第五章　电路

✍ 作业：9，15，18，20，28，29，40，43，48，50，51，53，56，57，61，62，64，66

5.0 引言

➢ 我们在第一章中看到了导体在导流的同时也有引导电场线的特征，由此构成的恒定电流回路——<u>直流电路</u>，可以通过这种对电场的“引导”，把电源的能量转移并消耗到用电器（电阻、电动机等）上。
利用欧姆定律，我们可以把此时的恒定电场方程转化为电流和电压的关系——<u>电路方程</u>。

➢ 电流随时间周期变化时，对应于通常所说的<u>交流电路</u>。如果变化得不是很快，频率不是很大，我们称之为“准恒的（quasi-static）”或“似稳的”，此时仍可预期利用电路完成能量的传输和转化，并且仍然可以利用电路方程来近似求解。

▪ 交流电路中，电容和电感内部有交变电磁场，可以用来完成电子、电工等诸多实用的目的，如果我们仍仅想利用电路方程加以求解，那么通常要求电容和电感集中分布于电路中较小的空间，并称之为“<u>集中元件</u>”。

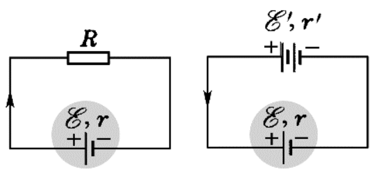
➢ 如果频率很大，准恒条件被破化，同时电路中各处分布性（非集中）的电容和电感效应不可忽略，此时电路方程不再成立，也对应于电路在此时已经不是传输电磁场及其能量的最佳方式。

5.1 再论直流电源

a) 特征量、路端电压和输出功率

➢ 直流电源的特征量：直流电源又被称为“稳恒电源”，它有两个特征量

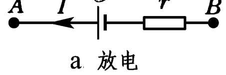
1) 电动势 $\mathcal{E}=\int_-^+\vec{K}\cdot d\vec{l}$：即内部存在有一定的非静电力场（可以是平均场），与回路是否闭合无关。
2) 内阻 r



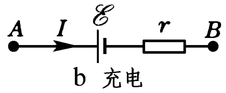
➢ 电源充电、放电及路端电压：电源正负极板间的电势差 U_{+-} 被称为电压，断路时便是 $\mathcal{E}$ 。

▪ 应用全电路欧姆定律（积分式）

$$\begin{cases}\text{放电}(\text{上左图})：U_{+-}=IR=\mathcal{E}-Ir\\ \text{充电}(\text{上右图})：U_{+-}=\mathcal{E}+Ir\end{cases}$$



a 放电



b 充电

▪ 电源等效电路（右图）：理想电源和内阻的串联

电压计量规则：

1) 电阻 r：$U=\pm Ir$ （“$\pm$”分别对应顺、逆电流方向）
2) 电源 $\mathcal{E}$：$U=\pm\mathcal{E}$ （“$\pm$”分别对应正极、负极在前）

➢ 内阻对输出功率的影响：考虑上左图单一外阻电路，电源的输出功率为

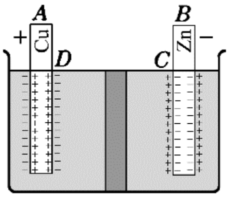
$$P = IU_{+-} = I^2R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}$$

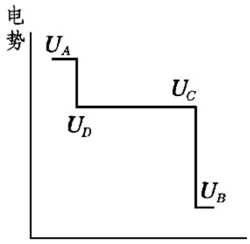
给定电源参量：$\mathcal{E}$、r，当 $R=r$（被称为“阻抗匹配”）时有最大输出功率

$$P_m = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$$

b） 化学电源（定性了解）

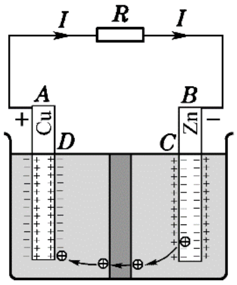
- 化学电源的非静电力可以称为是“化学亲和力”，它把化学能转化为电能 。

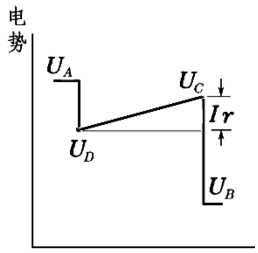




- 丹聂耳电池（Daniell’1836）原理如图:将铜极和锌极分别放入硫酸铜和硫酸锌中,中间用(可透过离子的）隔膜隔开。

  Zn 原子有和远处的 $CuSO_4$ 置换的趋势，即 Zn 的化学性质活泼，容易变成 Zn^{2+} 离子溶解于溶液，而把电子留在锌极板上形成低电势。铜相反，Cu^{2+} 容易被铜极板吸附，形成高电势。一旦接通回路（如右图），这种长距离的“置换”反应便可持续发生，直至所有的 $CuSO_4$ 都变成 $ZnSO_4$ 。过程中化学能转化为电能。



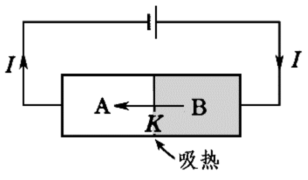


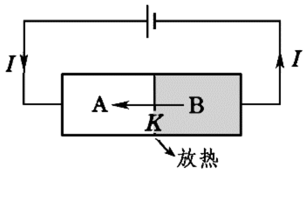
c） 温差电动势（定性了解）

- “温差电”指的是：通过“自由电荷扩散伴随吸放热”的机制（不同于碰撞阻尼的放热机制），实现热能和电能之间可逆转化的装置和现象，其非静电力可概括为“热扩散力”。典型的可实现热电可逆转换的机制有两种：

1) 佩尔捷效应

- 佩尔捷（Peltier’1834）发现当电流分别以正、反方向流过两金属接触面时伴随吸、放热，这种现象被称为“佩尔捷效应”，相应的热被称为“佩尔捷热”。
- 佩尔捷电动势：两金属接触时，因功函数（表征金属表面释放电子的能力）不同而会产生接触电动势。电子跨越接触面势垒的机制可来自于“光激发”、“热激发”和“摩擦生电”等。“佩尔捷效应”中两金属表面的接触电动势来自于“热激发”机制，一般称为“佩尔捷电动势”或“佩尔捷系数”。





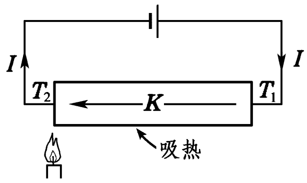
- 佩尔捷电动势量级在 mV ~ 10mV，其大小正比于相互接触的两种金属自由电子密度的差值

$$\mathcal{E}_{AB}(T) = \alpha(T)(n_B - n_A)$$

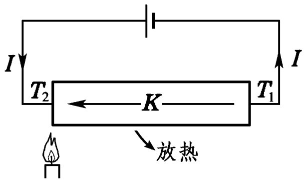
其中 $\alpha(T)>0,\alpha'(T)>0$

2) 汤姆孙效应（汤姆孙：W. Thomson，1824-1907，开尔文勋爵）

- 汤姆孙发现（Thomson’1856）金属棒两端维持不同温度 $T_2>T_1$，再通以不同方向电流时分别伴随有吸、放热的现象（扣除焦耳热），这部分热被称为“汤姆孙热”。



- 汤姆孙利用热力学理论证明了如上效应是热电转换的可逆效应。



- 这种热电可逆转换可以通过汤姆孙电动势加以理解。即金属中自由电子在“热扩散力”的驱动下，从高温 T_2 端扩散到低温 T_1，形成电动势，在电路中可形成热电可逆转换。此时金属内部的非静电力场正比于温度梯度：

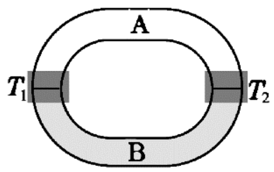
$$\vec{K}=\sigma(T)\,\vec{\nabla}T$$

其中汤姆孙系数 $\sigma(T)>0$，依赖于材料和温度，量级大致为 $1\sim 10\ \mu\mathrm{V/K}$.
相应汤姆孙电动势为

$$\mathcal{E}_{12}(T)=\int_{T_1}^{T_2}\sigma(T)\,dT$$

- ➢ 在没有外加电源的情况下，单一的汤姆孙效应或佩尔捷效应都无法在电路中实现热能和电能的持续转化。
- ➢ 但当电路中同时有两种金属（佩尔捷效应）和温差（汤姆孙效应）存在时，可以形成持续电流，历史上被称为泽贝克效应（Seebeck’1821）.

