqrt{4^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$.



第 7 题图

8. $\frac{1}{3}$. **提示:**如图,过点 E 作 $EM\perp AB$ 于点 M,交 DC 于点 N,

$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore DC=AB, DC\parallel AB, \angle ABC=90^\circ$. $\therefore MN=BC, EN\perp DC$.

$\because$沿 AC 折叠使得点 B 和点 E 重合,$\triangle AEB$ 是等边三角形,

$\therefore \angle EAC=\angle BAC=30^\circ$,

设 $AB=AE=BE=2a$,则 $BC=\frac{2}{\sqrt{3}}a=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,即 $MN=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

$\because\triangle ABE$ 是等边三角形,$EM\perp AB$,

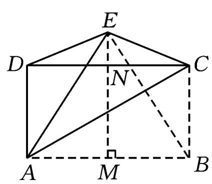
$\therefore AM=a$,由勾股定理得 $EM=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$,

$\therefore\triangle DCE$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times DC\times EN=\frac{1}{2}\times 2a\times\left(\sqrt{3}a-\frac{2}{3}\sqrt{3}a\right)$

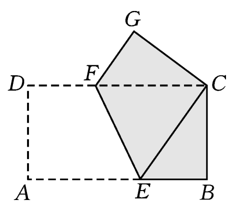
$=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$,

$\triangle ABE$ 的面积是 $\frac{1}{2}\times AB\times EM=\frac{1}{2}\times 2a\times\sqrt{3}a=\sqrt{3}a^2$,

$\therefore\frac{S_{\triangle DCE}}{S_{\triangle ABE}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a^2}{\sqrt{3}a^2}=\frac{1}{3}$.



第 8 题图



第 9 题图

9. 5.5. **提示:**设 $AE=CE=x$,则 $EB=4-x$.

如图,在 Rt$\triangle CBE$ 中,$CE^2=EB^2+CB^2$,

$\therefore x^2=(4-x)^2+2^2$, $\therefore x=2.5$.

$S_{阴影}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle CEF}=2\times 4-\frac{1}{2}\times 2.5\times 2=5.5$.

10. (1)如图,$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,

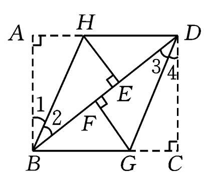
$\therefore AB=CD, \angle A=\angle C=90^\circ$,

$\angle ABD=\angle BDC$.

$\because\triangle BEH$ 是$\triangle BAH$ 翻折而成的,

$\therefore\angle 1=\angle 2, \angle A=\angle HEB=90^\circ$,

$AB=BE$.



第 10 题图

$\because\triangle DGF$ 是$\triangle DGC$ 翻折而成的,

$\therefore\angle 3=\angle 4, \angle C=\angle DFG=90^\circ, CD=DF$,

$\therefore$ 在 $\triangle BEH$ 和 $\triangle DFG$ 中,$\angle HEB=\angle DFG$, $BE=DF$, $\angle 2=\angle 3$,

$\therefore\triangle BHE\cong\triangle DGF$.

(2)$\because$四边形 $ABCD$ 是矩形,$AB=6, BC=8$,

$\therefore AB=CD=6, AD=BC=8$,

$\therefore BD=\sqrt{BC^2+CD^2}=10$,

又由(1)知,$DF=CD, CG=FG$,

$\therefore BF=10-6=4$.

设 $FG=x$,则 $BG=8-x$,

在 Rt$\triangle BGF$ 中,$BG^2=BF^2+FG^2$,即$(8-x)^2=4^2+x^2$,

$\therefore x=3$,即 $FG=3$.

11. C **提示:**由题知 $AD=\sqrt{2}AB$,则 $AD=AE$,

$\therefore\angle AED=\angle ADE=\angle CED$,①正确.

$\because AB=AH, \angle BAH=45^\circ$,

$\therefore\angle AHB=\angle EHO=67.5^\circ=\angle CED=\angle HED$,

$\therefore OH=OD=OE$,②正确.

易证$\triangle BHE\cong\triangle HFD$(ASA),③正确.

$BC-CF=BE+CE-CD+DF=CE+DF=2HE$,④正确.

由②知 $BH=HF$,而 $BH\neq AB, AB\neq HF$,⑤错误.

12. D **提示:**由题知 $BD=2$,AF 平分$\angle BAD$,

$\therefore AB=BF=1, AF=\sqrt{2}\neq FH$,①错误.

易知$\triangle AOB$ 为等边三角形, $\therefore BO=AB=BF=1$,②正确.

$\because AB=BF$, $\therefore\angle BAF=45^\circ$, $\therefore\angle CAH=15^\circ$.

$\because CE\perp BD$,且$\angle EOC=60^\circ$, $\therefore\angle OCE=30^\circ$,

$\therefore\angle H=15^\circ$, $\therefore CA=CH$,③正确.

$\because\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{1}{2}\times 2\times CE$, $\therefore CE=\frac{\sqrt{3}}{2}, CD=1$,

$\therefore ED=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}, BE=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

$\therefore BE=3ED$,④正确.

13. $\left(\frac{24}{5},-\frac{12}{5}\right)$. **提示:**$A(2m,0), C(0,m), m>0, AE=CE=5$,

$OE=2m-5$,

又 $OC^2+OE^2=CE^2$,

得 $m^2+(2m-5)^2=5^2$, $\therefore m=4$,

故 $AD=4, DE=3, AE=5, OE=3$.

14. $\left(0,\frac{5}{3}\right)$. **提示:**作点 A 关于 y 轴的对称点 A',连接 DA' 交 y 轴于点 E,此时$\triangle ADE$ 的周长最小.

15. (1)四边形 $CEGF$ 是菱形,证明如下:

由题意可知 EF 是 CG 的垂直平分线,

$\therefore FC=FG, EC=EG$.

又$\because AD\parallel BC$, $\therefore\angle GFE=\angle CEF$.

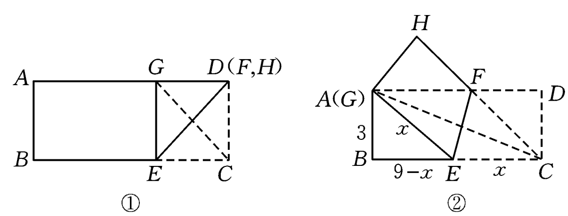
由折叠的性质知$\angle CEF=\angle GEF$.

$\therefore\angle GFE=\angle GEF$. $\therefore EG=FG=FC=EC$.

$\therefore$四边形 $CEGF$ 是菱形.

(2)如图①,当点 F 与点 D 重合时,四边形 $CEGF$ 是正方形,

此时 CE 最小,且 $CE=CD=3$.



第 15 题图

如图②,当点 G 与点 A 重合时,CE 最大.

设 $CE=x$,则 $BE=9-x, AE=CE=x$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中,$AB^2+BE^2=AE^2$,即 $9+(9-x)^2=x^2$,

$\therefore x=5$,即 $CE=5$.

综上,线段 CE 的取值范围为 $3\leqslant CE\leqslant 5$.

第 23 讲 菱形

例 1 2. **提示:**由题意知 $a-1=0, b-4=0$,得 $a=1, b=4$.

$\because$菱形的两条对角线的长分别为 a 和 b,

$\therefore$菱形的面积$=\frac{1}{2}\times 1\times 4=2$.

例 2 (1)$\because$第二步折叠使点 A 落在 MN 上的点 A'处,并使折痕经过点 B,得到折痕 BE, $\therefore\angle AEB=\angle A'EB$.

$\because$第三步折叠使点 B 落在 AD 上的点 B'处,得到折痕 EF,同时

得到线段 $B'F$，

$\therefore \angle A'EB=\angle FEB'$.

$\because \angle AEB+\angle A'EB+\angle FEB'=180°$,

$\therefore \angle AEB=\angle A'EB=\angle FEB'=60°$，　$\therefore \angle ABE=30°$.

(2)$\because \angle A'EB=\angle FEB'=60°$，$EB'\parallel BF$，

$\therefore \angle A'EB=\angle FEB'=\angle BFE=\angle EFB'=60°$，

$\therefore \triangle BEF$ 和 $\triangle EFB'$ 是等边三角形，

$\therefore BE=BF=EF=EB'=FB'$，　∴四边形 $BFB'E$ 为菱形.

例 3　(1)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AC=60$，$AB=30$，

$\therefore AB=\frac{1}{2}AC$，　$\therefore \angle C=30°$.

在$\triangle DFC$ 中，$DF\perp BC$，则$\angle DFC=90°$.

$\because \angle C=30°$，　$\therefore DF=\frac{1}{2}CD$，即 $y=\frac{1}{2}x(0<x<60)$.

(2)若四边形 $AEFD$ 为菱形，则 $DF=DA$，其中 $DF=y$，$AD=60-x$.　$\therefore \frac{1}{2}x=60-x$，得 $x=40$.

(3)若$\angle FDE=90°$，易证四边形 $DFBE$ 是矩形(如图 D23-1①所示)，　$\therefore DE\parallel FB$.

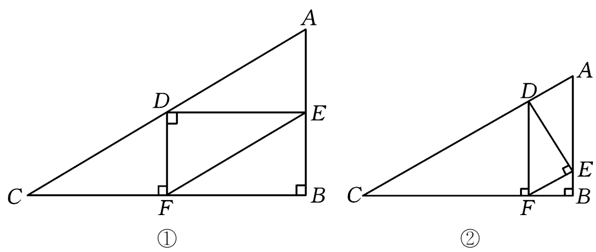


图 D23-1

$\because FE\parallel AC$,

∴四边形 $CDEF$ 是平行四边形，

$\therefore EF=CD=x$.

∵四边形 $AEFD$ 是平行四边形，　$\therefore EF=AD=60-x$.

$\therefore x=60-x$，得 $x=30$.

若$\angle DEF=90°$，如图 D23-1②.

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$\angle C=30°$，$AC=60$，$AB=30$，

由勾股定理得 $BC=30\sqrt{3}$.

$\because FE\parallel AC$，　$\therefore \angle EFB=\angle C=30°$.

$\because \angle DFC=90°$，　$\therefore \angle DFE=60°$，而$\angle DEF=90°$，　$\therefore \angle EDF=30°$.

在 Rt$\triangle DFC$ 中，$\angle DFC=90°$，$\angle C=30°$，$CD=x$，

$\therefore DF=\frac{x}{2}$，$CF=\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

同理，在 Rt$\triangle DFE$ 中，$\angle DEF=90°$，$\angle EDF=30°$，$DF=\frac{x}{2}$.

$\therefore EF=\frac{x}{4}$. 在 Rt$\triangle EBF$ 中，$\angle EBF=90°$，$\angle EFB=30°$，$EF=\frac{x}{4}$，

$\therefore FB=\frac{\sqrt{3}}{2}EF=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x}{4}=\frac{\sqrt{3}}{8}x$.

$\because FB+CF=CB$，　$\therefore \frac{\sqrt{3}}{8}x+\frac{\sqrt{3}}{2}x=30\sqrt{3}$，解得 $x=48$.

若$\angle DFE=90°$，显然不成立.

综上所述，$x=30$ 或 48.

例 4　(1 346，0).　**提示：**如图 D23-2，$B_1\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B_2(2,0)$，$B_3(2,0)$，$B_4(2,0)$，$B_5\left(\frac{5}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B_6(4,\sqrt{3})$. 每翻转 6 次，点 B 向右平移 4 个单位，2 020=6×336+4.

∵余数为 4，故 $B_{2\,020}$的纵坐标为 0.

∵其翻转 336 个周期，　$\therefore OB_{2\,020}=4\times336+2=1\,346$.

$\therefore B_{2\,020}(1\,346,0)$.

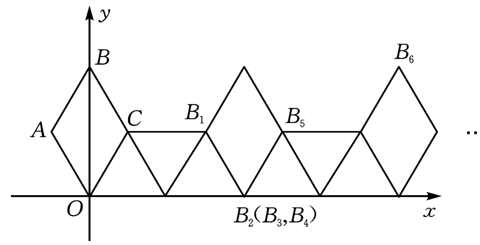


图 D23-2

例 5　$\sqrt{7}-1$.　**提示：**如图 D23-3，连接 MC，

$\because MC$，MA'是定值，　$\therefore A'C$ 的长度为最小值时，即点 A'在 MC 上时.

过点 M 作 $MF\perp DC$ 于点 F，

∵ 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，

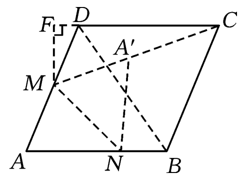


图 D23-3

$\therefore CD=2$，$\angle ADC=120°$，　$\therefore \angle FDM=60°$，$\angle FMD=30°$，

$\therefore FD=\frac{1}{2}MD=\frac{1}{2}$，$FM=\frac{\sqrt{3}}{2}DM=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore MC=\sqrt{FM^2+CF^2}=\sqrt{7}$.

$\therefore A'C=MC-MA'=\sqrt{7}-1$，故答案为$\sqrt{7}-1$.

[变式题组]

1. (1)90.　(2)=.　(3)7.

提示：(1)如图 D23-4 所示，连接 AN，NC，AM，MC，由题意可得，四边形 $ANCM$ 是菱形，则 $AC\perp MN$，　$\therefore \angle ADE=90°$.

