《数学物理方法（下）》第九章《球函数》

1. 证明：

(a)

$$P_{2k}(0) = (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} = (-1)^{k+1}\frac{2}{B(k+1,-1/2)}, \quad P_{2k+1}(0) = 0;$$

(b)

$$P'_{2k}(0) = 0, \quad P'_{2k+1}(0) = (-1)^k \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2} = (-1)^k \frac{2}{B(k+1,1/2)};$$

(c)

$$P'_k(1) = \tfrac{1}{2}k(k+1), \quad P'_k(-1) = \tfrac{(-1)^{k-1}}{2}k(k+1),$$
$$P''_k(1) = \tfrac{1}{8}(k-1)k(k+1)(k+2).$$

2. 利用罗巨格公式证明

$$\int_{-1}^{1}(1+x)^k P_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2^{k+1}(k!)^2}{(k-l)!(k+l+1)!}, \quad k \geq l.$$

若$k < l$时又如何？

3. 从勒让德多项式的生成函数出发，选择证明下列中的两题：

(a)

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x);$$

(b)

$$P_l(-\frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{2l} P_k\left(-\frac{1}{2}\right) P_{2l-k}\left(\frac{1}{2}\right);$$

(c)

$$P_l(\cos 2\theta) = \sum_{k=0}^{2l}(-1)^k P_k\left(\cos\theta\right) P_{2l-k}\left(\cos\theta\right);$$

(d)

$$\int_{-1}^{1} P_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{kl}.$$

4. 计算下列积分，选做两题：

(a)

$$\int_{0}^{1} P_k(x)P_l(x)\mathrm{d}x;$$

(b)

$$\int_{-1}^{1} xP_k(x)P_{k+1}(x)\mathrm{d}x;$$

(c)

$$\int_{-1}^{1} x^2P_k(x)P_{k+2}(x)\mathrm{d}x;$$

(d)

$$\int_{-1}^{1} \left[xP_k(x)\right]^2\mathrm{d}x.$$

5. 将下列函数按勒让德多项式展开，选做一题：

(a)

$$f(x) = x^2;$$

(b)

$$f(x) = |x|;$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0, \\ x, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

(d)

$$f(x)=\sqrt{1-2xt+t^2}.$$

6. 求解下列定解问题：

$$\begin{cases} \nabla^2 u=0, \quad a<r<b, \\ u|_{r=a}=u_0, \quad u|_{r=b}=u_0\cos^2\theta. \end{cases}$$

7. 设有一半径为a的导体半球，球面温度为1°C，底面温度为0°C，求半球内的稳定温度分布。

8. 将下列函数按球谐函数$Y_{lm}(\theta,\varphi)$展开：

(1) $\sin^2\theta\cos^2\varphi$; (2) $(1+3\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi$.