目　　录

第一部分 习 题

习题一 复 数

1. 写出下列复数的实部、虚部、模和辐角:

(1) $1+i\sqrt{3}$；　(2) $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$, $0\leqslant\alpha<2\pi$；

(3) $e^{i\sin x}$, x 为实数；　(4) e^{iz}；

(5) e^{z}；　(6) $\sqrt[4]{-1}$；　(7) $\sqrt{1+i}$；

(8) $\sqrt{\dfrac{1+i}{1-i}}$；　(9) e^{i+i}；

(10) $e^{i\varphi(x)}$, $\varphi(x)$是实变数 x 的实函数。

2. 把下列关系用几何图形表示出来：

(1) $|z|<2$, $|z|=2$, $|z|>2$；

(2) $\operatorname{Re} z>\dfrac{1}{2}$, $1<\operatorname{Im} z<2$；

(3) $\arg(1-z)=0$, $\arg(1+z)=\dfrac{\pi}{3}$,

$\arg(z+1-i)=\dfrac{\pi}{2}$；

(4) $0<\arg(1-z)<\dfrac{\pi}{4}$, $0<\arg(1+z)<\dfrac{\pi}{4}$,

$\dfrac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\dfrac{\pi}{3}$；

(5) $\alpha<\arg z<\beta$ 与 $\gamma<\operatorname{Re} z<\delta$ 的公共区域，α,β,γ 及 δ 均为常数；

(6) $|z-\mathrm{i}|<1$，$1<|z-\mathrm{i}|<\sqrt{2}$；

(7) $|z-a|=|z-b|$，a,b 为常数；

(8) $|z-a|+|z-b|=c$，其中 a,b,c 均为常数，且 $c>|a-b|$；

(9) $|z|+\operatorname{Re} z<1$；　　(10) $0<\arg \dfrac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}<\dfrac{\pi}{4}$。

3．已知一复数 z，画出 $\mathrm{i}z$，$-z,\bar{z},\dfrac{1}{\bar{z}},\dfrac{1}{z}$，并指出它们之间的几何关系。

4．若 $|z|=1$，试证明

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=1,$$

a,b 为任意复数。

5．证明下列各式：

(1) $|z-1|\leqslant\big||z|-1\big|+|z||\arg z|$；

(2) 若 $|z_1|=|z_2|=|z_3|$，则

$$\arg\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}=\frac{1}{2}\arg\frac{z_2}{z_1}.$$

6．用复数 z 表示曲线上的变点。

(1) 试写出经过点 a 且与复数 b 所代表的矢量平行的直线方程；

(2) 写出以 d 和 $-d$ 为焦点、长轴为 $2a$ 的椭圆方程，$a>|d|$。

7. 用复数运算法则推出：

(1) 平面直角坐标平移公式；

(2) 平面直角坐标旋转变换公式。

8. 设复数 z_1,z_2,z_3 满足关系式

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

证明：$|z_2-z_1|=|z_3-z_2|=|z_1-z_3|$。

9. (1) 给出 z_1,z_2,z_3 三点共线的充要条件；

(2) 给出 z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆的充要条件。

10. 求下列方程的根，并在复平面上画出它们的位置：

(1) $z^2+1=0$；　　(2) $z^3+8=0$；

(3) $z^4-1=0$；　　(4) $z^4+1=0$；

(5) $z^{2n}+1=0$，n 为正整数；

(6) $z^2+2z\cos\lambda+1=0$，$0<\lambda<\pi$。

11. 设 $z=p+iq$ 是实系数方程

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=0$$

的根，证明 $\bar{z}=p-iq$ 也必定是此方程的根。

12. 证明：$\sin^4\varphi=\frac{1}{8}(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+3)$。

13. 把 $\sin n\varphi$ 和 $\cos n\varphi$ 用 $\sin\varphi$ 和 $\cos\varphi$ 表示出来。

14. 将下列和式表示成有限形式：

(1) $\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$；

(2) $\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$。

15. 证明：

$$\sin\frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\cdots\cdot\sin\frac{(n-1)\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

16. 求下列序列$\{a_n\}$的聚点和极限，如果是实数序列，

则同时求出上极限和下极限：

(1) $a_n=(-)^n\dfrac{n}{2n+1}$；　　(2) $a_n=(-)^n\dfrac{1}{2n+1}$；

(3) $a_n=n+(-)^n(2n+1)\mathrm{i}$；

(4) $a_n=2n+1+(-)^n n\mathrm{i}$；

(5) $a_n=\left(1+\dfrac{\mathrm{i}}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{6}$；(6) $a_n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cos\dfrac{n\pi}{3}$。

17．证明序列$\{a_n\}$

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

提示：证明$\{a_n\}$是单调有界序列。

18．证明拉格朗日恒等式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k w_k\right|^2=\left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}|w_k|^2\right)-\sum_{k<j=1}^{n}|z_k\overline{w}_j-z_j\overline{w}_k|^2.$$

19．试证明：从条件

$$\lim_{n\to\infty}z_n=A$$

可以导出

$$\lim_{n\to\infty}\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=A.$$

又当 $A=\infty$时，上述结论还正确吗？

习题二　解 析 函 数

20．设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，$c=a+\mathrm{i}b$，并且已知 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，证明

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = c$$

与

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = b$$

彼此等价。

21．证明：$f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$在单位圆$|z| < 1$内连续但不一致连续。

22．证明下列函数在$z = 0$点连续：

(1) $f(z) = \begin{cases} \dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{z^2}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases}$

(2) $f(z) = |z|$。

23．判断下列函数在何处可导（并求出其导数）、在何处解析：

(1) $|z|$；　　(2) $\bar{z}$；

(3) z^m，$m = 0, 1, 2, \cdots$；

(4) e^z；　　(5) $(x^2 + 2y) + i(x^2 + y^2)$；

(6) $(x - y)^2 + 2i(x + y)$；

(7) $z\mathrm{Re}\, z$；　　(8) $1/z$；

(9) $\cos z$；　　(10) $\mathrm{sh}\, z$。

24．试证明极坐标下的柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

25．证明：若函数$f(z)$的偏导数在$z = z_0$点连续，且满足柯西-黎曼方程，则$f(z)$在$z = z_0$点可导。

26. 设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{z^5}{|z|^4}, & z\neq 0;\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

(1) 证明：当$z\to 0$时，$\dfrac{f(z)}{z}$的极限不存在；

(2) 若 $u=\mathrm{Re}\, f(z)$，$v=\mathrm{Im}\, f(z)$，证明：$u(x,0)=x$，$v(0,y)=y$，$u(0,y)=v(x,0)=0$；

(3) 证明：u,v 的偏导数存在，且柯西-黎曼方程成立。但(1)中已证明$f'(0)$并不存在，这个结论和第25题矛盾吗？

27. 试利用极坐标形式下的柯西-黎曼方程（第24题），证明：

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

28. 设 $\rho=\rho(x,y)$及 $\varphi=\varphi(x,y)$是实变量 x,y 的实函数。若 $f(z)=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$是 $z=x+\mathrm{i}y$ 的解析函数，证明：

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=\rho\frac{\partial\varphi}{\partial y},\qquad \frac{\partial\rho}{\partial y}=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

29. 设 $\rho=\rho(r,\theta)$及 $\varphi=\varphi(r,\theta)$ 是实变数 r,θ 的实函数。若 $w=f(z)$解析，其中 $w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，试证：

$$\frac{\partial\rho}{\partial r}=\frac{\rho}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\qquad \frac{\partial\rho}{\partial\theta}=-r\rho\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

30. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在 G 内解析，且 $f(z)\neq$常数，

试讨论下列函数是否也是G内的解析函数：

(1) $u-\mathrm{i}v$；　　(2) $-u-\mathrm{i}v$；

(3) $-v+\mathrm{i}u$；　　(4) $v+\mathrm{i}u$。

31．设$z=x+\mathrm{i}y$，已知解析函数$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$的实部或虚部如下，试求其导数$f'(z)$：

(1) $u=e^{-y}\cos x$；　　(2) $u=\mathrm{ch}x\cos y$；

(3) $v=\sin x\,\mathrm{sh}\,y$；　　(4) $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；

(5) $u=\ln(x^2+y^2)$；　　(6) $v=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$。

32．试根据下列条件确定解析函数$f(z)=u+\mathrm{i}v$：

(1) $u=x+y$；　　(2) $u=\sin x\,\mathrm{ch}y$；

(3) $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；　　(4) $v=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$。

33．若$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$解析，且$u(x,y)-v(x,y)=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$，试求$f(z)$。

34．若$u(x,y)$具有连续三阶偏导数，且$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，证明函数$\dfrac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{i}\dfrac{\partial u}{\partial y}$解析。

35．如果$u(x,y)$和$v(x,y)$都是调和函数，试讨论下列函数是否也是调和函数：

(1) $u(v(x,y),0)$；　　(2) $u(0,v(x,y))$；

(3) $u(x,y)v(x,y)$；　　(4) $u(x,y)+v(x,y)$。

36．假设函数$f(z)$在区域G内的任何一点z都可满足$f'(z)=0$，证明$f(z)$在G内为常数。

37．若$f(z)$在区域G内解析，且$\mathrm{Im}f(z)=0$，证明$f(z)$为常数。

38. 若$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在区域G内解析，且$au(x,y)+bv(x,y)=c$，a,b,c是不为0的实常数，证明$f(z)$为常数。

如果a,b,c是不为0的复常数，这个结论还成立吗？

39. 若$f(z),g(z)$在$z=a$点解析，且$f(a)=g(a)=0$，而$g'(a)\neq 0$，试证：

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

40. 设点z沿着从原点出发的射线运动，其模无限增大，试讨论函数e^z的变化趋势。

41. 试证明下列公式（z是任意复数）：

(1) $\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$；

(2) $\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$；

(3) $\operatorname{sh}z=-i\sin iz$；

(4) $\operatorname{ch}z=\cos iz$；

(5) $\cos^{-1}z=-i\ln(z+\sqrt{z^2-1})$；

(6) $\operatorname{tg}^{-1}z=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+iz}{1-iz}$；

(7) $\operatorname{ch}^2z-\operatorname{sh}^2z=1$；

(8) $1-\operatorname{th}^2z=\operatorname{sech}^2z$.

42. 证明下列公式（z是任意复数）：

(1) $\frac{d}{dz}\operatorname{sh}z=\operatorname{ch}z$；　　(2) $\frac{d}{dz}\operatorname{ch}z=\operatorname{sh}z$；

(3) $\frac{d}{dz}\operatorname{th}z=\operatorname{sech}^2z$；　　(4) $\frac{d}{dz}\operatorname{cth}z=-\operatorname{csch}^2z$.

43. 证明下列不等式（x,y是实数）：

(1) $|\operatorname{sh}y|\leqslant|\sin(x+iy)|\leqslant\operatorname{ch}y$；

(2) $|\operatorname{sh}y|\leqslant|\cos(x+iy)|\leqslant\operatorname{ch}y$.

44. 解下列方程：

(1) $\mathrm{sh}z=0$； (2) $2\mathrm{ch}^2z-3\mathrm{ch}z+1=0$；

(3) $\sin^2z-\frac{5}{2}\sin z+1=0$； (4) $\mathrm{tg}z=\mathrm{i}$。

45. 求出下列函数值：

(1) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}}$； (2) $\sin\mathrm{i}$；

(3) $\cos(5-\mathrm{i})$； (4) $\ln(-1)$。

46. 扇形区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 经变换 $w=z^3$ 后变成什么区域？

47. 试证：圆 $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$ 经变换 $w=\frac{1}{z}$ 后仍为圆，并讨论 $A=0$ 及 $D=0$ 的情形。

48. $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}$ 把实轴上线段 $0\leqslant x<2\pi$ 变为什么图形？

49. 双纽线 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 经变换 $w=z^2$ 后变为什么图形？a 是已知常数。

50. 证明：$w=-\mathrm{i}\frac{z-1}{z+1}=-\mathrm{i}+\mathrm{i}\frac{2}{z+1}$ 将直线 $y=ax$ 变为圆。

51. 证明：在变换 $w=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$ 下，z 平面上以原点为圆心、$\mathrm{e}^{\beta}(\beta>0)$ 为半径的圆变为 w 平面上的椭圆，其焦点为 $\pm\mathrm{i}$，长、短半轴分别为 $\mathrm{ch}\beta$ 及 $\mathrm{sh}\beta$。

52. 设 $w=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 解析，且 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\neq0$，试证明

曲线族

$$u(x,y)=C_1,\ v(x,y)=C_2$$

(C_1,C_2为任意常数)互相正交。

习题三　多值函数

53．判断下列函数是单值的还是多值的：

(1) $z+\sqrt{z-1}$；　　(2) $\frac{1}{1+\ln z}$；

(3) $\sqrt{\cos z}$；　　(4) $\ln\sin z$；

(5) $\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；　　(6) $\frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$。

54．找出下列函数的枝点，并讨论 z 绕各个枝点移动一周回到原处后函数值的变化．若同时绕两个、三个枝点，又会出现怎样的情况？

(1) $\sqrt{1-z^3}$；　　(2) $z+\sqrt{z^2-1}$；

(3) $\sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$，a,b为已知复数；

(4) $\frac{1}{1+\ln z}$；　　(5) $\frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$；

(6) $\sqrt[3]{z^2-4}$；　　(7) $\sqrt[3]{z^2(z+1)}$；

(8) $\ln(z^2+1)$。

55．函数 $w=z+\sqrt{z-1}$，规定 $w(2)=1$，试分别求当 z 沿着图中的 C_1 和 C_2 连续变化时 $w(-3)$ 之值。

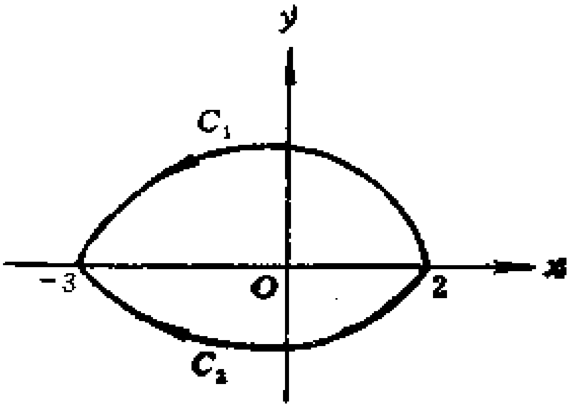


图 1

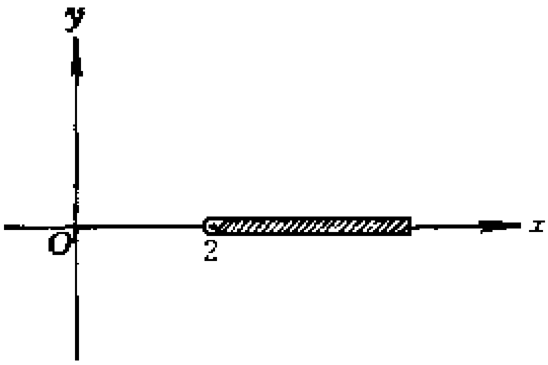


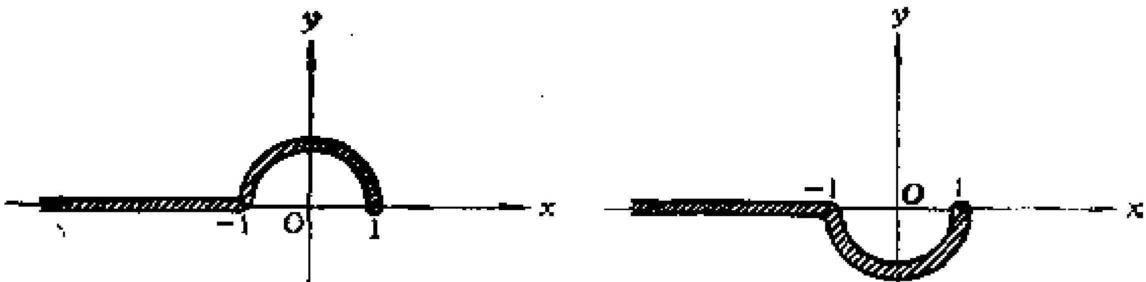
图 2

56．规定函数 $w=z\sqrt[3]{z-2}$在图2中割线上岸的辐角为0，试求该函数在割线下岸$z=3$处的数值。又问，这个函数有几个单值分枝？求出在其它分枝中割线下岸$z=3$处的函数值。

57．函数 $w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$的割线有多少种可能的作法？试在两种不同作法下讨论单值分枝的规定。设a，b为实数，且$a\neq b$。

58．规定函数 $w=\sqrt{z^2-2z+2}$在 $z=0$ 时 $w=\sqrt{2}$，求当 z 由原点出发沿圆$|z-(1+i)|=\sqrt{2}$ 逆时针方向通过x轴时的函数值。又当 z 回到原点时，函数之值如何？

59．函数 $w=\ln(1-z^2)$，规定 $z=0$ 时 $w=0$，试讨论当z分别在图3(a)和(b)中变化时，$z=3$ 处 w 之值。



(a) (b)

图 3

60．问函数 $w=\sqrt[4]{z(1-z)^3}$ 在割线上岸的函数值与下岸的函数值有何不同？割线作法见图 4．

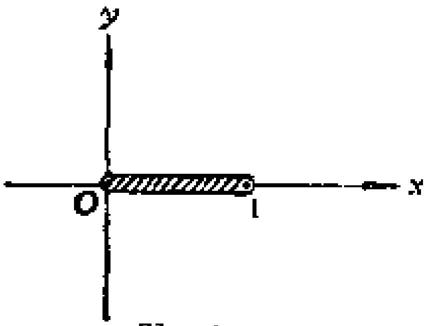


图 4

61．规定 $0\leqslant \arg z<2\pi$，求 $w=\sqrt{z}$ 在 $z=i$ 处的导数值．

62．规定 $z=0$ 处 $\operatorname{tg}^{-1}z=\pi$，求在 $z=2$ 处的导数值．割线作法见图 5．

63．证明：如果函数 $f(z)$ 在区域 G 内解析，而其模为一常数，则函数 $f(z)$ 本身也必为一常数．

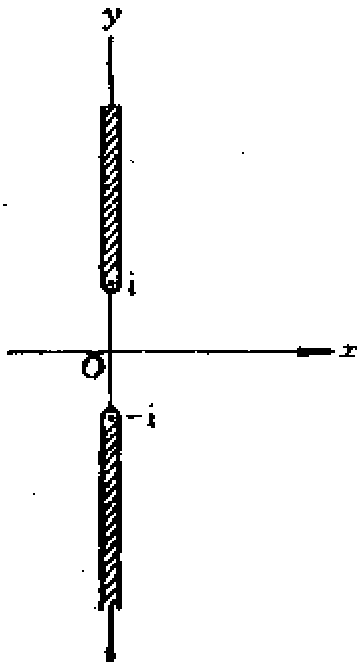


图 5

64．设 $f(z)=\dfrac{z^{1-p}(1-z)^p}{2z}$，$-1<p<2$．在实轴上沿 0 到 1 作割线，规定沿割线上岸 $\arg z=\arg(1-z)=0$，试计算 $f(-i)$．

习题四 复变积分

65．试按给定的路径计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dz}{z}$，

(i) 沿路径 C_1：$|z|=1$ 的上半圆周，

(ii) 沿路径 C_2：$|z|=1$ 的下半圆周；

(2) $\int_0^{2+i}\mathrm{Re}z\mathrm{d}z$，

(i) 沿路径 C_1：直线段$[0,2]$和$[2,2+i]$组成的折线，

(ii) 沿路径 C_2：直线段 $z=(2+i)t$，$0\leqslant t\leqslant 1$。

66．计算下列积分：

(1) $\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z}$；　　(2) $\int_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|}$；

(3) $\int_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z}$；　　(4) $\int_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right|$。

67．考虑两简单闭合曲线 C_1,C_2，彼此相交于 A,B 两点。设 C_1 与 C_2 所包围的内部区域分别为 C_1 与 C_2，其公共区域为 g。若 $f(z)$在曲线 C_1 及 C_2 上解析，且在区域 G_1-g 及 G_2-g 内解析，试证明：

$$\oint_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\oint_{C_2}f(z)\mathrm{d}z。$$

68．对于任一解析函数的实部或虚部，柯西定理仍成立吗？如果成立，试证明之；如果不成立，试说明理由，并举一例。

69．证明：

$$\oint_C\frac{\mathrm{d}z}{z}=4\pi i，$$

其中积分路径 C 为闭合曲线 $r=2-\sin^2\frac{\theta}{4}$。这个结果和围绕原点一周 $\oint\frac{\mathrm{d}z}{z}=2\pi i$ 的结论矛盾吗？为什么？

70. 计算积分$\int_{|z|=3}\dfrac{2z^2-15z+30}{z^3-10z^2+32z-32}\mathrm{d}z$。

71. 计算下列积分：

(1) $\oint_C \dfrac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\mathrm{d}z$，$C$ 分别为：

(i) $|z|=\dfrac{1}{2}$，(ii) $|z-1|=1$，(iii) $|z|=3$；

(2) $\oint_C \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$，$C$ 分别为：

(i) $|z-i|=1$，(ii) $|z|=2$，

(iii) $|z+i|+|z-i|=2\sqrt{2}$。

72. 计算下列积分：

(1) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\cos z}{z}\mathrm{d}z$；　(2) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\sin z}{z^2}\mathrm{d}z$；

(3) $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^2}{z-1}\mathrm{d}z$；　(4) $\oint_{|z|=2}\dfrac{z^2-1}{z^2+1}\mathrm{d}z$；

(5) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2}$；　(6) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1}$；

(7) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2-8}$；　(8) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2-2z+3}$；

(9) $\oint_{|z|=2}\dfrac{|z|e^z}{z^2}\mathrm{d}z$；　(10) $\oint_{|z|=2}\dfrac{\mathrm{d}z}{z^2(z^2+16)}$。

73. (1) 计算积分$\oint_{|z|=1}\dfrac{e^z}{z^3}\mathrm{d}z$；

(2) 对于什么样的 a 值，函数

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} e^z\left(\frac{1}{z}+\frac{a}{z^3}\right)dz$$

是单值的？

74. 证明：在挖去 $z=0$ 点的全平面上不存在一个解析函数 $f(z)$，使满足 $f'(z)=\frac{1}{z}$。这个结论和 $\frac{d}{dz}\ln z=\frac{1}{z}$ 矛盾吗？

75. 设 G 为单连通区域，C 是它的边界，$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 G 内的 n 个不同的点，且 $P(z)=(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$，$f(z)$ 在 $\overline{G}$ 中解析，试证明

$$Q(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{P(\zeta)}\cdot\frac{P(\zeta)-P(z)}{\zeta-z}d\zeta$$

是一个 $n-1$ 次多项式，且

$$Q(z_k)=f(z_k),\ k=1,2,\cdots,n.$$

如果 G 是复连通区域，上述结果还正确吗？

76. 设 $f(z)$ 在一个包含圆 $|z|\leqslant R$ 的区域中解析，并且 $\zeta=re^{i\theta}$ 为圆内一点，$0\leqslant r<R$，证明圆内的泊松公式：

$$f(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}f(Re^{i\varphi})d\varphi.$$

77. 若 $f(z)$ 在区域 G 内单值连续，且沿 G 内任一闭合路径 C 均有 $\oint_C f(z)dz=0$，试证 $f(z)$ 在 G 内解析（这是柯西定理的逆定理，称为摩列拉定理）。

78. 考虑函数 $f(z)=\frac{1}{z^2}$。

(1) 它对于所有不通过原点的闭合围道 C，都有积分

$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=0$，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 点不解析．这个情况和摩列拉定理（见上题）矛盾吗？

（2）当 $z\to\infty$ 时，此函数有界，但并不是一个常数。这和刘维定理矛盾吗？

79．设 G 为单连通区域，其边界为简单闭合曲线 C。若函数 $f(z)$ 在 $\overline{G}=G+C$ 中解析，且在 C 上，$f(z)=0$。证明：在区域 G 内恒有 $f(z)=0$。

80．试计算积分 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$，积分路径 C 为

（1）没有割线的 z 平面上，由 $-\mathrm{i}$ 到 i 的各种可能路径；

（2）沿负实轴割开的 z 平面上，由 $-\mathrm{i}$ 到 i 的各种可能路径。

81．证明：

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^n}=\begin{cases}2\pi\mathrm{i}, n=1,\\ 0,\quad n\neq 1,\end{cases}$$

其中 C 为包围 a 点的任一简单闭合圈道，n 为整数。

82．计算积分 $\int_C \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$。规定 $z=1$ 时，$\sqrt{z}=1$，沿路径：

（1）单位圆的上半周，（2）单位圆的下半周。

83．设 $f(z)$ 在区域 G 内解析，C 为 G 内的任一简单闭合曲线，证明对于 G 内、但不在 C 上的任意一点 z，

$$\oint_C \frac{f'(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\mathrm{d}\zeta.$$

84．设 $\Psi(t,x)=(1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}}$，$t$ 是复变数，试证：

$$\left.\frac{\partial^n \Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = \frac{1}{2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n.$$

提示：利用高阶微商公式，将左方表示成围道积分，而后作变换 $(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}}=1-ut$，即 $t=\dfrac{2(u-x)}{u^2-1}$。

85．设 $\Psi(t,x)=\mathrm{e}^{2tx-t^2}$，$t$ 是复变数，试证：

$$\left.\frac{\partial^n \Psi(t,x)}{\partial t^n}\right|_{t=0} = (-)^n \mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

提示：在高阶微商公式中作变换 $u=x-t$。

86．$f(z)$在 a 点的邻域内解析，当 $\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$，$z\to a$ 时，$(z-a)f(z)$一致地趋近于 k，试证：

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}k(\theta_2-\theta_1),$$

其中 C_δ 是以 a 为心、以 δ 为半径的圆弧（逆时针方向），并且 $|z-a|=\delta$，$\theta_1\leqslant\arg(z-a)\leqslant\theta_2$（见图 6）。

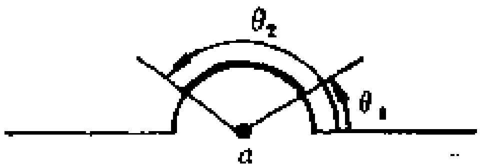


图 6

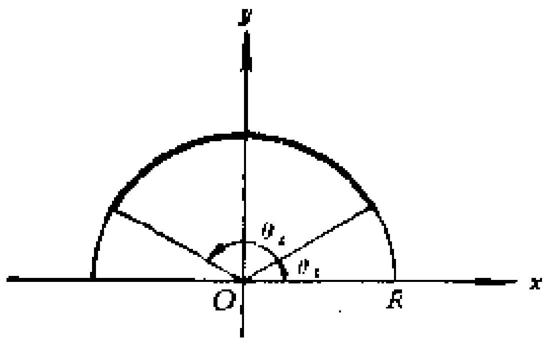


图 7

87．设 $f(z)$在∞点的邻域内解析，当 $\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2$，$z\to\infty$ 时，$zf(z)$一致地趋近于K，试证：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}K(\theta_2-\theta_1),$$

其中 C_R 是以原点为心、R 为半径的圆弧（逆时针方向），并且 $|z|=R$，$\theta_1\leqslant\arg z\leqslant\theta_2$（见图 7）。

88．试证明等式

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{e}^z}{z}\mathrm{d}z = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

从而计算出积分

$$\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\mathrm{d}\theta.$$

89．假设 $f(z)$ 在全平面解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{f(z)}{z}=0$，证明 $f(z)$ 必为常数。

90．假设 $f(z)$ 在全平面解析，且 $|f(z)|\geqslant 1$，证明 $f(z)$ 为常数。

91．求 $|\sin z|$ 在闭区域 $0\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\mathrm{Im}z\leqslant 2\pi$ 中的最大值。

92．如果函数 $f(z)$ 在 G 内解析，且 z_0 为 G 内一点，有 $f'(z_0)\neq 0$，试证明

$$\frac{2\pi\mathrm{i}}{f'(z_0)} = \oint_C\frac{\mathrm{d}z}{f(z)-f(z_0)},$$

其中 C 是以 z_0 为圆心的一个足够小的圆。

93．设函数 $f(z)$、$g(z)$ 及 $g(z)$ 的反函数均在 G 内单值解析，且 $g'(z)$ 恒不为 0，试计算积分

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{g(\zeta)-g(z)}\mathrm{d}\zeta,$$

其中C是G内的简单闭合曲线，z不在C上。

习题五 无穷级数

94. 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$皆为正项级数，试举反例，说明下列各种说法不正确：

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛；

（2）若$a_{2n}<a_{2n-1}$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散；

（4）若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}$发散。

95. 指出下列谬误：

$$
\begin{aligned}
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\cdots
&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots\\
&\quad-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots\right)\\
&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)\\
&\quad-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=0.
\end{aligned}
$$

96．判断下列级数的收敛性及绝对收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{i^n}{\ln n}$；　　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}$．

97．证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{(1-z^n)(1-z^{n+1})},\quad |z|\neq 1$$

收敛，并求其和。

98．证明无穷乘积

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots,\quad |z|<1$$

收敛，并求其积。

99．证明：

(1) $\cos\dfrac{z}{2}\cdot\cos\dfrac{z}{2^2}\cdot\cos\dfrac{z}{2^3}\cdot\cdots=\dfrac{\sin z}{z}$；

(2) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{2^2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2^3}+\cdots=\dfrac{1}{z}-\operatorname{ctg}z$．

100．证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}\sin nz$$

在区域 $-1<\operatorname{Im}z<1$ 内解析．

101．设 x 为实数，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 绝对收敛，但不一致收敛；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-)^n}{n+x^2}$ 一致收敛，但不绝对收敛．

102．试确定下列级数的收敛半径（或收敛区域）；

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} z^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^n} z^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{2^{2n}(n!)^2} z^n$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln n} z^n$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n!}$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} z^{2n}$;　　(8) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$;

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-)^n (z^2+2z+2)^n$;　　(10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{z}{3^n}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^n)}{n!} z^n$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n$.

103. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，试讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) z^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} z^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} z^n$.

104. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 R，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Re}\, a_n) z^n$ 的收敛半径 $\geqslant R$.

105. 设级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ 发散，证明级数

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1 。

106．若级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n|a_n|$ 发散，证明级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 1 。

107．证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z|\leqslant 1$ 中一致收敛，但由它逐项微商求得的级数在 $|z|<1$ 内却不一致收敛。这个结果和外氏（Weierstrass）定理矛盾吗？

108．证明黎曼 ζ 函数

$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$$

在区域 $\operatorname{Re} z>1$ 内解析，并计算 $\zeta'(z)$。

109．将下列函数在指定点展成泰勒级数，并给出其收敛半径：

（1）$\sin z$，在 $z=n\pi$ 展开；

（2）$1-z^2$，在 $z=1$ 展开；

（3）$\dfrac{1}{1+z+z^2}$，在 $z=0$ 展开；

（4）$\ln z$，在 $z=i$ 展开，规定：

(i) $0\leqslant\arg z<2\pi$，　(ii) $-\pi<\arg z\leqslant\pi$，

(iii) $(\ln z)_{z=1}=-\dfrac{3}{2}\pi i$；

（5）$\operatorname{tg}^{-1} z$ 的主值，在 $z=0$ 展开；

(6) $\frac{\sin z}{1-z}$，在 $z=0$ 展开；

(7) $e^{\frac{1}{1-z}}$，在 $z=0$ 展开（可只求前四项系数）；

(8) $\ln\frac{1+z}{1-z}$，在 $z=\infty$ 展开。

110. 求下列无穷级数之和：

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n+1}$，$|z|<1$；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}$，$|z|<\infty$。

111. 验证等式

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+2b}-\frac{1}{a+3b}+-\cdots=\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\mathrm{d}t$$

$$(a>0,b>0).$$

因此，此类无穷级数的求和就转化为求定积分的问题。利用这个办法，求出下列级数之和：

(1) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+-\cdots$；

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{8}-\frac{1}{11}+-\cdots$；

(3) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+-\cdots$。

112. 如果 k 和 n 是自然数，$a>0$，$b>0$，证明：

$$\frac{k!}{(a+nb)(a+nb+1)\cdots(a+nb+k)}=\int_0^1 t^{a+nb-1}(1-t)^k\mathrm{d}t,$$

并求出下列级数之和：

(1) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots$；

(2) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}-+\cdots$；

(3) $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{7\cdot8\cdot9}+\cdots$；

(4) $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7\cdot8}-+\cdots$。

113. 求下列函数的洛朗展开：

(1) $\frac{1}{z^2(z-1)}$，在 $z=1$ 附近展开；

(2) $\frac{1}{z^2-3z+2}$，展开区域为：

(i) $1<|z|<2$，(ii) $2<|z|<\infty$；

(3) $\frac{1}{z(z+1)}$，展开区域为：

(i) $1<|z-i|<\sqrt{2}$，(ii) $0<|z|<1$；

(4) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$，展开区域为：

(i) $3<|z|<4$，(ii) $4<|z|<\infty$；

(5) $\dfrac{e^z}{z+2}$，在 $|z|>2$ 处展开；

(6) $\dfrac{1}{1-\cos z}$，在 $z=2n\pi$ 附近展开（可只求出不为 0 的前四项系数）。

114．用级数相乘的方法求下列函数在 $z=0$ 附近的级数展开：

(1) $-\ln(1-z)\ln(1+z)$；　　(2) $\ln(1+z^2)\mathrm{tg}^{-1}z$；

(3) $e^{\frac{1}{2}\left(z-\frac{a^2}{z}\right)}$　　(4) $e^z\sin\dfrac{1}{z}$。

115．将下列函数在 $z=0$ 点展开（其中的多值函数均取主值分枝）：

(1) $\sqrt{1+z^2}\ln(z+\sqrt{1+z^2})$；

(2) $\ln(1+z^2)\mathrm{tg}^{-1}z$；　　(3) $\sqrt{1-z^2}\sin^{-1}z$；

(4) $(1+z)^{-n}\ln(1+z)$；　　(5) $\exp(\mathrm{tg}^{-1}z)$。

提示：以上各小题可以直接展开或用级数相乘，也可以先求出函数所满足的一阶常微分方程，再求微分方程的级数解。

116．证明：如果级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(z)$ 在区域 G 的边界 C 上一致收敛，$u_k(z)(k=1,2,\cdots)$ 在 $\bar{G}$ 中解析，则此级数在 $\bar{G}$ 中一致收敛。

117．利用阿贝尔第二定理证明，如果 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}v_k$ 与 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{n}u_l\,v_{k-l}$ 分别收敛于 A，B 和 C，则 $C=A\cdot B$。

118. 定义

$$\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^{2k+1},\quad |z|<\infty,$$

$$\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k)!}z^{2k},\quad |z|<\infty.$$

试利用级数乘法证明

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2.$$

119. 计算积分

$$\oint_{\gamma}\left(\sum_{n=-2}^{\infty}z^n\right)dz,$$

其中 γ 是单位圆内任一不经过原点的简单闭合曲线。

习题六 奇点、残数

120. 判断下列函数奇点的性质，如果是极点，确定其阶数：

(1) $\dfrac{1}{z^2+a^2}$； (2) $\dfrac{\cos az}{z^2}$； (3) $\dfrac{\cos az-\cos bz}{z^2}$；

(4) $\dfrac{\sin z}{z^2}-\dfrac{1}{z}$； (5) $\dfrac{1}{e^z-1}-\dfrac{1}{z}$； (6) $\sin\dfrac{1}{z}$；

(7) $\dfrac{\sqrt{z}}{\sin\sqrt{z}}$； (8) $\displaystyle\int_0^z\frac{e^{\sqrt{\zeta}}-e^{-\sqrt{\zeta}}}{\sqrt{\zeta}}d\zeta$.

