北京大学数学学院期中试题

2019－2020 学年第一学期

考试科目 线性代数　　考试时间 2019 年 11 月 12 日

姓　　名　　　　　　　学　　号

一. (36 分) 填空题.

1) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & t & 3 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 的列向量, $\beta = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

±1

当 t =__时, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能线性表出 β; 当 t 取__值时,

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 能以唯一的方式线性表出 β.

2) 对矩阵做初等行变换, 矩阵的_____ 不变 (多选).

A. 秩　　B. 行空间　　C. 列空间　　D. 解空间

3) 若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^T A$ =__, $|A^T A|$ =__,

AA^T =__, $|AA^T|$ =__. 记 A 的列向量为 α_1, α_2,

则 $\alpha_1^T \alpha_1 + \alpha_2^T \alpha_2$ =___, $\alpha_1 \alpha_1^T + \alpha_2 \alpha_2^T$ =___.

4) 设 $\alpha = [1\ 1\ 2]^T$ 与 $\beta = [3\ 2\ 1]^T$ 是3维几何空间里的向量. 则

α, β 夹角的余弦值是__, α, β 张成的三角形的面积是__; 若

单位向量 γ 与 α, β 都正交且 α, β, γ 呈右手系, 则 γ =___.

二. (16 分) 已知向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩等于 $r \geq 1$. 证明:

$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 能线性表出 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 当且仅当 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. (每一步都要有依据)

三. (12 分) 计算 n 阶行列式 $A_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$.

四. (24 分) 已知列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5 \in R^4$ 的秩为 3, 且

$$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2 \ , \quad \alpha_5 = \alpha_2 + \alpha_4 \ .$$

1) 写出矩阵 $A = [\alpha_1 \cdots \alpha_5]$ 的行简化阶梯型;

2) 求 A 列向量组的秩 和 一个极大无关组;

3) 求 A 行空间的一组基; 若已知向量 $\beta = [1\ 4\ a\ a\ b]$ 属于 A 的行空间, 求 β 在此基下的坐标及 a, b 的值;

4) 求线性方程组 $AX = \alpha_5$ 的通解;

5) 求所有矩阵 B, 使得 $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_5]B$.

五. (12 分) 设 A 是 n 级矩阵, k 是任意正整数. 证明:

1) A^k 的列空间 $\supseteq$ A^{k+1} 的列空间;

2) 若 A^k 秩 = A^{k+1} 秩, 则有 A^{k+1} 秩 = A^{k+2} 秩;

3) 若 A^k 秩 $-$ A^{k+1} 秩 $= r$, 则有 A^{k+1} 秩 $-$ A^{k+2} 秩 $\leq r$.