线性代数期中试题答案

______ 学院 _______ 系　姓名 ________ 学号________ 09/11/2014

一	二	三	四	总分

注意：务必把试题纸和答题纸一并交上！

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分，答案写在题后下划线上方）。

(1) $(-1)^{\tau((10)986754321)} = \underline{\quad 1 \quad}$。

(2)设 A 是四阶方阵，$|A|=2,$ 则 $|(A^*)^{-1}| = \underline{\frac{1}{8}}$。

(3)若向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(9,2,4),\alpha_3=(2,6,t)$ 线性相关，则 $t=$ $\underline{12\qquad}$。

(4)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，并且行列式 $|(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)|=1,$ 则 $|2(\alpha_2,-2\alpha_1,3\alpha_3)| = \underline{\quad 48 \quad}$。

(5)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&4\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $|-AA^{\mathrm{T}}| = \underline{\quad -4 \quad}$。

(6)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, 则 $A^{\mathrm{T}}B = \underline{\begin{pmatrix}4&7\\-2&-1\\7&6\end{pmatrix}}$。

(7)若矩阵 B 满足 $B\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}$, 则 $B=\underline{\begin{pmatrix}2&3\\1&9\end{pmatrix}}$。

(8) 已知

$\boldsymbol{r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)=4, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6)=5.}$
则 $\boldsymbol{r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5-\alpha_6)=}$ __5__ 。

(9)齐次方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\3&6&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的基础解系所含向量个数为

2 。

(10)若非齐次方程组 $\boldsymbol{Ax=b}$ 有解 $\boldsymbol{\xi_1=(1,2,3,4)^{T}, \xi_2=(4,5,6,7)^{T}}$, 则

其导出组必有一个非零解 $\boldsymbol{\xi=}$ **（3，3，3，3）**。

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。答案写在题后的方括号里)。

(1)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶方阵，则 $\boldsymbol{|kA|}$=

(A)$\boldsymbol{k|A|}$ **(B)**$\boldsymbol{|k||A|}$ **(C)**$\boldsymbol{k^n|A|}$ **(D)**$\boldsymbol{|k|^n|A|}$ [C]

(2)若方程组 $\begin{cases}7x_1+8x_2+9x_3=0,\\ \quad -x_2+2x_3=0,\\ \quad 2x_2+tx_3=0,\end{cases}$ 存在非零解，则常数 $\boldsymbol{t=}$

(A)$\boldsymbol{-4}$ **(B)4** **(C)**$\boldsymbol{-2}$ **(D)2** [A]

(3)设有矩阵 $\boldsymbol{A_{3\times2}, B_{4\times3}, C_{2\times3}}$，则下列运算有意义的是

(A)$\boldsymbol{(A+B)C}$ **(B)**$\boldsymbol{B(C^{T}+A)}$ **(C)**$\boldsymbol{CBA}$ **(D)**$\boldsymbol{(ABC)^{T}}$ [B]

(4)设矩阵 $\boldsymbol{A,B,C}$ 满足 $\boldsymbol{AB=AC}$，则 $\boldsymbol{B=C}$ 成立的一个充分条件是

(A) $\boldsymbol{A}$ 为方阵 **(B)** $\boldsymbol{A}$ 为非零矩阵

(C) $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵 **(D)** $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵 [C]

(5) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维向量组, $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$, 则不正确的是

(A) 如果$r=n$,则任意n维向量都可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(B)如果任意n维向量都可以用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示,则$r=n$,

(C)如果$r=s$,则任意n维向量都可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示

(D)如果$r<n$,则存在n维向量不能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示 [C]

(6)若方阵$\boldsymbol{A,B,C}$满足$\boldsymbol{ABC=E}$，则必定成立

(A)$\boldsymbol{BAC=E}$ **(B)**$\boldsymbol{ACB=E}$ **(C)**$\boldsymbol{CBA=E}$ **(D)**$\boldsymbol{BCA=E}$ [D]

(7)设$\boldsymbol{r(A_{m\times n})=r<m}$，则在$\boldsymbol{A}$的行向量组中

(A)任意$\boldsymbol{r}$个向量线性无关 **(B)**存在$\boldsymbol{r}$个向量线性无关

(C)任意$\boldsymbol{r}$个向量都是其极大线性无关组**(D)**$\boldsymbol{r<n}$ [B]

(8)齐次方程组$\boldsymbol{A_{m\times n}X=O}$存在非零解的充分必要条件是

(A) $\boldsymbol{A}$的行向量组线性相关**(B)** $\boldsymbol{A}$的列向量组线性相关

(C)$\boldsymbol{r(A_{m\times n})<m}$ **(D)**$\boldsymbol{m<n}$ [B]

