2018-2019 秋季学期经济学双学位线性代数 B 期末试题解答

______ 学院 ________ 系　姓名 ________ 学号________ 分数______ 2019/01/20

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号。

一、填空题（本题共 10 个小题,每小题 2 分，满分 20 分。答案写在答题纸上）。

(1)α,β都是3维列向量,$\alpha\beta^{\mathrm{T}}$相似于$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=$ ___2___.

(2)A是3阶不可逆矩阵, 它的特征值互不相等, 则$r(A)=$ ___2___.

(3)$\boldsymbol{D}$是$\mathbf{R}^{\mathrm{R}}$的子空间$V=<\cos x,\sin x>$上的求导映射, $\boldsymbol{D}^2$的行列式= ___$-E_2$___.

(4)x^2+2x-1在基$\dfrac{(x-1)^i}{i!},i=0,1,2$下的坐标是 ___$(2,4,2)^{\mathrm{T}}$___.

(5)若A为实对称矩阵, $\alpha=(1,-1,2)$与$\beta=(1,1,a)$分别是属于特征值1与2的特征向量, 则
$\|A(\alpha+\beta)\|=$ ___$\sqrt{14}$___.

(6)若A是3阶正交矩阵, $\alpha=(3,4,5)^{\mathrm{T}}$是$A$的一个特征向量，则$2A^2\alpha=$ ___$(6,8,10)^{\mathrm{T}}$___.

(7)二次型$(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)^2$的符号差为 ___1___.

(8)负定二次型$f(x)=-5x^2-6y^2-pz^2+4xy+4xz$的系数$p$的取值范围是 ___$p>12/13$___.

(9)线性空间$V=\mathbf{R}^+$，数域$F=\mathbf{R}$,加法与数量乘法分别定义为$a\oplus b=ab,\forall a,b\in\mathbf{R}^+$,
k e $a=a^k,\forall a\in\mathbf{R}^+,k\in\mathbf{R}$.正数$c$在基2下的坐标为$x$,则$c$在基3下的坐标是 ___$(\log_3 2)x$___.

(10)线性空间$\mathbf{R}[x]_5$的以$x=1$为二重根的所有多项式构成的子空间的维数是___2___.

二、选择题(本题共 10 个小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.答案写在答题纸上)。

(1)设A为n阶实反对称矩阵，则 [D]

(A) A的特征值都是非实数；　(B) A 的特征值都是实数;

(C) A^2的特征值都是负数；　(D) A^2的特征值都是非正实数；

(2)设A是正交矩阵，则 [C]

(A) A的特征值是1；　(B) A的特征值是-1;

(C) 当$|A|=-1$时, -1是 A的一个特征值;　(D)当$|A|=-1$时,1是 A的一个特征值.

(3) n阶矩阵A与对角矩阵相似的充分必要条件是 [B]

(A)A 有 n 个互不相同的特征值； (B)A 有 n 个线性无关的特征向量；

(C)A 有 n 个互不相同的特征向量； (D)A 有 n 个两两正交的特征向量.

(4)矩阵A和B相似的充分必要条件是 [B]

(A)存在可逆矩阵P和Q使得$PAQ=B$;(B)存在可逆矩阵P, 使得$P^{-1}AP=B$;

(C)存在可逆矩阵P,使得$P^{\mathrm{T}}AP=B$; (D)$r(A)=r(B)$.

(5)A是4阶实对称矩阵,$A^2+A=0$, $r(A)=3$, 则A相似于 [D]

(A) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (B) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$;

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

(6)实二次型 [C]

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_n+a_nx_1)^2$$

正定的充分必要条件是

(A)$a_1a_2\cdots a_n=(-1)^n$;(B)$a_1a_2\cdots a_n=(-1)^{n-1}$;

(C)$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$;(D)$a_1a_2\cdots a_n\neq(-1)^{n-1}$.

(7)设A是正定矩阵, 则 [A]

(A)$|A+E|>1$; (B)$|A+E|<1$; (C)$|A+E|=1$; (D)$|A-E|<1$.

(8)在$K[x]_3$中取基$\prod\limits_{1\le j\le 3,j\neq i}\dfrac{x-j}{i-j},i=1,2,3$. $p(x)=2x+1$在这个基下的坐标是 [A]

(A)$(3,5,7)^{\mathrm{T}}$; (B)$(3,7,5)^{\mathrm{T}}$; (C)$(5,7,3)^{\mathrm{T}}$; (D)$(5,3,7)^{\mathrm{T}}$.

(9)$\mathbf{R}[x]_3$中的基$1, x, x^2$到$1, (x-2), (x-2)^2$的过渡矩阵P是 [B]

$$\text{(A)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(B)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(C)}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(D)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(10)设$\boldsymbol{M}$是$\mathbf{R}[\mathrm{x}]_3$到$\mathbf{R}[x]_4$线性映射$\boldsymbol{M}p(x) = xp(x)$, $\boldsymbol{D}$是$\mathbf{R}[x]_4$到$\mathbf{R}[x]_3$的线性映射$\boldsymbol{D}p(x) = p'(x)$，
则$\boldsymbol{DM}$在基$1, x, x^2$下的矩阵是 [D]

$$\text{(A)}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \ \text{(B)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \ \text{(C)}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ \text{(D)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

三、计算题(本题共 5 个小题，每个小题 10 分，满分为 50 分) (解答写在答题纸上)

(1)设$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$可逆,$\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$是$A^*$的属于特征值$\lambda$的特征向量,求$a,b,\lambda$.

