

第三章 电磁感应

✎ 作业：3、6、7、11、13、26、28、31、33、35

3-6 补充：(1) 中的运动为匀速运动；(2) 所求受力为外力。

3.1 法拉第电磁感应定律

a) 电磁感应现象及分类

➤ 简要的历史回顾：

- 奥斯特（Oersted' 1820）发现“电生磁”使人们相信电和磁之间有深刻的联系，所以从那时起，寻找“磁生电”几乎变成了一个开放式的课题。
- 阿喇果（Arago' 1822）发现金属对小磁针在地磁场中的振动有阻尼效果，并于 1824 年做了著名的“圆盘实验”：旋转的圆盘可以带动附近的磁针旋转（异步，且位相滞后）。阿喇果因此获得了 1825 年的科普利奖章，但关于圆盘实验的解释，当时众说纷纭，没有被正确的理解。（后面我们会分析，这是圆盘感应电流，反作用于磁针，造成的电磁驱动的效应）
- 亨利（Henry' 1829）发现通电线圈断开时，断开处会产生强烈的电火花。但直到 1832 年 6 月，当他读到法拉第的论文摘要时，才意识到之前发生的是什么，并把之前的发现定义为“自感”现象。

➤ 法拉第（Faraday, 1791-1867）对电磁感应现象的发现：

- 法拉第很早就一直坚信电磁感应的存在，但直至 1831 年他才意识到“变化的条件”是导致电磁感应的要素，此后一年间（1831.9---1832.7）法拉第在实验上发现了所有可以产生电磁感应的机制，并做了如下归类：

- (1) 变化的磁场
- (2) 变化的电流
- (3) 运动的恒定电流
- (4) 运动的磁铁
- (5) 在恒定磁场中运动的导体

- 以“场”的观点来看：

(1)-(4)为变化的磁场带来，称为感生电磁感应

(5)来自导体（及其携带的载流子）的运动，称为动生电磁感应。

➤ 法拉第对感应电流产生机制的深入分析：Faraday, 1832

- 法拉第发现：在相同的实验条件下，导体回路感应电流与电阻成反比。
⇒ 感应电流是由与导体性质和回路存在无关的感应电动势引起的！
 - ✓ 动生情形：即使回路不闭合，导体上仍存在感应电动势
 - ✓ 感生情形：即使空间无导体，仍存在非静电力场，即存在感应电动势。
- 动生电动势可由洛伦兹力（Lorentz, 1892）来理解，从场与电荷相互作用角度来看，并非“新奇”（ $\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B}$ ）
- 感生电动势从何而来？

- 麦克斯韦 (Maxwell, 1831-1879) 对感生电磁感应的理解: Maxwell' 1855 变化的磁场激发感生电场, 产生感生电动势, 即

$$\vec{K} = \vec{E}_{\text{感}}, \quad \varepsilon_{\text{感生}} = \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l}$$

- 这种非静电力作用于单独电荷上, 即使不存在电荷, 该非静电力场仍存在, 故不同于扩散力等。此外, 不同于洛伦兹力, 它可以作用于静止电荷上, 故应定义为电场力。
- 不需要电荷激发, 故非静电力
- 不同于静 (恒定) 电场, 此电场旋度不为零, 故称为“涡旋电场”
- ✓ “场的变化激发另一种场” 是革命性的

b) 法拉第电磁感应定律

- 楞次定律: Lenz' 1834

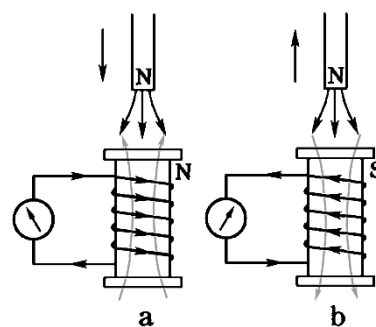
感应电流的效果总是反抗引起感应电流的原因

- 是能量守恒的结果和反应

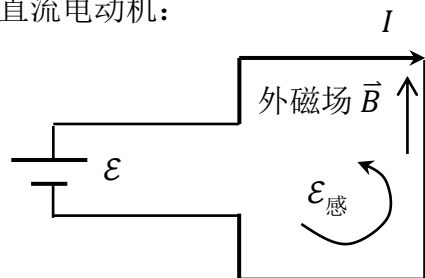
如图, 固定线圈/运动磁棒

a. 排斥; b. 吸引

两种情况外力均需克服磁力做功, 消耗为线圈上的焦耳热。



- ☞ 直流电动机:



