北京大学线性代数 (B) 期中考试 2021-2022 年度第一学期

整理：一只很想吐槽这张卷子的助教

1 (20 分)

求 a 为何值时，下述线性方程组有惟一解、无解、有无穷多解？在有无穷多解的情况下，写出解集的结构。

$$\begin{cases} x_1 & -ax_2 & -2x_3 = & -1, \\ x_1 & -x_2 & +ax_3 = & 2, \\ 5x_1 & -5x_2 & -4x_3 = & 1. \end{cases}$$

2 (10 分)

判断 $\mathbb{R}^3$ 中下列子集是否为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，并说明理由。

(a) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\right\}$;

(b) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\right\}$;

(c) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\right\}$;

(d) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 5x_3)^2 = 0\right\}$.

3 (10 分)

找出一个非零的 3×3 矩阵 P 使得 PA 为简化行阶梯型矩阵，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4 (20 分)

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 和线性无关的向量组 β_1,β_2,β_3 满足如下关系

$$\begin{cases} \beta_1-2\beta_2-\beta_3=\alpha_1, \\ -3\beta_1+\beta_2-7\beta_3=\alpha_2, \\ 5\beta_1-3\beta_2+9\beta_3=\alpha_3, \\ -2\beta_1+\beta_2-4\beta_3=\alpha_3. \end{cases}$$

求出所有满足 $\ell_1\alpha_1+\ell_2\alpha_2+\ell_3\alpha_3+\ell_4\alpha_4=0$ 的向量 $(\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4)$。

5 (10 分)

设 $\{E_{i,i+1}\}(i=1,..n-1)$ 为 $n\times n$ 的基本矩阵。证明:

(1) 若 $|i-j|>1$, 则 $E_{i,i+1}E_{j,j+1}=E_{j,j+1}E_{i,i+1}$;

(2) 若 $|i-j|=1$, 则 $E_{i,i+1}^2E_{j,j+1}-2E_{i,i+1}E_{j,j+1}E_{i,i+1}+E_{i,i+1}E_{j,j+1}^2=0$.

6 (10 分)

设 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 是 n 级方阵，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式。证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}.$$

7 (10 分)

令 $f(t)=\sum_{k=0}^{n-1}t^kx_k$, 设 $\zeta^0,\zeta,\zeta^2,\cdots,\zeta^{n-1}\in\mathbb{C}^*$ 是所有 n 次单位根. 证明:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = f\left(\zeta^0\right)f(\zeta)f\left(\zeta^2\right)\cdots f\left(\zeta^{n-1}\right).$$

8 (10 分)

设矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 P 均为 n 级矩阵，矩阵 P 为若干 $P(i,j)$ 型初等矩阵的乘积，令 $B=PAP'$。判断: a_{ij} 在 A 中的代数余子式 A_{ij} 是否等于 a_{ij} 在 B 中的代数余子式? 若相等，给出证明; 若不相等举出反例。