2022模拟期中考试数学组答案

一、

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{(n+1)^2}{n}}+\sqrt[3]{(n+1)}+\sqrt[3]{n}}$$

$$=0$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})|=\lim\limits_{n\to\infty}|\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))|$

$$=\lim_{n\to\infty}|\pi(\sqrt{n^2+1}-n)|$$

$$=0$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=0$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{2\sin x}{x}$$

$$=1$$

(4)先考虑$a=0$的情形：

由$\{a_n\}$收敛，该数列有界，设$|a_n|<M$.

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbb{N}$, 使得$\forall n>N_1$, $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$, 进而$\exists N_2\in\mathbb{N}$, 使得$\forall n>N_2$, $\dfrac{p_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}<\dfrac{\varepsilon}{2MN_1}$, .

取$N=N_1+N_2$，则$\forall n>N, n-N_1>N_2$, 于是$|\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}|<$ $(|\dfrac{p_1a_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}+\cdots+\dfrac{p_{n-N_1}a_{N_1+1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}|)+(|\dfrac{p_{n-N_1+1}a_{N_1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}|+\cdots+$ $|\dfrac{p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}|)<\dfrac{\varepsilon}{2}|\dfrac{p_1+\cdots+p_{n-N_1}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}|+MN_1\dfrac{\varepsilon}{2MN_1}<\varepsilon$

所以原极限值为0

一般地，考虑$\{b_n=a_n-a\}$，则$\{b_n\}$满足上述条件，也就是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1(a_n-a)+\cdots+p_n(a_1-a)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_n+p_2a_{n-1}+\cdots+p_na_1}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=a$

二、

(1)$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1}-x_1 & x_{n+1}(x_{n+1}-x_1) & \cdots & x_{n-1}^n(x_{n+1}-x_1) \end{vmatrix}$

$$= (x_2-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix}$$

由归纳法，可知$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n+1}(x_j-x_i)$

(2)假设方程有$n+1$个不同的根，记为$x_1,\cdots,x_{n+1}$，则

$$\begin{cases} x_1^n t_0 + & x_1^{n-1}t_1 + & \cdots + & t_n = 0 \\ x_2^n t_0 + & x_2^{n-1}t_1 + & \cdots + & t_n = 0 \\ & & \cdots & \\ x_{n+1}^n t_0 + & x_{n+1}^{n-1}t_1 + & \cdots + & t_n = 0 \end{cases}$$

有一组非零解$(1, a_0, \cdots, a_{n-1})$.

但由(1)，该方程组的系数矩阵可逆，矛盾。

(3)记该行列式为$P(a_0,\cdots,a_{n-1})$，$P(a_0) = a_0$，对一般的n，对第一行使用拉普拉斯展开：

$$\begin{aligned} P(a_0,\cdots,a_{n-1}) &= xP(a_1,\cdots,a_{n-1}) + a_0(-1)^{n-1}(-1)^{n-1} \\ &= x(x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1)+a_0 \\ &= x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 \end{aligned}$$

(4)结合(2),(3)，使得该方程的系数矩阵行列式为0的x至多有n个。

三、

易知，该圆锥的锥顶为$M_0(1,1,0)$，平行于轴线的一个向量$\overrightarrow{u} = (1,1,-2)$，母线上一点$M(3,0,-1)$ 该圆锥面上任何一点$P(x,y,z)$满足方程：

$$|\overrightarrow{M_0P}\cdot\overrightarrow{u}||\overrightarrow{M_0M}| = |\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{u}||\overrightarrow{M_0P}|$$

即：

$$\sqrt{6}(x-1+y-1-2z) = 3\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

化简得到：

$$x^2+y^2-5z^2-4xy+8xz+8yz+2x+2y-16z-2=0$$

四、

设$k_1\alpha_1+\cdots+k_{s+1}\alpha=0$

则对任意一组实数$t_1,t_2,\cdots,t_s$，我们有

$$k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s+(k_1t_1+\cdots+k_st_s)\alpha_{s+1}=(k_1t_1+\cdots+k_st_s-k_{s+1})\alpha_{s+1}$$

若$k_1,k_2,\cdots,k_s$不全为0，设$k_i\neq0$，取$t_i=k_{s+1}k_i^{-1}$，得$k_1\beta_1+\cdots+k_s\beta_s=0$，这与向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关矛盾。于是$k_1,k_2,\cdots,k_s$全为0，则$k_{s+1}\alpha=0$，又$\alpha_{s+1}\neq0$，$k_{s+1}=0$。所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s+1}$线性无关。

五、

A,B,C,P共面当且仅当$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p}$共面。

当且仅当

$$(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=0$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})=(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b}-\overrightarrow{p},\overrightarrow{c}-\overrightarrow{p})$$

当且仅当

$$(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{p})-(\overrightarrow{a},\overrightarrow{p},\overrightarrow{c})=(\overrightarrow{p},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$$

由此即得结论。

六、

(1)设$(\alpha,\beta)\in[0,1]$,令

$f^{-1}((1,+\infty))=\{x_1^{(1)},x_2^{(1)},...,x_{n_1}^{(1)}\}$,其中集合内元素按升序排列.

