2023 春数理方法 (上) 期末考试回忆

授课教师：马伯强

本试题为考后回忆版，笔者能力有限，错误疏漏在所难免，仅供题型参考

1. 求下列各式的值

(1)$(1+i)^{2023}$　　(2)$^{i}\sqrt{i}$　　(3)$cos(-i)$　　(4)lni　　(5)$arcsini$

2. 请用复数证明欧几里得几何中的平行公设。平行公设在欧式平面和复平面上有何异同？[1]

3. 设解析函数 $f(z)=u+iv$，若 u 或 v 分别满足下列条件，求 $f(z)$

(1)$u=x^2-y^2$　　(2)$u=x+y$　　(3)$u=x-y$　　(4)$u=r^2 sin\theta cos\theta$

(5)$v=x^2+y^2$

4. 求解下列积分 (前四个积分围道是 $|z|=1$，最后一个积分围道是 $|z|=\infty$)

(1)$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z}$　　(2)$\oint \frac{\mathrm{d}z}{|z|}$　　(3)$\oint \frac{|\mathrm{d}z|}{z}$　　(4)$\oint |\frac{\mathrm{d}z}{z}|$　　(5)$\oint \frac{\mathrm{d}z}{z}$

5. 已知 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z|<1$

(1) 求 $f(z)$ 在全平面的解析延拓 $g(z)$

(2) 分别讨论 $g(z)$ 在 $z=1,-1,\infty$ 的级数展开和收敛半径

(3) 求 $g(z)$ 在全平面内所有奇点处的留数

6. 利用留数定理求积分 $\int_0^{\infty} \frac{1}{1-x^{2023}} \mathrm{d}x$

7. 利用 Γ 函数和 B 函数将下列式子化为你认为的最简形式：

(1)$(2n+1)!$　　(2)$(n+\nu)(n+\nu-1)\cdots(\nu+1)$　　(3)$\frac{n!m!}{(n+m)!}$　　(4)$\frac{\pi}{sin\pi z}$　　(5)$\sqrt{\pi}$

8. 记 C_R 为右半平面逆时针方向以 R 为半径的半圆形路径，求 $R\to\infty$ 时的积分：

$$\int_{C_R} \frac{e^{zt}}{(z^2+\omega^2)^2} \mathrm{d}z$$

9. 二阶线性常微分方程 $\omega''+p\omega'+q\omega=0$，已知第一解为 $\omega_1(z)$，求第二解 $\omega_2(z)$ 的通用公式。

10. 求解常微分方程的初值问题：

$$\omega''-k^2\omega=\delta(x^2-(t_1+t_2)x+t_1t_2)$$

$$\omega(0)=0 \qquad \omega'(0)=0$$

[1]本题在考后引起了争议，“证明公设”不是很符合逻辑，证明的方法也五花八门，最后给分情况未知