北京大学 20/21 学年第二学期

高等数学 (B) 期中试题

1. (10 分) 计算二重积分:

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad D: x^2+y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0.$$

2. (10 分) 计算三重积分:

$$\iiint_\Omega (y^2+z^2)\ \mathrm{d}V, \qquad \Omega: 0 \le z \le x^2+y^2 \le 1.$$

3. (10 分) 设曲线 C 为椭圆 $x^2/16+y^2/9=1$ 沿逆时针方向。计算曲线积分:

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

4. (10 分) 计算曲面积分:

$$\iint_S \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\ \mathrm{d}S,$$

其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下部分。

5. (15 分) 计算曲面积分:

$$\oiint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=4$ 所截部分的外侧.

6. (10 分) 求下面常微分方程的所有解: $y'=xy+3x+2y+6$.

7. (15 分) 求下面常微分方程的通解: $y''-4y'+3y-4e^x=0$.

8. (10 分) 设平面有界闭区域 D 为

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}, \qquad a,b>0.$$

设曲线 L 为 D 的边界, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数。记 $\mathsf{F}=(P,Q)$, n 为曲线 L 的单位外法向量。证明:

$$\oint_{L^+} \mathsf{F}\cdot\mathsf{n}\ \mathrm{d}s = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

9. (10 分) 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数。证明:

$$\iint_S f(x+y+z)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{3}\xi\right)\mathrm{d}\xi,$$

其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。