第六章 麦克斯韦电磁理论 电磁波

✍ 作业：2，3，7，9

6.1 麦克斯韦方程组

a) 安培环路定理的改造

➢ 目前已有的成果：无介质时

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad ①$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B} \qquad ②$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad ③$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j} \qquad ④$$

- 其中 ①、② 最早分别来自于库仑定律及法拉第电磁感应定律，但我们之前已经把它们作为一般情形电场方程的自然推广或假定。
- ③ 式最早来自于毕奥-萨伐尔定律，我们仍可以把它作为一般情形的推广或假定，这一点与 ② 式在数学上是协调一致的，即 ② 式要求

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)=-\partial_t\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right)=0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\text{常量}$$

  我们选取这个常量为零，一方面是因为“零”是一个最简单、最自然的选择，另一方面是因为自然界中没有发现磁单极子的存在。
- ④ 式数学上要求恒定电流条件：

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)=\mu_0\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j}\right)=0$$

  这与电荷守恒方程是矛盾的

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}=-\partial_t\rho \xRightarrow{\text{一般}} \neq 0$$

  显然不可以直接推广，而需要改造。

➢ 安培环路定理的改造：利用 ① 式，将电荷守恒方程改写为

$$0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\partial_t\left(\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\partial_t\vec{E}\right)=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{tot}$$

其中 $\vec{j}_{tot}=\vec{j}+\varepsilon_0\partial_t\vec{E}$ 为形式上的“总（有效）电流密度”。作为安培环路定理的推广，我们把 ④ 式改写为

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_{tot}=\mu_0\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E}$$

这样做假定的理由是：

1) 避免了之前数学上的不自洽性。
2) 恒定磁场对应恒定电场（$\partial_t\vec{E}=0$），回到已经有充分实验检验的情形。
3) 类似于变化的磁场可以激发电场，这里我们看到变化的电场也可以（单独）激发磁场，这些假定的带来的效应（如电磁波等）可以用新的实验加以检验。

➢ 有介质的情形：引入电位移矢量改写 ① 式为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_0 \qquad ①'$$

则自由电荷守恒方程为

$$0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0+\partial_t\rho_0=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0+\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{D})=\vec{\nabla}\cdot(\vec{j}_0+\partial_t\vec{D})$$

这样，可以引入磁场强度矢量，将有介质存在时的安培环路定理推广为

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_0+\partial_t\vec{D}$$

其中

$$\partial_t\vec{D}=\vec{j}_D$$

定义为“<u>**位移电流密度**</u>”（Maxwell’1861），则“<u>**位移电流**</u>”对应于电位移的通量的变化率

$$I_D=\iint\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=\iint\partial_t\vec{D}\cdot d\vec{S}=\frac{d}{dt}\iint\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

- 无介质时

$$\vec{j}_D=\partial_t\vec{D}=\varepsilon_0\partial_t\vec{E}$$

相应安培环路定理也回到了之前给出的改造后的形式。

- 有介质时，考虑到

$$\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\,,\qquad \vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

则改造后的安培环路定理可记为

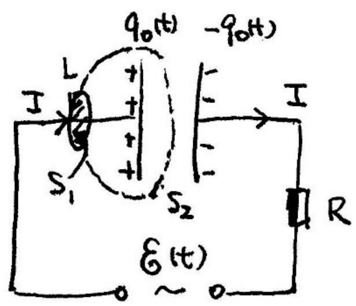
$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_0+\mu_0\vec{j}_m+\mu_0\vec{j}_P+\mu_0\varepsilon_0\partial_t\vec{E}$$

其中

$$\vec{j}_m=\vec{\nabla}\times\vec{M}\,,\qquad \vec{j}_P=\partial_t\vec{P}$$

分别为磁化电流密度，和极化电流密度（$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_P=-\partial_t\rho'$ 为极化电荷守恒方程）。这表明，除了各种电荷移动带来的电流效应之外，变化电场是激发磁场的另外一种因素。

☞ 我们来构造一个（近似）恒定传导电流与位移电流交错的特例：如图，用可变电动势的电源为平行板电容器充电，设计它维持导线上的传导电流 $I=dq_0/dt$ 恒定。



- 取围绕外部导线的半径 $r\to 0$ 的有向圆环 L，及其围成的圆平面 S_1（法向向右），忽略电容器边缘效应

$$H\approx\frac{I}{2\pi r}\,,\qquad \oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}\approx I=\iint_{S_1}\vec{j}_0\cdot d\vec{S}\approx\iint_{S_1}(\vec{j}_0+\vec{j}_D)\cdot d\vec{S}$$

- 取如图由 L 围城的曲面 S_2，其上无 $\vec{j}_0$ 分布，但其上电位移通量的变化率

$$\iint_{S_2}\partial_t\vec{D}\cdot d\vec{S}\approx\frac{d}{dt}\oiint_{S_2+S_1}\vec{D}\cdot d\vec{S}=\frac{dq_0}{dt}=I$$

故有

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}\approx I\approx\iint_{S_2}\vec{j}_D\cdot d\vec{S}=\iint_{S_2}(\vec{j}_0+\vec{j}_D)\cdot d\vec{S}$$

