2022模拟期中考试数学组

一、(20 分)

(1)求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$；

(2)求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$；

(3)求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$；

(4)已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$以及$p_k>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$，求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

二、(20 分)

设K是一个数域，a_0,a_1,$\cdots$,$a_{n-1}\in K$

(1)计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

(2)证明：方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$至多有$n$个$K$中的解。

(3)用数学归纳法证明：

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 & a_{n-3} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix} = x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

(4)证明：至多只有n个$x\in K$，使得下述方程组无解：

$$\begin{cases} xt_1 + a_0t_n = 1 \\ -t_1 + xt_2 + a_1t_n = 0 \\ -t_2 + xt_3 + a_2t_n = 0 \\ \cdots \\ -t_{n-2} + xt_{n-1} + a_{n-2}t_n = 0 \\ -t_{n-1} + (x+a_{n-1})t_n = 0 \end{cases}$$

三、(15 分)

求直线$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{-1}$绕$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-2}$旋转所得的圆锥面方程。

四、(15 分)

给定向量组α_1,α_2,$\cdots$,α_{s+1}，满足$\alpha_{s+1}\neq 0$.

试证明：如果对任意一组实数t_1,t_2,$\cdots$,t_s，向量组β_1,β_2,$\cdots$,β_s线性无关，这里$\beta_i=\alpha_i+t_i\alpha_{s+1}(i=1,2,\cdots,s)$，那么$\alpha_1$,$\alpha_2$,$\cdots$,$\alpha_{s+1}$必然线性无关。

五、(10 分)

设A,B,C,P是空间中四点，令$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{OP}$.

证明：A,B,C,P四点共面等价于$(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})+(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})=(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$

六、(10 分)

设函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}_{\geq 0}$满足：对任意$\varepsilon>0$, $f^{-1}((\varepsilon,+\infty))$是有限集。

(1)证明：对任意非空开区间$(\alpha,\beta)\subseteq[0,1]$，$f$在$(\alpha,\beta)$上至少有一个零点；

(2)证明：f只在f的零点处连续。

七、(5 分)

对于一个$\mathbb{R}$上的有界函数f，定义其上的等距变换如下：

$$f_c(y)=\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|$$

若f还在$\mathbb{R}$上连续，是否一定存在一个开区间(a,b)，使得f_c在(a,b)上连续？

八、(5 分)

设K是数域，给定2023个K中的元素a_1,a_2,$\cdots$,a_{2023}。若2022个K上2021次的多项式$f_i(1\leq i\leq 2022)$使得如下方程组有唯一解$(x_1,x_2,\cdots,x_{2022})$，试证明：$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{2022}$与这些多项式的选取无关。

$$\begin{cases}
f_1(a_1)x_1+ & f_1(a_2)x_2+ & \cdots+ & f_1(a_{2022})x_{2022}=f_1(a_{2023})\\
f_2(a_1)x_1+ & f_2(a_2)x_2+ & \cdots+ & f_2(a_{2022})x_{2022}=f_2(a_{2023})\\
 & & \cdots & \\
f_{2022}(a_1)x_1+ & f_{2022}(a_2)x_2+ & \cdots+ & f_{2022}(a_{2022})x_{2022}=f_{2022}(a_{2023})
\end{cases}$$