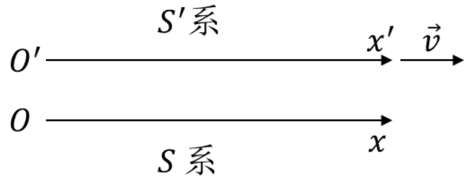
相对论与电磁学

1. <u>Lorentz 变换与四维时空几何</u>

1.1 四维时空“距离”的“转动”不变性



- 记号、约定：

$$\beta = \frac{v}{\mathrm{c}}\ ,\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

- 取四维时空坐标：

$$x^\mu = (\mathrm{c}t, x, y, z)\ ,\qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{1}$$

即，$x^0 = ct$，$x^1 = x$，$x^2 = y$，$x^3 = z$，根据狭义相对论，有变换：

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

从而 Lorentz 变换可以看作为“x^0-x^1”间的“转动”变换：

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0,1,2,3} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2}$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} \tag{3}$$

因有 $\gamma^2 - (-\gamma\beta)^2 \equiv 1$，如上“转动”使得如下四维“距离-间隔”不变：

$$(S_0)^2 = (x^0)^2 - [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2] = (x'^0)^2 - [(x'^1)^2 + (x'^2)^2 + (x'^3)^2] \tag{4}$$

显然，普通 3 维转动仍保持如上定义的四维“距离”不变.

- **<u>闵氏（Minkowski）时空</u>**：如式(4)定义“距离”的方式确定的时空几何. [1]

1.2 4-矢量

在四维闵氏时空上可定义“**<u>4-矢量</u>**”来构造转动及 Lorentz 不变量，我们定义：

<u>逆变（contravariant）矢量</u>：$A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ (5)

<u>协变（covariant）矢量</u>：$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ (6)

---

[1] 如书上 P193 引入虚时 $x^4 = \omega = ict$，保证 $\sum_{i=1}^4 {x_i}^2 = \sum_{i=1}^4 {x_i}'^2$，定义了伪欧氏（Pseudo-Euclidean）时空，等价于闵氏时空

四维标积：

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - [(A^1)^2 + (A^2)^2 + (A^3)^2]$$

$$A_\mu B^\mu = A^0 B^0 - [A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3] \qquad (7)$$

其中式 (7) 使用了“**<u>爱因斯坦求和规则</u>**”，即相同（上下）指标自动求和，即

$$A_\nu B^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} A_\nu B^\nu = \sum_{\nu=0}^{3} A^\nu B_\nu$$

为简便，本章将全部采用此方式。值得注意的是，对于任意等式中的任意一项（诸多变量相乘形式），相同指标至多出现两次，即以下几种形式都是非法的：

$$A_\nu B^\nu C_\nu\,, \qquad A_\nu B^\nu C_\nu D^\nu, \qquad \ldots$$

若 A^μ、B^μ 与 x^μ 按相同方式变换，则如上定义的“标积”为四维转动不变量，

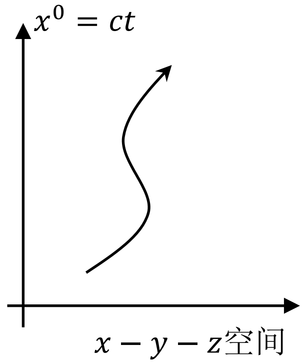
⇒如在“x^0-x^1”间“转动”变换下，

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu \qquad (8)$$

其中 $\Lambda^\mu{}_\nu$ 如上 (3) 式；

⇒3 维转动不变性要求A^μ的空间分量构成“空间 3-矢量”，即

$$A^\mu = \left(A^0, \vec{A}\right), \qquad A_\mu = \left(A^0, -\vec{A}\right) \qquad (9)$$



1.3 4-速度

- 粒子**<u>世界线</u>**：

四维时空坐标下的粒子运动线（如右图）

其上无穷小间隔（interval）不变量

$$(ds)^2 = dx^\mu dx_\mu = (cdt)^2 - [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]$$
$$= (cd\tau)^2 \qquad (10)$$

其中 $d\tau$ 为“**<u>原时</u>**”，即粒子“随动惯性系[2]”中的时间间隔.