- 如上特例可以看出，引入位移电流，得到恒定磁场安培环路定理的一个自然的推广，而对 S_2 曲面，我们也得到了如上推广的一个非平凡的验证。
- 电荷守恒方程

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{j}_0+\vec{j}_D)=0$$

告诉我们跨越面电荷分布时 $\vec{j}_0+\vec{j}_D$ 整体法向连续，对于如上特例，跨越电容器极板时，导线电流 $\vec{j}_0$ 与电容内部 $\vec{j}_D$ **法向连续**。

因此一点，在低频电路中，电容器作为集中元件，两端传导电流连续，故可在基尔霍夫方程组中不必考虑电容器内部电流的中断的效应。

b) 麦克斯韦方程组 介质方程组

➢ 麦克斯韦方程组，

微分式	积分式	
$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_0$	$\oiint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\iiint_V\rho_0 dV$	(I)
$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	$\oint_L\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\iint_S\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$	(II)
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$	$\oiint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	(III)
$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_0+\partial_t\vec{D}$	$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_S\left(\vec{j}_0+\partial_t\vec{D}\right)\cdot d\vec{S}$	(IV)

其中，对于线性介质

$$\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E} \qquad \text{(V)}$$

$$\vec{B}=\mu_r\mu_0\vec{H} \qquad \text{(VI)}$$

$$\vec{j}_0=\sigma\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \qquad \text{(VII)}$$

方程 (V)-(VII) 通常被称为介质（物质）方程组，与麦克斯韦方程组一起构成求解宏观电磁场的完备方程组。

- 电荷守恒方程已经包含在麦克斯韦方程组中。
- 若处理电磁场与电荷的相互作用，还需引入洛伦兹力公式

$$\vec{F}=q_0\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

或记为洛伦兹力体密度的形式

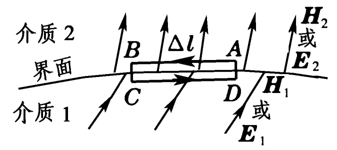
$$\vec{f}=\frac{d\vec{F}}{dV}=\rho_0\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

➢ 边界条件：

- 在电磁介质分界面上，设不存在自由电荷与传导电流的面分布，则跨越介质分界面时，
  1) $\vec{D}$ 与 $\vec{B}$ 法向连续（满足通量为零的高斯定理）
  2) $\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 切向连续：对于如图**“矩形扁环”**（**面积可略**）

$$\vec{E}_2\cdot\Delta\vec{l}-\vec{E}_1\cdot\Delta\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

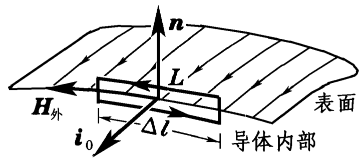
$$\vec{H}_2\cdot\Delta\vec{l}-\vec{H}_1\cdot\Delta\vec{l}=\frac{d}{dt}\iint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=0$$



- 导体分界面时，可存在 σ_0 和 $\vec{\iota}_0$
  1) $\vec{E}$ 切向连续、$\vec{B}$ 法向连续
  2) $\vec{D}$ 法向不连续，取 $\vec{n}=\vec{n}_{1\to2}$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)=\sigma_0$$

  3) $\vec{H}$ 切向不连续：对于如图“矩形扁环”（面积可略）



$$\vec{H}_{外}\cdot\Delta\vec{l}-\vec{H}_{内}\cdot\Delta\vec{l}=\vec{\iota}_0\cdot\left(\vec{n}\times\Delta\vec{l}\right)$$

$$=(\vec{\iota}_0\times\vec{n})\cdot\Delta\vec{l}$$

$$\therefore\ \vec{H}^{/\!/}_{外}-\vec{H}^{/\!/}_{内}=\vec{\iota}_0\times\vec{n}\qquad 或\qquad \vec{n}\times\left(\vec{H}_{外}-\vec{H}_{内}\right)=\vec{\iota}_0$$

c) 电磁场的对偶性

➢ 真空无源时的麦克斯韦方程组的形式为

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

该方程组具有电磁对偶性，即做如下变换

$$\vec{E}\to c\vec{B}\ \&\ \vec{B}\to-\vec{E}/c\,,c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

则方程组的形式不变，只是第一对方程和第二对方程互换了位置。

- 但考虑到源的存在

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon_0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\partial_t\vec{B}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

这种对偶性似乎被形式上破坏了。

➢ 如果有磁荷的存在，我们期望麦克斯韦方程组有完整的电磁对偶性，即

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho_e/\varepsilon_0, & \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{J}_m-\partial_t\vec{B}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\rho_m\,, & \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}_e+\varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

在变换

$$\vec{E}\to c\vec{B}\ \&\ \vec{B}\to-\vec{E}/c\ \&\ \rho_e\to c\varepsilon_0\rho_m\ \&\ \rho_m\to-\rho_e/(c\varepsilon_0)$$

下，形式不变。

其中 $\vec{J}_m=\rho_m\vec{v}$ 为磁荷流密度。如上“修正”后的麦克斯韦方程组暗示着：

1) 静止磁荷激发磁场满足我们在第二章引入的磁库伦定律。
   作为洛伦兹力公式的一种自然的推广，运动磁荷受力为

$$\vec{F}=\frac{q_m}{\mu_0}\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)$$

