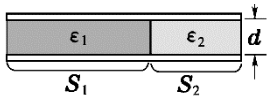
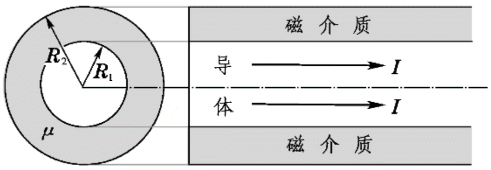
2019 年春季物理学院等电磁学期末试题解答

一、填空（1-4 小题，每空 2.5 分，共 25 分）



1. 如图所示，一平行板电容器两极板相距为 d，其间充满了两部分介质，介电常量为 $\varepsilon_1(=\varepsilon_{r1}\varepsilon_0)$ 的介质所占的面积为 S_1，介电常量为 ε_2 的介质所占的面积为 S_2，两介质分界面与极板垂直。忽略两侧的边缘效应（即 $S_1 \sim S_2 \gg d^2$），则此电容器的电容 $C =$___ $\frac{\varepsilon_1 S_1+\varepsilon_2 S_2}{d}$ ___；若两极板电势差为 U，则两介质分界面上的极化电荷面密度 $\sigma' =$___ 0 ___。



2. 如图所示，一无穷长均匀圆柱形直导线外紧密包裹有圆筒形抗磁介质，磁导率为 $\mu(=\mu_r\mu_0)$，导线半径（即介质内径）为 R_1，介质外径为 R_2，导线内有图示方向的均匀电流 I。介质内表面的磁化电流方向与导体内电流方向的关系为为___ 反平行 ___（选填“平行、反平行、垂直”）；介质内、外表面的磁化面电流线密度大小的比值为___ R_2/R_1 ___。
3. RC 串联暂态电路的弛豫时间（时间常量）为 $\tau =$ ___ RC ___，RL 串联暂态电路的弛豫时间（时间常量）为 $\tau =$ ___ L/R ___。
4. RLC 串联谐振电路（元件参量看作已知）的谐振频率为 $\omega_0 =$_ $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ _；品质因数为 $Q =$__ $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ __；当 $\omega > \omega_0$ 时，此电路呈现__ 感性 __（填“感性”、“容性”或“纯电阻性”）。若 $\frac{R}{L} \ll \omega_0$，则通频带宽度（近似）为 $\Delta\omega =$ ___ R/L ___。

二、简答（5-10 小题，共 40 分）

5. （5 分）真空电磁波：

1) 写出真空电磁波方程（组）；
2) 取单频简谐平面波解

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_E)\,, \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_B)$$

直接写出 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 与 $\vec{B}(\vec{r},t)$ 的大小、方向和相位之间的关系。

解答：

1) 真空电磁波方程（组）如下

$$\partial_t^2\vec{E} - c^2\nabla^2\vec{E} = 0\,, \qquad \partial_t^2\vec{B} - c^2\nabla^2\vec{B} = 0\,, \qquad c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

2'

2) 关系如下：
   a) $E(\vec{r},t) = cB(\vec{r},t)$
   b) $\vec{E}(\vec{r},t)$ 与 $\vec{B}(\vec{r},t)$ 垂直（$\vec{E}$、$\vec{B}$、$\vec{k}$ 两两垂直）
   c) (若取 $\vec{k} \to \vec{E} \to \vec{B}$ 构成右手系循环) $\varphi_B = \varphi_E$

3'

6. （6 分）若有磁单极子（分布）存在，且此时真空介质中的麦克斯韦方程组的形式为

$$\begin{cases}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\rho_e/\varepsilon_0 & ①, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\vec{j}_m-\partial_t\vec{B} \quad ② \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=\rho_m & ③, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}_e+\varepsilon_0\mu_0\partial_t\vec{E} \quad ④\end{cases}$$

其中 ρ_e、$\vec{j}_e$ 分别为电荷密度与电流密度，ρ_m 为磁荷密度，$\vec{j}_m=\rho_m\vec{v}$ 为磁荷流密度，$\vec{v}$ 是相应磁荷的速度。

