

《数学物理方法》第七章《留数定理及其应用》

1. 求下列函数在奇点处的留数:

- (1) $\frac{1}{z^3 - z^5}$; (2) $\frac{1}{(1+z^2)^{m+1}}$;
(3) $\frac{z}{1 - \cos z}$; (4) $\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{sh} \sqrt{z}}$; (5) $e^{\frac{1}{1-z}}$;
(6) $\cos \sqrt{\frac{1}{z}}$; (7) $\frac{1}{(z-1) \ln z}$;
(8) $\frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(z+1)^n} \right]$.

2. 指出下列函数在 ∞ 点的性质, 并求其留数:

- (1) $\frac{1}{z}$; (2) $\frac{\cos z}{z}$; (3) $\frac{z}{\cos z}$;
(4) $\frac{z^2+1}{e^z}$; (5) $e^{-\frac{1}{z^2}}$; (6) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

3. 讨论 $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln f(z)$ 在 $z = a$ 点的性质, 若 a 点是 $f(z)$ 的:

- (1) m 阶零点; (2) m 阶极点。

如果 $z = a$ 是 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的孤立奇点的话, 则求出函数 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在该点的留数。

4. 计算下列积分:

- (1) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p \cos x + p^2}$, $0 < p < 1$; (2) $\int_0^{2\pi} \cos^{2n} x dx$;
(3) $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta$; (4) $\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \sin^2 \theta}$.

5. 计算下列积分:

- (1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx$; (2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $a > 0, b > 0$;
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1} dx$, n, m 均为正整数, 且 $n > m$; (4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, n 为正整数;
(5) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$; (6) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2x+4}$.

6. 计算下列积分:

- (1) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4} dx$; (2) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2+a^2} dx$, $a > 0, m > 0$;
(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x+b)^2+a^2} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{(x+b)^2+a^2} dx$, $a > 0, m > 0$;
(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)} dx$, $a > 0, b > 0, c > 0$.

7. 计算积分: $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$.

8. 计算积分: $\int_0^\infty \frac{x^s}{(1+x^2)^2} dx, \quad -1 < s < 3.$
9. 设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 分别为 m 阶及 n 阶多项式, 并且 $m \leq n-2$, 且 $Q(z)$ 无非负实根. 考虑函数 $\frac{P(z)}{Q(z)} \ln z$ 的积分, 证明 $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = -\sum_{\text{全平面}} \text{Res} \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} \ln z \right\},$
 $0 \leq \arg z \leq 2\pi.$
10. 利用上题结果, 计算积分: $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x+x^2)^2} dx.$