

第一章 静电场 恒定电流场

✎ 第一次作业：1、4、8、9、10、11、14、15、16、17、20、26、31、33、37、39、42

✎ 第二次作业：46、49、52、57、60、62、63、66、67

1-9 补充条件：所求力矩均对偶极子中心参考点而言

1-33 补充条件：取 O 点为电势零点

1-67 补充条件：设想漏电流是具有轴对称的径向分布

1.1 库仑定律（作业：1、4）

a) 电荷与物质的电结构：

➤ 两种电荷：

- 历史上人们以相互作用来区分两种电荷：同种相斥，异种相吸
1733 年，法国科学家 Dufay 以此区分“玻璃电”和“树脂电”。
- 而以两种电荷的相加性和“中和”来约定“正”、“负”符号：“玻正橡负”
1747 年，富兰克林 (B. Franklin, 1706—1790) 定义了“正、负电”，并提出了电量相加守恒的思想。

➤ 物质的电结构：

- 基本粒子（无结构点粒子，至少目前实验上还未发现结构）

电量	$\pm e$	$\pm 2e/3$	$\pm e/3$	0
正（反）轻子 (anti-)lepton	e^+, μ^+, τ^+ e^-, μ^-, τ^-			
正（反）中微子 (anti-)neutrino				ν_e, ν_μ, ν_τ $\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau$
正（反）夸克 (anti-)quark		u, c, t $\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}$	$\bar{d}, \bar{s}, \bar{b}$ d, s, b	
规范玻色子 gauge boson	W^+ W^-			γ, g, Z^0
黑格斯粒子 Higgs				H

所有带电粒子均可直接参与电磁相互作用，按照量子场论的观点，这种相互作用是通过交换光子 γ 实现的

- 通常物质的电结构：通常物质的电性质只与电子与原子核有关，其中原子核由带正电的质子 $p(uud)$ 和不带电的中子 $n(udd)$ 组成。

➤ 电荷的性质：（实验上）

- 量子性：电荷取分立值，继承于基本粒子的分立电量。基本电量定义为

$$1e = 1.602176634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

其中库仑 (C) 是国际单位制 (SI) 中的基本单位。

狄拉克 (Dirac, 1931) 曾经证明: 如果存在一个磁单极子的话, 则电荷必定是量子化的。但目前为止, 实验上没有磁单极子存在的明确证据, 所以如上证明只对应理论上的一种 “可能性”。

磁单极子: 仅具有 N 极或 S 极的磁性粒子, 它们激发的磁场线分布类似于正、负点电荷所激发的电场线分布, 可以被分别称为 N、S (或正、负) 磁荷。

- 2) 相加守恒性: 电荷既不能被创造, 也不能被消灭, 电荷只能是从一个物体转移到另一个物体, 或者从物体的一部分转移到另一部分。在任何物理过程中(从宏观到微观), 电荷的代数和守恒。
- 3) 相对论不变性: 是严格的量子性与相加守恒性的内在要求
 - 实验证据: 宏观物体的稳定性 (如上三点均为稳定性的内在要求)
宏观物体的稳定性来源于微观结构在原子、分子尺度上的电中性, 这是一种正、负电荷的精细平衡, 哪怕微小的破坏 (如质子比电子多出 1%), 也会导致任何宏观的稳定结构均不可能形成。这种宏观稳定性要求:
 - ✓ 相加守恒性: 而且守恒在零值附近
 - ✓ 相对论不变性: 否则势必会破坏原子的电中性和电荷守恒
 - ✓ 量子性: 保证了质子和电子电荷的精确相消, 这是守恒在零值的最自然的方式

b) 库仑定律:

➤ 历史回顾:

- 富兰克林 (Franklin, 1755) 发现带电小球在带电金属桶内几乎不受力, 普里斯特利 (Priestley, 1767) 通过类比万有引力定律猜想电力满足平方反比律。
- 卡文迪什 (Cavendish, 1772) 利用导体壳静电平衡的性质, 即
$$\text{当 } f \sim r^{-(2 \pm |\delta|)} \quad |\delta| \text{ 越小, 内表面带电量越小}$$
以内表面电量的 “示零实验” 测得 $|\delta| < 2 \times 10^{-2}$, 其结果为麦克斯韦 (Maxwell, 1870's) 整理发表, 并进一步将精度提高到 $|\delta| < 5 \times 10^{-5}$, 目前的精度为 $|\delta| < 2.7 \times 10^{-16}$ (Williams *et. al.*, 1971)
- 库仑 (Coulomb, 1785) 以设计精巧的 “扭称” 直接验证了平方反比定律 ($|\delta| < 4 \times 10^{-2}$)
对于异号电荷的引力, 为了避免因吸引靠近而导致的接触放电, 库仑实际采用的是 “电引力单摆实验” 加以测量的。

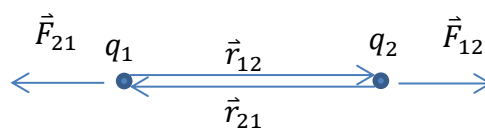
附注: 关于库仑实验及卡文迪什-麦克斯韦实验的评述, 可以参见:

陈秉乾, 舒幼生, 胡望雨, 《电磁学专题研究》, 第一章 § 2; 陈秉乾, 《电磁学》, § 1.1.5。

➤ 库仑定律表述：

如图，两个真空静止点电荷

$$\begin{cases} \vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{21}}{r_{21}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} \\ \vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \end{cases}$$



其中，真空介电常量

$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$$

国际单位制（SI，m.kg.s.A.制）中

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \text{ (测量值)}$$

$$\xrightarrow{\text{数值上}} 10^{-7} c^2 \text{ (2018 年以前的理论值)}$$

附注：2018 年之前，国际单位制中以安培（A）为电学基本单位，而用安培力定义单位“安培”，等价于定义毕奥-萨伐尔定律中的结构性常量——真空磁导率

$$\mu_0 \xrightarrow{\text{数值上}} 4\pi \times 10^{-7}$$

进一步，麦克斯韦理论预言

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \xrightarrow{\text{数值上, SI}} \frac{k}{10^{-7}}$$

- 类似于万有引力定律可以看作是对“引力质量”在测量上的定义，库仑定律可以看作是对“电量”的定义：等价于基于静电作用定义电量单位
- 绝对静电单位制（cm.g.s.esu.制）

“1 静电单位（1 esu，或称‘静电库伦’）”的电量定义为：相应等量电荷相距 1cm 时受力 1 达因（1 dyn = 1 g.cm²/s = 10⁻⁵ N）。

库伦定律在静电单位制中的形式为

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

“静电单位（esu）”与库伦（C）之间的换算：

$$1 \text{ C} = x \text{ esu}$$

设想 1 C 等量电荷相距 1 m，则

$$k_{\text{SI}} \text{ 牛} = \frac{x^2}{100^2} 10^{-5} \text{ 牛} \quad (k_{\text{SI}} \text{ 表示 } k \text{ 在 SI 中的数值})$$

$$\therefore 1 \text{ C} = \sqrt{10^9 k_{\text{SI}}} \text{ esu} = 10 c_{\text{SI}} \text{ esu} = 2.998 \times 10^9 \text{ esu}$$

➤ 库仑定律的适用条件及其拓展：

1. 真空：如果有物质（注意：物质都有电结构，如导体和电介质），物质中的电结构会在外电场的影响下发生改变，稳定后每个电荷微元（可看作为点

电荷)激发的电场仍然满足(真空)库仑定律。

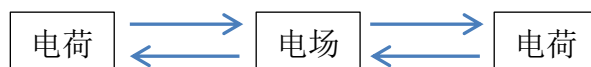
2. 静止: 可以拓宽至仅要求施力电荷静止! 如上图, q_1 静止 q_2 运动时, 仍有

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

但此时 \vec{F}_{21} 不再满足库仑定律。

- ✓ 究其原因, 是因为库仑力以电场形式传递, 而且传递速度有限, 因此, q_2 感受到的电场为静止电荷 q_1 所激发的恒定电场, 故受力 \vec{F}_{12} 满足库仑定律, 而 q_1 感受到的电场为运动电荷 q_2 在如图位形之前所激发的电场, 因此不满足(瞬时超距形式)的库仑定律。

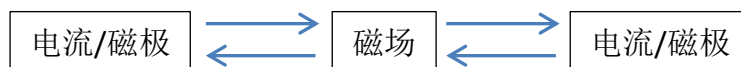
- ✓ 由如上分析可以看出, 电相互作用的模式为



电场虽然看是由电荷激发, 但其独立传播, 且传播速度有限, 因此是一种**独立的实在**(如真空电磁波)。

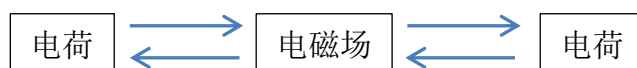
- ✓ 注意到在如上 q_1 静止 q_2 运动的情形, $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} \neq 0$, 不满足牛 III, 因此质点系{1, 2}不满足动量守恒定律。若想恢复孤立体系动量守恒定律, 必须把电场包含于体系内并赋予动量! 因此, **电场是实在的物质**。

- ✓ 类似地, 磁相互作用模式为



- ✓ 运动电荷(相当于对静止电荷换个参考系考查)会激发磁场, 因此电磁场不可分割、互相转化、为一个事物的两个方面, 统称为电磁场。

此外, 磁铁的磁性来源于内部“分子环流”的有序排列, 本质上是电流或电荷的运动造成的, 因此电荷(无论运动与否)的电磁相互作用模式为



- ✓ 实验上并没有发现磁单极子的存在。设想若磁单极子确实存在, 则磁单极子的流动同样可以激发电场, 目前的电磁学理论将会改写成为更加对偶的形式。

- ✓ **本章中无特别声明, 电荷均为静态(或恒定)分布!**

3. 点电荷: 是一个理想模型, 相当于力学中的质点。

- 虽然电荷微观是分立的, 但宏观看起来是连续的。处理时分割为**电荷微元**(宏观无穷小, 微观无穷大):

$$dq = \begin{cases} \rho dV & \rho: \text{体电荷密度} \\ \sigma dS & \sigma: \text{面电荷密度} \\ \lambda dl & \lambda(\text{或 } \eta): \text{线电荷密度} \end{cases}$$

- 电荷微元之间的相互作用满足点电荷的相互作用规律, 有限大小电荷分布体系可由求和(或积分)处理。

c) 静电力叠加原理:

本质来源于场的叠加原理, 因为场是更为基本的。

若点电荷 q_0 受到多个点电荷 q_1 、 q_2 ... 的静电相互作用, 则 q_0 受力为

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q_0}{r_i^2} \hat{r}_i$$

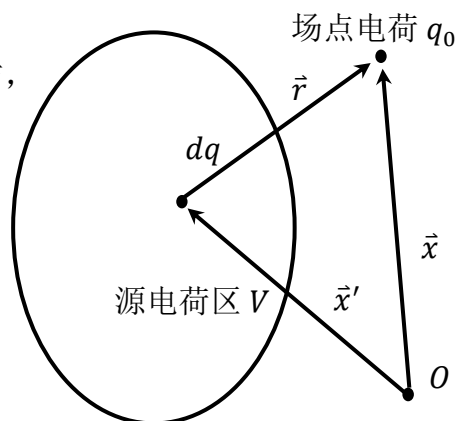
如果源电荷(激发电场的电荷)为连续分布,

则 q_0 受力为

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r}}{r^2} dq$$

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$$

其中, 积分施加于源电荷分布区域 V 。



1.2 电场强度 (作业: 8、9、10、11)

a) 电场强度的定义

➤ 场是一个独立的实在, 需要独立的物理量来进行描述。

既然点电荷 q_0 在电场中的受力正比于其电量, 则可由比值

$$\vec{E} = \vec{F}/q_0$$

提炼出场的信息, 称 \vec{E} 为电场强度 (矢量)。

- 数学上场是一个时空分布矢量函数, 即

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(x, y, z, t)$$

- 用来 (在测量意义上) 定义场强的试探电荷 q_0 应满足:

