# 6.

（1）.

$$A_n := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n-2 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

将$A_n$的第$n$行加上第$n-1$行的（-1）倍. 可以看出$\det(A_n)=\det(A_{n-1})$.

因此$\det(A_n)=\det(A_1)=1$.

(2).

$$A_n := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n \end{bmatrix}$$

进行如下初等列变换:

for i={1,2,3,....,n-1}:

第i列=第i列-第(i+1)列

变换之后的得到

$$A_n' = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & n \\ 0 & -1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

可以看出$\det(A_n)=(-1)^{n-1}\cdot n$.

(3).

A的子矩阵$A\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$行列式非零，因此$rank(A)\geq 3$.

要想让A的秩达到最小只需要让$\det(A)=0$即可

$\det(A)=3((x-2)(y-2)-9)$, 因此只需$(x-2)(y-2)=9$即可.

## 7.

设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，这里$\alpha_i$都是列向量.

设$rank(A)=r$，不妨设$A$的前$r$列是线性无关的.

那么对于$i>r$, $\alpha_i$都可以被$\alpha_1,\ldots,\alpha_r$线性表出。设$\alpha_i=\sum_{j=1}^r \lambda_{ij}\alpha_j$, $i>r$.

对于$i=1,2,\ldots,r$, 定义矩阵$A_i$:

$$A_i\text{的第}k\text{列}=\begin{cases}0 & \text{if } 1\le k\le r \text{ and } k\ne i;\\ \alpha_i & \text{if } k=i;\\ \lambda_{ki}\alpha_i & \text{if } k>r.\end{cases}$$

那么$rank(A_i)=1$, 且$\sum_{i=1}^r A_i=A$.

## 8.

根据定义，

$$\det(A)=\sum_\sigma(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}(x).$$

这里$\sigma$跑遍$1,2,3,\ldots,n$的所有的置换，$\operatorname{sgn}(\sigma)$是置换的符号（也可以理解为所有的排列，和排列的逆序数）.

因此，由乘积求导法则，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\det(A)&=\sum_\sigma(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\prod_i\left(\prod_{j\ne i}a_{j,\sigma(j)}(x)\right)a'_{i,\sigma(i)}(x)\\&=\sum_{i,j}a'_{i,j}(x)\left(\sum_{\sigma,\sigma(i)=j}(-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}\prod_{k\ne i}a_{k,\sigma(k)}(x)\right)\\&=\sum_{i,j}a'_{i,j}(x)A_{i,j}(x).\end{aligned}$$