2) 磁荷守恒：

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_m+\partial_t\rho_m=0$$

6.2 电磁波

a) 电磁波方程：

- ➢ 线性（各向同性）波动方程：
  - 一维标量型：$\partial_t^2\xi - u^2\partial_x^2\xi = 0,\ \xi = \xi(x,t)$
  - 二维标量型：$\partial_t^2\xi - u^2\left(\partial_x^2\xi + \partial_y^2\xi\right) = 0,\ \xi = \xi(x,y;t)$
  - 三维标量型：$\partial_t^2\xi - u^2\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2\right)\xi = \partial_t^2\xi - u^2\nabla^2\xi = 0,\ \xi = \xi(\vec{r};t)$
  - 三维矢量型：$\partial_t^2\vec{\xi} - u^2\nabla^2\vec{\xi} = 0,\ \vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r};t)$
- ➢ 真空电磁波方程：真空指的是无介质、无自由电荷及传导电流

由真空麦克斯韦方程组

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E}\end{cases}$$

$$\therefore\ \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \nabla^2\vec{E} = -\nabla^2\vec{E}$$

同时

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) = -\partial_t\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right) = -\varepsilon_0\mu_0\partial_t^2\vec{E}$$

故有

$$\boxed{\partial_t^2\vec{E} - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla^2\vec{E} = 0}$$

类似地

$$\boxed{\partial_t^2\vec{B} - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla^2\vec{B} = 0}$$

如上两方程即为**<u>真空电磁波方程</u>**。由此确定真空电磁波速（真空光速）

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

- 线性介质中，需做替换：$\varepsilon_0 \to \varepsilon_r\varepsilon_0$，$\mu_0 \to \mu_r\mu_0$。故介质中波速

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}$$

介质折射率

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

b) 平面简谐电磁波

- ➢ 单色波对应于单频简谐波。对于球面波，在远离点源的区域，总可以做平面波近似，所以通常所说的单色波，对应于数学上的单频平面简谐波。
- ➢ 平面简谐波的复表示：记

$$\xi(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right) = \mathrm{Re}\,\tilde{\xi}$$

其中

$$\tilde{\xi} = A\,e^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi\right)}$$

为平面简谐波 $\xi(\vec{r},t)$ 的**<u>复表示</u>**。

- 类似于简谐振动的复表示，简谐波的叠加、求导、积分等均可在复表示下进行。
- 复振幅：记

$$\tilde{\xi} = A\, e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi\right)} = \tilde{A} e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$$

其中 $\tilde{A} = Ae^{i\varphi}$ 被称为**<u>复振幅</u>**。

➢ 平面简谐电磁波的性质：

采用复表示：

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}, \qquad \tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$$

并将波动方程及麦克斯韦方程组推广至复形式，如

$$\vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{E}} = 0, \quad \vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}} = -\partial_t \tilde{\vec{B}}, \quad \ldots$$

麦克斯韦方程组不但导致了电磁波方程（组），还给出了对电磁振动方向和相对大小的限制。

1) 平面简谐电磁波为**横波**：即电磁振动方向与传播方向垂直

利用公式

$$\vec{\nabla} e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = -i\vec{k} e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$$

则有

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{E}} = -i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{E}} \quad\Rightarrow\quad \vec{k}\cdot\vec{E} = 0$$

$$0 = \vec{\nabla}\cdot\tilde{\vec{B}} = -i\vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}} \quad\Rightarrow\quad \vec{k}\cdot\vec{B} = 0$$

2) $\vec{E}$ 振动与 $\vec{B}$ 振动之间的（大小、方向、位相）关系

$$\vec{\nabla}\times\tilde{\vec{E}} = -\partial_t \tilde{\vec{B}}$$

$$\therefore\ \vec{k}\times\tilde{\vec{E}} = \omega\tilde{\vec{B}} \quad\Rightarrow\quad \vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 e^{i(\varphi_B-\varphi_E)}$$

因此有

$$\vec{k}\times\vec{E}_0 = \omega\vec{B}_0 \quad \& \quad \varphi_B-\varphi_E = 0$$

或者记为：对于 $\vec{E}(t,\vec{r})$ 和 $\vec{B}(t,\vec{r})$

i. $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ 振动同相位
ii. 方向上 $\vec{k}\to\vec{E}\to\vec{B}$ 两两垂直且构成右手系
iii. 大小上：$B = E/v$

➢ 平面简谐电磁波的能量：

- <u>能量密度</u>：

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\vec{E}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2+\mu_r\mu_0 H^2\right)$$

对于单色电磁波而言，上面两项的贡献其实是相等的

$$B^2 = E^2/v^2 = \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0 E^2$$

$$\therefore\ \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_r\mu_0} = \mu_r\mu_0 H^2$$

$$\Rightarrow\ w = \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 = \mu_r\mu_0 H^2 = \frac{EH}{v}$$

- <u>能流密度</u>：

$$\vec{S} = w\vec{v} = EH\hat{\vec{v}} = \vec{E} \times \vec{H}$$

被称为<u>**坡印廷（Poynting）矢量**</u>，其大小的周期平均值为电磁波的强度

$$I = \bar{S} = \frac{1}{2}E_0H_0 = \frac{1}{2}v \cdot \varepsilon_r\varepsilon_0E_0^2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}E_0^2$$