- 点电荷: 如此才可以定义 (测量) 分布
- 电量足够小: 对源电荷分布的改变可以忽略。

(但从定义场强角度看, 此条不必要)

- 如上定义方式不依赖于源电荷的存在和运动情况。作为特例, 场由静止点电荷 q 激发时,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

\hat{r} 为源点指向场点的位置矢量。

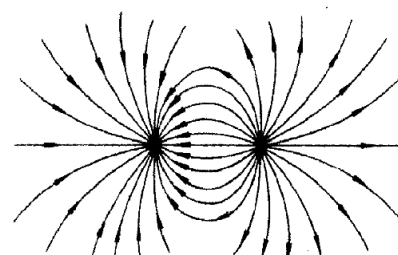
b) 电场分布图示——电场线:

(可类比流速场的流线)

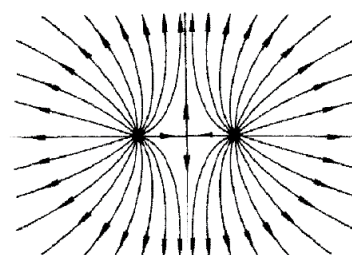
一些典型的电场线结构如右图 (书上 P11 图 1-13)

- 某点切向代表场强方向: 故两条电场线永不相交
- 疏密表示场强大小 (目前还是猜测)
- 场线微分方程:

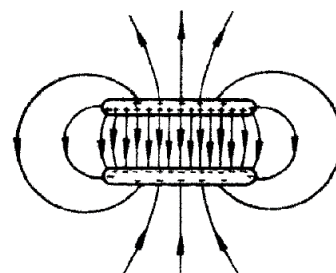
$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$



a 一对等量异号电荷



b 一对等量同号电荷



c 一对带等量异号电荷的平行板

c) 场强叠加原理:

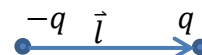
- 比静电力叠加原理更为基本与普遍, 独立于电荷的存在和运动与否
- 特例, 如源电荷静态连续分布时,

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r}}{r^2} dq$$

☞ 书上 12 页, 例 2: 电偶极子的电场

- **电偶极子**: 两相距很近的等量异号点电荷构成的带电体系。这里“很近”的含义是我们通常关心远处的场强分布

如右图, 定义 $\vec{p} = q\vec{l}$ 为**电偶极矩**。



- 如下图, 求电偶极子中垂面和延长线上远处 ($r \gg l$) 场点的场强分布

a) 延长线上

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r-l/2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(1 + \frac{l}{r} + \dots\right)$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r+l/2)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left(1 - \frac{l}{r} + \dots\right)$$

$$\therefore E = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ql}{r^3}$$

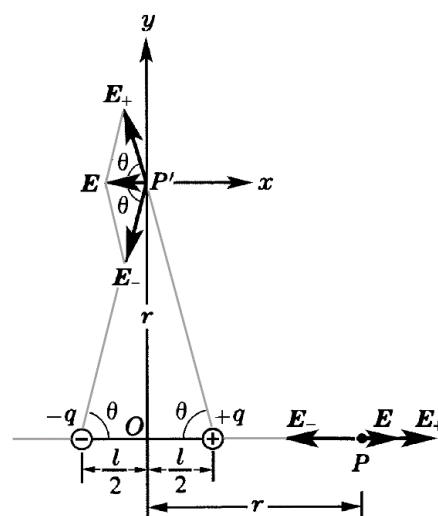
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$$

b) 中垂面上

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + l^2/4}$$

$$\therefore E = 2E_+ \cos \theta = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + l^2/4} \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} + \dots$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}}{r^3}$$



整体电中性的电偶极子远处场强是**距离立方**衰减的!

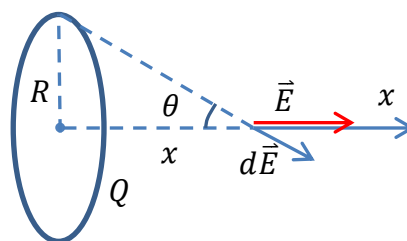
☞ 例: 均匀带电圆环 ($Q > 0, R$) 轴上场强分布

分析: 由对称性可知轴上场强方向沿轴线

$$E = E_x = \int |d\vec{E}| \cdot \cos \theta$$

$$= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dQ}{R^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \xrightarrow{x \gg R} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{x^2} \frac{x}{|x|}$$



附注: 若带电不均匀, 则 E_x 仍为所求, 但一般 $E_{y,z} \neq 0$.

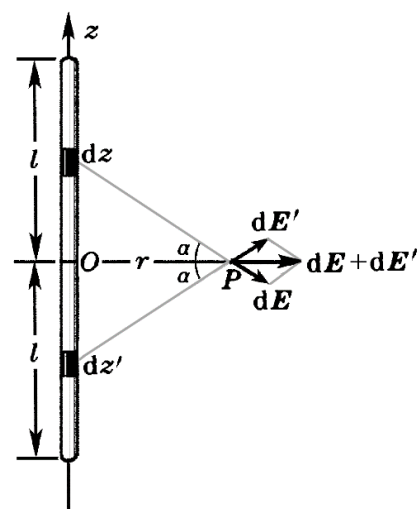
☞ 书上 15 页, 例 3: 均匀带电直线段 ($q > 0, 2l$) 中垂面上场强分布

分析：由对称性可知中垂面上场强方向沿径向（ $\lambda = q/(2l)$ ）

$$\begin{aligned} z = r \tan \alpha &\Rightarrow dz = \frac{r}{\cos^2 \alpha} d\alpha \\ |d\vec{E}| = |d\vec{E}'| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda \cdot dz}{r^2 + z^2} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} d\alpha \\ \therefore |d\vec{E} + d\vec{E}'| &= 2|d\vec{E}| \cos \alpha \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha \end{aligned}$$

因此，径向分布场强大小为（ $\alpha_m = \sin^{-1} l/\sqrt{r^2 + l^2}$ ）

$$E = \int_0^{\alpha_m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{r} \frac{l}{\sqrt{r^2 + l^2}}$$



讨论：

- 1) 当 $r \gg l$ 时回到点电荷电场的平方反比律；
- 2) 当 $l \gg r$ (无穷长带电直线) 时

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

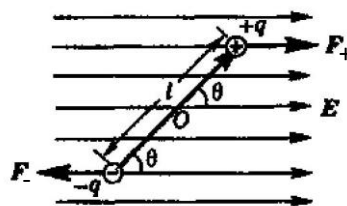
书上 16 页，例 4：偶极子受力及力矩

如图，匀强 \vec{E} 中偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 受力为

$$\vec{F}_{\text{合外}} = 0$$

对任意参考点，受力矩（力偶矩）为

$$\vec{M} = \vec{l} \times \vec{F}_+ = \vec{p} \times \vec{E}$$



附注：若非匀强场，但 $l \ll r_0$ (r_0 为场强变化的特征长度)，则

- 1) 偶极子受力

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{合外}} &= q(\vec{E}(\vec{r} + \vec{l}) - \vec{E}(\vec{r})) \\ &\approx (q\vec{l} \cdot \nabla E_x)\vec{i} + (q\vec{l} \cdot \nabla E_y)\vec{j} + (q\vec{l} \cdot \nabla E_z)\vec{k} = (\vec{p} \cdot \nabla)\vec{E} \end{aligned}$$

- 2) 仅对如图 O 附近参考点，近似有（如课后习题 1-9）

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

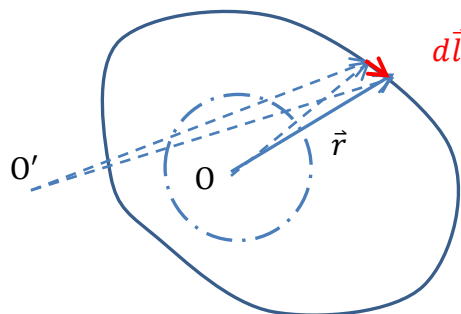
1.3 静电场高斯定理（作业：14、15、16、17、20）

a) 立体角和通量

平面角与立体角：

- 如图，对应某参考点（如 O 点）的微元平面角（1 维）的一般定义为

$$|d\theta| = \frac{|\hat{\vec{r}} \times d\vec{l}|}{r}$$

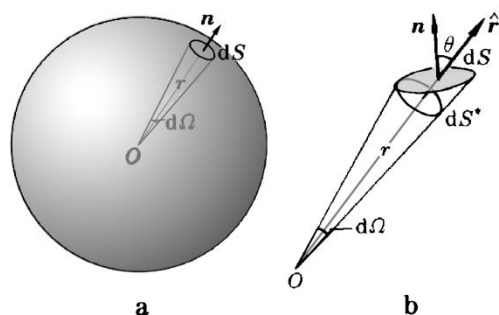


其正负方向可约定为顺时针或逆时针。易知，如图任意闭合曲线对内部参考点 O 的平面张角为 2π （与如图圆周张角相同），对 O' 点的平面张角为 0 ！

- 如图，对应某参考点（如 O 点）微元 立体角（2 维）的一般定义为

$$d\Omega = \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{dS^*}{r^2} \quad (d\vec{S} = dS\vec{n})$$

易知，如图球面对球内参考点的立体张角为 4π ，对球外参考点的立体张角为 0 ！（通常对于闭合曲面选取外法方向向量 \vec{n} 来定义面元 $d\vec{S} = dS\vec{n}$ ）



如上结论可推广：**3 维空间内任意闭合曲面，对内部参考点的立体张角为 4π ，对外部参考点的立体张角为 0 。**

- ☞ 例：求半顶角为 θ 的圆锥尖顶所张成的立体角 $\Omega(\theta)$

解：对应半径为 R 的球缺的面积为

$$S(\theta) = \int_0^\theta 2\pi R \sin \phi \cdot R d\phi = 2\pi R^2(1 - \cos \theta)$$

$$\therefore \Omega(\theta) = \int_{S(\theta)} \frac{dS}{R^2} = \frac{S(\theta)}{R^2} = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

特例： $\Omega_{tot} = \Omega(\pi) = 4\pi$

- 电通量：既然电场线可以类比于流速场的流线，则对于给定面元，

$$d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} = E dS \cos \theta$$

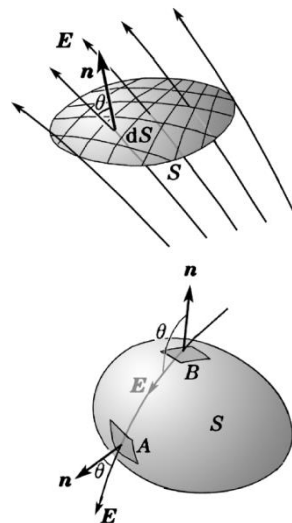
可以类比于流量（微元） $dQ_v = \vec{v} \cdot d\vec{S}$ ，称为电通量（微元），它的形象涵义是穿过该面元的电场线根数。

对于有限曲面，通量由曲面积分给出

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

对于闭合曲面（取外法向为正向），通量由闭合曲面积分给出

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



- ✓ 叠加性质：**满足标量叠加原理**！即电荷体系所激发电场的通量为各部分电荷独立激发的电场通量的标量求和。

b) 静电场高斯定理（Gauss'1840）

- 点电荷 q 激发电场的闭合曲面通量

$$\Phi_q = \oiint_S \vec{E}_q \cdot d\vec{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{tot} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & q \text{ 位于 } S \text{ 内} \\ 0 & q \text{ 位于 } S \text{ 外} \end{cases}$$

- 高斯定理：由通量的叠加性质得

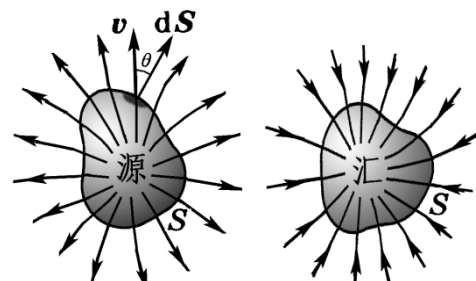
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{(\sum_{S \text{ 内}} q_i)}{\epsilon_0} \xrightarrow{\text{连续分布}} \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

