线性代数

22-23 秋期中模拟题答案

马艺铭
SMS.PKU
WX：YM-QED

解答:

① $A=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2333 & 2233 & 2223 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$，计算 $203A_{21}+298A_{22}+399A_{23}$

解：一定要记得运用行列式的形质来计算形如 $\sum_{i=1}^{n} c_i A_{ij}$ 这类表达式

一个方便的看法是把 A_{ij} 看作是 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ 将 a_{ij} 替换为 1

所在行/列其它位置替换为 0

例: $A_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2233 & 2223 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$

行列式按第2行展开

原式 $\overset{\downarrow}{=}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 203 & 298 & 399 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$ → 看到了分数

其实我的整数运算也不太好，但是比分数运算好一点. ~ ——柳彬

$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 203 & 298 & 399 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

观察到 $203:298:399 \approx 2:3:4$

故可使用拆分法：$(203,298,399)=(200,300,400)+(3,-2,-1)$

$=\underbrace{\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 200 & 300 & 400 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{由行列式性质，得 } 0}+\underbrace{\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}_{\text{可以用化简行阶梯形的方法计算}}$

$=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$\overset{\substack{②+①\cdot 3 \\ ③+①\cdot 2}}{=}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 9 & 14 \end{vmatrix}$ 接下来怎么算都可以

$\overset{\text{按第一列展开}}{=\!=}\frac{1}{6}\times(-1)^{1+1}\times(-1)\times\begin{vmatrix} 7 & 14 \\ 9 & 14 \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{6}\times(-1)\times 7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 14 \end{vmatrix}$

$=\frac{1}{6}\times(-1)\times 7\times[1\times 14-2\times 9]$

$=\frac{14}{3}$

写得很麻烦

$\overset{③+②\cdot(-1)}{=}\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ 继续行变换⋯

$=\frac{1}{6}\times 2\times 7\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\overset{③+②\cdot(-1)}{=}\frac{1}{6}\times 2\times 7\times(-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$=\frac{14}{3}$

②
$$\begin{vmatrix} x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$$

方法1：当我们忽视掉元素 x_i 时，矩阵形如 $\boxed{\text{秩1矩阵}}$ $(a_ib_j)_{1\le i,j\le n} = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1 \cdots b_n)$

故~~此~~最自然的做法就是加边法

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & x_1+a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{②+①\cdot(-a_1)\\ \vdots \\ (n+1)+①\cdot(-a_n)}}{=} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_1 & x_1 & & & \\ -a_2 & & x_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_n & & & & x_n \end{vmatrix}$$

爪子形矩阵！ $\begin{cases}\text{列变换}\\ \text{按第一列展开}\end{cases}$

要求 $x_i\neq 0$

$$\underset{①+②\cdot\frac{a_1b_1}{x_1}+\cdots+(n+1)\cdot\frac{a_nb_n}{x_n}}{=} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{x_i} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & x_1 & & & \\ 0 & & x_2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & x_n \end{vmatrix} = \left(1+\sum_{i=1}^n\frac{a_ib_i}{x}\right)\cdot\prod_{i=1}^n x_i$$

方法2：第一个列向量中 $b_1\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\ \vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的部分重复出现了许多列，故可以用拆分法

$$\text{原式} = \begin{vmatrix} x_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix} + b_1\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2 & x_2+a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_nb_2 & \cdots & x_n+a_nb_n \end{vmatrix}}_{=b_1\cdot\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ a_2 & x_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_n & & & x_n \end{vmatrix}}$$

故用归纳法即可

方法3：把每个列向量都拆成 $x_je_j + b_j\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 的形式

于是行列式可以拆分为 2^n 个行列式的和 $\sum\det(v_1\ v_2\cdots v_n)$

其中 $v_i = x_ie_i$ 或 $v_i = b_j\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$

这些行列式中，不为0的项只有 $b_j\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}$ 不出现或只出现一次的项

$$\therefore\ \text{原式} = \det(x_1e_1,\cdots,x_ne_n) + \sum_{i=1}^n \det\left(x_1e_1,\cdots,b_i\cdot\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\cdots x_ne_n\right)$$

$$= x_1x_2\cdots x_n + \sum_{i=1}^n x_1\cdots x_{i-1}b_ia_ix_{i+1}\cdots x_n$$

□

③ 增广矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 17 & 34 & 0 & -68 & 119 \\ 7 & 14 & 20 & 32 & 9 \\ 7 & 14 & 30 & 62 & -11 \end{array}\right] \xrightarrow{③+②\cdot(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 17 & 34 & 0 & -68 & 119 \\ 7 & 14 & 20 & 32 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 30 & -20 \end{array}\right]$$