➢ 电磁场的能量和能流（**推导不要求**）

- 电磁场的能量：考虑对自由电荷，洛伦兹力做功功率的体密度

$$p = \frac{dP}{dV} = \vec{f} \cdot \vec{v} = \rho_0(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} = \rho_0\vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j}_0 \cdot \vec{E}$$

将 $\vec{j}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{H} - \partial_t\vec{D}$ 带入得

$$p = (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \partial_t\vec{D}$$

其中

$$(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \cdot \partial_t\vec{B}$$

因此对于**线性介质**有

$$p = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{2}\partial_t(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{S} - \partial_t w$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \qquad w = \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

对固定区域 V 做累计（用 A 表示面积及面积分）

$$-\frac{d}{dt}\iiint_V w dV = P + \oiint_A \vec{S} \cdot d\vec{A}$$

这个公式的含义是：以 w 为密度的定域电磁场能量的减少来自于两个因素，一是对（同一区域）自由电荷系统做功，另一个是以 $\vec{S}$ 为能流密度从区域边界上“跑掉”。对应于电磁场和电荷系统的**能量守恒连续性方程**。

➢ 电磁场的动量：电磁场可以和自由电荷系统有动量交换（力的作用），故电磁场具有动量。

可以证明，电磁场的动量密度正比于坡印廷矢量，真空情形为

$$\vec{g} = \frac{\vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2}$$

- 图像上的说明：设想真空单色电磁波场是由数密度为 n 的光子组成，其中

$$E_\gamma = \hbar\omega, \qquad \vec{p}_\gamma = \hbar\vec{k} = \frac{E_\gamma}{c}\hat{\vec{k}}$$

$$\therefore w = nE_\gamma = EH/c$$

$$\vec{g} = n\vec{p}_\gamma = \frac{w}{c}\hat{\vec{k}} = \frac{EH}{c^2}\hat{\vec{k}} = \frac{\vec{E} \times \vec{H}}{c^2}$$

- 实验验证：光压、康普顿散射等。

➢ 电磁场的角动量(不要求)：电磁场可以和自由电荷系统有角动量交换（力矩的作用），故电磁场具有角动量，其相对给定参考点的分布密度为

$$\vec{r} \times \vec{g}$$

c) 电磁波的辐射（定性了解）

➢ 在远处，辐射的总功率，即能流的通量为

$$P_\infty = \oiint_{S_\infty} \left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}$$

存在辐射的条件为

$$\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)_r \neq 0 \quad 且 \quad E_\infty H_\infty \sim \frac{1}{r^2}$$

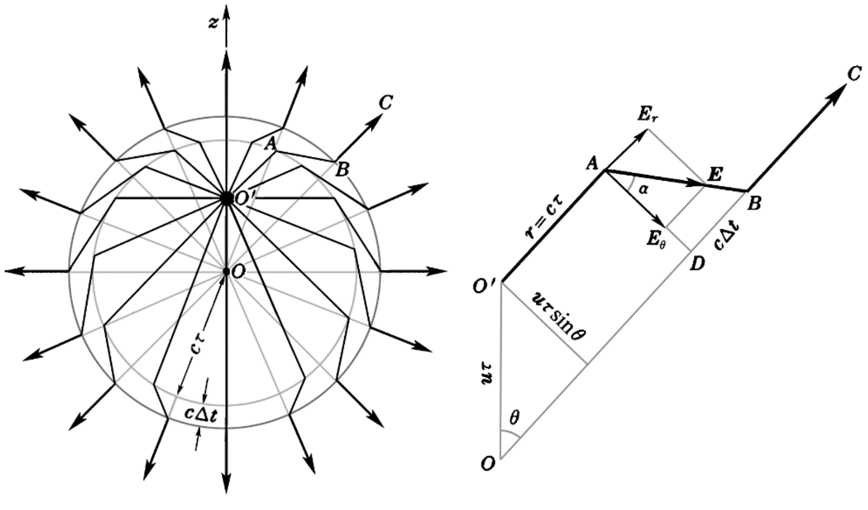
匀速运动点电荷所激发的电磁场

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3}\frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\ ,\quad \vec{B}=\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}$$

显然不满足如上条件。

➢ 加速运动点电荷产生的辐射：

考虑 $t=0$ 时静止于 O 处的点电荷 q，短时间 Δt 内加速至 $u=a\Delta t \ll c$，其间移动距离 $a\Delta t^2/2$ 可略。此后经 $\tau \gg \Delta t$ 时间匀速运动至 O' 处（与 O 相距 $u\tau \ll c\tau$），如下图所示，



考虑到电磁场传播速度为光速，则以 O 为中心

1） 半径为 $c(\Delta t+\tau)$ 的球面外仍为原静止点电荷所激发的电场；

$$E = E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ ,\qquad r \geq c(\Delta t+\tau)$$

2） 半径为 $c\tau$ 的球面内为匀速运动点电荷激发的电场（磁场线并未示出）；

$$E \approx E_r \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ ,\qquad r \leq c\tau$$

