2019年模拟期中考数学组答案

2019.10.27

1. (a) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{nlnn}=1$
   (b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\frac{1}{6}$
   (c) $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

2. $l1$的标准方程为 $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{\frac{4}{3}}=fracz-12$
   $l2$标准方程为 $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4}{2}$
   设 $l1$上一点P为 $(2+3t,1+\frac{4}{3}t,1+2t)$
   则过P与$l2$垂直的平面π为：
   $3(x-2-3t)+3(y-1-\frac{4}{3}t)+2(z-1-2t)=0$即 $3x+3y+2z=11+17t$
   设$l2$与π交点$Q(3s,1+3s,4+2s)$ 则由Q在 π上可知$s=\frac{17}{22}t$，将其带入Q的坐标
   P关于Q的对称点P'为 $(\frac{51}{11}t-(2+3t),2+\frac{51}{11}t-(1+\frac{4}{3}t),8+\frac{34}{11}t-(1+2t))$
   化简求得$l1$关于$l2$的对称直线即为P'构成的直线：
   $\frac{x+2}{54}=\frac{y-1}{109}=\frac{z-7}{36}$

3. (a) -316
   (b) $\frac{5^{n+1}-3^{n+1}}{2}$
   (c) 极大线性无关组：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$（答案不唯一）
   $\beta=\frac{10}{3}\alpha_1+\frac{7}{3}\alpha_2-\frac{7}{3}\alpha 4$（答案不唯一）

4. 对数列 $S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{sini\alpha}{i^\alpha}$，记$T_n=\sum_{i=1}^{n}sini\alpha$
   考虑Cauchy收敛准则，对任意$\epsilon>0$，取N足够大。$(N^\alpha>\frac{2}{\epsilon|sin\frac{\alpha}{2}|})$
   对任意$m>n>N$, $S_m-S_n=\sum_{j=n+1}^{m}\frac{T_j-Tj-1}{j^\alpha}=-\frac{T_n}{(n+1)^\alpha}+\frac{T_m}{m^\alpha}+\sum_{j=n+1}^{m-1}T_j(\frac{1}{j^\alpha}-\frac{1}{(j+1)^\alpha})$
   $2sin\frac{\alpha}{2}T_n=\sum_{i=1}^{n}(cos\frac{2i-1}{2}\alpha-cos\frac{2i+1}{2}\alpha)=cos\frac{\alpha}{2}-cos\frac{2n+1}{2}\alpha$
   故$|sin\frac{\alpha}{2}||T_n|\le 1$
   当$sin\frac{\alpha}{2}=0$时$S_n=0$，收敛。
   当$sin\frac{\alpha}{2}\ne 0$时
   $|S_m-S_n|\le\frac{1}{|sin\frac{\alpha}{2}}\frac{2}{(n+1)^\alpha}<\frac{1}{|sin\frac{\alpha}{2}}\frac{2}{(N+1)^\alpha}<\epsilon$
   由Cauchy收敛准则知S_n收敛。

5. $\overrightarrow{OP}(1,2,-2)$
   设单位向量$\overrightarrow{u}(a,b,c)$平行于l，不妨设$a\ge 0$
   由x轴与l夹角为$\pi/3$知$\frac{|\vec{u}\cdot\vec{e}|}{|\vec{u}||\vec{e}|}=a=\frac{1}{2}$，进而$b^2+c^2=\frac{3}{4}$
   注意到$d(P,l)=\frac{|\overrightarrow{OP}\times\vec{u}|}{|\vec{u}|}=\sqrt{(2c+2b)^2+(-c-1)^2+(1-b)^2}=\frac{\sqrt{35}}{2}$
   化简并结合上式得$bc=\frac{8}{3}or\frac{1}{4}$ 结合b-c的值即可算出对应的四条直线为：
   $x=\frac{\sqrt{6}y}{3}=\frac{\sqrt{6}z}{3}$
   $x=-\frac{\sqrt{6}y}{3}=-\frac{\sqrt{6}z}{3}$
   $x=\frac{2y}{\sqrt{5}-1}=\frac{2z}{\sqrt{5}+1}$
   $x=-\frac{2y}{\sqrt{5}+1}=\frac{2z}{1-\sqrt{5}}$