观察到相同数字

最大公因数是1！

(i) $①+②\cdot(-2)$，$③\cdot\frac{1}{10}$

$$\xrightarrow{} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & -40 & -132 & 101 \\ 7 & 14 & 20 & 32 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

(i) $17 + 7\cdot(-2) = 3$

(ii) $7 + 3\cdot(-2) = 1$

(iii) $3 + 1\cdot(-3) = 0$

$$\gcd(17,7) = \gcd(7,3) = \gcd(3,1) = \gcd(1,0) = 1$$

观察到 $-40 : -132 : 101$ 与 $1 : 3 : -2$ 比较接近

$$\xrightarrow{①+③\cdot 40} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 0 & -12 & 21 \\ 7 & 14 & 20 & 32 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

可选步骤，不必要

(ii)
$$\xrightarrow{②+①\cdot(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 0 & -12 & 21 \\ 1 & 2 & 20 & 56 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

观察 $20:56:-33$ 与 $1:3:-2$ 接近，同样不必要)

$$\xrightarrow{②+③\cdot(-20)} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 6 & 0 & -12 & 21 \\ 1 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right]$$

(iii) $①+②\cdot(-3)$，$(①,②)(②③)$

$$\xrightarrow{} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \text{1列} & & \text{3列} & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(简化阶梯形)

RMK：注意弄清简化行阶梯形的定义！
只要求主元上方没有非零数字！

这是避免分数运算的典型方法

这个方法可以推广到含参数的情形

只需每次都去考虑最大公因式

解得：$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 4x_4 + 7 \\ x_3 = -3x_4 - 2 \end{cases}$，$x_2, x_4$ 为自由变量

$\therefore$ 特解 $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 \\ \\ 3 \\ \\ \end{matrix}$，导出组基础解系 $\eta_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 主 自 $\quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 主变量 自由变量

故解集 $U = \{\gamma_0 + c_1\eta_1 + c_2\eta_2 \mid c_1, c_2 \in K\}$

由于零向量 $0 \notin U$，故 U 不是 K^4 的线性子空间

RMK：此题最简单的做法：$①\cdot\frac{1}{17}$

我的数凑得不太好 QAQ

④. See §2.5/7.

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(①,②)} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2b & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

公因式 1

$$\xrightarrow[③+①\cdot(-1)]{②+①\cdot(-a)} \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 2-a \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

公因式 1

$$\xrightarrow[②+③\cdot(a)]{①+③\cdot(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{③+②\cdot(-b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \\ 0 & 0 & b(a-1) & b(a-2) \end{bmatrix}$$ 阶梯形

(i) 求 $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \rangle$ 的一组基

翻译：求出所有主元的位置（主元所在的原来矩阵的列向量）.

① $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$，则主元指标为 $j_1=1$, $j_2=2$, $j_3=3$ （第1,2,3列）

故基为 $\alpha_1=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 2b \end{bmatrix}$, $\alpha_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

② $b\neq 0$ 且 $a=1$，则主元 $j_1=1$, $j_2=2$, $j_3=4$ （第1,2,4列）

故基为 $\alpha_1=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 2b \end{bmatrix}$ $\alpha_4=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

③ $b=0$，则主元只有两个：$j_1=1$, $j_2=2$

故基为 $\alpha_1=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2=\begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 2b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(ii) 把上面矩阵看成增广矩阵，类似讨论即可. 答案见课本 §2.5/7.

