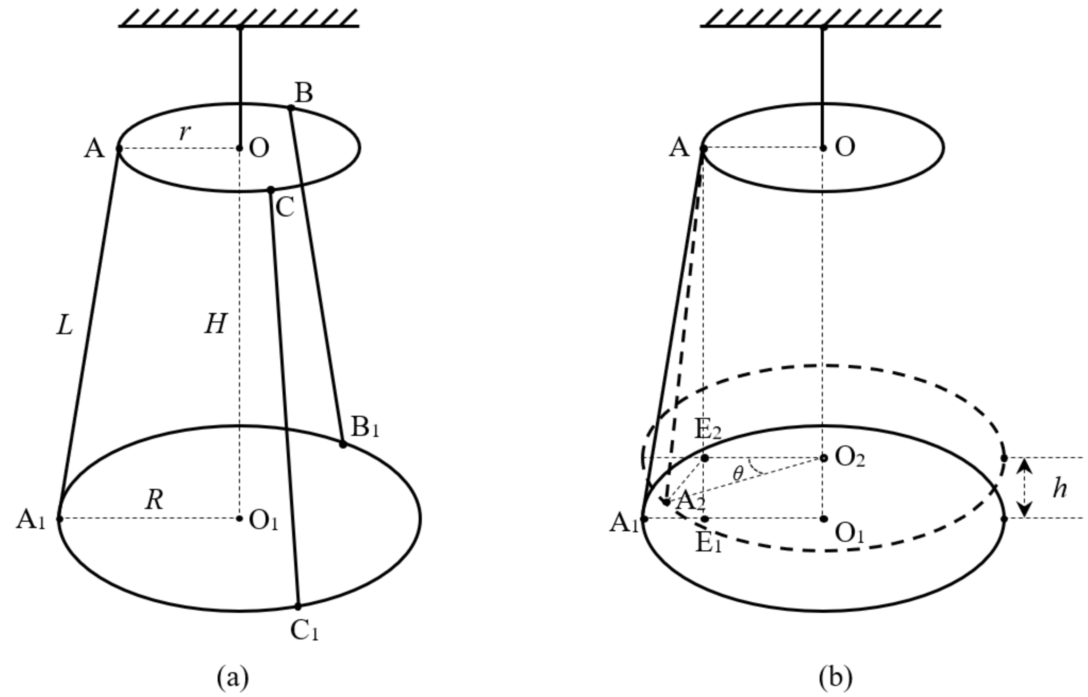

图 1　三线摆示意图

引言

图 1 是一个三线摆示意图。其中，悬盘 $O_1A_1B_1C_1$ 被三根等长的细线分别过等距离的三点 A_1、B_1 和 C_1 水平地悬挂于固定盘 OABC 上等距的三点 A、B 和 C。若悬盘的质心位于 O_1 点，可以证明，在保证 OO_1 轴竖直，且摆角振幅 θ_0 很小的条件下，悬盘会绕 OO_1 轴作近简谐的扭摆运动，其扭摆周期 T 满足：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 HI}{m_0 gRr} \qquad (1)$$

其中 H 是三线摆处于平衡位置时固定盘下表面到悬盘上表面的距离；r 和 R 分别是 OABC 和 $O_1A_1B_1C_1$ 的半径；I 是悬盘对 OO_1 轴的转动惯量；m_0 是悬盘的质量；g 是重力加速度。这里，除质心位置外，对悬盘的质量分布并未作任何限制。如果将待测物体固定在悬盘上，使整体的质心位置仍在 OO_1 连线上，式（1）中的 I 就应该是悬盘与待测物体对 OO_1 轴的转动惯量之和。

在实际测量过程中，$O_1A_1B_1C_1$ 除了作扭摆外，往往还会像单摆一样作平摆，使得摆角微小时的平衡位置很难判断。如果扭摆的微小角振幅条件不能很好满足，式（1）会变成：

$$T^2 = \frac{4\pi^2 HI}{\alpha m_0 gRr} \qquad (2)$$

其中 α 是扭摆角振幅 θ_0 的单调递减函数，其在 θ_0 较小时变化缓慢，趋于 1。设悬盘对 OO_1 轴的转动惯量为 I_0。若有转动惯量为 I_s 的规则物块和充裕的配重砝码，我们实际上可以在不测量悬盘质量和悬线长度等几何参数，不知道当地重力加速度，且不必满足摆角微小条件的情况下测得一个物件绕其过质心的某一转轴的转动惯量 I_x 以及空悬盘的转动惯量 I_0。

