《数学物理方法》第九章《拉普拉斯变换》

1. 求下列函数拉普拉斯变换的像函数：

   (1) $t^n, \quad n=0,1,2,\cdots$;　(2) $t^a, \quad \mathrm{Re}\, a>-1$;

   (3) $\mathrm{e}^{-\lambda t}\sin\omega t$;　(4) $\frac{1-\cos\omega t}{t^2}$;　(5) $\int_t^\infty \frac{\cos\tau}{\tau}\mathrm{d}\tau$;

   (6)
$$f(t)=\begin{cases}\mathrm{e}^t, & 0<t<1,\\ 0, & t>1.\end{cases}$$

2. 求下列函数拉普拉斯变换的原函数：

   (1) $\frac{a^3}{p(p+a)^3}$;　(2) $\frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}$;

   (3) $\frac{4p-1}{(p^2+p)(4p^2-1)}$;　(4) $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$;　(5) $\frac{\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2}, \quad \tau>0$.

3. 利用拉普拉斯变换计算下列积分：

   (1) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{t}\mathrm{d}$;　(2) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

   (3) $\int_0^\infty \frac{\cos xt}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$;　(4) $\int_0^\infty \frac{\sin xt}{x(x^2+1)}\mathrm{d}x$.

4. 求解变系数常微分方程初值问题：
$$\begin{cases}x''+tx'+x=0,\\ x(0)=1, \quad x'(0)=0.\end{cases}$$

5. 设有放射性衰变过程$A\to B\to C\to\cdots$, 若其中三种元素的分子数$N_1(t)$, $N_2(t)$及$N_3(t)$满足方程及初始条件
$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=-\lambda_1 N_1, & N_1(0)=N,\\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2, & N_2(0)=0,\\ \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t}=\lambda_2 N_2-\lambda_3 N_3, & N_3(0)=0,\end{cases}$$
   其中λ_1, λ_2及λ_3为不相等的常数，试求出$N_1(t)$, $N_2(t)$及$N_3(t)$.