3） 两球面间的“折线”为加速阶段所激发的电场线。

• 如果如上“瞬间加速模型”可以成立，则关于加速度相关的电场我们可以得到如下结论：

$$E_r \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (c\tau)^2}$$

$$E_\theta = E_r \cot\alpha = \frac{u\tau\sin\theta}{c\Delta t} E_r \approx \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (c\tau)} \approx \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}$$

- 如上加速度相关的电场具有横向分量 $E_\theta \sim r^{-1}$ 满足向外辐射的要求，被称为“<u>辐射电场</u>”，相应“<u>辐射磁场</u>”在此情形下（$u \ll c$）近似可以由下式得到

$$\vec{B}_{\text{辐射}} \approx \frac{\vec{e}_r}{c} \times \vec{E}_{\text{辐射}} \approx \frac{qa\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} \vec{e}_\varphi$$

即 $\vec{E}_{\text{辐射}}$ 沿经线方向（**子午面内**），$\vec{B}_{\text{辐射}}$ 沿纬线方向（**与赤道面平行**）。

- 辐射能流为

$$\vec{S} = \vec{E}_{\text{辐射}} \times \frac{\vec{B}_{\text{辐射}}}{\mu_0} \approx \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \vec{e}_r$$

$S \sim \sin^2\theta$ 说明辐射具有方向性，**垂直于加速方向的赤道面上辐射最强**

同时，辐射具有偏振性：**电场偏振方向沿经线，磁场偏振方向沿纬线**

- 如上公式虽然是通过模型假定得到的,但可以证明对于 $u_0 = 0$ 的加速电荷辐射场，此公式是正确的。此情形下，总辐射功率为

$$P = \oiint_{\text{球面}r} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \frac{q^2 a^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r^2} \cdot 2\pi r^2 \cdot \sin\theta \, d\theta = \frac{q^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

➢ 电偶极辐射：把振荡电偶极子（$\vec{p} = q\vec{l}$）看作是正、负点电荷对称地作加速运动，对如上公式做替换 $qa \to q(a_+ + a_-) = q\ddot{l} = \ddot{p}$，得偶极辐射公式

$$P = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

如上公式对于 l 不变，q 在变化的振荡偶极子仍成立。

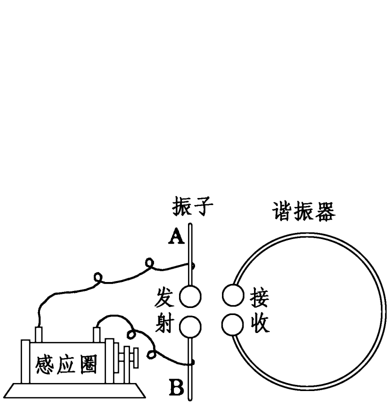
- 若偶极振荡来自于交流信号源，即

$$\vec{p} = \vec{p}_0 \cos\omega t$$

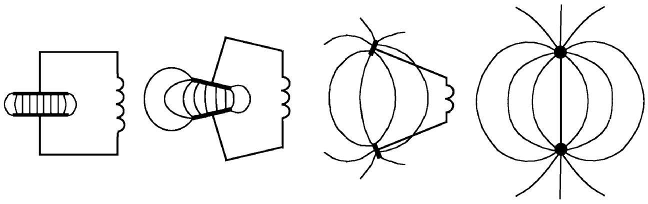
则平均辐射功率为

$$\bar{P} = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3} \propto \boldsymbol{\omega^4}$$

➢ 赫兹实验（Hertz’1888）：装置如图



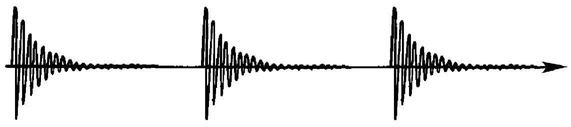
- 作为发射端的“偶极振子”是由 A、B 黄铜杆连接的两个磨光的黄铜球来实现的，在电路中也可等价为 LC 谐振装置，如下图



a b c d

其谐振频率较大（$\nu_0 \sim 10^8 - 10^9$ Hz，这当然也取决于两个球之间距离，比如说，1cm）。

- 感应线圈部分可以提供每秒 10-100 次、数万伏特的高压脉冲，脉冲峰值可以击穿两铜球之间的空气，产生电火花，持续时间略大于 $10^{-8}\ s$ 量级。此高压脉冲（击穿电流）可看作宽频带的“驱动力”，使振子起振，频率在 ν_0 附近的振动最大，辐射最强。考虑到辐射带来的阻尼，该振动（包括火花电流）会很快地衰减，如图所示。



- 接收装置为黄铜环联接两个黄铜球，黄铜球间隙的距离可调节，使得其谐振频率在 ν_0 附近，这样的接收装置被称为“<u>谐振器</u>”。谐振时，几乎在发射端出现火花的同时，接收端间隙也出现火花。
- 赫兹也验证了电磁波的偏振性质，以及折射、反射、干涉、衍射等性质和现象，他还得到了入射波和反射波叠加的驻波，并测定了波长。这些验证了麦克斯韦预言的电磁波的存在，也从侧面验证了光波为特殊频带的电磁波。