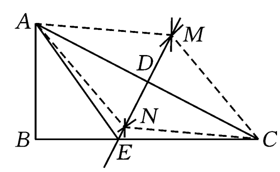


图 D23-4

(2)在菱形 $ANCM$ 中，MN 垂直且平分 AC，　$\therefore AE=EC$.

(3)在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$，$AB=3$，$AC=5$，由勾股定理可得 $BC=4$，由(2)可知 $AE=EC$，　$\therefore \triangle ABE$ 的周长$=AB+BE+AE=AB+BE+EC=AB+BC=3+4=7$.

2. A

3. C

4. (1)③.　(2)$AB=BC$ 或 $AC\perp BD$ 等.

5. (1)$\because AC$ 平分$\angle BAD$ 且 $AB=AD$，

易证$\triangle AOD\cong\triangle AOB$(SAS)，

$\therefore \angle AOD=\angle BOA=90°$.

又$\because AB\parallel DC$，

$\therefore \angle CAB=\angle ACD=\angle DAC$.

$\therefore AD=DC$.　$\therefore AO=OC$.

故 $AC\perp BD$ 且 $OA=OC$，$OB=OD$.

∴四边形 $ABCD$ 为菱形.

(2)$\because \angle AEC=90°$，点 O 为 AC 的中点，$\therefore OE=\frac{1}{2}AC$，

又$\because AB=\sqrt{5}$，$BD=2$，

$\therefore OC=\sqrt{BC^2-OB^2}=\sqrt{5-1}=2$，　$\therefore AC=4$，

$\therefore OE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times4=2$.

6. (1)由题知 $AE=AD,AB=AC,\angle BAC=\angle EAD=\alpha$.

$\because\angle BAC=\angle BAD+\angle DAC,\angle EAD=\angle BAD+\angle EAB$.

$\therefore\angle EAB=\angle DAC$，　$\therefore\triangle EAB\cong\triangle DAC$.　$\therefore BE=CD$.

(2)四边形 $BDFE$ 是菱形. 理由如下：

$\because AB=AC,AD\perp BC$，　$\therefore BD=CD$.

$\because BE=CD$，　$\therefore BE=BD$.

$\because\triangle EAB\cong\triangle DAC$，　$\therefore\angle EBF=\angle C$.

$\because\angle ABC=\angle C$，　$\therefore\angle EBF=\angle ABC$.

又 $\because BF=BF$，　$\therefore\triangle EBF\cong\triangle DBF$，　$\therefore EF=DF$.

$\because EF\parallel BC$，　$\therefore\angle EFB=\angle FBD$，

$\therefore\angle EFB=\angle EBF$，　$\therefore EF=EB$，

$\therefore BD=BE=EF=FD$，

$\therefore$四边形 $BDFE$ 是菱形.

7. A

8. B　**提示**：①③④正确.

9. 60°.　**提示**：由题可知$\triangle CDF\cong\triangle CBF$，则$\angle CDF=\angle CBF$，根据$\angle BAD=80^\circ$可知，$\angle BAF=40^\circ,\angle ABC=100^\circ$.

又 EF 为 AB 的垂直平分线，

$\therefore AF=BF$，即$\angle ABF=\angle BAF=40^\circ$，

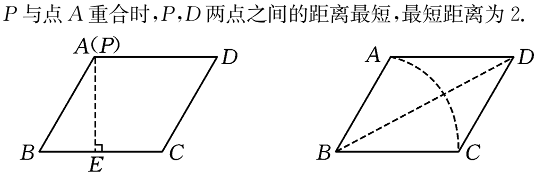
则$\angle CBF=\angle ABC-\angle ABF=60^\circ$，即$\angle CDF=60^\circ$.

10. $2\sqrt{3}-2$.　**提示**：(1)如图 D23-5①，过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为点 E.

$\because\angle ABC=60^\circ$，　$\therefore\angle BAE=30^\circ,BE=\frac{1}{2}AB$.

$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，　$\therefore AB=BC=AD=2,\angle BAD=120^\circ$.

$\therefore BE=\frac{1}{2}BC,\angle DAE=90^\circ$.　$\therefore AE$ 垂直平分 BC. 当 BC 为等腰三角形 PBC 的底边时，点 P 在 BC 的垂直平分线上，当点 P 与点 A 重合时，P,D 两点之间的距离最短，最短距离为 2.



①　　②

图 D23-5

(2)连接 BD，由四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ABC=60^\circ$，易知 $BD=2\sqrt{3}$，当 BC 为等腰三角形 PBC 的腰时，如图 D23-5②所示，点 P 在以点 B 为圆心，以 BC 长为半径的圆弧上，

$\therefore$当点 P 在 BD 上时，P,D 两点间的距离最短，最短距离为 $2\sqrt{3}-2$.

$\because 2>2\sqrt{3}-2$，　$\therefore$所求最短距离为 $2\sqrt{3}-2$.

[能力平台]

1. C　**提示**：四边形 $AEOF$ 和四边形 $GOHC$ 都是菱形.

$4AE-4BE=4AE-4OH=12,AE-BE=3$，而 $AB=8$，

$\therefore AE=5.5,BE=2.5$.

2. D　**提示**：过点 F 作 $FH\perp AB$ 于点 H，$\triangle FHE$ 为等腰直角三角形，$HE=HF=\sqrt{3}$，从而 $AE=AH+HE=1+\sqrt{3}$.

3. D　**提示**：$\because$四边形 $ABCD$ 是菱形，

$\therefore\angle FAG=\angle EAG,\angle1=\angle GAD,AB=AD$，

$\because\angle1=\angle2$，　$\therefore\angle GAD=\angle2$，　$\therefore AG=GD$.

$\because GE\perp AD$，　$\therefore GE$ 垂直平分 AD.　$\therefore AE=ED$.

$\because$点 F 为 AB 的中点，　$\therefore AF=AE$.

易证$\triangle AFG\cong\triangle AEG$(SAS).

$\therefore\angle AFG=\angle AEG=90^\circ$.　$\therefore DF\perp AB$，故 A 正确.

$\because DF\perp AB$，点 F 为 AB 的中点，

$\therefore AF=\frac{1}{2}AB=1,AD=BD$.

$\because AD=BD=AB$，　$\therefore\triangle ABD$ 为等边三角形.

$\therefore\angle BAD=\angle BCD=60^\circ$，　$\therefore\angle BAC=\angle1=\angle2=30^\circ$.

$\therefore AC=2AB\cdot\cos\angle BAC=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$AG=\frac{AF}{\cos\angle BAC}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore CG=AC-AG=2\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore CG=2GA$，故 B 正确.

$\because GE$ 垂直平分 AD，　$\therefore ED=\frac{1}{2}AD=1$，

$\therefore DF=\sqrt{AD^2-AF^2}=\sqrt{3}$，

$\therefore GE=ED\cdot\tan\angle2=1\times\tan30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore DF+GE=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}=CG$，故 C 正确.

$\because\angle BAC=\angle1=30^\circ$，　$\therefore\triangle ABC$ 的边 AC 上的高等于 AB 的一半，即为 1，$FG=\frac{1}{2}AG=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore S_{四边形BFGC}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AGF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times1-\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$，

故 D 不正确.

4. $5\sqrt{3}-5$.　**提示**：过点 A 作 $AE\perp BD$ 于点 E，

当点 A,O,E 在一条直线上时，此时 OA 最小.

$\because$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，　$\therefore AB=CD$.

又 $AB=BC,\angle BCD=60^\circ$，

$\therefore AB=AD=CD=BC=10,\angle BAD=\angle BCD=60^\circ$.

$\therefore\triangle ABD$ 为等边三角形.

$\therefore AE$ 过点 O，E 为 BD 的中点，则此时 $EO=5$.

故 AO 的最小值为 $AO=AE-EO=AB\cdot\sin60^\circ-EO=5\sqrt{3}-5$.

5. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.　**提示**：过点 E 作 $EG\perp AB$ 于点 G，

设 $AE=a$，得 $BG=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，

故$\frac{AB}{AE}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a+\frac{\sqrt{6}}{2}a}{a}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

6. **方法一**　$\because AD\parallel BC$，　$\therefore\angle BAD+\angle B=180^\circ$.

$\because\angle BAD=\angle BCD$，　$\therefore\angle BCD+\angle B=180^\circ$，　$\therefore AB\parallel DC$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，　$\therefore\angle B=\angle D$.

$\because AM=AN,AM\perp BC,AN\perp DC$，

$\therefore\mathrm{Rt}\triangle ABM\cong\mathrm{Rt}\triangle ADN$，　$\therefore AB=AD$，

$\therefore$平行四边形 $ABCD$ 是菱形.

方法二　连接 BD，如图①，

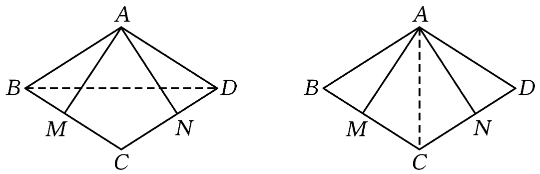
$\because AD\parallel BC$，　$\therefore\angle ADB=\angle DBC$.

$\because\angle BAD=\angle BCD,BD=BD$，

$\therefore\triangle ABD\cong\triangle CDB$，　$\therefore AD=BC$，

$\therefore$四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

∴$\angle ABC=\angle ADC$. ∵$AM=AN$,$AM\perp BC$,$AN\perp DC$,
∴Rt△ABM≌Rt△ADN， ∴$AB=AD$，
∴平行四边形 $ABCD$ 是菱形.



① ②

第 6 题图

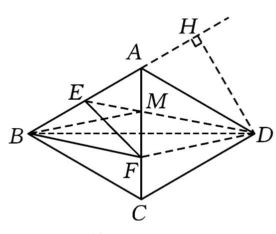
方法三 连接 AC,如图②,
∵$AM=AN$,$AC=AC$,$AM\perp BC$,$AN\perp DC$,
∴Rt△ACM≌Rt△ACN,
∴$\angle ACB=\angle ACD$.
∵$AD/\!/BC$， ∴$\angle ACB=\angle CAD$，
∴$\angle ACD=\angle CAD$， ∴$DC=AD$.
∵$\angle BAD=\angle BCD$， ∴$\angle BAC=\angle ACD$， ∴$AB/\!/DC$，
∴四边形 $ABCD$ 是菱形.

7. (1)由旋转可得 $AE=CE$,$DE=FE$,
∴四边形 $AFCD$ 是平行四边形.
∵点 D,E 分别为 AB,AC 边上的中点，
∴DE 是△ABC 的中位线，
∴$DE/\!/BC$,
∴$\angle AED=\angle ACB=90^\circ$,即 $AC\perp DF$.
∴▱$AFCD$ 是菱形.
(2)在 Rt△ABC 中,$\angle ACB=90^\circ$,$BC=8$,$AC=6$,
由勾股定理得 $AB=10$.
∵点 D 为 AB 边上的中点，
∴$AD=\frac{1}{2}AB=5$.
∵四边形 $ADCF$ 是菱形，
∴$AF=CF=CD=5$,
∴四边形 $ABCF$ 的周长$=AB+BC+CF+FA$
$=10+8+5+5=28$.

8. C **提示:**设 $AC=2a$,$BD=2b$,则 $a^2+b^2=1$,$2ab=\frac{7}{9}$.
∴$(a+b)^2=\frac{16}{9}$， ∴$a+b=\frac{4}{3}$，
即 $AC+BD=2(a+b)=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$.

9. C **提示:**图中只有边长为 1 或 2 的两种菱形,其中边长为 1 的菱形有 18 个,边长为 2 的菱形有 3 个.

10. $2\sqrt{7}$. **提示:**如图,连接 DE, BD,设 DE 交 AC 于点 M,连接 MB,DF,延长 BA,$DH\perp AB$ 于点 H，
∵四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴AC,BD 互相垂直平分.
∴点 B 关于 AC 的对称点为 D，
∴$FD=FB$. ∴$FE+FB=FE+FD\geqslant DE$. 只有当点 F 运动到点 M 时,才取等号(两点之间线段最短),



第 10 题图

在△ABD 中,$AD=AB$,$\angle DAB=120^\circ$， ∴$\angle HAD=60^\circ$.
∵$DH\perp AB$,
∴$AH=\frac{1}{2}AD$,$DH=\frac{\sqrt{3}}{2}AD$.
∵菱形 $ABCD$ 的边长为 4,E 为 AB 的中点，
∴$AE=AH=2$. ∴$EH=4$,$DH=2\sqrt{3}$,
在 Rt△EHD 中,$DE=\sqrt{EH^2+DH^2}=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{7}$,
∴$EF+BF$ 的最小值为 $2\sqrt{7}$.

11. ∵$AG/\!/BD$,$BD=FG$,
∴四边形 $BGFD$ 为平行四边形.
∵$CF\perp BD$， ∴$CF\perp AG$.
又∵点 D 是 AC 的中点，
∴$BD=DF=\frac{1}{2}AC=5$.
∴四边形 $BGFD$ 是菱形.
∴四边形 $BDFG$ 的周长为 $4GF=4\times5=20$.

