18 信科 线性代数 B 期末题 丁一文

线性代数期末考试

1. 令$A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & -2\\ 2 & 0 & 2\\ 3 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

(1) 计算A的特征值。(5分)

(2) 求解A的特征向量，并证明A可对角化。(15分)

(3) 求矩阵P使得$P^{-1}AP$为对角阵。(5分)

?

(4) 证明对于任意的正整数k, $I+A^k$可逆。(5分)

2. 设V_1为$\mathbb{R}^3$中由向量$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$生成的子空间，$V_2$为$\mathbb{R}^3$中由$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$生成的子空间。求$V_1\cap V_2$以及$V_1+V_2$。(10 分)

3. 考虑K上二次型$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1^2+7x_2^2+x_3^2-x_4^2+8x_1x_2-4x_1x_4-2x_2x_3-6x_2x_4+2x_3x_4$。

(1) 写出$q(x_1,x_2,x_3,x_4)$的矩阵。(5分)

(2) 求非退化变量替换$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$使得$q(x_1,x_2,x_3,x_4)$化成标准型（即只含平方项）。(15 分)

4. 考虑$\mathbb{R}$上二次型$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_1x_2+ax_2x_3+x_2x_4$，讨论当$a$在$\mathbb{R}$中取值变化时，该二次型的秩，正惯性指数如何变化。(10 分)

5. 设A为一个3阶实对称矩阵，行列式为6。假设$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$分别为$A$ 的特征值为1, 2的特征向量。求A的一个与v_1, v_2 线性无关的特征向量，并求该特征向量的特征值。(10分)

6. 设V是一个K上的有限维线性空间，记$V^\vee = \{f : V \to K \mid f是线性映射\}$ 为从V到K的所有线性映射构成的线性空间。设W为V的线性子空间，记W^0为集合$\{f \in V^\vee \mid f(w) = 0\ \forall w \in W\}$。

(1) 证明W^0为$V^\vee$的线性子空间。(5分)

(2) 设W_1, W_2为V的线性子空间，证明$(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$。(5分)

(3) 证明$\dim W^0 + \dim W = \dim V$。(10 分)

7. 设V是一个K上n维线性空间，f, g为V上的线性变换，假设有$f \circ g = g \circ f$。

(1) 令$a \in K$，并设$v \in V$为f的特征值为a的非0特征向量，证明$g(v)$ 也是f的特征值为a的特征向量。(5分)

(2) 假设V是$\mathbb{R}$上欧几里得空间，f, g为V上的对称变换，证明存在V 上的一组基$v_1, \cdots, v_n$，其中每个v_i 同时为线性变换f, g的特征向量。(15 分)