➢ 电磁波的发射类型：

- 天线发射：类似于赫兹实验的发射装置，无线电波的发射机制以（电台）天线发射为主。
- 热辐射：所有具有（绝对）温度的物体都可以向外辐射电磁波，其频谱峰值对应的辐射光子的能量量级为
$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} \sim kT = 0.86 \times 10^{-4}\,\frac{\mathrm{eV}}{\mathrm{K}} \cdot T$$
波长量级为
$$\lambda_0 T \sim \frac{hc}{k} \approx 1.5\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{K}$$
实际上，在理想情况下（物体和辐射场达到热平衡，此时的辐射被称为“平衡辐射”，或“黑体辐射”），对按波长分布的能量谱，有维恩位移定律（Wien’1893）
$$\lambda_0 T = 0.2898\ \mathrm{cm}\cdot\mathrm{K}$$

☞ 如太阳表面温度约 6000 K，其辐射峰值波长
$$\lambda_0 \sim 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{cm} = 500\ \mathrm{nm}$$
处于可见光波段。

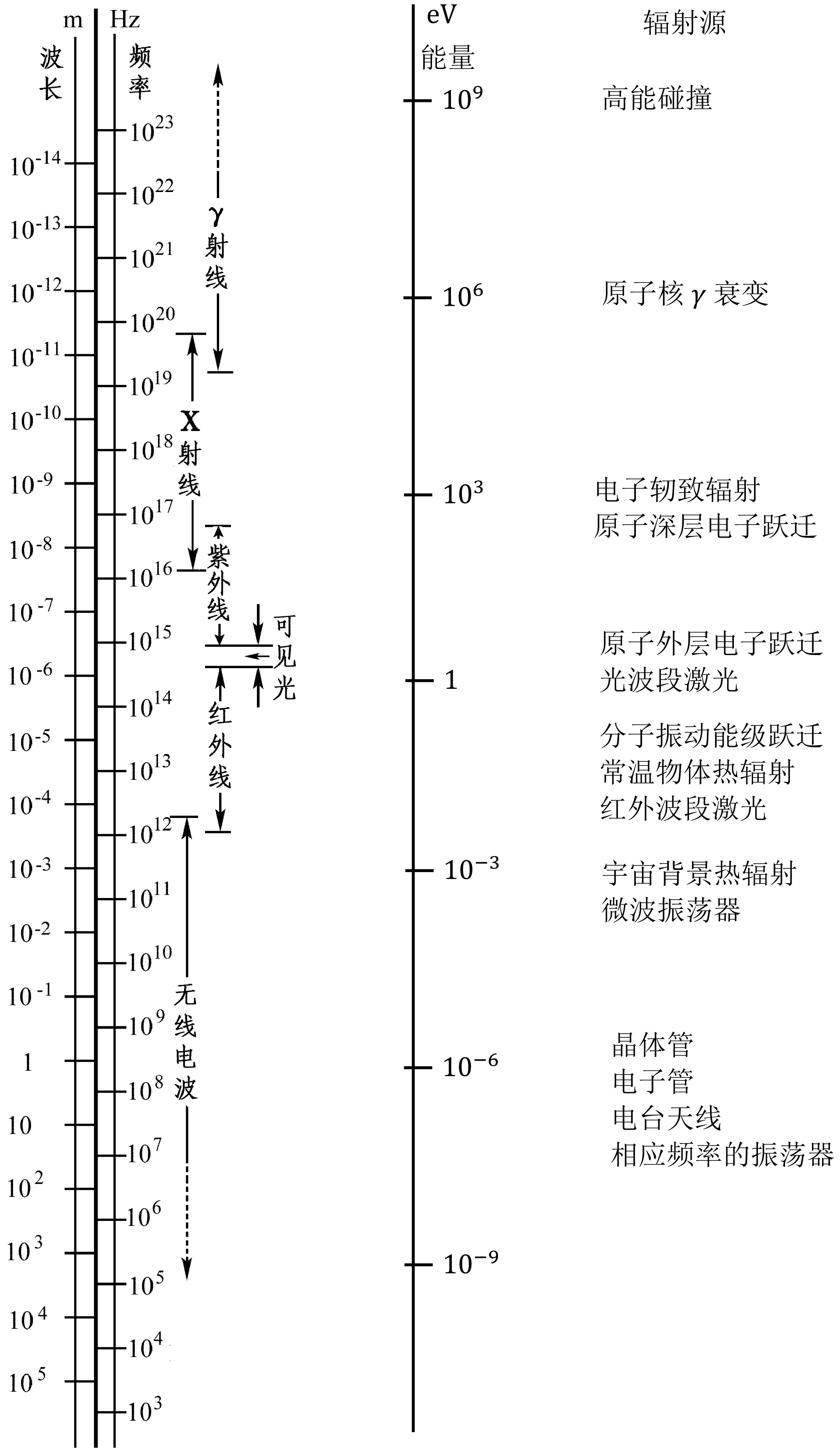
☞ 人体温度约为 300 K，其热辐射集中在红外波段。

☞ 宇宙空间探测，发现有近乎各向同性的“宇宙微波背景辐射”（$\lambda_0 \sim 1mm$），对应于 $T \sim 3$ K 的宇宙背景温度，这是宇宙大爆炸的重要遗迹和观测证据。