12. (1)∵四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴$AC\perp BD$,$OB=OD=\frac{1}{2}BD$.
∵$BD=24$， ∴$OB=12$.
在 Rt△OAB 中， ∵$AB=13$，
∴$OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$.
(2)∵四边形 $ABCD$ 是菱形，
∴BD 垂直平分 AC， ∴$FA=FC$,$\angle FAC=\angle FCA$.
已知 $AF=AM$,$\angle MAF=60^\circ$,
∴△AFM 为等边三角形， ∴$\angle M=\angle AFM=60^\circ$.
∵M,F,C 三点在同一条直线上，
∴$\angle FAC+\angle FCA=\angle AFM=60^\circ$.
∴$\angle FAC=\angle FCA=30^\circ$.
∴$\angle MAC=\angle MAF+\angle FAC=60^\circ+30^\circ=90^\circ$.
在 Rt△ACM 中， ∵$\tan\angle M=\frac{AC}{AM}=\tan 60^\circ$,
∴$AC=\sqrt{3}AM$.
(3)连接 FM， ∵△ABE 是等边三角形，
∴$AE=AB$,$\angle EAB=60^\circ$,
由(2)知,△AFM 为等边三角形，
∴$AM=AF$,$\angle MAF=60^\circ$,
∴$\angle EAM=\angle BAF$.
在△AEM 和△ABF 中,$\begin{cases}AE=AB,\\ \angle EAM=\angle BAF,\\ AM=AF,\end{cases}$
∴△AEM≌△ABF(SAS).
∵△AEM 的面积为 40,△ABF 的高为 AO.
∴$\frac{1}{2}BF\cdot AO=40$. ∴$BF=16$.
∴$FO=BF-BO=16-12=4$.
∴$AF=\sqrt{AO^2+FO^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$.

第 24 讲 完美的正方形

例 1 B **提示:**如图 D24-1,连接 AC 与 BD 相交于点 O，
∵正方形 $ABCD$ 的对角线 BD 长为 $2\sqrt{2}$,
∴$OD=\sqrt{2}$， ∴直线 $l/\!/AC$ 并且到点 D 的距离为$\sqrt{3}$. 同理,在点 D 的另一侧还有一条直线满足条件.

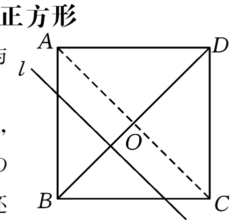


图 D24-1

故符合题意的直线 l 的条数为 2.

例 2 B **提示:**由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形,由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形,所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形,正确,故 A 选项不符合题意;

由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形,由③得对角线相等的平行四边形是矩形,所以不能得出平行四边形 $ABCD$ 是正方形,错误,故 B 选项符合题意;

由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形,由③得对角线相等的平行四边形是矩形,所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形,正确,故 C 选项不符合题意;

由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形,由④得对角线互相垂直的平行四边形是菱形,所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形,正确,故 D 选项不符合题意.

例 3 C **提示:**∵点 $D(5,3)$ 在边 AB 上,

∴$BC=5$,$BD=5-3=2$.

①若顺时针旋转,则点 D' 在 x 轴上,$OD'=2$,所以 $D'(-2,0)$;

②若逆时针旋转,则点 D' 到 x 轴的距离为 10,到 y 轴的距离为 2,所以 $D'(2,10)$.

综上所述,点 D' 的坐标为 $(2,10)$ 或 $(-2,0)$.

例 4 猜想与证明:$DM=ME$. **提示:**如图 D24-2①,延长 EM 交 AD 于点 H,

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 是矩形,

∴$AD // EF$, ∴$\angle EFM=\angle HAM$,

在△FME 和△AMH 中,$\begin{cases}\angle EFM=\angle HAM,\\ FM=AM,\\ \angle FME=\angle AMH,\end{cases}$

∴△FME≌△AMH(ASA),

∴$HM=EM$,

在 Rt△HDE 中,$HM=EM$,

∴$DM=HM=ME$.

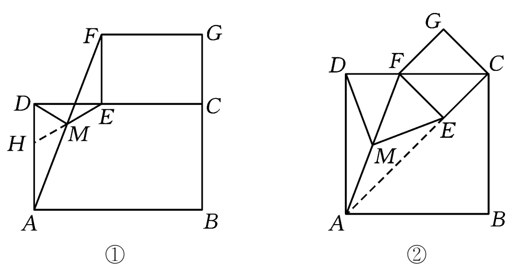


图 D24-2

拓展与延伸:

(1)$DM=ME$ 且 $DM\perp ME$.

(2)如图 D24-2②,连接 AE,

∵四边形 $ABCD$ 和四边形 $ECGF$ 是正方形,

∴$\angle FCE=45°$,$\angle FCA=45°$,

∴AE 和 EC 在同一条直线上,

在 Rt△ADF 中,$AM=MF$,

∴$DM=AM=MF$.

在 Rt△AEF 中,$AM=MF$,

∴$AM=MF=ME$, ∴$DM=ME$.

故(1)中的结论仍成立.

[变式题组]

1. C **提示:**设 $AB=AD=4$,则 $AE=3$,$ED=1$,$DF=CF=2$.

过点 F 作 $FH // AD$ 交 BE 于点 H,则 HF 为梯形 $EDCB$ 的中位线.

∴$HF=\frac{1}{2}(ED+BC)=\frac{1}{2}\times(1+4)=\frac{5}{2}$.

∵$AE // HF$, ∴$\frac{AG}{GF}=\frac{AE}{HF}=\frac{3}{\frac{5}{2}}=\frac{6}{5}$.

2. 1 或 2. **提示:**根据题意画出图形 D24-3,过点 P 作 $PN\perp BC$,交 BC 于点 N,交 AE 于点 F,

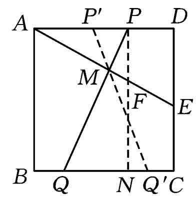


图 D24-3

∵四边形 $ABCD$ 为正方形,

∴$AD=DC=PN$.

在 Rt△ADE 中,$\angle DAE=30°$,$AD=3$ cm,

∴$DE=\sqrt{3}$ cm.

根据勾股定理得 $AE=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{3}$ cm.

∵M 为 AE 的中点, ∴$AM=\frac{1}{2}AE=\sqrt{3}$ cm,

在 Rt△ADE 和 Rt△PNQ 中,$\begin{cases}AD=PN,\\ AE=PQ,\end{cases}$

∴Rt△ADE≌Rt△PNQ(HL),

∴$DE=NQ$,$\angle DAE=\angle NPQ=30°$.

∵$PN // DC$, ∴$\angle PFA=\angle DEA=60°$,

∴$\angle PMF=90°$,即 $PM\perp AF$.

在 Rt△AMP 中,$\angle MAP=30°$, ∴$AP=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$ cm,

由对称性得到 $AP'=DP=AD-AP=3-2=1$ cm,

综上,AP 等于 1 cm 或 2 cm.

3. $\frac{8}{9}$. **提示:**设正方形 $ABCD$ 的边长为 a,则 $AE=\frac{1}{2}a$,$BD=\sqrt{2}a$. ∵△DPQ,△BMN 都是等腰直角三角形,四边形 $MNPQ$ 是正方形, ∴$DQ=MQ=BM$, ∴$MQ=\frac{\sqrt{2}}{3}a$,

∴$\frac{S_{正方形MNPQ}}{S_{正方形AEFG}}=\frac{MQ^2}{AE^2}=\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}a\right)^2}{\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{8}{9}$.

4. (1)$FG\perp ED$. 理由如下:

如图 D24-4,

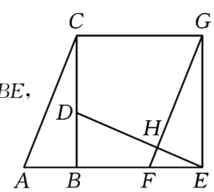


图 D24-4

∵△ABC 绕点 B 顺时针旋转 90°至△DBE,

∴$\angle DEB=\angle ACB$.

∵把△ABC 沿射线 AB 平移至△FEG,

∴$\angle GFE=\angle A$.

∵$\angle ABC=90°$, ∴$\angle A+\angle ACB=90°$,

∴$\angle DEB+\angle GFE=90°$, ∴$\angle FHE=90°$, ∴$FG\perp ED$.

(2)根据旋转和平移可得$\angle GEF=90°$,$\angle CBE=90°$,$CG // EB$,$CB=BE$,

∵$CG // EB$, ∴$\angle BCG+\angle CBE=180°$, ∴$\angle BCG=90°$,

∴四边形 $BCGE$ 是矩形.

∵$CB=BE$, ∴四边形 $CBEG$ 是正方形.

5. (1)在△ABC 中,$AB=AC$,$AD\perp BC$, ∴$\angle BAD=\angle DAC$,

∵AN 是△ABC 外角$\angle CAM$ 的平分线,

∴$\angle MAE=\angle CAE$,

∴$\angle DAE=\angle DAC+\angle CAE=\frac{1}{2}\times180°=90°$.

又∵$AD\perp BC$,$CE\perp AN$,

∴$\angle ADC=\angle CEA=90°$， ∴四边形 $ADCE$ 为矩形.

(2)当△ABC 满足$\angle BAC=90°$时,四边形 $ADCE$ 是正方形.

理由如下:∵$AB=AC$， ∴$\angle ACB=\angle B=45°$.

∵$AD\perp BC$， ∴$\angle CAD=\angle ACD=45°$，

∴$DC=AD$. ∵四边形 $ADCE$ 为矩形，

∴矩形 $ADCE$ 是正方形，

∴当$\angle BAC=90°$时,四边形 $ADCE$ 是正方形.

6. C **提示**:∵$AB=AD=AF$,$AG=AG$,$\angle B=\angle AFG=90°$，

∴Rt△ABG≌Rt△AFG(HL),故①正确.

∵$EF=DE=\frac{1}{3}CD=2$,设 $BG=FG=x$,则 $CG=6-x$.

在 Rt△ECG 中,根据勾股定理得$(6-x)^2+4^2=(x+2)^2$，

解得 $x=3$. ∴$BG=3=6-3=GC$,故②正确.

∵$CG=BG$,$BG=GF$，

∴$CG=GF$， ∴△FGC 是等腰三角形,$\angle GFC=\angle GCF$.

又∵Rt△ABG≌Rt△AFG，

∴$\angle AGB=\angle AGF$,$\angle AGB+\angle AGF=2\angle AGB=180°-\angle FGC=\angle GFC+\angle GCF=2\angle GFC=2\angle GCF$，

∴$\angle AGB=\angle GCF$，

∴$AG/\!/CF$,故③正确.

∵$S_{\triangle GCE}=\frac{1}{2}GC\cdot CE=\frac{1}{2}\times3\times4=6$，

$S_{\triangle AFE}=\frac{1}{2}AF\cdot EF=\frac{1}{2}\times6\times2=6$，

∴$S_{\triangle EGC}=S_{\triangle AFE}$,故④正确.

∵$\angle BAG=\angle FAG$,$\angle DAE=\angle FAE$,$\angle BAD=90°$，

∴$\angle GAE=45°$，

∴$\angle AGB+\angle AED=\angle AGE+\angle AEG=180°-\angle GAE=135°$,故⑤错误.

7. (1)等边三角形.

∵四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴$AD=CD=BC=AB$,$\angle A=\angle B=\angle C=90°$.

∵$ED=FD$，

∴△ADE≌△CDF(HL).

∴$AE=CF$,$BE=BF$.

∴△BEF 是等腰直角三角形.

设 BE 的长为 x,则 $EF=\sqrt{2}x$,$AE=4-x$.

∵在 Rt△AED 中,$AE^2+AD^2=DE^2$,$DE=EF$，

∴$(4-x)^2+4^2=(\sqrt{2}x)^2$，

解得 $x_1=-4+4\sqrt{3}$,$x_2=-4-4\sqrt{3}$(不合题意,舍去).

∴$EF=\sqrt{2}x=\sqrt{2}(-4+4\sqrt{3})=-4\sqrt{2}+4\sqrt{6}$.

(2)①正方形,$AE=BF$.

②示意图如图 D24-5②,仍令 $BE=x$,$AE=4-x$.

∵在 Rt△BEF 中,$EF^2=BF^2+BE^2$,$AE=BF$，

∴$y=EF^2=(4-x)^2+x^2=16-8x+x^2+x^2=2x^2-8x+16$.

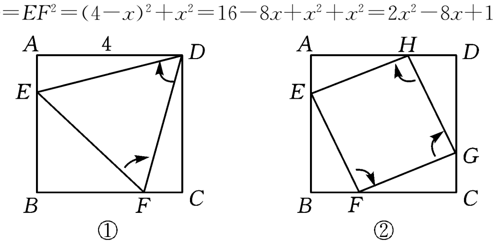


图 D24-5

∵点 E 不与点 A,B 重合,点 F 不与点 B,C 重合，

∴$0<x<4$.

∵$y=2x^2-8x+16=2(x^2-4x+4)+8=2(x-2)^2+8$，

∴当 $x=2$ 时,$y=8$;当 $x=0$ 或 4 时,$y=16$.

∴y 的取值范围是 $8\leqslant y<16$.

8. (1)如图 D24-6①,由题可得 $AP=OQ=1\times t=t$， ∴$AO=PQ$.

