2022模拟期中考试非数学组答案

一、

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(x-1)e^x+1}{3x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(e^x)}{6x}=\dfrac{1}{6}$

(2)利用$a<(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}<2^{\frac{1}{x}}a$和夹逼准则可知：

$$\lim_{x\to+\infty}(a^x+b^x)^{\frac{1}{x}}=a$$

二、

由函数的单调性，容易看出方程有唯一实根，设为x_0. 注意到$|x_{n+1}-x_0|=|\varepsilon\sin x_n-\varepsilon\sin x_0|<\varepsilon|2\sin\dfrac{x_n-x_0}{2}\cos\dfrac{x_n+x_0}{2}|\le\varepsilon|x_n-x_0|$，结合$0<\varepsilon<1$可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n-x_0=0$，即所求极限为$x_0$.

三、

存在，如$x_n=(-1)^n$，　$y_n=(-1)^{n-1}$，则有$\{\min\{x_n,y_n\}\}=-1$.

四、

两边对x求导，可知$(y^2+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x^3y$，也就是$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2x^3y}{y^2+1}$.

继续求导，得$2y(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2+(y^2+1)\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=6xy+2x^3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，整理得：$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{x^2y(4(y^2+1)^2-6x^4(1-y^2))}{(y^2+1)^3}$

五、

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}=\tan x-\cot x+c$$

六、

(1) $\begin{vmatrix}-2&3&1\\503&201&298\\5&2&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&3&1\\3&1&-2\\5&2&3\end{vmatrix}=-70$

(2) $\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$

$=(a+1)\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$

$=(a+1)\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 \\ 1 & a+1 & a \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$

随后逐步利用递推，可得

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + a^5$$

七、

(1)注意到$(I - A)(I + A + \cdots + a^{n-1}) = I - A^n = I$

(2)注意到

$$\begin{aligned}(I_n - BA)(I_n + B(I_m - AB)^{-1}A) &= I_n - BA + B(I_m - AB)^{-1}A - BAB(I_m - AB)^{-1}A \\ &= I_n - B(I_m - (I_m - AB)^{-1} + AB(I_m - AB)^{-1})A \\ &= I_n - (B(I_m - (I_m - AB)(I_m - AB)^{-1})A) \\ &= I_n\end{aligned}$$

八、

设$f_i = (x+i)^3 = c_{i,4}x^3 + c_{i,3}x^2 + c_{i,2}x + c_{i,1}$，注意到

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_4) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_4(a_1) & \cdots & f_4(a_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{4,1} & \cdots & c_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix}$$

这里$\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{4,1} & \cdots & c_{4,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 1^2 & 1^1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2^1 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3^1 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4^1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$满秩。又由克拉默法则，在求解的过程中$f$的系数形成的矩阵被消掉，可知：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 5^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 5^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1^3 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}} = -1，同理，x_2 = 4, \quad x_3 = -6, \quad x_4 = 4.$$