2023-2024 学年期中模拟考试 数学组 解析

学术文化部学术工作组

答案排版：学术文化部学术工作组 谢朋睿

2023 年 10 月 30 日

1 试题

题 1. 求下列极限：

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$;

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}$;

(3)（尽量不使用洛必达法则）$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$，其中 n 是某个固定的正整数，$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$.

题 2. (1) 设五边形 $ABCDE$ 满足

$$AC \parallel DE,\ AD \parallel BC,\ BD \parallel AE,\ CE \parallel AB,$$

问：是否一定存在仿射变换 φ 将五边形 $ABCDE$ 映射到正五边形？

(2) 设六边形 $ABCDEF$ 满足

$$AB \parallel CF \parallel DE,\ BC \parallel AD \parallel EF,\ CD \parallel BE \parallel AF,$$

问：是否一定存在仿射变换 φ 将六边形 $ABCDEF$ 映射到正六边形？

题 3. 求满足如下条件的动点到原点距离的最大值与最小值：

条件. 到三条直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}$, $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 的距离的平方和为 2.

题 4. 对给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，证明其经过有限次初等行变换得到的每个行梯矩阵，它的每行首个非零元的位置均相同（即仅取决于 $\boldsymbol{A}$ 本身).

题 5. 确定所有的正整数 n，使得存在有限集 $S\subseteq\mathbb{R}^3$ 满足 $|S|=n$ 且

$$S=\{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}:\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in S\}.$$

题 6. 对两个 2023 阶实可逆矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，考虑集合

$$M=\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}):\lambda\in\mathbb{R}\},$$

证明：$|M|\leqslant 64$.

题 7. 设 $\mathbb{F}_2$ 内的 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元都是 1，证明：在 $\mathbb{F}_2$ 内的线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (1, 1, \cdots, 1)^\top$$

有解.

题 8. 对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f，称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的准连续点，若对任意 x_0 的开邻域 $U = U_0(x_0, \delta_U)$ 和 $f(x_0)$ 的开邻域 $V = U_0(f(x_0), \delta_V)$，都存在 $x \in U$ 使得 $f(x_0) \in V$.

证明：任何定义在 $\mathbb{R}$ 的函数在任意开区间上都存在准连续点.

题 9. 设两个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, g 满足如下条件：对任意 $a \in \mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}$ 中收敛于 a 的序列 $\{x_n\}$，都有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} f(x_n) > \varlimsup\limits_{n\to\infty} g(x_n)$.

证明：存在分段线性函数 $\ell(x)$ 满足，对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) > \ell(x) > g(x)$.

题 10（附加题）. 给定正整数 $m > 2023$，问是否存在无穷可逆矩阵列 $\{\boldsymbol{A}_n\} \subset M_m(\mathbb{R})$ 使得

$$\det(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_j) = \det \boldsymbol{A}_i + \det \boldsymbol{A}_j, \quad \forall i \neq j,\ i, j \in \mathbb{Z}_{>0}?$$

2 解答与评注

2.1 题 1

求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}$;

(3)(尽量不使用洛必达法则)$\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$,其中 n 是某个固定的正整数,$x_1,x_2,\cdots,x_n>0$.

解. (1) 方法 1. 由于

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n,\quad \forall n\geqslant 2,$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\mathrm{e},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\mathrm{e}.$$

方法 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n=\exp\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\xlongequal{\ln(1+x)\sim x(x\to 0)}\exp\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{e}.$$

(2) 计算可知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}\xlongequal[\arctan x\sim x(x\to 0)]{(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x(x\to 0)}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}\xlongequal{\sin x\sim x(x\to 0)}\frac{1}{3}.$$

(3) 计算可知

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)^{1/\alpha}&=\exp\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\alpha}\right)\xlongequal{\ln x\sim x-1(x\to 1)}\exp\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\alpha}-1}{\alpha}\\&=\exp\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\lim_{\alpha\to 0}\frac{x_i^{\alpha}-1}{\alpha}\xlongequal{a^x-1\sim x\ln a(x\to 0,a>0)}\exp\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}.\end{aligned}$$

供题人按. 较为基础,第三题是有名的几何平均值,有这个极限成立,我们就可以将幂平均在 0 处补充定义,使得幂平均在 $\mathbb{R}$ 上连续.

