线性代数 B 期末试题－2016 年秋

第一题（20 分）： 令$A \in M_n[\mathbb{R}]$为一可逆矩阵，$u, v \in \mathbb{R}^n$，定义分块矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & u \\ v' & 0 \end{bmatrix}$$

1) （10 分）求u, v的一个充分必要条件使得矩阵C可逆。
2) （10 分）在 1)的条件满足的情况下求C^{-1}。

第二题（20 分）：

1) （10 分）求a的取值范围，使得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

正定。

2) （10 分）判断下列矩阵是否正定（给出判断依据）：

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}，\ \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}，\ \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

第三题（15 分）： 令矩阵$A, B \in M_n(\mathbb{R})$。

1) （5 分）设A是对称正定矩阵，B是对称矩阵，证明存在可逆矩阵P使得$P'AP = I$且$P'BP$为对角矩阵。
2) （10 分）设A和B均为对称半正定矩阵，证明存在可逆矩阵P使得$P'AP$和$P'BP$为对角矩阵。如果B仅是对称矩阵，同样的结论是否成立？如果成立，给出证明，否则给出一个反例。

第四题（15 分）： 令$L = D^2 + 2D + 1$为线性空间 $V = < 1, sin(x), cos(x) - sin(x) >$ 上的线性变换，求其在基$\{1, \sin(x), \cos(x) - \sin(x)\}$下的矩阵。

第五题（10 分）： 证明任何一个秩为r的矩阵总可以写成r个秩为 1 的矩阵之和。

第六题（10 分）： 在$\mathbb{R}^2$中，对于任意$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$，定义二元函数

$$(\alpha, \beta) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + 4 a_2 b_2$$

求证(α, β)是$\mathbb{R}^2$的一个内积，并求$\mathbb{R}^2$关于该内积的一个标准正交基。

第七题（10 分）： 对任一矩阵C，我们定义$range(C)$为矩阵C列向量组生成的线性空间，定义$ker(C)$为齐次线性方程组$Cx = 0$的解空间。$\mathbb{R}^m$是标准内积空间。

1) （**5 分**）令$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，证明 $ker(A') \oplus range(A) = \mathbb{R}^m$。
2) （**5 分**）令矩阵$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\beta \in range(A) \subset \mathbb{R}^m$，$\gamma \in \mathbb{R}^n$，$d \in \mathbb{R}$。证明下面的两个命题为等价命题：
   a. 线性方程组$Ax = \beta$的任何一个解x都满足$\gamma' x = d$。
   b. 存在一个向量$\alpha \in \mathbb{R}^m$，使得$\gamma = A'\alpha$，$d = \beta'\alpha$。

线性代数 B 期末试题参考答案-2016 年秋

董彬

2017 年 1 月 6 日

1. 令 $A \in M_n[\mathbb{R}]$ 为一可逆矩阵，$u, v \in \mathbb{R}^n$，定义分块矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{bmatrix}$$

1) 求 u, v 的一个充分必要条件使得矩阵 C 可逆。

参考答案：由于 A 可逆，对矩阵 C 做如下行变换

$$C \xrightarrow{2-1\cdot v^T A^{-1}} \begin{bmatrix} A & u \\ 0 & -v^T A^{-1} u \end{bmatrix} \xrightarrow{2-1\cdot v^T A^{-1} u} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & -v^T A^{-1} u \end{bmatrix}$$

所以可得 $|C| = |A|| - v^T A^{-1} u|$，因此

$$C\text{可逆} \iff v^T A^{-1} u \neq 0$$

2) 在 1) 的条件满足的情况下求 C^{-1}.