则对任意$x\in(x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)})$，都有$0\leq f(x)\leq1$，其中$i=0,1,...,n_1$，补充定义$x_0^{(1)}=0,x_{n_1+1}^{(1)}=1$.

由$(\alpha,\beta)\in[0,1]$,和题设的$\varepsilon-$条件,可知存在$i\in\{0,1,...,n_1\}$,使得

$$(\alpha,\beta)\cap(x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)})\neq\emptyset\qquad.$$

令$[\alpha_1,\beta_1]\subset(\alpha,\beta)\cap(x_i^{(1)},x_{i+1}^{(1)})$，使得$0<\beta_1-\alpha_1<1$，则对$\forall x\in[\alpha_1,\beta_1]$，$0\leq f(x)\leq1$.

同理令

$f^{-1}((0.5,+\infty))=\{x_1^{(2)},x_2^{(2)},...,x_{n_2}^{(2)}\}$,其中集合内元素按升序排列.

则对任意$x\in(x_i^{(2)},x_{i+1}^{(2)})$，都有$0\leq f(x)\leq0.5$，其中$i=0,1,...,n_2$，补充定义$x_0^{(1)}=0,x_{n_2+1}^{(1)}=1$.

由$(\alpha,\beta)\in[0,1]$,和题设的$\varepsilon-$条件,可知存在$i\in\{0,1,...,n_2\}$,使得

$$(\alpha,\beta)\cap(x_i^{(2)},x_{i+1}^{(2)})\neq\emptyset\qquad.$$

令$[\alpha_2,\beta_2]\subset[\alpha_1,\beta_1]\cap(x_i^{(2)},x_{i+1}^{(2)})$，使得$0<\beta_2-\alpha_2<\dfrac{1}{2}$，

则对$\forall x \in [\alpha_2，\beta_2], 0 \leq f(x) \leq 0.5$.
以此类推可构造一列有界闭区间序列
$$\{[\alpha_n, \beta_n]\}$$
其满足区间套性质,且对任意$n \in \mathbb{N}, 0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{n}$.从而考虑某$t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[\alpha_n, \beta_n]$,有$0 \leq f(t) \leq \dfrac{1}{n}$对任意$n \in \mathbb{N}$成立.故原命题证毕.
(2)若$f(a) = 0$,对任意$\varepsilon > 0$,令:
$$f^{-1}((\varepsilon, +\infty)) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}\text{,其中集合内元素按升序排列.}$$
则存在$i \in \{0, 1, .., n\}, x_i < a < x_{i+1}$,于是$x \in (x_i, x_{i+1})$时，有$0 \leq f(x) < \varepsilon$
取$\delta = \min\{a - x_i, x_{i+1} - a\}$，$\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$，$f(x) \in [0, \epsilon)$，于是$f$在$a$点连续。
若$f(b) \neq 0$且f在b处稠密，则对$\dfrac{b}{2} > 0$，$\exists \delta > 0$，使得$\forall x \in (b - \delta, b + \delta)$，$f(x) \in (\dfrac{b}{2}, \dfrac{3b}{2})$
这与$f^{-1}((\dfrac{b}{2}, +\infty))$是有限集矛盾。

七、
解：不一定. 我们构造函数
$$f(x) = 2||2^{L(x)}x||,$$
其中$||a||$表示a离和它最近整数的距离，$L(x)$为不超过$|x|$的最大整数.

容易验证f是分段线性的，且在端点处连续，故f连续. 以下记g为f的等距变换，以及
$$\mathbb{M}_1 = \{\frac{2a-1}{2^b}|a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\},$$
$$\mathbb{M}_2 = \{\frac{3a \pm 1}{3^b}|a, b \in \mathbb{Z}, b > 0\},$$
要证明结论成立，只需证明：

（i）$g(y) = 1$，$\forall y \in \mathbb{M}_1$;

（ii）$g(y) < 1 - \dfrac{1}{3^{v(y)+|y|+1}}$，$\forall y \in \mathbb{M}_2$;

其中，$v(y)$为y的最简分母的因式分解中含有3的幂次，称为y的幂次.

