北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2021 - 2022学年第 2 学期

考试科目 高等数学B2

姓　　名 ______________ **学　　号** ______________

本试题共 9 **道大题，满分** 100 **分**

在下面试题中， $\mathbb{R}$ 记实数域， $\mathbb{R}^n$ 记标准的 n 维欧氏空间。

1.(10分) 设 D 是由直线 $y=0,\ y=1,\ y=x,\ y=x+1$ 所围成的有界闭区域。求二重积分 $\iint\limits_D (4y-2x)\,dxdy$.

参考答案:

$$\iint\limits_D (4y-2x)dxdy$$

$$= \int_{-1}^{0} dx\ \int_{0}^{x+1}(4y-2x)dy + \int_{0}^{1} dx\ \int_{x}^{1}(4y-2x)dy$$

$$= \int_{-1}^{0}(2(x+1)^2-2x(x+1))dx + \int_{0}^{1}((2-2x^2)-2x(1-x))dx$$

$$= \int_{-1}^{0}(2x+2)dx + \int_{0}^{1}(2-2x)dx$$

$$= (x^2+2x)|_{-1}^{0} + (2x-x^2)|_{0}^{1}$$

$$= 0-((-1)^2-2)+(2-1)-0$$

$$= 2$$

2.(10分) 设 V 是由平面 $x=0,\ y=0,\ z=0,\ x+y+z=1$ 所围成的四面体。求三重积分 $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2}dxdydz$.

参考答案:

$$\iiint\limits_V \frac{1}{1+x+y+z}\,dxdydz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y}\frac{1}{(1+x+y+z)^2}dz$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}\frac{-1}{1+x+y+z}|_0^{1-x-y}\ \ dy$$

$$= \int_0^1 dx\int_0^{1-x}(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{1+x+y})\ \ dy$$

$$= \int_0^1(\frac{-y}{2}|_0^{1-x}+\ln(1+x+y)|_0^{1-x})\ \ dx$$

$$= \int_0^1(\frac{-1+x}{2}+\ln 2-\ln(1+x))dx$$

$$= \frac{-1}{2}+\frac{x^2}{4}|_0^1+\ln 2-(1+x)\ln(1+x)|_0^1+x|_0^1$$

$$= \frac{-1}{2}+\frac{1}{4}+\ln 2-2\ln 2+1$$

$$= \frac{3}{4}-\ln 2$$

3.(10分) 设 E 是椭圆 $\{\,(x,\ y)\ \in\mathbb{R}^2\,|\,x^2+\frac{y^2}{4}\ =\ 1,\ -1\le x\le 1,\ -2\le y\le 2\}$. 求第一型曲线积分 $\int_E\ |\,x\,y\,|\,ds$.

参考答案: E 的参数方程是 $x = \cos t\,, y = 2\sin t,\, 0 \le t \le 2\pi$． 由对称性得

$$\int_E |\,x\,y\,| ds = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} xy\ \sqrt{(\,(\cos t)'\,)^2 + (\,(2\sin t)'\,)^2}\ \ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t\ \sin t\ \sqrt{(\,(\sin t)^2\ +\ (2\cos t)^2}\ \ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\ \sqrt{1+3\cos^2 t}\ \ dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\ \sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos 2t}\ \ dt$$

令 $u = \cos 2t$ 得 $du\ =\ -2\ \sin 2t\, dt$ ，所以 上式 等于

$$=\ -2\int_1^{-1}\ \sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}u}\ du\ =\ 2\int_{-1}^{1}\ \sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}u}\ du\ =\ 2\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3}\ (\frac{5}{2}+\frac{3}{2}u)^{\frac{3}{2}}|_{-1}^{1}$$

$$=\ \frac{8}{9}\ (4)^{\frac{3}{2}}\ -\ \frac{8}{9}(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\ \frac{56}{9}$$

4.(15分) 设 n 是正整数，从点 $(0,\,0)$ 到点 $(n\pi,\,0)$ 的有向曲线 $L_n\ =\ \{\ (\,t,\ |sint|\ )\ \mid\ 0 \le t \le n\pi\ \}$. 计算出下面第二型曲线积分 在 $n \to \infty$ 下的极限:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{L_n} e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx\ +\ e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy$$

参考答案:

（1）首先验证

$$\frac{\partial\,(e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,)}{\partial x}\ -\ \frac{\partial\,(e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,)}{\partial y}$$

$$=\ e^{y^2-x^2}\,(-2x)\ \sin(2xy)\ +\ e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,2y\ -\ e^{y^2-x^2}\ 2y\ \cos(2xy)\ -\ e^{y^2-x^2}(-\sin(2xy))\,2x$$

$$=\ 0$$

（2）为了简化符号，记

$$\omega = e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx\ +\ e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy$$

$$I_n\ =\ \{\ (\ t,\,0\ )\ \mid\ 0 \le t \le n\pi\ \}$$

$\mathbb{R}^2$ 是单连通区域，因此根据第二型曲线积分与路径无关的定理（教材第81页定理2），上面（1）推出

$$\int_{L_n}\omega\ =\ \int_{I_n}\omega\ =\ \int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx$$