⑤ (i) $P=\begin{bmatrix}1&1&1\\ \lambda-1&\lambda&0\\ \lambda&\lambda+1&0\end{bmatrix}$, $|P|=(-1)^{1+3}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}\lambda-1&\lambda\\ \lambda&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)-\lambda^2=-1$

(ii) 欲将P化为阶梯形，则对 (I, P) 作行变换 $\longrightarrow (Q, PQ)$

$$\begin{bmatrix}1&&&1&1&1\\ &1&&\lambda-1&\lambda&0\\ &&1&\lambda&\lambda+1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[③+①\cdot(-\lambda)]{②+①\cdot(1-\lambda)}\begin{bmatrix}1&&&1&1&1\\ 1-\lambda&1&&0&1&1-\lambda\\ -\lambda&&1&0&1&-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[③\cdot(-1)]{③+②(-1)}\begin{bmatrix}1&&&1&1&1\\ 1-\lambda&1&&0&1&1-\lambda\\ 1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{②+③\cdot(\lambda-1)}\begin{bmatrix}1&&&1&1&1\\ 0&\lambda&1-\lambda&0&1&0\\ 1&1&-1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[①+③(-1)]{①+②\cdot(-1)}\begin{bmatrix}0&-1-\lambda&\lambda&1&&\\ 0&\lambda&1-\lambda&&1&\\ 1&1&-1&&&1\end{bmatrix}$$

故 $\exists\, Q=\begin{bmatrix}0&-1-\lambda&\lambda\\ 0&\lambda&1-\lambda\\ 1&1&-1\end{bmatrix}$ s.t. $Q\cdot P=\begin{bmatrix}1&&\\ &1&\\ &&1\end{bmatrix}$.

⑥. 1. A的向量组为 $Px=0$ 基础解系，求证：B的列向量组也是 $\Leftrightarrow \exists C, |C| \neq 0$ s.t. $B = A\cdot C$

Pf: "当且仅当"要证明两个方向

"$\Leftarrow$"（充分性） 已知 $B = A\cdot C$，$|C|\neq 0$，欲证 B的列向量组是基础解系.

· 回忆 基础解系 $\begin{cases} ① 由解构成的向量组 \\ ② 线性无关 \\ ③ 任何解都能被表出. \end{cases}$

设 $B=(\beta_1, \cdots, \beta_n)$，$A=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$

① 则由 $B = A\cdot C$，有 $\beta_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot c_{ij} = c_{1j}\alpha_1 + \cdots + c_{nj}\alpha_n$

$\therefore$ β_j 是解向量

② 验证 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 线性无关 判定：$\begin{cases} ① 方程 \quad （定义） \\ ② 行列式 \quad （方阵） \\ ③ 秩 \quad （能表出别的向量） \end{cases}$

按①方程验证：

令 $x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n = 0$

则 $(\beta_1 \cdots \beta_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$= (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n \\ \cdots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n \end{pmatrix} = 0$

由于 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 是基础解系 $\Rightarrow$ 线性无关

故 $\begin{cases} c_{11}x_1 + \cdots + c_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ c_{n1}x_1 + \cdots + c_{nn}x_n = 0 \end{cases}$，其系数矩阵行列式 $|C| \neq 0$

$\therefore$ $x_1 \cdots x_n$ 只存零解

故 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 线性无关.

③ 任何解能被表出 判定 $\begin{cases} \text{Prop } 3.2/1 \\ \text{Thm } 3.5/1 \end{cases}$

任取一解 γ，则 ~~rank~~ $\{\beta_1, \cdots \beta_n, \gamma\}$ 被 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ 表出

$\Rightarrow \text{rank}\{\beta_1 \cdots \beta_n\ \gamma\}$ ~~线性相关~~ $\leq \text{rank}\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\} = n$

$\Rightarrow$ $\beta_1 \cdots \beta_n\ \gamma$ 线性相关

又 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 线性无关

故（由判定1），γ 被 $\beta_1 \cdots \beta_n$ 表出

□

"$\Rightarrow$" 必要性：

设 $\{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ 与 $\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$ 均是 $Px=0$ 基础解系. $A=(\alpha_1 \cdots \alpha_n)$ $B=(\beta_1 \cdots \beta_n)$

则 $\{\beta_1 \cdots \beta_n\}$ 可被 $\{\alpha_1 \cdots \alpha_n\}$ 表出，即存在 $(c_{ij})_{n\times n}$ s.t.

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 c_{11} + \cdots + \alpha_n c_{n1} \\ \cdots \\ \beta_n = \alpha_1 c_{1n} + \cdots + \alpha_n c_{nn} \end{cases}$$

$$\text{i.e. } B=(\beta_1 \cdots \beta_n) = (\alpha_1 \cdots \alpha_n) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = A \cdot C$$

下面只需证明 $|C| \neq 0$

$\Leftrightarrow$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 满秩

由于 $B = A \cdot C$

$$\therefore \underset{\substack{\parallel \\ n}}{\operatorname{rank}(B)} = \operatorname{rank}(A \cdot C) \leq \operatorname{rank}(C) \leq n$$

$\therefore \operatorname{rank}(C) = n$

故 C 的列/行向量组线性无关 $\Rightarrow |C| \neq 0$

$\square$.

