经济学双学位 2016 秋季线性代数期中试题

______ 学院 _______ 系　姓名 ________ 学号________ 分数 2016/11/06

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分）。

(1) $(-2)^{\tau(54321)}=$______。

(2)设 A 是四阶方阵，$|A|=4,$ 则 $|(A^{-1})^*|=$______ 。

(3)设 $A=\begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}, r(A)=2,$ 则 $t=$ ______ 。

(4)设 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=3, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)=4,$ 则

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=$______。

(5)设矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 各列元素之和为 1，则 $(1,1,1)\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix}=$______。

(6)设 4 阶行列式 $|A|=2,$ 则 $|-2A|=$______ 。

(7)设矩阵 X 满足 $X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$ 则 $X=$ ________ 。

(8)设 n 阶矩阵 B 的秩是 $n-1,$ 则 B^* 的秩是_____。

(9)设 3 维列向量 α_1,α_2 线性无关,则齐次方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-2\alpha_2)(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 的一个基础解系是________ 。

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}=$__________。

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)。

(1)设A,B,C均为n阶方阵，且$|A|\neq 0$，则必有( )。

(A) 若$AC=BC$，则$A=B$ (B)若$BC=O,$则$B=O$或$C=O$

(C)若$BA=CA$，则$B=C$ (D) 若$A^{-1}B=CA^{-1}$，则$B=C$

(2)设n阶方阵A满足$A^2-A-2E=O$，则必有( )。

(A) $A=2E$ (B) $A=-E$ (C) $A-E$可逆 (D) A不可逆

(3)设向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}$可用向量组$\boldsymbol{\beta_1,\cdots,\beta_t}$线性表示，并且$\boldsymbol{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}$线性无关，则必定成立的是( )。

(A)$s>t$ (B)$s<t$ (C)$s\leq t$ (D)$s=t$

(4)若方阵$\boldsymbol{A,B,C}$满足$\boldsymbol{ABC=E}$，则必定成立( )。

(A)$BAC=E$ (B)$ACB=E$ (C)$BCA=E$ (D)$CBA=E$

(5)设$\boldsymbol{r(A_{m\times n})=s<m}$，则下列断言不成立的是( )。

(A) A有$\boldsymbol{s}$个线性无关的行向量 **(B)** A有$\boldsymbol{s}$个线性无关的列向量

(C) A的行向量组线性相关 **(D)** A的列向量组线性相关

(6)设η_1,η_2,η_3是齐次方程组$\boldsymbol{A_{m\times n}X=o}$的一个基础解系，则下列向量组中也可作为$\boldsymbol{A_{m\times n}X=o}$的基础解系的是( )。

(A) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_1$, **(B)** $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_1+2\eta_2+\eta_3$

(C) $\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1-\eta_2$ **(D)** $\boldsymbol{\eta_1+\eta_2,\eta_1-\eta_2,\eta_3}$

(7)若$\alpha_1=(0,0,c_1),\alpha_2=(0,1,c_2),\alpha_3=(1,-1,c_3),\alpha_4=(-1,1,c_4)(c_{1,}c_2,c_3,c_4$为任意常数),则下列向量组中必定线性相关的是( )。

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C)$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(8)设A为三阶矩阵,将A的第二列加到第一列得矩阵B,再交换B的第二行与第三行得单位矩阵,记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则$A=$( )。

(A)P_1P_2　(B)$P_1^{-1}P_2$　(C)P_2P_1　(D)$P_2P_1^{-1}$

(9)设$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是 4 阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$AX=o$的一个基础解系，则$A^*X=o$的一个基础解系为(　)。

(A)α_1,α_2　(B)α_1,α_3　(C)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　(D)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

(10)设A为n阶非零矩阵，并且$A^2=O$，E为n阶单位矩阵，则(　)。

(A) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆　(B) $E-A$不可逆，$E+A$可逆

(C) $E-A$可逆，$E+A$可逆　(D) $E-A$可逆，$E+A$不可逆

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 10 分，满分为 50 分)。

(1)计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 6 & 4 \end{vmatrix}$。

(2) 计算 n 阶行列式$\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & x \\ a & a & \cdots & a & x & a \\ a & a & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a & a \\ x & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$。

(3)给定向量组

$\mathrm{I}:\alpha_1=(2,1,2,3),\alpha_2=(-1,1,5,3),\alpha_3=(0,-1,-4,-3),\alpha_4=(1,0,-2,-1),\alpha_5=(1,2,9,8).$

(i) 求$r(\mathrm{I})$；

(ii)求I的一个极大线性无关组II；

(iii)用II表示I中的其余向量。

(4)(i) $\boldsymbol{a}$ 为何值时方程组 $\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+\ \ x_4+2x_5=3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 \qquad\quad =a \\ 9x_1+6x_2+\ \ x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases}$ 有解？

(ii)在有解时求方程组的一个特解和导出齐次方程组的一个基础解系。

(5)给定矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i)求$|A|$；

(ii)求逆矩阵 A^{-1}；

(iii)求$(A^{-1})^*$。

四、证明题(本题共 1 小题，满分为 10 分) 。

(1)证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times p}=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$。