工作线圈

由楞次定律可判断

$\varepsilon_{\text{感}}$ 方向如图, 因此

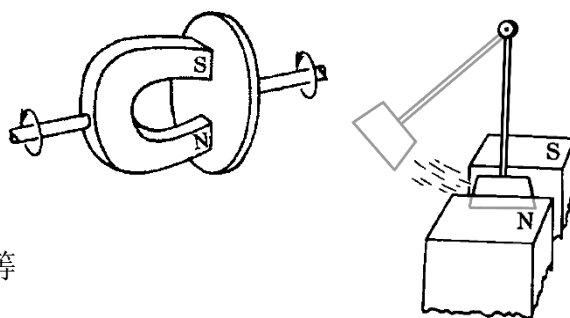
$$\varepsilon - \varepsilon_{\text{感}} = IR$$

$$P_e = \varepsilon I = I^2 R + I \varepsilon_{\text{感}} = P_{\text{heat}} + P_{\text{机械}}$$

- ☞ 电磁驱动和电磁阻尼:

- 如图, 磁铁在金属盘上方转动, 盘内感应电流成涡旋状, 称为涡流, 其效果为阻碍磁棒运动, 反作用则使金属盘转动, 是为电磁驱动。

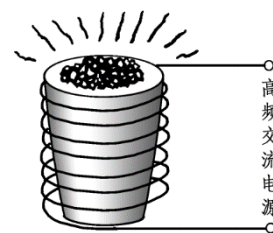
应用: 感应式异步电动机; 磁电式转速表等



- 电磁驱动的逆效果即为电磁阻尼，如图，阻尼摆会在电磁阻尼力下很快地停在平衡位置。

- 涡流的热效应

应用：如图高频感应电炉，可用来冶炼金属；又如家用电磁炉克服：变压器等的铁芯（磁导率很大，同时导电）会因涡流而损耗能量，故制作成相互绝缘的片状结构，增大电阻，减小涡流能损。



➤ 法拉第电磁感应定律：通量法则

- 纽曼（Neumann' 1845）/韦伯（Weber' 1846）采用超距相互作用观点分别给出了相近的形式
- 麦克斯韦（Maxwell' 1855）给出了“通量法则”物理上的来源，并将之称为“法拉第电磁感应定律”

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

磁通量单位（SI）：1 Wb = 1 T · m²

- 多匝线圈时

$$\Phi \Rightarrow \Psi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

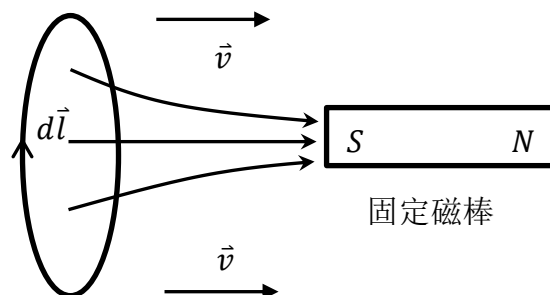
Ψ 为磁通匝链数。

- 符号与方向：

- 1) 选定回路绕向，即 \mathcal{E} 正向
 - 2) 由回路绕向的右手螺旋确定面元 $d\vec{S}$ 方向
 - 3) 结合 \vec{B} 的方向，判断 Φ 与 $d\Phi$ 的正负
- 例如，右图移动线圈

$$\Phi < 0, \quad d\Phi < 0$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} > 0$$