- 如图，整个回路中的泽贝克电动势为



$$\mathcal{E}_{1B2A1}=\int_{T_1,B}^{T_2}\sigma_B(T)\,dT-\int_{T_1,A}^{T_2}\sigma_A(T)\,dT$$
$$+\big(\alpha(T_2)-\alpha(T_1)\big)(n_A-n_B)$$

因此，要放大“温差电”效果，可以选择材料，使 n_A-n_B 与 $\sigma_A-\sigma_B$ 反号且绝对值较大。

- 按照历史顺序，是泽贝克效应发现后，佩尔捷（Peltier’1834）发现接触端电流流过时，伴随吸放热，其吸热效应可以用来制冷。
- 再后来，W. 汤姆孙（Thomson’1856）对泽贝克效应做了仔细的热力学分析，预言并发现了汤姆孙效应。

- ➢ 应用：可用作电源（温差电堆）、测温计（温差电偶）、制冷机等。

5.2 直流电路

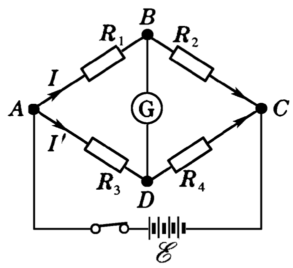
a) 直流电路的基本问题

- ➢ 直流电路的基本元件：直流电源、电阻和理想导线
- ➢ 直流电路的基本问题：已知回路的几何结构及元件参量（$\mathcal{E}_i,r_i;R_j$），求解支路电流（I_k）.

- 电阻连接的基本几何机构：串联、并联和复杂连接（非串、非并连接）。
- 简单电路：仅包含电阻串、并联，及其组合。
- 复杂电路：包含电阻非串、非并连接，如电阻的三角连接、星形连接等；或多电源组合连接。

☞ 例：平衡电桥

对如图桥式电路（将检流计看作为“桥”），当检流计示数为零时，称为电桥平衡，则其平衡条件为



$$U_{BD} = 0 \text{ 或 } IR_1 = I'R_3$$

同时该电路也化为简单电路，即有

$$I(R_1 + R_2) = I'(R_3 + R_4)$$

因此，平衡条件可以改写为电阻之间的关系式

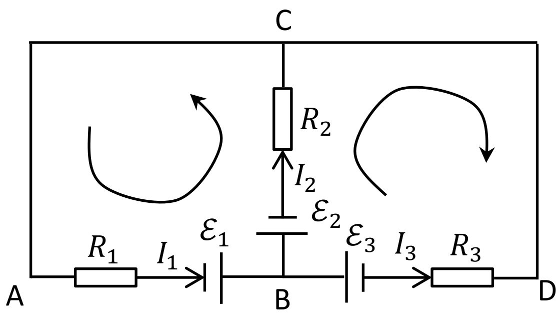
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}$$

这个关系式可以用来测定电阻（如书上 315 页例 3）.

b) 复杂电路　基尔霍夫方程组

➢ 电路的拓扑结构：

对如图电路，典型的低维拓扑结构有



- 3 支路：CAB、BC、BDC。对应 3 个待解电流。
- 2 节点：支路交汇处 B 和 C
- 3 回路：ABCA、BCDB、ABDCA

➢ 基尔霍夫方程组（基尔霍夫定律）

1) 节点电流方程组（基尔霍夫第一方程组）：是“电荷守恒”对电路问题的具体应用，
   - 对如图电路 B 点：$I_1 = I_2 + I_3$
   - 一般形式：$\sum_i(\pm I_i) = 0$，可约定流入为正，流出为负
   - N 个节点对应有 $N-1$个独立的节点方程
2) 回路电压方程组（基尔霍夫第二方程组）：是“电势连续”或“环路定理”对电路问题的具体应用，对如图电路（若引入电源内阻 r_i，则需替换 $R_i \to R_i + r_i$）
   - 独立方程为平面“网孔”数目：

$$U_{ABCA} = I_1R_1 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + I_2R_2 = 0$$
$$U_{BCDB} = \mathcal{E}_2 + I_2R_2 - I_3R_3 - \mathcal{E}_3 = 0$$

如此，则回路 ABDCA 的电压方程自动满足。

➢ 基尔霍夫方程组的完备性：

- 平面电路：若将整个电路平铺后，不出现支路相互跨越的情形，则称为“平面电路”（或单连通）。对于此平面电路，

将电路“平铺”在球面上构成球面上的多面体

顶点数 N：对应节点数 N，独立节点方程数 $N-1$；

面数 S：对应独立回路数（即原平面电路的“网孔数”）及独立回路方程数 $S-1$；

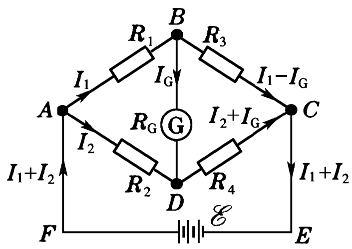
棱数 L：对应支路电流数 L

欧拉拓扑公式：$N-1+S-1=L$

则基尔霍夫方程组完备。

- 非平面电路（复连通）：可以采用图论中的“树图”方法论证其完备性。

☞ 书上 319-320 页例 5：非平衡电桥



如图参量设定（已应用节点电流方程），可列举回路电压方程：

$$\begin{cases} ABDA: \quad I_1R_1 - I_2R_2 + I_GR_G = 0 \\ BCDB: \quad I_1R_3 - I_2R_4 - I_G(R_3+R_4+R_G) = 0 \\ ABCEFA: I_1(R_1+R_3) - I_GR_3 = \mathcal{E} \end{cases}$$

求解 I_G：

$$I_G = \Delta_G/\Delta$$

其中

$$\Delta_G = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & 0 \\ R_3 & -R_4 & 0 \\ R_1+R_3 & 0 & \mathcal{E} \end{vmatrix} = (R_2R_3 - R_1R_4)\mathcal{E}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1 & -R_2 & R_G \\ R_3 & -R_4 & -(R_3+R_4+R_G) \\ R_1+R_3 & 0 & -R_3 \end{vmatrix}$$

$$= R_1R_2R_3 + R_2R_3R_4 + R_3R_4R_1 + R_4R_1R_2 + R_G(R_1+R_3)(R_2+R_4)$$

平衡条件：

$$\Delta_G = 0 \quad \Rightarrow \quad R_2R_3 = R_1R_4$$

若将 R_3 看作待测电阻，则电流计“示零精度” δI_G 带来的误差 δR_3 可估计：

$$\delta I_G \approx \left.\frac{d(\Delta_G/\Delta)}{d\,R_3}\right|_{R_3=\frac{R_1R_4}{R_2}} \cdot \delta R_3 = \frac{R_2\mathcal{E}}{\Delta}\delta R_3 \quad \Rightarrow \quad \delta R_3 \approx \frac{\left.\Delta\right|_{R_3=\frac{R_1R_4}{R_2}}}{R_2\mathcal{E}}\delta I_G$$

➢ 电源叠加定理：

- 线性方程组的叠加原理：以二元一次方程组为例

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

拆解：$b_1 = b_{11} + b_{12}$，$b_2 = b_{21} + b_{22}$，由解的唯一性可知，两分解方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} = b_{11} \\ a_{21}x_{11} + a_{22}x_{21} = b_{21} \end{cases}, \quad \begin{cases} a_{11}x_{12} + a_{12}x_{22} = b_{12} \\ a_{21}x_{12} + a_{22}x_{22} = b_{22} \end{cases}$$

的解的叠加便为原方程组的解，即

$$\begin{cases} x_1 = x_{11} + x_{12} \\ x_2 = x_{21} + x_{22} \end{cases}$$

- 对于多源电路，利用节点电流方程消去独立电流的数目，则回路电压方程的形式为

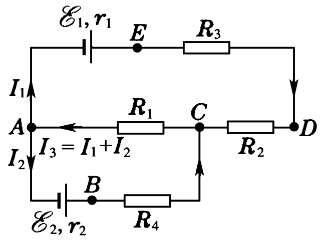
$$\sum_j R_{ij} I_j = \sum_k \beta_{ik}\,\mathcal{E}_k$$

其中 R_{ij} 为固定的电阻组合系数，β_{ik} 仅有 3 种取值：$\pm 1, 0$

则取单源电路（$\mathcal{E}_k$，$\mathcal{E}_{j\neq k}=0$）求解如上电路方程得到的解 I_{ik}，其组合便为原电路方程的解，即

$$I_i = \sum_k I_{ik}$$

☞ 书上 319 页例 4：考虑对 I_2 的求解



单源 $\mathcal{E}_1$ 贡献

$$I_{21} = \frac{U_{AC,1}}{r_2+R_4} = -\frac{\dfrac{R_1}{R_1+r_2+R_4}\mathcal{E}_1}{\left(r_1+R_2+R_3+\dfrac{R_1(r_2+R_4)}{R_1+r_2+R_4}\right)}$$