实验器材

支架	地脚螺丝可用于调节（目前支架放置位置已调节至固定盘水平，如实验中移动、实验后请调节恢复至固定盘水平状态！）
固定盘	上方装有 3 个可用于调节悬线长度的装置、侧边装有可用于启动悬盘转动的扳手
悬盘	侧边装有挡光针、下方装有可用于悬挂配重砝码的绳圈
悬线	长度可调节
光电计时器	光电门方位可调节
电子天平	量程 2100g、读数分辨率 0.01g、允差±0.02g
钢直尺	量程 500mm、最小分度 1mm、允差±0.15mm
规则工件	3 个不同厚度的圆环
待测工件	挖孔长方体
配重砝码	置于黑色砝码盒内（可用电子天平实测其质量）

光电计时器的使用方法：开机通电（开关在仪器后面板且已开），设定计时次数 n 为 60 次(30 个周期)，按“”键即准备计时，等挡光针经过光电门挡光时，即进行计时，在第 61 次挡光时停止计时，显示 30 个周期总时间 30T。如果要改变计时次数，可以在计时结束后按“”键或“”键，再按“”、“”键可改变计时次数。再按“”键即可计时。

实验任务：

测量**待测工件绕过质心垂直于二孔面转轴的转动惯量** I_t、**过质心垂直于四孔面转轴的转动惯量** I_f、**过质心垂直于无孔面转轴的转动惯量** I_z 及**悬盘的转动惯量** I_0。

1. 规则工件转动惯量测定

   用适当方法（给出原理公式）分别测定 3 个不同厚度的圆环的转动惯量。

2. 实验方案

   不能测量三线摆几何参数和悬盘质量。

3. 装置调整

   说明实验开始时装置应被调节到什么状态。

4. I_t、I_f 和 I_z 的测量数据及结果

   为得到 I_t、I_f 和 I_z 所需的必要测量数据及数据处理过程，测量结果需含不确定度。

5. 悬盘的转动惯量 I_0 的测量结果

   给出 I_0 的测量结果（含不确定度）。

6. 实验要点

   实验安排和操作过程中需特别注意的要点。

7. 分析与讨论

   结合具体实验数据及结果进行误差分析，总结本实验主要误差来源。

   与利用三线摆测定刚体转动惯量传统实验方法进行比较分析。

附件：利用三线摆测定刚体转动惯量传统实验方法参考文献

------《普通物理实验》　林抒&龚镇雄编

人民教育出版社，1981 年出版

*实验11　三线悬盘实验

〔学习重点〕

1. 用三线悬盘法测定物体的转动惯量;
2. 检验转动惯量的平行轴定理;
3. 根据误差公式及实际装置、仪器情况来选择仪器及安排测量.

〔仪器用具〕

三线悬盘、停表、米尺、游标尺、天平、台秤等.

〔仪器装置及原理〕

三线悬盘是用三条金属丝沿等边三角形的顶点 b_1、b_2、b_3 对称地连结一个均匀圆盘 B 的边缘而成(见图 11-1). 使这三根金属丝由于盘重引起的负载相同. 金属丝的上端系在一个较小的水平垫盘 A 上. 当 B 盘水平、三悬线等长时，圆盘 B 可以绕垂直于其盘面并通过其中心的轴线 OO' 作扭摆转动;转动的同时圆盘 B 的质心 O' 将沿着转动轴移动(升降). 摆动的周期与圆盘 B 的转动惯量有关;如果将要测定其转动惯量的物体放在这个圆盘上,(物体要适当放置,使质心仍通过 B 盘中心,原转动轴线不变.)则系统的摆动周期就要变为另一值.