⑥ 2. $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ $B=(\beta_1\cdots\beta_n)$

(i) $\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}\cong\{\beta_1\cdots\beta_s\}$，对任何 $1\le s\le n$. 则存在上三角 T s.t. $A=BT$.

Pf:

思路：
$$(\alpha_1,\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)\cdot\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n}\\ & t_{22} & t_{23} & & \vdots\\ & & t_{33} & & \vdots\\ & & & \ddots & \\ & & & & t_{nn}\end{pmatrix}$$

即 $\alpha_1=t_{11}\beta_1$ 被 β_1 表出

$\alpha_2=t_{12}\beta_1+t_{22}\beta_2$ 被 β_1,β_2 表出

$\cdots$

$\alpha_s=t_{1s}\beta_1+t_{2s}\beta_2+\cdots+t_{ss}\beta_s$ 被 $\beta_1\cdots\beta_s$ 表出.

由于 $\{\alpha_1\cdots\alpha_s\}\cong\{\beta_1\cdots\beta_s\}$，故 α_s 可被 $\{\beta_1\cdots\beta_s\}$ 线性表出

即存在 $t_{1s},t_{2s},\cdots t_{ss}$ 使得

$$\alpha_s=t_{1s}\beta_1+t_{2s}\beta_2+\cdots+t_{ss}\beta_s$$
$$=(\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_s)\cdot\begin{pmatrix}t_{1s}\\t_{2s}\\\vdots\\t_{ss}\end{pmatrix}$$
$$=(\beta_1\,\beta_2\,\cdots\,\beta_n)\cdot\begin{pmatrix}t_{1s}\\\vdots\\t_{ss}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

故 $A=(\alpha_1\cdots\alpha_n)=(\beta_1\cdots\beta_n)\begin{pmatrix}t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n}\\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n}\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn}\end{pmatrix}$

(ii) A列满秩，欲证 T 对角线非 0.

思路：T 对角非零 $\Leftrightarrow$ $|T|\neq 0$ （因为是上三角矩阵）

可以看秩

$$A=B\cdot T$$

$\therefore$ $\underset{n}{\underset{\parallel}{\operatorname{rank}(A)}}=\operatorname{rank}(B\cdot T)\le\operatorname{rank}(T)\le n$

$\Rightarrow\operatorname{rank}(T)=n$ $\Rightarrow$ T 列向量组线性无关 $\Rightarrow|T|\neq 0$ □

7.1

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{1+x_1y_1} & \cdots & \frac{1}{1+x_1y_n} \\ \frac{1}{1+x_2y_1} & \cdots & \frac{1}{1+x_2y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{1+x_ny_1} & \cdots & \frac{1}{1+x_ny_n} \end{vmatrix} \xlongequal[\text{ⓝ}+\text{①}\cdot(-1)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-1)\ \cdots} \begin{vmatrix} \frac{1}{1+x_1y_1} & \cdots & \frac{1}{1+x_1y_n} \\ \frac{(x_2-x_1)y_1}{(1+x_1y_1)(1+x_2y_1)} & \cdots & \frac{(x_2-x_1)y_n}{(1+x_1y_n)(1+x_2y_n)} \\ \vdots & & \\ \frac{(x_n-x_1)y_1}{(1+x_1y_1)(1+x_ny_1)} & \cdots & \frac{(x_n-x_1)y_n}{(1+x_1y_n)(1+x_ny_n)} \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{1+xy} - \frac{1}{1+x'y} = \frac{(x'-x)y}{(1+xy)(1+x'y)}$$

$$\xlongequal{\text{提出列/行中公因式}} \frac{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(1+x_1y_1)\cdots(1+x_1y_n)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{1+x_2y_1} & \frac{y_2}{1+x_2y_2} & \cdots & \frac{y_n}{1+x_2y_n} \\ \vdots & \vdots & & \\ \frac{y_1}{1+x_ny_1} & \frac{y_2}{1+x_ny_2} & \cdots & \frac{y_n}{1+x_ny_n} \end{vmatrix}$$