单源 $\mathcal{E}_2$ 贡献

$$I_{22} = \frac{\mathcal{E}_2}{\left(r_2+R_4+\dfrac{R_1(r_1+R_2+R_3)}{R_1+r_1+R_2+R_3}\right)}$$

因此，带入数值得

$$I_2 = I_{21}+I_{22} = -\frac{3}{50}+\frac{1}{25} = -0.02\ \mathrm{A}$$

➢ 书上 321-323 页内容：电流源与电压源（不要求）

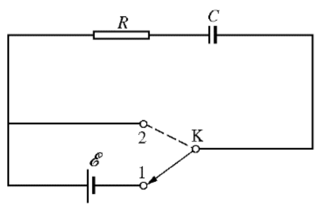
5.3 暂态过程

a) 引言

➢ 暂态过程是指，从一定的初值条件建立起来的初态，经过特征参量连续变化而过渡到稳态（特征参量趋向稳定值）的过程。如：

- 机械受迫振动系统，从初态过渡到稳态（振幅恒定，对应平均能量恒定）的过程
- 电容充电电路（C、R、$\mathcal{E}$），从初态（$q_0=0$）过渡到稳态（$q_f=C\mathcal{E}$）的过程。因有电阻 R 的存在，电量 $q(t)$ 只能连续变化，对应电场能量逐渐建立。
- 电感充磁电路（L、R、$\mathcal{E}$），从初态（$I_0=0$）过渡到稳态（$I_f=\mathcal{E}/R$）的过程。因有电感 L 的存在，电流 $I(t)$ 只能连续变化，对应磁场能逐渐建立。

➢ 暂态过程具有特征时间，被称为“时间常量”或“弛豫时间”。



b) *RC* 电路暂态过程

1) 充电过程：如图电路，令 K 接通 1

$$iR+\frac{q}{C}-\mathcal{E}=0,\qquad i=dq/dt$$

$$\left[q\!:0\rightarrow q_f=C\mathcal{E}\ (\text{稳态})\right]$$

$$\frac{Rdq}{q/C-\mathcal{E}}=-dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{q(t)}\frac{dq}{q-q_f}=-\int_0^t\frac{dt}{RC}$$

$$\therefore q=q_f\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

其中，弛豫时间（时间常量）$\tau=RC$

相应，充电电流也是渐变的，

$$i=\frac{dq}{dt}=\frac{q_f}{\tau}e^{-t/\tau}=\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}=i_0e^{-t/\tau}$$

2) 充电完成后，令 K 瞬时接通 2（放电过程）

$$0=iR+\frac{q}{C}\ ,\qquad q{:}\,q_0\left(=q_f\right)\to 0$$

$$\int_{q_0}^{q(t)}\frac{dq}{q}=-\int_0^t\frac{dt}{RC} \quad \Rightarrow \quad q=q_0e^{-t/\tau}=C\mathcal{E}e^{-t/\tau}$$

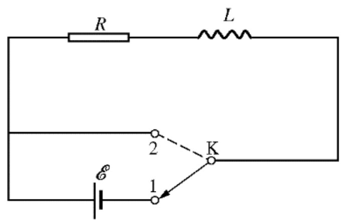
➢ 关于时间常量

$$\tau=RC=\frac{q_f}{i_0}$$

- q_f 是充电“目标”， $i_0^{-1}\sim R$ 是充电的“阻力”
- 量级：取 $R\sim 1\,\mathrm{k\Omega}, C\sim 1\,\mathrm{\mu F}$，则 $\tau\sim 1\,\mathrm{ms}$

c) *RL* 电路暂态过程

1) 充磁过程：令 K 接通 1



$$iR+u_L-\mathcal{E}=0,\qquad u_L=-\mathcal{E}_L=Ldi/dt$$

$$\left[i{:}\,0\to i_0=\mathcal{E}/R(\text{稳态})\right]$$

$$\frac{Ldi}{iR-\mathcal{E}}=-dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^{i(t)}\frac{di}{i-i_0}=-\int_0^t\frac{dt}{L/R}$$

$$\therefore i=i_0\left(1-e^{-t/\tau}\right),\qquad u_L=L\frac{i_0}{\tau}e^{-t/\tau}=\mathcal{E}e^{-t/\tau}=u_0e^{-t/\tau}$$

其中，弛豫时间（时间常量）$\tau=L/R$，其中 $R^{-1}\sim i_0$ 为“目标”， L 为“阻力”。

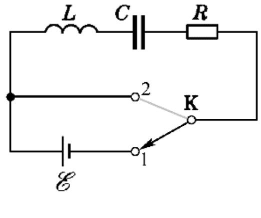
- 时间常量的量级：取 $R\sim 1\,\mathrm{k\Omega}, L\sim 1\,\mathrm{mH}$，则 $\tau\sim 10^{-6}\,\mathrm{s}$

2) 充磁完成后，K 瞬时接通 2（放磁过程）

$$0=iR+L\frac{di}{dt}$$

$$\int_{i_0}^{i}\frac{di}{i}=-\int_0^t\frac{dt}{L/R} \quad \Rightarrow \quad i=i_0e^{-t/\tau}$$

d) *RLC* 串联电路暂态过程



1) “齐次型”RLC 电路暂态过程：如图电路，令 K 接通 2，并设 C 上初始电量及回路初始电流不为零。

$$\frac{1}{C}q+R\dot{q}+L\ddot{q}=0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{q}+2\beta\dot{q}+\omega_0^2q=0 \qquad \begin{cases}\omega_0=\sqrt{1/(LC)}\\ \beta=R/(2L)\end{cases}$$

- 类比于阻尼振子：$q \leftrightarrow x, i \leftrightarrow v; C^{-1} \leftrightarrow k, L \leftrightarrow m, R \leftrightarrow \gamma$ (线性速度阻尼常量)
- 低阻尼通解（阻尼振荡解）：$\beta < \omega_0$

$$q(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

振幅 A 与初相位 φ 由初值确定。时间常量（弛豫时间）$\tau = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R}$

- 能量类比：$E_e = \frac{q^2}{2C} \leftrightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2, E_m = \frac{1}{2}Li^2 \leftrightarrow E_k = \frac{1}{2}mv^2$

能量损耗功率（热功率）：$i^2R \leftrightarrow \gamma\vec{v}\cdot\vec{v} = \gamma v^2$

2) “非齐次型”：在一定初值条件下，令 K 接通 1

$$\frac{1}{C}q + R\dot{q} + L\ddot{q} = \mathcal{E}$$

- 试探特解：取稳态解 $q^*(t) = A^* = C\mathcal{E}$
- 低阻尼通解：

$$q(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) + C\mathcal{E}, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

A、φ 由初值条件确定。

☞ 例：$q(t=0) = 0$ 且 $\dot{q}(t=0) = 0$，取 $\mathcal{E} > 0$（或 q 为与电源正极相接的电容器极板电量）

$$\begin{cases} A\cos\varphi + C\mathcal{E} = 0 \\ -\beta A\cos\varphi - \omega A\sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \tan\varphi = -\beta/\omega, \ \varphi \in \mathrm{II} \\ A = \dfrac{\omega_0}{\omega}C\mathcal{E} \end{cases}$$

3) “非齐次型”：若为简谐交流电源（电动势 $e(t) = \mathcal{E}_0\cos\omega t$）

$$\frac{1}{C}q + R\dot{q} + L\ddot{q} = \mathcal{E}_0\cos\omega t$$

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0\cos\omega t, \qquad f_0 = \mathcal{E}_0/L$$

- 低阻尼通解：

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi_0\right) + A\cos(\omega t + \varphi)$$

其中 A_0、φ_0 由初值条件确定。

- 求解稳态解 $q^*(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ 是后面几个小节中“求解简谐交流电路”的核心问题：可采用矢量图法及复数解法

4) “非齐次型”：一般周期性交流电源 $e(t+T) = e(t)$

$$\frac{1}{C}q + R\dot{q} + L\ddot{q} = e(t)$$

- 将 $e(t)$ 作傅立叶（Fourier）级数分解：

$$e(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t)$$

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}\text{：基频} \qquad \omega_n = n\omega_1\text{：}n\text{ 次谐频（倍频）}$$

其中展开系数可以由三角函数的正交归一关系来确定

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T e(t)\ \cos\omega_n t\ dt \qquad n = 0,1,2\ \dots \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T e(t)\ \sin\omega_n t\ dt \qquad n = 1,2,3\ \dots \end{cases}$$

- 低阻尼通解：

$$q(t) = A_0 e^{-\beta t}\ \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t + \varphi_0\right) + q^*(t)$$