· 112 ·

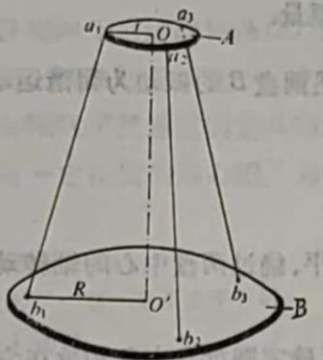

图 11-1

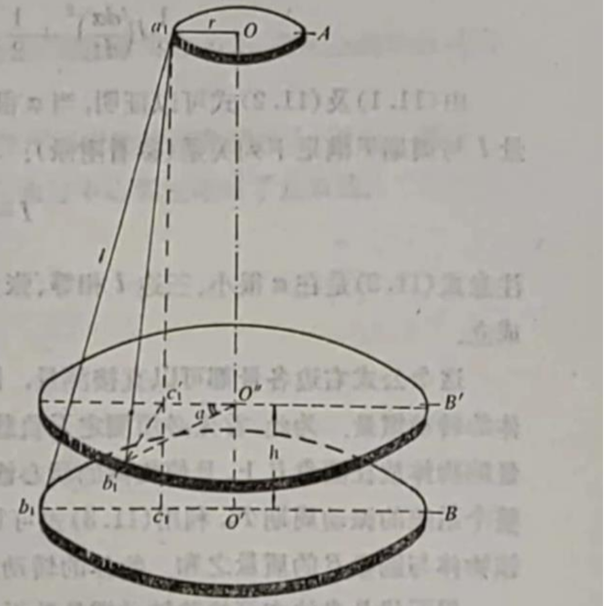

图 11-2

由于三悬线张力相等，B 盘运动对于中心轴线是对称的，我们分析其一边的运动．用 l 表示悬线的长度(图 11-2)，用 R 和 r 分别表示系绳点到圆盘 B 中心和垫盘 A 中心的距离．当圆盘 B 相对于上部垫盘 A 转过某一角度 α 时，系绳点 b_1 移到位置 b_1'，同时圆盘 B 上升一高度 h，

$$h=\overline{O'O''}=\overline{a_1c_1}-\overline{a_1c_1'}$$

$$=\frac{\overline{a_1c_1}^2-\overline{a_1c_1'}^2}{\overline{a_1c_1}+\overline{a_1c_1'}}$$

由于 $\overline{a_1c_1}^2=\overline{a_1b_1}^2-\overline{b_1c_1}^2=l^2-(R-r)^2$，

而 $\overline{a_1c_1'}^2=\overline{a_1b_1'}^2-\overline{b_1'c_1'}^2=l^2-\overline{b_1'c_1'}^2$.

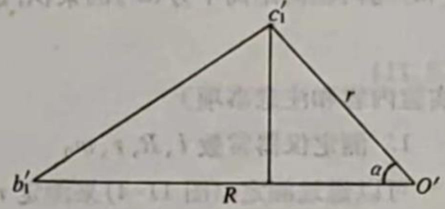

图 11-3

由图 11-3，利用余弦定律可得：

$$\overline{b_1'c_1'}^2=r^2+R^2-2rR\cos\alpha.$$

所以 $\overline{a_1c_1'}^2=l^2-(R^2+r^2-2Rr\cos\alpha)$．根据这些方程，可将 h 的表达式变作如下的形式：

$$h=\frac{2Rr(1-\cos\alpha)}{\overline{a_1c_1}+\overline{a_1c_1'}}=\frac{2Rr\cdot2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\overline{a_1c_1}+\overline{a_1c_1'}}.$$

在悬线很长而圆盘 B 的偏转角 α 很小时，式中分母上的 $\overline{a_1c_1}$ 和 $\overline{a_1c_1'}$ 可认为等于 H，即

$$H=\sqrt{l^2-(R^2-r)^2},$$

同时，角度的正弦可以用弧度来代替，于是：

$$h=\frac{Rr\alpha^2}{2H}. \qquad (11.1)$$

由于三线悬盘 B 在运动时，既绕中心轴转动，又有升降运动，因此在任何时刻其动能为 $\frac{1}{2}I\omega^2+\frac{1}{2}mv^2\left(其中\ \omega=\frac{d\alpha}{dt},v=\frac{dh}{dt}\right)$；其重力势能为 mgh．如果忽略摩擦力，则在重力场中机械能守恒：即

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dh}{dt}\right)^2+mgh=\text{恒量}. \tag{11.2}$$

由(11.1)及(11.2)式可以证明，当α很小、l很大时，上述圆盘B的振动为简谐运动，转动惯量I与周期T满足下列关系(参看附录)：

$$I=\frac{mgRr}{4\pi^2H}T^2. \tag{11.3}$$

注意式(11.3)是在α很小、三边l相等、张力相等、上下盘水平、绕过两盘中心的轴转动的条件下成立.

这个公式右边各量都可以直接测量，因此利用此式可以确定圆盘B本身和放在它上面的物体的转动惯量. 为此，首先必须测定无负载时圆盘B的转动惯量I_0. 然后，把一个要测定转动惯量的物体放在圆盘B上，且使物体的质心恰在仪器的转轴上. 重新使圆盘摆动，用同样方法测定整个系统的振动周期T_1，利用(11.3)式可算出整个系统的转动惯量I_1，(11.3)式中的m应等于该物体与圆盘B的质量之和. 物体的转动惯量I须由$I=I_1-I_0$求得.