2.2 题 2

(1) 设五边形 $ABCDE$ 满足

$$AC \parallel DE,\ AD \parallel BC,\ BD \parallel AE,\ CE \parallel AB,$$

问：是否一定存在仿射变换 φ 将五边形 $ABCDE$ 映射到正五边形？

(2) 设六边形 $ABCDEF$ 满足

$$AB \parallel CF \parallel DE,\ BC \parallel AD \parallel EF,\ CD \parallel BE \parallel AF,$$

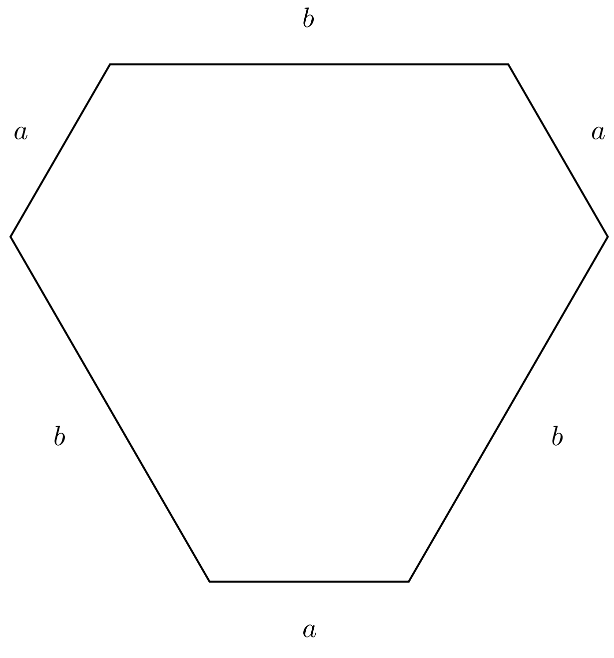
问：是否一定存在仿射变换 φ 将六边形 $ABCDEF$ 映射到正六边形？

解. (1) 答案是肯定的．设 A,B,E 在某个仿射坐标系下的坐标是 $(0,0),(1,0),(0,1)$．由条件可设 $C(x,1),D(1,y)$，并得到关于 x,y 的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{y-1}{1}, \\ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{1}{y}, \end{cases}$$

解得 $x=y=(1+\sqrt{5})/2$（$x=y=(1-\sqrt{5})/2$ 舍去，因为此时五边形有边相交）．由于仿射变换保比例，故将 A,B,E 分别映射到正五边形的三个相邻的顶点的 φ 即满足条件．

(2) 答案是否定的．构造如下：



$(a \neq b)$

注意到这个六边形三对角线不共点，这与正六边形三对角线共点及仿射变换保“共点性”矛盾．

供题人按. 本题是马翔老师几何课某次作业的选做题．然而注意到，结论 1 少一个平行却仍然为仿射意义下正五边形是不那么显然的．

2.3 题 3

求满足如下条件的动点到原点距离的最大值与最小值:

条件. 到三条直线 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$, $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ 的距离的平方和为 2.

解. 首先计算点 $P(x,y,z)$ 到直线 $\ell_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的距离的平方 d_1^2.

