

## 第四章 电磁介质

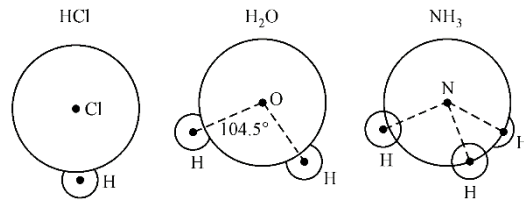
作业：6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 20, 23, 34, 35, 41, 48, 50, 60, 63, 67, 68  
4-41、48、50 补充条件：应用磁路定理时，题文中所给场量及所求场量，均看作为磁路中心线分布的场量，且同时看作为横截面上的平均值（尽管这种近似有时不是很恰当）。

### 4.1 电介质的极化

#### a) 极化的微观机制

➤ 分子整体是电中性的，但其正负电荷“重心”未必重合。可假想分子中正负电荷分别集中于各自的“重心”，则此分子被模型化为电偶极子，称为分子等效电偶极子。

- 无极分子：正负电荷“重心”重合，如 He、H<sub>2</sub>、N<sub>2</sub>、CH<sub>4</sub> 等
- 有极分子：正负电荷“重心”不重合，如 H<sub>2</sub>O、HCl、NH<sub>3</sub> 等



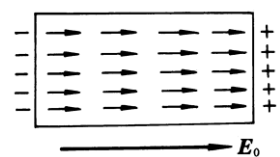
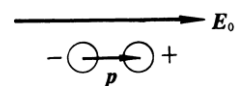
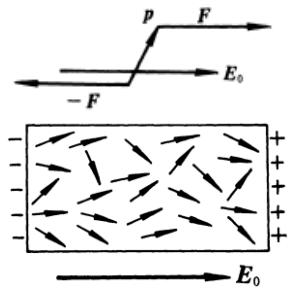
✓ 对于有极分子，尽管存在固有分

子电偶极矩  $\vec{p}_{\text{分}}$ ，但宏观无外加电场的情况下，其取向杂乱无章，即

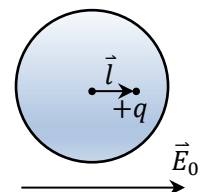
$\sum \vec{p}_{\text{分}} = 0$ ，因此不产生宏观电场。

➤ 宏观存在外加电场时，电介质分子正负电荷“重心”会出现定向性排列，从而产生宏观带电结构，称为电介质极化。一般存在两种极化机制：

- 有极分子的取向极化：如图，每个有极分子都受到外电场的力矩，产生偏向外电场方向定向转动，使得  $\sum \vec{p}_{\text{分}} \neq 0$ ，这种极化机制称为取向极化。因分子电偶极矩分布的定向性而使端面上存在有净电荷的分布，称此电荷为极化电荷，本质上仍为束缚电荷。
- 无极分子的位移极化：对于无极分子，外电场存在导致正负电荷“重心”定向分离，产生诱导分子电偶极矩，从而出现极化，并伴有极化面电荷的分布，这种极化机制称为位移极化。
- 需要说明的是，对于有极分子，也存在位移极化，但其效应通常（低频电场）比取向极化弱得多（一般差距在一个数量级左右），因此可以忽略。不过高频条件下，因为电子的惯性很小，所以电子云移动带来的电子位移极化此时占主。



☞ 中性原子的位移极化：简单起见，我们考虑带  $+q$  的原子核和围绕它的均匀带  $-q$  的半径为  $r$  的球形电子云结构。并设想外电场  $\vec{E}_0$  作用下，电子云中心和原子核分离为  $\vec{l}$ 。



$$q\vec{E}_0 = q \cdot \frac{q\vec{l}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (l < r)$$

因此诱导电偶极矩为

$$\vec{p}_{\text{分}} = q\vec{l} = \alpha\vec{E}_0, \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 r^3 = 3\epsilon_0 V$$

其中  $\alpha$  被称为原子极化率，而如上模型给出的估计量级上通常是对的。如对氢原子（玻尔半径  $a = 0.53 \times 10^{-10} \text{ m}$ ），如上模型给出

$$\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0(10^{-30} \text{ m}^3)} \sim 0.53^3 \quad (\text{实测值: } 0.667)$$

## b) 极化强度矢量 极化电荷分布

- 电介质极化后，微观分子电偶极矩出现（一定程度上）定向分布，宏观上可选取体元  $dV$ （宏观无穷小，微观无穷大），并定义密度矢量

$$\vec{P} = \frac{\sum_{av} \vec{p}_{\text{分}}}{dV}$$

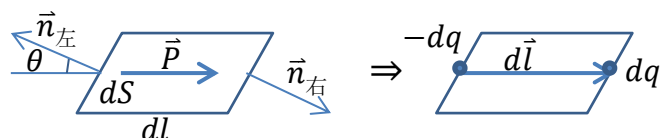
来描述此分布，称为电极化强度矢量，单位为  $\text{C/m}^2$ 。

- 经过如上操作，原则上我们不必再考虑极化的不同的微观机制，而且每个小体元内都应被理解为“已经做过了统计平均”。
- 极化电荷分布与极化强度矢量的关系：
- 极化面电荷分布：

选如上宏观无穷小，微观无穷大

体元  $dV = dl \cdot dS \cdot \cos \theta$  如左

图，等价面电荷分布如右图，即



$$\vec{P} = \frac{\sum_{av} \vec{p}_{\text{分}}}{dV} = \frac{dq \cdot d\vec{l}}{dl \cdot dS \cdot \cos \theta}$$

$$\therefore \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{右}} = \frac{dq \cdot dl \cdot \cos \theta}{dl \cdot dS \cdot \cos \theta} = \frac{dq}{dS} = \sigma'_{\text{右}}, \quad \vec{P} \cdot \vec{n}_{\text{左}} = -\frac{dq}{dS} = \sigma'_{\text{左}}$$

因此，极化面电荷密度（若体元外为真空）

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P_n$$

若该体元外仍为电介质，则极化电荷面密度应为分界面两侧贡献的和：

$$\sigma' = \vec{P}_{\text{内}} \cdot \vec{n} + \vec{P}_{\text{外}} \cdot (-\vec{n}) = (\vec{P}_{\text{内}} - \vec{P}_{\text{外}}) \cdot \vec{n}$$

对于均匀电介质， $\vec{P}$  在体内分布连续，故体内无面电荷分布。

- 极化体电荷分布：

如图，电荷守恒要求整体电中性的有限体积区域面电荷与体电荷相互抵消，即

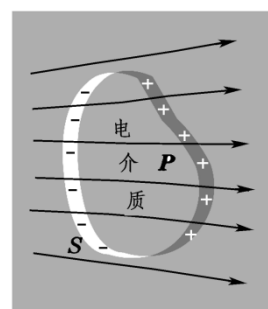
$$\oiint \sigma' dS + \iiint \rho' dV = \oiint \vec{P} \cdot d\vec{S} + \iiint \rho' dV = 0$$

$$\therefore \rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- 数学附注：考虑极化电荷分布单独激发的空间电势场

$$U'(\vec{x}) = \int \frac{d\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \iiint_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} dV', \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$$