- 原子辐射：原子外层电子辐射的光子能量在 eV 的量级，波长在可见光波段附近；内层电子辐射（可由高能电子轰击原子激发）的光子能量在 keV 的量级，对应于紫外及 X 射线波段。
- 原子核辐射：光子能量在 100 keV ~ 1 MeV 量级，对应于 γ 射线波段。
- 高能粒子碰撞：目前可以产生并探测到能量达到 1TeV 的光子。

• 高能宇宙线中的高能 γ 射线光子：目前可以观测到 1000 TeV 的光子.

d)　电磁波谱



e) 电磁波在金属中的传输　趋肤效应

➢ 金属中的麦克斯韦方程组：

· 自由电荷移动速度 $u \ll c$，故有

$$\vec{j} \approx \sigma\vec{E}$$

· 自由电荷体分布可略：$\rho_0 \approx 0$

设想金属中初始放入电荷分布 $\rho_0(t=0)$ 后所对应的暂态过程

$$\partial_t\rho_0 = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_0 = -\sigma\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho_0$$

$$\Rightarrow\ \rho_0(t) = \rho_0(t=0)\cdot e^{-t/\tau}$$

其中对于金属良导体 $\tau = {}^{\varepsilon}/_{\sigma} \sim 10^{-19}\ \mathrm{s}$，也就是说体电荷分布会很快消失，表现为金属表面电荷分布及其变化。

附注：对于良导体，如上弛豫时间已经远小于自由电子平均碰撞时间 $\sim 10^{-14}\ \mathrm{s}$，故如上条件应修改为，当电磁波频率 $\nu \ll 10^{14}\ \mathrm{Hz}$ 时，该弛豫时间可略，即在金属内部，体电荷分布可略。

· 综上，金属中的麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0\,, & \vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon\mu\partial_t\vec{E} + \mu\sigma\vec{E}\end{cases}$$

· 金属中的电磁波方程（组）：

$$\nabla^2\vec{E} = \varepsilon\mu\partial_t^2\vec{E} + \mu\sigma\partial_t\vec{E}$$
$$\nabla^2\vec{B} = \varepsilon\mu\partial_t^2\vec{B} + \mu\sigma\partial_t\vec{B}$$

这些方程仍有形式上的平面波解（注意：如下引入了复数型的波矢量 $\tilde{k}$ ）

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}z)}\,,\qquad \tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \tilde{k}z)}$$

带入电磁波方程（组）中得：

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega$$

$$\therefore\ \begin{cases}\tilde{k} = k - i\kappa \\ k = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}+1\right)^{1/2}\,,\qquad \kappa = \omega\sqrt{\dfrac{\varepsilon\mu}{2}}\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon\omega}\right)^2}-1\right)^{1/2}\end{cases}$$

当 ${}^{\varepsilon}/_{\sigma} \ll \omega$ 时，

$$\tilde{k} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} - i\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}}$$

故

$$\tilde{\vec{E}} = \tilde{\vec{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(\omega t - kz)}\,,\qquad \tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(\omega t - kz)}$$

波动沿传播方向逐渐衰减，可以定义“**<u>趋肤深度</u>**”

$$d_s = \kappa^{-1}$$

这种效应被称为<u>趋肤效应</u>。

☞ 金属良导体（如铜：$\sigma = 5.9\times10^7(\Omega\mathrm{m})^{-1}$）中，取 $\omega = 10^7\ \mathrm{Hz}$，则趋肤深度为

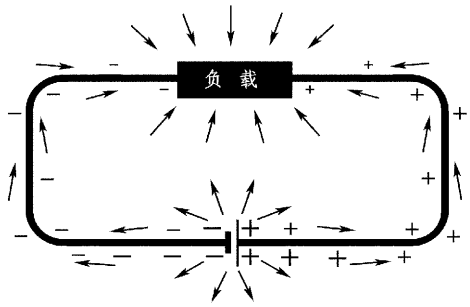
$$d_s \approx \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \sim \sqrt{\frac{2}{10^{-6}\cdot 10^{7}\cdot 10^{7}}} \sim 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

若为可见光波段（$\omega \sim 10^{15}\ \mathrm{Hz}$），则 $d_s \sim 10^{-8}\ \mathrm{m} = 10\ \mathrm{nm}$ ，即金属良导体对可见光基本上是“全反射”的，这就是为什么我们可以在玻璃上镀一层薄薄的银（玻璃起的作用仅是防止银被氧化）来作为镜子。

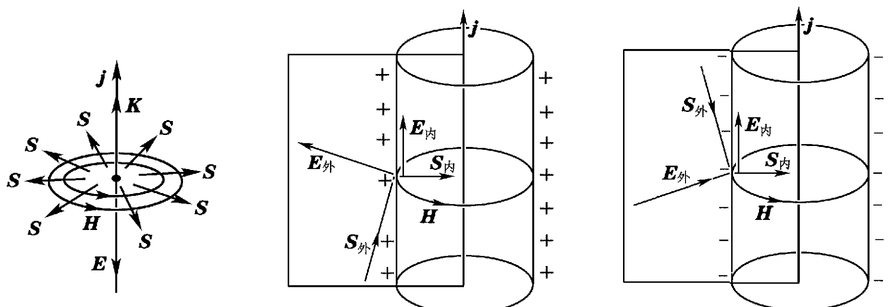
6.3 电磁场及电磁能量的传输

➢ 直流电路：在第一章中，我们讨论了在直流电路建立的过程中，电场起到的关键作用。在这里，我们补充讨论在直流电路建立后的稳态过程中，电磁场分布和能量传输之间的关系。