121. 求下列函数在指定点 z_0 的残数：

(1) $\dfrac{e^{z^2}}{z-1}$, $z_0=1$； (2) $\dfrac{e^{z^2}}{(z-1)^2}$, $z_0=1$；

(3) $\left(\dfrac{z}{1-\cos z}\right)^2$, $z_0=0$; (4) $\dfrac{z^2}{z^4-1}$, $z_0=\mathrm{i}$;

(5) $\dfrac{1}{z^2\sin z}$, $z_0=0$; (6) $\dfrac{1+\mathrm{e}^z}{z^4}$, $z_0=0$;

(7) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(z^2-1)^2}$, $z_0=1$;

(8) $\dfrac{1}{\mathrm{ch}\sqrt{z}}$, $z_0=-\left(\dfrac{2n+1}{2}\pi\right)^2$, $n=0,1,2,\cdots$.

122. 求下列函数在奇点处的残数：

(1) $\dfrac{1}{z^3-z^5}$; (2) $\dfrac{1}{(1+z^2)^{m+1}}$;

(3) $\dfrac{z}{1-\cos z}$; (4) $\dfrac{\sqrt{z}}{\mathrm{sh}\sqrt{z}}$; (5) $\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$;

(6) $\cos\sqrt{\dfrac{1}{z}}$; (7) $\dfrac{1}{(z-1)\ln z}$;

(8) $\dfrac{1}{z}\left[1+\dfrac{1}{z+1}+\dfrac{1}{(z+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(z+1)^n}\right]$.

123. 指出下列函数在∞点的性质，并求其残数：

(1) $\dfrac{1}{z}$; (2) $\dfrac{\cos z}{z}$; (3) $\dfrac{z}{\cos z}$;

(4) $\dfrac{z^2+1}{\mathrm{e}^z}$; (5) $\mathrm{e}^{-\frac{1}{z^2}}$; (6) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$.

124. 设 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的邻域内的展开式为

$$f(z)=C_0+\frac{C_1}{z}+\frac{C_2}{z^2}+\cdots,$$

试求 $f^2(z)$在 $z=\infty$ 处的残数。

125. 证明：若除有限个奇点外，$f(z)$在扩充了的 z 平面上解析，则函数 $f(z)$的残数和为 0 。

126. 设 $f(z)$为偶函数，$z=0$ 是它的孤立奇点，证明 $f(z)$在 $z=0$ 处的残数必为 0 。

127. $f(z)$和 $g(z)$分别以 $z=0$ 为其 m阶和 n 阶零点，问下列函数在 $z=0$ 处的性质如何？

(1) $f(z)+g(z)$； (2) $f(z)\cdot g(z)$；

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$； (4) $f(g(z))$。

128. $f(z)$和 $g(z)$分别以 $z=0$ 为其 m 阶和 n 阶极点，问下列函数在 $z=0$ 处的性质如何？

(1) $f(z)+g(z)$； (2) $f(z)\cdot g(z)$；

(3) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$， (4) $f\left(\dfrac{1}{g(z)}\right)$。

129. 讨论 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln f(z)$在 $z=a$ 点的性质，若 a 点是 $f(z)$的：

(1) m阶零点； (2) m阶极点。

如果 $z=a$ 是 $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$的孤立奇点的话，则求出函数$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在该点的残数。

130. 设 $\varphi(z)$在 $z=a$ 解析，且 $\varphi(a)\neq 0$。若

(1) a 是 $f(z)$的 n 阶零点，

(2) a 是 $f(z)$的 n 阶极点，

试求函数 $\varphi(z)\dfrac{f'(z)}{f(z)}$在 $z=a$ 点的残数。

131. 设 C 为区域 G 内的任意一条简单闭合曲线，a 为

C内一点。若函数$f(z)$在G内解析，且$f(a)=0, f'(a)\neq 0$，此外，$f(z)$在$\overline{G}$中无其它零点。试证：

$$a=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zf'(z)}{f(z)}dz.$$

132．若$z=0$是$f(z)$的n阶零点，试求下列函数在$z=0$处的残数：

(1) $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$；　　　　(2) $\dfrac{f''(z)}{f(z)}$。

133．求下列各种条件下函数$\dfrac{f(z)}{g(z)}$在奇点z_0处的残数：

(1) z_0是$f(z)$的m阶零点，是$g(z)$的$m+1$阶零点；

(2) z_0是$g(z)$的二阶零点，但$f(z_0)\neq 0$；

(3) z_0是$f(z)$的一阶零点，是$g(z)$的三阶零点；

(4) z_0是$f(z)$的一阶极点，是$g(z)$的一阶零点。

134．若函数$f(z)$与$g(z)$在闭区域$\overline{G}$中解析，$g(z)$在G内有有限个一阶零点$a_1, a_2, \cdots, a_n$，而$g(0)\neq 0$，试计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{zg(z)}dz,$$

其中C是G的边界，且$z=0$在G内。

135．计算下列积分值：

(1) $\displaystyle\oint_C \frac{dz}{1+z^4}$，$C$为$|z-1|=2$或$|z-1|=1$；

(2) $\displaystyle\oint_C \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}dz$，$C$为：

(i) $|z|=\dfrac{1}{2}$，(ii) $|z-1|=1$，(iii) $|z|=3$；

(3) $\oint_{|z|=R} \dfrac{z^2}{e^{2\pi i z^3}-1} dz$, $n<R^3<n+1$, n 为正整数；

(4) $\oint_{|z|=n} \operatorname{tg} \pi z \, dz$, n 为正整数；

(5) $\oint_{|z|=2} \dfrac{1}{z^3(z^{10}-2)} dz$；

(6) $\oint_{|z|=1} \dfrac{e^z}{z^3} dz$；　　(7) $\oint_{|z|=2} e^{\frac{1}{z^2}} dz$；

(8) $\oint_{|z|=R} \dfrac{e^z}{\operatorname{sh} mz} dz$, $\dfrac{n}{m}\pi<R<\dfrac{n+1}{m}\pi$, m、n 均为正整数；

136. 计算积分

$$\oint_{C_n} \frac{\operatorname{ctg} \pi z}{z^2} dz,$$

其中 C_n 是以$\left(\pm\dfrac{2n+1}{2}, \pm\dfrac{2n+1}{2}\right)$为顶点的正方形。令 $n\to\infty$，就能得到级数$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{1}{m^2}$之和。

若把被积函数换成$\dfrac{\csc \pi z}{z^2}$，又能得到什么结果？

习题七　利用残数定理计算定积分

137. 如果 $R(\sin\theta, \cos\theta)$在$[0,2\pi]$中有奇点，通过变换 $z=e^{i\theta}$，$R(\sin\theta,\cos\theta)$变为$f(z)\equiv R\left(\dfrac{z^2-1}{2iz}, \dfrac{z^2+1}{2z}\right)$，则$f(z)$在

单位圆周 $|z|=1$ 上有奇点。设这些奇点 $\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 均为一阶极点，证明

$$\int_0^{2\pi} R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=2\pi\sum_{\text{单位圆内}}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}+\pi\sum_{k=1}^{m}\mathrm{res}\left\{\frac{f(z)}{z}\right\}_{z=\beta_k},$$

式中 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 表示 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的有理函数。

138. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1-2p\cos x+p^2}$，$0<p<1$；

(2) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$；

(3) $\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(a+b\cos x)^2}$，$a>b>0$；

(4) $\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\mathrm{d}x$；　　(5) $\int_0^{2\pi}e^{e^{i\theta}}\mathrm{d}\theta$；

(6) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin^2\theta}$；　　(7) $\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$；

(8) $\int_0^{\pi}\mathrm{ctg}(x-a)\mathrm{d}x$，$\mathrm{Im}\,a\neq0$。

139. 计算下列积分：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，$a>0$，$b>0$；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x$，$n,m$ 均为正整数，且 $n>m$；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}}$，$n$ 为正整数；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^2}$，$a>0$；　(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}$；

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2-2x\cos\theta+1)}$，$\theta$ 为实数，且 $\sin\theta\neq0$；

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\mathrm{ch}\frac{\pi x}{2}}$.

140．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{1+x^4}\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$，$m>0$；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^{\infty}\frac{x^3\sin mx}{x^4+4a^4}\mathrm{d}x$，$a>0$，$m>0$；

(5) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos mx}{(x+b)^2+a^2}\mathrm{d}x$，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin mx}{(x+b)^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0,m>0$；

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a\cos x+x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$；

(7) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 ax}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\mathrm{d}x$，$a>0$，$b>0$，$c>0$；

(8) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{\operatorname{ch}x}dx$。

141．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx$，$a>0$，$m>0$；

(2) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x(x-1)(x-2)}$；

(3) $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x^2}dx$，$a>0$，$b>0$；

(4) $\int_0^{\infty}\frac{\sin(x+a)\sin(x-a)}{x^2-a^2}dx$，$a>0$；

(5) $\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$；

(6) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{px}-e^{qx}}{1-e^{x}}dx$，$0<p<1$，$0<q<1$；

(7) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos x}{x^2-5x-6}dx$；

(8) $\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}dx$。

142．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{x^s}{(1+x^2)^2}dx$，　$-1<s<3$；

(2) $\int_0^{\infty}\frac{x^{-p}}{1+2x\cos\lambda+x^2}dx$，$-1<p<1$，$0<\lambda<\pi$；

(3) $\text{v.p.}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1-x}\mathrm{d}x$, $0<a<1$;

(4) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}\mathrm{d}x$, $a>0$。

143．设 $P(z)$ 及 $Q(z)$ 分别为 m 阶及 n 阶多项式，并且 $m\leqslant n-2$，且 $Q(z)$ 无非负实根．考虑函数 $\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z$ 的积分，证明 $\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=-\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\left\{\frac{P(z)}{Q(z)}\ln z\right\}$, $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$。

144．利用上题结果，计算下列积分：

(1) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x+x^2)^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+a^3}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+a)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$, $a>0$, $b>0$;

(4) $\int_0^\infty \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$, $a>0$, $b>0$。

145．用类似于第143题的方法证明

$$\int_0^\infty f(x)\ln x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\{f(z)(\ln z)^2\}$$

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{2\pi}\operatorname{Im}\sum_{\text{全平面}}\operatorname{res}\{f(z)(\ln z)^2\},$$

$$0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi。$$

其中函数 $f(z)$ 满足和第143题中 $\frac{P(z)}{Q(z)}$ 同样的要求。

146．计算下列积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$, $a>0$;

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)(x+b)}dx$, $b>a>0$;

(3) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^2}dx$, $a>0$;

(4) $\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(x+a)^2+b^2}dx$, a,b均为正数.

147. 按照指定的积分围道，考虑适当的复变积分，计算下列定积分：

(1) $\int_0^{\infty}\frac{(1+x^2)\cos ax}{1+x^2+x^4}dx$, $\int_0^{\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2+x^4}dx$, $a>0$(见图8);

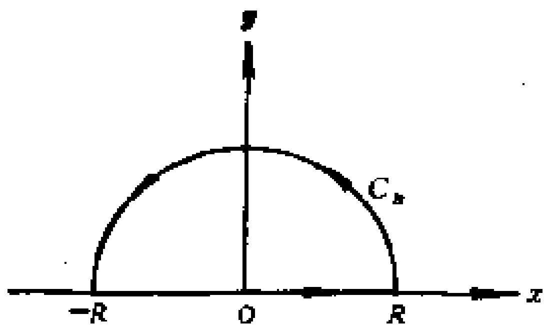


图 8

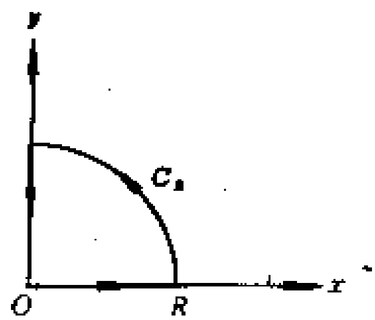


图 9

(2) $\int_0^{\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx$ (见图9);

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$, $0<a<1$ (见图10);

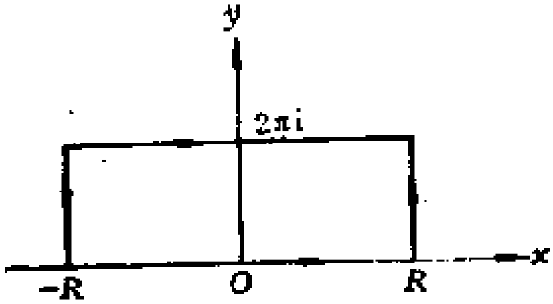


图 10

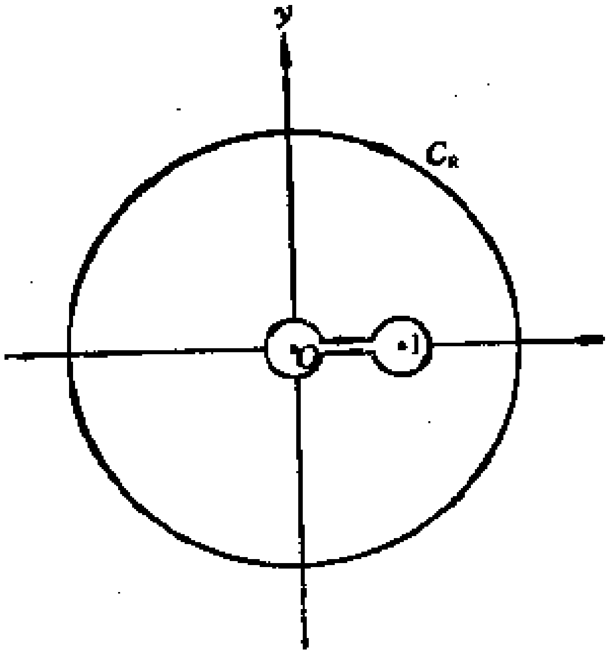


图 11

(4) $\int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$（见图11）。

148．按照指定的被积函数，选择适当的积分围道，计算下列积分：

(1) $\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{a-\mathrm{i}b\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$，$a>0$，$b>0$，被积函数为

$$\frac{z^{n}}{bz^{2}+2\mathrm{i}az+b^{2}};$$

(2) $\int_0^\infty x^b\cos\left(ax-\frac{1}{2}b\pi\right)\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$，$a\geqslant 0$，$-1<b<1$，被积函数为 $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}z^b}{1+z^2}$；

(3) $\int_0^\infty\frac{\mathrm{d}x}{x[(\ln x)^2+\pi^2]}$，被积函数为 $\frac{1}{z\ln z}$；

(4) $\int_0^\infty\frac{x\,\mathrm{tg}^{-1}x}{(1+2x^2)^2}\mathrm{d}x$，被积函数为 $\frac{z\ln(1-\mathrm{i}z)}{(1+2z^2)^2}$；

(5) $\int_0^\infty\frac{\cos\ln x}{x^2+1}\mathrm{d}x$，被积函数为 $\frac{z^{\mathrm{i}}}{z^2-1}$；

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{r\sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\theta\mathrm{d}\theta$，被积函数为

$$\frac{2zr}{z^2(1+r)^2+(1-r)^2}\cdot\frac{\ln(1-\mathrm{i}z)}{1+z^2}.$$

149. 变换

$$t=\frac{bx+a}{x+1},\quad 即\quad x=\frac{t-a}{b-t}$$

把有界区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 变为半无界区间 $0\leqslant x<\infty$。试利用此类变换证明

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1}g(t)\mathrm{d}t=\int_0^\infty x^{m-1}f(x)\mathrm{d}x,$$

其中，

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}g\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

假定有关的积分均存在。

150. 利用上题结果，计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1}dt$，$0<m<2$；

(2) $\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{m-1}\frac{dt}{t^2+1}$，$0<m<2$。

151. 证明：

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{m-1}h(t)dt=\int_{0}^{\infty}x^{m-1}f(x)dx,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{x+1}\right)^{2m}h\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

并由此计算积分

$$\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}dt.$$

152. (1) 证明：

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+t}{1-t}g(t)dt=\int_{0}^{\infty}f(x)\ln x dx,$$

其中，

$$f(x)=\frac{2}{(x+1)^2}g\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

(2) 计算积分：

$$\int_{-1}^{1}\ln\frac{1+t}{1-t}\cdot\frac{dt}{1-ct}，\ |c|<1.$$

习题八 解析延拓、含参数的积分、Γ函数和B函数

153. 若函数 $f(z)$在右半平面 $\mathrm{Re}z>0$ 内解析，且满足

$$f(z+1)=zf(z),\quad f(1)\neq 0,$$

证明 $f(z)$能够延拓到全平面，$z=0,-1,-2,\cdots$除外。

154. 证明

$$f_1(z)=1+az+a^2z^2+\cdots$$

与

$$f_2(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{(1-a)z}{(1-z)^2}+\frac{(1-a)^2z^2}{(1-z)^3}-+\cdots$$

互为解析延拓。

155. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-z^{n+1}}-\frac{1}{1-z^n}\right)$$

在区域$|z|<1$ 与$|z|>1$ 内分别代表两个解析函数，但不互为解析延拓。

156. 已知：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}=z+z^2+z^4+z^8+\cdots,|z|<1.$$

(1) 证明：$z=1$ 是 $f(z)$的奇点；

(2) 证明：$f(z)=z+f(z^2)$，因此，$z^2=1$ 的根也都是 $f(z)$的奇点；

(3) 类似地证明：$z^{2^k}=1$ 的 2^k 个根也是 $f(z)$的奇点，

k 为任意正整数；

(4) 由此证明：不可能将$f(z)$延拓到单位圆外。

157. 求出下列各积分的一致收敛区域：

(1) $\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\sqrt{1-t}}dt$；　　(2) $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z}dt$；

(3) $\int_0^\infty e^{-zt^2}dt$；　　(4) $\int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t}dt$。

158. 证明：

(1) $\Gamma(z)=\int_0^1\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{z-1}dx$, $\operatorname{Re} z>0$；

(2) $\Gamma(z)=\int_L e^{-t}t^{z-1}dt$, $\operatorname{Re}z>0$, L 是自原点发出的射线，$0<|t|<\infty$, $|\arg t|<\frac{\pi}{2}$；

(3) $\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-)^n}{n!}\frac{1}{n+z}+\int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$, $z\neq -n$, $n=0,1,2,\cdots$。

159. 将下列连乘积用Γ函数表示出来：

(1) $(2n)!!$；　　(2) $(2n-1)!!$；

(3) $(1+\rho)(2+\rho)\cdots(n+\rho)$；

(4) $[n(n+1)-\rho(\rho+1)][(n-1)n-\rho(\rho+1)]\cdots[0-\rho(\rho+1)]$。

160. 设 $\psi(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)$，证明：

(1) $\psi(z+1)=\frac{1}{z}+\psi(z)$；

(2) $\psi(z+n)-\psi(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+1}+\cdots+\frac{1}{z+n-1}$;

(3) $\psi(1-z)-\psi(z)=\pi\operatorname{ctg}\pi z$;

(4) $2\psi(2z)-\psi(z)-\psi\left(z+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2$.

161. 证明$\psi(z)$仍以零及负整数为其一阶极点，并求其残数。

162. 定义

$$J_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^{k}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu},$$

试导出

$$Y_{n}(z)=\lim_{\nu\to n}\frac{J_{\nu}(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi},\quad n=0,1,2,\cdots$$

的级数表达式。

163. 计算下列积分：

(1) $\int_{0}^{\infty}x^{-a}\sin x\mathrm{d}x,\quad 0<a<2,$

$\int_{0}^{\infty}x^{-a}\cos x\mathrm{d}x,\quad 0<a<1;$

(2) $\int_{0}^{\infty}x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\mathrm{d}x,$

$\int_{0}^{\infty}x^{a-1}e^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\mathrm{d}x,$

$$a>0,\quad -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

提示：选择适当围道，计算复变积分$\oint e^{-z}z^{a-1}\mathrm{d}z$.

164. 试用下面的方法导出 $\Gamma(z)$的渐近公式。

(1) 通过变数代换将 $\Gamma(z+1)$的积分表达式改写成

$$\Gamma(z+1)=z^z e^{-z}\int_{-z}^{\infty} e^{z\ln\left(1+\frac{s}{z}\right)-s} ds;$$

(2) 将上述积分中被积函数的指数作展开而只保留最主要的一项，并将积分下限近似地换成$-\infty$，这样就得到 $\Gamma(z+1)$在 z 大时的渐近公式：

$$\Gamma(z+1)\sim\sqrt{2\pi z}\,z^z e^{-z}.$$

165. 证明 $\Gamma(z)$的下列积分表示(对一切 z 都成立)：

(1) $\Gamma(z)=\dfrac{1}{e^{2\pi i z}-1}\displaystyle\int_C e^{-\zeta}\zeta^{z-1}d\zeta$，积分路径$C$由沿正实轴的割线的上岸、下岸及圆弧 C_δ 组成，并且规定在上岸 $\arg\zeta=0$ (见图12)；

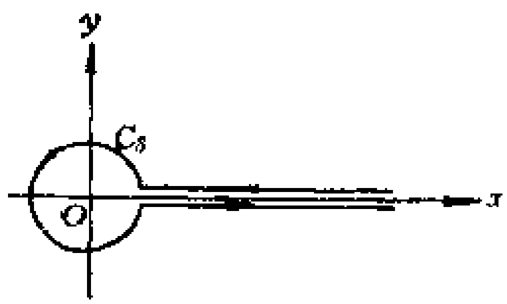


图 12

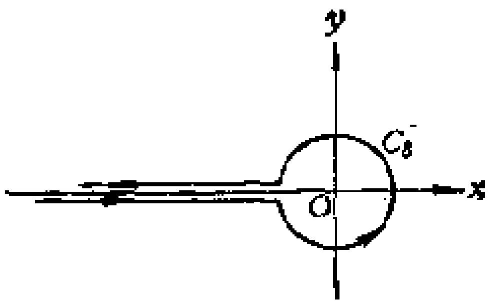


图 13

(2) $\dfrac{1}{\Gamma(z)}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C^*} e^{\zeta}\zeta^{-z}d\zeta$，积分路径 C^* 由沿负实轴

的割线下岸、上岸及圆弧 C_δ 组成（见图13），规定在下岸 $\arg\zeta=-\pi$。

166. 从公式

$$\Gamma(z)=\lim_{n\to\infty}\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\mathrm{d}t$$

出发，证明：

(1) $\Gamma(z)=\dfrac{1}{z}\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^{-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^z\right\}$；

(2) $\Gamma(z)=\dfrac{1}{z}\mathrm{e}^{-\gamma z}\prod\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\left(1+\dfrac{z}{k}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{z}{k}}\right\}$

$$\equiv\frac{1}{z}\mathrm{e}^{-\gamma z}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\frac{z}{k}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{z}{k}}\right\},$$

其中，

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right\}=0.5772156649\cdots.$$

167. 利用上题结果，证明：

(1) $\Gamma(1)=1$；　(2) $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$；

(3) $\psi(z)=-\gamma-\dfrac{1}{z}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+z}\right)$；

(4) $\Gamma'(1)=-\gamma$；

(5) $\Gamma'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-(\gamma+2\ln 2)\sqrt{\pi}$.

168. 试证 B 函数的下列性质：

(1) $\mathrm{B}(p,q+1)=\dfrac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q)$；

(2) $B(p,q)=B(p+1,q)+B(p,q+1)$；

(3) $pB(p,q+1)=qB(p+1,q)$；

(4) $B(p,q)B(p+q,r)=B(q,r)B(q+r,p)$；

(5) $B(\xi,\eta)=\int_0^{\infty}\frac{t^{\eta-1}}{(1+t)^{\xi+\eta}}dt$，$\mathrm{Re}\xi>0$，$\mathrm{Re}\eta>0$。

169．计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}(1-x)^p(1+x)^q dx$，$\mathrm{Re}p>-1$，$\mathrm{Re}q>-1$，

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx;$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{tg}^a\theta d\theta$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{ctg}^a\theta d\theta$，　$-1<a<1$。

170．计算积分

$$\iiint\limits_V x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}dxdydz,$$

其中积分区域V为：

(1) 平面$x=0$，$y=0$，$z=0$及$x+y+z=1$所包围的体积；

(2) 平面$x=0$，$y=0$，$z=0$及曲面

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r=1$$

所包围的体积。

171．若$n>0$，$0<r<1$，证明：

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+re^{i\theta})^n(1+re^{-i\theta})^n d\theta=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^2 r^{2k},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+re^{i\theta})^n(1-re^{-i\theta})^n d\theta = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\binom{n}{k}^2 r^{2k},$$

因此，根据阿贝尔第二定理，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}^2 = \frac{2^n}{\pi}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^n d\theta = \frac{\Gamma(2n+1)}{[\Gamma(n+1)]^2},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\binom{n}{k}^2 = \frac{2^n}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^n\theta d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\right]^2}\cos\frac{n\pi}{2},$$

其中，

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{k!\Gamma(n-k+1)}$$

是普遍的二项式系数。

172．证明：

(1) $\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \lim\limits_{b\to 0}[\Gamma(b) - B(a,b)]$；

(2) $\dfrac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} + \gamma = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^{a-1}}{1-t}dt$，

其中 $\gamma = -\Gamma'(1)$（见第166及167题）。

习题九　拉普拉斯变换

173．证明拉普拉斯变换的下列性质（假定有关函数的拉普拉斯变换均存在，其像函数用相应的大写字母表示）：

(1) $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1 F_1(p) + c_2 F_2(p)$；

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t,\tau)d\tau \risingdotseq \int_0^{\infty} F(p,\tau)d\tau$；

(3) $f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$;

(4) $F(p-p_0) \doteq e^{p_0 t} f(t)$;

(5) $f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $a>0$;

(6) $\int_t^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \doteq \frac{1}{p} \int_0^p F(q) dq$.

174. 若$f(t)$为周期函数，周期为a，即

$$f(t+a)=f(t),\quad t \geqslant 0.$$

设$f(t)$的拉氏换式$F(p)$存在，证明：

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-ap}} \int_0^a e^{-pt} f(t) dt.$$

175. 求下列函数的像函数：

(1) t^n, $n=0,1,2,\cdots$;

(2) t^a, $\operatorname{Re} a>-1$; (3) $e^{-\lambda t} \sin \omega t$;

(4) $\frac{1-\cos \omega t}{t^2}$; (5) $\int_t^{\infty} \frac{\cos \tau}{\tau} d\tau$;

(6) $f(t)=\begin{cases} e^t, & 0<t<1, \\ 0, & t>1; \end{cases}$

(7) $|\sin \omega t|$; (8) $t-a\left[\frac{t}{a}\right]$, $a>0$.

176. 求下列函数的原函数：

(1) $\frac{a^3}{p(p+a)^3}$; (2) $\frac{\omega}{p(p^2+\omega^2)}$;

(3) $\frac{4p-1}{(p^2+p)(4p^2-1)}$; (4) $\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$;

(5) $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^2}$, $\tau>0$; (6) $\dfrac{1}{p}\dfrac{e^{-ap}}{1-e^{-ap}}$, $a>0$。

177。用普遍反演公式求下列函数的原函数：

(1) $\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$; (2) $\dfrac{e^{-p\tau}}{p^4+4\omega^4}$;

(3) $\dfrac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$, $a>0$; (4) $\dfrac{1}{p}\dfrac{\operatorname{ch}(l-x)\sqrt{p}}{\operatorname{ch}l\sqrt{p}}$, $0<x<l$。

178。设

$$f(t)\doteq F(t),\quad f_1(t)\doteq F_1(p),\quad f_2(t)\doteq F_2(p),$$

试用拉普拉斯变换的普遍反演公式证明：

(1) $e^{-p\tau}F(p)\doteq f(t-\tau)$;

(2) $F_1(p)F_2(p)\doteq\displaystyle\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$。

179。利用拉普拉斯变换计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin xt}{t}dt$; (2) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin xt}{\sqrt{x}}dx$;

(3) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos xt}{x^2+a^2}dx$; (4) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\sin xt}{x(x^2+1)}dx$。

180。利用拉普拉斯变换求解下列微分方程（方程组）或积分方程：

(1) 如图14，已知 $i(0)=0$, $q(0)=0$，求 $i(t)$;

(2) 如图15，已知 $i(0)=0$, $q(0)=0$，求 $i(t)$;

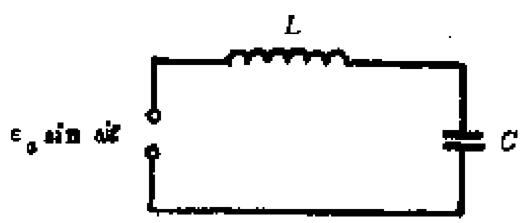


图 14

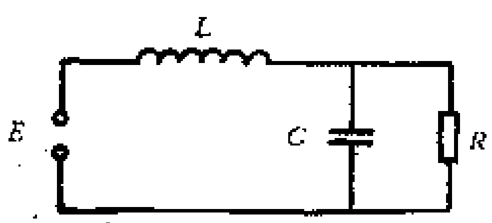


图 15

(3) $\begin{cases} x''-x+y+z=0, \\ x+y''-y+z=0, \\ x+y+z''-z=0; \end{cases}$

$x(0)=1$, $y(0)=z(0)=0$, $x'(0)=y'(0)=z'(0)=0$;

(4) $y(t)=a\sin t-2\int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau$;

(5) $y(t)=a\sin bt+c\int_0^t y(\tau)\sin b(t-\tau)\mathrm{d}\tau$, $b>c>0$;

(6) $f(t)+2\int_0^t f(\tau)\cos(t-\tau)\mathrm{d}\tau=9e^{2t}$.

181. 求解变系数常微分方程初值问题:

$$\begin{cases} x''+tx'+x=0, \\ x(0)=1, \ x'(0)=0. \end{cases}$$

182. 设有放射性蜕变过程 $A\to B\to C\to\cdots$, 若其中三种同位素的分子数$N_1(t)$,$N_2(t)$及 $N_3(t)$ 遵从方程及初始条件

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=-\lambda_1N_1, & N_1(0)=N, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=\lambda_1N_1-\lambda_2N_2, & N_2(0)=0, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t}=\lambda_2N_2-\lambda_3N_3, & N_3(0)=0, \end{cases}$$

其中 λ_1,λ_2 及 λ_3 为不相等的常数, 试求出 $N_1(t)$, $N_2(t)$ 及 $N_3(t)$.

183. 定义零阶贝塞耳函数为

$$\mathrm{J}_0(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos(t\cos\theta)\mathrm{d}\theta.$$

(1) 求出 $J_0(t)$ 的像函数；

(2) 利用折积定理证明

$$\int_0^t J_0(\tau)J_0(t-\tau)d\tau=\sin t.$$

184. 当 $f(t)$ 满足

$$|f(t)|<Me^{s_0 t},\quad t\geqslant 0$$

（M 和 s_0 是确定的正数）时，它的拉氏换式一定存在。但是，这只是 $f(t)$ 的拉氏换式存在的充分条件。因此，某些函数尽管并不满足这一条件，它的拉氏换式仍然可以存在。作为一个例子，试证明

$$f(t)=2te^{t^2}\sin(e^{t^2})$$

的拉氏换式存在。

185. 设 $f(x)$ 的傅里叶变换和傅里叶逆变换为

$$C(\omega)=\mathscr{F}[f(x)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx,$$

$$f(x)=\mathscr{F}^{-1}[C(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega.$$

证明：

(1) $\mathscr{F}[f(x-x_0)]=e^{-i\omega x_0}C(\omega)$,

$\mathscr{F}^{-1}[C(\omega-\omega_0)]=e^{i\omega_0 x}f(x)$；

(2) $\mathscr{F}[f'(x)]=i\omega C(\omega)$, $\mathscr{F}^{-1}[C'(\omega)]=-ixf(x)$；

(3) $\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{x}f(\xi)d\xi\right]=\frac{1}{i\omega}C(\omega)$；

(4) $\mathscr{F}[f_1(x)*f_2(x)]=C_1(\omega)C_2(\omega)$,

$\mathscr{F}^{-1}[C_1(\omega)*C_2(\omega)]=f_1(x)f_2(x)$,

其中，

$$f_1(t) * f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau.$$

186．证明 δ 函数的下列性质：

(1) $\delta(x)=\delta(-x)$；　(2) $x\delta(x)=0$；

(3) $f(x)\delta(x)=f(0)\delta(x)$；　(4) $\delta(ax)=\dfrac{1}{|a|}\delta(x)$；

(5) $\delta(x^2-a^2)=\dfrac{1}{2|a|}[\delta(x-a)+\delta(x+a)]$；

(6) $\delta(x-a)\delta(x-b)=\delta(a-b)\delta(x-a)$.

