2020年模拟期中考数学组答案

2020.11.7

1.(a)设O为坐标原点

设A在xOy平面上投影为$B(x,y,0)$

由$\frac{|OA'|}{|OB|}=\frac{|ON|}{|ON|-|AB|}$

故$|OA|=\frac{1}{1-z}|OB|$

故$\begin{cases} x'=\frac{1}{1-z}x \\ y'=\frac{1}{1-z}y \end{cases}$

(b)则$(a\times b)\times(b\times c)\cdot(c\times a)=0$

故整理得$(a\times b\cdot c)^2=0$

即$(a,b,c)=0$，故a,b,c共面

2.(a)先证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

首先$\sqrt[n]{n}>1$，记$\varepsilon_n=\sqrt[n]{n}-1$

则$n=(1+\varepsilon)^n>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$($n$充分大)

故$\varepsilon<\sqrt{\frac{2}{n-1}}\to 0, n\to 0$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

故原式=$(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^k=1$

(b)首先，$(n+1)^k-n^k>0$

其次，$(n+1)^k-n^k=n^k((1+\frac{1}{n})^k-1)<n^k(1+\frac{1}{n}-1)=n^{1-k}$

故由夹逼收敛定理，原式=0

3.(a)$=(ab+ac+ad+bc+bd+cd)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$

记$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$

则原式即为$f(x)$中x^2项的系数

(b)$\alpha_4=\frac{2}{5}\alpha_1+\frac{1}{5}\alpha_2+\frac{3}{5}\alpha_3$

又$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$

故$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$即为极大线性无关组

4.以下简记$A=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$

则原式=$\begin{vmatrix} A & t^2B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-tB & t^2B-tA \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-tB & 0 \\ B & A+tB \end{vmatrix}$

由行列式的$Laplace$展开(按第1 n列)展开即得结论

5.证明：则，存在$\xi > 0, N > 0$，$c_n > \xi n$，$\forall n > N$

记$m = [\xi n]$，则存在m_0，当$m > m_0$时有$k_m < n < \frac{m+1}{\xi}$

故$k_m \geqslant \frac{1}{\left[\frac{1}{\xi}\right]+1}(a_{\left[\frac{m+1}{\xi}\right]+1} + \cdots + a_{\left[\frac{m+2}{\xi}\right]})$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{k_i} \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left[\frac{1}{\xi}\right]+1} \sum\limits_{i=\left[\frac{m+1}{\xi}\right]+1}^{\left[\frac{n+1}{\xi}\right]} a_{k_i} = +\infty$，得证

6.证明：$\{x_n\},\{y_n\}$均有界，故存在$M > 0, N_1 > 0, N_2 > 0$，使$|x_i^{y_i}| < M, N_1 < y < N_2$

又对$\forall \xi > 0$，存在$N > 0$，当$n > N$时，$|x_n^{N_1} - 1| < \xi, |x_n^{N_2} - 1| < \xi$

则$|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{y_{n+1-i}}}{n} - 1| \leqslant \left| \frac{x_1^{y_n} + \cdots + x_N^{y_{n-N+1}}}{n} + \frac{N}{n} + \frac{\left|x_{N+1}^{y_{n-N}} - 1\right| + \cdots + |x_n^{y_1} - 1|}{n} \right|$

$\leqslant \frac{MN}{n} + \frac{N}{n} + \frac{(n-N)\xi}{n}$

故n充分大时，$|\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{y_{n+1-i}}}{n} - 1| \leqslant 2\xi$

令$\xi \to 0$，原命题得证

7.最大值为n

一方面，取$a_1 = (1,1,0,\cdots,0)$

$a_2 = (1,0,1,0,\cdots,0)$

$\cdots$

$a_{n-1} = (1,0,\cdots,0,1)$

$a_n = (1,0,\cdots,0)$

则这一向量组满足要求

另一方面，对任意一个满足条件的向量组$a_1,\cdots,a_m$

有$(k_1a_1 + \cdots + k_na_n)^2 \geqslant (k_1 + \cdots + k_n)^2$

故$k_1,\cdots,k_n$不全为0时，$k_1a_1 + \cdots + k_na_n \neq 0$

故$a_1,\cdots,a_n$线性无关

故$m \leqslant n$，得证

8.$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$

证明：则$\{a_n\}$单增

若$\{a_n\}$有界M

则$a_{n+1} > 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$，矛盾

故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

又$1 \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{na_n}$

故$1 \leqslant n + 1 - n\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant \frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{n+1}{na_n}}{1+\frac{1}{na_n}} = 1$

故$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{(n+1)a_{n+1}-na_n}{a_{n+1}}) = \lim\limits_{n\to\infty} (n + 1 - n\frac{a_n}{a_{n+1}}) = 1$

由$stolz$公式

$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{na_n}{a_1+\cdots+a_n}) = 1$

又$0 < \frac{n}{(a_1+\cdots+a_n)^2} < \frac{1}{n}$

所以$\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n}{(a_1+\cdots+a_n)^2}) = 0$

故$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a_{n+1}^2-a_n^2)}{2} = 1$

故由$stolz$公式

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{2\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a_{n+1}^2-a_n^2)}{2n\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(a_{n+1}^2-a_n^2)}{2} = 1$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{\ln n}} = \sqrt{2}$