线性代数期中考试

本试卷中定义记号$A_{n\times m}$为$n\times m$阶实矩阵，I_n为$n\times n$阶单位矩阵。

1.(15分)

求齐次线性方程组的通解：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ \qquad\quad x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0. \end{cases}$$

写出解空间的一组基，并正交化这组基。

2.(15分) 求下面矩阵乘法

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}^{n}_{n\times n}$$

3.(15分) 求下面行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ & & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

4. (8分) 求下面矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5.(15分) $A_{n\times n}$为可逆实矩阵。证明A可以分解成$A=TB$，其中T是正交矩阵，B是上三角矩阵，并且B的主对角元都为正数，证明这种分解是唯一的。

6. 设$A_{n\times n}$为反对称矩阵，即$A^T=-A$，亦即A形如.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

a.(5分) 证明如果n为奇数阶，则$\det A=0$

b.(10分) 证明如果n为偶数阶，证明$\det A=(p_n(A))^2$,其中$p_n(A)$是关于a_{ij}的$n/2$次多项式。

c.(附加题5分) 证明反对称矩阵的特征根要么为0，要么为纯虚数。

7. 若n阶矩阵A满足$A^2=A$, 则称A为幂等方阵。

a.(4分)求出所有2阶幂等方阵。

b. (8分)证明n阶幂等方阵的秩等于它的迹。

8. (5分) 给定$A_{m\times n}$和$B_{n\times m}$两个矩阵，证明

$$\det(I_m-AB)=\det(I_n-BA)$$

.