

北京大学高等数学A (II) 期末考试试题

(2023.7.15)

共 9 道大题, 满分 100 分, 时间 120 分钟

一 (每小题 10 分共 30 分)

1. 求微分方程 $y' - y = e^x$, $y(0) = 0$, 初值问题的解.
2. 求微分方程 $y' = y^{\frac{1}{3}}$, $y(0) = 0$, 初值问题的解.
3. 求微分方程 $y'' - 2y' + y = e^{\alpha x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, 初值问题的解, 其中 α 是常数.

二 (10分) 试讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$ ($p > 0$) 在区间 $[1, 2]$ 内是否一致收敛.

三 (10分) 求 $f(x) = \sin^2 x$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 的傅里叶级数.

四 (10分) 试讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x + n}$ 的收敛域.

五 (15分) 设 $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$.

1. 试求函数 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 处的幂级数展开 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
2. 确定上面得到的幂级数的收敛域.
3. 计算 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的值.

六 (10分)

1. 设 $0 \leq a < b$. 试计算含参变量积分

$$\int_a^b \frac{x}{y^2 + x^2} dy, \quad x > 0.$$

2. 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n^2 + x^2} \right)$$

七 (5分) 设 $a \neq 0, p > 0$, 试讨论下列级数的敛散性. 若收敛, 问该级数是绝对收敛还是条件收敛?

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\pi\sqrt{n^2 + a^2})}{(\ln n)^p}.$$

八 (5分) 设 $y = y(x)$ 是如下初值问题的解

$$y' = \sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1.$$

试计算 $y'(1)$ 的值.

九 (5分) 求下面微分方程初值问题的解:

$$y' = \frac{\sqrt{1 + y^2}}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad y(1) = 1.$$