总的来说，公式中的“-”号是楞次定律（或能量守恒）的反应。

- 原则上如上“通量法则”仅适用于由导线围成的“线型回路”。有大块导体存在时，回路面积不定，故通量不定，特殊情况也可以采用“构造回路法”（见后文）来利用通量法则求解感应电动势。

3.2 动生电动势和洛伦兹力

- 动生电磁感应：因导体作切割磁力线运动而产生的电磁感应。
- 恒定磁场 \vec{B} 中（不要求匀强），导线回路变形带来动生感应电动势

$$\mathcal{E}_{\text{动生}} = -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

证明：考虑如图线元 $d\vec{l}$ 平移 $\vec{v}dt$ 小段，带来面积变化

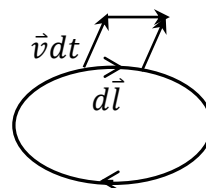
$$d\vec{S} = \vec{v}dt \times d\vec{l}$$

相应磁通变化

$$d\Phi_{al} = d\vec{S} \cdot \vec{B} = (\vec{v} \times d\vec{l}) \cdot \vec{B}dt = (\vec{B} \times \vec{v}) \cdot d\vec{l}dt$$

$$\therefore d\Phi_L = \oint_L \vec{B} \times \vec{v} \cdot d\vec{l}dt$$

$$\therefore -\frac{d\Phi}{dt} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



- ✓ 动生电动势非静电力来自于自由电荷随导线一起运动在磁场中受到的 Lorentz 力（的分量），即

$$\vec{K} = \vec{v} \times \vec{B}$$

- ✓ 既然电动势反应了电磁感应现象的本质，如上非静电力当然在回路不闭合（但存在运动导体）时仍然存在（这是通量法则不能直接告诉我们的）。

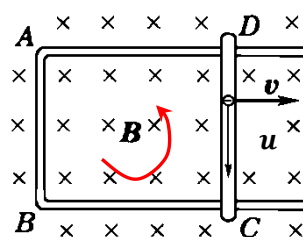
☞ 例题：如图，匀强磁场中金属导轨框架，若长为 L 的 CD 段匀速横切磁场

- 1) 取如图回路绕向，由“通量法则”得

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = +B \frac{dS}{dt} = BLv$$

- 2) 由动生电动势定义式

$$\mathcal{E}_{\text{动生}} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = BLv$$



- 3) 若回路电阻 R 保持不变，则安培力（方向向左，阻碍 CD 前进）

$$F_A = BIL, \quad I = BLv/R$$

特例：为保证 CD 匀速运动，外力需做功，其功率为

$$P_{\text{外}} = -\vec{F}_A \cdot \vec{v} = F_A v = BILv = I^2 R = P_{\text{heat}}$$

对应能量守恒。

- 4) 如上过程非静电力和安培力分别来自于 Lorentz 力的两个分量。安培力做功为负，抵消了沿导线方向的非静电力的做功，是因为 Lorentz 力整体不做功。

$$0 = [q(\vec{v} + \vec{u}) \times \vec{B}] \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{u} + (q\vec{u} \times \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

其中第一项是非静电力对自由电荷做功的功率，最终转化成焦耳热；第二项对应于安培力做功功率。两项抵消意味着，导线的机械能和作用于导线的机械功最终在能量守恒的前提下，转化为焦耳热。

- 5) 若无外力，则 CD 不能维持匀速运动，其消耗的动能转化为焦耳热。

☞ 书上 180 页例 3：金属棒绕一端匀角速旋转，求： \mathcal{E}_{OA}

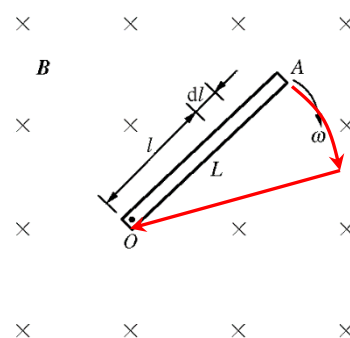
解：由动生电动势定义式

$$\mathcal{E}_{OA} = \int_0^A \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^L \omega B l \cdot dl = \frac{\omega B L^2}{2}$$