方法 1. ℓ_1 上动点 $(2t,2t,t)$ 到 P 的距离的平方为

$$\begin{aligned}(2t-x)^2+(2t-y)^2+(t-z)^2&=9t^2-(4x+4y+2z)t+x^2+y^2+z^2\\&=\left(3t-\frac{2x+2y+z}{3}\right)^2+(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+2y+z)^2}{9}\\&\geqslant(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+2y+z)^2}{9},\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $t=(2x+2y+z)/9$，因此 P 到 ℓ_1 的距离的平方（即 ℓ_1 上动点到 P 的距离的平方的最小值）为

$$d_1^2=(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+2y+z)^2}{9}.$$

方法 2. 取 ℓ_1 的一个方向向量 $\boldsymbol{v}=(2,2,1)$ 及 ℓ_1 上一点 $O(0,0,0)$（它也在其余两条直线上），则 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\boldsymbol{v}$ 上的投影向量的模长为

$$\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{|2x+2y+z|}{3},$$

于是 P 到 ℓ_1 的距离的平方为

$$d_1^2=|\overrightarrow{OP}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|}\right)^2=(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+2y+z)^2}{9}.$$

同理可得 P 到直线 $\ell_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{2}$, $\ell_3:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$ 的距离的平方分别为

$$d_2^2=(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+y+2z)^2}{9},\quad d_3^2=(x^2+y^2+z^2)-\frac{(x+2y+2z)^2}{9},$$

故条件等价于

$$\begin{aligned}2&=d_1^2+d_2^2+d_3^2\\&=3(x^2+y^2+z^2)-\frac{(2x+2y+z)^2+(2z+y+2z)^2+(x+2y+2z)^2}{9}\\&=2(x^2+y^2+z^2)-\frac{16}{9}(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

记 $S=x^2+y^2+z^2$.

一方面，$2=2(x^2+y^2+z^2)-\dfrac{16}{9}(xy+yz+zx)\geqslant 2S-\dfrac{16}{9}S=\dfrac{2}{9}S$，故 $S\leqslant 9$，当 $x=y=z=\sqrt{3}$ 时等号成立；另一方面，$2=2(x^2+y^2+z^2)-\dfrac{16}{9}(xy+yz+zx)=\dfrac{26}{9}S-\dfrac{8}{9}(x+y+z)^2\leqslant\dfrac{26}{9}S$，故 $S\geqslant\dfrac{9}{13}$，当 $x=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$y=z=-\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ 时等号可以成立.

因此，所求（$\sqrt{S}$）的最大值为 3，最小值为 $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

供题人按. 本问题的极小值点集是一个圆，极大值点则是单点.
这是由于目标椭球以原点为中心，~~玩原神玩的（确信）~~. 换坐标系以后（比如换为 $e_1' = (1,1,1), e_2' = (2,-1,-1), e_3' = (0,1,-1)$）后，可以发现为标准的椭球方程.
答案写的长，但都是直接的计算过程，得出曲线方程并不难。
值得注意的是，$\sum\limits_{cyc} x^2 \geqslant -2\sum\limits_{cyc} xy (\Longleftrightarrow (\sum\limits_{cyc} x)^2 \geqslant 0)$ 是一个很强的东西。

2.4 题 4

对给定的矩阵 $\boldsymbol{A}$，证明其经过有限次初等行变换得到的每个行梯矩阵，它的每行首个非零元的位置均相同（即仅取决于 $\boldsymbol{A}$ 本身）.

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 的列数 n 归纳证明结论.

当 $n=1$ 时：若 $\boldsymbol{A}$ 是零矩阵则结论已经成立；若 $\boldsymbol{A}$ 不是零矩阵，由 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等行变换得到的行梯矩阵的唯一非零元只能在第一行，此时结论也成立.

假设当 n 时成立，考虑 $n+1$ 时情形.

把 $n+1$ 列的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成分块形式

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{\alpha}),$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 n 列的矩阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是列向量.

记 $r=\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}_1)$，则可对 $\boldsymbol{A}_1$ 作有限次初等行变换得到仅前 r 行非零的行梯矩阵，记其前 r 行构成矩阵 $\boldsymbol{A}_2$，由归纳假设知 $\boldsymbol{A}_2$ 的每行首个非零元的位置均相同. 对 $\boldsymbol{A}$ 作相同的初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\beta} \\ O & \boldsymbol{\gamma} \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是两个列向量，且 $\boldsymbol{\beta}$ 的维数为 r.