（3）设

$$E_n\ =\ \int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx$$

$$E_n^2\ =\ \int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx \int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx\ =\ \int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx \int_0^{n\pi} e^{-y^2}\,dy\ =\ \frac{1}{4}\ \iint_{[-n\pi,n\pi]\times[-n\pi,n\pi]} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

推出

$$\frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le(n\pi)^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\ \le\ E_n^2\ \le\ \frac{1}{4}\iint_{x^2+y^2\le(\sqrt{2}\ n\pi)^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

用极坐标 (r,θ) 计算

$$\frac{1}{4}\ \iint_{x^2+y^2\le R^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy\ =\ \frac{1}{4}\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r\,dr\ =\ \frac{1}{4}\ 2\pi\,(-\frac{1}{2}e^{-r^2})|_0^R\ =\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-R^2})$$

推出

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-(n\pi)^2}) \ \le \ E_n^2 \ \le \ \frac{\pi}{4}\,(1-e^{-(\sqrt{2}n\pi)^2})$$

用 $E_n \ge 0$ 推出

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-(n\pi)^2})} \ \le \ E_n \ \le \ \sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1-e^{-(\sqrt{2}n\pi)^2})}$$

推出

$$\lim_{n\to\infty} E_n \ = \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

和上面（2）一起推出

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n} e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx + e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy \ = \ \lim_{n\to\infty}\int_{L_n}\omega \ = \ \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x^2}\,dx \ = \ \lim_{n\to\infty} E_n$$

$$= \ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5.(10分) 设 S 是曲面 $\{(x,\,y,\,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=1,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ 0\le y\le 1\}$. 求第一型曲面积分 $\iint\limits_S x\,dS$.

参考答案: $z=\sqrt{1-x^2}$.

$$\iint\limits_S x\,dS \ = \ \iint\limits_S x\,\sqrt{1+\ z_x^2\ +\ z_y^2}\ dS$$

$$= \ \int_0^1\int_0^1 \ x\ \sqrt{1+(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}})^2+0}\ dxdy$$

$$= \ \int_0^1 dy\ \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

$$= \ -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1 \ = \ 1$$

6.(10分) 求第二型曲面积分 $\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1\text{ 外侧}} x\,dydz\ +\ y\,dzdx\ +\ z\,dxdy$.

参考答案: 比较快的方法是用 高斯公式 得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2+z^2=1\text{ 外侧}} x\,dydz\ +\ y\,dzdx\ +\ z\,dxdy$$

$$= \iint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1} (\ \frac{\partial x}{\partial x}\ +\ \frac{\partial y}{\partial y}\ +\ \frac{\partial z}{\partial z}\ )\,dxdydz$$

$$= \ \int_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3\ dxdydz \ = \ 3\ \text{单位球体的体积} \ = \ 4\pi$$

（注：若用其他方法计算，也分步得分。）

7.(15分) 假设平面直角坐标系第一像限中有一条曲线 $L\ =\ \{\,(\,x\,,\,y(x)\,)\ \mid\ x\ge 0\,\}$， 其中 $y(0)=1$， $y(x)$ 是严格递减的、正的、可导函数。任取 L 上一点 M， L 在 M 点的 **切线** 交 x 轴于点 A． 假定 从 M 到 A 的直线段的长度 **恒** 为 1 ． 求出 $y=y(x)$ 所满足的一阶常微分方程， 并且解出这个方程的初值问题 $y(0)=1$ ．

参考答案:

（1） 设 $M\ =\ (x,\,y(x))$. L 在 M 点的切线的坐标 $(X\,,\,Y)$ 满足直线方程

$$Y-y=y'(x)(X-x)$$

此直线交 x 轴于点 $A=(\,x-\frac{y}{y'(x)},\,0\,)$

（2）从 $M\ =\ (x,\,y(x))\ =\ (x,y)$ 到 $A\ =\ (\,x-\frac{y}{y'(x)},\,0\,)$ 直线段的长度是

$$\sqrt{(\frac{y}{y'(x)})^2+y^2}$$

条件 “从 M 到 A 直线段的长度恒为 1” 推出

$$\sqrt{(\frac{y}{y'(x)})^2 + y^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{(y'(x))^2} + y^2 = 1$$

$$(y'(x))^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

（3） 用条件“ $y(x)$ 是严格递减的、正的、可导函数” 推出 $y'(x) < 0$， $y = y(x) > 0$，因此

$$y'(x) = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = y(x)$ 所满足的一阶常微分方程是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

（4） 分离变量得

$$-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\ dy = dx$$

用不定积分的换元法 $y = \sin t$ 可以得到

$$x = -\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\, dy = -\sqrt{1-y^2} + \ln(1+\sqrt{1-y^2}\,) - \ln y + C$$