其中 A_0、φ_0 由初值条件确定。

- 稳态振动特解：

$$q^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

其中 A_n、φ_n 由求解单频简谐电路方程

$$\frac{1}{C}q + R\dot{q} + L\ddot{q} = e_n(t) = a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t \quad (b_0 = 0)$$

来确定。因此，

交流电路求解的是稳态振动，最基本的是单频简谐交流电路的求解

5.4 交流电概述

a) 交流电与交流电源

➢ <u>交流电</u>：电流、电压随时间周期性变化。

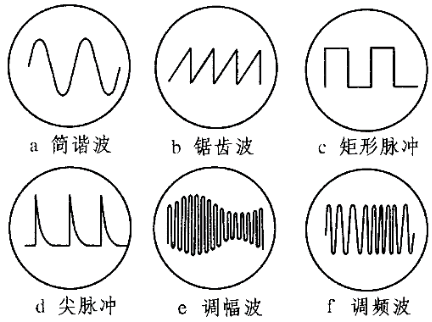
➢ 用途：

1) 交变电流，对应交变电磁场，可以应用于电子、电工及电磁测量等领域。
2) 方便利用变压器（互感）来升、降电压，被广泛用于工业及民用的电网传输。

➢ 交流电源：也被称为“交流信号源”

1) 简谐交流电源：如通常的交流发电机（书上 181-182 页）

$$e(t) = \mathcal{E}_0 \cos\omega t$$



2) 一般交流电源：

- 方波信号源：用于计算机存储信号
  对应有傅立叶展开式

$$e(t) = \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots\right) = \begin{cases} A & t \in \left(nT, nT + \dfrac{T}{2}\right) \\ -A & t \in \left(nT - \dfrac{T}{2}, nT\right) \end{cases}$$

- 锯齿波信号源：示波器扫描信号
- 调幅波信号源：电台信号（振幅随时间的变化承载着音频信息）

➢ 交流电路基本问题：与直流电路类似，基本问题是给定信号源参量及元件参量，求解各个**支路**的（**稳态振动**）电流、分压及功率分配随时间变化的关系。

- 基本元件：除交流电源、理想导线及电阻外，交流电路中的基本元件还包括电容器及电感等。
- 若电路方程为线性微分方程，则由叠加原理可知，最基本的交流电路为简谐交流电源驱动的单频简谐交流电路。

b) 简谐交流电的特征量

- 瞬时值：

$$\begin{cases} \text{电动势：} e(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \\ \text{电压：} u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \\ \text{电流：} i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \end{cases}$$

其中 $\mathcal{E}_0$、U_0、I_0 被称为相应参量的峰值。

- 有效值：表达电路平均功率时，引入有效值是比较方便的

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}, \qquad U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \qquad I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

例如，

$$P(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2}U_0 I_0 \{\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u)\}$$

$$\therefore\ \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos\varphi = UI\cos\varphi$$

其中，$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

- 市电电压 $U = 220\ \mathrm{V}$ 为有效值
- 交流用电器标定的"额定电压"、"额定电流"等通常为有效值。

c) 求解交流电路时用到的基本假定

- 我们要求解的仍然是支路电流和分压，同时我们预期待求解的电路方程对应于线性微分方程，这些要求：

1) 似稳条件（准恒条件）

- 在交变电流（交变电磁场）下没有严格的单一支路电流 $i(t)$，也没有严格的电压的定义（因有感应电场的存在）。但在低频时，如上两者都可以近似定义。用来描述"频率较低"的条件，被称为"似稳条件"，或"准恒条件"。
- 设电路典型尺度为 l，则似稳条件可表示为

$$\nu \ll \frac{c}{l} \quad \text{或} \quad T \gg \frac{l}{c}$$

此时，用来建立电路及其变化的电磁场几乎瞬时遍布于整个电路，取 $c \to \infty$ 的极限，则每个支路上各处电流同步变化，故可定义支路电流 $i(t)$。此外，因电路内电磁场变化缓慢，为准恒电磁场，故近似可以引入电压 $u(t)$（某种意义上是略去了感应电场的影响）。

- 似稳条件的另一种常用表达：引入交流电频率对应的真空电磁波的波长

$$\lambda = cT \gg l$$

如对应于市电频率 $\nu = 50\ \mathrm{Hz}$ 的真空电磁波长为

$$\lambda = \frac{3\times 10^8}{50} = 6\times 10^6\ \mathrm{m}$$

2) 集中元件：电感 L 与电容 C 中仍然分别分布有较强的感应电场和位移电流（是变化电场激发磁场的一种效应，见第六章的相关内容），前者引起电压在电感内部不能定义，后者引起传导电流在电容内部断路。

- 如果电路中的电感和电容集中分布于空间小尺度（$\ll l$）区域，则可通过引入电感或电容两端的分压来建立电路方程，相应的电感或电容被称为集中元件。这相当于是忽略电路中其他部位（如导线上）的分布电感和电容。

3) 线性元件：线性叠加原理要求基本元件的电压-电流关系为线性（微商）关系。满足此条件的元件被称为线性元件。如纯电阻、线性介质填充时的电感和电容等。

- 若电感或电容中存在非线性介质，则电路方程为非线性微分方程，后面我们将采用的解法（矢量法和复数法）将会失效，叠加原理也将失效。
- 有些时候非线性介质可近似处理为线性介质，如软铁磁介质填充的电感，取磁化曲线近似为线性的部分，则可近似求解。其“磁滞损耗”效应，可以通过引入电感的“漏（电）阻”加以体现。

5.5 简谐交流电路基本元件的电压-电流关系

- 电压 $u(t)$ 和电流 $i(t)$ 的关系（**取电压计量方向与电流方向相同**）集中反映在它们之间峰值关系和相位关系上
  - 定义电压、电流间峰值或有效值的比值为阻抗：

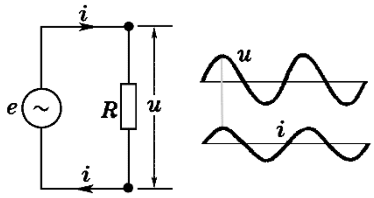
$$Z = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U}{I}$$

电感/电容的阻抗也通常被称为感抗/容抗。

  - 相位关系体现在相位差上：

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \ \in (-\pi, \pi]$$

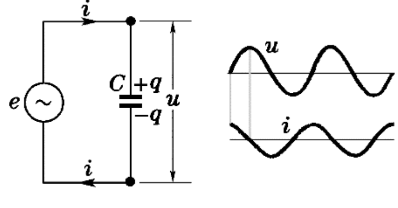
- 电阻 R ：取 $u(t) = U_0 \cos \omega t$



$$i(t) = \frac{u(t)}{R} = \frac{U_0}{R}\cos \omega t$$

$$\therefore \begin{cases} Z_R = R \\ \varphi = 0 \end{cases}$$

- 电容 C ：取 $u(t) = U_0 \cos \omega t$，则



$$q = Cu = CU_0 \cos \omega t$$

$$i(t) = \dot{q} = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} Z_C = \dfrac{1}{\omega C} \\ \varphi = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

  - $Z_C \propto \omega^{-1}$ ：反映出电容（极）低频断路、（极）高频短路的特征。

若 $C \sim 1\ \mu\mathrm{F}$，$\nu = 50\ \mathrm{Hz}$，则

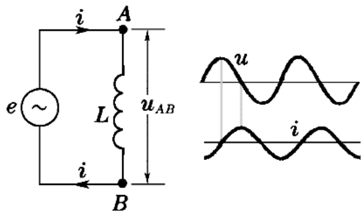
$$Z_C \sim \frac{1}{314 \times 10^{-6}} \sim 3 \times 10^3\ \Omega$$

- $\varphi < 0$：电流超前

➢ 电感 L：取 $i(t) = I_0 \cos \omega t$，则

$$u(t) = L\frac{di}{dt} = \omega L I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} Z_L = \omega L \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



- $Z_L \propto \omega$：反映出电感低频短路、高频断路（来自于感应电场或反电动势）的特征。

  若 $L \sim 1\ \mathrm{mH}$，$\nu = 50\ \mathrm{Hz}$，则

$$Z_C \sim 314 \times 10^{-3} = 0.314\ \Omega$$

- $\varphi > 0$：电压超前

5.6 简谐交流电路的矢量图解法

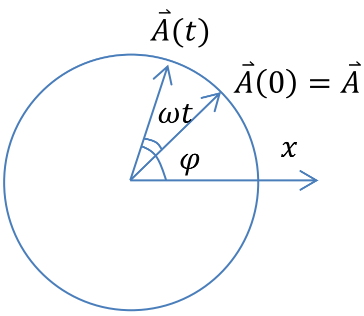
a) 简谐量的矢量表示

➢ 以机械振动为例：如图匀速圆周运动的直径投影分运动

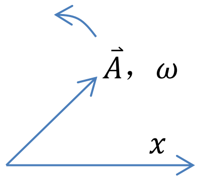
$$x = \vec{A}(t) \cdot \vec{\imath} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

