2013 线性代数期中试题解答

______ 学院 ________ 系 姓名 ________ 学号_________ 分数______ 03/11/2013

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。答案写在答题纸上）。

(1)若 $1,\cdots,5$ 的排列 $p_1p_2p_3p_4p_5$ 是奇排列，则 $(-1)^{\tau(p_5p_4p_3p_2p_1)}=$ __-1__。4+3+2+1次调换

(2)设 A 是三阶方阵，$|A|=2,$ 则 $|(A^*)^{-1}|=\underline{\dfrac{1}{4}}$。 A*是正的，别搞反，，，哎

(3)若向量组 $\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(9,2,4),\alpha_3=(1,3,t)$ 线性相关，则 $t=\underline{6}$。

(4)设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，并且行列式 $|(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)|=1,$ 则

注意是调换！没有
奇偶相同的性质

$|(\alpha_3,2\alpha_2,3\alpha_1)|=\underline{-6}$。

(5)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}$，则 $|AA^{\mathrm{T}}|=\underline{9}$。

(6)设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&0&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix},$ 则 $A^{\mathrm{T}}B=\underline{\begin{pmatrix}4&7\\-2&-1\\7&6\end{pmatrix}}$。

(7)若矩阵 B 满足 $B\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix},$ 则 $B=\underline{\begin{pmatrix}2&2\\1&6\end{pmatrix}}$。

(8)向量组 $\alpha_1=(1,2),\alpha_2=(3,4),\alpha_3=(5,6)$ 的秩是 $\underline{2}$。

(9)齐次方程组 $\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 的基础解系所含向量个数为 $\underline{1}$。

(10)若非齐次方程组 $Ax=b$ 有解 $x_1=(1,2,3)^{\mathrm{T}},x_2=(4,5,6)^{\mathrm{T}},$ 则其导出组必有一个非零解 $\xi=\underline{(3,3,3)^{\mathrm{T}}}$。

填空题分数______。

二、选择题(本题共10小题,每小题2分，满分20分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。答案写在答题纸上)。

(1)设A为n阶方阵，则$|kA|=$

(A)$k|A|$　**(B)**$|k||A|$　**(C)**$k^n|A|$　**(D)**$|k|^n|A|$ [C]

(2)若方程组$\begin{cases}7x_1+8x_2+9x_3=0,\\ \quad -x_2+2x_3=0,\\ \quad 2x_2+tx_3=0,\end{cases}$存在非零解，则常数$t=$

(A)-4　**(B)**4　**(C)**-2　**(D)**2 [A]

(3)设有矩阵$A_{3\times2},B_{4\times3},C_{2\times3}$，则下列运算有意义的是

(A)$(A+B)C$　**(B)**$B(C^{\mathrm{T}}+A)$　**(C)**CBA　**(D)**$(ABC)^{\mathrm{T}}$ [B]

(4)设矩阵A,B,C满足$AB=AC$，则$B=C$成立的一个充分条件是

(A) A为方阵　**(B)** A为非零矩阵

(C) A为可逆矩阵 **(D)** A为对角矩阵 [C]

(5)设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可用向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，并且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则必定成立的是

(A)$s>t$　**(B)**$s<t$　**(C)**$s\le t$　**(D)**$s=t$ [C]

(6)若方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必定成立

(A)$BAC=E$　**(B)**$ACB=E$　**(C)**$CBA=E$　**(D)**$BCA=E$ [D]

(7)设$r(A_{m\times n})=r<m$，则在A的行向量组中

(A)任意r个向量线性无关　**(B)**存在r个向量线性无关

(C)任意r个向量都是其极大线性无关组 **(D)** $r<n$ [B]

(8)齐次方程组$A_{m\times n}X=O$存在非零解的充分必要条件是

(A) A的行向量组线性相关 **(B)** A的列向量组线性相关

(C) $r(A_{m\times n})<m$　**(D)** $m<n$ [B]

(9) A为可逆上三角矩阵，则A^{-1}是

(A) 下三角矩阵　**(B)** 对角矩阵　**(C)** 数量矩阵　**(D)** 上三角矩阵　　　　[D　]

(10)若二阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不是数量矩阵，并且满足方程 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，则