此外，可以“构造”如图扇形回路，采用通量法则计算

$$\mathcal{E}_{OA} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = \frac{\omega B L^2}{2}$$

☞ 交流发电机原理：书上 181-182，请自修。



3.3 感生电动势和感应电场

➤ 感生感应：因磁场随时间变化产生的电磁感应。

➤ “感生”与“动生”的区分与联系：

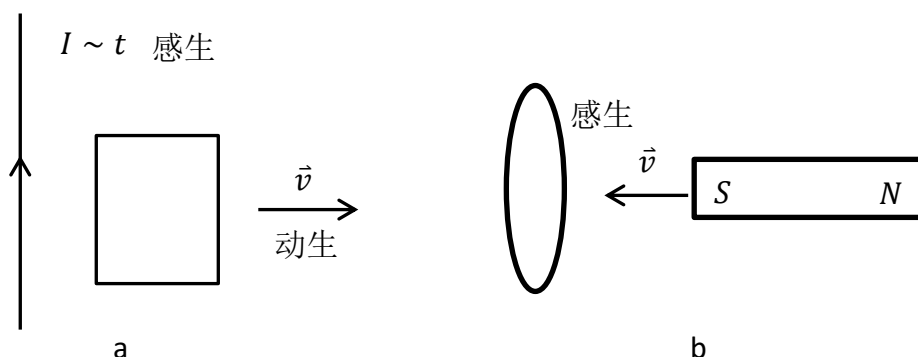


图 a 中有感生也有动生，导线框中 $\mathcal{E}_{\text{感}} = \mathcal{E}_{\text{感生}} + \mathcal{E}_{\text{动生}}$

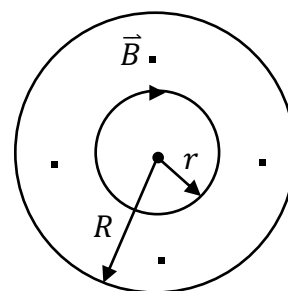
图 b 中只有感生，但变换为磁棒参考系，则只有动生（这只是电磁场随参考系变换的一个特例）

☞ 半径为 R 的圆柱区域分布有同步变化的匀强磁场 $\vec{B}(t)$ ，取如图绕向回路

1) $\mathcal{E}_{\text{感生}} = -d\Phi/dt = -\iint_S \partial \vec{B} / \partial t \cdot d\vec{S}$

$$r < R: \Phi = -B \cdot \pi r^2, \quad \mathcal{E}_{\text{感生}} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$r > R: \Phi = -B \cdot \pi R^2, \quad \mathcal{E}_{\text{感生}} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$



2) $\mathcal{E}_{\text{感生}} = \oint_L \vec{E}_{\text{感应}} \cdot d\vec{l}$, $\vec{E}_{\text{感应}}$ 的方向：

a) 分布具有轴对称性

b) 作为（极）矢量，与 \vec{B} 的镜像对称面（即 $\vec{E}_{\text{感应}}$ “反”镜像对称面）垂直

由此我们可推论出 $\vec{E}_{\text{感应}}$ 沿如图回路绕向（即角向）

$$r < R: K_{\text{感应}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$$

$$r > R: K_{\text{感应}} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$$

➤ 如上特例中感应电场的性质：（可以看作是无电荷分布区域变化磁场激发电

场的性质)

- a) 有旋：故也被称为**涡旋电场**

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感应}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \times \vec{E}_{\text{感应}} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- b) 无源：场线闭合

$$\oiint_S \vec{E}_{\text{感应}} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{感应}} = 0$$