既为简谐振动。

因此，$\vec{A} = \vec{A}(0)$ 与 ω 构成简谐振动的完备描述，称为矢量表示。



$\Rightarrow$



旋转矢量图

☞ 例：同频简谐标量求和

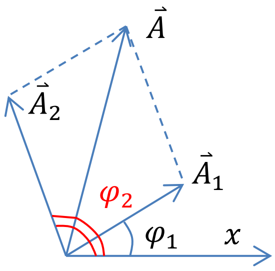
$$x_j = \vec{A}_j(t) \cdot \vec{\imath}, \quad j = 1,2$$

$$\therefore x = x_1 + x_2 = \vec{A}(t) \cdot \vec{\imath} \Rightarrow \vec{A}(t) = \vec{A}_1(t) + \vec{A}_2(t)$$

因频率相同，故只需求

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$$

如图，由**矢量图法**可解



$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases} \quad \cdots$$

b) 串并联的求解

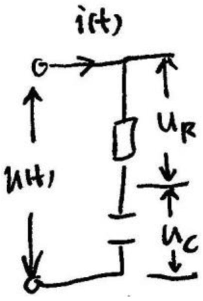
➢ 采用矢量图解法，重要的是矢量间的相对方位（代表相位差），故求解时通常选定某个矢量为基准方向。如串联电路，可以选公共的电流矢量方向为基准；并联电路，可以选公共的电压矢量方向为基准。

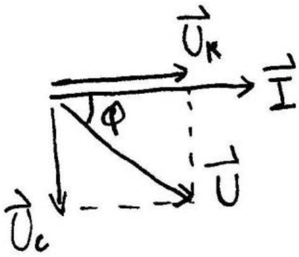
- 此外，矢量的长度对应于简谐量的峰值，但求解阻抗时，重要的是比值，所

以通常在图上标记的是有效值记号（省去了“0”下标）

☞ 例：RC 串联

$$\begin{cases} i_C = i_R = i \\ u_C + u_R = u \end{cases}$$





选电流矢量 $\vec{I}$ 方向为基准，做矢量图合成

$$\vec{U}_R \begin{cases} /\!/ \vec{I} \\ U_R = IZ_R \end{cases} \quad \vec{U}_C \begin{cases} \perp \vec{I}(\text{向下}) \\ U_C = IZ_C \end{cases}$$

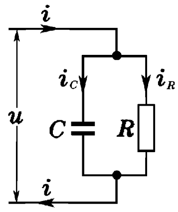
合成后

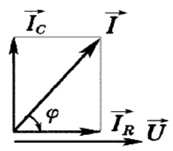
$$U = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I\sqrt{Z_R^2 + Z_C^2}$$

$$\therefore \begin{cases} Z_{\text{串}} = \sqrt{Z_R^2 + Z_C^2} = \sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\tan^{-1}\dfrac{Z_C}{Z_R} = -\tan^{-1}\dfrac{1}{\omega CR} \end{cases}$$

电流位相超前

☞ 例：RC 并联





$$\begin{cases} u_C = u_R = u \\ i_C + i_R = i \end{cases}$$

选电压矢量 $\vec{U}$ 方向为基准，做矢量图合成

$$\vec{I}_R \begin{cases} /\!/ \vec{U} \\ I_R = U/Z_R \end{cases} \quad \vec{I}_C \begin{cases} \perp \vec{U}(\text{向上}) \\ I_C = U/Z_C \end{cases}$$

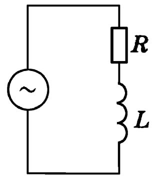
合成后

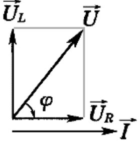
$$I = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = U\sqrt{Z_R^{-2} + Z_C^{-2}}$$

$$\begin{cases} Z_{\text{并}} = \dfrac{1}{\sqrt{Z_R^{-2} + Z_C^{-2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1/R^2 + \omega^2 C^2}} = \dfrac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = -\tan^{-1}\dfrac{I_C}{I_R} = -\tan^{-1}\dfrac{Z_R}{Z_C} = -\tan^{-1}\omega CR \end{cases}$$

➢ 从上面两个例子可以看出，RC 无论是串联还是并联，因为有电容的存在，导致电流位相超前，通常称此段电路具有“**容性**”。类似地，RL 无论是串联还是并联，都会导致电压位相超前，即具有“**感性**”。

☞ 例：RL 串联





选电流矢量 $\vec{I}$ 方向为基准，做矢量图合成

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = I\sqrt{Z_R^2 + Z_L^2}$$

$$\therefore \begin{cases} Z_{\text{串}} = \sqrt{Z_R^2 + Z_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \tan^{-1}\dfrac{Z_L}{Z_R} = \tan^{-1}\dfrac{\omega L}{R} \end{cases}$$

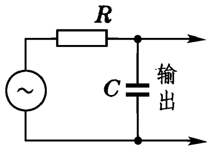
电压位相超前。

c) 串并联的应用

➢ 利用容抗、感抗和电阻阻抗不同的频率依赖（<u>频率响应</u>）特征，以及相位关系，可以实现交流电路的特殊的目的。

1) 滤波：若电路中同时有低频和高频的叠加成分，则电阻与电容（电感）串联时对两个成分的分压比是不同的，由之可实现<u>低通</u>（低频通过）或<u>高通滤波</u>。注意：我们在求解满足叠加原理的稳态振动

☞ 书上 343 页例 13：如右图，电源提供直流 240 V和交流 100 Hz/100 V（峰值）的叠加，已知 $R = 200\ \Omega$, $C = 50\ \mu F$，求 C 端输出信号电压成分及各自分压。



解：直流电压完全作用于电容，大小为 240 V

电容上交流分压

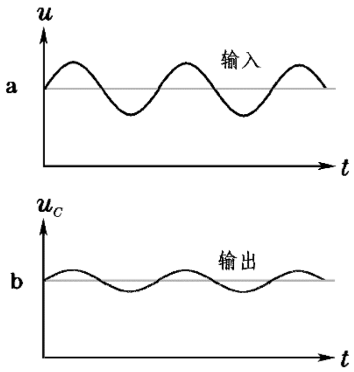
$$U_C = \frac{Z_C}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} U = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}} U$$

即频率越大，分压越小，形成<u>低通滤波</u>。带入数据

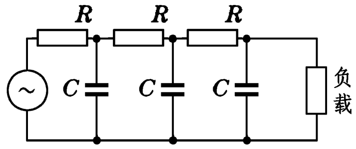
$$Z_C = \frac{1}{6.28 \times 100 \times 50 \times 10^{-6}} \approx 32\ \Omega$$

$$U_C \approx \frac{32}{\sqrt{200^2 + 32^2}} 100 \approx 16\ V$$

其输入输出信号对比，大致如右图（中心虚线表示直流成分）



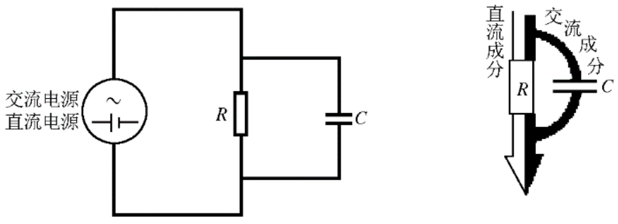
· 为进一步加强低通滤波的效果，可以采用如图电路（多级 RC 滤波电路）进行多次分压。



· 从能量的角度来看，高频成分的能量更多地消耗在滤波电路的电阻上，而没有传向输出的负载端。

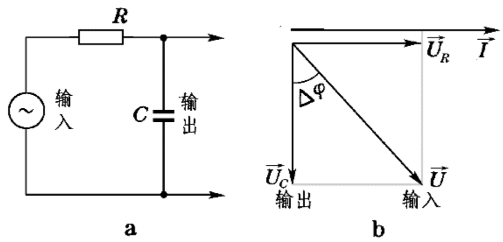
· 类似地，以电阻为输出端，或者在 RL 串联电路中以电感为输出端，可以实现<u>高通滤波</u>。

2) 旁路：有些时候，电路中要求负载 R 上有一定的直流分压，同时要求交流成分能通畅地流过（一般对应有相对稳定的总电流），不会造成负载上过大的交流分压，这一点可以通过并联一个较大的电容 C 来实现（如图 a）. 因 C 较大，对交流的容抗很小，绝大部分交流通过 C 流过，同时也降低了交流分压。此时，把并联的电容支路称为“电容旁路”或“交流旁路”。



(a) (b)