利用公式



$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{r} &= -\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \\ \therefore U'(\vec{x}) &= \iiint_{V'} \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{r}}{4\pi\epsilon_0} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \left( \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) - \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}}{r} \right) dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot d\vec{S}'}{r} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{V'} \frac{\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{P}}{r} dV'\end{aligned}$$

如上两项分别对应极化面电荷和体电荷的贡献，故有

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}, \quad \rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

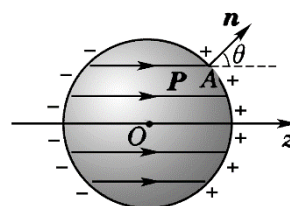
☞ 书上 229 页例 1：均匀极化球的极化电荷分布（ $R$ 、 $\vec{P}$  已知）

如图：取  $\vec{P}$  方向为极轴，建立球极坐标如图

$$\rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n} = P \cos \theta$$

- 根据之前习题课上所得结果：该极化电荷分布激发附加电场（书上 230 页例 4）



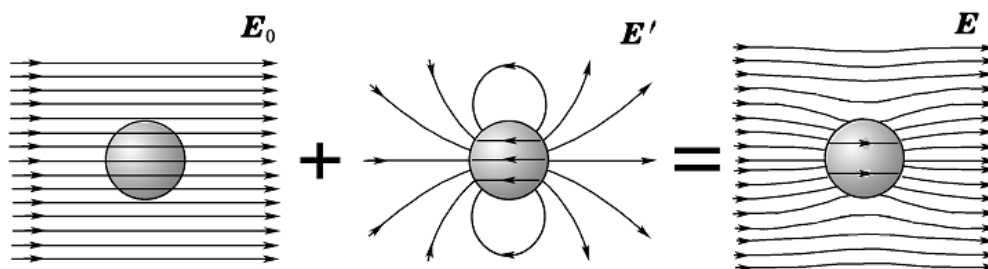
$$\begin{aligned}\vec{E}'_{\text{内}} &= -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \quad \text{for } r < R \\ \vec{E}'_{\text{外}} &= -\vec{\nabla} U'_{\text{外}}, \quad U'_{\text{外}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{for } r > R\end{aligned}$$

其中  $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$  为极化球的总电偶极矩。

#### 4.2 有电介质存在时的静电场（作业：6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 20, 23）

a) 有电介质存在时的静电场结构：

➤ 退极化场：



如图，置于外场  $\vec{E}_0$  的介质球极化后，自身极化电荷分布会在空间内外形成附加电场分布  $\vec{E}'$ ，与原外场叠加形成总的电场分布

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$\vec{E}'$  的作用效果粗略概括为：在介质内削弱原外场；在介质外左右两侧有加强原外场的趋势。介质内（被“削弱的”）总电场  $\vec{E}$  更为直接地决定了介质的极化程度，因此称  $\vec{E}'$  为退极化场。

➤ **极化规律**：即极化强度矢量对总电场依赖关系的实验定律

- **线性介质**（一般对应场强不大时）：各向同性时

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$$

其中无量纲比例系数  $\chi_e$  是不依赖于  $\vec{E}$  的常数，称为**电极化率**，其取值依赖于介质的（微观）物理性质，对于真空  $\chi_e = 0$ 。

对于单一各向同性线性介质， $\chi_e$  处处相同，称为**均匀介质**；若  $\chi_e$  为分布函数，则整体上称为**非均匀介质**。（本课程仅考查介质分块均匀情形）

- **线性介质**：各向异性同性时（如石英等晶体材料）

$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 (\chi_e)_{ij} E_j$$

对于各向异性介质， $\chi_e$  为电极化率张量，表示为线性系数矩阵，本课程不作考查要求。

- **非线性介质**：如酒石酸钾钠、钛酸钡等（参见书上 267 页内容）， $\chi_e$  依赖于场强，即极化规律非线性，极化状态不仅决定于电场，还与极化历史有关，其性质类似于铁磁体，称为**铁电体**，本课程不作考查要求。  
一般在强场中，介质极化均会背离线性规律。如下我们仅考虑线性（各向同性）极化。

#### b) 有电介质存在时的静电场方程：

- 环路定理：因为  $\vec{E}_0$  和  $\vec{E}'$  分别由静态外场电荷分布  $\rho_0$  和静态极化电荷分布  $\rho'$  激发，均为无旋场，因此环路定理形式不变，即

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{E}' = 0$$

故此时静电场仍为保守场，可以引入电势  $U$ ：  $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ 。

- 高斯定理：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} + \frac{\rho'}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0$$

即为此时静电场高斯定理的等价形式，其中

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

被称为**电位移矢量**。

- 对于线性（各向同性）介质：

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

其中  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$  被称为**相对介电常数**，或**相对电容率**。

材料	$\epsilon_r$ (1 atm, 20 °C)	材料	$\epsilon_r$ (1 atm, 20 °C)
真空	1	苯	2.3
氦	1.000065	石英玻璃	4.2
氢	1.00025	金刚石	5.7
空气（干燥）	1.00054	水	80.1

- 附注：通常我们用  $\epsilon_r$  表示相对介电常量，而记  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  表示介质的介电常

量（或介质电容率）。但书上的约定与这里用的不一样，书上记“相对介电常量”为  $\varepsilon$ ，并且把它称为“介电常量”。书上的记号和约定在高斯单位制中比较方便，因为那里不出现“ $\varepsilon_0$ ”，所以不必要每次都称呼“相对……”，但在国际单位制中，建议采用讲稿所用的约定。

☞ 书上 232 页例 7（233 页例 8）：平行板电容器，极板面积  $S$ ，间距为  $d$ ，充满各向同性均匀介质，其极化率为  $\chi_e$ 。已知两极板自由电荷面密度分别为  $\pm\sigma_0$ ，忽略边缘效应，求充满介质后的  $E$  和电容  $C$ 。

解：方法一、先求  $\vec{E}_0$ ，再设定极化强度矢量  $\vec{P}$ ，给出退极化场  $\vec{E}'$ ，进而由极化规律进行关联。

$\vec{E}_0$ ：如图方向，大小为  $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0$

$\vec{E}'$ ：如图方向，大小为  $E' = \sigma'/\varepsilon_0 = P/\varepsilon_0$

$\vec{E}$ ：如图方向，大小为  $E = E_0 - P/\varepsilon_0$

极化规律：  $P = \chi_e \varepsilon_0 E$

$$E = E_0 - \chi_e E = \frac{E_0}{1+\chi_e} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0(1+\chi_e)} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$C = \frac{\sigma_0 S}{Ed} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{S}{d} = \varepsilon_r C_0$$