在库伦规范 ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$) 下，如上两点可以概括为

$$\vec{E}_{\text{感应}} = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

- ✎ 思考：试用螺线管内外矢势分布的结果重新确定此特例中涡旋电场的分布。

➤ 电场的一般方程：

- 考虑一般的电荷分布 $\rho(t)$ ，空间中自然会有变化的磁场 $\vec{B}(t)$ ，此时空间电场不仅存在之前讨论过的涡旋电场，电荷分布显然会激发额外的部分。
- 我们假定：**一般情况的电场方程为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

这已经是的 **Maxwell** 方程组的一半了，且在如下特例中得到验证

- 1) 特例一：恒定电荷分布，则 $\vec{B} = 0$ (对应静电场)，或 \vec{B} 恒定 (对应恒定电场)，则

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

回到实验已经验证的结果。

- 2) 特例二：(有限距离) 空间无电荷分布，仅存在变化磁场，则

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

这里的 \vec{E} 无非就是上例中的涡旋电场。

➤ 重新看待感应电动势

$$\mathcal{E} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{\text{感应}} \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

对于线型回路，上式等价于通量法则：

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi|_S}{dt} = - \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{S\text{变}} - \frac{d\Phi}{dt} \Big|_{\vec{B}\text{变}} = \oint_L \vec{v} \times \vec{B} \cdot d\vec{l} - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

➤ 电子感应加速器 (betatron)

- 利用感应电场来加速电子：原理提出 (Slepain'1932)、稳定轨道条件及

第一台感应加速器的建造 (Kerst'1940)

- 装置如图：电磁铁由交流电励磁（每秒数十周），环形真空室的感应电场用来加速电子。
- 仅有 $1/4$ 周期可用于电子加速：对应如下图磁场方向（保证电子轨道环绕），且磁场大小增加（保证电场加速电子）的 $1/4$ 周期。
- 轨道稳定条件：维持稳定的轨道半径 R

$$mv(t) = eRB(R, t)$$

故要求保证 B 与 v 同步增加。考虑加速机制

$$\begin{aligned} \frac{d(mv)}{dt} &= -eE_{\text{感}} = \frac{e}{2\pi R} \frac{d\Phi}{dt} \\ \therefore d(mv) &= \frac{e}{2\pi R} d\Phi \end{aligned}$$

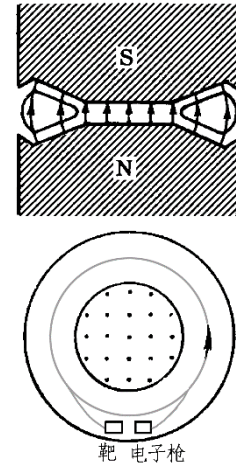
取 $\Phi = 0$ 时， $v = 0$ ，则可保证轨道稳定

$$mv(t) = \frac{e}{2\pi R} \Phi(t) = \frac{e}{2\pi R} \pi R^2 \bar{B}(t) \sim B(R, t)$$

具体要求：

$$B(R) = \frac{1}{2} \bar{B}$$

- 加速能量：一般在 $100 \text{ keV} \sim 100 \text{ MeV}$



3.4 自感与互感

a) 自感

- 自感：通电线圈，电流 I 变化时，自身磁场激发磁通匝链数 Ψ 相应变化，产生感应电动势，称为自感现象。如闸刀开关断开时，因电流迅速变化而产生较大的自感电动势和开关两端电势差，使得周围空气放电而产生电火花。
- 给定线圈（的几何结构），磁通匝链数正比与电流，即

$$\Psi = LI$$

其中 L 为与电流无关的常量，被称为自感系数，决定于自感线圈的几何参量及内部磁介质的填充情况（限于线性介质的情况，见第四章相关内容）。

- 自感电动势：

$$\mathcal{E}_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L \frac{dI}{dt}$$

☞ 例：单层密绕长直螺线管 (l, S, N)

忽略边缘效应，设通有电流 I

$$\begin{aligned} B &= \mu_0 nI = \mu_0 NI/l \\ \Psi &= NBS = \mu_0 N^2 SI/l \\ \therefore L &= \mu_0 \frac{N^2 S}{l} = \mu_0 n^2 V \quad \left(n = \frac{N}{l}, V = lS \right) \end{aligned}$$

a) 考虑边缘效应, $L < \mu_0 n^2 V$

b) 单位 (SI): 亨利 $1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}$, 常用单位还有 mH、 μH .

