2019 秋经济学双学位线性代数 B 期中试题解答

2019 年 11 月 10 日

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分)。

(1)若$1,2,3,4,5,6$的排列$p_1p_2p_3 5 p_4p_5$是奇排列,则$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3p_4p_5)}=$ __1__.

(2)若$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 \\ c & 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, |B|=1$,则$|A|=$ __$ad-bc$__.

(3)设$\alpha=(1,0,-1), A=\alpha'\alpha, n$为正整数，则$\left|\mathrm{I}-A^n\right|=$ __$1-2^n$__.

(4)设三阶矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3), |A|=10, B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3, \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$,则$|B|=$ __20__.

(5)若n（$n>2$）阶矩阵$A=\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{pmatrix}$的秩为$n-1$，则$a=$ __$\dfrac{1}{1-n}$__.

(6)若α_1,α_2，α_3线性无关，而$3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$，$\alpha_1+t\alpha_2+2\alpha_3$线性相关，则$t=$ __-2__.

(7)若$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$,则$\mathrm{rank}(A'A)=$ __2__.

(8)设$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}, \mathrm{rank}(A^*)=1$,则$a=$ __-4__.

(9) A,B都是3阶矩阵, $|A|=3, |B|=2, |A^{-1}+B|=2$, 则 $|A+B^{-1}|=$ __3__.

(10)齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +5x_4 & +6x_5 & =0, \\ 2^2x_1 & +3^2x_2 & +4^2x_3 & +5^2x_4 & +6^2x_5 & =0, \\ 2^3x_1 & +3^3x_2 & +4^3x_3 & +5^3x_4 & +6^3x_5 & =0. \end{cases}$

基础解系向量个数 = __2__.

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)。

(1)若方程组 $\begin{cases} -x_2+2x_3=3, \\ 3x_2+tx_3=-9, \\ 8x_1+9x_2+10x_3=2, \end{cases}$ 有无穷多个解，则[A]

(A) $t=-6$ (B) $t=6$ (C) $t=-2$ (D) $t=2$

(2)设 A,B 是3阶矩阵, $|A^{-1}|=2, |B^{-1}|=3$, 则 $|A^*B^{-1}-A^{-1}B^*|=$[B]

(A) 36 (B) $\frac{1}{36}$ (C) -6 ((D)6

(3)设 $A=(a_{ij})_m$, E_{ij} 是 m 阶基本矩阵, $1\le i\le m, 1\le j\le m$, 则 $(E_{ij}A)(i,j)=$[C]

(A) a_{ii} (B) a_{ij} (C) a_{jj} (D) a_{ji}

(4)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维列向量组，A 是 $m\times n$ 矩阵则[A].

(A)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

(B)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

(C)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

(D)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

(5)设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则[B]

(A)当 $m>n$ 时, $|AB|\ne 0$ (B)当 $m>n$ 时, $|AB|=0$

(C)当 $m<n$ 时, $|AB|\ne 0$ (D)当 $m<n$ 时, $|AB|=0$

(6)设 A,B 是两个 n 阶矩阵，满足 $(AB)^2=E$, 则[D]成立。

(A) $AB=E$ 或 $AB=-E$ (B) $|A||B|=1$ (C) $AB=BA$ (D) $(BA)^2=E$。

(7)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$是$n$维向量组，$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=r$,则[B]不正确

(A)如果$r=n$,则任何n维向量都可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(B)如果$r=s$,任何n维向量都可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$唯一线性表示

(C)如果任何n维向量都可用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示，则$r=n$

(D)如果$r<n$,则存在n维向量不能用$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表示

(8) A,B,C均为n阶矩阵,若$AB=C$,且A满秩,则[C]

(A)矩阵C的行向量组与矩阵A的行向量组等价

(B)矩阵C的列向量组与矩阵A的列向量组等价

(C)矩阵C的行向量组与矩阵B的行向量组等价

(D)矩阵C的列向量组与矩阵B的列向量组等价

(9)设A,B是两个n阶矩阵,则[B]成立.

(A)如果A,B都可逆,则$AB=BA$

(B)如果AB是非零数量矩阵,则$AB=BA$

(C)如果$A^*B=BA^*$,则$AB=BA$

(D)如果$(AB)^2=A^2B^2$,则$AB=BA$

(10)当$B=$[A]时,$(0,1,-1)'$和$(1,0,2)'$构成$BX=0$的基础解系.

