线性代数经济学双学位 2018 秋期中试题

2018 年 11 月 11 日

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。

(1)$1,2,3,4,5$的排列$p_1p_2 4 p_3p_4$是偶排列,则$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4)}=$ __-1__。

(2)$7531p_5p_6p_7$是1,2,3,4,5,6,7的一个排列, $p_5p_6p_7$是偶排列,则$(-1)^{\tau(7531p_5p_6p_7)}=$ __1__。

(3)设A是四阶方阵,$|A|=\dfrac{1}{16}$,则$|2A|=$ __1__。

(4)若向量组$(1,0,0),(2,2,5),(3,4,t)$线性相关,则 $t=$ __10__。

(5)$$(1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1)\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}=\underline{\quad\dfrac{n^2(n+1)}{2}\quad}。$$

(6)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$, 则$|-AA^{\mathrm{T}}|=$ __-25__。

(7)设$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{pmatrix}$满足$BA=2B+3E_3$,则$|B|=$ __$-\dfrac{9}{2}$__。

(8)$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3 & 1\\ 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1\\ 7^4 & 7^3 & 7^2 & 7 & 1\\ 9^4 & 9^3 & 9^2 & 9 & 1\end{vmatrix}=\underline{\quad 294912\quad}。$$

(9)齐次线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2^2 x_1 + 3^2 x_2 + 4^2 x_3 + 5^2 x_4 + 6^2 x_5 = 0, \\ 2^3 x_1 + 3^3 x_2 + 4^3 x_3 + 5^3 x_4 + 6^3 x_5 = 0, \end{cases}$

的解空间的维数=__2___。

(10)若$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,则$r(A^3)=$__1___。

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1)若方程组$\begin{cases} 8x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 2, \\ \quad -x_2 + 2x_3 = 3, \\ \quad 3x_2 + tx_3 = -9, \end{cases}$有无穷多个解，则

(A)$t=-6$　(B)$t=6$　(C)$t=-2$　(D)$t=2$　　[A]

(2)设有矩阵$A_{3\times 2}, B_{4\times 3}, C_{2\times 3}$，则下列运算有意义的是

(A)$(A+B)C$　(B)$B(C^{\mathrm{T}}+A)$　(C)$(ABC)^{\mathrm{T}}$　(D)CBA　　[B]

(3)设$A=(a_{ij})_{m\times n}, E_{ij}$是$m$阶基本矩阵, $1\le i\le m, 1\le j\le n$,则$(E_{ij}A)(i,j)=$

(A)a_{ii}　(B)a_{jj}　(C)a_{ij}　(D)a_{ji}　　[B]

(4)设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可用向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，并且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则必定成立的是

(A)$s>t$　(B)$s<t$　(C)$s\le t$　(D)$s=t$　　[C]

(5)设$s<n$,则线性方程组$A_{s\times n}X_{n\times 1}=\beta$

(A)有唯一解　(B)无解　(C)有无穷个解　(D)无解或有无穷个解　　[D]

(6)设对于所有矩阵$A=(a_{ij})_3$成立$PA=\begin{pmatrix} a_{31}+2a_{11} & a_{32}+2a_{12} & a_{33}+2a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$,则$P=$

(A)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ [A]

(7)设3阶行列式$|A|=2, B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,则$r(AB)=$

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3 [B]

(8)齐次方程组$A_{m\times n}X=O$存在非零解的充分必要条件是

(A)A的行向量组线性相关 (B)A的列向量组线性相关

(C)$r(A_{m\times n})<m$ (D)$m<n$ [B]

(9)3阶矩阵A和P满足$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,若$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$,则

$Q^T AQ=$

(A)$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ [A]

(10)若二阶对角矩阵A不是数量矩阵，并且满足方程$A^2-11A-12E=0$，则A的对角元素的乘积是

(A)-11 (B)11 (C)-12 (D)12 [C]

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 10 分，满分为 50 分)

(1)计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & -4 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \end{vmatrix}$。

解$\begin{vmatrix}1&4&0&5\\4&1&-3&0\\4&4&0&-4\\2&10&6&2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&4&0&5\\4&1&-3&0\\1&1&0&-1\\1&5&3&1\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}1&4&0&5\\4&1&-3&0\\1&1&0&-1\\5&6&0&1\end{vmatrix}=24\begin{vmatrix}1&4&5\\1&1&-1\\5&6&1\end{vmatrix}$

$=24\begin{vmatrix}1&4&5\\0&-3&-6\\0&-14&-24\end{vmatrix}=24(72-84)=24\times(-12)=-288.$

(2)计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}n&3&3&\cdots&3&3&3\\3&n-1&3&\cdots&3&3&3\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\3&3&3&\cdots&3&3&3\\3&3&3&\cdots&3&2&3\\3&3&3&\cdots&3&3&1\end{vmatrix}(n\geq 3)$$

