线性代数(B)期末试题答案

1. (15分) 将下述二次型化为标准型, 写出变换矩阵, 并说明其正负惯性指数

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+4x_1x_2+x_2^2-4x_2x_3-3x_3^2.$$

解: 该二次型对应的矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

进行成对初等行列变化后, 得到:

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

所以标准型为$2y_1^3-y_2^2+y_3^2$, 正惯性指数2, 负惯性指数1. 变换矩阵为:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (15分) 设$V=K^4$, $V_1=\langle\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\rangle$, $V_2=\langle\beta_1,\beta_2,\beta_3\rangle$, 其中

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},$$

$$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\\4\end{bmatrix},\quad \beta_2=\begin{bmatrix}0\\-1\\-4\\2\end{bmatrix},\quad \beta_3=\begin{bmatrix}-1\\3\\6\\-6\end{bmatrix}.$$

分别求V_1+V_2, $V_1\cap V_2$的一个基和维数.

解. 注意到$\beta_1+\beta_2+\beta_3=0$, 只需考虑 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2]$. 经过初等行变换后, 得到

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

所以V_1+V_2的基为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1$, 且$\dim(V_1+V_2)=4$. 此外, $\dim(V_1)=3$, $\dim(V_2)=2$. 由维数公式, $\dim(V_1\cap V_2)=\dim(V_1)+\dim(V_2)-\dim(V_1+V_2)=1$. 并且有线性关系:

$$-\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3+\beta_1=\beta_2$$

因此,

$$-\beta_1+\beta_2=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\\-2\end{bmatrix}\in V_1\cap V_2$$

是交的一组基.

3. (10分) 找出所有λ, 使得n阶矩阵

$$\begin{bmatrix}1&\lambda&\lambda&\cdots&\lambda\\\lambda&1&\lambda&\cdots&\lambda\\\lambda&\lambda&1&\cdots&\lambda\\\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\\lambda&\lambda&\lambda&\cdots&1\end{bmatrix}$$

为正定矩阵 $(n\geq 2)$.

解. n 阶矩阵 A 为正定矩阵当且仅当 A 的所有顺序主子式均大于0. 考虑A 的 k $(2\leq k\leq n)$ 阶主子式:

$$\begin{aligned}|A_k|&=\begin{vmatrix}1&\lambda&\lambda&\cdots&\lambda\\\lambda&1&\lambda&\cdots&\lambda\\\lambda&\lambda&1&\cdots&\lambda\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda&\lambda&\lambda&\cdots&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&\lambda&\lambda&\cdots&\lambda\\\lambda-1&1-\lambda&0&\cdots&0\\\lambda-1&0&1-\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda-1&0&0&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}1+\lambda(k-1)&0&0&\cdots&0\\\lambda-1&1-\lambda&0&\cdots&0\\\lambda-1&0&1-\lambda&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\lambda-1&0&0&\cdots&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^{k-1}[1+\lambda(k-1)].\end{aligned}$$

对于$2\leq k\leq n$,

$$\text{所有 } k \text{ 阶顺序主子式均大于0}\Leftrightarrow -\frac{1}{n-1}<\lambda<1.$$

4. 二元多项式空间中, 设

$$V=\langle 1,x,y,xy\rangle,$$

这里的1为常数函数. 定义V上的变换 $\boldsymbol{A}f(x,y)=f(x+1,y+1)$, $\forall f\in V$.

(a) (8分) 试说明$\boldsymbol{A}\in\mathrm{Hom}(V,V)$, 并且写出$\boldsymbol{A}$在基$1,x,y,xy$下的矩阵$A$.

(b) (7分) 求A的 Jordan 标准形.

解. (a).

