《数学物理方法》第五章《无穷级数》习题

1. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$皆为正项级数，试举反例，说明下列各种说法不正确：

   (1) 若$\lim_{n\to\infty} na_n = 0$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛；

   (2) 若$a_{2n} < a_{2n+1}$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

   (3) 若$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \infty$, 则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散；

   (4) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$发散.

2. 证明无穷级数

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots, \qquad |z| < 1 \tag{1}$$

   收敛，并求其积。

3. 已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为R_1和R_2，试讨论下列幂级数的收敛半径：

   (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)z^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$;

   (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} z^n$;　　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} z^n$.