《数学物理方法》第四章《复变积分》习题

1. 计算下列积分：

   (1) $\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$;　　(2) $\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$;

   (3) $\int_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}$;　　(4) $\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$.

2. 考虑两简单闭合曲线C_1, C_2，彼此相交于A, B两点。设C_1与C_2所包围的内部区域分别为G_1与G_2，其公共区域为为g. 若$f(z)$在曲线C_1及C_2 上解析，且在区域G_1-g及G_2-g内解析，试证明：

$$\oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2} f(z)\mathrm{d}z. \tag{1}$$

3. 证明：

$$\oint_{C_1}\frac{\mathrm{d}z}{z}=4\pi\mathrm{i}\,, \tag{2}$$

   其中积分路径C为闭合曲线$r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$. 这个结果和围绕原点一周$\oint\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi\mathrm{i}$ 的结论矛盾吗？为什么？

4. 计算下列积分：

   (1) $\oint_C\frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$, C分别为：

   (i) $|z|=\frac{1}{2}$, (ii) $|z-1|=1$, (iii) $|z|=3$.

   (2) $\oint_C\frac{e^{\mathrm{i}\,z}}{z^2+1}\mathrm{d}z$, C分别为：

   (i) $|z-\mathrm{i}\,|=1$, (ii) $|z|=2$, (iii) $|z+\mathrm{i}\,|+|z-\mathrm{i}\,|=2\sqrt{2}$.

5. 计算下列积分：

   (1) $\oint_{|z|=2}\frac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$;　　(2) $\oint_{|z|=2}\frac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$;

   (3) $\oint_{|z|=2}\frac{z^2}{z-1}\mathrm{d}z$;　　(4) $\oint_{|z|=2}\frac{z^2-1}{z^2+1}\mathrm{d}z$;

   (5) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2}$;　　(6) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1}$;

   (7) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-8}$;　　(8) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2-2z+3}$;

   (9) $\oint_{|z|=2}\frac{|z|e^z}{z^2}\mathrm{d}z$;　　(10) $\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}$.

6. 试证明等式

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\mathrm{d}z=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{3}$$

从而计算出积分

$$\int_0^{\pi}e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{4}$$

7. 如果函数$f(z)$在G内解析，且z_0为G内一点，有$f'(z_0)\neq 0$，试证明

$$\frac{2\pi \mathrm{i}}{f'(z_0)}=\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-f(z_0)}, \tag{5}$$

其中C是以z_0为圆心的一个足够小的圆。