∵四边形 $OABC$ 是正方形，

∴$AO=AB=BC=OC$，

∴$\angle BAO=\angle AOC=\angle OCB=\angle ABC=90°$.

∵$DP\perp BP$， ∴$\angle BPD=90°$.

∴$\angle BPA=90°-\angle DPQ=\angle PDQ$.

∵$AO=PQ$,$AO=AB$， ∴$AB=PQ$.

在△BAP 和△PQD 中,$\begin{cases}\angle BAP=\angle PQD,\\ \angle BPA=\angle PDQ,\\ AB=PQ,\end{cases}$

∴△BAP≌△PQD. ∴$AP=DQ$,$BP=PD$.

∵$\angle BPD=90°$,$BP=PD$， ∴$\angle PBD=\angle PDB=45°$.

∵$AP=t$， ∴$DQ=t$. ∴点 D 的坐标为(t,t).

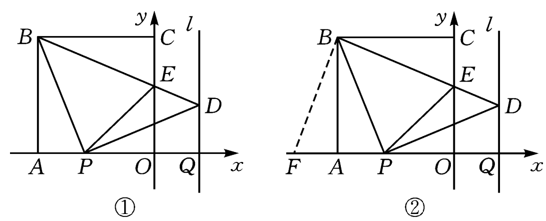


图 D24-6

(2)①若 $PB=PE$,则$\angle PBE=\angle PEB=45°$. ∴$\angle BPE=90°$.

∵$\angle BPD=90°$， ∴$\angle BPE=\angle BPD$.

∴点 E 与点 D 重合.

∴点 Q 与点 O 重合. 与条件“$DQ/\!/y$ 轴”矛盾，

∴这种情况应舍去.

②若 $EB=EP$,则$\angle PBE=\angle BPE=45°$. ∴$\angle BEP=90°$.

∴$\angle PEO=90°-\angle BEC=\angle EBC$.

在△POE 和△ECB 中,$\begin{cases}\angle PEO=\angle EBC,\\ \angle POE=\angle ECB,\\ EP=BE,\end{cases}$

∴△POE≌△ECB. ∴$OE=BC$,$OP=EC$. ∴$OE=OC$.

∴点 E 与点 C 重合($EC=0$). ∴点 P 与点 O 重合($PO=0$).

∵点 $B(-4,4)$， ∴$AO=CO=4$. 此时 $t=AP=AO=4$.

③若 $BP=BE$，

则在 Rt△BAP 和 Rt△BCE 中,$\begin{cases}BA=BC,\\ BP=BE,\end{cases}$

∴Rt△BAP≌Rt△BCE(HL).

∴$AP=CE$. ∵$AP=t$， ∴$CE=t$. ∴$PO=EO=4-t$.

∵$\angle POE=90°$， ∴$PE=\sqrt{PO^2+EO^2}=\sqrt{2}(4-t)$.

延长 OA 到点 F,使得 $AF=CE$,连接 BF,如图 D24-6②所示.

在△FAB 和△ECB 中,$\begin{cases}AB=CB,\\ \angle BAF=\angle BCE=90°,\\ AF=CE,\end{cases}$

∴△FAB≌△ECB. ∴$FB=EB$,$\angle FBA=\angle EBC$.

∵$\angle EBP=45°$,$\angle ABC=90°$，

∴$\angle ABP+\angle EBC=45°$. ∴$\angle FBP=\angle FBA+\angle ABP=\angle EBC+\angle ABP=45°$. ∴$\angle FBP=\angle EBP$.

在$\triangle FBP$和$\triangle EBP$中，$\begin{cases}BF=BE,\\ \angle FBP=\angle EBP,\\ BP=BP,\end{cases}$

$\therefore \triangle FBP\cong\triangle EBP$.

$\therefore FP=EP$. $\therefore EP=FP=FA+AP=CE+AP$.

$\therefore EP=t+t=2t$.

$\therefore \sqrt{2}(4-t)=2t$，解得$t=4\sqrt{2}-4$，

$\therefore$当t为4秒或$(4\sqrt{2}-4)$秒时，$\triangle PBE$为等腰三角形.

(3)$\because EP=CE+AP$，

$\therefore OP+PE+OE=OP+AP+CE+OE=AO+CO=4+4=8$.

$\therefore \triangle POE$周长是定值，该定值为8.

[能力平台]

1. B **提示：**连接BD，$\because \angle BCE=\angle BCD+\angle DCE=90^\circ+60^\circ=150^\circ$，$BC=EC$，$\therefore \angle EBC=\angle BEC=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle BCE)=15^\circ$.

$\because \angle BCM=\frac{1}{2}\angle BCD=45^\circ$，

$\therefore \angle BMC=180^\circ-(\angle BCM+\angle EBC)=120^\circ$.

$\therefore \angle AMB=180^\circ-\angle BMC=60^\circ$.

$\because AC$是线段BD的垂直平分线，点M在AC上，

$\therefore \angle AMD=\angle AMB=60^\circ$.

2. A **提示：**在正方形$ABCD$中，$AB=AD$，$\angle BAD=90^\circ$，

$\because \angle EAP=90^\circ$，$\therefore \angle EAB+\angle BAP=\angle DAP+\angle BAP$，

$\therefore \angle EAB=\angle DAP$，易证$\triangle APD\cong\triangle AEB$(SAS)，故①正确.

$\because \triangle APD\cong\triangle AEB$，$\therefore \angle EBA=\angle PDA$，

$\therefore \angle BED=\angle BAD=90^\circ$，$\therefore BE\perp ED$. 故③正确.

过点B作$BF\perp AE$，交AE的延长线于点F，

$\because \angle EAP=90^\circ$，$AE=AP$，$\therefore \angle AEP=45^\circ$.

$\because \angle FEB+\angle AEP=90^\circ$，$\angle FEB+\angle EBF=90^\circ$，

$\therefore \angle AEP=\angle EBF=45^\circ$，$\therefore EF=BF$.

$\because AE=AP=1$，由勾股定理知$EP=\sqrt{2}$，

$\therefore PB=\sqrt{5}$，由勾股定理知$BE=\sqrt{3}$.

$\because EF^2+BF^2=2BF^2=BE^2$，$\therefore BF=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故②错误.

$\because BF=EF=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore AF=AE+EF=1+\frac{\sqrt{6}}{2}$，

$\therefore$由勾股定理知$AB^2=AF^2+BF^2=4+\sqrt{6}$，故④正确.

$\because \triangle APD\cong\triangle AEB$，

$\therefore S_{\triangle APD}=S_{\triangle AEB}$，

$\therefore S_{\triangle APD}+S_{\triangle APB}=S_{\triangle AEB}+S_{\triangle APB}=S_{\triangle AEP}+S_{\triangle PEB}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}$，故⑤错误.

$\therefore$①③④正确.

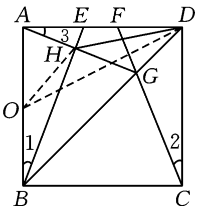
3. A **提示：**过点E作$EP\perp BC$于点P，$EQ\perp CD$于点Q，证$\angle BEF=90^\circ$即可.

4. ①④⑤. **提示：**设$AE=1$，则$EF=AE=1$，$BE=\sqrt{2}$，$AB=AD=\sqrt{2}+1$，$\frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{2}+1}{1}=\sqrt{2}+1$，故②不正确.

又$S_{\triangle AGD}=S_{\triangle FGD}$，故③不正确.

5. $\sqrt{5}-1$. **提示：**在正方形$ABCD$中，

$AB=AD=CD$，$\angle BAD=\angle CDA$，$\angle ADG=\angle CDG$，



第5题图

易证$\triangle ABE\cong\triangle DCF$(SAS).

$\therefore \angle 1=\angle 2$.

再证$\triangle ADG\cong\triangle CDG$(SAS)，

$\therefore \angle 2=\angle 3$.

$\therefore \angle 1=\angle 3$.

$\because \angle BAH+\angle 3=\angle BAD=90^\circ$，

$\therefore \angle 1+\angle BAH=90^\circ$.

$\therefore \angle AHB=180^\circ-90^\circ=90^\circ$.

如图，取AB的中点O，连接OH，OD，则$OH=AO=\frac{1}{2}AB=1$.

在$\mathrm{Rt}\triangle AOD$中，$OD=\sqrt{AO^2+AD^2}=\sqrt{5}$.

根据三角形的三角关系得$OH+DH>OD$，

$\therefore$当O，D，H三点共线时，DH的长度最小为$OD-OH=\sqrt{5}-1$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **提示：**连接DM并延长，交EF于点N，

则$\triangle ADM\cong\triangle ENM$，$FN=1$.

则$\triangle FDN$为等腰直角三角形，且$DM=MN$.

$\therefore FM=\frac{\sqrt{2}}{2}FN=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

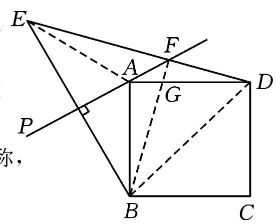
7. (1)略.

(2)连接AE，则$AE=AB=AD$，则$\triangle AED$为等腰三角形.

又$\angle PAB=20^\circ=\angle PAE$，$\therefore \angle EAB=40^\circ$，

$\therefore \angle EAD=130^\circ$，$\therefore \angle AED=\angle ADE=50^\circ\div 2=25^\circ$.

(3)AB，FE，FD满足的数量关系：$FE^2+FD^2=2AB^2$.



第7题图

证明如下：连接AE，BF，BD，设BF交AD于点G，如图.

$\because$点E与点B关于直线AP对称，

$\therefore AE=AB$，$FE=FB$.

可证得$\angle FEA=\angle FBA$.

$\because AB=AD$，$\therefore AE=AD$.

$\therefore \angle ADE=\angle AED$.

$\therefore \angle ADE=\angle ABF$.

又$\because \angle DGF=\angle AGB$，

$\therefore \angle DFB=\angle BAD=90^\circ$.

$\therefore FB^2+FD^2=BD^2$.

$\because BD^2=2AB^2$，

$\therefore FE^2+FD^2=2AB^2$.

8. (1)过点G作$GO\perp DC$交AE于点P，显然$GO\parallel BC$，

$\therefore \angle FPG=\angle FEB$，而在$\triangle GFP$和$\triangle GOH$中，$\angle GFP=\angle GOH=90^\circ$，$\angle FGP=\angle HGO$，

$\therefore \angle FPG=\angle GHO$，得出$\angle FEB=\angle GHO$.

而$\angle HOG=\angle EBA=90^\circ$，$AB=GO$，

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle GOH$(AAS)，得$BE=HO$.

而在正方形$ABCD$中，$GB=OC$，$HC=HO+OC$，

$\therefore HC=BE+GB$，$\therefore BG=CH-BE$.

(2)延长AB，DC，过点F作GH垂直AE的延长线，分别交AB，DC的延长线于点G，H，过点H作$HO\perp AG$，交AE的延长线于点P. 显然$HO\parallel BC$，同理可证$\triangle ABE\cong\triangle HOG$(AAS)，得$GO=BE$. 而$BO=CH$，又$\because BG=BO+OG$，$\therefore BG=CH+BE$.

9. (1)①连接AM，AD，

$\because BC=BD$，$\angle CBD=\angle ABD+\angle ABC=90^\circ+60^\circ=150^\circ$，

$\therefore \angle BCD=\angle BDC=15°$. $\therefore \angle ACD=60°-15°=45°$.

$\because AM=CM$.

$\therefore \angle MAC=\angle ACD=45°$. $\therefore \angle AMC=90°$.

$\because AD$ 是正方形 $ABDE$ 的对角线， $\therefore \angle ADB=45°$，

$\therefore \angle ADC=\angle ADB-\angle CDB=30°$， $\therefore AM=\frac{1}{2}AD$.

在 Rt$\triangle ADM$ 中，由勾股定理知$\frac{DM}{AM}=\sqrt{3}$. $\therefore \frac{DM}{CM}=\sqrt{3}$.

②设 $CF=1$，则在 Rt$\triangle CFM$ 中，$FM=1$，

$AM=CM=\sqrt{2}$，在 Rt$\triangle BCF$ 中，$BF=\sqrt{3}$，

$\therefore BM=BF-FM=\sqrt{3}-1$.

$\because AM=\sqrt{2}$， $\therefore$ 在 Rt$\triangle ADM$ 中，由勾股定理得 $DM=\sqrt{6}$，

$\therefore DM-CM=\sqrt{2}\times(\sqrt{3}-1)=\sqrt{2}BM$.

(2)①$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle CBD=90°-60°=30°$.

$\because BC=BD$， $\therefore \angle BDC=\angle BCD=75°$.

$\therefore \angle ACM=180°-\angle ACB-\angle BCD=45°$.

$\because BF$ 是$\triangle ABC$ 的中线， $\therefore AM=CM$.

$\therefore \angle CAM=\angle ACM=45°$. $\therefore \angle AMC=90°$.

$\because AD$ 是正方形 $ABDE$ 的对角线，

$\therefore \angle ADB=45°$，$\angle ADM=30°$.

在 Rt$\triangle ADM$ 中，$AD=2AM$.

根据勾股定理知$\frac{DM}{CM}=\frac{DM}{AM}=\sqrt{3}$.