1) 试证：磁荷守恒，即

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m+\partial_t\rho_m=0$$

2) 在电磁对偶变换

$$\vec{E}\to c\vec{B}\ \&\ \vec{B}\to-\vec{E}/c\ \&\ \rho_e\to c\varepsilon_0\rho_m\ \&\ \rho_m\to-\rho_e/(c\varepsilon_0)$$

下，题干中的方程组形式不变。试在如上电磁对偶变换的意义下，由点电荷在电磁场中的受力公式给出点磁荷 q_m 在电磁场（$\vec{E}$ 与 $\vec{B}$）中的受力公式。

解答：

1) 由方程②、③得

$$0=-\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m+\partial_t(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})=\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_m+\partial_t\rho_m$$ 3′

2) 由点电荷受力公式

$$\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$ 1′

及电磁对偶变换

$$\vec{E}\to c\vec{B}\ \&\ \vec{B}\to-\vec{E}/c\ \&\ q\to c\varepsilon_0 q_m$$

可以给出点磁荷受力公式

$$\vec{F}=\frac{q_m}{\mu_0}\left(\vec{B}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)$$ 2′

7. （6 分）无穷大均匀外场 $\vec{E}_0$ 中放入相对介电常量为 ε_r 的均匀线性介质球，可证此时介质球为均匀极化，即内部为均匀极化场 $\vec{P}$ 。在如上前提下，试求此时的极化场 $\vec{P}$ （以 $\vec{E}_0$、ε_r、ε_0 参量加以表示）。

解答：由叠加原理，介质球内电场

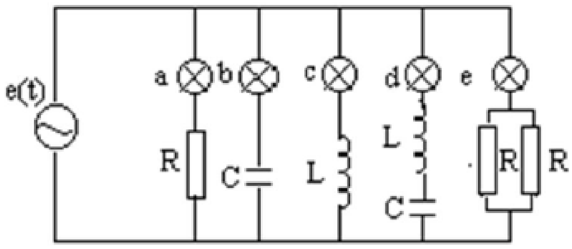
$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=\vec{E}_0-\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$ 2'

由极化规律

$$\vec{P}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0\vec{E}_0-\frac{\varepsilon_r-1}{3}\vec{P}$$ 2'

$$\therefore\ \vec{P}=\frac{3(\varepsilon_r-1)}{\varepsilon_r+2}\varepsilon_0\vec{E}_0$$ 2'

8. (7 分) 在右图所示电路中，电源电动势 $e(t)$ 随时间简谐变化。a、b、c、d、e 是 5 个电阻同为 r 的灯泡（看作是纯电阻），忽略 c、d 支路的互感效应，电路中其他（单个）元件的阻抗满足：$Z_L=Z_C=R$ 。



1) 直接写出以 r 及 R 表示的 a、b、c、d、e 支路复阻抗；
2) 直接写出 5 个灯泡中哪个最亮，哪个最暗。

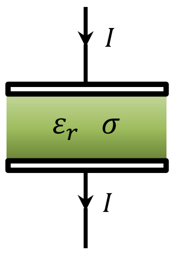
解答：

1) 各支路复阻抗如下表 5'

	a	b	c	d	e
$\tilde{Z}_i$	$r+R$	$r-iR$	$r+iR$	r	$r+R/2$

2) d 最亮；a 最暗 2'

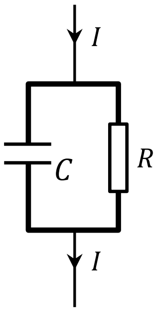
9. （8 分）如图所示，平行板电容器间充满相对介电常量为 ε_r 、电导率为 σ 的均匀漏电介质，极板面积为 S ，间距为 $d\ (\ll\sqrt{S})$。忽略所有边缘效应，（提示：如明确等效电路的结论，则可采用等效电路方法求解下列问题）



1) 若用恒定导线电流 I （已知常量）为电容器极板充电，试求稳定时上极板的电量 q_0 ；
2) 若将恒定导线电流替换成低频交变电流 $i(t)=I_0\cos\omega t$（满足准恒条件），求稳态时极板间**位移**电流的峰值 I_{D0} .