187．若定义 δ 函数为

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x),$$

$$\int_{-\infty}^{x}\delta(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{x}\phi_n(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & \text{当}x<0,\\ 1, & \text{当}x>0.\end{cases}$$

验证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\pi}\frac{1}{1+(nx)^2} \text{ 和 } \lim_{n\to\infty}\frac{\sin nx}{\pi x}$$

都是 δ 函数。

188．设

$$B_N(\omega)=\frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(2N\pi\frac{\omega}{\omega_0}\right),$$

N 是正整数，验证

$$\lim_{N\to\infty}B_N(\omega)=A[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)].$$

189．定义三维 δ 函数为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0),$$

求证：

(1) 它在球坐标下的表达式为

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{r^2}\delta(r-r_0)\delta(\cos\theta-\cos\theta_0)\delta(\varphi-\varphi_0);$$

(2) $\nabla^2\left(\dfrac{-1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}\right)=4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$.

190．求解下列微分方程：

(1) $y''=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y'(1)=0$；

(2) $y''+y=-\delta(x-x_0)$，$y(0)=0$，$y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$。

习题十　线性常微分方程的级数解法

191．求方程 $y''-x^2y=0$ 在 $x=0$ 邻域内的两个级数解。

192．在 $x=0$ 的邻域内求解方程 $y''-xy=0$。

193．求厄密方程 $u''-2xu'+2\lambda u=0$ 在 $x=0$的解，并讨论当 λ 取何值时有一解截断为多项式？

194．求超几何方程 $z(1-z)\dfrac{d^2u}{dz^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)z]\times\dfrac{du}{dz}-\alpha\beta u=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解，其中 α,β,γ 为已知常数，且 $\gamma\neq$ 整数。

195．求方程 $xy''-xy'+y=0$ 在 $x=0$ 邻域的两个独立解。

196．求方程 $\dfrac{d^2u}{dz^2}+\dfrac{2}{z}\dfrac{du}{dz}+m^2u=0$ 在 $z=0$ 附近的两个独立解。

197．求零阶贝塞耳方程 $\dfrac{d^2u}{dz^2}+\dfrac{1}{z}\dfrac{du}{dz}+u=0$ 在 $z=0$ 邻

域的两个独立解。

198．求勒让德方程$(1-z^2)\frac{d^2u}{dz^2}-2z\frac{du}{dz}+\mu(\mu+1)u=0$在$z=1$的有界解。

199．求合流超几何方程$z\frac{d^2u}{dz^2}+(b-z)\frac{du}{dz}-au=0$在$z=0$附近的两个独立解，已知其中的$a$，$b$为常数，且$a>0$，$1-b\neq$整数。

200．求方程$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-m^2u=0$在$z=0$附近的两个独立解。

习题十一　数学物理方程和定解条件

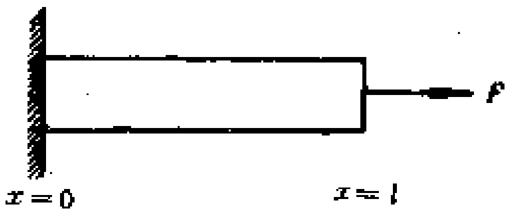


图　16

201．一长为l、横截面积为S的均匀弹性杆，已知一端($x=0$)固定，另一端($x=l$)在杆轴方向上受拉力F而平衡(见图16)。在$t=0$时，撤去外力F。试推导杆的纵振动所满足的方程、边界条件和初始条件。

202．一均匀弹性杆，原处于静止状态。其一端($x=0$)固定。从$t=0$时刻起，在另一端($x=l$)单位面积上施加外力P，力的方向与杆轴平行。试列出杆的纵振动方程、边界条件和初始条件。

203．一均匀、各向同性的弹性圆膜，四周固定。试列出膜的横振动方程及边界条件。

204．一长为 l 的均匀金属细杆（可近似地看作一维的），通有稳定电流。设杆的一端($x=0$)温度保持为0，

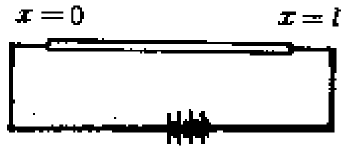


图 17

另一端($x=l$)保持为 u_0，初始时的温度分布为$\frac{x}{l}u_0$。试写出杆中温度场所满足的方程、边界条件与初始条件(见图17)。

205．在铀块中，除了中子的扩散运动外，还进行着中子的吸收和增殖过程。设在单位时间内单位体积中，吸收和增殖的中子数均正比于该时刻该处的中子浓度 $u(r,t)$，因而净增中子数可表为 $\alpha u(r,t)$，α 为比例常数。试导出 $u(r,t)$ 所满足的偏微分方程。

206．设有一均匀细杆，长为 l，一端固定，另一端受外力 $F(F=A\sin\omega t)$作用，其方向与杆轴一致，A 为常数。列出边界条件。

207．有一长为 l 的均匀细杆，现通过其两端、在单位时间内、经单位面积分别供给热量 q_1 与q_2。试写出相应的边界条件。

208．有一半径为a、表面涂黑的导体球，暴晒于日光下，在垂直于光线的单位面积上，单位时间内吸收热量M。设周围媒质温度为0，球面按牛顿冷却定律散热。试在适当的坐标系中写出边界条件(见图18)。

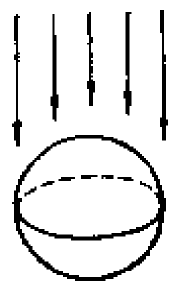


图 18

209．一完全柔软的均匀细线，重力可以忽略。一端($x=0$)固定在匀速转动的轴上，角速度为ω，另一端($x=l$)自由。由于惯性离心力的作用，此细线的平衡位置为水

平线。试导出细线相对于其平衡位置作横振动时的振动方程。

210．一长为 l 的水平均匀弹性弦，中点处悬一重物，质量为M。试列出弦的横振动方程、边界条件以及连接条件。设悬线的质量及弹性形变均可忽略。

习题十二　分离变数法

211．将下列方程分离变数：

(1) $a_1(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b_1(y)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a_2(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+b_2(y)\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

(2) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}=0$；

(3) $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0$；

(4) $$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)$$

$$+\frac{1}{\sin\alpha(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

提示：作变换$u=v\sqrt{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}$。

212．求解下列各本征值问题，证明各题中本征函数的正交性，并算出归一因子：

(1) $\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=0,\ X(l)=0;\end{cases}$

(2) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X'(l) = 0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(a) = 0, \quad X(b) = 0; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \\ \alpha X(l) + \beta X'(l) = 0; \end{cases}$

(6) $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ \alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0, \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) = 0. \end{cases}$

213．如果我们采用最小二乘法用$\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x$去逼近函数$f(x)$，

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

即要求平方误差

$$\int_0^l \left[f(x) - \sum_{n=1}^{N} a_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right]^2 dx$$

取极小，试确定展开系数a_n。

214．解第201题。

215．一长为l两端固定的均匀弦，初始时，弦被拉开，如图19所示，待达到平衡后突然放手。试求解此问题。

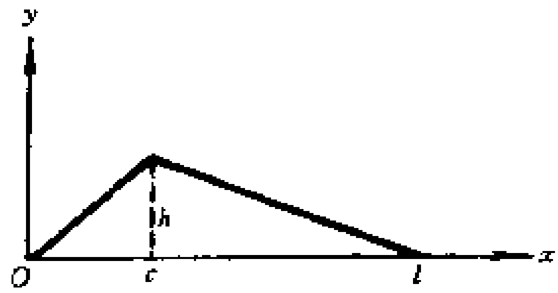


图 19

216．两端固定的均匀弦，在硬质平锤的打击下以如下初始速度分布

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<c-\delta,\\ v_0, & c-\delta<x<c+\delta,\\ 0, & c+\delta<x\leqslant l\end{cases}$$

振动。若初位移为0，求解弦的横振动。

217．两端固定的均匀弦，其 $x=c$ 点受到尖锤的打击而获得冲量 I。若初位移为0，求解弦的自由横振动。

提示：首先假定冲量 I 均匀分布于 $c-\delta<x<c+\delta$ 段，因而可以引用上题结果，然后令 $\delta\to 0$。

218．一长为 $2l$ 的均匀杆，两端受力作用而分别压缩了 εl。在 $t=0$ 时，撤去外力。试解杆的纵振动。

219．设长为 l 的细杆，$x=0$ 端绝热，另一端与外界按牛顿冷却定律交换热量，外界温度为0。杆身的散热可忽略不计。初始时，杆的温度为 u_0。求杆中温度的分布与变化。

220．求解细杆的导热问题，杆长为 l，两端（$x=0$ 及 $x=l$）均保持为零度，初始温度分布 $u|_{t=0}=bx(l-x)/l^2$。

221．求解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u|_{x=0}=u_0,\quad u|_{x=a}=u_0 y,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=0.\end{cases}$$

222．在带形区域 $0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y<\infty$ 中求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=a}=0,\\ u|_{y=0}=A\left(1-\dfrac{x}{a}\right),\quad \lim\limits_{y\to\infty}u=0.\end{cases}$$

223．当层状铀块的厚度超过一定值（称为临界厚度）时，中子浓度将随时间增加而增加，以致引起铀块爆炸。这就是原子弹爆炸的基本过程。试估计层状铀块的临界厚度。假定中子浓度满足齐次的第一类边界条件．方程见第205题。

224．求解两端固定弦的阻尼振动问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2h\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

225．一个均匀的、各向同性的弹性方形膜，$0\leqslant x\leqslant l$，$0\leqslant y\leqslant l$，四周夹紧．初始形状为 $Axy(l-x)(l-y)$，初速度为 0，求解膜的横振动。

226．一个均匀的、各向同性的弹性方形膜，$0\leqslant x\leqslant l$，$0\leqslant y\leqslant l$，边缘夹紧．若初始时在中心附近受到敲击，使得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\begin{cases} v_0, & \dfrac{l}{2}-\delta<x<\dfrac{l}{2}+\delta,\ \dfrac{l}{2}-\delta<y<\dfrac{l}{2}+\delta, \\ 0, & \text{其它各点,} \end{cases}$$

而初位移为 0。求解膜的横振动。

227．均匀、各向同性的弹性方膜，$0\leqslant x\leqslant l$，$0\leqslant y\leqslant l$，边缘夹紧。若初始时受到敲击，使中心点得到冲量 I，而初位移为 0，试求解膜的横振动。

228．一长为 l 的均匀圆杆作微小扭转振动。在振动过程中，杆的各横截面仍保持为平面而绕杆轴扭转，轴向上不发生位移。杆的一端固定，另一端连接在圆盘上，则偏转角 θ 所满足的方程和边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0, \\ \theta|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\right|_{x=l}=-c^2\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l}, \end{cases}$$

a 和 c 均为实常数。

（1）求相应的本征值 λ_n 及本征函数 $X_n(x)$；

（2）计算积分 $\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x$；

（3）计算积分 $\int_0^l X_n'(x)X_m'(x)\mathrm{d}x$。

229．求解枢轴的扭转振动问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, \\ u|_{x=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=l}=-c^2\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}, \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$$

230. 求解下列定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0,\\ u|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=0}=0,\\ u|_{x=l}=0,\ \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

231. 在矩形区域 $0<x<a$，$-\dfrac{b}{2}<y<\dfrac{b}{2}$ 上求解：

（1）$\nabla^2 u=-2$，

（2）$\nabla^2 u=-x^2 y$，

而 u 在边界上的数值为 0。

232. 求解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=bx(l-x),\\ u|_{x=0}=0,\ u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\end{cases}$$

233. 解第202题。

234. 一细长杆，$x=0$ 端固定，$x=l$ 端受周期力 $A\sin\omega t$ 作用。求解此杆的纵振动，设初位移及初速度均为 0。

235. 试求下列定解问题之解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u\Big|_{x=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}at,\quad \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l}=0,\\ u\Big|_{t=0}=\cos\dfrac{\pi}{l}x,\quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\sin\dfrac{\pi}{2l}x.\end{cases}$$

236. 求解下列定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u|_{x=0}=Ae^{-\alpha^2\kappa t},\quad u|_{x=l}=Be^{-\beta^2\kappa t},\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

237. 求解矩形区域内的第一类边值问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0;\\ u|_{x=0}=\varphi_1(y),\quad u|_{x=a}=\varphi_2(y),\\ u|_{y=0}=\psi_1(y),\quad u|_{y=b}=\psi_2(y).\end{cases}$$

238. 求矩形区域$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant b$内满足边界条件

$$\begin{cases}u|_{x=0}=Ay(b-y),\quad u|_{x=a}=0,\\ u|_{y=0}=B\sin\dfrac{\pi}{a}x,\quad u|_{y=b}=0\end{cases}$$

的调和函数。

239. 求解第204题。

240. 竖直悬挂的一弹性杆，上端($x=0$)固定，下端

($x=l$)挂有重物P。杆的单位质量上受外 力$f(x)$作用(重力包括在内)。试讨论杆的纵振动，设初始条件为

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x).$$

提示：$x=l$ 端的边界条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}=-c^2\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}+g,$$

其中 $c=\sqrt{\dfrac{ES}{P}}$(E为杆的杨氏模量，S为杆的横截面积)，g为重力加速度。

241。求解第210题，设初位移及初速度分别为$\varphi(x)$及$\psi(x)$。

242。考虑有界弦的阻尼振动，如果一端固定，另一端在外力作用下作周期运动，经过足够长的时间后，初条件的影响则因受阻尼的作用而衰减殆尽，因而问题便归结为求解无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+h\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=A\cos\omega t\end{cases}$$

的周期解，试求之。

243。热传导问题也存在无初值问题。典型的例子是地表温度的日变化或年变化向地层内传播而形成的温度波。把地球设想为均匀半无界空间，试求无初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u\big|_{x=0}=A\cos\omega t,\quad u\big|_{x\to\infty}\text{有界}\end{cases}$$

的周期解。

习题十三　正交曲线坐标系

244．写出下列正交曲线坐标系中的拉普拉斯算子：

（1）椭圆柱坐标系(ξ,η,z)，

$$x=a\xi\eta,\quad y=a\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)},\quad z=z;$$

（2）抛物线柱坐标系(λ,μ,z)，

$$x=\frac{1}{2}(\lambda-\mu),\quad y=\sqrt{\lambda\mu},\quad z=z;$$

（3）锥面坐标系(r,λ,μ)，

$$x=\frac{r}{\alpha}\sqrt{(\alpha^2-\lambda)(\alpha^2+\mu)},$$

$$y=\frac{r}{\beta}\sqrt{(\beta^2+\lambda)(\beta^2-\mu)},$$

$$z=\frac{r\sqrt{\lambda\mu}}{\alpha\beta}\quad(\alpha^2+\beta^2=1);$$

（4）椭球坐标系(λ,μ,ν)，

$$x^2=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$

$$z^2=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

245．在上述各坐标系中将拉普拉斯方程分离变数．

提示：(4)中应利用恒等式

$$(\mu-\nu)(\tau-\sigma\lambda)+(\nu-\lambda)(\tau-\sigma\mu)$$
$$+(\lambda-\mu)(\tau-\sigma\nu)\equiv 0.$$

246．一无穷长空心圆柱导体，分成两半，互相绝缘。一半电势为V，另一半电势为$-V$，求柱内电势分布(见图20)。

247．半径为a、表面熏黑的均匀长圆柱，平放在地

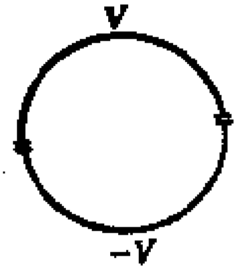


图 20

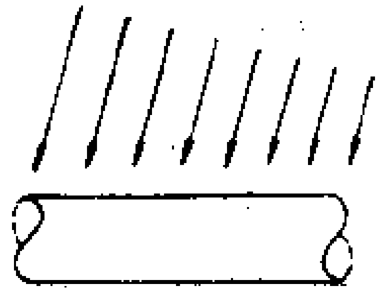


图 21

上，受到阳光照射，其垂直于光线的单位面积上单位时间内吸收热量为M，同时，柱面按牛顿冷却定律向外散热，外界温度为0(见图21)。试求柱内稳定温度分布。

248．求环形区域 $a\leqslant r\leqslant b$ 内满足边界条件

$$u|_{r=a}=f(\varphi),\quad u|_{r=b}=g(\varphi)$$

的调和函数。

249．求扇形区域$0\leqslant r\leqslant a$，$0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$内的稳定温度分布。设区域内无热源，在扇形的直边上温度为0，而在弧形边界上温度为$f(\varphi)$。

250．讨论上题中$f(\varphi)=A$(常数)且$\alpha=2\pi$的情况，证明沿正实轴：

（1）当$\varphi\to0$及$\varphi\to2\pi$时温度分布连续；

（2）当$\varphi\to0$及$\varphi\to2\pi$时温度梯度$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}$不连续。

251．在圆域$0\leqslant r\leqslant a$上求解：

（1）$\begin{cases}\nabla^2u=-4,\\ u|_{r=a}=0;\end{cases}$ （2）$\begin{cases}\nabla^2u=-4r\sin\varphi,\\ u|_{r=a}=0;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}\nabla^2u=-4r^2\sin2\varphi,\\ u|_{r=a}=0.\end{cases}$

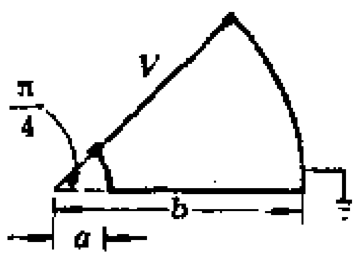


图 22

252．一个由理想导体做成的无穷长波导管，其截面均匀，如图22所示。管内为真空。假定一个平面(即图中的一条直边)的电势为V，其余面上的电势均为0。试求波导管内的电势分布。

253．求解球内的定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\dfrac{\kappa}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)=0,\\ u|_{r=0}\text{有界},\ u|_{r=1}=Ae^{-(p\pi)^2\kappa t},\\ u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

提示：$\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$。

习题十四　斯特姆-刘维型本征值问题

254．将下列方程化为斯特姆-刘维型方程的标准形式：

(1) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+(x+\lambda)y=0$；

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\operatorname{ctg}x\dfrac{dy}{dx}+\lambda y=0$；

(3) $x(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a-bx)\dfrac{dy}{dx}-\lambda y=0$；

(4) $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\dfrac{dy}{dx}+\lambda y=0$。

255．设有本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0,\\ y'(a)=0,\quad y'(b)=0,\end{cases}$$

其中$p(x)$，$\rho(x)$及$q(x)$在$a\leqslant x\leqslant b$中均连续，且$p(x)\geqslant p_0>0$，$\rho(x)\geqslant\rho_0>0$。试证明其本征函数的正交性。

256．假设斯特姆-刘维型方程的本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0,\\ \left(a\dfrac{dy}{dx}-by\right)_{x=0}=0,\qquad \left(c\dfrac{dy}{dx}+dy\right)_{x=l}=0\end{cases}$$

中，$p(x)\geqslant p_0>0$，$q(x)\geqslant 0$，$\rho(x)\geqslant \rho_0>0$，$a$ 与 b 及 c 与 d 均为不同时为 0 的非负常数，试证明其本征值$\lambda_n\geqslant 0$。

257．求解本征值问题

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\dfrac{\lambda}{r^2}R=0,\\ R(a)=0,\ R(b)=0,\end{cases}$$

其中$b>a>0$。

258．证明下列奇异的本征值问题是自伴的：

(1) $$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0,\\ y(\pm 1)\text{有界；}\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda y=0,\\ y(0)\text{有界，}\ y(1)=0.\end{cases}$$

259．设有本征值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0,\\ y(b)=\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a),\\ y'(b)=\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a),\end{cases}$$

其中$p(a)=p(b)$。试证明，当

$$\begin{vmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{vmatrix}=1$$

时，对应不同本征值的本征函数正交。

260. 两条质料不同、长各为l_1和l_2的均匀弦连接在一起，而两端($x=0$及$x=l_1+l_2$)固定。试决定弦的横振动本征频率，并验证本征函数的正交性。

261. 杆AC由两部分组成：$AB=l_1, BC=l_2$，它们分别都是均匀的。设A端固定，C端自由，求杆的纵振动本征频率。

262. 三维空间中的本征值问题。设本征值问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u+\lambda u=0, & (x,y,z)\in V,\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma=0,\end{cases}$$

其中Σ是V的边界。若对应本征值λ_n的本征函数为u_n，试证明：

$$\iiint\limits_V u_m^* u_n \mathrm{d}V=0,\quad m\neq n,$$

即对应不同本征值的本征函数正交。

263. 若上题中的微分方程改为

$$\nabla\cdot[p(x,y,z)\nabla u]+\lambda\rho(x,y,z)u=0,$$

试证明：对应不同本征值的本征函数在空间区域V中以权重$\rho(x,y,z)$正交。

264. 设本征值问题

$$\begin{cases}\nabla^2\Phi+\lambda\Phi=0,\\ \Phi|_\Sigma=0\end{cases}$$

的解(本征函数)为$\{\Phi_k\}$，对应的本征值为$\{\lambda_k\}$，$k=1,2,3,\cdots$。试证明：当$\lambda=0$不是本征值时，泊松方程的第一类边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u = -f, \\ u|_{\Sigma} = 0\end{cases}$$

的解为

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k} \Phi_k,$$

A_k 是非齐次项 f 按 $\{\Phi_k\}$ 展开的系数。

265．证明：如果上题中 Φ 与 u 的边界条件改为齐次的第二类或第三类边条件时，结论仍然正确。

266．在与第264题相同的条件下，证明

$$\begin{cases}\nabla^2 u + \Lambda u = -f, & \Lambda \neq \lambda_k \\ u|_{\Sigma} = 0\end{cases}$$

的解为

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\lambda_k - \Lambda} \Phi_k.$$

267．用第264题的方法求解矩形区域 $0 \leqslant x \leqslant a$，$0 \leqslant y \leqslant b$ 内泊松方程的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -f(x, y), \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=a} = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=b} = 0.\end{cases}$$

268．用第264题的方法求解第231题。

269．设有本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]+\dfrac{d}{dy}\left[q(x)\dfrac{dy}{dx}\right]+[\lambda\rho(x)-r(x)]y=0, \\ y|_{x=a}=0,\quad p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=a}=0, \\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=b}=0,\quad \dfrac{d}{dx}\left[p(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=b}=0, \end{cases}$$

试证明：对应不同本征值的本征函数正交。

270．设有4阶常微分方程

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+\frac{d}{dx}\left[q(x)\frac{dy}{dx}\right]$$
$$+[\lambda\rho(x)-r(x)]y=0,$$

$p(x),q(x),\rho(x)$及$r(x)$均为已知，λ为待定系数。若$y(x)$在端点$x=a$及$x=b$均满足下列边界条件

$$y=0,\ \frac{dy}{dx}=0\quad 或\quad y=0,\quad p(x)\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

或

$$\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]=0,$$

试证明：对应于不同本征值的本征函数在区间$[a,b]$上以权重$\rho(x)$正交。

271．设有本征值问题

$$\begin{cases} X^{(4)}+\lambda X=0, \\ X(0)=0,\quad X(l)=0, \\ X''(0)=0,\quad X''(l)=0, \end{cases}$$

证明：本征值

$$\lambda_n = -\frac{\int_0^l |X_n''(x)|^2 \mathrm{d}x}{\int_0^l |X_n(x)|^2 \mathrm{d}x} < 0.$$

习题十五　球　函　数①

272. 试根据勒让德方程在 $x=1$ 的有界解（见第198题）求解本征值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] + \mu(\mu+1)y = 0, \\ y(\pm 1)\text{有界。} \end{cases}$$

提示：讨论时可利用高斯判别法。

273. 证明：

(1) $\mathrm{P}_{2k}(0) = (-)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$

$$= (-)^{k+1} \frac{2}{B\left(k+1, -\frac{1}{2}\right)}, \mathrm{P}_{2k+1}(0) = 0;$$

(2) $\mathrm{P}'_{2k}(0) = 0$, $\mathrm{P}'_{2k+1}(0) = (-)^k \dfrac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2}$

$$= (-)^k \frac{2}{B\left(k+1, \frac{1}{2}\right)};$$

(3) $\mathrm{P}'_k(1) = \dfrac{1}{2}k(k+1)$,

$$\mathrm{P}'_k(-1) = \frac{(-)^{k-1}}{2}k(k+1),$$

---

① 在本习题中，k, l 均代表非负整数。

$$\mathrm{P}_k''(1)=\frac{1}{8}(k-1)k(k+1)(k+2).$$

274. 证明：

$$\int_x^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{(1-x^2)[\mathrm{P}_k'(x)\mathrm{P}_l(x)-\mathrm{P}_l'(x)\mathrm{P}_k(x)]}{k(k+1)-l(l+1)},\quad k\neq l.$$

275. 计算积分

$$\int_{-1}^1 x^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x,$$

并由此导出

$$\int_{-1}^1 \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

276. 利用罗巨格公式证明

$$\int_{-1}^1 (1+x)^k \mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(k+l+1)!},\quad k\geqslant l.$$

若$k<l$时又如何？

277. 试由罗巨格公式出发，将勒让德多项式表示成围道积分，从而导出勒让德多项式的积分表示：

$$\mathrm{P}_l(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(x\pm\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^l\mathrm{d}\varphi.$$

278. 证明：$\mathrm{P}_l(x)$的零点均为实数，且全都在区间$(-1,1)$内。

279. 设(x,y,z)为空间一点的坐标，θ为矢径$\boldsymbol{r}$与z轴的夹角，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明

$$\mathrm{P}_l(\cos\theta)=\frac{(-)^l}{l!}\frac{\partial^l}{\partial z^l}\frac{1}{r}\bigg|_{r=1}.$$

280．从勒让德多项式的生成函数出发，证明：

(1) $\mathrm{P}_l(-x)=(-)^l\mathrm{P}_l(x)$；

(2) $\mathrm{P}_l\left(-\frac{1}{2}\right)=\sum\limits_{k=0}^{2l}\mathrm{P}_k\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{P}_{2l-k}\left(\frac{1}{2}\right)$；

(3) $\mathrm{P}_l(\cos 2\theta)=\sum\limits_{k=0}^{2l}(-)^k\mathrm{P}_k(\cos\theta)\mathrm{P}_{2l-k}(\cos\theta)$；

(4) $\int_{-1}^{1}\mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{2l+1}\delta_{kl}$．

281．证明：

$$\mathrm{P}_k(\cos\theta)=\frac{(2k)!}{2^{2k-1}(k!)^2}\left\{\cos k\theta+\frac{1\cdot k}{1\cdot(2k-1)}\cos(k-2)\theta\right.$$

$$\left.+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 2}\frac{k(k-1)}{(2k-1)(2k-3)}\cos(k-4)\theta+\cdots\right\}.$$

282．如果$|x|$足够小，且

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k x^k}{k!},$$

证明：$f(x)$可按勒让德多项式展开，

$$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}C_l\mathrm{P}_l(x),$$

其中，

$$C_l=(2l+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)a_{l+2k}}{2^{l+2k}k!\,\Gamma\left(l+k+\frac{3}{2}\right)}.$$

283. 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1} P_k'(x) P_l(x) dx$;

(2) $\int_{-1}^{1} \frac{P_l(x)}{(1-2xt+t^2)^{3/2}} dx$.

284. 证明：对于足够小的$|t|$，下式成立：

$$(1-t^2)(1-2xt+t^2)^{-3/2} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(x) t^l.$$

285. 利用

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \frac{1}{1-xt} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}}},$$

证明：

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{l!}{2^{2k}(k!)^2(l-2k)!}(x^2-1)^k x^{l-2k}.$$

286. 利用上题结果，证明：

$$e^{xt} J_0(t\sqrt{1-x^2}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(x) t^l}{l!},$$

其中

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

是零阶贝塞耳函数（参见习题十六）。

287. 在上题中分别令 $x=\cos\alpha$，$t=r\sin\beta$ 及 $x=\cos\beta$，$t=r\sin\alpha$，从而推出

$$P_l(\cos\alpha)=\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\right)^l\sum_{k=0}^{l}\frac{l!}{k!(l-k)!}$$

$$\times\left[\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha}\right]^{l-k}P_k(\cos\beta).$$

288. 计算下列积分：

(1) $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\frac{dP_k(x)}{dx}\frac{dP_l(x)}{dx}dx$;

(2) $\int_{-1}^{1}\frac{dP_k(x)}{dx}\frac{dP_l(x)}{dx}dx$.

289. 计算下列积分：

(1) $\int_{0}^{1}P_k(x)P_l(x)dx$;

(2) $\int_{-1}^{1}xP_k(x)P_{k+1}(x)dx$;

(3) $\int_{-1}^{1}x^2P_k(x)P_{k+2}(x)dx$;

(4) $\int_{-1}^{1}[xP_k(x)]^2dx$.

290. 将下列函数按勒让德多项式展开：

(1) $f(x)=x^2$;　　(2) $f(x)=|x|$;

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\end{cases}$

(4) $f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}$.

291. 定义

$$Q_l(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{P_l(t)}{x-t}dt,$$

(1) 证明$Q_l(x)$是勒让德方程的解；

(2) 求出$Q_0(x)$，$Q_1(x)$和$Q_2(x)$的表达式。

292．求解下列本征值问题：

(1) $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\\ y(0)=0,\ y(1)有界；\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{d}{dx}\left[(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}\right]+\lambda y=0,\\ y'(0)=0,\ y(1)有界.\end{cases}$

293．求解球内定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0,\quad r<a,\\ u|_{r=a}=\begin{cases}u_0, & 0\leqslant\theta\leqslant\alpha,\\ 0, & \alpha<\theta\leqslant\pi.\end{cases}\end{cases}$$

294．求解第208题，假定温度已达到稳定。

295．求解下列定解问题：

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0, & a<r<b,\\ u|_{r=a}=u_0,\ u|_{r=b}=u_0\cos^2\theta.\end{cases}$$

296．一完全柔软的均匀细线，重力可以忽略。$x=0$端固定在匀速转动的轴上，角速度为ω，另一端($x=l$)自由。由于惯性离心力的作用，此细线的平衡位置为水平线。当此线相对于其平衡位置作横振动时，方程及定解条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{1}{2}\omega^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} \text{ 有界}, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \end{cases}$$

试求解此定解问题。

297．设有一半径为 a 的导体半球，球面温度为 1℃，底面温度为 0℃，求半球内的稳定温度分布。

298．一个均匀圆盘，总质量为 M，半径为 a，求空间任一点的引力势。

299．有一半径为 b 的接地导体球壳，球壳内放一圆环，环半径为 a，环心与球心重合，环上均匀带电，总电荷为 Q。求球内的电势分布。

300．将下列函数按球谐函数 $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ 展开：

(1) $\sin^2\theta\cos^2\varphi$；　　(2) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$。

301．在半径为 a 的

(1) 球内区域，　　(2) 球外区域，

求解：

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta,\varphi). \end{cases}$$

302．一半径为 a 的均匀导体球，表面温度为

(1) $u|_{r=a} = P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$，

(2) $u|_{r=a} = P_1(\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$，

试求出球内的稳定温度分布。

303．求解球内问题：

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} \\ \qquad = A+Br^2\sin 2\theta\cos\varphi, \\ u|_{r=a}=0, \end{cases}$$

其中A，B为已知常数。

习题十六　柱　函　数

304. 计算$W[J_\nu(x),J_{-\nu}(x)]$及$W[J_\nu(x),Y_\nu(x)]$，其中，

$$W[y_1,y_2]\equiv\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}.$$

提示：先证明$xW[J_\nu(x),J_{-\nu}(x)]$为常数，然后定出此常数值。

305. 利用上题结果，计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu^2(x)}$；　　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{xY_\nu^2(x)}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{xJ_\nu(x)Y_\nu(x)}$；　　(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x[J_\nu^2(x)+Y_\nu^2(x)]}$.

306. 有很多方程经过适当的自变数或因变数变换可化成贝塞耳方程而得出它的解。例如，方程

$$u''+\frac{1-2\alpha}{z}u'+\left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2+\frac{\alpha^2-\gamma^2\nu^2}{z^2}\right]u=0$$

的通解即为$c_1z^\alpha J_\nu(\beta z^\gamma)+c_2z^\alpha Y_\nu(\beta z^\gamma)$。试验证此结果。

307. 利用上题结果，解下列常微分方程：

(1) $u'' + az^b u = 0$;

(2) $z^2u'' - 2zu' + 4(z^4 - 1)u = 0$;

(3) $zu'' - 3u' + zu = 0$;

(4) $zu'' - u' + 4z^3u = 0$;

(5) $z^2u'' + zu' - \left(z^2 + \frac{1}{4}\right)u = 0$;

(6) $zu'' - u' - zu = 0$;　　(7) $u'' - z^2u = 0$;

(8) 一单摆在其平衡位置附近作微小振动。若摆长以等速率 b 增长，而初始时摆长为 a，则其动力学方程为

$$(a + bt)\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + g\theta = 0.$$

设 $t = 0$ 时单摆静止于 $\theta(0) = \theta_0$ 处，试求 $\theta(t)$。

308. 证明：

(1) $\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - + \cdots$,

$\sin x = 2J_1(x) - 2J_3(x) + 2J_5(x) - + \cdots$;

(2) $J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1$;

(3) $x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots\}$;

(4) $x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^2 J_{2n}(x)$.