②本题和第(1)题第②问类似，

设 $CF=1$，那么 $BM=BF+FM=\sqrt{3}+1$，

$DM+CM=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{2}BM$.

10. B **提示：**在 AC 上取一点 G，使 $CG=AB=4$，连接 OG，$\angle OCG=\angle OBA$，则$\triangle OGC\cong\triangle OAB$. 得 $OG=OA=6\sqrt{2}$，$\angle AOG=90°$，故$\triangle AOG$ 为等腰直角三角形. 得 $AG=12$，故 $AC=16$.

11. B **提示：**过点 A 作 $AE\perp l_2$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp l_2$ 于点 F，证$\triangle AEB\cong\triangle BFC$(ASA).

$\therefore BF=AE=5$，

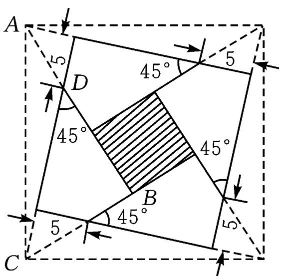
在 Rt$\triangle BFC$ 中，$BC^2=BF^2+CF^2=25+49=74$，

即 $S_{正方形ABCD}=74$.

12. $\sqrt{7}$. **提示：**过点 E 作 $EH\perp CD$ 交 CD 的延长线于点 H，$\triangle DEH\cong\triangle DGA$，$EH=AG$，$S_{\triangle CDE}=S_{\triangle ADG}$.

13. $20\sqrt{2}$. **提示：**如图，构造如图.

得小正方形的边长为 $AB-BC=AB-BD=AD=5\sqrt{2}$.



第 13 题图

14. (1)$BF=4\sqrt{5}$.

(2)①过点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H，并延长 FH 交 BC 的延长线于点 M，Rt$\triangle EFH\cong$Rt$\triangle CED$，则 $FH=ED=3$，$EH=CD=AD$.

②$BF=\sqrt{BM^2+FM^2}=\sqrt{[4+(4-3)]^2+(3+4)^2}=\sqrt{74}$.

(3)如图①，当点 E 在点 A 左侧时，设 $AE=x$，

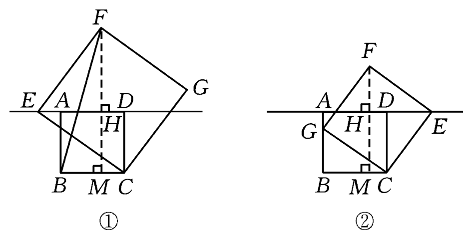
则 $MF=4+x+4=x+8$，$BM=4-x$，

由$(x+8)^2+(4-x)^2=(3\sqrt{10})^2$，得 $x=1$.

如图②，当点 E 在点 A 右侧时，

同理，由 $x^2+(x-4)^2=(3\sqrt{10})^2$，得 $x=2+\sqrt{41}$.

故 $AE=1$ 或 $AE=2+\sqrt{41}$.



第 14 题图

第 25 讲 变量与函数

例 1 D

例 2 $x\geqslant-3$ 且 $x\neq-1$. **提示：**依题意得$\begin{cases}x+3\geqslant0,\\x+1\neq0,\end{cases}$

解得 $x\geqslant-3$ 且 $x\neq-1$.

例 3 C **提示：**$x=\frac{3}{2}$满足 $1<x\leqslant2$，将 $x=\frac{3}{2}$代入 $y=-x+2(1<x\leqslant2)$中，得 $y=-\frac{3}{2}+2=\frac{1}{2}$.

例 4 D **提示：**小莹和小梅所跑路程 S(米)与所用时间 t(秒)的函数图象分别为图中线段 OA 和折线 $OBCD$，故小莹为匀速，小梅为变速，故 A 错误；小莹的平均速度为$\frac{800}{180}$，大于小梅的平均速度$\frac{800}{220}$，故 B 错误；两人相遇点为 OA 与 BC 的交点，时间小于起跑后 180 秒，故 C 错误；在起跑后 50 秒时，小梅在小莹的前面，故 D 正确.

例 5 (1)10. **提示：**$n=4$ 时，$S=1+2+3+4=10$.

(2)55. **提示：**$n=10$ 时，$S=1+2+3+\cdots+10=55$.

(3)如图 D25-1，描出横坐标为 n，纵坐标为 S 的点.

(4)因为第 n 层的小正方体的个数 $S=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

即 $S=\frac{n(n+1)}{2}$(n 为正整数).

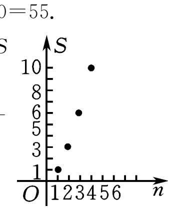


图 D25-1

所以上述各点会在同一个函数图象上，该函数的解析式是 $S=\frac{n(n+1)}{2}$(n 为正整数).

[变式题组]

1. A **2.** B **3.** C **4.** C

5. $x\geqslant-1$ 且 $x\neq2$.

6. C **提示：**设输入的数据为 n，输出的数据为 y，其规律可表示为 $y=\frac{n}{n^2+1}$. 故当输入 8 时，输出的数据为 $y=\frac{8}{8^2+1}=\frac{8}{65}$.

7. C **提示：**小明骑车上学，开始时以正常速度匀速行驶，所以开始时行驶情况的图象是一条过原点 O 的斜线；修车时自行车没有运动，所以修车时的路程保持不变，是一条平行于横轴的

线段;修车后为了赶时间,比修车前加快了速度继续匀速行驶,此时行驶情况的图象仍是一条斜线,只是斜线的倾斜角度更大. 故选 C.

8. D **9.** C

10. (1)正方形的个数分别是 8,13,18;图形的周长分别是 18,28,38.

(2)$5n+3$. (3)$y=2x+2$($x>0$ 且 x 为整数).

11. 181. **提示:** 记 $a_1=1,a_2=5,a_3=13,a_4=25,\cdots$,则 $a_2-a_1=4=1\times4,a_3-a_2=8=2\times4,a_4-a_3=12=3\times4,\cdots$,猜想:$a_n-a_{n-1}=4(n-1)$($n$ 是正整数). 于是以上各等式两边相加得

$a_2-a_1+a_3-a_2+a_4-a_3+\cdots+a_n-a_{n-1}$

$=4\times(1+2+3+\cdots+n-1)=2n(n-1)$,

即 $a_n-a_1=2n(n-1),a_n=a_1+2n(n-1)=1+2n(n-1)$.

即当 $n=10$ 时,$a_{10}=1+2\times10\times(10-1)=181$.

[能力平台]

1. C **提示:** 向甲池注水,到一定时候和乙池连通,水面上升的速度变慢,再过一段时间甲、乙水面同时上升,水面上升的速度又开始变快.

2. C **提示:** 接到通知后,静怡立即在电脑上打字录入这篇文章,所以函数图象平缓上升;录入一段时间后因事暂停,录入字数不变,过了一会儿,继续录入并加快了录入速度,函数图象上升,且比开始时上升得快. 综合这些信息可知答案选 C.

3. B **提示:** 由题知点 P 从 A 到 B 只需 2 秒,当点 P 运动 2.5 秒时,点 P 在 BC 上,此时 $AB+BP=4+BP=5$,即 $PB=1$,此时 $PC=3$, $\therefore PQ=3\sqrt{2}$ cm.

4. B

5. 2 017. **提示:** 由题知 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$,

$\therefore f(n)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$\because f(1)+f(2)+\cdots+f(n)=\frac{2\ 017}{2\ 018}$,

$\therefore 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{2\ 017}{2\ 018}$.

$\therefore 1-\frac{1}{n+1}=\frac{2\ 017}{2\ 018}$. $\therefore \frac{1}{n+1}=\frac{1}{2\ 018}$. $\therefore n=2\ 017$.

6. (1)$l=5+(n-1)\times3=3n+2$($n>0$ 且 n 为整数).

(2)当 $n=11$ 时,$l=3\times11+2=35$.

7. (1)$m=25+n-1=n+24$($n>0$ 且 n 为整数),$p=\frac{25+24+n}{2}\cdot n=\frac{1}{2}n(n+49)$($n>0$ 且 n 为整数).

(2)当 $n=15$ 时,$p=\frac{1}{2}\times15\times(15+49)=480$ 个.

8. D **提示:** A 表示兔子先到,不合题意;B 表示兔子睡觉后没有追乌龟,不合题意;C 表示兔子和乌龟同时到达,不合题意;只有 D 符合题意.

9. D **提示:** $\because$ 从题图②知点 P 在 GC 上运动的时间为 2s,

$\therefore GC=2\times2=4$ cm. $\therefore BC=2GC=2\times4=8$ cm,故(1)正确;

$\because$ 当点 P 在 CD 上时,$y=S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\times BC=\frac{1}{2}\times6\times8=24\ \text{cm}^2$, $\therefore$ 点 M 在第 4 秒时,y 的值为 24,故(2)正确;

$\because$ 从题图②知,点 P 在 CD 上的时间为 2 s,

$\therefore CD=2\times2=4$ cm,故(3)正确;

$\because DE=(7-4)\times2=6$ cm,点 P 从 G 到 H 共走了 $2\times12=24$ cm,

$\therefore$ 多边形 $ABCDEFH$ 的周长为 $(AB+BC+DE)\times2=(6+8+6)\times2=40$ cm,

$\therefore AH=40-AB-\frac{1}{2}BC-24=40-6-\frac{1}{2}\times8-24=6$ cm,则 $y=S_{\triangle ABH}=\frac{1}{2}AB\cdot AH=\frac{1}{2}\times6\times6=18\ \text{cm}^2$,故(4)正确.

综上知(1)(2)(3)(4)都正确.

10. A **提示:** 题图②描述甲不到一半路程就由速度 v_2 变为 v_1,而乙先用 v_2 走完一半时间,再用 v_1 走完全程;题图③描述甲先用 v_1 走一半的路程再用 v_2 走完全程,而乙先用 v_2 走一半的路程再用 v_1 走完全程;题图④是两组对边不平行的四边形,表示甲、乙先后不是使用同一速度 v_1 或 v_2,因而均不合题意.

11. 0.3. **提示:** 依题意知,小明返回时的速度为 $0.9\div(55-40)=0.06$ km/min,

$50-40=10$ min,返回时 10 min 走的路程 $=0.06\times10=0.6$ km. $0.9-0.6=0.3$ km,

所以他离家 50 分钟时离家的距离为 0.3 km.

12. (1)设甲公司总收费为 y_1(元),乙公司总收费为 y_2(元),于是 $y_1=a+(x-1)(1-25\%)a$,

即 $y_1=\frac{3}{4}ax+\frac{1}{4}a$($x>0$ 且 x 为正整数),

$y_2=x(1-20\%)a$,即 $y_2=\frac{4}{5}ax$($x>0$ 且 x 为正整数).

(2)令 $y_1=y_2$,即 $\frac{3}{4}ax+\frac{1}{4}a=\frac{4}{5}ax$,解得 $x=5$.

当 $y_1>y_2$ 时,解得 $x<5$;当 $y_1<y_2$ 时,解得 $x>5$.

所以该单位在派出 5 人时,可任选甲、乙中的一家公司;

在派出少于 5 人时,选乙公司;在派出多于 5 人时,选甲公司.

13. (1)依题意得,当 $0\leqslant x\leqslant6$ 时,$y=ax$;

当 $x>6$ 时,$y=6a+c(x-6)$.

由表知 $\begin{cases}7.5=5a,\\27=6a+3c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1.5,\\c=6.\end{cases}$

$\therefore y=\begin{cases}1.5x(0\leqslant x\leqslant6),\\9+6(x-6)=6x-27(x>6).\end{cases}$

(2)$\because 8>6$,

$\therefore$ 把 $x=8$ 代入 $y=6x-27$,得 $y=6\times8-27=21$ 元,

即该户 5 月份应交的水费为 21 元.

第 26 讲 一次函数的图象、性质及其应用(一)

例 1 2 或 7. **提示:** 当 $k>0$ 时,y 随 x 的增大而增大.

$\because$ 当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,$3\leqslant y\leqslant6$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$y=3$;当 $x=4$ 时,$y=6$.

$\therefore \begin{cases}k+b=3,\\4k+b=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=1,\\b=2,\end{cases}$ $\therefore b=2$.

当 $k<0$ 时,y 随 x 的增大而减小.

$\because$ 当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时,$3\leqslant y\leqslant6$,

$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$y=6$;当 $x=4$ 时,$y=3$.

$\therefore \begin{cases}k+b=6,\\4k+b=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=7,\end{cases}$ $\therefore b=7$.

故 b 的值是 2 或 7.

例 2 (1)C (2)B **提示:** (1)$\because$ 直线 $y=kx+b$ 不经过第四象限,即直线可能过第一、二、三象限且与 y 轴的交点不在 x 轴的下方,也可能只过一、二象限或与 x 轴重合,还可能只过一、三象限和原点, $\therefore k\geqslant0,b\geqslant0$. 故选 C.

(2)$\because k=\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$,

∴$a+b-c=kc,a-b+c=kb,-a+b+c=ka$，

三式相加，得 $a+b+c=k(a+b+c)$，　∴$k=1$ 或 $a+b+c=0$.