3) 移相：通过 RC 串联电路，可以改变输入、输出间的相对相位，其间相位



a b

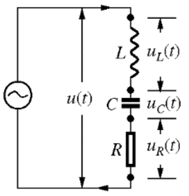
差，被称为“相移”。如右图 a，若取 $Z_C = Z_R$，则输入、输出电压信号相位差

$$\Delta\varphi = \varphi_{出} - \varphi_{入} = -\frac{\pi}{4}$$

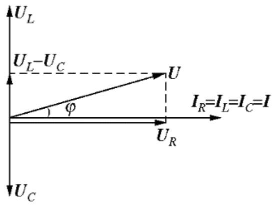
要获得较大的相移，可以采用多级相移电路。

4) RLC 串联谐振电路：（书上 359-363 页）如图

$$U = \sqrt{(U_L - U_C)^2 + U_R^2}$$
$$= I\sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + Z_R^2}$$



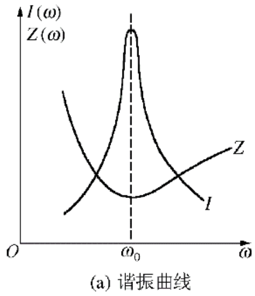
(a) RLC 串联电路



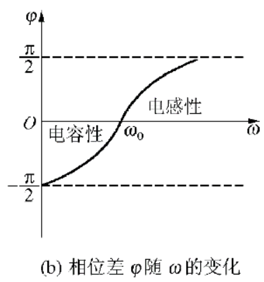
(b) 矢量图

$$\therefore Z = \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + Z_R^2} = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$$

- 给定 $U = U_0/\sqrt{2}$，一定频率上存在电流最大值，即
  当 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 时，$Z = Z_{\min} = R,\ I = I_{\max} = U/R$
  称此时发生电路**谐振**，相应频率 ω_0 为谐振（角）频率。
- 谐振特征：
  ① 电流(振动)峰值极大
  ② “容性”和“感性”相互抵消，表现为“纯电阻性”（即 $\varphi_0 = 0$）
  ③ 电源做功每时每刻都与电阻上消耗的热相互抵消，形式上不与电感、电容之间发生能量交换。即电源提供的瞬时功率与焦耳热功率相等
  $$P_U(t) = u(t)i(t) = u_R(t)i_R(t) = P_h$$
- 谐振曲线：电流等的频率响应曲线
  $$I(\omega) = \frac{U}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$
  通常将 $I(\omega) \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ 的频率范围称为“谐振峰”频带，谐振峰两端频率差值，被称为“通频带宽度”，简称“带宽”。



(a) 谐振曲线



(b) 相位差 φ 随 ω 的变化

- 谐振与机械共振：考虑我们在“RLC 暂态过程”小节中写下的微分方程
  $$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0\cos\omega t \qquad \begin{cases}\omega_0 = 1/\sqrt{LC}\\ \beta = R/2L\\ f_0 = U_0/L\end{cases}$$
  其稳态振动为
  $$q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\ , \qquad A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$
  谐振要求电流振幅极大，则对应于机械振动系统的“速度共振”

$$I_0=\omega A=\frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\beta^2\omega^2}}=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2/\omega\ -\omega)^2+4\beta^2}}$$

即当 $\omega=\omega_0$ 时，发生谐振。

- 带宽与品质因数（Q 值）：当 $\beta=R/2L\ll\omega_0$ 时，仅考虑谐振峰附近（$|\omega-\omega_0|\sim\beta\ll\omega_0$），作近似

$$I_0\approx\frac{f_0}{\sqrt{4(\omega-\omega_0)^2+4\beta^2}}$$

在此近似下，谐振峰频带大致为 $\omega\in[\omega_0-\beta,\omega_0+\beta]$，带宽

$$\Delta\omega\approx 2\beta$$

定义品质因数，即 Q 值为

$$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\approx\frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

此时反映的是谐振峰的尖锐程度，或谐振电路选频性能的好坏。

- Q 值的其他典型含义：

① 谐振时的分压比：谐振时

$$U_R=RI,\qquad U_C=U_L=\omega_0 LI$$

$$\therefore\ Q=\frac{U_C}{U_R}=\frac{U_L}{U_R}$$

② 谐振时的储能耗能比：电容、电感为储能元件，电阻为耗能元件，谐振时

$$\bar{P}_h=\overline{u_R(t)\iota_R(t)}=UI=I^2R$$

每周期耗能

$$W_R=\bar{P}_h T_0=I^2R\frac{2\pi}{\omega_0}$$

同时，储藏在电容、电感中的电磁场能为

$$W_{em}=\frac{1}{2}Li^2+\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{1}{2}LI_0^2\cos^2\omega_0 t+\frac{1}{2}C\frac{I_0^2}{\omega_0^2C^2}\sin^2\omega_0 t=\frac{1}{2}LI_0^2=LI^2$$

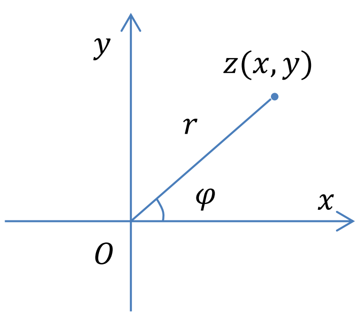
故也可定义 Q 值为

$$Q=2\pi\frac{W_{em}}{W_R}$$

5.7 简谐交流电路的复数解法

a) 简谐量的复表示

➢ 复数及其代数运算



- 把坐标 xy 平面看作复平面，即 x 轴为实轴，y 轴为虚轴，如图所示。复数 z 可表示为复平面上的一个点：

$$z=x+y\,i=re^{i\varphi}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$ 为虚数单位（注意与电流的瞬时值

加以区分），$x = \mathrm{Re}\, z$，$y = \mathrm{Im}\, z$ 分别为 z 的实部和虚部，$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ 为 z 的模，$\varphi = \arg z$ 为 z 的幅角。

- 复数的四则运算：取 $z_1 = x_1 + y_1\, i = r_1 e^{i\varphi_1}$，$z_2 = x_2 + y_2\, i = r_2 e^{i\varphi_2}$

  加减法：$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)\, i$

  乘法：$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

  即：$z = z_1 \cdot z_2$ 则 $|z| = |z_1||z_2|$，$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

  除法：$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

- 复共轭：定义 z 的复共轭为

$$z^* = x - y\, i$$

  则（类似于矢量与自身的点积）

$$z^* z = z z^* = x^2 + y^2 = r^2$$

  例如

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + y_1\, i)(x_2 - y_2\, i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2}$$

➢ 简谐量的复表示：考虑随时间在复平面上作“匀速圆周运动”的复函数

$$\tilde{A}(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + A\sin(\omega t + \varphi)\ i = A e^{i(\omega t + \varphi)}$$

其实部为我们希望表达的简谐振动量：

$$x(t) = \mathrm{Re}\, \tilde{A}(t)$$

称 $\tilde{A}(t)$ 为简谐量 $x(t)$ 的复表示。

- 复表示相对于矢量表示的优势：

① 复表示为标量表示，相应叠加为标量代数叠加。即

$$\tilde{A} = \tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 \quad 则 \quad x = x_1 + x_2 = \mathrm{Re}\, \tilde{A}(t)$$

② 采用复指数表示，方便对时间参量求导和积分运算。即

$$\dot{x} = \frac{d}{dt} \mathrm{Re}\, \tilde{A} = \mathrm{Re}\, \dot{\tilde{A}}$$

➢ 简谐交流电参量的复表示

$$e(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_e) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \varphi_e)}$$
$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{U}(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_u)}$$
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi_i) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \varphi_i)}$$

定义元件**复阻抗**

$$\tilde{Z} = \frac{\widetilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \frac{U_0}{I_0} e^{i(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{i\varphi}$$

即元件的两方面特征信息（阻抗和相位差）均包含于该元件的复阻抗的定义中（模和幅角），故称如上定义式为“**复数形式的欧姆定律**”。

☞ 三种典型元件的复阻抗

$$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{Z}_R = R$$

$$\begin{cases} Z_C = \dfrac{1}{\omega C} \\ \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

$$\begin{cases} Z_L = \omega L \\ \varphi_L = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \tilde{Z}_L = i\omega L$$

b) 串并联电路的求解

➢ 采用复表示

$$串联\begin{cases} \tilde{U} = \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \cdots \\ \tilde{I} = \tilde{I}_1 = \tilde{I}_2 = \cdots \end{cases} \xRightarrow{\text{取实部}} \begin{cases} u = u_1 + u_2 + \cdots \\ i = i_1 = i_2 = \cdots \end{cases}$$

$$并联\begin{cases} \tilde{I} = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \cdots \\ \tilde{U} = \tilde{U}_1 = \tilde{U}_2 = \cdots \end{cases} \xRightarrow{\text{取实部}} \begin{cases} i = i_1 + i_2 + \cdots \\ u = u_1 = u_2 = \cdots \end{cases}$$