用三线悬盘法亦可检验转动惯量的平行轴定理. 我们知道物体的转动惯量随着转轴的不同而有改变，转轴可以通过物体内部，也可以在物体外部. 就两平行轴而言，则物体对于任意轴的转动惯量(I_a)，等于通过此物体以质心为轴(此轴与该任意轴平行)的转动惯量(I_c)加上物体质量m_1与两轴间距离平方(d^2)的乘积，这就是平行轴定理. 写成

$$I_a=I_c+m_1d^2. \tag{11.4}$$

〔实验内容和注意事项〕

1. 测定仪器常数l、R、r、m_0

可以通过测定a(图 11-4)来测定r. $\triangle a_1a_2a_3$为一正三角形，所以$r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 用同法测R.

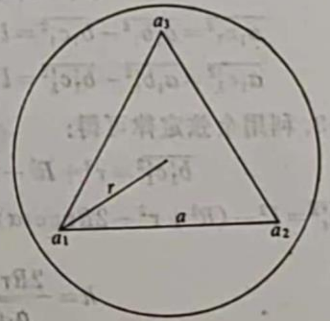

图 11-4

2. 测I_0

因为l、R、r以及圆盘B的质量m_0可作为已知的仪器常数，所以只要测定圆盘转动的周期T_0，就可以用(11.3)式求出圆盘B的转动惯量来. 为此，须使圆盘B作扭摆运动. 为了避免圆盘B发生左右摆动，故不直接扭转圆盘B，而是使上面的水平垫盘A绕其自身轴偏转一角度，借着线的张力能够使圆盘B作扭摆运动，而避免产生左右摆动. 因为我们没有考虑左右摆动的能量，而且左右摆动也使测量发生困难.

在测定周期时，偏转角α不要过大($\alpha\approx15°$—$20°$). 周期次数n取多少，同学自己考虑. 方法是这样的：根据误差公式$\frac{\Delta l}{l}=\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta R}{R}+\frac{\Delta r}{r}+\frac{\Delta H}{H}+\frac{2\Delta T}{T}$以及实际测出之$R$、$r$、$l$、$m$，使$2\frac{\Delta T}{T}$$\left(\text{即}2\frac{\Delta nT}{nT}\right)$对$\frac{\Delta l}{l}$之影响比起其他量的影响要小得多(在可能情况下小一个数量级)

3. 测定两相同之铁饼置于盘中心这一系统的转动惯量I_1

4. 检验平行轴定理

把二铁饼相对于系统的转轴 $\overline{OO'}$ 对称地放置在 B 盘上，设距盘中心为 d，测定系统的转动惯量 I_2. 同时测出两铁饼总质量 m_1，应有 $m_1d^2=I_2-I_1$.

为使转动轴线仍然通过圆盘 B 的质心，必须把两物体严格对称地放在圆盘上，因此，圆盘上刻着彼此间有一定距离的同心圆. 为便于判断 α，在盘上通过中心邻近地画了几条线.

〔问题〕

1. 为什么要求：

(1) 两盘水平；有一个不水平行吗？

(2) 三个 l 相等；

(3) 三根线张力相等；

(4) 不能晃动.

2. l、R、r、m、m_0 选用什么仪器测？是怎样考虑的？l、R、r 都是从何处到何处？

3. 以下因素对结果有多大影响？

(1) $\alpha\approx15°—20°$；

(2) 以 $2H$ 代替 $\overline{a_1c_1}+\overline{a_1c_1'}$；

(3) 如果以 l 代替 H.

4. 本实验能否用作图来检验平行轴定理？如果可以，实验应如何安排？

〔附记〕

证明三线圆盘的振动是简谐运动：

由(11.1)式有

$$\frac{dh}{dt}=\frac{Rr}{H}\cdot\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)\cdot\alpha, \tag{11.5}$$

考虑圆盘的转动能远比上下运动的平动能为大，即

$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\gg\frac{1}{2}m\left(\frac{dh}{dt}\right)^2.$$

将(11.2)式简化后对 t 求微商，并将(11.5)式代入，有

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-\left(\frac{mgRr}{HI}\right)\alpha=-\omega_0^2\alpha. \tag{11.6}$$

可以看出，振动的角加速度与角位移成正比，方向相反. 因此，这是一简谐运动. 简谐运动的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，于是有

$$I=\frac{mgRr}{4\pi^2H}T^2. \qquad [11.3]$$