线性代数(B)期中试题

2018 - 2019学年第一学期

考试时间：2018年11月19日，上午8:00 – 9:50

本试题共 2 页，8 道大题，满分 100 分.

1. (10分) 给定向量组:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}5\\-8\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\4\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}3\\-2\\-2\end{bmatrix}.$$

求$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的秩和它的一个极大线性无关组.

2. (10分) 考虑如下方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (2a+1)x_3 = a+1 \\ x_1 - (3a+1)x_2 + x_3 = 2(a+1)^2 \\ (6a+1)x_1 + x_2 + x_3 = 3(a+1)^3 \end{cases}$$

a为何值时，方程组有唯一解？a为何值时，方程组无解？a为何值时，方程组有无穷多解？(注：不需要求解方程组)

3. 给定

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&-2\\-1&1&4\end{bmatrix}.$$

(a) (15分) 求A的全部特征值和特征向量. A是否可对角化?

(b) (5分) 给定正整数m，求A^m.

4. (a) (10分) 给定如下线性无关向量组:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}3\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}2\\2\\-1\\3\end{bmatrix}.$$

求与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$等价的正交单位向量组.

(b) (5分) 如果令

$$\tilde{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\\2\\3\end{bmatrix}.$$

此时，与$\alpha_1,\alpha_2,\tilde{\alpha}_3$等价的正交单位向量组是什么?

(c) (5分) 如果$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关, 而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}$线性相关. 证明: 施密特正交化后, $\beta_{s+1} = 0$.

5. (10分) 证明: 对任意$s \times n$阶矩阵A, 都存在一个$n \times s$阶矩阵X, 使得$AXA = A$.

6. (10分) 设A为$s \times n$阶实矩阵, 证明:

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(AA'A) = \text{rank}(AA'AA'A).$$

7. (a) (5分) 若T_i为r_i阶正交矩阵$(i = 1, 2, \cdots, m)$, 且$r_1 + r_2 + \cdots + r_m = n$. 证明: 如下块对角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & T_m \end{bmatrix}$$

为n阶正交矩阵.

(b) (10分) 设A, B为n阶实对称矩阵. 证明: 存在一个正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$和$T^{-1}BT$同时为对角矩阵的充分必要条件是$AB = BA$.

8. (5分) 证明: 将偶数阶反对称矩阵A的每个元素都加上一个常数b后, 行列式不变.