线性代数 (B）期中模拟
2022-2023 年度第一学期

命题：一只很想吐槽这张卷子的助教

1 (10 分)

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2333 & 2233 & 2223 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix},$$

A_{ij} 是 A 的代数余子式。计算 $203A_{21} + 298A_{22} + 399A_{23}$.

2 (10 分)

计算行列式

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n + a_nb_n \end{vmatrix}$$

3 (20 分)

求解方程组，写出解集的结构，并判断解集是否为线性空间。

$$\begin{cases} 17x_1 + 34x_2 + 0x_3 - 68x_4 = 119, \\ 7x_1 + 14x_2 + 20x_3 + 32x_4 = 9, \\ 7x_1 + 14x_2 + 30x_3 + 62x_4 = -11. \end{cases}$$

4 (20 分)

(i) 求 K^3 线性子空间 $<\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4>$ 的一组基。
(ii) α_4 何时可被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？表出是否唯一？

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 2b \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5 (10 分)

计算 A 的行列式，并找出一个非零的 3×3 矩阵 P 使得 PA 为简化行阶梯型矩阵，其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 1 & 0 \end{bmatrix}$$

6 (10 分, 二选一)

6.1

设 A 的列向量组为齐次线性方程组 $Px = 0$ 的一个基础解系。求证：B 的列向量组也是基础解系当且仅当存在行列式不为零的方阵 C 使得 $B = A \cdot C$。

6.2

设 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 与 $B = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$，求证：
(i.) 若 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_s\} \cong \{\beta_1, \cdots, \beta_s\}$ 对任何 $1 \leq s \leq n$ 成立，则存在上三角矩阵 T 使得 $A = B \cdot T$.
(ii.) 若 A 是列满秩矩阵，则 T 的对角线元素非零。

7 (10 分，六选二)

7.1

$$\left|\left(\frac{1}{1+x_iy_j}\right)\right|_{n\times n}$$

7.2

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}, y\neq z$$

7.3

$$\begin{vmatrix} A_{n\times n} & x \\ y' & z \end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} = z\cdot|A|-\sum_{1\le i,j\le n} x_iy_jA_{ij}$$

7.4

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix},\quad P_{ij}=\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix}$$

求证：

$$P_{1j}P_{23}+P_{2j}P_{31}+P_{3j}P_{12}=0.$$

7.5

$$\begin{vmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

其中 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$.

7.6

$$\left|(a_i+b_j)^3\right|_{4\times 4}$$

8 (10 分，四选一)

8.1

求证：

(i.) 若 $rank(A_{s\times n})=r$，则存在列满秩矩阵 $B_{s\times r}$ 与行满秩矩阵 $C_{r\times n}$，使得

$$A=B\cdot C.$$

(ii.) 若 $rank(A_{s\times n})=r$，则存在 r 个秩为 1 的矩阵 $A_1,\cdots,A_r$, 使得

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_r.$$

8.2

A 是 n 阶方阵。

(i.) 求证：$r_k:=rank(A^k)$ 是单调递减的，即

$$r_{k+1}\le r_k,\quad k=1,2,\cdots$$

(ii.) 记 $W_k=\left\{x\in K^n|A^kx=0\right\}$. 若 $r_k=r_{k+1}$，求证 $W_k=W_{k+1}=W_{k+2}$.

(iii.) 求证：存在正整数 k, 使得

$$r_1>r_2>\cdots>r_k=r_{k+1}=\cdots=r_{k+j}=\cdots$$

8.3

称 $A\begin{pmatrix}1,\cdots,k\\1,\cdots,k\end{pmatrix}$ 为方阵 A 的第 k 个顺序主子式。求证：若 A 的行列式不为零，则存在 P 为若干个 $P(i,j)$ 型初等矩阵的乘积，使得 PA 的所有顺序主子式均非零。

8.4

设 $A_{s\times n}B_{n\times m}\cdot y=0$ 的一个基础解系为 $\{y_1,\cdots,y_s\}$.
设 $B_{n\times m}\cdot y=0$ 的一个基础解系为 $\{\eta_1,\cdots,\eta_u\}$.
取 $\{By_{i_1},\cdots,By_{i_t}\}$ 为 $\{By_1,\cdots,By_s\}$ 的一个极大线性无关组.

(i.) 求证：$\{y_1,\cdots,y_s\}$ 可以被 $\{y_{i_1},\cdots,y_{i_t},\eta_1,\cdots,\eta_u\}$ 线性表出.

(ii.) 求证：

$$m-rank(AB)\le(n-rank(A))+(m-rank(B)).$$