线性代数经济学双学位2015秋期中试题解答

_______ 学院 ________ 系　姓名 ________ 学号_________ 分数___

分数	一	二	三	四	总分

2015年11月8日

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共10小题,每小题2分，满分20分。

(1)若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 1,$ 则 $\begin{vmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} =$ ___-1___。

(2)设 A 是四阶方阵，$|A^*| = 1/8,$ 则 $|A^{-1}| =$ ___2___ 。

(3)若向量组 $\alpha_1 = (1,0,0), \alpha_2 = (9,2,4), \alpha_3 = (1,3,t)$ 线性相关，则 $t =$ ___6___ 。

(4)设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是3维列向量，并且行列式 $|(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)| = 1,$ 则

$|3(\alpha_3, -\alpha_2, \alpha_1)| =$ ___27___。

(5)设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$，则 $|AA^{\mathrm{T}}| =$ ___36___。

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, |A| = 10 - 16 = -6,$$

$$|AA^T| = |A||A^T| = |A|^2 = (-6)^2 = 36.$$

(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+2 & b+2 & c+2 \\ a+3 & b+3 & c+3 \end{vmatrix} =$ ______0______ 。

(7)若矩阵 B 满足 $B\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，则 $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ 。

(8)齐次方程组 $\begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ 2 & 4 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系所含向量个数

为___2___ 。

(9)设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$E$ 为二阶单位矩阵，2 阶矩阵 B 满足 $BA = B + 2E$，

则 $|B| =$ ___2___ 。_

$BA = B + 2E, B(A-E) = 2E,$

$|B|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = |2E| = 2^2|E| = 4, |B| \times 2 = 4, |B| = 2.$

(10)若 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $r(A^3) =$ ____1____。

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

(1)若方程组$\begin{cases} 8x_1+9x_2+10x_3=0, \\ \qquad -x_2+2x_3=0, \\ \quad 2x_2+tx_3=0, \end{cases}$ 存在非零解，则常数$t=$

(A)-4 (B)4 (C)-2 (D)2 [A]

(2)设有矩阵$A_{3\times 2},B_{4\times 3},C_{2\times 3}$，则下列运算有意义的是

(A)$(A+B)C$ (B)$B(C^{\mathrm{T}}+A)$ (C)CBA (D)$(ABC)^{\mathrm{T}}$

[B]

(3)设A,B是两个n阶矩阵，满足$(AB)^2=E$，则

(A) $AB=E$或$AB=-E$ (B)$|A||B|=1$

(C) $AB=BA$ (D) $(BA)^2=E$

[D]

$(AB)^2=E, AB=(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, BABA=E.$

(4)设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$可用向量组$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，并且$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性无关，则必定成立的是

(A)$s>t$ (B)$s<t$ (C)$s\le t$ (D)$s=t$

[C]

(5) 设A是3阶矩阵，将A的第二行加到第一行得B，将B的第一列-1倍加到第二列上得C。记$P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则

(A) $C=P^{-1}AP$ (B) $C=PAP^{-1}$ (C) $C=P^{\mathrm{T}}AP$ (D) $C=PAP^{\mathrm{T}}$

[B]

(6)若方阵A,B,C满足$ABC=E$，则必定成立

(A)$BAC=E$　(B)$ACB=E$　(C)$CBA=E$　(D)$BCA=E$

[D]

$ABC=A(BC)=E\Rightarrow(BC)A=BCA=E.$

(7)设$r(A_{m\times n})=r<m$，则在A的行向量组中

(A)任意r个向量线性无关　(B)存在r个向量线性无关

(C)任意r个向量都是其极大线性无关组(D)$r<n$

[B]

(8)齐次方程组$A_{m\times n}X=O$存在非零解的充分必要条件是

(A)A的行向量组线性相关(B)A的列向量组线性相关

(C)$r(A_{m\times n})<m$　(D)$m<n$

[B]

(9)设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 n 维列向量，A 是$m\times n$矩阵，则

(A) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s=o,x_1,\cdots,x_s$不全为零，

$A(x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_s\alpha_s)=x_1A\alpha_1+x_2A\alpha_2+\cdots+x_sA\alpha_s=o.$

(B) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

(C) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(D) 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

[A]

(10)若二阶对角矩阵A不是数量矩阵，并且满足方程

$A^2-A-6E=O$，则A的所有元素的和是

(A)1　(B)-1　(C)6　(D)-4　[A]

三、计算题(本题共 5 小题，每小题 10 分，满分为 50 分)

