

第二章 恒定磁场

- ✎ 作业：1、5、6、14、15、17、19、20、24、28、34、39、41、45、48、50
2-45 补充：可取两位有效数字，略去相对论修正，且可略去间隙渡越时间。
2-48 补充：不考虑相对论效应。

2.1 “电生磁”：简要的历史回顾

➤ 初现：

- 早在 1730's, 有人就发现雷电击中的刀叉被磁化。
- 1751, 富兰克林发现莱顿瓶放电时可以磁化缝衣针

➤ 磁库仑定律：

- 基于“电”能被传导，（磁铁的）“磁”不能被传导的事实，库伦认为“磁流体”和“电流体”是完全不同的实体
- 库伦提出了“磁分子假说”，认为每个分子都具有 N、S 两个磁极，并测定了平方反比律——磁库仑定律（Coulomb, 1780's）：

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_{m1}q_{m2}}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

其中 $q_{m1,2}$ 为（一定单位制下的）磁荷。

- 直至 1820 年初，安培（Ampere, 1775-1836, 法国）、毕奥（Biot, 1774-1862, 法国）等一直深信库仑的观点：电和磁除了在作用力规律上类似外，并没有其他深刻的联系。
- ✓ 对“磁库仑定律”的评价：在适当定义“等效磁荷”后，磁库仑定律确实有效。这主要因为（后面将会给出证明和说明），从远处磁场激发的角度来看，小电流环完全等价于“磁分子”（磁偶极子）。类似于电场强度，可定义磁场强度：

$$\vec{H} = \frac{\vec{F}}{q_{m0}} \xrightarrow{\text{点源磁荷}} \frac{1}{4\pi\mu_0} \frac{q_m}{r^2} \hat{r}$$

➤ 奥斯特（Oersted, 1777-1851, 丹麦）的发现：

- 奥斯特相信康德（I. Kant, 1724-1804, 德国）关于“自然力”的想法，早在 1813 年便认为“电流会有磁效应”
- 得益于伽伐尼电（Galvani, 1791）及伏打电堆（Volta, 1800）的发现和发明，奥斯特可以获得持续的电流。
- 当奥斯特想到小磁针受力可能沿横向时，他便发现了“电生磁”，并在 1820 年 7 月下旬公布了结果。
- ✓ 法拉第的评价：“他突然打开了科学中一个一直是黑暗的领域的大门，使其充满光明”。

➤ 1820 年，法国……

- 9 月 11 日，阿喇果（Arago, 1786-1853）在法国科学院报告了奥斯的发现。
- 9 月 18 日，安培报告了线电流激发磁场的右手螺旋定则（即安培定则），并指出：螺线管激发磁场应与磁棒磁场等效。

- 9月25日，安培报告了两条平行直线电流相互作用的结果：同向相吸引，反向相排斥。
- 10月9日，安培报告对环形电流及螺线管磁场的细致研究的结果。
会后，安培提出了“分子电流”假说，建立起“磁和磁力的本质是电流效应”的正确观念。此后至1825年，安培致力于电流磁相互作用基本规律的研究，完成了几个著名的实验，给出了电流微元间相互作用的安培定律。
- 10月30日，毕奥和萨伐尔（Savart, 1791-1841，法国）报告了他们对长直导线电流激发磁场的测量结果
后来经过拉普拉斯（Laplace, 1749-1827，法国）在数学分析上的帮助，给出了电流微元激发磁场所满足的 Biot-Savart-Laplace 定律（通常被称为“毕奥-萨伐尔定律”）

2.2 毕奥-萨伐尔定律

a) 毕奥-萨伐尔定律（Biot-Savart, 1820）

- 磁感应强度 \vec{B} 的定义：既然没有磁单极子，测量磁场的最直接方式是通过运动电荷受力。利用洛伦兹力公式（Lorentz, 1892）

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

可定义磁感应强度 \vec{B} （历史的原因，没法再称它为“磁场强度”）。当然，按照历史的顺序，安培、毕奥和萨伐尔是通过电流微元或小磁针的受力来测量磁场的，但本质上对应的就是磁感应强度的测量。

- 单位（SI）：特斯拉（ $1\text{ T} = 1\text{ N}/(\text{A} \cdot \text{m})$ ）
- 高斯单位制：在静电单位制（cm. g. s. esu. 制）的基础上，定义磁感应强度：

$$\vec{F} = \frac{1}{c} q\vec{v} \times \vec{B} \quad (E \text{ 与 } B \text{ 同量纲，可直接比较数值！})$$

定义单位高斯（Gs）：1 esu 电荷，1cm/s 速度，受最大力 $\frac{1}{c_{\text{esu}}}$ dyne

换算：1 T = x Gs，则 (1C、1m/s、1T) 最大受力

$$1\text{ N} = \frac{10c_{\text{SI}}}{c_{\text{esu}}} 100 \cdot x \cdot 10^{-5}\text{ N} \Rightarrow x = 10^4$$

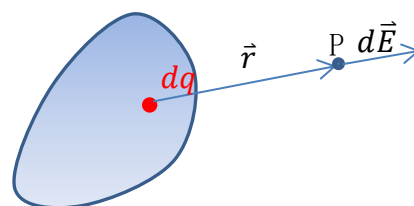
$$(c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = 3 \times 10^{10} \text{ cm/s})$$

- 恒定磁场的激发条件：类似于静电荷位形可以激发不随时间变化的静电场分布 $\vec{E}(\vec{r})$ ，恒定电流（即恒定电荷移动位形）可以激发不随时间变化的恒定磁场 $\vec{B}(\vec{r})$ 。
- 毕奥-萨伐尔定律：即恒定电流激发恒定磁场的定量规律
回顾如图静态带电体中电荷元 dq 激发静电场的库仑定律

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \cdot \vec{r}}{r^3}$$

结合静电场强叠加原理有积分形式

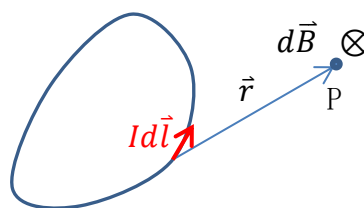
$$\vec{E} = \int d\vec{E}$$



类似地，如图恒定电流回路中电流元 $I d\vec{l}$ 激发磁场

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

此即毕奥-萨伐尔定律。 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 被称为真空磁导率。



- 磁场的横向性： $d\vec{B}$ 的方向如图，与电流元的方向垂直，满足右手螺旋定则。
- 电流元激发的磁场线是轴对称闭合环线，故“无源”。
- 结合叠加原理，对整个恒定电流闭合回路激发的总磁场，有

$$\vec{B} = \oint_L d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

- 适用条件：恒定电流
- 匀速运动运动点电荷 (q, \vec{v}) 激发磁场
等效电流元

$$I d\vec{l} \Rightarrow \vec{j} dV \Rightarrow \rho_e \vec{v} dV \Rightarrow q \vec{v}$$