6. 证明如下

证: 设$\beta_i=\alpha_1+k_i\alpha_2+\cdots+k_i^{n-1}\alpha_n$ $(i=1,\dots,n)$是A中的n个不同的向量(即$k_1,k_2,\dots,k_n$两两不同), 若$c_1\beta_1+c_2\beta_2+\cdots+c_n\beta_n=0$, 即

$$\sum_{j=1}^{n}(c_1k_1^{j-1}+\cdots+c_nk_n^{j-1})\alpha_j=0.$$

因为$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$线性无关，上式等价于线性方程组

$$\begin{cases} c_1+c_2+\cdots+c_n=0 \\ \vdots \\ c_1k_1+c_2k_2+\cdots+c_nk_n=0 \\ c_1k_1^{n-1}+c_2k_2^{n-1}+\cdots+c_nk_n^{n-1}=0 \end{cases}$$

其系数行列式为Vandermond行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(k_j-k_i)\neq 0,$$

所以线性方程组只有零解$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, 故$\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n$线性无关.

7. 解答如下

7. 解 记题设集合为S.观察知S关于Z轴旋转对称.考虑经过C_2的点$P=(1,0,0)$的且经过C_1的直线。所有这样的直线形成顶点在P的一个斜圆锥，它在平面$z=1$的截口是与C_3相交(于两点)的圆。其实，可以写出斜圆锥方程$(x-1+z)^2+y^2=4z^2$.因此经过点P恰好有两条直线l_1,l_2与C_1,C_2,C_3都相交.由旋转对称性, l_1绕Z轴旋转产生的旋转单叶双曲面H包含于S.由H的直纹性和$C_1,C_2,C_3\subset H$，我们知道H上经过点P的两条直线其一为l_1，另一条则只能为l_2。再次利用旋转对称性即说明S包含于H,所以S就是旋转单叶双曲面H.

为了写出S的方程,我们作待定系数$x^2+y^2=az^2+bz+c$,由C_1,C_2,C_3的方程立即能解出.

$$x^2+y^2=\frac{9}{2}z^2-\frac{3}{2}z+1$$

8. 解答如下

证: 记A的前n列构成的行列式为D, 则D是关于t的首项系数为1的n次多项式, 设α是其最大根(根至多只有n个, 必有最大者), 则当$t>\alpha$时$D>0$, 故当$t>0$时rank $A=n$, 以A'为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解.

9. 原题与解答如下（参考Rudin）

14. If $\{s_n\}$ is a complex sequence, define its arithmetic means σ_n by

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(*a*) If $\lim s_n = s$, prove that $\lim \sigma_n = s$.
(*b*) Construct a sequence $\{s_n\}$ which does not converge, although $\lim \sigma_n = 0$.
(*c*) Can it happen that $s_n > 0$ for all n and that $\limsup s_n = \infty$, although $\lim \sigma_n = 0$?
(*d*) Put $a_n = s_n - s_{n-1}$, for $n \geq 1$. Show that

$$s_n - \sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k a_k .$$

Assume that $\lim (na_n) = 0$ and that $\{\sigma_n\}$ converges. Prove that $\{s_n\}$ converges. [This gives a converse of (*a*), but under the additional assumption that $na_n \to 0$.]
(*e*) Derive the last conclusion from a weaker hypothesis: Assume $M < \infty$, $|na_n| \leq M$ for all n, and $\lim \sigma_n = \sigma$. Prove that $\lim s_n = \sigma$, by completing the following outline:

If $m < n$, then

$$s_n - \sigma_n = \frac{m+1}{n-m}(\sigma_n - \sigma_m) + \frac{1}{n-m} \sum_{i=m+1}^{n} (s_n - s_i).$$

For these i,

$$|s_n - s_i| \leq \frac{(n-i)M}{i+1} \leq \frac{(n-m-1)M}{m+2}.$$

Fix $\varepsilon > 0$ and associate with each n the integer m that satisfies

$$m \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < m+1.$$

Then $(m+1)/(n-m) \leq 1/\varepsilon$ and $|s_n - s_i| < M\varepsilon$. Hence

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n - \sigma| \leq M\varepsilon.$$

Since ε was arbitrary, $\lim s_n = \sigma$.