可见，加入介质使得  $E$  减小， $C$  增大。可以定义  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  为介质中的介电常量（电容率），则  $C = \varepsilon S/d$ 。此外，

$$\sigma' = \sigma_0 - \varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma_0 = \frac{\chi_e}{1+\chi_e} \sigma_0$$

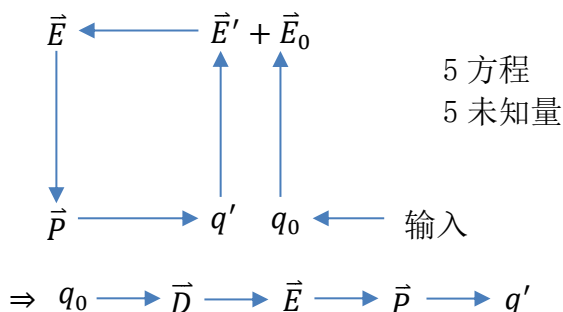
方法二、利用电位移高斯定理。

作如图高斯面，导体板内部  $\vec{D} = \varepsilon_r' \varepsilon_0 \vec{E} = 0$ ，故介质内

$$DS = \sigma_0 S \Rightarrow D = \sigma_0$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_r \varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

☞ 如上可以看到：已知导体自由静电荷分布求场强，直接求解陷入循环，可以通过定义电位移矢量打开循环，如下图所示



### c) 静电场的边界条件 唯一性定理

➤ 电介质分界面上会有极化面电荷的累积，导致场量分量跃变。

➤  $\vec{D}$  的法向分量连续：

如图，介质分界面（设无自由电荷分布）附近作“高斯扁盒”，应用高斯定理积分式（ $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ ）

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Delta S \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0$$

$$\therefore \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = 0 \Rightarrow D_{1n} = D_{2n} \text{ 或 } \varepsilon_1 \partial_n U_1 = \varepsilon_2 \partial_n U_2$$

此时， $\vec{E}$  的法向分量一般不连续。

- 若分界面上存在自由电荷面分布  $\sigma_0$  和极化电荷面分布  $\sigma'$ ，则应用高斯定理可得（ $\vec{n}$  方向仍如上图约定 1 指向 2）

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_0$$

$$E_{2n} - E_{1n} = (\sigma_0 + \sigma')/\varepsilon_0$$

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$$

### ➤ $\vec{E}$ 的切向分量连续：

介质分界面附近作“矩形扁环”，应用环路定理积分式

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}_2 = (E_{1t} - E_{2t})dl = 0$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \text{ 或 } \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$

- 有介质存在时的静电场唯一性定理：解域  $V$  内介质分布分区均匀（标记第  $i$  区介质的介电常量为  $\varepsilon_i$ ），且解域内的介质分界面上满足  $\vec{D}$  法向连续、 $\vec{E}$  切向连续的边界条件。则对于静电泊松方程

$$V \text{ 内: } \varepsilon_i \nabla^2 U = -\rho_{0i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

对应唯一解的边界面  $S$  上的边界条件仍是：1）第一类边界条件；2）第二类边界条件；3）混合边界条件。

- ☞ 试证：均匀线性介质极化，若内部无自由电荷，则无束缚电荷。（不必要求均匀极化）

证明：介质内无自由电荷

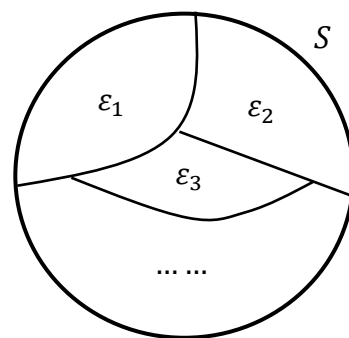
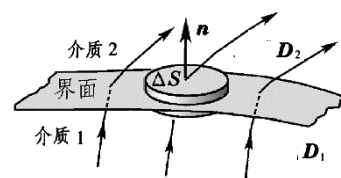
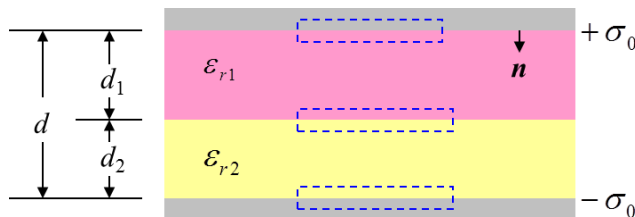
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_0 = 0$$

又，均匀线性介质极化

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \vec{D}$$

$$\therefore \rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$$

- ☞ 例：平行板电容器两极板（面积为  $S$ ）间充满两层均匀电介质，如图所示。求每层电介质中的场强、平行板的电容和介质交界面处的极化电荷密度。



解：由已知  $\sigma_0 \xrightarrow{\text{高斯定理}} D_1 = D_2 = \sigma_0$

$$\therefore E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_{r1}\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r1}\epsilon_0} \quad E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_{r2}\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_{r2}\epsilon_0}$$

可以看到： $\vec{D}$  的法向分量连续， $\vec{E}$  的法向分量不连续！

$$\therefore U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \quad C = \frac{\sigma_0 S}{U} = \frac{\epsilon_0 S}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}}} = \frac{1}{\frac{d_1}{\epsilon_{r1}\epsilon_0 S} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}\epsilon_0 S}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

可以看作两电容器上下串联！之所以如此，是因为介质交界面为等势面！

由如上电容器串联图像，可得交界面处上方介质贡献极化面电荷密度

$$\sigma_0 - \sigma'_1 = \epsilon_0 E_1 \Rightarrow \sigma'_1 = \frac{\epsilon_{r1} - 1}{\epsilon_{r1}} \sigma_0$$

下方介质贡献极化面电荷密度

$$\sigma_0 + \sigma'_2 = \epsilon_0 E_2 \Rightarrow \sigma'_2 = -\frac{\epsilon_{r2} - 1}{\epsilon_{r2}} \sigma_0 < 0$$

则总的交界面上极化面电荷

$$\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 = \left( \frac{1}{\epsilon_{r2}} - \frac{1}{\epsilon_{r1}} \right) \sigma_0$$

➤ 关于介质极化的附加说明：

1) 导体空腔内充满均匀介质时，介质内空间处处满足

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E}_0$$

即相应的电场（电势）分布可由未充入介质时的分布放大一定倍数

（ $1/\epsilon_r$ ）得到，因此，此时电容为

$$C = \epsilon_r C_0$$

如上述电容器介质填充例 8 的情形，自然可以推广到等势面间填满均匀介质的情形。如上分布的成立可由静电场唯一性定理给出一般性的证明。

2) 更一般的情况并没有  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_0$  这样的关系，尽管有