$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3} ???$$

但恒定电流条件已经被破坏，故上式不准确。严格结果为

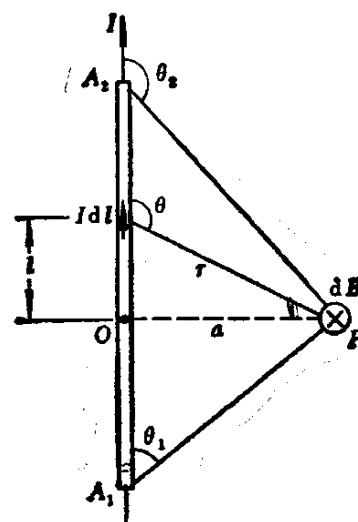
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times \vec{r}}{r^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

其中 θ 为 \vec{v} 与 \vec{r} 夹角， c 为真空光速。

b) 应用

- ☞ 书上 112 页——载流直导线磁场：一段载流直导线(I)，求如图场点 P (a, θ_1, θ_2) 处磁感应强度 \vec{B}
解：如图分割电流元，则对场点 P 激发的 $d\vec{B}$ 方向一致，即为 \vec{B} 的方向

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin \theta}{a} d\theta \\ &\quad \left(\begin{cases} l = -a \cot \theta \\ r = a / \sin \theta \end{cases} \right) \\ \therefore B &= \frac{\mu_0}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned}$$



特例：无穷长直导线

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi a} I$$

- 关于 Biot-Savart-Laplace 定律发现的历史附注：

- 直导线电流磁场方向(横向)和电流成正比、距离反比的测定:

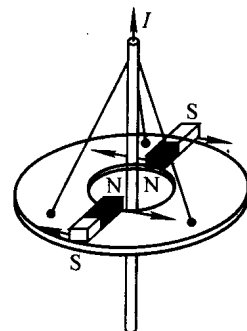
- ✓ 实验一: 直导线电流作用下, 小磁针振荡周期的测量

由平衡位置取向, 可确定磁场方向

由周期变化可测量磁场强度的变化(电流成正比、距离反比)

- ✓ 实验二: 实验装置如右图

(基于磁场方向的判定), 如上“示零实验”可以进一步验证“距离反比”。(若非距离反比, 则有力矩)



- 电流微元贡献的测量和分析:

实验三: 对如图对折直导线, 测定磁场强度($H \sim B$)对 r 、 α 的依赖关系

$$H_0 = k \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$$

(基于之前例题的计算: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(1-\cos\alpha)}{r \sin\alpha} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}$)

如果电流元的贡献满足叠加原理(方向相同/大小相加), 则此图中一半导线的贡献为

$$H = k' \frac{I}{r} \tan \frac{\alpha}{2}, \quad k' = \frac{k}{2}$$

而且, 如图电流微元 Idl 的贡献便是(其存在带来的) r 和 α 的变化对应的磁场强度增量:

$$dH = k' \frac{I}{r} \left(-\frac{\tan \alpha/2}{r} dr + \frac{1}{2 \cos^2 \alpha/2} d\alpha \right)$$

几何上的小量分析, 可以得到:

$$dr = -\cos \alpha dl, \quad d\alpha = \frac{\sin \alpha}{r} dl$$

带入得电流微元贡献

$$\begin{aligned} dH &= k' \frac{I}{r^2} \left(\tan \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{\sin \alpha}{2 \cos^2 \alpha/2} \right) dl \\ &= k' \frac{I dl}{r^2} \tan \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) = k' \frac{I dl}{r^2} \sin \alpha \end{aligned}$$

结合方向, 有 Biot-Savart-Laplace 定律:

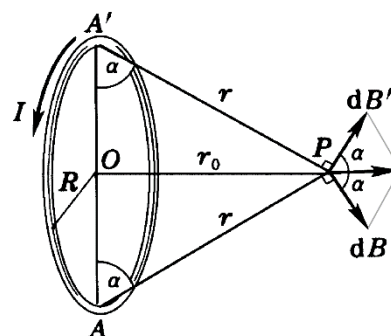
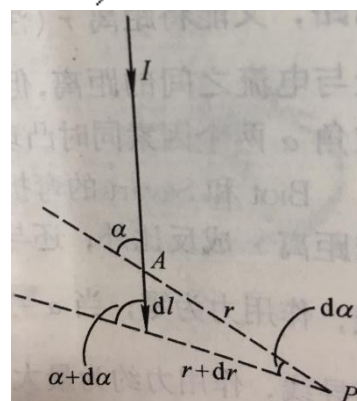
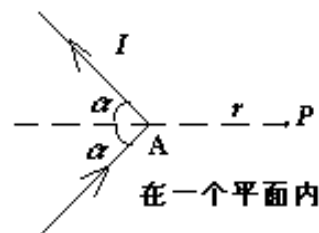
$$d\vec{H} = k' \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

- ☞ 书上 113——载流圆线圈轴线上磁场(I, R, r_0)

解: 由轴对称性可判断轴线上磁感应强度方向沿轴线方向, 且每处电流元贡献均等

$$\begin{aligned} B &= \oint dB \cos \alpha = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + r_0^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

特例: 环心处



$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

✓ 远处磁感应强度按 r_0^{-3} 规律衰减

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot \pi R^2}{2\pi r_0^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r_0^3}$$

其中

$$\vec{m} = I\vec{S} = I \cdot \pi R^2 \vec{n}$$

被称为小电流环的磁矩 (\vec{n} 的方向按电流方向的右手螺旋进行约定)。

- 比较右图中小电流环和“库伦磁分子(磁偶极子)”在远处激发的磁场分布, 可以发现它们是同构的, 因此可以构造“等效磁偶极子”来描述远场分布, 被称为“等效磁荷观点”:
- 具体来说, 取(磁库伦定律定义的)磁场强度及等效磁偶极矩为

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad \vec{p}_m (= q_m \vec{l}) = \mu_0 \vec{m}$$

则“等效磁偶极子”延长线上磁场

$$\vec{H} = \frac{\vec{p}_m}{2\pi\mu_0 r_0^3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r_0^3}$$

