赛艇先生收集

19 春 线性代数 B 方新贵 期末

线性代数期终考试试题（B卷）.

（2018-2019 春季学期．经济学院等）

一．计算下列行列式

(1). $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$；(2) $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$． (10分).

二．设 V 是数域 F 上 n 维线性空间，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基。令 $\beta_k=\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k$，$k=1,\cdots,n$.

(1) 证明 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是 V 的一组基；

(2) 对于 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$，求 α 在基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 下的坐标。 (16分).

三．设 F 是个数域，$V=M_2(F)$，在 V 中取矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，定义

$$C(A)=\{X\in V \mid AX=XA\}.$$

(1). 证明 $C(A)$ 是 V 的子空间；

(2) 求 $C(A)$ 的维数与一组基，并说明理由。 (16分)

四．设 $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ 为实对称矩阵，其中 $A_1=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$，求正交矩阵 T，使得 $T'AT$ 为对角矩阵。（要求写出计算过程和对角矩阵）． (18分).

五. 设V是4维欧氏空间，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$是V的一组基，对于 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 \in V$，定义变换 $\sigma: \alpha \mapsto \sigma(\alpha) = x_2\alpha_1 + x_1\alpha_2 + x_4\alpha_3 + x_3\alpha_4$。

(1). 证明σ是V上的线性变换；

(2) 判断σ在该基下的矩阵能否对角化，并证明你的结论。

(3). 判断σ是否是正交变换，并说明理由。 (16分).

六. 设A是n阶半正定矩阵，证明

(1) $I+A$ 是正定矩阵；

(2). $|I+A| \geq 1$ 且等号成立的充要条件是 $A=0$。 (12分).

七. 设 $Q(x_1, x_2, x_3) = X'AX$ 是3元满秩实二次型，

设 $W = \{\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha' A \alpha = 0\}$。

证明W是$\mathbb{R}^3$的子空间 $\Longleftrightarrow$ $W = \{0\}$。 (12分).