线性代数期终考试试题（B类）

（2017-2018春季学期．经济学院）

一．（15分）．给定矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&1&1\\1&4&1&1\\1&1&4&1\\1&1&1&4\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\\1&1\\2&-2\end{pmatrix}$，

求矩阵 X 满足 $AX=B$。

二．（12分）．给定数域 K 和正整数 $n\geq 2$，在 K^n 中令

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\middle|\ a_1 a_2=0\right\},\quad W_2=\left\{\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\middle|\ b_1+b_2=0\right\},\quad W_3=W_1\cap W_2.$$

(1)．判断 W_1, W_2, W_3 是否为 K^n 的子空间，并说明理由；

(2)．对于(1)中构成 K^n 子空间的全部 W_i，分别求出其维数与一组基。

三（15分）．对于实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$，

定义 $(\alpha,\beta)=\alpha' A\beta$，其中

$$A=\begin{pmatrix}r&1&\cdots&1&1\\1&r&\cdots&1&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&\cdots&r&1\\1&1&\cdots&1&r\end{pmatrix},\quad r\in\mathbb{R},$$

(1)．决定参数 r，使得 $\mathbb{R}^n$ 对于上述定义的 (α,β) 构成一个欧氏空间，并说明理由；

(2) 对于 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$，在(1)决定的欧氏空间中计算 $|\alpha|$。

四.（18分）. 用正交替换将下列实二次型化为标准形，

$$f(x_1,\cdots,x_6)=\sum_{k=1}^{6}x_k^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3+2x_4x_5+2x_4x_6+2x_5x_6,$$

要求写出正交替换 $X=TY$ 中的正交矩阵 T 及计算过程。

五.（15分）. 对于数域 K 上的线性空间 $V=M_n(K)$，n 为正整数，定义 V 上的变换 σ 为 $\sigma(A)=A'-A$，$\forall A\in V$。

(1). 证明 σ 是线性变换；

(2). 判断是否存在 V 的一组基，使得 σ 在该组基下的矩阵为对角矩阵，并证明你的结论。

六.（10分）. 设 W 是数域 K 上 n 维线性空间 V 的一个真子空间，证明 $V\backslash W$ 包含 V 的一组基。

七.（15分）. 给定数域 K 和 $\boxed{正整数\ n}$，对于 $A,B\in M_n(K)$，用 W_A 和 W_B 表示分别由 A,B 列向量组生成的子空间（在 K^n 中）。若有

$$r(A+B)=r(A)+r(B)=n,\quad AB=BA,$$

(1). 证明 $K^n=W_A\oplus W_B$；

(2). $AB=0$。