若 $\boldsymbol{\gamma}$ 为零，则上面的矩阵已经是行梯矩阵，且每行首个非零元的位置均相同；若 $\boldsymbol{\gamma}$ 非零，为将上面的矩阵变成行梯矩阵，必须对 $\boldsymbol{\gamma}$ 所在的这些行作初等行变换，将 $\boldsymbol{\gamma}$ 变成 $\boldsymbol{\gamma}'$，其中 $\boldsymbol{\gamma}'$ 仅有首个分量非零. 此时由 $\boldsymbol{A}$ 经过初等行变换得到的行梯矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{\beta} \\ O & \boldsymbol{\gamma}' \end{pmatrix}$$

仅有前 $r+1$ 行非零，且前 r 行首个非零元的位置均相同，第 $r+1$ 行的唯一非零元位于第 $n+1$ 列. 故结论对 $n+1$ 也成立.

由数学归纳法知，结论对一切正整数 n 成立.

另证. 考虑 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 生成的两个行梯矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$.

假设其第 i 行 $(1\leqslant i\leqslant m)$ 主元位置位置分别为 b_i,c_i，逐个对比 $\{b_i\},\{c_i\}$ 找到第一个 i_0 使得 $b_{i_0}\neq c_{i_0}$，不妨 $b_{i_0}>c_{i_0}$，

那么矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 前 c_{i_0} 列分别构成的子矩阵的秩分别为 i_0-1 和 i_0，这与行变换不改变前 i_0 列构成的子矩阵的秩这一事实矛盾。

供题人按. 本题来源于其他（甚至不是数院的）课程的作业，稍有改动，较基础.

C 同志称，本题本质为某种贪心算法. 原理为行向量的自由度是受到控制的.

2.5 题 5

确定所有的正整数 n，使得存在有限集 $S \subseteq \mathbb{R}^3$ 满足 $|S| = n$ 且

$$S = \{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} : \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in S\}.$$

解. 答案是 $n = 1$ 或 7.

由题意可知 S 非空. 对任意 $\boldsymbol{v} \in S$，$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0 \in S$. 显然 $S = \{0\}$ 满足条件，所以 $n = 1$ 符合题意. 下设 $n > 1$，且 S 中有非零元.

任取 $0 \neq \boldsymbol{v}_1 \in S$，因为 $\boldsymbol{v}_1 \in \{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} : \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in S\}$，所以存在 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in S$ 使得 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$，于是

$$\boldsymbol{v}_{n+1} = \boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_n \in S, \quad \forall n \geqslant 3,$$

因为 $\boldsymbol{v}_1 \perp \boldsymbol{v}_n (n \geqslant 3)$，所以

$$|\boldsymbol{v}_{n+1}| = |\boldsymbol{v}_1| \cdot |\boldsymbol{v}_n| (n \geqslant 3) \implies |\boldsymbol{v}_{n+1}| = |\boldsymbol{v}_1|^{n-3} |\boldsymbol{v}_3| (n \geqslant 3).$$

而 S 是有限集，故只有 $|\boldsymbol{v}_1| = 1$. 这表明对任意 $0 \neq \boldsymbol{v} \in S$，$|\boldsymbol{v}| = 1$.

仍然任取 $0 \neq \boldsymbol{v}_1 \in S$，存在 $\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in S$ 使得 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3$. 由于 $|\boldsymbol{v}_2| = |\boldsymbol{v}_3| = |\boldsymbol{v}_2 \times \boldsymbol{v}_3| = 1$，所以 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ 两两垂直，故 $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 内的单位正交基，所以

$$S_1 = \{0, \pm \boldsymbol{v}_1, \pm \boldsymbol{v}_2, \pm \boldsymbol{v}_3\} = \{\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{v}_j : i, j \in \{1, 2, 3\}\} \subseteq S,$$

并且 $S = S_1$ 满足条件，$n = 7$ 符合题意. 假设还存在 $\boldsymbol{w} \in S \backslash S_1$，则 $|\boldsymbol{w}| = 1$，且对每个 $i = 1, 2, 3$，$|\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}_i| = 0$ 或 1，这表明 $\boldsymbol{w} \in S_1$，矛盾. 故满足条件的 S 只有 $\{0\}$ 及 S_1 两种，符合题意的 $n = 1$ 或 7.