闭合曲面 S 习惯上被称为**高斯面**，而 V 为该闭合曲面所包围的区域。

➤ 高斯定理的含义

1) 高斯定理的积分式描述了静电场的**有源性**。

类比流速场，闭合曲面流量（通量）不为 0 时，表示有源或汇（如右图），可以统称为源，并加以区分为正负。而静电场的“源”即是高斯面内的正负电荷，分别带来正负通量。



由此可以给出**电场线的一般性质**，即

- 电场线可以从正电荷或无穷远出发，到负电荷或无穷远终止，但不会在无电荷区域中断。

附注：在后面 1.4 节给出静电场的环路定理之后，我们便可确定在无电荷区域电场线不会出现“环线”结构，如上表述中的“可以”便被替换成“只能”。

- （无电荷区）电场线越密集场强越大，即电场线的（横截面上）数密度 $dN/dS \sim E$ 。

证明：考虑无电荷区域，（类比流速场的流管）引入电场线管，如图所示为（无穷细）电场线管的一段，由高斯定理，封闭区域总通量为零，则有

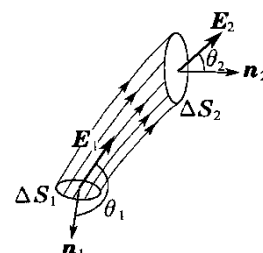
$$0 = \vec{E}_1 \cdot \vec{n}_1 \Delta S_1 + \vec{E}_2 \cdot \vec{n}_2 \Delta S_2 = E_1 \Delta S_1 \cos \theta_1 + E_2 \Delta S_2 \cos \theta_2$$

若为横截面 ($\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$),

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\Delta S_2}{\Delta S_1}$$

因此，一定场线密度画法的前提下，

$$dN/dS_{\text{横}} \sim E$$



附注：曲面电通量的几何含义

（场线密度画法的前提下）穿过该曲面的电力线根数

思考：如图，仅考虑空间两个点电荷

$$q_1 > 0, \quad q_2 < 0$$

一条电场线从正电荷处与连线方向夹角为 α 的方向“出发”，求它“抵达”（假设可以抵达）负电



荷处时与连线方向的夹角 β . （答案： $\sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{q_1}{-q_2}}$ ）

- 2) 高斯定理的积分式只反映了静电场整体分布特征的一个侧面，数学上来自平方反比律。不能认为高斯面上的场强分布完全由面内电荷所决定，面外电荷对每一点的场强仍有贡献，只是对总的通量贡献为零。

c) 高斯定理应用

- 静电场高斯定理不等价于库仑定律，即使高斯面内、外的电荷分布给定，面上的场强分布一般仍然不能由高斯定理直接给出。但当带电体系有较强的对称性（如球对称、轴对称、面对称等）时，场强方向可以由对称性确定，而大小往往只依赖于单变量，此时便可由高斯定理确定场强分布。

☞ 书上 24 页例 6：均匀带电球壳（ Q, R ）

分析：由球对称性可知，球壳内外场强分布均沿径向且大小只依赖于到球心的距离。

- 1) 球壳外：取如图高斯面（ $r > R$ ）

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \oint_S E(r) \cdot dS \\ &= 4\pi r^2 E(r) = Q/\epsilon_0 \\ \therefore E(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r > R)\end{aligned}$$

相当于所有电荷集中于球心！

- 2) 球壳内：取高斯面（ $r < R$ ），易知

$$E(r) = 0 \quad (r < R)$$

- 3) 如换做均匀带电球体（ Q, R ），对应书上 26 页-例 7，则球外场强仍等效为所有电荷集中于球心所激发的场强，对于球内场点（ $r < R$ ）处的场强，可由高斯定理得

$$\begin{aligned}4\pi r^2 \epsilon_0 E(r) &= Q_r = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{r^3}{R^3} Q \\ E(r) &= \frac{\rho r}{3\epsilon_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (r < R)\end{aligned}$$

综合如上结果，对于均匀带电球体，场强分布如图

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}, & r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r}, & r < R \end{cases}$$

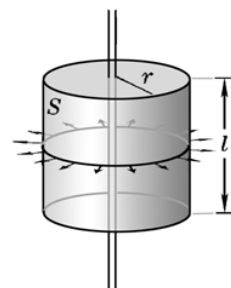
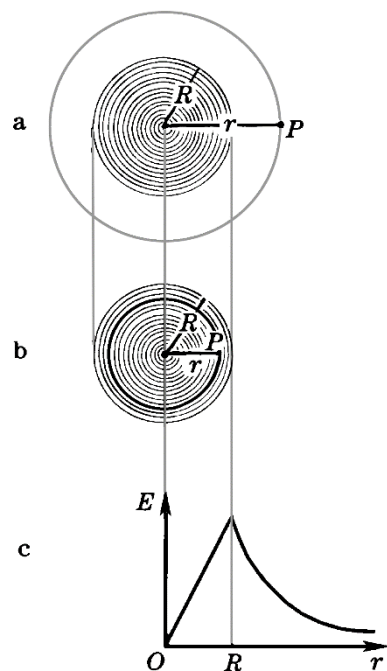
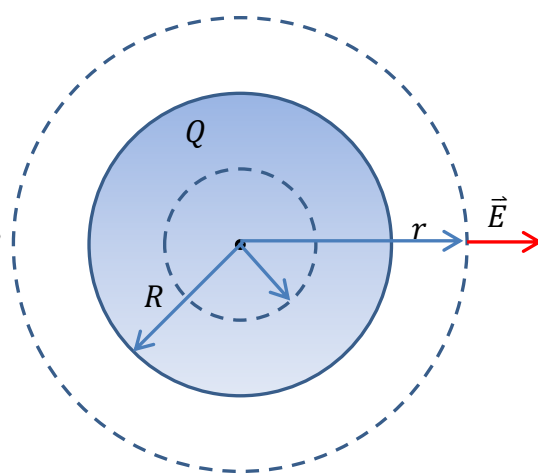
小结：

- a) 如上结论均可类比于引力场的结果，是高斯定理，即平方反比律的体现。
b) 应用高斯定理求解场强，应由对称性来选取高斯面，使问题简化。

☞ 书上 26 页例 8：均匀带电无穷长细棒（ λ ）

分析：由轴对称性易知，场强沿垂直于轴线平面的径向辐射状分布，大小只依赖于场点与轴线的距离。

如图，由轴对称性选取长为 l 的闭合柱面为高斯面，底面（ $\vec{E} \perp d\vec{S}$ ）对通量无贡献，则



$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{侧面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{侧面}} E(r) \cdot dS \\ &= 2\pi r l E(r) = \lambda l / \epsilon_0 \\ \therefore E(r) &= \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}\end{aligned}$$

与例 3 中求得的结果一致。

☞ 书上 28 页例 9：均匀带电无限大平面（ σ ）

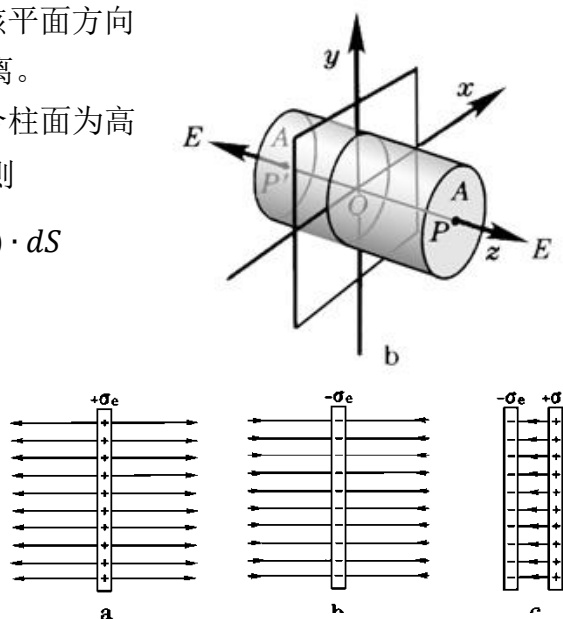
分析：由面对称性易知，场强沿垂直于该平面方向对称分布，大小只依赖于场点与面的距离。

如图，由面对称性选取底面积为 S 的闭合柱面为高斯面，侧面（ $\vec{E} \perp d\vec{S}$ ）对通量无贡献，则

$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \iint_{\text{底面}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{底面}} E(r) \cdot dS \\ &= 2SE = \sigma S / \epsilon_0\end{aligned}$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

因此，均匀带电无限大平面外场强与距离无关，如右图 a、b 分布，右图 c 的场强分布及大小可由叠加原理得到。



☞ 思考：试证，如图球壳（半径为 R ）

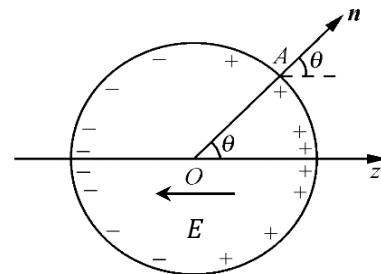
轴对称面电荷分布

$$\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$$

在球壳内部激发电场为如图所示方向的匀强场，且

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$$

提示：可由正、负均匀带电球的错位叠加构造如上电荷分布



1.4 静电场环路定理 电势（作业：26、31、33、37、39、42）

a) 静电场环路定理

➤ 引言：高斯定理只反应了静电场分布的一部分整体特征，数学上来自平方反比律。但没有反应静电力的保守性，即静电荷有心力场的性质。

➤ 静电场环路定理：

单个静止点电荷 q 所激发的电场为有心力场，故为保守力场。对任意闭合回路 L 满足，其环路积分，即环量

$$\oint_L \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0$$

因此，由场强叠加原理，任意静电体系所激发的电场为保守力场，满足静电场环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad L \text{ 任意}$$

➤ 静电场环路定理的含义：

1) 静电场环路定理反映了静电场整体分布的**无旋性**。

类比流速场，当有漩涡存在时，环量（或涡旋量） $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0$ ，因此静电场线不具有涡旋（环线）结构，结合高斯定理（正负电荷作为“源”）

· 电场线只能开始于正电荷或无穷远，终止于负电荷或无穷远

2) 静电场高斯定理与环路定理不能互推，相互独立，但也相辅相成，构成静电场完备的描述，即与库仑定律结合叠加原理等价。

b) 电势与电势差

➤ 电势能：静电场的无旋性是静电力保守性的反映，因此可以引入电势能 W 试将试探电荷 q_0 在静电场中从 P 移至 Q，则静电力做功对应电势能的减少量：

$$A_{PQ} = q_0 \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} = W_P - W_Q$$

➤ 电势：在静电场的相互作用模式下，静电力的保守性来自于静电场的保守性，与试探电荷无关，因此可以定义

$$U = W/q_0$$

为电势，单位为伏特（1 V = 1 J/C）。其空间分布的差异量由场强积分决定：

$$U_P - U_Q = (W_P - W_Q)/q_0 = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

或可写成微分式

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

在三维直角坐标分解中，上式对应

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

因此，电场强度对应于电势场的负梯度

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}\right)$$

数学附注：采用如图球极坐标（书上 471 页附录内容）

$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi, \\ y = r \sin\theta \sin\varphi, \\ z = r \cos\theta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x}. \end{cases}$$

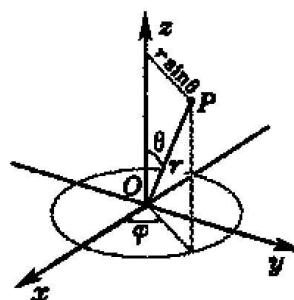


图 A - 15 球坐标系

(A. 23)

$$U = U(r, \theta, \varphi), \quad dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$d\vec{l} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi\vec{e}_\varphi$$

$$\therefore \vec{\nabla}U \cdot d\vec{l} = dr(\vec{\nabla}U)_r + r d\theta(\vec{\nabla}U)_\theta + r \sin \theta d\varphi(\vec{\nabla}U)_\varphi = dU$$