参考答案：根据 1) 的初等行列变换，有

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & u \\ v^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -v^T A^{-1} u \end{bmatrix}$$

上式两边取逆即可得到

$$\begin{aligned} C^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & -v^T A^{-1} u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} - \frac{A^{-1} u v^T A^{-1}}{v^T A^{-1} u} & \frac{A^{-1} u}{v^T A^{-1} u} \\ \frac{v^T A^{-1}}{v^T A^{-1} u} & -\frac{1}{v^T A^{-1} u} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2.1) 求 a 的取值范围，使得矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

正定。

参考答案：矩阵正定等价于矩阵顺序主子式行列式都大于 0，所以

$$1 > 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 > 0$$
$$|A| = 1 - 3a^2 + 2a^3 > 0$$

于是 a 的取值范围

$$\frac{1}{2} < a < 1.$$

2) 判断下列矩阵是否正定（给出判断依据）

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

参考答案：由于对角元有负数，所以 A 不为正定矩阵。

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

参考答案：令 $x = (0, 0, 1, -1)^T$，则有 $x^T B x = 0$，所以 B 不为正定矩阵。

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

参考答案：由于 $|\lambda I - C| = (\lambda^2 - 3\lambda + 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 5)$，矩阵 C 的特征值均大于 0，所以 C 为正定矩阵。

3. 令矩阵 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 1) 设 A 是对称正定矩阵，B 是对称矩阵，证明存在可逆矩阵 P 使得 $P^TAP = I$ 且 P^TBP 为对角矩阵。

参考答案：由于 A 为对称正定矩阵，所以 A 相似与单位矩阵 I，所以存在正交矩阵 Q，使得 $Q^TAQ = I$. 又由于 B 为对称矩阵，所以 B 为对称矩阵，所以 Q^TBQ 为对称矩阵，所以存在正交矩阵 U 使得 U^TQ^TBQU 为对角矩阵，令 $P = QU$，那么有

$$PAP = U^TQ^TAQU = U^TIU = I$$

$$PBP = U^TQ^TBQU$$

所以结论成立。

2) 设 A 和 B 均为对称半正定矩阵，证明存在可逆矩阵 P 使得 P^TAP 和 P^TBP 为对角矩阵。如果 B 仅是对称矩阵，同样的结论是否成立？如果成立，给出证明，否则给出一个范例。

参考答案：由于 A 为对称半正定矩阵，所以存在正交矩阵 Q 满足

$$Q^TAQ = \begin{bmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

记 $\bar{B} = Q^TBQ$，由于 B 对称半正定，所以 $\bar{B}$ 也对称半正定，所以存在正交矩阵 U 满足

$$U^T\bar{B}U = \begin{bmatrix} I_{r2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令 $P = QU$，可以得到

$$\begin{aligned} P^TAP &= U^TQ^TAQU \\ &= U^T \begin{bmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U \\ &= [U_1^T, U_2^T] \begin{bmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ &= [U_1^T, 0] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_{r1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

对于 B 有

$$P^TBP = U^TQ^TBQU = U^T\bar{B}U$$

所以 P 即为满足条件的正交矩阵。

若 B 仅为对称矩阵，反例如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. 令 $L = D^2 + 2D + 1$ 为线性空间 $V =< 1, \sin(x), \cos(x) - \sin(x) >$ 上的线性变换，求其在 $\{1, \sin(x), \cos(x) - \sin(x)\}$ 下的矩阵。

参考答案：

$$\begin{aligned} L(1) &= 1 \\ L(\sin(x)) &= -\sin(x) + 2\cos(x) + \sin(x) \\ &= 2\sin(x) + 2(\cos(x) - \sin(x)) \\ L(\cos(x) - \sin(x)) &= -\cos(x) + \sin(x) - 2\sin(x) - 2\cos(x) + \cos(x) - \sin(x) \\ &= -4\sin(x) - 2(\cos(x) - \sin(x)) \end{aligned}$$

所以矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

5. 证明任何一个秩 r 的矩阵总可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

参考答案：对任意矩阵 $A_{m\times n}$，存在初等变换矩阵 $P_{m\times m}$ 和 $Q_{n\times n}$ 使得

$$\begin{aligned} A &= P \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q \\ &= P(\sum_{i=1}^{r} E_{ii})Q \\ &= \sum_{i=1}^{r} PE_{ii}Q \end{aligned}$$

这里 r 为矩阵的秩，E_{ii} 为元素 (i,i) 为 1 其余元素为 0 的矩阵，由于 P 和 Q 为可逆矩阵，所以 $PE_{ii}Q$ 为秩 1 矩阵，所以结论成立。

6. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，对于任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$，定义二元函数

$$(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 4a_2b_2$$

求证 (α, β) 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个内积，并求 $\mathbb{R}^2$ 关于该内积的一个标准正交基。

参考答案：易于验证对于 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^2, k \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta) &= (\beta, \alpha) \\
(\alpha + \gamma, \beta) &= (\alpha, \beta) + (\gamma, \beta) \\
(k\alpha, \beta) &= k(\alpha, \beta) \\
(\alpha, \alpha) &= a_1^2 - 2a_1a_2 + 4a_2^2 \\
&= (a_1 - a_2)^2 + 3a_2^2 \\
(\alpha, \alpha) &= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0
\end{aligned}$$

因此 (α, β) 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个内积。

一组标准正交基

$$\eta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

7. 对任一矩阵 C，我们定义 $range(C)$ 为矩阵 C 列向量组生成的线性空间，定义 $ker(C)$ 为齐次线性方程组 $C\boldsymbol{x} = 0$ 的解空间。$\mathbb{R}^m$ 是标准内积空间。

1) 令 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，证明 $ker(A^T) \bigoplus range(A) = \mathbb{R}^m$.

参考答案：记 r 为矩阵 A 的秩，因此 $\dim(range(A)) = r$ 以及 $\dim(ker(A^T)) = n-r$，因此只需要证明 $ker(A^T) \bigcap range(A) = \emptyset$ 即可。设 $\boldsymbol{x} = ker(A^T) \bigcap range(A)$，那么

$$A^T\boldsymbol{x} = 0 \quad x = A\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

可以得到 $A^TA\boldsymbol{y} = 0$，左边乘以 $\boldsymbol{y}^T$，得到

$$(A\boldsymbol{y})^T(A\boldsymbol{y}) = ||A\boldsymbol{y}||^2 = 0$$

于是有 $A\boldsymbol{y} = 0$，所以 $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} = 0$，所以结论成立。

2) 令矩阵 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$，$\beta \in range(A) \subset \mathbb{R}^m$，$\gamma \in \mathbb{R}^n$，$d \in \mathbb{R}$。证明下面的两个命题为等价命题：

- 线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \beta$ 的任何一个解 $\boldsymbol{x}$ 都满足 $\gamma^T\boldsymbol{x} = d$.
- 存在一个向量 $\alpha \in \mathbb{R}^m$，使得 $\gamma = A^T\alpha$，$d = \beta^T\alpha$.

参考答案：若线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \beta$ 的任何一个解都满足 $\gamma^T\boldsymbol{x} = d$,

$A\boldsymbol{x}=\beta$ 的解可以写为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{z}$，其中 $A\boldsymbol{x}_0=\beta$，$\boldsymbol{z}\in ker(A)$，于是有

$$\begin{aligned}\gamma^T\boldsymbol{x}&=d\\ \gamma^T(\boldsymbol{x_0}+\boldsymbol{z})&=d\\ \gamma^T\boldsymbol{z}&=0\end{aligned}$$

由于对任意 $\boldsymbol{z}\in ker(A)$ 都有 $\gamma^T\boldsymbol{z}=0$, 又由第一问的结论 $\ker(A)\bigoplus range(A^T)=\mathbb{R}^n$，所以 $\gamma\in range(A^T)$，于是存在 $\alpha\in\mathbb{R}^m$ 满足 $\gamma=A^T\alpha$，并且

$$d=\gamma^T\boldsymbol{x}=(A^T\alpha)^T\boldsymbol{x}=\alpha^TA\boldsymbol{x}=\alpha^T\alpha$$

所以结论成立。

若存在一个向量 $\alpha\in\mathbb{R}^m$，使得 $\gamma=A^T\alpha$，$d=\gamma^T\alpha$，考虑 $A\boldsymbol{x}=b$，可以得到

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{x}&=\beta\\ d&=\alpha^T\beta\\ &=\alpha^TA\boldsymbol{x}\\ \gamma^T\boldsymbol{x}&=d\end{aligned}$$

因此结论成立。