抄下来

$$\xlongequal[\text{ⓝ}+\text{①}\cdot(-1)]{\text{②}+\text{①}\cdot(-1)\ \cdots} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{y_1}{1+x_2y_1} & \frac{y_2-y_1}{(1+x_2y_1)(1+x_2y_2)} & \cdots & \frac{y_n-y_1}{(1+x_2y_1)(1+x_2y_n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_1}{1+x_ny_1} & \frac{y_2-y_1}{(1+x_ny_1)(1+x_ny_2)} & & \frac{y_n-y_1}{(1+x_ny_1)(1+x_ny_n)} \end{vmatrix}$$

$$\frac{y}{1+xy} - \frac{y'}{1+xy'} = \frac{y-y'}{(1+xy)(1+xy')}$$

$$= \frac{(x_2-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(1+x_1y_1)\cdots(1+x_1y_n)} \cdot \frac{(y_2-y_1)\cdots(y_n-y_1)}{(1+x_2y_1)\cdots(1+x_ny_1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{1+x_2y_2} & \cdots & \frac{1}{1+x_2y_n} \\ & \vdots & & \\ & \frac{1}{1+x_ny_2} & \cdots & \frac{1}{1+x_ny_n} \end{vmatrix}$$

同类型行列式

故可归纳地得到

$$\text{原式} = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(y_j-y_i)}{\prod_{1\le i,j\le n}(1+x_iy_j)} \quad \square$$

(7.2)
$$D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ z & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

第一行 $(x, y, \cdots y)$
$(x-y, 0, \cdots, 0)$
$= (y, y, \cdots, y) + (x-y, 0, \cdots, 0)$

拆分法
$$= \begin{vmatrix} x-y & 0 & \cdots & 0 \\ z & x & y \cdots & y \\ z & z & \ddots & y \\ z & z & \cdots z & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y & y & \cdots & y \\ z & x & y \cdots & y \\ \vdots & \ddots & \ddots & y \\ z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)\cdot D_{n-1} + y\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z & x & y \cdots & y \\ \vdots & z & \ddots & y \\ z & z & \cdots z & x \end{vmatrix}$$

化行阶梯形 $\overset{②+①\cdot(-z)}{\underset{ⓝ+①\cdot(-z)}{\vdots}}$

$$= (x-y)D_{n-1} + y\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-z & y-z \cdots & y-z \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & y-z \\ 0 & \cdots & 0 & x-z \end{vmatrix}$$

$$= (x-y)D_{n-1} + y(x-z)^{n-1}$$

i.e. $D_n = (x-y)D_{n-1} + y\cdot(x-z)^{n-1}$ …… (*)

由于该行列式与其转置相等，同理可得

$D_n = (x-z)D_{n-1} + z\cdot(x-y)^{n-1}$ …… (△)

(*)，(△) 联立，消去 D_{n-1}，得

$$D_n = \frac{y(x-z)^n - z(x-y)^n}{y-z} \quad (y \neq z)$$

⑦.3 先按最后一列展开，再按最后一行展开即可

⑦.4 记 $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$

则 $P_{23} = \tilde{A}_{11}$ ，$P_{31} = \tilde{A}_{12}$ ，$P_{12} = \tilde{A}_{13}$

均为 $\tilde{A}$ 的代数余子式

类似于第1题

$$P_{1j}P_{23} + P_{2j}P_{31} + P_{3j}P_{12} = \begin{vmatrix} P_{1j} & P_{2j} & P_{3j} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

注意到其第一行

$$(P_{1j}, P_{2j}, P_{3j}) = b_j(a_1, a_2, a_3) - a_j(b_1, b_2, b_3)$$

是 (a_1, a_2, a_3) 与 (b_1, b_2, b_3) 的线性组合

故行列式为 0

$\square$

7.5 欲将该矩阵拆成两个矩阵的乘积

为此要先拆成若干秩为1的矩阵之和.

$$\begin{bmatrix} S_0 & S_1 & \cdots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \cdots & S_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & \cdots & S_{2n-2} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 1 & x_i & \cdots & x_i^{n-1} \\ x_i & x_i^2 & \cdots & x_i^n \\ \vdots & \vdots & & \\ x_i^{n-1} & x_i^n & \cdots & x_i^{2n-2} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \\ \vdots \\ x_i^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_i & \cdots & x_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