- 通常粒子速度（3-速度）定义：

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt} \;\; \left(u_x = \frac{dx}{dt}, \ldots\right) \qquad (11)$$

则有“钟慢”效应：

[2] 引入随动惯性系不需要粒子做匀速运动，对于非匀速运动粒子，可以每时每刻引入随粒子运动的惯性系.

$$dt = \gamma_u d\tau, \qquad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-{\beta_u}^2}}, \qquad \beta_u = \frac{\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}}{\mathrm{c}} \tag{12}$$

- 定义粒子 **4-速度**：

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{13}$$

按式 (10) 的定义，$d\tau = ds/c$，为 Lorentz 不变量，则 η^μ 为 4-矢量

带 (11)、(12) 入 (13)，得：

$$\eta^\mu = \gamma_u(c, \vec{u}) \tag{14}$$

可以直接验证 $\eta_\mu\eta^\mu$ 为不变量：

$$\eta_\mu\eta^\mu = (\gamma_u c)^2 - (\gamma_u)^2\vec{u}\cdot\vec{u} = \frac{c^2 - \vec{u}\cdot\vec{u}}{1-{\beta_u}^2} = c^2 \tag{15}$$

- 3-速度变换式：

由 4-速度变换式：

$$\eta'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \eta^\nu$$

或

$$\begin{cases} \gamma_{u'}\cdot c = \dfrac{\gamma_u c - \beta\gamma_u u_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \gamma_{u'}\cdot {u_x}' = \dfrac{\gamma_u u_x - \beta\gamma_u c}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \gamma_{u'}\cdot {u_y}' = \gamma_u\cdot u_y \\ \gamma_{u'}\cdot {u_z}' = \gamma_u\cdot u_z \end{cases} \tag{16}$$

可得：

$$\begin{cases} {u_x}' = \dfrac{u_x - v}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \\ {u_y}' = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\,u_y}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \\ {u_z}' = \dfrac{\sqrt{1-\beta^2}\,u_z}{1-\frac{u_x v}{c^2}} \end{cases} \tag{17}$$

2. 相对论质点动力学

2.1 4-动量

- 定义**惯性质量**：

  $m_0 \Rightarrow$ 粒子在随动惯性系中的“惯性质量”

  ✧ 根据定义，m_0为 Lorentz 不变量.

  ✧ m_0即牛顿力学中的“质量”，即可根据牛顿定律加以测量.

- 定义粒子 **4-动量**：

$$p^\mu = m_0\eta^\mu = m_0\gamma_u(c,\vec{u}) \tag{18}$$

作为对照，非相对论 3-动量，即牛顿粒子的动量为 $\vec{p}_{NR} = m_0\vec{u}$ (19)

引入“动质量” $m = m_0\gamma_u$ (20)

则，$p^\mu = (p^0,\vec{p}) = (mc, m\vec{u})$ (21)

✧ 定义相对论粒子 3-动量为 4-动量的空间分量

$$\vec{p} = m\vec{u} = \gamma_u\vec{p}_{NR} \xRightarrow{\beta_u \ll 1} \vec{p}_{NR} + \cdots \tag{22}$$

定义，“**相对论性的力**”为：

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} \tag{23}$$

即为**相对论性“质点动量定理”**，低速极限下回到“牛 II ”.

✧ 如上 (23) 的动力学在低速极限（Taylor 展开领头阶）下，以牛顿力学的形式得到了实验的检验.