(A)$\begin{pmatrix}-2&1&1\\10&-5&-5\end{pmatrix}$ (B)$\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ (C)$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ (D)$\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&2\\0&1&1\end{pmatrix}$

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 10 分，满分为 50 分)

(1)(i)求n阶行列式$\begin{vmatrix}a+b&ab&\cdots&0&0\\1&a+b&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a+b&a\\0&0&\cdots&1&a+b\end{vmatrix}$.

(ii)求上述行列式当$a=2,b=1,n=10$时的值.

解(i)$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a+b & a \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}$.(递推公式3分)

$D_1=a+b, D_2=(a+b)^2-ab=a^2+2ab+b^2-ab=a^2+ab+b^2$.

我们要证$D_n=\sum_{i=0}^{n}a^ib^{n-i}=\begin{cases}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},\text{（2分）}\\(n+1)a^n.\text{（1分）}\end{cases}$

$n=1$时$D_1=a+b$,等式成立.

设等式当$n<k$时成立,则

$D_k=(a+b)D_{k-1}-abD_{k-2}$

$=(a+b)\sum_{i=0}^{k-1}a^ib^{k-1-i}-ab\sum_{i=0}^{k-2}a^ib^{k-2-i}$

$=\sum_{i=0}^{k-1}a^{i+1}b^{k-1-i}+\sum_{i=0}^{k-1}a^ib^{k-i}-\sum_{i=0}^{k-2}a^{i+1}b^{k-1-i}$

$=a^kb++\sum_{i=0}^{k-1}a^ib^{k-i}=\sum_{i=0}^{k}a^ib^{k-i}$,

即等式对于$n=k$也成立.故等式对于所有正整数成立.（证明2分）

(ii)$D_{10}=\dfrac{2^{11}-1^{11}}{2-1}=2047$.（2分）

(2)设3维列向量$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$满足

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3+2\gamma_1-\gamma_2=0,\\3\alpha_1-\alpha_2+\gamma_1-\gamma_3=0,\\-\alpha_2+\alpha_3-\gamma_2+\gamma_3=0.\end{cases}$$

已知$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=a$,求$|\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3|$.

解

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3+2\gamma_1-\gamma_2=0,(1)\\ 3\alpha_1-\alpha_2+\gamma_1-\gamma_3=0,(2)\\ -\alpha_2+\alpha_3-\gamma_2+\gamma_3=0.(3)\end{cases}$$

(2)+(3)

$$3\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3+\gamma_1-\gamma_2=0,(4)$$

$(1)-(4)$

$$-2\alpha_1+2\alpha_2+\gamma_1=0,$$

$$\begin{cases}\gamma_1=2\alpha_1-2\alpha_2,\\ \gamma_2=\alpha_1+\alpha_3+2\gamma_1=\alpha_1+\alpha_3+4\alpha_1-4\alpha_2=5\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3,\\ \gamma_3=\gamma_2+\alpha_2-\alpha_3=5\alpha_1-4\alpha_2+\alpha_3+\alpha_2-\alpha_3\\ \gamma_3==5\alpha_1,-3\alpha_2.\end{cases}$$（3分）

$$\left(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}2&5&5\\-2&-4&-3\\0&1&0\end{pmatrix}.$$（3分）

$$\begin{vmatrix}2&5&5\\-2&-4&-3\\0&1&0\end{vmatrix}=-(-6+10)=-4.$$（2分）

$$\left|\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\right|=\left|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right|(-4)=-4a.$$（2分）

(3)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+\alpha_{i+1},i=1,\cdots,s-1,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$.求向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$的秩.

解

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\beta_i=\alpha_i+\alpha_{i+1},i=1,\cdots,s-1,\beta_s=\alpha_s+\alpha_1$.判断$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是线性相关还是线性无关.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\0&0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&1\\1&0&0&\cdots&0&1\end{pmatrix},\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{s-1},\beta_s\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s\right)A.\text{(4分)}$$

$$|A|=1+(-1)^{s+1}=\begin{cases}0,\text{当s是偶数},\\2,\text{当s是奇数}.\end{cases}\text{(2分)}$$

当n是偶数,$|\mathrm{A}|=0,A_{11}=1,\mathrm{rank(A)}=\mathrm{s}-1,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关,$\left(\alpha_1,\alpha_2\alpha_3,\cdots,\alpha_{s-1},\alpha_s\right)$满秩,

$\mathrm{rank}\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{s-1},\beta_s\right)=\mathrm{rank}(A)=s-1$.(2分)

当n是奇数,$|A|=2,\mathrm{rank}(A)=\mathrm{s},\mathrm{rank}\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\cdots,\beta_{s-1},\beta_s\right)=\mathrm{rank}(A)=\mathrm{s}$.(2分)

(4)讨论当p,t为何值时,方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$$

无解,有解?有解时写出全部解.