先证明（i）. 根据题意，$\forall y = \dfrac{2a-1}{2^b}$, $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$
$$1 \geq g(y) \geq |f(b - \frac{1}{2^b}) - f(b - \frac{1}{2^b} + \frac{|2a-1|}{2^b})| = |1 - f(b + \frac{|2a-1|-1}{2^b})| = |1 - 0| = 1,$$
于是（i）成立;

再证（ii）. 称使得$f(x)$为整数的点为端点，所有的端点构成集合$\mathbb{T}$，则由分段线性性，对$\forall y = \dfrac{3a+t}{3^b}\,(a, b \in \mathbb{Z}, t \in \{-1, 1\}, b = v(y) > 0)$, 为了讨

论$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x+y)-f(x)|$，只需考虑$x$与$x+y$至少有一个属于$\mathbb{T}$的情形．不妨$x=\frac{2c-1}{2^d}$，$c,d\in\mathbb{Z}$，则此时

$$x+y=\frac{(2c-1)3^b+(3a+t)2^d}{2^d3^b} \qquad (*)$$

即为最简分数，故$x+y$不是端点.

设$x+y$离左右侧紧邻的端点距离为$\frac{p_1}{q}$和$\frac{p_2}{q}$，其中$p_1,p_2,q\in\mathbb{N}+$且$(p_1,p_2,q)=1$，则这样的表示是唯一的，且两段距离相加恰好是某两个相邻端点的距离．于是存在正整数m使得

$$\frac{p_1+p_2}{q}=\frac{1}{2^m},$$

且这表明$p_1+p_2=\dfrac{q}{2^m}$，而两端点中必有一个形如$\dfrac{2l-1}{2^m}$，$l\in\mathbb{Z}$，于是同$(*)$可得它到$x+y$的距离的最简分母整除$3^b2^{\max\{m,d\}}$；另一方面，由于另一个端点的最简分母含有2的幂次不超过m，于是它到$x+y$的距离的最简分母整除$3^b2^{\max\{m,d\}}$．这说明$q\le 3^b2^{\max\{m,d\}}$，且根据端点定义$|x+y|\in[m-1,m]$，而$|x|\ge d$．于是$p_1+p_2\le 3^b2^{\max\{d-m,0\}}\le 3^b2^{|x|-|x+y|+1}\le 3^b2^{|y|+1}\le 3^{b+|y|+1}$且$p_1,p_2\ge 1$．综上有

$$|f(x+y)-f(x)|\le\max\{\frac{p_1}{p_1+p_2},\frac{p_2}{p_1+p_2}\}\le\frac{3^{b+|y|+1}-1}{3^{b+|y|+1}}=1-\frac{1}{3^{v(y)+|y|+1}},$$

于是（ii）成立.

最终，注意任意一个开区间中一定有$\mathbb{M}_2$中的点；但对于任意$x\in\mathbb{M}_2$及任意$\delta>0$，在$(x-\delta,x)\cup(x,x+\delta)$上都有$\mathbb{M}_1$中的点$x'$，则由（i）（ii）有

$$|g(x)-g(x')|=3^{-v(x)-|x|-1},$$

于是g在$\mathbb{M}_2$不连续．于是我们证明了反例的成立性.

八、

设$f_i=c_{i,1}+c_{i,2}x+\cdots+c_{i,2022}x^{2021}$，注意到

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_{2022}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{2022}(a_1) & \cdots & f_{2022}(a_{2022}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{1,1} & \cdots & c_{1,2022} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2022,1} & \cdots & c_{2022,2022} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2022} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{2021} & a_2^{2021} & \cdots & a_{2022}^{2021} \end{pmatrix}$$

又由克拉默法则，

$$x_1 = -\frac{\begin{vmatrix} f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_{2023}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{2022}(a_2) & \cdots & f_{2022}(a_{2023}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_{2022}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{2022}(a_1) & \cdots & f_{2022}(a_{2022}) \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,2022} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2022,1} & \cdots & c_{2022,2022} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{2023} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{2021} & a_3^{2021} & \cdots & a_{2023}^{2021} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1,2022} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2022,1} & \cdots & c_{2022,2022} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2022} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{2021} & a_2^{2021} & \cdots & a_{2022}^{2021} \end{vmatrix}}$$

$$= -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_{2023} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{2021} & a_3^{2021} & \cdots & a_{2023}^{2021} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2022} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{2021} & a_2^{2021} & \cdots & a_{2022}^{2021} \end{vmatrix}}$$

与这些多项式的选取无关，进而方程的解与多项式的选取无关（只要唯一），这就证明了我们要的结论。