对照可知

$$\vec{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

➤ 电势（能）零点：

• 通常选为场强为零的点。对有限电荷分布体系，通常为无穷远点，此时

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

☞ 例：点电荷 q 产生的静电场的电势分布：

$$U(r) = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

▲ 特例：无穷长均匀带电直线

若选无穷远点为电势零点，则有限距离场点的电势结果为无穷大！

此时，通常选取直线附近的点为电势零点（注意：同样不能选取在直线上！）

例如，书上习题 1-33 选取电势零点为连线的中点（即题目图中 O 点）。

• 无场强零点时可以视方便选取：如无穷大均匀带电平面，选取板面或附近点为电势零点才是方便的，若选取垂直板面方向无穷远点为势能零点，则板面附近电势为无穷大，带来不便。

➤ 等势面：电势相等的点连成的曲面。（参见教材 39 页图 1-51，39 页图 1-53）

由场强与电势之间的微分关系可以证明等势面如下性质：

1) 等势面与电场线处处垂直，场强沿电势减少方向

说明：沿等势面移动电荷，电场力不做功

2) 等势面密集处场强较大

说明：既然电场方向与等势面垂直，则沿等势面分布的法向

$$dU = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -Edl_n$$

即等势面分布密度

$$\left| \frac{\partial U}{\partial l_n} \right| = |\vec{E}|$$

附注：梯度的几何含义

$$\vec{\nabla}U = \begin{cases} \text{方向: } U \text{ 场分布的最快增长方向} \\ \text{大小: 该方向上的增长速率 (方向导数)} \end{cases}$$

➤ 电势（标量型）叠加原理：场强叠加原理的直接推论，即

$$U_P = \int_P^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_P^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_P^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} + \dots$$

$$= U_{P1} + U_{P2} + \cdots = \sum_i U_{Pi}$$

电荷连续分布时

$$U_P = \int dU_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r_P}$$

☞ 书上 36 页例 12: 均匀带电球壳 (Q, R) 电势分布
采用场强积分法 (定义式):

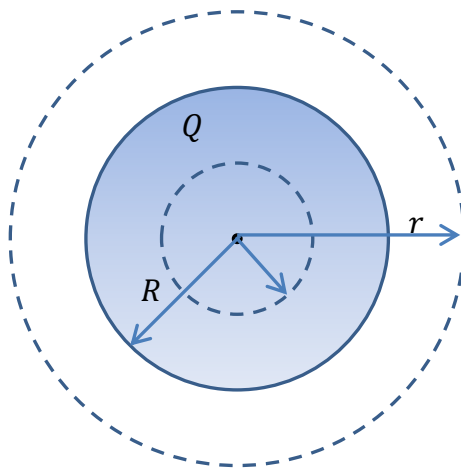
$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

球外

$$U(r) = \int_r^\infty E \cdot dr = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

球内为等势体。总体上的分布如下

$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} & r \leq R \end{cases}$$



✎ 思考: 均匀带电球 (Q, R) 电势分布 (提示: 可以采用场强积分法, 也可利用上例结论, 采用电势叠加法。建议两种方法都做做看)

答案:

$$U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \\ \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} (3R^2 - r^2) & r \leq R \end{cases}$$

☞ 书上 37 页例 13: 电偶极子 ($\vec{p} = q\vec{l}$) 远处电势分布

如下图, 选电偶极子中点 O 为极点建立极坐标, 则远处场点 P (r, θ) 正负电荷贡献电势

$$U_{\pm} = \pm \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_{\pm}}$$

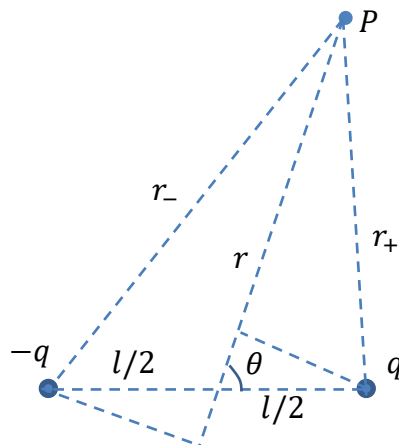
其中, 当 $r \gg l$ 时,

$$\begin{aligned} r_{\pm} &\approx r \mp l \cos \theta / 2 \\ \therefore U &= U_+ + U_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \\ &\approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos \theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

可见, 中垂面是电势为零的等势面。

☞ 书上 41 页例 14: 电偶极子 ($\vec{p} = q\vec{l}$) 远处电场强度分布

解: 准确到最低阶,



$$U = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2} = U(r, \theta, \varphi)$$

$$\therefore \begin{cases} E_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

特例：验证 13 页例 2 结果

• 延长线上： $\theta = 0, \pi$

$$E_\theta = 0, \quad E_r = \pm \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

• 中垂面上： $\theta = \pi/2$

$$E_r = 0, \quad E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3}$$

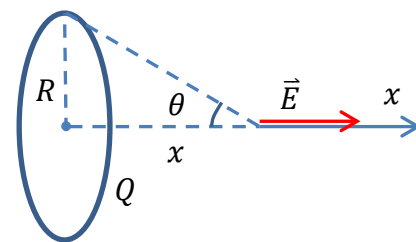
☞ 书上 42 页例 15：均匀带电圆环（ $Q > 0, R$ ）轴线上电势、场强分布
解：由叠加原理

$$U = U(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\int dQ}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

由对称性可知轴上场强方向沿轴线

$$E_y = E_z = 0$$

$$\therefore E = E_x = -\partial_x U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$



附注：若带电不均匀，则 U 及 E_x 仍为所求，但一般 $E_{y,z} \neq 0$.

此外，均匀带电圆环轴线外电势、场强分布，结果中出现椭圆积分，可参考：
张之翔，《电磁学教学参考》，北京大学出版社，2015. (§1.7、§1.12)

☞ 例：书上 42 页，“电偶极层”：厚度 l 均匀的正负面点荷 $\pm\sigma_e$.

引入“电偶极层强度”（单位面积上电偶极矩的大小）

$$\tau_e = \sigma_e l$$

远处场点（ $r \gg l$ ）电势

$$U(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \sigma_e \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) dS$$

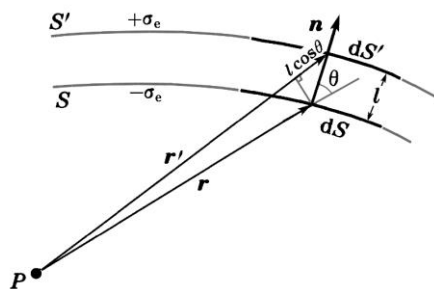
注意：

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \approx -\frac{l \cos\theta}{r^2}$$

$$\therefore U(P) \approx -\frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos\theta dS}{r^2} = -\frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\hat{r} \cdot d\vec{S}}{r^2} = -\frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0} \Omega_e$$

Ω_e ：整个电偶极层对场点所张成的立体角

因此电场分布：



$$\vec{E} = -\vec{\nabla}U = \frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0}\vec{\nabla}\Omega_e$$

- 在 $l \rightarrow 0$ 的极限下（真的“面模型”了），跨越偶极层时，电势跃变：

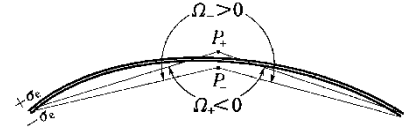
$$\Omega_- - \Omega_+ = 4\pi$$

$$\therefore U(P_+) - U(P_-) = -\frac{\tau_e}{4\pi\epsilon_0}(\Omega_+ - \Omega_-) = \frac{\tau_e}{\epsilon_0}$$

或由“面模型”之前来看：

$$U(P_+) - U(P_-) = E_{\text{内}}l = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}l = \frac{\tau_e}{\epsilon_0}$$

- 附注：此处结论将被“平移”到磁偶极层，以用来证明稳恒磁场的“安培环路定理”（见第二章内容）。



1.5 静电场中的导体（作业：46、49、52）

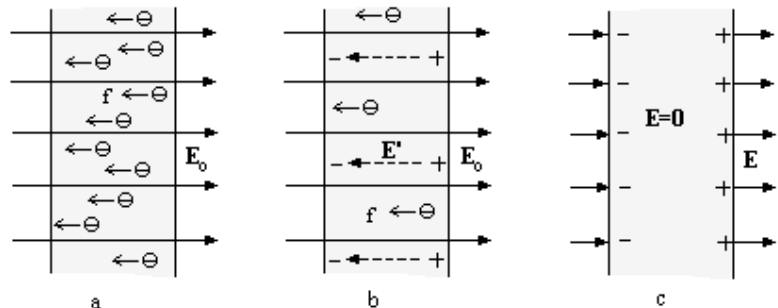
a) 导体和电介质

- 导体：能够导电的物体（物质）。从物质的微观电结构来看，导体中存在着大量自由电荷。例如，
 - 金属：一般金属原子实对最外层电子（即价电子）束缚不强，成为可移动的自由电子（数密度约 $10^{22-23}/\text{cm}^3$ ，对应于一个金属原子可以提供 1-2 个自由电子）。
 - 电解质（酸、碱、盐等）溶液：自由电荷为正负离子
- 电介质：亦称绝缘体，微观电荷被束缚在原子尺度上，不能宏观移动，称为束缚电荷。
量子层面上看，电介质内部存在少量的自由电荷，其数密度通常 $\leq 10^6/\text{cm}^3$ ，不足以带来宏观电流效果。
- 导体与绝缘体间的转化：如日光灯中绝缘气体被高电压击穿电离后便可导电。

b) 导体的静电平衡

- 定义：当带电体系电荷（带电粒子）静止不动，从而电场分布不随时间变化时，我们说该带电体系达到了静电平衡。

均匀（材质均匀、温度均匀恒定）金属导



体在匀强电场 \vec{E}_0 内达到静电平衡的过程如图所示，其中 \vec{E}' 表示导体表面电荷激发的附加场强，最终达到平衡后，空间各处场强 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$ 。

- 导体静电平衡条件：内部场强为零，即 $\vec{E}_{\text{内}} = 0$ 。否则自由电荷不会停止移动。

➤ 导体静电平衡性质：

- 1) 电势分布：导体是个等势体，导体表面是个等势面。

证明：导体内部及表面

$$\Delta U = - \int \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{l} = 0$$

- 2) 净电荷分布：内部不存在宏观的净电荷（即 $\rho_{\text{内}} = 0$ ），电荷只分布在导体表面上。

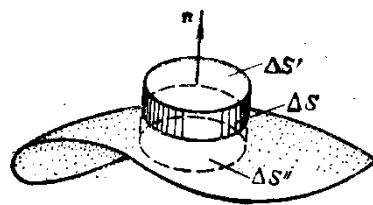
证明：导体内任取高斯面 $S_{\text{内}}$ ，

$$\oiint_{S_{\text{内}}} \vec{E}_{\text{内}} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V_{\text{内}}} \frac{\rho_{\text{内}}}{\epsilon_0} dV = 0$$

$$\therefore \rho_{\text{内}} = 0$$

- 3) 场强分布：导体表面外场强处处与表面垂直，大小正比于表面电荷密度

证明：表面为等势面，故场强方向与表面垂直。此外，取如图高斯面，因内部场强为零，外部场强垂直于表面，故只有上表面对通量有贡献，即



$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_{\text{外表面}} \Delta S' = \sigma_e \Delta S' / \epsilon_0$$

$$E_{\text{外表面}} = \sigma_e / \epsilon_0$$

☞ 孤立导体球 (Q, R) 静电平衡：

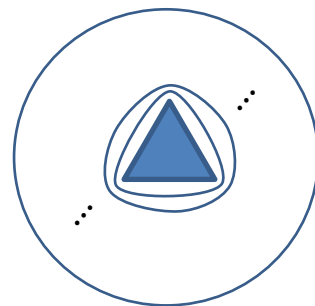
由球对称性，导体表面电荷必然是均匀分布，等价于均匀带电球壳

$$E_{\text{外表面}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = \frac{\sigma_e}{\epsilon_0}$$