与小电流环等效。可以证明, 对于其他远处场点, 如上等效性仍成立。

其差别在于近处

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ (前者)} \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} \neq 0 \text{ (后者)}$$

☞ 书上 116 页——均匀密绕载流螺线管(长 L , 半径为 R , 单匝电流 I , 匝密度 $n = dN/dl$), 求轴线上场强分布。

解: 如右图 (b), 可看作均匀面电流, 电流(线)密度为

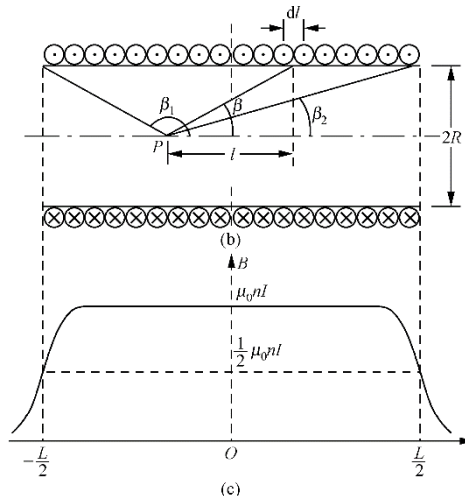
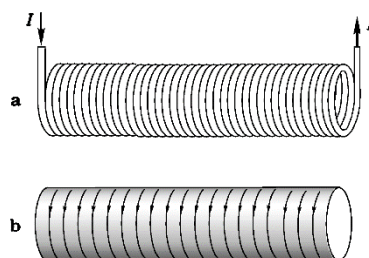
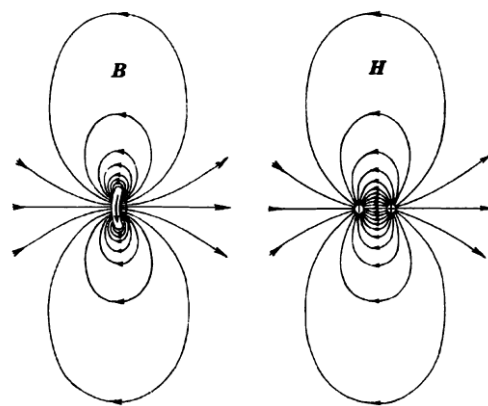
$$i = \frac{d(NI)}{dl} = nI$$

如图, 取圆环微元电流 $dI' = idl$, 贡献

$$\begin{aligned} dB &= \frac{\mu_0 i R^2 dl}{2(R^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 i R^2 d(R \cot \beta)}{2R^3 / \sin^3 \beta} \\ &= -\frac{\mu_0 i}{2} \sin \beta d\beta \end{aligned}$$

易知微元贡献 $d\vec{B}$ 沿轴向, 故总贡献 \vec{B} 沿轴向 (电流环右旋方向), 其大小为

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \int_{\beta_1}^{\beta_2} -\frac{\mu_0 i}{2} \sin \beta d\beta \\ &= \frac{\mu_0 i}{2} (\cos \beta_2 - \cos \beta_1) \end{aligned}$$



- 特例：\$L \gg R\$ 时 (无限长螺线管模型)

(左)端面上：\$\beta_1 = \frac{\pi}{2}, \beta_2 = 0, \quad B = \frac{\mu_0 i}{2} = \frac{\mu_0 n I}{2}\$

远离端面处：\$\beta_1 = \pi, \beta_2 = 0, \quad B = \mu_0 i = \mu_0 n I\$

☞ 书上 115 页例 4：亥姆霍兹线圈（请自修）

2.3 安培环路定理

a) 安培环路定理：形式及验证

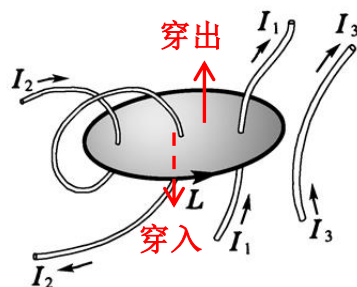
- 安培环路定理：如图，以环路 \$L\$ 绕向的右手螺旋方向约定“穿出”和“穿入”，则有

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} (\pm I_i)$$

如图 \$\Rightarrow \mu_0(I_1 - 2I_2)\$

其中“穿出”为正，“穿入”为负。

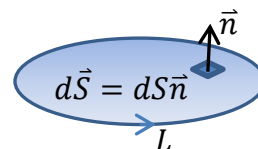
通常称此具有一定绕向的环路为安培环路。



- 微分形式：

如图，按回路绕向右手螺旋约定面元法向，则

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$



其中，\$S\$ 为 \$L\$ 所包围的任意曲面，故上式成立的条件为“恒定电流”！

或从微分形式来看，因有恒等式

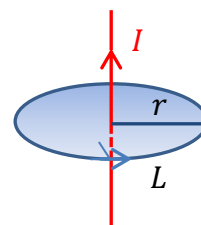
$$0 \equiv \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

- ✓ 故恒定电流条件 \$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0\$ 为安培环路定理微分式成立的必要条件！
- ✓ 而且必须在全（闭合）电流贡献的总磁场的意义上才成立。

- 特例验证：

☞ 无穷长直导线 (\$I\$)，取如图垂直平面环绕圆周为安培环路

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$



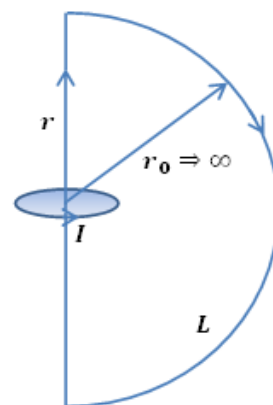
☞ 圆环电流 (\$I, R\$)，如图安培环路

轴线上：\$B(r) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + r^2)^{3/2}}\$

半圆弧 (\$r_0 \Rightarrow \infty\$)：\$B(r_0) \sim 1/r_0^3\$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \int_{\text{轴线}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I R^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dr}{(R^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\xrightarrow{r/R = \tan \theta} \mu_0 I \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \mu_0 I$$



b) 安培环路定理：证明

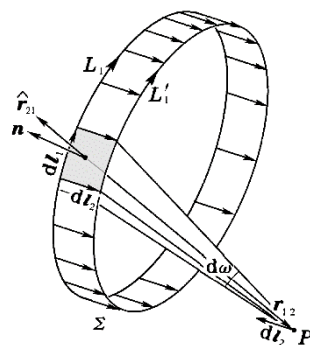
- 载流线圈与磁偶极层的等价性：

电流环 (\$I, L_1\$) 对场点 P (位矢为 \$\vec{r}_2\$)，

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12}}{r_{12}^2}$$

考查（场点位置微小改变 $d\vec{l}_2$ ）

$$\begin{aligned} -\vec{B}(\vec{r}_2) \cdot d\vec{l}_2 &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{-d\vec{l}_2 \cdot (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{(-d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_1) \cdot \hat{r}_{12}}{r_{12}^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{L_1} d\omega = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} d\Omega \end{aligned}$$



