《数学物理方法（下）》第八章《常微分方程本征值问题》习题

1. 将下列方程化为斯图姆－刘维尔型方程的标准形式，任选一题：

(a)

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x+\lambda)y=0;$$

(b)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\cot x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda y=0;$$

(c)

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(a-bx)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\lambda y=0;$$

(d)

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda y=0.$$

2. 证明下列奇异的本征值问题是自伴的，任选一题：

(a)

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0,\\ y(\pm1)\text{有界};\end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases}\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)+\lambda y=0,\\ y(0)\text{有界，}\quad y(1)=0.\end{cases}$$

3. 设有本征值问题：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0,\\ y(b)=\alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a),\\ y'(b)=\alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a),\end{cases}$$

其中$p(a) = p(b)$。试证明，当

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1$$

时，对应不同本征值的本征函数正交。