例: $\cancel{\begin{pmatrix} 1+1 & 2^1+3^1 \\ 2^1+3^1 & 2^2+3^2 \end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & x+y \\ x+y & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & y \\ y & y^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} (1 \ x) + \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} (1 \ y)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}.$$

例: $\begin{pmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & x_2y_2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1) + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} (y_1 \ y_2)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

7.6 $\left|\left(a_i+b_j\right)^3\right|_{4\times4} = \begin{vmatrix} (a_1+b_1)^3 & \cdots & (a_1+b_4)^3 \\ \vdots & & \\ (a_4+b_1)^3 & \cdots & (a_4+b_4)^3 \end{vmatrix}$

该矩阵可以拆为矩阵乘积、为此，先拆成秩为1矩阵之和

$$\left(\left(a_i+b_j\right)^3\right)_{4\times4} = \left(a_i^3+3a_i^2b_j+3a_ib_j^2+b_j^3\right)_{4\times4}$$

$$= \left(a_i^3\right)_{4\times4} + 3\cdot\left(a_i^2b_j\right)_{4\times4} + 3\left(a_ib_j^2\right)_{4\times4} + \left(b_j^3\right)_{4\times4}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \\ a_4^3 \end{pmatrix}(1\ 1\ 1\ 1) + 3\cdot\begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \\ a_4^2 \end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3\ b_4)$$

$$+ 3\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}\cdot\left(b_1^2, b_2^2, b_3^2\ b_4^2\right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\left(b_1^3\ b_2^3\ b_3^3\ b_4^3\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1^3 & a_1^2 & a_1 & 1 \\ a_2^3 & a_2^2 & a_2 & 1 \\ a_3^3 & a_3^2 & a_3 & 1 \\ a_4^3 & a_4^2 & a_4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 & b_4^2 \\ b_1^3 & b_2^3 & b_3^3 & b_4^3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det\left(\left(a_i+b_j\right)^3\right)_{4\times4} = (-1)^6 \cdot \prod_{1\le i<j\le4}(a_j-a_i)\cdot 9\cdot\prod_{1\le i<j\le4}(b_j-b_i)$$

$$= 9\prod_{1\le i<j\le4}(a_j-a_i)(b_j-b_i)$$

$\square$

⑧

1. (i) $\text{rank}(A_{s\times n}) = r$，则存在 B 列满秩、C 行满秩 s.t. $A = B\cdot C$

Pf: 记 $A = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，~~由~~ 取 B 的列向量为 A 列向量组的一个极大线性无关组 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$

则 A 的任一列向量 α_j 都被 $\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 线性表出，

即
$$\alpha_j = c_{1j}\alpha_{i_1} + c_{2j}\alpha_{i_2} + \cdots + c_{rj}\alpha_{i_r}$$
$$= (\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}) \cdot \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix}$$

i.e.
$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) = (\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}) \cdot \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & & c_{rn} \end{pmatrix} = B \cdot C$$

· 下面验证 B 列满秩、C 行满秩

B 列满秩是因为 $B = (\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r})$，$\alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1 \cdots \alpha_n$ 极大无关组

C 行满秩：

$$A = BC$$

$$\therefore \underset{\substack{\| \\ r}}{\text{rank}(A)} = \text{rank}(BC) \overset{\text{表出}}{\leq} \text{rank}(C) \overset{\text{行数}}{\leq} r$$

故 $\text{rank}(C) = r \Rightarrow$ C 行满秩 □

(ii) 记 $B = (\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_r)$，$C = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix}$

则
$$A = BC = (\beta_1 \cdots \beta_r) \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_r \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\beta_1\gamma_1}_{\text{秩为1的矩阵}} + \beta_2\cdot\gamma_2 + \cdots + \beta_r\cdot\gamma_r$$ □

例：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} (1\ 1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(8.2) (i) $r_k := \text{rank}(A^k)$, $r_{k+1} \leq r_k$

Pf: $r_{k+1} = \text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k \cdot A) \leq \text{rank}(A^k) = r_k$

(ii) $W_k = \{x \in K^n \mid A^k x = 0\}$

若 $x \in W_k$，则 $A^k x = 0$ $\therefore A^{k+1} x = 0$ i.e. $x \in W_{k+1}$

故 $W_k \subseteq W_{k+1} \subseteq W_{k+2}$.

