线性代数 B 期中试题

______ 学院 ________ 系　姓名 ________ 学号_________ 分数______ **2017/11/12**

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。答案写在答题纸上）。

(1)若$1,2,3,4,5$的排列$p_1p_2p_3p_4p_5$是奇排列，则$(-1)^{\tau(p_2p_1p_5p_4p_3)}=$____。

(2)设A是三阶方阵，$|A|=3$,则$|(A^*)^{-1}-\frac{1}{2}A|=$___ 。

(3) 设矩阵$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 1\\ 2 & -1 & \lambda & 3\\ 1 & 10 & -6 & 0\end{pmatrix}$的秩是2，则$\lambda$=___。

(4)$\begin{vmatrix}3 & 2 & 4 & 5\\ 3^2 & 2^2 & 4^2 & 5^2\\ 3^3 & 2^3 & 4^3 & 5^3\\ 3^4 & 2^4 & 4^4 & 5^4\end{vmatrix}=$______。

(5)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$，则$|AA^*|=$_______。

(6)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$,则$A^{\mathrm{T}}B=$_________ 。

(7)设η_1,η_2,η_3线性无关，而$3\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+t\alpha_2+2\alpha_3$线性相关，则则$t=$ _________ 。

(8) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,则$A^{-1}=A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$,_____。

(9) A为n阶反对称矩阵,α为n维列向量,则$(A\alpha,\alpha)=$ __0__ 。

(10) A为3阶正交矩阵, $\alpha=(3,4,5)^{\mathrm{T}}$, 则$\|A\alpha\|=$__$\underline{5\sqrt{2}}$_____。

二、选择题(本题共10小题,每小题2分，满分20分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。答案写在答题纸上)。

(1)设A为n阶方阵，则$|kA|$=

(A)$k|A|$ (B)$|k||A|$ (C)$k^n|A|$ (D)$|k|^n|A|$ [ ]

(2)若方程组$\begin{cases}7x_1+8x_2+9x_3=0,\\ \quad\quad -x_2+2x_3=0,\\ \quad\quad 2x_2+tx_3=0,\end{cases}$存在非零解，则常数$t=$

(A)-4 (B)4 (C)-2 (D)2 [ ]

(3)设ξ_1=$(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0)^{\mathrm{T}}$, ξ_2=$(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0)^{\mathrm{T}}$, $\xi_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, $X=(1,1,1)^T$,

若$X=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$, 则$x_1+x_2+x_3=$

(A)$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B)0 (C) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) 1 [ ]

(4)若$\alpha_1=(0,0,c_1),\alpha_2=(0,1,c_2),\alpha_3=(1,-1,c_3),\alpha_4=(-1,1,c_4)(c_{1,}c_2,c_3,c_4$为任意常数),则下列向量组中必定线性相关的是[ ]

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (D) $\alpha_4,\alpha_2,\alpha_3$ [ ]

(5)设A是n阶矩阵， $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是一组n维向量，$\beta_i=A\alpha_i(i=1,2,\cdots,s)$, 则成立的是

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$\beta_1,\cdots,\beta_s$也线性无关

(B) $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r(\beta_1,\cdots,\beta_s)$

(C)如果A不可逆，则$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)>r(\beta_1,\cdots,\beta_s)$

(D)如果$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)>r(\beta_1,\cdots,\beta_s)$，则$A$不可逆 [ ]

(6)若方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必定成立

(A)$BAC=E$ (B)$ACB=E$ (C) $CBA=E$ (D)$BCA=E$ [ ]

(7) 设$(AB)^2=E$, 则下列判断中不成立的是

(A) $AB=E$ 或$AB=-E$ (B) $|A||B|=\pm1$ (C)AB可逆 (D)$|A|\neq 0$ [ ]

(8) $m<n$时非齐次方程组$A_{m\times n}X=\beta$

(A)有唯一解　　(B)有无穷个解　(C)无解　　　(D)有无穷个解或无解　　[　]

(9)设$A=\begin{pmatrix}1&2&4\\2&4&8\\3&6&10\end{pmatrix}$,则$r(AA^{\mathrm{T}})=$

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)3　　　　[　]

(10)设n 阶矩阵A 满足$(A\alpha,A\beta)=(\alpha,\beta)\forall\alpha,\beta,$ 则A 是

(A)对称矩阵　(B)反对称矩阵　(C)正交矩阵　(D)对角矩阵　　　[　]

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 10 分，满分为 50 分) (解答写在答题纸上)

(1)计算行列式$\begin{vmatrix}3&a&a&a\\a&3&a&a\\a&a&3&a\\a&a&a&3\end{vmatrix}$。

(2)求下列向量组的一个极大线性无关组和秩,并且用它表示其余的向量:

$\alpha_1=(2,1,3,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(3,-1,2,0)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,3,,4,-2)^{\mathrm{T}},\alpha_4=(4,-3,1,1)^{\mathrm{T}}$。

(3) 求齐次方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+3x_4+7x_5=0,\\3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0,\\5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-1x_5=0.\end{cases}$的一个基础解系。

(4)求$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$的逆矩阵$A^{-1}$和伴随矩阵$A^*$。

(5)求与向量组$\alpha_1=(1,0,1,1),\alpha_2=(1,1,1,-1),\alpha_3=(1,2,3,1)$等价的单位正交向量组。

四、证明题(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分为 10 分) (解答写在答题纸上)

(1)证明：若A是$n>1$阶可逆矩阵，则其伴随矩阵A^*满足$\left(A^*\right)^*=|A|^{n-2}A$。

(2)证明：若n阶实矩阵$A=(a_{ij})_n$满足：对于任意n维实列向量α,β都有

$$(A\alpha,\beta)=-(\alpha,A\beta),$$

则A是反对称矩阵。