(1)计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 10 & 6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & 12 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 \\ 10 & 12 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 12 & 14 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times(-2)\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 12 & 14 \end{vmatrix} = 6\times 4\times\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 3 & 14 \end{vmatrix}$$

$$= 24\times(2\times 14 - 3\times 9) = 24.$$

(2)计算行列式 $\begin{vmatrix} 2^5 & 4^5 & 3^5 & 5^5 & 6^5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \end{vmatrix}$。

解

$$\begin{vmatrix} 2^5 & 4^5 & 3^5 & 5^5 & 6^5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \end{vmatrix} = 2\times 4\times 3\times 5\times 6\times \begin{vmatrix} 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \end{vmatrix}$$

$$= -720\times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 6 \\ 2^2 & 4^2 & 3^2 & 5^2 & 6^2 \\ 2^3 & 4^3 & 3^3 & 5^3 & 6^3 \\ 2^4 & 4^4 & 3^4 & 5^4 & 6^4 \end{vmatrix}$$

$$= -720\times(6-2)(6-4)(6-3)(6-5)(5-2)(5-4)(5-3)(3-2)(3-4)(4-2)$$

$$= 720\times 4\times 2\times 3\times 3\times 2\times 2 = 207360.$$

(3) 给定向量组 I：$\alpha_1=(1,2,7,6), \alpha_2=(-1,1,5,3), \alpha_3=(0,-1,-4,-3)$, $\alpha_4=(1,0,-2,-1)$, $\alpha_5=(1,2,9,8)$。求 I 的一个极大无关组 II，并且用 II 表示 I 的其余向量。

解一

α_1=(1,2,7,6), $\alpha_2=(-1,1,5,3)$, $\alpha_3=(0,-1,-4,-3)$, $\alpha_4=(1,0,-2,-1)$, $\alpha_5=(1,2,9,8)$

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\2&1&-1&0&2\\7&5&-4&-2&9\\6&3&-3&-1&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&3&-1&-2&0\\0&12&-4&-9&2\\0&9&-3&-7&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&3&-1&-2&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&3&-1&-2&0\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&1&1\\0&3&-1&-2&0\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&3&-1&0&-4\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0&3\\0&1&-1/3&0&-4/3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1/3&0&5/3\\0&1&-1/3&0&-4/3\\0&0&0&1&-2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

极大无关组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$，并且

$$\alpha_2=(-1/3)\alpha_1+(-1/3)\alpha_2,$$

$$\alpha_5=(5/3)\alpha_1-(4/3)\alpha_2-2\alpha_4.$$

解二

以所给向量做**行**，写出矩阵，右端标出各个向量的记号，并且做初等**行变换**，同时用向量记号表示所做的变换，得到**阶梯形**矩阵，非零行的行数即为极大无关组向量个数r。零行对应的向量的线性组合等于零向量给出某r个向量表示其余所有向量的表达式，这r个向量即时所求的一个极大无关组。

$\alpha_1=(1,2,7,6),\alpha_2=(-1,1,5,3),\alpha_3=(0,-1,-4,-3),\alpha_4=(1,0,-2,-1),\alpha_5=(1,2,9,8)$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&2&7&6\\-1&1&5&3\\0&-1&-4&-3\\1&0&-2&-1\\1&2&9&8\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{array}\to\begin{pmatrix}1&2&7&6\\0&3&12&9\\0&-1&-4&-3\\0&-2&-9&-7\\0&0&2&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\alpha_1\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4-\alpha_1\\\alpha_5-\alpha_1\end{array}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&7&6\\0&-1&-4&-3\\0&3&12&9\\0&-2&-9&-7\\0&0&2&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\alpha_1\\\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2\\\alpha_4-\alpha_1\\\alpha_5-\alpha_1\end{array}\to\begin{pmatrix}1&2&7&6\\0&-1&-4&-3\\0&0&0&0\\0&0&-1&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}\begin{array}{c}\alpha_1\\\alpha_3\\\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3\\\alpha_4-\alpha_1-2\alpha_3\\\alpha_5-\alpha_1\end{array}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&7&6\\0&-1&-4&-3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{c}\alpha_1\\\alpha_3\\-\alpha_4+\alpha_1+2\alpha_3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\\-3\alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5\\\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3\end{array}$$

$-3\alpha_1-4\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5=o,$

$\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=o.$

$$\begin{cases}\alpha_5=3\alpha_1+4\alpha_3-2\alpha_4,\\\alpha_2=-\alpha_1-3\alpha_3.\end{cases}$$