右图是一个稳态直流电路的导体外，能流 $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ 方向分布的示意图。



- 电源内电流方向与 $\vec{E}$ 反向（如下图 a），这使得 $\vec{S}$ 向外，包括电源外部 $\vec{S}$ 的方向也是向外的趋势。
- 在负载（电阻）和导线内部，电流沿 $\vec{E}$ 的方向，故其能流 $\vec{S}$ 指向中心，即使是在导线和负载外部，能流也有向内的趋势。
- 如果电导率 $\sigma \to \infty$ ，则导线外部电场 $\vec{E}$ 垂直于导线表面，外部能流倾向于平行导线方向。



a　　b　　c

✓ 总的图像是：外部能量的流动是从电源出发，在导线的引导下，“扎入”电路中有电阻的地方。

☞ 例：考虑无穷长圆柱直导线中的一段（r, l, σ），通以均匀电流 $I = j \cdot \pi r^2$，求证：由导线外侧面传入的电磁场能即为导线消耗掉的能量（即焦耳热）

证明：传入导线的能流仅依赖于导线外平行于导线的电场分量

$$E_{外t} = E_{内t} = \frac{j}{\sigma} = \frac{I}{\sigma \cdot \pi r^2}$$

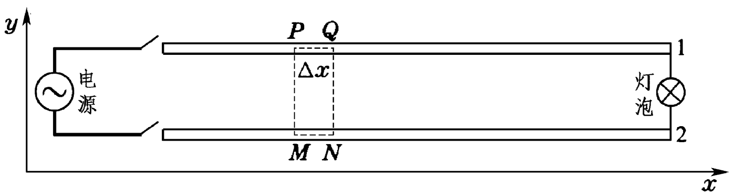
因此，在导线表面，传入导线的能流分量

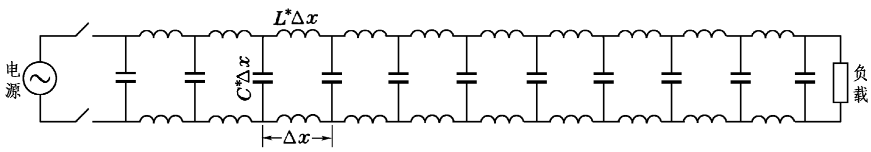
$$S = \frac{E_{外t} B_r}{\mu_0} = \frac{I^2}{2\pi r \cdot \pi r^2 \cdot \sigma}$$

传入的功率为

$$P = S \cdot 2\pi r \cdot l = I^2 \frac{l}{\sigma \cdot \pi r^2} = I^2 R_l = P_h$$

- 交流电路：准恒条件、集中条件近似下
  - 纯电阻元件的能流与直流电路中的电阻类似。
  - 电容：充电时磁场线（可看作由位移电流激发）右旋方向环绕电场线，能流向内；放电时磁场线左旋环绕电场线，能流向外。因此电容是储能装置
  - 电感：类似于电容。
  - 高频时，准恒条件被破坏，同时分布性电容、电感的效果变得重要起来。此外，趋肤效应也导致能流不再象低频情形那样，在导线表面附近及内部分布比较集中。
- 无线电波的传输：
  - 长波段、中波段、短波段（100 kHz − 30 MHz，3 km − 10 m）的无线电波可以在空间中传播，其频率高到地表的吸收可忽略，低到可以被电离层全反射。
  - 极短波（30 MHz − 300 MHz，10 m − 1 m）和微波段（300 MHz − 30 0GHz，1 m − 1 mm）可以穿透电离层，一般的长程定向传输采用传输线（平行双导线、同轴电缆等）或微波波导管等方式。
- 传输线方程：（**不要求**）对于如图平行双线回路（或同轴电缆），若电磁波波长远小于传输距离，同时远大于导线间距，则其等效电路如下图所示（忽略“漏阻”效应）





  - 引入干路电流分布 $I(x,t)$ 及横向电压分布 $U(x,t)$。分布性电感（单位长度为 L^*）带来

$$U(x+dx,t) - U(x,t) = \partial_x U dx = -(L^* dx)\partial_t I \quad \Rightarrow \quad \partial_x U = -L^* \partial_t I$$

分布性电容（单位长度为 C^*）带来横向电流（电容分流）效应

$$I(x+dx,t) - I(x,t) = \partial_x I dx = -(C^* dx)\partial_t U \quad \Rightarrow \quad \partial_x I = -C^* \partial_t U$$

进一步取二阶微商有

$$\begin{cases} \partial_x^2 U - L^* C^* \partial_t^2 U = 0 \\ \partial_x^2 I - L^* C^* \partial_t^2 I = 0 \end{cases}$$

即为（忽略“漏阻”效应的）传输线方程，或电报方程.

  - 如上方程有沿 x 方向传播的一维简谐波解，波速为

$$v = 1/\sqrt{L^* C^*}$$