- 思考：孤立导体球 (Q, R) 静电平衡时，表面单位面积电荷受到的静电排斥力 f ？（答： $f = \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0}$ ， $\sigma_e = \frac{Q}{4\pi R}$ 。提示：如上求解的场强分布为该小块表面电荷和其余表面电荷激发的场强叠加而成，根据库仑定律的原则，可“适当”定义面上场强，结果为 $E_{\text{面}} = \frac{\sigma_e}{2\epsilon_0}$ ）

- 4) 面电荷分布与导体表面曲率的定性关系：曲率越大（越尖锐）的地方，面电荷密度越大，相应的场强越大。

定性上看，如图带电孤立三棱锥导体静电平衡下的等势面在远处势必会过渡到近似为球面，因此尖端附近等势面分布较为集中，对应场强较大。



- 附注：面电荷分布与导体表面曲率的定量关系一般会很复杂，即使曲率为零（平面）或负曲率（凹面）的地方也可以有（少量）的净电荷分布。

☞ 有简单解析解的比较著名的特例是椭球面孤立导体（带电量 Q ）：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

可以确定：（尽管推导过程还是相当复杂，参见“张之翔，《电磁学教学参考》，§ 1.15 & § 1.16”）

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-1/2}$$

思考：半径为 R 的圆盘导体静电平衡时面电荷密度 ($\sigma(r) = \frac{Q}{2\pi R\sqrt{R^2-r^2}}$)

尖端放电：如果场强大到可以使其周围空气电离 ($E \sim 3 \times 10^6 \text{ V/m}$) ——“尖端放电”。

危害：如高压设备尖端放电造成电晕损耗

✓ 应用：如避雷针、静电复印等

c) 导体空腔的静电平衡 静电屏蔽

➤ 导体空腔（腔内无带电体）静电平衡性质：

- 1) 则空腔的内表面不带电，电荷只分布在空腔的外表面，空腔内场强为零，整个空腔为等势体。

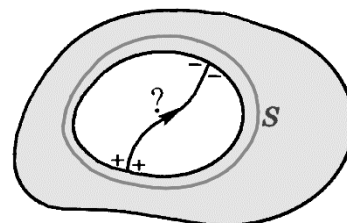
证明：如图，取导体内部高斯面 S ，则

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

说明内表面总电量为零，即若内表面有正电荷分布，必会存在相应的负电荷分布如图，亦即空腔内存在有正电荷指向负电荷的电场线，则如图路径积分

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

这与导体静电平衡时是一个等势体是矛盾的！因此，内表面无电荷分布，空腔内场强为零！



- 2) 外表面电荷分布及外部电场分布完全等价于实心导体静电平衡情形！

➤ 导体空腔（腔内存在带电体）静电平衡性质：

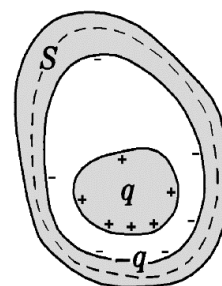
- 1) 则空腔的内表面所带电荷与空腔内电荷的代数和为零。

证明：如图，取导体中高斯面 S ，则

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

说明内表面总电量为腔内带电体电量等量异号。

- 2) 屏蔽性质：空腔内各点的场强由空腔内电荷及空腔内表面电荷的分布唯一地确定；空腔外各点的场强由空腔外电荷及空腔外表面电荷的分布唯一地确定。从电荷分布激发电场的角度来看，内外“互不干扰”。

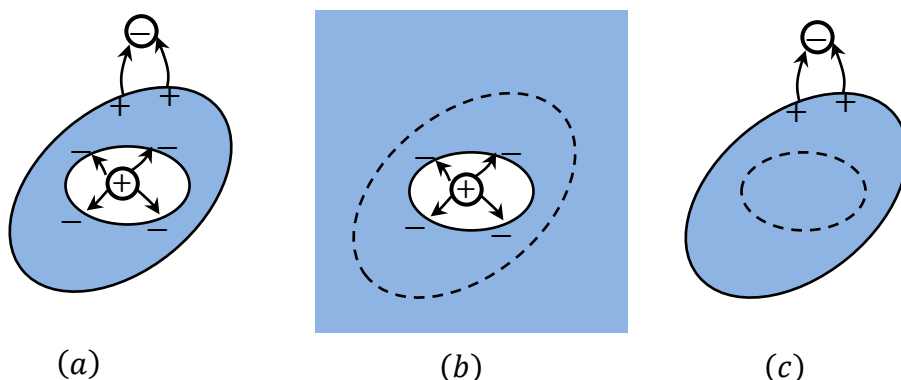


设导体壳带电量为 Q ，则外表面分布有总电量为 $Q + q$ 的面电荷。设想导体壳将内 (q 与面电荷 $-q$)、外 (外部电荷分布和外表面电荷 $Q + q$) 分成两个独立 (电荷) 系统：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{壳中场强：外系统贡献为零} + \text{内系统贡献为零} \\ \text{壳内场强：外系统贡献为零} + \text{内系统贡献} \\ \text{壳外场强：外系统贡献} + \text{内系统贡献为零} \end{array} \right.$$

如此则自然满足导体壳总电量为 Q ，并且为等势体的边界条件，由“静电场唯一性定理”可知：如上为唯一现实的电场分布！

- 在引入唯一性定理之前，我们可以对如上电荷、电场分布加以图示上的说明：



图(a)对应与我们要考查的问题，图(b)对应于把外表面“推”到无穷远的静电平衡情形，图(c)对应于将内表面“压缩”为零(以至于内部电荷被“中和”)的静电平衡情形。显然，将图(b)、(c)电荷分布叠加，对应场强叠加，满足图(a)的静电平衡条件。

需要说明的是，要想严格证明如上结论，无论如何避不开“唯一性定理”，但记住这个结论，我们便可以做一些非常有效的预言，如

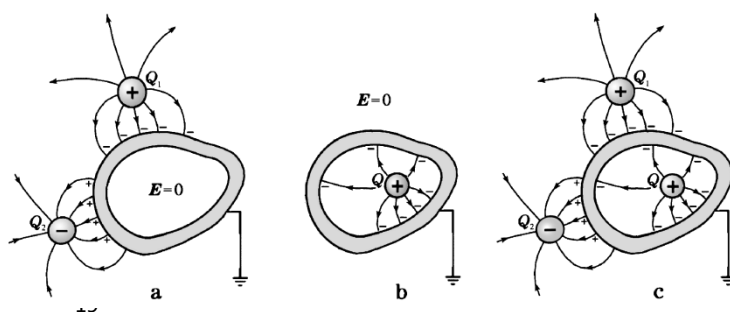
- ☞ 例：总电量为 q 的导体空腔外表面为球面 (R)，内表面形状不规则。现将电量为 q_0 的点电荷放置于导体空腔内某处，静电平衡后，请确定导体空腔外场强分布情况？

解：根据导体空腔静电平衡性质

空腔外表面为总电量 $q + q_0$ 的均匀球面分布 (与 q_0 具体位于腔内的什么位置上无关!)，而此电荷分布完全确定了导体空腔外场强分布，即……

- 静电屏蔽：导体壳外电荷分布对壳内电场的影响在静电平衡的条件下被导体外表面电荷分布产生的贡献完全抵消，无论壳内是否存在有带电体，此之谓 **静电屏蔽**。

如上情形，壳内带电体的存在还是可以通过导体壳外表面感应电量多余的部分 (相对于内部不存在带电体时) 而对壳外电场分布



产生实质的影响，因此没有被屏蔽掉。

可以通过导体壳接地，使对内、对外均可实现完全的屏蔽。如图，唯一性定理告诉我们，a、b 内外场强分布的叠加既得 c 中的内外场强分布，也就是说，c 中的外场强与 a 中一样，并与内部的电荷分布无关。

· 关于导体接地的附注：接地等价于连接一个大导体。

1) 孤立导体外表面接地时，外表面电荷会被引入地下；但当存在外电场（即存在外部电荷）时，接地后外表面仍有净电荷。

2) 实际工作中经常将电器外壳接地，并选取地球为电势零点，即 $U_{\text{地}} = 0$ 。

考虑到地球上分布有电场（ $E \sim 100 \text{ V/m}$ ，见习题 1-15），所以一般 $U_{\text{地}} \neq U_{\infty}$ 。但当如上场强可忽略（或人为强行忽略），则可近似取 $U_{\text{地}} \approx U_{\infty} = 0$ （如课后习题 1-52 问(5)）。

➤ 空腔导体静电平衡的应用实例：法拉第圆筒、范德格拉夫起电机等。

1.6 电容（作业：57、60、62）

a) 电容和电容器

➤ 孤立导体的电容：根据电势叠加原理及“唯一性定理”，当孤立导体的电量增减时，导体的电势相应增减（ $U_{\infty} = 0$ ），两者成正比，比例系数

$$C = \frac{Q}{U}$$

反应了孤立导体容纳电荷的能力，称为电容，SI 单位为法（F）， $1\text{F} = 1\text{C/V}$ ，常用单位为微法（ μF ）和皮法（ pF ）。

✓ 附注：一般介质（如空气）具有一定的击穿场强，故电容器存在一定的耐压极大值 U_M ，在此前提下电容的大小反应了容纳电荷的能力。

☞ 孤立导体球（半径为 R ）电容-书上例 22：设带电量为 Q ，则

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

可见，孤立导体的电容与形状、大小等几何量有关，而与带电量无关。

➤ 电容器及其电容：两个分立的导体构成的闭合、或近似闭合的导体空腔称为电容器。此时若开口处（如存在的话）边缘效应可略，并令 A、B 两导体的内表面（即构成空腔的相对表面）电量分别为 $\pm Q$ ，则由静电屏蔽效应可知： $U_{AB} = U_A - U_B$ 与外电场无关，并将正比于电量 Q ，比例系数

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{Q}{U_A - U_B}$$

只与形状、大小、相对位置等几何量有关，与带电量及外部带电体无关，称为该电容器的电容。（后面还会看到，电容器的电容与腔内填充的介质有关）

☞ 平行板电容器（例 23）：面积 S ，间距 d 。忽略边缘效应（即 $S \gg d^2$ ）

$$U_{AB} = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{Q}{\epsilon_0 S} d$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

☞ 同心球壳电容器（例 24）：内外半径分别为 R_1 、 R_2

空腔内场强沿径向，大小可由高斯定理确定

$$U_{AB} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

附注：孤立导体球电容可看作是同轴球壳电容器电容取极限 $R_2 \rightarrow \infty$.