故求解出 $\tilde{U}$、$\tilde{I}$，等价于求解出 u、i. 而且

$$\tilde{U} = \tilde{I}\tilde{Z}_{\text{tot}} \qquad \tilde{Z}_{\text{tot}} = \begin{cases} \displaystyle\sum_i \tilde{Z}_i & 串联 \\ \left(\displaystyle\sum_i \tilde{Z}_i^{-1}\right)^{-1} & 并联 \end{cases}$$

与求解直流电路情况类似（得益于复叠加为标量代数叠加）。

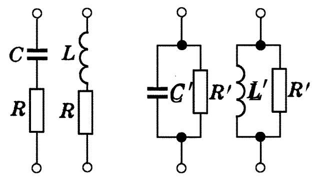
☞ 例：RC 串联电路

$$\tilde{Z}_{\text{tot}} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C = R + \frac{1}{i\omega C} = \frac{\omega CR - i}{\omega C} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\ e^{-i\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}}$$

$$\therefore\ Z_{\text{tot}} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\ , \qquad \varphi = -\tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}$$

☞ RC/RL 串联与并联的等效性（给定 ω ）

如图，构造并联与串联等效，只需复阻抗相同，即



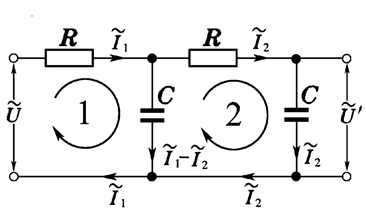
$$R - i\frac{1}{\omega C} = \frac{R' - i\omega C'R'^2}{1 + (\omega C'R')^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{R'}{1 + (\omega C'R')^2} \\ \dfrac{1}{\omega C} = \dfrac{\omega C'R'^2}{1 + (\omega C'R')^2} \end{cases}$$

$$R + i\omega L = \frac{(\omega L')^2 R' + i\omega L'R'^2}{R'^2 + (\omega L')^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R = \dfrac{(\omega L')^2}{R'^2 + (\omega L')^2}R' \\ \omega L = \dfrac{R'^2}{R'^2 + (\omega L')^2}\omega L' \end{cases}$$

▪ 实际的电感和电容元件都会有漏（电）阻效应，可用如上串联或并联等效电路来表征元件的漏阻效应，相应参量可由交流电桥（见 7.8 节）测量。

☞ 书上 349 页例 16：二级移相（滤波）电路

取 $Z_C = (\omega C)^{-1} = R$，求输入 $u(t)$ 与输出 $u'(t)$



的峰值比及相位差。

解：C 的复阻抗为

$$\tilde{Z}_C = -iZ_C = -iR$$

RC 串联再与 C 并联的复阻抗为

$$\tilde{Z}_1 = \frac{1}{(R-iR)^{-1}+\frac{i}{R}} = \frac{2}{1+3i}R = \frac{1-3i}{5}R$$

$$\therefore\ \tilde{U}' = \frac{-iR}{R-iR}\frac{\tilde{Z}_1}{R+\tilde{Z}_1}\tilde{U} = \frac{-i}{1-i}\frac{1-3i}{6-3i}\tilde{U} = \frac{-i}{3}\tilde{U}$$

因此，

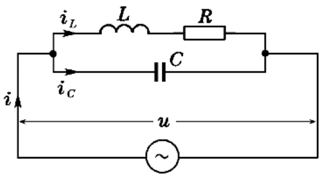
$$\frac{U_0'}{U_0} = \left|\frac{-i}{3}\right| = \frac{1}{3}\ ,\qquad \varphi = \varphi_{u'} - \varphi_u = \mathrm{Arg}\frac{-i}{3} = -\frac{\pi}{2}$$

☞ RLC 串联谐振电路

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_R + \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_L = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}\, e^{i\tan^{-1}\left(\frac{\omega^2 LC-1}{\omega CR}\right)}$$

即当 $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 时，对应 $\varphi_0 = 0$

☞ RL/C 并联谐振电路（书上 364 页）

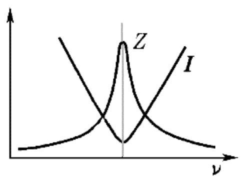


$$\tilde{Z} = \frac{1}{(R+i\omega L)^{-1}+i\omega C} = \frac{R+i\omega L}{1-\omega^2 LC + i\omega CR}$$
$$= \frac{R + i(\omega L - \omega CR^2 - \omega^3 L^2 C)}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}$$

$$\therefore Z = \frac{|R+i\omega L|}{|1-\omega^2 LC + i\omega CR|} = \sqrt{\frac{R^2+\omega^2 L^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\omega(L - CR^2 - \omega^2 L^2 C)}{R}$$

当 $R \ll \omega L$ 且 $\omega \sim \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ 时，出现谐振，相应 Z 取值极大，I 取值极小，φ 趋向于零（纯电阻性）。频率响应曲线（谐振曲线）如右图所示，谐振峰可用来选频。



- 将此元件组合与其他元件串联，谐振是可以获得最大分压，故也被称为“电压谐振”。
- 以 Z 取值极大来约定谐振峰值的话，则谐振频率平方为

$$\omega^2 = \sqrt{\omega_0^4 + 2\omega_0^2\frac{R^2}{L^2}} - \frac{R^2}{L^2} \approx \omega_0^2$$

以 $\varphi = 0$ 来约定谐振峰值的话，则谐振频率平方为

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{R^2}{L^2} \approx \omega_0^2$$

- $R \ll \omega L$ 且在谐振峰附近（$|\omega - \omega_0| \sim \beta = \frac{R}{2L} \ll \omega_0$）

$$Z \approx \sqrt{\frac{1+4\frac{\beta^2}{\omega^2}}{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega}-\omega\right)^2 C^2+4\beta^2 C^2}} \approx \sqrt{\frac{\left(1+4\frac{\beta^2}{\omega^2}\right)/C^2}{4(\omega-\omega_0)^2+4\beta^2}}$$

故谐振峰频带仍大致为 $\omega \in [\omega_0-\beta, \omega_0+\beta]$，带宽

$$\Delta\omega \approx 2\beta$$

品质因数，即 Q 值为

$$Q=\frac{\omega_0}{2\beta}=\frac{\omega_0 L}{R}$$

仍具有谐振峰尖锐程度的含义。

c) 简谐交流电路的复形式基尔霍夫方程组

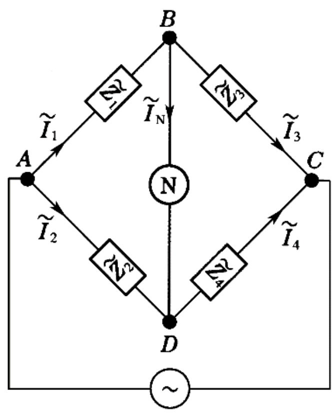
➢ 在**似稳条件**下，对于简谐交流电路，**忽略互感**的效果，**瞬时值**仍近似满足基尔霍夫方程组，因此对于**单频**简谐电路，采用复表示，则有如下复形式的基尔霍夫方程组

$$\text{对节点：}\sum \pm\tilde{I}=0$$

$$\text{对回路：}\sum \pm\tilde{I}\tilde{Z}+\sum \pm\tilde{\mathcal{E}}=0$$

电源的内阻与电感（如交流发电机的线圈自感）可处理为与理想电源的串联。

☞ 交流电桥的平衡条件：如图所示，若检流计 N 没有任何交流信号流过，称此电桥为“平衡”。



自然要求：$\tilde{I}_{\mathrm{N}}=0$

由基尔霍夫方程组，得

$$\tilde{I}_1=\tilde{I}_3\,,\ \tilde{I}_2=\tilde{I}_4$$

所以与直流电桥类似，退化到串并联问题，并且 $\tilde{U}_{\mathrm{N}}=0$，因此要求

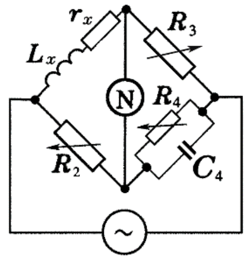
$$\tilde{Z}_1\tilde{Z}_4=\tilde{Z}_2\tilde{Z}_3$$