单纯从时空几何出发，4-动量 p^μ 的各个分量对应于四维闵氏时空平移不变性的守恒量[3]：

$$\begin{cases} \vec{p} = m\vec{u}\text{：空间平移不变性的守恒量} \\ p^0 = mc\text{：时间平移不变性的守恒量} \end{cases}$$

✧ p^0 的牛顿力学对应：能量

定义“能量”：$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta_u{}^2}} = p^0c$ (24)

依据：①正确的量纲；

②时间平移不变性对应的守恒量；

---

[3] 附注：“$x^0 - x^{1,2,3}$”转动⇒**推进（boost）变换**
广义 Lorentz 变换 = boost + rotation（3 维空间转动）
Poincaré 变换 = Lorentz + translation（平移）

③正确的低速极限：

$$\begin{cases} E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \vec{u}^2 + \cdots = E_0 + E_k^{NR} + \cdots \\ E_k = E - m_0 c^2 = E_k^{NR} + \cdots \end{cases} \tag{25}$$

✧ 相对论性能动量关系：

$$p \cdot p = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p} = m_0^2 c^2 = \frac{E_0^2}{c^2} \tag{26}$$

两边对“t”求导：

$$2\frac{E}{c^2}\frac{dE}{dt} - 2\vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

注意到$\vec{p} = m\vec{u} = \frac{E}{c^2}\vec{u}$，$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (27)

$$\therefore \frac{dE}{dt} = \frac{dE_k}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{u} \tag{28}$$

即为**“相对论性动能定理”**.

✧ 能动量变换：在“$x^0 - x^1$”转动下：

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \frac{\frac{E}{c} - \beta p^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p^{1\prime} = \frac{p^1 - \beta \frac{E}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ p^{2\prime} = p^2, \quad p^{3\prime} = p^3 \end{cases} \tag{29}$$

例：光子（$E_\gamma = \hbar\omega, \vec{p}_\gamma = \hbar\vec{k}, |\vec{k}| = \frac{\omega}{c}, m_{\gamma_0} = 0$）

$$\frac{\hbar\omega'}{c} = \frac{\frac{\hbar\omega}{c} - \beta\hbar k}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\hbar\omega}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \quad (\text{取}\vec{k} = |\vec{k}|\vec{e_x}) \tag{30}$$

即为光波的（纵向）多普勒频移公式.

2.2 力的变换

$$F_x' = \frac{dp_x'}{dt'} = \frac{\gamma dp_x - \gamma\beta dp^0}{\gamma dt - \gamma\beta \frac{dx}{c}} = \frac{F_x - \beta \frac{dp^0}{dt}}{1 - \beta \frac{u_x}{c}}$$

其中，$\frac{dp^0}{dt} = \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} = \frac{1}{c}(\vec{u} \cdot \vec{F})$

$$\therefore\begin{cases} F'_x = \dfrac{dp'_x}{dt'} = \dfrac{F_x - \beta\dfrac{1}{c}(\vec{u}\cdot\vec{F})}{1-\beta\dfrac{u_x}{c}} \\ F'_y = \dfrac{dp'_y}{dt'} = \dfrac{dp_y}{\gamma dt - \gamma\beta\dfrac{dx}{c}} = \dfrac{F_y}{\gamma\left(1-\beta\dfrac{u_x}{c}\right)} \\ F'_z = \dfrac{dp'_z}{dt'} = \dfrac{F_z}{\gamma\left(1-\beta\dfrac{u_x}{c}\right)} \end{cases} \tag{31}$$

特例：$\vec{u}=0$（即 S 系为粒子的随动惯性系）

$$\vec{F}'_{\parallel} = \vec{F}_{\parallel}, \qquad \vec{F}'_{\perp} = \frac{\vec{F}_{\perp}}{\gamma} \tag{32}$$

此处“∥”与“⊥”是相对参考系变换速度 $\vec{v}$ 而言的.

➢ 定义**四维力**：

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \gamma_u\cdot\frac{dp^\mu}{dt}$$

$$\begin{cases} K^0 = \gamma_u\cdot\dfrac{dp^0}{dt} = \dfrac{\gamma_u}{c}(\vec{u}\cdot\vec{F}) \\ \vec{K} = \gamma_u\cdot\vec{F} \end{cases}$$

故可由 K^μ 的变换得到 $\vec{F}$ 的变换[4].