解　A可逆,$|A|\neq 0, AA^*=|A|E,|AA^*|=|A||A^*|=|A|^3,|A^*|=|A|^2\neq 0$,

A^*可逆,

$\lambda\neq 0$**(1分).**

$A^*\alpha=\lambda\alpha, AA^*\alpha=\lambda A\alpha$,

$A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$**(3分).**

$$\begin{cases}3+b=\frac{|A|}{\lambda}, & (1)\\ 2+2b=\frac{|A|}{\lambda}b, & (2)\qquad \textbf{(1分)}\\ 1+a+b=\frac{|A|}{\lambda}. & (3)\end{cases}$$

$(3)-(1)$得

$a=2$**(1分).**

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-1&-3\\0&1&-1\\1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-3\\1&-1\end{vmatrix}=4.$$

(1)代入(2)得$2+2b=(3+b)b, b^2+b-2=0,(b+2)(b-1)=0, b=1$或$b=-2$.

$b=1$时,$\lambda=1$;$b=-2$时λ=4.

$a=2,b=1,\lambda=1;a=2,b=-2,\lambda=4$.

b**(2分),**

λ(2分)

(2)设$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$,

(i)求A的特征值；

(ii)k为何值时A可对角化？

(iii)当A可对角化时求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$是对角矩阵.

解$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -2\\ -k & -1-\lambda & k\\ 4 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -2\\ 0 & -1-\lambda & k\\ 1-\lambda & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}$

$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1-\lambda & k\\ 1 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & -1-\lambda & k\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda+1)^2=0,$

特征值：**3分**

$\lambda_1=-1$代数重数=2，$A-\lambda_1E=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -k & 0 & k\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ -k & 0 & k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B,$

A 可对角化，必须且只需几何重数=3- r (B)=2,r(B)=1,

k = 0.(2分)

$\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 2\end{pmatrix}$.**(2分)**

$\lambda_2=1,\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 0\\ 4 & 2 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$.**(1分)**

$P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$**(2分),**

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \end{pmatrix},A=P\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ \end{pmatrix}P^{-1}.$

(3)设3阶实对称矩阵A的各行元素之和为3,向量$\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T},\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}$都是齐次方程组$AX=0$的解.

(i)求A的特征值和特征向量;(4分)

(ii)求正交矩阵Q和对角矩阵Λ,使得$Q^{\mathrm T}AQ=\Lambda$;(5分)

(iii)求$[A-(3/2)E]^6$.(1分)

解 (i)$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\lambda_3=3,\alpha_3=(1,1,1)^{\mathrm T}$ **(2分);**

$\lambda_1=\lambda_2=0,\alpha_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T},\alpha_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}$ **(2分),**

$\gamma_3=(1/\sqrt3,1/\sqrt3,1/\sqrt3)^{\mathrm T},\beta_1=(-1,2,-1)^{\mathrm T},\gamma_1=(-1/\sqrt6,2/\sqrt6,-1/\sqrt6)^{\mathrm T}$

$\beta_2=(0,-1,1)^{\mathrm T}-\frac{-3}{6}(-1,2,-1)^{\mathrm T}=(0,-1,1)^{\mathrm T}+\frac12(-1,2,-1)^{\mathrm T}$

$=(-\frac12,0,\frac12)^{\mathrm T}=\frac12(-1,0,1)^{\mathrm T},\gamma_2=(-1/\sqrt2,0,1/\sqrt2)$.（4分）

(ii)$Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt6 & -1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\\ 2/\sqrt6 & 0 & 1/\sqrt3\\ -1/\sqrt6 & 1/\sqrt2 & 1/\sqrt3\end{pmatrix},Q^{\mathrm T}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.（1分）

(iii)$Q^{\mathrm T}AQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix},A=Q\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}Q^{-1}$,

$A-(3/2)E=\mathrm{Q}\begin{pmatrix}-3/2&0&0\\0&-3/2&0\\0&0&3/2\end{pmatrix}Q^{-1}$,

$[A-(3/2)E]^6=\mathrm{Q}\begin{pmatrix}(3/2)^6&0&0\\0&(3/2)^6&0\\0&0&(3/2)^6\end{pmatrix}Q^{-1}=(3/2)^6\,\mathrm{Q}EQ^{-1}=\frac{729}{64}E$（1分）.

(4)设$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$,问：

(1)a满足什么条件时，$f(x_1,x_2,x_3)$是正定的；

(2)a满足什么条件时，$f(x_1,x_2,x_3)$是负定的.