309. 将函数 $f(\theta) = \cos(x\sin\theta)$ 和 $g(\theta) = \sin(x\sin\theta)$ 展为傅里叶级数。

310. 将函数 $\cos(z\cos\varphi)$ 展开为 z 的幂级数，逐项积分，证明：

$$J_\nu(z)=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^\pi\cos(z\cos\varphi)\sin^{2\nu}\varphi d\varphi$$

$$=\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{-1}^1\cos(z\xi)(1-\xi^2)^{\nu-\frac{1}{2}}d\xi,$$

其中 $\mathrm{Re}\nu>-\frac{1}{2}$。

这个结果可以用来把"李萨如图形"展成傅里叶级数。作为一个例子，试将函数 $y=\sqrt{\pi^2-x^2}$ 展成傅里叶级数。

311. 证明：

$$\int xJ_\nu^2(x)dx=\frac{1}{2}x^2[J_\nu^2(x)+J_{\nu+1}^2(x)]$$

$$-\nu xJ_\nu(x)J_{\nu+1}(x)+C,$$

其中 $\mathrm{Re}\nu\geqslant0$，C 为积分常数。

如果把式中的贝塞耳函数换成其它类型的柱函数，公式还成立吗？

312. 计算作为本征函数的贝塞耳函数的归一因子的另一种方法如下：设 μ_i 是 $J_n(x)$的正零点，试证：

$$\int_0^1 J_n(\mu_i x)J_n(\alpha x)xdx=-\frac{\mu_i J_n(\alpha)J_n'(\mu_i)}{\mu_i^2-\alpha^2}.$$

然后，令 $\alpha\to\mu_i$，由此计算出积分

$$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)xdx.$$

313. 设 μ_i 是 $J'_n(x)$的正零点，重复上题的步骤，计算积分：

$$\int_0^1 J_n^2(\mu_i x)x\mathrm{d}x.$$

314. 若 $\mathrm{Re}\nu>-1$，证明：

$$\frac{1}{2}\int_0^x J_\nu(x)\mathrm{d}x = J_{\nu+1}(x)+J_{\nu+3}(x)$$

$$+\cdots+J_{\nu+2n+1}(x)+\cdots.$$

315. 计算下列积分：

(1) $\int_0^x x^{-n}J_{n+1}(x)\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^a x^3 J_0(x)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^\infty e^{-ax}J_0(\sqrt{bx})\mathrm{d}x$，$a>0$，$b\geqslant 0$；

(4) $\int_0^t J_0(\sqrt{x(t-x)})\mathrm{d}x$.

316. 证明：

$$\int_0^t [\sqrt{x(t-x)}]^n J_n(\sqrt{x(t-x)})\mathrm{d}x$$

$$=2^{-n}\sqrt{\pi}\, t^{n+\frac{1}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2}\right).$$

317. 证明：

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\sin(a\sqrt{x})\mathrm{d}x=\frac{\pi}{a}J_2(a),$$

以及，更一般地，

$$\int_0^1 (1-x)^{c-1}x^{\frac{n}{2}}J_n(a\sqrt{x})\mathrm{d}x=\Gamma(c)\left(\frac{2}{a}\right)^c J_{n+c}(a).$$

318. 设 $\nu>-1$，$a>0$，$b>0$，证明：

(1) $\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(bx)x^{\nu+1}dx=\dfrac{2a(2b)^\nu\,\Gamma\left(\nu+\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+b^2)^{\nu+\frac{3}{2}}}$;

(2) $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}J_\nu(bx)x^{\nu+1}dx=\dfrac{b^\nu}{(2a^2)^{\nu+1}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$.

319. 证明:

(1) $\int_0^\infty \dfrac{\sin p}{p}J_0(rp)dp=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & 0\leqslant r\leqslant 1,\\ \sin^{-1}\dfrac{1}{r}, & r>1;\end{cases}$

(2) $\int_0^\infty \sin pJ_0(rp)dp=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}}, & 0<r<1,\\ \infty & r=1,\\ 0 & r>1;\end{cases}$

(3) $\int_0^\infty J_0(rp)J_1(ap)dp=\begin{cases}\dfrac{1}{a}, & r<a,\\ \dfrac{1}{2a}, & r=a,\\ 0, & r>a.\end{cases}$

320. 根据诺依曼函数 $Y_\nu(z)$ 的定义

$$Y_\nu(z)=\frac{\cos\nu\pi\cdot J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi},$$

证明:

(1) $Y_{-\nu}(z)=\sin\nu\pi J_\nu(z)+\cos\nu\pi Y_\nu(z)$,

$Y_\nu(ze^{m\pi i})=e^{-m\nu\pi i}Y_\nu(z)+2i\sin m\nu\pi\operatorname{ctg}\nu\pi J_\nu(z)$,

$Y_{-\nu}(ze^{m\pi i})=e^{-m\nu\pi i}Y_{-\nu}(z)$

$+2i\sin m\nu\pi\csc\nu\pi J_\nu(z)$;

(2) $Y_\nu(z)$的递推关系与$J_\nu(z)$相同，即

$$\frac{d}{dz}z^\nu Y_\nu(z)=z^\nu Y_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}z^{-\nu}Y_\nu(z)=-z^{-\nu}Y_{\nu+1}(z).$$

321．设有一柱体，半径为a，高为h，与外界绝热，初始时温度为$u_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$，求此柱体内温度的变化与分布。又当$t$足够长时，该柱体的温度应达到稳定，试求此稳定温度。

提示：先判定温度与φ, z无关。

322．半径为R的圆形膜，边缘固定，初始形状是旋转抛物面

$$u\big|_{t=0}=H\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

初速为0，求解膜的横振动。

323．求解下列定解问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0,\\ u\big|_{r=a}=0,\ u\big|_{t=0}=u_0\sin 2\varphi.\end{cases}$$

324．一长为π、半径为1的圆柱形导体，柱体的侧面和其上下底的温度均保持为0，初始时柱体内的温度分布为$f(r)\sin nz$，求柱体内温度的变化与分布。

325．一空心圆柱，内半径为a，外半径为b，维持内外柱面温度为0。又设柱体高为h，上下底绝热，初温为常数u_0，求柱体内温度的变化与分布。

326．半径为R的圆形膜，边缘固定，在单位质量上受

周期力

(1) $f(r,t)=A\sin\omega t$,

(2) $f(r,t)=A\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)\sin\omega t$

的作用，求解膜的强迫振动，设初位移和初速度均为0。

327. 求长圆柱形铀块的临界半径。

328. 一完全柔软的均匀线，密度为 ρ，上端($x=l$) 固定在匀速转动的轴上，角速度为 ω，下端($x=0$)自由。此线相对于平衡位置作横振动。横振动方程及定解条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-g\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\omega^2 u=0, \\ u|_{x=0}\text{有界}, \quad u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), \end{cases}$$

试求 $u(x,t)$。

提示：解本征值问题时利用第306题的结果。

329. 一完全柔软的线，上端($x=l$)固定，下端($x=0$)自由。线的线密度为 $\rho=ax^m(m>-1)$，则线的自由横振动方程及边界条件为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{gx}{m+1}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-g\frac{\partial u}{\partial x}=0, \\ u|_{x=0}\text{有界}, \quad u|_{x=l}=0. \end{cases}$$

设初位移和初速度分别为

$$u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),$$

试求 $u(x,t)$。

330. 证明：

(1) $H_{-\nu}^{(1)}(z)=e^{\nu\pi i}H_{\nu}^{(1)}(z)$, $H_{-\nu}^{(2)}(z)=e^{-\nu\pi i}H_{\nu}^{(2)}(z)$;

(2) $$H_{\nu}^{(1)}(ze^{m\pi i})=\frac{\sin(1-m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z)$$

$$-e^{-\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(ze^{m\pi i})=\frac{\sin(1+m)\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(2)}(z)$$

$$+e^{\nu\pi i}\frac{\sin m\nu\pi}{\sin\nu\pi}H_{\nu}^{(1)}(z).$$

331．若 n 为一正整数，证明：

$$J_{n+\frac{1}{2}}(x)=i^{-n}\sqrt{\frac{x}{2\pi}}\int_{-1}^{1}e^{i\mu x}P_n(\mu)d\mu,$$

并推出

$$i^n\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}J_{n+\frac{1}{2}}(x)x^{-\frac{1}{2}}dx=\begin{cases}2\pi P_n(t), & |t|<1,\\ 0, & |t|>1,\end{cases}$$

其中 $P_n(x)$ 是 n 次勒让德多项式。

332．一导体球，半径为 a，初温为常温 u_0，球面温度为 0，求球内温度的变化和分布。

333．确定球形铀块的临界半径。

334．定义：

$$K_{\nu}(z)=\frac{2}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(z)-I_{\nu}(z)],$$

试证明：

$$K_{\nu}(z)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}ie^{\frac{1}{2}\nu\pi i}H_{\nu}^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}), & -\pi<\arg z\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}ie^{-\frac{1}{2}\nu\pi i}H_{\nu}^{(2)}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}), & -\frac{\pi}{2}<\arg z<\pi.\end{cases}$$

335．证明：

(1) $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\sin bx I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx$

$$=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}ax}\cos bx I_0\left(\frac{1}{2}ax\right)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2b}}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{a^2+b^2}}},$$

其中$a>0$，$b>0$；

(2) $\int_0^\infty J_0(\alpha x)K_0(\beta x)x\,dx=\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$，$\alpha>0$，$\mathrm{Re}\beta>0$。

336．高为h，半径为a的圆柱体，上下底保持温度为0，而柱面温度为$u_0\sin\frac{2\pi}{h}z$，求柱体内的稳定温度分布。

337．证明

$$K_0(x)=\int_0^\infty e^{-x\,\mathrm{ch}\,t}dt$$

满足零阶虚宗量贝塞耳方程，由此证明当x很大时，$K_0(x)$的渐近形式为$Ae^{-x}/\sqrt{x}$。定出常数A。

338．假定零阶虚宗量贝塞耳方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-y=0$$

的形式解为

$$y\sim e^{\lambda x}x^{-\rho}\sum_{k=0}^\infty a_k x^{-k},\quad a_0\neq0,$$

试求出此方程的两个形式解

$$y_1 \sim c_1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{1^2}{1\cdot(8x)}+\frac{1^2\cdot3^2}{2!(8x)^2}+\cdots\right],$$

$$y_2 \sim c_2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left[1-\frac{1^2}{1\cdot(8x)}+\frac{1^2\cdot3^2}{2!(8x)^2}-+\cdots\right].$$

如果取 $c_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $c_2=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, 这正好就是 $I_0(x)$和 $K_0(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近展开。

习题十七 格临函数

339. 圆内拉普拉斯方程第一边值问题的格临函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$是

$$G=-2\ln R+2\ln R_1-2\ln\frac{a}{r'}.$$

其中

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\varphi},$$

$$R_1=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\varphi},$$

φ 是 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{r}'$ 的夹角, $\boldsymbol{r}_1=(a/r')^2\boldsymbol{r}'$, a 是圆的半径. 试证明圆内的定解问题

$$\begin{cases}\nabla^2u=0,\\ u|_{r=a}=f(\varphi)\end{cases}$$

的解可表为

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\varphi')\mathrm{d}\varphi'}{a^2+r^2-2ar\cos(\varphi-\varphi')}.$$

340.（1）用电像法求出球内拉普拉斯方程第一边值问

题的格临函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$；

（2）求出边界面（球面 $r=a$）上各点的感应电荷密度 $\sigma(\theta,\varphi)$；

（3）证明像电荷和感应电荷在球内完全等效；

（4）证明球内拉普拉斯方程第一边值问题

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0,\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi)\end{cases}$$

的解是

$$u(r,\theta,\varphi)=\frac{a}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-r^2)f(\theta',\varphi')\sin\theta'\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\varphi'}{(a^2+r^2-2ar\cos\psi)^{3/2}},$$

其中 ψ 是 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$与 $\boldsymbol{r}'(a,\theta',\varphi')$的夹角，

$$\cos\psi=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')。$$

341．证明倒易定理：若 Φ 是由体电荷密度 ρ 及面电荷密度 σ 产生的静电势，Φ'是由体电荷密度 ρ'及面电荷密度 σ'产生的静电势，则

$$\iiint\limits_V\rho\Phi'\mathrm{d}V+\iint\limits_\Sigma\sigma\Phi'\mathrm{d}\Sigma=\iiint\limits_V\rho'\Phi\mathrm{d}V+\iint\limits_\Sigma\sigma'\Phi\mathrm{d}\Sigma。$$

342．用下列方法求三维无界空间亥姆霍兹方程的格临函数：

把 $\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$写成傅里叶积分，

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{k}',$$

因而可把格临函数 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ 表示为

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\frac{4\pi}{(2\pi)^3}(\nabla^2+k^2)^{-1}\iiint e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'$$

$$=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\frac{e^{i\boldsymbol{k}'\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k'^2-k^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}'。$$

采用球坐标系计算这个积分，在对立体角积分后，可求得

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{1}{\mathrm{i}\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{k'^2-k^2}k'\mathrm{d}k'$$

$$=\frac{1}{\mathrm{i}\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\lim_{\eta\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{k'^2-(k+\mathrm{i}\eta)^2}k'\mathrm{d}k'.$$

再应用复变函数的方法计算这个积分，即可求得 $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$。

343. 一无穷长弦，$t=t_0$时其$x=x_0$处受到瞬时的打击，冲量为I. 试求解弦的横振动，设初位移和初速度均为0.

344. 两端固定的弦，长为l，$t=t_0$时用细棒敲击弦上$x=x_0$点，使得该点获得冲量I. 求解弦的横振动，设初位移和初速度均为0.

345. 求解点热源在无穷长细杆上产生的温度分布与变化。方程及初始条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G(x,t;x_0,t_0)}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G(x,t;x_0,t_0)}{\partial x^2}=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),\\ G(x,t;x_0,t_0)|_{t=0}=0.\end{cases}$$

346. 试证明一维热传导方程的格临函数 $G(x,t;x_0,t_0)$ 的倒易性：

$$G(x,t;x_0,t_0)=G(x_0,-t_0;x,-t),$$

其中 $G(x,t;x_0,t_0)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial G}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2}=\delta(x-x_0)\delta(t-t_0),\\ G|_{x=0}=0,\quad G|_{x=l}=0,\\ G|_{t=0}=0.\end{cases}$$

347. 用格临函数方法解无界弦的横振动问题，方程及定解条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

提示：相应的格临函数已在第343题中求出。

348. 用格临函数方法解第215题。

提示：相应的格临函数见第344题。

349. 用格临函数方法解无界弦的热传导问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u\big|_{t=0}=\varphi(x).\end{cases}$$

提示：相应的格临函数见第345题。

350. 用第342题的方法求三维无界空间波动方程和热传导方程的格临函数。

提示：对于波动方程，先证明

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')=\frac{1}{4\pi^2 i\rho}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega\tau}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}\right)^2}\times(e^{ik\rho}-e^{-ik\rho}),$$

其中 $\tau=t-t'$，$\rho=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$，$c$ 为波速。由于因果律的要求，这里对 k 的积分应理解为

$$\lim_{\eta\to0^+}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{kdk}{k^2-\left(\dfrac{\omega}{c}-i\eta\right)^2}(e^{ik\rho}-e^{-ik\rho}).$$

习题十八　积 分 变 换

351. 用拉普拉斯变换求解半无界问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-\kappa\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x>0, t>0,\\ u|_{x=0}=u_0, \quad u|_{t=0}=0.\end{cases}$$

352. 一高为 d、底面积为 S 的圆柱体，侧面绝热，单位时间内通过下底供给热量 H，而上底保持温度为 0 。设柱体初温为 0，证明在 t 时刻单位时间内通过上底流出的热量为

$$H\left\{1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}e^{-\left(\frac{2n+1}{2d}\pi\right)^2\kappa t}\right\},$$

其中 κ 为扩散率。

353. 设有两条半无界杆，温度分别为 0 和 u_0。在 $t=0$ 时将两杆端点相接，求 $t>0$ 时杆中各点的温度分布。

354. 利用拉普拉斯变换解第236题。

355. 用傅里叶变换解无界弦的振动问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u|_{t=0}=u_0 e^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2},\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.\end{cases}$$

356. 用傅里叶变换与拉普拉斯变换解无界弦的横振动问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x).\end{cases}$$

357. 一半无界弦 $x\geqslant 0$，原处于平衡状态，设在 $t>0$ 时 $x=0$端作微小振动 $A\sin\omega t$。试求弦上各点的运动。

358. 电子光学中常遇到一种简单的静电透镜——等径双筒镜，它的两极是由两个无限接近的等径同轴长圆筒组成，其电势分别为 $-V_0$ 与 V_0（见图23）。求筒内的静电势。

提示：先在边界条件

$$u|_{r=a}=V_0 e^{-k|z|}\operatorname{sgn} z$$

下利用傅里叶变换求解，而后令$k\to 0$。

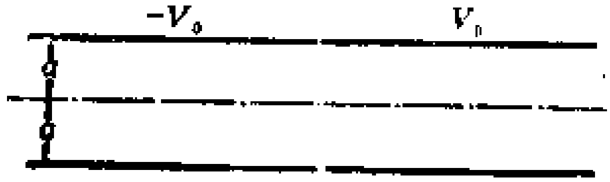


图 23

359. 设有一半径为1的带电圆盘，圆盘上电势为 V_0，求空间各点的电势分布。

提示：此定解问题为

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0,\\ z=0\text{时},\ u=V_0,\ 0\leqslant r<1,\\ \qquad\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\qquad r>1,\end{cases}$$

可用汉克耳变换求解。反演时用到第319题的结果。

360. 由柱面坐标(r,z)可以定义扁球面坐标(μ,ζ)，

$$z=\mu\zeta,\qquad r=(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

（1）证明：在此坐标系下，上题化为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left[(1+\zeta^2)\dfrac{\partial u}{\partial\zeta}\right]=0,\\ u|_{\zeta=0}=V_0,\quad u|_{\zeta\to\infty}\to 0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial\mu}\Big|_{\mu=0}=0,\quad u|_{\mu=1}\text{有界；}\end{cases}$$

（2）求出 $u(\mu,\zeta)$。

习题十九 保角变换

361．$\zeta=z^2$ 把 z 平面上的下列区域变为 ζ 平面上的什么区域？

（1）上半平面； （2）上半圆 $|z|<1$，$\mathrm{Im}z>0$；

（3）圆 $|z|<1$； （4）双纽线内部 $|z|^2<\cos(2\arg z)$。

362．若在分式线性变换

$$\zeta=\lambda\frac{z-\mu}{z-\nu}$$

下，z_1,z_2,z_3各点分别变为ζ_1,ζ_2,ζ_3各点，试证：

$$\frac{\zeta-\zeta_1}{\zeta-\zeta_2}:\frac{\zeta_3-\zeta_1}{\zeta_3-\zeta_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

363．求一变换，把上半平面变为单位圆，并把实轴上的点 $-1,0,1$ 分别变为圆周上的 $1,i,-1$。

364．z 平面上的单位圆 $|z|<1$，沿正实轴割开，试把此区域变为 ζ 平面上的上半平面。

365．求一变换，把第一象限变为单位圆内。

366．一半径为 a 的无穷长导体柱面，第一象限的电势为 V_1，第三象限的电势为 $-V_1$，而第二、第四象限皆接地，

如图24所示，求导体内的电势分布。

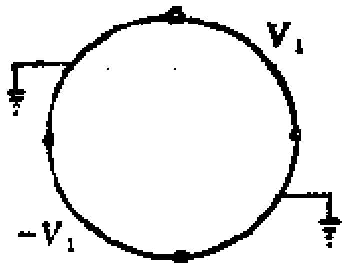


图 24

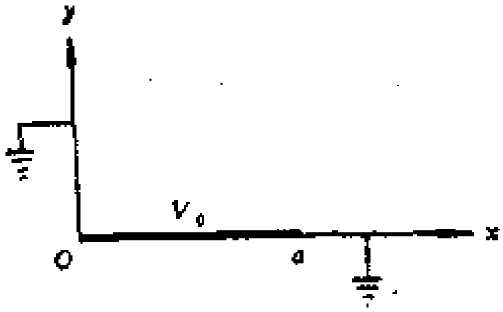


图 25

367. 如图25所示，正实轴上$(0,a)$段电势为V_0，实轴上$x>a$段及正虚轴的电势均为0，求第一象限内的电势分布。

368. 在接地的无穷长金属圆柱内，有一条平行于柱轴的均匀带电丝，线电荷密度为ρ。设圆柱的半径为a，带电丝与柱轴的距离为c（见图26）。试求柱内的电势分布。

提示：用保角变换将带电丝变到轴心处。

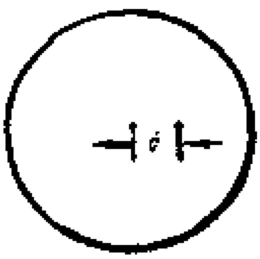


图 26

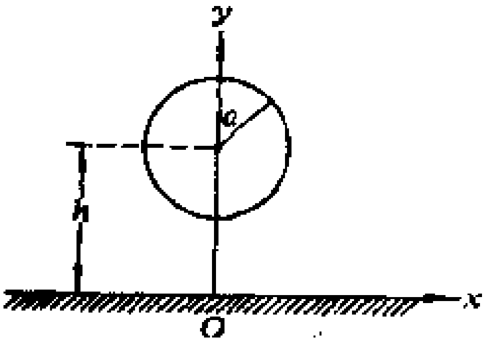


图 27

369. 地面之上平挂着一无穷长导体圆柱，圆柱的半径为a，柱轴距地面$h(h>a)$。设圆柱面的电势为V_0，求圆柱外空间各点的电势。

370．证明：儒可夫斯基变换

$$z=\frac{a}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$$

把z平面上以$z=\pm a$为焦点的共焦椭圆变为ζ平面上的同心圆．

习题二十　二阶线性偏微分方程的分类

371．讨论下述方程的类型，并将它们化为典则形式：

（1）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\dfrac{\partial u}{\partial x}+6\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（2）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+2\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（3）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（4）$(1+x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$；

（5）$\mathrm{tg}^2 x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}\,x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$．

372．有些方程，经过适当的因变数变换后，可以消去一阶偏导数项．

（1）证明：在因变数变换

$$u=e^{-(ax+by)}v$$

下，方程

$$\nabla^2 u+2a\frac{\partial u}{\partial x}+2b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

化为亥姆霍兹方程

$$\nabla^2 v-(a^2+b^2)v=0,$$

其中 a,b 为常数；

（2）寻求适当的变换，使方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2a\frac{\partial u}{\partial x}+2b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

在变换后不再含有一阶偏微商项；

（3）设有方程

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d\frac{\partial u}{\partial x}+e\frac{\partial u}{\partial y}+fu=\frac{\partial u}{\partial t},$$

其中 a,b,c,d,e,f 为常数．证明：只有在 $b^2-ac\neq 0$ 时，可作变换

$$u=e^{\alpha x+\beta y+\gamma t}v$$

使 $v(x,y,t)$ 满足方程

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial v}{\partial t}.$$

373．求下列各偏微分方程的通解：

（1）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

（2）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$；

（3）$(a^2-b^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$，$a,b$ 为常数，$a\neq 0$；

（4）$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$．

374．求偏微分方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

的通解。

375. 证明方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{x}{h}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

的通解可以写成

$$u=\frac{f(x+at)+g(x-at)}{h-x},$$

由此写出此方程在初始条件

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x)$$

下的解。

376. 求解弦振动方程的古沙（Goursat）问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\\ u|_{x-at=0}=\varphi(x),\\ u|_{x+at=0}=\psi(x),\\ \varphi(0)=\psi(0).\end{cases}$$

377. 在波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

中用 iy 代替 at，我们就能得到拉普拉斯方程的“初值”问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\\ u|_{y=0}=\varphi(x),\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=\psi(x),\end{cases}$$

其形式解为

$$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+\mathrm{i}y)+\varphi(x-\mathrm{i}y)]+\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{x-\mathrm{i}y}^{x+\mathrm{i}y}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

(1) 令 $\varphi(x)=x$，$\psi(x)=e^{-x}$，则可得

$$u(x,y)=x+\mathrm{e}^{-x}\sin y,$$

验证这个表达式处处满足拉普拉斯方程，也满足 $y=0$ 时的“初始”条件；

(2) 如果$\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$\psi(x)=0$，则形式解变为

$$u(x,y)=\frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}.$$

证明：这个函数在$(0,\pm1)$ 点不连续，因此，至少在这些点上，并不满足拉普拉斯方程。这说明，在一般情况下，拉普拉斯方程的“初值”问题无解。

378. 如果 $u(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 u=0,$$

证明：$v=(ax+by+cz)u$ 满足

$$\nabla^4 v=0,$$

其中 a,b,c 为任意常数.

379. 如果 $u(x,y,z)$是直角坐标下拉普拉斯方程的解，证明$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$也是解.

380. 如果 $u(r,\varphi,z)$是柱坐标下拉普拉斯方程的解，证明$\frac{\partial u}{\partial \varphi},\frac{\partial u}{\partial z}$也是解，但$\frac{\partial u}{\partial r}$一般不是解.

习题二十一 无界空间中的波动方程初值问题

381. 直接验证

$$u(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^{M}}\frac{\psi(\xi,\eta,\zeta)}{r}\mathrm{d}\sigma$$

是三维波动方程初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\\ u\big|_{t=0}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x,y,z)\end{cases}$$

的解，其中 S_{at}^{M} 是以 $M(x,y,z)$ 点为心的球面，该球面的半径为 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}=at$.

382. 求满足波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

及初始条件

$$u\big|_{t=0}=\begin{cases}u_0, & x^2+y^2+z^2<R^2,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>R^2,\end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=0$$

的解 $u(x,y,z,t)$.

383. 试利用平均值法的结果(即泊松公式)求解:

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x); \end{cases}$$

(2) $$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(r), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(r), \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

384. 利用三维无界空间波动方程初值问题的格临函数

$$G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t) = \frac{\delta\left(t - t' - \dfrac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{a}\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|},$$

求出二维无界空间波动方程初值问题的格临函数，从而求出二维波动方程初值问题的泊松公式.

385. 稳定问题的平均值定理. 设在空间区域V的内部,

$$\nabla^2 u = 0,$$

证明：任意一点(x, y, z)处的u值等于以该点为球心的任意一球面的u的平均值.

386. 用黎曼方法求解:

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u|_{y=1} = \varphi(x), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=1} = \psi(x). \end{cases}$$

387. 将下列方程化为典则形式，然后求出相应的黎曼函数：

(1) $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ $(x>0)$;

(2) $(1-x^2)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2x\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{1}{4}u = 0$ $(0<x<1)$.

提示：求解黎曼函数所满足的常微分方程时，可直接引用第194题的结果。

388. 设 $R(x,y;x_0,y_0)$ 为

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

的黎曼函数，$R^*(x,y;x_0,y_0)$为$L[u]$的伴式

$$M[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} - \frac{\partial(au)}{\partial x} - \frac{\partial(bu)}{\partial y} + cu$$

的黎曼函数，试证明

$$R(x,y;x_0,y_0) = R^*(x_0,y_0;x,y).$$

389. 用黎曼方法证明

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u|_{x=ct} = \varphi(t), \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=ct} = \psi(t) \end{cases}$$

的解为

$$u=\frac{a+c}{2a}\varphi\left(\frac{at+x}{a+c}\right)+\frac{a-c}{2a}\varphi\left(\frac{at-x}{a-c}\right)$$

$$+\frac{a^2-c^2}{2a}\int_{at-x/a-c}^{at+x/a+c}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi\text{，其中 } c\neq\pm a\text{。}$$

390．用黎曼方法解第376题。

习题二十二　变　分　法

391．试根据变分原理导出完全柔软的均匀弦的横振动方程。

392．设 $y=y(x)$，$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$F(y,y')$不显含$x$，证明

$$\begin{cases} J[y]=\int_a^b F(y,y')\mathrm{d}x, \\ y(a)=A,\ \ y(b)=B \end{cases}$$

取极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y'}y'-F=\text{常数。}$$

393．求泛函

$$\begin{cases} J[y]=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x, \\ y(0)=0,\ \ y(1)=1 \end{cases}$$

的极值曲线。

394．如图23所示，写出单位球面上从A点到B点的"短程线"所满足的微分方程，并求出短程线。证明此短程线在过A，B两点的大圆上。基于对称性的考虑，不妨取A点的坐标为$(\theta_0,\varphi_0)=(0,0)$，$B$点的坐标为$(\theta_1,\varphi_1)$。

提示： 单位球面上的弧元为

$$ds=\sqrt{d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2}.$$

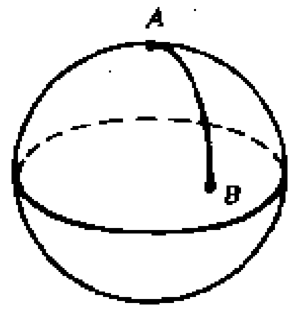


图 28

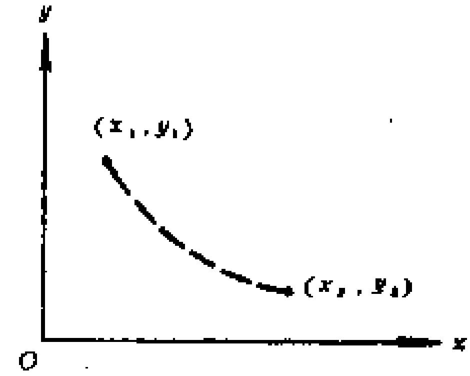


图 29

395. 一质点在重力作用下沿光滑曲线由(x_1,y_1)点运动至(x_2,y_2)点(见图29)．设重力加速度 g 为常数，试求"捷线"（即质点沿此曲线运动时费时最少）所满足的微分方程。

396. 若 $\bar{y}(x)$使泛函

$$J[y]\equiv\int_a^b F(x,y,y')dx,$$

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

在限制条件

$$J_1[y]\equiv\int_a^b G(x,y,y')dx=C$$

下取极值，且相应的拉格朗日乘子 $\lambda\neq0$，试证明 $\bar{y}(x)$ 也使泛函

$$J_1[y]\equiv\int_a^b G(x,y,y')dx,$$

$$y(a)=A,\quad y(b)=B$$

在限制条件

$$J[y]\equiv\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x=D$$

下取极值。

397．过二已知点(x_1,y_1)、(x_2,y_2)作一曲线，使此曲线绕x轴旋转时得到的曲面面积最小，求曲线所满足的微分方程。

398．试写出本征值问题

$$\begin{cases}\nabla^2u+\lambda u=0,\\ \left[\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right]_\Sigma=0\end{cases}$$

所对应的泛函极值问题。设$\beta\neq0$。

399．设有一长为l的弦，由同一种质料组成，线密度$\rho(x)=1+x(0\leqslant x\leqslant1)$，则振动方程为

$$(1+x)\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2u}{\partial x^2},$$

试用里兹方法求出两端固定时的最低固有频率。

400．用里兹方法求出

$$y''+\lambda y=0,$$

$$y(-1)=0,\quad y(1)=0$$

的最低的两个本征值的近似值，取试探函数为：

(1) $y=c_1(1-x^2)+c_2x(1-x^2)$；

(2) $y=c_1(1-x^2)+c_2x^2(1-x^2)$。

第二部分　答　　案

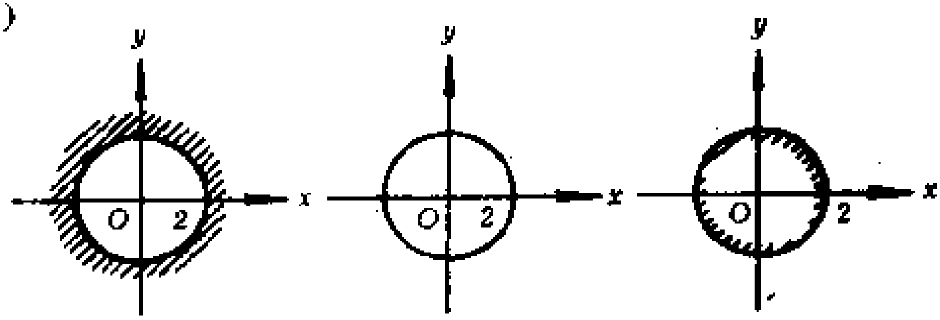
习　题　一

1. 答案见下表（在本题中，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$）。

	实部	虚部	模	辐角	附注
(1)	1	$\sqrt{3}$	2	$\frac{\pi}{3}+2k\pi$	
(2)	$1-\cos a$	$\sin a$	$2\sin\frac{a}{2}$	$\frac{\pi-a}{2}+2k\pi$	
(3)	$\cos(\sin x)$	$\sin(\sin x)$	1	$\sin x+2k\pi$	
(4)	$e^{-y}\cos x$	$e^{-y}\sin x$	e^{-y}	$x+2k\pi$	$x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$
(5)	$e^{x}\cos y$	$e^{x}\sin y$	e^{x}	$y+2k\pi$	$x=\mathrm{Re}z$, $y=\mathrm{Im}z$
(6)	$\cos\frac{2n+1}{4}\pi$	$\sin\frac{2n+1}{4}\pi$	1	$\frac{2n+1}{4}\pi+2k\pi$	$n=0,1,2,3$
(7)	$(-)^n\sqrt[4]{2}\cos\frac{\pi}{8}$	$(-)^n\sqrt[4]{2}\sin\frac{\pi}{8}$	$\sqrt[4]{2}$	$\left(n+\frac{1}{8}\right)\pi+2k\pi$	$n=0,1$
(8)	$\frac{(-)^n}{\sqrt{2}}$	$\frac{(-)^n}{\sqrt{2}}$	1	$\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi+2k\pi$	$n=0,1$
(9)	$e\cos 1$	$e\sin 1$	e	$1+2k\pi$	
(10)	$\cos\varphi(x)$	$\sin\varphi(x)$	1	$\varphi(x)+2k\pi$	

