2023-2024 秋学期期中模拟考试（非数学组）

满分：100 分

2023 年 10 月 22 日 18:40-20:40

请在答题纸开头最显眼的地方标明你的考试选项:(1) 仅高数 (2) 高数、线代

一 (20 分). 求极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}$.　　(2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1^\alpha+3^\alpha+\cdots+(2n+1)^\alpha\right)^{\beta+1}}{\left(2^\beta+4^\beta+\cdots+(2n)^\beta\right)^{\alpha+1}}$. (其中 $\alpha,\beta\neq-1$) (提示: 定积分)

二 (15 分). 计算不定积分.

(1) $\displaystyle\int(3x+10)^{20}\mathrm{d}x$.　(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.　(3) $\displaystyle\int\frac{\sin^4 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x$.

三 (15 分). 求微分或导数.

(1) 设 $\begin{cases}x=\arctan t\\ y=\ln(1+t^2)\end{cases}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.　(2) 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$，求 $f^{(n)}(x)$.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq0,\\ 0,\ x=0\end{cases}$，求 $f^{(n)}(0)$. (提示: 数学归纳法)

四 (10 分).

(1) 设 $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x},\ x\neq0;\\ 0,\ x=0\end{cases}$ (n 为自然数)，问：(i) n 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续? (ii) n 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导? (iii) n 取何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处导函数连续?

(2) 作一函数在 $\mathbb{R}$ 上二阶可导，且 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，在其他点处都连续.

五 (10 分). 从以下 (A)(B)(C)(D) 中**任选一题**作答. **若只考高数, 则都需作答**.

(A). 设 $u_1>0,u_{n+1}=3+\frac{4}{u_n}(n\geq1)$，证明 $\{u_n\}$ 极限存在并求之.

(B). (1) 证明数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,n\geq1$ 极限存在; (2) 记 (1) 中的极限为 γ，证明下列极限存在并求之：$y_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},n\geq1$.

(C). 求积分: (1) $\int_0^\pi\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$. (2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$.

(D). 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调递减，且 $f(0)=1,f(1)=0$，证明：对任意 $\delta\in(0,1)$，成立：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_\delta^1(f(x))^n\mathrm{d}x}{\int_0^\delta(f(x))^n\mathrm{d}x}=0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\int_0^\delta(f(x))^{n+1}\mathrm{d}x}{\int_0^1(f(x))^n\mathrm{d}x}=1$.

六 (10 分).

1. (3 分). 令 $A = (\min(i,j))_{1\le i,j\le n}$. 求 $\det(A)$.
2. (3 分). 令 $A = (\max(i,j))_{1\le i,j\le n}$. 求 $\det(A)$.
3. (4 分). 求 x, y 使得 $\operatorname{rank}(A)$ 最小，其中

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & -1 & -1 \\ -1 & y & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

七 (10 分). 证明任意秩为 r 的矩阵可以表示为 r 个秩为 1 的矩阵之和.

八 (10 分). 设 n 阶方阵 $A = (a_{ij}(x))$ 由可微函数构成. 证明: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\det(A) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} a'_{ij}(x)$. (这里 A_{ij} 是代数余子式.)