其中 $d\omega$ 为上图小角锥对应的立体角微元， $d\Omega$ 是小

环带整体对 P 点所张成的立体角微元（仍是微元！）。 L'_1 无非就是 L_1 整体平移 $-d\vec{l}_2$ ，而它和 P 点的相对位置等价于 P 点移动后和 L_1 的相对位置。

故 $d\Omega$ 既是 L'_1 、 L_1 分别与 P 张成角锥的立体角的微分差值，也对应于对给定闭合回路 L_1 ， P 点移动前后的立体角的微分增量，故

$$d\Omega = \vec{\nabla}\Omega \cdot d\vec{l}_2 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega$$

对比电偶极层的结果，我们得到：**载流线圈与磁偶极层的等价性**

$$\begin{aligned} \tau_m &= \mu_0 I, \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 \\ \therefore \vec{H} &= \frac{\tau_m}{4\pi\mu_0} \vec{\nabla}\Omega \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega \end{aligned}$$

注意：这种等价性仅对应（假想的）磁偶极层外部，在磁偶极层内部（厚度为 l ）， \vec{H} 与 \vec{B} 反向，且 \vec{B} 有限，但

$$H = \frac{\tau_m}{\mu_0 l} \xrightarrow{l \rightarrow 0} \infty$$

- 安培环路定理的证明：如右图，若闭合回路 $L = L_1 + L_2$ 环绕电流环，则补上磁偶极层所对应的曲面，其中 L_2 是该偶极层内部的曲线部分。对偶极层外部的曲线积分

$$\int_{L_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{L_1} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla}\Omega \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \Delta\Omega = \mu_0 I$$

跨越磁偶极层内部时， \vec{B} 连续且有限，故

$$\int_{L_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} \xrightarrow{l \rightarrow 0} 0, \quad \int_{L_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = -\frac{\tau_m}{\mu_0 l} l = -\frac{\tau_m}{\mu_0} = -I$$

故对于闭合回路 L

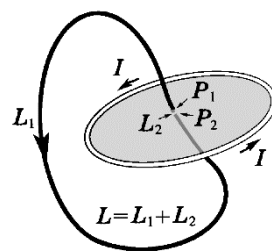
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I, \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

对于不环绕电流的闭合回路 L'

$$\oint_{L'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \oint_{L'} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$$

再由叠加原理便可证明“安培环路定理”。

c) 安培环路定理：应用



结合对称性可用来求解特殊恒定电流体系所对应的磁场分布。

镜像对称电流元在对称面上激发的和场强与对称面垂直

证明：如图，两电流元及对称面（ Π 面）上位矢满足

$$\begin{cases} d\vec{l}_{1\parallel} = d\vec{l}_{2\parallel} \\ d\vec{l}_{1\perp} = -d\vec{l}_{2\perp} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{r}_{1\parallel} = \vec{r}_{2\parallel} \\ \vec{r}_{1\perp} = -\vec{r}_{2\perp} \end{cases}$$

另有

$$\begin{cases} d\vec{B}_{i\parallel} \sim Id\vec{l}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\perp} + Id\vec{l}_{i\perp} \times \vec{r}_{i\parallel} \\ d\vec{B}_{i\perp} \sim Id\vec{l}_{i\parallel} \times \vec{r}_{i\parallel} \quad (Id\vec{l}_{i\perp} \times \vec{r}_{i\perp} = 0) \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} d\vec{B}_{1\parallel} = -d\vec{B}_{2\parallel} \\ d\vec{B}_{1\perp} = d\vec{B}_{2\perp} \end{cases} \Rightarrow d\vec{B} = 2d\vec{B}_{1\perp}$$

（极）矢量和轴矢量：

如图，镜像变换 $x \rightarrow -x$ $y, z, t \rightarrow y, z, t$

下，通常矢量（如 \vec{F} 、 \vec{r} 、 \vec{v} 等），其分量变换与坐标分量变换形式相同，即

$$\text{矢量 } \vec{A}: A_{\parallel} \rightarrow A_{\parallel} \quad A_{\perp} \rightarrow -A_{\perp}$$

但有些矢量（如角速度 $\vec{\omega}$ 、磁感应强度 \vec{B} 等），与坐标分量变换形式相反，称为轴矢量，即

$$\text{轴矢量 } \vec{B}: B_{\parallel} \rightarrow -B_{\parallel} \quad B_{\perp} \rightarrow B_{\perp}$$

☞ 无穷长直导线（ I ）

如图平面即为镜像对称 Π 面 $\Rightarrow \vec{B}$ 与该平面垂直

$$\text{轴对称} \Rightarrow \begin{cases} \text{一侧“穿入”，另一侧“穿出”} \\ \text{大小只依赖于距离：} B = B(r) \end{cases}$$

由安培环路定理：

$$\oint_{\odot r} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r \cdot B(r) = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