当 $a+b+c=0$ 时，$a+b=-c$，

故 $k=-2$.　∵$\sqrt{m-5}+n^2+9=6n$，　∴$\sqrt{m-5}+(n-3)^2=0$，

则 $m=5,n=3$. 故一次函数为 $y=x-15$ 或 $y=-2x-15$.

∴函数图象一定经过第三、四象限.

例 3　2 200.　**提示：**设小明的速度为 a 米/秒，小刚的速度为 b 米/秒，由题意得

$\begin{cases}1\,600+100a=1\,400+100b,\\1\,600+300a=1\,400+200b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=4.\end{cases}$

∴这次越野跑的全程为 $1\,600+300\times2=2\,200$ 米.

例 4　D　**提示：**依题设易知 $A_n(n,0)$，$B_n(n,2n)$，$A_{n+1}(n+1,0)$，$B_{n+1}(n+1,2n+2)$. 设直线 A_nB_{n+1} 的解析式为 $y=kx+b$，

则 $\begin{cases}nk+b=0,\\(n+1)k+b=2n+2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2n+2,\\b=-2n(n+1).\end{cases}$

故直线 A_nB_{n+1} 的解析式为 $y=(2n+2)x-2n(n+1)$，　①

同理，直线 $A_{n+1}B_n$ 的解析式为 $y=-2nx+2n(n+1)$，　②

联立①②得 $x_p=\dfrac{2n^2+2n}{2n+1}$，

所以 $S_n=\dfrac{1}{2}\times2n\cdot\left(\dfrac{2n^2+2n}{2n+1}-n\right)=\dfrac{n^2}{2n+1}$.

［变式题组］

1. $\dfrac{7}{3}\leqslant k\leqslant3$.　**提示：**由直线 $y=kx-k$ 可知该直线过定点 $C(1,0)$，且该直线与已知点 $A(2,3)$，$B(4,7)$ 两点的直线有交点，则 $k_{AC}=3$，$k_{BC}=\dfrac{7}{3}$，即 $\dfrac{7}{3}\leqslant k\leqslant3$.

2. 把 $A(1,3)$，$B(0,-2)$ 代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}k+b=3,\\b=-2.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=5,\\b=-2.\end{cases}$

3. (1)∵$L_1\perp L_2$，则 $k_1k_2=-1$，　∴$2k=-1$，　∴$k=-\dfrac{1}{2}$.

(2)∵过点 A 的直线与 $y=-\dfrac{1}{3}x+3$ 垂直，　∴设过点 A 的直线的解析式为 $y=3x+b$，把 $A(2,3)$ 代入得 $b=-3$，

∴解析式为 $y=3x-3$.

4. C　**提示：**由图象可知 $y=(m-2)x+n$，$m-2<0$，$n<0$，即 $m<2$.

5. (1)慢车速度为 60 千米/小时，a 的值为 360.

(2)快车速度为 120 千米/小时，第一次相遇的时间为 $\dfrac{8}{3}$ 小时，

距离甲地 $S=vt=120\times\dfrac{8}{3}=320$ 千米.

(3)$\dfrac{14}{9}$，$\dfrac{34}{9}$，$\dfrac{14}{3}$ 小时.

6. $\dfrac{9}{2}$.　**提示：**$B(0,4)$，$C(0,-5)$，$EF=\dfrac{1}{2}BC$.

7. $(2^{1\,008},2^{1\,009})$.　**提示：**∵$2\,017=504\times4+1$，　∴点 $A_{2\,017}$ 位于第一象限. 根据题意可知，每次循环所得点的横、纵坐标的绝对值均扩大到原来的 4 倍.

又∵点 A_1 的坐标为 $(1,2)$，

∴点 $A_{2\,017}$ 的坐标为 $(1\times4^{504},2\times4^{504})$，即 $A_{2\,017}(2^{1\,008},2^{1\,009})$.

［能力平台］

1. B　**提示：**因为 $y=\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{a}$ 不经过第四象限，则 $\dfrac{a}{b}>0$，$-\dfrac{c}{a}\geqslant0$ 且 $abc<0$，则 $a+b>0$，$c<0$. 故直线 $y=(a+b)x+c$ 一定不经过第二象限.

2. B　**提示：**因为阴影部分为三个直角三角形，与 x 轴平行的边长都为 1，高均为 2，

故图中阴影部分的面积之和为 3.

3. D　**提示：**由题知，该一次函数的值随 x 的增大而增大且过定点 $(-2,3)$，则 $b>3$，$a>3$，$c<-2$.

4. D　**提示：**①当 y 随 x 增大而增大时，$k=2$，$b=7$，此时 $kb=14$.

②当 y 随 x 增大而减小时，$k=-2$，$b=3$，此时 $kb=-6$.

5. $y=-x+3$ 或 $y=-2x+4$.　**提示：**∵$k=2-b$，$A\left(\dfrac{b}{b-2},0\right)$，$B(0,b)$，

由 $\dfrac{b}{b-2}+b=6(b>2)$ 得 $b^2-7b+12=0$.

∵$(b-3)(b-4)=0$，即 $b=3$ 或 $b=4$.

∴$k=-1$ 或 $k=-2$.

6. $7\leqslant a\leqslant9$.　**提示：**将 $A(2,0)$，$B(3,0)$ 分别代入得，$4+3-a\leqslant0$ 且 $6+3-a\geqslant0$，即 $7\leqslant a\leqslant9$.

7. (1)当 $0\leqslant x\leqslant20$ 时，y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2x(0\leqslant x\leqslant20)$；

当 $x>20$ 时，y 与 x 之间的函数表达式为 $y=2.8(x-20)+40=2.8x-16(x>20)$.

(2)∵小颖家四月份、五月份分别交水费 45.6 元、38 元，

∴小颖家四月份用水超过 20 吨，五月份用水没有超过 20 吨.

设小颖家四月份用水量为 x_1 吨，五月份用水量为 x_2 吨.

∴$45.6=2.8x_1-16$，$38=2x_2$.　∴$x_1=22$，$x_2=19$.

∵$22-19=3$，　∴小颖家五月份比四月份节约用水 3 吨.

8. (1)$y=2x-4$.

(2)直线 CD 平移经过点 $B(0,3)$ 时的解析式为 $y=2x+3$，得直线 CD 在平移过程中与 x 轴交点的横坐标的取值范围为 $-\dfrac{3}{2}\leqslant x\leqslant2$.

9. D　**提示：**由题意知 $1-m+m^2-3=0$，

即 $m^2-m-2=0$，　∴$(m-2)(m+1)=0$，

∴$m_1=2$，$m_2=-1$.

又 $m^2-4\neq0$，　∴$m\neq\pm2$，

即 $m=-1$.

10. D　**提示：**由题知 $a<0$，设直线与 x 轴交于点 $A(x,0)$，

则 $\dfrac{1}{2}\times24\times x=72$，　∴$x=6$，

即 $a=-\dfrac{24}{6}=-4$，

即 $y=-4x+24$，代入验证即可.

11. 16.　**提示：**令 $a=0$，则 $P(-1,-3)$.

令 $a=1$，则 $P(0,-1)$，

易求得直线 l 的解析式为 $y=2x-1$.

∵点 $Q(m,n)$ 在直线 l 上，　∴$2m-n=1$，

∴$(2m-n+3)^2=(1+3)^2=16$.

12. $2^{2\,019}$.　**提示：**∵$OA_1=1$，$OA_2=2$，$OA_3=4$，$OA_4=8$，…，$OA_n=A_nB_n=2^{n-1}$，

∴$OA_{2\,020}=2^{2\,020-1}=2^{2\,019}$.

13. (1)将点 $P(m+1,m-1)$ 代入 $y=x-2$ 中，得 $m-1=m+1-2=m-1$ 成立，

即点 P 在一次函数 $y=x-2$ 的图象上.

(2)两直线的交点为 $\left(\frac{10}{3},\frac{4}{3}\right)$，直线 $y=x-2$ 与 x 轴的交点为(2,0)，由 $\begin{cases}2<m+1<\frac{10}{3},\\0<m-1<\frac{4}{3}\end{cases}$ 知 $1<m<\frac{7}{3}$.

14. (1) $y=20x+16\ 800$（$10\leqslant x\leqslant 40$ 且 x 是正整数）.

(2) $y=(20-a)x+16\ 800$.

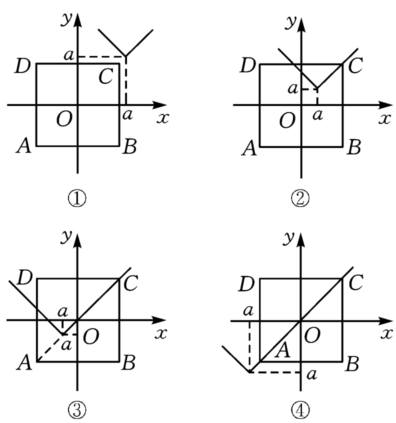
$\because 200-a>170$，$\therefore a<30$.

当 $0<a<20$，即当 $x=40$ 时，总利润达到最大，即调配给甲连锁店空调机 40 台、电冰箱 30 台，乙连锁店空调机 0 台、电冰箱 30 台；

当 $a=20$ 时，x 的取值在 $10\leqslant x\leqslant 40$ 内，所有方案利润相同；

当 $20<a<30$，即当 $x=10$ 时，总利润达到最大，即调配给甲连锁店空调机 10 台、电冰箱 60 台，乙连锁店空调机 30 台、电冰箱 0 台.

15. (1)当 $a\geqslant 1$ 时，$y=|x-a|+a$ 的图象与正方形无公共部分，如图①所示，$S=0$.



第 15 题图

(2)当 $0\leqslant a<1$ 时，如图②所示.

$S=\frac{1}{2}(1-a)\times 2(1-a)=(1-a)^2$.

(3)当 $-1\leqslant a<0$ 时，如图③所示.

$S=2-\frac{2(1+a)(1+a)}{2}=2-(1+a)^2$.

(4)当 $a<-1$ 时，如图④所示. $S=2$.

所以 S 的最大值为 2.

16. (1) $\because$ 直线 $y=3x-2$ 可变形为 $3x-y-2=0$，

其中 $k=3,b=-2$.

$\therefore$ 点 $P(1,1)$ 到直线 $y=3x-2$ 的距离为

$d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3\times 1-1-2|}{\sqrt{1+3^2}}=0$.

$\therefore$ 点 $P(1,1)$ 在直线 $y=3x-2$ 上.

(2) $\because$ 直线 $y=2x-1$ 可变形为 $2x-y-1=0$，

其中 $k=2,b=-1$，

$\therefore$ 点 $P(2,-1)$ 到直线 $y=2x-1$ 的距离为

$d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|2\times 2-(-1)-1|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(3) $\because$ 直线 $y=-x+1$ 与 $y=-x+3$ 平行，

$\therefore$ 任取直线 $y=-x+1$ 上的一点，它到直线 $y=-x+3$ 的距离即为两直线之间的距离.

$\therefore$ 取 $y=-x+1$ 上的一点 $P(0,1)$，它到直线 $y=-x+3$ 的距离为 $d=\frac{|kx_0-y_0+b|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|0-1+3|}{\sqrt{1+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

即两直线之间的距离为 $\sqrt{2}$.

第 27 讲　一次函数的图象、性质及其应用(二)

例 1　D　**提示：** 设直线 l 的解析式为 $y=mx+n(m\neq 0)$，它过 $A(a,b)$，$B(b,a)$，$C(a-b,b-a)$ 三点.

$\therefore\begin{cases}b=am+n, & ①\\a=bm+n, & ②\\b-a=(a-b)m+n. & ③\end{cases}$

由①－②得 $(a-b)m=b-a$.

当 $a\neq b$ 时，$m=-1$，代入③得 $n=0$.

$\therefore$ 直线 l 为 $y=-x$. 其图象过第二、四象限.

当 $a=b\neq 0$ 时，其图象过 (0,0)，(a,a)，

故其直线为 $y=x$，其图象过第一、三象限.

当 $a=b=0$ 时，其图象是过 (0,0) 的任意直线，无法确定其位置.

故选 D.

例 2　D　**提示：** 当 $y=0$ 时，对于 $y=nx+4n(n\neq 0)$，可知 $x=-4$. 故 $nx+4n>0$ 的解集为 $x>-4$. $\because y=-x+m$ 与 $y=nx+4n(n\neq 0)$ 的交点的横坐标为 -2，观察图象可知 $-x+m>nx+4n$ 的解集为 $x<-2$. $\therefore -x+m>nx+4n>0$ 的解集为 $-4<x<-2$. $\because x$ 为整数，$\therefore x=-3$.

例 3　(1)设从 A 基地运往甲销售点水果 x 件，则从 A 基地运往乙销售点水果为 $(380-x)$ 件，

从 B 基地运往甲销售点水果 $(400-x)$ 件，运往乙销售点水果点水果 $(x-80)$ 件，

由题意得 $W=40x+20(380-x)+15(400-x)+30(x-80)=35x+11\ 200$，

即 $W=35x+11\ 200$，$\because\begin{cases}x\geqslant 0,\\380-x\geqslant 0,\\400-x\geqslant 0,\\x-80\geqslant 0,\end{cases}$ $\therefore 80\leqslant x\leqslant 380$，

即 x 的取值范围是 $80\leqslant x\leqslant 380$.

