北京大学数学科学学院模拟期中考　数学组

参考解答

1. **解:** $\lim\limits_{n\to\infty} R(x_n)=0$, 证明如下: 对任意$m\in\mathbb{N}$, 只有有限个有理数$x_n$满足分母(写为最简形式)不大于$m$, 所以存在$N\in\mathbb{N}$使得当$n\geq N$时, x_n 的分母都大于m, 即$R(x_n)<\dfrac{1}{m}$. 由m的任意性知$\lim\limits_{n\to\infty} R(x_n)=0$.

2. **解:** 考虑在0处带o余项的Taylor展式

$$\begin{aligned}\sin(\ln(x+1)) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^4)\\ \ln(1+\sin x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+o(x^4)\\ \arcsin(e^x-1) &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{7x^4}{24}+o(x^4)\\ e^{\arcsin x}-1 &= x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\ln(x+1))-\ln(1+\sin x)}{\arcsin(e^x-1)-e^{\arcsin x}+1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}=1.$

3. **解:** 存在，比如

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{p}, & x=\sqrt{p},\ p\text{是素数}\\ 0, & \text{其余情况}\end{cases}$$

因为对于不同的素数p,q, 必有$\sqrt{p}/\sqrt{q}$不是有理数, 所以对任意$x>0$, 数列$\{nx\}$中至多有一个形如$\sqrt{p}$(p是素数)的数，所以$\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx)=0$. 但对任意$M>0$, 都存在素数$p>M^2$, 且$f(\sqrt{p})=\sqrt{p}>1$, 故$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\neq 0$(其实极限不存在).

4. **解:** 显然根号下的三个式子都恒大于零, 记$u=x^2+x+1$, $v=2x^2+x+5$, 注意到$x^2-3x+13=-7u+4v$, 原方程即$\sqrt{\dfrac{u}{v}}+1=\sqrt{4-7\dfrac{u}{v}}$, 解得$\dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{4}$, 即

$$4(x^2+x+1)=2x^2+x+5,$$

解得$x=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$.

5. **证:** 记A的前n列构成的行列式为D, 则D是关于t的首项系数为1的n次多项式, 设α是其最大根(根至多只有n个, 必有最大者), 则当$t>\alpha$时$D>0$, 故当$t>0$时$\operatorname{rank} A=n$, 以A'为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解.

6. **证:** 我们证明，若将题中条件减弱为若$a_{ij}\in\mathbb{Q}$, 则$\det A$是一个有理数的平方. 如果这个结论成立, 则结合原题中$\det A$是整数可知$\det A$是完全平方数.

斜对称矩阵的对角元素都为零. 对n归纳, 当$n=2$时, 设

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix},\ a\in\mathbb{Q}$$

则$\det A = a^2$是有理数的平方. 假设结论对$n = m$成立, 考虑$n = m + 2$的情形.

易证对A同时对行列做相同的初等变换(比如交换第i行与第j行, 并交换第i列与第j列; 又比如将第i行加到第j行, 并将第i列加到第j列)后, A仍是斜对称矩阵.

若$A = 0$, 则结论显然成立. 下设A有非零元$a_{ij}(i \neq j)$, 不妨设是$a_{12} \neq 0$(否则可将第i行的与第1行交换, 第i列与第1列交换; 再将第j行与第2行交换, 第j列与第2列交换), 则

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & & & & \\ -a_{14} & -a_{24} & & & C & \\ \vdots & & & & & \\ -a_{1n} & -a_{2n} & & & & \end{pmatrix}$$

依次对$k = 3, 4, \ldots, n$, 将第2行的$-\dfrac{a_{1k}}{a_{12}}$倍加到第k行, 第2列的$-\dfrac{a_{1k}}{a_{12}}$倍加到第k列; 再依次对$k = 3, 4, \ldots, n$, 将第1行的$-\dfrac{a_{k2}}{a_{12}}$倍加到第k行, 第1列的$-\dfrac{a_{k2}}{a_{12}}$倍加到第k列. 设A经过上述变换后变为$\widetilde{A}$, 则$\widetilde{A}$仍是斜对称矩阵, 且

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{12} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & \widetilde{C} & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix}$$

其中$\widetilde{C}$是一个元素是有理数的斜对称矩阵. 由归纳假设, $\det \widetilde{C}$是有理数的平方, 所以

$$\det A = \det \widetilde{A} = a_{12}^2 \det \widetilde{C}$$

是有理数的平方, 结论对n成立. 由归纳法知结论对一切正偶数n成立, 搞定.

7. **解:** 夹角为$\theta/2$, 距离为$d/2$.

