2016 线性代数期中试题答案

_______ 学院 ________ 系　姓名 _________ 学号_________ 分数______ 06/11/2016

请注意所有答案和解答写在空白答题纸上，标明大题号和小题号

一、填空题（本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。答案写在答题纸上）。

(1) $(-2)^{\tau(54321)} =$ ___1024___。

(2)设 A 是四阶方阵，$|A| = 4,$ 则 $|(A^{-1})^*| =$ ___1/64___ 。

(3)若 $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & t \end{pmatrix}, r(A) = 2,$ 则 $t =$ ___6___ 。

(4)设 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4) = 3, r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5) = 4,$ 则

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5) =$ ___4___。

(5)设矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 各列元素之和为 1，则 $(1,1,1)\begin{pmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{33} \end{pmatrix} =$

_（1，2，3）_。

(6) 设 4 阶行列式 $|A| = 2,$ 则 $|-2A| =$ ___32___ 。

(7)设矩阵 X 满足 $X\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$ 则 $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 6 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{bmatrix}$。

(8)设 n 阶矩阵 B 的秩是 $n-1,$ 则 B^* 的秩是___1___。

(9)设 3 维列向量 α_1,α_2 线性无关,则齐次方程组 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_1-2\alpha_2)(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$

的一个基础解系是_（-1，2，1）_ 。

(10) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}$。

二、选择题(本题共 10 小题,每小题 2 分，满分 20 分。每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。答案写在答题纸上)。

(1)设A,B,C均为$\boldsymbol{n}$阶方阵，且$|A|\neq 0$，则必有(C)。

(A) 若$AC=BC$，则$A=B$ (B)若$BC=O$,则$B=O$或$C=O$

(C)若$BA=CA$，则$B=C$ (D) 若$A^{-1}B=CA^{-1}$，则$B=C$

(2)设n阶方阵A满足$A^2-A-2E=O$，则必有(C)。

(A) $A=2E$ (B) $A=-E$ (C) $A-E$可逆 (D) A不可逆

(3)设向量组$\boldsymbol{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}$可用向量组$\boldsymbol{\beta_1,\cdots,\beta_t}$线性表示，并且$\boldsymbol{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}$线性无关，则必定成立的是**(C)**。

(A)$s>t$ (B)$s<t$ (C)$s\leq t$ (D)$s=t$

(4)若方阵$\boldsymbol{A,B,C}$满足$\boldsymbol{ABC=E}$，则必定成立**(D)**

(A)$BAC=E$ (B)$ACB=E$ (C)$CBA=E$ (D)$BCA=E$

(5)设$\boldsymbol{r(A_{m\times n})=s<m}$，则下列断言不成立的是(D)。

(A) A有$\boldsymbol{s}$个线性无关的行向量 **(B)** A有$\boldsymbol{s}$个线性无关的列向量

(C) A的行向量组线性相关 **(D)** A的列向量组线性相关

(6)设η_1,η_2,η_3是齐次方程组$\boldsymbol{A_{m\times n}X=o}$的一个基础解系，则下列向量组中也可作为$\boldsymbol{A_{m\times n}X=o}$的基础解系的是(D)。

(A) $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_3-\eta_1$, **(B)** $\eta_1+\eta_2,\eta_2+\eta_3,\eta_1+2\eta_2+\eta_3$

(C) $\eta_1,\eta_1+\eta_2,\eta_1-\eta_2$ **(D)** $\boldsymbol{\eta_1+\eta_2,\eta_1-\eta_2,\eta_3}$

(7)若$\alpha_1=(0,0,c_1),\alpha_2=(0,1,c_2),\alpha_3=(1,-1,c_3),\alpha_4=(-1,1,c_4)$($c_1,c_2,c_3,c_4$为任意常数),则下列向量组中必定线性相关的是$(C)$。

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C)$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(8)设A为三阶矩阵,将A的第二列加到第一列得矩阵B,再交换B的第二行与第三行得单位矩阵,

记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,则$A=$(D)。

(A)P_1P_2 (B)$P_1^{-1}P_2$ (C)P_2P_1 (D)$P_2P_1^{-1}$

(9)设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$是4阶矩阵，$A^*$为$A$的伴随矩阵，若$(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$是方程组$AX=o$的一个基础解系，则$A^*X=o$的一个基础解系为(D)

(A)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (B)$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ (C)$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ (D)$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

(10)设A为n阶非零矩阵，并且$A^2=O$，E为n阶单位矩阵，则(C)。

(A) $E-A$不可逆，$E+A$不可逆 (B) $E-A$不可逆，$E+A$可逆

(C) $E-A$可逆，$E+A$可逆 (D) $E-A$可逆，$E+A$不可逆

三、计算题(本题共5小题，每小题8分，满分为40分)。

(1)计算行列式计算行列式$\begin{vmatrix}\mathbf{3}&\mathbf{4}&\mathbf{0}&\mathbf{5}\\\mathbf{7}&\mathbf{5}&\mathbf{-3}&\mathbf{5}\\\mathbf{2}&\mathbf{2}&\mathbf{0}&\mathbf{-2}\\\mathbf{0}&\mathbf{8}&\mathbf{6}&\mathbf{4}\end{vmatrix}=\mathbf{24}$。

$$\begin{vmatrix}3&4&0&5\\7&5&-3&5\\2&2&0&-2\\0&8&6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&0&5\\7&5&-3&5\\2&2&0&-2\\14&18&0&14\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3&4&5\\2&2&-2\\14&18&14\end{vmatrix}$$

$$=3\times2\times2\begin{vmatrix}3&4&5\\1&1&-1\\7&9&7\end{vmatrix}=12\begin{vmatrix}3&1&8\\1&0&0\\7&2&14\end{vmatrix}=-12\begin{vmatrix}1&8\\2&14\end{vmatrix}=(-12)\times(-2)=24.$$