(2) $\because A$ 地运往甲销售点的水果不低于 200 件，$\therefore x\geqslant 200$.

$\because k=35>0$，$\therefore$ 运费 W 随着 x 的增大而增大，

$\therefore$ 当 $x=200$ 时，运费最低，为 $35\times 200+11\ 200=18\ 200$（元）.

此时，从 A 基地运往甲销售点水果 200 件，从 A 基地运往乙销售点水果 180 件，从 B 基地运往甲销售点水果 200 件，运往乙销售点水果 120 件.

例 4　(1)如图 D27-1，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E.

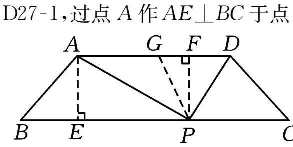


图 D27-1

$\because$ 在 Rt$\triangle ABE$ 中，$\angle AEB=90°$，$\angle B=45°$，

$\therefore AE=BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}x$.

$\because S_{\triangle PAD}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

$\therefore \frac{1}{2}AD\cdot AE=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即 $\frac{1}{2}y\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$\therefore y=\frac{1}{x}(x>0)$.

(2)**方法一** ∵$\angle APD=90°$， ∴$AD^2=AP^2+PD^2$，即 $y^2=AP^2+PD^2$. ∵$(AP-PD)^2\geqslant 0$，

∴$AP^2+PD^2\geqslant 2AP\cdot PD$(当且仅当$AP=PD$时，等号成立)，

∴$y^2\geqslant 2AP\cdot PD=4S_{\triangle PAD}=4\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$，即 $y^2\geqslant\sqrt{2}$.

方法二 如图，取 AD 的中点 G，过点 P 作 $PF\perp AD$ 于点 F，则 $GP\geqslant PF$. ∴$\frac{1}{2}y\geqslant\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2}{y}$， ∴$y^2\geqslant\sqrt{2}$.

[变式题组]

1. 设直线 a：$y=kx+b$ 过 $A(-2,1)$，$B(2,3)$. 由 $\begin{cases}-2k+b=1,\\2k+b=3\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\b=2,\end{cases}$ 所以直线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+2$.

2. C **提示**：∵直线 $y=ax+b$ 中 y 随 x 的增大而减小，

∴$a<0$，故①对；

∵$y=x+c$ 与 y 轴的交点为$(0,c)$， ∴$c<0$，故②错；

对于 $y=x+c$，y 随 x 的增大而增大，

∴$x_A<x_B$ 时，$y_A<y_B$，故③错；

观察 $y=x+c$ 与 $y=ax+b$ 的交点，其右侧$y=ax+b$ 的图象在 $y=x+c$ 下方，故 $x>1$ 是 $ax+b<x+c$ 的解，故④对.

3. (1)$y=600x+500(17-x)+400(18-x)+800(x-3)$
$=500x+13\ 300$.

(2)由(1)知总运费 $y=500x+13\ 300$.

∵$\begin{cases}x\geqslant 0,\\17-x\geqslant 0,\\18-x\geqslant 0,\\x-3\geqslant 0.\end{cases}$ ∴$3\leqslant x\leqslant 17$. 又 $k=500>0$，

∴随 x 增大，y 也增大，

∴当 $x=3$ 时，$y_{最小}=500\times 3+13\ 300=14\ 800$(元).

4. (1)∵$\triangle AOB$ 与$\triangle ACP$ 都是等边三角形，

∴$AO=AB$，$AC=AP$，$\angle CAP=\angle OAB=60°$.

∴$\angle CAP+\angle PAO=\angle OAB+\angle PAO$.

∴$\angle CAO=\angle PAB$.

∴$\triangle AOC\cong\triangle ABP$.

结论：点 P 在过点 B 且与 AB 垂直的直线上或 $PB\perp AB$ 或$\angle ABP=90°$.

(2)点 P 所在函数图象是过点 B 且与 AB 垂直的直线上，

∵$\triangle AOB$ 是等边三角形，$A(0,3)$，

∴$B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

当点 C 移动到使点 P 在 y 轴上时，得 $P(0,-3)$.

设点 P 所在直线的解析式为 $y=kx+b$，

把 B，P 两点的坐标代入得

$\begin{cases}b=-3,\\\frac{3\sqrt{3}}{2}k+b=\frac{3}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\sqrt{3},\\b=-3.\end{cases}$

所以点 P 所在函数图象的解析式为 $y=\sqrt{3}x-3$.

5. (1)设直线 AB 的解析式为 $y=kx-4(k\neq 0)$，

将 $A(4,0)$代入得 $0=4k-4$，解得 $k=1$，

∴直线 AB 的解析式为 $y=x-4$.

(2)过点 M 作 $MC\perp OB$ 于点 C.

易证$\triangle AOP\cong\triangle PCM$，

∴$OA=CP=4$，$OP=CM=4+m$，

∴$OC=OP+CP=8+m$，

∴$M(4+m,-8-m)$.

(3)点 Q 的坐标不随 m 的变化而变化. 理由如下：

由(2)知 $CM=4+m$，$CB=CP+BP=4+m$.

∴$CM=CB$， ∴在 Rt$\triangle BCM$ 中，$\angle CBM=45°$，

∵$\angle CBM=\angle QBO=45°$，$\angle QOB=90°$， ∴$OQ=OB=4$，

∴$Q(-4,0)$. 即点 Q 的坐标不随 m 的变化而变化.

6. $-2\leqslant b\leqslant 2$ 且 $b\neq 0$. **提示**：当 $x=0$ 时，$y=b$， ∴$B(0,b)$；

当 $y=0$ 时，$x=-2b$， ∴$A(-2b,0)$.

∴$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|b|\cdot|-2b|=|b|^2=b^2$.

∵$S_{\triangle AOB}\leqslant 4$， ∴$b^2\leqslant 4$， ∴$-2\leqslant b\leqslant 2$.

当 $b=0$ 时，$y=\frac{1}{2}x+b=\frac{1}{2}x$，点 O，A，B 重合，构不成三角形.

∴$-2\leqslant b\leqslant 2$ 且 $b\neq 0$.

7. (1)令 $y=0$，得 $x=-\frac{3}{2}$，令 $x=0$，得 $y=3$，

∴$A\left(-\frac{3}{2},0\right)$，$B(0,3)$.

(2)∵$OP=2OA=2\times\frac{3}{2}=3$， ∴$P(3,0)$或$(-3,0)$.

当点 P 的坐标为$(3,0)$时，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot OB=\frac{1}{2}\times\left(3+\frac{3}{2}\right)\times 3=\frac{27}{4}$；

当点 P 的坐标为$(-3,0)$时，

$S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AP\cdot OB=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{3}{2}+3\right)\times 3=\frac{9}{4}$.

故 $S_{\triangle ABP}=\frac{27}{4}$或$\frac{9}{4}$.

[能力平台]

1. A **提示**：将点 $A(m,3)$代入 $y=2x$，得 $2m=3$，解得 $m=\frac{3}{2}$.

∴点 A 的坐标为$\left(\frac{3}{2},3\right)$，

∴由图可知，不等式 $2x\geqslant ax+4$ 的解集为 $x\geqslant\frac{3}{2}$.

2. C **提示**：由 $y=\sqrt{3}x+n$ 知$\angle OBC=60°$.

又$\angle ACD=90°$， ∴$\angle CAB=30°$.

∵$A(-4,0)$， ∴$\sqrt{3}OC=OA=4$， ∴$OC=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $n=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

3. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

4. **方法一** ∵第一、三象限的角平分线 $y=x$ 垂直于第二、四象限的角平分线$y=-x$，而直线 $y=x-1$ 与直线 $y=x$ 平行，直线 $y=-x+5$ 与直线 $y=-x$ 平行，

∴直线 AM 与直线 $y=x-1$ 垂直.

∵$m+n=mn$ 且 m，n 是正实数，

∴$\frac{m}{n}+1=m$，即$\frac{m}{n}=m-1$. ∴$P(m,m-1)$.

即"完美点"P 在直线 $y=x-1$ 上.

∴点 B 是 $y=x-1$ 与直线 AM 的交点，

∴垂足是点 B. ∵点 C 是"完美点"，

∴点 C 在直线 $y=x-1$ 上. ∴$\triangle MBC$ 是直角三角形.

∵点 $A(0,5)$在直线 $y=-x+b$ 上， ∴$b=5$.

∴直线 AM 的方程为 $y=-x+5$.

∵"完美点"B 在直线 AM 上，

由$\begin{cases} y=x-1, \\ y=-x+5 \end{cases}$解得 $B(3,2)$.

$\because B(3,2),A(0,5)$， $\therefore AB=3\sqrt{2}$.

$\because AM=4\sqrt{2}$， $\therefore BM=\sqrt{2}$.

又$\because CM=\sqrt{3}$， $\therefore BC=1$. $\therefore S_{\triangle MBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

方法二 $\because$直线 AM 与 x 轴所夹的锐角是 $45°$，直线 $y=x-1$ 与 x 轴所夹的锐角是 $45°$，

$\therefore$直线 AM 与直线 $y=x-1$ 垂直，

$\because m+n=mn$ 且 m,n 是正实数，

$\therefore \frac{m}{n}+1=m$，即$\frac{m}{n}=m-1$. $\therefore P(m,m-1)$.

即"完美点"P 在直线 $y=x-1$ 上.

$\therefore$点 B 是 $y=x-1$ 与直线 AM 的交点，

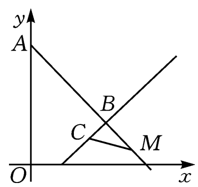
$\therefore$垂足是点 B. $\because$点 C 是"完美点"，

$\therefore$点 C 在直线 $y=x-1$ 上.

$\therefore \triangle MBC$ 是直角三角形.

$\because$点 $A(0,5)$在直线 $y=-x+b$ 上，

$\therefore b=5$.



第 4 题图

$\therefore$直线 AM 的解析式为 $y=-x+5$.

设"完美点"$B(c,c-1)$，即有 $c-1=-c+5$， $\therefore B(3,2)$.

$\because B(3,2),A(0,5)$，

$\therefore AB=3\sqrt{2}$.

$\because AM=4\sqrt{2}$， $\therefore BM=\sqrt{2}$.

又$\because CM=\sqrt{3}$， $\therefore BC=1$.

$\therefore S_{\triangle MBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. (1)$m=2$，$y=2x$.

(2)$S_{\triangle AOC}-S_{\triangle BOC}=15$.

(3)当 $l_3 /\!/ l_1$ 时，$k=-\frac{1}{2}$；

当 $l_3 /\!/ l_2$ 时，$k=2$；

当 l_3 过点 C 时，$k=\frac{3}{2}$.

综上可知，$k=-\frac{1}{2}$，2 或$\frac{3}{2}$.

6. (1)设今年 5 月份 A 款汽车每辆售价 m 万元，

则$\frac{90}{m}=\frac{100}{m+1}$，解得 $m=9$.

经检验，$m=9$ 是原方程的根且符合题意.

答：今年 5 月份 A 款汽车每辆售价 9 万元.

(2)设购进 A 款汽车 x 辆，则购进 B 款汽车$(15-x)$辆，

依题得 $99\leqslant 7.5x+6(15-x)\leqslant 105$.

解得 $6\leqslant x\leqslant 10$.

因为 x 的正整数解为 6，7，8，9，10，

所以共有 5 种进货方案.

(3)设总获利为 W 元，则

$W=(9-7.5)x+(8-6-a)(15-x)=(a-0.5)x+30-15a$.

当 $a=0.5$ 时，(2)中所有方案获利相同.

此时，购买 A 款汽车 6 辆，B 款汽车 9 辆对公司更有利.

7. (1)$P(8,6)$.

(2)易求得平移前直线 BD 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x+4$，因为$\frac{2}{3}\neq\frac{3}{4}$，故在平移过程中，直线 BD 不与直线 l_2 平行，故点 B,D 不可能同时落在直线 l_2 上，易知点 C 不可能落在直线 l_1 或 l_2 上，点 B,D 不可能落在直线 l_1 上. 在移动过程中，易求得 $B(2t,4-t)$，$D(9+2t,10-t)$. 当点 D 落在直线 l_2 上时，可得 $10-t=\frac{3}{4}(9+2t)$，解得 $t=\frac{13}{10}$. 当点 B 落在直线 l_2 上时，可得 $4-t=\frac{3}{4}\times 2t$，解得 $t=\frac{8}{5}$. 综上可知，t 的值为$\frac{13}{10}$或$\frac{8}{5}$.

8. D **提示：**①以点 B 为顶点时，符合条件的点有 3 个.

②以点 A 为顶点时，符合条件的点有 3 个.

③以 AB 为底时，符合条件的点有 2 个.

9. A **提示：**$\because y=2x+b$，

$\therefore$当 $y<2$ 时，$2x+b<2$，解得 $x<\frac{2-b}{2}$.

$\because$函数 $y=2x+b$ 沿 x 轴翻折后的解析式为 $y=-2x-b$.

当 $y<2$ 时，$-2x-b<2$，解得 $x>-\frac{2+b}{2}$.

$\therefore -\frac{2+b}{2}<x<\frac{2-b}{2}$.

