2023-2024 学年期中模拟考试 数学组

学术文化部学术工作组

2023 年 10 月 22 日 18:40-20:40

注记. 以下结论以及课内学到的结论可以直接使用而不加证明:

(1) **零核 (kernel)** 相关:$\mathbb{F}$ 是域,$A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A\vec{x}=\vec{0}$ 的解集构成 $\mathbb{F}^n$ 的子空间, 称为 A 的零核, 记作 $\ker A$.
我们知道,$\vec{x}$ 与 A 的每个行向量均正交, 因此有 $\mathrm{rank}A+\dim\ker A=n=\dim(\mathbb{F}^n)$ 为定值.

(2) **代数基本定理**:$n \geqslant 1$, 复系数多项式方程 $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$ 在 $\mathbb{C}$ 上有且仅有 n 个复根 (计重数).

注记. 以下是题目中可能用到的记号和术语:

(1) $\mathrm{U}_0(x_0,\delta)$ 指以 x_0 为中心的, 半径为 δ 的去心 (开) 邻域, 而 $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ 表示 (不去心) 邻域.

(2) **可数集 (可列集)** 的定义: 与 $\mathbb{N}$ 能建立双射的集合, 称为可数集. 常见的如 $\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{Q}^2$ 均为可列集, 而 $\mathbb{R}$ 为不可列集. 容易知道, 可数个可数集之并为可数集.

(3) $\mathbb{F}_2$ 指仅含两个元素 $\{0,1\}$ 的域, 加法和乘法定义为模 2 之下的加法和乘法, 即:
$0+0=0, 0+1=1, 1+1=0, 0\cdot 0=0, 0\cdot 1=0, 1\cdot 1=1$.

(4) 定义在 $\mathbb{R}$ 上的**分段线性函数** f 指: 存在 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ 严格递增, 且 $\mathbb{R}=\bigsqcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}[x_k,x_{k+1})$,$f$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 满足 f 限制在每个区间 $[x_k,x_{k+1})$ 上时有线性表示, 这里 $\bigsqcup$ 为无交并.

问题 1. (5 分 +5 分 +10 分)

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x\sin x}-1}{\arctan x^2}$

(3) (尽量不要使用 L'Hospital 法则) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$, 求下式的值:

$$\lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

问题 2. (10+10 分)

(1) 给定一个五边形 $ABCDE$, 满足如下条件:

$$AC \parallel DE, AD \parallel BC, BD \parallel AE, CE \parallel AB$$

问: 是否一定存在仿射变换 φ 将五边形 $ABCDE$ 映成正五边形?

(2) 那么，对六边形 $ABCDEF$, 满足如下条件:

$$AB \parallel CF \parallel DE, BC \parallel AD \parallel EF, CD \parallel BE \parallel AF$$

问: 是否一定存在仿射变换 φ 将六边形 $ABCDEF$ 映成正六边形?

问题 3. (10 分) 求满足如下条件的点到原点距离的最大最小值:
到 $\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z}{1}, \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}, \frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$ 三条直线距离平方和为 2.

问题 4. (10 分) 给定一个矩阵 A, 证明其经过有限次初等行变换 (包括行交换) 形成的每一个行梯矩阵, 其每行第一个非零元的位置均相同 (即仅取决于 A 本身).

问题 5. (10 分) 确定所有的正整数 n, 使得存在集合 $S \subseteq \mathbb{R}^3, |S| = n$, 满足:

$$S = \{\vec{u} \times \vec{v} | \vec{u}, \vec{v} \in S\}$$

问题 6. (10 分) 给定两个 2023 阶实可逆矩阵 A, B,
考虑集合 $M = \{m | m = \operatorname{rank}(A + cB), c \in \mathbb{R}\}$, 证明:$|M| \leqslant 64$.

提示. 考虑 ker.

问题 7. (10 分) 设 $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{F}_2)$ 使得 $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,i} = 1$ 以及 $A^T = A$, 试证:

$$A\vec{x} = (1, 1, \cdots, 1)^T$$

有解 $\vec{x} \in \mathbb{F}_2^n$.

问题 8. (5 分) 给定定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f.
$x_0 \in \mathbb{R}$ 称为 f 的 **“准连续点”**, 若对任意 x_0 的开邻域 $U = \mathrm{U}_0(x_0, \delta_U)$ 以及 $f(x_0)$ 的开邻域 $V = \mathrm{U}(f(x_0), \delta_V)$, 都 $\exists x \in U$ s.t. $f(x) \in V$.
证明: 任意定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数在任意开区间上都有“准连续点”.

提示. 考虑可列性.

问题 9. (5 分) 设两个定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 f, g 满足以下条件:
$\forall t \in \mathbb{R}$ 以及任意 $\mathbb{R}$ 中序列 $\{x_n\} \to t$, 有 $\varliminf\limits_{n \to +\infty} f(x_n) > \varlimsup\limits_{n \to +\infty} g(x_n)$.
证明: 存在分段线性函数 $l(x)$ 满足 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > l(x) > g(x)$.

问题 10. (附加题) 给定正整数 $m > 2023$, 是否存在无穷可逆矩阵列 $\{A_n\} \subseteq \mathrm{M}_{m \times m}(\mathbb{R})$ 使得 $\forall i \neq j$,$\det(A_i + A_j) = \det A_i + \det A_j$?

提示. det 是一个 m^2 元多项式.