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}1=1\in V\\&\boldsymbol{A}x=x+1\in V\\&\boldsymbol{A}y=1+y\in V\\&\boldsymbol{A}(xy)=(x+1)(y+1)=xy+x+y+1\in V\end{aligned}$$

所以$\boldsymbol{A}$是一个变换. 下面验证线性: 对于任意二元多项式$f(x,y),g(x,y)$有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1f(x,y)+k_2g(x,y))&=(k_1f+k_2g)(x+1,y+1)=k_1f(x+1,y+1)+k_2g(x+1,y+1)\\&=k_1\boldsymbol{A}f+k_2\boldsymbol{A}g.\end{aligned}$$

因此, $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Hom}(V,V)$. 由上述讨论知, 在这组基下的矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)由于A是上三角矩阵, 所以仅有特征值1(四重), 考虑rank$(A-I)$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然rank$(A-I)=2$, 所以有$4-2=2$个Jordan块. 然后,

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以rank$(A-I)^2=1$. 因此块大小为1的Jordan块个数为$4+1-2\times 2=1$. 故A的Jordan标准型为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. (10分) 设V为n维欧式空间. U为V的子空间, P_U为U上的正交投影. 若子空间W满足

$$U = P_U(W).$$

证明:

$$V = W + U^{\perp}.$$

证. 显然$W+U^{\perp} \subseteq V$. 下证$V \subseteq W+U^{\perp}$. 由$V = U \oplus U^{\perp}$, 知

$$\forall \alpha \in V, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2,$$

其中 $\alpha_1 \in U, \alpha_2 \in U^{\perp}$. 由题$P_U(W)=U$, 存在$w \in W$满足$P_U(w)=\alpha_1$. 注意到,

$$w - P_U(w) \in U^{\perp}$$

因此,

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = P_U(w) + \alpha_2 = w + [(P_U(w) - w) + \alpha_2] \in W + U^{\perp}.$$

故命题得证. $\square$

(注意不能由$P_U(W)=U$这个条件推出$U \subseteq W$, 因此也不能将U的基扩充为W的基.)

6. (10分) 设$V_1, \cdots, V_k$是n维向量空间V的子空间, 如果$\dim V_1 + \cdots + \dim V_k > n(k-1)$. 证明:

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{k} V_i\right) > 0.$$

证. 运用维数公式有:

$$\begin{aligned}\dim(\bigcap_{i=1}^{k} V_i) &= \dim V_k + \dim(\bigcap_{i=1}^{k-1} V_i) - \dim(V_k + \bigcap_{i=1}^{k-1} V_i) \\ &= \dim V_k + \dim V_{k-1} + \dim(\bigcap_{i=1}^{k-2} V_i) - \dim(V_k + \bigcap_{i=1}^{k-1} V_i) - \dim(V_{k-1} + \bigcap_{i=1}^{k-2} V_i)\end{aligned}$$

依次做下去可以得到:

$$\begin{aligned}\dim(\bigcap_{i=1}^{k} V_i) &= \dim V_k + \cdots + \dim V_1 - [\dim(V_k + \bigcap_{i=1}^{k-1} V_i) + \cdots + \dim(V_1 + V_2)] \\ &\geq \dim V_k + \cdots + \dim V_1 - n(k-1) \\ &> n(k-1) - n(k-1) = 0.\end{aligned}$$

(这是因为一共减去了$k-1$项,每一项的维数均小于等于n)

7. 设n阶方阵$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$. 在$\mathbb{R}^n$中取标准内积(即向量点乘), 并且令$|\alpha_i| = \sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}$.

   (a) (5分) 若A的列向量α_i相互正交, 即$(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$. 证明:

   $$|\det A| = \prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|,$$

   其中左边表示矩阵A的行列式的绝对值.

   (b) (10分) 对于任意n阶方阵A, 证明:

   $$|\det A| \leq \prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|,$$

   并且等号成立当且仅当α_i相互正交.

解.

(a) 由于 $(\alpha_i, \alpha_j) = 0, i \neq j$, 因此

$$A'A = \begin{bmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{bmatrix}$$

因此

$$|\det(A)|^2 = |\det(A'A)| = \prod_{i=1}^{n} |(\alpha_i, \alpha_i)| = \prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2.$$

即

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|.$$

(b) 若 $\det(A) = 0$, 显然 $|\det(A)| = 0 \leq \prod_{i=1}^{n} |\alpha_i|$ 成立;
若 $\det(A) \neq 0$, 即 A 的列向量线性无关. 对 A 的各列依次做施密特正交化:

$$\beta_s = \alpha_s - \sum_{j=1}^{s-1} \frac{(\alpha_s, \beta_j)}{(\beta_j, \beta_j)} \beta_j, \quad s = 1, 2, \cdots, n.$$