☞ 同轴柱形电容器（例 25）：内外半径分别为 R_1 、 R_2 ，长度 $L \gg R_2 - R_1$

$$U_{AB} = \int_{R_1}^{R_2} E(r) dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{U_{AB}} = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

➤ 分布电容：任何导体间均存在电容（如导线之间、人体与仪器之间），称为分布电容。

b) 电容器的串并联

✓ 在实际使用时，如果已有电容器的电容值和耐压值不符所需，可采用串联和并联的方法加以调整。

➤ 电容器串联：电量相同，电压求和，故

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

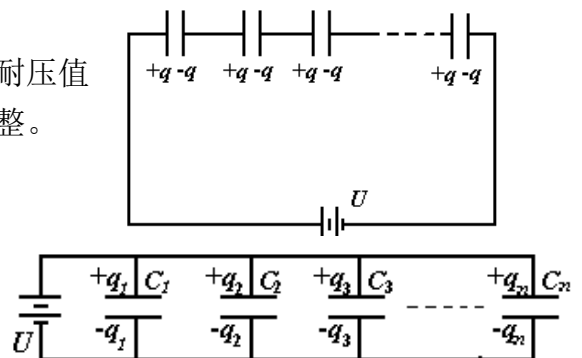
等效为极板间距变大，故电容变小。

➤ 电容器并联：电压相同，电量求和，故

$$C = C_1 + C_2 + \dots$$

等效为极板面积变大，故电容变大。

➤ 并联增加电容值，串联增加整体的耐压性。



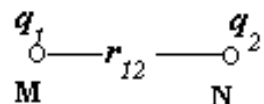
1.7 静电能（作业：63）

a) 带电体系的静电势能

➤ 我们可以约定所有电荷微元彼此相距无穷远为“电势能零位形”，则带电体系的静电势能可看作是把电荷微元从如上“彼此相距无穷远”的位形聚合起来，克服电场力所做的功。

➤ 对于由若干具有有限电量的点电荷构成的分立带电体系，比较方便的是把“聚合”每个点电荷对应的能量分离出来，称为该点电荷的自能，剩余的部分即是各个点电荷间的相互作用能（以彼此相距无穷远为电势能位形），称为互能。

• 两点电荷体系的互能：



如右图，将 q_1 固定于 M 点，再将 q_2 从无穷远处移至 N 点，或将 q_2 固定，移动 q_1 ，对于计算互能来说是等价的，因为两个过程克服电场力做功 A' 是相同的。

$$W_{\text{互}} = A' = q_1 U_{21} = q_2 U_{12} = \frac{1}{2} (q_1 U_{21} + q_2 U_{12}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

其中， $U_{21/12}$ 分别为以 2/1 为源电荷在 1/2 场点处激发的电势

$$U_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}} \quad U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}$$

- n 个点电荷体系的互能：

两点电荷体系的互能可看作是 1 在 2 所激发的电场中的电势能 $W_{21} = q_1 U_{21}$ ，与 2 在 1 所激发的电场中的电势能 $W_{12} = q_2 U_{12}$ 求和后除去重复计数因子 2。同理， n 个点电荷体系的互能为

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i U_i$$

其中 U_i 表示 q_i 所在场点处其他点电荷激发的电势和

$$U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n U_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n \frac{q_j}{r_{ji}}$$

概括来说，计量点电荷系的静电互能需要按“对”去计数。（如书上例 17、18）

➤ （有限空间范围内）连续分布带电体系：

- 体分布： $dq = \rho dV$

$$W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \iiint \rho U dV$$

每个电荷微元自能估计为

$$dq \cdot \frac{dq}{\sqrt[3]{dV}} \sim \rho^2 dV^{5/3}$$

可以忽略不计（相对于其对互能的贡献 $\rho U dV$ ），故如上互能即为该体系的全部静电能，即

$$W_e = W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \iiint \rho U dV$$

- 面分布：类似分析有

$$W_e = W_{\text{互}} = \frac{1}{2} \iint \sigma U dS$$

- 线分布：电荷元自能积分为对数发散，即

$$W_e = \frac{1}{2} \int \lambda U dl \xrightarrow{\lambda \text{有限}} \infty$$

即将无穷远电荷微元聚合成有限密度的线电荷分布，需要克服电场力做无穷大的功！故线电荷模型不适合描述其自身体系的自能。

☞ 例：真空中均匀带电球体（电量 Q ，半径 R ）静电能

解：场强/电势分布

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r} & r > R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} \vec{r} & r < R \end{cases} \Rightarrow U(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r > R \\ \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right) & r \leq R \end{cases}$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint \rho U dV = \frac{1}{2} \int_0^R \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{Q}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{R} - \frac{r^2}{R^3} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

可见，当电量固定，半径趋于零时，该体系的静电能（即有限电量的点电荷的自能）是线性发散的。

b) 电容器储能

- 电容器充电过程中，外力（电源的非静电力）克服电场力做功，对应于电场能的增加，因此电容器可看作是储能设备，其储藏的静电能为（设电容为 C ，极板电量为 $\pm Q$ ）

$$W_e = A' = \int_0^Q u(t) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} CU^2$$

- 如把电容器储能类比为弹簧振子的弹性势能的话，那么 Q 可以类比于偏离平衡位置的位移，而 $1/C$ 可以类比为弹性系数。
- 如上储能公式也可直接由面分布电荷体系的静电能公式得到

$$W_e = \frac{1}{2} \iint \sigma U dS = \frac{1}{2} (U_+ - U_-) Q = \frac{1}{2} UQ$$

c) 静电场的能量

- 如上公式容易让人误会静电能“储藏”在电荷中。其实，若设想两个点电荷相对距离改变后，电势能相应改变，而过程中伴随改变的是场的分布，而不是点电荷的物质结构，因此静电能本应“储藏”在场中，是场能在静态时的表现形式。

☞ 例：平行板电容器 ($S, d, \sigma_0 = \epsilon_0 E$)

$$W_e = \frac{1}{2} UQ = \frac{1}{2} Ed \cdot \sigma_0 S = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot V$$

- 单位体积具有的电场能

$$w_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

被称为电能密度。

- 如上场能密度公式可以推广到非静电场情形。

☞ 例：真空中均匀带电球壳（电量 Q ，半径 R ）静电能

解：方法一，场能积分

$$\begin{aligned} W_e &= \iiint \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot dV = \int_R^\infty \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

方法二，静电能积分

$$W_e = \frac{1}{2} \iint \sigma U dS = \frac{1}{2} Q U_R = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

d) 电荷在外电场中的能量

➤ 给定外场 U ，电荷体系的电势能为

$$W = \iiint \rho U dV$$

注意：这里没有“1/2”

☞ 书上 61 页，例 20：偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 在外场 $U(\vec{E})$ 中的电势能
设 $l \ll r_0$ (r_0 为场强变化的特征长度)，则

$$W = q(U(\vec{r} + \vec{l}) - U(\vec{r})) \approx q\vec{l} \cdot \vec{\nabla} U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

➤ 电势能与静电力：虚功原理

引入虚位移 $\delta\vec{l}$ ：一定宏观约束允许的假想小位移（可以是转动，如 $\delta\theta$ ）
主动力（不是约束力）的虚功带来相应势能的减小

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{l} = -\delta W_F$$

☞ 书上 61 页，例 21：偶极子 $\vec{p} = q\vec{l}$ 在非均匀外场 $U(\vec{E})$ 中的受力
由虚功原理，

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \delta\vec{l} &= -\delta W \approx \delta(\vec{p} \cdot \vec{E}) \\ \therefore \vec{F} &\approx \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \end{aligned}$$

附注：“一定宏观约束允许”在此例的含义是“ \vec{p} 不受求导”，即

$$\vec{F} \approx \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E} + \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$$

☞ 思考：试由虚功原理确定，孤立导体球 (Q, R) 静电平衡时，表面单位面积电荷受到的静电排斥力 f 。（答： $f = \frac{\sigma_e^2}{2\epsilon_0}$ ， $\sigma_e = \frac{Q}{4\pi R}$ 。）

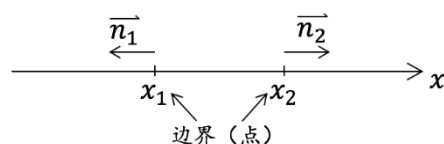
1.8 静电场的微分方程 唯一性定理

a) 静电场 Gauss 定理、环路定理的微分形式

➤ 微积分基本定理（导函数积分决定于原函数在边界上的取值）

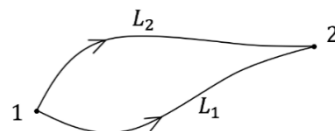
- 直线型：（Newton-Leibniz 公式）

$$\int_{x_1}^{x_2} f'(x) dx = f(x_2) - f(x_1)$$



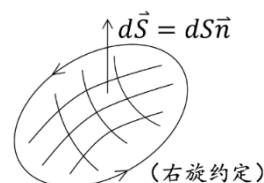
- 曲线型：

$$\int_{\vec{r}_1, \text{任意} L}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla} U \cdot d\vec{r} = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$



- 曲面型：斯托克斯（Stokes）公式

$$\iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1)$$

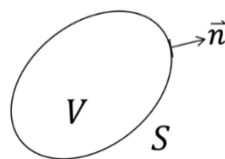


有向曲线 L 为曲面 S 的边界

- 体积分型：高斯（Gauss）公式

$$\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (2)$$

闭合曲面 S 为区域 V 的边界



- 散度（divergence）和旋度（curl）

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z$$

$$\operatorname{curl} \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \partial_x & E_x \\ \vec{j} & \partial_y & E_y \\ \vec{k} & \partial_z & E_z \end{vmatrix} = (\partial_y E_z - \partial_z E_y) \vec{i} + \dots \vec{j} + \dots \vec{k}$$

- 按 Gauss 公式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (3)$$

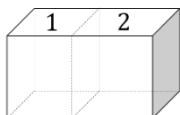
为通量的体密度

- 按 Stokes 公式

$$\vec{n} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta L} \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (4)$$

为环量的面密度

- Gauss 公式反映的是“通量的体相加性”



$$\text{即 } \phi_{12} = \phi_1 + \phi_2$$

（1、2 分界面上的通量面积分相互抵消）

- ⇒ 如此，证明(3)式，即得(1)式

取 $(x, y, z) \rightarrow (x+dx, y+dy, z+dz)$ 小立方格.

$$\begin{aligned} \phi|_{\Delta S} &= (E_x(x+dx, \dots) - E_x(x, \dots)) dydz + \dots \\ &= \partial_x E_x \cdot dx dy dz + \dots \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\phi|_{\Delta S}}{dx dy dz} = \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

- Stokes 公式反映的是“环量的面相加性”

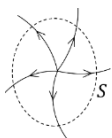


相

邻积分线上的环量线积分相互抵消

$$K_L = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{L_i} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \sum_i K_{L_i}$$

- 流速场的散度和旋度



散度：定义“标准水龙头”

$$\text{其单独贡献通量 } \phi_0 = \oiint_{\Delta S} \vec{v}_0 \cdot d\vec{S} = 1$$

则 $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ：“标准水龙头”分布的体密度；

旋度：类似地，可定义“标准小涡旋” $\oint_{\Delta L} \vec{v}_0 \cdot d\vec{l} = 1$

则 $\vec{\nabla} \times \vec{v}$ ：“标准小涡旋”分布的面密度（矢量）。

➤ 静电场的散度和旋度

- 静电场高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \left(= \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV \right) = \iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$$

$$\therefore \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (5)$$

即一定单位制下（取 $\varepsilon_0 = 1$ ）的“电量”便对应流速场中“标准水龙头”个数的计量。

- 静电场的环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \left(= \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S} \right) = 0$$

$$\therefore \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (6)$$

故称之为“无旋场”

此外，因有恒等式： $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} U = 0$ ，故(6)式等价于可以引入标量电势场 $U(\vec{r})$ ：

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \quad (6)'$$

（非确定性引入，原则上可以相差一个“零点”的约定）

☞ 例：有限电荷分布体系的静电场能

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_{\text{全}}} \rho U dV = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{\text{全}}} ((\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) U) dV \quad (7)$$

利用公式

$$\vec{\nabla} \cdot (U \vec{E}) = U (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + (\vec{\nabla} U) \cdot \vec{E}$$

$$\therefore W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{\text{全}}} (\vec{\nabla} \cdot (U \vec{E}) - (\vec{\nabla} U) \cdot \vec{E}) dV = \frac{1}{2} \oiint_{S_{\infty}} U \vec{E} \cdot d\vec{S} + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{V_{\text{全}}} E^2 dV$$

考虑 $r_{\infty} \rightarrow \infty$ 球面，对于有限电荷分布体系

$$U_{\infty} \sim \frac{1}{r_{\infty}}, \quad E_{\infty} \sim \frac{1}{r_{\infty}^2}$$

$$\therefore \oiint_{S_{\infty}} U \vec{E} \cdot d\vec{S} \sim \frac{r_{\infty}^2}{r_{\infty} \cdot r_{\infty}^2} \rightarrow 0 \quad (\text{中值定理})$$

$$\therefore W_e = \iiint_{V_{\text{全}}} \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 dV \quad (8)$$

附注：静电场情形，(7)与(8)等价是因为此时无法区分相互作用是“瞬时超距”的，还是“场论”的。对于非恒定电场，(8)式作为“电场能”部分仍然成立，此时(7)式不再成立。其实，我们将看到，对于非恒定电场，环路定理(6)或(6)'不再成立，“电势能”至少不再是全部的“场能”。

b) 静电场基本微分方程

$$\begin{cases} \text{环路定理: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ 或 } \vec{E} = -\vec{\nabla}U \\ \text{Gauss 定理: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \end{cases}$$

$$\therefore \text{Poisson 方程: } \nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0 \quad (9)$$

对于无电荷区域 ($\rho \equiv 0$)

$$\text{Laplace 方程: } \nabla^2 U = 0 \quad (10)$$

(9)或(10)被称为静电场基本微分方程.

