

2022模拟期中考试非数学组

一、求下列极限的值：

(1)(10 分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$

(2)(10 分) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a > b > 0$.

二、(10 分)给定正实数 $\varepsilon \in (0, 1)$ 和 $m \in (0, \frac{\pi}{2})$, 设数列 $\{x_n\}$ 定义为:

$$x_0 = m, \quad x_{n+1} = m + \varepsilon \sin x_n$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且极限值为开普勒方程 $x - \varepsilon \sin x = m$ 的唯一实根。

三、(10 分)是否存在两个各项均为正数的数列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足:

(1) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 均发散

(2) $\{\min\{x_n, y_n\}\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛 (这里 $\min\{a, b\}$ 表示 a, b 中较小的数)。

四、(10 分)求导数 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$, 这里 $y = y(x)$ 由隐函数 $y^2 + 2 \ln y = x^4$ 给出。

五、(10 分)计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

六、计算下列行列式:

(1)(10 分)
$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 503 & 201 & 298 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

(2)(10 分)
$$\begin{vmatrix} a+1 & a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}$$

七、证明下列与可逆矩阵有关的命题:

(1)(10 分)若 m 阶矩阵 A 满足 $A^n = 0$, 其中 n 是一个正整数, 则 $I - A$ 可逆, 这里 I 是 m 阶单位矩阵。

(2)(5 分)若 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times m$ 矩阵 B 满足 $I_m - AB$ 可逆, 则 $I_n - BA$ 可逆, 这里 I_m, I_n 分别是 m, n 阶单位矩阵。

八、(5 分)求线性方程组的解:

$$\begin{cases} 2^3x_1 + 3^3x_2 + 4^3x_3 + 5^3x_4 = 6^3 \\ 3^3x_1 + 4^3x_2 + 5^3x_3 + 6^3x_4 = 7^3 \\ 4^3x_1 + 5^3x_2 + 6^3x_3 + 7^3x_4 = 8^3 \\ 5^3x_1 + 6^3x_2 + 7^3x_3 + 8^3x_4 = 9^3 \end{cases}$$