$\because 0<x<3$， $\therefore -\frac{2+b}{2}\geqslant 0$，$\frac{2-b}{2}\leqslant 3$.

$\therefore b$ 的取值范围为$-4\leqslant b\leqslant -2$.

10. 1. **提示：**$\because -1\leqslant x\leqslant 2$， $\therefore x-2\leqslant 0$，$x+2>0$，

$\therefore$当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时，$|x-2|-\frac{1}{2}|x|+|x+2|=4-\frac{1}{2}x$.

当$-1\leqslant x<0$ 时，$|x-2|-\frac{1}{2}|x|+|x+2|=4+\frac{1}{2}x$.

当 $x=0$ 时，取得最大值，为 4.

当 $x=2$ 时，取得最小值，为 3.

则最大值与最小值之差为 1.

11. B **提示：**由 $y=x-3$ 与 $y=kx-k$ 可知，交点坐标为$\left(1+\frac{2}{1-k},\frac{2}{1-k}-2\right)$，则 $1-k$ 要能被 2 整除，交点坐标才为整数.

$\therefore k=-1$，0，2，3，共 4 个取值.

12. $A(\sqrt{3},0)$，$B(0,1)$，$OA=\sqrt{3}$，$OB=1$，$AB=2$，$S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABC}=2$.

连接 PO，$S_{\triangle AOP}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$S_{\triangle BOP}=-\frac{a}{2}$，$S_{\triangle AOB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

由 $S_{\triangle BOP}+S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AOP}=S_{\triangle ABP}$ 得$-\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=2$，

解得 $a=\frac{\sqrt{3}-8}{2}$.

13. (1)如图①，作 $DE\perp y$ 轴于点 E，$PF\perp y$ 轴于点 F，则 $\triangle ADE\cong\triangle PAF$，$AE=PF=8$，$OE=14$.

由 $14=2x+6$ 得 $x=4$， $\therefore D$ 点的坐标为$(4,14)$.

(2)直线 $y=2x+6$ 向右平移 6 个单位后的解析式为 $y=2x-6$.

如图②，当$\angle ADP=90°$，$AD=PD$ 时，

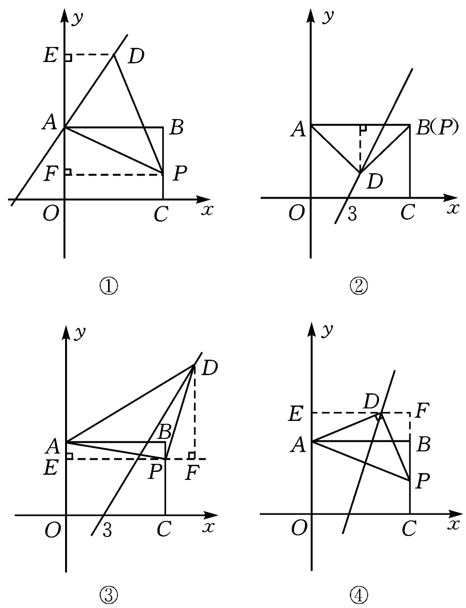
易得 D 点的坐标为$(4,2)$.

如图③，当$\angle APD=90°$，$AP=PD$ 时，设 P 点坐标为$(8,m)$，则 D 点的坐标为$(14-m,m+8)$，由 $m+8=2(14-m)-6$，得 $m=\frac{14}{3}$，

$\therefore D$ 点的坐标为$\left(\frac{28}{3},\frac{38}{3}\right)$.

如图④，当$\angle ADP=90°$，$AD=DP$ 时，同理可求得 D 点的坐标为$\left(\frac{20}{3},\frac{22}{3}\right)$.

综上，符合条件的 D 点存在，坐标分别为 $(4,2)$，$\left(\frac{28}{3},\frac{38}{3}\right)$，$\left(\frac{20}{3},\frac{22}{3}\right)$.



第 13 题图

14. (1)当 $y=0$ 时，$2x+2=0$，解得 $x=-1$，则 $A(-1,0)$.

当 $x=0$ 时，$y=2x+2=2$，则 $B(0,2)$.

(2)存在. 设点 P 为 (x,kx)，则 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times1\times|kx|$，$S_{\triangle BOP}=\frac{1}{2}\times2|x|=|x|$，因为 $\frac{S_{\triangle AOP}}{S_{\triangle BOP}}=\frac{1}{2}$，所以 $|x|=\frac{1}{2}\times2|kx|\Rightarrow k=\pm1$. 即 k 的值为 1 或 -1.

第 28 讲　数据的分析

例 1　D　**提示**：甲箱中剩下球数为 $98-49=49$(颗)，

∵乙箱中位数为 40，

∴小于、大于 40 的各有 $(49-1)\div2=24$(颗)，

∴甲箱中小于 40 的球有 $39-24=15$(颗)，大于 40 的有 $49-15=34$(颗)，即 $a=15$，$b=34$.

例 2　(1)25%，200.　**提示**：$a=1-10\%-15\%-30\%-15\%-5\%=25\%$，$20\div10\%=200$.

(2)条形统计图如图 D28-1 所示. 4，4.

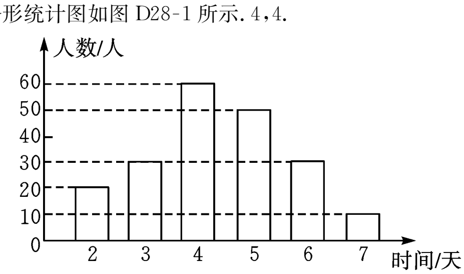


图 D28-1

(3)$1-10\%-15\%=75\%$，$6\ 000\times75\%=4\ 500$(人).

∴“活动时间不少于 4 天”的大约有 4 500 人.

例 3　(1)填表：初中部平均数为 $(75+80+85+85+100)\div5=85$(分)，众数为 85(分)，高中部中位数为 80(分).

(2)初中部成绩好一些. 因为两个队的平均数都相同，初中部的中位数高，所以在平均数相同的情况下中位数高的初中部成绩好一些.

(3)∵$s_1^2=[(75-85)^2+(80-85)^2+(85-85)^2+(85-85)^2+(100-85)^2]\div5=70$，

$s_2^2=[(70-85)^2+(100-85)^2+(100-85)^2+(75-85)^2+(80-85)^2]\div5=160$，

∴$s_1^2<s_2^2$，　∴初中代表队选手成绩较为稳定.

例 4　(1)

	平均数	方差	中位数	众数	极差
甲	75	125	75	75	35
乙	75	33.3	72.5	70	15

(2)①甲、乙两名同学成绩的平均数均为 75 分，但是甲的方差为 125，乙的方差仅为 33.3，所以乙的成绩相对比甲稳定得多.

②从折线图中甲、乙两名同学分数的走势上看，乙同学的 6 次成绩有时进步，有时退步，而甲的成绩一直是进步的.

[变式题组]

1. C　**提示**：这组数据按照从小到大的顺序排列为 6，7，8，9，9，则中位数为 8.

2. C

3. (1)4，4，8.

(2)120.　**提示**：$200\times60\%=120$(人).

(3)1 420.　**提示**：$\frac{24+50+16+36+6+10}{200}\times2\ 000=1\ 420$(人).

4. (1)50.　**提示**：$4+8+10+18+10=50$(人).

(2)篮球，18.

(3)$200\div(1-26\%-24\%-30\%)=1\ 000$，$1\ 000\times\frac{8}{50}=160$.

故估计全校学生中最喜欢跳绳活动的有 160 人.

5. (1)0.1，0.3，18.

(2)如图 D28-2 所示.

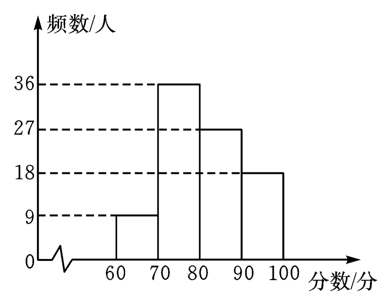


图 D28-2

(3)取每组的组中值可得平均数为 $(65\times9+75\times36+85\times27+95\times18)\div90=81$(分).

∴七年级学生的平均成绩为 81 分.

(4)$(27+18)\div90\times800=400$(人).

∴“优秀”等次的学生有 400 人.

6. (1)3.55 分，3.5 分，3 分.

(2)乙组得 5 分的人数统计有误. 理由如下：

由对应条形图和扇形图可得

$2\div5\%=40$(人)，$(3+2)\div12.5\%=40$(人)，$(7+5)\div30\%=40$(人)，$(6+8)\div35\%=40$(人)，$(4+4)\div17.5\%\neq40$(人).

∴乙组得 5 分的人数统计有误.

正确人数应为 $40\times17.5\%-4=3$(人).

7. D

[能力平台]

1. B　**提示:** $\because \frac{4+(-1)+9+5+3+x}{6}=4$,　$\therefore x=4$.

2. C　**提示:** 设男生有 a 人,女生有 b 人,则 $\frac{82a+77b}{a+b}=80$,

$\therefore 2a=3b$. 即 $a:b=3:2$.

3. D　**提示:** 根据组中值的定义可知.

4. A　**提示:** 方差越小越稳定.

5. C　**6.** 20,20,10.　**7.** 9.5.

8. 变小.　**提示:** ∵李刚再跳两次,成绩分别为 7.7,7.9,

∴这组数据的平均数是 $\frac{7.8\times6+7.7+7.9}{8}=7.8$,

∴这 8 次跳远成绩的方差是

$s^2=\frac{1}{8}\times[(7.6-7.8)^2+(7.8-7.8)^2+2\times(7.7-7.8)^2+(7.8-7.8)^2+(8.0-7.8)^2+2\times(7.9-7.8)^2]=\frac{0.12}{8}<\frac{1}{60}$,

∴方差变小.

9. 2.　**10.** 9.　**11.** ①②③.

12. (1) $\bar{x}_{甲}=40$ kg, $\bar{x}_{乙}=40$ kg,

总产量为 $40\times100\times98\%\times2=7\,840$ kg.

(2) $S^2_{甲}=\frac{1}{4}\times[(50-40)^2+(36-40)^2+(40-40)^2+(34-40)^2]=38\ \text{kg}^2$,

$S^2_{乙}=\frac{1}{4}\times[(36-40)^2+(40-40)^2+(48-40)^2+(36-40)^2]=24\ \text{kg}^2$,

$\therefore S^2_{甲}>S^2_{乙}$.　∴乙山上的杨梅产量较稳定.

13. C　**提示:** 由图知 $10\div20\%=50$(人),①正确. $50\times16\%=8$(人),②正确. ③表述有误.

14. C　**提示:** $24\div20\%=120$(人),C,D 共有 $120-24-48=48$(人), $\frac{48}{120}\times750=300$(人).

15. $2a+3b$.　**提示:** $\because x_1+x_2+x_3=3a, y_1+y_2+y_3=3b$,

$\therefore \frac{2x_1+3y_1+2x_2+3y_2+2x_3+3y_3}{3}=\frac{2\times3a+3\times3b}{3}=2a+3b$.

16. B　**提示:** 由题知 $a+b+c=3M, a+b=2N, N+c=2P$,

$\therefore M=\frac{a+b+c}{3}$. 又 $\because a>b>c$,　$\therefore a+b>2c$,　$\therefore M-P=\frac{a+b+c}{3}-\frac{N+c}{2}=\frac{a+b+c}{3}-\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}=\frac{a+b-2c}{12}>0$,

$\therefore M>P$.

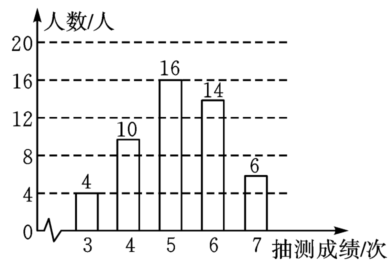
17. $\sqrt{2}$.　**提示:** 方程 $x^2-3x+2=0$ 的两个根分别是 1,2,故这组数据是 3,1,4,2,5.

其平均数 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(3+1+4+2+5)=3$,

方差 $S^2=\frac{1}{5}\times[(3-3)^2+(1-3)^2+(4-3)^2+(2-3)^2+(5-3)^2]=2$,故五个数据的标准差是 $S=\sqrt{S^2}=\sqrt{2}$.

18. 56.　**19.** ①③.

20. (1) 50,5.　(2) 统计图如图所示.　(3) 252 人.

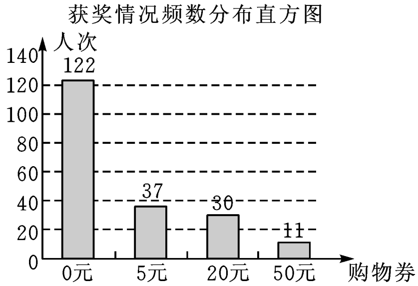


第 20 题图

21. (1) 获得 20 元购物券的有 $200-(122+37+11)=30$(人次).

补齐频数分布直方图,如图所示.

获奖情况频数分布直方图



第 21 题图

(2) 摸奖的获奖率为 $\frac{78}{200}\times100\%=39\%$.

(3) $\frac{122\times0+37\times5+30\times20+11\times50}{200}=6.675$,

$6.675\times2\,000=13\,350$(元).

答:估计商场一天送出的购物券总金额是 13 350 元.