3. 电磁场的变换

3.1 Lorentz 力

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{u}\times\vec{B}\right) \tag{33}$$

其中q是 Lorentz 不变量.

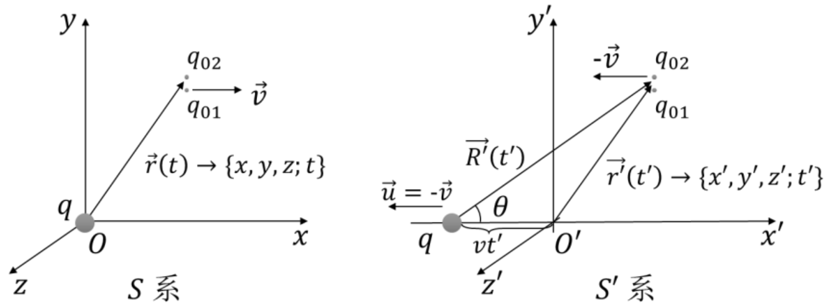
$\vec{F}$ 的变换与场量 $\vec{E}$、$\vec{B}$ 的变换有相互决定的关系.

当然，我们预期：

1） 类似于时空坐标的洛伦兹变换，场量分量之间的变换应满足线性关系；

2） 变换应进一步具有空间反演（或镜像变换）的不变性，即 $\vec{E}^{(\prime)}$、$\vec{B}^{(\prime)}$ 仍各自分别维持极矢量、轴矢量的镜像变换性质。

[4] 附注：书上 P197~198，“K”表示为 F，“F”表示为 f.



3.2 匀速运动点电荷所激发的电磁场

S 系：$\vec{r}(t)$ 处两试探电荷 q_{02}（静）、q_{01}（$\vec{v}$ 动），O 处静止源电荷 q：

$$\vec{B}=0\,,\qquad \vec{E}=\frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \tag{34}$$

S'系：$\overrightarrow{r'}(t')$ 处试探电荷 q_{01}（静）、q_{02}（$-\vec{v}$ 动），$(-vt', 0{,}0)$ 处运动源电荷q：

$$\overrightarrow{E'}=?\,,\qquad \overrightarrow{B'}=?$$

➢ 对于q_{01}：$\overrightarrow{F_1}=q_{01}\vec{E}$，$\overrightarrow{F_1}'=q_{01}\overrightarrow{E'}$ (35)

由 (32) 式变形式：$\vec{F}'_{1\parallel}=\vec{F}_{1\parallel}$，$\vec{F}'_{1\perp}=\gamma\vec{F}_{1\perp}$

$$\therefore\ \vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}\,,\qquad \vec{E}'_{\perp}=\gamma\vec{E}_{\perp} \tag{36}$$

$$E'_x=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma(x'+vt')}{\left[\gamma^2(x'+vt')^2+y'^2+z'^2\right]^{3/2}}$$

$$=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma R'_x}{[\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}\cdot R'^3}$$

$$E'_y=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma R'_y}{[\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}\cdot R'^3}$$

$$E'_z=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma R'_z}{[\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}\cdot R'^3}$$

$$\therefore \overrightarrow{E'}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma}{[\gamma^2\cos^2\theta+\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\overrightarrow{R'}}{R'^3}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(1-v^2/c^2)}{[1-v^2/c^2\sin^2\theta]^{3/2}}\frac{\overrightarrow{R'}}{R'^3} \tag{37}$$

➢ 对于q_{02}：$\overrightarrow{F_2}=q_{02}\vec{E}$，$\overrightarrow{F_2}'=q_{02}\left(\overrightarrow{E'}-\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)$

由 (32) 式，$\vec{F}_{2\parallel}=\vec{F}'_{2\parallel}$，$\vec{F}_{2\perp}=\gamma\vec{F}'_{2\perp}$

$$\therefore\ \vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}\,,\qquad \vec{E}_{\perp}/\gamma=\overrightarrow{E'_{\perp}}-\left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)_{\perp}$$