解一 二次型的矩阵

(1)$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{pmatrix}, a>0,$（1分）

$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix}=a^2-1>0, |a|>1,$（**2**分）

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1-a & a+1 \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & a-1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$=(a+1)[-2+a^2-a]=(a+1)^2(a-2)>0, a>2.$（**2**分）

(2) $\mathrm{a}<0$（**1**分）

$, a^2-1>0, |\mathrm{a}|>1,$（2分）

$\mathrm{a}<2 \Rightarrow a<-1.$（**2**分）

解二

$$\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 0 & 1-\lambda+a & \lambda-a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-a-1)\begin{vmatrix} \lambda-a & -2 & -1 \\ -1 & \lambda+1-a & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$=(\lambda-a-1)[(\lambda-a)(\lambda+1-a)-2]=(\lambda-a-1)[\lambda^2+(1-2a)\lambda-a+a^2-2]$

$=(\lambda-a-1)[\lambda^2+(1-2a)\lambda+(a+1)(a-2)]$

$=(\lambda-a-1)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2)),$

$\lambda_1=\lambda_2=a+1, \lambda_3=a-2,$（**6**分）

f正定, 最小特征值$>0, a>2;$(（2分）)

f负定，最大特征值$<0, a<-1.$(2分）

(5)在K^4中, $V_1=<\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3>, V_2=<\beta_1,\beta_2,\beta_3>$,其中,

$\alpha_1=(1,0,-1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,0,1,-1)^{\mathrm{T}},\alpha_3=(1,-1,0,0)^{\mathrm{T}}$,

$\beta_1=(1,2,-1,2)^{\mathrm{T}},\beta_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3=(0,2,1,-1)^{\mathrm{T}}$.

分别求$V_1+V_2, V_1\cap V_2$的基和维数.

解 $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}, r(V_1)=3.$（**1**分）

$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&2\\-1&-1&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&3\\0&0&-1\end{pmatrix}, r(V_2)=3.$（1分）

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&0&-1&2&1&2\\-1&1&0&-1&-1&1\\0&-1&0&2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&0&-1&2&1&2\\0&1&1&0&-1&1\\0&-1&0&2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-1&2&1&2\\0&0&1&2&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-1&2&1&2\\0&0&0&4&0&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-1&2&1&2\\0&0&0&4&0&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&-1&2&1&2\\0&0&0&1&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&-2&-1&-2\\0&0&0&1&0&1/2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&-1/2\\0&1&1&0&-1&1\\0&0&1&0&-1&-1\\0&0&0&1&0&1/2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&0&1&1/2\\0&1&0&0&0&2\\0&0&1&0&-1&-1\\0&0&0&1&0&1/2\end{pmatrix},$$（**3**分）

$r(V_1+V_2)=4, \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$是$V_1+V_2$的一个基.（**1**分）

$r(V_1\cap V_2)=r(V_1)+r(V_2)-r(V_1+V_2)=3+3-4=2$（**2**分）.

$\beta_2=\alpha_1-\alpha_3\in V_1\cap V_2, \beta_3=(1/2)\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3+(1/2)\beta_1$,

$\beta_3-(1/2)\beta_1=(1/2)\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3\in V_1\cap V_2$,（**2**分）

$\beta_2=(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}},\beta_3-(1/2)\beta_1=(0,2,1,-1)^{\mathrm{T}}-(1/2)(1,2,-1,2)^{\mathrm{T}}=(-1/2,1,3/2,-2)^{\mathrm{T}}$.

$(0,1,-1,0)^{\mathrm{T}},(-1/2,1,3/2,-2)^{\mathrm{T}}$是$V_1\cap V_2$的基.

四、证明题(本题共 2 个小题，每小题 5 分，满分为 10 分) (解答写在答题纸上)

(1)证明n阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

是一个正定矩阵.

证

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}+(1-\frac{1}{n})E_n=B_n+(1-\frac{1}{n})E_n,$$

B_n的特征值是$0((\mathrm{n}-1)$重$),1$,(**2**分)

A的特征值是$1-\frac{1}{n}(\mathrm{n}-1)$重$),2-\frac{1}{n}$,(**1**分)

n个特征值都是正数，故A是正定矩阵（**2**分）.

(2)设A是一个$m\times n$矩阵，B是$n\times m$矩阵，证明：如果$\lambda_0\neq 0$是AB的特征值，那么$\lambda_0\neq 0$也是BA的特征值.

证 $\lambda_0\neq 0$是AB的特征值，存在m维非零向量ξ，$AB\xi=\lambda_0\xi$， （**3**分）

左乘B得

$BAB\xi=B\lambda_0\xi,(BA)(B\xi)=\lambda_0(B\xi),\lambda_0\neq 0,\xi\neq 0,\lambda_0\xi\neq 0,B\xi\neq 0$,否则将有

$\lambda_0\xi=AB\xi=A0=0,\lambda_0=0$,矛盾$B\xi\neq 0$,(**1**分)

.并且$(BA)(B\xi)=\lambda_0(B\xi)$，故$\lambda_0$是$BA$的一个特征值. （**1**分）