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E}_0) = \rho_0$$

这一点数学上主要是因为： $\vec{D}$  和  $\vec{E}_0$  的环路定理可以很不相同。

☞ 例如，沿外场  $\vec{E}_0$  方向摆放的均匀介质细棒，几何位形要求它是均匀极化的。在介质棒内部，退极化场可略（书上 231 页例 5），故

$$\vec{D}_{\text{内}} \approx \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}_0 \neq \epsilon_0 \vec{E}_0$$

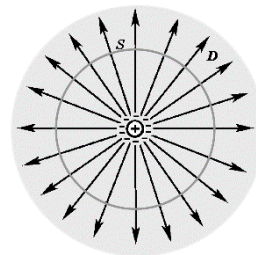
#### 4.3 有介质存在时的静电能（作业：60，63）

☞ 书上 234 页例 9：点电荷  $q_{01}$  在均匀介质（ $\epsilon_r$ ）中激发的场强分布和电势分布。

由电位移高斯定理及对称性得

$$\vec{D} = \frac{q_{01}}{4\pi r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_{01}}{4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

且有如图所示的极化电荷分布。相应电势分布



$$U_1(r) = \frac{q_{01}}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r}$$

考虑此时再将另一个点电荷  $q_{02}$  从无穷远处移近，克服静电力所做的功，仍然可以用来定义互能

$$W_{\text{互}} = q_{02}U_{12} = \frac{q_{01}q_{02}}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0 r_{12}} = \frac{1}{2}(q_{01}U_{21} + q_{02}U_{12})$$

➤ 对于点电荷系，如此定义的互能为

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_{0i} U_i$$

其中  $U_i$  表示  $q_i$  所在场点处其他点电荷激发的电势和

$$U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n U_{ji} \xrightarrow{\text{全空间均匀介质}} \frac{1}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{q_{0j}}{r_{ji}}$$

➤ 有限（自由）电荷分布带电体系：

• 体分布：  $dq_0 = \rho_0 dV$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho_0 U dV$$

• 面分布：

$$W_e = \frac{1}{2} \iint \sigma_0 U dS$$

• **注意：** 介质存在的效果在如上公式中集中反映在电势  $U$  的分布中，尤其要注意的是，极化电荷是被动出现的，而不是从无穷远处移近的！

➤ 静电场能：利用分部积分及无穷远处边条件（ $D_\infty \sim r_\infty^{-2}, U_\infty \sim r_\infty^{-1}$ ）

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2} \iiint (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) U dV = \frac{1}{2} \iiint [\vec{\nabla} \cdot (U \vec{D}) - \vec{D} \cdot \vec{\nabla} U] dV \\ &= \frac{1}{2} \oint_{S_\infty} U \vec{D} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{2} \iiint \vec{D} \cdot \vec{E} dV \end{aligned}$$

因此有电介质时，场能密度为

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2$$

• 改写如上公式为：

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$$

✓ 其中第一项  $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$  的含义是：把极化电荷当作自由电荷，与自由电荷一起从无穷远拉近到目标位形，克服静电力做功，所带来的场能密度。简单来说，就是对应于构建电荷（包括极化电荷）位形，所需要做的功。

✓ 第二项  $\frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{E}$  的存在表明：介质极化所需要的能量，不止于构建电荷位形所对应的能量，就像我们把连接于分子正负电荷间的“弹簧”拉开（这非常适合于描述线性介质！），还需要额外补充能量，作为微观“弹性势能”，可



以和宏观能量发生交换。这一项对应的能量通常被称为“极化能”。

☞ 例：平行板电容器 ( $S, d, \sigma_0 = D, \epsilon_r$ )

$$W_e = \frac{1}{2} U Q_0 = \frac{1}{2} E d \cdot \sigma_0 S = \frac{1}{2} D E \cdot V = \left( \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} \right) V$$

#### 4.4 介质的磁化

##### a) 分子电流模型 (Ampere, 1820)

➤ 磁现象的本质是电流：

分子  $\Rightarrow$  环形电流

磁化  $\Rightarrow$  外磁场作用下，大量分子环流

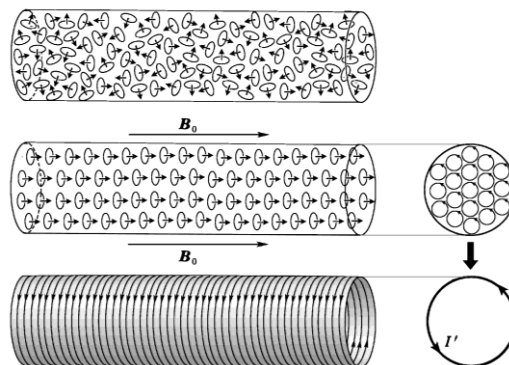
从杂乱无章到相对有序的结果

磁棒  $\Rightarrow$  可类比于载流螺线管

➤ 分子电流的微观承担者：

电子的轨道运动、自旋（也包括原子核的自旋.....）

表征为分子的固有磁矩  $\vec{m}_{\text{分}}$



☆ 磁化机制：

➤ 顺磁质： $\vec{m}_{\text{分}} \neq 0$

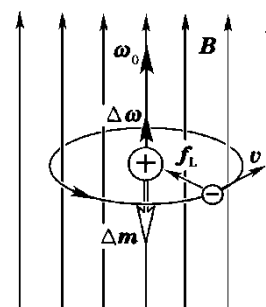
如上图在外磁场  $\vec{B}_0$  导致的磁力矩的作用下发生“取向”磁化，分子磁矩

（平均意义上）沿外磁场方向排列，附加磁场  $\vec{B}' \parallel \vec{B}_0$ ，称此种磁介质为顺磁质。

➤ 抗磁质： $\vec{m}_{\text{分}} = 0$

即多电子轨道运动带来的磁矩之间或与自旋磁矩之间相互抵消（量子力学中这也会经常发生），但在外加磁场的作用下，电子轨道磁矩会发生变化，产生“抗磁”效果

☞ 如图，当电子原轨道角速度  $\vec{\omega}_0 \parallel \vec{B}_0$  时，附加洛伦兹力方向如图所示，（假设）轨道半径近似不变，则向心力的增加要求角速度的增加来回应，而分子轨道磁矩



$$\vec{m}_{\text{分},l} = IS\vec{n} = -\frac{er^2}{2}\vec{\omega}$$

反向增加，产生抗磁效果。

- 若  $\vec{\omega}_0 \parallel -\vec{B}_0$ ，则附加洛伦兹力方向向外，轨道角速度减少，沿  $\vec{B}_0$  方向的分子轨道磁矩减少，仍为“抗磁”效果。
- 抗磁效应是普遍存在的，但对于顺磁质来说，“取向”磁化效果远大于抗磁效应，因此可略。