再由 (36) 式：

$$\left(\vec{v}\times\overrightarrow{B'}\right)_{\perp}=\overrightarrow{E'_{\perp}}-\frac{\overrightarrow{E'_{\perp}}}{\gamma^2}=\frac{v^2}{c^2}\overrightarrow{E'_{\perp}} \tag{38}$$

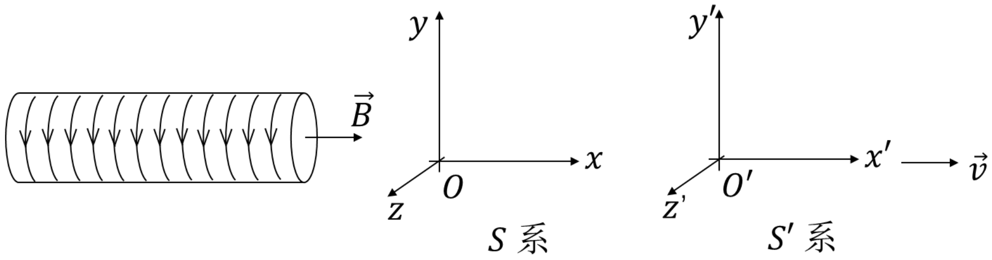
用 $\vec{v}$ 叉乘 (38) 式左右两边：

$$\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{B'}\right)\vec{v}-v^2\overrightarrow{B'}=\frac{v^2}{c^2}\vec{v}\times\overrightarrow{E'} \tag{39}$$

若 $\vec{v}\cdot\overrightarrow{B'}=0$（说明见后，可以看作是镜像对称性的要求），则

$$\overrightarrow{B'}=-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\overrightarrow{E'}=\frac{1}{c^2}\vec{u}\times\overrightarrow{E'} \tag{40}$$

- 关于“$\vec{v}\cdot\overrightarrow{B'}=0$”的说明：



如图静止于 S 系无穷长螺线管： $B_{内}=\mu_0 nI$

S’系：钟慢：$I'=\frac{dq}{dt'}=\frac{dq}{\gamma dt}=\frac{I}{\gamma}$

尺缩：$n'=\frac{dN}{dl'}=\gamma\frac{dN}{dl}=\gamma n$

Biot-Savart 定律：$B'_{内}=\mu_0 n' I'=B_{内} \quad \Rightarrow \quad B'_{\parallel}=B_{\parallel}$ (41)

对于如上点电荷激发电磁场的特例，有：

$$\vec{v}\cdot\overrightarrow{B'}=\vec{v}\cdot\vec{B}=0$$

3.3 电磁场的变换

对于运动点电荷形的特例情况：

S 系： $\vec{E}$，$\vec{B}=0$

S’系：$\begin{cases}\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}\ , & \vec{E}'_{\perp}=\gamma\vec{E}_{\perp} \\ \vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}=0\ , & \overrightarrow{B'_{\perp}}=-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\overrightarrow{E'}=-\frac{\gamma}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\end{cases}$

- 一般情况的电磁场变换式：

$$\begin{cases}\vec{E}'_{\parallel}=\vec{E}_{\parallel}\ , & \vec{E}'_{\perp}=\gamma\left(\vec{E}_{\perp}+\vec{v}\times\vec{B}\right) \\ \vec{B}'_{\parallel}=\vec{B}_{\parallel}\ , & \overrightarrow{B'_{\perp}}=\gamma\left(\vec{B}_{\perp}-\frac{1}{c^2}\vec{v}\times\vec{E}\right)\end{cases} \tag{42}$$

或

$$\begin{cases} E'_x = E_x\ , & E'_y = \gamma\left(E_y - vB_z\right)\ , & E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right) \\ B'_x = B_x\ , & B'_y = \gamma\left(B_y + \dfrac{v}{c^2}E_z\right)\ , & B'_z = \gamma\left(B_z - \dfrac{v}{c^2}E_y\right) \end{cases} \tag{43}$$