供题人按. 本题是 2022 年 12 月普特南数学竞赛（Putnam）的 B2 题.

2.6 题 6

对两个 2023 阶实可逆矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，考虑集合

$$M=\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}):\lambda\in\mathbb{R}\},$$

证明：$|M|\leqslant 64$.

证明. 先证明：对任意正整数 k 以及两两不同的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 都有 $\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,k)$ 线性无关．换言之，任取 $\boldsymbol{v}_i\in\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,k)$ 不全为 0，均有 $\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{v}_i\neq 0$.

事实上，假设 $\boldsymbol{v}_i\in\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,k)$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{v}_i=0$．由

$$(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_i=0,\quad \forall i=1,2,\cdots,k$$

对 $i=1,2,\cdots,k$ 求和可得

$$\sum_{i=1}^{k}(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_i=0,$$

再结合 $\sum\limits_{i=1}^{k}\boldsymbol{v}_i=0$ 及 $\boldsymbol{B}$ 可逆得

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{v}_i=0.$$

于是归纳可证

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^l\boldsymbol{v}_i=0,\quad \forall l\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\quad (\text{形式上约定 }\lambda_i^0=1).$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 的 k 阶 Vandermonde 行列式不为 0（因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 两两不等），故对任意 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，均存在上述系数组的一个线性组合所得系数组恰为 $\boldsymbol{e}_j$ 的各个分量．这表明对任意 $j\in\{1,2,\cdots,k\}$，上述诸条件可线性组合推导出 $\boldsymbol{v}_j=0$，亦即 $\boldsymbol{v}_i(i=1,2,\cdots,k)$ 全为 0.

因此，这表明对任意正整数 k 以及两两不同的实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 都有 $\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,k)$ 的基可以直接取并得到全空间 $\mathbb{R}^{2023}$ 的线性无关组．于是

$$\sum_{i=1}^{k}\dim\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})\leqslant 2023.$$

由题设，取 $k=|M|$，实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{|M|}$ 使得 $\dim(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\cdots,|M|)$ 互不相同，则 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,|M|)$ 互不相同，故 $\sum\limits_{i=1}^{|M|}\dim\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})\leqslant 2023$，又 $\dim\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})(i=1,2,\ldots,|M|)$ 均互不相同，故

$$\frac{|M|(|M|-1)}{2}=\sum_{i=0}^{|M|-1}i\leqslant\sum_{i=1}^{|M|}\dim\ker(\boldsymbol{A}+\lambda_i\boldsymbol{B})\leqslant 2023\implies|M|\leqslant 64.$$

另证. 考虑矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，每个特征值的对应的空间维数不同，代表了其维数两两不同的互相正交的特征子空间，立得结论。

供题人按. 此问题的灵感来源于其上三角情形．完备域中任何矩阵可以上三角化，而域可以完备化，并且不影响矩阵的秩.

2.7 题 7

设 $\mathbb{F}_2$ 内的 n 阶对称阵 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元都是 1，证明：在 $\mathbb{F}_2$ 内的线性方程组

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = (1, 1, \cdots, 1)^\top$$

有解.

证明.
方法 1. 记 $\boldsymbol{\beta} = (1, 1, \cdots, 1)^\top$，则只需证明 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$，亦即 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 经过初等行变换后在左侧 $n \times n$ 矩阵上成为最简行阶梯形时，其第 $n+1$ 列有非零元的行均在前 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})$ 行. 由于此时所有行均为原先行的线性组合，所以只需证明：$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 的任意行线性组合不可能为 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$.

由于 $\mathbb{F}_2$ 的非零元只有 1，所以所有可能的行线性组合均形如若干行的和.