取书上 210 页例 8 的数值: $l = 0.5 \text{ m}, S = 0.001 \text{ m}^2, N = 3000$

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \times 3000^2 \times \frac{0.001}{0.5} \approx 23 \text{ mH}$$

☞ 书上 211 页例 9: 同轴圆柱筒传输线 (同轴电缆,

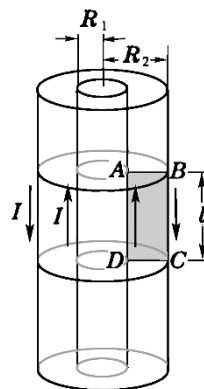
$R_2 > R_1$), 长为 l 的一段所贡献的自感系数。

解: 设电流为 I , 则如图面积上的磁通量

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B(r) l dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

故长为 l 的一段所贡献的自感系数

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



b) 互感

➤ 互感: 两通电线圈 (I_1, I_2), 互相激发磁通匝链数

$$\Psi_{12} = M_{12} I_1, \quad \Psi_{21} = M_{21} I_2$$

可证明 $M_{12} = M_{21} = M$, 称其为互感系数, 决定于几何参量 (包括相对位形) 与线性介质的分布情况。

• 对于单匝线圈 $M_{12} = M_{21} = M$ 的一种证明方法:

$$\Phi_{12} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 = \oint_{L_2} \vec{A}_1 \cdot d\vec{l}_2$$

取库伦规范

$$\vec{A}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_1} \frac{d\vec{l}_1}{r_{12}}$$

$$\therefore \Phi_{12} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} \Rightarrow M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}} = \dots = M_{21}$$

• 互感电动势:

$$\mathcal{E}_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

☞ 例: 双绕组长直螺线管 ($I_1, N_1; I_2, N_2$)

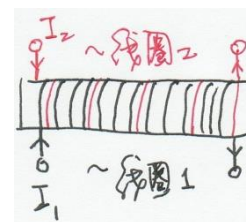
设每匝线圈自身激发磁通: Φ_1, Φ_2

设每匝线圈互相激发磁通: Φ_{12}, Φ_{21}

若“无漏磁” (要求: 同为均为密绕, 且 $l_1 = l_2 =$

l ; $S_1 = S_2 = S$), 即

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 S, & \Phi_2 &= \Phi_{21} = \mu_0 n_2 I_2 S \\ L_1 &= \frac{N_1 \Phi_1}{I_1} = \mu_0 n_1^2 V, & L_2 &= \frac{N_2 \Phi_2}{I_2} = \mu_0 n_2^2 V \end{aligned}$$



$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 V = \frac{N_1 \Phi_{21}}{I_2} = M_{21} = M = \sqrt{L_1 L_2}$$

- 一般, $M = K\sqrt{L_1 L_2}$, 其中耦合系数 K 在无漏磁时等于 1, 有漏磁时小于 1.

☞ 例: 同轴螺线管的互感系数和耦合系数 ($l_1, l_2; N_1, N_2; S$)

设电流 I_1 , 则

$$\Phi_{12} = \mu_0 n_1 I_1 S$$

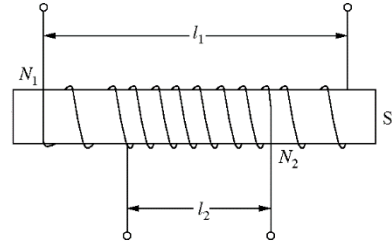
$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{12}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l_2 S$$