➤ Laplace 方程(10)的解称为“调和函数”.

$$\text{一维特例: } U''(x) = 0 \Rightarrow U(x) = Ax + B \quad (11)$$

• 性质:

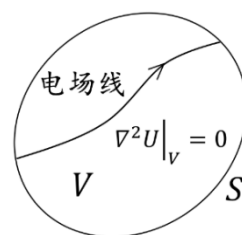
(1) 解域 V 内无局域极值点, 极值仅会在边界 S 上;

证: 无电荷区域 V 内, 场线 $\vec{E} = -\vec{\nabla}U$ 连续

故在 V 内, U 沿场线方向单调递减, 无极值!

特例: 若为无电荷导体空腔, $U|_S = U_0$ (常量)

\Rightarrow 等势腔 $U|_V = U_0$ (常量)



(2) $U(\vec{r})$ 在球面上的平均值为球心处取值 (“平均值定理”)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{球}R} U \cdot dS = \bar{U}_{\text{球面}}$$

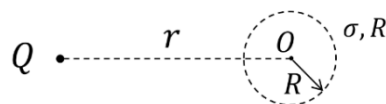
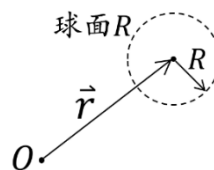
证: 点电荷 Q 激发的场中, Q 与均匀球面电荷 ($\sigma, R < r$)

相互作用能:

$$W_{\text{互}} = 4\pi R^2 \sigma \cdot \bar{U}_{\text{球面}} = U_{\sigma} \cdot Q = \frac{4\pi R^2 \sigma}{4\pi \epsilon_0 r} \cdot Q$$

$$(W_{\text{互}} = U_{\sigma \text{ 总在 } Q \text{ 处}} \cdot Q = \int U_{Q \text{ 在球各处激发}} dq)$$

$$\therefore \bar{U}_{\text{球面}} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$



一般电势分布情形, 可由叠加原理证明.

事实上, 这是一般的调和函数的性质, 也即要求“ $\rho \equiv 0$ ”

\Rightarrow 球面不能扩展到有电荷分布的区域!

平均值定理也说明了, 圆心球心处一定不是极值, 因为它是球面上的平均值.

c) 静电场边值问题 唯一性定理

➤ 对于常微分方程: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

定解问题对应于初值问题: 给定 $x_0 = x|_{t=0}$, $v_0 = \dot{x}|_{t=0}$

➤ 对于不含时的偏微分方程 (给定 ρ 的分布)

$$\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0 \text{ (或 } 0)$$

定解问题对应于边值问题: 给定边界面 S 上的分布

$$U|_S, \nabla U|_S, \dots$$

常微分方程的定解，相当于给 $t=0$ 时，求 $t>0$ 时如何演化， $t=0$ 也相当于 $t>0$ 的一个边界，也相当于“边值问题”。

➤ 解的唯一性问题：给定多少边界分布便可定解（有唯一解）？

注意：在此基础上，多出的独立边值条件会造成无解！

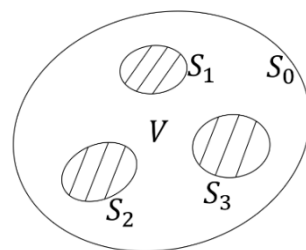
➤ 静电场唯一性定理：（唯一电场解）

考虑由 $S = \sum_i S_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$)

围成的解域 V ：

附注： S_0 可以是 S_∞ 或设想为导体空腔内表面，

$S_{i=1,2,\dots}$ 可以设想为导体电极表面。



给定如下边界条件之一，（若解存在的话）便有唯一解

（1）第一类边界条件：给定 $U|_{S_i}$ 分布 (12)

（2）第二类边界条件：给定 $\partial_n U|_{S_i}$ 分布¹ (13)

（3）混合边界条件：某些 S_i 给定 U ，其他给定 $\partial_n U$

$$\Rightarrow \text{一维特例：} U''(x)|_V = 0 \Rightarrow \text{通解} \begin{cases} U = Ax + B \\ E = -\frac{dU}{dx} = -A \end{cases}$$

$$V = (x_1, x_2)$$

（1）给定 $U(x_1) = U_1, U(x_2) = U_2$ ，则有定解

$$A = \frac{(U_1 - U_2)}{(x_1 - x_2)} = -E$$

（2）给定 $-\partial_n U|_{x_1} = \partial_n U|_{x_2} = k$ ，则有定解

$$A = k = -E$$

➤ 唯一性定理的证明：采用反证法

对应同一电荷分布 $\rho|_V$ 及边界条件(12)或(13)，设存在两个解 U_1, U_2

$$\nabla^2 U_1|_V = \nabla^2 U_2|_V = -\rho/\epsilon_0 \dots$$

则差值分布 $U_0 = U_1 - U_2$ 满足

$$\nabla^2 U_0|_V \equiv 0 \quad (14)$$

（1）第一类边界条件： $U_0|_S \equiv 0$ (15)

（2）第二类边界条件： $\partial_n U_0|_S \equiv 0$ (16)

应用 Gauss 公式（或第三 Green 公式）

$$\oint_S U_0 \vec{\nabla} U_0 \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (U_0 \vec{\nabla} U_0) dV = \iiint_V (\vec{\nabla} U_0 \cdot \vec{\nabla} U_0 + \nabla^2 U_0) dV$$

$$\xrightarrow{(14) \text{式}} = \iiint_V (\vec{\nabla} U_0)^2 dV \quad (17)$$

故无论是(15)式还是(16)式，均导致

¹ 要求满足约束条件： $-\oint_{S=\sum_i S_i} \epsilon_0 \partial_n U dS = \iiint_V \rho dV$
 ρ ：解域 V 内给定的电荷分布

$$\iiint_V (\vec{\nabla} U_0)^2 dV = \iiint_V E_0^2 dV = 0$$

$$\therefore \vec{E}_0 = 0 \Rightarrow \vec{E}_1 = \vec{E}_2$$

即电场解是唯一的.

附注：第一类边界条件还会导致电势解唯一！

显然，(14), (15) $\Rightarrow U_0|_V \equiv 0$

$$\therefore U_1 \equiv U_2$$

➤ 导体系特例：

$$\begin{cases} S_i (i = 1, 2, \dots) \text{ 为导体外表面} \\ S_0 = S_\infty \text{ 或导体空腔内表面} \end{cases}$$

(1) 第一类边界条件： $U|_{S_i} = U_i$ 常量（通常由接地条件或外电源给定）

(2) 第二类边界条件：给定各导体总电量： $Q_i = \oint_{S_i} \epsilon_0 \partial_n U dS$ ($i = 1, 2, \dots$)

从(17)式来看，差值分布仍满足

$$\oint_S U_0 \vec{\nabla} U_0 \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_{S_i} U_0|_{S_i} \vec{\nabla} U_0 \cdot d\vec{S} = \sum_i U_0|_{S_i} \cdot \oint_{S_i} \partial_n U_0 dS = 0$$

\Rightarrow 电场解唯一！

附注：从实际出发，给定各导体总电量是方便做到的，此时

$$\partial_n U|_{S_i} = \frac{\sigma|_{S_i}}{\epsilon_0} \text{ 可由求解来确定}$$

故求解导体系静电场问题，通常遇不到第二类边值问题.

☞ 孤立导体电容：选 ∞ 远处为 U 零点

对应于总电量 Q ，设有 σ, U, \vec{E} 分布（唯一）

猜想：对应于总电量 nQ ，设有 $n\sigma, nU, n\vec{E}$ 分布

\Rightarrow 保证静电平衡（ S 为等势面）的唯一分布

$$\therefore C = \frac{Q}{U} \text{ 与 } Q \text{ 无关}$$

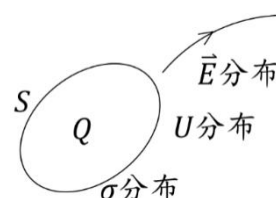
类似地，对于导体空腔电容器

$$C = \frac{Q}{\Delta U} \text{ 与 } Q \text{ 无关}$$

d) 电像法（不要求，参见书上 70-71 页内容）

1.8 节推荐参考文献：

D.J.格里菲斯，《电动力学导论》，§1.3 & §3.1



1.9 恒定电流场（作业：66、67）

a) 引言

- 导体静电平衡时，表现为完全的“抗电性”，即内部电场为零。有电流存在时，导体脱离静电平衡，内部场强不再为零。
- 电流分布不随时间变化时，称为恒定电流，其对应的导体回路电流即直流电。
- 带电粒子：在电场力的驱动下定向运动形成电流，不同于静电平衡情形。
- 电荷分布：直流电路中电荷之间处于恒定替换位形，故电荷分布恒定

$$\rho = \rho(\vec{r}) \text{ 或 } \partial_t \rho = 0$$

- 场：恒定电荷、电流分布激发恒定电磁场
- 恒定电场方程：场作为分布函数，本无所谓“动”与“静”，更为本质的区分是“恒定”与“变化”。故可预期恒定电场方程等同于静电场方程，即

$$\begin{cases} \text{环路定理: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \text{ 或 } \vec{E} = -\vec{\nabla} U \\ \text{Gauss 定理: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{cases}$$

因此可以合法地引入电压来处理直流电路问题

- 为了区分后面章节将会提及的极化电流、磁化电流等，这里将导体中自由电荷定向移动形成的电流称为传导电流。

b) 电流密度矢量

- 电流强度：单位时间内流过某一截面的电量（即“电荷流量”）

$$I = dq/dt$$

国际单位制中电流单位为基本单位“安培（1A=1C/s）”

电流强度对电流分布的刻画显然太过“粗糙”，不适合描述大块导体中局部电荷流动的方向和快慢。

- 电流密度矢量：可以为每个空间局部部位引入电流密度矢量，以 \vec{j} 表示，其方向为该部位电流流动的方向，大小为单位时间内流过单位横截截面的电量

$$j = \frac{dq}{dt dS_{\text{横}}} = \frac{dI}{dS_{\text{横}}}$$

则对任意面元矢量（如右图 b）

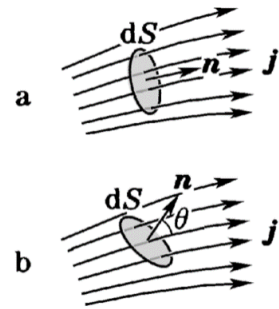
$$dI = \vec{j} \cdot d\vec{S} = j \cdot dS \cos \theta$$

对任意有限截面 S ，电流强度可以表示为面积分

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_S j \cdot dS \cos \theta$$

（类比于电流密度矢量，流体力学中的 $\vec{j}_m = \rho_m \vec{v}$ 可以被称作质量流面密度矢量。当然，电流强度自然可以类比于质量流量）

- 由 $\vec{j}(\vec{r}, t)$ 描述的电流分布被称为电流场，可以引入几何图示：电流线、电流管等。



c) 电荷守恒与连续性方程 恒定电流条件

- (类比于流体力学中的质量守恒对应致的连续性方程) 对于空间固定区域 V , 电荷守恒对应:

单位时间流出电量 = 单位时间区域内减少电量

由此导致电流连续性方程为:

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0$$

其中 S 为区域 V 的边界闭合曲面, 面元方向取为外法向。

- 微分形式

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

- 恒定电流对应稳恒的电流分布, 即稳恒的电流场 $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$,
- 空间各处电荷稳定流动, 相互“替换”, 故分布不变, 即

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\text{任意 } S} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