☞ 书上 123 页例 6：无穷长均匀导流圆柱体（自己看书）

☞ 书上 124 页·例 7：无限长直均匀密绕螺线管（匝电流 I ，匝密度 $n = dN/dl$ ）

如图 Π 面即为镜像对称面

\Rightarrow 内、外磁场均沿轴向

径向 ∞ 处： $B_{\infty} = 0$ （可按“磁荷观点”论证）

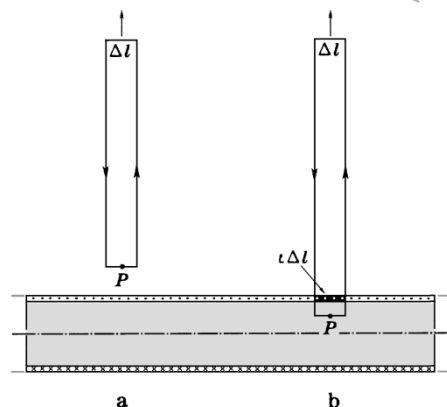
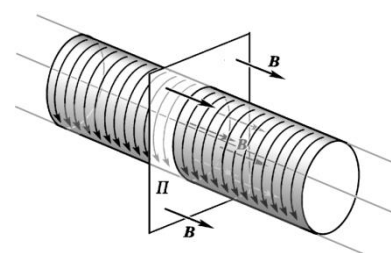
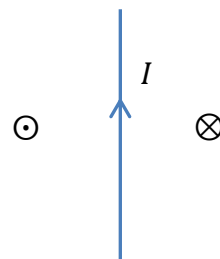
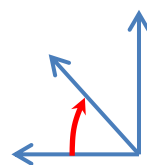
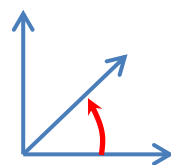
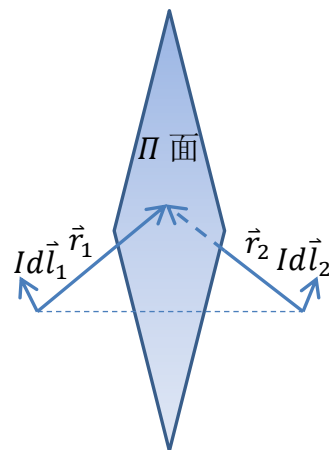
安培环路 a： $B_{\text{外}} = 0$

安培环路 b： $B_{\text{内}} \Delta l - B_{\text{外}} \Delta l = \mu_0 \Delta l \cdot nI$

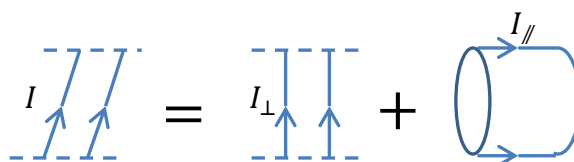
$$\therefore B_{\text{内}} = \mu_0 nI = \mu_0 i$$

其中 i 为面电流线密度

· 若导线的粗细相对管径不可忽略，则实际电流



分布为斜向，可做如图分解，形成如上螺线管（模型）和电流均匀分布的圆柱壳导线的叠加。



☞ 书上 125 页例 8（自己看书）

2.4 恒定磁场的高斯定理

a) 磁高斯定理

➤ 磁场的高斯定理：

由电流微元激发的磁感应线是闭合的，若在空间中取闭合曲面，任意磁感应线若从该曲面一侧穿入，则必从另一侧穿出，即有

$$d\Phi|_{dB} = \oint_{\text{任意}S} d\vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

由叠加原理，即有积分形式**磁高斯定理**

$$\Phi_B = \oint_{\text{任意}S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

亦即磁场是无源的。其微分形式为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

b) 磁矢势

➤ “磁矢势”的引入：

因有恒等式

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv 0$$

故“磁高斯定理”表明，可引入矢量场 \vec{A} ，使得

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{有向曲线 } L \text{ 为曲面 } S \text{ 的边界})$$

如此，自然保证积分形式

$$\oint_{\text{任意}S} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l} + \oint_{-L} \vec{A} \cdot d\vec{l} = 0$$

➤ 磁矢势的不定性及确定条件：

因有恒等式 $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \chi) \equiv 0$ ，故类似于对于利用静电场的无旋性引入电势的常数（零点）选取任意性，矢势的选取总可以相差一个形如 $\vec{\nabla} \chi$ 的场，即

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}', \quad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

\vec{A} 与 \vec{A}' 确定的是同一个（物理可测的）磁感应强度

- 类似于电势零点的选取，对于矢势，通常是通过约定其散度来把它的形式（即与可观测量——如电流分布——的关系）确定下来，如我们可以选取：

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

来确定 \vec{A} ，这个条件被称为库伦标准，或库伦规范（Coulomb gauge）。

附注：已知一个矢量场的散度和旋度的分布，在一定的边界条件下这个矢量

场便被唯一确定下来，对应于唯一性定理的一种情况。

➤ 磁矢势的电流积分形式：（恒定电流）

利用等式

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{r} = -\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{r} = \vec{x} - \vec{x}' \quad (\vec{x}: \text{场点}; \vec{x}': \text{源点})$$

由线电流毕奥-萨伐尔定律（ $d\vec{l} = d\vec{x}'$ ）

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{x}' \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \vec{\nabla}_{\vec{x}} \frac{1}{r} \times Id\vec{x}' = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{x}'}{r} \right)$$

因此可以选择

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{x}'}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l}}{r}$$

如果是体电流分布，则可选择

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} dV'$$

• 数学附注：

1) 对有限电流分布，如上选取对应库伦规范：

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V -\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{j}(\vec{x}') dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V -\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \frac{1}{r}\right) \cdot \vec{j}(\vec{x}') dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \left[\frac{1}{r} \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{j}(\vec{x}') - \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \left(\frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} \right) \right] dV' \xrightarrow{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}=0} -\frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_{s_\infty} \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} \cdot d\vec{S} = 0 \end{aligned}$$

如上利用了无穷远处没有电流分布的边界条件。

2) 应用安培环路定理：

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

所以库伦规范下，矢势满足的微分方程为

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

我们知道有限电荷分布时，微分方程

$$\nabla^2 U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\rho \text{ 仅在有限区域内不为零})$$

的（唯一）解为（电势叠加原理，选无穷远点为电势零点）

$$U(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{x}')}{r} dV'$$

则在类似的无穷远处边界条件下，矢势微分方程的解势必为

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{r} dV'$$

➤ 利用电流积分式来计算磁矢势：

• 若电流有限区域分布，则如上积分式对应库伦规范，且

$$\vec{A}(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

对于无限电流分布体系，如下是几个特例模型。

☞ 无限长直线电流 (I)

此时, $\vec{A}(r)$ 的方向自然沿电流方向, 其大小

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{r'} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{Idl}{\sqrt{r^2 + l^2}} \sim \log \infty$$

注意: 这个积分和求无穷长均匀带电直线的电势积分是一样的 ($I \rightarrow \lambda, \mu_0 \rightarrow 1/\epsilon_0$), 因此可以采用类似的处理办法, 即重新选取矢势零点在有限 r_0 处:

$$A(r) = A(r) - A(r_0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}$$

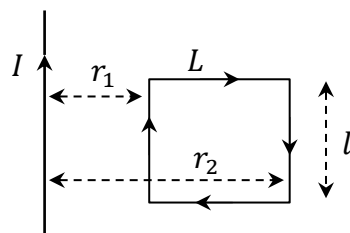
上式是由电势表达式类比给出的, 我们现在由通量法则证明之:

