2019秋 Linear Algebra 期中试题 之参考解答

1. (16分) 求数域$\mathbb{K}$上非齐次线性方程组的解集.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9, \\ -x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 10, \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

解. 可用多种办法求解. 唯一解为: $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 2)$. (此即教材P2, 例1.) □

2. (16分) 设$D = |(a_{ij})_{7\times 7}|$为7阶行列式. 若$D$的每一元素$a_{ij}$均与其代数余子式$A_{ij}$相等, 则$D$的秩可能是多少? 证明你的结论.

解. 0(若D所有元素均为0) 或7 (若D有非零元素, 此时行列式严格大于0). □

3. (16分) 若$\mathbb{K}^n$中任一向量均可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$线性表出, 则$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是否一定线性无关? 证明你的结论.

解. (此即教材Ex3.4.6.) 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的秩是$n$, 故必然线性无关. □

4. (16分) 设复数域上的齐次线性方程组$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, 1 \le i \le s$在复数域上有非零解, 且事实上所有的系数$a_{ij}$均为有理数. 若把$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, 1 \le i \le s$看作有理数域上的齐次线性方程组, 则这个齐次线性方程组在有理数域上是否一定有非零解? 举出反例或证明你的结论.

解. 在有理数域上一定有非零解. 设该线性方程组的系数矩阵的秩为r. 若$r = n$, 则该线性方程组与一个n个方程构成的方程组同解, 且这个n个方程构成的方程组的系数矩阵的行列式不为零. 由Cramer法则, 当看作复数域上的矩阵时在复数域上仅有零解, 矛盾, 故$r < n$. 从而若看作有理数域上的矩阵时在有理数域上必有非零解. □

5. (12分) $A = (a_{ij})_{n\times n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$是个对称的方阵, 即对所有的$i, j$, 有$a_{ij} = a_{ji}$. 若$\mathrm{rank}(A) = n - 1$, 是否一定可以找到某个$i \in [n]$, 使得在$A$中去掉第$i$行及第$i$列后得到的$n-1$阶方阵是满秩的(即秩为$n-1$)? 举出反例或证明你的结论.

解. 是的. 事实上, 设去掉第i行后, 其余的$n-1$行是线性无关的. 令这$n-1$行构成的行满秩矩阵为$B = (B_1, \cdots, B_n)$. 往证B去掉第i列后得到的$n-1$阶方阵是满秩的. 由于B的列秩是$n-1$, 这等价于证明B_i可以被其余的列向量线性表出. 若$\alpha_i = \sum_{j\ne i} k_j\alpha_j$, 其中$\alpha_j$为$A$的各行, 由$A$的对称性$B_j$可看作$\alpha_j$的缩短, 故亦有$B_i = \sum_{j\ne i} k_j B_j$. □

6. (12分) 设$A = (a_{ij})_{10\times 10} \in \mathbb{K}^{10\times 10}$, 其中$a_{ij} = i + j$. 考虑$f(x) = |xA + I_{10}|$. 求$f'(0)$. (提示: 一般地, 若$g(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$, 则$g'(0) = b_1$.)

解. $f'(0)$即$f(x)$关于x的1次项系数, 也就是$\prod_{i=1}^n (a_{ii}x + 1)$的1次项系数($f(x)$行列式的$n!$项中除了$\prod_{i=1}^n (a_{ii}x + 1)$以外的所有项在展开以后其最低次数至少为2). 由此易见$f'(0) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = n(n+1) = n^2 + n$. □

7. (12分) 计算以下行列式D: D是以下的15阶行列式. 注意到$\{1,2,3,4\}$共有15个非空子集, 将这15个非空子集按照任意一种顺序排成一列得到$S_1, S_2, \ldots, S_{15}$. D中(i,j)位置的元素a_{ij}即:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & 当S_i \cap S_j \neq \emptyset; \\ 0, & 当S_i \cap S_j = \emptyset. \end{cases}$$

解. 一般地, 令D_n表示$\{1, 2, \cdots, n\}$的$(2^n - 1)$个非空子集按照所述规则导出的$(2^n - 1)$级行列式. 若将这$(2^n - 1)$个非空子集的某种顺序作一对换, 对应的行列式两行对换, 两列也互换, 行列式不变. 故不妨设不含有n的那些子集(共$(2^{n-1} - 1)$个)排在最前, 含有n但有别于$\{n\}$的那些子集按照前面那些子集的顺序排在其后(共2^{n-1}个, 每个这类子集去掉n之后对应前面的一个子集)排在其后, 而$S_{(2^n-1)} = \{n\}$排在最后. 考虑这三类集合之间的相交关系(不含有n的那些子集、含有n但有别于$\{n\}$的那些子集、$\{n\}$), 即知D_n的结构:

$$D_n = \begin{vmatrix} & & 0 \\ D_{n-1} & D_{n-1} & \vdots \\ & & 0 \\ & & 0 \\ D_{n-1} & O & \vdots \\ & & 0 \\ 0 \ \cdots \ 0 & 0 \ \cdots \ 0 & 1 \end{vmatrix}_{(2^n-1)\times(2^n-1)}.$$

利用Laplace定理, 易见$D_n = -D_{n-1}^2$, 从而归纳得$D = D_{15} = -1$.

□