(9)$\boldsymbol{A}$为可逆上三角矩阵，则$\boldsymbol{A^{-1}}$是

(A)下三角矩阵 **(B)**对角矩阵 **(C)**数量矩阵 **(D)**上三角矩阵 [D]

(10)若二阶对角矩阵$\boldsymbol{A}$不是数量矩阵，并且满足方程

$\boldsymbol{A^2-7A+12E=O}$，则

(A)$\mathbf{tr}(A)=7$ **(B)**$\mathbf{tr}(A)=-7$ **(C)**$\mathbf{tr}(A)=6$ **(D)**$\mathbf{tr}(A)=8$ [A]

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分为 40 分。解答写在答题纸上)。

(1)计算行列式$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-3} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{2} \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 5 \\ 4 & -3 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 4 & -3 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 12 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 12 \times 2 \times (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 24 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \\ 8 & 2 & -15 \end{vmatrix} = 24.$$

(2)计算行列式$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 2^2 \\ 1 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 2^3 \\ 1 & 4^5 & 3^5 & 5^5 & 2^5 \\ 1 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 2^4 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 2^2 \\ 1 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 2^3 \\ 1 & 4^5 & 3^5 & 5^5 & 2^5 \\ 1 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 2^4 \end{vmatrix} = -4 \times 3 \times 5 \times 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 2^2 \\ 1 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 2^3 \\ 1 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 2^4 \end{vmatrix}$$

$$= -120 \times (2-1)(2-4)(2-3)(2-5)(5-1)(5-4)(5-3)(3-1)(3-4)(4-1)$$

$$= -34560.$$

(3) 求齐次方程组$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$的一个基础解系。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & 0 & -4 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \quad - x_4 = 0, \\ \qquad\qquad x_3 = 0. \end{cases}$$

基础解系

$$\eta_1 = (-2,1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_2 = (1,0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

(4)a 为何值时，方程组$\begin{cases} x_2 - x_3 = a, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$有解？在有解时，用非齐次方程组的一个特解和导出组的基础解系表示其全部解。

解

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = a, \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10, \\ 2x_1 + 4x_2 = 6. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & a \\ 1 & 7 & 1 & 10 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix}.$$

$a=2$方程组时有解。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特解$\xi = (-1,2,0)^{\mathrm{T}}$.基础解系$\eta = (-2,1,1)^{\mathrm{T}}$。

一般解$\xi = \xi_0 + c\eta = (-1,2,0)^{\mathrm{T}} + c(-2,1,1)^{\mathrm{T}}$。

(5)求矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$的逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$和伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*$。

解

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{E}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -8 & 21 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 3 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3/2 \\ -2 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & -4 \end{pmatrix},$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&3&3\\2&-1&0\\-2&4&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}8&3&3\\0&-1&0\\6&4&2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}8&3\\6&2\end{vmatrix}=2,\begin{pmatrix}-1&3&3/2\\-2&5&3\\3&-7&-4\end{pmatrix}$$

$$A^*=2A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&6&3\\-4&10&6\\6&-14&-8\end{pmatrix}$$。

四、证明题(本题共 2 小题，每小题 10 分，满分为 20 分。答案写在答题纸上)。

(1) 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$和$\boldsymbol{\beta}$都是$n$维向量.证明:如果$\boldsymbol{\beta}$不能用$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示,

则$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+\mathbf{1}$.

证法一

设 不妨设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组.既然 β

不能用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,由于$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}\cong\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$，$\beta$也

不能用$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示，而$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关，故$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性

无关，又$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$

可用$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$线性表示，故$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta$是$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta$的一个极大

线性无关组，故$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)=r+1=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+1$.

证法二 $\boldsymbol{\beta}$不能用$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$线性表示,显然$\beta\neq o$。向量方程

$$x_1\alpha_1+\cdots x_s\alpha_s=\beta$$

无解，于是

$$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)<r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta)\le r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+r(\beta)$$
$$=r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+1,$$

故$r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta})=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)+\mathbf{1}$.

(2)如果$ab=cd$，证明n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a+b & d & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a+b \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}。$$

证 令

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & d & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c & a+b & d & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & d \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a+b \end{vmatrix}$$

则

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - cdD_{n-2} = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

$$D_1 = a+b,$$

$$D_2 = (a+b)^2 - ab = a^2 + 2ab + b^2 - ab = a^2 + ab + b^2.$$

设等式对于小于 n 的自然数阶成立，则

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$$

$$= (a+b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} - ab\sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} b^{n-1-i} + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-2} a^{i+1} b^{n-1-i}$$

$$= a^n + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i}.$$

故等式对于自然数n也成立。根据数学归纳法，等式对于所有自然数都成立。