$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$一个极大无关组，并且有表达式

$$\begin{cases}\alpha_5=3\alpha_1+4\alpha_3-2\alpha_4,\\\alpha_2=-\alpha_1-3\alpha_3.\end{cases}$$

(4)讨论p,t为何值时，方程组

$$
\mathrm{I}:\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t \end{cases}
$$

无解？有解？如果 I 有无穷个解，用 I 的特解和 I 的导出组的基础解系表示 I 的全部解。

解

$$
(A\,|\,\beta)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & t \end{pmatrix}
$$

$$
\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{pmatrix}=B.
$$

$t\neq -2$ 时无解，$t=-2$ 时，对于任意 $p, r(A)=r(A,\beta)\leq 3<4,$ 方程组有无穷个解。

$$
t=-2, p=-8,
$$

$t=-2, p=-8$ 时 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

$$
\begin{cases} x_1=-1+4x_3-x_4, \\ x_2=1-2x_3-2x_4. \end{cases} \begin{cases} x_1=4x_3-x_4, \\ x_2=-2x_3-2x_4. \end{cases}
$$

特解$\xi_0=(-1,1,0,0)^T$,

基础解系$\eta_1=(4,-2,1,0)^T,\eta_2=(\xi-1,-2,0,1)^T$.

所有解$\xi=\xi_0+c_1\eta_1+c_2\eta_2$.

$t=-2,p\neq -8$时,

$$B=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&3&0\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\to.\begin{pmatrix}1&0&0&1&-1\\0&1&0&2&1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

特解$\xi_0=(-1,1,0,0)$,

基础解系$\eta=(-1,-2,0,1)$,

所有解$\xi=\xi_0+c\eta$.

(5) 求$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{3}&\mathbf{3}\\\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{0}\\\mathbf{-1}&\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{pmatrix}$的逆矩阵和伴随矩阵。

解

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A\,E)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

$$A^* = |A| A^{-1} = (-2)\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & -3/2 \\ 1/2 & -5/2 & -3/2 \\ -1/2 & 7/2 & 5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

四、证明题(本题共 2 小题，每小题 5 分，满分为 10 分

(1)证明：如果$\alpha_1,\cdots\alpha_s$可以用$\beta_1,\cdots,\beta_t$线性表示，并且$s>t$，则$\alpha_1,\cdots\alpha_s$线性相关。

证明 由假设，$\alpha_i = \sum_{j=1}^{t} a_{ij}\beta_j, i=1,\cdots,s.$为了使得

$\sum_{i=1}^{s} x_i\alpha_i = o,$ 只需$\sum_{i=}^{s} x_i \left(\sum_{j=1}^{t} a_{ij}\beta_j\right)_i = o.$由于

$$\sum_{i=1}^{s} x_i \left(\sum_{j=1}^{t} a_{ij}\beta_j\right) = \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i\beta_j\right) = \sum_{j=1}^{t}\left(\sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i\right)\beta_j,$$

只需

$$(*)\sum_{i=1}^{s} a_{ij}x_i = 0, j=1,\cdots,t.$$

由于$s>t,$这个齐次方程组有非零解$x_1,\cdots,x_n$，对于这个解有

$\sum_{i=1}^{s} x_i\alpha_i = o,$故$\alpha_1,\cdots\alpha_s$线性相关。

(2) 证明行列式$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^{-1} \\ n^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$(n>1)$的所有代数余子式的和是$\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2(n-1)!}$。

解一

先通过初等变换求逆矩阵A^{-1}，再利用公式$A^* =|A|A^{-1}$求伴随矩阵。

$a_i = 1/i.$

$$(A\ E)=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$|A|=(-1)^{n+1}a_1\cdots a_n,\ A^*=|A|A^{-1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)a_1\cdots a_n=(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}(1/a_i)a_1\cdots a_n$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}i}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2n!}=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2(n-1)!}.$$

解二

$a_{i(i+1)}$ 的代数余子式

$$A_{i(i+1)}=(-1)^{i+i+1}(-1)^{n-1+1}\frac{i}{n!}=(-1)^{n+1}\frac{i}{n!},i=1,\cdots,n-1.$$

$$A_{n1}=(-1)^{n+1}\frac{n}{n!}.$$

其余的代数余子式为 0，故

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}==\frac{(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}i}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2n!}=\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2(n-1)!}.$$

解三

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^{-1} \\ n^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}/n!$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^{-1} \\ n^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} (i) = (-1)^{n+1}\frac{i}{n!}, i=1,\cdots,n-1.$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{nj} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)^{-1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n!}.$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} == \frac{(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n} i}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}n(n+1)}{2n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2(n-1)!}.$$