- 抗磁性的来源可以理解为分子感应电流的效果总是抵抗外磁场的增加，但无论是经典还是半经典的图像，都无法建立正确的抗磁定量理论，这一点上必需得回到量子力学。

## b) 磁化强度与磁化电流

- 取体元  $dV$ （宏观无穷小，微观无穷大），定义磁化强度矢量为

$$\vec{M} = \frac{\sum_{dV} \vec{m}_{\text{分}}}{dV}$$

单位为 A/m

- 磁化电流分布：

- 定向分子（环形）电流叠加会形成宏观的电流分布，称为磁化电流分布。不同于传导电流，磁化电流属于束缚电流的一种，不会有热效应（不存在形成传导电流电阻的碰撞阻尼机制），但其激发（附加）磁场的规律与传导电流是一样的。

- 类比极化情形：

$$\text{极化面电荷分布 } \sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\text{极化体电荷分布 } \rho' = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

- 磁化时：

$$\text{磁化面电流密度 } \vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$$

$$\text{磁化体电流密度 } \vec{j}' = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_m$$

$$\oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l} = \sum_{L\text{内}} I' = \iint_S \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$

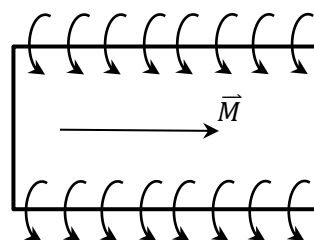
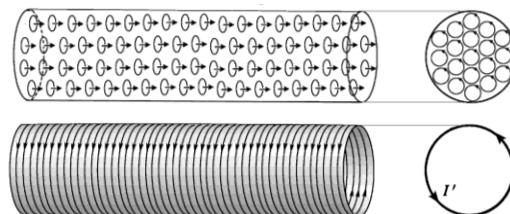
- ✓ 图像上：如将右图看作微观无穷大，宏观无穷小的体元  $dV$ （长  $dl$ 、横截面积  $\Delta S$ ），则等效面电流分布如下图：

$$i' dl \Delta S = M dV \Rightarrow i' = M$$

方向上： $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$

进一步，在  $dV$  内、紧贴  $dV$  外表面做矩形环路，其（边缘）上电流分布如图，取逆时针环路绕向，面上穿出的净余体电流：

$$\iint_{\Delta S} \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = I'_{\text{下}} - I'_{\text{上}} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$



## 4.5 有磁介质时的恒定磁场方程（作业：34，35）

### a) 有磁介质时的磁场结构

- 总磁场为外磁场与附加磁场的叠加：

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

$\vec{B}_0$ ：外磁场，由外部传导电流  $I_0$  ( $\vec{i}_0, \vec{j}_0$ ) 激发

$\vec{B}'$ : 附加磁场, 由磁化电流  $I'$  ( $\vec{i}', \vec{j}'$ ) 激发

- 磁化规律: 磁化强度矢量  $\vec{M}$  与总磁场  $\vec{B}$  之间的定量关系

实验上, 较弱磁场情况下, 大多数介质表现为各向同性、线性的磁化规律

$$\vec{M} = K_m \vec{B} / \mu_0$$

称此时介质为各向同性线性介质。

## b) 磁场方程

- 高斯定理:

$\vec{B}_0$ 、 $\vec{B}'$  均为电流激发, 故无源, 即

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

- 安培环路定理:

微分式

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 + \vec{\nabla} \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{j}_0 + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

引入辅助矢量

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \text{磁场强度矢量}$$

则环路定理可以表示为

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_0 \Leftrightarrow \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{L \text{ 内}} I_0$$

- 对于线性介质, 磁化规律可改写为

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \chi_m \Rightarrow \text{磁化率}$$

$$\therefore \vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H}$$

$$\mu_r \Rightarrow \text{相对磁导率}$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \Rightarrow (\text{介质}) \text{磁导率}$$

$$\mu_0 \Rightarrow \text{真空磁导率}$$

$\chi_m$  一般很小 (参见书上 256 页表 4-3)

- 此外,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu_r}{\chi_m} \vec{M} \Rightarrow K_m = \frac{\chi_m}{\mu_r} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r}$ , 因此

顺磁质:  $\chi_m > 0, \mu_r > 1, \mu > \mu_0$

抗磁质:  $\chi_m < 0, \mu_r < 1, \mu < \mu_0$

$\chi_m$  一般很小 ( $10^{-5}$  量级), 故此时  $K_m \approx \chi_m$

- 附注: 还有一种磁介质,  $\mu_r$  很大 ( $10^2 \sim 10^6$ ), 被称为铁磁质, 其磁化机制及性质我们后面再讨论 (4.6 节)

- 磁场强度的单位: 国际单位制中显然与磁化强度相同, 即 A/m

另一种常用单位为奥斯特 (Oe):  $1 \text{ Oe} = \frac{10^3}{4\pi} \text{ A/m}$ , 对应于真空中磁感应强度为 1 Gs 的磁场。

- 书上用  $\mu$  来表示“相对磁导率”, 并把它称为“磁导率”。

- 若  $I_0$  分布具有一定的对称性，则可利用环路定理求解有介质存在时的磁场问题： $I_0 \Rightarrow \vec{H}$  分布  $\Rightarrow \vec{B}$  分布  $\Rightarrow \vec{M}$  分布  $\Rightarrow \vec{j}_m \dots$

☞ 长直螺线管 ( $I, n = dN/dl, l, S$ )，忽略边缘效应，内部填充均匀磁介质 ( $\mu_r$ )，求磁场、磁化电流分布及自感系数。

类似于真空中的螺线管，内部为匀强磁场，由环路定理及对称性

$$\begin{aligned} H &= nI = i \\ B &= \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI = \mu_0 (i + i') \\ \therefore i' &= (\mu_r - 1)i = (\mu_r - 1)nI \\ L &= \frac{nIBS}{I} = \mu_0 \mu_r n^2 V, \quad V = lS \end{aligned}$$

如上结果可以“平移”到螺线环情形（书上 241 页例 10、249 页例 11）。

### c) 等效磁荷方法

- 按照历史的顺序，磁介质磁化理论的建立，最早采用的是所谓的“磁荷观点”，即类似于电介质极化，磁化无非便是“磁分子”的磁偶极矩在宏观外磁场的作用下定向排列的结果。在这个图像下，磁化可以被称为“磁极化”。

- “磁荷”图像是不完全正确的，比如在磁介质磁化时根本就没有磁荷分布的存在，而且基于磁荷观点也无法理解抗磁性。
- 但因为电流环与磁偶极层的等效性，故基于“磁荷图像”和“磁极化”理论建立起来的数学关系仍然是正确的，我们可以称之为“等效磁荷方法”。

- “等效磁荷方法”的构建：

- 我们先引入等效磁极化强度：（书上用  $\vec{j}$  来表示）

$$\vec{P}_m = \frac{\sum_{dv} \vec{p}_m}{dV} = \frac{\sum_{dv} \mu_0 \vec{m}_{\text{分}}}{dV} = \mu_0 \vec{M}$$

则等效极化磁荷分布：

$$\sigma'_m = \vec{P}_m \cdot \vec{n}, \quad \rho'_m = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}_m$$

