

北京大学数学科学学院模拟期中考 非数学组  
考试时间：11月4日 9:30-11:10  
考试总分：常规题 100 分 + 附加题 30 分  
姓名：\_\_\_\_\_ 学号：\_\_\_\_\_

常规题

1. 求下列极限的值：

(1) (10 分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(2) (10 分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x + \frac{1}{x} \right) \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) \cdots \left( x^n + \frac{1}{x^n} \right) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x^2}{2^2} \cdots \sin \frac{x^n}{2^n} \quad (n \text{ 为给定正整数})$

2. (10 分) 数列  $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$  是否存在极限？若存在，试证明之。

3. (10 分) 设  $f(x), g(x)$  恒大于 0，且在  $x = x_0$  处均不连续，问  $h(x) = f(x)g(x)$  是否在  $x = x_0$  处一定不连续？试给出证明或反例。

4. (15 分) 设  $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$ ，计算下式的值

$$\left( \frac{y''}{y'} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{y''}{y'} \right)^2$$

5. (10 分) 设  $x, y > 0$ ，证明不等式： $\sqrt{xy} \leq \frac{x-y}{\ln x - \ln y} \leq \frac{x+y}{2}$

6. (10 分) 计算不定积分  $I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

7. (10 分) 计算下述行列式的值：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$$

8. 已知  $A$  为  $3 \times 3$  的矩阵，且元素均为 1 或  $-1$

(1) (5 分) 证明： $|A|$  为偶数

(2) (10 分) 试求  $|A|$  的最大值

附加题

9. (15 分) 已知向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$  线性无关，证明：集合  $A = \{\alpha_1 + k\alpha_2 + \cdots + k^{n-1}\alpha_n \mid k \in \mathbb{Z}\}$  中任意  $n$  个不同的向量线性无关。

10. (15 分) 定义在区间  $I$  上的函数  $f(x)$  满足  $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ ，证明： $f(x)$  为常数函数。