假设 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 的行 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 之和为 $(0, 0, \cdots, 0, 1)$，那么限制在第 $n+1$ 列上一共加了奇数个 1. 但 $\boldsymbol{\beta}$ 的所有元素均为 1，故 k 是奇数.

考虑 $\boldsymbol{A}$ 限制在行 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 与列 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}_0$. 一方面 $\boldsymbol{A}_0$ 是主对角元全为 1 的对称矩阵，当其严格上三角部分（即在主对角线之上的部分）有 ℓ 个 1 时，其元素之和在 $\mathbb{F}_2$ 上为 $k + 2\ell = 1$；另一方面可得 $\boldsymbol{A}_0$ 的行和为全 0 的 k 维向量，于是其元素之和在 $\mathbb{F}_2$ 上为 0，矛盾！

于是我们证明了 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$ 的任意行线性组合不可能为 $(0, 0, \ldots, 0, 1)$，原命题得证.

方法 2.
对 n 用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时，记 $\boldsymbol{\beta} = (1, 1)^\top$，容易验证 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{\beta})$，所以此时结论成立.

假设结论当 $n-1$ 时成立，现考虑 n 时情形.

注意到，对 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$，$\boldsymbol{A}$ 去掉第 i 行第 i 列仍得到主对角元均为 1 的对称阵，由归纳假设知 $\boldsymbol{A}$ 的第 $1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n-1, n$ 列可以线性组合出列向量 $(1, \cdots, 1, a_i, 1, \cdots, 1)^\top$，它的第 i 个分量 $a_i \in \{0, 1\}$ 暂未确定.

若存在 i 使得 $a_i = 1$，则结论已成立. 若对任意 i 有 $a_i = 0$，记 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量张成的向量空间为 $\mathbb{V}$，除第 i 分量为 0 其余分量为 1 的 n 维列向量记为 $\boldsymbol{e}_i$，则 $\boldsymbol{e}_i = (1, \cdots, 1, a_i, 1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{V} (i = 1, 2, \cdots, n)$.

若 n 为偶数，则 $\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \boldsymbol{e}_n = (1, 1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{V}$，此时结论成立；

若 n 为奇数，注意到将 $\boldsymbol{A}$ 的所有列向量相加得到的列向量中有奇数个分量为 1（因为 $\boldsymbol{A}$ 的元素和为奇数），所以把它再适当地加上一些形如 $\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_j = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)^\top \in \mathbb{V}$ 的列向量就可以得到 $(1, 1, \cdots, 1)^\top \in \mathbb{V}$，此时结论也成立.

由数学归纳法，结论对一切正整数 n 成立.

供题人按. 此问题也见于某次新星征解供题的第一问.

2.8 题 8

对于定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f，称 $x_0 \in \mathbb{R}$ 为 f 的准连续点，若对任意 x_0 的开邻域 $U = U_0(x_0, \delta_U)$ 和 $f(x_0)$ 的开邻域 $V = U_0(f(x_0), \delta_V)$，都存在 $x \in U$ 使得 $f(x_0) \in V$.

证明：任何定义在 $\mathbb{R}$ 的函数在任意开区间上都存在准连续点.

证明. 只需要对有界且长度为正的闭区间 $[a, b]$ 证明存在准连续点即可. 考虑

$$M_i = \{x \in [a, b] : f(x) \in [i, i+1]\}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

则 $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{Z}} M_i = [a, b]$ 是不可数集，而可数个至多可数集之并为可数集，所以其中一定存在不可数集 M_n.
以下只需证明

$$E = \{(x, f(x)) : x \in [a, b], f(x) \in [n, n+1]\}$$

内有其自身的聚点即可.（在二维平面内定义聚点只需要把一维情形的开区间改为二维的开圆，不难发现二维点列收敛等价于每个坐标均收敛）

假设 E 中无 E 的聚点，则以 E 中每个点为中心都可以作一个开圆，与 E 的交只包括自身，这表明将所有的圆半径缩小两倍之后将两两不交，但是每个圆内部都有一个有理点，这表明 E 是可数集. 然而 $|E| = |M_n|$ 而 M_n 不可数，矛盾！

供题人按. 此问题实则是：$\mathbb{R}^2$ 中的不可数集必有聚点在自身之中. 另外，本题可以通过波尔查诺—维尔斯特拉斯定理来得到结论，因而寻找 $\mathbb{R}^2$ 上的聚点的过程，实际上可以通过寻找两次 $\mathbb{R}$ 上的聚点的方式形式上地绕开.