- 构建由等效极化磁荷按磁库仑定律激发的（自然可以类比退极化场）退磁场  $\vec{H}'$ ：则

$$\text{库仑定律: } \vec{\nabla} \times \vec{H}' = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{H}' = \frac{\rho'_m}{\mu_0} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{P}_m}{\mu_0} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}$$

- 定义  $\vec{B}' = \mu_0 \vec{H}' + \vec{P}_m = \mu_0 (\vec{H}' + \vec{M})$ ：则

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}' = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B}' = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} = \mu_0 \vec{j}'$$

所以  $\vec{B}'$  无非便是之前已经引入的“附加磁场”！

故可由等效极化磁荷分布来确定“附加磁场”，我们称之为“等效磁荷方法”。

从“与电极化类比”的角度上看： $\vec{B}' \leftrightarrow \vec{D}' = \vec{D} - \epsilon_0 \vec{E}_0$ ； $\vec{H}' \leftrightarrow \vec{E}'$

- 我们把磁场  $\vec{B}$ （和  $\vec{H}$ ）分成传导电流激发的部分和磁化电流（或磁极化磁

荷) 激发的部分之间的叠加:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}', \quad \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}'$$

其中:  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0$  (可以看作是  $\vec{H}_0$  的定义)

注意:  $\vec{H}_0$  并非磁荷激发, 故非保守场, 相应  $\vec{H}$  满足的环路定理仍为

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{H}' + \vec{\nabla} \times \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = \vec{j}_0$$

☞ 均匀磁化圆柱棒: 如右图 (书上 245 页图 4-28), 设均为均匀磁化, 即内部为匀强磁化场  $\vec{M}$ 。则侧面磁化电流:

$$i' = M$$

左右底面等效磁荷:

$$\sigma'_{m\mp} = \mp P_m = \mp \mu_0 M$$

· a 情形: 左右底面积可略, 故

$$H'_{\text{内}} \approx 0$$

同时磁化电流分布等价于螺线管:

$$B'_{\text{内}} \approx \mu_0 i' = \mu_0 M$$

满足:  $\vec{B}' = \mu_0 (\vec{H}' + \vec{M})$

· d 情形: 厚度可略, 故磁化电流大小可略,

$$B'_{\text{内}} \approx 0$$

等效磁荷分布相当于平行板“磁容器”, 故

$$H'_{\text{内}} \approx -\frac{\sigma'_{m+}}{\mu_0} = -M$$

满足:  $\vec{B}' = \mu_0 (\vec{H}' + \vec{M})$

· 对于 b、c 情形, 原则上轴线磁场的“等效磁荷方法”的等效性我们是可以直接验证的, 不过还是比较复杂, 也比较无趣, 而且均匀磁化的假定此时并不成立, 所以这里便不讨论了。

#### d) 边界条件

➤ 磁介质分界面两侧,  $\vec{B}$  法向连续

对如图“高斯小盒”应用  $\vec{B}$  高斯定理即可证明。

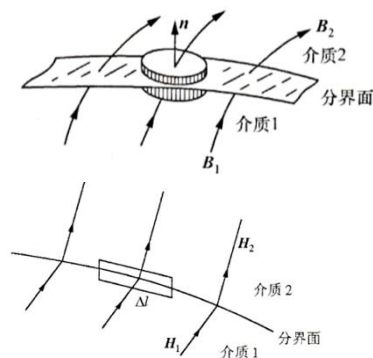
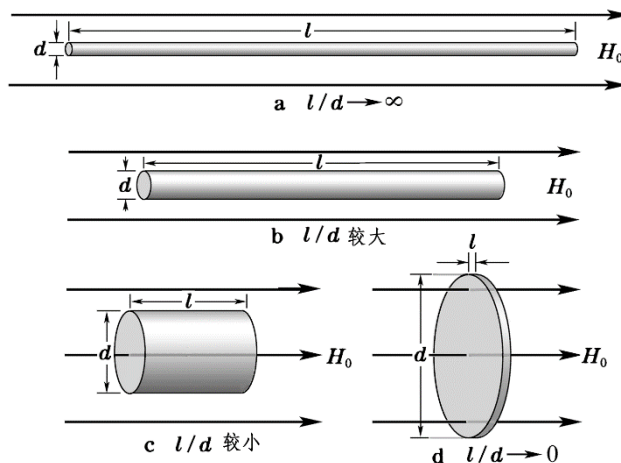
➤ 磁介质分界面两侧 (界面上无自由电流分布),  $\vec{H}$  切向连续。

对如图“安培小环”应用  $\vec{H}$  环路定理即可证明。

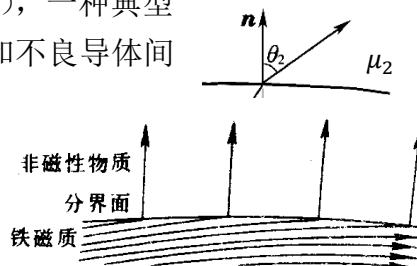
➤ 磁场线的“折射”定律:

$$H_1 \sin \theta_1 = H_2 \sin \theta_2, \quad \mu_1 H_1 \cos \theta_1 = \mu_2 H_2 \cos \theta_2$$

$$\therefore \frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$



设想  $\mu_{r1} \approx 1$  (普通磁介质)、 $\mu_{r1} \gg 1$  (铁磁质)，一种典型的“折射”情况如图所示，这非常类似于良导体和不良导体间电场线的折射的情况。尤其是磁场线向铁磁质内部集中，说明磁导率大确实有“导磁”效果强的含义。



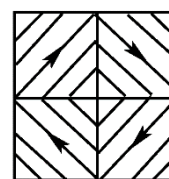
#### 4.6 铁磁质 磁路定理 (作业: 41, 48, 50)

##### a) 磁化机制和磁化曲线 (定性了解)

➤ 代表性材料: 过渡族元素 (铁、钴、镍)、稀土族元素 (钐、铕、钆)、相应元素合金、铁氧体等。

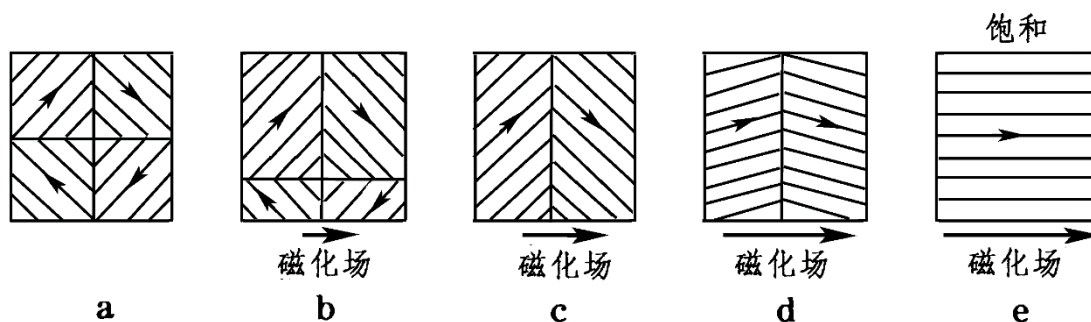
➤ 磁化机制

- 磁畴结构: 如图宏观小范围 ( $\mu\text{m} \sim \text{mm}$ ) 的自发磁化区，在同一磁畴中微观磁矩 (主要来自电子自旋) 几乎完全同向排列。