称为电流的恒定条件, 即恒定电流场“无源”。

- 对于恒定电流: 电流线闭合, 且流过任意电流管中任意截面的电流强度均匀、恒定, 相应的导线电流被称为直流电。

d) 欧姆定律 电阻与电阻率

- 欧姆定律 (积分式):

欧姆 (Ohm, 1826) 实验上发现: 稳恒条件下, 一段导体内通过的电流强度与其两端的电压成正比, 即

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{或} \quad U = IR$$

称为欧姆定律, 其中 $R = U/I$ 被称为电阻, 单位为欧 ($1\Omega = 1V/A$)。如上电阻的定义可以推广到电压与电流不满足线性关系的情形, 相应电路元件被称为非线性器件 (如晶体二极管等), 其电阻与电流强度有关。

- 欧姆定律的微分形式:

- 电流产生的微观机制来自于导体内电场分布对电荷的定向加速上, 因此欧姆定律在微观上来自于 $\vec{E} \sim \vec{j}$ 之间的关系
- 类比流体力学中的质量流面密度矢量 $\vec{j}_m = \rho_m \vec{v}$,

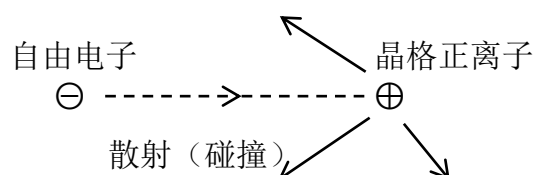
$$\vec{j} = \rho_q \vec{u}$$

其中 ρ_q 为电荷密度, \vec{u} 为自由电荷平均定向漂移速度。

- ☞ 对于金属导体, 载流子为自由电子, 故 $\rho_q = -ne$, 其中 $n \sim 10^{22-23}/\text{cm}^3$ 为自由电子的数密度, 若 $j \sim 1A/\text{mm}^2$, 则

$$|\vec{u}| \leq 1\text{mm/s} \ll \bar{v} \sim 10^6 \text{ m/s}$$

其中, \bar{v} 为自由电子平均热运动的速率。如上不等式保证统计碰撞模型适用 (Drude'1900,



参见书上 306-309 页内容),即在如图大量自由电子与晶格正离子散射的过程中:

- 1) 存在平均碰撞时间间隔 $\bar{\tau}$;
- 2) 空间各方向等几率散射, 即每次碰撞后定向移动的信息全部消失。

如此有

$$\bar{u} = \frac{\bar{a}\bar{\tau}}{2} = -\frac{\bar{\tau}e\vec{E}}{2m_e} \Rightarrow \vec{j} = \sigma\vec{E}$$

被称为欧姆定律的微分形式, 其中依赖于微观参量的比例常量 σ 反应了导体导电的能力, 被称为电导率, 对于金属

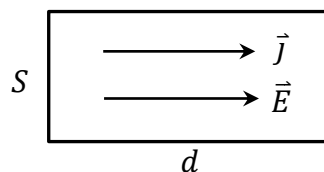
$$\sigma = \frac{n\bar{\tau}e^2}{2m_e}$$

☞ 欧姆定律积分式的推导

如图, 对于恒流场中规范几何形状的导体,

$$I = j \cdot S, U = E \cdot d$$

考虑到欧姆定律微分式 $E = j/\sigma$,



$$U = \frac{j}{\sigma} \cdot d = I \cdot \frac{1}{\sigma} \frac{d}{S} = I \cdot R$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{d}{S} = \rho \frac{d}{S} \Rightarrow \text{电阻}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \Rightarrow \text{电阻率, 单位为 } \Omega \cdot \text{m}$$

- 欧姆定律的微分形式反映了场分布的细致特征, 因此比积分形式更为本质。
- 对于每一场点, 欧姆定律的微分形式告诉我们导体中的自由电荷如何对“当下”的电场做出反应, 因此与电场强度的定义式一样, 欧姆定律也适用于非恒定的线性电阻介质电流场, 而积分形式只是其在恒定电流条件下, 回路中一段导体的特殊表现。

e) 电功率 焦耳定律

- 电功率: 导体中电荷定向移动时, 电场力会对其做功。设电路元件(如电阻)两端电压为 U , 通过电流为 I , 则 dt 时间段内通过元件的电量为 $dq = Idt$, 电场力做功为

$$dA = Udq = UI dt$$

功率 $P_e = UI$ 被称为电功率, 其定义不依赖于元件会把电能转化为何种形式的能量(如热能-电阻、化学能-电解槽、机械能-电动机等), 甚至在元件的几何尺度可忽略的情况下, 也不依赖于电流是否恒定。

- 焦耳定律(积分形式): 焦耳(Joule, 1840)通过实验发现: 恒定电流情况下, 电阻元件上电场力做功全部转化为热能(即焦耳热)释放。定量上, 令 dt 时间段内元件释放的焦耳热为 dQ , 则

$$dQ = dA = UI dt = I^2 R dt$$

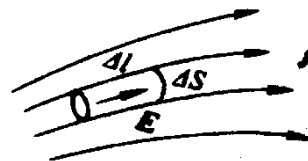
上式被称为焦耳定律(积分形式), 相应热功率为

$$P_h = P_e = I^2 R$$

- 焦耳定律微分形式: 对如图小电流管定义热功率密度 $p_h = P_h/\Delta V$, 并应用焦耳定律 (积分形式),

$$p_h = \frac{I^2 R}{\Delta V} = \frac{UI}{\Delta V} = \frac{E \Delta l \cdot j \Delta S}{\Delta V}$$

$$\therefore p = \sigma E^2$$



被称为**焦耳定律的微分形式**。欧姆定律的微分形式一样, 焦耳定律微分形式也可适用于电流非恒定的情形。微观上, 反映了金属导体中电场定向加速带来的自由电子动能增量不断通过碰撞转化为晶格粒子热运动的动能, 即热能。

- 对于非纯电阻电路

$$P_e = P_h + P_{\text{光}} + P_{\text{机械}} + P_{\text{化学}} + \dots$$

其中, $P_h = I^2 R$ 仍成立, 此时 R 定义为该元件的电阻。

- ☞ 思考: 此时欧姆定律 $U = I \cdot R$ 成立否?

f) 电源的电动势 全电路欧姆定律

- 电源: 将其他形式的能量转化为电能的装置。
- 恒定电流场电流线闭合, 对应闭合回路。相应的稳恒电场 (等效为静电场) 可以将正电荷搬运过负载, 但无法逆着电场线方向, 再把正电荷搬运回来。从能量的角度来讲, 静电场是保守力场, 对于闭合回路无法提供能量, 以消耗在负载上, 因此无法单独维持恒定电流。
- 由此可见, 维持恒定电流, 需要电路中 (一段或全部) 存在可逆着电场线方向搬运正电荷的力, 其克服电场力的做功可以抵偿负载上的能量消耗。这种除静电场力之外, 作用于电荷上的力被称为**非静电力**, 提供非静电力的装置被称为**电源**。
- 模仿静电场强, **非静电力强度矢量** \vec{K} 被定义为单位正电荷上的非静电力。
- 导体以速度 \vec{v} 切割磁力线时, 非静电力为洛伦兹力分量, $\vec{K} = \vec{F}_L/q = \vec{v} \times \vec{B}$ 。
 - 变化磁场产生涡旋电场, $\vec{K} = \vec{E}_{\text{旋}}$ 。
 - 其他非静电力如干电池、蓄电池中的化学力、温差电效应 (书上 302-306 页) 中的“扩散力”等。
- ✓ 很自然, 此时欧姆定律的微分形式为

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{K})$$

在电源外部 ($\vec{K} = 0$), 上式回到普通的欧姆定律。但上式同时适用于电源内部, 因此被称为“**全电路欧姆定律**”。

- 从能量角度来看, (直流) 电源就是利用非静电力把其他形式的能量转化为**电势能的装置**。其转化能力可由电源内部, 非静电力将单位正电荷由电源负极搬运到电源正极所做的功

$$\varepsilon = \int_{-}^{+} \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

来定量表示，称为该电源的电动势。

- 若非静电力存在于整个闭合回路上，则电动势对应闭合回路积分

$$\varepsilon = \oint_L \vec{K} \cdot d\vec{l}$$

- 电源电动势单位为“伏特”，表征电源本身的性质，与外电路的性质及是否接通无关。
- 尽管在定义方式上类似于“电势”，但电动势（electromotive force）非“势”：显然，非静电力不是保守力，不能引入相应的势能。

g) 导体分界面的边界条件（恒定电流）

➤ 导体分界面：以不同电导率 σ_1 、 σ_2 标记

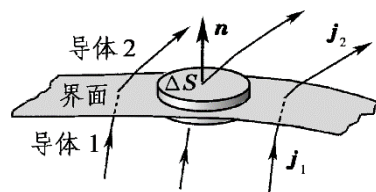
- 一般分界面上会有面电荷的累积，造成场量（分量）的跃变
- 此时微分方程在分界面上不再适用，但仍可以利用积分方程分析场量的跃变情况

1) 电流场法向连续（取 $\vec{n} = \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$ ）

对如图“高斯扁盒”应用恒定电流条件

$$\oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \xrightarrow{\text{忽略侧面贡献}} (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) \cdot \vec{n} \Delta S = 0$$

$$\therefore (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{or} \quad j_{1n} = j_{2n}$$

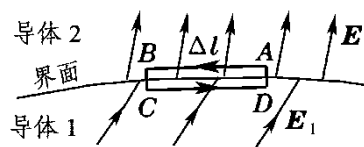


2) 电场切向连续（电势连续）

对如图“矩形扁环”应用环路定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{\text{忽略侧线贡献}} (E_{1t} - E_{2t}) \Delta l = 0$$

$$\therefore E_{1t} = E_{2t} \quad \text{or} \quad (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} = 0$$



3) 分界面上的面电荷分布与场量分量的关系

对“高斯扁盒”应用恒定电场高斯定理

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} \Delta S = \sigma_e \Delta S$$

$$\therefore \sigma_e = \varepsilon_0 (E_{2n} - E_{1n}) = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} \right) j_n$$

4) 电流线的“折射定律”

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

$$j_{1n} = j_{2n} \Rightarrow \sigma_1 E_1 \cos \theta_1 = \sigma_2 E_2 \cos \theta_2$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

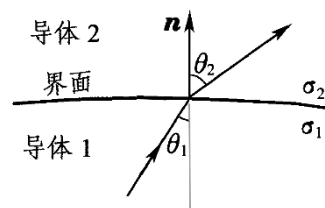
故有“折射定律”：

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

☞ 特例： $\sigma_1 \ll \sigma_2$ ，即 1 为不良导体，2 为良导体

$$\tan \theta_1 \ll \tan \theta_2$$

一种典型的分布如右图



$$\theta_1 \approx 0 \quad \theta_2 \approx \pi/2$$

若 1 为绝缘体 ($\sigma_1 = 0$), 则

$$j_{1n} = j_{2n} = 0 \quad \theta_2 = \pi/2$$

即 2 内电流线平行于分界面, 同时

$$\theta_1 \approx 0$$

即 1 内电场线几乎垂直于分界面。

➤ 稳恒电流回路建立过程中, 电场分布变化及其作用 (如右图, 虚方向线为电场线, 实线表示等势面)

• 电路未接通时, 非静电力作用下, 电源两极有电荷累积, 外电场分布如图 (a)

• 将 U 形导体 (瞬时) 移近并接通电路后瞬间, 电场仍如图 (a), 其横向分量推动电荷向导体侧面累积, 而该面电荷分布的附加电场将会抵消导体内部的横向电场分量, 稳恒时, 如图 (b), 导体内部仅剩余纵向电场分量, 推动电荷流动: $\vec{j} = \sigma \vec{E}_{\text{内}}$

• 恒定电流导体内部电荷分布: (忽略导体内部磁场分布及其效应)

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \oint_S \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

均匀导体 ($\sigma = \text{常量}$) 无电荷分布

导体内电荷仅分布于不均匀处 (体电荷), 或导体介质分界面 (面电荷), 此电荷分布激发的电场带来电荷通过大电阻率导体时的附加电压。