2.（在以下各图中，阴影均画在边界外侧）

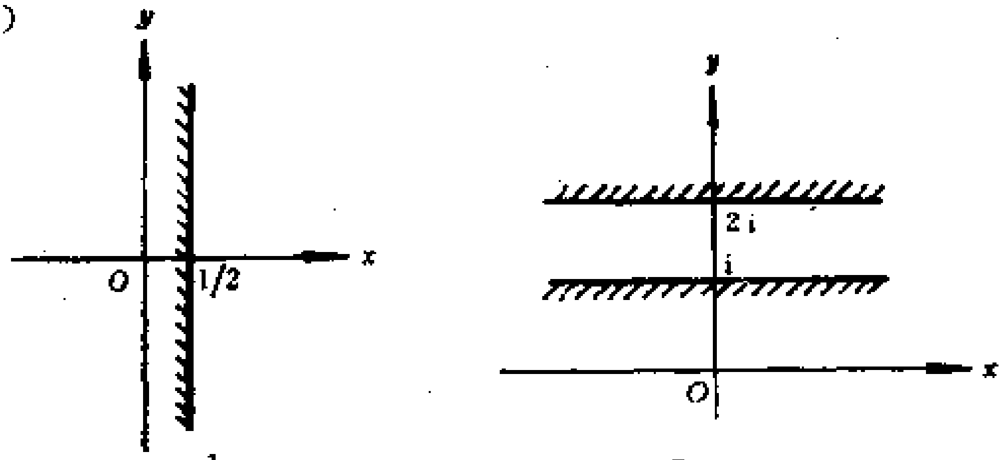
(1)



$|z|<2$　　$|z|=2$　　$|z|>2$

图　30

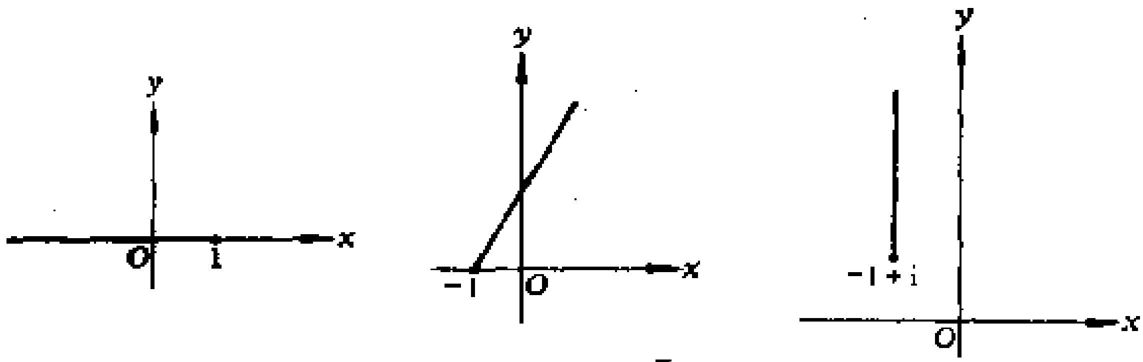
(2)



$\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$ $\qquad$ $1<\mathrm{Im}z<2$

图 31

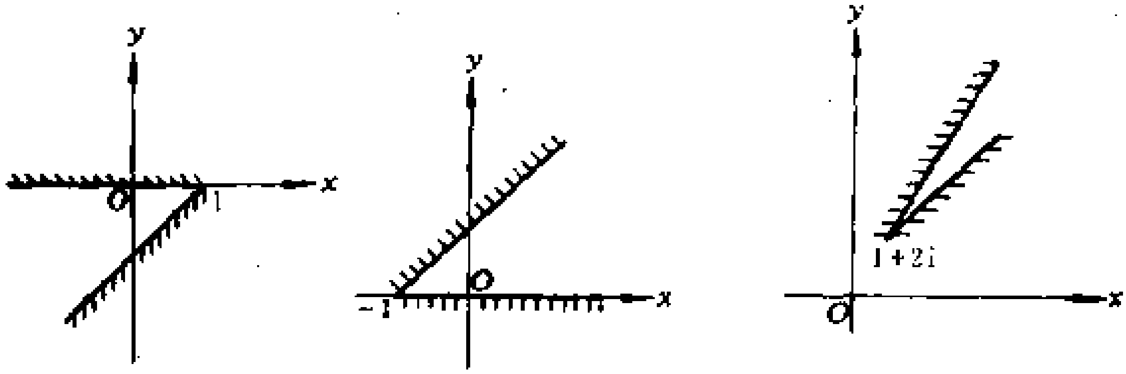
(3)



$\arg(1-z)=0$ $\qquad$ $\arg(1+z)=\frac{\pi}{3}$ $\qquad$ $\arg(z+1-i)=\frac{\pi}{2}$

图 32

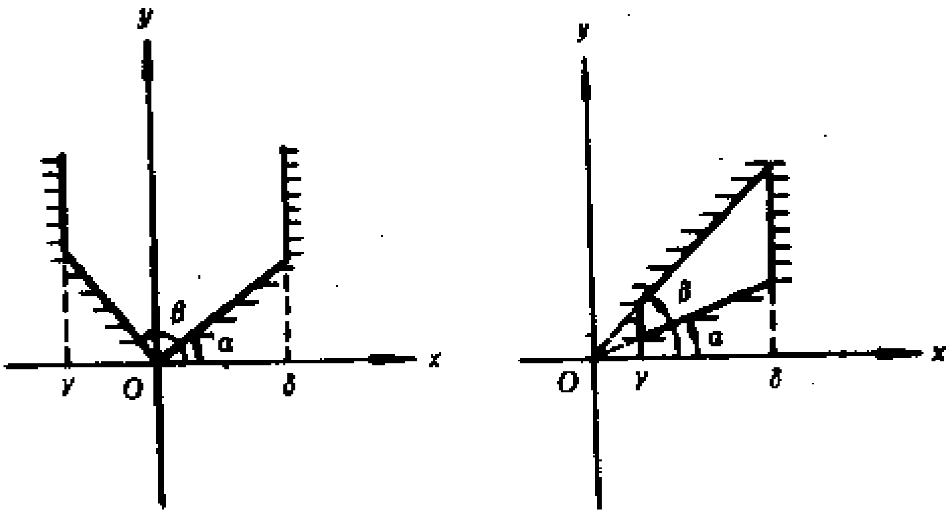
(4)



$0<\arg(1-z)<\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $0<\arg(1+z)<\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}<\arg(z-1-2i)<\frac{\pi}{3}$

图 33

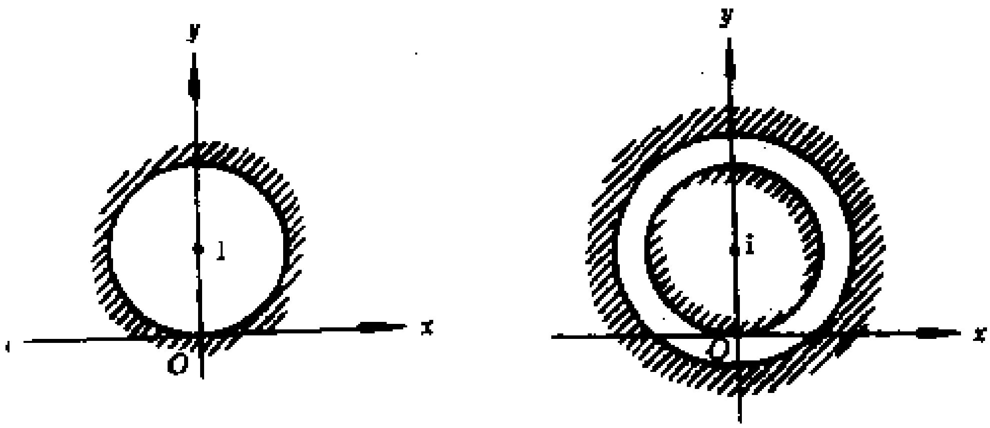
(5) 由于 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的数值不同，相应的图形也不相同。这里(见图34)只画出其中的两种情况。



$\alpha<\arg z<\beta$　　$\gamma<\operatorname{Re}z<\delta$

图 34

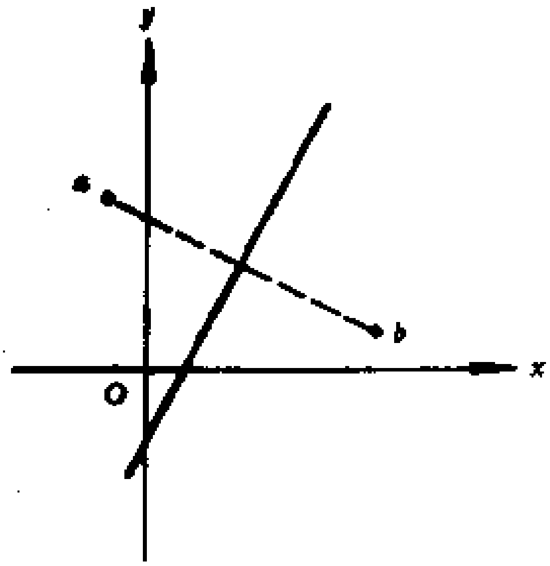
(6)



$|z-i|<1$　　$1<|z-i|<\sqrt{2}$

图 35

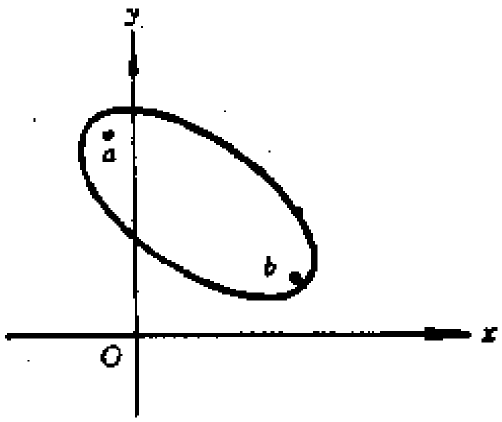
(7)



$|z-a|=|z-b|$

图 36

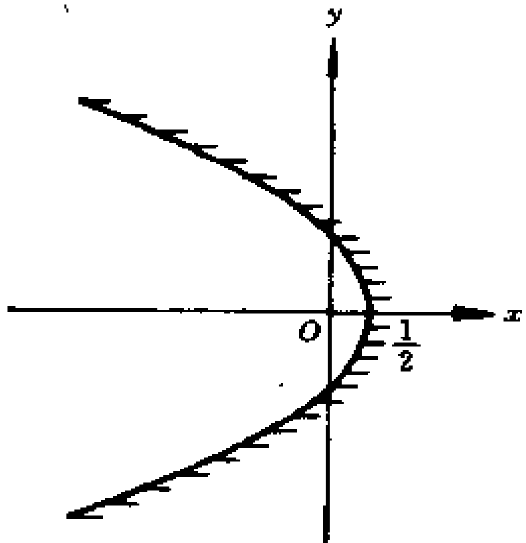
(8)



$|z-a|+|z-b|=c$

图 37

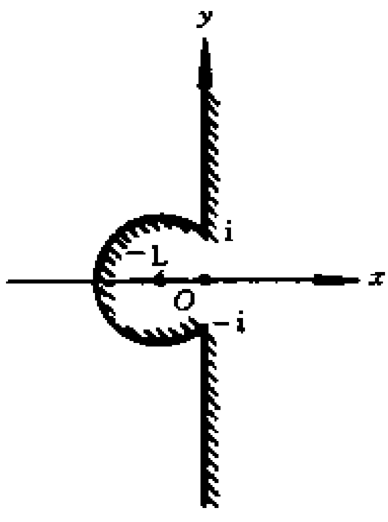
(9)



$|z|+\operatorname{Re}z<1$

图 38

(10)



$0<\arg\frac{z-i}{z-i}<\frac{\pi}{4}$

图 39

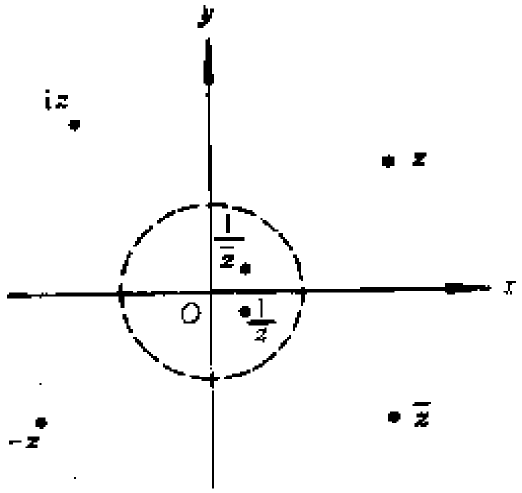


图 40

3. iz 点可由 z 点绕原点旋转 $\pi/2$ 得到；$-z$ 与 z 对称于原点（或者说，z 点绕原点旋转π即得到 $-z$）；$\bar{z}$ 与 z 关于实轴对称（镜像）；$1/\bar{z}$是 z 关于单位圆的反演；$1/z$ 是 z 关于单位圆的反演加镜像。

6. (1) $z-a=kb$，k 为实数；

(2) $|z-d|+|z+d|=2a$。

9. (1) $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=$ 实数；(2) $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}=$ 实数。

10. (1) $z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}=(-)^k i$，　　$k=0,1$（参看图41）；

(2) $z_k=2e^{i(2k+1)\pi/3}$，$k=0,1,2$，

即 $z_0=1+i\sqrt{3}$，$z_1=-2$，$z_2=1-i\sqrt{3}$（如图42所示）；

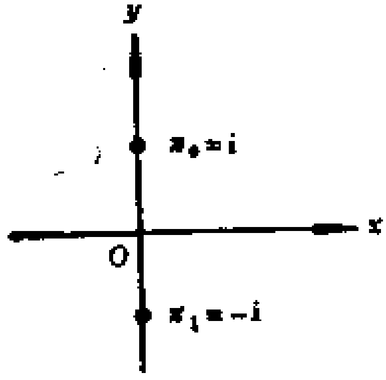


图 41

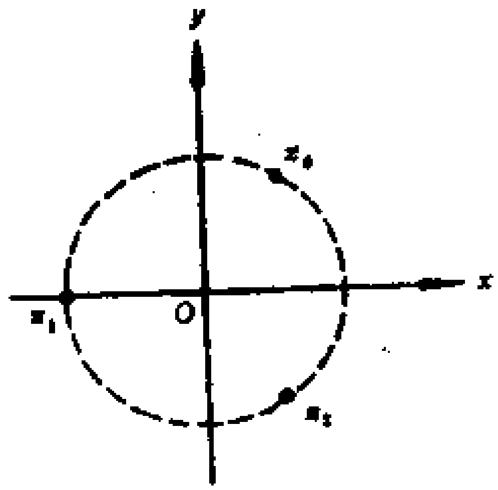


图 42

(3) $z_k = e^{i\frac{k\pi}{2}} = i^k$, $k = 0,1,2,3$(见图43)；

(4) $z_k = e^{i(2k+1)\pi/4} = i^k\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $k = 0,1,$ $2,3$(见图44)；

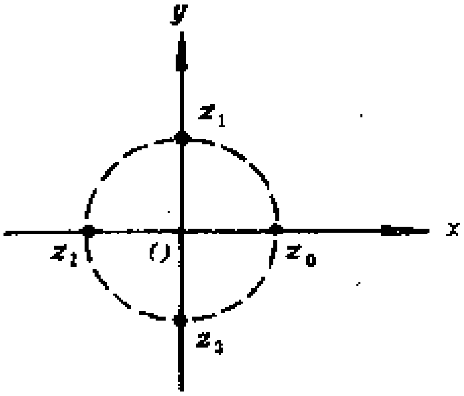


图 43

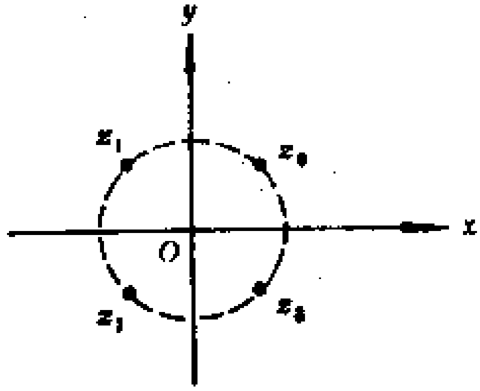


图 44

(5) $z_k = e^{i(2k+1)\pi/2n}$, $k = 0,1,2,\cdots,2n-1$。这 $2n$ 个点均匀地分布在单位圆上，关于实轴和虚轴都对称，并且不在实轴上。图45画出了 $n=6$ 的情况；

(6) $z_{1,2} = e^{i(\pi\pm\lambda)}$

$$= \cos(\pi-\lambda) \pm i\sin(\pi-\lambda)$$

$$= -\cos\lambda \pm i\sin\lambda$$(见图46)。

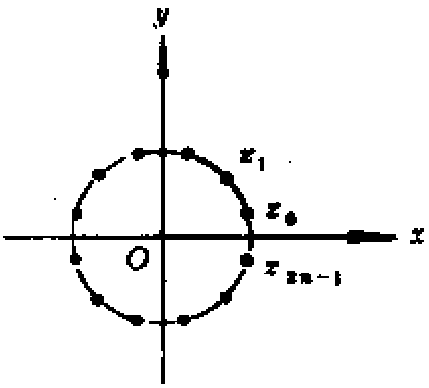


图 45

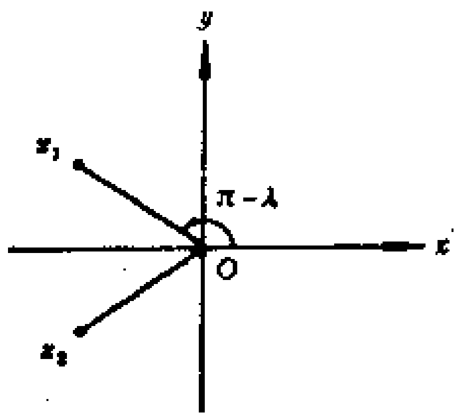


图 46

11. **提示**：对原方程取共轭。

12. **提示**：利用欧勒公式。

13. 由 $\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n$ 即可求出

$$\cos n\varphi = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-)^l \frac{n!}{(2l)!(n-2l)!} \cos^{n-2l}\varphi \sin^{2l}\varphi,$$

$$\sin n\varphi = \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-)^l \frac{n!}{(2l+1)!(n-2l-1)!} \cos^{n-2l-1} \times\varphi \sin^{2l+1}\varphi.$$

14. (1) $\dfrac{\sin\dfrac{n}{2}\varphi\cos\dfrac{n+1}{2}\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$; (2) $\dfrac{\sin\dfrac{n}{2}\varphi\sin\dfrac{n+1}{2}\varphi}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$.

15. **提示**：考察方程 $(1-z)^n - 1 = 0$ 的非零根.

16. 答案见下表

	聚　点	上极限	下极限	极　限
(1)	$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	无
(2)	0	0	0	0
(3)	∞	无	无	∞
(4)	∞	无	无	∞
(5)	$0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$	无	无	无
(6)	$\pm\frac{1}{2}, \pm 1$	1	-1	无

习 题 二

23. (1) 全平面不可导，不解析；

(2) 全平面不可导，不解析；

(3) 全平面可导，解析，$(z^m)'=mz^{m-1}$；

(4) 全平面可导，解析，$(e^z)'=e^z$；

(5) 除$(-1,-1)$点可导外，全平面其余处处不可导，全平面不解析；

(6) 除$y=x-1$的线上处处可导外，其余点不可导，全平面不解析；

(7) $z=0$点可导，$(z\mathrm{Re}z)'|_{z=0}=0$，此外处处不可导，全平面(包括 $z=0$)不解析；

(8) 除 $z=0$ 外在扩充的全平面上可 导、解 析，$(1/z)'=-1/z^2$；

(9) 在全平面可导、解析，$(\cos z)'=-\sin z$；

(10) 在全平面可导、解析，$(\mathrm{sh}z)'=\mathrm{ch}z$。

31. (1) $\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}$；　(2) $\mathrm{sh}z$；　(3) $\sin z$；　(4) $-\dfrac{\mathrm{i}}{z^2}$；

(5) $\dfrac{2}{z}$；　(6) $3(2+\mathrm{i})z^2$。

32. (1) $(1-\mathrm{i})z+\mathrm{i}C$；　(2) $\sin z+\mathrm{i}C$；

(3) $\dfrac{\mathrm{i}}{z}+C$；

(4) $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{i}\,\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}+C$

$=\ln|z|+\mathrm{i}\arg z+C$。

33. $-\mathrm{i}z^3+(1+\mathrm{i})C$。

40. $\mathrm{Re}z>0$ 时，$e^z\to\infty$；

$\mathrm{Re}z=0$ 时，e^z 的实部与虚部均在$[-1,1]$间振荡；
$\mathrm{Re}z<0$ 时，$e^z\to 0$。

44. (1) $z=k\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(2) $z=\left(2k\pi\pm\dfrac{\pi}{3}\right)i$ 及 $2k\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$;

(3) $z=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, $\dfrac{5}{6}\pi+2k\pi$ 及

$$\frac{\pi}{2}-i\ln(2\pm\sqrt{3})+2k\pi,$$

$$k=0,\pm1,\pm2,\cdots;$$

(4) 无解。

45. (1) $3.992+6.218i$; (2) $1.175i$;

(3) $0.438-1.127i$;

(4) $(2k+1)\pi i$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$。

47. 提示：将圆方程改写为

$$Az\bar{z}+\frac{1}{2}(B-iC)z+\frac{1}{2}(B+iC)\bar{z}+D=0,$$

即
$$Az\bar{z}+\bar{E}z+E\bar{z}+D=0,$$

其中
$$E=\frac{1}{2}(B+iC),$$

A,B,C,D 均为实数。

习 题 三

53. (1) 多值; (2) 多值; (3) 多值; (4) 多值;
(5) 多值; (6) 单值.

54. (1) 枝点为 $1, e^{\pm\frac{2}{3}\pi i}$, ∞;
(2) 枝点为 ± 1; (3) 枝点为 a, b;
(4) 枝点为 0, ∞; (5) 枝点为 0, ∞;
(6) 枝点为 ± 2, ∞;
(7) 枝点为 0, -1; (8) 枝点为 $\pm i$, ∞.

55. 沿 C_1, $w(-3)=-3-2i$; 沿 C_2, $w(-3)=-3+2i$.

56. 上岸 $\arg(z-2)=0$, 下岸 $w(3)=3e^{i2\pi/3}$. 另两个分枝可规定在割线上岸 $\arg(z-2)$ 分别为 2π 及 4π, 则在下岸 $w(3)$ 分别为 $3e^{i4\pi/3}$ 及 3.

57. 割线的作法有无穷多种. 我们可以举出最普通的两种作法. 其一是直接连结 a, b 作割线(见图47), 当规定割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)$ 分别为 π 及 3π 时, 即可得到两个单值分枝. 另一种作法是沿实轴从 a 和 b 连结 ∞ 点作割

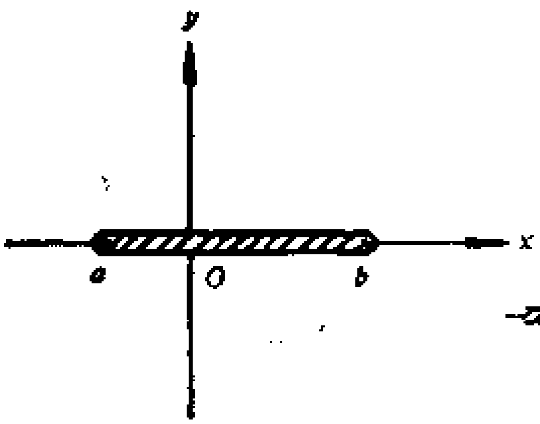


图 47

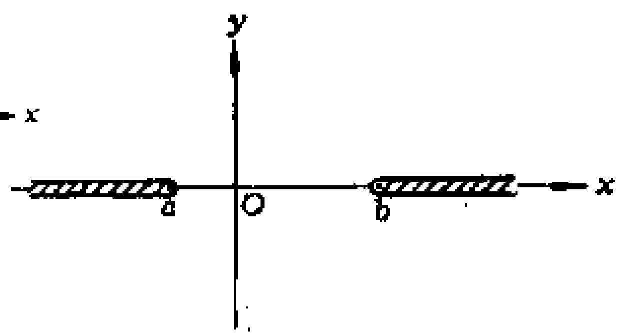


图 48

线(图48)。这时可规定在正实轴割线上岸 $\arg(z-a)+\arg(z-b)$ 分别为 0 及 2π。

58. 逆时针方向通过 x 轴时 $w(2)=\sqrt{2}$，回到原点时 $w(0)=-\sqrt{2}$。

59. $w(3)=3\ln 2+i\pi$(图3(a))；$3\ln 2-i\pi$(图4(b))。

60. 在割线上、下岸函数值的模相等，但下岸的幅角比上岸增加 $\pi/2$(或减少 $3\pi/2$)。

61. $w'(i)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$。

62. $w'(2)=1/5$。实际上，在任一确定的单值分枝内，都有同样的结果，因为 $(\mathrm{tg}^{-1}z)'=\dfrac{1}{1+z^2}$ 单值。这时，规定单值分枝的作用就在于保证导数的概念有意义。

63. 提示：考虑 $F(z)=\ln f(z)$。

64. $f(i)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{3}{4}p\pi i}$，

$$f(-i)=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{5}{4}p\pi i}.$$

习 题 四

65. (1) (i) $-i\pi$；(ii) $i\pi$；

(2) (i) $2+2i$；(ii) $2+i$。

66. (1) $2\pi i$；　(2) 0；　(3) 0；　(4) 2π。

70. $4\pi i$。

71. (1)(i) 0；(ii) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi i$；(iii) $\sqrt{2}\pi i$；

(2) (i) $\dfrac{\pi}{e}$；(ii) $-2\pi \operatorname{sh} 1$；(iii) $-2\pi \operatorname{sh} 1$。

72. (1) $2\pi i$; (2) $2\pi i$; (3) $2\pi i$; (4) 0; (5) 0; (6) 0; (7) 0; (8) 0; (9) $4\pi i$; (10) 0.

73. (1) πi; (2) $a=-2$.

76. **提示**：令 $\zeta'=\dfrac{R^2}{\bar{\zeta}}$（见图49），则应有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta}dz=f(\zeta),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R}\frac{f(z)}{z-\zeta'}dz=0.$$

两式相减即得。

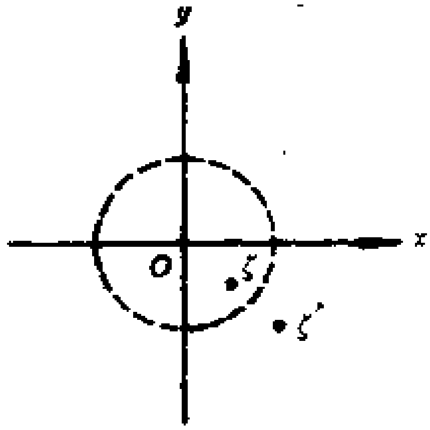


图 49

80. (1) 有下列几种可能性：

(i) 积分路径在$z=0$的右侧，如图50中的 C_1，$I=i\pi$；

(ii) 积分路径在$z=0$的左侧，如图50中的C_2，$I=-i\pi$；

(iii) 绕 $z=0$逆时针 n 周，然后从 $z=0$ 的右侧到达 i，如图50中的 C_3（图中画出的是$n=1$的情形），$I=(2n+1)\pi i$；

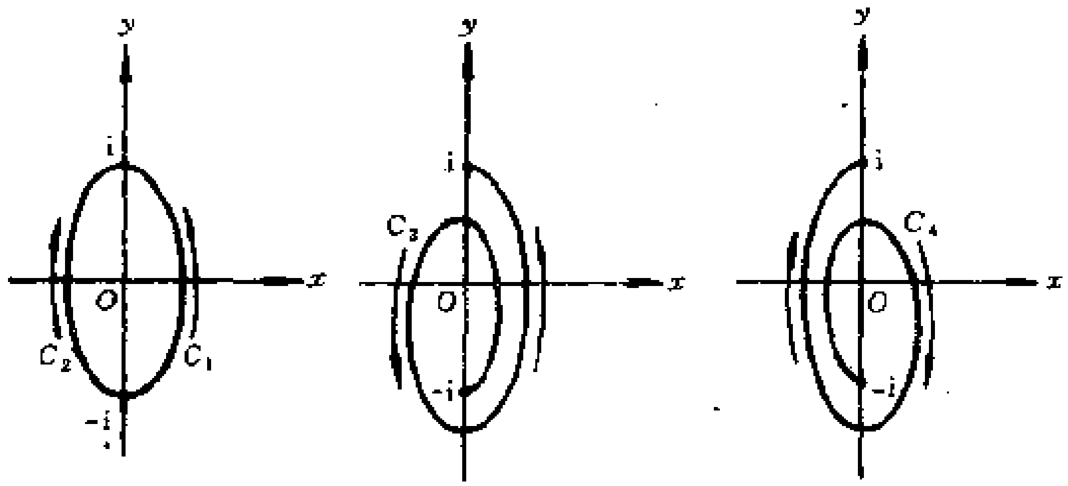


图 50

(iv) 绕$z=0$顺时针 n 周，然后从$z=0$的左侧到达 i，如

图50中的C_4(图中也只画出$n=1$的情形)，$I=-(2n+1)\pi i$；

由于$z=0$是被积函数的奇点，所以一般不讨论积分路径通过$z=0$点的情况，除非我们考虑相应的瑕积分；

(2) $i\pi$。

82. (1) $-2(1-i)$；

(2) $-2(1+i)$。

86. **提示**：考虑积分 $\int_{C_6}\left[f(z)-\frac{k}{z-a}\right]dz$。

97. $\frac{1}{2}(e^{2\pi}+e^{-2\pi})=\mathrm{ch}2\pi$。

93. $\frac{f(z)}{g'(z)}$。

习 题 五

94. (1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$发散；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-(-1)^n}{n^2}$收敛；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2-\frac{(-1)^n}{2}}$收敛；

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2+(-1)^n}}$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2-(-1)^n}}$均发散，

但$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛。

95. 级数不绝对收敛，不能改变求和次序。

96. (1) 收敛，但不绝对收敛；

(2) 收敛，但不绝对收敛。

97．级数之和为 $S=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-z)^2}, & |z|<1;\\ \dfrac{1}{z(1-z)^2}, & |z|>1.\end{cases}$

98．$\dfrac{1}{1-z}$.

102．（1）收敛半径$R=\infty$；（2）收敛半径$R=\infty$；

（3）收敛半径$R=e$；（4）收敛半径$R=\infty$；

（5）收敛半径$R=1$；（6）收敛半径$R=1$；

（7）收敛半径$R=2$；（8）收敛区域为$\mathrm{Re}z>-(1/2)$；

（9）收敛区域为$|z^2+2z+2|<1$；（10）在全平面收敛；

（11）收敛半径$R=\infty$；（12）收敛半径$R=1$.

103．（1）收敛半径$R\geqslant\min(R_1,R_2)$；

（2）收敛半径$R\geqslant R_1\cdot R_2$；

（3）收敛半径$R\leqslant\dfrac{1}{R_1}$；（4）收敛半径$R\leqslant\dfrac{R_2}{R_1}$.

108．$\zeta'(z)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{n^z}$.

109．

（1）$\sin z=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-)^{n+k}}{(2k+1)!}(z-n\pi)^{2k+1}$，$|z-n\pi|<\infty$；

（2）$1-z^2=-2(z-1)-(z-1)^2$，$|z-1|<\infty$；

（3）$\dfrac{1}{1+z+z^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{3}(n+1)\pi}{\sin\frac{2}{3}\pi}z^n$，$|z|<1$；

（4）（i）$\ln z=\dfrac{\pi}{2}\mathrm{i}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{i}^n}{n}(z-\mathrm{i})^n$，$|z-\mathrm{i}|<1$；

(ii) 与(i)相同；

(iii) $\ln z=-\frac{3}{2}\pi i-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}(z-i)^n$， $|z-i|<1$；

(5) $\operatorname{tg}^{-1}z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}z^{2n-1}$， $|z|<1$；

(6) $\frac{\sin z}{1-z}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}z^n$， $|z|<1$；

(7) $e^{\frac{1}{1-z}}=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\frac{73}{24}z^4+\cdots\right)$， $|z|<1$；

(8) $\ln\frac{1+z}{1-z}=(2k+1)\pi i+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}z^{-(2n+1)}$， $|z|>1$。

k 的数值取决于单值分枝的规定，对于主值分枝，$k=0$。

110. (1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}z^{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}=\operatorname{th}^{-1}z$，且

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}\bigg|_{z=0}=0;$$

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}z^{2n}=\operatorname{ch}z$。

111. (1) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\right)$； (2) $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2\right)$；

(3) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(3+\sqrt{2})+\pi\right]$。

112. (1) $\ln 2-\frac{1}{2}$； (2) $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$；

(3) $\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 3\right)$; (4) $\frac{1}{4}(\pi-3)$.