(2) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & x \\ a & a & \cdots & a & x & a \\ a & a & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a & a \\ x & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} = (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}(-1)^{n+1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$ 。

$$\begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & a & x \\ a & a & \cdots & a & x & a \\ a & a & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & x & \cdots & a & a & a \\ x & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1)a+x & a & \cdots & a & a & x \\ (n-1)a+x & a & \cdots & a & x & a \\ (n-1)a+x & a & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-1)a+x & x & \cdots & a & a & a \\ (n-1)a+x & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix} =$$

$$= ((n-1)a+x)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a & a & x \\ 1 & a & \cdots & a & x & a \\ 1 & a & \cdots & x & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x & \cdots & a & a & a \\ 1 & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$= ((n-1)a+x)\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x-a \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a & a \\ 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & \cdots & a & a & a \end{vmatrix}$$

$$= ((n-1)a+x)(-1)^{n+1}(-1)^{\tau((n-1)\cdots 1)}(x-a)^{n-1}$$
$$= ((n-1)a+x)(-1)^{n+1}(-1)^{(n-2)(n-1)/2}(x-a)^{n-1}.$$

(3)给定向量组

$\mathrm{I}: \alpha_1=(2,1,2,3), \alpha_2=(-1,1,5,3), \alpha_3=(0,-1,-4,-3), \alpha_4=(1,0,-2,-1), \alpha_5=(1,2,9,8).$

(i) 求$r(\mathrm{I})$；

(ii)求I的一个极大线性无关组II；

(iii)用II表示I中的其余向量。

$\mathrm{I}: \alpha_1=(2,1,2,3), \alpha_2=(-1,1,5,3), \alpha_3=(0,-1,-4,-3), \alpha_4=(1,0,-2,-1), \alpha_5=(1,2,9,8).$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & 9 \\ 3 & 3 & -3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/3 & 0 & 5/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$(i) r(\mathrm{I})=3.$

$(ii) \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$

$(iii) \alpha_3=(-1/3)\alpha_1-(2/3)\alpha_2, \alpha_5=(5/3)\alpha_1+(1/3)\alpha_2-2\alpha_4.$

(4)(i) a 为何值时方程组$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4+3x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+\ \ x_4+2x_5=3 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+\ \ x_4 \qquad\ \ =a \\ 9x_1+6x_2+\ \ x_3+3x_4+2x_5=2 \end{cases}$ 有解?

(ii)在有解时求方程组的一个特解和导出齐次方程组的一个基础解系。

解

$$(i)\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & a \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & a \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -2 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+7 \end{pmatrix}, a+7=0, a=-7.$$

$$(ii)\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 0 & 71 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} 3x_1+2x_2+x_4=0 \\ x_3=0 \\ x_5=0 \end{cases} \begin{cases} x_4=-3x_1-2x_2 \\ x_3=0 \\ x_5=0 \end{cases}$$

自由未知量为x_1, x_2

$$\boldsymbol{\xi_0 = (0,0,13,19,-34)^{\mathrm{T}}}.$$

$$\boldsymbol{\eta_1 = (1,0,0,-3,0)^{\mathrm{T}}, \eta_2 = (0,1,0,-2,0)^{\mathrm{T}}}.$$

$$jie := \begin{bmatrix} \_t_1 \\ \_t_2 \\ 13 \\ -3\,\_t_1 - 2\,\_t_2 + 19 \\ -34 \end{bmatrix}$$

$$\xi_0 = (0,0,13,19,-34)^{\mathrm{T}},$$

$$\eta_1 = (1,0,0,-3,0)^{\mathrm{T}}, \eta_2 = (0,1,0,-2,0)^{\mathrm{T}}$$

(5)给定矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i)求$|\boldsymbol{A}|$；

(ii)求逆矩阵$\boldsymbol{A}^{-1}$；

(iii)求$(\boldsymbol{A}^{-1})^*$。

$$(\boldsymbol{i})\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

$$(\boldsymbol{ii})\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$$

$$(iii)(A^{-1})^*=\left|A^{-1}\right|(A^{-1})^{-1}=-A=\begin{pmatrix}-2&-2&-3\\-&1&0\\1&-2&-1\end{pmatrix}.$$

$$detA := -1$$

$$invA := \begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}$$

$$adjinvA := \begin{bmatrix}-2&-2&-3\\-1&1&0\\1&-2&-1\end{bmatrix}$$

四、证明题(本题共 1 小题，满分为 10 分)。

(1)证明：若 $A_{m\times n}B_{n\times p}=O$，则 $r(A)+r(B)\le n$。

证明　先设 $r(A)<n$.

$$B=(\beta_1,\cdots,\beta_p), AB=A(\beta_1,\cdots,\beta_p)=(A\beta_1,\cdots,A\beta_p)=O,$$

$$A\beta_i=o, i=1,\cdots,p.$$

设齐次方程组 $AX=o$ 的基础解系为 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r(A)}$。$\beta_1,\cdots,\beta_p$ 可以由 $\eta_1,\cdots,\eta_{n-r(A)}$ 线性表示，故

$$r(B)=r(\beta_1,\cdots,\beta_p)\le r(\eta_1,\cdots,\eta_{n-r(A)})=n-r(A),$$

$$r(A)+r(B)\le n.$$

再设$r(A)=n$，此时齐次方程组$AX=o$只有零解，

$$\beta_1=o,\cdots,\beta_p=o,B=O,r(B)=0.$$
$$r(A)+r(B)=n.$$