解答：

1) 如图等效电路



$$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d}\ ,\qquad R=\frac{d}{\sigma S}$$ 2'

稳定时，恒定电流 I 全部流过电阻，相应两端电压为

$$U=IR$$

$$\therefore\ q_0=CU=CRI=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\sigma}I$$ 2'

2) 等效电路仍如上图，总电流相应替换为 $i(t)=I_0\cos\omega t$ 。
准恒条件下，忽略边缘效应，则电容器内部位移电流与电容器支路上的导线电流相等，即

$$i_D=i_C$$

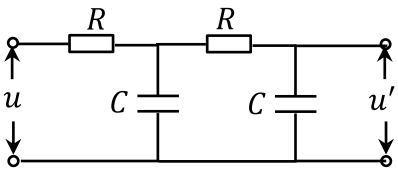
由复数解法（或矢量图法），CR 并联总阻抗为

$$Z=\frac{1}{\sqrt{Z_R^{-2}+Z_C^{-2}}}=\frac{1}{\sqrt{1/R^2+\omega^2C^2}}=\frac{R}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}$$ 2'

则位移电流的峰值

$$I_{D0}=I_{C0}=\frac{ZI_0}{Z_C}=\frac{\omega CR}{\sqrt{1+\omega^2C^2R^2}}I_0=\frac{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}{\sqrt{\sigma^2+\omega^2\varepsilon_r^2\varepsilon_0^2}}I_0$$ 2'

10. （8 分）右图为二级 RC 移相简谐交流电路，在工作频率下元件参量满足 $Z_C=2R$，求输入端电压 $u(t)$ 和输出端电压 $u'(t)$ 的峰值比和相位差（可用反正切函数表示）。



解答：C 的复阻抗为

$$\tilde{Z}_C=-iZ_C=-2iR$$ 1'

RC 串联再与 C 并联的复阻抗为

$$\tilde{Z}_1=\frac{(1-2i)(-2i)}{1-4i}R=\frac{-4-2i}{1-4i}R$$ 2'

$$\therefore\ \tilde{U}'=\frac{-2iR}{R-2iR}\frac{\tilde{Z}_1}{R+\tilde{Z}_1}\tilde{U}=\frac{-2i}{1-2i}\frac{-4-2i}{-3-6i}\tilde{U}=\frac{4}{3+6i}\tilde{U}$$ 化简 2'

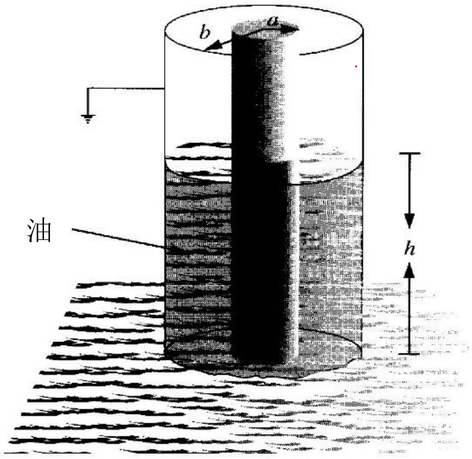
1'

因此，

$$\frac{U_0'}{U_0}=\left|\frac{4}{3+6i}\right|=\frac{4}{3\sqrt{5}}\ \left(\frac{U_0}{U_0'}=\frac{3\sqrt{5}}{4}\right),$$

$$\varphi=\varphi_u-\varphi_{u'}=\mathrm{Arg}\left(\frac{3+6i}{4}\right)=\tan^{-1}2$$ 2'

三、 （**13 分**）两个很长的同轴金属圆柱管（内径为 a，外径为 b）竖直放置在一个充满绝缘油性电介质（相对介电常量为 ε_r，质量密度为 ρ）的桶中，如图所示。已知内部的金属管电势恒为 $U>0$，外管接地（电势为 0），则在两管之间油液面会上升一定高度。



