《数学物理方法》第二章《复变函数》习题

1. 试证明极坐标下的柯西－黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{1}$$

2. 设 $\rho = \rho(r,\theta)$ 及 $\varphi = \varphi(r,\theta)$ 是实变量 $x,\,y$ 的实函数。若 $f(z) = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ 是 $z = x + \mathrm{i}\,y$ 的解析函数, 试证：

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho\frac{\partial \varphi}{\partial x}. \tag{2}$$

3. 若函数 $f(z) = u + \mathrm{i}v$ 在 G 内解析，且 $f(z) \neq$ 常数，试讨论下列函数是否也是 G 内的解析函数：

   (1) $u - \mathrm{i}\,v$;　　(2) $-u - \mathrm{i}\,v$;

   (3) $-v + \mathrm{i}\,u$;　　(4) $v + \mathrm{i}\,u$.

4. 若 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ 解析，且

$$u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2), \tag{3}$$

   试求 $f(z)$。