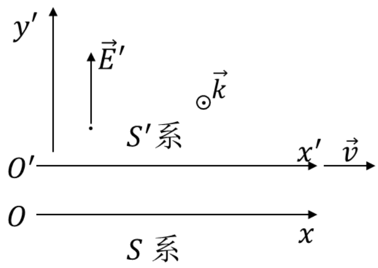
例：（书上 3-20）：静止于 S’系 x’轴的均匀带电线（λ′）

S’系：$\overrightarrow{E'} = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 y'}\vec{j}$，$\overrightarrow{B'} = 0$，其中$\vec{j}$ 为 y 轴方向矢量

S 系：$\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} = 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_{\perp} = \gamma\vec{E}'_{\perp} = \frac{\gamma\lambda'}{2\pi\epsilon_0 y}\vec{j}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_{\perp} = \frac{1}{c^2}\vec{v}\times\overrightarrow{E} = \frac{\gamma\lambda' v}{2\pi\epsilon_0 c^2 y}\vec{k}$$



另，尺缩 ⇒ λ = γλ′，故：在 S 系中

Coulomb 定律 $\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y}\vec{j} = \frac{\gamma\lambda'}{2\pi\epsilon_0 y}\vec{j}$

Biot-Savart 定律 $\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0\lambda v}{2\pi y}\vec{k}$

对照可知：$\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}$

4. <u>电动力学的四维协变形式</u>

4.1 电流密度 4-矢量

- 考虑电荷载体静止于 S’系：$\rho_0 = \rho' = dq/dV'$

对于 S 系：

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ , \qquad \vec{J} = \rho\vec{v} = \frac{\rho_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{44}$$

因此可定义**<u>电流密度 4-矢量</u>**：

$$J^\mu = \left(c\rho, \vec{J}\right) = \rho_0\eta^\mu\ , \qquad J^\mu J_\mu = c^2\rho^2 - \vec{J}\cdot\vec{J} = c^2\rho_0^2 \tag{45}$$ [5]

- 电荷守恒方程：

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0 \tag{46}$$

其中：

$$\partial_t\rho = \frac{1}{c}\frac{\partial J^0}{\partial t} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0}\ , \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = \sum_{i=0}^{3}\frac{\partial J^i}{\partial x^i}$$

[5] 附注：注意此处“爱因斯坦求和规则”再一次出现.

$$\therefore \sum_{\mu} \frac{\partial J^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{47}$$

➢ 引入<u>**四维梯度算符**</u>：

$$\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\partial_t, -\vec{\nabla}\right)$$

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \left(\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}\right) \tag{48}$$

则电荷守恒方程可表示为：$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0$ (49)

➢ 上式表明在 Lorentz 变换下：

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \to \text{协变}, \qquad \partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \to \text{逆变} \tag{50}$$

说明：

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \Rightarrow \begin{cases} x^{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} x'^{\nu} \\ (\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\rho}{}_{\mu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} \end{cases} \tag{51}$$

$$\therefore \ \partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu} \tag{52}$$

⇒ 如对于标量场 ϕ ：$\partial_{\mu}\phi$为协变 4-矢量：

证明：对于任意逆变 4-矢量A^{μ}：

$$A'^{\mu} \partial'_{\mu} \phi' = A^{\rho} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} (\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\mu} \partial_{\nu} \phi = \delta^{\nu}{}_{\rho} A^{\rho} \partial_{\nu} \phi = A^{\rho} \partial_{\rho} \phi$$

即，$\partial_{\mu}\phi$为协变 4-矢量

➢ <u>**达朗贝尔（d'Alembert）算符**</u>

$$\Box = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 \tag{53}$$

这是一个 Lorentz 不变微商算符，同时也是三维 Laplace 算符的自然推广.