113. (1) $\sum_{n=-1}^{\infty}(-)^{n-1}(n+2)(z-1)^n, 0<|z-1|<1$;

(2) (i) $-\sum_{n=-1}^{-\infty}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n,\ 1<|z|<2$;

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty}(2^{n-1}-1)z^{-n},\ 2<|z|<\infty$;

(3) (i) $\sum_{n=-1}^{-\infty}i^{n+1}(z-i)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(1+i)^{n+1}}(z-i)^n$,

$$1<|z-i|<\sqrt{2};$$

(ii) $\sum_{n=-1}^{\infty}(-)^{n+1}z^n,\ 0<|z|<1$;

(4) (i) $1-\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}z^n-2\sum_{n=-1}^{-\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n,\ 3<|z|<4$;

(ii) $1+\sum_{n=1}^{\infty}(3\cdot 2^{2n-1}-2\cdot 3^{n-1})z^{-n},\ 4<|z|<\infty$;

(5) $\sum_{n=-1}^{-\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{k-n-1}}{k!}z^n+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(-2)^{k-n-1}}{k!}z^n$,

$$|z|>2;$$

(6) $\frac{2}{(z-2n\pi)^2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{120}(z-2n\pi)^2+\frac{1}{3024}(z-2n\pi)^4$

$$+\cdots,\ 0<|z-2n\pi|<2\pi.$$

114. (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-)^{k-1}}{k(2n-k)}z^{2n}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-)^{k-1}}{k}z^{2n},\quad |z|<1;$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-)^{n-1}}{(2k+1)(n-k)}z^{2n+1}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}z^{2n+1},\quad |z|<1;$$

(3) $$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{a}{2}\right)^{2k+n}\left(\frac{z}{a}\right)^n$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a)\left(\frac{z}{a}\right)^n,\quad 0<|z|<\infty;$$

(4) $$\sum_{n=-1}^{-\infty}\sum_{k=\left[-\frac{n}{2}\right]}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!(2k+n+1)!}z^n$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!(2k+n+1)!}z^n,\quad 0<|z|<\infty.$$

115. (1) $z+\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n-1}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}z^{2n+1}$, $|z|<1$;

(2) 见第114(2)题；

(3) $z-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!}z^{2n+1}$, $|z|<1$;

(4) $\sum_{k=1}^{\infty}(-)^{k-1}\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}\sum_{l=0}^{k-1}\frac{1}{n+l}z^k$, $|z|<1$;

(5) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$, $|z|<1$，其中$a_1=1$，$a_2=1$, $a_3=-1$, $a_4=-7$，其余可由递推公式 $a_{n+1}=a_n-n(n-1)a_{n-1}$ 决定。

117．**提示**：考虑幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_k z^k$，$\sum\limits_{k=0}^{\infty}v_k z^k$与$\sum\limits_{k=0}^{\infty}w_k z^k$在$z=1$的收敛性。

119．$2\pi i$（当$z=0$在曲线γ所包围的区域内部）或0（当$z=0$在曲线γ包围的区域外）。

习 题 六

120．(1) $z=\pm ia$，一阶极点；

(2) $z=0$，二阶极点；$z=\infty$，本性奇点；

(3) $z=0$，可去奇点；$z=\infty$，本性奇点；

(4) $z=0$，可去奇点；$z=\infty$，本性奇点；

(5) $z=0$，可去奇点；$z=2n\pi i$，$n=\pm1,\pm2,\cdots$，一阶极点；$z=\infty$，非孤立奇点；

(6) $z=0$，本性奇点；

(7) $z=0$，可去奇点；$z=(n\pi)^2$，$n=1,2,\cdots$，一阶极点；$z=\infty$，非孤立奇点；

(8) $z=\infty$，本性奇点。

121．(1) e；(2) 2e；(3) 0；(4) $-\frac{1}{4}i$；

(5) $\frac{1}{6}$；(6) $\frac{1}{6}$；(7) 0；(8) $(-)^n(2n+1)\pi$。

122．(1) $\operatorname{res}f(0)=1$，$\operatorname{res}f(\pm1)=-\frac{1}{2}$；

(2) $\operatorname{res}f(\pm i)=\mp i\frac{(2m)!}{(m!)^2 2^{2m+1}}$；

(3) $\operatorname{res}f(2n\pi)=2$，$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$；

(4) $\operatorname{res}f(0)=0$, $\operatorname{res}f(-n^2\pi^2)=(-)^{n+1}2(n\pi)^2$, $n=1,2,\cdots$;

(5) $\operatorname{res}f(1)=-1$, $\operatorname{res}f(\infty)=1$;

(6) $\operatorname{res}f(0)=-\frac{1}{2}$, $\operatorname{res}f(\infty)=\frac{1}{2}$;

(7) $\ln 1=0$ 时, $\operatorname{res}f(1)=\frac{1}{2}$; $\ln 1=2n\pi i$, $n=\pm1$, $\pm2,\cdots$时, $\operatorname{res}f(1)=\frac{1}{2n\pi i}$;

(8) $\operatorname{res}f(0)=n+1$, $\operatorname{res}f(-1)=-n$, $\operatorname{res}f(\infty)=-1$.

123. (1) ∞点为可去奇点, $\operatorname{res}f(\infty)=-1$;

(2) ∞点为本性奇点, $\operatorname{res}f(\infty)=-1$;

(3) ∞点为非孤立奇点, 无残数可言;

(4) ∞点为本性奇点, $\operatorname{res}f(\infty)=0$;

(5) ∞点解析, $\operatorname{res}f(\infty)=0$;

(6) ∞点为一阶极点, $\operatorname{res}f(\infty)=\pm\frac{1}{8}$, 符号视单值分枝的规定而定.

124. $-2C_0C_1$.

127. (1) $z=0$为$f(z)+g(z)$的k阶零点; 当$m\neq n$时, $k=\min(m,n)$; 当$m=n$时, $k\geqslant m$;

(2) $m+n$阶零点;

(3) 当$m>n$时为$m-n$阶零点; 当$m<n$时为$n-m$阶极点; $m=n$时为可去奇点;

(4) mn阶零点.

128. (1) 当$m\neq n$时为$\max(m,n)$阶极点, 当$m=n$时为k阶极点($k\leqslant m$)或可去奇点或零点;

(2) $m+n$阶极点;

(3) 当$m>n$时为$m-n$阶极点，$m<n$时为$n-m$阶零点，$m=n$时为可去奇点；

(4) mn阶极点。

129. (1) 一阶极点，残数为m；

(2) 一阶极点，残数为$-m$。

132. (1) $n-1$；(2) $\dfrac{2n}{n+1}\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}$。

133. (1) $(m+1)\dfrac{f^{(m)}(z_0)}{g^{(m+1)}(z_0)}$；

(2) $2\dfrac{f'(z_0)}{g''(z_0)}-\dfrac{2}{3}\dfrac{f(z_0)g'''(z_0)}{[g''(z_0)]^2}$；

(3) $3\dfrac{f''(z_0)}{g'''(z_0)}-\dfrac{3}{2}\dfrac{f'(z_0)g^{(4)}(z_0)}{[g'''(z_0)]^2}$；

(4) $\dfrac{h'(z_0)}{g'(z_0)}-\dfrac{1}{2}\dfrac{h(z_0)g''(z_0)}{[g'(z_0)]^2}$，其中$h(z)=(z-z_0)f(z)$。

134. $\dfrac{f(0)}{g(0)}+\dfrac{1}{a_1}\dfrac{f(a_1)}{g'(a_1)}+\dfrac{1}{a_2}\dfrac{f(a_2)}{g'(a_2)}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\dfrac{f(a_n)}{g'(a_n)}$。

135. (1) 对于$|z-1|=1$，积分为$-\sqrt{2}\pi i/2$，对于$|z-1|=2$，积分为0；

(2) (i) 0；(ii) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi i$；(iii) $\sqrt{2}\pi i$；

(3) $2n+1$；(4) $-4n i$；(5) 0；(6) πi；(7) 0；

(8) $(-)^n\dfrac{2\pi i}{m}\dfrac{\cos(2n+1)\pi/2m}{\cos(\pi/2m)}$。

136. $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-)^{m-1}}{m^2}=\frac{\pi^2}{12}$。

习 题 七

138. (1) $\dfrac{2\pi}{1-p^2}$;　　(2) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\pi$;

(3) $\dfrac{2a\pi}{(a^2-b^2)^{3/2}}$;

(4) $2\pi\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n-1}}$;

(5) 2π;　　(6) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$;

(7) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi$;　　(8) $\pi i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{Im}\alpha)$.

139. (1) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$;　　(2) $\dfrac{\pi}{ab(a+b)}$;

(3) $\dfrac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}$;

(4) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi=\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\dfrac{\pi}{2^{2n}}$;

(5) $\dfrac{\pi}{4a}$;　　(6) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$;

(7) $\dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{|\sin\theta|}$;　　(8) $2\ln 2$.

140. (1) $\dfrac{\pi}{2}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left(\sin\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

(2) $\frac{\pi}{2}e^{-ma}$;

(3) $\frac{\pi}{e}(\sin 1+\cos 1)=\frac{\sqrt{2}\pi}{e}\sin\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$;

(4) $\frac{\pi}{2}e^{-ma}\cos ma$;

(5) $\frac{\pi}{a}e^{-ma}\cos mb$, $\quad -\frac{\pi}{a}e^{-ma}\sin mb$;

(6) $2\pi e^{-a}$;

(7) $\frac{\pi(b-c+ce^{-2ab}-be^{-2ac})}{2bc(b^2-c^2)}$;

(8) $\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\frac{\pi}{2}}$.

141. (1) $\frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$; $\qquad$ (2) 0;

(3) $\frac{\pi}{2}(b-a)$; $\qquad$ (4) $\frac{\pi}{4a}\sin 2a$;

(5) $\frac{3}{8}\pi$; $\qquad$ (6) $\pi(\operatorname{ctg}p\pi-\operatorname{ctg}q\pi)$;

(7) $\frac{\pi}{7}(\sin 1-6\sin 6)$;

(8) $\frac{\pi}{5}(\cos 1-e^{-2})$.

142. (1) $\frac{\pi}{4}(1-s)\sec\frac{s\pi}{2}$; $\qquad$ (2) $\frac{\pi\sin p\lambda}{\sin p\pi\sin\lambda}$;

(3) $\pi\mathrm{ctg}\,a\pi$；

(4) $\dfrac{\sqrt{2a}}{4a^4}\pi\left(\dfrac{3}{2}\ln a-1-\dfrac{3}{4}\pi\right)$.

144. (1) $\dfrac{2}{3}\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi\right)$； (2) $\dfrac{2\sqrt{3}\pi}{9a^2}$；

(3) $\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a\pi}{2b}+\ln\dfrac{b}{a}\right)$；

(4) $\dfrac{\pi}{2ab(a+b)}$.

146. (1) $\dfrac{\pi}{2a}\ln a$； (2) $\dfrac{\ln ab\ln\dfrac{b}{a}}{2(b-a)}$；

(3) $\dfrac{1}{a}\ln a$；

(4) $\dfrac{1}{2b}\ln(a^2-b^2)\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{b}{a}$.

147. (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\cos\dfrac{a}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}a}\sin\dfrac{a}{2}$；

(2) 0； (3) $\dfrac{\pi}{\sin a\pi}$；

(4) $\dfrac{3}{64}2^{\frac{1}{4}}\pi$.

148. (1) $\dfrac{\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\dfrac{i}{b}\right)^n(\sqrt{a^2+b^2}-a)^n$，积分围道见图51；

(2) $\dfrac{\pi}{2}e^{-a}$，积分围道见图52；

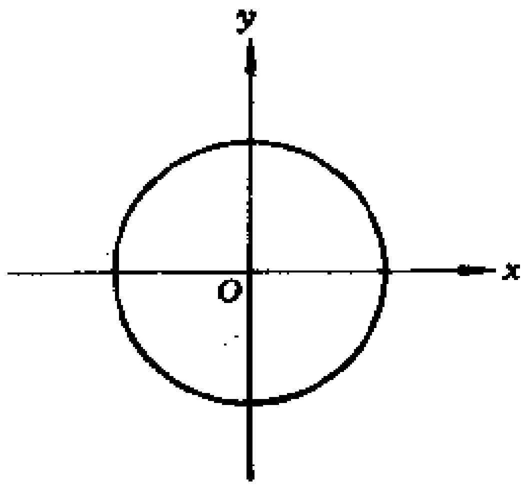


图 51

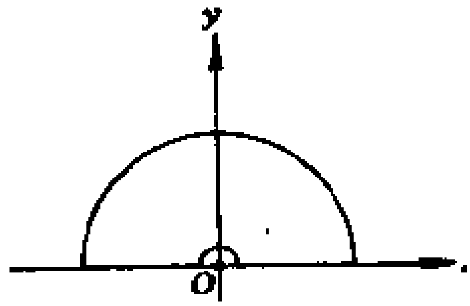


图 52

(3) 1，积分围道见图53；

(4) $\frac{1}{8}(\sqrt{2}-1)\pi$，积分围道见图54；

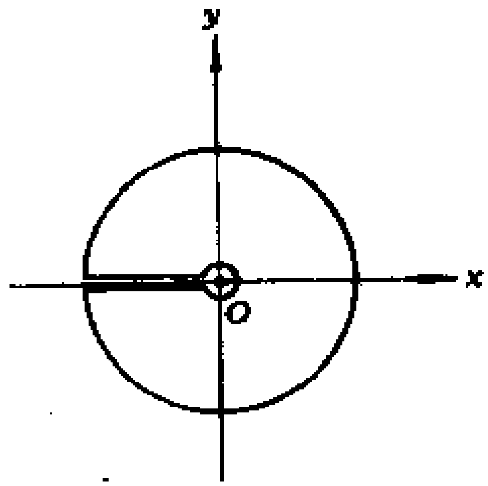


图 53

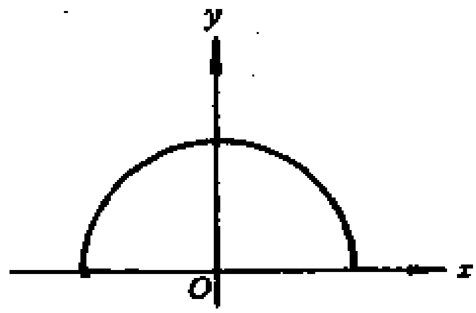


图 54

(5) $\dfrac{\pi}{2\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}}$，积分围道见图55；

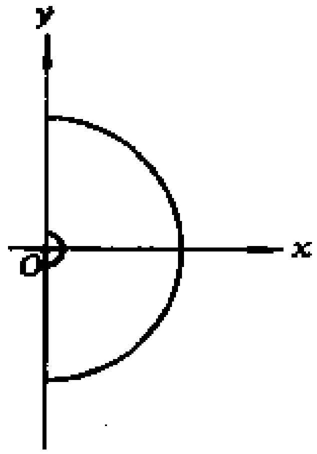


图 55

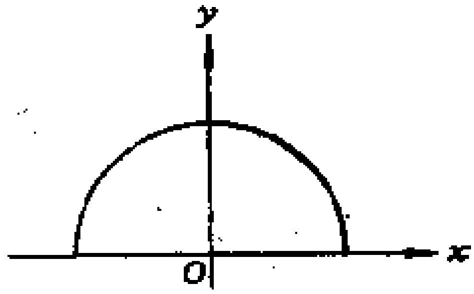


图 56

(6) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\ln(1+r), & -1<r<1, \\ \dfrac{\pi}{4}\ln\left(1+\dfrac{1}{r}\right), & r<-1 \text{ 或 } r>1, \end{cases}$ 积分围道见图56。

150. (1) $2(1-m)\dfrac{\pi}{\sin m\pi}$; (2) $\dfrac{\pi}{2\sin\dfrac{m\pi}{2}}$.

151. $(\sqrt{2}-1)\pi$. 152. $\dfrac{1}{2c}\left(\ln\dfrac{1+c}{1-c}\right)^2$.

习 题 八

157. (1) $\mathrm{Re}z\geqslant\delta>0$; (2) $\delta\leqslant\mathrm{Re}z\leqslant2-\delta$, $\delta>0$; (3) $\mathrm{Re}z\geqslant\delta>0$; (4) $\mathrm{Re}z\geqslant\delta>0$.

159. (1) $2^n\Gamma(n+1)$; (2) $\dfrac{\Gamma(2n+1)}{2^n\Gamma(n+1)}$;

(3) $\dfrac{\Gamma(n+\rho+1)}{\Gamma(\rho+1)}$;

(4) $\dfrac{\Gamma(n+\rho+2)\Gamma(n-\rho+1)}{\Gamma(\rho+1)\Gamma(-\rho)}$

$$= -\frac{1}{\pi}\sin\pi\rho\,\Gamma(n+\rho+2)\Gamma(n-\rho+1).$$

161. -1.

162. $\mathrm{Y}_n(z)=\dfrac{2}{\pi}\mathrm{J}_n(z)\ln\dfrac{z}{2}$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!\,(n+k)!}[\psi(n+k+1)$$

$$+\psi(k+1)]\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n},$$

$$n=0,1,2,\cdots,\ |\arg z|<\pi,$$

当$n=0$时，应去掉第二项。

163. (1) $\Gamma(1-\alpha)\cos\dfrac{\alpha\pi}{2}$，$\Gamma(1-\alpha)\sin\dfrac{\alpha\pi}{2}$;

(2) $\Gamma(\alpha)\cos\alpha\theta$，$\Gamma(\alpha)\sin\alpha\theta$.

166. (1) **提示**：在 $\mathrm{P}_n(z)$中令 $t=n\tau$，分部积分 n 次，并注意$n^z=\prod\limits_{m=1}^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{m}\right)^z$;

(2) **提示**：在证明(1)的中间结果中，代入

$$n^z=\mathrm{e}^{z\ln z}=\mathrm{e}^{z\left[\ln n-\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\right]}\prod_{m=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{z}{m}}.$$

169. (1) $2^{p+q+1}\mathrm{B}(p+1,q+1)$,

$$2^{2n+1}\mathrm{B}(n+1,n+1)=2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!};$$

(2) $\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1-a}{2},\frac{1+a}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}}$.

170. (1) $\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+1)}$;

(2) $\frac{a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}}{pqr}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma}{r}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+1\right)}$.

习 题 九

175. (1) $\frac{n!}{p^{n+1}}$; (2) $\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$;

(3) $\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$;

(4) $-\frac{p}{2}\ln\frac{p^2+\omega^2}{p^2}+\omega\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{\omega}{p}$;

(5) $\frac{1}{2p}\ln(1+p^2)$; (6) $\frac{e^{1-p}-1}{1-p}$;

(7) $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\mathrm{cth}\frac{p\pi}{2\omega}$;

(8) $\frac{1}{p^2}-\frac{a}{p}\frac{e^{-pa}}{1-e^{-pa}}$.

176. (1) $1-e^{-at}\left(1+at+\frac{1}{2}a^2t^2\right)$, $t>0$;

(2) $\frac{1}{\omega}(1-\cos\omega t)$, $t>0$;

(3) $1+\frac{5}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{\frac{t}{2}}-3e^{-\frac{t}{2}}$, $t>0$;

(4) $t\cos\omega t$, $t>0$; (5) $t-\tau$, $t>\tau$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\eta(t-na)=\left[\frac{t}{a}\right]$, $t>0$.

177. (1) $\operatorname{ch}\omega t$, $t>0$;

(2) $\frac{1}{4\omega^3}[\operatorname{ch}\omega(t-\tau)\sin\omega(t-\tau)$

$-\operatorname{sh}\omega(t-\tau)\cos\omega(t-\tau)]$, $t>\tau$;

(3) $\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{a}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-x^2}dx$, $t>0$;

(4) $1-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$

$\times\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2 t}{4l^2}}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl+x}{2\sqrt{t}}\right)$

$-\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\operatorname{erfc}\left(\frac{2nl-x}{2\sqrt{t}}\right)$, $t>0$.

179. (1) $\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$; (2) $\sqrt{\frac{\pi}{2|t|}}\operatorname{sgn}t$;

(3) $\frac{\pi}{2a}e^{-a|t|}$； (4) $\frac{\pi}{2}(1-e^{-|t|})\operatorname{sgn} t$。

180. (1) $\begin{cases} \frac{E_0\omega}{L(\omega^2-\omega_1^2)}(\cos\omega_1 t-\cos\omega t), & \omega_1=\frac{1}{\sqrt{LC}}\neq\omega, \\ \frac{E_0}{2L}t\sin\omega t, & \omega_1=\omega; \end{cases}$

(2) $i(t)=\begin{cases} \frac{E}{R}(1-Ae^{-a_1 t}+Be^{-a_2 t}), & L>4CR^2, \\ \frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{t}{2RC}}-\frac{t}{4RC}e^{-\frac{t}{2RC}}\right), & L=4CR^2, \\ \frac{E}{R}\left\{1-e^{-\frac{t}{2RC}}\left[\cos\omega t+\left(\frac{1}{2RC}-\frac{R}{L}\right)\frac{\sin\omega t}{\omega}\right]\right\}, & L<4CR^2, \end{cases}$

其中

$$a_1=\frac{1}{2RC}\left(1-\sqrt{1-\frac{4CR^2}{L}}\right),$$

$$a_2=\frac{1}{2RC}\left(1+\sqrt{1-\frac{4CR^2}{L}}\right),$$

$$A=\frac{R/L-a_2}{a_1-a_2},\quad B=\frac{R/L-a_1}{a_1-a_2},$$

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{1}{4R^2C^2}};$$

(3) $x(t)=\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$,

$$y(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}\,t,$$

$$z(t)=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}\,t;$$

(4) $y(t)=ate^{-t}$;

(5) $y(t)=a\sqrt{\frac{b}{b-c}}\sin\sqrt{b(b-c)}\,t$;

(6) $f(t)=5e^{2t}+4e^{-t}-6te^{-t}$.

181. $x(t)=e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

182. $N_1(t)=Ne^{-\lambda_1 t}$,

$$N_2(t)=\frac{N\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}(e^{-\lambda_1 t}-e^{-\lambda_2 t}),$$

$$N_3(t)=N\lambda_1\lambda_2\left[\frac{1}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)}e^{-\lambda_1 t}+\frac{1}{(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-\lambda_2 t}+\frac{1}{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_3)}e^{-\lambda_3 t}\right].$$

183. (1) $J_0(t)\doteq\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$.

190. (1) $y(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<x_0,\\ x_0, & x_0<x\leqslant 1;\end{cases}$

(2) $y(x)=\begin{cases}\sin x\cos x_0, & 0\leqslant x<x_0,\\ \cos x\sin x_0, & x_0<x\leqslant \pi/2.\end{cases}$

习 题 十

191. $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(3/4)}{n!\Gamma(n+3/4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n}$,

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(5/4)}{n!\Gamma(n+5/4)}\left(\frac{x}{2}\right)^{4n+1}.$$

192. $y_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2/3)}{n!\Gamma(n+2/3)}\frac{x^{3n}}{3^{2n}}$,

$$y_2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(4/3)}{n!\Gamma(n+4/3)}\frac{x^{3n+1}}{3^{2n}}.$$

193. $u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\lambda/2)}{(2k)!\Gamma(-\lambda/2)}(2x)^{2k}$,

$$u_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1-\lambda}{2}\right)}{(2k+1)!\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{2}\right)}(2x)^{2k+1}.$$

当 $\lambda=2n$ 时，u_1 截断为多项式：

$$u_1=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k n!}{(2k)!(n-k)!}(2x)^{2k},$$

当$\lambda=2n+1$时，u_2截断为多项式：

$$u_2=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-)^k n!}{(2k+1)!(n-k)!}(2x)^{2k+1}.$$

194. $u_1=F(\alpha,\beta,\gamma;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n$,

$$u_2=z^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;\ z),$$

其中

$$(\lambda)_0=1,\ (\lambda)_n=\lambda(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-1)=\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)}.$$

195. $y_1=x$, $\quad y_2=x\ln x-1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)n!}x^n$.

196. $u_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k+1)!}(mz)^{2k}=\frac{\sin mz}{mz}$,

$$u_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(2k)!}(mz)^{2k-1}=\frac{\cos mz}{mz}.$$

197. $u_1=\mathrm{J}_0(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$,

$$u_2=\mathrm{J}_0(z)\ln z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-)^k}{(k!)^2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\right.$$

$$\left.+\cdots+1\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

198. $u_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\mu+n+1)}{(n!)^2\Gamma(\mu-n+1)}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$. 当$\mu=$正整数$l$时，此解截断为多项式，

$$u_1=\sum_{n=0}^{l}\frac{(l+n)!}{(n!)^2(l-n)!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n.$$

另一解在$z=1$点无界。

199. $u_1=F(a,b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!(b)_n}z^n,$

$$u_2=z^{1-b}F(a-b+1,2-b;z).$$

200. $u_1=\mathrm{J}_0(imz),$

$$u_2=\mathrm{J}_0(imz)\ln z-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k-1}+\right.$$

$$\left.+\cdots+1\right)\left(\frac{mz}{2}\right)^{2k}.$$

习 题 十 一

201. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,$

$$u|_{x=0}=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0,$$

$$u|_{t=0}=\frac{F}{ES}x,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

其中$a^2=\frac{ES}{\rho}$，E为杆的杨氏模量，ρ为杆的线密度。

202. 纵振动方程同第201题，边界条件及初始条件分别为

$$u|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{P}{E},$$

$$u|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0.$$

203．采用平面极坐标系，坐标原点在圆膜中心。设圆膜半径为R，则方程及边界条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right\}=0, \quad u|_{r=R}=0.$$

其中$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$即为二维拉普拉斯算子。

204．$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f$，

$$u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=u_0,$$

$$u|_{t=0}=\frac{x}{l}u_0.$$

其中$\kappa=\frac{kS}{\rho C}$，$f=\frac{0.24I^2R}{\rho lC}$，

k——杆的导热率，　　ρ——杆的线密度，

C——杆的比热，　　R——杆的总电阻，

I——电流强度，　　S——杆的横截面积。

205．$\frac{\partial u}{\partial t}=D\nabla^2 u+\alpha u$，$D$称为扩散率。

206．$u|_{x=0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{A}{ES}\sin\omega t$。

207．$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{q_1}{k}$，$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=\frac{q_2}{k}$。

208．采用球坐标系。坐标原点在球心，z轴指向太阳。边界条件为

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{H}{k}u\right]_{r=a}=\begin{cases}\frac{M}{k}\cos\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi.\end{cases}$$

其中H是牛顿冷却定律中的比例常数(即当物体表面与外界温度相差1°C时，单位时间内从单位表面面积上散发出去的热量)。

209. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2-x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0$.

210. 方程及边界条件为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad x\neq\frac{l}{2},$$

$$u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0;$$

连接条件为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[u|_{x=\frac{l}{2}+\varepsilon}-u|_{x=\frac{l}{2}-\varepsilon}\right]=0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}+\varepsilon}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=\frac{l}{2}-\varepsilon}\right]=Mg+M\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\bigg|_{x=\frac{l}{2}}.$$

习 题 十 二

211. (1) $u(x,y)=X(x)Y(y)$,

$a_1(x)X''+a_2(x)X'+\lambda X=0$,

$b_1(y)Y''+b_2(y)Y'-\lambda Y=0$;

(2) $u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi)$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)-\frac{\lambda}{r^2}R=0,$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0;$$

(3) $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$,

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\lambda}{r^2}R = 0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \lambda\Theta = 0;$$

(4) $u(\alpha,\beta,\varphi) = \sqrt{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}\; v(\alpha,\beta,\varphi)$,

$$v(\alpha,\beta,\varphi) = A(\alpha)B(\beta)\Phi(\varphi),$$

$$\frac{1}{\sin\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left(\sin\alpha\frac{dA}{d\alpha}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\alpha}\right)A = 0,$$

$$B'' - \left(\lambda + \frac{1}{4}\right)B = 0,$$

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0.$$

212. (1) $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 1,2,3,\cdots$,

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$N_n = \frac{1}{\sqrt{\int_0^l X_n^2 dx}} = \sqrt{\frac{2}{l}};$$

(2) $\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$, $n = 0,1,2,\cdots$,

$$X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x,$$

$$N_n=\sqrt{\frac{2}{l}};$$

(3) $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,2,\cdots.$

$$X_n(x)=\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$N_n=\sqrt{\frac{2}{l(1+\delta_{n0})}};$$

(4) $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2,\ n=1,2,3,\cdots,$

$$X_n(x)=\sin\frac{n\pi}{b-a}(x-a),$$

$$N_n=\sqrt{\frac{2}{b-a}};$$

(5) 本征值λ_n是方程$\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}l+\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\lambda_n}=0$的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots,$

$$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x.$$

$$N_n=\sqrt{\frac{1}{\frac{l}{2}+\frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2\lambda_n}}};$$

(6) 本征值 λ_n 是方程

$$(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\sqrt{\lambda_n}+(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2\lambda_n)\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}l=0$$

的第n 个正根，$n=1,2,3,\cdots,$

$$X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}(x-\delta_n),\quad \delta_n=\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\beta_1}{\alpha_1}\sqrt{\lambda_n},$$

$$N_n = \sqrt{\frac{1}{\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2\lambda_n} - \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2\lambda_n}\right]}}.$$

由此可见，即使本征值问题的微分方程相同，但因为边界条件不同，本征值和本征函数当然也就不同，所以，一般说来，本征函数的归一因子也不相同。

213. $a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$，这正是函数 $f(x)$ 按本征函数族 $\left\{\sin\frac{n\pi}{l}x\right\}$ 展开的展开系数。

214. $u(x,t) = \frac{8Fl}{ES\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$

$$\times\cos\frac{2n+1}{2l}\pi a t.$$

215. $u(x,t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\times\cos\frac{n\pi}{l}at.$$

216. $u(x,t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}\delta\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\times\sin\frac{n\pi}{l}at.$$

217. $u(x,t) = \frac{2I}{\pi\rho a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}at.$

218. $u(x,t) = \frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$

$$\times\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at,$$

219\. $u(x,t)=2hu_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{l+\frac{h}{h^2+\lambda_n}}$

$$\times\frac{1}{\sqrt{\lambda_n(\lambda_n+h^2)}}e^{-\kappa\lambda_n t}\cos\sqrt{\lambda_n}x,$$

λ_n是方程$\sqrt{\lambda_n}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}\,l=h$的第$n$个正根，$n=1,2,3,\cdots$，$h$是边界条件$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+hu\right]_{x=l}=0$中的系数。

220\. $u(x,t)=\frac{8b}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}e^{-\kappa\left(\frac{2n+1}{l}\pi\right)^2t}$

$$\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x.$$

221\. $u(x,y)=\frac{b-2}{2a}u_0x+u_0-\frac{4bu_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$

$$\times\frac{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{b}\pi x}{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{b}\pi a}\cos\frac{2n+1}{b}\pi y.$$

222\. $u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi}{a}x$

$$=\frac{2A}{\pi}\operatorname{tg}^{-1}\frac{e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi}{a}x}{1-e^{-\frac{n\pi}{a}y}\cos\frac{n\pi}{a}x}.$$

223\. 临界厚度 $l_c=\pi\sqrt{\frac{D}{a}}$.

