北京大学线性代数 B 期中试题

(2022-2023学年第一学期)

1. (10分)

(a) 求解下面方程组。

(b) 求出方程组增广矩阵列向量组的一组极大无关组。

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & +4x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ -x_1 & -5x_2 & + & 4x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & +7x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

2. (15分)求下面行列式

a、

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & x \\ 2 & 3 & x & 1 \\ 3 & x & 1 & 2 \\ x & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

b、

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}.$$

3. (20分) 设行列式

$$\begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{21} & \cdots & \zeta_{n1} \\ \zeta_{12} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_{1n} & \zeta_{2n} & \cdots & \zeta_{nn} \end{vmatrix}$$

不为零。

（a）、证明满足下面方程组的未知量x_{ijl}唯一

$$\zeta_{jt}\zeta_{lt} = \sum_{i=1}^{n} x_{ijl}\zeta_{it}, 1 \le j,l,t \le n.$$

（b）、求出x_{ijl}的值，$1 \le i,j,l \le n.$

4. (15分) 令矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & 1 & a_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & b_{12} & b_{13}\\ 0 & 1 & b_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1、求矩阵A,B的代数余子式$A_{ij}, B_{ij}, 1\le i,j\le 3.$

2、定义新矩阵

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}, B^*=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{21} & B_{31}\\ B_{12} & B_{22} & B_{32}\\ B_{13} & A_{23} & B_{33}\end{pmatrix}.$$

求：A^*B^*AB和$B^*B^*A^*BABA^*B^*AB$。

5. (15分) 设n为正整数，数域K上n元非齐次线性方程组$AX=\beta(\beta\neq 0)$有解，且其系数矩阵A的秩满足$1\le r(A)<n$，证明:必存在$n-r(A)+1$个线性无关的解向量$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_{n-r(A)+1}$，使得方程组$AX=\beta$的每个解都是这$n-r(A)+1$个解向量的线性组合.

6. （15分）设A为3×2矩阵，B为2×3矩阵，已知

$$AB=\begin{bmatrix}8 & 2 & -2\\ 2 & 5 & 4\\ -2 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

a、求矩阵A,B的秩。

b、求BA。

7. (10分) 定义正整数集合$\mathbb{Z}^+$上取值于数域k的函数$f_1,\cdots,f_r$. 证明：不存在一组非零的数$\ell_1,\cdots,\ell_r$使得$\ell_1f_1+\ell_2f_2+\cdots+\ell_rf_r$为零函数的充要条件是存在$i_1,i_2,\cdots,i_r\in\mathbb{Z}^+$ 使得下面矩阵的秩为r

$$\begin{pmatrix}f_1(i_1) & f_1(i_2) & \cdots & f_1(i_r)\\ f_2(i_1) & f_2(i_2) & \cdots & f_r(i_r)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ f_r(i_1) & f_r(i_2) & \cdots & f_r(i_r)\end{pmatrix}.$$