4.2 电磁 4-矢量势，电磁场张量

➢ 特例：无限长（大）的均匀带电线（面）

$\xrightarrow{\text{纵向 Lorentz 变换}}$恒定电流、电流分布 ⟶ 恒定电磁场

Coulomb 规范下：

$$\vec{\nabla}^2 U(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = -c^2 \mu_0 \rho(\vec{r})$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0\vec{J}(\vec{r}) \tag{54}$$

取 4 矢量$A^\mu = \left(\frac{U}{c},\vec{A}\right)$，并考虑此特例下“$\partial_t \Rightarrow 0$”

$$\Box A^\mu(\vec{r}) = \mu_0 J^\mu(\vec{r}) \tag{55}$$

（此时，库伦规范条件也可写成协变形式：$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t U + \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$）

暗示着：一般情况下，A^μ为逆变 4-矢量！

- 考虑对“势”的引入：

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}U - \partial_t\vec{A} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \end{cases} \tag{56}$$

改写为：

$$\frac{E^i}{c} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i\,, \qquad i = 1,2,3$$

$$\begin{cases} \dfrac{E^i}{c} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i\,, \qquad i = 1,2,3 \\ B^1 = B_x = \partial^3 A^2 - \partial^2 A^3\,,\ B^2 = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1\,,\ B^3 = \partial^2 A^1 - \partial^1 A^2 \end{cases} \tag{57}$$

定义二阶反对称张量：

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \tag{58}$$

（1） 变换：

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma\, F^{\rho\sigma} \tag{59}$$

（2） 反对称：

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \tag{60}$$

对角元为零，共 6 个独立分量：

$$F^{0i} = -F^{i0} = -\frac{E^i}{c}\ \ (i = 1,2,3)$$

$$F^{ij} = -F^{ji} = -\epsilon_{ijk}B^k\ (i,j,k = 1,2,3;\text{重复指标求和}) \tag{61}$$

$$\therefore\ F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \tag{62}$$

（3） 场量变换：

由形式 (62) 和变换式 (59)，可推出场量变换式 (43). （请自行验证）

- <u>**规范不变性（Gauge invariance）**</u>

对任意标量场$\chi(\vec{r},t)$，做“规范变换”

$$A^{\mu} \to A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\chi \tag{63}$$

$F^{\mu\nu}$（或 $\vec{E}$ 与 $\vec{B}$ ）均不变，称为电磁场的规范不变性.

- 用势场 $A^{\mu}(\vec{r},t)$ 表达场方程来求解时，通常要选定规范.

常用：（1）**<u>Coulomb 规范</u>**：$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$ (64)

（2）**<u>协变规范（Lorenz 规范）</u>**：$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0$ (65)

4.3 **<u>Maxwell 方程组</u>**

- (58) 式，或等价的 (56) 式，已包含了两个方程：

$$\begin{cases} \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\vec{\nabla}\times\partial_t\vec{A} = -\partial_t\vec{B} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0 \end{cases} \tag{66}$$

其张量形式为：

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\nu}F_{\rho\sigma} = 0 \tag{67}$$

其中$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$为<u>四阶完全反对称张量</u>：

$$\begin{cases} \epsilon^{0123} = \epsilon^{2013} = \cdots = 1 \\ \epsilon^{1023} = \cdots = -1 \\ \ldots \end{cases} \tag{68}$$

方程（67）也可写做

$$\partial^{\lambda}F^{\mu\nu} + \partial^{\nu}F^{\lambda\mu} + \partial^{\mu}F^{\nu\lambda} = 0$$

- 另外两个原方程，可统一为一个张量方程：

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu} \tag{69}$$

包含[6]：

$\nu = 0$ 时：$\partial_{\mu}F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \mu_0 J^0 \;\Rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \mathrm{c}^2\mu_0\rho = \rho/\epsilon_0$ (70)

$\nu = i$ 时：$\partial_{\mu}F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} = \mu_0 J^i$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2}\partial_t E^i + \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)^i = \mu_0 J^i$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\partial_t\vec{E} \tag{71}$$

##

致 谢

感谢物理学院 2016 级王任飞同学的录入和校改！

[6] 注意我们约定：指标i, j, k ∈ {1,2,3}.