线性代数期末考试

2018年1月3日

一.单项选择题(每小题3分，共9分)

1.（　）复数域$\mathbb{C}$作为实数域$\mathbb{R}$ 上的线性空间可与下列哪一个线性空间同构：

A. 数域$\mathbb{K}$上所有二级对角矩阵作成的线性空间；

B. 数域$\mathbb{K}$上所有二级对称矩阵作成的线性空间；

C. 数域$\mathbb{K}$上所有二级反对称矩阵作成的线性空间；

D. 复数域$\mathbb{C}$作为复数域$\mathbb{C}$上的线性空间。

2.（　）设$\mathbf{A}$是非零线性空间V 的线性变换，则下列命题正确的是：

A. $\mathbf{A}$的核是零子空间的充要条件是$\mathbf{A}$是满射；

B. $\mathbf{A}$的核是V的充要条件是$\mathbf{A}$是满射；

C. $\mathbf{A}$的值域是零子空间的充要条件是$\mathbf{A}$是满射；

D. $\mathbf{A}$的值域是V的充要条件是$\mathbf{A}$是满射。

3.（　）设实二次型$f(X)=X'AX$（A为对称阵）经正交变换后化为：$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$, 则其中的$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是：

A. ± 1;

B. 全是正数；

C. 是A的所有特征值；

D. 不确定。

二.是非题(每小题2分，共6分)

1. ( ) 设V_1,V_2均是n维线性空间V 的子空间，且$V_1\bigcap V_2=0$ 则$V=V_1\bigoplus V_2$。

2. ( ) n维线性空间的某一线性变换在由特征向量作成的基下的矩阵是一对角矩阵。

3. ( ) 同阶方阵A与B相似的充要条件是$\lambda I-A$与$\lambda I-B$ 等价。

三.(10分)设$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 证明如下矩阵范数不等式：

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1\le\|A\|_2\le\sqrt{n}\|A\|_1.$$

四.(15分)设A,C为n阶正定矩阵，且B是矩阵方程

$$AX+XA=C$$

的唯一解，求证B是正定矩阵.

五.(10分)证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化.

六.(15分)设A是$m \times r$ 矩阵，

(1) 证明:A 是列满秩的充分必要条件为存在$m \times m$ 可逆阵P使得

$$A = P \begin{pmatrix} I_r \\ O \end{pmatrix}.$$

(2) 证明:A为行满秩的充分必要条件为存在$r \times r$ 的可逆矩阵Q，使得

$$A = \begin{pmatrix} I_m & O \end{pmatrix} Q.$$

七.(15分)设$T : V \to V$是2维向量空间的线性算子.设T不是标量乘.证明存在向量$v \in V$，使得$(v, T(v))$是V的基，并描述T关于这个基的矩阵.

八.(15分)两个无穷序列a, b的卷积定义如下：

$$(a * b)[k] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} a[j]b[k-j].$$

我们同样可以通过“恰当的延伸”来定义有限序列，即向量$a, b \in \mathbb{R}^m$的卷积.其中一种最常用的延伸是周期延伸.对于$a \in \mathbb{R}^m$的周期延伸定义如下：

$$\tilde{a}[k] = a[k \, mod \, m], \quad k \in \mathbb{Z}$$

其中，"$k \, mod \, m$"表示k除以m所得的余数.然后我们定义$a, b \in \mathbb{R}^m$的卷积如下：

$$(a \bigotimes b)[k] = \Sigma_{j=0}^{m-1} \tilde{a}[j]\tilde{b}[k-j], \quad k = 0, 1, \cdots, m-1.$$

给定$a \in \mathbb{R}^m$,$a = [a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}]^T$, 则$a \bigotimes$是$\mathbb{R}^m$上的线性变换.

1. 给出线性变换$a \bigotimes$的矩阵表示.

2. 矩阵A可以表示成$A = p(W)$的形式，其中p是次数不超过$m-1$的多项式，并且

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   试着给出多项式$p(x)$.

3. 基于2给出的多项式$p(x)$,计算A所有的特征值以及A的行列式.