线性代数B期中考试 (信科2019年秋)

试卷共四个大题, 满分100分. 若非特殊说明, 设K是一个数域.

1. 设线性方程组$AX=\beta$的通解是

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix},\quad k_1,\,k_2\in K.$$

(1) (10分) 设系数矩阵A是秩为r的$s\times n$矩阵. 给出s,n,r的取值范围.

(2) (10分) 若

$$\beta=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$

给出一个可能的矩阵A.

2. 对任意正整数$n\geq 2$, 考虑以下n级矩阵

$$A_n \xlongequal{\text{定义}} \begin{bmatrix}1&1&0&0&\cdots&0&0\\1&3&2&0&\cdots&0&0\\0&2&5&3&\cdots&0&0\\0&0&3&7&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&2n-3&n-1\\0&0&0&0&\cdots&n-1&2n-1\end{bmatrix},$$

即主对角线上元素为奇数列$1,3,5,7,\ldots,2n-3,2n-1$, 主对角线两边元素均为整数列$1,2,3,\ldots,n-1$, 其余元素为0.

(1) (10分) 计算$|A_2|$和$|A_3|$并证明

$$|A_n|=(2n-1)|A_{n-1}|-(n-1)^2|A_{n-2}|.$$

(2) (10分) 利用以上公式计算$|A_4|$和$|A_5|$, 然后猜测并证明$|A_n|$的通项公式.

3. 设V和W是n维向量空间K^n中的两个线性子空间. 考虑以下K^n子集

$$V+W\xlongequal{\text{定义}}\{\alpha+\beta\in K^n\,|\,\alpha\in V,\beta\in W\}\subseteq K^n.$$

另考虑V和W的交集$V\cap W\subseteq K^n$.

(1) (5分) 证明$V+W$和$V\cap W$都是K^n的线性子空间.

(2) (10分) 设$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$是$V\cap W$的一个基. 用基的存在性的证明方法，可将$\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$分别扩充为V的一个基$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-t},\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$和W的一个基$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s-t},\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$. 证明向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r-t},\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{s-t},\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_t$$

线性无关.

(3) (5分) 证明以下维数关系

$$\dim(V+W)+\dim(V\cap W)=\dim V+\dim W.$$

(4) (10分) 在K^5中考虑$V = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$和$W = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, 其中

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \beta_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

分别给出$V + W$和$V \cap W$的一个基.

4. 设$A = (a_{ij})$是K上n级矩阵. 定义矩阵A的迹(trace)为

$$\operatorname{tr} A \xlongequal{\text{定义}} a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii},$$

即A的主对角线上元素之和.

(1) (10分) 设A和B是两个n级矩阵. 证明$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

(2) (10分) 找三个2级矩阵A, B, C, 使得$\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(ACB)$.

(3) (10分) 当$K = \mathbb{R}$时, 证明对任意n级实矩阵A, 有$\operatorname{tr}(A^T A) \geq 0$. 等号何时成立?