2.9 题 9

设两个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f,g 满足如下条件：对任意 $a \in \mathbb{R}$ 及 $\mathbb{R}$ 中收敛于 a 的序列 $\{x_n\}$，都有 $\varliminf_{n\to\infty} f(x_n) > \varlimsup_{n\to\infty} g(x_n)$.

证明：存在分段线性函数 $\ell(x)$ 满足，对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $f(x) > \ell(x) > g(x)$.

证明. 先证明对任意实数 x，均存在 $\delta > 0$ 以及 $d < u$ 使得 $(x-\delta, x+\delta) \times (d,u)$ 上的任意一点 (x', y') 均满足

$$\varlimsup_{t\to x'} g(t) < y' < \varliminf_{t\to x'} f(t).$$

事实上，记 $h = \varliminf_{t\to x'} f(t) - \varlimsup_{t\to x'} g(t)$，取 $\delta_1 > 0$ 使得 $|x - x_1| < \delta_1$ 时 $f(x_1) > \varliminf_{t\to x'} f(t) - \dfrac{h}{3}$，取 $\delta_2 > 0$ 使得 $|x - x_2| < \delta_2$ 时 $g(x_2) < \varlimsup_{t\to x'} g(t) + \dfrac{h}{3}$，那么 $\delta = \dfrac{\min\{\delta_1, \delta_2\}}{2}$ 即满足条件.

以下令

$$S = \{(x', y') : \varlimsup_{t\to x'} g(t) < y' < \varliminf_{t\to x'} f(t)\}.$$

记上述构造的开矩形为 $I_x \subseteq S$，将 I_x 的宽向中心缩小三倍，得到 J_x；再将 J_x 的上下边沿向上向下伸展到极限使得整个开矩形依然属于 S（设出确界，可得到这是可以做到的），得到的一系列新矩形记为 K_x；注意到对任意 $i \in \mathbb{Z}$，集合 $[i, i+2]$ 都有 $\{K_x\}_{x\in[i,i+2]}$ 在 x 轴投影的有限子覆盖. 将其中所有横坐标区间有包含关系的去掉其中被包含者. 再将取出的一切 K_x 对应的 x 构成的集合记为 T.

此时可假设这些矩形之间有左右序关系，随意将某个矩形 K_x 记作编号为 0，其左侧依次编号为 $-1, -2, \cdots$，其右侧依次编号为 $1, 2, \cdots$，这是注意到了任意有界区域内只有其中有限个矩形. 于是这些矩形也被同时记作 $K(i)(i \in \mathbb{Z})$.

以下证明：$\bigcup\limits_{x\in T} K_x$ 中包含一个 $\mathbb{R}$ 上分段线性函数的图像.

先证明 $K(i) \cap K(i+1) \neq \varnothing (\forall i \in \mathbb{Z})$.

事实上，对于其中任何两个横坐标相交的开矩形，其中必有一个矩形 $A = K_p$ 的 x 轴上投影从中心扩大到三倍宽度之后，包含另一个矩形 $B = K_q$ 的 x 轴上投影. 那么此时 K_q 的纵坐标上下限区间由于已经达到理论最大，将会包含 I_p 的纵坐标上下限区间. 但 K_p 的纵坐标上下限区间也包含 I_p 的纵坐标上下限区间，因此 K_p, K_q 的纵坐标区间当然是相交的. 故 $K(i) \cap K(i+1) \neq \varnothing (\forall i \in \mathbb{Z})$.

