

2020年模拟期中考非数学组

时间：120分钟

满分：100分

2020.11.7

1.(20')求下列极限的值

(a)(10') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(n \arccos x)}{x} (n \text{ 为奇数})$

(b)(5') $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$

(c)(5') $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{2}{n^2}) \cdots (1 + \frac{n}{n^2})$

2.(10') 设 $0 < a < 2\pi$,

$$f(x) = \left(\frac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)} \right)^2$$

求 $f(x)$ 的导数

3.(10') 黎曼函数的定义为

$$R(x) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \\ \frac{1}{p} & (x = \frac{q}{p}, (p, q) = 1, p > 0) \end{cases}$$

试求 $R(x)$ 的所有间断点

4.(10') 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且存在唯一一点 x_0 , 使得

$$f(f(x_0)) = x_0$$

求证: 存在唯一一点 x , 使得 $f(x) = x$

5.(10') 取正数 x_0 作成序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

$$x_n = \frac{2}{3} \left(x_{n-1} + \frac{4}{x_{n-1}^2} \right), n = 1, 2, \cdots$$

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$

6.(10') 设 $f(x) = \arcsin x$, 求 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$
 (注: 本题因出现印刷错误, 所有同学考试结果均按10分计算)

7.(15') 计算下列行列式的值

$$(a)(10') \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 6 \\ -3 & 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(b)(5') \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

8.(10') 求下述线性方程组的通解:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} = 2 \\ \cdots \\ x_{n+1} + \cdots + x_{2n} = n + 1 \end{cases}$$

9.(5') A 为 n 阶矩阵, 若 $\text{rank}(A) = r$, 求 $\text{rank}(A^*)$

这里, A^* 为 A 的伴随矩阵, $A^*A = AA^* = |A|I$