期中模拟考试答案（非数学组）（高数部分）

一 (20 分).

(1) 1. 分子分母同除 $1/n$ 后做等价无穷小替换.

(2) e^2. 转为 $(1+(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1))^{\frac{1}{(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)}(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1)x}$.

(3) $\frac{1}{2}$. 使用 $n^2-1=(n-1)(n+1)$ 约分化简.

(4) $2^{\alpha-\beta}\frac{(\beta+1)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\beta+1}}$. 分子除以 $\frac{2^{\beta+1}}{n^{\alpha+\beta+1}}$, 分母除以 $\frac{2^{\alpha+1}}{n^{\alpha+\beta+1}}$ 后，将分子分母视为 $[0,2]$ 上的定积分 $(\int_0^2 t^\alpha \mathrm{d}t)^{\beta+1}$,$(\int_0^2 t^\beta \mathrm{d}t)^{\alpha+1}$ 分别求解.

二 (15 分).

(1) $\frac{1}{63}(3x+10)^{21}+C$. 凑微分.

(2) 令 $t=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$, 则 $x=\frac{1+t^3}{1-t^3}$, 从而 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}=\int\frac{t^2\mathrm{d}x}{(x-1)^2}=\int\frac{t^2\mathrm{d}\left(\frac{1+t^3}{1-t^3}\right)}{\left(\frac{1+t^3}{1-t^3}-1\right)^2}$. 有理式积分.

(3) $\int\frac{\sin^4 x\mathrm{d}x}{\cos^3 x}=\int\frac{\sin^4 x\cos x\mathrm{d}x}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^4 x\mathrm{d}\sin x}{\cos^4 x}=\int\frac{\sin^4 x\mathrm{d}\sin x}{(1-\sin x^2)^2}$. 有理式积分.

三 (15 分).

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2t$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=2(1+t^2)$.

(2) $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{4}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+3)^{n+1}}\right)$. 变形为 $f(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$.

(3) $f^{(n)}(0)=0$. 使用数学归纳法, 若已得到 $f^{(n-1)}(0)=0$, 注意对于 $x\neq 0$,$f^{(n-1)}(x)$ 必可写成 $P_m(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ (其中 $P_m(\cdot)$ 为一多项式), 使用导数定义易得 $f^{(n)}(0)=0$.

四 (10 分).

(1) (i) $n\geq 1$; (ii) $n\geq 2$; (iii) $n\geq 3$.

(2) 本题中 $n=4$ 对应的 $f(x)$ 即满足.

五 (10 分).

(A) 4. 考虑数列 $a_n=|u_n-4|$ $(n\geq 1)$, 根据迭代公式可以估计出常数 $q\in(0,1)$, 满足 $a_n\leq qa_{n-1}\leq\cdots\leq q^n a_0$, 根据夹逼定理可知 $a_n\to 0$, 故 $u_n\to 4$.

(B) (1) 单调有界定理, 利用不等式 $\frac{1}{n+1}\leq\ln(1+\frac{1}{n})\leq\frac{1}{n}$. (2) 转化为 $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\ln(2n)\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right)+\ln 2$ 后, 利用第一问结论.

(C) (1) $\frac{\pi^2}{4}$. 注意到 $\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}=\frac{\frac{\pi}{2}\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{1+\cos^2 x}$. 由于 $\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{1+\cos^2 x}$ 关于 $(\frac{\pi}{2},0)$ 对称，有 $\int_0^\pi\frac{(x-\frac{\pi}{2})\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=0$. 另一部分直接计算积分可得 $\frac{\pi^2}{4}$. (2) $\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}\right)+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C$. 记 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$, 构造对偶式 $J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^2+x^4}$. 则 $I+J=\int\frac{(1+\frac{1}{x^2})\mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x}^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{3}})+C_1$; 同理有 $I-J=\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-1}{x+\frac{1}{x}+1}\right|+C_2$. 而 $I=\frac{1}{2}\left((I+J)+(I-J)\right)$.

(D) (1) 由 f 递减, 故恒正, 从而 $\int_\delta^1(f(x))^n\mathrm{d}x/\int_0^\delta(f(x))^n\mathrm{d}x<\int_\delta^1(f(x))^n\mathrm{d}x/\int_0^{\delta/2}(f(x))^n\mathrm{d}x<(f(\delta)/f(\delta/2))^n$. 由夹逼定理, 易得结论. (2) 易证 ≤ 1. 由连续性，对任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta_1\in(0,\delta)$ 使得 $f(x)>1-\delta,\forall x\in(0,\delta_1)$. 故而 $\int_0^\delta(f(x))^{n+1}\mathrm{d}x/\int_0^1(f(x))^n\mathrm{d}x\geq\int_0^{\delta_1}(f(x))^{n+1}\mathrm{d}x/\int_0^1(f(x))^n\mathrm{d}x\geq(1-\epsilon)\int_0^{\delta_1}(f(x))^n\mathrm{d}x/\int_0^1(f(x))^n\mathrm{d}x$. 利用第一问和极限定义得证.