① 欲证 $W_{k+1} \subseteq W_k$，只需证明 $A^{k+1}x=0$ 基础解系

被 $A^k x=0$ 基础解系 线性表出

· $A^k x=0$ 的基础解系是 $A^{k+1}x=0$ 的解

· $r_k = r_{k+1} \Rightarrow$ 两个方程基础解系向量个数相同

$\therefore$ $\square$

② 欲证 $W_{k+1} \supseteq W_{k+2}$

$\forall \gamma \in W_{k+2}$: $A^{k+2}\gamma = 0$

$\therefore A^{k+1}(A\gamma) = 0$

由于 $A^{k+1}y=0$ 与 $A^k y=0$ 同解

$\therefore A^k(A\gamma) = 0$ i.e. $A^{k+1}\gamma = 0$

$\therefore \gamma \in W_{k+1}$. i.e. $W_{k+2} \subseteq W_{k+1}$ $\square$

(iii) $\begin{cases} r_1 < \infty \\ r_1 \geq r_2 \geq r_3 \geq \dots \geq r_n \geq 0 \\ \text{若 } r_k = r_{k+1}\text{，则后面都相等 (ii)} \end{cases}$ 只有有限个"大于号" $\Rightarrow$ "大于号"一定连着

(83) 记 $A_k = A\begin{pmatrix}1\cdots k\\ 1\cdots k\end{pmatrix}$ 为A的第k个顺序主子式

(*) 则对前k行做初等行变换，不改变 A_k 是否为0这件事.

记 $A = $

$$\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccc}\alpha_1 \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\end{array} \\
\begin{array}{c}\gamma_1 \\ \\ \\ \gamma_{n-1} \\ \gamma_n\end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}
\end{array}$$

A的列向量组 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 线性无关，则 $\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}$ 线性无关

∴ 在 $\{\gamma_1,\cdots\gamma_{n-1},\gamma_n\}$ 中，存在一个 n-1 个元素的极大线性无关组

不妨设 γ_i 不在这个极大无关组 $\{\gamma_1,\cdots\hat{\gamma_i},\cdots\gamma_n\}$ 中

则取 $P_1 = P(i,n)$，则 $P_1\cdot A$ 将A的第i行换到了第n行

∴ $P_1\cdot A$ 的第 n 个主子式 $\neq 0$ (由*)

第 n-1 个主子式 $\neq 0$ 由该命题

归纳地证明.

Recall: A的 $i_1\cdots i_r$ 行、$j_1\cdots j_r$ 列分别线性无关，则

$$A\begin{pmatrix}i_1\cdots i_r\\ j_1\cdots j_r\end{pmatrix}\neq 0$$

证明见习题课讲义第3次 P7.

RMK: 证明方法不惟一.

8.4.

(i) By_j 被 $By_{i_1} \cdots By_{i_t}$ 表出

$\therefore \exists\ c_{ij}$ s.t. $By_j = c_{1j} By_{i_1} + \cdots + c_{tj} By_{i_t}$

故 $\boxed{B(y_j - c_{1j} y_{i_1} - \cdots - c_{tj} y_{i_t}) = 0}$

$\Rightarrow$ $y_j - c_{1j} y_{i_1} - \cdots - c_{tj} y_{i_t}$ 是 $\underbrace{Bx=0}$ 的解

基础解系. $\eta_1 \cdots \eta_u$

$\therefore$ 存在 $k_{1j}, \cdots, k_{uj}$ s.t.

$$y_j - c_{1j} y_{i_1} - \cdots - c_{tj} y_{i_t} = k_{1j} \eta_1 + \cdots + k_{uj} \eta_u$$

i.e. y_j 被 $y_{i_1} \cdots y_{i_t}\ \eta_1 \cdots \eta_u$ 用系数 $\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{tj} \\ k_{1j} \\ \vdots \\ k_{uj} \end{pmatrix}$ 表出

$\square$

(ii)

$$\begin{array}{ccccc} s & \le & t & + & u \\ \| & & \| & & \| \\ m - \operatorname{rank}(AB) & & n - \operatorname{rank}(A) & & m - \operatorname{rank}(B) \end{array}$$

$\square$