1) 忽略边缘效应，试求两管之间空气中的场强大小分布函数 $E_A(r)$ 及油介质中的场强大小分布函数 $E_O(r)$；（$b>r>a$）
2) 试求两管之间油介质相对于外部液面所上升的高度 h。

解答：

1) 设两管之间空气区内管的电荷线密度为 λ_A，则

$$E_A(r)=\frac{\lambda_A}{2\pi\varepsilon_0 r}\quad\Rightarrow\quad U=\frac{\lambda_A}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\therefore\ \lambda_A=\frac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln b/a},\qquad E_A(r)=\frac{U}{r\cdot\ln b/a}$$ 2'

设两管之间油介质区内管的自由电荷线密度为 λ_O，则

$$D_O(r)=\frac{\lambda_O}{2\pi r}\quad\Rightarrow\quad E_O(r)=\frac{\lambda_O}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}\quad\Rightarrow\quad U=\frac{\lambda_O}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

$$\therefore\ \lambda_O=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 U}{\ln b/a}=\varepsilon_r\lambda_A,\qquad E_O(r)=\frac{U}{r\cdot\ln b/a}$$ 2'

2) 设外部液面上方的管长为 l，则空气区电容

$$C_A=\frac{(l-h)\lambda_A}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0(l-h)}{\ln b/a}$$

油介质区电容（外部液面上方）

$$C_O=\frac{h\lambda_O}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 h}{\ln b/a}$$

总电容（外部液面上方）

$$C=C_A+C_O=\frac{2\pi\varepsilon_0[l+(\varepsilon_r-1)h]}{\ln b/a}$$ 2'

采用虚功原理，设液面上升高度（虚位移）为 δh，则维持内外管的电势不变，油介质受到的静电力（以向上为正）所做的虚功为

$$F_e\delta h=-\delta W_e+\delta W_S$$ 1'

其中静电能（虚）增量

$$\delta W_e=\frac{1}{2}U^2\delta C$$ 1'

电源做功

$$\delta W_S=U\delta Q=U^2\delta C$$ 2'

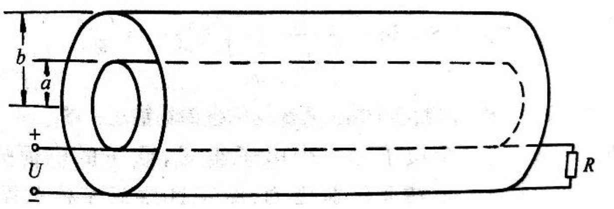
故有

$$F_e \delta h = \frac{1}{2} U^2 \delta C \quad \Rightarrow \quad F_e = \frac{1}{2} U^2 \frac{\delta C}{\delta h} = \frac{\pi(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}{\ln b/a} U^2$$ 2'

$F_e > 0$ 说明其方向向上。由受力平衡

$$F_e = \rho\pi(b^2 - a^2)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{F_e}{\rho\pi(b^2 - a^2)gh} = \frac{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 U^2}{\rho(b^2 - a^2)g \cdot \ln b/a}$$ 1'

四、（**10 分**）如图所示，将两个很长的同轴中空金属圆柱管（内径为 a，外径为 b，电阻可略）作为电缆，一端接上负载（电阻）R，另一端加上恒定电压 U，则圆柱管上分布有均匀恒定电流。（完全忽略边缘效应）



1) <u>**直接写出**</u>电缆某一横截面上的电场和磁场大小的分布函数 $E(r)$ 和 $B(r)$；（$r \in [0,\infty)$）
2) <u>**直接写出**</u>电缆某一横截面上的电磁场能流大小分布函数 $S(r)$，并指出其方向；
3) 计算能流密度矢量在如上横截面上的通量。

解答：

1) 电磁场分布

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{U}{r \cdot \ln b/a} & a < r < b \\ 0 & r > b \text{ 或 } r < a \end{cases}$$