于是，所有矩形的闭包可以被（不考虑下标平移意义下）唯一地重写为 $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} L(i)$，其中对任意 $i \in \mathbb{Z}$ 都有：$L(i)$ 为闭矩形，$L(i+1)$ 居于 $L(i)$ 的右侧且 $L(i) \cap L(i+1)$ 为垂直于 x 轴的，长度为正的线段 q_i，其长度不同时与 $L(i)$ 及 $L(i+1)$ 的高相等.

最后，顺次连接所有 q_i 的中点即得分段线性函数 $\ell(x)$. 证毕.

供题人按. 此题来自命题人暑假出去团建（素质拓展）时看到自身所处空间的上下边沿想到的问题，兼具题面涉及知识少与实际难度高的特点. 可以作为一个巧妙运用有限覆盖定理三倍法的例子.

2.10 题 10（附加题）

给定正整数 $m > 2023$，问是否存在无穷可逆矩阵列 $\{\boldsymbol{A}_n\} \subset M_m(\mathbb{R})$ 使得

$$\det(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_j) = \det \boldsymbol{A}_i + \det \boldsymbol{A}_j, \quad \forall i \neq j,\ i, j \in \mathbb{Z}_{>0}?$$

解. 答案是不存在.

假设这样的 $\{\boldsymbol{A}_i\}$ 存在，那么

$$\det(\boldsymbol{A}_i + \boldsymbol{A}_i) = 2^m \det \boldsymbol{A}_i \neq 2 \det \boldsymbol{A}_i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

因此记 $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) - \det \boldsymbol{A} - \det \boldsymbol{B}$ 为一个 $2m^2$ 元实系数多项式，那么

$$f(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j) = 0, \quad \forall i \neq j,\ i, j \in \mathbb{Z}_{>0}; \quad \text{但 } f(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_i) \neq 0, \quad \forall i \in \mathbb{Z}_{>0}.$$

因此对任意正整数 K，矩阵 $\boldsymbol{D}_K = (f(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{A}_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant K}$ 的秩均为 K.

另一方面，一定存在有限正整数 $N = N_m$，使得 $f(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = g(\boldsymbol{A})^\top h(\boldsymbol{B})$，其中

$$g(\boldsymbol{A}) = (g_1(\boldsymbol{A}), g_2(\boldsymbol{A}), \cdots, g_N(\boldsymbol{A}))^\top, \quad h(\boldsymbol{B}) = (h_1(\boldsymbol{B}), h_2(\boldsymbol{B}), \cdots, h_N(\boldsymbol{B}))^\top,$$

且 $g_i, h_i (1 \leqslant i \leqslant N)$ 均为 m^2 元实系数多项式. 记

$$\boldsymbol{G}_{N+1} = \{g_j(\boldsymbol{A}_i)\}_{1 \leqslant i \leqslant N+1, 1 \leqslant j \leqslant N}, \quad \boldsymbol{H}_{N+1} = \{h_i(\boldsymbol{A}_j)\}_{1 \leqslant i \leqslant N, 1 \leqslant j \leqslant N+1},$$

则有 $\boldsymbol{D}_{N+1} = \boldsymbol{G}_{N+1} \boldsymbol{H}_{N+1}$，

因此

$$N + 1 = \operatorname{rank}(\boldsymbol{D}_{N+1}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{G}_{N+1} \boldsymbol{H}_{N+1}) \leqslant \min\{\operatorname{rank}(\boldsymbol{G}_{N+1}), \operatorname{rank}(\boldsymbol{H}_{N+1})\} \leqslant N,$$

矛盾!

供题人按. 此问题属于本人“喝醉酒”出的题. 感谢数院同年级同学（原 IMO 金牌）黄嘉俊给出的上述解答. 交换行列式函数和求和号明显不是个好主意. 容易发现，$i = j$ 的时候明显不对，但就是没有给这个条件. 怎样才能让如此多的 $i \neq j$ 都成立这个荒谬的等式蕴含矛盾呢? 看出 $2k$ 元多项式可以作为两组 k 元多项式的内积是至关重要的一步，可以认为是一种“双线性化”思想.