

2019年模拟期中考非数学组

时间：120分钟

满分：100分

2019.10.27

1. (20') 求下列极限

(a) (6') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}$

(b) (6') $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(x - \sin x)}{x^3 \ln(\sin x + 1)}$

(c) (8') $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{1}{x})(x^2 + \frac{1}{x^2}) \cdots (x^n + \frac{1}{x^n}) \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x^2}{2^2} \cdots \sin \frac{x^n}{2^n}$

2. (10') 已知函数 $y = x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)]$, 其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, n 为常数, 求:
 $x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y$

3. (10') 求隐函数的导数 y'_x : $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

4. (10') 是否存在非负发散数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$, 使得 $\{a_n + b_n\}$ 为收敛数列? 若有, 请给出这样的数列; 若没有, 请证明。

5. (10') 当 $x > 0$ 时, 证明不等式: $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$

6. (10') 求不定积分: $\int x \sin \sqrt{x} dx$

7. (10') 设方阵 A 满足 $A^3 + 3A^2 + 3A + I = 0$, 证明 $A + 2I$ 可逆, 并用 A 表示 $(A + 2I)^{-1}$

8. (14') 计算下述行列式的值:

(a) (6')
$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(b) (8')
$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \cdots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \cdots & a_2 - b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \cdots & a_n - b_n \end{vmatrix}$$

9. (6') 设 A 为 3×3 的复数方阵, 满足 A 的各个元素均为 $1, -1, i, -i$, 求 $|A|$ 的所有可能实数值。