21-22学年秋季学期线性代数(B)期中考试解答

徐晓濛老师班助教小组

说明：

- 该答案为助教们试做，如有问题请联系季策助教.
- 很多题目解法不唯一，只要正确即可得分. 本答案并非评分依据.
- 考试只是学习过程的一部分，希望大家总结经验方法，保持学习信心，享受线性代数学习乐趣.

第一题解答： 对题目所给线性方程组的增广矩阵经过一系列初等行变换后得到如下阶梯型矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & -2 & -1 \\ 0 & a-1 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & -4-5a & -9 \end{bmatrix}$$

由此可以得知：

- $a \neq 1$ 且 $a \neq -\frac{4}{5}$ 时，线性方程组有唯一解；
- $a = -\frac{4}{5}$ 时，线性方程组无解；
- $a = 1$ 时，阶梯型增广矩阵为：

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得到解为：

$$\begin{cases} x_1 &= & x_2 + 1 \\ x_3 &= & 1 \end{cases}$$

该矩阵的行秩为2，故解空间的维数为1. 容易看出该方程组的一个特解为$(2,1,1)'$，对应的齐次线性方程组的基础解系为$\{(1,1,0)'\}$，所以解集为$W = \{(2,1,1)' + k(1,1,0)'\}$，其中$k \in K$(考虑到特解和基础解系的选取有自由度，答案不唯一).

第二题解答： 验证一个 $\mathbb{R}^3$ 的子集是否是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间，只需验证该空间对其中元素的加法和数乘运算封闭. 由此可以逐个判断：

- (a) 是子空间；
- (b) 不是子空间（$0 \notin (b)$）；
- (c) 不是子空间（对加法运算不封闭）；
- (d) 是子空间.

第三题解答： 矩阵 A 可以经过一系列初等行变换得到简化行阶梯型矩阵（即 3×3 单位矩阵），而初等行变换均可以表示为 A 左乘初等矩阵，所以P为数个初等行变换对应的初等矩阵的乘积. 最终可以得到

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

第四题解答： 将题目所给 α_i 关于 β_j 的表示代入希望求解的方程 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha 4 = 0$，整理得到一个含有$\beta_1, \beta_2, \beta_3$的方程：

$$(l_1 - 3l_2 + 5l_3 - 2l_4)\beta_1 + (-2l_1 + l_2 - 3l_3 + l_4)\beta_2 + (-l_1 - 7l_2 + 9l_3 - 4l_4)\beta_3 = 0$$

因为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 线性无关，所以每一项的系数都是0，于是我们得到关于l_1, l_2, l_3, l_4的齐次线性方程组：

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} l_1 & - & 3l_2 & + & 5l_3 & - & 2l_4 & = & 0 \\ -2l_1 & + & l_2 & - & 3l_3 & + & l_4 & = & 0 \\ -l_1 & - & 7l_2 & + & 9l_3 & - & 4l_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

该方程的基础解系为（参考[1]第86页，该观察来自[2]）：

$$\eta_1 = (-4, 7, 5, 0)', \quad \eta_2 = (1, -3, 0, 5)'.$$

解集为$W = \{k_1\eta_1 + k_2\eta_2 | k_1, k_2 \in K\}$. 考虑到基础解系的选取有自由度，答案不唯一.

第五题解答：不难验证基本矩阵具有以下性质：

$$E_{ij} \cdot E_{kl} = \begin{cases} E_{il} & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

利用该公式可以发现两小题中的每一项均为0，所以等式成立（或直接逐项计算发现每一项均为0亦可）.

第六题解答：可以进行实验，先考虑只有一列有 x 的情况，设第 k 列有 x，利用行列式的性质得到有一列 x 的行列式和没有 x 的行列式，对前者按第 k 列展开得到：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k}+x & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k}+x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk}+x & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{ik}.$$

然后利用数学归纳法证明在 l 列上有 x 的情形，并最终得到 n 列都有 x 的情形（证明方法不唯一）.

第七题解答：（本题解答来自[2]. ）本题需要利用 n 次单位根互不相同以及它们的周期性：

$$\zeta^k \cdot \zeta^n = \zeta^k, \quad \forall k = 0, 1, ..., n-1.$$

方法一： 直接计算可知：

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_0 & \cdots & x_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \cdots & \zeta^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \zeta^{n-1} & \cdots & \zeta^{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\zeta) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & f(\zeta^{n-1}) \end{bmatrix}$$

对上式左右两端取行列式，同时注意到两侧相同的范德蒙行列式非零（因为单位根互不相同），于是得到结论.

方法二：将第 i 行乘以 ζ^{ik} 加到第1行，则行列式的 $(1,h)$ 元素变为

$$\zeta^{hk}\sum_{i=1}^{n}\zeta^{ik}x_i = \zeta^{hk} f(\zeta^k).$$

所以行列式（作为一个关于 ζ 的多项式）可以被每个 $f(\zeta^k)$ 整除. 通过比较等式两侧 x_i 的次数可以发现这确实是一个等式.（方法不唯一）.

第八题解答：结论是相等. 题目要求 P 为若干个 $P(i,j)$ 型初等矩阵（即交换第 i 行和第 j 行的初等行变换对应的矩阵）的乘积. 注意到 P' 为与 P 表示的行变换对应的列变换，我们只需证明对一次同时交换第 i,j 行和第 i,j 列的操作前后，任意的 a_{ij} 在 A 中的代数余子式和（经过行列变换可能改变位置后的）a_{ij} 在 B 中的代数余子式相等即可，而这在写下变换前后的矩阵的行列元素后不难看出（证明方法不唯一）.

参考文献

[1] 丘维声. 简明线性代数. 北京大学出版社. 2002. 第86页.

[2] 某位助教提供的期中考试解答（欢迎联系我们修改引用来源）