解.

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & -2x_3 & +3x_4 & =0, \\ 2x_1 & +x_2 & -6x_3 & +4x_4 & =-1, \\ 3x_1 & +2x_2 & +px_3 & +7x_4 & =-1, \\ x_1 & -x_2 & -6x_3 & -x_4 & =t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix} = \mathrm{B}.$$（2分）

$t \neq -2$时无解;　　（1分）

$t = -2$时有解.　　（1分）

$t = -2$时,若$p = -8$,(3分)(特解1分，基础解系　　（2分）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4 - 1, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4 + 1. \end{cases}$$

令$x_3 = x_4 = 0$得特解$\xi_0 = (-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

导出组$\begin{cases} x_1 = 4x_3 - x_4, \\ x_2 = -2x_3 - 2x_4. \end{cases}$

令(x_3, x_4)=(1,0)和(0,1)得基础解系

$\eta_1 = (4,-2,1,0), \eta_2 = (-1,-20,1).$

全部解是

$\xi = \xi_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2, c_1, c_2$是任意常数.

$t = -2$时,若$p \neq -8$,　　（3分特解1分，基础解系 2 分）

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&3&0\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

特解$\xi_1=(-1,1,0,0)$,基础解系$\eta_3=(-1,-2,0,1)$,

全部解$\xi=\xi_1+c\eta_3$,c为任意常数.

(5)已知$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,$A^*X=A^{-1}+2X$,求$X$.$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

解

已知$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, $A^*X=A^{-1}+2X$, 求X.

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=2\times2=4\neq0$, A可逆, （2分）

$A(A^*X)=A(A^{-1}+2X)$与原矩阵方程同解.

$(AA^*)X)=E+2AX$,

$|A|EX=E+2AX$,(2分)

$4EX=E+2AX$,

$(4E-2A)X=E$, (1分)

$$\begin{pmatrix}2&-2&2&1&0&0\\2&2&-2&0&1&0\\-2&2&2&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\1&1&-1&0&\frac{1}{2}&0\\-1&1&1&0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\0&2&-2&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&2&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&1&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&-1&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{4}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&1&0&0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\0&0&1&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

$X=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$. （5分）

四、证明题(本题共 1 个小题，满分为 10 分) 。

设n个未知数的非齐次方程组(I):$AX=\beta$有解,$\mathrm{rank}(A)=r$.证明:

(1)(I)有$n-r+1$个线性无关的解;

(2)(I)的任意$n-r+2$个解都线性相关.

证明

(1)设(I)特解ξ_0,导出组基础解系$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$.$\xi_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关,否则线性相关,由于$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关,$\xi_0$可以由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性表出将是导出组的解,矛盾.故$\xi_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$线性无关. （3分）

$$\begin{cases}\xi_0=\xi_0,\\ \xi_1=\xi_0+\eta_1,\\ \vdots\\ \xi_{\mathrm{n-r+1}}=\xi_0+\eta_{n-r}.\end{cases} .A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\1&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\1&0&\cdots&1\end{pmatrix},|A|=1,\xi_0,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}\text{线性无关,故}$$

$\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_{n-r}$线性无关. （2分）

(2)设$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{\mathrm{n-r+2}}$是(I)的$n-r+2$个解.

$\zeta_i=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2+\cdots+c_{n-r}\eta_{n-r}$ （3分）

$=(1-c_1-c_2-\cdots-c_{n-r})\xi_0+c_1(\xi_0+\eta_1)+c_2(\xi_0+\eta_2)+\cdots+c_{n-r}(\xi_0+\eta_{n-r})$,

$i=1,2,\cdots,n-r+2>n-r+1$,

故$\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_{n-r+2}$线性相关. （2分）