线性代数期终考试试题（B类）

（2017-2018秋季学期. 地空学院等）

一.（10分）. 计算下列行列式

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$，　(2) $D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & y \\ 1 & 1 & \cdots & y & 1 \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ 1 & y & \cdots & 1 & 1 \\ y & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$

二.（16分）给定矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，

求矩阵 X 满足 $AX=B$。

三.（18分）设 $A=\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，其中 $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，

求正交矩阵 T，使得 $T'AT$ 为对角矩阵，要求写出 T 的计算过程和相应的对角矩阵。

四.（12分）. 设 A 是数域 K 上 $m\times n$ 矩阵，$r(A)=r>0$。

(1) 写出 A 的相抵标准形：$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(2) 若 $r=r_1+\cdots+r_s$，$r_i\geq 1$，$i=1,\cdots,s$，证明存在秩为 r_i 的矩阵 A_i，$i=1,\cdots,s$，使得

$$A=A_1+A_2+\cdots+A_s.$$

五. (12分). 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & 2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix}$ 为上三角矩阵，证明

A 与 A' 相似。 $U^{-1}AU=A'$

六. (18分). 设 $V=M_n(K)$ 是数域 K 上关于 n 阶矩阵加法和数乘矩阵构成的向量空间。在 V 中定义变换 $\sigma: V\longrightarrow V$, $\sigma(A)=A'$, $\forall A\in V$。

(1). 证明 σ 是 V 上的线性变换;

(2) 求出 σ 的全部特征子空间;

(3). 判断 σ 能否对角化, 并证明你的结论。

七. (14分) 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$ 是一个满秩不定二次型,

证明: 存在 $\mathbb{R}^n$ 的子空间 W_1, W_2, 使得

$$\mathbb{R}^n=W_1\oplus W_2,$$

其中, $f(\alpha_1)\geq 0$, $\forall \alpha_1\in W_1$, $f(\alpha_2)\leq 0$, $\forall \alpha_2\in W_2$。