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

取如图矩形回路

$$\Phi_B = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = (A(r_1) - A(r_2))l$$

$$\therefore A(r_1) - A(r_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$



思考: 验证如上矢势分布仍满足 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

☞ 书上 132 页例 10: 无限长均匀圆柱电流 (I, R) 矢势分布

此时可以选轴线 ($r = 0$) 处为矢势零点, 由通量法则 (回路选取如图):

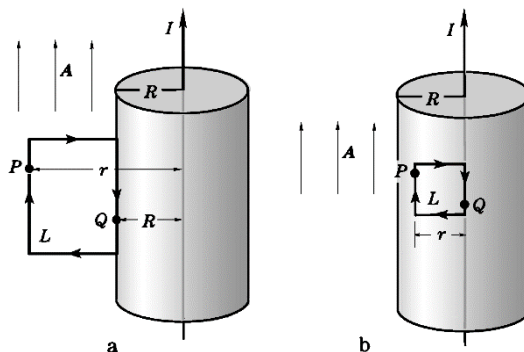
1) $r < R$:

$$A(r) = \frac{\Phi_B}{l} = - \int_0^r \frac{\mu_0 I r'}{2\pi R^2} dr' = - \frac{\mu_0 I r^2}{4\pi R^2}$$

2) $r > R$:

$$A(r) - A(R) = \frac{\Phi_B}{l} = - \int_R^r \frac{\mu_0 I}{2\pi r'} dr' = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$$

$$\therefore A(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{R}{r} - \frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

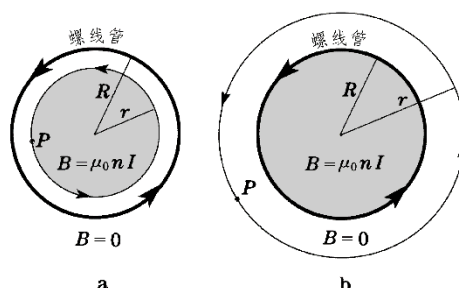


☞ 书上 133 页例 11: 无限长直均匀密绕螺线管 ($I, n; R$) 矢势分布

由轴对称和镜像对称 (\vec{A} 是极矢量!)

$$\vec{A} \begin{cases} \text{方向: 角向} \\ \text{大小: } A = A(r) \end{cases}$$

由通量法则



$$A(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I r}{2} & r < R \\ \frac{\mu_0 n I R^2}{2r} & r > R \end{cases}$$

2.5 洛伦兹力

a) 洛伦兹力公式

➤ 洛伦兹力公式：(Lorentz, 1892)

运动电荷在磁场中受力

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}$$

或有电磁场存在时，电荷受力

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

· 意义：

- 1) 经典电磁学中用来定义（测量）场强。具体来说，速度无关的部分用来测量电场，速度相关的部分用来测量磁场。
- 2) 可以直接推广到非恒定电磁场，如定义涡旋电场等。
- 3) 以场量为基本量，在相对论力学中可以用来定义力和力的变换。

b) 带电粒子在磁场中的运动

一、均匀磁场： $\vec{v} \perp \vec{B}$ 情形

➤ 运动方程：

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\frac{1}{2} \frac{d(p^2)}{dt} = \vec{p} \cdot (q\vec{v} \times \vec{B}) = 0, \quad \vec{p} = m\vec{v}$$

因此 \vec{p} 、 \vec{v} 大小均不变，仅方向改变，且运动方程可改写为

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

若 $\vec{v} \perp \vec{B}$ 则： \vec{v} 的方向维持在 $\perp \vec{B}$ 的平面内，且 v 、 $a_{\text{心}}$ 大小不变，故为匀速圆周运动，称为拉莫尔（Larmor）回旋运动。

➤ 拉莫尔回旋运动：

$$ma_{\text{心}} = \frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{mv}{qB} \\ T = \frac{2\pi m}{qB} \end{cases}$$

- 拉莫尔回旋半径： $r = \frac{mv}{qB} \sim \frac{m}{q} \rightarrow$ 可以用来测量荷质比（比荷）

汤姆逊测量比荷及电子的发现（J.J. Thomson'1897，请阅读书上 146-148 页的相关内容），需注意的是

$$\frac{q}{m} = \frac{q}{m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

故对比荷速度依赖性的测量（书上 147 页表 2-1），相当于对“相对论动力学”及“电荷的相对论不变性”的实验检验。

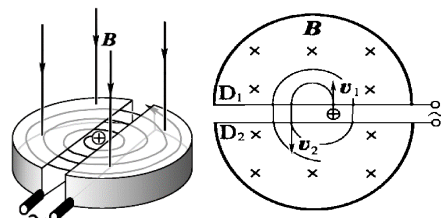
- 拉莫尔回旋频率（周期）：

$$v = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{qB}{2\pi m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad T = \frac{2\pi m}{qB}$$

近似不依赖于速度 ($v \ll c$ 时), 可用来构造回旋加速器。

➤ 回旋加速器 (Cyclotron):

- 劳伦斯 (E.O. Lawrence, 1901-1958) 在 1930 年提出回旋加速的思想, 并于 1932 年在加州 Berkeley 建造了第一台回旋加速器。
- 原理: 如图, 由两个 D 型盒匀强磁场 ($B \sim 1\text{T}$) 回旋区域和交变电场 ($v_E = v_{\text{回旋}}$) 加速区组成。



☞ 频率量级: 考虑加速质子 ($m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$)

$$\nu \sim \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 1}{6.28 \times 1.67 \times 10^{-27}} \text{ Hz} \approx 1.5 \times 10^7 \text{ Hz}$$

一般频率范围在 $3 \times 10^5 \text{ Hz} \sim 3 \times 10^{11} \text{ Hz}$ 被称为射频 (Radio Frequency) 频带, 含义是射频电磁波可以在空气中传播, 会被地表反射, 当然, 也会被高空电离层反射回来。这里, 回旋加速器所用的高频电流, 也通常被称为射频电流。

☞ 末态能量: 给定磁场的情况下, 末态速度仅由最大回旋半径 r_m 确定

$$v = \frac{qBr_m}{m}, \quad E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2 B^2 r_m^2}{2m}$$

- 相对论效应: 如上分析均未考虑相对论效应, 尤其是

$$v_{\text{回旋}} = \frac{qB}{2\pi m_0} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

对速度 (粒子能量) 的依赖会导致“失谐”, 此时可通过调整磁场 $B(t)$ 和射频电场 $E(t)$ 保证在近似圆轨道上的相位与加速电场的相位同步, 由之构建的加速器被称为同步加速器 (Synchrotron), 可将带电粒子 (电子或质子) 能量加速至 1 GeV 以上。