记 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$, 则有 $A=BP$, 其中

$$P=\begin{bmatrix}1 & \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\\ 0 & 1 & \frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)} & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(\alpha_n,\beta_3)}{(\beta_3,\beta_3)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix},\quad \text{是一个主对角线均为1的上三角矩阵.}$$

因此 $|\det(A)|=|\det(B)|$. 另一方面,

$$(\beta_s,\beta_s)=(\alpha_s,\alpha_s)-\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(\alpha_s,\beta_j)^2}{(\beta_j,\beta_j)}\le(\alpha_s,\alpha_s),$$

即 $|\beta_s|\le|\alpha_s|,\ s=1,2,\cdots,n$. 从而对矩阵 B 应用 (a) 的结论有:

$$|\det(A)|=|\det(B)|=\prod_{i=1}^n|\beta_i|\le\prod_{i=1}^n|\alpha_i|.$$

等号成立当且仅当$(\beta_s,\beta_s)=(\alpha_s,\alpha_s)$, 即列向量正交.

8. 设V为n维酉空间, 记$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$为$V$上线性复值函数组成的空间. 选定$V$上一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$, 定义$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$上的一个二元函数,

$$(f,g):=\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)},\qquad\forall f,g\in\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}).$$

(a) (5分) 证明: $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$为$n$维酉空间.

(b) (5分) 证明: 上述内积定义与标正基的选取无关, 即对另一组标正基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$, 有

$$\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)}=\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\overline{g(\eta_i)},\qquad\forall f,g\in\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}).$$

证. 题中已经说明$\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$为一个线性空间, 下面仅证明上述定义的二元函数构成一个内积.

1. 埃尔米特性
$$(f,g)=\sum_{i=1}^n f(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)}=\sum_{i=1}^n\overline{g(\alpha_i)\overline{f(\alpha_i)}}=\overline{(g,f)}.$$

2. 线性性1
$$\begin{aligned}(f_1+f_2,g)&=\sum_{i=1}^n(f_1(\alpha_i)+f_2(\alpha_i))\overline{g(\alpha_i)}\\&=\sum_{i=1}^n f_1(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)}+\sum_{i=1}^n f_2(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)}\\&=(f_1,g)+(f_2,g).\end{aligned}$$

3. 线性性2
$$\begin{aligned}(kf,g)&=\sum_{i=1}^n(kf(\alpha_i))\overline{g(\alpha_i)}\\&=k\sum_{i=1}^n(f(\alpha_i))\overline{g(\alpha_i)}=k(f,g).\end{aligned}$$

- 4.正定性
$$(f,f)=\sum_{i=1}^{n}(f(\alpha_i))\overline{f(\alpha_i)}=\sum_{i=1}^{n}|f(\alpha_i)|^2\geq 0$$
上式| |表示复数的模长. 显然等号当且仅当$f(\alpha_i)=0, i=1,\cdots,n$. 由于$\alpha_i, i=1,\cdots,n$为一组标准正交基且$f$是$V$上的线性函数, 所以对于任意的$\alpha\in V$, $\alpha=k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n$,
$$f(\alpha)=k_1f(\alpha_1)+\cdots k_nf(\alpha_n)=0,$$
即等号成立时$f=0$.

由于V维度为n, $\mathbb{C}$维度为1, 因此$\mathrm{Hom}(V,C)$维度为n.
(b)由题意存在酉矩阵P,使得:
$$(\eta_1,\cdots,\eta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$$
由酉矩阵的性质 $P\bar{P}'=I$, 可知
$$\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\overline{p_{ki}}=\delta_{jk}.$$
于是,
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\overline{g(\eta_i)}&=\sum_{i=1}^{n}f(\sum_{j=1}^{n}\alpha_jp_{ji})\overline{g(\sum_{k=1}^{n}\alpha_kp_{ki})}\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[(\sum_{j=1}^{n}f(\alpha_j)p_{ji})\overline{\sum_{k=1}^{n}g(\alpha_k)p_{ki}}\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_j)p_{ji}\overline{p_{ki}}\overline{g(\alpha_k)}\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}f(\alpha_j)\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ji}\overline{p_{ki}}\right)\overline{g(\alpha_k)}\\&=\sum_{i=1}^{n}f(\alpha_i)\overline{g(\alpha_i)}.\end{aligned}$$