2'

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 U/R}{2\pi r} & a < r < b \\ 0 & r > b \text{ 或 } r < a \end{cases}$$

2'

2) 能流分布

$$S(r) = \begin{cases} \dfrac{U^2/R}{2\pi r^2 \cdot \ln b/a} & a < r < b \\ 0 & r > b \text{ 或 } r < a \end{cases}$$

2'

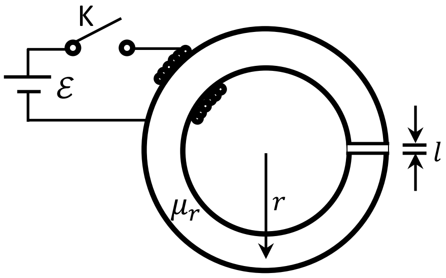
方向：示意图中右向（指向负载一侧） 1'

3) 取环带面元，通量积分为

$$P = \int_a^b S(r) \cdot 2\pi r dr = U^2/R$$

3'

五、（**12 分**）如图所示，轴线半径为 r 的软铁磁环，在垂直于轴线方向上开有厚度为 l 的均匀缝隙。铁磁环横截面为圆，半径为 a（未在图中示出），其中 $r \gg a \gg l$ 。软铁磁环可近似处理为线性磁介质，其相对磁导率 $\mu_r \gg 1$。铁磁环上绕有 N 匝线圈，其直流电阻为 R，并由理想导线及电键 K 与直流电源相联接，电源电动势为 $\mathcal{E}$ 。$t=0$ 时刻，接通电键 K，试求



1) $t>0$ 时刻，缝隙中的磁感应强度 $B(t)$；

2) $t\to\infty$ 时，缝隙表面的“等效磁荷”面密度大小 σ_m .

附注：等效磁荷单位制的选取约定请参照第 6 小题

解答：电键闭合后，等效为电流初值为 0 的 RL 串联暂态电路

1) $t>0$ 时刻

$$I(t)=\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right), \tau=\frac{L}{R}, \qquad ①$$ 2'

$\mu_r \gg 1$ 且 $r \gg a \gg l$ 条件下，应用磁路定理

$$\Phi_B=\frac{NI(t)}{\dfrac{2\pi r}{\mu_r\mu_0\cdot\pi a^2}+\dfrac{l}{\mu_0\cdot\pi a^2}}=\frac{\mu_r\mu_0\cdot NI(t)\cdot\pi a^2}{2\pi r+\mu_r l}$$ 2'

$$\therefore\ L=\frac{N\Phi_B}{I(t)}=\frac{\mu_r\mu_0\cdot N^2\cdot\pi a^2}{2\pi r+\mu_r l} \qquad ②$$ 2'

$$B(t)=\frac{\Phi_B}{\pi a^2}=\frac{\mu_r\mu_0\cdot NI(t)}{2\pi r+\mu_r l}=\frac{\mu_r\mu_0 N}{2\pi r+\mu_r l}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-Lt/R}\right)$$

$$=\frac{\mu_r\mu_0 N}{2\pi r+\mu_r l}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}\left[1-\exp\left(-\frac{(2\pi r+\mu_r l)R}{\mu_r\mu_0\cdot N^2\cdot\pi a^2}\cdot t\right)\right]$$ 2'

2) $t\to\infty$ 时，

$$B_f=B(t\to\infty)=\frac{\mu_r\mu_0 N}{2\pi r+\mu_r l}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$H_{隙}=\frac{B_f}{\mu_0}\ ,\quad H_{内}=\frac{B_f}{\mu_r\mu_0}$$ 2'

缝隙表面的“等效磁荷”面密度大小为

$$\sigma_m=\mu_0\left(H_{隙}-H_{内}\right)=\frac{\mu_0(\mu_r-1)N}{2\pi r+\mu_r l}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}\approx\frac{\mu_r\mu_0 N}{2\pi r+\mu_r l}\cdot\frac{\mathcal{E}}{R}$$ 2'