二、均匀磁场: $\vec{v} \perp \vec{B}$ 情形

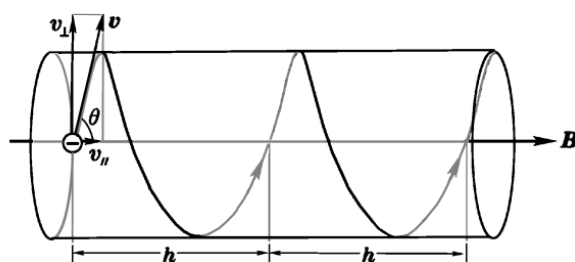
➤ 运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\vec{v})}{dt} &= q\vec{v} \times \vec{B} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \\ \therefore \frac{d(m\vec{v}_{\parallel})}{dt} &= 0, \quad \frac{d(m\vec{v}_{\perp})}{dt} = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \end{aligned}$$

仍有动量大小不变, 则 v_{\parallel} 、 v_{\perp} 各自大小不变

- 等螺距螺旋线运动:

竖直面: 匀速圆周运动



$$v_{\perp} = v \sin \theta \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{mv_{\perp}}{qB} \\ T = \frac{2\pi m}{qB} \end{cases}$$

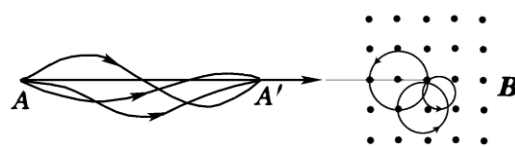
水平：匀速直线运动

$$v_{\parallel} = v \cos \theta \Rightarrow h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \theta$$

☞ **磁聚焦**：如图窄电子束 ($m, q, v; \theta \ll 1$)

近似平行磁场方向发射

$$\begin{cases} v_{\perp} = v \sin \theta \cong v\theta \\ v_{\parallel} = v \cos \theta \cong v(1 - \theta^2/2) \end{cases}$$



不同方向出射电子在垂直磁场的方向上做半径不同但周期相同的圆周运动，经过一个周期后又近似回到轴线上同一点，被称为“磁聚焦”效应。

· 聚焦效果：到达 A' 附近时

不聚焦：横向分离 $v_{\perp} T \approx vT\theta$

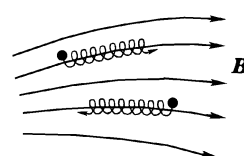
聚焦：纵向（沿磁场线方向）分离 $T\delta v_{\parallel} \approx vT\theta^2/2$

· 实际上经常采用短线圈产生的（非均匀）磁场来聚焦（如右图），称为“磁透镜”



三、恒定、非均匀磁场中的“磁约束”效应

➤ 横向约束：如图，带电粒子作环绕磁场线的螺旋线运动，回旋半径 $R \propto 1/B$ ，即磁场越强，带电粒子对中心磁场线（被称为“引导中心”）的横向偏移越小。

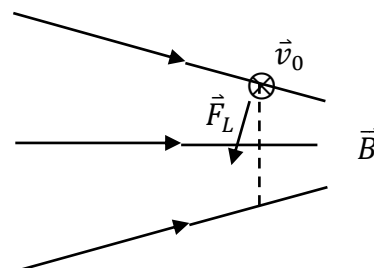


➤ 纵向约束：“磁镜”效应

· 如图：带电粒子 $q > 0$ ，虚线为其在均匀磁场中圆周运动的假想轨道（投影线）。

图示中 \vec{F}_L 效果使粒子向弱场区域“弹回”，且螺距和回旋半径逐渐增大。

因洛伦兹力不做功，故该过程可逆，即粒子会被强磁场区域纵向反弹，称为“磁镜”效应。



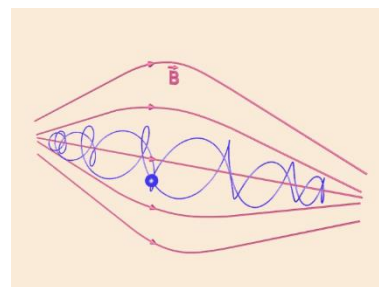
· 如图，只要带电粒子在弱磁场区域的 v_{\parallel} 不大，则会被两个强磁极（磁镜）纵向约束。

☞ 可用于约束高温 ($10^7 \sim 10^9 K$) 高密带电核粒子，进行核聚变反应。

☞ 地磁场（磁极基本对应于地理的南北极，地表附近

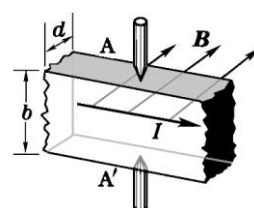
$B = 0.3 - 0.6 \text{ Gs}$ ）可以对宇宙射线中的带电粒子加

以捕获和约束，形成范·阿伦辐射带。一方面可以对地面的生命加以防护；另一方面可以在两极的上空倾泻下美丽的极光。



c) **霍尔效应**

➤ 霍尔 (Hall, 1879) 发现，通电导体板处在磁场中，当磁场方向与电流方向垂直时，在另一个垂直方向上（如图 AA' 方向）会出现电势差，此现象被称为霍尔效应。并且



霍尔发现，霍尔电势差为

$$U_{AA'} = U_A - U_{A'} = K \frac{IB}{d}$$

其中比例系数 K 被称为霍尔系数。

- 霍尔效应可由载流子所受的洛伦兹力（Lorentz, 1892）与恒定电场力的平衡来加以解释：

$$\begin{cases} |q|vB = qU_{AA'}/b \\ I = jbd = n|q|vbd \end{cases} \Rightarrow K = \frac{1}{nq}$$

其中 n 为载流子的浓度（数密度）

附注： $qE = qvB \Rightarrow E = vB = \text{常量}$ ，即 $E = U_{AA'}/b$

- 应用：
 - 1) 可用来测量载流子浓度，尤其是对于半导体材料，其载流子浓度小，霍尔系数大，有利于精细测量其光敏、热敏及杂质参杂等性质。
 - 2) 霍尔系数的正负取决于载流子的正负，可以用来区分 N 型半导体（载流子为电子）和 P 型半导体（载流子为“空穴”——电荷为正且质量为正的“准粒子”）。
 - 3) 利用半导体材料制成的霍尔元件被广泛应用于磁场测量、信号转换等。

