北京大学数学科学学院模拟期中考　非数学组

参考解答

1. **解:** (1)熟知 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$. 利用l'Hôpital法则, 有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-\sin^2 x)'}{(x^4)'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-\sin 2x)'}{(4x^3)'}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

(2)利用 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$以及等价无穷小代换, 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x^2}{2^2}\cdots\sin\frac{x^n}{2^n}\\
=&\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x^2}{2^2}\cdots\frac{x^n}{2^n}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{x^4+1}{2^2}\cdots\frac{x^{2n}+1}{2^n}\\
=&\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}\cdots\frac{1}{2^n}=2^{-\frac{n(n+1)}{2}}.
\end{aligned}
$$

2. **解:** 极限存在, 理由如下:

当 $n\geq 0$时, $\sqrt{n+1}>\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}$, 两边取倒数得 $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, 所以

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<0,$$

即数列$\{a_n\}$单调递减. 又由 $\sqrt{n}<\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}{2}$得 $\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, 所以

$$a_n>2(\sqrt{2}-\sqrt{1})+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2\sqrt{n}=2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}-2>-2,$$

即数列$\{a_n\}$有下界-2，故数列$\{a_n\}$有极限.

3. **解:** 不一定. 比如

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=x_0\\ 2, & x\neq x_0\end{cases},\ g(x)=\begin{cases}2, & x=x_0\\ 1, & x\neq x_0\end{cases}$$

均在x_0处跳跃间断，但 $h(x)=f(x)g(x)=2$在x_0处连续.

4. **解:** 直接计算得

$$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \neq 0$$
$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3}$$
$$y''' = \frac{6c^2(ad-bc)}{(cx+d)^4}.$$

所以

$$\left(\frac{y''}{y'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \frac{y'''y' - y''^2}{y'^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$$
$$= \frac{6(ad-bc)}{(cx+d)^2} - \frac{6(ad-bc)}{(cx+d)^2} = 0.$$

5. **解:** 不妨设$x > y > 0$，可在原不等式各项同除以 y，化为

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \le \frac{\frac{x}{y}-1}{\ln\frac{x}{y}} \le \frac{\frac{x}{y}+1}{2}.$$

记 $t = \dfrac{x}{y}$ $(t > 1)$，即证 $\sqrt{t} \le \dfrac{t-1}{\ln t} \le \dfrac{t+1}{2}$, 也就是 $\dfrac{2(t-1)}{t+1} \le \ln t \le \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

记$f(r) = \ln r - \dfrac{2(r-1)}{r+1}$ $(r \ge 1)$, 则

$$f'(r) = \frac{(r-1)^2}{r(r+1)^2} \ge 0,$$

所以$f(t) \ge f(1) = 0$, 即$\dfrac{2(t-1)}{t+1} \le \ln t$.

记$g(r) = \ln r - \sqrt{r} + \dfrac{1}{\sqrt{r}}$ $(r \ge 1)$, 则

$$g'(r) = -\frac{(\sqrt{r}-1)^2}{2r\sqrt{r}} \le 0,$$

所以$g(t) \le g(1) = 0$, 即$\ln t \le \sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}$.

综上，原不等式得证。

6. **解:** x的范围是 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$, 分情况讨论.

若 $x > 1$, 可作换元 $x = \dfrac{1}{\cos t}$ $(0 < t < \dfrac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}\,x = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}\,t$, 故

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \mathrm{d}\,t = t = \arccos\frac{1}{x} + C_1.$$

若 $x < -1$, 可作换元 $x = \dfrac{1}{\cos t}$ $(\dfrac{\pi}{2} < t < \pi)$, 则 $\mathrm{d}\,x = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t}\mathrm{d}\,t$, 故

$$I = \int \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int -\mathrm{d}\,t = -t = -\arccos\frac{1}{x} + C_2.$$

综上，$I = \arccos\left|\dfrac{1}{x}\right| + C$.

7. **解:** 按第一行展开，得

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}
&= a\begin{vmatrix} a & -d & c \\ d & a & -b \\ -c & b & a \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -b & -d & c \\ -c & a & -b \\ -d & b & a \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} -b & a & c \\ -c & d & -b \\ -d & -c & a \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} -b & a & -d \\ -c & d & a \\ -d & -c & b \end{vmatrix} \\
&= a(a^3 - bdc + bcd + ab^2 + ac^2 + ad^2) - b(-ba^2 - bd^2 - bc^2 + acd - b^3 - acd) \\
&\quad + c(-abd + abd + c^3 + cd^2 + ca^2 + cb^2) - d(-db^2 - da^2 - dc^2 - d^3 + abc - abc) \\
&= a^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + b^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\
&\quad + c^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + d^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \\
&= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2.
\end{aligned}
$$

8. (1)**解:** 按行列式的定义, $|A|$是六个1或-1的和, 所以是一个偶数.

   (2)**证:** 三阶行列式的几何意义是三个行向量组成的平行六面体的体积, 所以$|A|$的绝对值不会超过三个行向量的模长的乘积, 故$|A| \le (\sqrt{3})^3$. 结合(1)知$|A| \le 4$, 又

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4,
$$

   所以$|A|$的最大值是4.

9. **证:** 设$\beta_i = \alpha_1 + k_i\alpha_2 + \cdots + k_i^{n-1}\alpha_n$ $(i = 1, \ldots, n)$是A中的n个不同的向量(即$k_1, k_2, \ldots, k_n$两两不同), 若$c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \cdots + c_n\beta_n = 0$, 即

$$
\sum_{j=1}^{n}(c_1k_1^{j-1} + \cdots + c_nk_n^{j-1})\alpha_j = 0.
$$

   因为$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性无关，上式等价于线性方程组

$$
\begin{cases}
c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0 \\
\vdots \\
c_1k_1 + c_2k_2 + \cdots + c_nk_n = 0 \\
c_1k_1^{n-1} + c_2k_2^{n-1} + \cdots + c_nk_n^{n-1} = 0
\end{cases}
$$

   其系数行列式为Vandermond行列式

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n}(k_j - k_i) \ne 0,
$$

   所以线性方程组只有零解$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$, 故$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$线性无关.

10. **证:** 固定$x \in I$, 有$\left|\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le |x - y|$, 令$y \to x$可知$f'(x) = 0$(若$x$是区间端点则$f'(x)$是单侧极限). f在I上导函数恒为零，因此f是常数函数(由Lagrange中值定理).