- ✓ 动力学上归因于宏观量子效应，即分子间的长程“交换作用”使得分子磁矩趋向平行排列 (最低能态)。
- ✓ 宏观贡献大的磁化率:  $10^2 \sim 10^6$  (参见书上表 4-4)
- ✓ 碰撞和高温会破坏磁畴结构，即微观的长程相互作用存在退耦合的临界温度——居里温度  $T_C$  (参见书上表 4-4)

• 初次磁化过程



a→b→c: 磁畴“侵占”

c→d→e: 磁畴方向偏转，至饱和

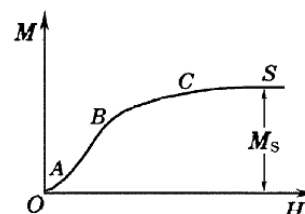
➤ 磁化规律

• 起始磁化曲线: 如右图

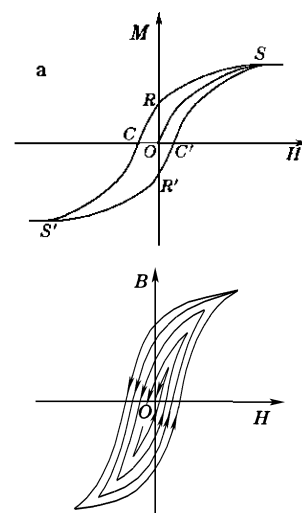
B 段: 对应“磁畴侵占”阶段

C 段: 对应“磁畴方向偏转”阶段

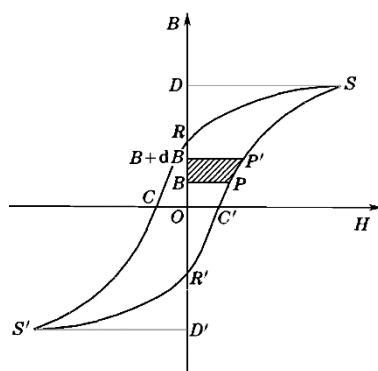
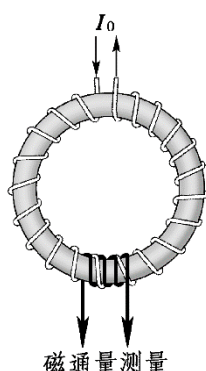
S: 磁化趋近于饱和，存在“饱和磁化强度”  $\bar{M}_S$



- 磁化规律:  $\chi_m = M(H)/H = \chi_m(H)$   
非线性 (依赖于  $H$ )、非单值性 (依赖于磁化历史)
- 磁滞回线:  
存在“剩余磁化强度”:  $M_R$  (永磁体!);  
退磁需要“矫顽力”:  $H_C$ ;  
完全去磁需要不断减小磁化幅度, (B-H 平面) 去磁曲线如图所示 ( $B = \mu_0 H + \mu_0 M \approx \mu_0 M$ )



b) 磁滞损耗 (定性了解)



考虑用上图 (左) 装置 ( $N, I_0(t)$ , 周长  $l$ , 横截面积  $S$ ) 对磁化曲线 (右图, B-H 曲线) 的测量

$$H = \frac{NI_0}{l}, \quad \Psi = NBS$$

对于  $P \rightarrow P'$  微分段, 电源克服反电动势做功为

$$dA = I_0 dt \frac{d\Psi}{dt} = I_0 d\Psi = HdB \cdot V$$

对于单位体积铁芯, 电源做微元功

$$da = \frac{dA}{V} = HdB$$

对应于上 (右) 图的阴影面积。对于整个磁滞回线 (逆时针!) 过程

$$a = \oint HdB > 0!$$

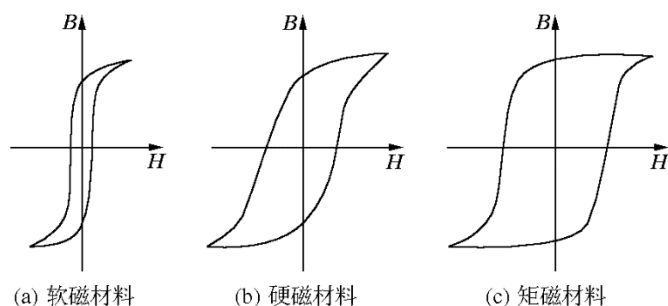
对应于磁滞回线所包围的面积。这部分电源做功最终转化为热量而损耗掉, 被称为“磁滞损耗”。

c) 铁磁质的分类 (定性了解)

- 软磁材料: 矫顽力小 ( $H_C \sim 1 \text{ A/m}$ ), 磁滞回线狭长 (面积小), 磁滞损耗小, 适合做电磁铁 (继电器、变压器等) 的铁芯。  
典型材料: 纯铁、硅钢、铁氧体 (高电阻率)
- 硬磁材料: 矫顽力大 ( $H_C = 10^4 \sim 10^6 \text{ A/m}$ ), 剩余磁化强度  $M_R$  大, 适合

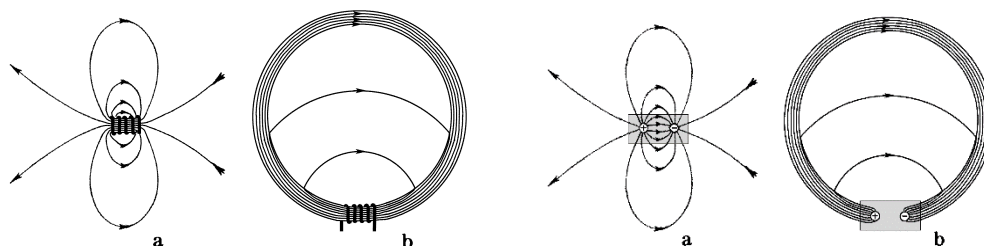
做永磁体。

磁滞回线接近矩形的铁磁质被称为“矩磁材料”，适合做二进制存储器等。



#### d) 磁路定理

- 铁磁质作为填充介质（如电磁铁中的软磁材料），实际问题处理中可近似当作**磁导率极大的线性材料**！尤其是当我们不需要考虑其磁化过程时。  
大磁导率带来的效果是“导磁”作用（如下图左 b），类似于大电导率导体的导电（流）作用（下图右 b）。



忽略漏磁，上图左 b 中铁芯构成的磁场线管被称为“**磁路**”