2.6 安培力

- 安培力：作用在电流载体（如导线）上的磁场力被称为安培力。
- 安培力公式：线电流元 $I d\vec{l}$ 在磁场中受力

$$d\vec{F}_A = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

方向满足“左手定则”。

- 安培力的本质为洛伦兹力的“诱导力”：

如图，金属导体电流在外加匀强磁场中，自由电子受到平衡力

\vec{f}_e ：霍尔电场力

\vec{f}_L ：外加磁场洛伦兹力

\vec{f}_e 的反作用力即电子作用于导线上的力，与 \vec{f}_L 大小方向相同，故

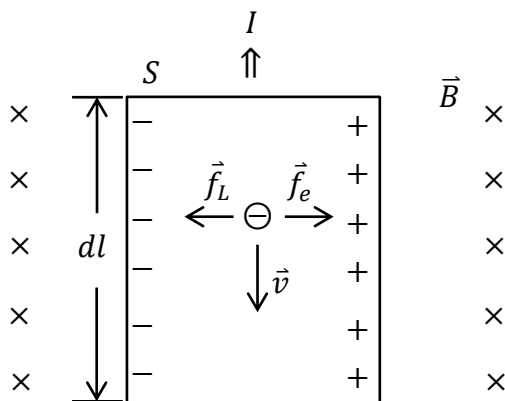
$$\begin{aligned} dF_A &= \sum_{dv} f_L = evB \cdot n \cdot Sdl \\ &= (nevS)dlB = IdlB \end{aligned}$$

即为 dl 段导体所受安培力。

- 安培定律：Ampere, 于 1820-1825

安培定律描述的是两电流元之间的相互作用力

$$d\vec{F}_{1 \text{ 对 } 2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r_{12}^2} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_{12}$$



等价于毕-萨定律与安培力公式的结合！

- 适用条件：恒定磁场。

因包含了毕-萨定律，故仅适用于恒定磁场的情况，而安培力公式作为洛伦兹力公式的推论，适用于一般磁场的情况。

- 不满足牛 III：（除非 $d\vec{l}_1 \parallel d\vec{l}_2$ 或 $(d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2) \parallel \hat{r}_{12}$ ）

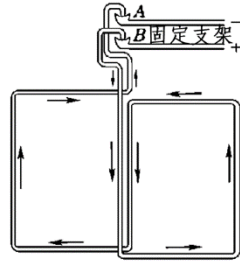
$$d\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^2} [(d\vec{l}_2 \cdot \hat{r}_{12})d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)\hat{r}_{12}]$$

$$d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^2} [(d\vec{l}_1 \cdot \hat{r}_{21})d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)\hat{r}_{21}]$$

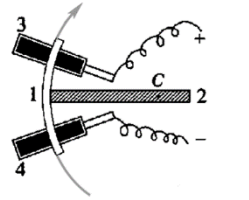
$$\therefore d\vec{F}_{12} + d\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^2} \hat{r}_{12} \times (d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2)$$

➤ 历史附注：

- 安培考查电流元之间的相互作用力，完全是基于瞬时超距作用的思想
- 安培为此设计了几个科学史上著名的实验及实验装置：如图

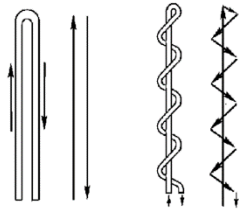


a 无定向秤



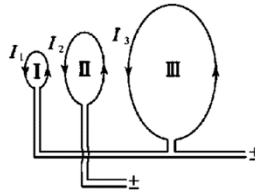
1. 弧形导体 2. 绝缘柄
3. 4. 水银槽

d 实验三



b 实验一

c 实验二



e 实验四

- ✓ 无定向秤 (a) 可以测量磁场是否均匀（不均匀就转），故对实验一、二“示零”，说明电流元 $I d\vec{l}$ 在激发磁场时叠加和分解的矢量性。
- ✓ 实验三的“示零”说明电流元受力垂直于其方向——横向性。
- ✓ 实验四：I、II、III 的尺度比为 $1/n:1:n$ ，两边距离比为 $1:n$ ，串接 I、III 时，II 线圈受力的“示零”旨在说明：所有几何尺度加倍时，受力不变，即

$$dF_{21} \sim \frac{I_1 dl_1 \cdot I_2 dl_2}{r_{12}^2}$$

- 接下来安培强加了受力沿连线方向的假设，即

$$d\vec{F}_{21} = \frac{I_1 I_2}{r_{12}^2} [k_1 (d\vec{l}_1 \cdot \hat{r}_{21})(d\vec{l}_2 \cdot \hat{r}_{21}) - k_2 (d\vec{l}_2 \cdot d\vec{l}_1)] \hat{r}_{21}$$

并最后定出 $k_1/k_2 = 3/2$ 。

但这显然是和实验相违背的。(之前给出的安培定律是改写后的形式)

可参考：陈秉乾，舒幼生，胡望雨，《电磁学专题研究》，第一章 § 3

➤ 电流单位 (SI) “安培 (A)” 的定义

如图两相互平行无限长载流直导线

$$\text{每单位长度受力大小: } \frac{F_{12}}{\text{米}} = \frac{F_{21}}{\text{米}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

方向：电流同向相吸，反向相斥

取 $I_1 = I_2 = I$, $a = 1\text{m}$, 则若 $\frac{F}{\text{米}} = 2 \times 10^{-7} \text{ N/m}$ 时, 定义此时

电流 $I = 1 \text{ A}$

等价于定义: $\mu_0^{\text{SI}} = 4\pi \times 10^{-7}$

➤ 平面载流线圈在均匀磁场中所受力矩

- 恒定电流时, 线圈受力为零:

$$\vec{F} = \oint I d\vec{l} \times \vec{B} = I \left(\oint d\vec{l} \right) \times \vec{B} = 0$$

故力矩不依赖于参考点。

- 特例：如图矩形载流线圈, 受力偶矩

$$\begin{cases} \text{方向: 竖直向上} \\ M = F_{BC} \cdot AB \cdot \sin \theta = BIS \sin \theta \\ \therefore \vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \end{cases}$$

其中 $\vec{m} = IS\vec{n} = I\vec{S}$ 为线圈磁矩。

- 任意形状平面载流线圈可分解为如图窄条矩形线圈的求和,

$$\vec{m} = \sum_i \vec{m}_i = \sum_i IS_i \vec{n} = IS\vec{n}$$

在恒定外磁场中受力矩为

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

- 附注：在如上证明矩形线圈力矩公式时, 采取了特殊的边的取向, 即边 BC 的方向与磁场方向垂直。这一点特殊性可由如上任意平面线圈 “矩形分割” 的参考取向的任意性抵消, 故如上力矩公式普遍成立。

