线性代数期中考试

本试卷中定义记号 $A_{n\times m}$ 为 $n\times m$ 阶实矩阵, I_n 为 $n\times n$ 阶单位矩阵。

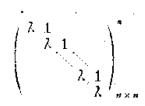
1.(15分)

求齐次线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

写出解空间的一组基,并正交化这组基。

2.(15分) 求下面矩阵乘法



3.(15分) 求下面行列式值

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos2\theta_1 & \cdots & \cos(n-1)\theta_1 \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos2\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_2 \\ & & & & & \\ 1 & \cos\theta_n & \cos2\theta_n & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix}$$

4. (8分) 求下面矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

 $5.(15分) A_{n\times n}$ 为可逆实矩阵。证明A可以分解成A = TB,其中T是正交矩阵,B是上三角矩阵,并且B的主对角元都为正数,证明这种分解是唯一的。

6. 设 $A_{n\times n}$ 为反对称矩阵,即 $A^T = -A$,亦即A形如.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

a.(5分) 证明如果n为奇数阶,则 $\det A = 0$

b.(10分) 证明如果n为偶数阶,证明det $A=(p_n(A))^2$,其中 $p_n(A)$ 是关于 a_{ij} 的n/2次多项式。

c.(附加题5分) 证明反对称矩阵的特征根要么为0, 要么为纯虚数。

- 7. 若n阶矩阵A满足 $A^2 = A$, 则称A为幂等方阵。
- a.(4分)求出所有2阶幂等方阵。
- b. (8分)证明n阶幂等方阵的秩等于它的迹。
 - 8. (5分) 给定 $A_{m \times n}$ 和 $B_{n \times m}$ 两个矩阵,证明

$$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA)$$