   首先假设S有一族直纹与旋转轴夹角为ϕ, 由于旋转单叶双曲面关于过旋转轴的平面对称, 另一族直纹夹角也为ϕ. 以S的中心为锥点, 以S的旋转轴为轴, 作顶角为2ϕ的正圆锥C, 则S每一族直纹的线向恰好一一对应于C的母线的线向. 因为C的直母线间夹角最大是2ϕ与$\pi - 2\phi$中的较大者, 而$\theta < \pi/2$, 可见$\phi = \theta/2$. 为决定同族两直纹间的距离取值范围, 设与旋转轴垂直的平面截S所成圆的半径最小是r. 注意根据图形的反射对称性(或标准形式方程), 这样的平面和最小圆Z都唯一. 观察到过Z的任何一对对径点的S的两条同族直纹距离总是$2r$, 而过任何一对非对径点的两条同族直纹, 其距离都小于$2r$. 可见$2r = d$. 但r又恰好是直纹与旋转轴的距离. 所以, 所求夹角为$\theta/2$, 所求距离为$d/2$.

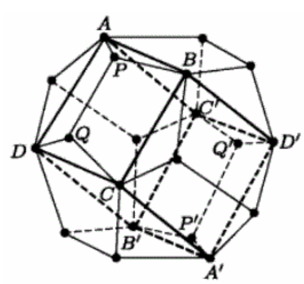
8. **证:** 首先可以说明题设的直平行六面体P中心在原点. 事实上, 平行于P的其中一组对面的平面与椭球面相交是椭圆, 点或者空集, 且对于椭圆的情形, 所有那些椭圆的中心都落在过E中

心的同一直线上. (这是与椭圆共轭直径类似的椭球面的仿射性质, 证明只需沿坐标轴伸缩的仿射坐标变换, 将E的方程变成圆球面方程，从而立即看出.) 这就说明P的三组对面中心连线的公共交点恰好是E的中心, 即坐标原点.

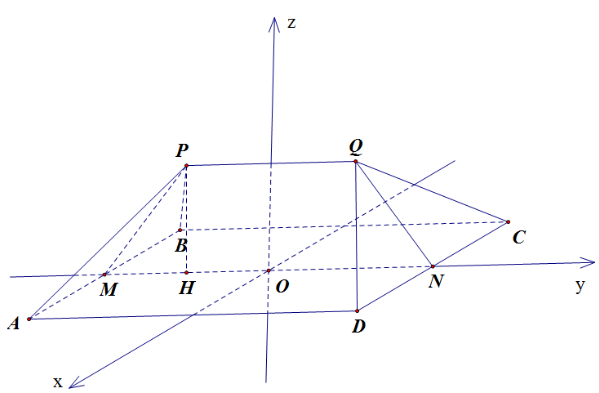
现在不改变坐标原点, 以平行于P的三组棱的方向为坐标轴, 建立新的单位直角坐标系. 在新坐标系中, E经过形如$(\pm\xi, \pm\eta, \pm\zeta)$的八个点(即$P$的顶点), 并且$E$的新方程是没有一次项的三元二次方程. 利用代入法, 可见E的新方程也没有交叉项, 所以E在新的单位直角坐标系中也呈标准形式.

因为$a > b > c > 0$, 以a为半径、中心在原点的球面S_a和E只交于两点. 注意到S_a在新坐标系中方程形式不变, 所以E在新坐标系中的方程，平方项系数有唯一的最小者(即分母中最大者), 于是它唯一对应的新坐标轴就是旧的x轴(或其反向). 同理, 另有唯一的新坐标轴是旧的z轴. 最后, 与它们同时垂直的新坐标轴就是旧的y轴. 根据新坐标系的选取, P的三组棱其实就平行于原先的坐标轴. 这就证明了题目的结论.

9. **解:** 正十二面体有如图所示的内接正方体$ABCD - A'B'C'D'$



其边长为$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, 而正十二面体是在正方体的各面上加上了一个“屋顶”, 这六个“屋顶”是全等的, 以$PQ - ABCD$为例.



以正方形$ABCD$的中心O为原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$分别为$x, y$轴正向, O 指向PQ中点为z轴正向. 设y轴与AB, CD中点分别为M, N, P在y轴上的投影为H, 则

$$HM = \sqrt{PM^2 - PH^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 - \left(\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}.$$

所以$P(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),Q(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 从而四棱锥$P-ABCD$的体积为$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^2=\frac{\sqrt{5}+3}{12}$, 四面体$PQCD$的体积是$(\overrightarrow{QP}\times\overrightarrow{QC})\cdot\overrightarrow{QB}=\frac{\sqrt{5}+1}{24}$, 故正四面体的体积为

$$\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^3+6\left(\frac{\sqrt{5}+3}{12}+\frac{\sqrt{5}+1}{24}\right)=\frac{7\sqrt{5}+15}{4}.$$