2020年模拟期中考非数学组答案

2020.11.7

1.(a)原式$=\lim\limits_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos nt}{\cos t}$

$=\lim\limits_{r\to 0}(-1)^{n-1}\frac{\sin(nr)}{\sin r}$

$=(-1)^{n-1}n$

(b)由$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<n$与$\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}}=1$

原式=1

(c)$(1+\frac{k}{n^2})(1+\frac{n-k+1}{n^2})\in[1+\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}]$

故原式$=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

2.$f(x)=\left(\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)^2$

故$f'(x)=0$

3.间断点集为有理数集$\mathbb{Q}$

对任意一点x_0,对任意$\xi>0,\delta_0>0$，在$(x-\delta_0,x+\delta+0)$内分母小于等于$\frac{1}{\xi}$的有理数只有有限个

故存在$\delta>0$，对$\forall x\in(x-\delta,x+\delta)$，$f(x)<\xi$

故$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

故间断点为有理数集

4.证明：存在性：反证法，若$G(x)=f(x)-x\neq 0$恒成立

则由$f(x)$连续知，$G(x)$不变号，不妨设$G(x)>0$恒成立

则$f(f(x))>f(x)>x$，与$f(f(x_0))=x_0$矛盾！存在性得证

唯一性：若$f(x_1)=x_1,f(x_2)=x_2$

则$f(f(x_1))=x_1,f(f(x_2))=x_2$，由$x_0$唯一性知，$x_1=x_2$，唯一性得证

综上，得证

5.证明：由均值不等式，$x_n\geqslant 2,n\geqslant 1$

又$\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{2}{3}(1+\frac{4}{x_{n-1}^3})$

故$x_n\leqslant x_{n-1}$

x_n单减有下界，故必有极限，设为a

则$a=\frac{2}{3}(a+\frac{4}{a^2})$，且$a\geqslant 2$

故$a=2$，即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

6.记$y=f(x)$

$y'=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$

故$(1-x^2)(y')^2=1$

故$(1-x^2)y'y''-2x(y')^2=0$

即在0的一个去心邻域内，$(1-x^2)y''-2xy'=0$

又由y的光滑性，y'在0的邻域内连续，故在0的一个邻域内，$(1-x^2)y''-2xy'=0$

由莱布尼茨公式，并代入$x=0$得$y^{(n+2)}=n^2y^{(n)},x=0$

由$y=0,y'=1,x=0$知

$x=0$时，$y^{(n)}=\begin{cases}0 & 2|n\\ 1 & n=1\\ ((n-2)!!)^2 & 2\nmid n,n\geqslant 3\end{cases}$

(注：本题因出现印刷错误，所有同学考试结果均按10分计算)

7.(a)-726

由初等行列变换即得

(b)$=(ab+ac+ad+bc+bd+cd)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$

记$f(x)=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1\\ a&b&c&d&x\\ a^2&b^2&c^2&d^2&x^2\\ a^3&b^3&c^3&d^3&x^3\\ a^4&b^4&c^4&d^4&x^4\end{vmatrix}$

则原式即为$f(x)$中x^2项的系数

8.则$x_i=x_{n+i-1}(1\leqslant i\leqslant n+1)$

又有$x_{n+1}=(n+1)-(x_{n+2}+\cdots+x_{2n})$

综上，$x_1,\cdots,x_{2n}$满足：$\begin{cases}x_1=n-(x_{n+2}+\cdots+x_{2n})\\ x_i=x_{n+i-1}-1(2\leqslant i\leqslant n)\\ x_{n+1}=(n+1)-(x_{n+2}+\cdots+x_{2n})\end{cases}$

而$n+1$个方程，$2n$个未知数至少有$n-1$个自由变元

故上式即为原方程组通解

9.答案：$\begin{cases}n & r=n\\ 1 & r=n-1\\ 0 & r<n-1\end{cases}$

证明：$r=n$时A可逆，故A^*可逆，$rank(A^*)=n$

$r=n-1$时，记$A=(a_{ij})$，则$A^*=(A_{ji})$

则至少存在一个a_{ij}使$A_{ij} \neq 0$
故$A^* \neq 0, rank(A^*) \geqslant 1$
由$|A| = 0$知，A的n个行向量线性相关
设这n个行向量为$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$
不妨α_1可被$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出
设$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n$
则$A_{ji} = (-1)^(i+j)k_jA_{1i}$
也即A的任意两列元素的代数余子式成比例
故A^*任意两行成比例，$rank(A^*) \leqslant 1$
故$rank(A^*) = 1$
$r < n-1$时，$A_{ij} = 0$，故$A^* = 0$，$rank(A^*) = 0$