北京大学高等数学A(II)期中考试试题

共七道大题，满分 100 分，时间 120 分钟　2023.04.06

一、（共 $4\times 8=32$ 分）

指出下列各积分的积分类型，并计算其积分值，其中

$$D_1=[0,1]\in\mathbf{R};\quad D_2=[0,1]\times[0,1]\in\mathbf{R}^2\quad D_3=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\in\mathbf{R}^3.$$

记 $S_1=\partial D_2$; $S_2=\partial D_3$;（$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界），S_1^+ 为逆时针方向的 S_1，S_2^+ 为取外法线方向的 S_2.

(1) $\int_{D_1} x\,\mathrm{d}x$;

(2) $\oint_{S_1} xy\,\mathrm{d}s$;

(3) $\oiint_{S_2} xyz\,\mathrm{d}S$;

(4) $\iint_{D_2} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(5) $\oint_{S_1^+} 2xy\,\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$;

(6) $\iiint_{D_3} x^6y^{16}z^{16}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

(7) $\oiint_{S_2^+}\left(\frac{x}{2}+z^3\sin y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{y}{3}+e^{x\cos z}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{z}{6}+\arctan(xy)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

X　　y　　Z

(8) $\oint_{\Gamma^+} x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$，其中 Γ^+ 是由$(0,0,0)$ 出发，先后经过点$(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$, $(0,1,1)$, $(0,1,0)$ 又回到$((0,0,0)$ 的直线段构成。

二、（12分）计算二重积分 $I=\iint_D|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$.

三、（12分）计算由封闭曲面 $\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\right)^2\le x$ 围成区域的体积.

四、（12分）记 S^+ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，试计算曲面积分

$$I=\oiint_{S^+}\frac{x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+9z^2)^{3/2}}.$$

五、（12分）设 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的可积函数，满足

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1,\quad \int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=2,\quad \int_0^1 t^2f(t)\mathrm{d}t=3.$$

试计算累次积分

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z.$$

六、（10分）设

$$F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$f(s)$是连续函数，在$s=0$处可导，$f(0)=0$，$f'(0)=10$. 求 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{t^5}$.

七、（10分）设$f(x,y)$是整个$\mathbf{R}^2$ 上的非负连续函数，对于 $r>0,\rho>0$，令

$$I_r=\iint_{x^2+y^2\le r^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad J_\rho=\iint_{-\rho\le x,y\le\rho} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明：当极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_r$ 与极限 $\lim\limits_{\rho\to+\infty} J_\rho$ 之一存在且为有限时，则另一个极限也必然存在且为有限，并且两者值相等。

【全卷完】