《数学物理方法（下）》第十章《柱函数》习题

1. 证明：

$$\int xJ_\nu^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\left[J_\nu^2(x)+J_{\nu+1}^2(x)\right]-\nu xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)+C,$$

其中$\mathrm{Re}\,\nu>0$，C为积分常数。

如果把式中的贝赛尔函数换成其它类型的柱函数，公式还成立吗？

2. 计算积分（选两题）：

(a)

$$\int_0^x x^{-n}J_{n+1}(x)\mathrm{d}x;$$

(b)

$$\int_0^a x^3 J_0(x)\mathrm{d}x;$$

(c)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}J_0(\sqrt{bx})\mathrm{d}x,\quad a>0, b\geq 0;$$

(d)

$$\int_0^t J_0\left(\sqrt{x(t-x)}\right)\mathrm{d}x.$$

3. 证明诺伊曼函数的递推关系与贝赛尔函数相同。

4. 若n为一正整数，证明

$$J_{n+1/2}(x)=\mathrm{i}^{\,-n}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mu x}P_n(\mu)\mathrm{d}\mu,$$

并推出

$$\mathrm{i}^{\,n}\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tx}J_{n+1/2}(x)x^{-1/2}\mathrm{d}x=\begin{cases} 2\pi P_n(t), & |t|<1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$$

其中$P_n(x)$是n次勒让德多项式。

5. 一导体球，半径为a，初温为常温u_0，球面温度为0，求球内温度的变化和分布。