。

$$\text{解}\,\mathrm{D}_n=\begin{vmatrix}n-3&0&0&\cdots&0&0&0\\0&n-4&0&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\3&3&3&\cdots&3&3&3\\0&0&0&&0&-1&0\\0&0&0&\cdots&0&0&-2\end{vmatrix}=6(n-3)!.$$

(3) 给定向量组 I：$\alpha_1=(1,2,7,6),\alpha_2=(0,3,12,9),\alpha_3=(0,-1,-4,-3),$ $\alpha_4=(1,0,-2,-1),\alpha_5=(2,2,7,7)$。求 I 的一个极大线性无关组 II，并且用 II 表示 I 的其余向量。

解$\alpha_1=(1,2,7,6),\alpha_2=(0,3,12,9),\alpha_3=(0,-1,-4,-3),\alpha_4=(1,0,-2,-1),\alpha_5=(2,2,7,7)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\2&3&-1&0&2\\7&12&-4&-2&7\\6&9&-3&-1&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&3&-1&-2&-2\\0&12&-4&-9&-7\\0&9&-3&-7&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&3&-1&-2&-2\\0&0&0&-1&1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2\\0&3&-1&-2&-2\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&3\\0&1&-1/3&0&-4/3\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$是一个极大线性无关组，

$\alpha_3=(-1/3)\alpha_2,\alpha_5=3\alpha_1-(4/3)\alpha_2-\alpha_4.$

(4)求其图像过点$(-2,-18),(-1,-2),(1,6),(2,10)$的三次多项式.

解设三次多项式为$p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,则

$$\begin{cases}-8a+4b-2c+d=-18,\\-a+b-c+d=-2,\\a+b+c+d=6,\\8a+4b+2c+d=10.\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&6\\-8&4&-2&1&-18\\-1&1&-1&1&-2\\8&4&2&1&10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&6\\0&12&6&9&30\\0&2&0&2&4\\0&8&0&2&-8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&6\\0&1&0&1&2\\0&0&6&-3&6\\0&0&0&-6&-24\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&6\\0&1&0&1&2\\0&0&2&-1&2\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\0&1&0&0&-2\\0&0&2&0&6\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0&2\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-1\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&3\\0&0&0&1&4\end{pmatrix},$$

$a=1, b=-2, c=3, d=4.$

$p(x)=x^3-2x^2+3x+4.$

(5)用下列线性方程组的特解和导出组的基础解系表示其通解：

$$\begin{cases} x_1 +3x_2 +5x_3 +5x_4 +13x_5 =1, \\ x_1 +x_2 +x_3 +x_4 +x_5 =1, \\ \quad x_2 +2x_3 +2x_4 +6x_5 =0, \\ 5x_1 +3x_2 +x_3 +x_4 -7x_5 =5。\end{cases}$$

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 & -7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -12 & -24 & -24 & -72 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 5 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特解：$\xi_0=(1,0,0,0,0).$

基础解系：$\eta_1=(1,-2,1,0,0), \eta_2=(1,-2,0,1,0), \eta_3=(5,-6,0,0,1),$

通解$\xi=\xi_0+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3.$

四、证明题(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分为 10 分

(1)证明:如果$\alpha_1,\cdots\alpha_s$可以用$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示,并且$s>t$，则$\alpha_1,\cdots\alpha_s$线性相关。

证明$\alpha_i=\sum_{j=1}^{t}a_{ij}\beta_j, i=1,\cdots,s$.要使

$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$,只需$\sum_{i=1}^{s}k_i\sum_{j=1}^{t}a_{ij}\beta_j=0$，即

$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{t}a_{ij}k_i\beta_j=\sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s}a_{ij}k_i\right)\beta_j=0,$

只需$\sum_{i=1}^{s}a_{ij}k_i=0$，$j=1,\cdots,t,$

$\sum_{i=1}^{s}a_{ij}x_i=0$，$j=1,\cdots,t,$齐次方程组未知数个数$s>$方程个数$t,$

必有非零解$k_i, i=1,\cdots,s,$此时$\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i=0$，故$\alpha_1,\cdots,\ \alpha_s$线性相关.

注：此题用秩来证，犯了逻辑循环的错误!!

(2)设矩阵$A_n=(a_{ij})_n$的行向量组线性相关,代数余子式$A_{kl}\neq 0$,证明$(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}$是齐次线性方程组$A_nX=0$的一个基础解系。

证明　$A_n=(a_{ij})_n$的行向量组线性相关$\Rightarrow|A|=0, A_{kl}\neq 0$,故$r(A)=n-1$.于是$AX=0$的基础解系有$n-(n-1)=1$个向量.$A_{kl}\neq 0\Rightarrow(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}\neq 0.$

$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots a_{in}A_{in}=\delta_{ik}|A|=0, i=1,\cdots,n,(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}$是齐次方程组的非零解，故$(A_{k1},A_{k2},\cdots,A_{kn})^{\mathrm{T}}$是一个基础解系。