（5） 初值条件 $y(0) = 1$ 推出 $C = 0$. 代入上面（4）得

$$x = -\sqrt{1-y^2} + \ln(1+\sqrt{1-y^2}\,) - \ln y$$

8.(10分) 求二阶常微分方程 $y'' + 4\,y = \sin 3x$ 的通解。

参考答案:

（1） $\lambda^2 + 4 = 0$ 的两个根 $2\,i,\ -2\,i$ 。因此 $y'' + 4\,y = 0$ 的通解是

$$C_1 \cos 2\,x + C_2 \sin 2\,x$$

C_1, C_2 是独立的任意常数。

（2） 设 $a \sin 3x$ 是一个特解。则

$$(a\sin 3x)'' + 4\,a\ \sin 3x = \sin 3x$$

$$-9a + 4\,a = 1$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

（3） 因此 $y'' + 4\,y = \sin 3x$ 的通解是

$$C_1 \cos 2\,x + C_2 \sin 2\,x - \frac{1}{5} \sin 3x$$

C_1, C_2 是独立的任意常数。

9.(10分) 两小题。

（1）.(5分) 设 $D = \mathbb{R}^2 - \{\ (x\,,\,0) \mid x \geq 0\ \}$. 写出一个函数 $T : D \to \mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微，并且

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

（2）.(5分) 设 $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{\,0\,\}$. 证明 不存在 函数 $U : \Omega \to \mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微，并且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

参考答案:

(1).

(1.1)定义

$$T:\ D\ =\ \mathbb{R}^2\ -\ \{\ (x\ ,\ 0)\ |\ x \geq 0\ \}\quad \to \mathbb{R}$$

如下: 当 $(x,y) \in D$, $T(x,y)$ 是从 x 轴到向量 (x,y) 的逆时针方向的夹角,

$$0\ <\ T(x,y)\ <\ 2\pi\ .$$

此夹角函数在 D 上是单值定义的,对 (x,y) 是连续的、可微的。具体表达式:

当 $(x,y) \in D$ 并且 $x > 0,\ y > 0$ 时, $T(x,y) = arctan\frac{y}{x}$.

当 $(x,y) \in D$ 并且 $x = 0,\ y > 0$ 时, $T(x,y) = \frac{\pi}{2}$.

当 $(x,y) \in D$ 并且 $x < 0$ 时, $T(x,y) = arctan\frac{y}{x} + \pi$.

当 $(x,y) \in D$ 并且 $x = 0,\ y < 0$ 时, $T(x,y) = \frac{3\pi}{2}$.

当 $(x,y) \in D$ 并且 $x > 0,\ y < 0$ 时, $T(x,y) = arctan\frac{y}{x} + 2\pi$.

(1.2)如果 $(x,y) \in D$ 并且 $x \neq 0$ 时, 则 $T(x,y) = arctan\frac{y}{x}$ + 一个常数。

$$\frac{\partial T}{\partial x}\ =\ \frac{\partial(arctan\frac{y}{x})}{\partial x}\ =\ \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\,\frac{-y}{x^2}\ =\ -\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\ =\ \frac{\partial(arctan\frac{y}{x})}{\partial y}\ =\ \frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\,\frac{1}{x}\ =\ \frac{x}{x^2+y^2}$$

(1.3)如果 $(x_0,y_0) \in D$ 并且 $x_0 = 0$ 时, 则 在 (x_0,y_0) 的一个开邻域中有 $y \neq 0$, $T(x,y) = arccot\frac{x}{y}$ + 一个常数。

$$\frac{\partial T}{\partial x}\ =\ \frac{\partial(arccot\frac{x}{y})}{\partial x}\ =\ -\,\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\,\frac{1}{y}\ =\ -\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\ =\ \frac{\partial(arctan\frac{x}{y})}{\partial y}\ =\ -\,\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\,\frac{-x}{y^2}\ =\ \frac{x}{x^2+y^2}$$

所以在 D 中每点有

$$\frac{\partial T}{\partial x}\ =\ -\,\frac{y}{x^2+y^2}\quad ,\qquad \frac{\partial T}{\partial y}\ =\ \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

(2). 反证法。

(2.1)假设存在函数 $U:\ \Omega\ \to\ \mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微,并且

$$\frac{\partial U}{\partial x}\ =\ -\,\frac{y}{x^2+y^2}\quad ,\qquad \frac{\partial U}{\partial y}\ =\ \frac{x}{x^2+y^2}\ .$$

设 C 是圆周 $c(t) = (\cos t\ ,\ \sin t\ )$, $0\ \leq\ t\ \leq\ 2\pi$, 定向为逆时针方向, 则第二型曲线积分

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \int_0^{2\pi} d(U(c(t))) = U(c(t))|_0^{2\pi} = U(1,0) - U(1,0) = 0$$

(2.2) 另一方面

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy = \int_C -\,\frac{y}{x^2+y^2}\ dx + \frac{x}{x^2+y^2}\ dy$$

$$= \int_0^{2\pi}(-\sin t)(-\sin t)\ dt + \cos t\cos t\ dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\ .$$

这个与(2.1)矛盾。反证法成立。