

高等数学 (A) (三) 21-22 秋季学期期末考试

1、判断下列广义积分的敛散性。

$$(1) \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/3}} \quad (2) \int_2^\infty \frac{dx}{x^p \ln x} \quad (3) \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

2、 $F(y, a) = \int_0^a \frac{\ln(1+x^2)}{y} dx$, 求 $\frac{d}{dy} F(y, y)$ 。

3、函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上定义为 $f(x) = \begin{cases} -\pi, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, 求 $f(x)$ 的傅氏级数与傅氏级数的和函数。

4、求积分 $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bxdx$ ($a > 0$)。

5、题目告知 Γ 函数与 B 函数的定义

(1) 证明 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, 并求 $\Gamma(n + \frac{1}{2})$, n 为非负整数。

(2) 证明 $B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q)$ 。

6、 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有连续的导数, 并满足 $f(-\pi) = f(\pi)$ 与 $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$, 是否有 $f(x)$ 满足 $\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx$ 。如果有, 求出这样的函数; 如果没有, 说明理由。