等价于两个实条件

$$Z_1Z_4=Z_2Z_3\,,\qquad \varphi_1+\varphi_4=\varphi_2+\varphi_3$$

因此可以用来同时测定两个实参量，如测量阻抗等。

☞ 麦克斯韦电桥测量电感和“漏阻”（书上 359 页例 21）：如图，固定 C_4 和 R_2，调节 R_3 和 R_4，使电桥平衡



$$(r_x+i\omega L_x)\left(\frac{1}{R_4^{-1}+i\omega C_4}\right)=R_2R_3$$

$$\Rightarrow\ r_xR_4=\frac{L_x}{C_4}=R_2R_3$$

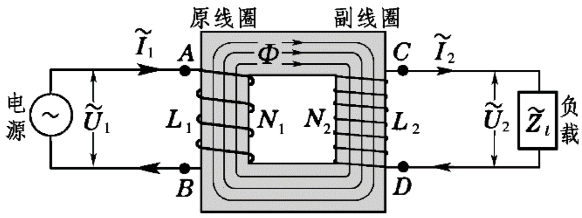
$$\therefore r_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}, \qquad L_x = R_2 R_3 C_4$$

- 有互感的情形，回路电压方程需要加入互感电压（反"互感电动势"）的贡献，此时需要线圈之间**两两标记**"同名端"，然后按电流的流向计量互感电压的正负，等价于作替换

$$\pm i\omega L_1 \tilde{I}_1 \ \rightarrow\ \pm i\omega(L_1 \tilde{I}_1 \pm M_{21}\tilde{I}_2 + \cdots)$$

替换项中括弧外的"±"取决于回路方向与 $\tilde{I}_1$ 方向是相同或是相反；而括弧中的"±"取决于是否为同名端流入，若 $\tilde{I}_1$、$\tilde{I}_2$ 为同名端流入则取"+"，否则取"−".

☞ 理想变压器电压、电流变比公式：



- 所谓"理想"是指：

1) 无漏磁：$L_i \sim N_i^2$，$M = \sqrt{L_1 L_2}$

2) 无漏阻：无导线电阻——无铜损，无涡流及磁滞损耗——无铁损。

如图，按同名端（A、D）流入约定 $\tilde{I}_1$、$\tilde{I}_2$ 正向，

$$\tilde{U}_1 = -\tilde{\mathcal{E}}_{AB} = i\omega L_1 \tilde{I}_1 + i\omega M \tilde{I}_2 \qquad ①$$

$$\tilde{U}_2 = \tilde{\mathcal{E}}_{DC} = -(i\omega L_2 \tilde{I}_2 + i\omega M \tilde{I}_1) \qquad ②$$

$$② \ \Rightarrow\ \tilde{I}_2 = -\frac{M}{L_2}\tilde{I}_1 - \frac{\tilde{U}_2}{i\omega L_2} \qquad ③$$

带入①得

$$\tilde{U}_1 = i\omega L_1 \tilde{I}_1 - i\omega \frac{M^2}{L_2}\tilde{I}_1 - \frac{M}{L_2}\tilde{U}_2$$

$$\therefore \frac{\tilde{U}_1}{\tilde{U}_2} = -\frac{M}{L_2} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{N_1}{N_2}$$

即理想变压器"电压变比公式"。

- 空载电流与反射电流：

若副线圈端空载（断路），则 $\tilde{I}_2 = 0$，相应的原线圈电流

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{U}_1}{i\omega L_1}$$

被称为"空载电流"。

一般非空载情形，

$$\tilde{U}_1 = i\omega L_1 \tilde{I}_0 = i\omega L_1 \tilde{I}_1 + i\omega M \tilde{I}_2$$

定义反射电流 $\tilde{I}_1' = \tilde{I}_1 - \tilde{I}_0$，则

$$\frac{\tilde{I}_1'}{\tilde{I}_2} = -\frac{M}{L_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

- 在理想变压器的"理想"条件上增加一条：

3) $L_1 \rightarrow \infty$ 或 $\tilde{I}_0 = 0$，则

$$\frac{\tilde{I}_1}{\tilde{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

被称为理想变压器的“电流变比公式”。

5.8 交流电功率

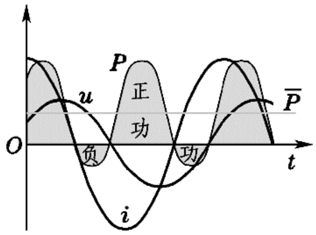
a) 功率因数

➢ 瞬时功率和平均功率：考虑任意一个与外界由两个联接点的电路（二端网络），其瞬时功率为

$$P(t) = u(t)i(t) = \frac{1}{2}U_0 I_0\{\cos(\varphi_u - \varphi_i) + \cos(2\omega t + \varphi_i + \varphi_u)\}$$

周期平均功率为

$$\therefore\ \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)dt = \frac{1}{2}U_0 I_0 \cos\varphi = UI\cos\varphi$$



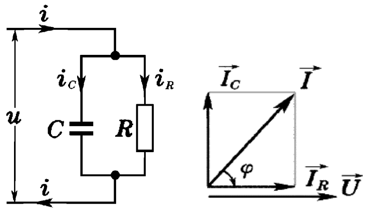
其中因子 $\cos\varphi$（$\in[0,1]$）被称为“**功率因数**”。

- 平均功率与瞬时功率的关系如右图（书上 353 页图 5-79）
- 纯电阻/电感/电容的功率因数分别为：1/0/0
- 若两端网络内部联接有多个元件，则由能量守恒及能量的相加性

$$\bar{P} = \sum_i \bar{P}_i = \sum_{R_i} \bar{P}_{R_i}$$

即平均功率仅消耗在电阻上！

☞ 例：RC 并联



$$\cos\varphi = \frac{I_R}{I}$$

$$\therefore\ \bar{P} = UI\cos\varphi = UI_R = I_R^2 R$$

- 采用复表示，则平均功率可表达为

$$\bar{P} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\tilde{U}\tilde{I}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(U_0 I_0 e^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2}U_0 I_0\cos\varphi$$

b) 改善功率因数的意义

➢ 提高功率因数的意义：用电器一般标定额定电压 U 和额定电流 I（均为有效值），对应于额定功率为

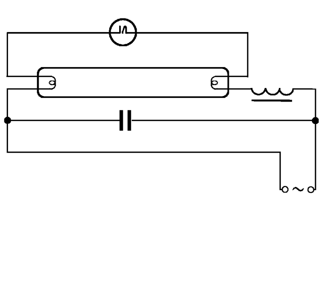
$$P_{额} = UI$$

但如果用电器自身电路具有容性或感性，实际工作的（平均）功率为

$$\bar{P} = UI\cos\varphi$$

为了充分发挥用电器的潜能，在不改变电压的前提下（比如说已经达到“额定”），可以通过并联电容或电感来提高功率因数。

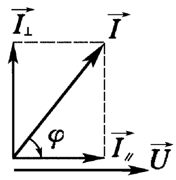
☞ 例如，日光灯的镇流器是电感性元件，可以并联电容来提高功率因数。



- 提高功率因数的另一层意义是：在给定电源电压和平均输出功率的前提下，降低了传输线上的电流和焦耳热损耗。

➢ 一些相关概念：

- 有功电流与无功电流：将电流矢量作如图分解



$$\bar{P} = UI\cos\varphi = UI_{/\!/}$$

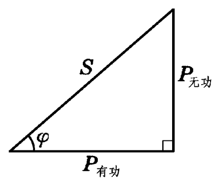
称 $I_{/\!/} = I\cos\varphi$ 为有功电流分量，$I_{\perp} = I\sin\varphi$ 为无功电流分量。进一步记

$$P_{\text{有功}} = UI_{/\!/}\,,\ P_{\text{无功}} = UI_{\perp}$$

分别被称为有功功率和无功功率。

- 视在功率（或表观功率）：记为

$$S = UI$$



与有功功率和无功功率的关系可以表示为“功率三角形”

$$P_{\text{有功}} = S\cos\varphi\ , \qquad P_{\text{无功}} = S\sin\varphi$$

- 有功电阻和电抗：将复阻抗

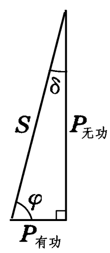
$$\tilde{Z} = r + ix = Ze^{-i\varphi}$$

的实部 r 称为有功电阻，虚部称为电抗，则不需区分电流的有功与无功

$$P_{\text{有功}} = I^2 r, \qquad P_{\text{无功}} = I^2 x, \qquad S = I^2 z$$

需注意：如果电阻与其他元件（电容、电感）串联，则有功电阻即为该电阻的阻值，但有电阻并联的情况则需要额外换算。

- 损耗角和损耗因数：对于谐振电路，通常我们希望能量损耗（包括欧姆损耗和介质损耗）小一些，或功率因数小一些。实际分析时，还可以定义损耗因数为



$$\tan\delta = \frac{P_{\text{有功}}}{P_{\text{无功}}} = \frac{r}{x}$$

其中 $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ 被称为损耗角。