# 《数学物理方法》第八章《解析延拓·$\Gamma$函数》

1. 若函数$f(z)$在右半平面$\mathrm{Re}\, z > 0$内解析，且满足

$$f(z+1) = zf(z), \qquad f(1) \neq 0, \tag{1}$$

证明$f(z)$能够延拓到全平面，$z = 0, -1, -2, \cdots$除外。

2. 证明

$$f_1(z) = 1 + az + a^2z^2 + \cdots \tag{2}$$

与

$$f_2(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{(1-a)z}{(1-z)^2} + \frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3} - + \cdots \tag{3}$$

互为解析延拓。

3. 设$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln\Gamma(z)$，证明：

(1) $\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)$;

(2) $\psi(z+n) - \psi(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \cdots + \frac{1}{z+n-1}$;

(3) $\psi(1-z) - \psi(z) = \pi\cot\pi z$;

(4) $2\psi(2z) - \psi(z) - \psi(z+\frac{1}{2}) = 2\ln 2$.

4. 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q\mathrm{d}x, \quad \mathrm{Re}\, p > -1, \quad \mathrm{Re}\, q > -1, \qquad \int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha\theta\mathrm{d}\theta, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^\alpha\theta\mathrm{d}\theta, \quad -1 < \alpha < 1.$