公式仍成立，是我脑残。完全可以对角线各只有一个0

(A) $\mathrm{tr}(A)=5$　(B) $\mathrm{tr}(A)=-5$　(C) $\mathrm{tr}(A)=2$　(D) $\mathrm{tr}(A)=3$　　[A]

（$\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角线元素之和）　　　　选择题分数______。

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 8 分，满分为 40 分) (解答写在答题纸上)

(1)计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & 12 & 0 & 2 \end{vmatrix}=(-3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 10 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=12\times\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix}=12\times\begin{vmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}=12\times1\times(-1)^{2+1}(6-8)=24.$$

(2)计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \end{vmatrix}$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \end{vmatrix}$$

看清次数啊。。。。
注意定义。。。xi-xj，这里2-6

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 & 6^3 \\ 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 & 6^4 \end{vmatrix}$$

$$= (6-5)(6-4)(6-3)(6-2)(5-4)(5-3)(5-2)(4-3)(4-2)(3-2)$$

$$= 2\times 3\times 4\times 2\times 3\times 2 = 288.$$

(3) 求齐次方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的一个基础解系。

解

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$x_3 = 0, (x_2, x_4) = (1,0), x_1 = -2; (x_2, x_4) = (0,1), x_1 = 1.$$

$$\eta_1 = (-2,1,0,0), \eta_2 = (1,0,0,1).$$

(4) a 为何值时，方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = a \end{cases}$ 有解？在有解时，求其全部解。

解

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 - x_3 = a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{pmatrix} . a = 2.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$x_3 = c, x_1 = -1 - 2c, x_2 = 2 + c.$

$a = 2, x_1 = -1 - 2c, x_2 = 2 + c, x_3 = c.$

(5)求以下矩阵的逆矩阵 A^{-1} 和伴随矩阵 A^*： $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$

解

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (-1)^{2+1} \times (4-3) = -1,$$

$$A^* = |A| A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

计算题分数______。

四、证明题(本题共 2 小题，每小题 10 分，满分为 20 分) (解答写在答题纸上)

(1)证明：若$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$可用$\beta_1, \cdots, \beta_t$线性表示，且$s > t,$ 则$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关。

证明 由假设

$\alpha_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij} \beta_j, i = 1, \cdots, s.$ 为使$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_i = 0,$ 由于

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{s} x_i \sum_{j=1}^{t} a_{ij} \beta_j = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{t} x_i a_{ij} \beta_j = \sum_{j=1}^{t} \left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij} x_i \right) \beta_j,$$

只需

$$\sum_{i=1}^{s} a_{ij} x_i = 0, j = 1, \cdots, t.$$

由假设，$s > t,$ 齐次方程组必有非零解$(x_1, \cdots, x_s)$，故$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$线性相关。

(2)假设$a_1 \cdots a_n = 1$，证明以下矩阵的伴随矩阵所有元素的和是$(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ ，

求元素和。。。废话，每行和代数余子式乘积是dA啊。。。
呜呜！！！颠倒次序到最后是交换了n-1次！！！才不是1次。。

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

证明题分数______。

证明一

$$(A,E)=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$|A|=a_n(-1)^{n+1}a_1\cdots a_{n-1}=(-1)^{n+1},$$

$$A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}A^{-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}.$$

证明二

零元素的余子式中仅含 n-2 个非零元，必为 0，a_n 的代数余子式

$(-1)^{n+1}a_1\cdots a_{n-1}=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{a_n}.\,a_1$ 的代数余子式

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+2}(-1)^{n-1+1}a_na_2\cdots a_{n-1}=(-1)^{n+1}\frac{1}{a_1}.$$

类似得 $A_{ii+1}=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{a_i},i=2,\cdots,n-1.$ 故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}.$

证明三 和证明二同样证明非零元素的余子式为零，

$$a_iA_{ii+1}=|A|=a_n(-1)^{n+1}a_1\cdots a_{n-1}=(-1)^{n+1}1=(-1)^{n+1},i=1,\cdots,n-1,$$

$$a_nA_{n1}=|A|=(-1)^{n+1}.$$

$$A_{ii+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{a_i},i=1,\cdots,n-1,A_{nn+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}$$

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}$。