又有

$$L_1 = \mu_0 n_1^2 l_1 S, \quad L_2 = \mu_0 n_2^2 l_2 S$$

故有

$$M_{12} = K\sqrt{L_1 L_2}, \quad K = \sqrt{l_2/l_1} < 1$$



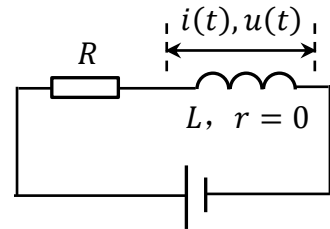
c) 自感磁能与互感磁能

➤ 自感磁能:

如图, 为自感线圈“充磁”

$$i(t): 0 \rightarrow I$$

$$u(t) = -\mathcal{E}_L = \frac{d\Psi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$



“充磁”过程中克服自感电动势“搬运”电荷做功

$$dA = u i dt = L i di, \quad A = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

转化为自感磁能

$$W_{\text{自}} = \frac{1}{2} L I^2$$

➤ 互感磁能:

- 如图, 先单独为自感线圈 L_1 充磁到稳定电流 I_1 , 此时空间磁能为

$$W_{m0} = W_{\text{自}1} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

- 此后再将 L_2 充磁回路移近, 开始为 L_2 充磁 ($i_2(t): 0 \rightarrow I_2$), 并通过可变 $\mathcal{E}_1(t)$ 来抵抗互感电动势维持 I_1 不变!

L_2 充磁回路电源做功带来 L_2 的自感磁能:

$$W_{\text{自}2} = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

L_1 回路电源做功带来互感磁能:

$$dA = u_1 I_1 dt = \pm I_1 M_{21} di_2, \quad u_1 = \begin{cases} +M_{21} di_2/dt & \text{若互感电动势与 } I_1 \text{ 反向} \\ -M_{21} di_2/dt & \text{若互感电动势沿 } I_1 \text{ 方向} \end{cases}$$

$$\therefore W_{\pm} = \int_0^{I_2} \pm I_1 M_{21} di_2 = \pm M_{21} I_1 I_2$$

· 末态 $(L_1, I_1; L_2, I_2)$ 总磁能:

$$W_m = W_{\text{自}1} + W_{\text{自}2} + W_{\pm} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm M_{21} I_1 I_2$$

相同的末态也可以通过交换两个线圈的“充磁”顺序得到, 故有

$$M_{21} = M_{12} = M$$

有时可以把“ \pm ”作为电流的相对方向, 吸收进电流强度的乘积中, 则有

$$W_m = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

对于一般的多线圈体系, 可证明

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i,j(i \neq j)} M_{ij} I_i I_j$$

其中 $M_{ij} = M_{ji}$, 且 I_i 与 I_j 的乘积可能为负值。

☞ 例: 书上 212-213 页, 两线圈串联时的自感系数。

如图, 两线圈串联时有公共电流 I , 故可看做是整体大线圈, 引入总的自感系数 L , 从能量上看,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_{\pm} I^2 &= \frac{1}{2} L_1 I^2 + \frac{1}{2} L_2 I^2 \pm M I^2 \\ L_{\pm} &= L_1 + L_2 \pm 2M \end{aligned}$$

其中“图 \pm ”分别对应 1、2 线圈“正接”和“反接”情形。

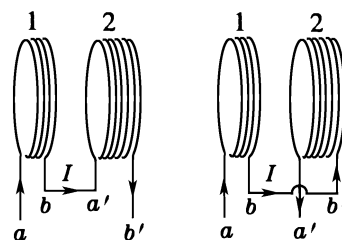


图 +

图 -

d) 磁场能量密度

➤ “场”的观点: 伴随着“充磁”, 磁场分布发生变化, 磁能“储藏”在场中

☞ 长直螺线管 (I, n, V)

$$\begin{aligned} L &= \mu_0 n^2 V \\ B &= \mu_0 n I \\ \therefore \frac{1}{2} L I^2 &= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 V = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} V \end{aligned}$$

➤ 磁能密度:

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0}$$