224. $u(x,t)=e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\omega_n t+B_n\cos\omega_n t)\sin\frac{n\pi}{l}x,$

$$A_n=\frac{h}{\omega_n}B_n+\frac{2}{l\omega_n}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$\omega_n=\sqrt{\left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2-h^2}.$$

225. $u(x,y,t)=\frac{64Al^4}{\pi^6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3(2m+1)^3}$

$$\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2m+1}{l}\pi y\cos\omega_{nm}t.$$

$$\omega_{nm}=\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\frac{\pi}{l}a.$$

226. $u(x,y,t)=\frac{16v_0}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+m}}{(2n+1)(2m+1)\omega_{nm}}$

$$\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi\delta\sin\frac{2m+1}{l}\pi\delta$$

$$\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x\sin\frac{2m+1}{l}\pi y\sin\omega_{nm}t,$$

$$\omega_{nm}=\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\frac{\pi}{l}a.$$

227. $u(x,y,t)=\frac{4I}{\rho l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-)^{n+m}}{\omega_{nm}}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x$

$$\times\sin\frac{2m+1}{l}\pi y\sin\omega_{nm}t,$$

$\omega_{nm}=\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\frac{\pi}{l}a$，$\rho$是膜的面密

度。

228. (1) 本征值 λ_n 是方程 $\left(\frac{a}{c}\right)^2\sqrt{\lambda_n}\mathrm{tg}\sqrt{\lambda_n}l=1$ 的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots$，本征函数为 $X_n(x)=\sin\sqrt{\lambda_n}x$；

(2) $\int_0^l X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}-\left(\frac{a}{c}\right)^2\sin\sqrt{\lambda_n}l\sin\sqrt{\lambda_m}l, & m\neq n,\\ \frac{l}{2}-\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1\right]}, & m=n;\end{cases}$$

(3) $\int_0^l X'_n(x)X'_m(x)\mathrm{d}x$

$$=\lambda_n\left\{\frac{l}{2}+\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n+1\right]}\right\}\delta_{nm}.$$

从以上结果可以看出，本题中的本征函数本身并不是互相正交的，然而，它们的导数却是互相正交的。

229. $$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\sqrt{\lambda_n}at+B_n\cos\sqrt{\lambda_n}at)\times\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$A_n=\frac{N_n^2}{\lambda_n a}\int_0^l\psi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x,$$

$$B_n=\frac{N_n^2}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l\varphi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x,$$

其中λ_n是方程$\left(\frac{a}{c}\right)^2\sqrt{\lambda_n}\operatorname{tg}\sqrt{\lambda_n}l = 1$的第 n 个正根，

$$N_n^{-2} = \frac{l}{2} + \frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{2\left[\left(\frac{a}{c}\right)^4\lambda_n + 1\right]}.$$

230. $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\sin\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at + B_n\cos\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 at\right] \times \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$A_n = \frac{2l}{(n\pi)^2 a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$B_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x.$$

231. (1) $$u(x,y) = \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} \times\left\{1 - \frac{\operatorname{ch}\frac{2n+1}{a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2a}\pi b}\right\}\sin\frac{2n+1}{a}\pi x$$

$$= -x(x-a) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} \times\frac{\operatorname{ch}\frac{2n+1}{a}\pi y}{\operatorname{ch}\frac{2n+1}{2a}\pi b}\sin\frac{2n+1}{a}\pi x;$$

$$(2)\quad u(x,y)=\frac{2a^4}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n^3}$$

$$\times\left\{y-\frac{b}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2a}b}\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$-\frac{8a^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\left\{y-\frac{b}{2}\frac{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{2a}\pi b}\right\}\sin\frac{2n+1}{a}\pi x$$

$$=-\frac{1}{12}xy(x^3-a^3)+\frac{a^4b}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n^3}\frac{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{n\pi}{2a}b}\sin\frac{n\pi}{a}x$$

$$+\frac{4a^4b}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\frac{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{a}\pi y}{\operatorname{sh}\frac{2n+1}{2a}\pi b}\sin\frac{2n+1}{a}\pi x.$$

232. $$u(x,t)=-\frac{8bl^4}{\pi^5a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\left(\cos\frac{2n+1}{l}\pi at-1\right)$$

$$\times\sin\frac{2n+1}{l}\pi x$$

$$=-\frac{b}{12a^2}x^2(x-l)^2+\frac{bl^2}{12a^2}x(x-l)$$

$$-\frac{8bl^4}{\pi^5a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x$$

$$\times\cos\frac{2n+1}{l}\pi at.$$

233. $$u(x,t)=\frac{P}{E}x-\frac{8Pl}{E\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\times\cos\frac{2n+1}{2l}\pi at.$$

234. $$u(x,t)=\frac{A}{ES}\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t+\frac{4A\omega}{ES\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{2n+1}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2}\times\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x\sin\frac{2n+1}{2l}\pi at.$$

当 ω 正好是杆的一个固有 频率（例如，$\omega=\omega_m=\frac{2m+1}{2l}\times\pi a$)时，则应将上式中级数内的 $n=m$ 项和齐次化函数（即上式中的第一项）合并，再利用洛必达法则求极限，

$$u(x,t)=\frac{6Al}{ES}\frac{(-)^m}{(2m+1)^2\pi^2}\sin\frac{2m+1}{2l}\pi x\times\sin\frac{2m+1}{2l}\pi at+\frac{2A}{ES}\frac{(-)^{m+1}}{(2m+1)\pi}\left[x\cos\frac{2m+1}{2l}\pi x\times\sin\frac{2m+1}{2l}\pi at+at\sin\frac{2m+1}{2l}\pi x\times\cos\frac{2m+1}{2l}\pi at\right]$$

$$+\frac{8(2m+1)Al}{ES\pi^2}\times\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{(-)^n}{2n+1}$$

$$\times\frac{1}{(2m+1)^2-(2n+1)^2}\sin\frac{2n+1}{2l}\pi x$$

$$\times\sin\frac{2n+1}{2l}\pi a t,$$

其中$\sum'$表示和式中不含 $n=m$ 项。

235. $u(x,t)=\cos\frac{\pi}{l}x\cos\frac{\pi}{l}at+\frac{2l}{\pi a}\sin\frac{\pi}{2l}x\sin\frac{\pi}{2l}at$.

236. $u(x,t)=A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t}+B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left[\frac{A}{(\alpha l)^2-(n\pi)^2}-\frac{(-)^nB}{(\beta l)^2-(n\pi)^2}\right]$$

$$\times\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-(\frac{n\pi}{l})^2\kappa t}$$

$$=2A\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\alpha l)^2-(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\times\left[e^{-(\frac{n\pi}{l})^2\kappa t}-e^{-\alpha^2\kappa t}\right]$$

$$-2B\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n n}{(\beta l)^2-(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\times\left[e^{-(\frac{n\pi}{l})^2\kappa t}-e^{-\beta^2\kappa t}\right].$$

237. $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$,

$$u_1(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}y+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi}{a}(b-y)\right]$$

$$\times \sin\frac{n\pi}{a}x,$$

$$A_n = \frac{2}{a\,\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a \psi_2(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x,$$

$$B_n = \frac{2}{a\,\mathrm{sh}\frac{n\pi}{a}b}\int_0^a \psi_1(x)\sin\frac{n\pi}{a}x\mathrm{d}x,$$

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}x + D_n\mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}(a-x)\right]$$

$$\times \sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$C_n = \frac{2}{b\,\mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}a}\int_0^b \varphi_2(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{d}y,$$

$$D_n = \frac{2}{b\,\mathrm{sh}\frac{n\pi}{b}a}\int_0^b \varphi_1(y)\sin\frac{n\pi}{b}y\mathrm{d}y.$$

238. $u(x,y) = B\dfrac{\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)}{\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}b}\sin\dfrac{\pi}{a}x$

$$+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\frac{\mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi(a-x)}{\mathrm{sh}\frac{2n+1}{b}\pi a}\sin\frac{2n+1}{b}\pi y.$$

239. $u(x,t) = \dfrac{u_0}{l}x + \dfrac{4fl^2}{\pi^3\kappa}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$

$$\times\left[1-e^{-\left(\frac{2n+1}{l}\pi\right)^2\kappa t}\right]\sin\frac{2n+1}{l}\pi x$$

$$=\frac{u_0}{l}x+\frac{l}{2\kappa}x(l-x)-\frac{4fl^2}{\pi^3\kappa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}$$

$$\times e^{-\left(\frac{2n+1}{l}\pi\right)^2\kappa t}\sin\frac{2n+1}{l}\pi x.$$

240. $$u(x,t)=\frac{1}{c^2}gx+\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\sqrt{\lambda_n}x,$$

$$T_n(t)=\frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}a}\sin\sqrt{\lambda_n}at$$

$$+\left(\varphi_n-\frac{g}{c^2}\frac{N_n^2}{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}l\right)\cos\sqrt{\lambda_n}at$$

$$+\frac{f_n}{\lambda_n a^2}(1-\cos\sqrt{\lambda_n}at),$$

其中本征值 λ_n 及本征函数 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ 见第228题，f_n,φ_n及 ψ_n 分别是函数 $f(x)$、$\varphi(x)$及$\psi(x)$按 $\sin\sqrt{\lambda_n}x$ 展开的系数，

$$f_n=\frac{N_n^2}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l f'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x,$$

$$\varphi_n=\frac{N_n^2}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \varphi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x,$$

$$\psi_n=\frac{N_n^2}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \psi'(x)\cos\sqrt{\lambda_n}x\mathrm{d}x,$$

归一因子 N_n见第229题。

241. $$u(x,t)=\frac{Mg}{2T}\left[\left|x-\frac{l}{2}\right|-\frac{l}{2}\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\sin\frac{2n\pi}{l}at+B_n\cos\frac{2n\pi}{l}at\right)\sin\frac{2n\pi}{l}x$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n \sin k_n at + D_n \cos k_n at)X_n(x),$$

其中$k_n=\sqrt{\lambda_n}>0$ 是 $\frac{Ma^2}{2T}k\,\mathrm{tg}\,\frac{kl}{2}=1$的解，

$$X_n(x)=\begin{cases}\sin k_n x, & 0<x<l/2,\\ \sin k_n(l-x), & l/2<x<l,\end{cases}$$

$$A_n=\frac{l}{2(n\pi)^2 a}\int_0^l \psi'(x)\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$B_n=\frac{1}{n\pi}\int_0^l \varphi'(x)\cos\frac{2n\pi}{l}x\mathrm{d}x,$$

$$C_n=\frac{N_n^2}{k_n a}\int_0^l \psi'(x)X_n'(x)dx,$$

$$D_n=N_n^2\left[\int_0^l \varphi'(x)X_n'(x)\mathrm{d}x+\frac{2Mg}{T}\sin\frac{k_n l}{2}\right],$$

$$\frac{1}{N_n^2}=\int_0^l |X_n'(x)|^2\mathrm{d}x$$

$$=k_n^2\left[\frac{l}{2}+\frac{2TMa^2}{(Mk_n a^2)^2+4T^2}\right].$$

242. 设$\sqrt{\left(\frac{\omega}{a}\right)^2-\mathrm{i}\frac{\omega h}{a^2}}=\alpha-\mathrm{i}\beta$，$\alpha>0$，$\beta\geqslant0$，则

$$u(x,t)=\mathrm{Re}\left\{A\frac{\sin(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}{\sin(\alpha-\mathrm{i}\beta)l}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right\}$$

$$=\frac{A}{\sin^2\alpha l+\mathrm{sh}^2\beta l}\{(\sin\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{ch}\beta x\,\mathrm{ch}\beta l$$

$$+\cos\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{sh}\beta x\,\mathrm{sh}\beta l)\cos\omega t$$

$$-(\sin\alpha x\cos\alpha l\,\mathrm{ch}\beta x\,\mathrm{sh}\beta l$$

$$-\cos\alpha x\sin\alpha l\,\mathrm{sh}\beta x\,\mathrm{ch}\beta l)\sin\omega t\},$$

若 $h=0$，则 $\alpha=\frac{\omega}{a}$，$\beta=0$，

$$u(x,t)=A\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t.$$

243. $u(x,t)=\mathrm{Re}\left\{Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}(1+\mathrm{i})x+\mathrm{i}\omega t}\right\}$

$$=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x}\cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa}}x-\omega t\right).$$

习 题 十 三

244. (1) $\mathrm{d}s^2=a^2\left\{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}\mathrm{d}\xi^2+\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}\mathrm{d}\eta^2\right\}+\mathrm{d}z^2$,

$$\nabla^2=\frac{1}{a^2(\xi^2-\eta^2)}\left\{\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(2) $\mathrm{d}s^2=\frac{\lambda+\mu}{4}\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\lambda}+\frac{\mathrm{d}\mu^2}{\mu}\right\}+\mathrm{d}z^2$,

$$\nabla^2=\frac{4}{\lambda+\mu}\left\{\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\right.$$

$$\left.+\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\right\}+\frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

(3) $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}r^2+\frac{r^2(\lambda+\mu)}{4}\left\{\frac{\mathrm{d}\lambda^2}{\lambda(\alpha^2-\lambda)(\beta^2+\lambda)}\right.$

$$+\frac{d\mu^2}{\mu(\alpha^2+\mu)(\beta^2-\mu)}\Big\},$$

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{4}{r^2(\lambda+\mu)}$$

$$\times\Big\{\sqrt{\lambda(\alpha^2-\lambda)(\beta^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\lambda(\alpha^2-\lambda)(\beta^2+\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]$$

$$+\sqrt{\mu(\alpha^2+\mu)(\beta^2-\mu)}$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{\mu(\alpha^2+\mu)(\beta^2-\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]\Big\};$$

(4) $$ds^2=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{4\varphi(\lambda)}d\lambda^2+\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{4\varphi(\mu)}d\mu^2$$

$$+\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{4\varphi(\nu)}d\nu^2,$$

$$\nabla^2=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}$$

$$\times\Big\{(\mu-\nu)\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right]$$

$$+(\lambda-\nu)\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\right]$$

$$+(\lambda-\mu)\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\right]\Big\},$$

其中 $\varphi(\theta)\equiv(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)$。

245. 在本题中，分离变数时引进的待定参数用 σ,τ 表示。

(1) $u(\xi,\eta,z)=\Xi(\xi)H(\eta)Z(z)$,

$$\sqrt{\xi^2-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\sqrt{\xi^2-1}\frac{\mathrm{d}\Xi}{\mathrm{d}\xi}\right)+[\tau-\sigma a^2(\xi^2-1)]\Xi=0,$$

$$\sqrt{1-\eta^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\sqrt{1-\eta^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\eta}\right)+[-\tau-\sigma a^2(1-\eta^2)]H=0,$$

$$Z''+\sigma Z=0;$$

(2) $u(\lambda,\mu,z)=\Lambda(\lambda)M(\mu)Z(z)$,

$$\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\sqrt{\lambda}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right)+\left(\tau-\frac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0,$$

$$\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left(\sqrt{\mu}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right)+\left(-\tau-\frac{\sigma}{4}\mu\right)M=0,$$

$$Z''+\sigma Z=0;$$

(3) $u(r,\lambda,\mu)=R(r)\Lambda(\lambda)M(\mu)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\sigma R=0,$$

$$\sqrt{\lambda(\alpha^2-\lambda)(\beta^2+\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sqrt{\lambda(\alpha^2-\lambda)(\beta^2+\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right]$$

$$+\left(\tau-\frac{\sigma}{4}\lambda\right)\Lambda=0,$$

$$\sqrt{\mu(\alpha^2+\mu)(\beta^2-\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\left[\sqrt{\mu(\alpha^2+\mu)(\beta^2-\mu)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right]$$

$$+\left(-\tau-\frac{\sigma}{4}\mu\right)M=0;$$

(4) $u(\lambda,\mu,\nu)=\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu)$,

$$\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\lambda}\right]+(\tau-\sigma\lambda)\Lambda=0,$$

$$\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left[\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\mu}\right]+(-\tau+\sigma\mu)M=0,$$

$$\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left[\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\nu}\right]+(\tau-\sigma\nu)N=0.$$

246. $$u(r,\varphi)=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n+1}\times\sin(2n+1)\varphi$$

$$=\frac{2V}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{2ar\sin\varphi}{a^2-r^2}.$$

247. 不妨假设阳光垂直于柱轴。取柱坐标系，z 轴即为柱轴，阳光照射的半个柱面取为 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$，则定解问题为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}+hu\right)_{r=a}=\begin{cases}\dfrac{M}{k}\sin\varphi, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\\ 0, & \pi<\varphi<2\pi.\end{cases}$$

解之得

$$u(r,\varphi)=\frac{M}{kh\pi}+\frac{1}{2}\frac{M}{k\left(\dfrac{1}{a}+h\right)}\frac{r}{a}\sin\varphi$$

$$-\frac{2M}{k\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{2m}{a}+h\right)(4m^2-1)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2m}\cos 2m\varphi.$$

248. 设

$$f(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi),$$

$$g(\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi),$$

则

$$u(r,\varphi)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\dfrac{r}{b}\right)^m-\left(\dfrac{b}{r}\right)^m}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m-\left(\dfrac{b}{a}\right)^m}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$$

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^m-\left(\frac{a}{r}\right)^m}{\left(\frac{a}{b}\right)^m-\left(\frac{b}{a}\right)^m}(C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi).$$

249. $u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{a}}\sin\frac{n\pi}{a}\varphi,$

$$A_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(\varphi)\sin\frac{n\pi}{a}\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

250. $u(r,\varphi)=\frac{4A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2n+1}{2}}\sin\frac{2n+1}{2}\varphi$。且当 $\varphi\to0$ 及 $\varphi\to2\pi$ 时，$u(r,\varphi)$均趋于0，而

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=0}=\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2n-1}{2}}=\frac{2A}{\pi}\frac{1}{a-r}\sqrt{\frac{a}{r}},$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\bigg|_{\varphi=2\pi}=-\frac{2A}{\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2n-1}{2}}=-\frac{2A}{\pi}\frac{1}{a-r}\sqrt{\frac{a}{r}}.$$

251. (1) a^2-r^2; (2) $\frac{1}{2}(a^2-r^2)r\sin\varphi$;

(3) $\frac{1}{3}(a^2-r^2)r^2\sin2\varphi$.

252. $u(r,\varphi)=\frac{4V}{\pi}\varphi+\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^n}{n}$

$$\times\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{r}\right)^{4n}+\left(\frac{b}{r}\right)^{4n}-\left(\frac{r}{b}\right)^{4n}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{4n}-\left(\frac{a}{b}\right)^{4n}}\sin4n\varphi$$

$$=\frac{4V}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{\ln b-\ln a}\pi\varphi\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{2n+1}{\ln b-\ln a}\frac{\pi^2}{4}\right)}$$

$$\times\sin\left[\frac{\ln r-\ln a}{\ln b-\ln a}(2n+1)\pi\right].$$

253. $$u(r,t)=A\,\frac{\sin p\pi r}{r\sin p\pi}e^{-(p\pi)^2\kappa t}$$

$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n\frac{n}{n^2-p^2}\,\frac{\sin n\pi r}{r}e^{-(n\pi)^2\kappa t}.$$

当 $p=m$(整数)时，应该用洛必达法则求其极限值，

$$u(r,t)=(-)^m A\left[\frac{\sin m\pi r}{2m\pi r}+\cos m\pi r\right.$$

$$\left.-\frac{2m\pi\kappa t\sin m\pi r}{r}\right]e^{-(m\pi)^2\kappa t}$$

$$+\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}{}'(-)^n\frac{n}{n^2-m^2}\,\frac{\sin n\pi r}{r}e^{-(n\pi)^2\kappa t}.$$

其中$\sum'$表示和式中不含 $n=m$ 项。

习 题 十 四

254. (1) $\dfrac{d}{dx}\left(x^2\dfrac{dy}{dx}\right)+(\lambda x+x^2)y=0$;

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\sin x\,\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda\sin x\;y=0$;

(3) $$\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^a(1-x)^b\frac{dy}{dx}\right]$$

$$+\lambda\left(\frac{x}{1-x}\right)^{a-1}(1-x)^{b-2}y=0;$$

(4) $\dfrac{d}{dx}\left(xe^{-x}\dfrac{dy}{dx}\right)+\lambda e^{-x}y=0.$

257. $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{\ln b-\ln a}\right)^2$, $R_n=\sin\left(\frac{\ln r-\ln a}{\ln b-\ln a}n\pi\right)$,

$$n=1,2,3,\cdots.$$

260. 设这两段弦的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2，位移分别为$u_1(x,t)$及 $u_2(x,t)$，则 $u_1(x,t)$及 $u_2(x,t)$满足的方程、边界条件及连接条件为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-a_1^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0, & 0<x<l_1,\\[2ex] \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-a_2^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=0, & l_1<x<l,\\ u_1(0,t)=0, & u_2(l,t)=0,\\ u_1(l_1,t)=u_2(l_1,t), & \left.\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right|_{x=l_1}=\left.\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right|_{x=l_1},\end{cases}$$

其中$l=l_1+l_2$。令$u_1(x,t)=X_1(x)e^{i\omega t}$，$u_2(x,t)=X_2(x)e^{i\omega t}$，代入分离变数，即得

$$\begin{aligned}&X_1''+\left(\frac{\omega}{a_1}\right)^2X_1=0, && X_2''+\left(\frac{\omega}{a_2}\right)^2X_2=0,\\ &X_1(0)=0, && X_2(l)=0,\\ &X_1(l_1)=X_2(l_1), && X_1'(l_1)=X_2'(l_1).\end{aligned}$$

这时需考虑下列两种可能：

1. $\sin\frac{\omega}{a_1}l_1\neq0$，$\sin\frac{\omega}{a_2}l_2\neq0$，本征频率 ω_n 为方程

$$a_1\,\mathrm{ctg}\frac{\omega}{a_1}l_1+a_2\,\mathrm{ctg}\frac{\omega}{a_2}l_2=0$$

的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots$，相应的本征函数是

$$X_n(x)=\begin{cases} X_1(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}l_1}, & 0<x<l_1, \\[3ex] X_2(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}(l-x)}{\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}l_2}, & l_1<x<l. \end{cases}$$

2. $\sin\dfrac{\omega}{a_1}l_1=0$，$\sin\dfrac{\omega}{a_2}l_2=0$，这时应有

$$\frac{l_1}{l_2}\frac{a_2}{a_1}=\frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}=\frac{r}{s},$$

r 和 s 为互质的整数。本征频率为

$$\omega_n=\frac{nr\pi}{l_1}a_1=\frac{ns\pi}{l_2}a_2,\quad n=1,2,3,\cdots,$$

相应的本征函数为

$$X_n(x)=\begin{cases} (-)^{nr}a_1\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x, & 0<x<l_1, \\[3ex] (-)^{ns+1}a_2\sin\dfrac{\omega_n}{a_2}(l-x), & l_1<x<l. \end{cases}$$

对应不同本征值(即不同本征频率)的本征函数在 $[0,l]$ 上以权重 $\rho(x)$ 正交，即

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x=0,\quad m\neq n$$

正交权重即为弦的线密度函数，

$$\rho(x)=\begin{cases} \rho_1, & 0<x<l_1, \\ \rho_2, & l_1<x<l. \end{cases}$$

261. 可以仿照上题讨论，只是边界条件及连接条件应为

$$u_1\big|_{x=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l}=0,$$

$$u_1\big|_{x=l_1}=u_2\big|_{x=l_1}\qquad E_1\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=l_1}=E_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=l_1},$$

其中 $l=l_1+l_2$，

$$a_1=\sqrt{\frac{E_1}{\rho_1}},\qquad a_2=\sqrt{\frac{E_2}{\rho_2}}.$$

现在也需要考虑两种可能：

1．若 $\sin\frac{\omega}{a_1}l_1\neq 0$，$\cos\frac{\omega}{a_2}l_2\neq 0$，则本征频率 ω_n 是超越方程

$$\frac{E_1}{a_1}\mathrm{ctg}\frac{\omega}{a_1}l_1=\frac{E_2}{a_2}\mathrm{tg}\frac{\omega}{a_2}l_2$$

的第 n 个正根，$n=1,2,3,\cdots$，相应的本征函数为

$$X_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\frac{\omega_n}{a_1}x}{\sin\frac{\omega_n}{a_1}l_1}, & 0<x<l_1,\\[2ex] \dfrac{\cos\frac{\omega_n}{a_2}(l-x)}{\cos\frac{\omega_n}{a_2}l_2}, & l_1<x<l.\end{cases}$$

2．$\sin\frac{\omega}{a_1}l_1=0$，$\cos\frac{\omega}{a_2}l_2=0$，即满足

$$\frac{l_1}{l_2}\frac{a_2}{a_1}=\frac{l_1}{l_2}\sqrt{\frac{E_2\rho_1}{E_1\rho_2}}=\frac{2r}{2s+1},$$

r 和 s 为整数，且 $2r$ 与 $2s+1$ 互质。此时本征频率为

$$\omega_n = (2n+1)\frac{r\pi}{l_1}a_1 = (2n+1)\frac{(2s+1)\pi}{2l_2}a_2,$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots,$$

本征函数为

$$X_n = \begin{cases} \dfrac{(-)^r a_1}{E_1}\sin\dfrac{\omega_n}{a_1}x, & 0<x<l_1, \\ \dfrac{(-)^{s+n}a_2}{E_2}\cos\dfrac{\omega_n}{a_2}(l-x), & l_1<x<l. \end{cases}$$

267. $u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_{mn}}{\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}\sin\dfrac{m\pi}{a}x$

$$\times\sin\frac{n\pi}{b}y.$$

$$A_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y\,dy.$$

268. (1) $u(x,y) = \dfrac{32}{\pi^4}$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)(2n+1)\left[\left(\dfrac{2m+1}{a}\right)^2+\left(\dfrac{2n+1}{b}\right)^2\right]}$$

$$\times\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y;$$

(2) $u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{A_{mn}}{\left(\dfrac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{b}\right)^2}$

$$\times\sin\frac{m\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y,$$

$$A_{mn}=(-)^{m+n}\frac{4a^2b}{mn\pi^2}\left\{-1+\frac{4}{(n\pi)^2}[1-(-)^n]\right\}.$$

习 题 十 五

275．当 $k=l+2n$，$n=0,1,2,\cdots$时，积分为

$2^{l+1}\frac{(l+n)!(l+2n)!}{n!(2l+2n+1)!}$，其它情况下积分均为0．

283．（1）当 $k=l+2n+1$，$n=0,1,2,\cdots$时，积分均为2，其它情况下积分均为0；

（2）$\frac{2t^l}{1-t^2}$．

288．（1）$\frac{2l(l+1)}{2l+1}\delta_{kl}$；

（2）不妨设 $k\geqslant l$．当 $k-l$ 为偶数时，积分为 $l(l+1)$；当 $k-l$ 为奇数时，积分为0．

289．（1）当 $k+l=$奇数时，不妨设 $k=2n$，$l=2m+1$，此时，积分为

$$\frac{(-)^{m+n}}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}\frac{(2m+1)!(2n)!}{2^{2m+2n}(m!n!)^2};$$

当 $k+l=$偶数时，积分为 $\frac{1}{2l+1}\delta_{kl}$；

（2）$\frac{2(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$；（3）$\frac{2(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$；

（4）$\frac{2(2k^2+2k-1)}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)}$．

290．（1）$x^2=\frac{1}{3}P_0(x)+\frac{2}{3}P_2(x)$，

(2) $|x| = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^{k+1}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}\frac{4k+1}{2(2k-1)(k+1)}P_{2k}(x)$;

(3) $f(x) = \frac{1}{2}P_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty}(-)^{k+1}\frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$

$$\times\frac{4k+1}{4(2k-1)(k+1)}P_{2k}(x);$$

(4) $\sqrt{1-2xt+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t^{k+2}}{2k+3} - \frac{t^k}{2k-1}\right)P_k(x)$.

291. (2) $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$,

$$Q_1(x) = \frac{1}{2}x\ln\frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2}x.$$

292 (1) $\lambda_l = (2l+1)(2l+2)$,

$y_l(x) = P_{2l+1}(x)$,

$l = 0, 1, 2, \cdots$;

(2) $\lambda_l = 2l(2l+1)$,

$y_l(x) = P_{2l}(x)$, $\quad l = 0, 1, 2, \cdots$.

293. $u(r,\theta) = \frac{u_0}{2}(1-\cos\alpha) + \frac{u_0}{2}\sum_{l=1}^{\infty}[P_{l-1}(\cos\alpha)$

$$-P_{l+1}(\cos\alpha)]\left(\frac{r}{a}\right)^l P_l(\cos\theta).$$

294. $u(r,\theta) = \frac{M}{2}\frac{1}{H+\frac{k}{a}}\frac{r}{a}P_1(\cos\theta)$

$$+\frac{M}{2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-)^{l+1}}{H+2l\frac{k}{a}}\frac{(2l)!}{(2^l l!)^2}$$

$$\times\frac{4l+1}{(2l-1)(2l+2)}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta).$$

295. $$u(r,\theta)=\frac{b-3a}{3(b-a)}u_0+\frac{2b}{3(b-a)}\frac{a}{r}u_0$$

$$+\frac{2}{3}\frac{b^3a^2}{b^5-a^2}\left[\left(\frac{r}{a}\right)^2-\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]$$

$$\times u_0\mathrm{P}_2(\cos\theta).$$

296. $$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}[A_k\cos\sqrt{(k+1)(2k+1)}\,\omega t$$

$$+B_k\sin\sqrt{(k+1)(2k+1)}\,\omega t]\mathrm{P}_{2k+1}\left(\frac{x}{l}\right),$$

$$A_k=\frac{4k+3}{l}\int_0^l\varphi(x)\mathrm{P}_{2k+1}\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x,$$

$$B_k=\frac{4k+3}{\omega l\sqrt{(k+1)(2k+1)}}$$

$$\times\int_0^l\psi(x)\mathrm{P}_{2k+1}\left(\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x.$$

297. $$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(-)^l\frac{4l+3}{2l+2}\frac{(2l)!}{(2^l l!)^2}\left(\frac{r}{a}\right)^{2l+1}$$

$$\times\mathrm{P}_{2l+1}(\cos\theta)$$

298. $$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{2MG}{a}\left\{1-\dfrac{r}{a}\mathrm{P}_1(\cos\theta)-\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty}\dfrac{(-)^l}{2l-1}\dfrac{(2l)!}{(2^l l!)^2}\times\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta)\right\}, & r<a,\\[2ex] \dfrac{2MG}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-)^l}{2l+2}\dfrac{(2l)!}{(2^l l!)^2}\times\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l+1}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r>a.\end{cases}$$

299 $$u(r,\theta)=\begin{cases}\dfrac{Q}{a}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-)^l(2l)!}{(2^l l!)^2}\left\{\left(\dfrac{r}{a}\right)^{2l}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2l+1}\left(\dfrac{r}{b}\right)^{2l}\right\}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r<a,\\[2ex] \dfrac{Q}{r}\displaystyle\sum_{l=0}^{\infty}\dfrac{(-)^l(2l)!}{(2^l l!)^2}\left\{\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2l}-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2l}\left(\dfrac{r}{b}\right)^{2l+1}\right\}\mathrm{P}_{2l}(\cos\theta), & r>a.\end{cases}$$

300. (1) $\dfrac{2}{3}\sqrt{\pi}\,\mathrm{Y}_{00}(\theta,\varphi)-\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{\pi}{5}}\times\mathrm{Y}_{20}(\theta,\varphi)$

$$+\sqrt{\frac{2\pi}{15}}[\mathrm{Y}_{22}(\theta,\varphi)+\mathrm{Y}_{2-2}(\theta,\varphi)];$$

(2) $\sqrt{\dfrac{2\pi}{3}}[-\mathrm{Y}_{11}(\theta,\varphi)+\mathrm{Y}_{1-1}(\theta,\varphi)]$

$$+\sqrt{\frac{6\pi}{5}}[-\mathrm{Y}_{21}(\theta,\varphi)+\mathrm{Y}_{2-1}(\theta,\varphi)].$$

301. (1) $u(r,\theta,\varphi)=A_{00}+\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}r^{l}Y_{lm}(\theta,\varphi)$,

A_{00} 任意（这是因为$u(r,\theta,\varphi)$的基准值可以任意选取），且

$$A_{lm}=\frac{1}{la^{l-1}}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta;$$

(2) $u(r,\theta,\varphi)=A_{00}+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}r^{-l-1}Y_{lm}(\theta,\varphi)$,

A_{00} 任意，且

$$B_{lm}=-\frac{a^{l+2}}{l+1}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)Y_{lm}^{*}(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta.$$

302. (1) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{r}{a}P_1^1(\cos\theta)\cos\varphi$

$$=\frac{r}{a}\sin\theta\cos\varphi;$$

(2) $u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$

$$=\left(\frac{r}{a}\right)^2\cos\theta\sin\theta\cos\varphi.$$

303. $u(r,\theta,\varphi)=\frac{1}{6}A(r^2-a^2)$

$$+\frac{1}{21}Br^2(r^2-a^2)P_2^1(\cos\theta)\cos\varphi$$

$$=\frac{1}{6}A(r^2-a^2)$$

$$+\frac{1}{14}Br^2(r^2-a^2)\sin2\theta\cos\varphi.$$

习题十六

304. $-\frac{2}{\pi x}\sin\nu\pi$； $\frac{2}{\pi x}$.

305. (1) $-\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{J_{-\nu}(x)}{J_\nu(x)}+C=\frac{\pi}{2}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C'$；

(2) $-\frac{\pi}{2}\frac{J_\nu(x)}{Y_\nu(x)}+C$； (3) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C$；

(4) $\frac{\pi}{2}\mathrm{tg}^{-1}\frac{Y_\nu(x)}{J_\nu(x)}+C$.

307. (1) $$u(z)=C_1z^{\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}z^{\frac{b+2}{2}}\right)+C_2z^{\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{b+2}}\left(\frac{2\sqrt{a}}{b+2}z^{\frac{b+2}{2}}\right)；$$

(2) $u(z)=C_1z^{\frac{3}{2}}J_{5/4}(z^2)+C_2z^{-\frac{3}{2}}Y_{5/4}(z^2)$；

(3) $u(z)=C_1z^2J_2(z)+C_2z^2Y_2(z)$；

(4) $u(z)=C_1zJ_{1/2}(z^2)+C_2zY_{1/2}(z^2)$；

(5) $u(z)=C_1J_{1/2}(iz)+C_2Y_{1/2}(iz)=C_1'I_{1/2}(z)+C_2'K_{1/2}(z)$；

(6) $u(z)=C_1zI_1(z)+C_2zK_1(z)$；

(7) $$u(z)=C_1z^{1/2}I_{1/2}\left(\frac{1}{2}z^2\right)+C_2z^{\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}z^2\right)；$$

(8) $\theta(t)=\frac{\pi}{2}\theta_0\sqrt{\frac{a}{a+bt}}\left[AJ_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)\right.$

$$\left.+BY_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{g(a+bt)}\right)\right],$$

$$A=-Y_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)+\frac{2}{b}\sqrt{ga}Y_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right),$$

$$B=J_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right)-\frac{2}{b}\sqrt{ga}J_1'\left(\frac{2}{b}\sqrt{ga}\right).$$

309. $\cos(x\sin\theta)=J_0(x)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(x)\cos 2n\theta;$

$$\sin(x\sin\theta)=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(x)\sin(2n+1)\theta.$$

310. $\sqrt{\pi^2-x^2}=\frac{1}{4}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{n}J_1(n\pi)\cos nx.$

312. $\frac{1}{2}[J_n'(\mu_i)]^2.$

313. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{n^2}{\mu_i^2}\right)J_n^2(\mu_i).$

315. (1) $\frac{1}{2^n n!}-\frac{1}{x^n}J_n(x)$; (2) $a^3J_1(a)-2a^2J_2(a)$;

(3) $\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{4a}}$; (4) $2\sin\frac{t}{2}$.

321. $u(r,t)=\frac{u_0}{2}-4u_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_i}{a}r\right)}{\mu_i^2J_0(\mu_i)}e^{-\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2\kappa t}$，其中

μ_i 是 $J_1(x)$的零点，$i=0,1,2,\cdots$，且 $\mu_{i+1}>\mu_i>\cdots>\mu_0=0$.

显然，当 $t\to\infty$ 时，$u(r,t)\to\dfrac{u_0}{2}$.