- 磁路定理：忽略漏磁，并设磁场在磁路中的分布分段均匀，则

$$NI_0 = \sum_i H_i l_i = \sum_i \frac{B_i l_i}{\mu_i} = \Phi_B \sum_i \frac{l_i}{\mu_i S_i}$$

如上方程类似于串联电路方程

$$\mathcal{E} = I \sum_i R_i = I \sum_i \frac{l_i}{\sigma_i S_i}$$

为此我们把如上磁路方程改写为

$$\mathcal{E}_m = \sum_i H_i l_i = \Phi_B \sum_i R_{mi}$$

磁通势（磁动势）： $\mathcal{E}_m = NI_0$

磁阻（磁通阻）： $R_{mi} = \frac{l_i}{\mu_i S_i}$ ， $\mu_i = \mu_{ri} \mu_0$

磁位降落： $H_i l_i = \Phi_B R_{mi}$

如上方程被称为“（串联）磁路定理”

- ☞ 书上 275 页例 13：均匀横截面积  $S$  的磁环开有气隙（可称为“磁隙”），其中铁磁质（ $\mu_r$ ）长  $l_1 (\gg \sqrt{S})$ ，气隙长  $l_2 (\ll \sqrt{S})$ 。求：气隙内磁场分



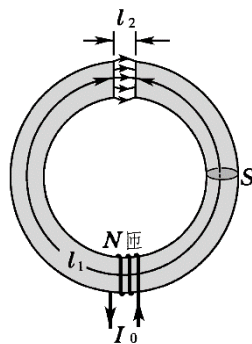
布及整个磁环的自感系数。

解答：串联磁路

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 S}, \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu_0 S}$$

由磁路定理

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \frac{NI_0}{R_{m1} + R_{m2}} = \frac{\mu_r \mu_0 NI_0 S}{l_1 + \mu_r l_2} \\ \therefore B_2 &= \frac{\Phi_B}{S} = \frac{\mu_r \mu_0 NI_0}{l_1 + \mu_r l_2} \quad \left( H_2 = \frac{B}{\mu_0} \right) \\ L &= \frac{N\Phi_B}{I_0} = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{l_1 + \mu_r l_2} \end{aligned}$$



· 讨论：

1) 气隙增加了磁通阻，降低了磁通量和自感系数。

$$\begin{aligned} \Phi_{B0} &= \frac{NI_0}{R_{m1} + R'_{m2}} = \frac{\mu_r \mu_0 NI_0 S}{l_1 + l_2}, \quad L_0 = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 S}{l_1 + l_2} = \frac{\mu_r}{\mu_{r\text{有效}}} L \\ \mu_{r\text{有效}} &= \frac{\mu_r(l_1 + l_2)}{l_1 + \mu_r l_2} \approx \frac{\mu_r}{1 + \mu_r l_2/l_1} \end{aligned}$$

取  $l_2/l_1 = 1/100$ ， $\mu_r > 1000 \gg l_1/l_2$ ，则

$$\mu_{r\text{有效}} \approx \frac{l_1}{l_2} = 100$$

2) 若不应用磁路定理，可利用磁场边界条件求解。

铁磁质分布的贡献，相当于把  $NI_0$  均匀平铺于环面上（忽略侧外漏磁，忽略气隙），同时环面长为  $l_1$  一段平铺有均匀磁化电流

$$i' = M = (\mu_r - 1)H_1 = \frac{\mu_r - 1}{\mu_r \mu_0} B_1$$

其中  $B_1 \approx B_2$ ，由环路定理

$$B_2(l_1 + l_2) \approx \mu_0(NI_0 + l_1 i') \approx \mu_0 NI_0 + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r} l_1 B_2$$

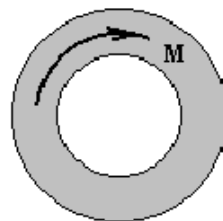
$$\therefore B_2 \approx \frac{\mu_0 NI_0}{l_2 + l_1/\mu_r}$$

➤ 对于永磁体问题，对于给定的  $\vec{M}$ （相当于材料的剩余磁化强度），我们仍定义  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ ，相应的环路定理仍成立，但这时通常放弃线性关系（因为  $\mu_r$  有时不好定义）

☞ 例：如图磁化细铁环， $\vec{M}$  大小处处相同，方向沿环向，求环内  $\vec{H}$  及  $\vec{B}$ 。

解：由对称性及  $\vec{H}$  环路定理

$$\begin{aligned} \vec{H} &= 0 \\ \therefore \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \vec{M} \end{aligned}$$



另解，由  $\vec{i}' = \vec{M} \times \vec{n}$  分布及  $\vec{B}$  环路定理

$$B = \mu_0 i' = \mu_0 M, \quad \vec{B} \parallel \vec{M}$$

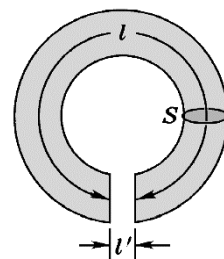
$$H = B/\mu_0 - M = 0$$

☞ 例：如图所示，含隙永磁体环（ $S, l, l' \ll \sqrt{S} \ll l$ ），已知  $M$ （大小近似均匀），求： $B, B'; H, H'$

解：磁化电流分布仍近似为均匀螺线环面电流，密度  $i' = M$ ，忽略边缘效应

$$B = B' = \mu_0 i' = \mu_0 M$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = 0, \quad H' = \frac{B'}{\mu_0} = M$$



· 讨论：

1) 采用等效磁荷方法，相应磁荷仅分布于气隙两侧截面，相当于平行板“磁荷”容器，相应磁荷面密度  $\pm\sigma_m = \pm\mu_0 M$ ，故有

$$H' \approx \frac{\sigma_m}{\mu_0} = M, \quad H \approx 0$$

2) 按书上 276 页例 14 题意， $l' \sim \sqrt{S}$ ，边缘效应不可完全忽略，此时引入磁隙有效横截面积  $S' > S$ ，定义平均场量

$$\Phi_B = BS = B'S' = \mu_0 H'S'$$

忽略漏磁，有磁路定理（仅看磁势降落的大小）

$$Hl = H'l'$$

上下两式两边相乘得，

$$BHV = \mu_0 H'^2 V'$$

即构造具有一定  $\mu_0 H'^2 V'$ （对应磁能）取值的磁隙，所需永磁体的体积，与永磁体的磁能积  $BH$  成反比。

#### 4.7 有介质存在时的磁场能（作业：67，68）

☞ 例：充满均匀介质（ $\mu_r$ ）的长直螺线管（ $I, n, V = Sl$ ），忽略边缘效应。

$$H = nI, \quad B = \mu_r \mu_0 nI, \quad L = \mu_r \mu_0 n^2 V$$

$$\therefore W_m = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_r \mu_0 n^2 V I^2 = \left( \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \right) V$$

➤ 有介质存在时的磁能密度

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$