322. $u(r,t)=8H\sum_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\mu_i}\right)^3\dfrac{J_0\left(\dfrac{\mu_i}{R}r\right)}{J_1(\mu_i)}\cos\dfrac{\mu_i}{R}at$，$\mu_i$ 是$J_0(x)$的第 i 个正零点，$i=1,2,3,\cdots$。

323. $$u(r,\theta,t)=4u_0\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i^4}\frac{4-(\mu_i^2+4)J_0(\mu_i)}{J_0^2(\mu_i)}\times J_2\left(\frac{\mu_i}{a}r\right)\sin2\theta e^{-\left(\frac{\mu_i}{a}\right)^2\kappa t},$$

μ_i 是 $J_2(x)$的第 i 个正零点，$i=1,2,3,\cdots$。

324. $$u(r,z,t)=\sum_{i=1}^{\infty}B_iJ_0(\mu_ir)\sin nze^{-(\mu_i^2+n^2)\kappa t},$$

$$B_i=\frac{2}{J_1^2(\mu_i)}\int_0^1 f(r)J_0(\mu_ir)r\mathrm{d}r,$$

μ_i 是 $J_0(x)$的第 i 个正零点。

325. $u(r,t)=\pi u_0\sum_{i=1}^{\infty}\dfrac{J_0(\mu_ib)}{J_0(\mu_ia)+J_0(\mu_ib)}[J_0(\mu_ir)Y_0(\mu_ia)$ $-J_0(\mu_ia)Y_0(\mu_ir)]e^{-\mu_i^2\kappa t}$，$\mu_i$ 是超越方程 $J_0(\mu a)Y_0(\mu b)-J_0(\mu b)Y_0(\mu a)=0$ 的第 i 个正根。

326. (1) $$u(r,t)=2A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)}{\left[\left(\frac{\mu_i}{R}a\right)^2-\omega^2\right]\mu_iJ_1(\mu_i)}\times\left[\sin\omega t-\frac{R\omega}{\mu_ia}\sin\frac{\mu_i}{R}at\right],$$

μ_i是$J_0(x)$的第 i 个正零点。当 ω 正好是圆膜的某一本征频率$\left(\text{例如，}\omega=\dfrac{\mu_i}{R}a\right)$时，可用洛必达法则求其极限值，

$$u(r,t) = -\frac{AR}{a}\frac{J_0\left(\frac{\mu_j}{R}r\right)}{\mu_j^2 J_1(\mu_j)}\left(t\cos\frac{\mu_j}{R}at - \frac{R}{\mu_j a}\sin\frac{\mu_j}{R}at\right)$$

$$+\frac{2AR^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\mu_i^2(\mu_i^2-\mu_j^2)}\frac{J_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)}{J_1(\mu_i)}$$

$$\times\left(\mu_i\sin\frac{\mu_j}{R}at - \mu_j\sin\frac{\mu_i}{R}at\right),$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $i=j$ 项;

(2) $$u(r,t) = 8A\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\mu_i}{R}a\right)^2-\omega^2}\frac{J_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)}{\mu_i^4 J_1(\mu_i)}$$

$\times\left(\mu_i\sin\omega t - \frac{\omega R}{a}\sin\frac{\mu_i}{R}at\right)$，$\mu_i$ 是 $J_0(x)$的第 i 个正零点．而若ω 正好是圆膜的某一本征频率$\left(\text{例如，}\omega=\frac{\mu_j}{R}a\right)$时，则有

$$u(r,t) = -\frac{4AR^2}{a^2}\frac{J_0\left(\frac{\mu_j}{R}r\right)}{\mu_j^5 J_1(\mu_j)}\left(\frac{\mu_j}{R}at\cos\frac{\mu_j}{R}at - \sin\frac{\mu_j}{R}at\right)$$

$$+\frac{8AR^2}{a^2}\sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\mu_i^4(\mu_i^2-\mu_j^2)}\frac{J_0\left(\frac{\mu_i}{R}r\right)}{J_1(\mu_i)}$$

$$\times\left(\mu_i\sin\frac{\mu_j}{R}at - \mu_j\sin\frac{\mu_i}{R}at\right),$$

其中 $\sum'$ 表示和式中不含 $i=j$ 项．

327．临界半径 $a_c = 2.405\sqrt{\frac{D}{\beta}}$．

328. $u(x,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i\cos\sqrt{\frac{g}{4l}\mu_i^2-\omega^2}\,t\right.$

$$\left.+B_i\sin\sqrt{\frac{g}{4l}\mu_i^2-\omega^2}\,t\right)J_0\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

μ_i 是 $J_0(x)$的第 i 个正零点，

$$A_i=\frac{1}{lJ_1^2(\mu_i)}\int_0^l\varphi(x)J_0\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$

$$B_i=\frac{1}{l\sqrt{\frac{g}{4l}\mu_i^2-\omega^2}\,J_1^2(\mu_i)}\int_0^l\psi(x)J_0\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx.$$

329. $u(x,t)=x^{-\frac{m}{2}}\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_i\cos\frac{\mu_i}{2}\sqrt{\frac{g}{(m+1)l}}\,t\right.$

$$\left.+B_i\sin\frac{\mu_i}{2}\sqrt{\frac{g}{(m+1)l}}\,t\right)J_m\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right),$$

μ_i 是 $J_m(x)$的第 i 个正零点，

$$A_i=\frac{1}{lJ_{m+1}^2(\mu_i)}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\varphi(x)J_m\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx,$$

$$B_i=\frac{1}{lJ_{m+1}^2(\mu_i)}\frac{2}{\mu_i}\sqrt{\frac{(m+1)l}{g}}\int_0^l x^{\frac{m}{2}}\psi(x)J_m\left(\mu_i\sqrt{\frac{x}{l}}\right)dx.$$

332. $u(x,t)=2u_0\sum_{n=1}^{\infty}(-)^{n+1}j_0\left(\frac{n\pi}{a}r\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\kappa t}$

$$=\frac{2u_0a}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{a}r\,e^{-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\kappa t}.$$

333. 临界半径 $a_c=\pi\sqrt{\frac{D}{\beta}}$

336. $u(r,z)=u_0\dfrac{I_0\left(\dfrac{2\pi}{h}r\right)}{I_0\left(\dfrac{2\pi}{h}a\right)}\sin\dfrac{2\pi}{h}z.$

习 题 十 七

340. (1) $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}-\dfrac{a}{r'}\dfrac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\left(\dfrac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'\right|}$;

(2) 为了简单起见，我们取点电荷所在的方向为 z 轴方向. 这时，球面上感应电荷密度为

$$\sigma(\theta,\varphi)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial G}{\partial r}\bigg|_{r=a}=-\frac{1}{4\pi a^2}\frac{1-\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2}{\left[1+\left(\dfrac{r'}{a}\right)^2-2\dfrac{r'}{a}\cos\theta\right]^{3/2}};$$

(3) 感应电荷在球内一点 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$处的电势为

$$\iint\frac{\sigma(\theta_0,\varphi_0)a^2\sin\theta_0\mathrm{d}\theta_0\mathrm{d}\varphi_0}{\sqrt{a^2+r^2-2ar\cos\gamma}},$$

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi-\varphi_0).$$

将$(a^2+r^2-2ar\cos\gamma)^{-1/2}$ 展开，逐项积分后再求和，即可得到感应电荷在 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ 点的电势，它正好就是

$$-\frac{a}{r'}\frac{1}{\left|\boldsymbol{r}-\left(\dfrac{a}{r'}\right)^2\boldsymbol{r}'\right|}.$$

积分时用到第 283 题的结果.

342. $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\dfrac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$

343. $G(x,t;x_0,t_0)=\frac{I}{2\rho a}\eta\left(t-t_0-\frac{|x-x_0|}{a}\right)$，其中，

$$\eta(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ 1, & t>0.\end{cases}$$

344. $G(x,t;x_0,t_0)=\frac{2I}{\rho\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x_0\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\times\sin\frac{n\pi}{l}a(t-t_0)\eta(t-t_0).$$

345. $G(x,t;x_0,t_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\kappa(t-t_0)}}$

$$\times\eta(t-t_0).$$

347. $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

348. $u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{l}c\sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\times\cos\frac{n\pi}{l}at.$$

349. $u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4\kappa t}}dx'.$

350. 对于波动方程，

$$G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t)=\frac{\delta\left(\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{a}-t+t'\right)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|};$$

对于热传导方程，

$$C(\mathbf{r},t;\mathbf{r}',t')=\frac{1}{8[\pi\kappa(t-t_0)]^{3/2}}e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\kappa(t-t')}}\eta(t-t').$$

习题十八

351. $U(x,p)=\frac{u_0}{p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, u(x,t)=u_0\operatorname{erfc}\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}.$

353. $$U(x,p)=\begin{cases}\frac{u_0}{2p}e^{\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, & x<0,\\ \frac{u_0}{p}-\frac{u_0}{2p}e^{-\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}, & x>0;\end{cases}$$

$$u(x,t)=\begin{cases}\frac{u_0}{2}\operatorname{erfc}\left(-\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), & x<0,\\ u_0-\frac{u_0}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\kappa t}}\right), & x>0.\end{cases}$$

354. $$U(x,p)=\frac{A}{p+\alpha^2\kappa}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}(l-x)}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l}+\frac{B}{p+\beta^2\kappa}\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}x}{\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{\kappa}}l},$$

$$u(x,t)=A\frac{\sin\alpha(l-x)}{\sin\alpha l}e^{-\alpha^2\kappa t}+B\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}e^{-\beta^2\kappa t}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}2n\pi\left[\frac{A}{(\alpha l)^2-(n\pi)^2}-\frac{(-)^nB}{(\beta l)^2-(n\pi)^2}\right]$$
$$\times\sin\frac{n\pi}{l}xe^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\kappa t}.$$

355. $u(x,t)=\frac{u_0a}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(\frac{ka}{2}\right)^2}\cos kcte^{ikx}dk.$

$$= \frac{u_0}{2}\left[e^{-\left(\frac{x+ct}{a}\right)^2} + e^{-\left(\frac{x-ct}{a}\right)^2}\right].$$

356. $u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

357. $u(x,t) = A\sin\left(t - \frac{x}{a}\right)\eta\left(t - \frac{x}{a}\right).$

358. $u(r,z) = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{I}_0(kr)}{\mathrm{I}_0(ka)} \frac{\sin kz}{k}\mathrm{d}k.$

359. $u(r,z) = \frac{2V_0}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-pz}\mathrm{J}_0(rp) \frac{\sin p}{p}\mathrm{d}p.$

360. (2) $u(\mu,\zeta) = \frac{2V_0}{\pi}\mathrm{ctg}^{-1}\zeta.$

习 题 十 九

361. (1) 沿正实轴割开的 ζ 平面，即 $0<\arg\zeta<2\pi$；
(2) 沿正实轴割开的单位圆，即 $|\zeta|<1, 0<\arg\zeta<2\pi$；
(3) 单位圆 $|\zeta|<1$；　(4) 圆 $\left|\zeta - \frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

363. $W = -\mathrm{i}\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$

364. $W = \left(\frac{\sqrt{z}+1}{\sqrt{z}-1}\right)^2$ 或　$W = -\left(\frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}\right)^2$

或 $W=\dfrac{2\sqrt{z}}{1+z}$.

365. $W=e^{i\varphi}\dfrac{z^2-a}{z^2-a^*}$, $\mathrm{Im}\varphi=0$, $\mathrm{Im}a>0$.

366. $\dfrac{V_1}{\pi}\left[\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2ar\sin\theta}{a^2-r^2}+\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{2ar\cos\theta}{a^2-r^2}\right]$.

367. $\dfrac{V_0}{\pi}\left[\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a^2+y^2-x^2}{2xy}+\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{x^2-y^2}{2xy}\right]$

$$=V_0+\frac{V_0}{\pi}\arg\frac{a^2-z^2}{z^2},\quad z=x+iy.$$

368. $2\rho\ln\left|\dfrac{cz-a^2}{a(z-c)}\right|=\rho\ln\dfrac{(cx-a)^2+c^2y^2}{a^2[(x-c)^2+y^2]}$.

369. $u=V_0\dfrac{\ln\left|\dfrac{z+ib}{z-ib}\right|}{\ln\dfrac{a}{h-b}}$

$$=\frac{V_0}{2}\frac{\ln[x^2+(y+b)^2]-\ln[x^2+(y-b)^2]}{\ln a-\ln(h-b)},$$

$$b=\sqrt{h^2-a^2}.$$

习 题 二 十

371. (1) 双曲型. 令 $\xi=y-3x$, $\eta=y+x$, 则化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

也可令 $\alpha=y-x$, $\beta=2x$, 而将方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}-\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{\partial u}{\partial \beta}=0;$$

(2) 椭圆型。令 $\xi=y-2x,\eta=x$，方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{2\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial \eta}=0;$$

(3) 当 $y>0$ 时为椭圆型，可令 $\xi=x,\eta=2\sqrt{y}$，方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0;$$

当 $y<0$ 时为双曲型，令 $\xi=x$，$\eta=2\sqrt{-y}$，则化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0;$$

(4) 椭圆型。令 $\xi=\mathrm{sh}^{-1}x$，$\eta=\mathrm{sh}^{-1}y$，方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0;$$

(5) 抛物型。令 $\xi=y\sin x$，$\eta=y\cos x$，方程化为

$$(\xi^2+\eta^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\xi\frac{\partial u}{\partial \xi}+\eta\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

372. (2) $u(x,y)=e^{-(ax-by)}v(x,y)$.

373. (1) $u(x,y)=f(3x+y)+g(x-y)$;

(2) $u(x,y)=f(x+y)+g(y)$;

(3) $u(x,t)=f(x+(a+b)t)+g(x-(a-b)t)$;

(4) $u(x,y)=f(x+y+\mathrm{i}x)+g(x+y-\mathrm{i}x)$.

374. $u(x,y)=f(xy)\ln x+g(xy)$.

375. $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$

$$+\frac{1}{2}\frac{at}{h-x}[\varphi(x+at)-\varphi(x-at)]$$

$$+\frac{1}{2a}\frac{1}{h-x}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)(h-\xi)\mathrm{d}\xi.$$

376. $u(x,t)=\varphi\left(\frac{x+at}{2}\right)+\psi\left(\frac{x-at}{2}\right)-\varphi(0)$.

习题二十一

382. 在球内

$$u(r,t)=\begin{cases} u_0, & 0\leqslant t<\frac{R-r}{a},\\ u_0\frac{r-at}{2r}, & \frac{R-r}{a}<t<\frac{R+r}{a},\\ 0, & t>\frac{R+r}{a};\end{cases}$$

在球外 $u(r,t)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant t<\frac{r-R}{a},\\ u_0\frac{r-at}{2r}, & \frac{r-R}{a}<t<\frac{r+R}{a},\\ 0; & t>\frac{r+R}{a}.\end{cases}$

383. (1) $u(x,y,z,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi;$$

$$
(2)\ u(r,\theta,\varphi,t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)\\ \quad+(r-at)\varphi(r-at)]\\ \quad+\dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{r-at}^{r+at}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & r>at,\\ \dfrac{1}{2r}[(r+at)\varphi(r+at)\\ \quad-(at-r)\varphi(at-r)]\\ \quad+\dfrac{1}{2ar}\displaystyle\int_{at-r}^{at+r}\xi\psi(\xi)\mathrm{d}\xi, & r<at.\end{cases}
$$

384. $G(\boldsymbol{\rho},t;\boldsymbol{\rho}',t')$

$$
=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{(t-t')^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}, & |\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<a(t-t'),\\ 0, & |\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|>a(t-t');\end{cases}
$$

$$
u(\boldsymbol{\rho},t)=\frac{1}{2\pi a^2}\left\{\iint_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<at}\frac{\psi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\right.
$$

$$
\left.+\frac{\partial}{\partial t}\iint_{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|<at}\frac{\varphi(\boldsymbol{\rho}')}{\sqrt{t^2-\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2}{a^2}}}\mathrm{d}\boldsymbol{\rho}'\right\},
$$

其中 $\varphi(\boldsymbol{\rho})$和$\psi(\boldsymbol{\rho})$分别是初位移和初速度，

$$
u|_{t=0}=\varphi(\boldsymbol{\rho}),\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\boldsymbol{\rho}).
$$

386. $u(x,y)=\dfrac{1}{2}\varphi(xy)+\dfrac{y}{2}\varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)+\dfrac{\sqrt{xy}}{4}\displaystyle\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\xi^{-\frac{3}{2}}$

$$
\times\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi-\frac{\sqrt{xy}}{2}\int_{xy}^{\frac{x}{y}}\xi^{-\frac{3}{2}}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi.
$$

387．（1） 令$\xi=y+2\sqrt{x}$，$\eta=y-2\sqrt{x}$，方程化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2}\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0,$$

其黎曼函数为

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=(\eta_0-\xi)^{-\frac{1}{2}}(\eta-\xi_0)^{-\frac{1}{2}}(\eta-\xi)$$

$$\times\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;\tau\right),$$

其中

$$\tau=\frac{(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)}{(\xi-\eta_0)(\eta-\xi_0)},$$

$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)$是超几何函数（参见第194题），

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\gamma,z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{n!\Gamma(\gamma+n)}z^n;$$

（2） 作变换$\xi=\frac{1}{2}(y+\cos^{-1}x)$，$\eta=\frac{1}{2}(y-\cos^{-1}x)$，

$u=\frac{v}{\sqrt{1-x^2}}$，则方程变为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{4}\frac{1}{\sin^2(\xi-\eta)}v=0,$$

相应的黎曼函数为

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,\frac{\sin(\xi-\xi_0)\sin(\eta-\eta_0)}{\sin(\xi-\eta)\sin(\xi_0-\eta_0)}\right).$$

习题二十二

391．应考虑泛函

$$J[u]=\int_0^t (T-V)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^t \mathrm{d}t\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x.$$

393．$y=x$。

394．极值曲线（短程线）为 $\varphi=$ 常数 φ_1，即过 $A(0,0)$ 及 $B(\theta_1,\varphi_1)$ 的大圆．若 A 点坐标不取为 $(0,0)$，则极值曲线为

$$\varphi=\alpha+\sin^{-1}\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\mathrm{ctg}\theta,$$

常数 c 及 α 由端点坐标决定。

395．应考虑泛函

$$J=\int_A^B\frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}.$$

它取极值的必要条件（欧勒-拉格朗日方程）是

$$\frac{y''}{1+y'^2}+\frac{g}{v_0^2+2g(y_1-y)}=0.$$

但由于泛函表达式中被积函数不显含 x，根据第 392 题，必要条件可以写成一阶微分方程

$$\frac{1}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}}=C,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=-C\sqrt{v_0^2+2g(y_1-y)}.$$

397. $y''y-(1+y'^2)=0$ 或 $\dfrac{y}{\sqrt{1+y'^2}}=C$.

398. 相应的泛函极值问题是条件极值问题

$$J[u]=\iiint\limits_V(\nabla u)^2\mathrm{d}\tau+\frac{\alpha}{\beta}\iint\limits_\Sigma u^2\mathrm{d}\sigma,$$

$$\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Sigma=0,$$

$$\iiint\limits_V u^2\mathrm{d}\tau=1.$$

399. 若取逼近函数为 $C_1\sin\pi x+C_2\sin2\pi x$，则最低的本征频率近似值为 $2.559\sqrt{T}$；若取逼近函数为 $x(1-x)(C_1+C_2x)$，则为 $2.576\sqrt{T}$.

400. (1) $\lambda_1=2.5$，$\lambda_2=10.5$；

(2) $\lambda=14\mp\sqrt{133}=2.467$，$25.533$.

这两种试探函数得到的 λ_1 是相近的，但 λ_2 相差甚远。事实上，这个问题的精确解是

$$\lambda_n=\left(\frac{1}{2}n\pi\right)^2,\quad y_n=\sin\frac{n\pi}{2}(1+x),\quad n=1,2,3,\cdots.$$

当 $n=$ 奇数时，y_n 为偶函数；当 $n=$ 偶数时，y_n 为奇函数。因此，当采用第二种形式的试探解时，求得的应是 $n=1$ 与 $n=3$ 时 λ_n 的近似值。

第三部分　附　　录

一　拉普拉斯变换表

编　号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	t^n, $n=0,1,2,\cdots$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
3	t^α, $\mathrm{Re}\ \alpha > -1$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
4	e^{-at}	$\dfrac{1}{p-a}$
5	$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
6	$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
7	$\mathrm{sh}\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
8	$\mathrm{ch}\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
9	$\dfrac{1}{2\omega^3}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t)$	$\dfrac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$

编 号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(p)$
10	$\frac{t}{2\omega}\sin\omega t$	$\frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}$
11	$\frac{1}{2\omega}(\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)$	$\frac{p^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
12	$t\cos\omega t$	$\frac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
13	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
14	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
15	$e^{-at}t^{\alpha}$, $\mathrm{Re}\alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+a)^{\alpha+1}}$
16	$\frac{1}{2\omega^3}(\mathrm{sh}\omega t-\sin\omega t)$	$\frac{1}{p^4-\omega^4}$
17	$\frac{1}{2\omega^2}(\mathrm{ch}\omega t-\cos\omega t)$	$\frac{p}{p^4-\omega^4}$
18	$\frac{1}{2\omega}(\mathrm{sh}\omega t+\sin\omega t)$	$\frac{p^2}{p^4-\omega^4}$
19	$\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\omega t+\cos\omega t)$	$\frac{p^3}{p^4-\omega^4}$
20	$\frac{1}{2\omega^2}\mathrm{sh}\omega t\sin\omega t$	$\frac{p}{p^4+4\omega^4}$
21	$\mathrm{ch}\omega t\sin\omega t-\mathrm{sh}\omega t\cos\omega t$	$\frac{4\omega^3}{p^4+4\omega^4}$

编　号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(p)$
22	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{a^2}{4t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-a\sqrt{p}}$
23	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\frac{a^2}{p}}\operatorname{erfc}\frac{a}{\sqrt{p}}$
24	$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{p\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
25	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}$
26	$\operatorname{erf}\sqrt{at}$	$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{a}{p+a}}$
27	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{p}e^{-a\sqrt{p}}$
28	$e^t\operatorname{erfc}\sqrt{t}$	$\frac{1}{p+\sqrt{p}}$
29	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\operatorname{erfc}\sqrt{t}$	$\frac{1}{1+\sqrt{p}}$
30	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}+\sqrt{a}\operatorname{erf}\sqrt{at}$	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}$
31	$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$
32	$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$
33	$\frac{J_n(at)}{t}$	$\frac{1}{na^n}(\sqrt{p^2+a^2}-p)^n$

编 号	原函数$f(t)$	像函数 $F(p)$

编　号	原函数 $f(t)$	像函数 $F(p)$
44	$\begin{cases} \frac{t}{b}, & 0\leqslant t<b \\ 2-\frac{t}{b}, & b\leqslant t\leqslant 2b \\ 0, & t>2b \end{cases}$	$\frac{1}{b}\left(\frac{1-e^{-bp}}{p}\right)^2$
45	$\begin{cases} \sin\omega t, & 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega} \\ 0, & t>\frac{\pi}{\omega} \end{cases}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\left(1+e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)$
46	$\begin{cases} 1, & 2na<t<(2n+1)a, \\ -1, & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}\operatorname{th}\frac{ap}{2}$
47	$\frac{t}{a}-\left[\frac{t}{a}\right]$	$\frac{1}{ap^2}-\frac{e^{-ap}}{p(1-e^{-ap})}$
48	$\begin{cases} \frac{t}{a}-\left[\frac{t}{a}\right], & 2na<t<(2n+1)a, \\ 2-\frac{t}{a}+\left[\frac{t}{a}\right], & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$	$\frac{1}{p^2}\operatorname{th}\frac{ap}{2}$
49	$\frac{1}{2}[\sin\omega t+\|\sin\omega t\|]$	$\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)\left(1-e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)}$
50	$\|\sin\omega t\|$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2\omega}$

二　傅里叶变换表

编　号	原函数 $f(x)$	像函数 $C(\omega)$
1	1	$\sqrt{2\pi}\delta(\omega)$
2	$\delta(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$
3	$\operatorname{sgn} x$	$-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{\omega}$
4	$\dfrac{1}{\|x\|}$	$\dfrac{1}{\|\omega\|}$
5	$\dfrac{1}{\|x\|^{1-a}}$，$0<\mathrm{Re}\,a<1$	$\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\dfrac{\Gamma(a)\cos\dfrac{a}{2}\pi}{\|\omega\|^{a}}$
6	$\dfrac{1}{a^2+x^2}$，$a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{-a\|\omega\|}$
7	$\dfrac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}$，$a>0$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\|\omega\|\mathrm{e}^{-a\|\omega\|}$
8	$\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{a^2+x^2}}$，$a>0$	$\dfrac{1}{\sqrt{\omega}}\mathrm{e}^{-a\omega}$
9	$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2}}$，$a>0$	$\sqrt{2}a\mathrm{e}^{-a^2\omega^2}$
10	$\sin\left(\dfrac{x^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$a>0$	$\sqrt{2a}\sin a\omega^2$
11	$\cos\left(\dfrac{x^2}{4a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$a>0$	$\sqrt{2a}\cos a\omega^2$

编　号	原函数$f(x)$	像函数 $C(\omega)$
12	$\dfrac{\sin\frac{\pi a}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\cos\frac{\pi a}{b}}, 0<a<b$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{b\operatorname{sh} a\omega}{\operatorname{sh} b\omega}$
13	$\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}}{\operatorname{ch}\frac{\pi x}{b}+\cos\frac{\pi a}{b}}, 0<a<b$	$-\mathrm{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{b\operatorname{ch} a\omega}{\operatorname{sh} b\omega}$
14	$\begin{cases}1, & \|x\|<a,\\ 0, & \|x\|>a\end{cases}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{\sin a\omega}{\omega}$
15	$\dfrac{e^{\pi x}}{(1+e^{\pi x})^2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi^3}{2}}\dfrac{\omega}{\operatorname{sh}\omega}$

三　Γ函数的多项式近似

在数值计算中，Γ 函数值可用以下近似公式求得：

1．$\Gamma(x+1)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5+\varepsilon(x)$，

$$0\leqslant x\leqslant 1,\quad |\varepsilon(x)|\leqslant 5\times 10^{-5},$$

其中

$$a_1=-0.5748646,\qquad a_2=0.9512363,$$
$$a_3=-0.6998588,\qquad a_4=0.4245549,$$
$$a_5=-0.1010678.$$

2．$\Gamma(x+1)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8+\varepsilon(x)$，

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad |\varepsilon(x)| \leqslant 3 \times 10^{-7},$$

其中

$$a_1 = -0.577191652, \quad a_2 = 0.988205891,$$

$$a_3 = -0.897056937, \quad a_4 = 0.918206857,$$

$$a_5 = -0.756704078, \quad a_6 = 0.482199394,$$

$$a_7 = -0.193527818, \quad a_8 = 0.035868343.$$

反复应用递推公式 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$，即可由以上结果推出 x 为任意实数时的 $\Gamma(x)$ 值.

四　柱函数的多项式近似

整数阶柱函数有以下近似公式：

1. $$J_0(x) = 1 - 2.2499997t^2 + 1.2656208t^4 - 0.3163866t^6 + 0.0444479t^8 - 0.0039444t^{10} + 0.0002100t^{12} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3}, \quad -3 \leqslant x \leqslant 3, \quad |\varepsilon| < 5 \times 10^{-8}.$$

2. $$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} J_0(x) \ln \frac{x}{2} + 0.36746691 + 0.60559366t^2 - 0.74350384t^4 + 0.25300117t^6 - 0.04261214t^8 + 0.00427916t^{10} - 0.00024846t^{12} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 3, \quad |\varepsilon| < 1.4 \times 10^{-8}.$$

3. $J_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \cos\theta_0, \quad Y_0(x) = x^{-\frac{1}{2}} f_0 \sin\theta_0,$

$$f_0 = 0.79788456 - 0.00000077t^{-1} - 0.00552740t^{-2}$$

$$-0.00009512t^{-3}+0.00137237t^{-4}-0.00072805t^{-5}$$
$$+0.00014476t^{-6}+\varepsilon,$$
$$t=\frac{x}{3},\quad 3\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<1.6\times10^{-8},$$
$$\theta_0=x-0.78539816-0.04166397t^{-1}-0.00003954t^{-2}$$
$$+0.00262573t^{-3}-0.00054125t^{-4}-0.00029333t^{-5}$$
$$+0.00013558t^{-6}+\varepsilon,$$
$$t=\frac{x}{3},\quad 3\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<7\times10^{-8}.$$

4. $x^{-1}J_1(x)=\frac{1}{2}-0.56249985t^2+0.21093573t^4$
$$-0.03954289t^6+0.00443319t^8$$
$$-0.00031761t^{10}+0.00001109t^{12}+\varepsilon,$$
$$t=\frac{x}{3},\ -3\leqslant x\leqslant3,\quad |\varepsilon|<1.3\times10^{-8}.$$

5. $xY_1(x)=\frac{2x}{\pi}J_1(x)\ln\frac{x}{2}-0.6366198$
$$+0.2212091t^2+2.1682709t^4$$
$$-1.3164827t^6+0.3123951t^8$$
$$-0.0400976t^{10}+0.0027873t^{12}+\varepsilon,$$
$$t=\frac{x}{3},\quad 0\leqslant x\leqslant3,\quad |\varepsilon|<1.1\times10^{-7}.$$

6. $J_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}f_1\cos\theta_1,\quad Y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}f_1\sin\theta_1,$
$$f_1=0.79788456+0.00000156t^{-1}+0.01659667t^{-2}$$
$$+0.00017105t^{-3}-0.00249511t^{-4}+0.00113653t^{-5}$$
$$-0.00020033t^{-6}+\varepsilon,$$
$$t=\frac{x}{3},\quad 3\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<4\times10^{-8},$$

$$\theta_1 = x - 2.35619449 + 0.12499612t^{-1} + 0.00005650t^{-2}$$
$$- 0.00637879t^{-3} + 0.00074348t^{-4} + 0.00079824t^{-5}$$
$$- 0.00029166t^{-6} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3}, \quad 3 \leqslant x < \infty, \quad |\varepsilon| < 9 \times 10^{-8}.$$

7. $I_0(x) = 1 + 3.5156229t^2 + 3.0899424t^4$
$$+ 1.2067492t^6 + 0.2659732t^8 + 0.0360768t^{10}$$
$$+ 0.0045813t^{12} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3.75}, \quad -3.75 \leqslant x \leqslant 3.75, \quad |\varepsilon| < 1.6 \times 10^{-7}.$$

8. $x^{\frac{1}{2}} e^{-x} I_0(x) = 0.39894228 + 0.01328592t^{-1}$
$$+ 0.00225319t^{-2} - 0.00157565t^{-3}$$
$$+ 0.00916281t^{-4} - 0.02057706t^{-5}$$
$$+ 0.02635537t^{-6} - 0.01647633t^{-7}$$
$$+ 0.00392377t^{-8} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3.75}, \quad 3.75 \leqslant x < \infty, \quad |\varepsilon| < 1.9 \times 10^{-7}.$$

9. $x^{-1} I_1(x) = \frac{1}{2} + 0.87890594t^2 + 0.51498869t^4$
$$+ 0.15084934t^6 + 0.02658733t^8$$
$$+ 0.00301532t^{10} + 0.00032411t^{12} + \varepsilon,$$

$$t = \frac{x}{3.75}, \quad -3.75 \leqslant x \leqslant 3.75, \quad |\varepsilon| < 8 \times 10^{-9}.$$

10. $x^{\frac{1}{2}} e^{-x} I_1(x) = 0.39894228 - 0.03988024t^{-1}$
$$- 0.00362018t^{-2} + 0.00163801t^{-3}$$
$$- 0.01031555t^{-4} + 0.02282967t^{-5}$$
$$- 0.02895312t^{-6} + 0.01787654t^{-7}$$

$$-0.00420059t^{-8}+\varepsilon,$$

$$t=\frac{x}{3.75},\quad 3.75\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<2.2\times10^{-7}.$$

11. $\mathrm{K}_0(x)=-\mathrm{I}_0(x)\ln\frac{x}{2}-0.57721566$

$$+0.42278420t^2+0.23069756t^4$$
$$+0.03488590t^6+0.00262698t^8$$
$$+0.00010750t^{10}+0.00000740t^{12}+\varepsilon,$$

$$t=\frac{x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad |\varepsilon|<1\times10^{-8}.$$

12. $x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{x}\mathrm{K}_0(x)=1.25331414-0.07832358t^{-1}$

$$+0.02189568t^{-2}-0.01062446t^{-3}$$
$$+0.00587872t^4-0.00251540t^5$$
$$+0.00053208t^6+\varepsilon,$$

$$t=\frac{x}{2},\quad 2\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<1.9\times10^{-7}.$$

13. $x\mathrm{K}_1(x)=x\mathrm{I}_1(x)\ln\frac{x}{2}+1+0.15443144t^2$

$$-0.67278579t^4-0.18156897x^6$$
$$-0.01919402x^8-0.00110404t^{10}$$
$$-0.00004686t^{12}+\varepsilon,$$

$$t=\frac{x}{2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2,\quad |\varepsilon|<8\times10^{-9}.$$

14. $x^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{x}\mathrm{K}_1(x)=1.25331414+0.23498619t^{-1}$

$$-0.03655620t^{-2}+0.01504268t^{-3}$$
$$-0.00780353t^{-4}+0.00325614t^{-5}$$
$$-0.00068245t^{-6}+\varepsilon,$$

$$t=\frac{x}{2},\quad 2\leqslant x<\infty,\quad |\varepsilon|<2.2\times 10^{-7}.$$

对于其它整数阶的柱函数，可应用递推关系化为阶数为0及1的柱函数。